

Universidade Federal de Uberlândia
FACULDADE DE MATEMÁTICA

Uma Introdução à Análise Funcional e à Equação de Daugavet

Jefferson Henrique Candido
Bacharelado em Matemática

Orientadora: Profa. Dra. Elisa Regina dos Santos

Uberlândia - MG
- 2017 -

Uma Introdução à Análise Funcional e à Equação de Daugavet

Jefferson Henrique Cândido

Monografia apresentada à Faculdade de Matemática, UFU, como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Matemática.

Uberlândia, 20 de Dezembro de 2017.

BANCA:



Prof. Dr. Elisa Regina dos Santos (Orientadora)



Prof. Dr. Fábio José Bertoloto



Prof. Dr. Geraldo Márcio de Azevedo Botelho



Prof. Dr. Fernando Rodrigo Rafaeli

Resumo

Este trabalho tem como objetivo estudar tópicos de Análise Funcional e resultados sobre a equação de Daugavet. Para tanto, iniciaremos pelo estudo de alguns tópicos de Topologia Geral e de Teoria de Medida. Em seguida, realizaremos um estudo em Análise Funcional, onde investigaremos a teoria básica dos operadores lineares contínuos entre espaços normados e espaços de Banach; os teoremas clássicos de Hahn-Banach, Banach-Steinhaus, Aplicação Aberta e Gráfico Fechado. Finalmente, realizaremos um estudo de alguns resultados relevantes sobre a equação de Daugavet.

Sumário

1	Preliminares	2
1.1	Espaços Métricos	2
1.2	Espaços Topológicos	4
1.2.1	Vizinhanças	6
1.2.2	Bases	9
1.2.3	Subespaços	9
1.2.4	Funções Contínuas	11
1.3	Axiomas de Separabilidade e Compacidade	12
1.4	Medida e Integração	13
1.4.1	Espaços Mensuráveis e a Reta Estendida	13
1.4.2	Funções Mensuráveis	15
1.4.3	Medidas	16
1.4.4	Integração	18
2	Espaços Vetoriais Normados	21
2.1	Os Espaços $L_p(X, \Sigma, \mu)$	25
2.2	O Espaço $L_\infty(X, \Sigma, \mu)$	30
2.3	Espaços de Sequências	32
2.4	Conjuntos Compactos em Espaços Vetoriais Normados	36
3	Operadores Lineares Contínuos	39
3.1	Caracterização dos Operadores Lineares Contínuos	39
3.2	O Teorema de Banach-Steinhaus	44
3.3	O Teorema da Aplicação Aberta	45
3.4	O Teorema do Gráfico Fechado	48
4	Teoremas de Hahn-Banach	50
4.1	Lema de Zorn	50
4.2	Teorema da Extensão de Hahn-Banach	50
4.3	Aplicações do Teorema de Hahn-Banach	54
5	Operadores Adjuntos em Espaços Normados	56
6	Propriedade de Daugavet	57
	Referências Bibliográficas	62

Introdução

Em 1963, I. K. Daugavet [5] provou que cada operador linear compacto $T : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$, onde $C[0, 1]$ denota o espaço das funções contínuas no intervalo $[0, 1]$, satisfaz a equação

$$\|Id + T\| = 1 + \|T\|, \quad (\text{DE})$$

que é hoje conhecida como *equação de Daugavet*, onde Id é o operador identidade. Ao longo dos anos, a validade desta equação foi verificada por diferentes autores para várias classes de operadores em diversos espaços de Banach (veja [15, 10, 2, 12]).

Da equação de Daugavet surgiu a definição da propriedade de Daugavet, conforme apresentamos a seguir. Dizemos que um espaço de Banach X tem a *propriedade de Daugavet* se todo operador de posto um $T : X \rightarrow X$ satisfaz (DE). Segundo V. M. Kadets et al. [15], se um espaço de Banach X tem a propriedade de Daugavet, então todo operador fracamente compacto em X satisfaz (DE). Este resultado facilitou a descoberta de novos espaços onde operadores fracamente compactos satisfazem (DE).

Para se fazer o estudo da equação de Daugavet é necessário, antes, ter a noção de certos tópicos preliminares. Logo, faremos um estudo detalhado sobre determinados tópicos de nosso interesse de forma a alcançar nosso objetivo. Para o estudo destes tópicos foram utilizadas as referências [4],[1],[6] e [8].

A seguir descrevemos como este trabalho está organizado.

No Capítulo 1, teremos a noção geral de Espaços Métricos, Espaços Topológicos e Medida e Integração para podermos compreender com mais facilidade as definições e os resultados apresentados ao longo do texto. Após isso, no Capítulo 2, trataremos dos Espaços Vetoriais Normados e mostraremos que os Espaços $L_p(X, \Sigma, \mu)$, $L_\infty(X, \Sigma, \mu)$ e alguns espaços de sequências são completos. Em seguida, no Capítulo 3, desenvolveremos um estudo sobre Operadores Lineares Contínuos e, enunciaremos e demonstraremos três importantes teoremas que são o Teorema de Banach-Steinhaus, o Teorema da Aplicação Aberta e o Teorema do Gráfico Fechado. No Capítulo 4, apresentaremos um dos teoremas mais importantes da Análise Funcional que é o Teorema de Hahn-Banach e algumas de suas aplicações. Logo após, no Capítulo 5, voltaremos a estudar os operadores, porém, estudaremos operadores adjuntos em espaços normados. E finalmente, no Capítulo 6, iremos compreender a Propriedade de Daugavet e alguns resultados que envolvem tal propriedade.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo serão apresentados algumas definições e resultados preliminares sobre espaços métricos, espaços topológicos e, medida e integração.

1.1 Espaços Métricos

Definição 1.1.1. Um **espaço métrico** é um par ordenado (M, d) formado por um conjunto M e uma função $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$, chamada **métrica**, satisfazendo as seguintes condições para quaisquer $x, y, z \in M$:

- a. $d(x, y) \geq 0$;
- b. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
- c. $d(x, y) = d(y, x)$;
- d. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Se E e F são subconjuntos de M , a **distância entre E e F** é definida por

$$\text{dist}(E, F) = \inf \{d(x, y) : x \in E, y \in F\}.$$

Definição 1.1.2. Seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência no espaço métrico (M, d) .

- a. A sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ **converge** para $x \in M$ se $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0$. Neste caso escrevemos $x_n \rightarrow x$.
- b. A sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é dita **convergente** se existe $x \in M$ tal que $x_n \rightarrow x$. Caso contrário é dita **divergente**.
- c. A sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma **sequência de Cauchy** se $\lim_{m, n \rightarrow \infty} d(x_m, x_n) = 0$.
- d. O espaço métrico (M, d) é um **espaço métrico completo** se toda sequência de Cauchy em M convergir para um elemento de M .

Definição 1.1.3. Seja (M, d) um espaço métrico.

- a. Dados $a \in M$ e $\epsilon > 0$, o conjunto $B(a, \epsilon) = \{x \in M : d(x, a) < \epsilon\}$ é chamado de **bola aberta com centro a e raio ϵ** .
- b. Um subconjunto $A \subseteq M$ é **aberto** se para cada $x \in A$ existe $\epsilon > 0$ tal que $B(x, \epsilon) \subseteq A$.

c. Um subconjunto $F \subseteq M$ é **fechado** se seu complementar $F^c := M - F$ é aberto.

Observação 1.1.1. É fácil verificar que a união e a intersecção de dois abertos é aberto, e que a união e a intersecção de dois fechados é fechado. Além disso, a união qualquer de abertos é aberto e a intersecção de fechados é fechado.

Definição 1.1.4. Sejam (M, d) um espaço métrico e $A \subseteq M$.

a. O **interior** de A é o conjunto $\text{int}(A) = \bigcup \{B \subseteq M : B \text{ aberto e } B \subseteq A\}$.

b. O **fecho** de A é o conjunto $\bar{A} = \bigcap \{F \subseteq M : F \text{ fechado e } A \subseteq F\}$.

c. Diz-se que A é **denso** em M se $\bar{A} = M$.

Observação 1.1.2. O conjunto $\text{int}(A)$ é aberto, pois é união de abertos. E $\bar{A}$ é fechado, pois é a intersecção de fechados.

Proposição 1.1.1. Sejam (M, d) um espaço métrico e $A \subseteq M$. Então $x \in \bar{A}$ se, e somente se, $d(x, A) = 0$.

Demonstração.: $(\Rightarrow)$ Para $x \in A$ e para qualquer $\epsilon > 0$, existe $y \in A$ tal que $y \in B(x, \epsilon)$, basta tomar $y = x$. Mostremos que para $x \in (\bar{A} - A)$ e para qualquer $\epsilon > 0$, existe $y \in A$ tal que $y \in B(x, \epsilon)$. Suponha que existem $x \in (\bar{A} - A)$ e $\epsilon > 0$ tais que $B(x, \epsilon) \cap A = \emptyset$. Considere $F = M - B(x, \epsilon)$. Daí, F é fechado. Além disso, $A \subseteq F$ e $x \notin F$. Isso é um absurdo, pois $x \in \bar{A}$. Ou seja, $x \in F$ para todo F fechado contendo A . Portanto, x é ponto aderente a A .

$(\Leftarrow)$ Suponha que $x \notin \bar{A}$, isto é, $x \in M - \bar{A}$. Agora, $M - \bar{A}$ é aberto. Então, existe $\epsilon > 0$ tal que $B(x, \epsilon) \subseteq M - \bar{A}$, ou seja, $B(x, \epsilon) \cap \bar{A} = \emptyset$. Em particular, $B(x, \epsilon) \cap A = \emptyset$. Isso é um absurdo, pois x é ponto aderente a A , ou seja, $d(x, A) = 0$. Portanto, $x \in \bar{A}$. ■

Proposição 1.1.2. Sejam (M, d) um espaço métrico, $x \in M$ e $A, B \subseteq M$. Então:

a. A é aberto se, e somente se, $A = \text{int}(A)$.

b. A é fechado se, e somente se, $A = \bar{A}$.

c. Se $A \subseteq B$, então $\bar{A} \subseteq \bar{B}$.

d. $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

e. $x \in \bar{A}$ se, e somente se, existe uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em A tal que $x_n \rightarrow x$.

f. A é denso em M se, e somente se, para todos $x \in M$ e $\epsilon > 0$, tem-se $A \cap B(x, \epsilon) \neq \emptyset$.

Demonstração.: a.) $(\Rightarrow)$ Por hipótese, A é aberto. Logo, para cada $x \in A$, sempre existe $\epsilon > 0$ tal que $B(x, \epsilon) \subseteq A$. Assim, podemos dizer que

$$A = \bigcup \{B(x, \epsilon) \subseteq M : B(x, \epsilon) \subseteq A\} \subseteq \text{int}(A).$$

Como $\text{int}(A) \subseteq A$ sempre, segue que $A = \text{int}(A)$.

$(\Leftarrow)$ Decorre da Observação 1.1.1.

b.) $(\Rightarrow)$ Por hipótese, A é fechado, ou seja, A^c é aberto. Assim, $A^c = \text{int}(A^c) = \bar{A}^c$, pois

$$\bar{A}^c = \bigcup \{F^c \subseteq M : F \text{ fechado e } A \subseteq F\} = \bigcup \{F^c \subseteq M : F^c \text{ aberto e } F^c \subseteq A^c\} = \text{int}(A^c).$$

Daí, $A = \overline{A}$.

($\Leftarrow$) Decorre da Observação 1.1.1.

c.) Por hipótese, $A \subseteq B$. Então,

$$\{G \subseteq M : G \text{ fechado e } B \subseteq G\} \subseteq \{F \subseteq M : F \text{ fechado e } A \subseteq F\}.$$

Daí,

$$\bigcap \{F \subseteq M : F \text{ fechado e } A \subseteq F\} \subseteq \bigcap \{G \subseteq M : G \text{ fechado e } B \subseteq G\}.$$

Ou seja, $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.

d.) Veja que

$$A \cup B \subseteq \overline{A} \cup \overline{B} \Rightarrow \overline{A \cup B} \subseteq \overline{\overline{A} \cup \overline{B}} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Além disso,

$$A \subseteq A \cup B \Rightarrow \overline{A} \subseteq \overline{A \cup B} \text{ e } B \subseteq A \cup B \Rightarrow \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}.$$

Logo, $\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$.

e.)($\Rightarrow$) Seja $x \in \overline{A}$. Então, para todo $\epsilon > 0$ existe $y \in A$ tais que $d(x, y) < \epsilon$. Tome $\epsilon_n = \frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}$. Assim,

- para ϵ_1 , temos $y_1 \in A$ tal que $d(x, y_1) < \epsilon_1$;
- para ϵ_2 , temos $y_2 \in A$ tal que $d(x, y_2) < \epsilon_2$;

e, fazendo esse processo sucessivamente, para ϵ_n , temos $y_n \in A$ tal que $d(x, y_n) < \epsilon_n$. Logo, $(y_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq A$ e $y_n \rightarrow x$.

($\Leftarrow$) Considere $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq A$ tal que $x_n \rightarrow x$. Logo,

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \mid n \geq N \Rightarrow d(x_n, x) < \epsilon.$$

Logo, x é aderente a A , ou seja, $x \in \overline{A}$.

f.)($\Rightarrow$) Suponha que A é denso em M . Logo, da definição 1.1.4 item c.), temos que $\overline{A} = M$. Tome arbitrariamente $x \in M$. Logo, para $\epsilon > 0$, existe $a \in A$ tal que $d(x, a) < \epsilon$. Portanto, $A \cap B(x, \epsilon) \neq \emptyset$.

($\Leftarrow$) Suponha por absurdo que $\overline{A} \neq M$. Então, $M - \overline{A}$ é um aberto não vazio. Tome $x \in M - \overline{A}$. Existe $\epsilon > 0$ tal que $B(x; \epsilon) \subseteq M - \overline{A}$, isto é, $B(x, \epsilon) \cap \overline{A} = \emptyset$. Mas isto é absurdo, pois por hipótese para todo $x \in M$ e $\epsilon > 0$ tem-se $A \cap B(x, \epsilon) \neq \emptyset$. ■

1.2 Espaços Topológicos

Definição 1.2.1. Uma **topologia** em um conjunto X é uma coleção τ de subconjuntos de X , chamados de **abertos**, satisfazendo as seguintes propriedades:

- Qualquer união de elementos de τ é um elemento de τ .
- Qualquer intersecção finita de elementos de τ pertence a τ .
- X e $\emptyset$ pertencem a τ .

Neste caso, dizemos que (X, τ) é um **espaço topológico**. Um subconjunto F de X é chamado de **conjunto fechado** se seu complementar for aberto, isto é, $F^c := X - F \in \tau$.

Proposição 1.2.1. *Em um espaço topológico valem as seguintes propriedades:*

- a. *Qualquer intersecção de conjuntos fechados é um conjunto fechado.*
- b. *Qualquer união finita de conjuntos fechados é um conjunto fechado.*
- c. *X e $\emptyset$ são conjuntos fechados.*

Demonstração.: a.) Tome $(F_i)_{i \in I}$ fechados. Daí, sabemos que $(F_i^c)_{i \in I}$ são abertos. Então

$$\left(\bigcap_{i \in I} F_i \right)^c = \bigcup_{i \in I} F_i^c \in \tau.$$

Portanto,

$$\bigcap_{i \in I} F_i \text{ é fechado.}$$

b.) Considere $F_i, i = 1, \dots, n$, uma família finita de conjuntos fechados. Então, $F_i^c \in \tau, i = 1, \dots, n$. Daí,

$$\left(\bigcup_{i=1}^n F_i \right)^c = \bigcap_{i=1}^n F_i^c \in \tau.$$

Portanto,

$$\bigcup_{i=1}^n F_i \text{ é fechado.}$$

c.) Observe que $X^c = \emptyset \in \tau$ e $\emptyset^c = X \in \tau$. Portanto, X e $\emptyset$ são fechados. ■

Os conjuntos abertos de um espaço métrico M formam uma topologia em M , chamada de **topologia em M induzida pela métrica**.

Um espaço topológico é dito **metrizável** se existe uma métrica em X que induz sua topologia.

O interior $\text{int}(A)$, o fecho $\overline{A}$ e a densidade do conjunto A em um espaço topológico X são definidos da mesma forma que na Definição 1.1.4. Segue da definição de topologia que $\text{int}(A)$ é aberto e de 1.2.1 que $\overline{A}$ é fechado.

Proposição 1.2.2. *Sejam A e B subconjuntos de um espaço topológico X . Então:*

- a. $\text{int}(A) = (\overline{A^c})^c$ e $\overline{A} = \text{int}(A^c)$.
- b. Se $A \subseteq B$, então $\text{int}(A) \subseteq \text{int}(B)$.
- c. $\text{int}(A \cap B) = \text{int}(A) \cap \text{int}(B)$.

Demonstração.: a.) Queremos mostrar que $\text{int}(A) = X - \overline{X - A}$. Mostremos, de forma equivalente, $(\text{int}(A))^c = \overline{A^c}$. Sabemos que,

$$\text{int}(A) = \bigcup \{F \subseteq X : F \text{ aberto e } F \subseteq A\}.$$

Segue disso que,

$$(\text{int}(A))^c = \bigcap \{F^c \subseteq X : F \text{ aberto e } F \subseteq A\} = \bigcap \{F^c \subseteq X : F^c \text{ fechado e } A^c \subseteq F^c\} = \overline{A^c}.$$

Agora, mostremos que $\overline{A}^c = \text{int}(A^c)$. Seja $A \subseteq X$ um conjunto qualquer. Então $\overline{A}$ é fechado e é claro que $\overline{A}^c$ é aberto, ou seja, $\overline{A}^c = \text{int}(\overline{A}^c)$. Da definição de interior de um conjunto, temos

$$\begin{aligned}
\overline{A}^c = \text{int}(\overline{A}^c) &= \bigcup \{F \subseteq X : F \text{ aberto e } F \subseteq \overline{A}^c\} \\
&= \bigcup \{F \subseteq X : F \text{ aberto e } \overline{A} \subseteq F^c\} \\
&= \bigcup \{F \subseteq X : F \text{ aberto e } A \subseteq F^c\} \\
&= \bigcup \{F \subseteq X : F \text{ aberto e } F \subseteq A^c\} = \text{int}(A^c)
\end{aligned}$$

Assim, concluímos o que queríamos demonstrar.

b.) Por hipótese, $A \subseteq B$. Logo, podemos dizer que,

$$\{F \subseteq X : F \text{ aberto e } F \subseteq A\} \subseteq \{G \subseteq X : G \text{ aberto e } G \subseteq B\}.$$

Assim, temos que

$$\bigcup \{F \subseteq X : F \text{ aberto e } F \subseteq A\} \subseteq \bigcup \{G \subseteq X : G \text{ aberto e } G \subseteq B\}.$$

Portanto, $\text{int}(A) \subseteq \text{int}(B)$.

c.) Queremos mostrar que $\text{int}(A \cap B) = \text{int}(A) \cap \text{int}(B)$. Usando o item a.), temos

$$(\text{int}(A) \cap \text{int}(B))^c = (\text{int}(A))^c \cup (\text{int}(B))^c = \overline{A^c \cup B^c} = \overline{A^c} \cap \overline{B^c} = \overline{(A \cap B)^c} = (\text{int}(A \cap B))^c.$$

Portanto, $\text{int}(A) \cap \text{int}(B) = \text{int}(A \cap B)$. ■

1.2.1 Vizinhanças

Definição 1.2.2. Uma **vizinhança** de um elemento x do espaço topológico X é um subconjunto U de X que contém um aberto V contendo x , isto é, $x \in V \subseteq U$. A coleção U_x de todas as vizinhanças de x é chamada de **sistema de vizinhanças** de x .

Proposição 1.2.3. O sistema de vizinhança U_x de x em um espaço topológico X tem as seguintes propriedades:

- a.** Se $U \in U_x$, então $x \in U$.
- b.** Se $U, V \in U_x$, então $U \cap V \in U_x$.
- c.** Se $U \in U_x$, então existe $V \in U_x$ tal que $U \in U_y$ para cada $y \in V$.
- d.** Se $U \in U_x$ e $U \subseteq V$, então $V \in U_x$.
- e.** $A \subseteq X$ é aberto se, e somente se, A contém uma vizinhança de cada um de seus pontos.
- f.** Sejam $A \subseteq X$ e $x \in X$. Então $x \in \overline{A}$ se, e somente se, toda vizinhança de x intersecciona A .

Demonstração.: **a.)** Se $U \in U_x$, então existe um conjunto aberto V tal que $x \in V \subseteq U$. Logo, $x \in U$.

b.) Se $U, V \in U_x$, então existem abertos Z, W tais que

$$\begin{aligned}
x \in Z \subseteq U \text{ e } x \in W \subseteq V &\Rightarrow x \in Z \cap W \subseteq U \cap V \subseteq U \cap V \\
&\Rightarrow x \in Z \cap W \subseteq U \cap V.
\end{aligned}$$

Logo, $U \cap V \in U_x$.

c.) Se $U \in U_x$, então existe um aberto V tal que $x \in V \subseteq U$. É claro que $x \in V \subseteq V$ e V é aberto, então $V \in U_x$. Assim, para cada $y \in V$, $y \in V \subseteq U$. Logo, $U \in U_y$.

d.) Se $U \in U_x$, então existe um aberto Z tal que

$$x \in Z \subseteq U \subseteq V \Rightarrow x \in Z \subseteq V.$$

Logo, $V \in U_x$.

e.)($\Rightarrow$) Por hipótese, $A \subseteq X$ é aberto e, obviamente, $x \in A \subseteq A$. Logo, A é uma vizinhança para seus pontos. Assim, podemos afirmar que A contém uma vizinhança de cada um de seus pontos.

($\Leftarrow$) Da hipótese, para cada $x \in X$ existe um aberto V tal que $x \in V \subseteq A$. Como V é aberto, temos $x \in V \subseteq \text{int}(A) \subseteq A$. Daí, $A = \bigcup \{x : x \in A\} \subseteq \text{int}(A)$. Logo, $\text{int}(A) = A$. Portanto, A é aberto.

f.)($\Rightarrow$) Seja $x \in \bar{A}$ e seja U uma vizinhança de x . Suponha, por absurdo, que $U \cap A = \emptyset$. Então $U \subseteq A^c$. Como $U \in U_x$ e $U \subseteq A^c$, temos que $A^c \in U_x$, pelo item d.). Assim, existe V aberto tal que $x \in V \subseteq A^c$. Daí,

$$x \in V = \text{int}(V) \subseteq \text{int}(A^c) = \bar{A}^c.$$

Mas isto é absurdo, pois $x \in \bar{A}$.

($\Leftarrow$) Suponha, por absurdo, que $x \notin \bar{A}$, isto é, $x \in \bar{A}^c = \text{int}(A^c)$. Como $\text{int}(A^c)$ é aberto e $x \in \text{int}(A^c)$, existe V aberto tal que $x \in V \subseteq \text{int}(A^c) = \bar{A}^c \subseteq A^c$. Logo, V é uma vizinhança de x e $V \cap A = \emptyset$, o que é uma contradição. ■

Proposição 1.2.4. *Se a cada ponto x de um conjunto X é associada uma coleção não-vazia U_x de subconjuntos de X satisfazendo as condições a.) - d.) da proposição anterior, então a coleção*

$$\tau = \{A \subseteq X : \forall x \in A, \exists U \in U_x \mid x \in U \subseteq A\}$$

é uma topologia para X na qual U_x é o sistema de vizinhança de x , para todo $x \in X$.

Demonstração.: Queremos provar que τ é uma topologia para X .

i. Provemos que qualquer união de elementos de τ é um elemento de τ . Tome $\bigcup_{i \in I} A_i$ tal que cada $A_i \in \tau$. Daí,

$$x \in \bigcup_{i \in I} A_i \Rightarrow x \in A_i \text{ para algum } i \in I.$$

Então, existe $U \in U_x$ tal que

$$x \in U \subseteq A_i \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i.$$

Logo, $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$.

ii. Provemos que qualquer intersecção finita de elementos de τ é um elemento de τ .

Considere $\bigcap_{i=1}^n A_i$ tal que $A_i \in \tau$, para $i = 1, \dots, n$. Daí,

$$x \in \bigcap_{i=1}^n A_i \Rightarrow x \in A_i; i = 1, \dots, n.$$

Então, existe $U_i \in U_x$ tal que $x \in U_i \subseteq A_i$, $i=1, \dots, n$. Assim,

$$x \in \bigcap_{i=1}^n U_i \subseteq \bigcap_{i=1}^n A_i.$$

Então, $\bigcap_{i=1}^n A_i \in \tau$.

- iii. Provemos que X e $\emptyset$ pertencem a topologia. Por vacuidade, $\emptyset \in \tau$. Tome $x \in X$. Daí, para todo $U \in U_x$ temos que $x \in U \subseteq X$. Logo, $X \in \tau$. Portanto, τ é uma topologia para X .

Provemos que cada $U \in U_x$ é uma vizinhança de x . Seja $V = \{y \in U : U \in U_y\}$. Segue de a.), da proposição anterior que $x \in U$, e como $U \in U_x$, vemos que $x \in V$. A seguir, veremos que $V \in \tau$. Dado $y \in V$, temos que $U \in U_y$. Por c.), da proposição anterior, existe $W \in U_y$ tal que $U \in U_z$, para todo $z \in W$. Segue então de a.) que $W \subseteq U$. Como $U \in U_z$ para todo $z \in W$ e $W \subseteq U$, temos $W \subseteq V$. Daí, existe $W \in U_y$ tal que $y \in W \subseteq V$. Assim, $V \in \tau$. Logo, U é uma vizinhança de x . ■

Definição 1.2.3. *Seja X um espaço topológico. Uma **base de vizinhanças** de um elemento x de X é uma subcoleção B_x de U_x tal que cada $U \in U_x$ contém algum $V \in B_x$. Neste caso, U_x está determinado por B_x da seguinte forma:*

$$U_x = \{U \subseteq X : V \subseteq U \text{ para algum } V \in B_x\}.$$

Os elementos de B_x são chamados de **vizinhanças básicas** de x .

Teorema 1.2.1. *Seja X um espaço topológico e, para cada $x \in X$, seja B_x uma base de vizinhanças em x . Então:*

- a. *Se $V \in B_x$, então $x \in V$.*
- b. *Se $V_1, V_2 \in B_x$, então existe $V_3 \in B_x$ tal que $V_3 \subseteq V_1 \cap V_2$.*
- c. *Se $V \in B_x$, então existe $V_0 \in B_x$ tal que se $y \in V_0$, então existe $W \in B_y$ com $W \subseteq V$.*
- d. *$A \subseteq X$ é aberto se, e somente se, A contém uma vizinhança básica de cada um de seus pontos.*

Demonstração.: a.) Se $V \in B_x$, então $V \in U_x$. Logo, $x \in V$.

b.) Se $V_1, V_2 \in B_x \subseteq U_x$, então $V_1 \cap V_2 \in U_x$ e, assim, existe $V_3 \in B_x$ tal que $V_3 \subseteq V_1 \cap V_2$.

c.) Se $V \in B_x \subseteq U_x$, então $V \in U_x$. Assim, pela Proposição 1.2.3., item c.), existe $U \in U_x$ tal que $V \in U_z$ para cada $z \in U$. Já que $U \in U_x$, existe $V_0 \in B_x$ tal que $V_0 \subseteq U$. Agora, seja $y \in V_0$. Como $V_0 \subseteq U$, temos que $y \in U$. Daí, $V \in U_y$. Logo, existe $W \in B_y$ com $W \subseteq V$.

d.)($\Rightarrow$) Se $A \subseteq X$ é aberto, então A contém uma vizinhança de cada um de seus pontos. Assim, para cada $x \in A$ existe $U \in U_x$ tal que $x \in U \subseteq A$. Daí, existe $V \in B_x$ tal que $x \in V \subseteq U \subseteq A$. Logo, A contém a vizinhança básica de cada um de seus elementos.

($\Leftarrow$) Da hipótese, dado $x \in A$, existe $V \in B_x$ tal que $x \in V \subseteq A$. Logo, V é vizinhança de x . Assim, A contém uma vizinhança para cada um de seus pontos. Logo, pelo item e.) da Proposição 1.2.3, $A \subseteq X$ é aberto. ■

1.2.2 Bases

Definição 1.2.4. Uma **base** do espaço topológico (X, τ) é uma subcoleção $\mathcal{B}$ de τ tal que todo conjunto aberto pode ser escrito como união de elementos de $\mathcal{B}$.

Proposição 1.2.5. Uma coleção $\mathcal{B}$ de subconjuntos do espaço topológico X é uma base para X se, e somente se, para todo aberto $A \subseteq X$ e para todo $x \in A$ existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq A$.

Demonstração.:($\Rightarrow$) Seja $A \subseteq X$ um conjunto aberto. Como $\mathcal{B}$ é base para X , então existe $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}$ tal que $A = \bigcup_{B \in \mathcal{C}} B$. Tome $x \in A$. Então existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq A$.

($\Leftarrow$) Seja $\mathcal{B}$ uma coleção de subconjuntos do espaço topológico X tal que para todo conjunto $A \subseteq X$ aberto e $x \in A$, existe $B_x \in \mathcal{B}$ tal que $B_x \subseteq A$. Logo, $A = \bigcup_{x \in A} B_x$. Como isso vale para todo aberto $A \subseteq X$, então $\mathcal{B}$ é base para X . ■

Teorema 1.2.2. Uma coleção $\mathcal{B}$ de abertos do espaço topológico X é uma base para X se, e somente se, $\{B \in \mathcal{B} : x \in B\}$ é uma base de vizinhanças de cada $x \in X$.

Demonstração.:($\Rightarrow$) Considere o sistema de vizinhanças U_x . Tome $U \in U_x$, isto implica que existe um aberto V tal que $x \in V \subseteq U$. Observe que V é aberto, então existe $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}$ tal que $V = \bigcup_{B \in \mathcal{C}} B$. Tome $x \in V$. Assim, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq V \subseteq U$.

Logo, $\{B \in \mathcal{B} : x \in B\}$ é uma base de vizinhanças de cada $x \in X$.

($\Leftarrow$) Considere $A \subseteq X$ aberto. Tome $x \in A$. É claro que A é vizinhança de x . Então, existe $B_0 \in \{B \in \mathcal{B} : x \in B\}$ tal que $x \in B_0 \subseteq A$, ou seja, existe $B_0 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_0 \subseteq A$. Logo, $\mathcal{B}$ é base para X pela Proposição 1.2.5. ■

1.2.3 Subespaços

Definição 1.2.5. Sejam (X, τ) um espaço topológico e $A \subseteq X$. A coleção τ_A dada por $\{B \cap A : B \in \tau\}$ é uma topologia em A , chamada **topologia relativa** ou **topologia em A induzida por τ** . Com esta topologia, dizemos que A é um **subespaço** de X .

De fato, τ_A é uma topologia em A .

i. Vejamos que qualquer união de elementos de τ_A é um elemento de τ_A . Tome $\bigcup_{i \in I} (B_i \cap A)$ tal que cada $B_i \cap A \in \tau_A$. Então,

$$\bigcup_{i \in I} (B_i \cap A) = \bigcup_{i \in I} B_i \cap A \in \tau_A,$$

pois $\bigcup_{i \in I} B_i \in \tau$.

ii. Provemos que qualquer intersecção finita de elementos de τ_A é um elemento de τ_A .

Considere $\bigcap_{i=1}^n (B_i \cap A)$ tal que $B_i \cap A \in \tau$, para $i = 1, \dots, n$. Então,

$$\bigcap_{i=1}^n (B_i \cap A) = \bigcap_{i=1}^n B_i \cap A \in \tau_A,$$

$$\text{pois } \bigcap_{i=1}^n B_i \in \tau.$$

iii. Mostremos que $\emptyset$ e A pertencem a τ_A . Temos que $\emptyset = \emptyset \cap A$ e $A = A \cap X$. Como $\emptyset$ e X são elementos de τ , então $\emptyset \in \tau_A$ e $A \in \tau_A$.

Teorema 1.2.3. *Seja A um subespaço do espaço topológico X . Então:*

- a. $F \subseteq A$ é fechado em A se, e somente se, $F = K \cap A$ para algum K fechado em X .
- b. Se $C \subseteq A$, então o fecho de C em A coincide com $A \cap \overline{C}$.
- c. Se $x \in A$, então $V \subseteq X$ é uma vizinhança de x em A se, e somente se, $V = U \cap A$ para alguma vizinhança U de x em X .
- d. Se $x \in A$ e B_x é uma base de vizinhança para x em X , então $\{B \cap A : B \in B_x\}$ é uma base de vizinhança para x em A .
- e. Se $\mathcal{B}$ é uma base de X , então $\{B \cap A : B \in \mathcal{B}\}$ é base de A .

Demonstração.: a.) $F \subseteq A$ fechado em $A \Leftrightarrow A - F$ é aberto em $A \Leftrightarrow A - F = B \cap A$ para algum B aberto em $X \Leftrightarrow F = K \cap A$ para algum K fechado em X .

b.) Veja que

$$\begin{aligned} \overline{C}^A &= \bigcap \{F \subseteq A : F \text{ fechado e } C \subseteq F\} \\ &= \bigcap \{K \cap A \subseteq A : K \subseteq X \text{ fechado e } C \subseteq K\} = A \cap \overline{C}. \end{aligned}$$

c.) ($\Leftarrow$) Seja U uma vizinhança de x em X . Logo, existe um aberto em W em X tal que $x \in W \subseteq U$. Como $x \in A$, então $x \in W \cap A \subseteq U \cap A$. Como $W \in \tau$, então $W \cap A \in \tau_A$. Segue que $U \cap A = V$ é uma vizinhança de x em A .

($\Rightarrow$) Seja V uma vizinhança de x em A . Logo, existe um aberto W de A tal que $x \in W \subseteq V$. Assim, $W = A \cap W_1$, W_1 aberto em X . Seja $U = W_1 \cup (V - W)$. Logo, $U \cap A = W \cup (V - W) = V$. Como $x \in W_1 \subseteq U$, segue que U é vizinhança de x em X .

d.) Sejam, $x \in A$ e B_x uma base de vizinhança para x em X . Dado V uma vizinhança de x em A , existe U vizinhança de x em X tal que $V = U \cap A$. Como U é vizinhança de x em X , existe $B \in B_x$ tal que $x \in B \subseteq U$. Daí, $x \in B \cap A \subseteq U \cap A = V$. Logo, $\{B \cap A : B \in B_x\}$ é uma base de vizinhança para x em A .

e.) Tome W aberto em A . Segue que $W \in \tau_A$, ou seja, $W = U \cap A$ com $U \in \tau$. Como $U \in \tau$, então

$$U = \bigcup_{B \in \mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}} B.$$

Segue que,

$$W = U \cap A = \left(\bigcup_{B \in \mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}} B \right) \cap A = \bigcup_{B \in \mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}} (B \cap A).$$

Logo, como W é um aberto qualquer em A , podemos afirmar que, $\{B \cap A : B \in \mathcal{B}\}$ é base para A . ■

1.2.4 Funções Contínuas

Definição 1.2.6. Uma função $f : X \rightarrow Y$ entre espaços topológicos é **contínua** se $f^{-1}(A) := \{x \in X : f(x) \in A\}$ é aberto em X para todo aberto A em Y .

Proposição 1.2.6. As seguintes afirmações são equivalentes para uma função $f : X \rightarrow Y$ entre espaços topológicos:

- a. f é contínua.
- b. $f^{-1}(F)$ é fechado em X para todo fechado F em Y .
- c. Para todo $x \in X$ e toda vizinhança U de $f(x)$ em Y existe uma vizinhança V de x em X tal que $f(V) \subseteq U$.
- d. $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ para todo $A \subseteq X$.

Se X e Y são espaços métricos, então estas afirmações também são equivalentes a:

- e. $f(x_n) \rightarrow f(x)$ para toda sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em X tal que $x_n \rightarrow x \in X$.

Demonstração.: a.) $\Rightarrow$ b.) Por hipótese, f é contínua. Então, $f^{-1}(A) \subseteq X$ é aberto para $A \subseteq Y$ aberto. Tome F fechado em Y . Daí, F^c é aberto e

$$f^{-1}(F) = \{x \in X : f(x) \in F\} = \{x \in X : f(x) \notin F^c\} = (f^{-1}(F^c))^c.$$

Logo, $f^{-1}(F)$ é fechado em X .

b.) $\Rightarrow$ a.) Por hipótese, $f^{-1}(F)$ é fechado em X para todo fechado F em Y . Tome A aberto em Y . Daí, $f^{-1}(A) = (f^{-1}(A^c))^c$ e $(f^{-1}(A^c))^c$ é aberto. Logo, para um aberto qualquer A em Y , $f^{-1}(A)$ é aberto em X . Portanto, f é contínua.

a.) $\Rightarrow$ c.) Por hipótese, f é contínua. Logo, para todo aberto A em Y , $f^{-1}(A)$ é aberto em X . Tome $x \in X$ arbitrário. Logo, $f(x) \in Y$. Seja U uma vizinhança qualquer de $f(x)$ em Y . Então existe um aberto $W \subseteq Y$ tal que $f(x) \in W \subseteq U$. Como $W \subseteq Y$ é aberto, $f^{-1}(W)$ é aberto em X . Logo, $V = f^{-1}(W)$ é uma vizinhança de x em X e $f(V) = f(f^{-1}(W)) \subseteq U$.

c.) $\Rightarrow$ a.) Tome A aberto em Y . Mostremos que $f^{-1}(A)$ é aberto. Sabemos que $f^{-1}(A) = \{x \in X : f(x) \in A\}$. Tome $f(x) \in A$. Observe que A é vizinhança de $f(x)$. Logo, da hipótese, existe uma vizinhança V de $x \in f^{-1}(A)$ em X tal que $f(V) \subseteq A$. Segue daí que $x \in V \subseteq f^{-1}(A)$. Assim, mostramos que $f^{-1}(A)$ contém uma vizinhança de cada um de seus pontos. Então, pelo item e.) da Proposição 1.2.3, $f^{-1}(A)$ é aberto. Portanto, f é contínua.

b.) $\Rightarrow$ d.) Por hipótese, $f^{-1}(F)$ é fechado em X para todo F fechado em Y . Queremos mostrar que $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$, para todo $A \subseteq X$. Tome $A \subseteq X$. É claro que $f(A) \subseteq \overline{f(A)}$ e $\overline{f(A)}$ é fechado em Y . Logo, $f^{-1}(\overline{f(A)})$ é fechado em X . Segue disto tudo que, $A \subseteq f^{-1}(\overline{f(A)}) \subseteq f^{-1}(\overline{f(A)})$. Então, $\overline{A} \subseteq f^{-1}(\overline{f(A)})$, ou seja, $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

d.) $\Rightarrow$ b.) Queremos mostrar que $f^{-1}(F)$ é fechado para todo $F \subseteq Y$ fechado. Seja $F \subseteq Y$ fechado. Então

$$f(\overline{f^{-1}(F)}) \subseteq \overline{f(f^{-1}(F))} \subseteq \overline{F} = F.$$

Daí, $\overline{f^{-1}(F)} \subseteq f^{-1}(F)$. Logo, $f^{-1}(F)$ é fechado.

a.) $\Rightarrow$ e.) Nossa hipótese é que f é contínua. Considere uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em X tal que $x_n \rightarrow x \in X$. Como f é contínua, $f^{-1}(B(f(x); \epsilon))$ é aberto para todo $\epsilon > 0$. Observe

que $x \in f^{-1}(B(f(x); \epsilon))$. Então, existe $\delta > 0$ tal que $B(x; \delta) \subseteq f^{-1}(B(f(x); \epsilon))$. Como $x_n \rightarrow x$, então existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N \Rightarrow x_n \in B(x; \delta)$. Daí,

$$f(x_n) \in f(B(x; \delta)) \subseteq f(f^{-1}(B(f(x); \epsilon))) \subseteq B(f(x); \epsilon).$$

Logo, $f(x_n) \rightarrow f(x)$.

e.) $\Rightarrow$ d.) Queremos mostrar que $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ para todo $A \subseteq X$. Seja $y \in f(\overline{A})$. Então, existe $x \in \overline{A}$ tal que $y = f(x)$. Como $x \in \overline{A}$, existe $(x_n) \subseteq A$ tal que $x_n \rightarrow x$. Daí, $f(x_n) \rightarrow f(x)$ e $f(x_n) \in f(A)$. Logo, $y = f(x) \in \overline{f(A)}$. ■

Proposição 1.2.7. a. Se $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$ são funções contínuas entre espaços topológicos, então a função composta $g \circ f : X \rightarrow Z$ é contínua.

b. Se A é um subespaço do espaço topológico X e a função $f : X \rightarrow Y$ é contínua, então a restrição de f a A , $f|_A : A \rightarrow Y$, é contínua.

Demonstração.: a.) Tome $A \subseteq Z$ aberto. Como g é contínua, então $g^{-1}(A)$ é aberto em Y . Sabendo que $g^{-1}(A)$ é aberto em Y e $f : X \rightarrow Y$ é contínua, então $f^{-1}(g^{-1}(A))$ é aberto em X . Observe que $(f^{-1} \circ g^{-1})(A) = (g \circ f)^{-1}(A)$. Logo, $(g \circ f)^{-1}(A)$ é aberto em X para todo $A \subseteq Z$ aberto. Portanto, $g \circ f$ é contínua.

b.) Considere a função $i : A \rightarrow X$ dada por $i(x) = x$. Mostremos que, i é contínua. Tome B aberto em X . Daí,

$$i^{-1}(B) = \{x \in A : i(x) \in B\} = \{x \in A : x \in B\} = A \cap B.$$

Logo, $i^{-1}(B)$ é aberto em A . Observe que $f|_A : A \rightarrow Y$ é $f \circ i$. Como f e i são contínuas, então $f \circ i$ é contínua, ou seja, $f|_A$ é contínua. ■

1.3 Axiomas de Separabilidade e Compacidade

Definição 1.3.1. Dizemos que um espaço topológico K é de **Hausdorff** se dados $x, y \in K$, $x \neq y$, existem abertos disjuntos U e V tais que $x \in U$ e $y \in V$.

Definição 1.3.2. Um espaço topológico é dito **normal** se dados dois fechados A e B disjuntos, existem abertos U e V disjuntos tais que $A \subseteq U$ e $B \subseteq V$.

Definição 1.3.3. Um subconjunto K do espaço topológico X é **compacto** se para toda coleção $(A_i)_{i \in I}$ de abertos em X tal que $K \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$, existem $n \in \mathbb{N}$ e $i_1, \dots, i_n \in I$ tais que $K \subseteq (A_{i_1} \cup \dots \cup A_{i_n})$. Ou seja, se toda cobertura aberta admite subcobertura finita.

Proposição 1.3.1. Sejam X um espaço topológico compacto e $K \subseteq X$ fechado. Então K é compacto.

Demonstração.: Considere uma coleção $(A_i)_{i \in I}$ de abertos em X tal que $K \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$. Considere também $A = X - K$. Como K é fechado, temos que A é aberto. Agora, observe que $X \subseteq A \cup \bigcup_{i \in I} A_i$. Já que X é compacto, existem $i_1, \dots, i_n \in I$ tais que $X \subseteq A \cup A_{i_1} \cup \dots \cup A_{i_n}$. Daí, $K \subseteq A \cup A_{i_1} \cup \dots \cup A_{i_n}$. Logo, K é compacto. ■

Mostraremos a seguir que todo espaço de Hausdorff compacto é normal.

Proposição 1.3.2. *Se K é Hausdorff compacto, então K é normal.*

Demonstração.: 1) Sejam $x \in K$ e $A \subseteq K$ fechado com $x \notin A$. Como K é compacto temos A compacto. Como K é Hausdorff, dado $a \in A$, existem U_a e V_a abertos disjuntos tais que $x \in U_a$ e $a \in V_a$. Observe que $\{V_a : a \in A\}$ é cobertura aberta de A . Já que A é compacto, existem $a_1, \dots, a_n$ tais que

$$A \subseteq \bigcup_{j=1}^n V_{a_j}.$$

Sejam

$$U = \bigcap_{j=1}^n U_{a_j} \quad e \quad V = \bigcup_{j=1}^n V_{a_j}.$$

Então, U e V são abertos disjuntos, $x \in U$ e $A \subseteq V$.

2) Sejam $A, B \subseteq K$ fechados disjuntos. Seja $b \in B$. Por (1), existem U_b e V_b abertos disjuntos tais que $b \in U_b$ e $A \subseteq V_b$. Observe que $\{U_b : b \in B\}$ é cobertura aberta de B . Agora, B é fechado e, portanto, compacto. Então existem $b_1, \dots, b_k$ tais que

$$B \subseteq \bigcup_{j=1}^k U_{b_j}.$$

Seja,

$$V = \bigcap_{j=1}^k V_{b_j} \quad e \quad U = \bigcup_{j=1}^k U_{b_j}.$$

Então U e V são abertos disjuntos, $A \subseteq V$ e $B \subseteq U$. ■

Proposição 1.3.3. *(Lema de Urysohn): Um espaço topológico K é normal se, e somente se, dados A e B fechados disjuntos em K , existe $f : K \rightarrow [0, 1]$ contínua tal que $f(A) \subseteq \{0\}$ e $f(B) \subseteq \{1\}$.*

Demonstração.: Veja [[8], Theorem 33.1].

1.4 Medida e Integração

1.4.1 Espaços Mensuráveis e a Reta Estendida

Definição 1.4.1. *Uma σ -álgebra no conjunto X é uma família Σ de subconjuntos de X que satisfaz as seguintes propriedades:*

- a. $\emptyset, X \in \Sigma$.
- b. Se $A \in \Sigma$, então $A^c := X - A \in \Sigma$.
- c. Se $A_n \in \Sigma$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \Sigma$.

Neste caso, o par (X, Σ) é chamado de **espaço mensurável**. Cada elemento da σ -álgebra é chamado de **conjunto mensurável**.

Dada uma coleção $\mathcal{F}$ de subconjuntos de X , a intersecção de todas as σ -álgebras que contém $\mathcal{F}$ é ainda uma σ -álgebra, chamada de **σ -álgebra gerada por $\mathcal{F}$** e denotada por $\Sigma(\mathcal{F})$. Note que $\Sigma(\mathcal{F})$ é a menor σ -álgebra em X que contém $\mathcal{F}$.

Quando (X, τ) é um espaço topológico, a σ -álgebra $\Sigma(\tau)$ é chamada de **σ -álgebra de Borel** de X e denotado por $B = B(X)$. Os elementos de B são chamados de **conjuntos de Borel** ou **bolérianos**.

Definição 1.4.2. A **reta estendida** é o conjunto

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$$

também denotado por $[-\infty, \infty]$, onde ∞ e $-\infty$ são símbolos que têm as propriedades que intuitivamente deles esperamos, isto é:

$$-\infty < x < \infty, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Operamos aritmeticamente com os símbolos ∞ e $-\infty$ da seguinte forma: para $a \in \mathbb{R}$,

- $a + \infty = \infty + a = \infty$, $a - \infty = -\infty + a = -\infty$, $\infty + \infty = \infty$ e $-\infty + (-\infty) = -\infty$.
- $a \cdot \infty = \infty \cdot a = \begin{cases} \infty, & a > 0 \\ -\infty, & a < 0 \end{cases}$ e $a \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot a = \begin{cases} -\infty, & a > 0 \\ \infty, & a < 0 \end{cases}$.
- $\infty \cdot \infty = (-\infty) \cdot (-\infty) = \infty$ e $\infty \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot \infty = -\infty$.
- $0 \cdot \infty = 0 \cdot (-\infty) = \infty \cdot 0 = (-\infty) \cdot 0 = 0$.

Observe que, por não haver opção coerente, as adições $\infty + (-\infty)$ e $(-\infty) + \infty$ não estão definidas. As seguintes notações são usuais:

$$[-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\} \cup \{-\infty\} \text{ e } (a, \infty] = \{x \in \mathbb{R} : x > a\} \cup \{\infty\}$$

Definição 1.4.3. A topologia usual de $\mathbb{R}$ induz uma topologia em $\overline{\mathbb{R}}$ considerando como abertos os subconjuntos $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ da forma:

- a. $A \subseteq \mathbb{R}$ é aberto em $\mathbb{R}$, ou
- b. $A = [-\infty, a)$ para algum $a \in \mathbb{R}$, ou
- c. $A = (a, \infty]$ para algum $a \in \mathbb{R}$, ou
- d. A é a união de conjuntos como os de (a), (b) ou (c).

Consideraremos $\overline{\mathbb{R}}$ como espaço mensurável com a σ -álgebra de Borel $B(\overline{\mathbb{R}})$ relativa a esta topologia.

1.4.2 Funções Mensuráveis

Definição 1.4.4. *Seja (X, Σ) um espaço mensurável. Uma função $f : (X, \Sigma) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ é **mensurável** se $f^{-1}(A) \in \Sigma$ para todo boleaniano $A \in B(\overline{\mathbb{R}})$. O conjunto formado por tais funções será denotado por $M(X, \Sigma)$. Consideraremos ainda o subconjunto*

$$M^+(X, \Sigma) := \{f \in M(X, \Sigma) : 0 \leq f(x), \forall x \in X\}.$$

Proposição 1.4.1. *Uma função $f : (X, \Sigma) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ é mensurável se, e somente se, os conjuntos $\{x \in X : f(x) = -\infty\}$ e $\{x \in X : f(x) = \infty\}$ pertencem a Σ e é mensurável a função*

$$f_0 : (X, \Sigma) \rightarrow \mathbb{R}, f_0(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } f(x) \in \mathbb{R} \\ 0, & \text{se } f(x) = -\infty \text{ ou } f(x) = \infty \end{cases}.$$

Demonstração.: [[14], Lemma 2.8].

Proposição 1.4.2. *Se $f, g : (X, \Sigma) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ são funções mensuráveis e $\lambda \in \mathbb{R}$, então também são mensuráveis as seguintes funções (desde que bem definidas): λf , $f + g$, $f \cdot g$, $|f|$, $\max\{f, g\}$ e $\min\{f, g\}$.*

Demonstração.: Segue de [[14], Lemma 2.6] e da proposição anterior.

Proposição 1.4.3. *Dada uma sequência $(f_n)_{n=1}^\infty$ em $M(X, \Sigma)$, as seguintes funções definidas em (X, Σ) são mensuráveis:*

$$f(x) = \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n(x), \quad F(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x), \quad f^*(x) = \liminf_n f_n(x) \text{ e } F^*(x) = \limsup_n f_n(x).$$

Em particular, se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x); \forall x \in X,$$

então $f \in M(X, \Sigma)$.

Demonstração.: [[14], Lemma 2.9 e Corollary 2.10].

Exemplo 1.4.1. *Dados um espaço mensurável (X, Σ) e $A \subseteq X$, a **função característica** de A é definida por*

$$\chi_A : X \rightarrow \mathbb{R}; \quad \chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A \\ 0, & \text{se } x \notin A \end{cases}.$$

É claro que χ_A é mensurável se, e somente se, $A \in \Sigma$. Uma combinação linear de funções características mensuráveis é chamada de **função simples mensurável**. Assim, uma função simples mensurável assume apenas um número finito de valores. Toda função simples mensurável ϕ admite uma única representação da forma

$$\phi = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i},$$

onde $n \in \mathbb{N}$, $a_1, a_2, \dots, a_n$ são números reais não nulos e distintos, e $A_1, \dots, A_n$ são conjuntos mensuráveis não vazios e disjuntos dois a dois. Esta é a **representação canônica** da função simples mensurável ϕ .

1.4.3 Medidas

Definição 1.4.5. Uma **medida** no espaço mensurável (X, Σ) é uma função $\mu : \Sigma \rightarrow [0, +\infty]$ que satisfaz as seguintes condições:

a. $\mu(\emptyset) = 0$.

b. Se $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de conjuntos disjuntos dois a dois de Σ , então

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

A medida μ é dita **finita** se $\mu(X) < \infty$, e é dita **σ -finita** se existir uma sequência de conjuntos $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ em Σ tais que

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \text{ e } \mu(A_n) < \infty, \forall n.$$

O terno (X, Σ, μ) é chamado de **espaço de medida**.

Proposição 1.4.4. Seja (X, Σ, μ) um espaço de medida. Então:

a. Se $A, B \in \Sigma$ e $A \subseteq B$, então $\mu(A) \leq \mu(B)$.

b. Se $A, B \in \Sigma$, $A \subseteq B$ e $\mu(A) < \infty$, então $\mu(B - A) = \mu(B) - \mu(A)$.

c. Se $A_n \in \Sigma$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$, então

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_n \mu(A_n).$$

d. Se $A_n \in \Sigma$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$ e $\mu(A_1) < \infty$, então

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_n \mu(A_n).$$

e. Se $A_n \in \Sigma$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Demonstração.: a.) Observe que $A, B \in \Sigma$, então $\mu(A) \geq 0$ e $\mu(B) \geq 0$. Além disso, $B = A \cup (B - A)$ e $A \cap (B - A) = \emptyset$. Segue que, $\mu(A \cup (B - A)) = \mu(A) + \mu(B - A)$. Logo, $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B - A)$. Como $\mu(B - A) \geq 0$, então $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B - A) \geq \mu(A)$. Portanto, $\mu(B) \geq \mu(A)$.

b.) Da demonstração do item anterior, sabemos que $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B - A)$. Como, por hipótese, $\mu(A) < \infty$, então $\mu(B - A) = \mu(B) - \mu(A)$.

c.) Defina o conjunto $E_n = A_n - A_{n-1}$ para $n > 1$ e tome $E_1 = A_1$. Observe que $E_n \in \Sigma$ e que os E_n 's são disjuntos dois a dois. Segue que

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$

Entretanto,

$$A_n = \bigcup_{m=1}^n E_m.$$

Daí,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{m=1}^n E_m \right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n.$$

Isto implica que

$$\begin{aligned} \mu \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) &= \mu \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m \mu(E_n) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} (\mu(E_1) + \mu(E_2) + \dots + \mu(E_m)) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \mu \left(\bigcup_{n=1}^m E_n \right) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \mu(A_m). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\mu \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n).$$

d.) Seja $F_n = A_1 - A_n$ com $n \in \mathbb{N}$. É fácil ver que, $F_1 \subseteq F_2 \subseteq \dots$. Daí, pelos itens anteriores,

$$\mu \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \right) = \lim \mu(F_n) = \lim \mu(A_1) - \lim \mu(A_n).$$

Observe que

$$\mu \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \right) = \mu \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_1 - A_n) \right) = \mu \left(A_1 - \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \mu(A_1) - \mu \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \right).$$

Daí,

$$\mu(A_1) - \mu \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \lim \mu(A_1) - \lim \mu(A_n) \Rightarrow \mu \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \lim \mu(A_n).$$

e.) Considere $E_n = (A_n - (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{n-1}))$. Suponha $n > k$, então

$$\begin{aligned} E_n &= (A_n - (A_1 \cup \dots \cup A_k \cup \dots \cup A_{n-1})) \subseteq A_n \\ E_k &= (A_k - (A_1 \cup \dots \cup A_{k-1})) \subseteq A_k \subseteq A_1 \cup \dots \cup A_k \cup \dots \cup A_{n-1}. \end{aligned}$$

Daí, $E_k \cap E_n = \emptyset$. Segue então que,

$$\mu \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) = \mu \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

■

Teorema 1.4.1. *As seguintes afirmações são equivalentes para uma sequência $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ de funções mensuráveis no espaço de medida (X, Σ, μ) :*

- a. $(f_n)_{n=1}^\infty$ converge em medida, isto é, existe uma função mensurável $f \in M(X, \Sigma)$ tal que

$$\lim_n \mu(\{x \in X : |f_n(x) - f| \geq \epsilon\}) = 0; \forall \epsilon > 0.$$

- b. $(f_n)_{n=1}^\infty$ é de Cauchy em medida, isto é,

$$\lim_{m,n} \mu(\{x \in X : |f_n(x) - f_m(x)| \geq \epsilon\}) = 0; \forall \epsilon > 0.$$

Demonstração.: [[13], Proposição 3.20 e Corolário 3.6].

Definição 1.4.6. Sejam (X, Σ, μ) um espaço de medida, $f, g, f_n : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, n \in \mathbb{N}$. Diz-se que:

- a. f é **igual** g μ -**quase sempre** se existe $A \in \Sigma$ tal que $\mu(A) = 0$ e $f(x) = g(x)$ para todo $x \in A^c$. Neste caso escreve-se $f = g$ μ -quase sempre ou $f = g$ μ -q.s.
- b. $(f_n)_{n=1}^\infty$ **converge para** f μ -quase sempre se existe $A \in \Sigma$ tal que $\mu(A) = 0$ e $f_n(x) \rightarrow f(x)$ para todo $x \in A^c$. Neste caso escreve-se $f_n \rightarrow f$ μ -quase sempre ou $f_n \rightarrow f$ μ -q.s. ou $f = \lim_n f_n$ μ -q.s.

Proposição 1.4.5. Se a sequência $(f_n)_{n=1}^\infty$ de funções mensuráveis no espaço de medida (X, Σ, μ) converge em medida para a função mensurável $f \in M(X, \Sigma)$, então existe uma subsequência $(f_{n_j})_{j=1}^\infty$ que converge μ -q.s. para f .

Demonstração.: [[13], Corolário 3.5].

1.4.4 Integração

Definição 1.4.7. Seja (X, Σ, μ) um espaço de medida.

- a. A **integral** da função simples $\phi \in M^+(X, \Sigma)$, cuja representação canônica é

$$\phi = \sum_{n=1}^m a_n \chi_{A_n},$$

em relação à medida μ é definida por

$$\int_X \phi d\mu = \sum_{j=1}^m a_j \mu(A_j).$$

- b. A **integral** da função $f \in M^+(X, \Sigma)$ em relação à medida μ é definida por

$$\int_X f d\mu = \sup \left\{ \int_X \phi d\mu : \phi \in M^+(X, \Sigma) \text{ é simples e } 0 \leq \phi \leq f \right\}.$$

- c. Para $f \in M^+(X, \Sigma)$ e $A \in \Sigma$, define-se

$$\int_A f d\mu = \int_X f \chi_A d\mu.$$

Proposição 1.4.6. Sejam $f, g \in M^+(X, \Sigma)$ e $A, B \in \Sigma$.

a. Se $f \leq g$, então

$$\int_X f \, d\mu \leq \int_X g \, d\mu.$$

b. Se $A \subseteq B$, então

$$\int_A f \, d\mu \leq \int_B f \, d\mu.$$

c. $\int_X f \, d\mu = 0$ se, e somente se, $f = 0$ μ -q.s.

Demonstração.: [[14], Lemma 4.5].

Teorema 1.4.2. (Teorema da Convergência Monótona) Seja $(f_n)_{n=1}^\infty$ uma sequência em $M^+(X, \Sigma)$ tal que $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \dots$, para todo $x \in X$.

a. Se $f_n(x) \rightarrow f(x)$ para todo $x \in X$, então $f \in M^+(X, \Sigma)$ e

$$\int_X f \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

b. Se $f_n(x) \rightarrow f(x)$ μ -q.s. e $f \in M^+(X, \Sigma)$, então

$$\int_X f \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

Demonstração.: [[14], Monotone Convergence Theorem 4.6].

Teorema 1.4.3. (Lema de Fatou) Se $(f_n)_{n=1}^\infty$ é uma sequência em $M^+(X, \Sigma)$, então

$$\int_X \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n \, d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

Demonstração.: [[14], Fatou's Lemma 4.8].

Teorema 1.4.4. (Teorema de Radon-Nikodým) Sejam (X, Σ, μ) e (X, Σ, λ) medidas σ -finitas tais que $\lambda(A) = 0$ sempre que $A \in \Sigma$ e $\mu(A) = 0$. Então existe $f \in M^+(X, \Sigma)$ tal que

$$\lambda(A) = \int_A f \, d\mu; \forall A \in \Sigma.$$

Demonstração.: [[14], Radon-Nikodým Theorem 8.9].

Definição 1.4.8. a. Dada uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, as funções $f^+, f^- : X \rightarrow [0, \infty)$ são definidas por

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\} \text{ e } f^-(x) = -\min\{f(x), 0\}.$$

É fácil ver que f é mensurável se, e somente se, f^+ e f^- são mensuráveis.

b. Seja (X, Σ, μ) um espaço de medida. Uma função $f \in M(X, \Sigma)$ é dita **Lebesgue-integrável** (ou **integrável**) se

$$\int_X f^+ \, d\mu < \infty \text{ e } \int_X f^- \, d\mu < \infty.$$

Neste caso, definimos

$$\int_X f \, d\mu = \int_X f^+ \, d\mu - \int_X f^- \, d\mu.$$

Proposição 1.4.7. a. *Uma função mensurável $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável se, e somente se, $|f|$ é integrável. Neste caso, tem-se*

$$\left| \int_X f \, d\mu \right| \leq \int_X |f| \, d\mu.$$

b. *Sejam $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ integráveis e $a \in \mathbb{R}$. Então af e $f + g$ são integráveis e*

$$\int_X af \, d\mu = a \cdot \int_X f \, d\mu \text{ e } \int_X (f + g) \, d\mu = \int_X f \, d\mu + \int_X g \, d\mu.$$

Demonstração.: [[14], Theorem 5.3 e Theorem 5.5].

Definição 1.4.9. *Seja (X, Σ, μ) um espaço de medida. Uma função $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ é **Lebesgue-integrável** (ou **integrável**) se as funções $f_1, f_2 : X \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f_1(x) = \operatorname{Re}(f(x))$ e $f_2(x) = \operatorname{Im}(f(x))$ são integráveis. Neste caso definimos*

$$\int_X f \, d\mu = \int_X f_1 \, d\mu + i \cdot \int_X f_2 \, d\mu.$$

O conjunto de todas as funções integráveis $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ é denotado por $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(X, \Sigma, \mu)$.

Teorema 1.4.5. *(Teorema da Convergência Dominada) Seja $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de funções em $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(X, \Sigma, \mu)$ que converge μ -q.s. para uma função $f : X \rightarrow \mathbb{K}$. Se existe $g \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(X, \Sigma, \mu)$ tal que $|f_n| \leq |g|$, para todo n , então $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(X, \Sigma, \mu)$ e*

$$\int_X f \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

Demonstração.:[[14], Lebesgue Dominated Convergence Theorem 5.6].

Capítulo 2

Espaços Vetoriais Normados

Denotaremos por $\mathbb{K}$ os corpos $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Definição 2.0.1. *Seja E um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Uma função $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}$ é uma **norma** se satisfaz as seguintes propriedades:*

N1) $\|x\| \geq 0$ para todo $x \in E$ e $\|x\| = 0$ se, e somente se, $x = 0$.

N2) $\|ax\| = |a|\|x\|$ para todo $x \in E$ e para todo $a \in \mathbb{K}$.

N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para todo $x, y \in E$.

Um espaço vetorial munido de uma norma é chamado **espaço vetorial normado** ou **espaço normado**. Um espaço normado é um espaço métrico com a métrica dada por

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Neste caso dizemos que a métrica d é induzida pela norma $\|\cdot\|$. Um espaço vetorial normado E é chamado de **espaço de Banach** quando for um espaço métrico completo com a métrica induzida pela norma.

Proposição 2.0.1. *Sejam E um espaço de Banach e F um subespaço vetorial de E . Então F é um espaço de Banach com a norma induzida de E se, e somente se, F é fechado em E .*

Demonstração.:($\Rightarrow$) Suponha F Banach e tome $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência em F tal que $x_n \rightarrow x \in E$. Então $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy em F , e, portanto convergente, pois F é completo por hipótese. Existe então $y \in F$ tal que $x_n \rightarrow y$. Da unicidade do limite temos $x = y \in F$, provando que F é fechado em E .

($\Leftarrow$) Suponha F fechado em E e seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy em F . Logo, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy em E , e portanto existe $x \in E$ tal que $x_n \rightarrow x$. Como F é fechado resulta que $x \in F$, o que prova que F é completo. ■

Exemplo 2.0.1. *Seja X um conjunto não vazio. Uma função $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ é **limitada** se sua imagem for um subconjunto limitado de $\mathbb{K}$, ou seja, se existe $M \geq 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in X$. O conjunto $\mathcal{B}(X)$ de todas as funções limitadas $f : X \rightarrow \mathbb{K}$, que é um espaço vetorial com as operações usuais de funções, torna-se um espaço de Banach com a norma*

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

Verifiquemos que $\|f\|_{\infty}$ é uma norma.

N1) Verifiquemos que $\|f\|_\infty \geq 0$ e $\|f\|_\infty = 0$ se, e somente se, $f(x) = 0$ para todo $x \in X$. De fato,

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)| \geq 0 \text{ e } \|f\|_\infty = 0 \Leftrightarrow \sup_{x \in X} |f(x)| = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0, \forall x \in X.$$

N2) Verifiquemos que $\|af(x)\|_\infty = |a|\|f(x)\|_\infty$, onde $a \in \mathbb{K}$. De fato,

$$\|af(x)\|_\infty = \sup_{x \in X} |a \cdot f(x)| = \sup_{x \in X} |a| \cdot |f(x)| = |a| \cdot \sup_{x \in X} |f(x)| = |a| \cdot \|f\|_\infty.$$

N3) Verifiquemos que $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$. De fato,

$$\begin{aligned} \|f + g\|_\infty &= \sup_{x \in X} |f(x) + g(x)| \leq \sup_{x \in X} (|f(x)| + |g(x)|) \\ &\leq \sup_{x \in X} |f(x)| + \sup_{x \in X} |g(x)| \\ &= \|f\|_\infty + \|g\|_\infty. \end{aligned}$$

Logo, como todas as condições foram satisfeitas, temos que $\|\cdot\|_\infty$ é uma norma em $\mathcal{B}(X)$.

Agora, verifiquemos a completude. Tomemos uma sequência $(f_n)_{n=1}^\infty$ de Cauchy em $\mathcal{B}(X)$. Da definição, temos que para todo $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todos $m, n \geq n_0$ tem-se $\|f_m - f_n\|_\infty < \epsilon$. Assim,

$$m, n \geq n_0 \Rightarrow \sup_{x \in X} |f_m(x) - f_n(x)| < \epsilon \Rightarrow |f_m(x) - f_n(x)| < \epsilon, \forall x \in X.$$

Daí, concluímos que $(f_n(x))_{n=1}^\infty$ será de Cauchy em $\mathbb{K}$ para todo $x \in X$. Como $\mathbb{K}$ é completo, $(f_n(x))_{n=1}^\infty$ é convergente. Defina $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ da seguinte forma:

$$f(x) = \lim_n f_n(x).$$

Logo, o que nos falta mostrar é que $f \in \mathcal{B}(X)$.

Como (f_n) é de Cauchy, existe M tal que $\|f_n\|_\infty \leq M$ para todo n . Daí, $|f_n(x)| \leq M$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e para todo $x \in X$. Assim, $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in X$. Logo, $f \in \mathcal{B}(X)$. Portanto, $\mathcal{B}(X)$ é completo.

Exemplo 2.0.2. O conjunto $\mathcal{C}[a, b]$ de todas as funções contínuas de $[a, b]$ em $\mathbb{K}$ é um subespaço vetorial do espaço de Banach $\mathcal{B}[a, b]$, e portanto é um espaço normado com a norma

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in [a, b]\} = \max\{|f(x)| : x \in [a, b]\}.$$

Mais ainda, $\mathcal{C}[a, b]$ é um espaço de Banach. Mostremos que $\mathcal{C}[a, b]$ é um subespaço fechado de $\mathcal{B}[a, b]$. Tomemos uma sequência $(f_n)_{n=1}^\infty \subseteq \mathcal{C}[a, b]$ tal que $f_n \rightarrow f \in \mathcal{B}[a, b]$. Mostremos que f é contínua. Da definição, para todo $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq n_0 \Rightarrow \|f_n - f\|_\infty < \epsilon \Rightarrow \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| < \epsilon \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon, \forall x.$$

A partir disso, temos que (f_n) converge uniformemente para f . Como (f_n) é contínua e (f_n) converge uniformemente para f , segue de [[3], Proposição 14, pg.132] que f é contínua. Portanto, $\mathcal{C}[a, b]$ é fechado. Assim, pela Proposição 2.0.1, $\mathcal{C}[a, b]$ é Banach.

Exemplo 2.0.3. Por c_0 denotamos o conjunto de todas as seqüências de escalares que convergem para zero, ou seja, fixado $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$,

$$c_0 = \{(a_k)_{k=1}^\infty : a_k \in \mathbb{K} \text{ para todo } k \in \mathbb{N} \text{ e } a_k \rightarrow 0\}.$$

É claro que c_0 é um espaço vetorial com as operações usuais de seqüências (operações coordenada a coordenada). É fácil comprovar que a expressão

$$\|(a_k)_{k=1}^\infty\|_\infty = \sup\{|a_k| : k \in \mathbb{N}\}$$

torna c_0 um espaço normado. Seja $(x_n)_{n=1}^\infty$ uma seqüência de Cauchy em c_0 . Digamos que $x_n = (a_n^k)_{k=1}^\infty$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Para cada $j \in \mathbb{N}$, a desigualdade

$$|a_n^j - a_m^j| \leq \sup\{|a_n^k - a_m^k| : k \in \mathbb{N}\} = \|x_n - x_m\|_\infty$$

deixa claro que a seqüência de escalares $(a_n^j)_{n=1}^\infty$ é de Cauchy em $\mathbb{K}$, logo convergente. Digamos $a_n^j \rightarrow a_j$ quando $n \rightarrow \infty$ para cada $j \in \mathbb{N}$. Chamando $x = (a_j)_{j=1}^\infty$ não é difícil checar que $x \in c_0$ e que $x_n \rightarrow x$ em c_0 . Concluimos então que c_0 é um espaço de Banach.

Chame agora de c_{00} o subespaço de c_0 formado pelas seqüências eventualmente nulas, isto é,

$$c_{00} = \{(a_k)_{k=1}^\infty \in c_0 : \text{existe } k_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } a_k = 0 \text{ para todo } k \geq k_0\}.$$

Considere os seguintes vetores de c_{00} :

$$x_1 = (1, 0, 0, \dots), x_2 = \left(1, \frac{1}{2}, 0, 0, \dots\right), \dots, x_n = \left(1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, 0, 0, \dots\right), \dots$$

É claro que $(x_n)_{n=1}^\infty$ é uma seqüência em c_{00} . Tomando $x = \left(\frac{1}{k}\right)_{k=1}^\infty \in c_0$, de $\|x_n - x\|_\infty = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$, concluimos que $x_n \rightarrow x$ em c_0 . Como $x \notin c_{00}$, resulta que c_{00} é um subespaço não-fechado de c_0 . Da Proposição 2.0.1 resulta que c_{00} é um espaço normado incompleto.

Lema 2.0.1. Seja $B = \{x_1, \dots, x_n\}$ um conjunto de vetores linearmente independentes de um espaço normado E . Então existe uma constante $c > 0$, que depende de B , tal que

$$\|a_1x_1 + \dots + a_nx_n\| \geq c(|a_1| + \dots + |a_n|), \forall a_k \in \mathbb{K}; k = 1, \dots, n$$

Demonstração.: É de nosso conhecimento que $\|(a_1, \dots, a_n)\|_1 = |a_1| + \dots + |a_n|$ é uma norma em E . Dado $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$, mostremos que a correspondência

$$\|(a_1, \dots, a_n)\| = \left\| \sum_{j=1}^n a_j x_j \right\|_E \in \mathbb{R}$$

também é uma norma em $\mathbb{K}^n$.

N1) Verifiquemos que $\|(a_1, \dots, a_n)\| \geq 0$ e $\|(a_1, \dots, a_n)\| = 0$ se, e só se, $(a_1, \dots, a_n) = (0, \dots, 0)$.

$$\text{Seja } (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n. \text{ Então } \|(a_1, \dots, a_n)\| = \left\| \sum_{j=1}^n a_j x_j \right\|_E \geq 0 \text{ e}$$

$$\begin{aligned} \|(a_1, \dots, a_n)\| = \left\| \sum_{j=1}^n a_j x_j \right\|_E = 0 &\Leftrightarrow \sum_{j=1}^n a_j x_j = 0 \Leftrightarrow a_j = 0, j = 1, \dots, n \\ &\Leftrightarrow (a_1, \dots, a_n) = (0, \dots, 0). \end{aligned}$$

N2) Mostremos que $\|\alpha(a_1, \dots, a_n)\| = |\alpha| \cdot \|(a_1, \dots, a_n)\|$. Sejam $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ e $\alpha \in \mathbb{K}$, então

$$\|\alpha(a_1, \dots, a_n)\| = \left\| \alpha \cdot \sum_{j=1}^n a_j x_j \right\|_E = |\alpha| \cdot \left\| \sum_{j=1}^n a_j x_j \right\|_E = |\alpha| \cdot \|(a_1, \dots, a_n)\|.$$

N3) Mostremos que $\|(a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n)\| \leq \|(a_1, \dots, a_n)\| + \|(b_1, \dots, b_n)\|$. Sejam $(a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{K}^n$. Então

$$\begin{aligned} \|(a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n)\| &= \|(a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)\| = \left\| \sum_{j=1}^n (a_j + b_j) x_j \right\|_E \\ &= \left\| \sum_{j=1}^n a_j x_j + \sum_{j=1}^n b_j x_j \right\|_E \\ &\leq \left\| \sum_{j=1}^n a_j x_j \right\|_E + \left\| \sum_{j=1}^n b_j x_j \right\|_E \\ &= \|(a_1, \dots, a_n)\| + \|(b_1, \dots, b_n)\| \end{aligned}$$

Logo, $\|(a_1, \dots, a_n)\| = \left\| \sum_{j=1}^n a_j x_j \right\|_E \in \mathbb{R}$ é uma norma em $\mathbb{K}^n$. Como $\mathbb{K}^n$ é um espaço normado de dimensão finita, segue de [11], Proposição 1.1.3, pg. 3] que todas as normas em $\mathbb{K}^n$ são equivalentes. Logo, existe uma constante $c > 0$ tal que

$$\|(a_1, \dots, a_n)\| = \left\| \sum_{j=1}^n a_j x_j \right\|_E \geq c \cdot \|(a_1, \dots, a_n)\|_1,$$

ou seja, $\left\| \sum_{j=1}^n a_j x_j \right\|_E \geq c(|a_1| + \dots + |a_n|)$. ■

Teorema 2.0.1. *Todo espaço normado de dimensão finita é um espaço de Banach. Consequentemente, todo subespaço de dimensão finita de um espaço normado E é fechado em E .*

Demonstração.: Sejam E um espaço normado de dimensão n e $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ uma base normalizada de E . Dada uma sequência de Cauchy $(x_k)_{k=1}^\infty$ em E , para cada $k \in \mathbb{N}$ existem $a_1^k, \dots, a_n^k$ escalares únicos tais que $x_k = a_1^k \beta_1 + \dots + a_n^k \beta_n$. Dado $\epsilon > 0$, podemos tomar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_k - x_m\| < c \cdot \epsilon$ sempre que $k, m \geq n_0$, onde c é a constante do lema anterior para o conjunto linearmente independente $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$. Segue que

$$\sum_{j=1}^n |a_j^k - a_j^m| \leq \frac{1}{c} \left\| \sum_{j=1}^n (a_j^k - a_j^m) \beta_j \right\| = \frac{1}{c} \|x_k - x_m\| < \epsilon, \forall k, m \geq n_0.$$

Segue que, para cada $j = 1, \dots, n$, a sequência de escalares $(a_j^k)_{k=1}^\infty$ é de Cauchy, portanto convergente. Digamos que

$$b_j = \lim_k a_j^k, \quad j = 1, \dots, n.$$

Nesse caso, temos

$$\lim_k \sum_{j=1}^n |a_j^k - b_j| = 0.$$

Definindo $x = b_1\beta_1 + \dots + b_n\beta_n$, temos $x \in E$ e

$$\lim_k \|x_k - x\| = \lim_k \left\| \sum_{j=1}^n (a_j^k - b_j)\beta_j \right\| \leq \lim_k \sum_{j=1}^n |a_j^k - b_j| = 0.$$

Portanto, x_n converge para x . Logo, E é espaço de Banach. ■

2.1 Os Espaços $L_p(X, \Sigma, \mu)$

Sejam (X, Σ, μ) um espaço de medida e $1 \leq p < \infty$. O conjunto de todas as funções mensuráveis de X em $\mathbb{K}$ tais que

$$\|f\|_p := \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

será denotado por $\mathcal{L}_p(X, \Sigma, \mu)$.

Teorema 2.1.1. (*Desigualdade de Hölder para integrais*).: Sejam $p, q > 1$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ e (X, Σ, μ) um espaço de medida. Se $f \in \mathcal{L}_p(X, \Sigma, \mu)$ e $g \in \mathcal{L}_q(X, \Sigma, \mu)$, então $f.g \in \mathcal{L}_1(X, \Sigma, \mu)$ e

$$\|f.g\|_1 \leq \|f\|_p . \|g\|_q.$$

Demonstração.: Consideremos, primeiramente, o caso $\|f\|_p = 0$ e $\|g\|_q < \infty$. Assim,

$$\|f\|_p = 0 \Leftrightarrow \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = 0 \Leftrightarrow \left(\int_X |f|^p d\mu \right) = 0.$$

Logo, $|f|^p = 0$ μ -q.s. Ou seja, $f = 0$ μ -q.s. Assim, temos que $f.g = 0$ μ -q.s. Segue que

$$\|f.g\|_1 = \int_X |f.g| d\mu = 0,$$

logo, $f.g \in \mathcal{L}_1(X, \Sigma, \mu)$, e temos que $\|f.g\|_1 = 0 \leq 0 = \|f\|_p . \|g\|_q$. Analogamente, tem-se a mesma conclusão para $\|g\|_q = 0$ e $\|f\|_p < \infty$ e o caso $\|f\|_p = \|g\|_q = 0$ é trivial.

Suponha então que $\|f\|_p \neq 0 \neq \|g\|_q$. Primeiro é conveniente mostrar que para quaisquer $a, b > 0$, temos

$$a^{\frac{1}{p}} . b^{\frac{1}{q}} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}.$$

Para tanto, considere, para cada $0 < \alpha < 1$ a função $f = f_\alpha : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}; f(t) = t^\alpha - \alpha t$. Note que f tem um máximo em $t = 1$. Daí, temos que $t^\alpha - \alpha t \leq 1 - \alpha$ para todo $t > 0$, isto é, $t^\alpha \leq \alpha t + (1 - \alpha)$, para todo $t > 0$. Tome $t = \frac{a}{b}$ e $\alpha = \frac{1}{p}$. Tem-se que

$$\left(\frac{a}{b} \right)^\alpha \leq \alpha \left(\frac{a}{b} \right) + 1 - \alpha \Rightarrow a^\alpha . b^{1-\alpha} \leq a\alpha + b(1 - \alpha).$$

Note que $1 - \alpha = \frac{1}{q}$. Daí,

$$a^{\frac{1}{p}} . b^{\frac{1}{q}} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}. \tag{2.1}$$

É claro que a desigualdade 2.1 é válida para $a = 0$ ou $b = 0$. Tomando

$$a = \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} \text{ e } b = \frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q}$$

na desigualdade 2.1, temos

$$\begin{aligned} a^{\frac{1}{p}} \cdot b^{\frac{1}{q}} &\leq \frac{1}{p} \cdot a + \frac{1}{q} \cdot b \Rightarrow \frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \cdot \frac{|g(x)|}{\|g\|_q} \leq \frac{1}{p} \left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \right)^p + \frac{1}{q} \left(\frac{|g(x)|}{\|g\|_q} \right)^q \\ &\Rightarrow \frac{|f(x) \cdot g(x)|}{\|f\|_p \cdot \|g\|_q} \leq \frac{1}{p} \left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \right)^p + \frac{1}{q} \left(\frac{|g(x)|}{\|g\|_q} \right)^q. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Aplicando a integral, temos

i.

$$\int_X \frac{|f(x) \cdot g(x)|}{\|f\|_p \cdot \|g\|_q} d\mu = \frac{1}{\|f\|_p \cdot \|g\|_q} \cdot \int_X |f(x) \cdot g(x)| d\mu;$$

ii.

$$\int_X \frac{1}{p} \cdot \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} d\mu = \frac{1}{p \cdot \|f\|_p^p} \cdot \int_X |f(x)|^p d\mu = \frac{1}{p \cdot \|f\|_p^p} \cdot \|f\|_p^p = \frac{1}{p};$$

iii.

$$\int_X \frac{1}{q} \cdot \frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q} d\mu = \frac{1}{q \cdot \|g\|_q^q} \cdot \int_X |g(x)|^q d\mu = \frac{1}{q \cdot \|g\|_q^q} \cdot \|g\|_q^q = \frac{1}{q}.$$

Retornando em (2.2), concluímos que

$$\frac{1}{\|f\|_p \cdot \|g\|_q} \cdot \int_X |f(x) \cdot g(x)| d\mu \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

o que implica $\int_X |f(x) \cdot g(x)| d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q$. Da hipótese, temos $\|f\|_p < \infty$ e $\|g\|_q < \infty$, pois $f \in \mathcal{L}_p(X, \Sigma, \mu)$ e $g \in \mathcal{L}_q(X, \Sigma, \mu)$. Então, segue que

$$\int_X |f \cdot g| d\mu = \|f\|_p \|g\|_q < \infty.$$

Portanto, $f \cdot g \in \mathcal{L}_1(X, \Sigma, \mu)$ e $\|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$. ■

Teorema 2.1.2. (*Desigualdade de Minkowski para integrais*).: Sejam $1 \leq p < \infty$ e (X, Σ, μ) um espaço de medida. Se $f, g \in \mathcal{L}_p(X, \Sigma, \mu)$, então $f + g \in \mathcal{L}_p(X, \Sigma, \mu)$ e

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Demonstração.: Se $p=1$ ou $\|f + g\| = 0$, o resultado é direto. Suponhamos que $\|f + g\|_p \neq 0$ e $p > 1$. Vejamos que para todo $x \in X$,

$$|f(x) + g(x)|^p \leq 2^p (|f(x)|^p + |g(x)|^p). \quad (2.3)$$

De fato,

$$\begin{aligned} |f(x) + g(x)|^p &\leq (|f(x)| + |g(x)|)^p \\ &\leq (\max\{|f(x)|, |g(x)|\} + \max\{|f(x)|, |g(x)|\})^p \\ &= (2 \cdot \max\{|f(x)|, |g(x)|\})^p \\ &\leq 2^p \cdot (|f(x)|^p + |g(x)|^p). \end{aligned}$$

Aplicando a integral em (2.3), temos

$$\int_X |f(x) + g(x)|^p d\mu \leq \int_X 2^p \cdot (|f(x)|^p + |g(x)|^p) d\mu = 2^p \cdot \int_X |f(x)|^p d\mu + 2^p \cdot \int_X |g(x)|^p d\mu < \infty.$$

Daí,

$$\int_X |f(x) + g(x)|^p d\mu < \infty \Rightarrow \left(\int_X |f(x) + g(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \Rightarrow f + g \in \mathcal{L}_p(X, \Sigma, \mu).$$

Agora, mostremos a veracidade da relação $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$. Veja que

$$\begin{aligned} |f(x) + g(x)|^p &= |f(x) + g(x)| \cdot |f(x) + g(x)|^{p-1} \\ &\leq |f(x) + g(x)|^{p-1} \cdot (|f(x)| + |g(x)|) \\ &= |f(x)| \cdot |f(x) + g(x)|^{p-1} + |g(x)| \cdot |f(x) + g(x)|^{p-1}, \forall x \in X. \end{aligned}$$

Logo,

$$|f(x) + g(x)|^p \leq |f(x)| \cdot |f(x) + g(x)|^{p-1} + |g(x)| \cdot |f(x) + g(x)|^{p-1}. \quad (2.4)$$

Tomando $q > 1$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, temos que $p - 1 = \frac{p}{q}$. Então,

$$\left(\int_X (|f + g|^{p-1})^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int_X |f + g|^{(p-1) \cdot q} d\mu \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int_X |f + g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{q}} < \infty.$$

Portanto, $|f + g|^{\frac{p}{q}} = |f + g|^{p-1} \in \mathcal{L}_q(X, \Sigma, \mu)$. Da desigualdade de Holder, temos

$$\int_X |f| \cdot |f + g|^{p-1} d\mu \leq \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_X |f + g|^{(p-1) \cdot q} d\mu \right)^{\frac{1}{q}}; \quad (2.5)$$

$$\int_X |g| \cdot |f + g|^{p-1} d\mu \leq \left(\int_X |g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_X |f + g|^{(p-1) \cdot q} d\mu \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (2.6)$$

Aplicando a integral em (2.4) e usando (2.5) e (2.6), temos

$$\int_X |f + g|^p d\mu \leq \left(\int_X |f + g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left[\left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X |g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \right]. \quad (2.7)$$

Dividindo (2.7) por

$$\left(\int_X |f + g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{q}},$$

temos

$$\begin{aligned} \frac{\int_X |f + g|^p d\mu}{\left(\int_X |f + g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{q}}} &\leq \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X |g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \\ \Rightarrow \left(\int_X |f + g|^p d\mu \right)^{1 - \frac{1}{q}} &\leq \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X |g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Desta forma,

$$\left(\int_X |f + g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X |g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \Rightarrow \|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

■

Note que a norma $\|\cdot\|_p$ não é, em geral, uma norma em $\mathcal{L}_p(X, \Sigma, \mu)$, pois pode acontecer $\|f\|_p = 0$ para f não identicamente nula. De modo geral, se (X, Σ, μ) é um espaço de medida, introduzimos uma relação de equivalência dizendo que duas funções $f, g : X \rightarrow \mathbb{K}$ são equivalentes se $f = g$ μ -q.s., isto é, se existe um conjunto $A \in \Sigma$ tal que $\mu(A) = 0$ e $f(x) = g(x)$, para todo $x \notin A$. Denotando a classe de equivalência de uma função f por $[f]$, mostremos que no conjunto quociente

$$L_p(X, \Sigma, \mu) = \{[f] : f \in \mathcal{L}_p(X, \Sigma, \mu)\},$$

as operações $[f] + [g] = [f + g]$ e $c[f] = [cf]$ estão bem definidas. Consideremos as classes de equivalência $[f]$ e $[g]$. Assim,

- $h \in [f] + [g] \Leftrightarrow h = i + j$, onde $i = f \ \forall x \notin A$ e $j = g \ \forall x \notin B$
 $\Leftrightarrow h(x) = i(x) + j(x), \ \forall x \notin A \cup B$ e $\mu(A) = \mu(B) = 0$
 $\Leftrightarrow h(x) = i(x) + j(x), \ \forall x \notin A \cup B$ e $\mu(A \cup B) = 0$
 $\Leftrightarrow h \in [f + g]$.

Portanto, $[f] + [g] = [f + g]$. E para $c \in \mathbb{K}$,

- $h \in [cf] \Leftrightarrow h(x) = (cf)(x), \ \forall x \notin A$ e $\mu(A) = 0$
 $\Leftrightarrow h(x) = cf(x), \ \forall x \notin A$ e $\mu(A) = 0$
 $\Leftrightarrow h \in c[f]$.

Portanto, $[cf] = c[f]$. Concluí-se que as operações estão bem definidas e tornam $L_p(X, \Sigma, \mu)$ um espaço vetorial. Vamos definir, $\|[f]\|_p := \|f\|_p$ e verifiquemos que está bem definido. Tome $g \in [f]$. Logo, $f = g$ μ -q.s, isto implica que $|f| = |g|$ μ -q.s. Então, temos $|f|^p = |g|^p$ μ -q.s, isto é, $|f|^p - |g|^p = 0$ μ -q.s. Logo,

$$\begin{aligned} \int_X (|f|^p - |g|^p) d\mu = 0 &\Rightarrow \int_X |f|^p d\mu - \int_X |g|^p d\mu = 0 \\ &\Rightarrow \int_X |f|^p d\mu = \int_X |g|^p d\mu \\ &\Rightarrow \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_X |g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\Rightarrow \|f\|_p = \|g\|_p. \end{aligned}$$

Portanto, $\|[f]\|_p := \|f\|_p$ está bem definida. Agora, mostremos que $\|\cdot\|_p$ é uma norma em $L_p(X, \Sigma, \mu)$. De fato, temos:

$$\text{N1) } \|[f]\|_p = \|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \geq 0 \text{ e } \|f\|_p = 0 \Leftrightarrow \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = 0 \Leftrightarrow \left(\int_X |f|^p d\mu \right) = 0 \Leftrightarrow f = 0 \ \mu\text{-q.s.}$$

$$\text{N2) } \|[cf]\|_p = \left(\int_X |cf|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_X |c|^p |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = |c| \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = |c| \cdot \|f\|_p.$$

$$\text{N3) } \|[f] + [g]\|_p = \|f + g\|_p = \|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p = \|[f]\|_p + \|[g]\|_p.$$

Logo, $(L_p(X, \Sigma, \mu), \|\cdot\|_p)$ é um espaço vetorial normado. Mostremos agora que $L_p(X, \Sigma, \mu)$ é um espaço de Banach. Devemos ter em mente que os vetores de $L_p(X, \Sigma, \mu)$ são classes de equivalência, porém geralmente as classes de equivalências são omitidas e escrevemos f no lugar de $[f]$.

Teorema 2.1.3. Se $1 \leq p < \infty$, então $L_p(X, \Sigma, \mu)$ é um espaço de Banach com a norma

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Demonstração. Já sabemos que $L_p(X, \Sigma, \mu)$ é um espaço normado. Provemos que o mesmo é completo. Para isso, seja $(f_n)_{n=1}^\infty$ uma sequência de Cauchy em $L_p(X, \Sigma, \mu)$. Então, dado $\epsilon > 0$ existe $M = M(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int_X |f_n - f_m|^p d\mu = \|f_n - f_m\|_p^p < \epsilon^p$$

sempre que $m, n \geq M$. Como a sequência $(f_n)_{n=1}^\infty$ é uma sequência de Cauchy, podemos obter uma subsequência $(g_k)_{k=1}^\infty$ de $(f_n)_{n=1}^\infty$ tal que $\|g_{k+1} - g_k\|_p < 2^{-k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Considere a função

$$g : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}, \quad g(x) = |g_1(x)| + \sum_{k=1}^\infty |g_{k+1}(x) - g_k(x)|. \quad (2.8)$$

Sabemos que g é mensurável e não negativa. Além disso,

$$|g(x)|^p = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(|g_1(x)| + \sum_{k=1}^n |g_{k+1}(x) - g_k(x)| \right)^p.$$

Daí, pelo Lema de Fatou,

$$\begin{aligned} \int_X |g|^p d\mu &= \int_X \lim_{n \rightarrow \infty} \left(|g_1| + \sum_{k=1}^n |g_{k+1} - g_k| \right)^p \\ &= \int_X \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(|g_1| + \sum_{k=1}^n |g_{k+1} - g_k| \right)^p \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X \left(|g_1| + \sum_{k=1}^n |g_{k+1} - g_k| \right)^p d\mu. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\int_X |g|^p d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X \left(|g_1| + \sum_{k=1}^n |g_{k+1} - g_k| \right)^p d\mu.$$

Elevando ambos os membros a $\frac{1}{p}$ e usando a desigualdade de Minkowski, obtemos

$$\begin{aligned} \left(\int_X |g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\int_X \left(|g_1| + \sum_{k=1}^n |g_{k+1} - g_k| \right)^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \left\| |g_1| + \sum_{k=1}^n |g_{k+1} - g_k| \right\|_p \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\|g_1\|_p + \sum_{k=1}^n \|g_{k+1} - g_k\|_p \right) \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|g_1\|_p + \sum_{k=1}^n 2^{-k} = \|g_1\|_p + 1. \end{aligned}$$

Então, definindo $A = \{x \in X : g(x) < \infty\}$, pelo visto acima podemos concluir que $\mu(X - A) = 0$. Logo, a série em (2.8) converge exceto talvez no conjunto de medida nula $X - A$, isto é, a série converge μ -quase sempre. Segue que a função $g \cdot \chi_A \in \mathcal{L}_p(X, \Sigma, \mu)$, onde χ_A é a função característica de A . Defina então $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ por

$$f(x) = \begin{cases} g_1(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (g_{k+1}(x) - g_k(x)) & , \text{ se } x \in A \\ 0 & , \text{ se } x \notin A. \end{cases}$$

Como $g_k = g_1 + (g_2 - g_1) + (g_3 - g_2) + \dots + (g_k - g_{k-1})$, temos

$$|g_k(x)| \leq |g_1(x)| + \sum_{j=1}^{k-1} |g_{j+1}(x) - g_j(x)| \leq g(x)$$

para todo x e $g_k(x) \rightarrow f(x)$ para todo $x \in A$, isto é, a sequência $(g_k)_{k=1}^{\infty}$ converge para f μ -quase sempre. Pelo Teorema da Convergência Dominada, segue que $f \in \mathcal{L}_p(X, \Sigma, \mu)$. Como

$$\begin{aligned} |f - g_k|^p &\leq (|f| + |g_k|)^p \leq (2g)^p \cdot \chi_A \quad \mu - q.s. \text{ e} \\ \lim_{k \rightarrow \infty} |f - g_k|^p &= 0 \quad \mu - q.s., \end{aligned}$$

novamente pelo Teorema da Convergência Dominada temos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_X |f - g_k|^p d\mu = \int_X 0 d\mu = 0.$$

Daí, concluímos que $g_k \rightarrow f$ em $\mathcal{L}_p(X, \Sigma, \mu)$, e portanto, $[g_k] \rightarrow [f]$ em $L_p(X, \Sigma, \mu)$. Assim, $([f_n])_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy que tem uma subsequência $([g_k])_{k=1}^{\infty}$ que converge para $[f]$. Segue imediatamente que $[f_n] \rightarrow [f]$ em $L_p(X, \Sigma, \mu)$. ■

2.2 O Espaço $L_{\infty}(X, \Sigma, \mu)$

Seja $\mathcal{L}_{\infty}(X, \Sigma, \mu)$ o conjunto de todas as funções mensuráveis que são limitadas μ -quase sempre, isto é, existem um conjunto $N \in \Sigma$ e um número real k tais que $\mu(N) = 0$ e $|f(x)| \leq k$ para todo $x \notin N$. Se $f \in \mathcal{L}_{\infty}(X, \Sigma, \mu)$ e $N \in \Sigma$ é um conjunto de medida nula, definimos

$$\begin{aligned} S_f(N) &= \sup\{|f(x)| : x \notin N\}, \\ \|f\|_{\infty} &= \inf\{S_f(N) : N \in \Sigma \text{ e } \mu(N) = 0\}. \end{aligned}$$

Note que, novamente, pode acontecer $\|f\|_{\infty} = 0$ com f não identicamente nula. Logo, recorremos a classe de equivalência. Novamente, dizemos que duas funções são equivalentes (ou pertencem à mesma classe de equivalência) se coincidem μ -quase sempre. O conjunto $L_{\infty}(X, \Sigma, \mu)$ é o conjunto de todas as classes de funções das funções mensuráveis $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ que são limitadas μ -quase sempre. Temos que $L_{\infty}(X, \Sigma, \mu)$ é um espaço vetorial. Se $[f] \in L_{\infty}(X, \Sigma, \mu)$, definimos

$$\|[f]\|_{\infty} = \|f\|_{\infty}.$$

Mostremos que $\|[f]\|_{\infty}$ está bem definido. Tome $h \in [f]$. Logo, $f(x) = h(x)$ para todo $x \notin N$ e $\mu(N) = 0$. Então,

$$S_f(N) = \sup\{|f(x)| : x \notin N\} = \sup\{|h(x)| : x \notin N\} = S_h(N).$$

Daí,

$$\begin{aligned}\|f\|_\infty &= \inf\{S_f(N) : N \in \Sigma \text{ e } \mu(N) = 0\} \\ &= \inf\{S_h(N) : N \in \Sigma \text{ e } \mu(N) = 0\} = \|h\|_\infty.\end{aligned}$$

Portanto, $\|[f]\|_\infty = \|f\|_\infty$ está bem definido. Agora, verifiquemos que $\|\cdot\|_\infty$ é uma norma.

N1) Veja que $S_f(N) = \sup\{|f(x)| : x \notin N\} \geq 0$. Logo,

$$\|f\|_\infty = \inf\{S_f(N) : N \in \Sigma \text{ e } \mu(N) = 0\} \geq 0.$$

Além disso, $S_f(N) = 0 \Leftrightarrow \sup\{|f(x)| : x \notin N\} = 0 \Leftrightarrow f = 0$ para todo $x \notin N$. Daí,

$$\|f\|_\infty = 0 \Leftrightarrow \inf\{S_f(N) : N \in \Sigma \text{ e } \mu(N) = 0\} = 0 \Leftrightarrow S_f(N) = 0 \Leftrightarrow f = 0 \text{ } \mu\text{-q.s.}$$

N2) Veja que para $a \in \mathbb{K}$, $S_{af}(N) = \sup\{|a \cdot f(x)| : x \notin N\} = \sup\{|a| \cdot |f(x)| : x \notin N\} = |a| \cdot \sup\{|f(x)| : x \notin N\} = |a| \cdot S_f(N)$. Daí,

$$\begin{aligned}\|af\|_\infty &= \inf\{S_{af}(N) : N \in \Sigma \text{ e } \mu(N) = 0\} \\ &= \inf\{|a| \cdot S_f(N) : N \in \Sigma \text{ e } \mu(N) = 0\} \\ &= |a| \cdot \inf\{S_f(N) : N \in \Sigma \text{ e } \mu(N) = 0\} \\ &= |a| \cdot \|f\|_\infty.\end{aligned}$$

N3) Veja que $S_{f+g}(N) = \sup\{|f(x) + g(x)| : x \notin N\} \leq \sup\{|f(x)| + |g(x)| : x \notin N\} \leq \sup\{|f(x)| : x \notin N\} + \sup\{|g(x)| : x \notin N\} = S_f(N) + S_g(N)$. Observe que se $N_1, N_2 \in \Sigma$ e $\mu(N_1) = \mu(N_2) = 0$ temos $N = N_1 \cup N_2 \in \Sigma$ e $\mu(N) = 0$ e

$$S_f(N) + S_g(N) = \sup_{x \notin N} |f(x)| + \sup_{x \notin N} |g(x)| \leq \sup_{x \notin N_1} |f(x)| + \sup_{x \notin N_2} |g(x)| = S_f(N_1) + S_g(N_2).$$

Disso, segue que

$$\begin{aligned}\|f + g\|_\infty &= \inf\{S_{f+g}(N) : N \in \Sigma \text{ e } \mu(N) = 0\} \\ &\leq \inf\{S_f(N) + S_g(N) : N \in \Sigma \text{ e } \mu(N) = 0\} \\ &\leq \inf\{S_f(N_1) + S_g(N_2) : N_1, N_2 \in \Sigma \text{ e } \mu(N_1) = \mu(N_2) = 0\} \\ &= \inf\{S_f(N_1) : N_1 \in \Sigma \text{ e } \mu(N_1) = 0\} + \inf\{S_g(N_2) : N_2 \in \Sigma \text{ e } \mu(N_2) = 0\} \\ &\leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.\end{aligned}$$

Logo, $\|f\|_\infty$ é uma norma.

Vejamos que se $[f] \in L_\infty(X, \Sigma, \mu)$, então

$$|f(x)| \leq \|f\|_\infty \text{ } \mu\text{-q.s.} \quad (2.9)$$

Com efeito, tome $\epsilon_n = \frac{1}{n}$ onde $n \in \mathbb{N}$. Como $\|f\|_\infty = \inf\{S_f(N) : N \in \Sigma \text{ e } \mu(N) = 0\}$, existe $N_n \in \Sigma$ e $\mu(N_n) = 0$ tal que $\|f\|_\infty \leq S_f(N_n) < \|f\|_\infty + \epsilon_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Portanto, existe uma sequência $(N_n)_{n=1}^\infty$ de conjuntos de medida nula tais que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_f(N_n) = \|f\|_\infty \text{ e } |f(x)| \leq S_f(N_n), \forall x \notin N_n.$$

Logo, tomando $N = \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n$ resulta que N tem medida nula. De fato, $N_n \in \Sigma$ e $\mu(N_n) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo,

$$\mu(N) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} N_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(N_n) = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0 \Rightarrow \mu(N) = 0.$$

Além disso, $|f(x)| \leq S_f(N_n)$, para todo $x \notin N$. Logo, fazendo $n \rightarrow \infty$, temos $|f(x)| \leq \|f\|_{\infty}$ μ -q.s.

Teorema 2.2.1. $L_{\infty}(X, \Sigma, \mu)$ é um espaço de Banach.

Demonstração.: Sabendo que $L_{\infty}(X, \Sigma, \mu)$ é um espaço vetorial normado, mostremos que ele é completo. Para isso, seja $([f_n])_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy em $L_{\infty}(X, \Sigma, \mu)$. Por 2.9, para cada par $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ existe $M_{n,m} \in \Sigma$ com $\mu(M_{n,m}) = 0$ e

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_{\infty}, \forall x \notin M_{n,m}.$$

Seja $M = \bigcup_{m,n=1}^{\infty} M_{n,m}$. Então, $\mu(M) = 0$ e para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$,

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_{\infty}, \forall x \notin M. \quad (2.10)$$

Então, para cada $x \notin M$, a sequência $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy em $\mathbb{K}$, portanto convergente. Seja $g_n = f_n \cdot \chi_M$. Podemos então definir

$$f : X \rightarrow \mathbb{K}, \quad f(x) = \lim g_n.$$

É claro que g_n é mensurável para cada $n \in \mathbb{N}$. Segue da Proposição 1.4.3 que f é mensurável. Por (2.10) e como $([f_n])_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy, dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sup_{x \notin M} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \epsilon$ sempre que $m, n \geq n_0$. Fazendo $m \rightarrow \infty$ resulta que

$$\sup_{x \notin M} |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon, \forall n \geq n_0. \quad (2.11)$$

Assim, $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ é uniformemente convergente para f em $X - M$. De (2.11) resulta que $f_n - f \in \mathcal{L}_{\infty}(X, \Sigma, \mu)$ para n suficientemente grande. Daí, como $f = f_n - (f_n - f)$, segue que $[f] \in L_{\infty}(X, \Sigma, \mu)$. Assim, podemos reescrever (2.11), concluindo que

$$\|[f_n] - [f]\|_{\infty} = \|f_n - f\|_{\infty} \leq \sup_{x \notin M} |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$$

sempre que $n \geq n_0$. Portanto, $([f_n])_{n=1}^{\infty}$ converge para $[f]$ em $L_{\infty}(X, \Sigma, \mu)$. ■

2.3 Espaços de Sequências

Para cada número real $p \geq 1$, definimos

$$\ell_p = \left\{ (\xi_j)_{j=1}^{\infty} : \xi_j \in \mathbb{K}, \forall j \in \mathbb{N} \text{ e } \sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p < \infty \right\}.$$

Nosso objetivo aqui é ver que ℓ_p é um espaço de Banach com a norma $\|(\xi_j)_{j=1}^{\infty}\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}$.

Para isso, serão necessários alguns resultados.

Teorema 2.3.1. (*Desigualdade de Hölder para somas*): Sejam $1 < p, q < \infty$, com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ e sejam $(\xi_1, \dots, \xi_n), (\eta_1, \dots, \eta_n) \in \mathbb{K}^n$. Então,

$$\sum_{j=1}^n |\xi_j \eta_j| \leq \left(\sum_{j=1}^n |\xi_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{j=1}^n |\eta_j|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Demonstração.: Primeiramente, consideremos o caso em que $(\xi_1, \dots, \xi_n) = (0, \dots, 0)$ ou $(\eta_1, \dots, \eta_n) = (0, \dots, 0)$. Então,

$$\sum_{j=1}^n |\xi_j \eta_j| = 0 \leq \left(\sum_{j=1}^n |\xi_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{j=1}^n |\eta_j|^q \right)^{\frac{1}{q}} = 0.$$

Suponhamos então que $(\xi_1, \dots, \xi_n) \neq (0, \dots, 0)$ e $(\eta_1, \dots, \eta_n) \neq (0, \dots, 0)$. Da demonstração do Teorema 2.1.1, sabemos que

$$a^{\frac{1}{p}} \cdot b^{\frac{1}{q}} \leq \frac{1}{p} \cdot a + \frac{1}{q} \cdot b, \quad a, b \geq 0. \quad (2.12)$$

Tomemos

$$a_j = \frac{|\xi_j|^p}{\sum_{j=1}^n |\xi_j|^p} \text{ e } b_j = \frac{|\eta_j|^q}{\sum_{j=1}^n |\eta_j|^q}. \quad (2.13)$$

Aplicando (2.13) em (2.12), temos

$$\left(\frac{|\xi_j|^p}{\sum_{j=1}^n |\xi_j|^p} \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\frac{|\eta_j|^q}{\sum_{j=1}^n |\eta_j|^q} \right)^{\frac{1}{q}} \leq \frac{a_j}{p} + \frac{b_j}{q} \Rightarrow \frac{|\xi_j| |\eta_j|}{\left(\sum_{j=1}^n |\xi_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{j=1}^n |\eta_j|^q \right)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{a_j}{p} + \frac{b_j}{q},$$

para $j = 1, \dots, n$. Somando as desigualdades para cada j , segue que

$$\frac{\sum_{j=1}^n |\xi_j \eta_j|}{\left(\sum_{j=1}^n |\xi_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{j=1}^n |\eta_j|^q \right)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{1}{p} \cdot \sum_{j=1}^n a_j + \frac{1}{q} \cdot \sum_{j=1}^n b_j = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

completando a demonstração. ■

Corolário 2.3.1. (*Desigualdade de Hölder para séries*): Sejam $1 < p, q < \infty$, com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, e sejam $(\xi_j) \in \ell_p$ e $(\eta_j) \in \ell_q$. Então $(\xi_j \eta_j) \in \ell_1$ e

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j \eta_j| \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\eta_j|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Teorema 2.3.2. (*Desigualdade de Minkowski para somas*): Seja $1 \leq p < \infty$, e sejam $(\xi_1, \dots, \xi_n), (\eta_1, \dots, \eta_n) \in \mathbb{K}^n$. Então,

$$\left(\sum_{j=1}^n |\xi_j + \eta_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j=1}^n |\xi_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^n |\eta_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Demonstração: A desigualdade é clara se $p=1$. Se $p > 1$, temos que:

$$\sum_{j=1}^n |\xi_j + \eta_j|^p = \sum_{j=1}^n |\xi_j + \eta_j| \cdot |\xi_j + \eta_j|^{p-1} \leq \sum_{j=1}^n |\xi_j| \cdot |\xi_j + \eta_j|^{p-1} + \sum_{j=1}^n |\eta_j| \cdot |\xi_j + \eta_j|^{p-1}.$$

Se $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, então $(p-1)q = p$, e segue da Desigualdade de Hölder que

$$\sum_{j=1}^n |\xi_j| \cdot |\xi_j + \eta_j|^{p-1} \leq \left(\sum_{j=1}^n |\xi_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{j=1}^n |\xi_j + \eta_j|^p \right)^{\frac{1}{q}}$$

e

$$\sum_{j=1}^n |\eta_j| \cdot |\xi_j + \eta_j|^{p-1} \leq \left(\sum_{j=1}^n |\eta_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{j=1}^n |\xi_j + \eta_j|^p \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Logo,

$$\sum_{j=1}^n |\xi_j + \eta_j|^p \leq \left\{ \left(\sum_{j=1}^n |\xi_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^n |\eta_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\} \cdot \left(\sum_{j=1}^n |\xi_j + \eta_j|^p \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Como $1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{p}$, segue que

$$\left(\sum_{j=1}^n |\xi_j + \eta_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j=1}^n |\xi_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^n |\eta_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

■

Corolário 2.3.2. (Desigualdade de Minkowski para séries): Seja $1 \leq p < \infty$, e sejam $(\xi_j), (\eta_j) \in \ell_p$. Então $(\xi_j + \eta_j) \in \ell_p$ e

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j + \eta_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\eta_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Agora, verifiquemos que ℓ_p é um espaço de Banach para $1 \leq p < \infty$.

1º) É fácil ver que ℓ_p é um espaço vetorial com as operações usuais de soma de seqüências e multiplicação por escalar.

2º) $\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ é uma norma em ℓ_p . Sejam $x = (\xi_n)_{n=1}^{\infty}, y = (\alpha_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p$.
Segue que:

N1) $\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \geq 0$ e

$$\|x\|_p = 0 \Leftrightarrow \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} = 0 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p = 0 \Leftrightarrow |\xi_j|^p = 0, \forall j \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \xi_j = 0, \forall j \in \mathbb{N}.$$

N2) Seja $a \in \mathbb{K}$,

$$\|ax\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a\xi_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(|a|^p \sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} = |a| \cdot \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} = |a| \cdot \|x\|_p.$$

N3) Temos pela Desigualdade de Minkowski,

$$\|x + y\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j + \alpha_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|x\|_p + \|y\|_p.$$

Logo, $\|\cdot\|_p$ é uma norma em ℓ_p . Sabendo de tudo isto, mostremos que de fato ℓ_p é um espaço de Banach. Seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy em ℓ_p . Escrevamos $x_n = (\xi_j^{(n)})_{j=1}^{\infty}$ para cada n . Então, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|x_n - x_m\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j^{(n)} - \xi_j^{(m)}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \epsilon \quad (2.14)$$

para todos $n, m \geq n_0$. Em particular,

$$|\xi_j^{(n)} - \xi_j^{(m)}| \leq \|x_n - x_m\|_p \leq \epsilon, \forall m, n \geq n_0 \text{ e } \forall j \in \mathbb{N}.$$

Logo, $(\xi_j^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{K}$ para cada $j \in \mathbb{N}$. Seja $\xi_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_j^{(n)}$ para cada $j \in \mathbb{N}$, e seja $x = (\xi_j)_{j=1}^{\infty}$. Provaremos que $x \in \ell_p$ e que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a x . De fato, segue de (2.14) que

$$\left(\sum_{j=1}^k |\xi_j^{(n)} - \xi_j^{(m)}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \epsilon \quad (2.15)$$

para todos $n, m \geq n_0$ e todo $k \in \mathbb{N}$. Fazendo $m \rightarrow \infty$ em (2.15), segue que

$$\left(\sum_{j=1}^k |\xi_j^{(n)} - \xi_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \epsilon$$

para todo $n \geq n_0$ e todo $k \in \mathbb{N}$. Logo,

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j^{(n)} - \xi_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \epsilon$$

para todo $n \geq n_0$. Assim, $x_n - x \in \ell_p$ e $\|x - x_n\|_p \leq \epsilon$, para todo $n \geq n_0$. Segue que $x = (x - x_n) + x_n \in \ell_p$ e $\|x_n - x\|_p \rightarrow 0$.

Para $p = \infty$, definimos ℓ_{∞} como o espaço das sequências limitadas de escalares, ou seja,

$$\ell_{\infty} = \{(a_j)_{j=1}^{\infty} : a_j \in \mathbb{K}, \forall j \in \mathbb{N} \text{ e } \sup_{j \in \mathbb{N}} |a_j| < \infty\}.$$

É fácil ver que ℓ_{∞} é um espaço vetorial. Mostremos que $\|(a_j)_{j=1}^{\infty}\|_{\infty} = \sup\{|a_j| : j \in \mathbb{N}\}$ é uma norma:

$$\mathbf{N1)} \quad \|x\|_\infty = \sup\{|a_j| : j \in \mathbb{N}\} \geq 0 \text{ e } \|x\|_\infty = 0 \Leftrightarrow \sup_{j \in \mathbb{N}} |a_j| = 0 \Leftrightarrow a_j = 0, \forall j \in \mathbb{N}.$$

$$\mathbf{N2)} \quad \|\alpha x\|_\infty = \sup_{j \in \mathbb{N}} |\alpha a_j| = \sup_{j \in \mathbb{N}} |\alpha| |a_j| = |\alpha| \cdot \sup_{j \in \mathbb{N}} |a_j| = |\alpha| \cdot \|x\|_\infty.$$

$$\mathbf{N3)} \quad \|x + y\|_\infty = \sup_{j \in \mathbb{N}} |a_j + b_j| \leq \sup_{j \in \mathbb{N}} (|a_j| + |b_j|) \leq \sup_{j \in \mathbb{N}} |a_j| + \sup_{j \in \mathbb{N}} |b_j| = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty.$$

Sabendo que ℓ_∞ é um espaço vetorial normado, mostremos que ele é um espaço de Banach. Seja $(x_n)_{n=1}^\infty$ uma sequência de Cauchy em ℓ_∞ . Escrevamos $x_n = (a_j^{(n)})_{j=1}^\infty$ para cada n . Dado $\epsilon > 0$, existe n_0 tal que

$$\|x_n - x_m\|_\infty = \|(a_j^{(n)})_{j=1}^\infty - (a_j^{(m)})_{j=1}^\infty\|_\infty = \|(a_j^{(n)} - a_j^{(m)})_{j=1}^\infty\|_\infty = \sup_{j \in \mathbb{N}} |a_j^{(n)} - a_j^{(m)}| < \epsilon, \forall m, n \geq n_0.$$

Veja que $|a_j^{(n)} - a_j^{(m)}| \leq \sup\{|a_j^{(n)} - a_j^{(m)}| : j \in \mathbb{N}\} < \epsilon$, para todos $m, n, j \in \mathbb{N}$. Daí, $(a_j^{(n)})_{n=1}^\infty \subseteq \mathbb{K}$ é de Cauchy. Como $\mathbb{K}$ é completo, segue que $(a_j^{(n)})$ converge em $\mathbb{K}$. Digamos que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_j^{(n)} = a_j$ para cada $j \in \mathbb{N}$ e seja $x = (a_j)_{j=1}^\infty$. Provemos que $x \in \ell_\infty$ e $x_n \rightarrow x$. Sabemos que

$$\sup_{j \in \mathbb{N}} |a_j^{(n)} - a_j^{(m)}| < \epsilon, \forall m, n \geq n_0.$$

Fazendo $m \rightarrow \infty$, temos que

$$\sup_{j \in \mathbb{N}} |a_{n_j} - a_j| \leq \epsilon, \forall n \geq n_0.$$

Logo, $a_{n_j} - a_j \in \ell_\infty$ e $\|x_n - x\|_\infty \leq \epsilon$ para todo $n \geq n_0$. Segue que $a_j = a_{n_j} - (a_{n_j} - a_j) \in \ell_\infty$ para cada $j \in \mathbb{N}$. Assim, $x = (a_j)_{j=1}^\infty \subseteq \ell_\infty$ e $\|x_n - x\|_\infty \rightarrow 0$. Logo, ℓ_∞ é Banach com a norma $\|(a_j)_{j=1}^\infty\|_\infty = \sup\{|a_j| : j \in \mathbb{N}\}$.

2.4 Conjuntos Compactos em Espaços Vetoriais Normados

Por definição, um subconjunto K de um espaço topológico é compacto se toda cobertura aberta de K admite subcobertura finita. Em espaços métricos, vale a seguinte caracterização: um subconjunto K de um espaço métrico é compacto se, e somente se, é sequencialmente compacto, isto é, toda sequência formada por elementos de K admite uma subsequência que converge para um elemento de K .

Proposição 2.4.1. *Se E é um espaço vetorial normado de dimensão finita, então os compactos em E são precisamente os conjuntos limitados e fechados.*

Demonstração: Conjuntos compactos em espaços métricos são sempre fechados e limitados. Basta então mostrar que todo conjunto limitado e fechado $K \subseteq E$ é compacto. Suponha que $\dim E = n$ e seja $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ uma base normalizada de E . Como estamos em espaços métricos, basta mostrar que toda sequência em K admite subsequência convergente em K . Seja, portanto, $(x_m)_{m=1}^\infty$ uma sequência em K . Para cada m existem escalares $a_1^{(m)}, \dots, a_n^{(m)}$ tais que $x_m = \sum_{j=1}^n a_j^{(m)} e_j$. Como K é limitado, existe $L > 0$ tal que

$\|x_m\| \leq L$ para todo m . Consideremos em $\mathbb{K}^n$ a norma da soma $\|\cdot\|_1$. Pelo Lema 2.0.1, existe $c > 0$ tal que

$$L \geq \|x_m\| = \left\| \sum_{j=1}^n a_j^{(m)} \cdot e_j \right\| \geq c \cdot \left(\sum_{j=1}^n |a_j^{(m)}| \right) = c \cdot \|(a_1^{(m)}, \dots, a_n^{(m)})\|_1$$

para todo $m \in \mathbb{N}$. Assim, a sequência $((a_1^{(m)}, \dots, a_n^{(m)}))_{m=1}^\infty$ é limitada em $\mathbb{K}^n$. Pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass no $\mathbb{R}^n$ esta sequência possui uma subsequência $((a_1^{(m_k)}, \dots, a_n^{(m_k)}))_{k=1}^\infty$ que converge para um certo $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{K}^n$. Daí,

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j=1}^n a_j^{(m_k)} e_j - \sum_{j=1}^n b_j e_j \right\| &= \left\| \sum_{j=1}^n (a_j^{(m_k)} - b_j) e_j \right\| \leq \sum_{j=1}^n \|(a_j^{(m_k)} - b_j) e_j\| \\ &= \sum_{j=1}^n |a_j^{(m_k)} - b_j| \cdot \|e_j\| \\ &= \sum_{j=1}^n |a_j^{(m_k)} - b_j| \\ &= \|(a_1^{(m_k)}, \dots, a_n^{(m_k)}) - b\|_1 \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Concluimos que

$$x_{m_k} = (a_1^{(m_k)}, \dots, a_n^{(m_k)}) \rightarrow \sum_{j=1}^n b_j e_j.$$

Por K ser fechado sabemos que $\sum_{j=1}^\infty b_j e_j \in K$. ■

Seja E um espaço normado. O conjunto $B_E = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$ é chamado de **bola unitária fechada** de E .

Corolário 2.4.1. *A bola unitária fechada em um espaço normado de dimensão finita é compacta.*

Mostraremos a seguir que a bola unitária fechada em espaços de dimensão infinita nunca é compacta.

Lema 2.4.1. *(Lema de Riesz) Seja M um subespaço fechado próprio de um espaço normado E e seja θ um número real tal que $0 < \theta < 1$. Então, existe $y \in E - M$ tal que $\|y\| = 1$ e $\|y - x\| \geq \theta$ para todo $x \in M$.*

Demonstração: Seja $y_0 \in E - M$ e considere o número

$$d = \text{dist}(y_0, M) := \inf\{\|y_0 - x\| : x \in M\}.$$

Como M é fechado e $y_0 \notin M$, temos $d > 0$. De fato, supondo $d = 0$ existiria uma sequência de elementos de M convergindo para y_0 , e nesse caso teríamos $y_0 \in M$, pois M é fechado. Como $\frac{d}{\theta} > d$, podemos escolher $x_0 \in M$ tal que $\|y_0 - x_0\| \leq \frac{d}{\theta}$. Vejamos que escolhendo $y = \frac{y_0 - x_0}{\|y_0 - x_0\|}$, as condições são satisfeitas. É claro que y tem norma 1 e não

pertence a M . Seja $x \in M$. Como M é subespaço vetorial, $(x_0 + \|y_0 - x_0\|x) \in M$, e portanto $d \leq \|y_0 - (x_0 + \|y_0 - x_0\|x)\|$. Por fim

$$\|y - x\| = \left\| \frac{y_0 - x_0}{\|y_0 - x_0\|} - x \right\| = \frac{\|y_0 - (x_0 + \|y_0 - x_0\|x)\|}{\|y_0 - x_0\|} \geq \frac{d}{\|y_0 - x_0\|} \geq \theta.$$

■

Teorema 2.4.1. *Um espaço normado E tem dimensão finita se, e somente se, a bola unitária fechada de E é compacta.*

Demonstração: O Corolário 2.4.1 garante a ida. Provemos que se a bola é compacta, então o espaço tem dimensão finita. Suponha que E tenha dimensão infinita. Escolha $x_1 \in E$ com norma 1. Como $\dim E = \infty$, o subespaço $[x_1]$ gerado por x_1 é subespaço próprio de E . Por ter dimensão finita, $[x_1]$ é subespaço fechado de E . Pelo Lema de Riesz, com $\theta = \frac{1}{2}$, existe $x_2 \in E - [x_1]$ de norma 1 tal que

$$\|x_2 - x_1\| \geq \frac{1}{2}.$$

Aplicado novamente o argumento para o subespaço $[x_1, x_2]$ gerado por $\{x_1, x_2\}$, que continua sendo um subespaço fechado próprio pelas mesmas razões, existe $x_3 \in E - [x_1, x_2]$ de norma 1 tal que

$$\|x_3 - x_j\| \geq \frac{1}{2} \text{ para } j = 1, 2.$$

Podemos continuar esse processo indefinidamente, pois em todas as etapas teremos um subespaço de dimensão finita de E , logo fechado e próprio. Procedendo dessa forma, construímos uma sequência em B_E tal que $\|x_m - x_n\| \geq \frac{1}{2}$ sempre que $m \neq n$. Assim, $(x_n)_{n=1}^\infty$ é uma sequência em B_E que não possui subsequência convergente, o que impede B_E ser compacta. ■

Capítulo 3

Operadores Lineares Contínuos

Nesse capítulo iremos estudar operadores lineares contínuos e alguns resultados de grande importância que envolvem os mesmos e que serão relevantes no nosso objetivo final. Vamos definir o que é um operador linear contínuo.

Definição 3.0.1. *Um operador linear contínuo do espaço normado E no espaço normado F , ambos sobre o mesmo corpo $\mathbb{K}$, é uma função $T : E \rightarrow F$, que é linear, isto é*

- $T(x+y)=T(x)+T(y)$ para quaisquer $x, y \in E$ e
- $T(ax)=aT(x)$ para todo $a \in \mathbb{K}$ e qualquer x em E ;

e contínua, isto é, para todos $x_0 \in E$ e $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\|T(x) - T(x_0)\| < \epsilon$ sempre que $x \in E$ e $\|x - x_0\| < \delta$.

O conjunto de todos os operadores lineares contínuos de E em F será denotado por $\mathcal{L}(E, F)$. É possível mostrar que $\mathcal{L}(E, F)$ é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$ com as operações usuais de funções, porém não mostraremos aqui. Quando F é o corpo dos escalares, escrevemos E^* no lugar de $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$, chamamos esse espaço de **dual topológico de E** , ou simplesmente **dual de E** , e dizemos que seus elementos são **funcionais lineares contínuos**.

Definição 3.0.2. *Dizemos que dois espaços normados E e F são **topologicamente isomorfos**, ou simplesmente **isomorfos**, se existir um operador linear contínuo bijetor $T : E \rightarrow F$ cujo operador inverso $T^{-1} : F \rightarrow E$ — que é sempre linear — é também contínuo. Tal operador é chamado de **isomorfismo topológico** ou simplesmente **isomorfismo**.*

Uma função $f : E \rightarrow F$ — não necessariamente linear — tal que $\|f(x)\| = \|x\|$ para todo $x \in E$ é chamada de **isometria**. Um operador linear $T : E \rightarrow F$ que é uma isometria é chamado de **isometria linear**. É fácil ver que toda isometria linear é injetora e contínua. Um isomorfismo que é também uma isometria é chamado de **isomorfismo isométrico**, e nesse caso dizemos que os espaços são **isomorfos isometricamente**.

3.1 Caracterização dos Operadores Lineares Contínuos

Para iniciar iremos definir o que é uma função lipschitziana e função uniformemente contínua.

Definição 3.1.1. Seja $f : M \rightarrow N$ uma função entre espaços métricos. Dizemos que f é **lipschitziana** se existe uma constante $L > 0$ tal que $d(f(x), f(y)) \leq L.d(x, y)$ para todos $x, y \in M$.

Definição 3.1.2. Seja $f : M \rightarrow N$ uma função entre espaços métricos. Dizemos que f é **uniformemente contínua** se para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta(\epsilon) > 0$ tal que $d(f(x), f(y)) < \epsilon$ sempre que $x, y \in M$ e $d(x, y) < \delta$.

Teorema 3.1.1. Sejam E e F espaços normados sobre $\mathbb{K}$ e $T : E \rightarrow F$ linear. As seguintes condições são equivalentes:

- (a) T é lipschitziano.
- (b) T é uniformemente contínuo.
- (c) T é contínuo.
- (d) T é contínuo em algum ponto de E .
- (e) T é contínuo na origem.
- (f) $\sup\{\|T(x)\| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\} < \infty$.
- (g) Existe uma constante $C \geq 0$ tal que $\|T(x)\| \leq C.\|x\|$ para todo $x \in E$.

Demonstração.: a.) $\Rightarrow$ b.) Seja $\epsilon > 0$ dado. Por hipótese, T é lipschitziano, ou seja, existe $L > 0$ tal que $d(T(x), T(y)) \leq L.d(x, y)$ para todos $x, y \in M$. Assim, tomando $\delta = \frac{\epsilon}{L}$, segue que

$$d(x, y) < \delta \Rightarrow d(T(x), T(y)) \leq L.d(x, y) < L.\delta = L.\frac{\epsilon}{L} = \epsilon, \forall x, y \in M.$$

Como δ não depende de nenhum ponto, concluímos que T é uniformemente contínuo.

b.) $\Rightarrow$ c.) Trivial.

c.) $\Rightarrow$ d.) Trivial.

d.) $\Rightarrow$ e.) Suponha T contínuo no ponto $x_0 \in E$. Seja $\epsilon > 0$. Então existe $\delta > 0$ tal que $\|T(x) - T(x_0)\| < \epsilon$ sempre que $\|x - x_0\| < \delta$. Tome $x \in E$ tal que $\|x - 0\| = \|x\| < \delta$. Então $\|(x + x_0) - x_0\| = \|x\| < \delta$. Portanto,

$$\|T(x) - T(0)\| = \|T(x) - 0\| = \|T(x)\| = \|T(x) + T(x_0) - T(x_0)\| = \|T(x + x_0) - T(x_0)\| < \epsilon.$$

Provando que T é contínuo na origem.

e.) $\Rightarrow$ f.) Da continuidade de T na origem, existe $\delta > 0$ tal que $\|T(x)\| < 1$ sempre que $\|x\| < \delta$. Se $\|x\| \leq 1$, $\|\frac{\delta}{2}x\| < \delta$, e então $\frac{\delta}{2}\|T(x)\| = \|T(\frac{\delta}{2}x)\| < 1$. Isso prova que $\sup\{\|T(x)\| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\} \leq \frac{2}{\delta} < \infty$.

f.) $\Rightarrow$ g.) Para $x \in E, x \neq 0$, temos

$$\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = \left\| T\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| \leq \sup\{\|T(y)\| : \|y\| \leq 1\},$$

e portanto $\|T(x)\| \leq (\sup\{\|T(y)\| : \|y\| \leq 1\})\|x\|$ para todo $x \neq 0$. O resultado segue pois essa desigualdade é trivialmente verificada para $x = 0$.

g.) $\Rightarrow$ a.) Dados $x_1, x_2 \in E$,

$$\|T(x_1) - T(x_2)\| = \|T(x_1 - x_2)\| \leq C.\|x_1 - x_2\|,$$

e portanto T é lipschitziano com constante C . ■

Corolário 3.1.1. *Seja $T : E \rightarrow F$ um operador linear bijetor entre espaços normados. Então T é um isomorfismo se, e somente se, existem constantes $C_1, C_2 > 0$ tais que $C_1\|x\| \leq \|T(x)\| \leq C_2\|x\|$ para todo $x \in E$.*

Demonstração.:($\Rightarrow$) Como T é contínuo, existe $C_2 \geq 0$ tal que $\|T(x)\| \leq C_2\|x\|$ para todo $x \in E$. Observe que $C_2 \neq 0$. Caso contrário, teríamos T identicamente nulo, o que não ocorre pois T é isomorfismo. Como T é isomorfismo, T^{-1} é contínuo. Pelo Teorema 3.1.1 existe $C \geq 0$ tal que $\|T^{-1}(y)\| \leq C\|y\|$ para todo $y \in F$. Observe que $C \neq 0$. Em particular, para todo $x \in E$, $\|x\| = \|T^{-1}(T(x))\| \leq C\|T(x)\|$, o que implica que $\frac{1}{C}\|x\| \leq \|T(x)\|$. Assim, chamando $C_1 = \frac{1}{C}$ temos que $C_1\|x\| \leq \|T(x)\| \leq C_2\|x\|$ para todo $x \in E$.

($\Leftarrow$) Por hipótese, existe $C_2 > 0$ tal que $\|T(x)\| \leq C_2\|x\|$ para todo $x \in E$. Logo, pelo Teorema 3.1.1, T é contínuo. Por outro lado, existe $C_1 > 0$ tal que $C_1\|x\| \leq \|T(x)\|$ para todo $x \in E$. Isso implica que $C_1\|T^{-1}(y)\| \leq \|T(T^{-1}(y))\| = \|y\|$ para todo $y \in F$, o que implica que $\|T^{-1}(y)\| \leq \frac{1}{C_1}\|y\|$, para todo $y \in F$. Novamente, pelo Teorema 3.1.1, temos que T^{-1} é contínuo. Assim, concluímos que T é isomorfismo. ■

A partir do item (f) do Teorema 3.1.1 podemos normar o espaço $\mathcal{L}(E, F)$ dos operadores lineares contínuos de E em F .

Proposição 3.1.1. *Sejam E e F espaços normados.*

a.) *A expressão*

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\}$$

define uma norma no espaço $\mathcal{L}(E, F)$.

b.) $\|T(x)\| \leq \|T\| \cdot \|x\|$ para todo $T \in \mathcal{L}(E, F)$ e $x \in E$.

c.) Se F for Banach, então $\mathcal{L}(E, F)$ também é Banach.

Demonstração.:a.) Mostremos que a expressão $\|T\| = \sup\{\|T(x)\| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\}$ é uma norma.

N1) Seja $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Daí, $\|T\| = \sup\{\|T(x)\| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\} \geq 0$ e
 $\|T\| = 0 \Leftrightarrow \sup\{\|T(x)\| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\} = 0 \Leftrightarrow \|T(x)\| = 0, \forall x \in E \text{ com } \|x\| \leq 1 \Leftrightarrow T(x) = 0, \forall x \in E \Leftrightarrow T \equiv 0$.

N2) Seja $T \in \mathcal{L}(E, F)$ e $a \in \mathbb{K}$. Segue que,

$$\begin{aligned} \|a.T\| &= \sup\{\|a.T(x)\| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\} \\ &= \sup\{|a| \cdot \|T(x)\| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\} \\ &= |a| \cdot \sup\{\|T(x)\| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\} \\ &= |a| \cdot \|T\|. \end{aligned}$$

N3) Sejam $T, U \in \mathcal{L}(E, F)$. Daí,

$$\begin{aligned} \|T + U\| &= \sup\{\|T(x) + U(x)\| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\} \\ &\leq \sup\{\|T(x)\| + \|U(x)\| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\} \\ &\leq \sup\{\|T(x)\| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\} + \sup\{\|U(x)\| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\} \\ &= \|T\| + \|U\|. \end{aligned}$$

Portanto, $\|T\| = \sup\{\|T(x)\| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\}$ é uma norma para $\mathcal{L}(E, F)$.

b.) Para $x \in E$ e $x \neq 0$, temos

$$\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = \left\| T\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| \leq \sup\{\|T(y)\| : y \in E \text{ e } \|y\| \leq 1\}.$$

E isto implica que

$$\|T(x)\| \leq \sup\{\|T(y)\| : y \in E \text{ e } \|y\| \leq 1\} \cdot \|x\| \Rightarrow \|T(x)\| \leq \|T\| \cdot \|x\|, \forall x \in E, x \neq 0.$$

A desigualdade é facilmente verificada para $x = 0$, logo é válida para todo x em E .

c.) Seja $(T_n)_{n=1}^\infty$ uma sequência de Cauchy em $\mathcal{L}(E, F)$. Dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|T_n - T_m\| \leq \epsilon$ sempre que $n, m \geq n_0$. Logo

$$\|T_n(x) - T_m(x)\| = \|(T_n - T_m)(x)\| \leq \|T_n - T_m\| \cdot \|x\| \leq \epsilon \|x\| \quad (3.1)$$

para todos $x \in E$ e $n, m \geq n_0$. Segue que para cada $x \in E$, a sequência $(T_n(x))_{n=1}^\infty$ é de Cauchy em F , logo convergente pois F é Banach. Podemos então definir

$$T : E \rightarrow F, \quad T(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x).$$

A linearidade de T segue das propriedades dos limites. Veja que para $x, y \in E$ e $\alpha \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} T(x + \alpha y) &= \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x + \alpha y) = \lim_{n \rightarrow \infty} [T_n(x) + \alpha T_n(y)] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x) + \alpha \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(y) \\ &= T(x) + \alpha T(y). \end{aligned}$$

Agora, fazendo $m \rightarrow \infty$ em (3.1), temos

$$\|(T_n - T)(x)\| = \|T_n(x) - T(x)\| \leq \epsilon \|x\| \quad (3.2)$$

para todos $x \in E$ e $n \geq n_0$. Em particular,

$$\|(T_{n_0} - T)(x)\| = \|T_{n_0}(x) - T(x)\| \leq \epsilon \|x\|$$

para todo $x \in E$, o que nos garante que $(T - T_{n_0}) \in \mathcal{L}(E, F)$. Portanto $T = (T - T_{n_0}) + T_{n_0} \in \mathcal{L}(E, F)$. De (3.2) segue também que $\|T_n - T\| \leq \epsilon$ para todo $n \geq n_0$, e assim resulta que $T_n \rightarrow T$ em $\mathcal{L}(E, F)$. Portanto, $\mathcal{L}(E, F)$ é Banach. ■

No caso de funcionais lineares, a norma dos operadores se transforma em

$$\|\varphi\| = \sup\{|\varphi(x)| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\}$$

para todo espaço normado E e todo funcional $\varphi \in E^*$. Da Proposição 3.1.1 temos:

Corolário 3.1.2. *O dual E^* de qualquer espaço normado E é um espaço de Banach.*

Agora, vamos fazer alguns exemplos aplicando os resultados vistos até agora.

Exemplo 3.1.1. *Seja $1 \leq p < \infty$. Escolha uma sequência $(b_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p$ e considere o operador*

$$T : \ell_\infty \rightarrow \ell_p, \quad T((a_j)_{j=1}^\infty) = (a_j b_j)_{j=1}^\infty.$$

A linearidade de T é imediata, porém verifiquemos a mesma. Sejam $(a_j)_{j=1}^\infty, (c_j)_{j=1}^\infty \in \ell_\infty$ e $\alpha \in \mathbb{K}$:

$$\begin{aligned} T((a_j)_{j=1}^\infty + \alpha(c_j)_{j=1}^\infty) &= T(((a_j + \alpha c_j)_{j=1}^\infty)) = ((a_j + \alpha c_j)b_j)_{j=1}^\infty = (a_j b_j + \alpha c_j b_j)_{j=1}^\infty \\ &= (a_j b_j)_{j=1}^\infty + \alpha(c_j b_j)_{j=1}^\infty = T((a_j)_{j=1}^\infty) + \alpha T((c_j)_{j=1}^\infty). \end{aligned}$$

Além disso,

$$\|T((a_j)_{j=1}^\infty)\|_p = \left(\sum_{j=1}^\infty |a_j b_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j=1}^\infty |b_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \sup_j |a_j| = \|(b_j)_{j=1}^\infty\|_p \cdot \|(a_j)_{j=1}^\infty\|_\infty$$

para toda sequência $(a_j)_{j=1}^\infty \in \ell_\infty$, e como $(b_j)_{j=1}^\infty$ é fixo, então $\|(b_j)_{j=1}^\infty\|_p$ é uma constante. Segue do Teorema 3.1.1 que T é contínuo, e que $\|T\| \leq \|(b_j)_{j=1}^\infty\|_p$. Tomando $x = (1, 1, \dots) \in \ell_\infty$ temos $\|x\|_\infty = 1$ e $\|T(x)\| = \|(b_j)_{j=1}^\infty\|_p$, logo $\|T\| = \|(b_j)_{j=1}^\infty\|_p$. Este operador T é chamado de **operador diagonal** pela sequência $(b_j)_{j=1}^\infty$.

Exemplo 3.1.2. Considere $1 \leq p < \infty$ e escolha uma função $g \in L_p[0, 1]$. Assim, operador

$$T : C[0, 1] \rightarrow L_p[0, 1], \quad T(f) = f.g$$

é linear. De fato, sejam $f, h \in C[0, 1]$ e $\alpha \in \mathbb{K}$. Daí,

- $T(f+h) = (f+h)g = fg + hg = T(f) + T(h)$;
- $T(\alpha f) = \alpha fg = \alpha T(f)$.

Veja que

$$\begin{aligned} \left(\int_{[0,1]} |(f.g)(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\int_{[0,1]} |f(t)|^p \cdot |g(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\int_{[0,1]} \left(\max_{t \in [0,1]} |f(t)| \right)^p \cdot |g(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \max_{t \in [0,1]} |f(t)| \cdot \left(\int_{[0,1]} |g(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|f\|_\infty \cdot \|g\|_p. \end{aligned}$$

Como $\|f\|_\infty < \infty$ e $\|g\|_p < \infty$, temos que $\left(\int_{[0,1]} |(f.g)(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$ para todo $f \in C[0, 1]$. Portanto, $f.g \in L_p[0, 1]$ para todos $f \in C[0, 1]$ e conclui-se que o operador T está bem definido. Além disso, como g é fixo, temos que $\|g\|_p$ é uma constante, logo pelo Teorema 3.1.1, T é contínuo e $\|T\| \leq \|g\|_p$. Tome $f(x) = 1$, para todo $x \in [0, 1]$. É claro que $\|f\|_\infty = 1$, e $\|T(f)\|_p = \|g\|_p$. Portanto, $\|T\| = \|g\|_p$.

Exemplo 3.1.3. Considere o subconjunto $P[0, 1]$ de $C[0, 1]$ formado pelas funções polinomiais (ou polinômios). É claro que $P[0, 1]$ é um subespaço vetorial de $C[0, 1]$ com as operações de soma e multiplicação por escalar desse espaço. Logo, $P[0, 1]$ é um espaço normado com a norma $\|\cdot\|_\infty$ herdada de $C[0, 1]$. É claro também que o operador derivação

$$T : P[0, 1] \rightarrow P[0, 1], \quad T(f) = f'$$

é linear. De fato, dados $f, g \in P[0, 1]$ e $\alpha \in \mathbb{K}$, temos

$$T(f + \alpha g) = (f + \alpha g)' = f' + (\alpha g)' = f' + \alpha g' = T(f) + \alpha T(g)$$

. Suponha que T seja contínuo. Nesse caso, existe $C > 0$ tal que $\|T(f)\|_\infty \leq C \cdot \|f\|_\infty$, para todo $f \in P[0, 1]$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ tome $f_n \in P[0, 1]$ a função dada por $f_n(t) = t^n$. Então

$$n = \|f'_n\|_\infty = \|T(f_n)\|_\infty \leq C \cdot \|f_n\|_\infty = C, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Absurdo! Logo, T é descontínuo.

3.2 O Teorema de Banach-Steinhaus

Nessa seção apresentaremos o Teorema de Banach-Steinhaus que nos permitirá provar dois teoremas importantes: o Teorema da Aplicação Aberta e o Teorema do Gráfico Fechado. Porém, para demonstrar o Teorema de Banach-Steinhaus, precisamos provar primeiro o Teorema de Baire.

Teorema 3.2.1. (*Teorema de Baire*) *Sejam (M, d) um espaço métrico completo e $(F_n)_{n=1}^\infty$ uma sequência de subconjuntos fechados de M tais que*

$$M = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n.$$

Então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que F_{n_0} tem interior não vazio.

Demonstração.: Denotemos por $\text{int}(A)$ o interior de um subconjunto A de M . Suponha que $\text{int}(F_n) = \emptyset$ para todo n . Chamando $A_n = (F_n)^c = (M - F_n)$, cada A_n é aberto e, pela proposição 1.2.2(a)

$$\overline{A_n} = \overline{(F_n)^c} = (\text{int}(F_n))^c = (\emptyset)^c = M$$

para todo n . Em particular, cada A_n é não vazio. Escolha $x_1 \in A_1$ e use o fato de A_1 ser aberto para garantir a existência de $0 < \delta_1 < 1$ tal que $B[x_1; \delta_1]$ está contida em A_1 . De $\overline{A_2} = M$ temos $A_2 \cap B(x_1; \delta_1) \neq \emptyset$. E como $A_2 \cap B(x_1; \delta_1)$ é aberto, existem $x_2 \in A_2$ e $0 < \delta_2 < \frac{1}{2}$ tais que $B[x_2; \delta_2] \subseteq A_2 \cap B(x_1; \delta_1) \subseteq A_2 \cap B[x_1; \delta_1]$. Continuando o processo, construímos uma sequência $(x_n)_{n=1}^\infty$ em M e uma sequência $(\delta_n)_{n=1}^\infty$ de números reais tais que

$$0 < \delta_n < \frac{1}{n} \text{ e } B[x_{n+1}; \delta_{n+1}] \subseteq A_{n+1} \cap B[x_n; \delta_n]$$

para todo n . Dado $\epsilon > 0$ escolha $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > \frac{2}{\epsilon}$. Se $m, n \geq n_0$, como $B[x_n; \delta_n] \cap B[x_m; \delta_m] \subseteq B[x_0; \delta_{n_0}]$, temos

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x_{n_0}) + d(x_n, x_{n_0}) \leq 2\delta_{n_0} < \frac{2}{n_0} < \epsilon.$$

Isso mostra que $(x_n)_{n=1}^\infty$ é de Cauchy em M , logo convergente. Digamos $x_n \rightarrow x \in M$. Seja $n \in \mathbb{N}$. Como $x_m \in B[x_m; \delta_m] \subseteq B[x_n; \delta_n]$ para todo $m \geq n$ e $B[x_n; \delta_n]$ é um conjunto fechado, segue que $x \in B[x_n; \delta_n] \subseteq A_n$. Portanto

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} (F_n)^c = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \right)^c = M^c = \emptyset.$$

Absurdo! Logo, a nossa contradição surgiu pelo fato de supor que $\text{int}(F_n) = \emptyset$ para todo n . Portanto, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\text{int}(F_{n_0})$ é não vazio. ■

Teorema 3.2.2. (*Teorema de Banach-Steinhaus*) *Sejam E um espaço de Banach, F um espaço normado e $(T_i)_{i \in I}$ uma família de operadores em $\mathcal{L}(E, F)$ satisfazendo a condição de que para cada $x \in E$ existe $C_x < \infty$ tal que*

$$\sup_{i \in I} \|T_i(x)\| < C_x. \quad (3.3)$$

Então $\sup_{i \in I} \|T_i\| < \infty$.

Demonstração.: Da continuidade de T_i resulta que o conjunto $\{x \in E : \|T_i(x)\| \leq n\} = (\|\cdot\| \circ T_i)^{-1}([0, n])$ é fechado para cada $n \in \mathbb{N}$ e cada $i \in I$. Dessa forma, o conjunto

$$A_n := \left\{ x \in E : \sup_{i \in I} \|T_i(x)\| \leq n \right\} = \bigcap_{i \in I} \{x \in E : \|T_i(x)\| \leq n\}$$

é fechado por ser uma intersecção de fechados. Veja que

$$x \in \left\{ y \in E : \sup_{i \in I} \|T_i(y)\| \leq n \right\} \Leftrightarrow \|T_i(x)\| \leq n, \forall i \in I \Leftrightarrow x \in \bigcap_{i \in I} \{x \in E : \|T_i(x)\| \leq n\}.$$

De (3.3) segue que

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

e, pelo Teorema de Baire, algum A_n possui interior não vazio. Seja n_0 um número natural tal que A_{n_0} tenha interior não vazio, e sejam $a \in \text{int}(A_{n_0})$ e $r > 0$ tais que

$$\{x \in E : \|x - a\| \leq r\} \subseteq \text{int}(A_{n_0}).$$

Seja $y \in E$ com $\|y\| \leq 1$. Se $x = a + ry$, então $\|x - a\| = \|ry\| \leq r$ e portanto $x \in A_{n_0}$. Assim,

$$\|T_i(x - a)\| \leq \|T_i(x)\| + \|T_i(a)\| \leq n_0 + n_0$$

para todo $i \in I$. Logo, $\|T_i(ry)\| = \|T_i(x - a)\| \leq 2n_0$ e $\|T_i(y)\| \leq \frac{2n_0}{r}$ para todo i em I . Portanto, $\sup_{i \in I} \|T_i\| \leq \frac{2n_0}{r}$. ■

Corolário 3.2.1. *Sejam E um espaço de Banach, F um espaço normado e $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência em $\mathcal{L}(E, F)$ tal que $(T_n(x))_{n=1}^{\infty}$ é convergente em F para todo x em E . Se definirmos*

$$T : E \rightarrow F, \quad T(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x),$$

então T é um operador linear contínuo.

Demonstração.: É fácil ver que T é linear, pois isso decorre da linearidade do limite. Por hipótese, para cada $x \in E$ a sequência $(T_n(x))_{n=1}^{\infty}$ é convergente, e portanto limitada. Assim, $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n(x)\| < \infty$ para todo $x \in E$. Pelo Teorema de Banach-Steinhaus existe $C > 0$ tal que $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\| \leq C$. Segue então que

$$\|T_n(x)\| \leq \|T_n\| \cdot \|x\| \leq C \cdot \|x\|$$

para todos $x \in E$ e $n \in \mathbb{N}$. Fazendo $n \rightarrow \infty$, obtemos $\|T(x)\| \leq C \cdot \|x\|$ para todo $x \in E$, o que completa a demonstração de que T é contínuo. ■

3.3 O Teorema da Aplicação Aberta

Definição 3.3.1. *Sejam E e F espaços topológicos. Uma função $T : E \rightarrow F$ é dita uma aplicação aberta se $T(A)$ é aberto em F para todo A aberto em E .*

Lema 3.3.1. *Sejam E um espaço de Banach, F um espaço normado e $T : E \rightarrow F$ um operador linear contínuo. Se existirem $R, r > 0$ tais que $B_F(0; r) \subset \overline{T(B_E(0; R))}$, então $B_F(0; \frac{r}{2}) \subseteq T(B_E(0; R))$.*

Demonstração.: Como para todo subconjunto $M \subseteq E$ e todo escalar $a \in \mathbb{K}$ tem-se $\overline{aM} = a\overline{M}$, segue da hipótese que

$$B_F(0; ar) \subseteq \overline{T(B_E(0; aR))} \quad (3.4)$$

para todo $a \in \mathbb{R}$ positivo. Seja $y \in B_F(0; \frac{r}{2})$. Por (3.4) existe $x_1 \in B_E(0; \frac{R}{2})$ tal que $\|y - T(x_1)\| < \frac{r}{4}$, isto é, $y - T(x_1) \in B_F(0; \frac{r}{4})$. Novamente por (3.4), existe $x_2 \in B_E(0; \frac{R}{4})$ tal que

$$\|(y - T(x_1)) - T(x_2)\| < \frac{r}{8}.$$

Como (3.4) vale para todo $a > 0$, podemos continuar esse procedimento indefinidamente de forma a construir uma sequência $(x_n)_{n=1}^\infty$ em E tal que $x_n \in B_E(0; \frac{R}{2^n})$ e

$$\|y - T(x_1) - T(x_2) - \dots - T(x_n)\| < \frac{r}{2^{n+1}} \quad (3.5)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. A série $\sum_{n=1}^\infty \|x_n\|$ é convergente pois $\|x_n\| < \frac{R}{2^n}$ para todo n , logo

$$\left\| \sum_{j=n}^m x_j \right\| \leq \sum_{j=n}^m \|x_j\| \rightarrow 0, \text{ quando } m > n \rightarrow \infty,$$

e portanto a sequência

$$\left(\sum_{j=1}^n x_j \right)_{n=1}^\infty$$

é de Cauchy em E . Como E é Banach, existe $x \in E$ para o qual essa sequência converge. Segue então que

$$\begin{aligned} \|x\| &= \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n x_j \right\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \|x_j\| = \|x_1\| + \sum_{n=2}^\infty \|x_n\| \\ &< \frac{R}{2} + \sum_{n=2}^\infty \frac{R}{2^n} = \sum_{n=1}^\infty \frac{R}{2^n} = R, \end{aligned}$$

e portanto $x \in B_E(0; R)$. Fazendo $n \rightarrow \infty$ em (3.5) obtemos

$$\|y - T(x)\| = \left\| y - T \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n x_j \right) \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|y - T(x_1) - \dots - T(x_n)\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r}{2^{n+1}} = 0$$

e consequentemente $y = T(x)$. Daí $y \in T(B_E(0; R))$ e o resultado está provado. ■

Teorema 3.3.1. *(Teorema da Aplicação Aberta) Sejam E e F espaços de Banach e $T : E \rightarrow F$ linear, contínuo e sobrejetor. Então T é uma aplicação aberta. Em particular, todo operador linear contínuo e bijetor entre espaços de Banach é um isomorfismo.*

Demonstração.: Da igualdade

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_E(0; n)$$

e da sobrejetividade de T resulta que

$$F = T(E) = \bigcup_{n=1}^{\infty} T(B_E(0; n)) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{T(B_E(0; n))}.$$

Pelo Teorema 3.2.1 existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\overline{T(B_E(0; n_0))}$ tem interior não-vazio. Assim existem $b \in F$ e $r > 0$ tais que $B_F(b; r) \subseteq \overline{T(B_E(0; n_0))}$. Como

$$\overline{T(B_E(0; n_0))} = -\overline{T(B_E(0; n_0))},$$

resulta que

$$B_F(-b; r) = -B_F(b; r) \subseteq \overline{T(B_E(0; n_0))}.$$

Como $x = \frac{1}{2}(b + x) + \frac{1}{2}(-b + x)$,

$$\begin{aligned} B_F(0; r) &\subseteq \frac{1}{2}B_F(b; r) + \frac{1}{2}B_F(-b; r) \\ &\subseteq \frac{1}{2}\overline{T(B_E(0; n_0))} + \frac{1}{2}\overline{T(B_E(0; n_0))} = \overline{T(B_E(0; n_0))}, \end{aligned}$$

onde a última igualdade decorre da convexidade do conjunto $\overline{T(B_E(0; n_0))}$. Pelo Lema 3.3.1 sabemos que $B_F(0; \rho) \subseteq T(B_E(0; n_0))$ para $\rho = \frac{r}{2}$, e portanto $B_F(0; c\rho) \subseteq T(B_E(0; cn_0))$ para todo real positivo c . Vejamos que

$$B_F(T(x); c\rho) \subseteq T(B_E(x; cn_0))$$

para todo $x \in E$ e todo $c > 0$. De fato, $B_E(x; cn_0) = x + B(0, cn_0)$, e então

$$T(B_E(x; cn_0)) = T(x) + T(B_E(0; cn_0)) \supseteq T(x) + B_F(0; c\rho) = B_F(T(x); c\rho).$$

Agora podemos provar que $T(U)$ é aberto em F para cada U aberto em E . Sejam $x \in U$ e $c > 0$ tais que $B_E(x; cn_0) \subseteq U$. Então $T(U) \supseteq T(B_E(x; cn_0)) \supseteq B_F(T(x); c\rho)$, provando que $T(U)$ é aberto em F . ■

O exemplo a seguir mostra que a hipótese dos espaços serem completos é essencial.

Exemplo 3.3.1. Seja $T : c_{00} \rightarrow c_{00}$ o operador linear dado por $T((a_n)_{n=1}^{\infty}) = (a_1, \frac{a_2}{2}, \frac{a_3}{3}, \dots)$. Verifiquemos que T é linear. Seja $(a_n)_{n=1}^{\infty}, (b_n)_{n=1}^{\infty} \in c_{00}$ e $\alpha \in \mathbb{K}$. Daí,

$$\begin{aligned} T((a_n)_{n=1}^{\infty} + \alpha(b_n)_{n=1}^{\infty}) &= T((a_n + \alpha b_n)_{n=1}^{\infty}) = ((a_1 + \alpha b_1), \frac{a_2 + \alpha b_2}{2}, \frac{a_3 + \alpha b_3}{3}, \dots) \\ &= (a_1, \frac{a_2}{2}, \frac{a_3}{3}, \dots) + (\alpha b_1, \frac{\alpha b_2}{2}, \frac{\alpha b_3}{3}, \dots) \\ &= (a_1, \frac{a_2}{2}, \frac{a_3}{3}, \dots) + \alpha(b_1, \frac{b_2}{2}, \frac{b_3}{3}, \dots) \\ &= T((a_n)_{n=1}^{\infty}) + \alpha T((b_n)_{n=1}^{\infty}). \end{aligned}$$

Logo, T é linear. Agora, verifiquemos que T é injetor.

$$\begin{aligned} T((a_n)_{n=1}^{\infty}) &= T((b_n)_{n=1}^{\infty}) \Leftrightarrow (a_1, \frac{a_2}{2}, \frac{a_3}{3}, \dots) = (b_1, \frac{b_2}{2}, \frac{b_3}{3}, \dots) \Leftrightarrow \frac{a_n}{n} = \frac{b_n}{n}, \forall n \in \mathbb{N} \\ &\Leftrightarrow (a_n)_{n=1}^{\infty} = (b_n)_{n=1}^{\infty}. \end{aligned}$$

Portanto, T é injetor. Verifiquemos também que T é sobrejetor. Tome $y = (b_n)_{n=1}^\infty \in c_{00}$. Seja $x \in c_{00}$ dado por $x = (nb_n)_{n=1}^\infty$. Daí,

$$T(x) = T((nb_n)_{n=1}^\infty) = (b_1, \frac{2b_2}{2}, \frac{3b_3}{3}, \dots) = (b_1, b_2, b_3, \dots) = (b_n)_{n=1}^\infty = y.$$

Portanto, T é sobrejetor. Assim, só nos resta mostrar que T é contínuo. Para isso, mostraremos que o item (f) do Teorema 3.1.1 é verdadeiro para T e a partir das equivalências teremos que T é contínuo. Seja $(a_n)_{n=1}^\infty \in c_{00}$. Logo, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n = 0$, para todo $n \geq n_0$. Assim, podemos dizer que existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $\sup\{|a_n| : n \in \mathbb{N}\} = |a_j|$. A partir de tudo isso,

$$\begin{aligned} & \sup\{\|T((a_n)_{n=1}^\infty)\|_\infty : (a_n)_{n=1}^\infty \in c_{00} \text{ e } \|(a_n)_{n=1}^\infty\|_\infty \leq 1\} \\ &= \sup\{\|(\frac{a_n}{n})_{n=1}^\infty\|_\infty : (a_n)_{n=1}^\infty \in c_{00} \text{ e } \sup\{|a_n| : n \in \mathbb{N}\} \leq 1\} \\ &= \sup\{\sup\{\frac{|a_n|}{n} : n \in \mathbb{N}\} : (a_n)_{n=1}^\infty \in c_{00} \text{ e } |a_n| \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}\} \\ &= \sup\{\frac{|a_j|}{j} : (a_n)_{n=1}^\infty \in c_{00} \text{ e } |a_n| \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}\} \\ &\leq \sup\{\frac{1}{j} : j \in \mathbb{N}\} = 1 < \infty. \end{aligned}$$

Portanto, pelas equivalências do Teorema 3.1.1, T é contínuo. Porém, vejamos que T^{-1} não é contínuo. Observe que $T^{-1} : c_{00} \rightarrow c_{00}; T^{-1}((a_n)_{n=1}^\infty) = (a_1, 2a_2, 3a_3, \dots)$. Suponha que T^{-1} seja contínuo. Logo, pelo Teorema 3.1.1, existe $C > 0$ tal que

$$\|T^{-1}((a_n)_{n=1}^\infty)\| \leq C \cdot \|(a_n)_{n=1}^\infty\|,$$

ou seja, $\sup\{n \cdot |a_n| : n \in \mathbb{N}\} \leq C \cdot \sup\{|a_n| : n \in \mathbb{N}\}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, considere a sequência $e_1 = (1, 0, 0, \dots), e_2 = (0, 1, 0, \dots), e_3 = (0, 0, 1, 0, \dots), \dots, e_n = (0, \dots, 1, 0, 0, \dots), \dots$, onde o número 1 se posiciona no n -ésimo termo. É claro que $e_n \in c_{00}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Segue daí que, se $e_n^{(j)}$ é a j -ésima entrada de e_n , então

$$n = \sup\{n \cdot |e_n^{(j)}| : j \in \mathbb{N}\} \leq C \cdot \sup\{|e_n^{(j)}| : j \in \mathbb{N}\} = C$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Absurdo! Logo, T^{-1} é descontínuo.

3.4 O Teorema do Gráfico Fechado

Primeiramente, vamos definir o que é gráfico.

Definição 3.4.1. *Sejam E e F conjuntos e $T : E \rightarrow F$ uma função. O **gráfico** de T é o conjunto*

$$G(T) = \{(x, y) : x \in E \text{ e } y = T(x)\} = \{(x, T(x)) : x \in E\} \subseteq E \times F.$$

Teorema 3.4.1. *(Teorema do Gráfico Fechado) Sejam E e F espaços de Banach e $T : E \rightarrow F$ um operador linear. Então T é contínuo se, e somente se, $G(T)$ é fechado em $E \times F$.*

Demonstração.: Suponha T contínuo. Então a função

$$f : E \times F \rightarrow \mathbb{R}; f(x, y) = \|T(x) - y\|$$

é contínua, e portanto $G(T) = f^{-1}(\{0\})$ é fechado por ser a imagem inversa do fechado $\{0\}$ pela função contínua f .

Reciprocamente, suponha $G(T)$ fechado. Não é difícil ver que $E \times F$ é espaço de Banach com a norma $\|\cdot\|_1$. Definamos

$$\pi : G(T) \rightarrow E, \pi(x, T(x)) = x.$$

Verifiquemos que π é linear e bijetora. Para $(x, T(x)), (y, T(y)) \in G(T)$ e $\alpha \in \mathbb{K}$, temos

$$\begin{aligned}
\pi((x, T(x)) + \alpha(y, T(y))) &= \pi((x + \alpha y, T(x) + \alpha T(y))) = \pi((x + \alpha y, T(x + \alpha y))) \\
&= x + \alpha y \\
&= \pi(x, T(x)) + \alpha \pi(y, T(y)).
\end{aligned}$$

Logo, a linearidade está verificada. Verifiquemos que π é injetora. Sejam $(x, T(x)), (y, T(y)) \in G(T)$. Segue daí que,

$$\pi(x, T(x)) = \pi(y, T(y)) \Rightarrow x = y \Rightarrow T(x) = T(y).$$

Portanto, $(x, T(x)) = (y, T(y))$. Assim, T é injetora. A sobrejetividade é trivial. Além disso, π é contínua pois

$$\|\pi(x, T(x))\| = \|x\| \leq \|x\| + \|T(x)\| = \|(x, T(x))\|_1.$$

Do Teorema da Aplicação Aberta segue então que π^{-1} é contínua e portanto existe $C > 0$ tal que $\|(x, T(x))\|_1 \leq C\|x\|$ para todo $x \in E$. Logo

$$\|T(x)\| \leq \|T(x)\| + \|x\| = \|(x, T(x))\|_1 \leq C\|x\|$$

para todo $x \in E$. Isso prova que T é contínuo. ■

A grande utilidade do Teorema do Gráfico Fechado reside na seguinte observação: para mostrar a continuidade de um operador $T : E \rightarrow F$ (linear ou não), via definição, devemos provar que para toda sequência convergente $x_n \rightarrow x$ em E , é verdade que:

- a.) $(T(x_n))_{n=1}^{\infty}$ é convergente em F , isto é, existe $y \in F$ tal que $T(x_n) \rightarrow y$;
- b.) $y = T(x)$.

Em geral, provar a.), isto é, provar que $(T(x_n))_{n=1}^{\infty}$ converge, é uma tarefa difícil, especialmente em dimensão infinita. O Teorema do Gráfico Fechado nos fornece, no caso em que T é linear e atua entre espaços de Banach, o item a.) gratuitamente, ou seja, podemos supor a convergência de $(T(x_n))_{n=1}^{\infty}$, restando apenas verificar b.). O exemplo a seguir ilustra o que acabamos de dizer:

Exemplo 3.4.1. *Sejam E um espaço de Banach e $T : E \rightarrow E^*$ um operador linear simétrico, isto é, T é linear e*

$$T(x)(y) = T(y)(x)$$

para todos $x, y \in E$. Mostremos que T é contínuo. Em vista do Teorema do Gráfico Fechado, basta verificar que $G(T)$ é fechado. Para isto, seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência convergindo para x em E e suponha que $T(x_n) \rightarrow \phi$ em E^* . Fixado $y \in E$, tomando o limite quando $n \rightarrow \infty$,

$$\phi(y) \leftarrow T(x_n)(y) = T(y)(x_n) \rightarrow T(y)(x) = T(x)(y)$$

o que nos permite concluir que $T(x)(y) = \phi(y)$. Como $y \in E$ foi escolhido arbitrariamente, segue que $\phi = T(x)$, e portanto $G(T)$ é fechado.

Capítulo 4

Teoremas de Hahn-Banach

A essência do Teorema de Hahn-Banach, em sua versão para espaços normados, é que funcionais lineares contínuos definidos em um subespaço G de um espaço normado E podem ser estendidos a todo espaço E preservando a linearidade, continuidade e até mesmo o valor da norma. Nesse capítulo demonstraremos o Teorema de Hahn-Banach no caso real e no caso complexo. Antes disso, iremos apresentar algumas definições e enunciaremos o Lema de Zorn, pois ele será essencial na demonstração do caso real.

4.1 Lema de Zorn

Definição 4.1.1. a.) Uma **ordem parcial** no conjunto P é uma relação $\leq$ em P que satisfaz as seguintes propriedades:

- $x \leq x$ para todo $x \in P$ (reflexiva);
- Se $x, y \in P$, $x \leq y$ e $y \leq x$, então $x=y$ (antissimétrica);
- Se $x, y, z \in P$, $x \leq y$ e $y \leq z$, então $x \leq z$ (transitiva).

Neste caso diz-se que $(P, \leq)$ é um **conjunto parcialmente ordenado**.

No que segue $(P, \leq)$ é um conjunto parcialmente ordenado fixado.

- b.) Uma **cota superior** de um subconjunto Q de P , se existir, é um elemento $q \in P$ tal que $p \leq q$ para todo $p \in Q$.
- c.) Um **elemento maximal** de P , se existir, é um elemento $m \in P$ tal que se $p \in P$ e $q \leq p$ para todo $q \in P$, então $m=p$.
- d.) Um subconjunto Q de P é dito **totalmente ordenado** se para todos $p, q \in Q$, é verdade que $p \leq q$ ou $q \leq p$.

Teorema 4.1.1. (Lema de Zorn) Todo conjunto parcialmente ordenado, não-vazio, e no qual todo subconjunto totalmente ordenado tem cota superior, tem elemento maximal.

Não demonstraremos o Lema de Zorn, pois essa demonstração é de caráter muito técnico. Sua demonstração pode ser encontrada na referência [7].

4.2 Teorema da Extensão de Hahn-Banach

Estando familiarizado com o Lema de Zorn, podemos demonstrar o Teorema de Hahn-Banach para o caso real.

Teorema 4.2.1. (Teorema de Hahn-Banach - caso real) Sejam E um espaço vetorial sobre o corpo dos reais e $p : E \rightarrow \mathbb{R}$ uma função que satisfaz

$$p(ax) = ap(x), \forall a > 0 \text{ e } \forall x \in E, \text{ e}$$

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y), \forall x, y \in E.$$

Sejam também G um subespaço vetorial de E e $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional linear tal que $\varphi(x) \leq p(x)$ para todo $x \in G$. Então existe um funcional linear $\tilde{\varphi} : E \rightarrow \mathbb{R}$ que estende φ , isto é, $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x)$ para todo $x \in G$, e que satisfaz $\tilde{\varphi}(x) \leq p(x)$ para todo $x \in E$.

Demonstração.: Considere a seguinte família $\mathcal{P}$ de funcionais lineares definidos em subespaços de E que contém G :

$$\mathcal{P} = \left\{ \begin{array}{l} \phi : D(\phi) \subseteq E \rightarrow \mathbb{R} : D(\phi) \text{ é subespaço vetorial de } E, \\ \phi \text{ é linear, } G \subseteq D(\phi), \phi(x) = \varphi(x), \forall x \in G \\ \text{e } \phi(x) \leq p(x), \forall x \in D(\phi). \end{array} \right\}.$$

Em $\mathcal{P}$, definimos a relação

$$\phi_1 \leq \phi_2 \Leftrightarrow D(\phi_1) \subseteq D(\phi_2) \text{ e } \phi_2 \text{ estende } \phi_1, \\ \text{isto é, } \phi_2(x) = \phi_1(x), \forall x \in D(\phi_1).$$

Mostremos que essa relação é um relação de ordem parcial, ou seja, é reflexiva, anti-simétrica e transitiva. É claro que a relação é reflexiva, pois $D(\phi_1) \subseteq D(\phi_1)$ e $\phi_1(x) = \phi_1(x)$ para todo $x \in D(\phi_1)$, ou seja, $\phi_1 \leq \phi_1$. Vejamos a anti-simetria. Se $\phi_1 \leq \phi_2$, então $D(\phi_1) \subseteq D(\phi_2)$ e $\phi_2(x) = \phi_1(x)$ para todo $x \in D(\phi_1)$. Por outro lado, se $\phi_2 \leq \phi_1$, então $D(\phi_2) \subseteq D(\phi_1)$ e $\phi_1(x) = \phi_2(x)$ para todo $x \in D(\phi_2)$. Decorre disso tudo que $D(\phi_1) = D(\phi_2)$ e $\phi_1(x) = \phi_2(x)$ para todo $x \in D(\phi_1)$. Conclui-se que $\phi_1 = \phi_2$ e a anti-simetria está verificada. Agora, o que nos resta é mostrar a transitividade. Se $\phi_1 \leq \phi_2$, então $D(\phi_1) \subseteq D(\phi_2)$ e $\phi_2(x) = \phi_1(x)$ para todo $x \in D(\phi_1)$ e se $\phi_2 \leq \phi_3$, então $D(\phi_2) \subseteq D(\phi_3)$ e $\phi_3(x) = \phi_2(x)$ para todo $x \in D(\phi_2)$. Disso tudo decorre que $D(\phi_1) \subseteq D(\phi_3)$ e $\phi_3(x) = \phi_2(x) = \phi_1(x)$ para todo $x \in D(\phi_1)$, ou seja, $\phi_1 \leq \phi_3$. Logo, a relação é uma relação de ordem parcial.

Note que $\mathcal{P}$ é não-vazio, pois $\varphi \in \mathcal{P}$. Vejamos que todo subconjunto totalmente ordenado de $\mathcal{P}$ admite uma cota superior. Com efeito, dado $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}$ totalmente ordenado, defina $\phi : D(\phi) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$D(\phi) = \bigcup_{\theta \in \mathcal{Q}} D(\theta) \text{ e } \phi(x) = \theta(x) \text{ se } x \in D(\theta).$$

Note que a boa definição de ϕ decorre da ordenação total de $\mathcal{Q}$. É imediato que $\phi \in \mathcal{P}$ e que ϕ é cota superior para $\mathcal{Q}$. Podemos então usar o Lema de Zorn e concluir que $\mathcal{P}$ admite um elemento maximal, que será denotado por $\tilde{\varphi}$. Observe que para obter o resultado basta mostra que $D(\tilde{\varphi}) = E$. Para isso suponha que $D(\tilde{\varphi}) \neq E$. Nesse caso podemos escolher $x_0 \in E - D(\tilde{\varphi})$ e definir $\tilde{\phi} : D(\tilde{\phi}) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$D(\tilde{\phi}) = D(\tilde{\varphi}) + [x_0] \text{ e } \tilde{\phi}(x + tx_0) = \tilde{\varphi}(x) + t\alpha,$$

onde $[x_0]$ é o subespaço gerado por x_0 e α é uma constante que será escolhida posteriormente de forma a garantir que $\tilde{\phi} \in \mathcal{P}$. Queremos, por enquanto, que α satisfaça as seguintes desigualdades:

$$\tilde{\varphi}(x) + \alpha = \tilde{\phi}(x + x_0) \leq p(x + x_0), \forall x \in D(\varphi) \text{ e}$$

$$\tilde{\varphi}(x) - \alpha = \tilde{\phi}(x - x_0) \leq p(x - x_0), \forall x \in D(\varphi).$$

Para tanto basta escolher α de modo que

$$\sup_{x \in D(\tilde{\varphi})} \{\tilde{\varphi}(x) - p(x - x_0)\} \leq \alpha \leq \inf_{x \in D(\tilde{\varphi})} \{p(x + x_0) - \tilde{\varphi}(x)\}.$$

Felizmente tal escolha é possível pois para $x, y \in D(\tilde{\varphi})$ temos

$$\tilde{\varphi}(x) + \tilde{\varphi}(y) = \tilde{\varphi}(x + y) \leq p(x + y) = p(x + x_0 + y - x_0) \leq p(x + x_0) + p(y - x_0),$$

e consequentemente

$$\tilde{\varphi}(y) - p(y - x_0) \leq p(x + x_0) - \tilde{\varphi}(x)$$

para quaisquer $x, y \in D(\tilde{\varphi})$. Está estabelecido então que é possível escolher α atendendo aquelas duas exigências iniciais. Feito isso, concluímos que:

- Para $t > 0$,

$$\tilde{\phi}(x + tx_0) = \tilde{\phi}\left(t\left(\frac{x}{t} + x_0\right)\right) = t\tilde{\phi}\left(\frac{x}{t} + x_0\right) \leq tp\left(\frac{x}{t} + x_0\right) = p(x + tx_0).$$

- Para $t < 0$,

$$\tilde{\phi}(x + tx_0) = \tilde{\phi}\left(-t\left(\frac{x}{-t} - x_0\right)\right) = -t\tilde{\phi}\left(\frac{x}{-t} - x_0\right) \leq -tp\left(\frac{-x}{t} - x_0\right) = p(x + tx_0).$$

- Para $t = 0$,

$$\tilde{\phi}(x + tx_0) = \tilde{\phi}(x) = \tilde{\varphi}(x + tx_0) \leq p(x) = p(x + tx_0).$$

Segue então que $\tilde{\phi} \in \mathcal{P}$, $\tilde{\varphi} \leq \tilde{\phi}$ e $\tilde{\varphi} \neq \tilde{\phi}$. Como isso fere a maximalidade de $\tilde{\varphi}$, temos $D(\tilde{\varphi}) = E$ e o teorema está provado. ■

Teorema 4.2.2. (Teorema de Hahn-Banach - caso complexo) Sejam E um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ e $p : E \rightarrow \mathbb{R}$ uma função que satisfaz

$$p(ax) = |a|p(x), \quad \forall a \in \mathbb{K} \text{ e } \forall x \in E, \quad (4.1)$$

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y), \quad \forall x, y \in E. \quad (4.2)$$

Se $G \subseteq E$ é um subespaço vetorial e $\varphi : G \rightarrow \mathbb{K}$ é um funcional linear tal que $|\varphi(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in G$, então existe um funcional linear $\tilde{\varphi} : E \rightarrow \mathbb{K}$ que estende φ a E e que satisfaz $|\tilde{\varphi}(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in E$.

Demonstração.: Temos a partir de (4.1) e (4.2) que $p(x) \geq 0$ para todo $x \in E$, e isso será usado mais à frente. Com efeito, de (4.2) resulta que $p(0) = p(0 + 0) \leq 2p(0)$, e consequentemente $p(0) \geq 0$. De (4.1) resulta que $p(x) = p(-x)$ e assim, para todo $x \in E$,

$$2p(x) = p(x) + p(-x) \geq p(x + (-x)) = p(0) \geq 0.$$

Trataremos primeiro o caso real, isto é $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Nesse caso a hipótese nos garante que $\varphi(x) \leq p(x)$ para todo $x \in G$. O Teorema 4.2.1 garante a existência de um funcional linear $\tilde{\varphi} : E \rightarrow \mathbb{R}$ que estende φ a E e que satisfaz $\tilde{\varphi}(x) \leq p(x)$ para todo $x \in E$. Dessa desigualdade e de (4.1) temos

$$-\tilde{\varphi}(x) = \tilde{\varphi}(-x) \leq p(-x) = |-1|p(x) = p(x),$$

para todo $x \in E$. Logo, $|\tilde{\varphi}(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in E$.

Façamos agora o caso complexo $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Nesse caso E é um espaço vetorial complexo e φ toma valores em $\mathbb{C}$. Definindo $\varphi_1, \varphi_2 : G \rightarrow \mathbb{R}$ por $\varphi_1(x) = \operatorname{Re}(\varphi(x))$ e $\varphi_2(x) = \operatorname{Im}(\varphi(x))$, é claro que φ_1, φ_2 são lineares, tomam valores reais e $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$. Verifiquemos isso.

- É claro que $\varphi(x) = \varphi_1(x) + i\varphi_2(x)$, para todo $x \in G$, pois da definição, temos $\varphi_1(x) = \operatorname{Re}(\varphi(x))$ e $\varphi_2(x) = \operatorname{Im}(\varphi(x))$.
- Da definição de φ_1 e φ_2 segue que ambos tomam valores reais, pois $\varphi_1, \varphi_2 : G \rightarrow \mathbb{R}$.
- φ_1, φ_2 são lineares. Sejam $x, y \in E$ e $\alpha \in \mathbb{K}$.

$$\begin{aligned}\varphi_1(x + \alpha y) &= \operatorname{Re}(\varphi(x + \alpha y)) = \operatorname{Re}(\varphi(x) + \alpha\varphi(y)) &= \operatorname{Re}(\varphi(x)) + \operatorname{Re}(\alpha\varphi(y)) \\ & &= \operatorname{Re}(\varphi(x)) + \alpha\operatorname{Re}(\varphi(y)) \\ & &= \varphi_1(x) + \alpha\varphi_1(y).\end{aligned}$$

Analogamente, $\varphi_2(x + \alpha y) = \varphi_2(x) + \alpha\varphi_2(y)$.

Como artifício, chamaremos de $E_{\mathbb{R}}$ e $G_{\mathbb{R}}$ os espaços vetoriais reais subjacentes a E e G (isto é, como conjunto o respectivo espaço é o mesmo, a operação de adição é a mesma e a multiplicação por escalar é feita apenas com escalares reais). Então φ_1 e φ_2 são funcionais lineares sobre $G_{\mathbb{R}}$. Para $x \in G_{\mathbb{R}}$, obtemos

$$\varphi_1(x) \leq |\varphi_1(x)| \leq |\varphi(x)| \leq p(x).$$

Pelo Teorema 4.2.1 existe então um funcional linear $\widetilde{\varphi}_1 : E_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$ que estende φ_1 a $E_{\mathbb{R}}$ e que satisfaz $\widetilde{\varphi}_1(x) \leq p(x)$ para todo $x \in E_{\mathbb{R}}$. Estudemos agora o caso de φ_2 . Note que para $x \in G$,

$$i(\varphi_1(x) + i\varphi_2(x)) = i\varphi(x) = \varphi(ix) = \varphi_1(ix) + i\varphi_2(ix).$$

Portanto $\varphi_2(x) = -\varphi_1(ix)$ para todo $x \in G$. Definindo então

$$\widetilde{\varphi} : E \rightarrow \mathbb{C}, \widetilde{\varphi}(x) = \widetilde{\varphi}_1(x) - i\widetilde{\varphi}_1(ix),$$

segue que $\widetilde{\varphi} = \varphi$ para todo $x \in G$. Vejamos que $\widetilde{\varphi}$ é um funcional linear no espaço complexo E . De fato, $\widetilde{\varphi}(x + y) = \widetilde{\varphi}(x) + \widetilde{\varphi}(y)$ para todo $x, y \in E$, pois:

$$\begin{aligned}\widetilde{\varphi}(x + y) &= \widetilde{\varphi}_1(x + y) - i\widetilde{\varphi}_1(i(x + y)) = \widetilde{\varphi}_1(x) + \widetilde{\varphi}_1(y) - i(\widetilde{\varphi}_1(ix) + \widetilde{\varphi}_1(iy)) \\ &= \widetilde{\varphi}_1(x) + \widetilde{\varphi}_1(y) - i\widetilde{\varphi}_1(ix) - i\widetilde{\varphi}_1(iy) = (\widetilde{\varphi}_1(x) - i\widetilde{\varphi}_1(ix)) + (\widetilde{\varphi}_1(y) - i\widetilde{\varphi}_1(iy)) \\ &= \widetilde{\varphi}(x) + \widetilde{\varphi}(y).\end{aligned}$$

Dados $(a + bi) \in \mathbb{C}$ e $x \in E$, temos que

$$\begin{aligned}\widetilde{\varphi}((a + bi)x) &= \widetilde{\varphi}_1(ax + bix) - i\widetilde{\varphi}_1(i(ax + bix)) \\ &= a\widetilde{\varphi}_1(x) + b\widetilde{\varphi}_1(ix) - i(a\widetilde{\varphi}_1(ix) - b\widetilde{\varphi}_1(x)) \\ &= (a + ib)(\widetilde{\varphi}_1(x) - i\widetilde{\varphi}_1(ix)) = (a + ib)\widetilde{\varphi}(x).\end{aligned}$$

Mostremos finalmente que $|\widetilde{\varphi}(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in E$. Se $\widetilde{\varphi}(x) = 0$, então a desigualdade é óbvia pois $p(x) \geq 0$. Tome $x \in E$ tal que $\widetilde{\varphi}(x) \neq 0$. Então existe θ tal que $\widetilde{\varphi}(x) = |\widetilde{\varphi}(x)|e^{i\theta}$. Segue que $|\widetilde{\varphi}(x)| = e^{-i\theta}\widetilde{\varphi}(x) = \widetilde{\varphi}(e^{-i\theta}x)$. Como $|\widetilde{\varphi}(x)|$ é real, por (4.1), temos

$$|\widetilde{\varphi}(x)| = \widetilde{\varphi}(e^{-i\theta}x) = \widetilde{\varphi}_1(e^{-i\theta}x) \leq p(e^{-i\theta}x) = |e^{-i\theta}|p(x) = p(x).$$

■

4.3 Aplicações do Teorema de Hahn-Banach

Apresentamos a seguir algumas consequências do Teorema de Hahn-Banach que muitas vezes são chamadas de Teorema de Hahn-Banach por simplicidade.

Corolário 4.3.1. *Seja G um subespaço de um espaço normado E sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ e seja $\varphi : G \rightarrow \mathbb{K}$ um funcional linear contínuo. Então existe um funcional linear contínuo $\tilde{\varphi} : E \rightarrow \mathbb{K}$ cuja restrição a G coincide com φ e $\|\tilde{\varphi}\| = \|\varphi\|$.*

Demonstração. Primeiramente, definamos $p : E \rightarrow \mathbb{R}$; $p(x) = \|\varphi\| \cdot \|x\|$. Veja que para $a \in \mathbb{K}$ e $x, y \in E$, temos

- $p(ax) = \|\varphi\| \cdot \|ax\| = \|\varphi\| \cdot |a| \cdot \|x\| = |a| \cdot \|\varphi\| \cdot \|x\| = |a| \cdot p(x)$;
- $p(x + y) = \|\varphi\| \cdot \|x + y\| \leq \|\varphi\| \cdot (\|x\| + \|y\|) = \|\varphi\| \cdot \|x\| + \|\varphi\| \cdot \|y\| = p(x) + p(y)$.

Sabemos que $\varphi : G \rightarrow \mathbb{K}$ é um funcional linear. Logo,

$$|\varphi(x)| \leq \|\varphi\| \cdot \|x\| = p(x), \quad \forall x \in G.$$

Segue do teorema anterior que existe um funcional linear contínuo $\tilde{\varphi} : E \rightarrow \mathbb{K}$ que estende φ a E , ou seja, $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x)$ para todo $x \in G$, e que $|\tilde{\varphi}(x)| \leq p(x) = \|\varphi\| \cdot \|x\|$ para todo $x \in E$. Como $\tilde{\varphi}$ estende φ , segue que $\|\tilde{\varphi}\| \geq \|\varphi\|$. E como $|\tilde{\varphi}(x)| \leq p(x) = \|\varphi\| \cdot \|x\|$ para todo $x \in E$, temos $\|\tilde{\varphi}\| \leq \|\varphi\|$. Portanto, $\|\tilde{\varphi}\| = \|\varphi\|$. ■

Corolário 4.3.2. *Seja E um espaço normado. Para todo $x_0 \in E, x_0 \neq 0$, existe um funcional linear $\varphi \in E'$ tal que $\|\varphi\| = 1$ e $\varphi(x_0) = \|x_0\|$.*

Demonstração. Aplique o Corolário 4.3.1 para $G = [x_0]$ e $\varphi(ax_0) = a\|x_0\|$. ■

Corolário 4.3.3. *Sejam E um espaço normado, $E \neq 0$, e $x \in E$. Então*

$$\|x\| = \sup\{|\varphi(x)| : \varphi \in E' \text{ e } \|\varphi\| \leq 1\} = \max\{|\varphi(x)| : \varphi \in E' \text{ e } \|\varphi\| = 1\}.$$

Demonstração. Para cada funcional $\varphi \in E^*$, $\|\varphi\| \leq 1$, é imediato que $|\varphi(x)| \leq \|\varphi\| \cdot \|x\| \leq \|x\|$. Isso mostra que $\sup\{|\varphi(x)| : \varphi \in E^* \text{ e } \|\varphi\| \leq 1\} \leq \|x\|$. O fato do supremo ser atingido em um funcional de norma 1 é garantido pelo Corolário 4.3.2. ■

Teorema 4.3.1. *Sejam E um espaço normado não trivial e E^* seu espaço dual. Então*

- i. *Se $x \neq y \in E$, então existe $\varphi \in E^*$ com $\varphi(x) \neq \varphi(y)$;*
- ii. *Se $x \in E$ satisfaz $\varphi(x) = 0$ para todo $\varphi \in E^*$, então $x = 0$.*

Demonstração. i.) Se $x \neq y \in E$, então $x - y \neq 0$. Pelo Corolário 4.3.2, existe $\varphi \in E'$ com $\varphi(x - y) = \|x - y\| \neq 0$. Isso implica que $\varphi(x) - \varphi(y) = \varphi(x - y) \neq 0$. Portanto, $\varphi(x) \neq \varphi(y)$.

ii.) Suponha, por absurdo, que $0 \neq x \in E$. Pelo Corolário 4.3.2 existe $\varphi \in E^*$ com $\varphi(x) = \|x\| \neq 0$. Contradição! Portanto, $x = 0$. ■

Proposição 4.3.1. *Sejam X um subespaço vetorial próprio de E e $x \in E - X$. Se $0 < \delta = d(x, X) = \inf\{\|x - y\| : y \in X\}$, então existe $\varphi \in E^*$ satisfazendo*

$$\|\varphi\| = 1, \quad \varphi(x) = \delta \text{ e } \varphi|_X = 0.$$

Demonstração.: A distância δ entre x e o subespaço X é maior do que zero, pois X é fechado. Seja $[x, X]$ o conjunto gerado por X e x , ou seja, os elementos desse conjunto são da forma $\lambda x + y$ tal que $\lambda \in \mathbb{K}$ e $y \in X$. Defina o funcional linear $g : [x, X] \rightarrow \mathbb{K}$ por

$$g(\lambda x + y) = \lambda \delta.$$

Evidentemente $g|_X = 0$. Pela definição de δ tem-se (para $\lambda \neq 0$)

$$|g(\lambda x + y)| = |\lambda| \cdot |\delta| \leq |\lambda| \left\| x + \frac{y}{\lambda} \right\| = \|\lambda x + y\|$$

e, assim, $\|g\| \leq 1$. Para cada $y \in X$ tem-se

$$\|g\| \geq \frac{|g(x - y)|}{\|x - y\|} = \frac{\delta}{\|x - y\|},$$

e disso segue que

$$\|g\| \geq \sup_{y \in X} \frac{\delta}{\|x - y\|} = \frac{\delta}{\inf_{y \in X} \|x - y\|} = \frac{\delta}{\delta} = 1.$$

Portanto, $\|g\| = 1$. Aplicando o Teorema de Hahn-Banach, existe $\varphi \in E^*$ tal que $\varphi(\lambda x + y) = g(\lambda x + y)$ para todos $\lambda x + y \in [x, X]$ e $\|\varphi\| = \|g\|$. Logo, $\|\varphi\| = 1$, $\varphi(x) = g(x) = \delta$ e $\varphi|_X = 0$. ■

Como E^* é um espaço de Banach, está definido $E^{**} = (E^*)^*$ chamado de **bidual** de E . Há uma forma natural de identificar elementos de E com elementos do seu bidual: a cada $x \in E$ associa-se $\hat{x} \in E^{**}$ por

$$\hat{x}(\varphi) := \varphi(x), \quad \varphi \in E^*.$$

Esta aplicação é chamada de **aplicação canônica** de E em E^{**} , e vale:

Proposição 4.3.2. *A aplicação $\hat{\cdot} : E \rightarrow E^{**}$ definida acima é uma isometria linear.*

Demonstração.: A linearidade da aplicação canônica $\hat{\cdot}$ decorre facilmente da definição. O fato de ser isometria decorre de

$$\|\hat{x}\| = \sup \{|\hat{x}(\varphi)| : \varphi \in E^* \text{ e } \|\varphi\| = 1\} = \sup \{|\varphi(x)| : \varphi \in E^* \text{ e } \|\varphi\| = 1\} = \|x\|,$$

sendo que na última igualdade foi utilizado o Corolário 4.3.3.

Capítulo 5

Operadores Adjuntos em Espaços Normados

Apresentaremos nesse capítulo a definição de operador adjunto e um resultado. Começamos pela definição.

Definição 5.0.1. *Seja $T \in \mathcal{L}(E, F)$. O operador $T^* : F^* \rightarrow E^*$ definido por*

$$T^*(\varphi)(x) := \varphi(T(x)), \quad \forall x \in E \text{ e } \varphi \in F^*,$$

*é chamado de **operador adjunto** de T .*

Proposição 5.0.1. *Se $T \in \mathcal{L}(E, F)$, então $T^* \in \mathcal{L}(F^*, E^*)$ e, ainda, $\|T^*\| = \|T\|$.*

Demonstração.: A linearidade de T^* é clara. Sejam $\varphi, \gamma \in F^*$, $\alpha \in \mathbb{K}$. Tome $x \in E$. Daí,

$$T^*(\varphi + \alpha\gamma)(x) = (\varphi + \alpha\gamma)(T(x)) = \varphi(T(x)) + \alpha\gamma(T(x)) = T^*(\varphi)(x) + \alpha T^*(\gamma)(x).$$

Além disso, como para todo $\psi \in F^*$

$$\|T^*(\psi)(x)\| = \|\psi(T(x))\| \leq \|\psi\| \|T\| \|x\|, \quad \forall x \in E,$$

vem que $\|T^*(\psi)\| \leq \|T\| \|\psi\|$, ou seja, $T^* \in L(F^*, E^*)$ e $\|T^*\| \leq \|T\|$.

Pelo Corolário 4.3.2, dado $0 \neq x_0 \in E$, existe $\varphi \in F^*$ de maneira que $\varphi(T(x_0)) = \|T(x_0)\|$ e $\|\varphi\| = 1$. Assim,

$$\|T(x_0)\| = \|\varphi(T(x_0))\| = |(T^*(\varphi)(x_0))| \leq \|T^*\| \|\varphi\| \|x_0\|,$$

de forma que $\|T\| \leq \|T^*\|$. Portanto $\|T^*\| = \|T\|$. ■

Capítulo 6

Propriedade de Daugavet

Apresentamos neste capítulo a definição da Propriedade de Daugavet e alguns resultados de D. Werner [2]. Começamos pela definição de tal propriedade.

Definição 6.0.1. *Um espaço de Banach E tem a **propriedade de Daugavet** se*

$$\|Id + T\| = 1 + \|T\| \quad (\text{DE})$$

para todo operador $T : E \rightarrow E$ de posto 1, isto é, tal que $\dim T(E) = 1$.

Vejamos que é suficiente verificar (DE) para os operadores de norma 1. Isso segue do lema abaixo.

Lema 6.0.1. *Se dois vetores u e v em um espaço normado satisfazem a equação*

$$\|u + v\| = \|u\| + \|v\|,$$

então $\|\alpha u + \beta v\| = \alpha\|u\| + \beta\|v\|$ para todos $\alpha, \beta \geq 0$.

Demonstração.: Podemos assumir $\alpha \geq \beta \geq 0$ sem perda de generalidade. Da desigualdade triangular temos que $\|\alpha u + \beta v\| \leq \alpha\|u\| + \beta\|v\|$. A partir disso, segue que

$$\begin{aligned} \alpha\|u\| + \beta\|v\| \geq \|\alpha u + \beta v\| &= \|\alpha(u + v) - (\alpha - \beta)v\| \\ &\geq \|\alpha(u + v)\| - \|(\alpha - \beta)v\| \\ &= \alpha\|u + v\| - (\alpha - \beta)\|v\| \\ &= \alpha(\|u\| + \|v\|) - (\alpha - \beta)\|v\| \\ &= \alpha\|u\| + \beta\|v\|. \end{aligned}$$

Portanto, $\|\alpha u + \beta v\| = \alpha\|u\| + \beta\|v\|$. ■

Corolário 6.0.1. *Se um operador limitado T em um espaço de Banach satisfaz a propriedade de Daugavet, então para cada $\alpha \geq 0$ o operador αT também satisfaz.*

Demonstração.: Como T satisfaz a equação de Daugavet, então $\|Id + T\| = 1 + \|T\|$. Assim, aplicando o lema acima, temos que $\|\beta Id + \alpha T\| = \beta + \|\alpha T\|$ para todos $\alpha, \beta \geq 0$. Tomando $\beta = 1$ e $\alpha \geq 0$, temos que $\|Id + \alpha T\| = 1 + \|\alpha T\|$. Logo, o operador αT satisfaz a propriedade de Daugavet. ■

Denotaremos por $B_E = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$ a bola unitária fechada em E e por $S_E = \{x \in E : \|x\| = 1\}$ a esfera unitária em E .

Exemplo 6.0.1. *Se K é um espaço de Hausdorff compacto sem pontos isolados, mostraremos que $C(K)$ tem a propriedade de Daugavet. Por outro lado, se K tem um ponto isolado k_0 , o operador $T : C(K) \rightarrow C(K)$ de posto 1 dado por $T(f) = -f(k_0)\chi_{\{k_0\}}$ não satisfaz (DE). Verifiquemos isso.*

- T está bem definido.

Observe que $\chi_{\{k_0\}}$ assume apenas os valores em 0 e 1. Assim, dado U aberto em $\mathbb{R}$ temos:

- i. $0 \text{ e } 1 \in U \Rightarrow (\chi_{\{k_0\}})^{-1}(U) = K$ é aberto.
- ii. $0 \in U \text{ e } 1 \notin U \Rightarrow (\chi_{\{k_0\}})^{-1}(U) = K - \{k_0\}$ é aberto.
- iii. $0 \notin U \text{ e } 1 \in U \Rightarrow (\chi_{\{k_0\}})^{-1}(U) = \{k_0\}$ é aberto.

Logo, $\chi_{\{k_0\}}$ é contínuo. Portanto, T está bem definido.

- T é linear.

Dados $f, g \in C(K)$ e $\alpha \in \mathbb{K}$,

$$T(f + \alpha g) = -(f + \alpha g)(k_0)\chi_{\{k_0\}} = -f(k_0)\chi_{\{k_0\}} - \alpha g(k_0)\chi_{\{k_0\}} = T(f) + \alpha T(g).$$

- $\|T\| = 1$.

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup\{\|T(f)\| : f \in B_{C(K)}\} \\ &= \sup\{\| -f(k_0)\chi_{\{k_0\}} \| : f \in B_{C(K)}\} \\ &= \sup\{\sup\{| -f(k_0)\chi_{\{k_0\}}(t) | : t \in K\} : f \in B_{C(K)}\} \\ &= \sup\{|f(k_0)| : f \in B_{C(K)}\} \\ &\leq \sup\{\|f\| : f \in B_{C(K)}\} \leq 1. \end{aligned}$$

Tome $f = \chi_{\{k_0\}}$. Daí, $T(\chi_{\{k_0\}}) = -\chi_{\{k_0\}}(k_0) \cdot \chi_{\{k_0\}} = -\chi_{\{k_0\}} \in S_{B(K)}$. Logo, $\|T\| = 1$.

- $\|Id + T\| \leq 1$.

$$\begin{aligned} \|Id + T\| &= \sup\{\|f + T(f)\| : f \in B_{C(K)}\} \\ &= \sup\{\|f - f(k_0) \cdot \chi_{\{k_0\}}\| : f \in B_{C(K)}\} \\ &= \sup\{\sup\{|f(t) - f(k_0)\chi_{\{k_0\}}(t)| : t \in K\} : f \in B_{C(K)}\} \\ &= \sup\{\sup\{|f(t)| : t \in K - \{k_0\}\} : f \in B_{C(K)}\}, \text{ pois } f(k_0) - f(k_0)\chi_{\{k_0\}}(k_0) = 0 \\ &\leq \sup\{\|f\| : f \in B_{C(K)}\} \leq 1. \end{aligned}$$

Logo, $\|Id + T\| \neq 1 + \|T\|$, pois, $\|Id + T\| \leq 1$ e $1 + \|T\| = 2$. Portanto, T não satisfaz (DE).

Definição 6.0.2. Sejam $x^* \in S_{E^*}$ e $\alpha > 0$. Uma **fatia** da bola unitária de E é um conjunto dado por

$$S(x^*, \alpha) = \{x \in B_E : \operatorname{Re} x^*(x) \geq 1 - \alpha\}.$$

A partir de agora, suporemos por simplicidade que estamos trabalhando com escalares reais.

Proposição 6.0.1. Seja E um espaço de Banach. São equivalentes:

- i. E tem a propriedade de Daugavet.
- ii. Para toda fatia $S = S(x_0^*, \epsilon_0)$ de B_E , todo $x_0 \in S_E$ e todo $\epsilon > 0$, existe um ponto $x \in S$ tal que $\|x + x_0\| \geq 2 - \epsilon$.
- iii. Para toda fatia $S = S(x_0^*, \epsilon_0)$ de B_E , todo $x_0 \in S_E$ e todo $\epsilon > 0$, existe uma fatia S' de B_E contida em S tal que $\|x + x_0\| \geq 2 - \epsilon$ para todo $x \in S'$.

Demonstração.: *i.) $\Rightarrow$ ii.)* Dados $S = S(x_0^*, \epsilon_0)$, $x_0 \in S_E$ e $0 < \epsilon < 1$, defina $T : E \rightarrow E$ por $T(x) = x_0^*(x)x_0$. Observe que $\|T\| = 1$. Como E tem a propriedade de Daugavet, $\|Id + T\| = 1 + \|T\| = 2$. Tome $\bar{\epsilon} = \min\{\frac{\epsilon}{3}, \epsilon_0\}$. Assim, existe $y \in S_E$ tal que $\|y + T(y)\| > 2 - \bar{\epsilon}$, ou seja,

$$\|y + x_0^*(y)x_0\| > 2 - \bar{\epsilon}.$$

Daí,

$$2 - \bar{\epsilon} < \|y + x_0^*(y)x_0\| \leq \|y\| + |x_0^*(y)| \cdot \|x_0\| = 1 + |x_0^*(y)|.$$

Assim,

$$|x_0^*(y)| > 1 - \bar{\epsilon} \Rightarrow -\bar{\epsilon} < |x_0^*(y)| - 1 \leq 0 < \bar{\epsilon} \Rightarrow ||x_0^*(y)| - 1| < \bar{\epsilon}.$$

Tome $w = \frac{|x_0^*(y)|}{x_0^*(y)}$. Observe que $|w| = 1$ e $wy \in S_E \subseteq B_E$. Além disso,

$$x_0^*(wy) = wx_0^*(y) = |x_0^*(y)| > 1 - \bar{\epsilon} \geq 1 - \epsilon_0 \Rightarrow wy \in S.$$

Seja $x = wy \in S$. Então,

$$\begin{aligned} \|x + x_0\| &= \left\| \frac{|x_0^*(y)|}{x_0^*(y)} \cdot y + x_0 \right\| = \left\| \frac{|x_0^*(y)| \cdot y + x_0^*(y)x_0}{x_0^*(y)} \right\| = \left\| \frac{(x_0^*(y)x_0 + y) + (|x_0^*(y)| - 1)y}{x_0^*(y)} \right\| \\ &\geq \frac{\|y + x_0^*(y)x_0\|}{|x_0^*(y)|} - \left| \frac{|x_0^*(y)| - 1}{x_0^*(y)} \right| \cdot \|y\| \\ &> 2 - \bar{\epsilon} - \left| \frac{|x_0^*(y)| - 1}{x_0^*(y)} \right| > 2 - \bar{\epsilon} - \left| \frac{\bar{\epsilon}}{x_0^*(y)} \right| \\ &> 2 - \bar{\epsilon} - \frac{\bar{\epsilon}}{1 - \bar{\epsilon}} \\ &> 2 - \bar{\epsilon} - 2\bar{\epsilon} = 2 - 3\bar{\epsilon} > 2 - \epsilon. \end{aligned}$$

ii.) $\Rightarrow$ i.) Seja $T : E \rightarrow E$ um operador de posto um e norma um. Então, existem $x_0 \in S_E$ e $x_0^* \in S_{E^*}$ tais que

$$T(x) = x_0^*(x)x_0.$$

Seja $\epsilon > 0$ dado. Queremos mostrar que

$$\|Id + T\| > 2 - \epsilon.$$

Considere $S = S(x_0^*, \frac{\epsilon}{2})$. Pelo item ii.), existe $x \in S$ tal que

$$\|x + x_0\| \geq 2 - \frac{\epsilon}{2}.$$

Como $x \in S$, temos $x_0^*(x) \geq 1 - \frac{\epsilon}{2}$. Daí,

$$\begin{aligned} \|Id + T\| &\geq \|x + T(x)\| = \|x + x_0^*(x)x_0\| = \|x + x_0 - x_0 + x_0^*(x)x_0\| \\ &\geq \|x + x_0\| - \|x_0 - x_0^*(x)x_0\| \\ &\geq 2 - \frac{\epsilon}{2} - \|x_0\| \cdot |1 - x_0^*(x)| \\ &= 2 - \frac{\epsilon}{2} - |1 - x_0^*(x)| > 2 - \frac{\epsilon}{2} - \frac{\epsilon}{2} = 2 - \epsilon, \end{aligned}$$

pois

$$1 - \frac{\epsilon}{2} \leq x_0^*(x) \leq 1 < 1 + \frac{\epsilon}{2} \Rightarrow -\frac{\epsilon}{2} \leq x_0^*(x) - 1 < \frac{\epsilon}{2} \Rightarrow |1 - x_0^*(x)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Portanto, fazendo $\epsilon \rightarrow 0$, $\|Id + T\| \geq 2$. Também, $\|Id + T\| \leq 1 + \|T\| = 2$, ou seja, $\|Id + T\| = 2 = 1 + \|T\|$. Logo, T satisfaz (DE) .

i.) $\Rightarrow$ *iii.*) Seja $T(x) = x_0^*(x)x_0$. Então T satisfaz (DE) . Agora, considere o operador identidade Id_E . Da definição, temos que o operador $Id^* : E^* \rightarrow E^*$ é definido por $Id^*(\varphi) = \varphi \circ Id_E = \varphi = Id_{E^*}(\varphi)$ para toda $\varphi \in E^*$. Portanto, $Id^* = Id_{E^*}$. E daí

$$2 = 1 + \|T\| = \|Id + T\| = \|(Id + T)^*\| = \|Id^* + T^*\| = \|Id_{E^*} + T^*\|.$$

Disso decorre que $\|Id_{E^*} + T^*\| = 2$. Isso implica que existe um funcional $y^* \in S_{E^*}$ tal que $\|y^* + T^*(y^*)\| > 2 - \epsilon_0$. Tome $w = \frac{|y^*(x_0)|}{y^*(x_0)}$ e $x^* = wy^*$. Então

$$x^*(x_0) = wy^*(x_0) = |y^*(x_0)| \geq 0$$

e

$$\|x^* + T^*(x^*)\| = \|wy^* + wT^*(y^*)\| = |w| \cdot \|y^* + T^*(y^*)\| > 2 - \epsilon_0.$$

Escolha

$$x_1^* = \frac{x^* + T^*(x^*)}{\|x^* + T^*(x^*)\|} \quad e \quad \epsilon_1 = 1 - \frac{2 - \epsilon_0}{\|x^* + T^*(x^*)\|}.$$

Desta forma, dado $x \in S' = S(x_1^*, \epsilon_1)$, temos

$$\begin{aligned} (Id + T^*)(x^*)(x) &= (x^* + T^*(x^*))(x) = \|x^* + T^*(x^*)\|x_1^*(x) \\ &\geq \|x^* + T^*(x^*)\|(1 - \epsilon_1) \\ &= \|x^* + T^*(x^*)\| \left(\frac{2 - \epsilon_0}{\|x^* + T^*(x^*)\|} \right) = 2 - \epsilon_0. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} 2 - \epsilon_0 &\leq (Id + T^*)(x^*)(x) = x^*(x) + T^*(x^*)(x) \\ &= x^*(x) + x^* \circ T(x) = x^*(x_0^*(x)x_0) + x^*(x) \\ &= x_0^*(x)x^*(x_0) + x^*(x). \end{aligned}$$

Daí, $x_0^*(x) \geq x_0^*(x)x^*(x_0) \geq 2 - \epsilon_0 - x^*(x) \geq 2 - \epsilon_0 - 1 = 1 - \epsilon_0$, isto é, $x \in S(x_0^*, \epsilon_0)$.

Desta forma, $S' \subseteq S(x_0^*, \epsilon_0)$. Além disso, temos

$$x^*(x) + x^*(x_0) \geq x^*(x) + x_0^*(x)x^*(x_0) \geq 2 - \epsilon_0,$$

que implica que

$$\|x + x_0\| = \sup_{z^* \in B_{E^*}} \|z^*(x + x_0)\| \geq x^*(x + x_0) \geq 2 - \epsilon_0.$$

Note que podemos assumir sem perda de generalidade que $\epsilon = \epsilon_0$.

iii.) $\Rightarrow$ *ii.*) Basta escolher $x \in S'$ em *iii.*) ■

Desse teorema obtemos o corolário a seguir. Usaremos a notação

$$\Delta_\epsilon(x) = \{y \in B_E : \|x - y\| \geq 2 - \epsilon\},$$

para $x \in S_E$ e $\epsilon > 0$.

Antes de enunciar o corolário lembramos que se A é um subconjunto de um espaço vetorial X , o conjunto $co(A)$, chamado de **envoltória convexa** de A , é definido como a interseção de todos os convexos de X que contém A . Além disso,

$$co(A) = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i : \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \text{ com } \lambda_i \geq 0, x_i \in A \right\}.$$

A demonstração dessa igualdade se encontra [[9], Theorem 4.2.3]. E denotemos $\overline{co}(A) = \overline{co(A)}$.

Corolário 6.0.2. *Um espaço de Banach E tem a propriedade de Daugavet se, e somente se, $B_E = \overline{co}\Delta_\epsilon(x)$ para todos $x \in S_E$ e $\epsilon > 0$.*

Demonstração.: ($\Leftarrow$) Provaremos que vale o item ii.) da Proposição 6.0.1 e, portanto, E tem a propriedade de Daugavet. Suponha por absurdo que existam $S = S(x_0^*, \epsilon_0)$, $x_0 \in S_E$ e $\epsilon > 0$ tais que $\|x + x_0\| < 2 - \epsilon$ para todo $x \in S$. Assim,

$$\Delta_\epsilon(-x_0) = \{x \in B_E : \|x + x_0\| \geq 2 - \epsilon\} \subseteq \{x \in B_E : x_0^*(x) < 1 - \epsilon_0\}.$$

Daí, como $\{x \in B_E : x_0^*(x) > 1 - \epsilon_0\}$ é convexo, temos

$$co\Delta_\epsilon(-x_0) \subseteq \{x \in B_E : x_0^*(x) < 1 - \epsilon_0\}.$$

Desta forma,

$$\overline{co}\Delta_\epsilon(-x_0) \subseteq \{x \in B_E : x_0^*(x) \leq 1 - \epsilon_0\}.$$

Agora $B_E = \overline{co}\Delta_\epsilon(-x_0)$, então $B_E \subseteq \{x \in B_E : x_0^*(x) \leq 1 - \epsilon_0\}$. Mas isso é absurdo, pois $\|x_0^*\| = 1$ e portanto deve existir $y \in B_E$ tal que $x_0^*(y) > 1 - \epsilon_0$.

($\Rightarrow$) A demonstração desta implicação pode ser verificada fazendo o uso da Segunda forma geométrica do Teorema de Hahn-Banach. Optamos por não apresentá-la aqui já que não apresentamos esta versão do Teorema de Hahn-Banach. ■

Exemplo 6.0.2. *Se K é um espaço de Hausdorff compacto sem pontos isolados, mostremos que $C(K)$ tem a propriedade de Daugavet fazendo uso do corolário anterior.*

Vamos mostrar que $B_{C(K)} = \overline{co}\Delta_\epsilon(f)$ para todos $f \in S_{C(K)}$ e $\epsilon > 0$. Claramente $\overline{co}\Delta_\epsilon(f) \subseteq B_{C(K)}$. Provemos que $B_{C(K)} \subseteq \overline{co}\Delta_\epsilon(f)$. Sejam $f \in S_{C(K)}$ e $\epsilon > 0$. Tome

$$U = \{t \in K : |f(t)| > 1 - \frac{\epsilon}{2}\} = f^{-1}\left(\mathbb{K} - B\left[0, 1 - \frac{\epsilon}{2}\right]\right).$$

Como f é contínua, U é aberto. Dado $n \in \mathbb{N}$, escolha $U_1, \dots, U_n$ subconjuntos abertos disjuntos não vazios de U e pontos $t_j \in U_j$. Pelo Lema de Urysohn, existem funções contínuas $\varphi_j : K \rightarrow [0, 1]$ tais que

$$\varphi_j(t) = \begin{cases} 1 & , t = t_j \\ 0 & , t \in K - U_j \end{cases}.$$

Agora, seja $h \in B_{C(K)}$. Defina funções $g_j : K \rightarrow \mathbb{K}$ por

$$g_j(t) = h(t)(1 - \varphi_j(t)) - \varphi_j(t)f(t).$$

Então, $g_j \in C(K)$, $g_j(t_j) = -f(t_j)$, $g_j(t) = h(t)$, para todo $t \notin U_j$, e

$$\begin{aligned} |g_j(t)| &\leq |h(t)|(1 - \varphi_j(t)) + \varphi_j(t)|f(t)| \\ &\leq 1 \cdot (1 - \varphi_j(t)) + \varphi_j(t) \cdot 1 \\ &= 1 \\ &\Rightarrow \|g_j\|_\infty \leq 1. \end{aligned}$$

Mostremos que $g_j \in \Delta_\epsilon(f)$. De fato,

$$\begin{aligned} |g_j(t_j) - f(t_j)| &= |-2f(t_j)| = 2|f(t_j)| > 2(1 - \frac{\epsilon}{2}) = 2 - \epsilon \\ \Rightarrow \|g_j - f\| &> 2 - \epsilon \Rightarrow g_j \in \Delta_\epsilon(f). \end{aligned}$$

Além disso, se $t \in U_i$ então

$$\begin{aligned}
 \left| h(t) - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n g_j(t) \right| &= \left| h(t) - \frac{n-1}{n} h(t) - \frac{1}{n} g_i(t) \right| \\
 &= \left| \frac{1}{n} h(t) - \frac{1}{n} g_i(t) \right| \\
 &= \frac{1}{n} |h(t) - g_i(t)| \\
 &\leq \frac{\frac{2}{n}}{n},
 \end{aligned}$$

e se $t \notin \bigcup_{j=1}^n U_j$ então

$$h(t) - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n g_j(t) = h(t) - \frac{n}{n} h(t) = 0.$$

Logo,

$$\left\| h - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n g_j \right\| \leq \frac{2}{n} \longrightarrow 0,$$

quando $n \rightarrow \infty$. Portanto, $h \in \overline{\text{co}}\Delta_\epsilon(f)$. Como h é qualquer em $B_{C(K)}$, concluímos que $B_{C(K)} \subseteq \overline{\text{co}}\Delta_\epsilon(f)$.

Referências Bibliográficas

- [1] C. R. Oliveira. *Introdução à Análise Funcional*. Rio de Janeiro : IMPA, 2001.
- [2] D. Werner. *Recent progress on the Daugavet property*. Irish Math. Soc. Bull. **46** (2001), 77-97.
- [3] E. L. Lima. *Espaços Métricos*. Rio de Janeiro: IMPA, 2003.
- [4] G. Botelho, D. Pellegrino, E. Teixeira. *Fundamentos de Análise Funcional*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.
- [5] I. K. Daugavet. *On a property of completely continuous operators in the space C* . Uspekhi Mat. Nauk **18** (1963), 157-158 (em russo).
- [6] J. Mujica. *Notas de Aula de Análise Funcional*.
- [7] J. Mujica. *Notas de Aula de Topologia Geral*.
- [8] J. R. Munkres. *Topology*. Massachusetts Institute of Technology, 1954.
- [9] L. Narici e E. Beckenstein. *Topological Vector Spaces*. Chapman and Hall/CRC, New York, 2010.
- [10] M. Martín, T. Oikhberg. *An alternative Daugavet property*. J. Math. Anal. Appl. **294** (2004), 158-180.
- [11] O. S. Queiroz. *Notas de Aula de Análise Funcional*.
- [12] P. Wojtaszczyk. *Some remarks on the Daugavet equation*. Proc. Amer. Math. Soc. **115** (1992), 1047-1052.
- [13] P.J. Fernandez. *Medida e Integração*. Rio de Janeiro: IMPA, 2002.
- [14] R. Bartle. *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*. New York: J. Wiley, 1995.
- [15] V. M. Kadets, R. V. Shvidkoy, G. G. Sirotkin, D.Werner. *Banach spaces with the Daugavet property*. Trans. Amer. Math. Soc. **352** (2000), 855-873.