

FRANCISCO AURILO AZEVEDO PINHO

SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE GRANDES ESCALAS
EM CAVIDADES TRIDIMENSIONAIS COM TAMPA
DESLIZANTE UTILIZANDO MODELAGEM DINÂMICA



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

2006

FRANCISCO AURILO AZEVEDO PINHO

SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE GRANDES ESCALAS EM
CAVIDADES TRIDIMENSIONAIS COM TAMPA DESLIZANTE
UTILIZANDO MODELAGEM DINÂMICA

Tese apresentada ao programa de
Pós-Graduação em Engenharia
Mecânica da Universidade federal de
Uberlândia como parte dos requisitos
para a obtenção do título de DOUTOR
EM ENGENHARIA MECÂNICA.

Área de concentração: Transferência
de Calor e Mecânica dos Fluidos

Orientador: Aristeu Silveira Neto

UBERLÂNDIA – MG

2006

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

- P654s Pinho, Francisco Aurilo Azevedo, 1967-
 Simulação numérica de grandes escalas em cavidades tridimensionais
 com tampa deslizante utilizando modelagem dinâmica / Francisco Aurilo
 Azevedo Pinho. - 2006.
 124 f.: il.
- Orientador: Aristeu Silveira Neto.
 Tese (doutorado) – Universidade Federal de Uberlândia, Programa de
 Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.
 Inclui referências bibliográficas.
1. Mecânica dos fluidos - Teses. 2. Turbulência - Teses. I. Silveira
Neto, to, Aristeu. II. Universidade Federal de Uberlândia. Programa
de Pós- Gra Graduação em Engenharia Mecânica. III. Título.

CDU: 532

*Aos meus pais Iradi e Lunguinha
e a minha esposa Norma*

*... nada mais faço, a não ser andar
por aí convencendo-vos, jovens e
velhos, a não cuidar com tanto afinho
do corpo e das riquezas, como de
melhorar o mais possível a alma,
dizendo-vos que dos haveres não
provém a virtude para os homens,
mas da virtude provêm todos os bens
particulares e públicos.*

(Platão – Apologia de Sócrates)

Agradecimentos

Ao meu amigo e orientador Aristeu Silveira Neto que acreditou no meu trabalho até quando eu mesmo não acreditava e pelos valiosos ensinamentos ao longo de nossa convivência.

Aos meus pais José de Azevedo Pinho e Lunguinha Azevedo Pinho, por todo o amor, paciência e confiança que me depositaram durante toda a vida.

À minha esposa, Norma Lucia da Silva, pelo amor, dedicação e presença constante sem a qual não teria sido possível a realização deste trabalho.

Ao amigo Sandro Metreville Marcondes de Lima e Silva e a amiga Ana Lucia Fernandes de Lima e Silva pelo companheirismo e incentivo.

Aos meus colegas do Laboratório de Transferência de Calor e Massa e Dinâmica dos Fluidos pela convivência harmoniosa que tornou prazerosa a execução do presente trabalho. Em especial ao amigo Santos Alberto Henriquez Remigio pela inestimável ajuda.

Aos participantes da banca de qualificação Profa. Dra. Sezimária de Fátima Pereira Saramago, Prof. Dr. Gilmar Guimarães, Prof. Dr. Carlos Roberto Ribeiro e Dr. Elie Luis Martínez Padilla pelo direcionamento dado ao presente trabalho.

Aos professores da Faculdade de Engenharia Mecânica pela dedicação e empenho.

Aos funcionários da Faculdade de Engenharia Mecânica pela presteza e atenção.

À Universidade Federal de Uberlândia e à Faculdade de Engenharia Mecânica pela oportunidade realizar o presente trabalho.

À Capes e ao CNPq pelos recursos disponibilizados para a realização do presente trabalho.

PINHO, F. A. A., Simulação Numérica de Grandes Escalas em Cavidades com Tampa Deslizante Tridimensionais Utilizando Modelagem Dinâmica, Tese de Doutorado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia-MG, Brasil.

Resumo

No presente trabalho foi implementado um código computacional de segunda ordem no tempo e de quarta ordem no espaço, com modelagem dinâmica da turbulência, apropriada para se analisar o processo de transição de escoamentos. São apresentados resultados de simulações numéricas de escoamentos em cavidades com tampa deslizante (lid-driven cavity) em configurações bi e tridimensional. Todas as simulações foram realizadas com o código computacional desenvolvido no contexto deste trabalho. Os resultados para a configuração bidimensional foram comparados com resultados presentes na literatura e tiveram como objetivo fazer uma validação inicial do código e definir os melhores parâmetros para as simulações na configuração tridimensional. Para esta configuração foram realizadas simulações de escoamentos em cavidades cúbicas a números de Reynolds iguais a 3.200, 10.000, 25.000, 50.000 e 100.000. Os resultados das simulações de escoamentos a números de Reynolds iguais a 3.200 e 10.000 foram comparados com resultados presentes na literatura. Para número de Reynolds igual a 10.000, na configuração tridimensional, foram realizadas simulações sem modelo de turbulência e com os modelos submalha de Smagorinsky e modelo dinâmico de Germano. Esta simulação teve como objetivo avaliar o melhor modelo a ser utilizado nas simulações de escoamentos a número de Reynolds mais elevados. Observou-se que a simulação com o modelo de Germano foi a que proporcionou os melhores resultados quando comparados com dados experimentais. As simulações de escoamentos a números de Reynolds maiores que 10.000 foram analisadas sobre vários aspectos, sobretudo, com relação aos aspectos topológicos. Foram encontradas fortes variações nos padrões de escoamento à medida que se aumentou o número de Reynolds. Estas variações são descritas e analisadas em conjunto com perfis e sinais temporais de velocidades.

Palavras chave: Escoamentos turbulentos. Simulação de grandes escalas. Modelo dinâmico de Germano. Cavidades com tampas deslizantes.

PINHO, F. A. A., Large-Eddy Simulation in Three Dimensional Lid-Driven Cavities Using Dynamic Models, Doctor Thesis, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia-MG, Brazil.

Abstract

In the present work a numerical code of fourth order in space and third order in time, with dynamical turbulence model was developed. This code was applied in order to study turbulence transition in lid-driven cavity flow in bi and three-dimensional configurations. The simulations had been carried out for bi and three-dimensional configurations. The two-dimensional simulations were performed to be compared with results presented in the literature in order to validate the developed code, as well as to define the best parameters for the simulations in the three-dimensional configuration. The Reynolds numbers was taken as 3,200, 10,000, 25,000, 50,000 and 100.000. The simulations of cubic lid-driven cavity flow with Reynolds numbers 3,200 and 10,000 were compared with results presented in the literature. The two-dimensional simulation was performed without turbulence model and the three-dimensional simulations were performed with the Smagorinsky and Germano's dynamic subgrid scale models. The dynamic subgrid model was chosen inr order to simulate high Reynolds number flows. The topological physical nature was analyzed and some important new physic characteristics were pointed out.

Keywords: Turbulent Flow. Large-eddy simulation. Germano's dynamic models. Lid-driven cavities.

Lista de Figuras

Figura 1.1: Processo de deposição de filmes líquidos. Reproduzido de Aidum et al. (1991).....	2
Figura 1.2: Esboço do aparato experimental utilizado por Pan e Acrivos (1967). Reproduzido de Pan e Acrivos (1967).....	3
Figura 1.3: Esquema do equipamento proposto por Prasad e Koseff (1989) para a obtenção de dados experimentais. Reproduzido de Prasad e Koseff (1989).....	3
Figura 1.4: Nomenclatura para os planos na direção x referenciados na cavidade, denominados planos transversais.....	5
Figura 1.5: Nomenclatura para os planos na direção y referenciados na cavidade, denominados planos horizontais.....	5
Figura 1.6: Nomenclatura para os planos na direção z referenciados na cavidade, denominados planos verticais.....	6
Figura 1.7: Linhas de corrente mostrando o vórtice principal e os vórtices secundários no plano de simetria do escoamento na cavidade com tampa deslizante.....	8
Figura 1.8: Linhas de corrente mostrando o vórtice principal, a recirculação central e os vórtices secundários anterior e posterior no escoamento na cavidade com tampa deslizante.....	9
Figura 1.9: Linhas de corrente mostrando o fluxo de massa na recirculação central no escoamento em cavidade com tampa deslizante.....	9
Figura 1.10: Isosuperfície de velocidade transversal (z) nula separando as regiões de fluxo transversal em sentidos contrários no escoamento em cavidade com tampa deslizante.....	10
Figura 1.11: Isosuperfície de critério Q mostrando os vórtices laterais do escoamento em cavidade com tampa deslizante.....	10
Figura 1.12: Isosuperfície de vorticidade na direção do escoamento (direção x) e linhas de corrente mostrando os vórtices laterais e vórtices contra-rotativos do tipo Taylor-Görtler no escoamento em cavidade com tampa deslizante.....	11
Figura 3.1: Densidade espectral de energia cinética turbulenta destacando as escalas de Kolmogorov. .	30
Figura 3.2: Densidade espectral de energia cinética turbulenta mostrando corte para o filtro teste utilizado para modelagem Dinâmica.....	32
Figura 4.1: Elemento de malha mostrando a disposição das variáveis.....	36
Figura 4.2: Esquema de discretização espacial.....	39

Figura 4.3: Pontos virtuais para a imposição das condições de contorno.....	40
Figura 5.1: Evolução temporal das velocidades na configuração bidimensional em $x = 0,7m$ e $y = 0,3m$ para número de Reynolds igual a 1.000 obtido com discretização de quarta ordem, malha 95×95 e passo de tempo $10^{-3}s$	44
Figura 5.2: Evolução temporal das velocidades na configuração bidimensional em $x = 0,7m$ e $y = 0,3m$ para número de Reynolds igual a 3.200 obtido com discretização de quarta ordem, malha 95×95 e passo de tempo $10^{-3}s$	45
Figura 5.3: Evolução temporal das velocidades na configuração bidimensional em $x = 0,7m$ e $y = 0,3m$ para número de Reynolds igual a 5.000 obtido com discretização de quarta ordem, malha 95×95 e passo de tempo $10^{-3}s$	45
Figura 5.4: Evolução temporal das velocidades na configuração bidimensional em $x = 0,7m$ e $y = 0,3m$ para número de Reynolds igual a 10.000 obtido com discretização de quarta ordem, malha 95×95 e passo de tempo $10^{-3}s$	46
Figura 5.5: Erro médio dos perfis de velocidade para número de Reynolds igual a 10.000 calculado em relação aos resultados de Ghia et al. (1982).....	47
Figura 5.6: Comparação dos perfis da componente de velocidade média u em $x = 0,5m$ para número de Reynolds igual a 10.000, obtidos com malha de 95×95	48
Figura 5.7: Comparação dos perfis da componente de velocidade média v em $y = 0,5m$ para número de Reynolds igual a 10.000, obtidos com malha de 95×95	48
Figura 5.8: Comparação dos perfis da componente de velocidade média u em $x = 0,5m$ para número de Reynolds igual a 10.000 obtidos com discretização de quarta ordem.....	49
Figura 5.9: Comparação dos perfis da componente de velocidade média v em $y = 0,5m$ para número de Reynolds igual a 10.000 obtidos com discretização de quarta ordem.....	49
Figura 5.10: Comparação dos perfis da componente de velocidade u em $x = 0,5m$ obtidos com malha com 95×95 pontos e discretização de quarta ordem.....	50
Figura 5.11: Comparação dos perfis da componente de velocidade v em $y = 0,5m$ obtidos com malha com 95×95 pontos e discretização de quarta ordem.....	50
Figura 5.12: Sinal da componente de velocidade u em $y = 0,7m$ e $x = 0,5m$ para número de Reynolds igual a 10.000, obtido com discretização de segunda ordem e malha 95×95	51
Figura 5.13: Densidade espectral da componente de velocidade u em $y = 0,7m$ e $x = 0,5m$ para número de Reynolds igual a 10.000, obtido com discretização de segunda ordem e malha 95×95	51
Figura 5.14: Sinal da componente de velocidade u em $y = 0,7m$ e $x = 0,5m$ para número de Reynolds igual a 10.000 obtido com discretização de quarta ordem e malha 95×95	52

Figura 5.15: Densidade espectral da componente de velocidade u em $y = 0,7\text{m}$ e $x = 0,5\text{m}$ para número de Reynolds igual a 10.000 obtido com discretização de quarta ordem e malha 95×95	52
Figura 5.16: Sinal da componente de velocidade u em $y = 0,7\text{m}$ e $x = 0,5\text{m}$ para número de Reynolds igual a 10.000, obtido com discretização de quarta ordem e malha 75×75	53
Figura 5.17: Densidade espectral da componente de velocidade u em $y = 0,7\text{m}$ e $x = 0,5\text{m}$ para número de Reynolds igual a 10.000, obtido com discretização de quarta ordem e malha 75×75	53
Figura 5.18: Campos de vorticidade com linhas de corrente superpostas em regime permanente para número de Reynolds igual a 1.000, obtido com discretização de quarta ordem, malha 95×95 e passo de tempo 10-3s.....	54
Figura 5.19: Campos de vorticidade com linhas de corrente superpostas em regime permanente para número de Reynolds igual a 3.200, obtido com discretização de quarta ordem, malha 95×95 e passo de tempo 10-3s.....	55
Figura 5.20: Campos de vorticidade com linhas de corrente superpostas em regime permanente para número de Reynolds igual a 5.000, obtido com discretização de quarta ordem, malha 95×95 e passo de tempo 10-3s.....	55
Figura 5.21: Sequência temporal de campos de vorticidade com linhas de corrente superpostas para número de Reynolds igual a 10.000, obtido com discretização de quarta ordem e malha 95×95 . Tempos: 2.991s, 2.992s, 2.993s, 2.994s, 2.995s, 2.996s.....	56
Figura 5.22: Campo médio de vorticidade com linhas de corrente superpostas para número de Reynolds igual a 10.000, obtido com discretização de segunda ordem e malha 95×95	57
Figura 5.23: Campo médio de vorticidade com linhas de corrente superpostas para número de Reynolds igual a 10.000, obtido com discretização de quarta ordem e malha 95×95	57
Figura 5.24: Comparação com dados da literatura entre os perfis da componente de velocidade u em $z = 0,5\text{m}$ e $x = 0,5\text{m}$, para número de Reynolds igual a 3.200.....	60
Figura 5.25: Comparação com dados da literatura entre os perfis da componente de velocidade v em $z = 0,5\text{m}$ e $y = 0,5\text{m}$, para número de Reynolds igual a 3.200.....	60
Figura 5.26: Comparação com dados da literatura entre os perfis da RMS_u em $z = 0,5\text{m}$ e $x = 0,5\text{m}$ para número de Reynolds igual a 3.200.....	61
Figura 5.27: Comparação com dados da literatura entre os perfis da RMS_v em $z = 0,5\text{m}$ e $y = 0,5\text{m}$ para número de Reynolds igual a 3.200.....	61
Figura 5.28: Comparação com dados da literatura entre os perfis de ω em $z = 0,5\text{m}$ e $x = 0,5\text{m}$, para número de Reynolds igual a 3.200.....	62
Figura 5.29: Comparação com dados da literatura entre os perfis de ω em $z = 0,5\text{m}$ e $y = 0,5\text{m}$, para número de Reynolds igual a 3.200.....	62

Figura 5.30: Comparação com dados da literatura e entre os perfis da componente de velocidade u em $z = 0,5\text{m}$ e $x = 0,5\text{m}$, para número de Reynolds igual a 10.000.	63
Figura 5.31: Comparação com dados da literatura e entre os perfis da componente de velocidade v em $z = 0,5\text{m}$ e $y = 0,5\text{m}$, para número de Reynolds igual a 10.000.	63
Figura 5.32: Comparação com dados da literatura e entre os perfis da RMS_u em $z = 0,5\text{m}$ e $x = 0,5\text{m}$, para número de Reynolds igual a 10.000.	64
Figura 5.33: Comparação com dados da literatura e entre os perfis da RMS_v em $z = 0,5\text{m}$ e $y = 0,5\text{m}$, para número de Reynolds igual a 10.000.	64
Figura 5.34: Comparação com dados da literatura e entre os perfis de ω_x em $z = 0,5\text{m}$ e $x = 0,5\text{m}$, para número de Reynolds igual a 10.000.	65
Figura 5.35: Comparação com dados da literatura e entre os perfis de ω_y em $z = 0,5\text{m}$ e $y = 0,5\text{m}$, para número de Reynolds igual a 10.000.	65
Figura 5.36: Comparação com os dados da literatura do perfil da componente de velocidade u em $z = 0,5\text{m}$ e $x = 0,5\text{m}$ para número de Reynolds igual a 10.000, obtido com modelagem dinâmica.	66
Figura 5.37: Comparação com os dados da literatura do perfil da componente de velocidade v em $z = 0,5\text{m}$ e $y = 0,5\text{m}$ para número de Reynolds igual a 10.000, obtido com modelagem dinâmica.	66
Figura 5.38: Isosuperfícies de vorticidade na direção x do escoamento a número de Reynolds igual a 3.200 no tempo igual a 600s, $\omega_x = -0,50\text{s}^{-1}$ (azul), $\omega_x = 0,50\text{s}^{-1}$ (verde).	67
Figura 5.39: Isosuperfícies de critério Q igual a $0,25\text{s}^{-2}$ do escoamento médio a número de Reynolds igual a 3.200. Linhas de corrente no plano $z = 0,70\text{m}$.	68
Figura 5.40: Isosuperfícies de vorticidade na direção x do escoamento médio a número de Reynolds igual a 3.200, $\omega_x = -1,00\text{s}^{-1}$ (azul), $\omega_x = 1,00\text{s}^{-1}$ (verde). Pojeção de linhas de corrente nos planos $x = 0,58\text{m}$ e $y = 0,42\text{m}$.	68
Figura 5.41: Linhas de corrente na recirculação central do escoamento médio a número de Reynolds igual a 3.200.	69
Figura 5.42: Linhas de corrente nos vórtices secundários do escoamento médio a número de Reynolds igual a 3.200.	69
Figura 5.43: Isosuperfícies de vorticidade na direção x do escoamento a número de Reynolds igual a 10.000 no tempo igual a 400s. $\omega_x = -2,00\text{s}^{-1}$ (azul), $\omega_x = 2,00\text{s}^{-1}$ (verde).	71
Figura 5.44: Projeção de linhas de corrente nos planos $x = 0,75\text{m}$ e $y = 0,48\text{m}$ para o escoamento a número de Reynolds igual a 10.000 no tempo igual a 400s.	71
Figura 5.45: Isosuperfície de critério Q igual a $2,50\text{s}^{-2}$ do escoamento a número de Reynolds igual a 10.000 no tempo igual a 500s.	72

Figura 5.46: Projeção de linhas de corrente nos planos $z = 0,12\text{m}$ e $z = 0,52\text{m}$ para o escoamento a número de Reynolds igual a 10.000 no tempo igual a 500s.....	72
Figura 5.47: Isosuperfícies de vorticidade na direção x do escoamento médio a número de Reynolds igual a 10.000. $w_x = -0,25\text{s}^{-1}$ (azul), $w_x = 0,25\text{s}^{-1}$ (verde). Projeção de linhas de corrente nos planos $x = 0,65\text{m}$ e $y = 0,47\text{m}$	73
Figura 5.48: Linhas de corrente na recirculação central do escoamento médio a número de Reynolds igual a 10.000.....	73
Figura 5.49: Linhas de corrente nos vórtices secundários do escoamento médio a número de Reynolds igual a 10.000.....	74
Figura 5.50: Isosuperfícies de vorticidade na direção x do escoamento a número de Reynolds igual a 25.000 no tempo igual a 400s. $w_x = -2,25\text{s}^{-1}$ (azul), $w_x = 2,25\text{s}^{-1}$ (verde).....	76
Figura 5.51: Isosuperfície de critério Q igual a $3,00\text{s}^{-2}$ do escoamento a número de Reynolds igual a 25.000 no tempo igual a 500s.....	76
Figura 5.52: Isosuperfícies de vorticidade na direção x do escoamento médio a número de Reynolds igual a 25.000. $w_x = -0,25\text{s}^{-1}$ (azul), $w_x = 0,25\text{s}^{-1}$ (verde). Projeção de linhas de corrente nos planos $x = 0,62\text{m}$ e $y = 0,48\text{m}$	77
Figura 5.53: Linhas de corrente nos vórtices secundários do escoamento médio a número de Reynolds igual a 25.000.....	77
Figura 5.54: Isosuperfícies de vorticidade na direção x do escoamento a número de Reynolds igual a 50.000 no tempo igual a 500s. $w_x = -2,00\text{s}^{-1}$ (azul), $w_x = 2,00\text{s}^{-1}$ (verde).....	78
Figura 5.55: Isosuperfícies de vorticidade na direção x do escoamento médio a número de Reynolds igual a 50.000. $w_x = -0,25\text{s}^{-1}$ (azul), $w_x = 0,25\text{s}^{-1}$ (verde).....	79
Figura 5.56: Linhas de corrente na recirculação central do escoamento médio a número de Reynolds igual a 50.000.....	79
Figura 5.57: Linhas de corrente nos planos $x = 0,62\text{m}$ e $y = 0,47\text{m}$ do escoamento médio a número de Reynolds igual a 50.000.....	80
Figura 5.58: Linhas de corrente nos planos $z = 0,12\text{m}$ e $z = 0,62\text{m}$ do escoamento médio a número de Reynolds igual a 50.000.....	80
Figura 5.59: Linhas de corrente nos vórtices secundários do escoamento médio a número de Reynolds igual a 50.000.....	81
Figura 5.60: Isosuperfícies de vorticidade na direção x do escoamento a número de Reynolds igual a 100.000 no tempo igual a 500s. $w_x = -2,25\text{s}^{-1}$ (azul), $w_x = 2,25\text{s}^{-1}$ (verde).....	82
Figura 5.61: Isosuperfícies do módulo da projeção de vorticidade no plano perpendicular a direção z	

igual a $0,5s^{-1}$, do escoamento a número de Reynolds igual a 100.000, no tempo igual a 500s. Cores representando a vorticidade na direção x, $w_x = -0,50s^{-1}$ (azul), $w_x = 0,50s^{-1}$ (verde).....83

Figura 5.62: Isosuperfícies da vorticidade na direção y, $w_y = -0,25s^{-1}$ (azul), $w_y = 0,25s^{-1}$ (verde), e velocidade igual a zero na direção z do escoamento médio a número de Reynolds igual a 100.000....84

Figura 5.63: Linhas de corrente na recirculação central do escoamento médio a número de Reynolds igual a 100.000.....85

Figura 5.64: Linhas de corrente nos planos $x = 0,62m$ e $y = 0,47m$ do escoamento médio a número de Reynolds igual a 100.000.....85

Figura 5.65: Linhas de corrente nos vórtices secundários do escoamento médio a número de Reynolds igual a 100.000.....86

Figura 5.66: Densidade espectral de energia cinética turbulenta em $x = 0,3m$, $y = 0,3m$ e $z = 0,5m$ para número de Reynolds igual a 10.000.....87

Figura 5.67: Densidade espectral de energia cinética turbulenta obtida com modelo dinâmico de Germano para número de Reynolds igual a 10.000.....87

Figura 5.68: Densidade espectral de energia cinética turbulenta obtida com modelo dinâmico de Germano para número de Reynolds igual a 10.000.....88

Figura 5.69: Densidade espectral de energia cinética turbulenta em $x = 0,3m$, $y = 0,3m$ e $z = 0,5m$ obtida com modelo dinâmico de Germano.....88

Figura 5.70: Comparação entre os perfis da componente de velocidade u em $z = 0,5m$ e $x = 0,5m$ 90

Figura 5.71: Comparação entre os perfis da componente de velocidade v em $z = 0,5m$ e $y = 0,5m$ 90

Figura 5.72: Comparação entre os perfis da RMSu em $z = 0,5m$ e $x = 0,5m$ 91

Figura 5.73: Comparação entre os perfis da RMSv em $z = 0,5m$ e $x = 0,5m$ 92

Lista de Tabelas

Tabela 5.1: Pontos de velocidade mínima no perfil de velocidade na direção x em $z = 0,5\text{m}$ e $x = 0,5\text{m}$.	91
Tabela 5.2: Pontos de velocidade máxima no perfil de velocidade na direção y em $z = 0,5\text{m}$ e $y = 0,5\text{m}$.	91
Tabela 5.3: Pontos de velocidade mínima no perfil de velocidade na direção y em $z = 0,5\text{m}$ e $y = 0,5\text{m}$.	91
Tabela D.1: Perfil de velocidade na direção x em $z = 0,5\text{m}$ e $x = 0,5\text{m}$.	119
Tabela D.2: Perfil de RMSu em $z = 0,5\text{m}$ e $x = 0,5\text{m}$.	120
Tabela D.3: Perfil de velocidade na direção y em $z = 0,5\text{m}$ e $y = 0,5\text{m}$.	121
Tabela D.4: Perfil de RMSv em $z = 0,5\text{m}$ e $y = 0,5\text{m}$.	122

Lista de Símbolos

variáveis

f : força de corpo.

k : energia cinética turbulenta.

p : pressão.

u : componente do vetor velocidade na direção x .

v : componente do vetor velocidade na direção y .

w : componente do vetor velocidade na direção z .

w_x : componente do vetor vorticidade na direção x .

w_y : componente do vetor vorticidade na direção y .

w_z : componente do vetor vorticidade na direção z .

x : primeira componente do vetor posição.

y : segunda componente do vetor posição.

z : terceira componente do vetor posição.

t : tempo.

C : coeficiente de proporcionalidade do modelo dinâmico de Germano.

C_s : constante de Smagorinsky.

L : comprimento da cavidade.

H : altura da cavidade.

Q : critério Q .

R : razão de aspecto da cavidade ($H : L$).

Re : número de Reynolds.

RMS_u : raiz quadrada da média do quadrado da componente de velocidade u .

RMS_v : raiz quadrada da média do quadrado da componente de velocidade v .

S : tensor deformação.

SAR : razão de aspecto transversal da cavidade ($W : L$).

U : velocidade característica do escoamento.

W : largura da cavidade

$\vec{x}$: vetor posição.

$\vec{U}$: vetor velocidade.

$\vec{w}$: vetor vorticidade.

δ_{ij} : delta de Kronecker.

ϕ : termo cruzado da equação de Navier-Stokes.

ε : dissipação de energia cinética turbulenta.

ρ : densidade.

μ : viscosidade dinâmica.

ν : viscosidade cinética.

ν_t : viscosidade turbulenta.

τ_{ij} : termo cruzado da equação de Navier-Stokes.

Δt : passo de tempo.

Δx : comprimento de uma célula da malha na direção x .

Δy : comprimento de uma célula da malha na direção y .

Δz : comprimento de uma célula da malha na direção z .

δx : distância entre dois pontos da malha na direção x .

δy : distância entre dois pontos da malha na direção y .

δz : distância entre dois pontos da malha na direção z .

Ω : tensor vorticidade.

ϕ : produção de energia cinética turbulenta.

d : índice que indica o ponto da malha atrás do ponto considerado.

e : índice que indica o ponto da malha a direita do ponto considerado.

i : índice que indica componente na direção x .

j : índice que indica componente na direção y .

k : índice que indica componente na direção z .

s : índice que indica o ponto da malha acima do ponto considerado.

s : índice que indica o ponto da malha abaixo do ponto considerado.

u : índice que indica o ponto da malha a frente do ponto considerado.

w : índice que indica o ponto da malha a esquerda do ponto considerado.

operadores

G : filtro.

∂ : operadores derivada parcial.

∇ : operador vetorial nabra $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$.

$\bar{\phi}$: variável filtrada.

$\hat{\phi}$: variável filtrada com filtro teste para modelo dinâmico.

ϕ' : flutuação da variável.

Sumário

Capítulo 1 Introdução.....	1
1.1 Dos Escoamentos em Cavidades.....	4
1.1.1 Nomenclatura.....	4
1.1.2 Parâmetros Característicos da Cavidade.....	6
1.1.3 Descrição Topológica do Escoamento.....	8
1.2 Da Turbulência.....	12
1.3 Da Simulação de Grandes Escalas.....	13
1.4 Objetivos do Presente Trabalho.....	14
Capítulo 2 Revisão Bibliográfica.....	17
Capítulo 3 Modelo Matemático.....	27
3.1 Equações de Navier-Stokes.....	27
3.2 Equações de Navier-Stokes Filtradas.....	28
3.3 Modelo de Turbulência.....	29
3.4 Modelo de Smagorinsky.....	31
3.5 Modelo Dinâmico de Germano.....	32
3.6 Filtragem Temporal do Coeficiente Dinâmico.....	33
Capítulo 4 Método Numérico.....	35
4.1 Método de Volumes Finitos.....	35
4.1.1 Discretização Temporal.....	36
4.1.2 Acoplamento Pressão-Velocidade.....	37
4.1.3 Discretização Espacial.....	38
4.1.4 Condições de Contorno Para Velocidade.....	40
4.2 Solver Para a Equação de Correção Pressão.....	41
Capítulo 5 Resultados.....	43

5.1 Cavernas Bidimensionais.....	43
5.1.1 Evolução Temporal.....	44
5.1.2 Comparação com os Resultado Numéricos de Ghia et al. (1982).....	46
5.1.3 Sinais Temporais de Velocidade.....	51
5.1.4 Topologia dos Escoamentos.....	54
5.2 Cavernas Tridimensionais.....	57
5.2.1 Comparação com Dados Experimentais.....	59
5.2.2 Topologia dos Escoamentos.....	67
5.2.3 Densidade Espectral de Energia Cinética Turbulenta.....	86
5.2.4 Perfis de Velocidade e RMS de velocidade para Números de Reynolds Elevados.....	89
Capítulo 6 Conclusões.....	93
Capítulo 7 Referências Bibliográficas.....	95
Apêndice A Obtenção da Equação de Transporte para Energia Cinética Turbulenta.....	101
Apêndice B Equacionamento do Modelo de Smagorinsky e do modelo de Germano.....	109
Apêndice C Implementação do Critério Q.....	115
Apêndice D Dados dos Perfis de Velocidade e RMS.....	119

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Os escoamentos em cavidades retangulares com tampa deslizantes têm despertado o interesse de pesquisadores desde meados do século XX. No seu estudo são utilizadas abordagens numéricas e experimentais. Isto pode ser comprovado reportando-se ao trabalho de Burgraff (1966), que é citado por vários autores como um dos pioneiros em estudar numericamente este problema, e o trabalho de Pan e Acrivos (1967), que o estuda numérica e experimentalmente. Neste último, os autores comparam seus resultados com os obtidos por Dean e Montagnon (1949) e Moffat (1964).

Por outro lado, trabalhos recentes, tais como o de Sheu e Tsai (2002), Migeon et al. (2003) e Peng et al. (2003) revelam que esta configuração geométrica continua despertando interesse. No primeiro trabalho os autores estudaram numericamente o escoamento em uma cavidade cúbica a número de Reynolds igual a 1.000. No segundo, realizaram experimentos com escoamento a mesmo número Reynolds. No último, estudaram numericamente o processo de transição do escoamento laminar para o caótico na configuração bidimensional. Isto revela que ainda há muito o que se estudar, a altos números de Reynolds, ainda que seja na configuração bidimensional ou em regime laminar e a baixo número de Reynolds.

Alguns fatores contribuem para este interesse. A geometria regular e as condições de contorno sem ambiguidades fazem deste problema um caso ideal para o teste de métodos numéricos (PRASAD e KOSEFF, 1989) e

(SHEU e TSAI, 2002). Este escoamento oferece a oportunidade de estudar o desenvolvimento de um vórtice principal estacionário e uma vasta gama de fenômenos secundários que ocorrem em torno deste, tais como, vórtices secundários, vórtices laterais e vórtices do tipo Taylor-Görtler (PRASAD e KOSEFF, 1989). E, Por fim, este escoamento é uma idealização de diversos problemas ambientais, geofísicos, industriais (FREITAS e STREET, 1988) e biomédicos (MIGEON et al., 2003).

Entre as aplicações práticas do escoamento em cavidades com tampas deslizantes encontra-se o processo de deposição de filmes líquidos sobre uma superfície, como ilustrado na figura 1.1 (AIDUM et al. 1991). Outra aplicação apontada por Shankar e Deshpande (2000) é o escoamento no interior de cavidades de fundição utilizadas para a fabricação de materiais microcristalinos. Com relação aos escoamentos dos quais a cavidade é uma idealização, pode-se citar o escoamento sobre entalhes e sobre repetidas ranhuras em paredes de trocadores de calor ou em superfícies de corpos aeronáuticos (PRASAD e KOSEFF 1989).

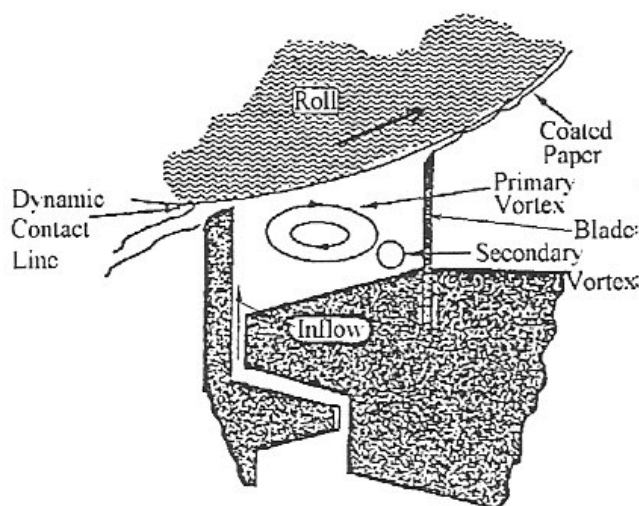


Figura 1.1: Processo de deposição de filmes líquidos. Reproduzido de Aidum et al. (1991).

Mais recentemente os projetos do LTCM tem convergido também para aplicações em aeroacústica. O escoamento em cavidades tem aplicações significativas nesta área. Por exemplo na decolagem e na aterrissagem, quando as cavidades nas quais se alojam os trens de pouso estão abertas. O ruído gerado nestas cavidades são intensos e provocam problemas de comunicação e desconforto nas pistas de pouso. Simular de

forma correta este escoamento e sintetizar as ondas de som daí decorrentes é o primeiro passo para tentar eliminá-las.

Apesar do grande interesse inicial sobre os escoamentos em cavidades, os detalhes da topologia deste escoamento só foram revelados lentamente ao longo das últimas quatro décadas, sobretudo após as recentes evoluções das técnicas experimentais, dos computadores e das metodologias numéricas utilizadas.

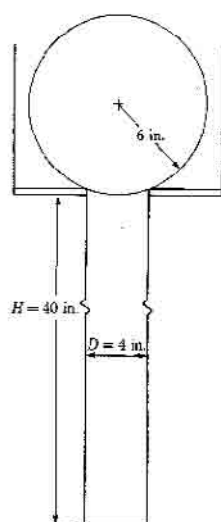


Figura 1.2: Esboço do aparato experimental utilizado por Pan e Acrivos (1967).
Reproduzido de Pan e Acrivos (1967).

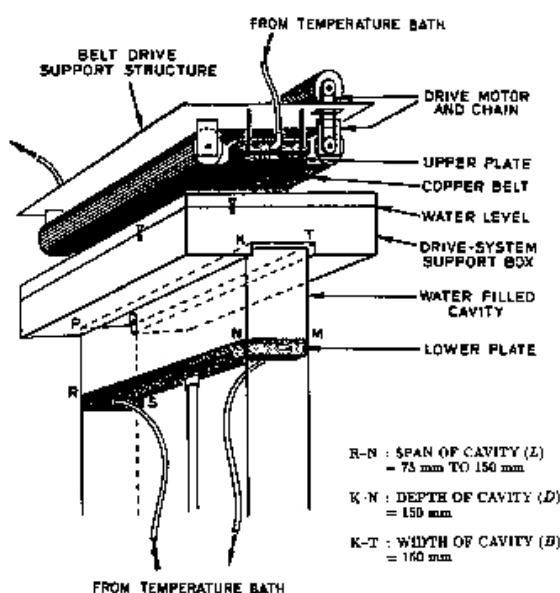


Figura 1.3: Esquema do equipamento proposto por Prasad e Koseff (1989) para a obtenção de dados experimentais. Reproduzido de Prasad e Koseff (1989).

Na área experimental, um exemplo destas evoluções é o trabalho de

Pan e Acrivos (1967), no qual a tampa deslizante é substituída por um cilindro rotativo (figura 1.2) e a topologia do escoamento é estudada através de fotografias. No trabalho de Prasad e Koseff (1989), os autores utilizam anemometria a laser-Doppler, com a qual obtiveram medidas precisas das velocidades e de suas correlações. Um esquema do equipamento utilizado por estes autores é mostrado na figura 1.3.

Em termos computacionais, uma medida das evoluções pode ser estimada comparando-se o trabalho de Ghia et al. (1982) com o de Bruneau e Saad (2006). Os primeiros simularam escoamentos em cavidades retangulares com tampa deslizante bidimensional em regime estacionário a vários números de Reynolds, utilizando uma malha 257×257 , num total de 66.049 pontos. Os últimos simularam a mesma configuração com uma malha de 1.024×1.024 , o que resulta em aproximadamente $1,05 \cdot 10^6$ pontos.

Os avanços nas técnicas numéricas têm sido significativos. Desenvolvimentos e testes de novas metodologias de discretização temporal e espacial, técnicas de acoplamento de pressão-velocidade e de solução de sistemas lineares têm melhorado em muito o desempenho dos códigos para solução das equações que modelam os escoamentos dos fluidos. Um exemplo disto é a técnica de elementos finitos, até bem pouco tempo considerada inadequada para aplicação em problemas envolvendo escoamento de fluidos, tem se revelado extremamente frutífera neste campo de aplicação (PETRY e AURWCH, 2006).

O Método de volumes finitos também teve um grande avanço com a introdução de novos métodos de acoplamento pressão-velocidade. O método de diferenças finitas também se beneficiou destes avanços. Devido a facilidade de implementação, nestes últimos, foram introduzidos métodos de discretização de alta ordem e métodos compactos, propiciando maior precisão nas soluções obtidas e possibilitando a aplicação em outras áreas como, por exemplo, a aeroacústica e a combustão.

1.1 Dos Escoamentos em Cavidades

1.1.1 Nomenclatura

Antes de se aprofundar na descrição e análise do problema da cavidade com tampa deslizante, faz-se necessário definir alguns termos utilizados neste trabalho. As figuras 1.4, 1.5 e 1.6 auxiliam nestas definições. O objetivo é estabelecer uma nomenclatura comum procurando seguir as definições já clássicas na literatura, buscando não deixar margens a interpretações ambíguas.

A figura 1.4 mostra os planos perpendiculares à direção do escoamento, direção x . Podem ser vistas as faces anterior e posterior, que ficam a jusante e a montante do escoamento respectivamente, e o plano yOz central. A dimensão nesta direção é denominada de comprimento (L) e os planos mostrados são denominados de transversais.

A figura 1.5 mostra os planos na direção y . São eles a face superior ou tampa da cavidade, a face inferior ou fundo e o plano xOz central. A tampa corresponde ao plano que se movimenta com uma velocidade (U) na direção positiva de x . A dimensão nesta direção é denominada de altura (H) e os planos mostrados são denominados horizontais.

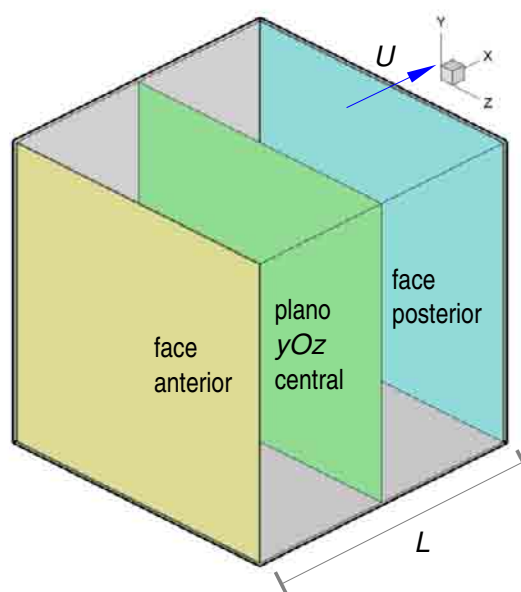


Figura 1.4: Nomenclatura para os planos na direção x referenciados na cavidade, denominados planos transversais.

A figura 1.6 mostra os planos na direção z . São as faces laterais

esquerda e direita e o plano xOy central ou plano de simetria. As faces laterais são conhecidas na literatura inglesa como “end-wall faces”. A dimensão nesta direção é denominada largura (W) e os planos mostrados são denominados de verticais.

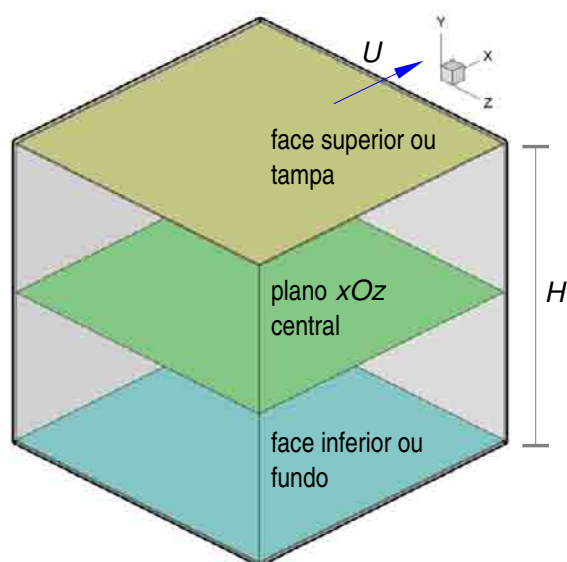


Figura 1.5: Nomenclatura para os planos na direção y referenciados na cavidade, denominados planos transversais.

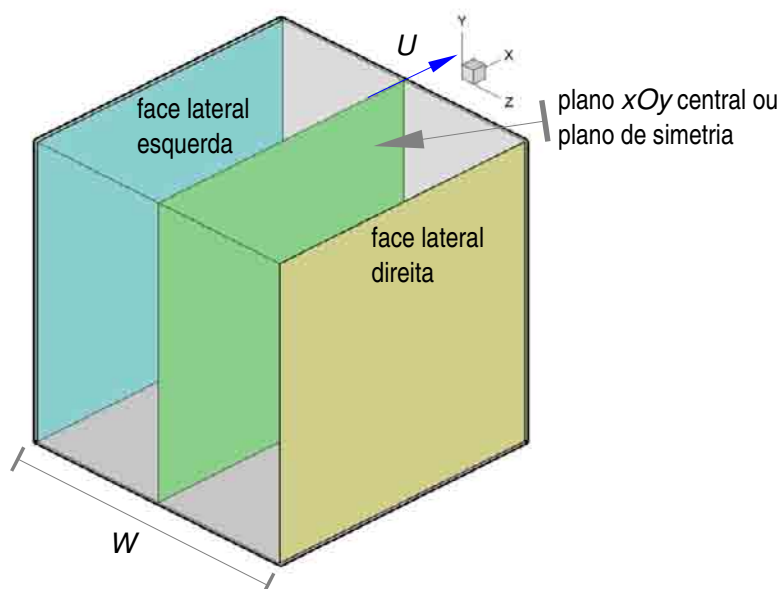


Figura 1.6: Nomenclatura para os planos na direção z referenciados na cavidade, denominados planos transversais.

1.1.2 Parâmetros Característicos da Cavidade

Definem-se duas razões de aspectos para caracterizar o problema, a razão de aspecto e a razão de aspecto transversal. A razão de aspecto (R) é a razão entre a altura e o comprimento, notada como W:L. A razão de aspecto transversal (SAR¹) é a razão entre largura e o comprimento, notada como H:L.

O número de Reynolds é definido como

$$Re = \frac{L U}{\nu}, \quad (1.1)$$

onde L é o comprimento característico da cavidade e U a velocidade de deslizamento da tampa. A não ser que se especifique o contrário, o comprimento característico (L) será o comprimento da cavidade. Em todos os casos estudados manteve-se a dimensão característica e a velocidade de deslizamento constantes e iguais a 1,0. O número de Reynolds foi modificado por meio da variação do valor da viscosidade e as razões de aspectos foram modificadas através de variações nas outras dimensões.

Com relação às razões de aspecto, a literatura consultada mostra que os escoamentos em cavidades com SAR 3:1 foram os mais estudados. Os trabalhos experimentais de Koseff e Street (1984a, 1984b e 1984c) e numéricos de Freitas et al. (1985), Freitas e Street (1988), Chiang et al. (1996, 1997 e 1998) concentram-se nesta configuração.

As cavidades cúbicas (R e SAR 1:1) foram estudadas experimentalmente por Prasad e Koseff (1989) e numericamente por Perng e Street (1989), Deshpande e Milton (1998), Hassan e Barsamian (2001), Sheu e Tsai (2002) e Padilla et al. (2005). Vale destacar que no trabalho experimental de Prasad e Koseff (1989) são abordados valores de SAR iguais a 1:1 e 1:2. Esta última estudada numericamente por Zang et al. (1993).

As cavidades com SAR = 2:1 foram abordadas mais recentemente no trabalho experimental de Migeon et al. (2003). Este trabalho abordara as configurações com razão de aspecto (R) 1:1 e 1:2 e a cavidade com seção semi-cilíndrica.

1 Do inglês spanwise aspect ratio (SAR)

Com relação ao número de Reynolds, autores como Aidum et al. (1991) e Chiang et al. (1998) afirmam que o escoamento em regime permanente se mantém até Reynolds igual a 1.300, quando ocorre a transição para o regime transiente. O escoamento se mantém laminar até um número de Reynolds entre 6.000 e 8.000, quando inicia a transição à turbulência em regiões distintas da cavidade. Com número de Reynolds igual a 10.000 o regime já é completamente turbulento.

Os trabalhos de Sheu e Tsai (2002) e Migeon et al. (2003) analisam escoamentos em regime permanente a baixos números de Reynolds. Os autores do primeiro trabalho simulam numericamente o escoamento a número de Reynolds igual a 400. Os do segundo trabalho analisam o transiente inicial dos escoamentos.

O processo de transição para o escoamento em regime transiente, mas ainda laminar, é estudado por Aidum et al. (1991) e Chiang et al. (1998). Os resultados mostrados nestes trabalhos são obtidos para SAR 3:1. Para outros valores de SAR, Chiang et al. (1998) afirmam que o processo é aproximadamente o mesmo com pequenas diferenças nos valores do número de Reynolds críticos.

Estudos de escoamentos em regime laminar transiente foram feitos por Chiang et al. (1996 e 1997) para SAR 3:1 e número de Reynolds igual a 1.500. Estudos do processo de transição do regime laminar para o turbulento foram feitos por Koseff e Street (1984a).

Destacam-se os estudos de escoamentos em regime laminar e turbulento realizados por Prasad e Koseff (1989), Perng e Setret (1989) e Deshpande e Milton (1998). O primeiro trabalho é uma análise experimental e os outros são análises numéricas dos casos experimentados no primeiro. Os números de Reynolds iguais a 3.200, para o caso laminar, e a 10.000, para o caso turbulento, foram considerados. Não foram encontradas na literatura qualquer referência a estudos com números de Reynolds acima deste valor.

1.1.3 Descrição Topológica do Escoamento

As figuras de 1.7 a 1.11 serão utilizadas para definir as estruturas mais comuns encontradas nos escoamentos em cavidades com tampas

deslizantes. estas estruturas já foram bem descritas nos trabalhos citados anteriormente. Elas são encontradas sobretudo em escoamentos a baixo número de Reynolds, ainda na região laminar.

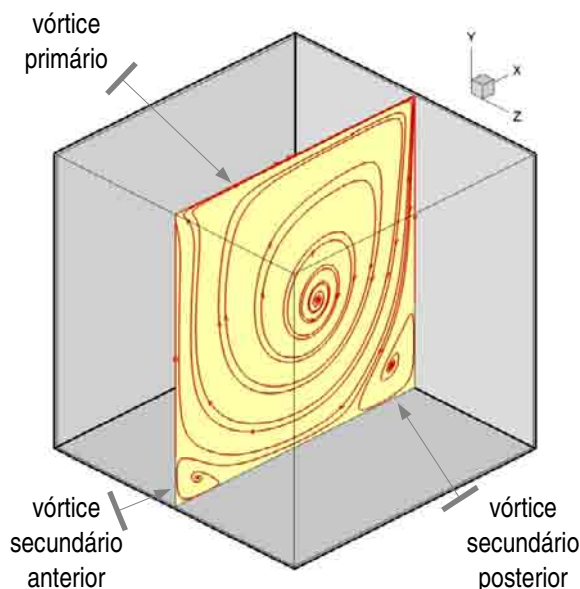


Figura 1.7: Linhas de corrente mostrando o vórtice principal e os vórtices secundários no plano de simetria do escoamento na cavidade com tampa deslizante.

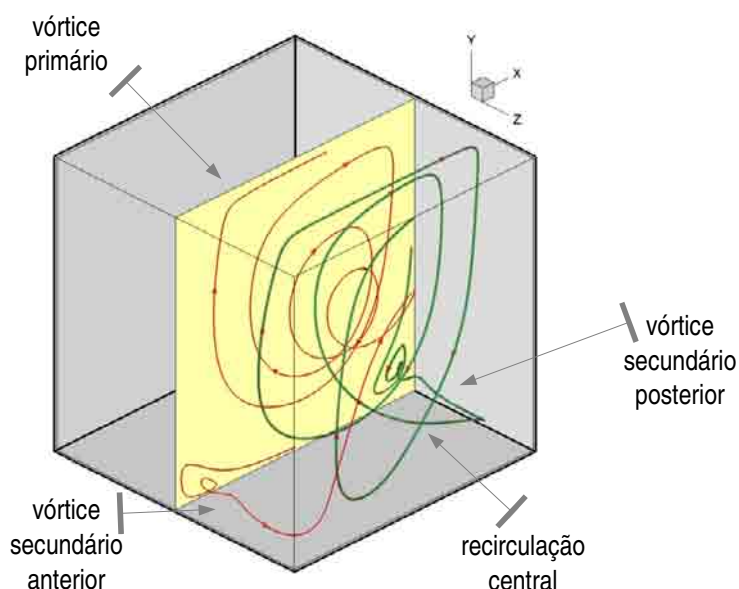


Figura 1.8: Linhas de corrente mostrando o vórtice principal, a recirculação central e os vórtices secundários anterior e posterior no escoamento na cavidade com tampa deslizante.

Os escoamentos na configuração estudada possuem uma zona de recirculação central aproximadamente do tamanho do domínio. A figura 1.7 mostra o plano de simetria. Neste plano encontra-se o vórtice primário, em

torno do qual se estende, no sentido transversal, a circulação primária.

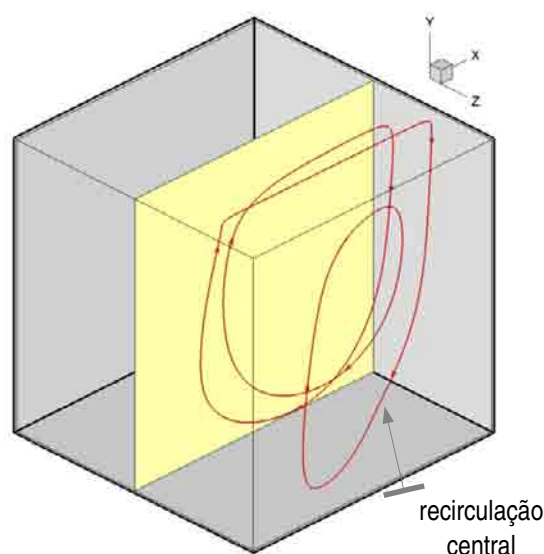


Figura 1.9: Linhas de corrente mostrando o fluxo de massa na recirculação central no escoamento em cavidade com tampa deslizante.

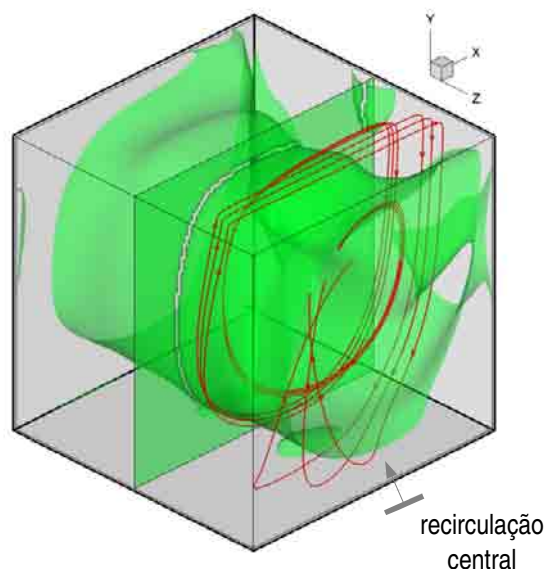


Figura 1.10: Isosuperfície de velocidade transversal (z) nula separando as regiões de fluxo transversal em sentidos contrários no escoamento em cavidade com tampa deslizante.

Na figura 1.7 também são mostrados os vórtices secundários anterior e posterior. Na figura 1.8 pode-se observar que estes vórtices se estendem na direção transversal. A figura mostra que o fluxo de massa que sai do vórtice secundário anterior entra na circulação principal por uma corrente interna e chega até o plano de simetria. No entanto, a corrente que sai do

vórtice secundário posterior entra na circulação principal por uma corrente mais externa. Isso faz com que ele não chegue até o plano de simetria, retornando em direção às paredes laterais por uma corrente periférica.

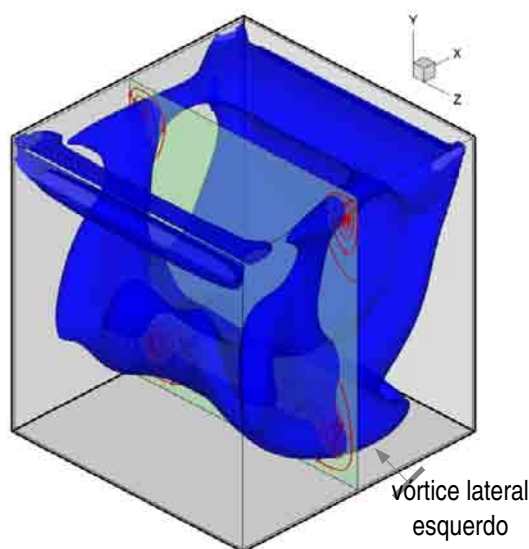


Figura 1.11: Isosuperfície de critério Q mostrando os vórtices laterais do escoamento em cavidade com tampa deslizante.

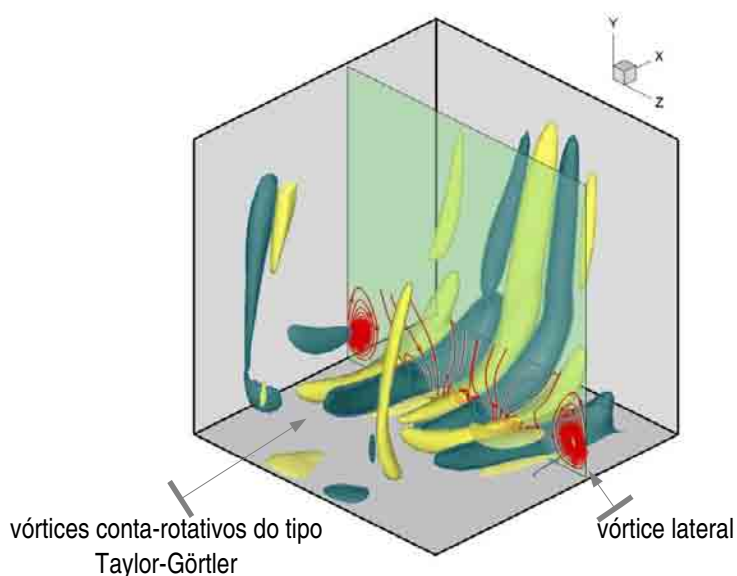


Figura 1.12: Isosuperfície de vorticidade na direção do escoamento (direção x) e linhas de corrente mostrando os vórtices laterais e vórtice contra-rotativos do tipo Taylor-Görtler no escoamento em cavidade com tampa deslizante.

A extensão da circulação primária na direção transversal ao escoamento pode ser vista nas figuras de 1.9 e 1.10. São mostradas as

correntes nesta direção; a mais interna no sentido do plano de simetria e a mais externa no sentido das paredes laterais. A figura 1.10 mostra a isosuperfície de velocidade transversal nula que separa as duas correntes. Nela são mostradas três linhas de correntes lançadas de pontos diferentes. Observa-se que quanto mais internos forem os pontos de partida das linhas mais próximas elas chegaram do plano central.

Na figura 1.9 pode-se observar que a reentrada da linha de corrente na circulação principal na parte inferior se dá por uma modificação drástica na direção da linha de corrente e esta modificação é resultante da presença de uma estrutura denominada vórtice lateral. Esta estrutura é mostrada na figura 1.11 utilizando isosuperfícies de critério Q (ver apêndice C).

A figura 1.12 mostra estruturas contra-rotativas que aparecem em escoamentos em regime transiente, por exemplo para número de Reynolds 3.200. Elas são vórtices do tipo Taylor-Görtler. Através das linhas de corrente no plano pode-se observar que estas estruturas correspondem a vórtices contra-rotativos. No entanto, cabe ressaltar que elas se estendem tridimensionalmente e a representação das linha no plano dá apenas uma idéia da rotação, uma linha de corrente tridimensional não rotacionaria indefinidamente em torno da estrutura, uma vez que neste caso haveria um deslocamento na direção da estrutura.

1.2 Da Turbulência

A turbulência está presente em uma enorme variedade de fenômenos. Em escoamentos de fluidos ela aparece sobretudo quando os parâmetros governantes, como o número de Reynolds, tornam-se suficientemente altos para desestabilizá-lo. Isto acontece na quase totalidade dos escoamentos presentes na natureza.

Os escoamentos turbulentos têm como principais características o fato de serem altamente difusivos, característica de grande interesse para análises industriais; de serem fenômenos tridimensionais e transientes e por conterem um amplo espectro de escalas interagindo de forma não-linear, o que dificulta enormemente sua análise e seu entendimento. Um fato que contribuiu de forma decisiva para este entendimento foi a

observação de um tipo de estrutura presente em várias classes de escoamentos turbulentos, denominada estrutura coerente, feita por Brown e Rosko (1974)¹. Formalmente, estruturas coerentes são aquelas que subsistem sem serem completamente dissipadas por um tempo muito maior que seu período de rotação característico.

Os estudos dos fenômenos presentes nos escoamentos turbulentos podem ser aplicados a projetos de equipamentos industriais de diversas formas. No controle mais efetivo de trocas de calor, tanto nas trocas entre fluidos em trocadores como nas taxas de resfriamento de componentes eletrônicos e motores térmicos, com o objetivo de aumentar a eficiência destes equipamentos. Na melhoria da performance de misturas de componentes fluidos, para uma maior homogeneidade final, que favorece reações químicas como, por exemplo, a queima de combustíveis nas câmaras de combustão, em que se obtém um maior rendimento e uma redução dos resíduos poluentes. Na diminuição do arrasto e no aumento da segurança de corpos em movimento, como carros e aeronaves. Podem ainda ser utilizados na análise de fenômenos atmosféricos, influenciando o modo como o homem se insere na natureza, prevendo de forma mais efetiva os fenômenos climáticos, tais como secas, inundações e ciclones, bem como, na previsão de períodos de bom tempo, aumentando a possibilidade de planejamento social.

Apesar de todas essas possibilidades de aplicações e dos avanços na área de modelagem de escoamentos turbulentos, ainda são escassas as ferramentas de cunho geral, que possam ser efetivas na solução de qualquer classe de escoamento, devida à extrema complexidade e características peculiares presentes em cada uma delas, de forma isolada ou combinada.

Há, ainda, uma forte dependência de uma “análise prévia do escoamento para se obter uma modelagem coerente” (BRADSHAW, 1997). Muitas vezes, as ferramentas são adaptadas à configuração em estudo e freqüentemente não são efetivas para outras configurações, ou dependem de modificações em constantes numéricas que restringem significativamente as possibilidades de sua utilização.

1 Citado por Silveira Neto (1993).

1.3 Da Simulação de Grandes Escalas

As equações de Navier-Stokes representam satisfatoriamente todos os fenômenos ligados aos escoamentos de fluidos newtonianos, não importando o regime de escoamento. No entanto, somente com o avanço na capacidade dos computadores digitais foi possível a aplicação de técnicas numéricas para a sua resolução. Desta forma, a Dinâmica dos Fluidos Computacional se estabeleceu como uma ferramenta poderosa para a análise de escoamentos e resolução de problemas envolvendo fluidos, em especial aqueles os ligados à área industrial, cujo interesse maior são os valores quantitativos estatísticos das grandezas mais significativas, tais como coeficientes de arrasto e sustentação e taxas de transferência de calor. Bem como aqueles de natureza acadêmica, nos quais se intenciona, além dos valores estatísticos, a análise e compreensão dos fenômenos presentes no escoamento, possibilitando, desta forma, uma melhoria nos modelos matemáticos e numéricos utilizados. Portanto, as áreas acadêmica e industrial estão sempre em profunda interação, mesmo que num primeiro momento isto não se apresente.

Ainda com relação às equações de Navier-Stokes, não existem expectativas de solução numérica de forma completa para regimes turbulentos devido ao largo espectro de escalas turbulentas presentes. Simulações numéricas deste tipo já foram realizadas para valores moderados de Reynolds. Estas são denominadas Simulações Numéricas Diretas (DNS¹). No entanto, à medida em que cresce a diferença entre as maiores e as menores escalas isto se torna impraticável devido a exigência de refinamento da malha, que deve resolver todo espectro de escalas. É importante ressaltar esta necessidade de que todas as escalas sejam capturadas pela malha para que a simulação seja considerada como DNS.

Uma das soluções propostas para este problema é a utilização da Simulação de Grandes Escalas (LES²). Esta metodologia, proposta inicialmente por Smagorinsky (1963), tem como princípio a divisão de escalas do escoamento. As escalas que podem ser capturadas pela malha são resolvidas numericamente e as escalas menores que o tamanho característico da malha (escalas submalha) são modeladas de tal forma

1 Do Inglês direct numeric simulation (DNS).

2 Do inglês large-eddy simulation (LES).

que a energia que seria dissipada por elas é dissipada de forma artificial pelo modelo de turbulência. Este modelo é denominado modelo submalha e uma de suas características deve ser a simplicidade.

O primeiro e mais utilizado dos modelos submalha é o modelo de Smagorinsky (LESIEUR et al., 2005). Este modelo é baseado na isotropia das pequenas escalas e na hipótese de equilíbrio, segundo a qual a produção de energia cinética turbulenta é igual a sua dissipação. Posteriormente, Germano et al. (1991) propôs um modelo no qual se aplica um filtro no campo resolvido para obter informações sobre a transferência de energia nas escalas intermediárias entre o tamanho característico desse filtro e o tamanho da malha. Com estas informações, ajusta-se o modelo submalha para a transferência de energia nas escalas inferiores à malha. Para tanto, supôs que as características de transferência nos dois níveis sejam as mesmas. Este modelo foi depois modificado por Lilly (1992).

1.4 Objetivos do Presente Trabalho

Um ponto crítico para o desenvolvimento da engenharia moderna e para a compreensão da física dos escoamentos turbulentos é a análise da evolução temporal e da topologia dos escoamentos. Neste sentido, as simulações numéricas são mais precisas na obtenção de detalhes sobre o escoamento do que medidas experimentais como, por exemplo, a confirmação dos vórtices laterais obtidos em laboratório por Koseff et al. (1983) (CHIANG et al., 1997).

Como já citado, considera-se que a partir do número de Reynolds aproximadamente igual a 1.300, o escoamento em cavidades com tampa deslizante entra em regime transiente, mas ainda laminar (AIDUM et al., 1991 e CHIANG et al., 1998). A transição à turbulência ocorre a um número de Reynolds entre 6.000 e 8.000. Esta transição ocorre em regiões diferentes do espaço, iniciando na região do vórtice secundário posterior (KOSEFF e STREET, 1984a e SHANKAR e DESHPANDE, 2000). Para o número de Reynolds igual a 10.000, os autores são unânimes em afirmar que o escoamento é totalmente turbulento. Vários deles simularam escoamentos com este número de Reynolds. No entanto, acima deste número não foram encontrados trabalhos na literatura.

Seguindo esta linha de pensamento, o objetivo do presente trabalho é analisar as estruturas transientes presentes nos escoamentos em cavidades cúbicas com tampa deslizante a número de Reynolds 10.000, 25.000, 50.000 e 100.000. O número de Reynolds 10.000 foi escolhido devido ao fato de haver dados experimentais e numéricos com os quais pode-se fazer comparações para validação dos métodos utilizados e suas implementações. Os outros números de Reynolds foram escolhidos por não constarem ainda da literatura e devido a existência de projetos do LTCM¹ envolvendo aeroacústica, que utilizarão estes valores, uma vez que eles se encontram justamente na região dos escoamentos que serão simulados. nestes projetos.

Para o presente estudo foi desenvolvido um código computacional de diferenças finitas para a solução das equações de Navier-Stokes para escoamentos incompressíveis com propriedades constantes. Neste código foram implementadas discretizações com diferenças centradas de segunda e quarta ordem para as velocidades e os modelos submalha de Smagorinsky e de Germano.

Inicialmente foram realizados testes com a configuração bidimensional com números de Reynolds: 1.000, 3.200, 5.000 e 10.000. Com estes testes definiram-se os parâmetros do programa, malhas a serem utilizadas, forma de discretização, solver, etc. Em seguida foram realizadas simulações na configuração tridimensional. Simulou-se um caso estacionário, a número de Reynolds igual a 1.000, e um caso a número de Reynolds igual a 3.200, que é considerado laminar. Este caso teve o intuito de validar o código na configuração tridimensional. Dos casos objetivados no presente estudo, a simulação do escoamento a número de Reynolds igual a 10.000 teve como objetivo verificar o desempenho do modelo submalha de Smagorinsky e modelo submalha dinâmico de Germano. Como este último apresentou os melhores resultados. Ele foi utilizado nas simulações dos escoamentos a números de Reynolds iguais a 25.000, 50.000 e 100.000.

¹ Laboratório de Transferência de Calor e Massa e Dinâmica dos Fluidos da Universidade Federal de Uberlândia.

CAPÍTULO 2

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Como já indicado na introdução, os pesquisadores são unânimes em afirmar que o trabalho de Burgraff (1966) é pioneiro em estudar numericamente o problema da cavidade com tampa deslizante. No entanto, foi no trabalho de Ghia et al. (1982) que primeiramente se analisou de forma quantitativa e detalhada este problema. Neste trabalho, os autores utilizaram a formulação vorticidade e função-corrente para estudar a efetividade do acoplamento entre o método de multigrid e um solver fortemente implícito na obtenção de soluções numéricas para escoamentos a altos números de Reynolds com malhas refinadas. Para realização dos testes, eles utilizaram como problema modelo o escoamento bidimensional, incompressível e em regime permanente. Apresentaram soluções para números de Reynolds entre 100 e 10.000. As malhas utilizadas foram de 129×129 para Reynolds até 5.000 e 257×257 para número de Reynolds igual a 10.000 com refinamentos uniformes próximos às paredes. Desde então, seus resultados são referências para qualquer estudo sobre cavidades bidimensionais e utilizados para comparações entre as diversas técnicas numéricas.

Mais recentemente, os trabalhos em cavidades têm se concentrado no processo de transição entre o escoamento em regime permanente e regime caótico. Cazemier et al. (1998) realizaram este estudo utilizando decomposição ortogonal. Observaram que a primeira birfurcação de Hopf¹ acontece a $Re\ 7.819$, seguida por regimes periódicos a números de

¹ Ponto no qual aparecem oscilações na solução.

Reynolds entre 7.819 e 8.200, entre 8.400 e 11.188 e entre 11.500 e 11.900. Entre os intervalos 8.200 e 8.400 e 11.188 e 11.500 a solução apresenta um regime denominado de quase-periódico. Eles realizaram simulações numéricas que não confirmaram estas complexas transições.

O mesmo problema também foi estudado por Peng et al. (2003). Estes encontraram aproximadamente os mesmos regimes obtidos por Cazemier et al. (1998). No entanto, encontraram descontinuidades da solução entre os regimes previstos. Previram a primeira birfurcação de Hopf a número de Reynolds igual a 7.402, seguida de um regime periódico até o número de Reynolds igual a 10.280. Neste intervalo apareceu uma birfurcação supercrítica¹ devida à presença de um ponto de inflexão no gráfico frequência x número de Reynolds, mas ainda não completamente determinado, localizado entre 10.000 e 10.370. Os regimes de escoamento encontrados são: quase-periódico, entre 10.280 e 10.300 e periódicos entre 10.325 e 10.500, entre 10.600 e 10.700 e entre 10.800 e 10.900. E a solução apresenta-se caótica a partir do número de Reynolds igual a 11.000.

Sem duvida, um marco no estudo da cavidade com tampa deslizante foram os estudos realizados pelo grupo de pesquisadores da Universidade de Stanford. Koseff e Street (1984a, 1984b e 1984c), Freitas et al. (1985), Freitas e Street (1988) e Prasad e Koseff (1989). Entre estes trabalhos, destacam-se o estudo numérico de Freitas e Street (1988) e os estudos experimentais de Prasad e Koseff (1989).

Freitas e Street (1988) realizaram simulações numéricas em cavidades com razão de aspecto igual a 3:1 e com número de Reynolds igual a 3.200. Detectaram a existência de três fenômenos que determinam o escoamento sobre esta configuração. Primeiro a circulação principal que é determinada pelo arraste do fluido devido ao movimento da tampa. Segundo, um escoamento secundário mantido pelo gradiente de pressão gerado pela interação entre a circulação primária e as paredes laterais estacionárias. E terceiro, as estruturas de Taylor-Görtler, que são descritas como resultado das interações entre a circulação primária e os efeitos de dissipação de energia da parede a jusante do escoamento. No estudo, os autores apresentaram uma descrição detalhada dos vórtices de Taylor-

1 Aparecimento de várias frequências na solução.

Görtler utilizando as trajetórias das partículas lançadas a partir da região superior direita. Mostraram comparações entre os perfis de velocidades com os obtidos em simulações bidimensionais. Concluíram que “há uma forte influência das estruturas tridimensionais na circulação central” e que os perfis de velocidade nesta configuração não podem ser obtidos em simulações bidimensionais.

Prasad e Koseff (1989) realizaram uma série de experimentos em cavidades de seção quadrada utilizando anemometria a laser-Doppler (LDA). Analisaram os efeitos do número de Reynolds e da razão de aspecto transversal (SAR) sobre a distribuição de quantidade de movimento no escoamento em cavidade com tampa deslizante. Os números de Reynolds estudados por eles foram 3.200, 5.000, 7.500 e 10.000, com razões de aspecto transversal 1:2 e 1:1.

Estas análises foram feitas a partir dos perfis de velocidade média, raiz quadrada da média do quadrado das flutuações das componentes de velocidade (SMR^1) e de correlações de segunda ordem das flutuações de velocidade nas direções x e y. Os perfis mostrados pelos autores foram obtidos nas linhas centrais do plano xOy central da cavidade. Além destes, foram mostrados sinais de velocidade e seus espectros em pontos na linha vertical central da cavidade. Estes resultados foram utilizados para a validação dos resultados obtidos no presente trabalho

Nos casos analisados Prasad e Koseff (1988) apontam dois efeitos da presença das paredes na distribuição de quantidade de movimento na cavidade. O primeiro é o pico mais alto de velocidade na direção x, que ocorre próximo ao fundo da cavidade com SAR menor. Eles atribuem este efeito à resistência das paredes laterais, as quais diminuem as velocidades nestas regiões, portanto, o aumento destas na região central mantém a velocidade média. O segundo efeito é o perfil da componente x mais uniforme para o maior valor da SAR. Este perfil é atribuído ao maior nível de flutuação atingido neste caso, o que facilita o transporte da quantidade de movimento para o centro da cavidade.

Para número de Reynolds igual a 3.200, estes autores consideram que o escoamento é laminar, pois os níveis de flutuação da velocidade são muito baixos. Neste caso, a transferência de energia da camada limite

1 Do inglês root mean square (RMS), $RMSu = \sqrt{u' u'}$

inferior para o centro da cavidade é feita pelas estruturas do tipo Taylor-Görtler. De acordo com suas análises, como para maiores valores de SAR há maiores quantidades de estruturas deste tipo, a mesma configuração de distribuição da quantidade de movimento é obtida para este número de Reynolds.

A série de trabalhos numéricos de Chiang et al. (1996, 1997 e 1998) elucidaram vários fenômenos presentes nos escoamentos em cavidades em especial no que se refere a análise de estruturas e à transição.

Chiang et al. (1996) simularam numericamente os escoamentos em cavidade com SAR 3:1 a números de Reynolds iguais a 250, 500, 750, 1.000, 1.250, 1.375, 1.500 e 2.000. Utilizaram o método de volumes finitos com discretização de diferenças centradas para os termos difusivos; e QUICK de terceira ordem para os termos advectivos. A malha utilizada nas simulações foi de 91 pontos na direção transversal e 34 nas outras direções. Neste trabalho, o movimento da circulação central foi analisado de forma detalhada.

De acordo com estes autores, o fluido próximo à tampa deslizante é arrastado pelo movimento da mesma, atendendo as condições de não deslizamento. A desaceleração do fluido próximo às paredes laterais induz um gradiente de pressão que força o escoamento em direção ao plano de simetria na parte interna da recirculação central. Isto, por sua vez, gera um fluxo contrário nas regiões mais periféricas. Os autores mostram que quanto mais interna for a trajetória da partícula mais próxima ela chegará do plano de simetria. E ressaltam que conceitualmente este escoamento é análogo ao encontrado nas bombas de sucção. As partículas de fluido da região central adquirem um movimento de recirculação transversal excetuando-se o vórtice primário que é transversalmente estacionário.

Na sequência do trabalho citado acima, Chiang et al. (1998) estudaram a transição nos escoamentos em cavidades com SAR igual a 3:1. Neste estudo, utilizaram método de volumes finitos com malhas deslocadas com 91 pontos na direção transversal e 34 pontos nas outras duas direções. Analisaram o papel dos vórtices secundários anterior e posterior na transição do escoamento em regime permanente para o escoamento em regime transiente.

Eles simularam casos a partir do número de Reynolds igual a 10, no

qual encontraram um escoamento em regime estacionário e completamente simétrico, sendo que na região central entre 0,2 e 2,8 na direção transversal, as velocidades nesta mesma direção são praticamente nulas. Com o incremento do número de Reynolds, começaram a aparecer valores de velocidades transversais significativos. Velocidades estas induzidas pelo campo de pressão resultante da interação do escoamento com as paredes laterais. Até o número de Reynolds igual a 750 o escoamento se mantém estacionário. Para número de Reynolds igual a 1.000 o escoamento já entra em regime transiente. Os autores não simularam valores intermediários, mas citam o trabalho de Aitdun et al. (1991), que estima um valor entre 825 e 925 para a transição entre os dois regimes.

Com relação aos vórtices secundários, os autores ressaltam que estes apresentam um tamanho menor que o tamanho dos vórtices apresentados pelas cavidades bidimensionais. Atribuem este fato à distribuição de energia na direção transversal, por onde estas estruturas se estendem na forma de uma espiral. As partículas vindas do vórtice secundário anterior migram em direção às paredes laterais e entram na corrente interna da recirculação principal chegando à região central (plano de simetria). Já as partículas vindas do vórtice secundário posterior não chegam ao plano de simetria. Entram na corrente mais externa da recirculação central e retornam em direção as paredes laterais.

Entre os trabalhos experimentais em cavidades com tampas deslizantes mais recentes, vale destacar os estudos de Migeon et al. (2003). Nele, os autores realizaram experimentos utilizando injeção de tinta e de visualização de partículas para visualizar e estudar o escoamento em cavidades com tampa deslizante a número de Reynolds igual a 1.000 e com razão de aspecto transversal 2:1. Dois casos foram estudados, um com seção quadrada e outro com seção retangular com razão de aspecto 1:2. Os resultados obtidos com injeção de tinta mostraram que no início do escoamento as velocidades na direção transversal se propagam das paredes laterais para o plano de simetria. A técnica de visualização de partículas permite a análise de planos do escoamento. Os resultados obtidos com esta técnica mostraram que os vórtices laterais consistem de uma única estrutura toroidal entre a

circulação principal e a parede lateral e seu eixo segue as linhas de corrente da circulação principal. Eles se desenvolvem a partir da região superior da cavidade e acompanham o desenvolvimento do vórtice primário. Neste caso, os escoamentos não manifestaram estruturas do tipo Taylor-Görtler, a não ser pequenas deformações localizadas, que eventualmente poderiam evoluir para estas estruturas contra-rotativas. No entanto, provavelmente devido à pequena largura da cavidade e ao baixo número de Reynolds, estas estruturas não se manifestaram. As deformações apareceram nas proximidades dos vórtices laterais indicando que as instabilidades provocadas por estas estruturas são responsáveis pelo seu aparecimento.

Em termos de simulação de grandes escalas, os modelos de turbulência dinâmico propostos por Germano et al. (1991) e modificado por Lilly (1992) têm contribuído de forma decisiva para o avanço das simulações de escoamentos turbulentos, sobretudo nas proximidades da parede, onde o modelo de Smagorinsky não obtém sucesso, a não ser com a aplicação de modelos de parede. O trabalho de Hassan e Barsamian (2001) compara os resultados obtidos com o modelo de Smagorinsky utilizando vários modelos de parede e resultados obtidos com o modelo dinâmico de Germano.

No artigo em que Germano et al. (1991) propõem o modelo submalha dinâmico, os autores afirmam que o modelo de Smagorinsky é o modelo submalha mais utilizado. Revisam os valores da constante de Smagorinsky que já foram utilizadas e concluem que é impossível simular toda gama de fenômenos presentes nos escoamentos de fluidos com uma única constante universal. Outra dificuldade do modelo ressaltada por eles é o fato de que ele não pode levar em conta a cascata inversa de energia.

Propõem então, que o coeficiente de proporcionalidade entre a viscosidade turbulenta e o módulo do tensor deformação seja calculada de forma dinâmica no espaço e no tempo. Segundo eles “o modelo dinâmico é baseado na identidade algébrica entre as tensões submalha a dois níveis diferentes de filtragem”. O primeiro nível é aquele imposto pela própria malha e o segundo é o nível de teste, no qual filtram-se os campos resolvidos. A partir deste filtro são retiradas informações sobre as tensões turbulentas nas menores escalas resolvidas e calcula-se o coeficiente de

proporcionalidade igualando-se esta tensão à diferença entre as tensões turbulentas totais no nível de teste e no nível da malha.

Com o modelo dinâmico os autores simularam transição à turbulência em canais a número de Reynolds igual a 8.000, baseado na velocidade da linha central na condição inicial, e simularam escoamentos turbulentos em canais a número de Reynolds iguais a 3.300 e 7.900, baseados na velocidade na linha central.

Germano et al. (1991) analisaram dois tamanhos característicos de filtro, utilizando a média geométrica e a raiz quadrada da soma dos quadrados dos tamanhos da malha em cada direção. Com a primeira forma de cálculo obtiveram melhores resultados. Também analisaram várias razões de filtro entre 8/7 e 4, concluindo que se esta razão for muito pequena as tensões resolvidas podem contaminarem-se por oscilações numéricas. No entanto, a partir da razão igual a 2, os resultados, ao contrário do esperado, mantiveram-se insensíveis ao valor da razão.

Os resultados das suas simulações foram comparados com os resultados obtidos por DNS, apresentando boa concordância com eles. Os autores verificaram que o modelo proposto anula a constante de proporcionalidade em regiões laminares do escoamento, corrige-se de forma assintótica nas proximidades da parede em uma camada limite turbulenta e pode representar a cascata inversa de energia. Podendo, portanto, ser aplicável tanto em camadas limite turbulentas como em escoamentos em fase de transição.

Este modelo foi modificado por Lilly (1992) na forma de calcular a viscosidade turbulenta. No modelo dinâmico de Germano, a equação resultante do balanço de tensões turbulentas é multiplicada pela taxa de deformação com o intuito de transformá-la em uma equação escalar. Lilly (1992) mantém a forma tensorial da equação e aplica uma otimização com mínimos quadrados, considerando todas as componentes do tensor para encontrar o valor da constante de proporcionalidade. Para ele, este procedimento “remove ou reduz o problema de singularidade” que aparece na formulação inicial” de Germano et al. (1991). Esta foi a formulação utilizada no presente trabalho.

Utilizando simulações numéricas em cavidades, Hassan e Barsamian (2001) estudaram a aplicação do modelo de Smagorinsky modificado por

funções de parede e do modelo dinâmico de Germano para coordenadas curvilíneas. Utilizaram a cavidade com tampa deslizante para testes com estes modelos. E compararam os resultados obtidos com os obtidos experimentalmente por Prasad e Koseff (1989). Foram analisados os seguintes modelos de parede: o modelo de Schumann (1975) modificado por Grotzbach (1987), o modelo de deslocamento proposto por Piomelli et al. (1989), o modelo de Wener e Wengle (1991) e um modelo proposto por eles, que consiste na modificação do modelo de Wener e Wengle (1991) utilizando o conceito de deslocamento do modelo proposto por Piomelli et al. (1989).

De acordo com Hassan e Barsamian (2001), o modelo dinâmico apresenta fortes oscilações no valor do coeficiente de proporcionalidade e apresenta uma significativa fração de valores negativos. Eles ressaltam que o alisamento local dos coeficientes e a limitação de valores não são matematicamente consistentes e apresentam a solução proposta por Breuer e Rodi (1994), que consiste na utilização de um filtro para eliminar as oscilações de alta frequência da constante (ver seção 3.6).

Neste trabalho os autores realizaram simulações na cavidade cúbica a número de Reynolds igual a 10.000. Simularam utilizando malha com 32 pontos em todas as direções – com o modelo de Smagorinsky modificado e com modelo dinâmico – e uma simulação utilizando malha com 32 pontos na direção transversal e com 50 pontos nas outras duas direções – com o modelo dinâmico –.

Nas simulações com modelos de parede a que apresentou melhores resultados foi a realizada com o modelo de Wener e Wengle (1991) com a modificação proposta por Hassan e Barsamian (2001). No entanto, as simulações com o modelo dinâmico apresentaram os melhores resultados, tanto em relação às velocidades médias quanto aos RMS da velocidade. No trabalho, os autores apresentam campos de vetores de velocidade em planos transversais ao escoamento e isosuperfícies de vorticidade na direção do escoamento, evidenciando a formação de estruturas do tipo Taylor-Grörtler. Estas estruturas foram encontradas em todas as simulações.

No LTCM os estudos de escoamentos em cavidades iniciaram com o trabalho de Padilla et al. (2005). Eles realizaram simulações de grandes

escalas em cavidades tridimensionais para números de Reynolds iguais a 3.200 e 10.000, utilizando um código com discretização de diferenças centradas de segunda ordem e malhas com 40 pontos nas três direções com refinamento uniforme próximo às paredes. Eles utilizaram os modelos de Smagorinsky e de Germano e compararam os resultados obtidos com os resultados experimentais de Prasad e Koseff (1989). Para o primeiro modelo, utilizaram duas constante de Smagorinsky, 0,1 e 0,18. Os perfis de velocidade média com os três modelos não apresentaram diferenças significativas. No entanto, o modelo de Germano foi superior para encontrar os perfis das correlações de segunda ordem, seguido pelo modelo de Smagorinsky com constante 0,18. Em nenhum dos casos os valores máximos e mínimos das correlações foram atingidos, mas isto se justifica, segundo os autores, pela baixa resolução de malha utilizada.

Uma tradição no LTCM é a utilização de métodos de paço fracionado para a solução das equações de Navier-Stokes. Para o presente trabalho foram fundamentais os estudos de Armfield e Street (1999), que constituíram-se em um guia para o estabelecimento das diretrizes básicas do código computacional desenvolvido, e ao trabalhos de Patankar (1980), Maliska (1995), Fortuna (2000) e Ferziger e Peric (1999), fontes de constantes consultas sem as quais não teria sido possível o desenvolvimento deste trabalho.

Armfield e Street (1999) comparam alguns métodos de passo fracionado com discretização de segunda ordem no tempo para a solução das equações de Navier-Stokes. Os métodos comparados são: o método iterativo, o método da projeção e o método da correção de pressão. No método iterativo e no método da correção de pressão, a equação de Poisson é resolvida para a correção de pressão. Já no método da projeção, a equação de Poisson é resolvida para a própria pressão. No método iterativo, as iterações são feitas no mesmo passo de tempo para a solução da equação da velocidade até a convergência da conservação da massa e do momento, enquanto nos métodos não iterativos, cada sistema é resolvido apenas uma vez a cada passo de tempo.

O problema analisado pelos autores, nestas comparações, é a cavidade com tampa deslizante bidimenssional a número de Reynolds igual a 400. Os termos advectivos são discretizados com Adams-Bashforth no

tempo com o método Quick de terceira ordem, proposto por Leonard (1979), no espaço. Os termos difusivos são discretizados com Crank-Nicolson no tempo e com diferenças centradas de segunda ordem no espaço. Utilizaram malha deslocada e uniforme com 50 pontos nas duas direções.

Os resultados obtidos por Armfield e Street (1999) mostraram que todos os métodos atingem uma convergência de primeira ordem no tempo para a pressão e que o maior erro é obtido pelo o método iterativo. Para a velocidade, o método da projeção atinge uma convergência de primeira ordem e apresenta o maior erro, os outros dois atingem uma convergência de segunda ordem e apresentam erros iguais. O método da correção de pressão foi o que atingiu uma maior precisão com um menor tempo de CPU. Para a obtenção dos resultados do presente trabalho utilizou-se, portanto, o método da correção de pressão.

CAPÍTULO 3

MODELO MATEMÁTICO

Neste capítulo serão descritas as equações utilizadas para a modelagem dos escoamentos. Para tanto, será utilizada a notação tensorial de Einstein, na qual os índices repetidos no mesmo termo indicam um somatório. Com esta notação a equação de conservação da massa para escoamentos incompressíveis toma a seguinte forma:

$$\nabla \vec{u} = \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0, \quad (3.1)$$

significando:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (3.2)$$

Observa-se que o índice j no termo da derivada espacial indica o somatório das derivadas das velocidades. O desenvolvimento desta equação bem como da equação de Navier-Stokes pode ser encontrada em White (2005) e Shilischting (1979). Os Apêndices, no final do presente trabalho, mostram a obtenção de equações que podem se mostrar relevantes para o seu entendimento.

3.1 Equações de Navier-Stokes

As equações de Navier-Stokes resultam da aplicação da Segunda Lei

de Newton a um referencial euleriano e da relação estabelecida por Stokes (WHITE, 2005) para as tensões viscosas proporcionais à taxa de deformação do fluido, Para escoamentos incompressíveis com viscosidade constante,

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial (u_j u_i)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{vij}}{\partial x_j} + f_i. \quad (3.3)$$

A relação de Stokes é dada por:

$$\tau_{vij} = \mu S_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (3.4)$$

Verifica-se que este é um tensor simétrico e que portanto tem seis componentes a serem determinadas. Substituindo-se a equação 3.4 na equação obtém-se:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial (u_j u_i)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + \phi_{ij} + f_i. \quad (3.5)$$

Esta é a versão da equação utilizada neste trabalho para modelagem do movimento do fluido. O termo ϕ_{ij} é denominado termo cruzado e é obtido pela equação a seguir,

$$\phi_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (3.6)$$

Este termo é nulo para escoamentos incompressíveis com viscosidade constante. No entanto, será mantido, pois os modelos de turbulência baseados no conceito de viscosidade turbulenta, que serão utilizados no trabalho, impedem esta simplificação, pois a viscosidade total passa a ser variável.

3.2 Equações de Navier-Stokes Filtradas

As equações de Reynolds são obtidas a partir da média das equações de Navier-Stokes. Porém, em Simulação de Grandes Escalas é utilizada

uma forma filtrada da equação. Como já ressaltado no Capítulo 1, as limitações numéricas para a resolução das equações de Navier-Stokes levam ao processo de separação de escalas. Define-se um filtro G , de tal forma que uma variável qualquer é dada pela soma de uma componente filtrada e uma componente flutuante,

$$\phi(\vec{x}) = \bar{\phi}(\vec{x}) + \phi'(\vec{x}). \quad (3.7)$$

A componente filtrada é obtida pela aplicação deste filtro à variável,

$$\bar{\phi}(\vec{x}_o) = \int \phi(\vec{x}) G(\vec{x} - \vec{x}_o) d\vec{x}. \quad (3.8)$$

Aplicando-se este filtro à equação de conservação da massa, obtém-se

$$\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} = 0. \quad (3.9)$$

Nota-se que não há alteração no seu formato. No entanto, nas equações de Navier-Stokes surge uma diferença devida ao termo não linear,

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u}_j \bar{u}_i)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) + \bar{\phi}_{ij} + \bar{f}_i. \quad (3.10)$$

Nota-se o aparecimento da derivada do termo $\bar{u}_i \bar{u}_j$. Subtraindo-se a derivada do termo $\bar{u}_i \bar{u}_j - \bar{u}_i \bar{u}_j$ dos dois lados da equação obtém-se:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u}_j \bar{u}_i)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \tau_{ij} \right) + \bar{\phi}_{ij} + \bar{f}_i. \quad (3.11)$$

Aparece então o tensor submalha τ_{ij} , dado por:

$$\tau_{ij} = \bar{u}_i \bar{u}_j - \bar{u}_i \bar{u}_j. \quad (3.12)$$

Este tensor é tradicionalmente colocado junto ao termo difusivo para ressaltar o papel da turbulência no aumento da difusividade das grandezas envolvidas no escoamento, em particular na quantidade de movimento.

3.3 Modelo de Turbulência

Boussinesq (1877) propôs modelar o tensor submalha de forma análoga ao modelo de tensões viscosas. Para tanto, utilizou o conceito de viscosidade turbulenta em camada limite sobre uma placa plana infinita. Kolmogorov (1942) propôs uma forma generalizada da hipótese de Boussinesq e esta tem sido a forma utilizada até os dias atuais,

$$\tau_{ij} = -2\nu_t \bar{S}_{ij} + \frac{2}{3} \delta_{ij} \tau_{ij}. \quad (3.13)$$

Sendo S_{ij} o tensor de deformação, dado por:

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (3.14)$$

Desta forma obtém-se:

$$\tau_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \tau_{ij} = -\nu_t \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (3.15)$$

Observa-se que o lado esquerdo da equação contém apenas a parte anisotrópica do tensor submalha.

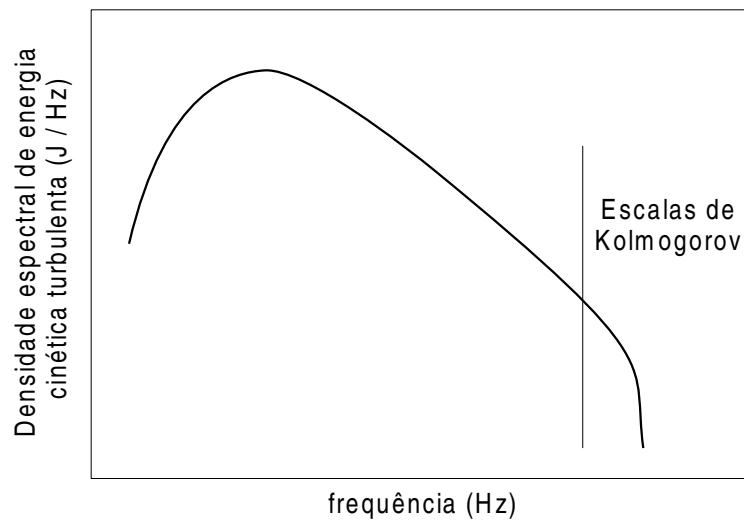


Figura 3.1: Densidade espectral de energia cinética turbulenta destacando as escalas de Kolmogorov.

Uma questão importante em relação à validade desta hipótese é o fato de que a viscosidade molecular caracteriza a troca de quantidade de movimento entre parcelas de fluido macroscópica seguindo uma difusão molecular, o que permite supor uma separação clara entre as escalas macro e microscópicas. Esta separação não ocorre entre as maiores escalas da turbulência e as escalas dissipativas de Kolmogorov¹ onde se observa um espectro contínuo de energia (figura 3.1). No entanto, os resultados obtidos com modelos baseados nesta suposição são muito próximos dos resultados obtidos experimentalmente, o que tem justificado a ampla utilização deste tipo de modelo pela comunidade científica. Em Lesieur (1997) e Lesieur et al. (2005) encontra-se esta e outras discussões relacionadas a modelos de turbulência e suas utilizações.

3.4 Modelo de Smagorinsky

Smagorinsky, seguindo a idéia do modelo de comprimento de mistura de Prandtl (LESIEUR et al., 2005), propôs um modelo submalha no qual a viscosidade turbulenta é proporcional ao comprimento característico da malha e a uma velocidade característica submalha. O comprimento característico da malha é uma escolha óbvia, a velocidade característica deve estar relacionada a velocidade das pequenas escalas que é da ordem da variação da velocidade sobre um elemento da malha (SILVEIRA NETO, 2000),

$$\nu_t \propto \Delta u_c \simeq \Delta (\Delta |S|) \Rightarrow \nu_t \propto \Delta^2 |S|. \quad (3.16)$$

Acrescentando-se uma constante de proporcionalidade obtém-se uma expressão final para a viscosidade turbulenta,

$$\nu_t = (C_s \Delta)^2 \sqrt{2 \overline{S_{ij}} \overline{S_{ij}}}. \quad (3.17)$$

Sendo C_s a constante de Smagorinsky.

Esta expressão pode ser derivada de várias formas. Entre as quais, heurísticamente, como feito acima, ou utilizando a hipótese de isotropia

¹ Escalas de Kolmogorov são as menores escalas de um escoamento turbulento, onde acontece a dissipação da energia cinética pela sua conversão em energia térmica.

das pequenas escalas, como mostrado no Apêndice B.

O valor da constante de Smagorinsky pode ser calculado de forma analítica (LESIEUR, 1997) e seu valor é 0,18. Com este valor obtém-se bons resultados para turbulência isotrópica, como é de se esperar, uma vez que a isotropia é uma das suposições do modelo. Todavia, para escoamento não isotrópicos, como camada de mistura, este valor deve ser reduzido pela metade, como sugere Ferziger (1993). Este mesmo autor também sugere que a causa desta redução pode estar ligada à cascata inversa de energia. Para escoamentos próximos a paredes, este modelo falha, pois as taxas de deformações nesta região são muito altas, gerando altos valores para a viscosidade turbulenta. No entanto estes valores devem ser baixos, pois a turbulência diminui a medida que se aproxima da parede.

3.5 Modelo Dinâmico de Germano

O modelo Dinâmico proposto por Germano et al. (1991) e modificado por Lilly (1992) sugere o ajuste do modelo submalha de forma dinâmica variando no espaço e no tempo. Para isso utiliza-se um filtro adicional, denominado filtro teste, com tamanho característico maior que o tamanho característico da malha e com ele obtém-se informações para determinação da constante de Smagorinsky (figura 3.2).

O modelo é baseado no conceito de similaridade de escalas, ou seja, supõe que as menores escalas capturadas pela solução e as maiores escalas submalha tem estruturas semelhantes. Assim, o campo de velocidade do escoamento é filtrado e as informações obtidas são utilizadas para calcular a viscosidade turbulenta a ser utilizada na solução.

Utilizando-se como modelo submalha o modelo de Smagorinsky, o modelo de Germano ajusta um coeficiente de proporcionalidade entre a viscosidade turbulenta e o módulo do tensor deformação de forma dinâmica. Neste caso, o coeficiente é obtido por:

$$C = \frac{1}{2} \frac{L_{ij} M_{ij}}{M_{ij} M_{ij}}. \quad (3.18)$$

Sendo

$$L_{ij} = \widehat{\overline{u_i u_j}} - \widehat{\overline{u_i}} \widehat{\overline{u_j}} \quad \text{e} \quad (3.19)$$

$$M_{ij} = \Delta^2 |\widehat{\overline{S}}| \widehat{\overline{S_{ij}}} - \Delta^2 |\widehat{\overline{S}}| \widehat{\overline{S_{ij}}}. \quad (3.20)$$

Observa-se que os tensores L_{ij} e M_{ij} podem ser calculados explicitamente, uma vez que os valores presentes nas equações são todos conhecidos. No apêndice B encontra-se a dedução destas equações de forma mais detalhada.

Padilla (2004) fez um estudo cuidadoso sobre filtros testes utilizados para o cálculo do coeficiente de proporcionalidade do modelo dinâmico de Germano. No presente trabalho, utilizou-se o filtro ponderado proposto por Padilla (2004) com peso 0,5 para a variável filtrada.

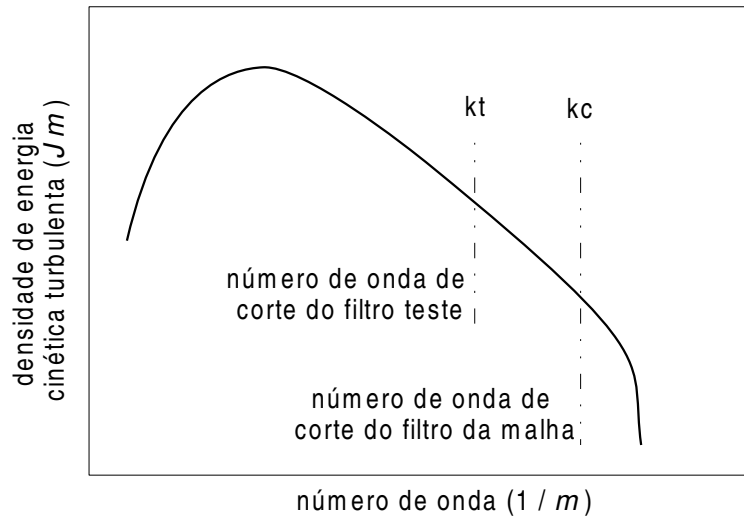


Figura 3.2: Densidade espectral de energia cinética turbulenta mostrando corte para o filtro teste utilizado para modelagem Dinâmica.

3.6 Filtragem Temporal do Coeficiente Dinâmico

Breuer e Rodi (1994) sugeriram um filtro temporal do coeficiente de proporcionalidade do modelo dinâmico com o intuito de diminuir as oscilações de baixa frequência.

$$C_f^{n+1} = (1 - \varepsilon) C^n + \varepsilon C^{n+1}. \quad (3.21)$$

Sendo C o coeficiente de proporcionalidade calculado pelo modelo, C_f o

coeficiente de proporcionalidade filtrado e n o passo de tempo considerado. O valor ε é da ordem de 10^{-3} .

O coeficiente de proporcionalidade pode assumir valores negativos, se por um lado este fato representa a cascata inversa de energia, por outra pode desestabilizar facilmente a solução das equações de Navier-Stokes, uma vez que podem aparecer valores negativos da viscosidade efetiva se a viscosidade turbulenta tiver um módulo maior que a viscosidade molecular.

Uma forma de anular estas instabilidades e continuar representando, pelo menos parcialmente, a cascata inversa de energia é atribuir valores mínimos para a viscosidade turbulenta. Zang et al. (1993) sugerem que sejam utilizados apenas valores que não tornem negativa a viscosidade efetiva.

CAPÍTULO 4

MÉTODO NUMÉRICO

Existe uma grande variedade de métodos utilizados na solução das equações de Navier-Stokes, que se diferenciam significativamente em suas concepções. As diferenças são mais marcantes na forma de discretização da equações, podendo ressaltar os aspectos mais matemáticos, como os métodos de elementos finitos, ou mais físicos, como os métodos de volumes finitos. Podem, ainda, não trabalhar no domínio físico, mas no domínio da frequência, como os métodos espectrais.

Neste trabalho preferiu-se o método de diferenças finitas, por possuir equações simples de serem implementadas, em especial quando se trabalha com ordens de discretização mais elevadas. Além de ser o mais utilizado pela comunidade científica para simulação de grandes escalas. No entanto, é importante ressaltar que não há nenhum impedimento na utilização de qualquer outro método.

4.1 Método de Diferenças Finitas

No método de diferenças finitas, as equações são discretizadas com base na aproximação das derivadas nos pontos da malha. Neste trabalho, utilizou-se malha retangular e uniforme para o domínio espacial. Esta opção se adapta ao domínio da cavidade e facilita a discretização de alta ordem, pois os coeficientes da equação não dependem do volume do elemento da malha. Utilizou-se malha deslocada para inibir oscilações de pressão decorrentes da independência entre pressão e velocidade num

mesmo ponto durante a resolução da equação de conservação da massa. Esta solução tem se revelado mais adequada, uma vez que os métodos que trabalham com malhas co-localizadas nem sempre garantem a conservação da massa nos seus elementos. Neste tipo de malha, as velocidades são armazenadas nas faces, já a pressão e as propriedades do fluido são armazenadas no centro do elemento de malha (figura 4.1).

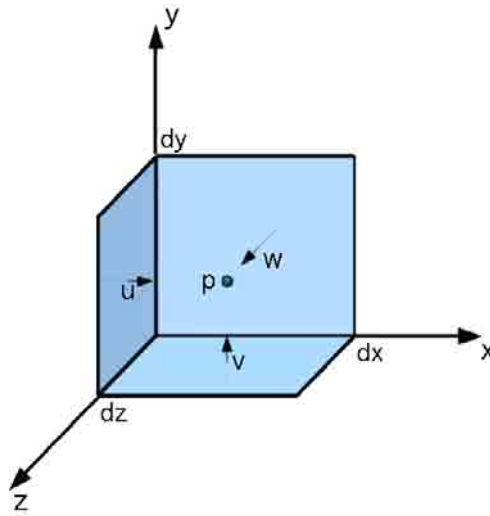


Figura 4.1: Elemento de malha mostrando a disposição das variáveis.

4.1.1 Discretização Temporal

Neste trabalho utilizou-se um método totalmente explícito de segunda ordem Adams-Bashforth, tanto para o termo advectivo como para o termo difusivo da velocidade, e totalmente explícito para a pressão,

$$\frac{(\phi^{n+1} - \phi^n)}{\Delta t} = -G(p^{n+1}) + \frac{3}{2}[S(\phi^n)] - \frac{1}{2}[S(\phi^{n-1})]. \quad (4.1)$$

Sendo $G(p)$ o gradiente de pressão e $S(\phi)$ a soma dos termos advectivo ($A(\phi)$) e difusivo ($D(\phi)$) e de forças de corpo ($F(\phi)$),

$$S(\phi) = -A(\phi) + D(\phi) + F(\phi), \quad (4.2)$$

e ϕ representa qualquer uma das velocidades. O valor de ϕ no tempo $n+1$ é dado por:

$$\phi^{n+1} = \phi^n - \Delta t G(p^n) + \frac{3 \Delta t}{2} [S(\phi^n)] - \frac{\Delta t}{2} [S(\phi^{n-1})]. \quad (4.3)$$

4.1.2 Acoplamento Pressão-Velocidade

O Acoplamento pressão velocidade é feito utilizando-se o método de correção de pressão. Um campo de velocidade é estimado considerando o campo de pressão do tempo anterior,

$$\hat{\phi}^{n+1} = \phi^n - \Delta t G(p^n) + \frac{3 \Delta t}{2} [S(\phi^n)] - \frac{\Delta t}{2} [S(\phi^{n-1})]. \quad (4.4)$$

As condições de contorno para $\hat{\phi}$ são as velocidades do campo anterior.

Subtraindo-se a equação 4.4 da equação 4.3, obtém-se:

$$\phi^{n+1} - \hat{\phi}^{n+1} = -\Delta t G(p^{n+1} - p^n) = -\Delta t G(p^l). \quad (4.5)$$

Sendo $p^l = p^{n+1} - p^n$ a correção de pressão no passo de tempo $n+1$. Esta equação pode ser utilizada para a correção da velocidade depois de obtida a correção de pressão,

$$\phi^{n+1} = \hat{\phi}^{n+1} - \Delta t G(p^l). \quad (4.6)$$

Para obtenção de uma equação da correção de pressão, aplica-se o divergente à equação 4.5¹,

$$-\Delta t \nabla^2(p^l) = \nabla(\phi^{n+1}) - \nabla(\hat{\phi}^{n+1}). \quad (4.7)$$

Sendo $\nabla^2(p)$ o laplaciano da pressão, $\nabla(\phi)$ o divergente da velocidade e $\nabla(\hat{\phi})$ o divergente da velocidade estimada. Como o divergente da velocidade é nulo devido à equação de conservação da massa para escoamento incompressíveis (equação 3.2),

$$\Delta t \nabla^2(p^l) = \nabla(\hat{\phi}^{n+1}). \quad (4.8)$$

Esta equação é resolvida com condições de contorno de derivada nula em

¹ Observa-se que esta é uma equação vetorial, pois ϕ representa as três componentes de velocidade.

todas as faces do domínio.

A solução da equação para um passo de tempo qualquer segue o seguinte algoritmo:

1. Estimativa de um campo inicial de velocidade (equação 4.4);
2. Solução da equação da pressão (equação 4.8);
3. Correção das velocidades (equação 4.6);
4. Aplicação das condições de contorno para velocidade;
5. Verificação da equação de conservação da massa (equação). Caso não haja conservação, retorna-se ao passo 1, estimando-se o campo de velocidade considerando as novas condições de contorno;
6. Correção da pressão.

Particularmente, o retorno a partir do passo 5 se faz necessário quando há condições de fluxo livre. Uma vez que neste caso o campo de velocidade para o qual a pressão foi calculada é modificado pelas condições de contorno de forma independente desta.

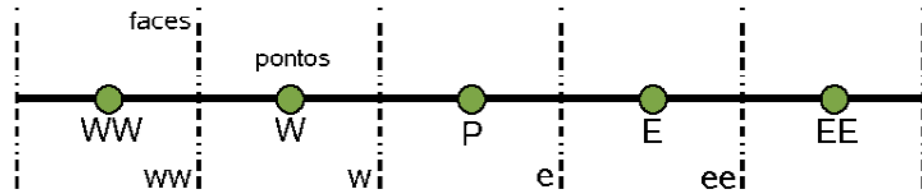


Figura 4.2: Esquema de discretização espacial.

4.1.3 Discretização Espacial

A discretização espacial utilizada é diferenças centradas, tanto para o termo advectivo como para o termo difusivo. Utilizou-se diferenças centradas de segunda e quarta ordem para a velocidade. A diferença nos resultados obtidos com as duas discretizações são mostradas no capítulo 5. Para a pressão, apenas a discretização de segunda ordem foi utilizada. Considerando uma direção ξ qualquer e seguindo o esquema de discretização mostrado na figura 4.2. Para ambas as ordens, os termos são avaliados da seguinte forma:

termo convectivo

$$\frac{\partial}{\partial \xi} (v \phi) = \frac{1}{\Delta \xi} [(v \phi)_e - (v \phi)_w], \quad (4.9)$$

termo difusivo

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(v \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right) = \frac{1}{\Delta \xi} \left[\left(v \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right)_e - \left(v \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right)_w \right]. \quad (4.10)$$

Neste ponto entram as diferenças entre as discretizações de segunda e quarta ordem. Na de segunda ordem a valor de ϕ na face e é dado por:

$$\phi_e = \frac{(\phi_P + \phi_E)}{2} \quad (4.11)$$

e sua derivada por:

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right)_e = \frac{(\phi_E - \phi_P)}{\Delta \xi}. \quad (4.12)$$

Na discretização de quarta ordem o ϕ e sua derivada em e são dados por:

$$\phi_e = \frac{7(\phi_P + \phi_E) - (\phi_W + \phi_{EE})}{12} \quad (4.13)$$

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right)_e = \frac{15(\phi_E - \phi_P) - (\phi_{EE} - \phi_W)}{12 \Delta \xi} \quad (4.14)$$

respectivamente. Este equacionamento pode ser obtido utilizando a expansão das séries de Taylor para segunda e quarta ordem (FERZIGER e PERIC, 1999).

Os valores das propriedades de transporte como v no termo advectivo e ν no termo difusivo são avaliados nas faces do volume utilizado na discretização da variável considerada¹, utilizando-se médias dos termos mais próximos, quando o valor não é disponível na própria face. Os termos cruzados das equações de Navier-Stokes (equação 3.5) são

¹ Observa-se que, como as velocidades são armazenadas nas faces, os volumes para a discretização das mesmas é diferente para cada componente.

discretizados sempre com segunda ordem.

A derivada de segunda ordem da pressão e as derivadas das velocidades estimadas na equação 4.8 são avaliadas por uma discretização de segunda ordem. No elemento P são dadas por:

$$\left(\frac{\partial^2 p}{\partial \xi} \right)_P = \frac{(p_W - 2p_P + p_E)}{2(\Delta \xi)^2} \quad (4.15)$$

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right)_P = \frac{(\phi_e - \phi_w)}{\Delta \xi}. \quad (4.16)$$

Observa-se que estas velocidades estimadas, já estão armazenadas nas faces. Portanto, a equação 4.16 trabalha com os valores nas faces sem necessitar de médias.

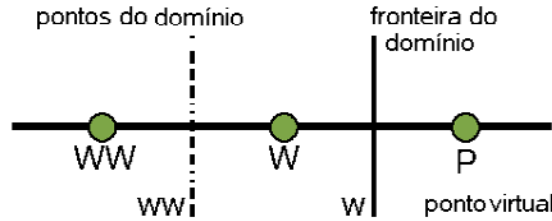


Figura 4.3: Pontos virtuais para a imposição das condições de contorno.

4.1.4 Condições de Contorno Para Velocidade

Todos os casos estudados neste trabalho são de cavidades, portanto, apenas a condição de parede com velocidade imposta foi utilizada¹. Para a imposição das condições de contorno fez-se o uso de pontos virtuais. Estes consistem de pontos fora do domínio (figura 4.3), que facilitam a imposição das condições de contorno (MALISKA, 1995).

No presente trabalho, quando a discretização utilizada foi de segunda ordem, a discretização da condição de contorno foi de primeira ordem, então,

$$\phi_p = \phi_w - 2\phi_W. \quad (4.17)$$

¹ Convém ressaltar que o código desenvolvido está preparado para aplicação de outras condições de contorno.

Sendo ϕ_w o valor da variável na fronteira do domínio. Para a discretização de quarta ordem uma condição de contorno de segunda ordem foi utilizada,

$$\phi_p = 8\phi_w - 6\phi_{ww} + \phi_{www}. \quad (4.18)$$

Estas condições são aplicadas para as faces ortogonais à direção da velocidade considerada, por exemplo, a velocidade u_x nas direções y e z . Na direção paralela, a velocidade é simplesmente imposta na face, uma vez que esta é a própria fronteira do domínio.

4.2 Solver Para a Equação de Correção Pressão

Para todos os casos estudados o solver utilizado para a equação de pressão foi o solver fortemente implícito modificado (MSIP) conforme a formulação de Schneider e Zedan (1891). Este método permite uma resolução rápida e robusta do sistema linear com alta precisão.

Avaliou-se também a utilização do solver fortemente implícito (SIP) conforme formulação de Stone (1968). No entanto, esta segunda opção foi abandonada tão logo a primeira mostrou-se mais eficiente para solução do sistema linear. Não foram feitas medidas precisas de velocidades nos testes, por não se tratar do contexto deste trabalho.

O sistema linear foi resolvido até atingir um resíduo mínimo preestabelecido, que foi de 10^{-6} para casos bidimensionais, o que levou a um resíduo do divergente da ordem de 10^{-9} , e de 10^{-4} para casos tridimensionais, que resultou num resíduo do divergente da ordem de 10^{-7} . Sendo o resíduo da solução obtido conforme indicação de Schneider e Zedan (1981), por:

$$\varepsilon_{res} = S_p - A_p p_p - \sum A_{nb} p_{nb}. \quad (4.19)$$

Sendo A e S os coeficientes e o termos independentes do sistema respectivamente, o índice p refere-se ao ponto e o nb aos pontos vizinhos.

CAPÍTULO 5

RESULTADOS

Neste capítulo serão mostrados os resultados dos estudos realizados no contexto do presente trabalho para cavidades com tampa deslizante bidimensionais e tridimensionais. As simulações foram realizadas com um código computacional desenvolvido seguindo as metodologias descritas no capítulo 4. A linguagem utilizada para desenvolvimento deste código foi c++. As malhas utilizadas são uniformes nas três direções. Os resultados apresentados foram obtidos com simulações que, caso não se especifique o contrário, tem na sua condição inicial um ruído branco nos campos de velocidade com desvio padrão $\sigma = 0,01$.

Com o objetivo de facilitar a notação, na apresentação dos resultados será utilizada uma nomenclatura que não leva em conta o fato de que os campos obtidos com simulações são campos filtrados, como indicado no capítulo 3. Portanto, a partir de então os campos filtrados serão indicados apenas pelo símbolo do campo sem o símbolo de filtro que os caracterizam.

5.1 Cavidades Bidimensionais

Foram simulados casos bidimensionais com números de Reynolds iguais a 1.000, 3.200, 5.000 e 10.000, obtidos com discretizações de segunda e quarta ordem e com malhas com 55, 75 e 95 pontos nas duas direções. Primeiramente serão mostradas as evoluções temporais das soluções. Em seguida serão mostradas comparações dos resultados obtidos com os resultados numéricos de Guia et al. (1982). Na sequência serão mostrados os espectros dos sinais do produto de flutuação de velocidade. E

por fim a topologia dos escoamentos.

5.1.1 Evolução Temporal

Nas figuras 5.1, 5.2, 5.3 e 5.4 são mostradas as evoluções temporais das soluções obtidas para a configuração bidimensional para números de Reynolds iguais a 1.000, 3.200, 5.000 e 10.000 respectivamente. Para tanto utiliza-se os sinais das componentes de velocidade na posição x igual a 0,7 e y igual a 0,3 (lado direito inferior). Este ponto foi escolhido por situar-se na região onde ocorrem as maiores oscilações. Todas estas evoluções foram obtidas com o mesmo passo de tempo (10^{-3}), discretização de quarta ordem e malha com 95 pontos nas duas direções. As simulações com outras malhas e com discretização de segunda ordem apresentaram características semelhantes. O critério para estabelecer o regime permanente é de que não houvesse variações no campo de pressão maiores que o resíduo máximo da solução da equação da pressão por pelo menos 10.000 passos de tempo.

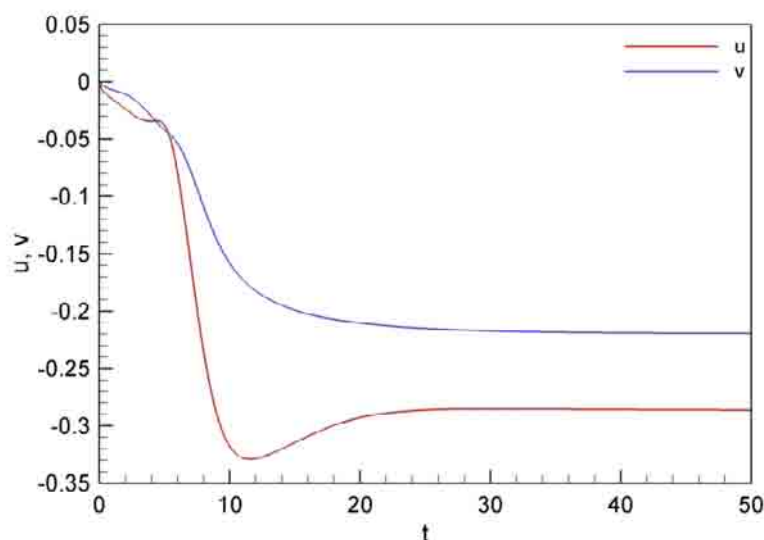


Figura 5.1: Evolução temporal das velocidades na configuração bidimensional em $x = 0,7$ e $y = 0,3$ para número de Reynolds igual a 1.000 obtido com discretização de quarta ordem, malha 95×95 e passo de tempo 10^{-3} .

Observa-se que a evolução temporal do caso com número de Reynolds igual a 1.000 (figura 5.1) não apresenta nenhuma oscilação, mostrando-se bem suave. Para os casos com número de Reynolds igual a 3.200 (figura 5.2) e número de Reynolds igual a 5.000 (figura 5.3), a

evolução apresenta oscilações iniciais, que são mais intensas para o segundo caso. Observa-se que estas são amortecidas a medida que o tempo avança em ambos os casos. O regime permanente é atingido aproximadamente no tempo igual a 200 segundos no primeiro caso e 400 segundos no segundo.

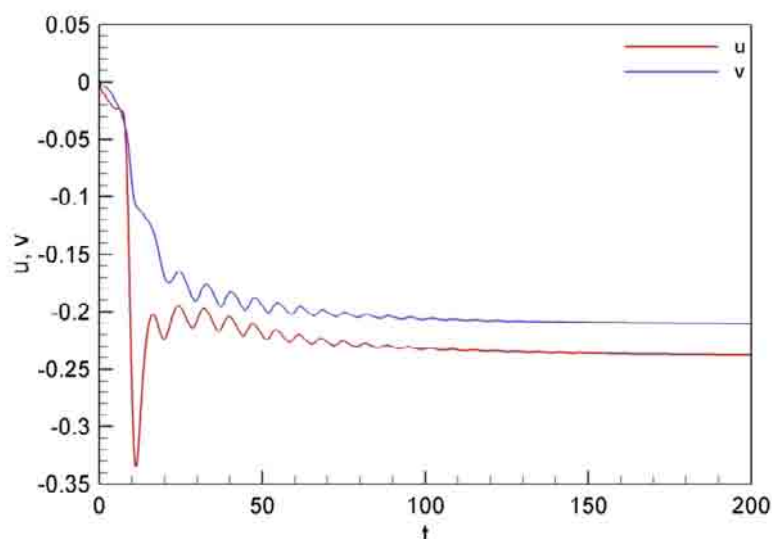


Figura 5.2: Evolução temporal das velocidades na configuração bidimensional em $x = 0,7$ e $y = 0,3$ para número de Reynolds igual a 3.200 obtido com discretização de quarta ordem, malha 95×95 e passo de tempo 10^{-3} .

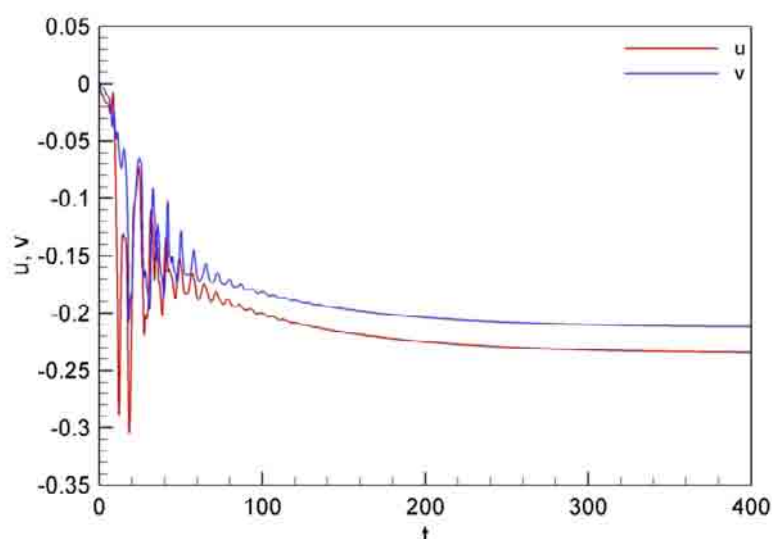


Figura 5.3: Evolução temporal das velocidades na configuração bidimensional em $x = 0,7$ e $y = 0,3$ para número de Reynolds igual a 5.000 obtido com discretização de quarta ordem, malha 95×95 e passo de tempo 10^{-3} .

A solução obtida para número de Reynolds igual a 10.000 (figura 5.4)

não atinge um regime permanente. Ela também apresenta fortes oscilações iniciais que são amortecidas. A partir do tempo aproximadamente igual a 700 segundos a solução apresenta oscilações que são de nível mais baixo que as iniciais e se mantêm durante todo o tempo simulado. Estas oscilações serão analisadas com mais detalhes na seção 5.1.3 que trata das sinas de velocidade.

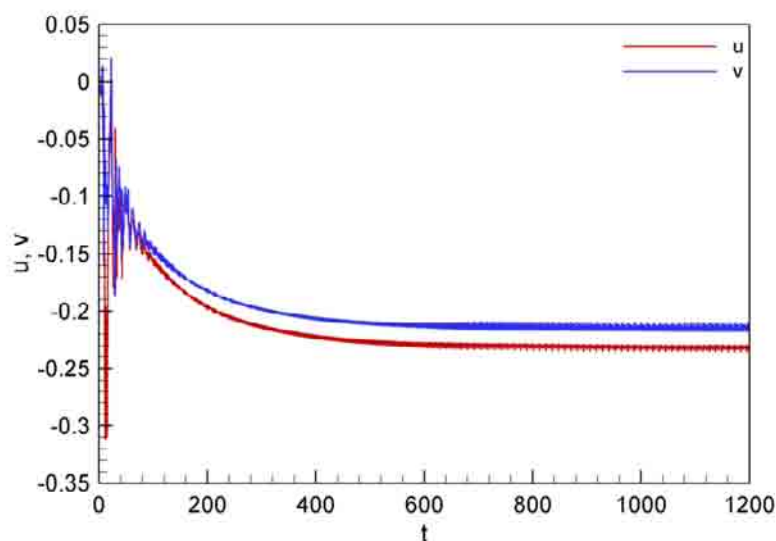


Figura 5.4: Evolução temporal das velocidades na configuração bidimensional em $x = 0,7$ e $y = 0,3$ para número de Reynolds igual a 10.000 obtido com discretização de quarta ordem, malha 95×95 e passo de tempo 10^{-3} .

5.1.2 Comparação com os Resultados Numéricos de Ghia et al. (1982)

Como já ressaltado no capítulo 2, os resultados numéricos obtidos por Guia et al. (1982) tornaram-se referência para resultados numéricos em cavidades bidimensionais. Nesta seção serão apresentadas as comparações entre os resultados obtidos neste trabalho e esses resultados de referência. Estas comparações foram realizadas utilizando-se o perfil da componente de velocidade u , na linha vertical do centro da cavidade ($x = 0,5$) e o perfil da componente de velocidade v , na linha horizontal do centro da cavidade ($y = 0,5$). Referenciados a partir de então como perfil de u e perfil de v respectivamente.

Para uma análise sobre a ordem de convergência obtida com os métodos de discretização utilizou-se as soluções obtidas para número de Reynolds igual a 10.000. Como não há regime permanente para esta

solução, os valores mostrados são médias temporais. As médias em todos os casos foram obtidas entre os tempos 1.000 e 3.000 segundos. Como já colocado, entre estes tempos as oscilações devidas ao transiente inicial já foram amortecidas e o escoamento se encontra em regime estatisticamente estacionário (figura 5.4).

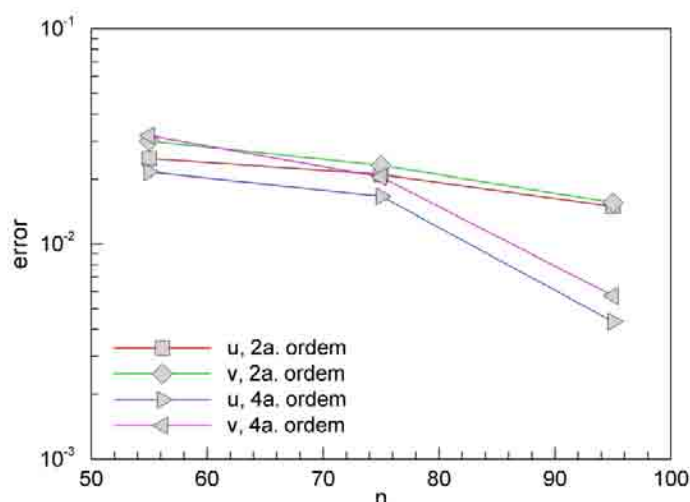


Figura 5.5: Erro médio dos perfis de velocidade para número de Reynolds igual a 10.000 calculado em relação aos resultados de Ghia *et al.* (1982).

A figura 5.5 apresenta os erros médios¹ calculados com relação aos resultados de Ghia *et al.* (1992) para as soluções obtidas para número de Reynolds igual a 10.000. As soluções obtidas com discretização de segunda ordem mantêm esta convergência durante toda a faixa de número de pontos mostrada, tanto para a componente de velocidade u como para a componente v . Com relação às soluções obtidas com discretização de quarta ordem, observa-se que da solução obtida com malha com 55 pontos nas duas direções para a obtida com malha com 75 pontos a convergência é pouco maior que uma convergência de segunda ordem. No entanto, entre solução obtida com malha com 75 pontos e a obtida com malha com 95 pontos a convergência atinge quarta ordem. Isto provavelmente se deve a ação das condições de contorno de segunda ordem, como explica Hayase *et al.* (1992). Estes autores fazem uma análise da influência da ordem da discretização das condições de contorno na ordem da discretização do método. Segundo eles, com malhas mais grosseiras esta influência é mais

1 Equação utilizada para o cálculo do erro médio: $erro = \frac{\sqrt{\sum (u_i - \bar{u})^2}}{n}$

forte, no entanto, quando a convergência começa a ser atingida, ela se torna desprezível.

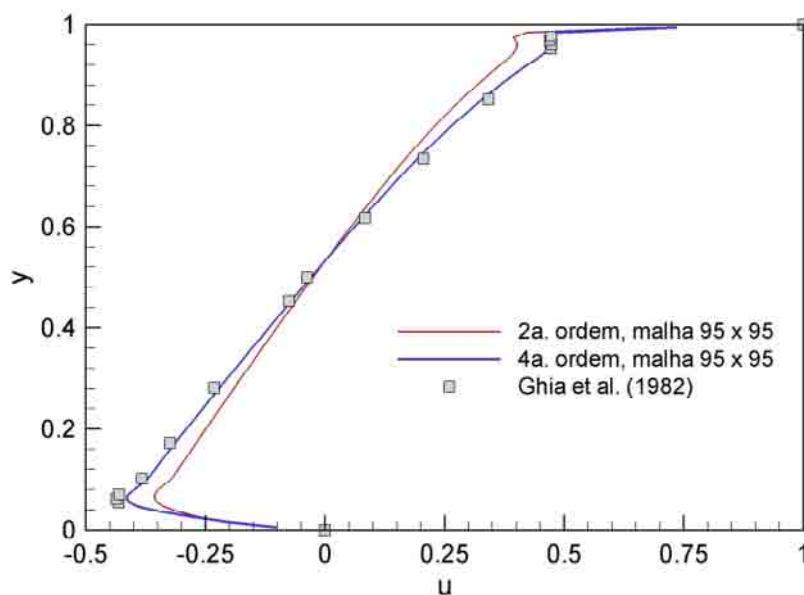


Figura 5.6: Comparação dos perfis da componente de velocidade u em $x = 0,5$ para número de Reynolds igual a 10.000 obtidos com malha de 95 x 95.

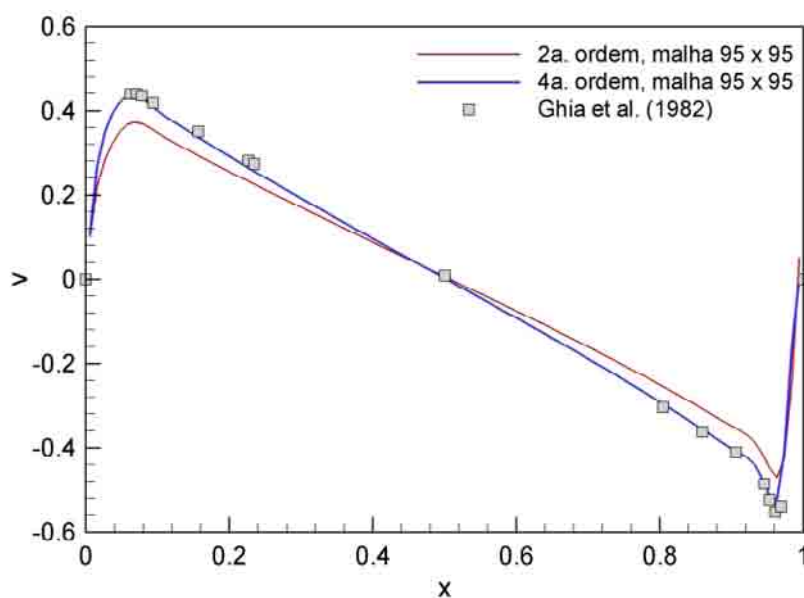


Figura 5.7: Comparação dos perfis da componente de velocidade v em $y = 0,5$ para número de Reynolds igual a 10.000 obtidos com malha de 95 x 95.

Os resultados desta convergência podem ser observados comparando-se os perfis das componentes de velocidade u (figura 5.6) e v (figura 5.7) obtidos com malha com 95 pontos nas duas direções e com discretização de segunda e quarta ordem. Verifica-se que na primeira as

velocidades não atingem os máximos e mínimos das velocidades, apesar de captar o formato da curva de forma coerente. A segunda solução chega bem próximo dos pontos críticos apresentados pelos resultados de referência.

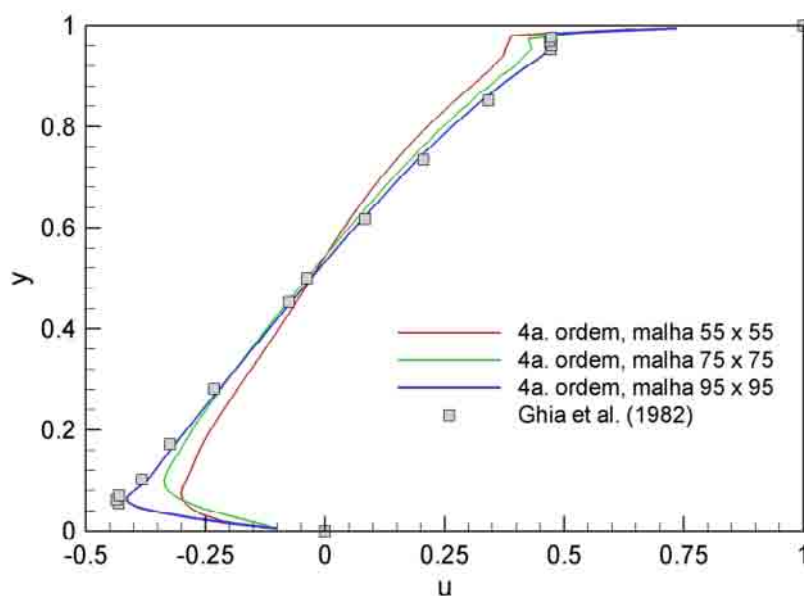


Figura 5.8: Comparação dos perfis da componente de velocidade u em $x = 0,5$ para número de Reynolds igual a 10.000 obtidos com discretização de quarta ordem.

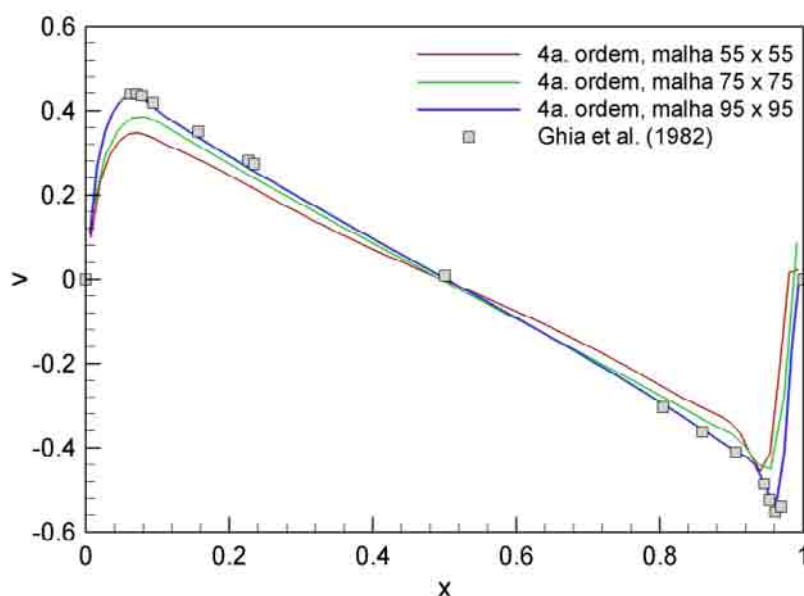


Figura 5.9: Comparação dos perfis da componente de velocidade v em $y = 0,5$ para número de Reynolds igual a 10.000 obtidos com discretização de quarta ordem.

A influência da malha sobre a solução obtida com discretização de

quarta ordem pode ser verificada nas figuras 5.8 e 5.9. A primeira mostra o perfil da componente de velocidade u e a segunda o perfil da componente v . Verifica-se que somente a solução obtida com discretização de quarta ordem e malha com 95 pontos atinge os pontos críticos das soluções de referência. As outras duas soluções falham inclusive na determinação das posições destes pontos.

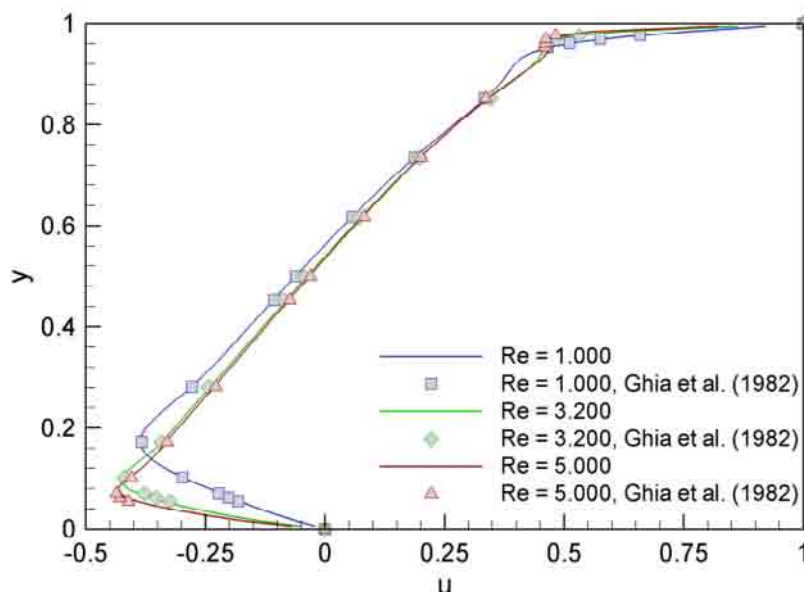


Figura 5.10: Comparação dos perfis da componente de velocidade u em $x = 0,5$ obtidos com malha com 95 x 95 pontos e discretização de quarta ordem.

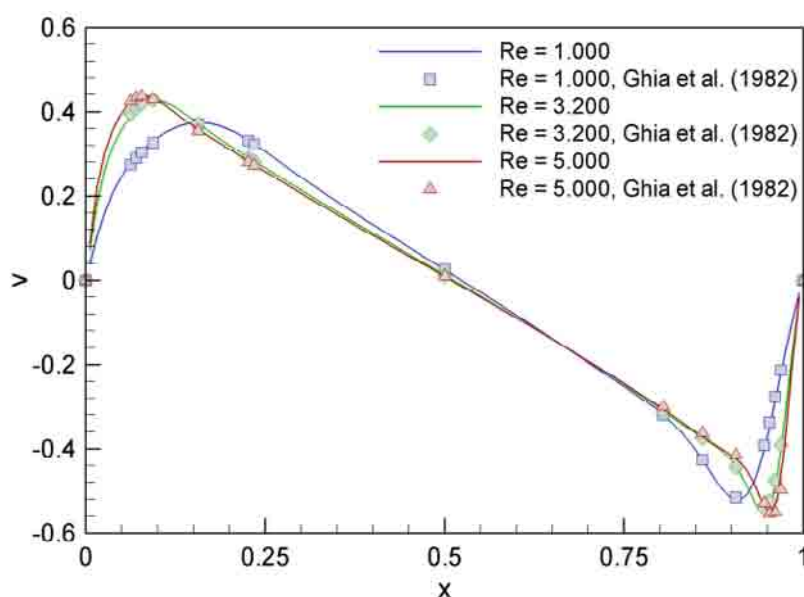


Figura 5.11: Comparação dos perfis da componente de velocidade v em $y = 0,5$ obtidos com malha com 95 x 95 pontos e discretização de quarta ordem.

Por ter sido a única solução que apresentou resultado muito próximo aos resultados de referência, a malha com 95 pontos nas duas direções com discretização de quarta ordem será preferencialmente utilizada para as simulações em cavidades tridimensionais.

As figuras 5.8 e 5.9 mostram os perfis das componentes de velocidade u e v para soluções obtidas para números de Reynolds iguais a 1.000, 3.200 e 5.000. Todos obtidos com discretização de quarta ordem e malha com 95 pontos nas duas direções. Em todos estes casos, como já mostrado (figuras 5.1, 5.2 e 5.3) as soluções atingem um regime estacionário. Os resultados são comparados com os resultados de referência de Ghia et al. (1982). Verifica-se que os perfis concordam muito bem. Os erros médios obtidos foram da ordem de 10^{-5} para a solução a número de Reynolds 5.000.

5.1.3 Sinais Temporais de Velocidade

Para a análise da discretização temporal será utilizado os sinais da componente de velocidade u das soluções obtidas para número de Reynolds igual a 10.000 no lado inferior direito da cavidade ($x = 0,7$ e $y = 0,3$).

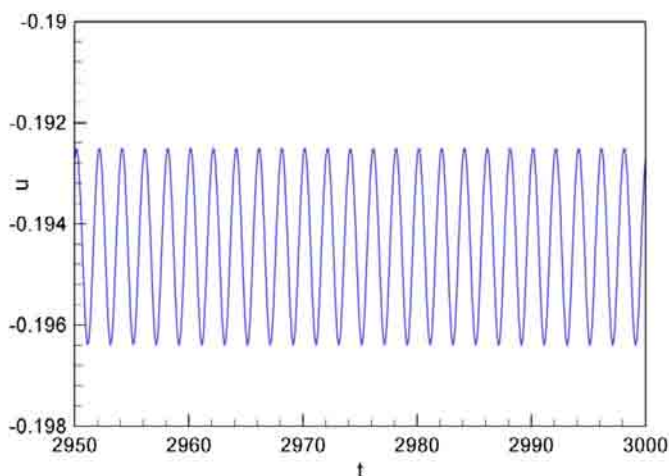


Figura 5.12: Sinal da componente de velocidade u em $y = 0,7$ e $x = 0,5$ para número de Reynolds igual a 10.000 obtido com discretização de segunda ordem e malha 95 x 95.

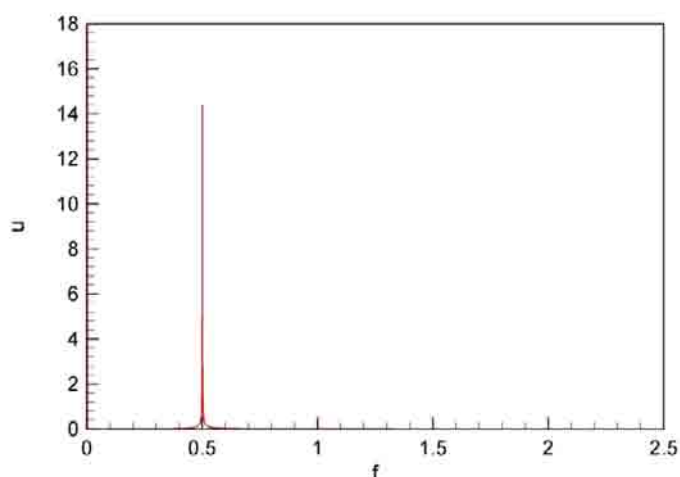


Figura 5.13: Densidade espectral da componente de velocidade u em $y = 0,7$ e $x = 0,5$ para número de Reynolds igual a 10.000 obtido com discretização de segunda ordem e malha 95×95 .

A figura 5.12 mostra o sinal obtido com discretização de segunda ordem, malha com 95 pontos e passo de tempo de 0,005. A figura 5.13 mostra a densidade espectral deste sinal. Observa-se a presença de uma frequência bem definida. Este resultado já era esperado e foi previsto em vários trabalhos, entre os quais Cazemier et al. (1998) e Peng et al. (2003).

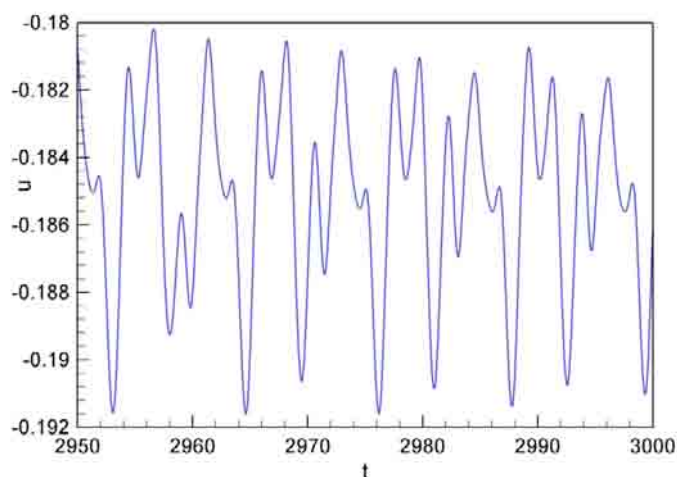


Figura 5.14: Sinal da componente de velocidade u em $y = 0,7$ e $x = 0,5$ para número de Reynolds igual a 10.000 obtido com discretização de quarta ordem e malha 95×95 .

A figura 5.14 mostra o sinal obtido com os mesmos parâmetros, excetuando-se a discretização que é quarta ordem. A figura 5.15 mostra o espectro deste sinal. Observa-se uma solução com várias frequências harmônicas. Este resultado difere das previsões feitas pelos autores

citados. Ele se repete quando a simulação é realizada sem a presença do ruído na condição inicial e mesmo quando é realizada com um passo de tempo igual a 0.001, indicando que estas não são as causas das diferenças.

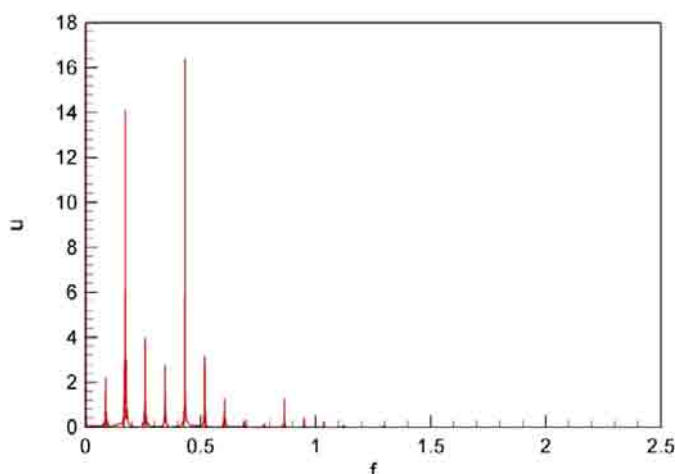


Figura 5.15: Densidade espectral da componente de velocidade u em $y = 0,7$ e $x = 0,5$ para número de Reynolds igual a 10.000 obtido com discretização de quarta ordem e malha 95×95 .

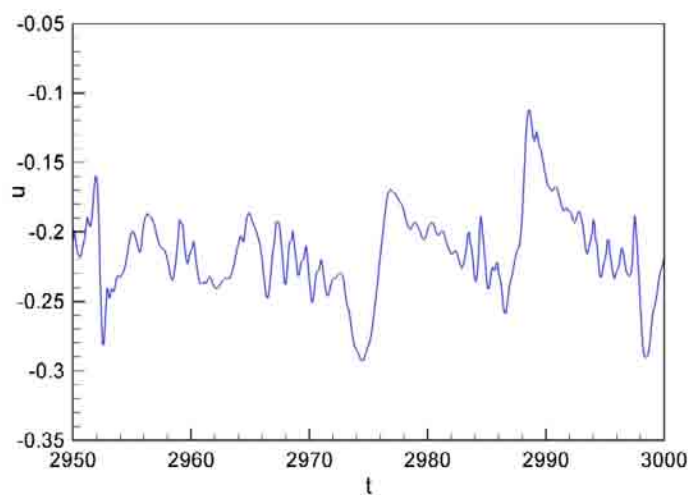


Figura 5.16: Sinal da componente de velocidade u em $y = 0,7$ e $x = 0,5$ para número de Reynolds igual a 10.000 obtido com discretização de quarta ordem e malha 75×75 .

As figuras 5.16 e 5.17 mostram o sinal e seu espectro obtidos com malha com 75 pontos e passo de tempo de 0,005. Observa-se que a energia associada às flutuações das velocidade são maiores. Este resultado é previsível uma vez que para uma malha mais grosseira os níveis de oscilações numérica são maiores. No entanto, há um maior número de

frequências presentes. Desta forma, é razoável supor que a causa das oscilações espúrias seja a malha grosseira.

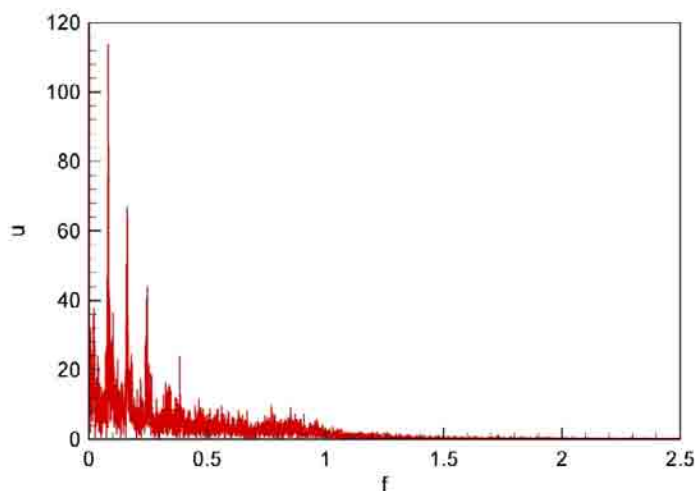


Figura 5.17: Densidade espectral da componente de velocidade u em $y = 0,7$ e $x = 0,5$ para número de Reynolds igual a 10.000 obtido com discretização de quarta ordem e malha 95×95 .

5.1.4 Topologia dos Escoamentos

As figuras 5.18, 5.19 e 5.20 mostram o campo de vorticidade sobreposto por um conjunto de linhas de corrente que indicam o centro das estruturas formadas para os casos com $Re = 1.000$, $Re = 3.200$ e $Re = 5.000$. Os três casos com discretização de quarta ordem e malha com 95 pontos nas duas direções. As topologias dos três casos são muito parecidas, uma circulação central, vórtices secundários nos cantos inferiores que se apresentam maiores com o aumento do número de Reynolds. Observa-se que o vórtice do canto superior esquerdo não aparece no caso com o Reynolds mais baixo. Neste caso aparece apenas uma curvatura que indica a deformação nesta região do escoamento.

As figuras 5.21 e 5.22 mostram o campo médio obtido com discretização de segunda e de quarta ordem respectivamente. Não há grandes diferenças entre os dois, a não ser pelo pequeno vórtice no canto inferior esquerdo, que não é apresentado pela solução com discretização de segunda ordem. Esta topologia foi prevista por vários autores entre os quais: Erturk et al. (2005) e Bruneau e Saad (2006).

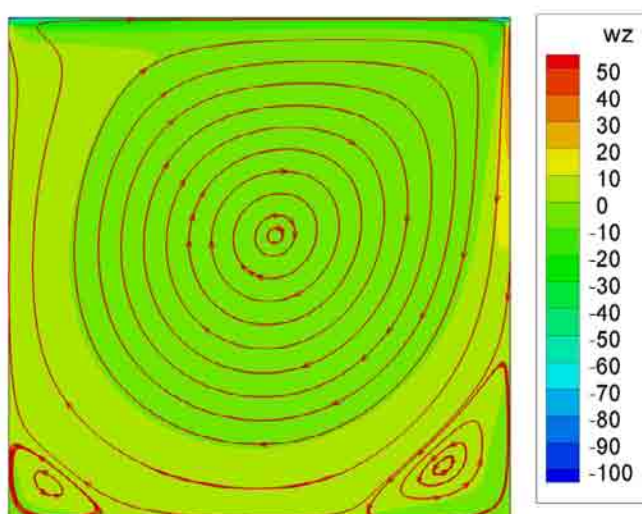


Figura 5.18: Campos de vorticidade com linhas de corrente superpostas em regime permanente para número de Reynolds igual a 1.000, obtido com discretização de quarta ordem, malha 95 x 95 e passo de tempo 10^{-3} .

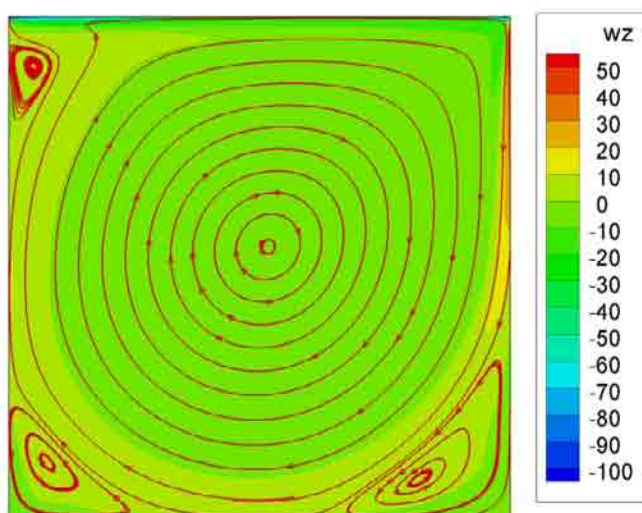


Figura 5.19: Campos de vorticidade com linhas de corrente superpostas em regime permanente para número de Reynolds igual a 3.200, obtido com discretização de quarta ordem, malha 95 x 95 e passo de tempo 10^{-3} .

A figura 5.23 mostra uma sequência temporal com o campo de vorticidade sobreposto por linha de corrente mostrando a periodicidade do escoamento para $Re = 10.000$. Percebe-se o surgimento de pequenos vórtices na região central inferior que são “capturados” pelo vórtice secundário do canto inferior esquerdo. Este processo se repete para o vórtice secundário superior. Os vórtices secundários do canto inferior esquerdo oscilam em torno de suas posições, além de sofrerem deformações.

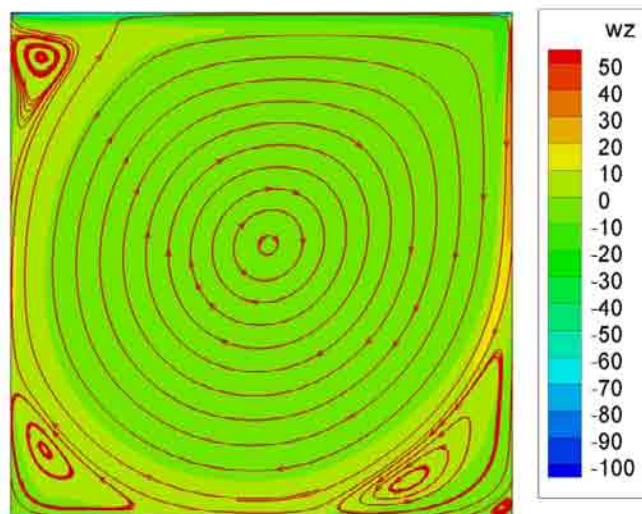


Figura 5.20: Campos de vorticidade com linhas de corrente superpostas em regime permanente para número de Reynolds igual a 5.000, obtido com discretização de quarta ordem, malha 95 x 95 e passo de tempo 10^{-3} .

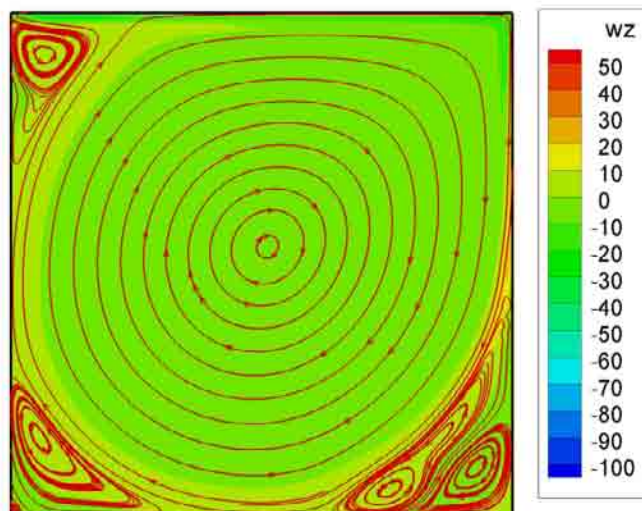


Figura 5.21: Campo médio de vorticidade com linhas de corrente superpostas para número de Reynolds igual a 10.000, obtido com discretização de segunda ordem e malha 95 x 95.

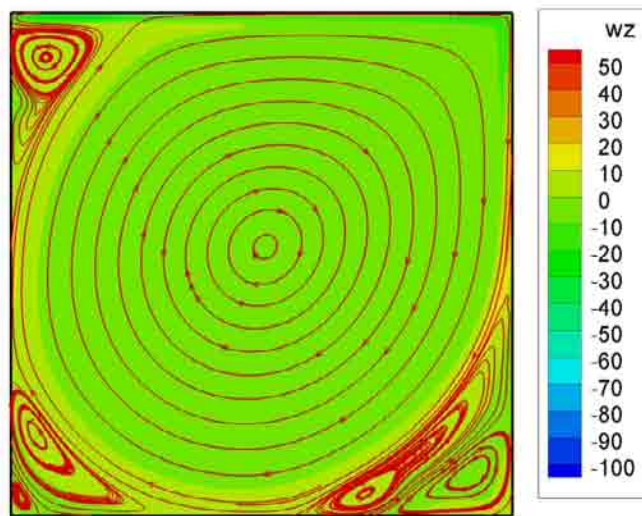


Figura 5.22: Campo médio de vorticidade com linhas de corrente superpostas para número de Reynolds igual a 10.000, obtido com discretização de quarta ordem e malha 95 x 95.

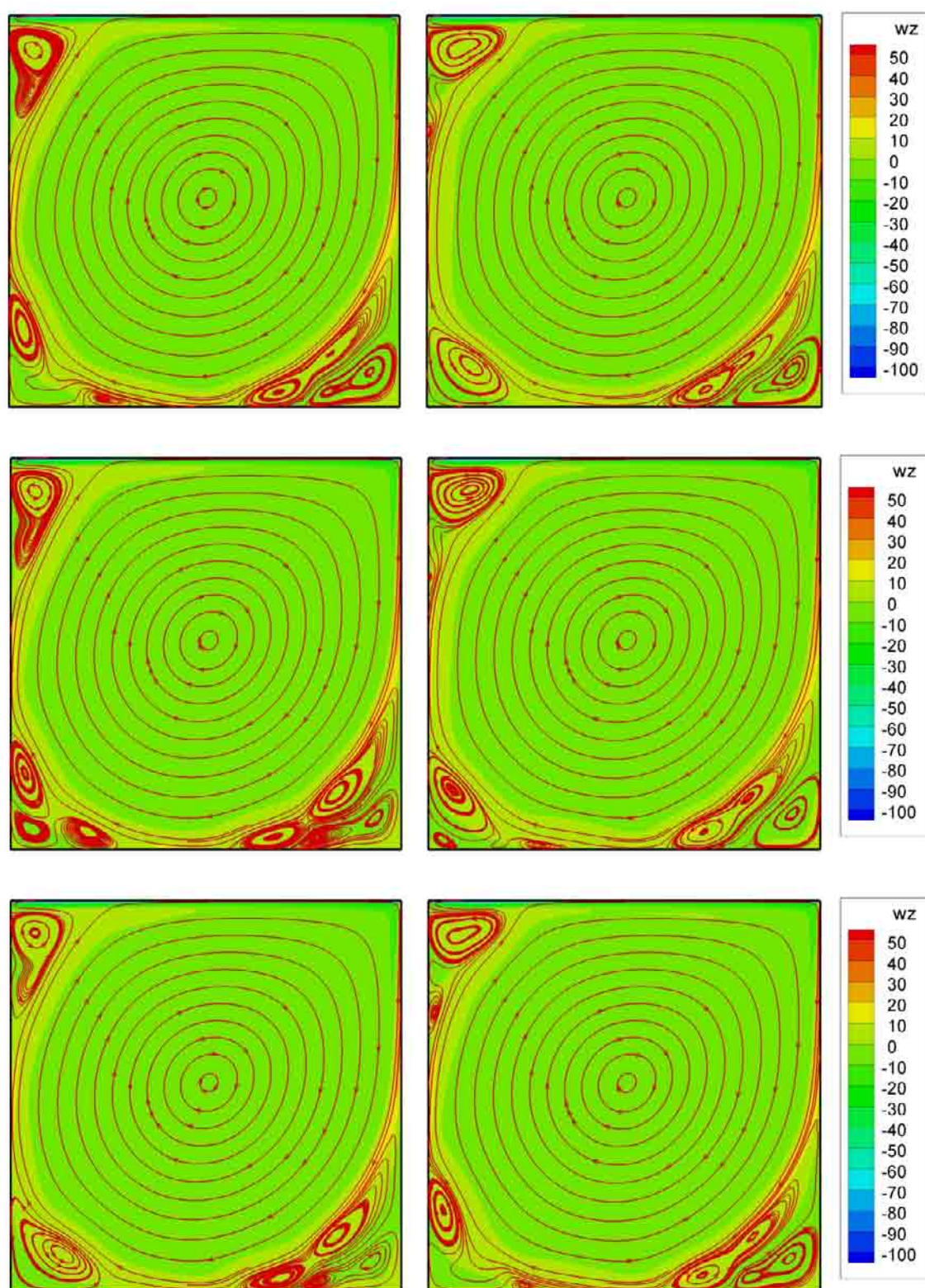


Figura 5.23: Sequência temporal de campos de vorticidade com linhas de corrente superpostas para número de Reynolds igual a 10.000, obtido com discretização de quarta ordem e malha 95 x 95. Tempos: 2.991, 2.992, 2.993, 2.994, 2.995, 2.996 segundos.

5.2 Cavidades Tridimensionais

Para Cavidades Tridimensionais os resultados de cinco casos foram obtidos. Para Reynolds igual a 3.200, 10.000, 25.000, 50.000 e 100.000. A malha utilizada nos dois casos tem 95 pontos nas direções x e y e 65 pontos na direção transversal (z). O passo de tempo utilizado foi de 0,005. Em todos os caso utilizou-se discretização de quarta ordem.

Os espectros de energia cinética turbulenta foram obtidos através do sinal de k' . Obtém-se com o espectro deste sinal a densidade espectral da eenergia cinética turbulenta associada às escalas resolvidas,

$$k = \frac{\langle u_i' u_i' \rangle}{2}. \quad (5.1)$$

Estes espectros foram obtidos pela média de amostras temporais, o número de amostras utilizadas foi de 8 em cada caso.

Para a análise da topologia do escoamento utilizar-se-á linhas de corrente, isosuperfícies de vorticidade e critério Q. O critério Q é definido por Jeong e Hussain (1995) como a norma euclidiana nos pontos em que a norma do tensor vorticidade (Ω) é maior que a do tensor deformação (S). Uma observação importante é o fato de que esta diferença diminui com o aumento do módulo da deformação que ocorre no centro das estruturas turbilionares. Isto possibilita um melhor vizualização destas em relação a utilização do módulo das componentes de vorticidade como critério. Uma desvantagem da utilização deste critério é que ele não fornece informações sobre o sentido de rotação das estruturas, portanto deve sempre ser utilizado com informações de vorticidade. Segundo a definição, a equação do critério Q é dada por:

$$Q = \frac{1}{2} (|\Omega|^2 - |S|^2) > 0. \quad (5.2)$$

Sendo o tensor vorticidade e o tensor deformação iguais a

$$\Omega = \frac{1}{2} (\nabla \vec{v} - \nabla \vec{v}^T) \text{ e} \quad (5.3)$$

$$S = \frac{1}{2} (\nabla \vec{v} + \nabla \vec{v}^T), \quad (5.4)$$

respectivamente. Uma forma de implementação mais compacta da equação é obtida no apêndice C,

$$Q = -\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}. \quad (5.5)$$

5.2.1 Comparação com Dados Experimentais

Os perfis de velocidade, os perfis da raiz quadrada da média do quadrado das flutuações de velocidade (RMS) e uma das componentes anisotrópicas do tensor de Reynolds ($\overline{u'v'}$) são comparados com os dados experimentais de Prasad e Koseff (1989) e os perfis de velocidade são comparados com os numéricos de Despande e Milton (1998). Estes perfis foram obtidos no plano central da cavidade ($z = 0,5$). O perfil da componente u e da RMS_u , na linha vertical ($x = 0,5$), o perfil de v e da (RMS_v), na linha horizontal ($y = 0,5$). A componente do tensor de Reynolds é mostrada para as duas linhas citadas. Sendo

$$RMS_u = \sqrt{\overline{u'u'}} \text{ e} \quad (5.6)$$

$$RMS_v = \sqrt{\overline{v'v'}}. \quad (5.7)$$

- Resultados para número de Reynolds igual a 3.200

Os resultados obtidos para o escoamento a número de Reynolds 3.200 são mostrados a seguir. Esta simulação foi realizada com um passo de tempo igual a 0.001s. Na figura 5.24 e 5.25, o perfis de u e v são comparados com os resultados experimentais de Prasad e Koseff (1989) e com os resultados numéricos de Despande e Milton (1998). Observa-se um boa concordância entre os resultados mostrados, com uma leve sobrestimativa da velocidade no ponto de velocidade mínima do perfil da componente de velocidade u .

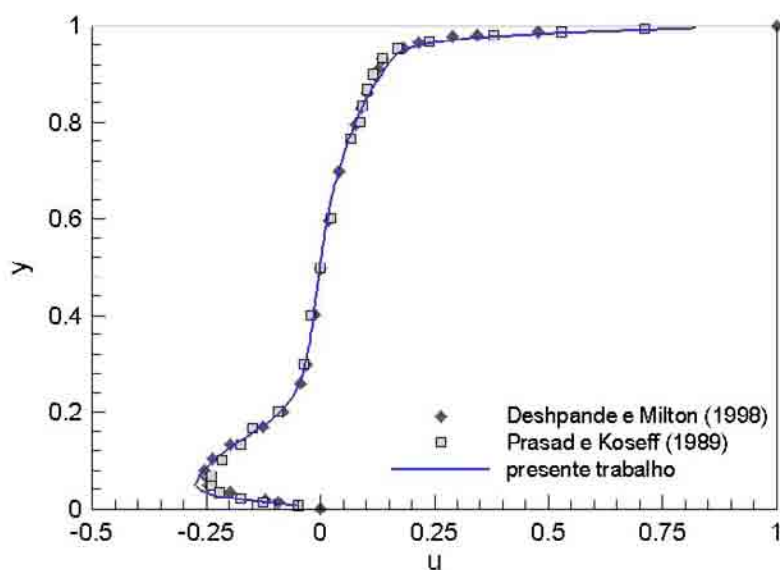


Figura 5.24: Comparação com dados da literatura entre os perfis da componente de velocidade u em $z = 0,5$ e $x = 0,5$ para número de Reynolds igual a 3.200.

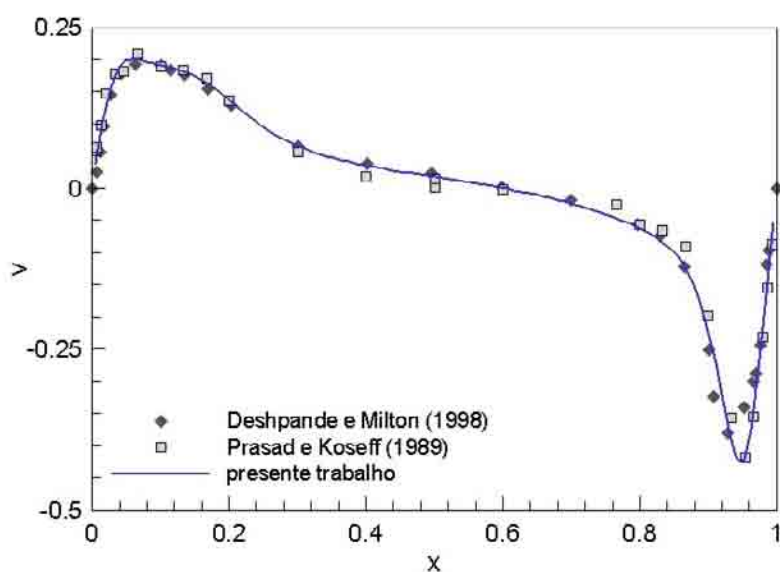


Figura 5.25: Comparação com dados da literatura entre os perfis da componente de velocidade v em $z = 0,5$ e $y = 0,5$ para número de Reynolds igual a 3.200.

Na figura 5.26 e 5.27, o perfis de RMS_u e RMS_v são comparados com os resultados experimentais obtidos por Prasad e Koseff (1989). Na figura 5.28 e 5.29, o perfis de $\overline{u'v'}$ são comparados com os resultados experimentais obtido pelos mesmos autores. Observa-se um boa concordância entre os resultados mostrados. Observa-se que a forma do perfil é captada pelos dados, no entanto, os picos de flutuação não são atingidos, principalmente nas regiões mais turbulentas, como na parte

superior e na inferior da cavidade.

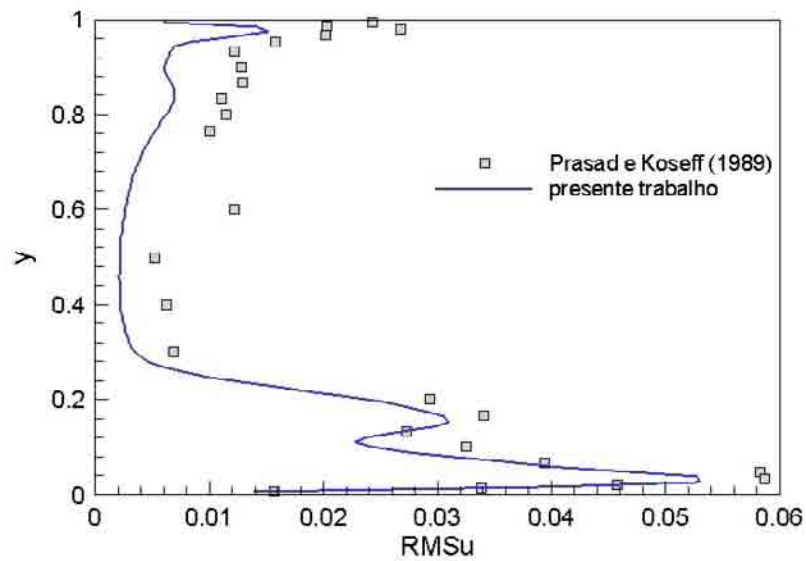


Figura 5.26: Comparação com dados da literatura entre os perfis da RMS_u em $z = 0,5$ e $x = 0,5$ para número de Reynolds igual a 3.200.

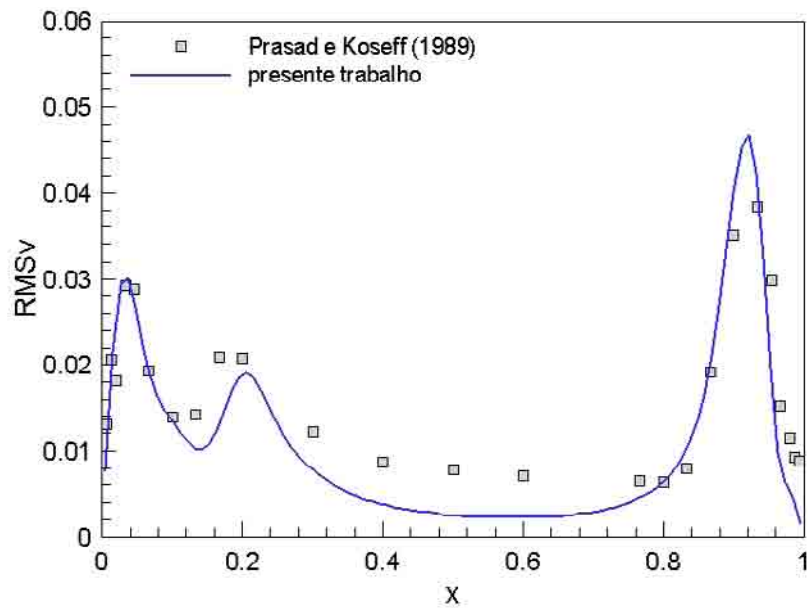


Figura 5.27: Comparação com dados da literatura entre os perfis da RMS_v em $z = 0,5$ e $y = 0,5$ para número de Reynolds igual a 3.200.

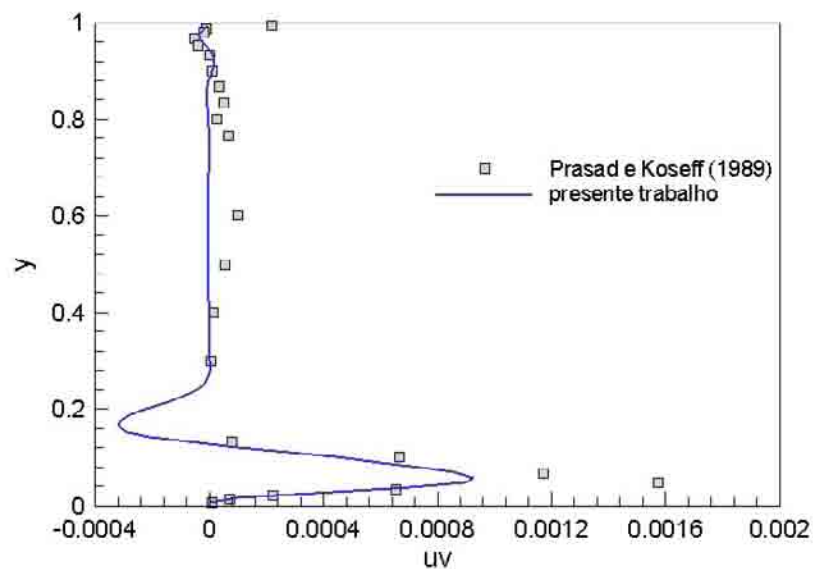


Figura 5.28: Comparação com dados da literatura entre os perfis de $\overline{u'v'}$ em $z = 0,5$ e $x = 0,5$ para número de Reynolds igual a 3.200.

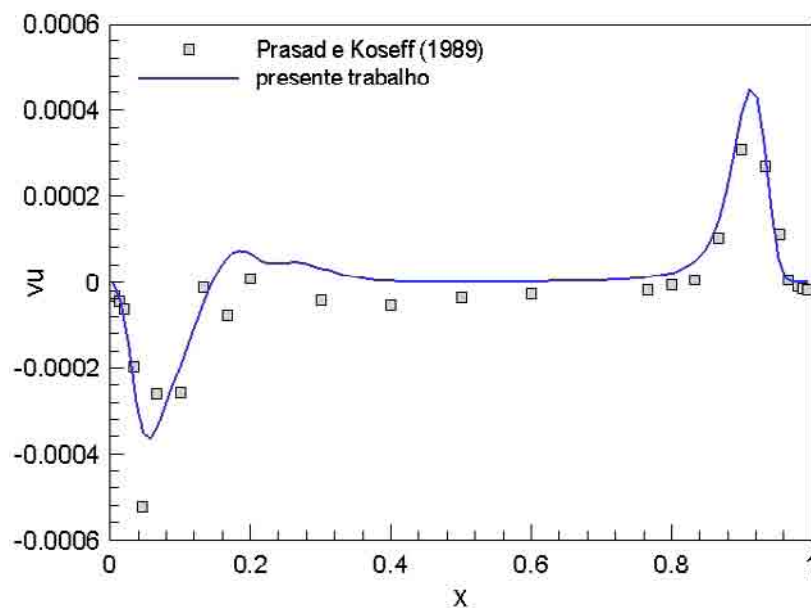


Figura 5.29: Comparação com dados da literatura entre os perfis de $\overline{u'v'}$ em $z = 0,5$ e $y = 0,5$ para número de Reynolds igual a 3.200.

- Resultados para número de Reynolds igual a 10.000

Na figura 5.30 e 5.31, os perfis de u e v obtidos sem modelo submalha, com os modelos de Smagorinsky e com o modelo dinâmico de Germano são comparados com os resultados experimentais obtidos por Prasad e Koseff (1989). Observa-se que não há diferenças significativas dos perfis de velocidade obtidos.

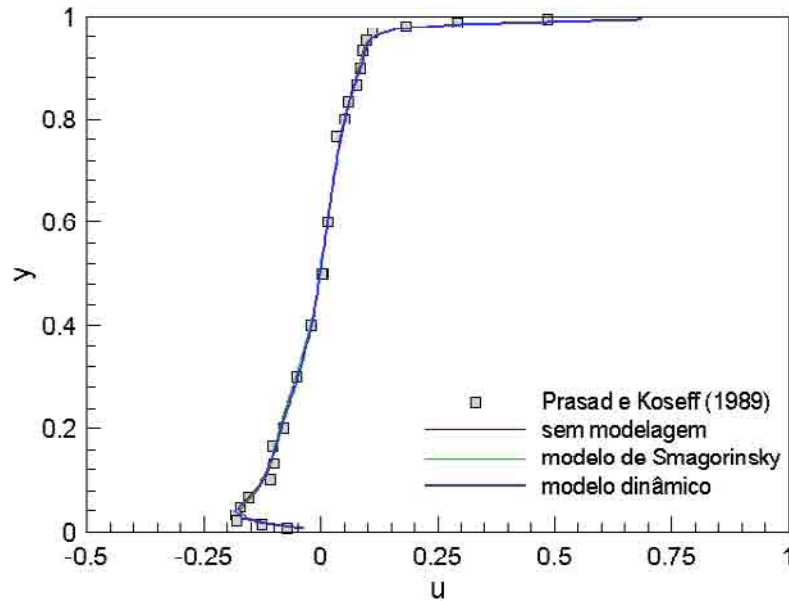


Figura 5.30: Comparação com dados da literatura e entre os perfis da componente de velocidade u em $z = 0,5$ e $x = 0,5$ para número de Reynolds igual a 10.000.

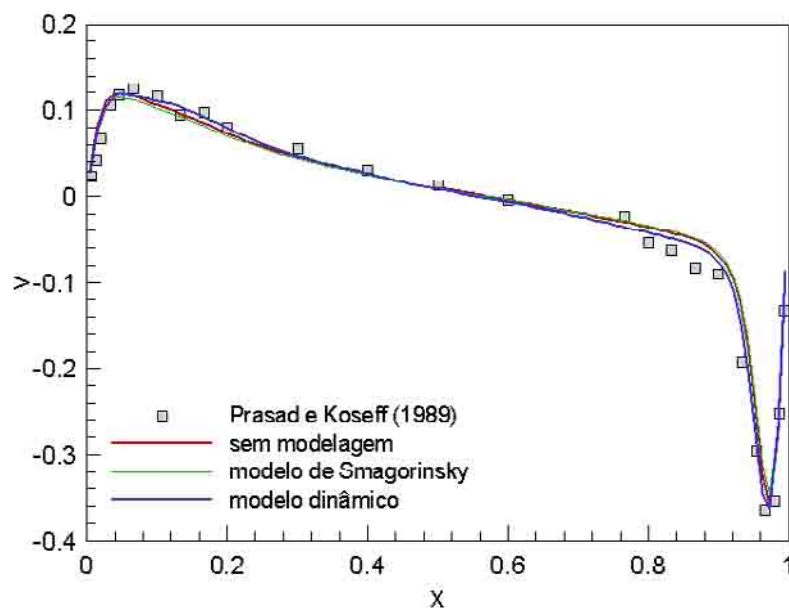


Figura 5.31: Comparação com dados da literatura e entre os perfis da componente de velocidade v em $z = 0,5$ e $y = 0,5$ para número de Reynolds igual a 10.000.

Na figura 5.32 e 5.33, os perfis de RMS_u e RMS_v obtidos sem modelo submalha, com o modelo de Smagorinsky e com o modelo dinâmico de Germano são comparados com os resultados experimentais obtidos por Prasad e Koseff (1989). Na figura 5.34 e 5.35, os perfis de $\overline{u'v'}$ obtidos sem modelo submalha, com o modelo de Smagorinsky e com o modelo dinâmico de Germano são comparados com os resultados experimentais

obtidos pelos mesmos autores. Observa-se uma boa concordância entre os resultados mostrados.

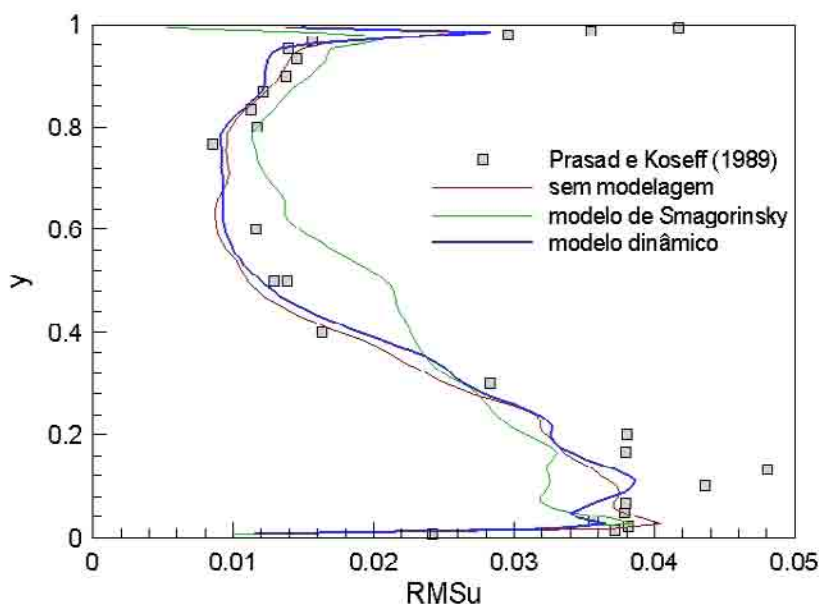


Figura 5.32: Comparação com dados da literatura e entre os perfis da RMS_u em $z = 0,5$ e $x = 0,5$ para número de Reynolds igual a 10.000.

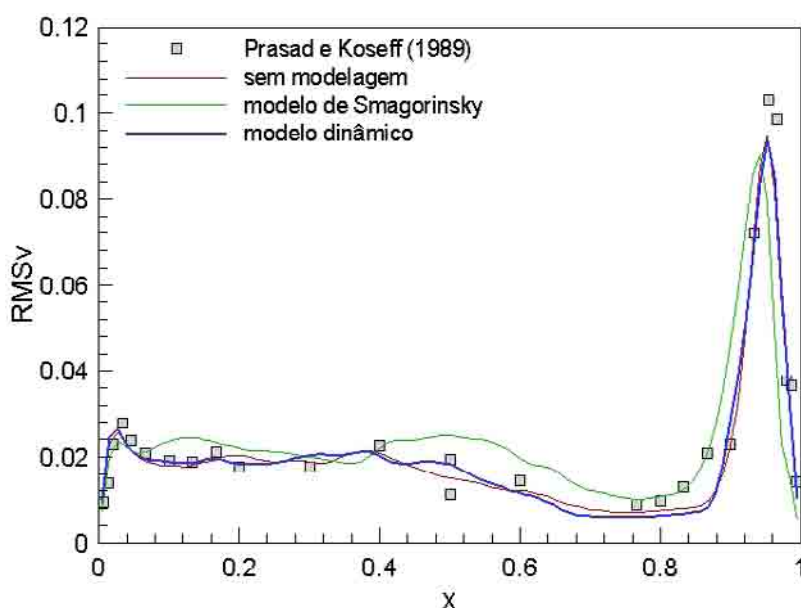


Figura 5.33: Comparação com dados da literatura e entre os perfis da RMS_v em $z = 0,5$ e $y = 0,5$ para número de Reynolds igual a 10.000.

A mesma observação feita para os perfis obtidos no escoamento a número de Reynolds igual a 3.200 pode ser feita para este caso. No entanto o modelo dinâmico de Germano capta melhor o formato das curvas. O Modelo de Samgorinsky se revela muito difusivo, pois este

modelo redistribui a energia cinética das regiões de maiores para as de menores intensidades. Isto pode ser observado, pode ser vista com mais intensidade na figura 5.32.

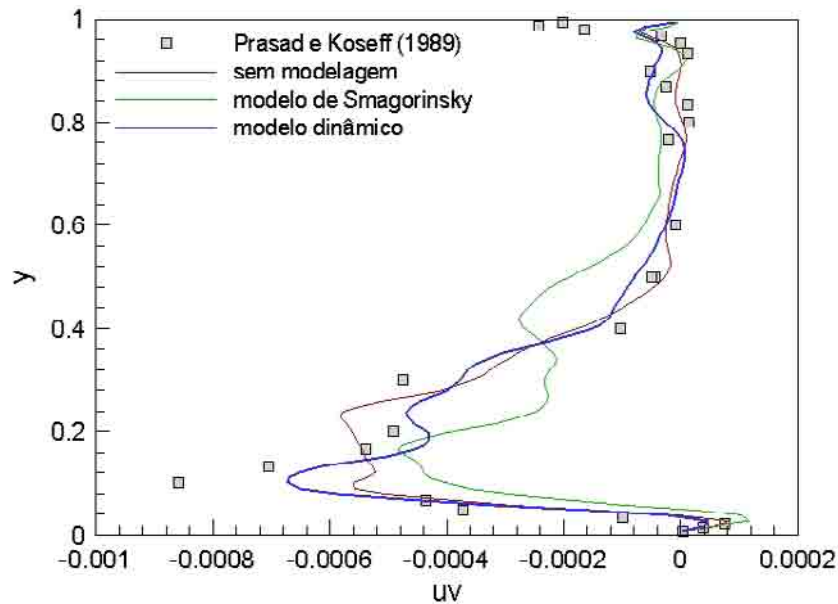


Figura 5.34: Comparação com dados da literatura e entre os perfis de $\overline{u'v'}$ em $z = 0,5$ e $x = 0,5$ para número de Reynolds igual a 10.000.

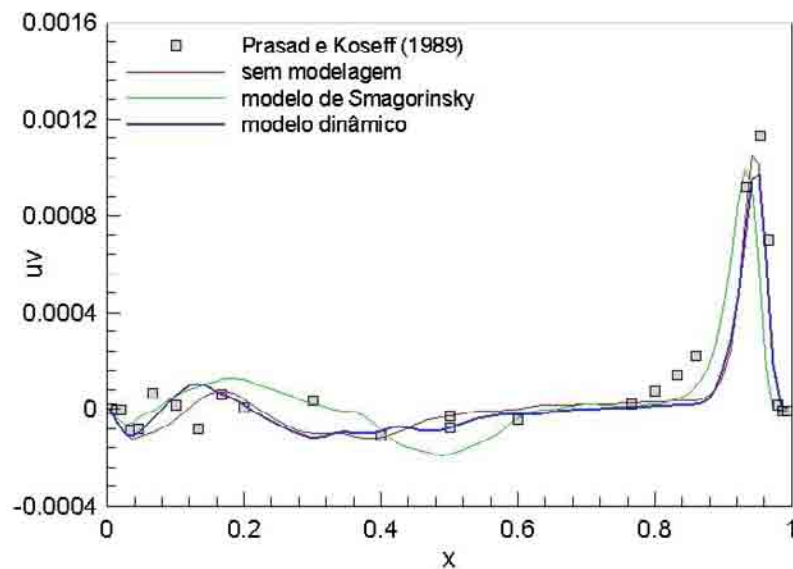


Figura 5.35: Comparação com dados da literatura e entre os perfis de $\overline{u'v'}$ em $z = 0,5$ e $y = 0,5$ para número de Reynolds igual a 10.000.

Na figura 5.36 e 5.37, o perfis de u e v obtidos com o modelo dinâmico de Germano são comparados com os resultados experimentais de Prasad e Koseff (1989) e com os resultados numéricos de Despande e

Milton (1998). Verifica-se que há uma concordância melhor dos resultados para número de Reynolds igual a 10.000 obtidos com o modelo dinâmico de Germano do que dos resultados obtidos para número de Reynolds igual a 3.200 sem modelagem. Isto revela que que a malha é insuficiente para uma simulação direta mesmo para o número de Reynolds mais baixo. Portanto se faz necessária a modelagem de turbulência, mesmo para este caso.

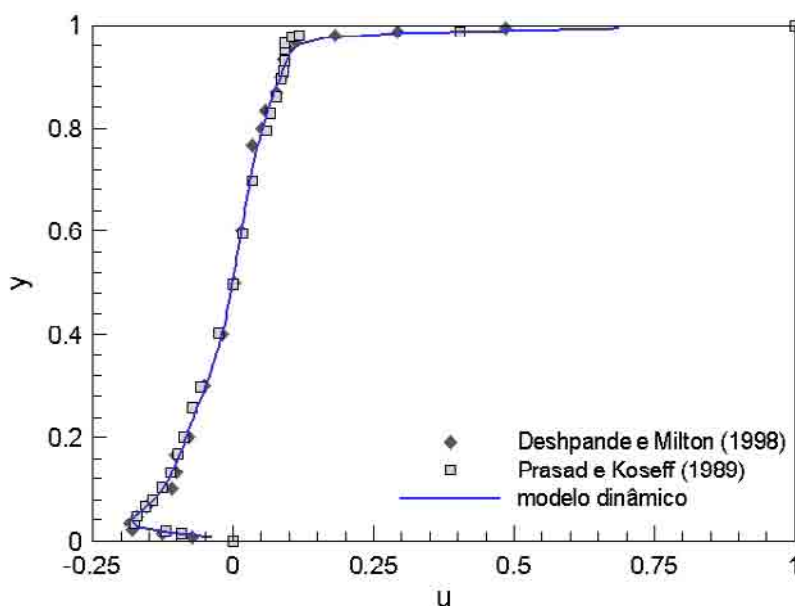


Figura 5.36: Comparação com os dados da literatura do perfil da componente de velocidade u em $z = 0,5$ e $x = 0,5$ para número de Reynolds igual a 10.000 obtido com modelagem dinâmica.

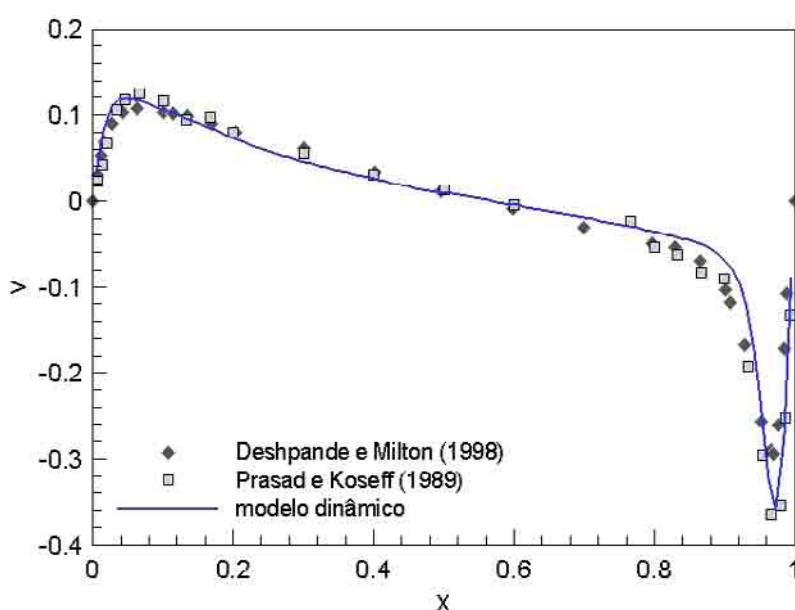


Figura 5.37: Comparação com os dados da literatura do perfil da componente de velocidade v em $z = 0,5$ e $y = 0,5$ para número de Reynolds igual a 10.000 obtido com modelagem dinâmica.

5.2.2 Topologia dos Escoamentos

- Resultados do escoamento a número de Reynolds 3.200

A figura 5.38 mostra isosuperfícies de vorticidade na direção x para o escoamento a número de Reynolds igual a 3.200 no tempo igual a 600s. Pode-se observar três pares de estruturas contra-rotativas do tipo Taylor-Görtler que são frequentemente descritas na literatura, como mostra a revisão bibliográfica do capítulo 2. Para este número de Reynolds estas estruturas se apresentam bem definidas. Nota-se a presença do vórtice lateral esquerdo, que é a estrutura toroidal próxima à parede lateral.

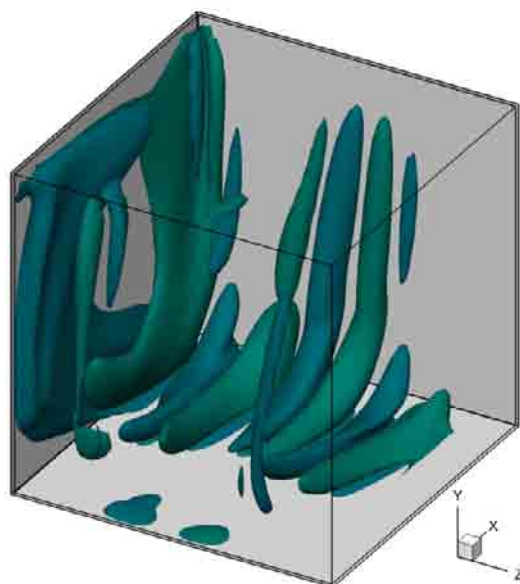


Figura 5.38: Isosuperfícies de vorticidade na direção x do escoamento a número de Reynolds igual a 3.200 no tempo igual a 600s. $w_x = -0,50$ (azul), $w_x = 0,50$ (verde).

As principais estruturas presentes no escoamento médio a número de Reynolds igual a 3.200 podem ser vistas observando em conjunto isosuperfície de critério Q e linhas de corrente no plano $z = 0,7$ mostradas na figura 5.39. Nota-se a presença da recirculação central, que corresponde a estrutura maior que ocupa toda a região central da cavidade. Os vórtices secundários anterior e posterior correspondem às estruturas transversais nos cantos inferiores. O vórtice lateral esquerdo se apresenta como extensão do vórtice secundário anterior. As estruturas que aparecem com formato transversal nos cantos superiores

correspondem as fortes deformações na recirculação central.

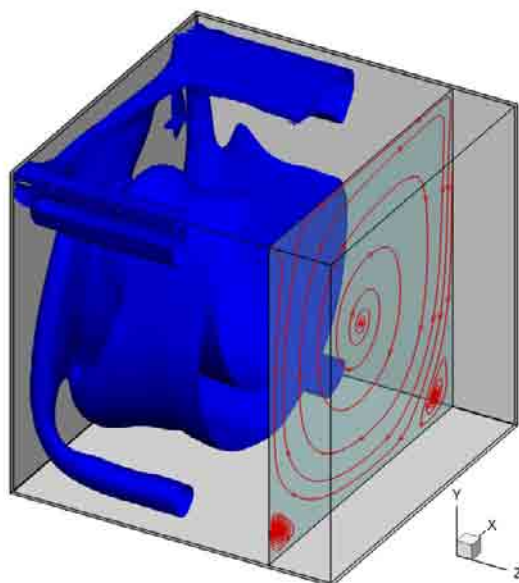


Figura 5.39: Isosuperfícies de critério Q igual a 0,25 do escoamento médio a número de Reynolds igual a 3.200. Linhas de corrente no plano $z = 0,70$.

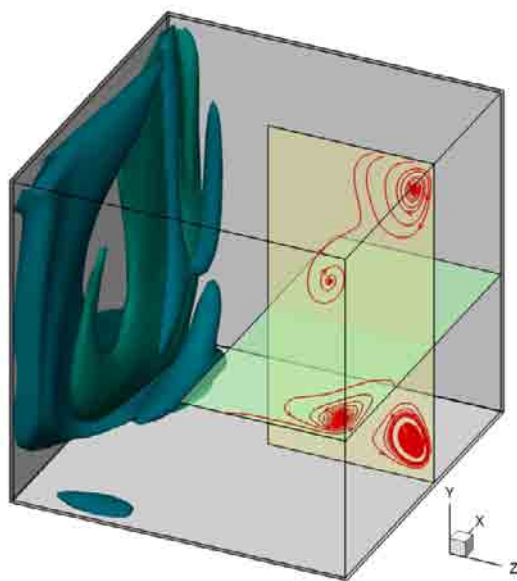


Figura 5.40: Isosuperfícies de vorticidade na direção x do escoamento médio a número de Reynolds igual a 3.200. $w_x = -1,00$ (azul), $w_x = 1,00$ (verde). Linhas de corrente nos planos $x = 0,58$ e $y = 0,42$.

As isosuperfícies de vorticidade na direção x do escoamento médio a número de Reynolds igual a 3.200 são mostradas na figura 5.40. Observa-se que no escoamento médio não persistem as estruturas do tipo Taylor-Görtler, o que indica que estas estruturas são transientes. No entanto, os

vórtices laterais persistem no escoamento médio, o que é de se esperar, uma vez que estas estruturas tem como causa a interação entre a circulação principal e a parede lateral, enquanto as primeiras surgem devido às instabilidades no escoamento (ver capítulo 2).

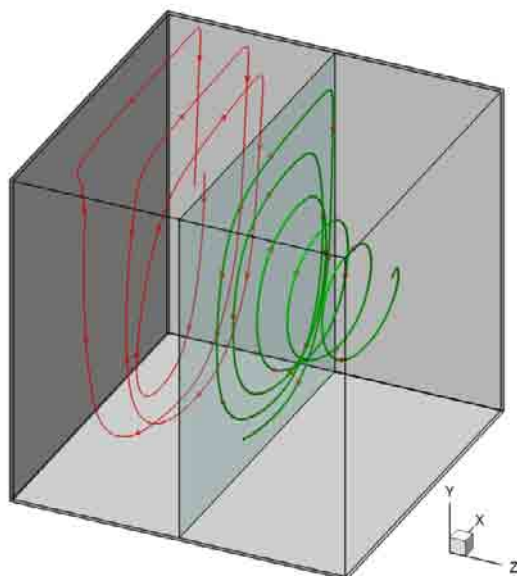


Figura 5.41: Linhas de corrente na recirculação central do escoamento médio a número de Reynolds igual a 3.200.

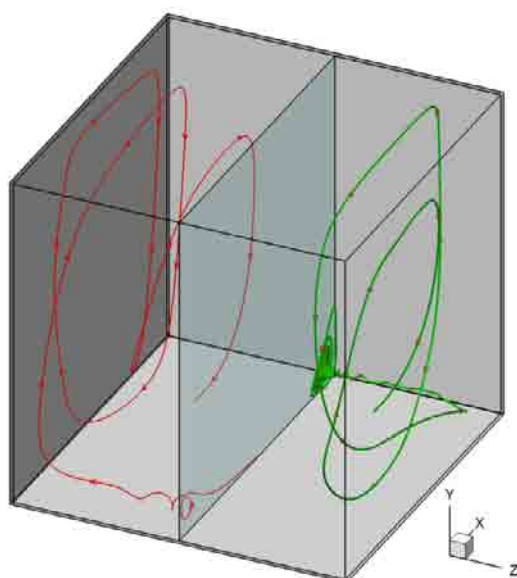


Figura 5.42: Linhas de corrente nos vórtices secundários do escoamento médio a número de Reynolds igual a 3.200.

As linhas de corrente mostradas na figura 5.41 fazem partes da

recirculação central o escoamento médio a número de Reynolds igual a 3.200. A linha de corrente em verde mostra o fluxo mais interno da cavidade, das paredes laterais em direção ao plano de simetria, a linha em vermelho mostra o fluxo mais externo, com sentido do plano de simetria para as laterais. Os dois movimentos são heliciodais. Nota-se que o fluxo interno se expande suavemente a medida que se aproxima do plano de simetria até aproximadamente o tamanho da recirculação central.

A figura 5.42 mostra o fluxo de massa entre os vórtices secundários e a circulação central através das linhas de corrente para escoamento a número de Reynolds igual a 3.200. A linha em vermelho mostra o vórtice secundário anterior e a linha em verde, o vórtice secundário posterior. Os dois vórtices secundários se apresentam como estruturas helicoidais únicas. Nota-se o papel dos vórtices laterais na transferência de massa destas estruturas secundárias para a recirculação central, pois a mudança brusca na direção das linhas de corrente e sua reentrada nesta recirculação ocorre justamente na região dominada pelos vórtices laterais.

Os escoamentos a número de Reynolds 3.200, como já referido anteriormente, são considerados por alguns autores como laminares. O que se pode observar com relação à topologia deste escoamento é que as estruturas transientes se apresentam bem definidas e não apresentam fortes deformações. No entanto esta afirmação deve ser ainda motivo de muita discussão. Não é o enfoque deste texto, mas cabe lembrar que a transição à turbulência é um problema ainda sem solução e com certeza há muito por se estudar, mesmo considerando uma configuração aparentemente simples como a cavidade com tampa deslizante.

- Resultados do escoamento a número de Reynolds 10.000

As isosuperfícies de vorticidade na direção x para o escoamento a número de Reynolds igual a 10.000 no tempo igual a 400s são mostradas na figura 5.43. Esta simulação foi realizada utilizando o modelo submalha dinâmico de Germano. No escoamento médio, nota-se a presença de quatro pares de estruturas contra-rotativas do tipo Taylor-Görtler. Elas não se apresentam com forma bem definida como para o escoamento a número de Reynolds igual a 3.200, o que indica que este escoamento é turbulento. A

figura seguinte (5.44) mostra estas mesmas estruturas através de linhas de corrente nos planos $x = 0,47$ e $y = 0,54$. Observa-se que as estruturas correspondem de fato a pares contra-rotativos. Além disto elas se estendem na direção y , como se pode ver pelas linhas de corrente no segundo plano. Nota-se que estas estruturas já se apresentam mais deformadas. Isto bem claro, uma vez que estas estruturas já passaram por outras fontes de deformações como a curvatura das linhas de corrente devida à presença da parede anterior.

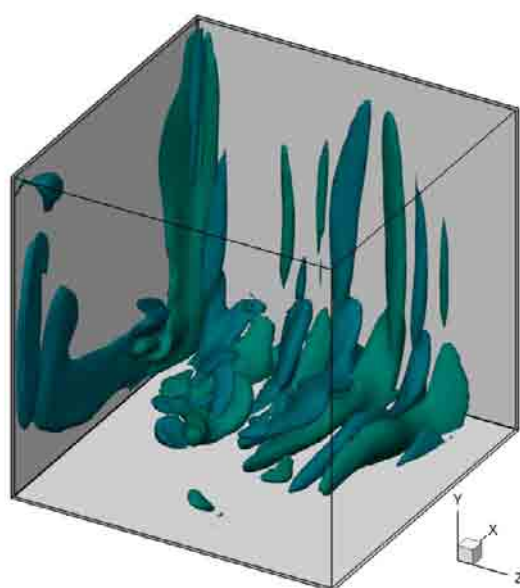


Figura 5.43: Isosuperfícies de vorticidade na direção x do escoamento a número de Reynolds igual a 10.000 no tempo igual a 400s. $w_x = -2,00$ (azul), $w_x = 2,00$ (verde).

O transiente do escoamento a número de Reynolds 10.000 apresenta estruturas do tipo Taylor-Görtler que se estendem na direção do escoamento e estruturas transversais com formato toroidal sobrepostas a elas. Estas estruturas podem ser vistas na figura 5.45. Esta figura mostra isosuperfícies de critério Q igual a 2,50 no tempo igual a 500s. Estas estruturas transversais deformam as linhas de corrente da recirculação central, como mostra a figura 5.46. Nesta figura observa-se a deformação da linha de corrente em um plano que passa pelo centro da estrutura transvesal. São mostradas linhas de corrente em um plano que não intercepta a estrutura e estas não sofrem deformações. Isto indica que de fato esta estrutura é a causa da derformação.

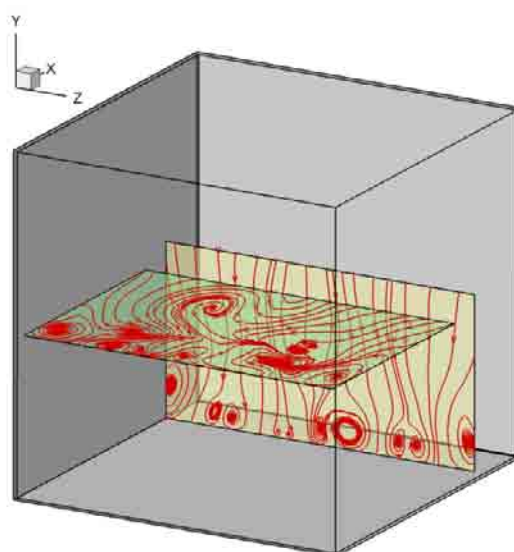


Figura 5.44: Linhas de corrente nos planos $x = 0,75$ e $y = 0,48$ para o escoamento a número de Reynolds igual a 10.000 no tempo igual a 400s.

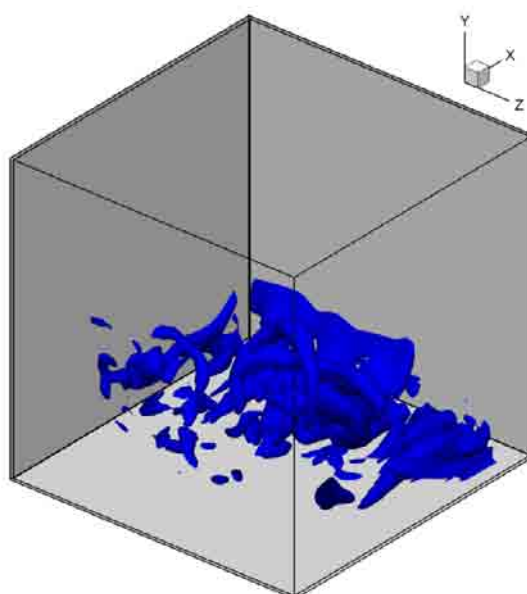


Figura 5.45: Isosuperfície de critério Q igual a 2,50 do escoamento a número de Reynolds igual a 10.000 no tempo igual a 500s.

Estas estruturas não foram encontradas na simulação do escoamento a número de Reynolds igual a 3.200. Esta deformação implica em uma transferência de massa para a região superior do escoamento uniformizando o perfil de velocidade na direção x na região central da cavidade. Este papel atribuído por outros autores (PRASAD e KOSEFF, 1988) apenas às flutuações de velocidade. No entanto, não foi encontrada na literatura uma descrição deste tipo de estrutura e esta parece ter forte

influência nessa transferência de massa.

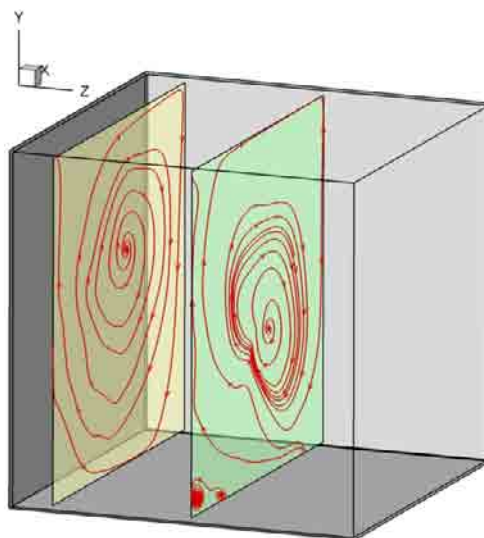


Figura 5.46: Linhas de corrente nos planos $z = 0,12$ e $y = 0,52$ para o escoamento a número de Reynolds igual a 10.000 no tempo igual a 500s.

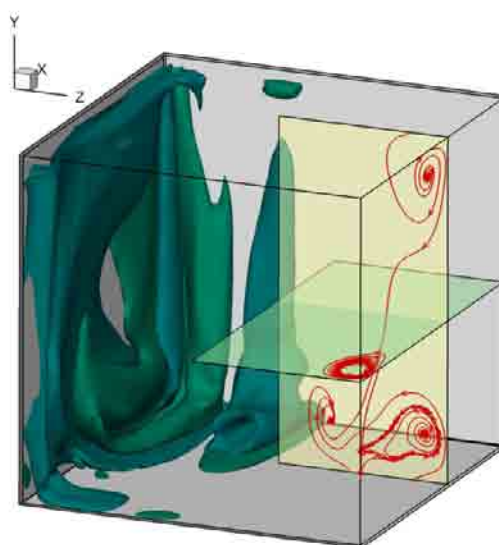


Figura 5.47: Isosuperfícies de vorticidade na direção x do escoamento médio a número de Reynolds igual a 10.000. $w_x = -0,25$ (azul), $w_x = 0,25$ (verde). Linhas de corrente nos planos $x = 0,65$ e $y = 0,47$.

A figura 5.47 mostra isosuperfícies de vorticidade na direção x do escoamento médio a número de Reynolds 10.000 e linhas de corrente nos planos $x = 0,65$ e $y = 0,47$. Observa-se que as estruturas turbilhonares laterais são maiores para este caso que para o escoamento a número de Reynolds igual a 3.200, como pode ser observado comparando linhas de corrente mostradas nesta com as mostradas na figura 5.40. No entanto os

níveis de vorticidade são menores para este caso. Pode-se notar um estrutura contra-rotativa próxima do plano de simetria. No escoamento com número de Reynolds 3.200 aparece uma estrutura análoga, mas bem menor e mais próxima à estrutura lateral, como pode ser visto na figura 5.40. No entanto para número de Reynolds igual a 10.000 ela aparece bem pronunciada.

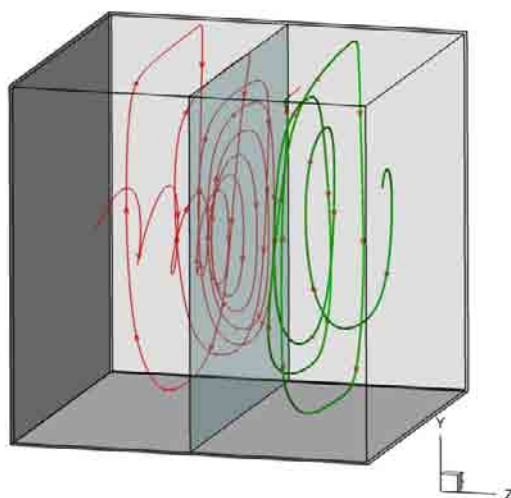


Figura 5.48: Linhas de corrente na recirculação central do escoamento médio a número de Reynolds igual a 10.000.

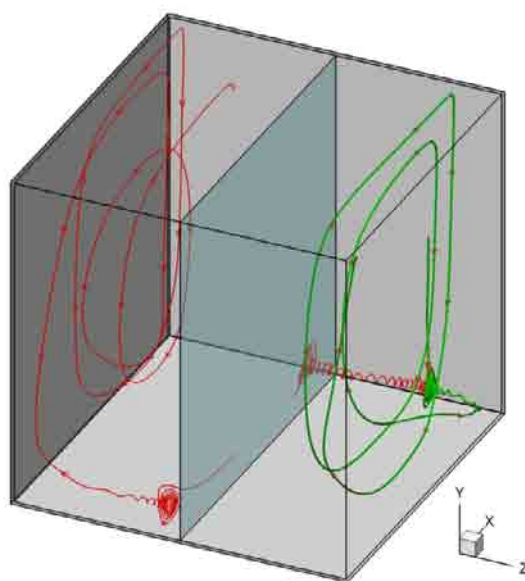


Figura 5.49: Linhas de corrente nos vórtices secundários do escoamento médio a número de Reynolds igual a 10.000.

As linhas de corrente da reciculação central para o escoamento

médio a número de Reynolds igual a 10.000 são mostradas na figura 5.48. A linha de corrente em verde mostra o fluxo mais interno da cavidade das paredes laterais em direção ao plano de simetria, a linha em vermelho mostra o fluxo mais externo contrário ao interno. Como no caso para número de Reynolds igual a 3.200 os dois movimentos são espirais. Observa-se que o nível de expansão da circulação interna é menor neste caso e ela se dá já nas proximidades do plano de simetria quando a linha de corrente tende a tomar a circulação mais externa.

A figura 5.49 mostra as linhas de corrente nos vórtices secundários. Observa-se um movimento helicoidal com espiras mais próximas tanto no vórtice anterior como no posterior. O vórtice posterior se apresenta com uma estrutura dupla, com a divisão aproximadamente em $z = 0,78$. O fluxo toma dois sentidos contrários, um no sentido do ao plano de simetria e o outros no sentido das paredes laterais. Esta bifurcação do vórtice secundário anterior parece ter uma relação com a estrutura rotacional mostrada na figura 5.47. Esta estrutura desloca massa em direção ao plano de simetria e divide o escoamento em duas partes distintas. Isto não ocorre com o vórtice secundário anterior, pois a estrutura rotativa não chega até as proximidades da parede anterior.

Os escoamentos a número de Reynolds 10.000 apresentam estruturas bem definidas no escoamento transiente. No entanto elas se apresentam bastante deformadas, o que pode ser visto como uma forte influência das pequenas flutuações na estrutura do escoamento. Este fato aliado ao surgimento de estruturas em todas as direções de forma aleatória caracteriza-o como um escoamento completamente turbulento. No escoamento médio apresenta estruturas mais complexas do que o escoamento a número de Reynolds 3.200, em especial a bifurcação do vórtice secundário posterior.

- Resultados do escoamento a número de Reynolds 25.000

O escoamento a número de Reynolds igual a 25.000 apresenta cinco pares de vórtices contra-rotativos do tipo Taylor-Görtler bem definidos, apesar de bastante deformados. Eles podem ser visto na figura 5.50. Ela mostra isosuperfícies de vorticidade na direção x no tempo igual a 500s.

Estas deformações parecem influenciar fortemente os vórtices laterais, uma vez que ele se apresentam bastante indefinidos.

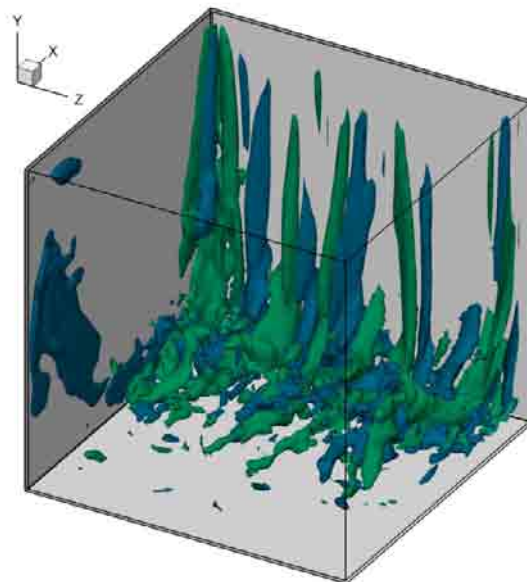


Figura 5.50: Isosuperfícies de vorticidade na direção x do escoamento a número de Reynolds igual a 25.000 no tempo igual a 400s. $w_x = -2,25$ (azul), $w_x = 2,25$ (verde).

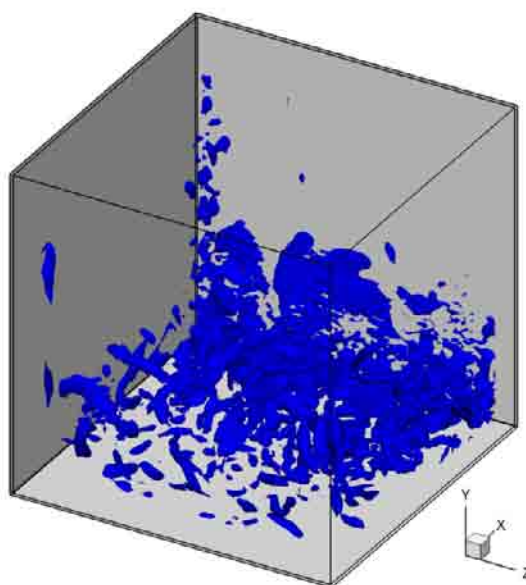


Figura 5.51: Isosuperfície de critério Q igual a 3,00 do escoamento a número de Reynolds igual a 25.000 no tempo igual a 500s.

A figura 5.51 mostra isosuperfícies de critério Q igual a 3,00 do escoamento a número de Reynolds igual a 25.000 no tempo igual a 500s. Este escoamento não apresenta estruturas coerentes transversais como

vistas no escoamento a número de Reynolds igual a 10.000. As estruturas já se apresentam indefinidas e completamente aleatórias. Pode-se observar que o critério Q não favorece identificação de estruturas quando estas se tornam muito deformadas, pois neste caso não se pode observar sequer as estruturas do tipo Taylor-Görtler que foram observadas com as isosuperfícies de vorticidade da figura 5.50.

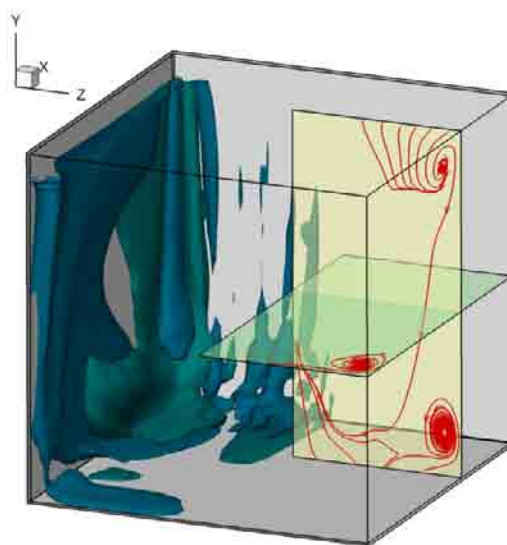


Figura 5.52: Isosuperfícies de vorticidade na direção x do escoamento médio a número de Reynolds igual a 25.000. $w_x = -0,25$ (azul), $w_x = 0,25$ (verde). Linhas de corrente nos planos $x = 0,62$ e $y = 0,48$.

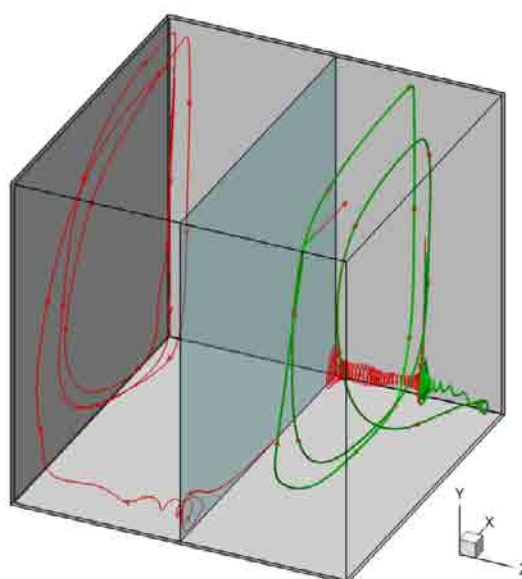


Figura 5.53: Linhas de corrente nos vórtices secundários do escoamento médio a número de Reynolds igual a 25.000.

A figura 5.52 mostra isosuperfícies de vorticidade na direção x do escoamento médio a número de Reynolds 10.000 e linhas de corrente nos planos $x = 0,62$ e $y = 0,48$. Observa-se que no escoamento médio, de forma diferente do transiente, o vórtice de canto se apresenta bem definido, bem como, a estrutura contra-rotativa central. Esta estrutura não chega a se constituir no plano uma recirculação, mas deforma as linha de corrente transportando massa para a região do plano de simetria. Como consequência, persiste a bifurcação do vórtice secundário anterior como pode ser visto na figura 5.53. Esta figura mostra as linhas de corrente nos vórtices secundários.

Para o número de Reynolds igual a 25.000 o local da bifurcação encontrado foi aproximadamente em $z = 0,77$, sendo, portanto, mais próximo do centro que no escoamento a número de Reynolds igual a 10.000. No entanto não é possível fazer uma discussão conclusiva com relação a este ponto de bifurcação, pois ainda se fazem necessários estudos com uma maior quantidade de números de Reynolds, tanto para detectar seu aparecimento como para verificar sua dependência em relação a este parâmetro. No entanto sua influência no escoamento é bem clara. O fato da corrente de circulação interna da recirculação central tornar-se mais estreita e não chegar mais tão próxima do plano de simetria, faz com que a fluxo de massa para a região central seja feito por outras vias, no caso, pelo vórtice secundário posterior.

O escoamento a número de Reynolds igual a 25.000 não apresenta fortes modificações topológicas com relação ao escoamento a número de Reynolds igual a 10.000, sobretudo com relação ao escoamento médio.

- Resultados do escoamento a número de Reynolds 50.000

A figura 5.54 mostra as isosuperfícies de vorticidade na direção x do escoamento a número de Reynolds 50.000 para um tempo igual a 400s. Elas demonstram que, para este número de Reynolds, já não existem mais estruturas do tipo Taylor-Görtler bem definidas, observa-se apenas linhas de concentração de vorticidade em sentidos contrários. Pode-se identificar oito pares destas linhas. Isto já é esperado para números de Reynolds elevados e acontece em outras configurações, tais como o degrau, como

pode ser verificado em Spode (2006).

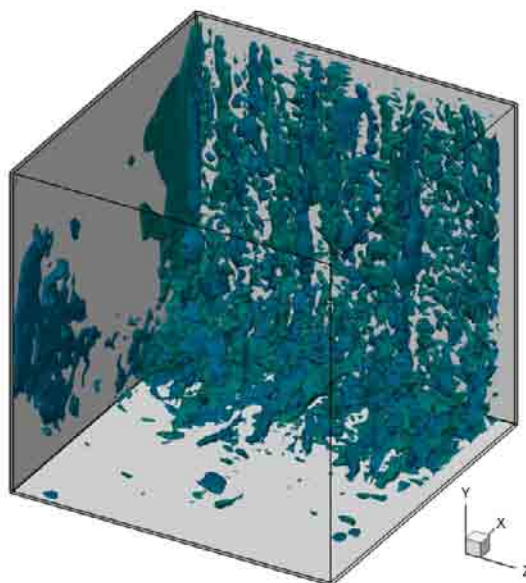


Figura 5.54: Isosuperfícies de vorticidade na direção x do escoamento a número de Reynolds igual a 50.000 no tempo igual a 500s. $w_x = -2,00$ (azul), $w_x = 2,00$ (verde).

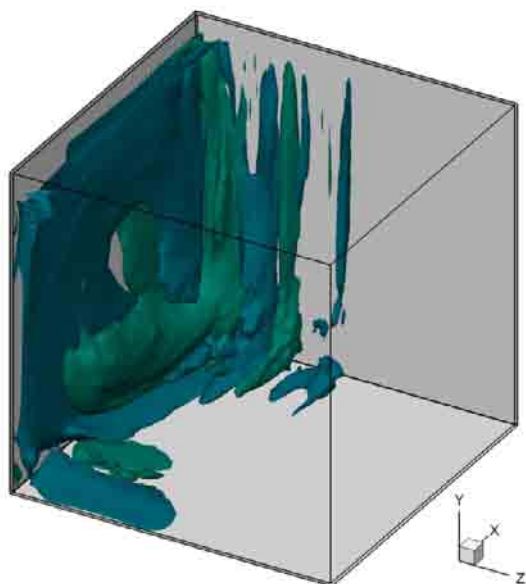


Figura 5.55: Isosuperfícies de vorticidade na direção x do escoamento médio a número de Reynolds igual a 50.000. $w_x = -0,25$ (azul), $w_x = 0,25$ (verde).

A figura 5.55 mostra isosúperfícies de vorticidade do escoamento médio a número de Reynolds igual a 50.000. Note-se além do vórtice lateral, estruturas contra-rotativas em maior número que no escoamentos a números de Reynolds iguais a 10.000 e 25.000, que podem ser vistas nas

figuras 5.47 e 5.52, respectivamente. Estas estruturas, como no escoamento a número de Reynolds igual a 25.000, restringem-se a região próxima da parede posterior.

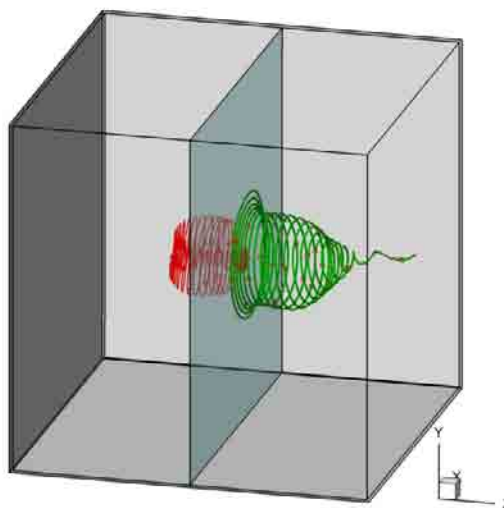


Figura 5.56: Linhas de corrente na recirculação central do escoamento médio a número de Reynolds igual a 50.000.

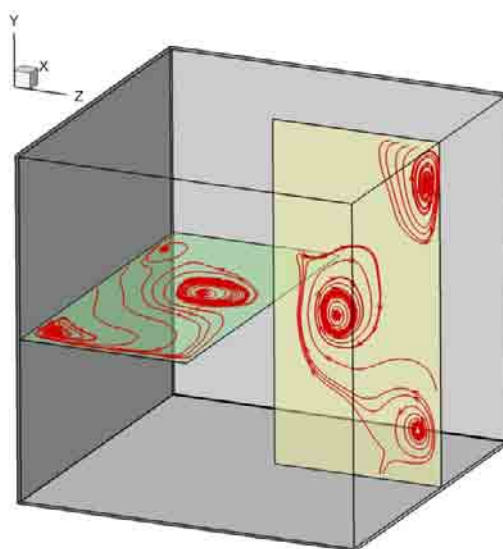


Figura 5.57: Linhas de corrente nos planos $x = 0,62$ e $y = 0,47$ do escoamento médio a número de Reynolds igual a 50.000.

A principal modificação topológica apresentada pelo escoamento e número de Reynolds igual a 50.000 em relação aos anteriores pode ser vista na figura 5.56. Ela mostra linhas de corrente da recirculação central do escoamento médio. Observa-se na linha de corrente vermelha uma célula recirculatória que se estende de aproximadamente $x = 0,35$ até o

plano de simetria. Esta célula contém um fluxo interno que sai do plano de simetria em direção às paredes laterais e um fluxo externo no sentido contrário. Ela é envolta pela corrente interna da recirculação central. O fluxo interno na célula de recirculação tem sentido contrario ao fluxo interno da recirculação central que é causado pelo aumento de pressão resultante da desaceleração das proximidades da parede.

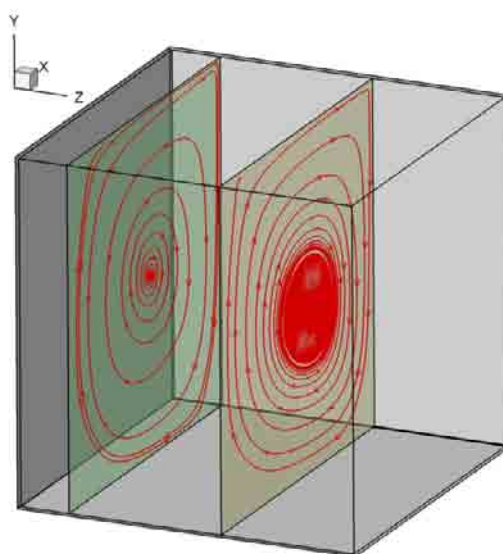


Figura 5.58: Linhas de corrente nos planos $z = 0,12$ e $z = 0,62$ do escoamento médio a número de Reynolds igual a 50.000.

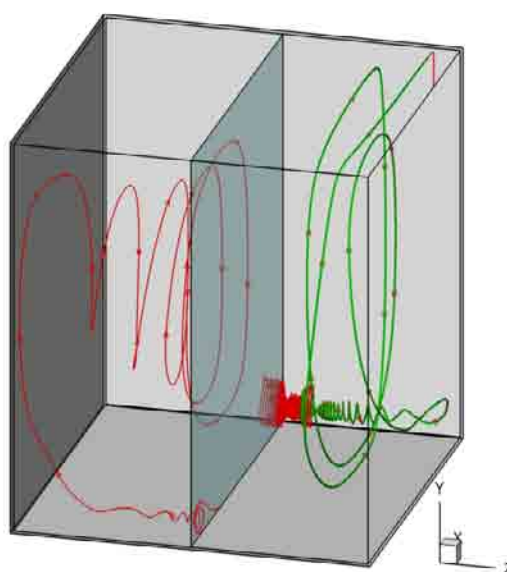


Figura 5.59: Linhas de corrente nos vórtices secundários do escoamento médio a número de Reynolds igual a 50.000.

Para o mesmo caso, as linhas de corrente nos planos $x = 0,62$ e $y = 0,47$, na figura 5.57, mostram como se comporta a célula recirculatória central. Pode-se observar as recirculações referentes aos vórtices laterais e uma recirculação na região central que corresponde à célula central. Outro aspecto desta célula é mostrado na figura 5.58. nesta figura linhas de corrente são traçadas nos planos $z = 0,12$ e $z = 0,62$. No primeiro plano a linha de corrente é uma estrutura com um fluxo espiral do centro para o exterior. No entanto, nos planos que interceptam a estrutura recirculatória central, a linha de corrente tem dois movimentos distintos. O primeiro, externo, do centro para a periferia e o segundo, interno, com sentido contrário.

No escoamento a número de Reynolds 50.000 persiste a bifurcação do vórtice secundário posterior no escoamento médio, como pode ser visto na figura 5.59 que mostra linhas de corrente nos vórtices secundários. Este caso apresentou uma indefinição no ponto de bifurcação com linhas de corrente com fluxos ora em direção ao plano de simetria, ora em direção às paredes laterais, dependendo de ser mais interna ou mais externa à estrutura. Há também neste caso uma forte assimetria dos resultados médios em relação ao plano de simetria. Isto acontece, provavelmente, devido a direções preferenciais adotadas na solução do sistema linear para correção da pressão pelo método MSIP.

Os escoamentos a número de Reynolds igual a 50.000 apresentam modificações topológicas importantes, as quais modificam toda estrutura do escoamento. A principal modificação é o aparecimento da recirculação central que até o momento não se pode determinar as causas de seu aparecimento nem os efeitos que desempenha no escoamento.

- Resultados do escoamento a número de Reynolds 100.000

Da mesma forma que para o escoamento a número de Reynolds igual a 50.000, o escoamento a número de Reynolds 100.000 não apresenta estruturas contra-rotativas do tipo Taylor-Görtler bem definidas. A figura 5.60 mostra as isosuperfícies de vorticidade dos escoamentos a número de Reynolds igual a 100.000 no tempo igual a 500 s. Nesta figura nota-se apenas linhas de concentrações de vorticidade.

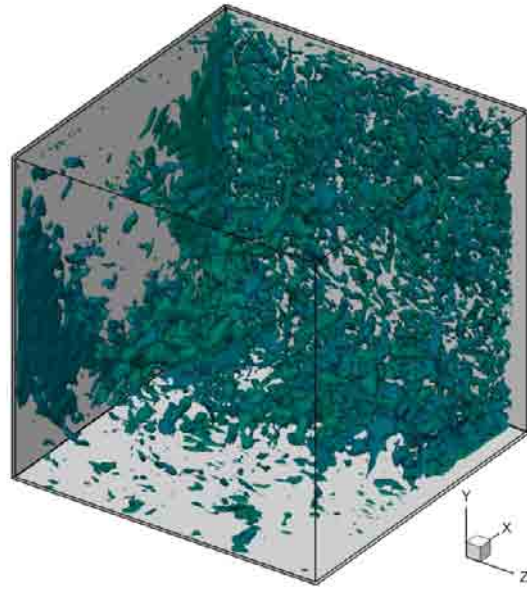


Figura 5.60: Isosuperfícies de vorticidade na direção x do escoamento a número de Reynolds igual a 100.000 no tempo igual a 500s. $w_x = -2,25$ (azul), $w_x = 2,25$ (verde).

A figura 5.61 mostra isosuperfícies do módulo da vorticidade, considerando as direções x e y, do escoamento médio a número de Reynolds igual a 100.000. esta grandeza é calculada por

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2}. \quad (5.8)$$

sendo ω , a vorticidade. Pode-se observar que o escoamento apresenta estruturas toroidais contra-rotativas que se iniciam na região inferior e se estendem até a região superior. Estas estruturas não foram detectadas de forma consistente em nenhum dos escoamentos a números de Reynolds mais baixos, apresentando-se apenas na região da parede inferior. Estas estruturas sugerem um processo de separação do escoamento em quatro regiões, separadas por planos paralelos ao plano de simetria.

Esta separação pode ser confirmada pelos dados apresentados na figura 5.62, a qual se refere ao escoamento médio a número de Reynolds igual a 100.000. Nesta figura, são mostrados isosuperfícies de vorticidade na direção y e de velocidade igual a zero na direção z. Observa-se que tanto as isosuperfícies de vorticidade (lado esquerdo) como a de velocidade nula (lado direito) dividem o escoamento em regiões de influências distintas.

A figura 5.63 mostra linha de corrente da recirculação central do escoamento médio a número de Reynolds igual a 100.000. Observa-se a recirculação com fluxo inverso apresentada no escoamento a número de Reynolds igual a 50.000. Neste caso esta recirculação se estende até as proximidades da parede lateral e sofre deformações que são características das regiões de influência do vórtice lateral e da estrutura contra-rotativa central. Na região mais próxima ao plano de simetria sofre um adelgaçamento tanto no fluxo interno como no externo. Este formato segue a estruturas contra-rotativas mostradas na figura 5.61. Nas proximidades da parede lateral o fluxo interno se estreita e retorna seguindo o fluxo indicado pela queda de pressão da lateral para o plano de simetria.

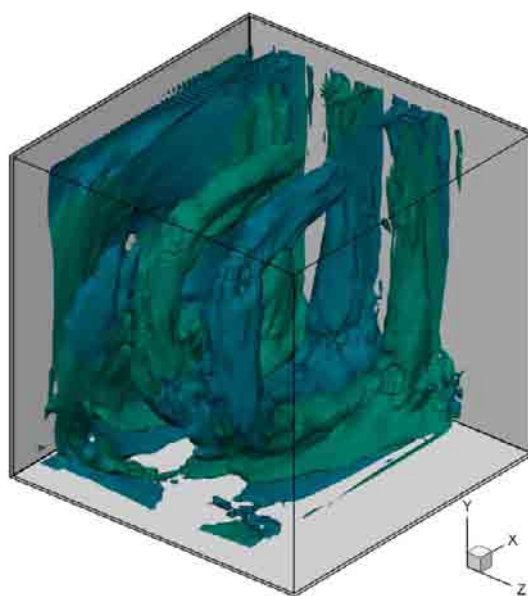


Figura 5.61: Isosuperfícies do módulo da vorticidade, considerando as direções x e y , do escoamento a número de Reynolds igual a 100.000 no tempo igual a 500s. $w_x = -0,50$ (azul), $w_x = 0,50$ (verde).

A figura 5.64 ajuda a entender melhor o movimento na recirculação central. Ela mostra linha de corrente nos planos $x = 0,62$ e $y = 0,47$ do escoamento médio. Pode-se observar as linhas ligadas ao vórtice lateral, que neste caso, se estende de forma bem definida desde a região próxima à parede posterior até a região da parede superior seguindo o caminho da recirculação central. Observa-se também as circulações ligadas às estruturas contra-rotativas descritas acima. No plano $y = 0,47$ nota-se o

movimento causador do alçamento da estrutura.

A figura 5.65 mostra as linha de corrente do vórtice secundários para o escoamento médio a número de Reynolds 100.000. Persiste a birfusãoção do vórtice secundário posterior em duas estruturas e o vórtice secundário anterior como uma estrutura única.

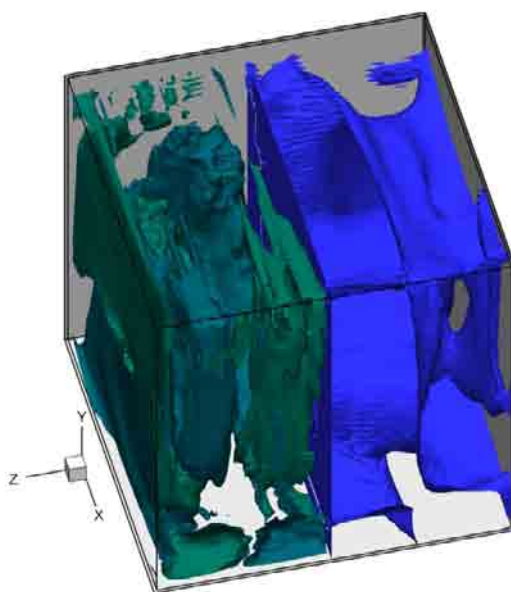


Figura 5.62: Isosuperfícies da vorticidade na direção y , $w_y = -0,25$ (azul), $w_y = 0,25$ (verde), e velocidade igual a zero na direção z do escoamento médio a número de Reynolds igual a 100.000.

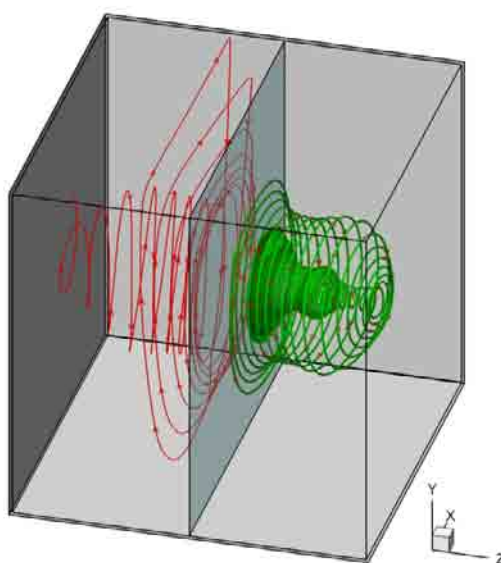


Figura 5.63: Linhas de corrente na recirculação central do escoamento médio a número de Reynolds igual a 100.000.

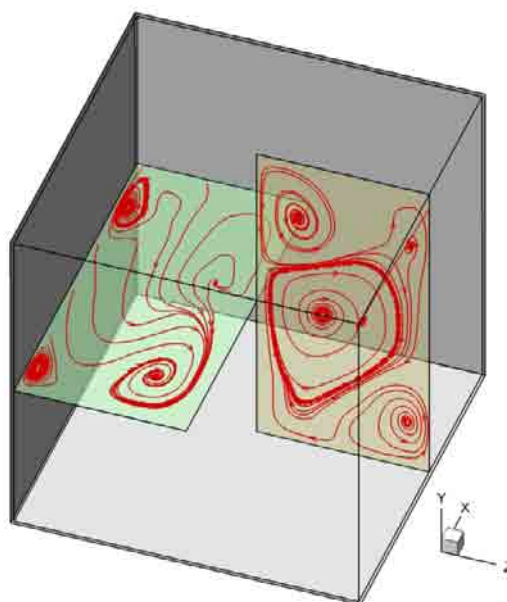


Figura 5.64: Linhas de corrente nos planos $x = 0,62$ e $y = 0,47$ do escoamento médio a número de Reynolds igual a 100.000.

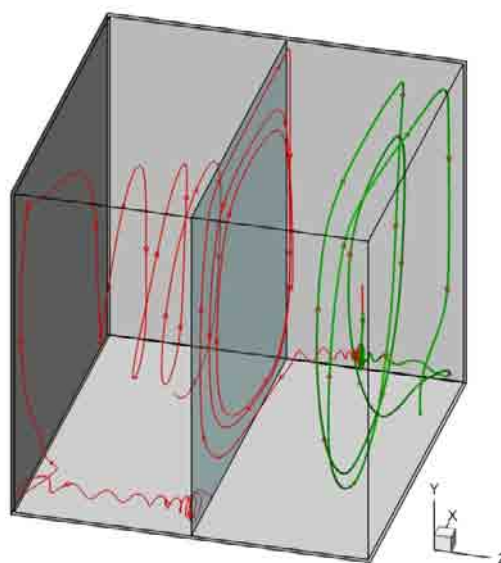


Figura 5.65: Linhas de corrente nos vórtices secundários do escoamento médio a número de Reynolds igual a 100.000.

Nos escoamentos a número de Reynolds 100.000 consolida-se um processo de divisão do escoamento iniciado com a bifurcação do vórtice secundário posterior. Esta consolidação se faz com o aparecimento da estrutura contra-rotativa mostrada na figura 5.61. Esta estrutura define um padrão diferente de escoamento deformando as linhas de corrente da recirculação central. Isto pode ser observado comparando-se as figuras

5.56 e 5.63. Na primeira a circulação com o fluxo invertido aparece bem uniforme, na segunda a estrutura aparece bastante deformada.

5.2.3 Densidade Espectral de Energia Cinética Turbulenta

A figura 5.66 mostra a densidade espectral de energia cinética turbulenta no plano de simetria ($z = 0,5$), no lado anterior inferior ($x = 0,3$ e $y = 0,3$) da cavidade com escoamento a número de Reynolds igual a 10.000 obtidos sem modelagem e com os modelos de Smagorinsky e dinâmico de Germano. Observa-se que a curva obtida com o modelo de Smagorinsky tem uma curvatura muito acentuada nas menores escalas resolvidas, o que caracteriza a alta difusividade do modelo com a constante utilizada. As curvas obtidas sem modelagem e com o modelo dinâmico estão bem próximas. Esta última apresenta-se um pouco mais acentuada, o que indica um pequeno nível de dissipação do modelo.

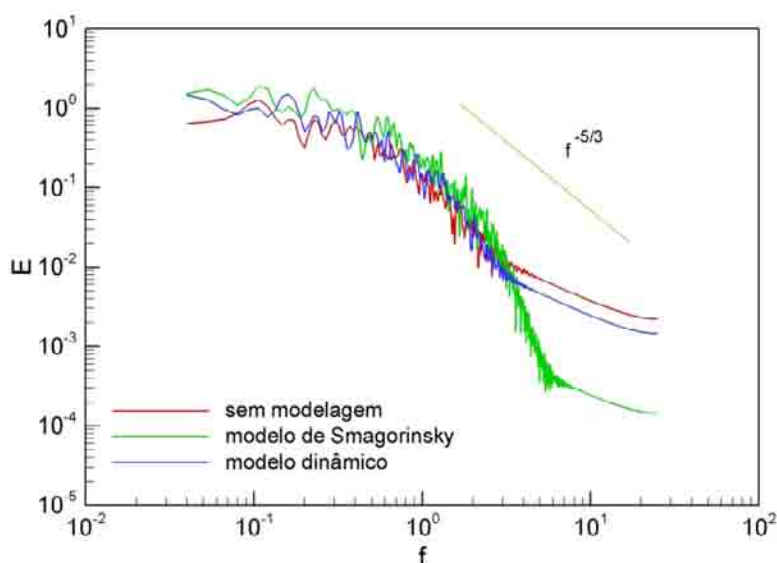


Figura 5.66: Densidade espectral de energia cinética turbulenta em $x = 0,3$, $y = 0,3$ e $z = 0,5$ para número de Reynolds igual a 10.000.

A figura 5.67 mostra a densidade espectral de energia cinética turbulenta no lado posterior inferior ($x = 0,7$ e $y = 0,3$) da cavidade com escoamento a número de Reynolds igual a 10.000 obtidos com o modelo dinâmico de Germano em coordenadas z entre o plano de simetria e as paredes laterais. Esta é uma região de formação de grandes estruturas com frequências menos definidas, daí a aparência de descontinuidade do

espectro, sobretudo no obtido no plano de simetria ($z = 0,5$). Observa-se o maior nível energia cinética turbulenta nesta região e o decaimento do nível à medida que se aproxima da parede lateral, o que é esperado.

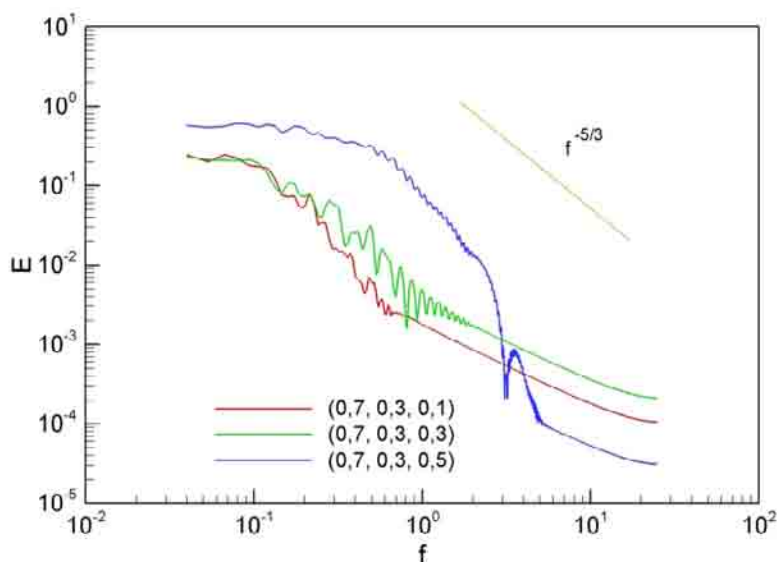


Figura 5.67: Densidade espectral de energia cinética turbulenta obtida com modelo dinâmico de Germano para número de Reynolds igual a 10.000.

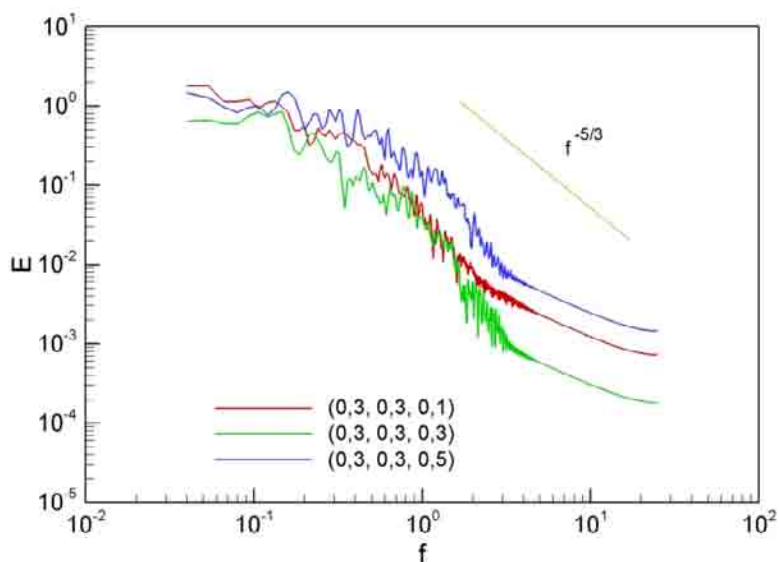


Figura 5.68: Densidade espectral de energia cinética turbulenta obtida com modelo dinâmico de Germano para número de Reynolds igual a 10.000.

A figura 5.68 mostra a densidade espectral de energia cinética turbulenta do mesmo caso, no lado anterior inferior ($x = 0,3$ e $y = 0,3$). Observa-se que a região central continua com o maior nível de energia

cinética turbulenta. No entanto há uma inversão, próximo à parede ($z = 0,1$), o nível de energia cinética é maior que em ($z = 0,3$). Esta inversão pode ser explicada pela presença do vórtice lateral, uma vez que ele é uma estrutura toroidal que se estende na região da parede anterior, próxima às paredes laterais, como descrito no capítulo 1.

Comparando-se os espectros mostrados nas duas figuras acima, percebe-se que os espectros obtidos na região anterior são mais uniformes, o que revela uma turbulência mais homogênea. A região inercial destes tem características mais próximas da região inercial da turbulência isotrópica. Isto pode ser observado comparando-se a inclinação da curva com a da reta ($f^{-5/3}$) mostrada no gráfico.

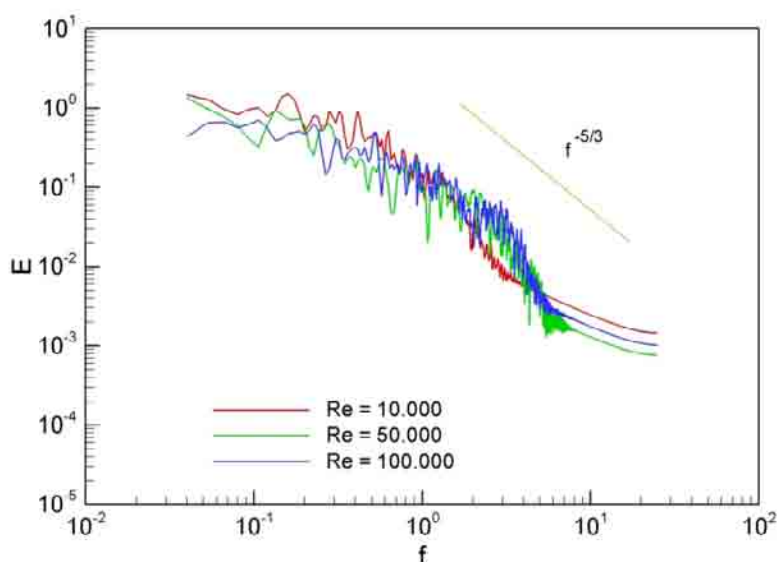


Figura 5.69: Densidade espectral de energia cinética turbulenta em $x = 0,3$, $y = 0,3$ e $z = 0,5$ obtida com modelo dinâmico de Germano.

A figura 5.69 mostra a densidade espectral de energia cinética turbulenta no ponto central, na região anterior inferior ($x = 0,3$, $y = 0,3$ e $z = 0,5$) da cavidade obtidos com modelagem dinâmica para vários números de Reynolds. O que pode-se observar neste espectro é que para número de Reynolds igual a 10.000 o nível de energia cinética turbulenta é mais alto nas maiores estruturas e mais baixo nas menores, o que indica a formação de grandes estruturas neste caso. Já nos casos com Reynolds com 50.000 e 100.000 o nível de energia cinética turbulenta é maior nas menores estruturas.

5.2.4 Perfis de Velocidade e RMS para Números de Reynolds Elevados

As figuras 5.70 e 5.71 mostram os perfis de velocidade na direção x e y respectivamente. Observa-se que nos escoamentos a números de Reynolds mais elevados há uma tendência inversa no sentido de aumentar o valor do pico de velocidade na região inferior (figuras 5.70) e na região anterior da cavidade (figura 5.71).

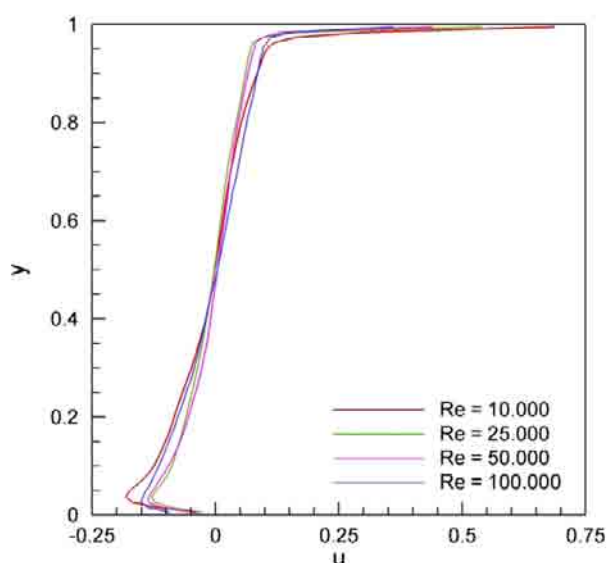


Figura 5.70: Comparação entre os perfis da componente de velocidade u em $z = 0,5$ e $x = 0,5$.

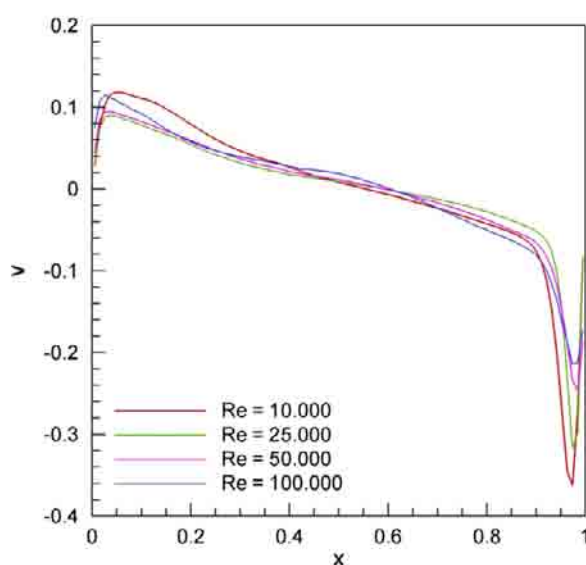


Figura 5.71: Comparação entre os perfis da componente de velocidade v em $z = 0,5$ e $y = 0,5$.

Alguns fatores levam a concluir que o comportamento descrito influenciado pela presença da estrutura contra-rotativa mostrada na figura 5.61. Primeiro, esta estrutura bombeia massa para região do plano de simetria. Segundo, porque este comportamento é acentuado no escoamento a número de Reynolds igual a 100.000, no qual se consolida a formação da estrutura. E, por fim, porque onde não há a presença desta estrutura, como na região posterior, este comportamento não é observado. Para comparação, os picos de velocidades são indicados nas tabelas 5.1, 5.2 e 5.3.

Tabela 5.1: Pontos de velocidade mínima no perfil de velocidade na direção x em $z = 0,5$ e $x = 0,5$.

Número de Reynolds	Posição y	Velocidade u
10.000	0.0368	- 0,1815
25.000	0.0368	- 0,1285
50.000	0.0263	- 0,1358
100.000	0.0263	- 0,1517

Tabela 5.2: Pontos de velocidade máxima no perfil de velocidade na direção y em $z = 0,5$ e $y = 0,5$.

Número de Reynolds	Posição x	Velocidade v
10.000	0.0474	0.1186
25.000	0.0368	0.0904
50.000	0.0368	0.0947
100.000	0.0263	0.1152

Tabela 5.3: Pontos de velocidade mínima no perfil de velocidade na direção y em $z = 0,5$ e $y = 0,5$.

Número de Reynolds	Posição x	Velocidade v
10.000	0.9737	- 0.3623
25.000	0.9737	- 0.3170
50.000	0.9842	- 0.2462
100.000	0.9737	- 0.2152

As figuras 5.72 e 5.73 mostram os perfis de RMS_u e RMS_v respectivamente. Nota-se maiores picos de energia mais próximos da tampa para número de Reynolds maiores (figura 5.72). Este comportamento é esperado. Ele indica uma menor influência da parede nas flutuações de velocidade a medida que esse parâmetro aumenta de

valor. No entanto, na região próxima a parede posterior (figura 5.73), os picos de RMS_v tem comportamento inverso, diminuem de valor e se aproximam da parede. Este comportamento se repete na região da parede inferior. Isto pode ser explicado pelo fato de que, para número de Reynolds mais elevados, a maior parte das flutuações ocorrem nas menores escalas que são modeladas, portanto sua energia não é computada.

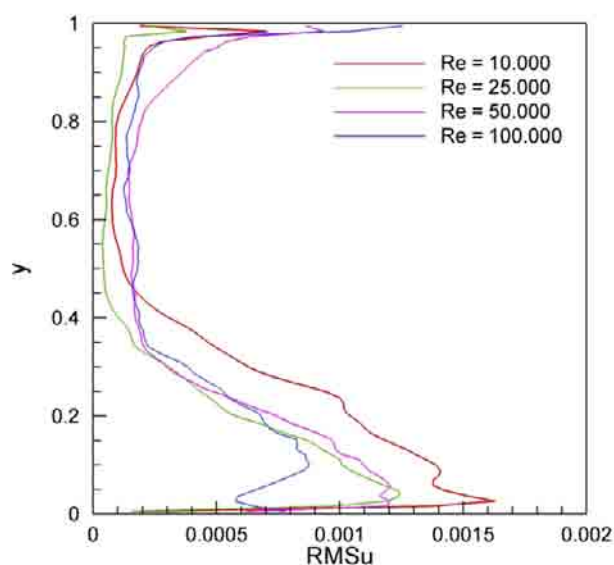


Figura 5.72: Comparação entre os perfis da RMS_u em $z = 0,5$ e $x = 0,5$.

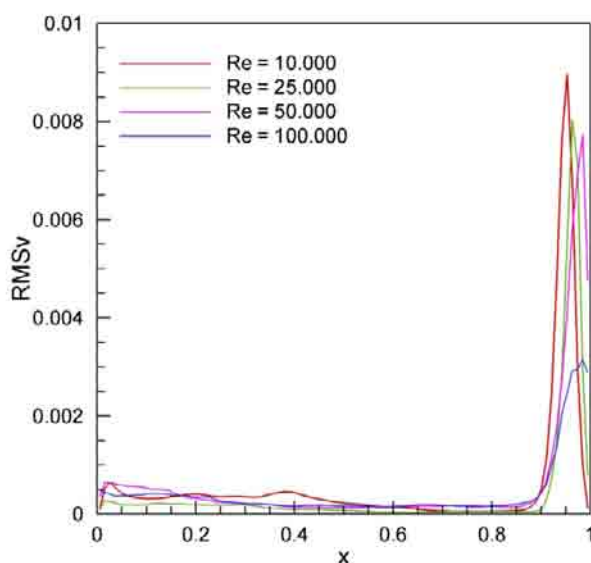


Figura 5.73: Comparação entre os perfis da RMS_v em $z = 0,5$ e $x = 0,5$.

Os dados com os perfis de velocidade e RMS apresentados estão

tabelados no apêndice D e podem ser utilizados para comparação com dados obtidos em trabalhos futuros.

CAPÍTULO 6

CONCLUSÕES

O resultados obtidos mostram que a ferramenta desenvolvida é confiável para obtenção das soluções numéricas das equações de Navier-Stokes, tanto na configuração bidimensional como na tridimensional. Os resultados obtidos com esta ferramenta concordaram bem com os resultados experimentais e numéricos presentes na literatura.

Os resultados bidimensionais validaram o código em sua fase inicial e definiram os parâmetros de malha e passo de tempo. Os resultados mostrados no presente trabalho já são conhecidos e estão publicados. No entanto, não foram encontrados resultados obtidos com discretização de quarta ordem com diferenças centradas.

Com relação aos casos tridimensionais, os casos a número de Reynolds 3.200 e 10.000 apresentam valores de perfis de velocidade médios que concordam bem com os dados experimentais e com os dados numéricos presentes na literatura. As estruturas apresentadas no escoamento a número de Reynolds 3.200 corresponderam ao esperado e encontrado na literatura para este caso. No entanto, o escoamento a número de Reynolds igual a 10.000 apresentou aspectos não encontrados na literatura: estruturas coerentes transversais ao escoamento e a divisão do vórtice secundário posterior.

Não foram encontrados na literatura estudos com escoamentos a número de Reynolds mais altos que 10.000. No presente trabalho foram simulados escoamentos a números de Reynolds iguais a 25.000, 50.000 e 100.000. Estes escoamentos apresentaram aspectos bastante diversos.

O escoamento a número de Reynolds igual a 25.000 apresentou

topologia aproximadamente igual ao escoamento a número de Reynolds igual a 10.000. Enquanto que o escoamento a número de Reynolds igual 50.000 apresentou uma estrutura recirculatória na região central com fluxo inverso ao da recirculação central. Além do que, este escoamento já não apresentou estruturas contra-rotativas de Taylor-Görtler de forma bem definida.

O escoamento a número de Reynolds igual a 100.000 apresentou a estrutura de recirculação central com fluxo inverso completamente desenvolvida, se estendendo até as proximidades das paredes laterais. Este caso se apresentou sob a influência de um par de estruturas contra-rotativas na região central. Estas estruturas têm forma toroidal e se estendem da parede inferior até tampa da cavidade seguindo próximo à parede anterior. Esta estrutura gera um fluxo de massa para a região central e inverte a tendência à diminuição do pico de velocidade no perfil de velocidade na direção x no plano de simetria para número de Reynolds até 25.000.

O desenvolvimento deste trabalho abriu novas perspectivas em três linhas. A primeira linha se refere ao desenvolvimento do código computacional. A segunda ao estudo mais aprofundado no escoamento em cavidades com tampa deslizante. A terceira e última se refere ao estudo de outras configurações de escoamento.

Os resultados do escoamento médio apresentam fortes assimetrias em relação ao plano xOy central. Possivelmente, estas assimetrias acontecem devido ao fato dos solvers utilizados (SIP e MSIP) terem direções preferenciais. Portanto, uma forma de solucionar isto é a implementação de iterações em diferentes direções.

Outras implementações possíveis são os tratamentos estatísticos parciais e a paralelização do código. Os tratamentos estatísticos parciais facilitam a determinação de tempos suficientes para a análise do escoamento médio, diminuindo, desta forma, o tempo computacional necessário para rodar um caso. A paralelização do código permitirá o seu uso em outras configurações e com malhas mais refinadas.

Com o estudo mais aprofundado do escoamento em cavidades com tampa deslizante pode-se determinar com mais presteza os tipos de estruturas presentes e seu papel no escoamento, tanto para configuração

bidimensional como para tridimensional. Para configuração tridimensional há ainda discussões sobre o processo de transição e da determinação do número de Reynolds a partir do qual o escoamento se torna completamente turbulento e a partir de qual surgem padrões diversos de escoamento. A aplicação em configurações mais complexas, sobretudo em cavidades abertas que fazem parte dos objetivos gerais do LTCM, devido aos projetos na área de aeroacústica.

CAPÍTULO 7

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AIDUN, C. K., TRIANTAFILLOPOULUS, N. G. e BENSON, J. D., Global Stability of a Lid-Driven Cavity with Throughflow: Flow Visualization Studies, *Physics and Fluids A*, v. 3, p. 2081-2091, 1991.

ARMFIELD S. e STREET, R., The Fractional-step method for the Navier-Stokes Equation on Staggered Grids: The Accuracy of Three Variations, *Journal of Computational Physics*, v. 153, p. 660-665, 1989.

BOUSSINEQ, J., Essai sur la Théorie des Aux Courrantes, Memorial Présente Academie de Science, 1877.

BRADSHAW, P., Understanding and Prediction of Turbulent Flow – 1996, *International of Heat and Fluid Flow*, v. 18, p. 45-54, Fev, 1997.

BREUER, M. e RODI, W., Large-Eddy Simulation of Turbulent Flow Through a Straight Square Duct and a Bend, *Direct and Large Eddy Simulation*, ed. VOKE, et al., Kluwer Academic Publishers, v. I, p. 273-285, 1994.

BRUNEAU C. H. e SAAD M., The 2D Lid-Driven Cavity Problem Revisited. *Computers and Fluids*, v. 35, p. 326-348, Mar, 2006.

BURGGRAF, O. R., Analitical and Numerical Studies of the Structure of Steady Separated Flow. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 24, n. 1, p. 113 – 151, jan. 1966.

CAZEMIER W., VERSTAPPEN R. W. C. P. e VELDMAN A. E. P., Proper Orthogonal Decomposition and Low-Dimensional Models for Driven Cavity Flows, *Journal of Physics and Fluids*, v. 10 p. 1685–1699, 1998.

CHIANG, T. P., HUANG, R. R. e SHEU, W. H., Finite Volume Analysis of Spiral Motion in a Rectangular Lid-Driven Cavity, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, v. 23, p. 325-346, 1996.

CHIANG, T. P., HUANG, R. R. e SHEU, W. H., On EndWall Corner Vortices in a Lid-Driven Cavity, *Journal of Fluids Engineering*, v. 23, p. 325-346, 1996.

CHIANG, T. P., SHEU, W. H. e HUANG, R. R., Finite Volume Analysis of Spiral Motion in a Rectangular Lid-Driven Cavity, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, v. 23, p. 325-346, 1996.

CHIANG, T. P., SHEU, W. H., Numerical Prediction of Eddy Structure in a Shear-Driven Cavity, *Computational Mechanics*, v. 20 p. 379-396, 1997.

DAVISON, L., A Note on Derivation of the Equations for Subgrid Turbulent Kinetic Energies, *Notes, Chalmers University of Technology*, 1997.

DEAN, W. R. e MONTAGNON, P. E., The Steady Motion of Viscous Liquid in a Corner, *Proceedings Cambridge Philosophical Society*, v.45, p. 345, 1949.

DESHPANDE M. D. e MILTON, S. G., Kolmogorov Scale in a Driven Cavity Flow, *Fluid Dynamics Research*, v. 22, p. 359-381, 1998.

FERZIGER, J. H. e PERIC, M., Computational Methods for Fluid Dynamics, *Spriger*, 2ª edição revisada, 1999.

FORTUNA, A. O., Técnicas Computacionais para Dinâmica dos Fluidos, Conceitos Básicos e Aplicações, *EDUSP*, 2000.

FREITAS, C. J. e STREET, R. L., Non-Linear Transient Phenomena in a Complex Recirculation Flow: A Numerical Investigation, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, v. 8, p. 769-802, 1988.

FREITAS, C. J., STREET, R. L., FINDIKAKIS, A. N. e KOSEFF, J. R., Numerical Simulation of Three-Dimensional Flow in a Cavity, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, v. 5, p. 561-575, 1985.

GERMANO, M., PIOMELLI, H., MOIN, P. e CABOT, W. H., A Dynamic Subgrid-Scale Eddy Viscosity Model, *Physics and Fluids A*, v. 3, no. 7, p. 1760-1765,

Jul, 1991

GHIA, U.; GHIA, K. N.; SHIN C. T., High-Re Solutions for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method, *Journal of Computational Physics*, v. 48, p. 387-411, dez, 1982.

GROTZBACH, G., Direct Numerical Simulation of Turbulent Channel Flows, *Encyclopedia of Fluid Mechanics*, ed. CHEREMISIONOF, N. P., Gulf Publications, v. IV, p. 1337-1391, 1987.

HASSAN, Y. A. e BARSAMIAN, H. R., New-Wall Modeling for Complex Flow Using the Large Eddy Simulation Technique in Curvilinear Coordinates, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 44, p. 4009-4026, 2001.

JEONG, J, e HUSSAIN, F., On the Identification of a Vortex, *Journal of Fluid Mechanics*, v. 285, p. 69-94, 1995.

HAYASE, T., HUMPHREY, J. A. C. E GREIF, R., A Consistently Formulated QUICK Scheme for Fast and Stable Convergence Using Finite-Volume Iterative Calculation Procedures, *Journal of Computational Physics*, v. 98, p. 108-118, 1992.

KOLMOGOROV, A. N., Equation of Turbulent Motion of an Incompressible Fluid *Izvestia Akademii Nauk*, v. 6, p. 56-56, 1942.

KOSEFF, J. R. e STREET, R. L., On the Endwall Effects in a Lid-Driven Cavity Flow, *Journal of Fluid Engineering*, v. 106, p. 385-389, 1984b.

KOSEFF, J. R. e STREET, R. L., The Lid-Driven Cavity Flow: A Synthesis of Qualitative and Quantitative Observation, *Journal of Fluid Engineering*, v. 106, p. 390-398, 1984c.

KOSEFF, J. R. e STREET, R. L., Visualization of a Shear Driven of Three-Dimensional Recirculating Flow, *Journal of Fluid Engineering*, v. 106, p. 21-29, 1984a.

LEONARD, B. P., A Stable and Accurate Convective Modelling Procedure Based on Quadratic Upstream Interpolation, *Computational Methods Applaid in Mechanical Engineering*, v. 19, p. 59-88, 1979.

LESIEUR, M. METAIS, O. e COMTE, P., Large Eddy-Simulation of Turbulence, *Cambridge University Press*, 2005.

LESIEUR, M., Turbulence in Fluids, *Kluwer Academic Publishers*, 2ª edição, 1997.

LILLY, D. K., A Proposed Modification of the Germano Subgrid-Scale Closure Method *Physics and Fluids A*, v. 4, no. 3, p. 633-635, Jul, 1992.

MALISKA, C. R., Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional, *Livros Técnicos e Científicos Editora*, 1ª edição, 1995.

MIGEON C. , PINEAU, G. e TEXIER, A., Three-dimensionality Development Inside Standard Parallelepipedic Lid-Driven Cavities at $Re = 1000$, *Journal of Fluids and Structure*, v. 17, p. 717-738, 2003.

MOFFATT, H. K., Viscous and Resistive Eddies Near a Sharp Corner, *Journal of Fluid Mechanics*, v. 18, n. 1, p. 1 – 18, jan. 1964.

PADILLA E. L. M., MARTINS, A. L. e SILVEIRA NETO, A., Large-Eddy Simulation of the Three-Dimensional Flow in a Lid-Driven Cavity, *Proceedings of COBEM*, 2005.

PADILLA E. L. Simulação de Grandes Escalas da Transição a Turbulência em Sistemas de Rotativos de Transferência de Calor, *Tese de Doutorado da Universidade Federal de Uberlândia*, 2004.

PALLARÈS, J., CUESTA, I., GRAU, F. X. e GIRALT, F., Natural Convection in a Cubical Cavity Heated from Below at Low Rayleigh Numbers, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 39, n. 15, p. 3233-3247, 1996.

PAN, F. e ACRIVOS, A., Steady Flow in Rectangular Cavities, *Journal of Fluid Mechanics*, v. 28, n. 4, p. 643 – 655, jun. 1967.

PATANKAR, S. V., Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, *Hemisphere*, 1980.

PENG, Y.-F., SHIAU, Y.-H., HWANG, R. R., Transition in a 2-D Lid-Driven Cavity Flow, *Computers and Fluids*, v. 32, p. 337–352, nov, 2003.

PERGN, C. H.-Y. e STREET R. L., Three-Dimensional Unsteady Flow

Simulation: Alternative Strategies for a Volume-Average Calculation, *International Journal of Numerical Methods in Fluids*, v. 9, p. 341-162, 1989.

PETRY, A. P. e AWRUCH, A. M. Large Eddy Simulation of Three-Dimensional Turbulent Flows by the Finite Element Method, *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Science and Engineering*, v. XXVIII, n. 2, 2006.

PIOMELLI, U., FERZIGER, J. e MOIN, P., New Approximate Boundary Conditions for large Eddy Simulation of Wall-Bounded Flow, *Physics and Fluids A*, v. 1, n. 6, p. 1061-1068, 1989.

PRASSAD, A. K. e KOSEFF J. R., Reynolds Number and End-Wall Effects on a Lid-Driven Cavity Flow, *Physics and Fluid A*, v. 1, p 208-2218, fev, 1989.

SCHLICHTING, H., Boundary-Layer Theory, McGraw-Hill Professional, 7ª Edição, 1979.

SCHNEIDER G. E. e ZEDAN, M., A Modified Strongly Implicit Procedure for the Numerical Solution of Field Problems, *Numerical Heat Transfer*, v. 14, p. 1-19, 1981.

SCHUMANN, U., Subgrid Scale Model for Finite Diference Simulation of Turbulent Flow in Plane Channels and Annuli, *Journal of Computational Physics*, v. 18, p. 376-404, 1975.

SHANKAR P. N. e DESHPANDE, M. D. Fluid Mechanics in the Driven Cavity, *Annual Review of Fluid Mechanics*, v. 32, p. 93-136, 2000.

SHEU, T. W. H. TSAI, S. F., Flow Topology in a Steady Three-Dimensional Lid-Driven Cavity, *Computers and Fluid*, v. 31, p. 911-934, 2002.

SILVEIRA NETO, A., Turbulência Aplicada nos Fluidos, *Apostila, Universidade Federal de Uberlândia*, 2000.

SILVEIRA NETO, A., GRAND, D. METAIS, O. e LESIEUR M., A Numerical Investigation of the Coherent Structures of Turbulence Behind a Backward-Facing Step, *Journal of Fluid Mechanics*, v. 256, p. 1-55, Out, 1998.

SMAGORINSKY J., General Circulation Experiments With the Primitive Equations: The Basic Experiment, *Monthly Weather Review*, v. 91, no. 3, p. 99-164, Mar, 1963.

SPODE, C., Modelagem Híbrida da Turbulência Aplicada a Escoamentos Transicionais e Turbulentos, *Dissertação, Universidade Federal de Uberlândia*, 2006.

STONE, H. L., Iterative Solution of Implicit Approximation of Multidimensional Partial Differential Equation, *SIAM Journal of Numerical Analysis*, v. 5, p. 530-558, 1968

WENER, H. e WENGLE, H., Large Eddy Simulation of Turbulent Flow Over and Around a Cube in a Plate Channel, *Turbulent Shear Flow*, ed. SCHUMANN, U., Springer, v. 8, p. 155-168, 1991.

WHITE, F. M., Viscous Fluid Flow, McGraw-Hill Professional, 3ª Edição, 2005.

ZANG, Y., STREET, R. L. e KOSEFF, J. R., A Dynamic Mixed Subgrid-Scale Model and Its Application to Turbulent Recirculating Flows, *Physics and Fluids*, v. 5, n. 12, p. 3186-3196, 1993.

APÊNDICE A

OBTENÇÃO DA EQUAÇÃO DE TRANSPORTE PARA ENERGIA CINÉTICA TURBULENTA

Neste Apêndice será mostrado o procedimento para a obtenção da energia cinética turbulenta da forma baseada nas equações de Navier-Stokes Filtradas. Seja um escoamento com campo de velocidade $\vec{u}$, com componentes de velocidade u_i , i variando de 1 a 3 correspondendo às direções x , y e z respectivamente e um campo de pressão p . Qualquer variável deste campo pode ser decomposta em uma parcela filtrada ($\bar{\phi}$) e uma parcela flutuante (ϕ'),

$$\phi = \bar{\phi} + \phi'. \quad (\text{A.1})$$

A componente filtrada é obtida pela aplicação deste filtro de tal forma que:

$$\bar{\phi}(\vec{x}_o) = \int \phi(\vec{x}) G(\vec{x} - \vec{x}_o) d\vec{x}. \quad (\text{A.2})$$

O tensor submalha global é definido como sendo a diferença entre o resultado do filtro sobre o produto das velocidades e o produto das velocidades filtradas,

$$\tau_{ij} = \overline{u_j u_i} - \bar{u}_j \bar{u}_i. \quad (\text{A.3})$$

Define-se energia cinética turbulenta como metade do traço do tensor de tensor submalha global (DAVISON, 1997),

$$k = \frac{1}{2} \tau_{ii} = \frac{1}{2} (\overline{u_i u_i} - \bar{u}_i \bar{u}_i). \quad (\text{A.4})$$

Tomando-se as equações de Navier-Stokes para um escoamento incompressível com propriedades constantes,

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial (u_j u_i)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + f_i. \quad (\text{A.5})$$

Esta é uma equação vetorial com três componentes. Multiplicando-se esta equação de forma escalar pelo vetor u_i , obtém-se:

$$u_i \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i \frac{\partial (u_j u_i)}{\partial x_j} = -\frac{u_i}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu u_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + u_i f_i. \quad (\text{A.6})$$

Observa-se que esta equação tem índices i que se repetem no mesmo termo indicando uma somatória de termos também sobre este índice.

Para manipularmos esta equação três propriedades matemática clássicas são utilizadas. A primeira esta relacionada a regra da cadeia. Que modifica o termo temporal,

$$u_i \frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_i u_i}{\partial t}. \quad (\text{A.7})$$

A segunda se refere a equação da continuidade,

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0, \quad (\text{A.8})$$

ela permite a seguinte manipulação:

$$u_j \frac{\partial \phi}{\partial x_j} = \frac{\partial (u_j \phi)}{\partial x_j}. \quad (\text{A.9})$$

Esta propriedade vale também para as velocidades filtradas $\bar{u}_j$ bem como para as flutuações u'_j . Desta forma o termo não linear pode ser manipulado da seguinte forma:

$$u_i \frac{\partial (u_j u_i)}{\partial x_j} = u_j u_i \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \frac{\partial (u_j u_i u_i)}{\partial x_j}. \quad (\text{A.10})$$

Da mesma forma manipula-se o termo de pressão,

$$\frac{u_i}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial (u_i p)}{\partial x_i}. \quad (\text{A.11})$$

Para manipulação do termo viscoso utiliza-se a terceira propriedade que é a derivada do produto de duas funções,

$$u_i \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = \frac{\nu}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial (u_i u_i)}{\partial x_j} \right) - \nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}. \quad (\text{A.12})$$

Substituindo-se os termos manipulados na equação A.6, obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial (u_i u_i)}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial (u_j u_i u_i)}{\partial x_j} = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial (u_i p)}{\partial x_i} + \frac{\nu}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial (u_i u_i)}{\partial x_j} \right) \\ & - \nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + u_i f_i \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Filtrando-se esta equação, obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial (\overline{u_i u_i})}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial (\overline{u_j u_i u_i})}{\partial x_j} = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial (\overline{u_i p})}{\partial x_i} + \frac{\nu}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial (\overline{u_i u_i})}{\partial x_j} \right) \\ & - \nu \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \overline{u_i f_i} \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Aparece na equação a derivada do termo $(\overline{u_j u_i u_i})$. Subtraindo-se um meio da derivada do termo $(\overline{u_j u_i u_i} - \overline{u_j} \overline{u_i} \overline{u_i})$ dos dois lados da equação obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial (\overline{u_i u_i})}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial (\overline{u_j u_i u_i})}{\partial x_j} = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial (\overline{u_i p})}{\partial x_i} + \frac{\nu}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial (\overline{u_i u_i})}{\partial x_j} \right) + \overline{u_i f_i} \\ & - \nu \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} - \frac{1}{2} \frac{\partial (\overline{u_j u_i u_i} - \overline{u_j} \overline{u_i} \overline{u_i})}{\partial x_j} \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Por outro lado, aplicando-se a filtragem diretamente às equações de Navier-Stokes (A.5), obtém-se:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u}_j \bar{u}_i)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) + \bar{f}_i. \quad (\text{A.17})$$

Verifica-se no resultados a presença do termo $(\bar{u}_j \bar{u}_i)$. Subtraindo-se dos dois lados da equação a derivada do tensor submalha global

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial (\bar{u}_i \bar{u}_j - \bar{u}_i \bar{u}_j)}{\partial x_j} \quad (\text{A.18})$$

obtém-se

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u}_j \bar{u}_i)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \bar{f}_i. \quad (\text{A.19})$$

Multiplicando este resultado pelo vetor $\bar{u}_i$.

$$\bar{u}_i \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial (\bar{u}_j \bar{u}_i)}{\partial x_j} = -\frac{\bar{u}_i}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \bar{u}_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) - \bar{u}_i \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \bar{u}_i \bar{f}_i. \quad (\text{A.20})$$

A manipulação desta equação segue aproximadamente o mesmo formato da manipulação da equação A.6. Portanto o termo temporal resulta:

$$\bar{u}_i \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{u}_i \bar{u}_i}{\partial t}, \quad (\text{A.21})$$

o termo não linear:

$$\bar{u}_i \frac{\partial (\bar{u}_j \bar{u}_i)}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \frac{\partial (\bar{u}_j \bar{u}_i \bar{u}_i)}{\partial x_j}, \quad (\text{A.22})$$

o termo de pressão:

$$\frac{\bar{u}_i}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\bar{u}_i \bar{p})}{\partial x_i} \quad (\text{A.23})$$

e o termo viscoso:

$$\bar{u}_i \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) = \frac{\nu}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial (\bar{u}_j \bar{u}_i)}{\partial x_j} \right) - \nu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}. \quad (\text{A.24})$$

Substituindo os termos manipulados na equação (A.20), obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial \overline{u_i u_i}}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial (\overline{u_j u_i u_i})}{\partial x_j} = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{u_i \bar{p}}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial (\overline{u_i u_i})}{\partial x_j} \right) + \overline{u_i \bar{f}_i} \\ & - \nu \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} - \overline{u_i} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \end{aligned} \quad (A.25)$$

Definindo-de duas variáveis auxiliares,

$$k' = \frac{(\overline{u_i u_i})}{2} \quad \text{e} \quad (A.26)$$

$$k'' = \frac{(\overline{u_i u_i})}{2}, \quad (A.27)$$

a energia cinética turbulenta é dada por:

$$k = k' - k'' \quad (A.28)$$

e as equações A.16 e A.20 são dadas por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial k'}{\partial t} + \frac{\partial (\overline{u_j k'})}{\partial x_j} = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial (\overline{u_i \bar{p}})}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial k'}{\partial x_j} \right) + \overline{u_i \bar{f}_i} \\ & - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\overline{u_j u_i u_i} - \overline{u_j} \overline{u_i u_i}}{2} \right) - \nu \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} \end{aligned} \quad \text{e} \quad (A.29)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial k''}{\partial t} + \frac{\partial (\overline{u_j k''})}{\partial x_j} = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{u_i \bar{p}}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial k''}{\partial x_j} \right) + \overline{u_i \bar{f}_i} \\ & - \overline{u_i} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} - \nu \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} \end{aligned} \quad (A.30)$$

respectivamente. Subtraindo-se a equação A.30 da equação A.29, obtém-se:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u}_j k)}{\partial x_j} = & -\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\bar{u}_i \bar{p} - \bar{u}_i \bar{p}}{\rho} \right) + \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial k}{\partial x_j} \right) + \bar{u}_i \bar{f}_i - \bar{u}_i \bar{f}_i \\
& + \bar{u}_i \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\bar{u}_j \bar{u}_i \bar{u}_i - \bar{u}_j \bar{u}_i \bar{u}_i}{2} \right) \\
& - \nu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right)
\end{aligned} \quad (A.31)$$

Os termos desta equação podem ser agrupados com o objetivo de facilitar sua análise

$$\begin{aligned}
\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u}_j k)}{\partial x_j} = & -\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\bar{u}_j \bar{p} - \bar{u}_j \bar{p}}{\rho} \right) + \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial k}{\partial x_j} \right) + (\bar{u}_i \bar{f}_i - \bar{u}_i \bar{f}_i) \\
& - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\bar{u}_j \bar{u}_i \bar{u}_i - \bar{u}_j \bar{u}_i \bar{u}_i - 2 \bar{u}_i \tau_{ij}}{2} \right) \\
& - \tau_{ij} \bar{S}_{ij} - \nu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right)
\end{aligned} \quad (A.32)$$

Verifica-se na manipulação desta equação a passagem do produto da velocidade filtrada pelo tensor submalha global para o interior da derivada, isso é feito utilizando a derivada do produto

$$\bar{u}_i \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial (\bar{u}_i \tau_{ij})}{\partial x_j} - \tau_{ij} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \quad (A.33)$$

o segundo termo do lado direito dá origem ao ao termo $\tau_{ij} \bar{S}_{ij}$. Isto acontece devido à simetria do tensor τ_{ij} .

$$-\tau_{ij} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = -\tau_{ji} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} = -\tau_{ij} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}, \quad (A.34)$$

somando-se os dois termos:

$$-2\tau_{ij}\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = -\tau_{ij}\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \tau_{ij}\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \quad (\text{A.35})$$

$$-2\tau_{ij}\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = -\tau_{ij}\left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}\right) = -\tau_{ij}(2\bar{S}_{ij}). \quad (\text{A.36})$$

Desta forma

$$-\tau_{ij}\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = -\tau_{ij}\bar{S}_{ij} \quad (\text{A.37})$$

Germano et al. (1991) introduz a notação com correlação generalizado, sendo

$$\Gamma(f, g) = \overline{f g} - \bar{f} \bar{g}, \quad (\text{A.38})$$

a correlação de segunda ordem e

$$\Gamma(f, g, h) = \overline{f g h} - \bar{f}(\overline{g h} - \bar{g} \bar{h}) - \bar{g}(\overline{h f} - \bar{h} \bar{f}) - \bar{h}(\overline{f g} - \bar{f} \bar{g}) - \bar{f} \bar{g} \bar{h}, \quad (\text{A.39})$$

a correlação de terceira ordem. Para velocidades o termo de terceira ordem toma a forma:

$$\begin{aligned} \Gamma(u_i, u_j, u_k) = & \overline{u_i u_j u_k} - \bar{u}_i(\overline{u_j u_k} - \bar{u}_j \bar{u}_k) - \bar{u}_j(\overline{u_k u_i} - \bar{u}_k \bar{u}_i) \\ & - \bar{u}_k(\overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j) - \bar{u}_i \bar{u}_j \bar{u}_k \end{aligned} \quad (\text{A.40})$$

$$\Gamma(u_i, u_j, u_k) = \overline{u_i u_j u_k} - \bar{u}_i \tau_{jk} - \bar{u}_j \tau_{ki} - \bar{u}_k \tau_{ij} - \bar{u}_i \bar{u}_j \bar{u}_k. \quad (\text{A.41})$$

Adicionando-se e subtraindo-se o termo $\bar{u}_j \bar{u}_i \bar{u}_i$, o termo com correlações triplas de velocidade pode é dado por:

$$\overline{u_j u_i u_i} - \bar{u}_j \overline{u_i u_i} - 2\bar{u}_i \tau_{ij} = \overline{u_j u_i u_i} - \bar{u}_j \overline{u_i u_i} + \bar{u}_j \bar{u}_i \bar{u}_i - 2\bar{u}_i \tau_{ij} - \bar{u}_j \bar{u}_i \bar{u}_i, \quad (\text{A.42})$$

$$\overline{u_j u_i u_i} - \bar{u}_j \overline{u_i u_i} - 2\bar{u}_i \tau_{ij} = \overline{u_j u_i u_i} - \bar{u}_j \tau_{ii} - 2\bar{u}_i \tau_{ij} - \bar{u}_j \bar{u}_i \bar{u}_i, \quad (\text{A.42})$$

$$\overline{u_j u_i u_i} - \bar{u}_j \overline{u_i u_i} - 2\bar{u}_i \tau_{ij} = \Gamma(u_j, u_i, u_i)_1. \quad (\text{A.43})$$

1 É interessante verificar que este termo reduz a média do produto das flutuações quando

Utilizando-se a notação de Germano na equação da energia cinética turbulenta toma a forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u}_j k)}{\partial x_j} = & \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial k}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\Gamma(u_i, p) \right) + \Gamma(u_i, f_i) \\ & - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\Gamma(u_j, u_i, u_i)}{2} \right) - \tau_{ij} \bar{S}_{ij} - \nu \Gamma \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.44})$$

Os termos do lado direito da equação correspondem à derivada temporal e ao transporte convectivo da energia cinética turbulenta respectivamente. O primeiro termo do lado direito da equação corresponde ao transporte difusivo molecular. Os três termos seguintes a difusão turbulenta de energia por flutuação de pressão, por flutuação de força de corpo e por flutuação de velocidade respectivamente. O quinto e o sexto termo correspondem, respectivamente, a produção e a dissipação viscosa de energia cinética turbulenta.

o filtro utilizado é uma média $\Gamma(u_j, u_i, u_i) = \overline{u_j^i u_i^i u_i^i}$.

APÊNDICE B

EQUACIONAMENTO DO MODELO DE SMAGORINSKY E DO MODELO DE GERMANO

Neste Apendice será detalhado o equacionamento dos modelos submalha de Smagorinsky e de Germano. Os dois modelos utilizam a hipótese de Boussinesq (BOUSSINESQ 1877) generalizada por Kolmogorov (1942),

$$\tau_{ij} = -2\nu_t \bar{S}_{ij} + \frac{2}{3} \delta_{ij} \tau_{ii} = -\nu_t \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} k. \quad (\text{B.1})$$

Do Modelo de Smagorinsky

Smagorinsky (1963) propôs uma equação para a viscosidade turbulenta que pode ser encontrada a partir da equação da energia cinética turbulenta,

$$\begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u}_j k)}{\partial x_j} = & +\nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial k}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\Gamma(u_i, p) \right) + \Gamma(u_i, f_i) \\ & - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\Gamma(u_j u_i u_i)}{2} \right) - \tau_{ij} \bar{S}_{ij} - \nu \Gamma \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \end{aligned} \quad \text{12.} \quad (\text{B.2})$$

Utilizando a hipótese de equilíbrio local (isotropia) das pequenas escalas, ou seja, que nestas escalas a produção é igual a dissipação de energia

1 Momento de segunda ordem: $\Gamma(f, g)$, ver Apêndice A.

2 Momento de terceira ordem: $\Gamma(f, g, h)$, ver Apêndice A.

cinética turbulenta,

$$\wp = -\varepsilon. \quad (\text{B.3})$$

O termo de produção é modelado utilizando a hipótese de Boussinesq,

$$\wp = -\tau_{ij} S_{ij} = \left(2 \nu_t \bar{S}_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \tau_{ij} \right) \bar{S}_{ij}. \quad (\text{B.4})$$

Verifica-se que o segundo termo do direito da equação é nulo pois sendo i igual a j o termo de derivada se torna a equação da continuidade. Portanto,

$$\wp = 2 \nu_t \bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij}. \quad (\text{B.5})$$

O termo de dissipação é modelado utilizando-se análise dimensional para as pequenas escalas. Sejam as escalas de comprimento λ , de tempo τ e de flutuação de velocidade u e c uma constante de proporcionalidade. As escalas de dissipação de energia cinética e viscosidade turbulenta são: $\varepsilon = c u^2 \lambda$ e $\nu_t = c u \lambda$. Portanto a dissipação pode ser modelada como:

$$\varepsilon = -\nu \Gamma \left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}, \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \right) = -c \frac{\nu_t^3}{l}. \quad (\text{B.6})$$

Da igualdade destes termos, obtém-se:

$$-2 \nu_t \bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij} = c \frac{\nu_t^3}{l^2}. \quad (\text{B.7})$$

Fazendo-se a constante de proporcionalidade igual a C_s^2 , obtém-se a forma final da equação para a viscosidade turbulenta,

$$\nu_t = (C_s \Delta)^2 \sqrt{2 \bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij}}. \quad (\text{B.8})$$

Sendo C_s a constante de Smagorinsky.

Do Modelo de Germano

Define-se um filtro de tamanho característico maior que o filtro

utilizado para as equações de Navier-Stokes filtradas (Seção 3.2), denotado por $(\widehat{})$,

$$\widehat{\phi}(\vec{x}_o) = \int \phi(\vec{x}_o) G(\vec{x} - \vec{x}_o) d\vec{x}. \quad (\text{B.9})$$

Aplicando-se este novo filtro a equação de Navier-Stokes filtrada (equação 3.10), obtém-se:

$$\frac{\partial \widehat{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\widehat{u_j u_i})}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \widehat{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial \widehat{u}_i}{\partial x_j} - \tau_{ij} \right) + \widehat{\phi_{ij}} + \widehat{f_i}. \quad (\text{B.10})$$

Observa-se o aparecimento do termo $\widehat{u_i u_j}$. Subtraindo-se o termo $\widehat{u_i u_j} - \widehat{u_i} \widehat{u_j}$ dos dois lados da equação obtém-se:

$$\frac{\partial \widehat{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\widehat{u_j u_i})}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \widehat{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial \widehat{u}_i}{\partial x_j} - T_{ij} \right) + \widehat{\phi_{ij}} + \widehat{f_i}. \quad (\text{B.11})$$

Aparece na equação o termo T_{ij} dado por:

$$T_{ij} = \widehat{u_i u_j} - \widehat{u_i} \widehat{u_j}. \quad (\text{B.12})$$

Este termo representa o tensor submalha relacionado ao filtro teste.

Considerando a parcela deste tensor que é resolvida,

$$L_{ij} = \widehat{u_i u_j} - \widehat{u_i} \widehat{u_j}. \quad (\text{B.13})$$

Esta parcela corresponde à contribuição para o tensor submalha, resultante do filtro teste, das escalas com comprimento intermediário entre o filtro da malha e o filtro teste.

Adicionado-se e subtraindo-se o termo $\widehat{u_i u_j}$ à equação B.13, obtém-se:

$$L_{ij} = \widehat{u_i u_j} - \widehat{u_i} \widehat{u_j} - \widehat{u_i u_j} + \widehat{u_i} \widehat{u_j}, \quad (\text{B.14})$$

então,

$$L_{ij} = T_{ij} - \widehat{\tau}_{ij}. \quad (\text{B.15})$$

O valor de L_{ij} pode ser calculado explicitamente, pois os valores presentes na equação são todos conhecidos. Os Tensores T_{ij} e τ_{ij} podem ser modelados utilizando, por exemplo, o modelo de Smagorinsky, no entanto não há qualquer restrição com relação a outro modelo (Germano et al., 1991). Desta forma

$$\tau_{ij} = \nu_t \overline{S}_{ij} = 2(C_s \Delta)^2 |\overline{S}| \overline{S}_{ij} \quad (\text{B.16})$$

$$T_{ij} = \nu_t \widehat{\overline{S}}_{ij} = 2(C_s \widehat{\Delta})^2 |\widehat{\overline{S}}| \widehat{\overline{S}}_{ij}. \quad (\text{B.17})$$

Sendo Δ o tamanho característico do filtro da solução e $\widehat{\Delta}$ o tamanho característico do filtro teste.

Substituído-se as equações B.15 e B.16 na equação B.15,

$$L_{ij} = (C_s \widehat{\Delta})^2 |\widehat{\overline{S}}| \widehat{\overline{S}}_{ij} - (C_s \Delta)^2 |\overline{S}| \overline{S}_{ij}. \quad (\text{B.18})$$

Multiplicando-se esta equação por $\overline{S}_{ij}$,

$$L_{ij} \overline{S}_{ij} = (C_s \widehat{\Delta})^2 |\widehat{\overline{S}}| \widehat{\overline{S}}_{ij} \overline{S}_{ij} - (C_s \Delta)^2 |\overline{S}| \overline{S}_{ij} \overline{S}_{ij}. \quad (\text{B.19})$$

Isolando-se a constante de Smagorinsky C_s ,

$$C_s = \left[\frac{L_{ij} \overline{S}_{ij}}{(\widehat{\Delta})^2 |\widehat{\overline{S}}| \widehat{\overline{S}}_{ij} \overline{S}_{ij} - (\Delta)^2 |\overline{S}| \overline{S}_{ij} \overline{S}_{ij}} \right]^{1/2}, \quad (\text{B.20})$$

Obtém-se a formulação de Germano et al. (1991) para a constante de Smagorinsky.

No entanto, esta formulação pode causar uma indeterminação na constante se o termo inferior for nulo. Devido a isto Lilly (1992) sugere uma modificação no cálculo da constante.

Partindo da equação do tensor L_{ij} (equação B.18),

$$L_{ij} = \nu_t \widehat{\overline{S}}_{ij} = 2(C_s)^2 M_{ij}. \quad (\text{B.21})$$

Sendo

$$M_{ij} = \widehat{\Delta^2} |\widehat{S}| \widehat{S}_{ij} - \Delta^2 |\widehat{S}| \widehat{S}_{ij}. \quad (\text{B.22})$$

A equação (B.21) representa um conjunto de 6 equações, uma vez estas são independentes, valores diferentes podem ser encontrados. A sugestão é que o cálculo da constante seja feito pela minimização do erro da equação através do mínimo quadrado. Desta forma:

$$E = \left(L_{ij} - 2 C_s^2 M_{ij} \right)^2. \quad (\text{B.23})$$

Derivando o erro em relação a constante C_s^2 obtém-se:

$$\frac{\partial E}{\partial C_s^2} = -4 \left(L_{ij} - 2 C_s^2 M_{ij} \right) M_{ij}. \quad (\text{B.24})$$

Igualando esta equação a 0, obtém-se uma expressão para a constante de Smagorinsky,

$$C_s = \left[\frac{L_{ij} M_{ij}}{2 M_{ij} M_{ij}} \right]^{1/2}. \quad (\text{B.25})$$

A derivada segunda do erro em relação a C_s^2 dada por:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial (C_s^2)^2} = 8 M_{ij} M_{ij}, \quad (\text{B.26})$$

este valor é positivo, mostrando que o erro é de fato minimizado.

APÊNDICE C

IMPLEMENTAÇÃO DO CRITÉRIO Q

Desenvolvimento do equacionamento do critério Q utilizado para visualização de estruturas nos escoamento. Definido por Jeong e Hussain (1995) como a norma euclidiana nos locais em que a norma do tensor vorticidade (Ω) é maior que a do tensor deformação (S),

$$Q = \frac{1}{2} (|\Omega|^2 - |S|^2) > 0. \quad (C.1)$$

Sendo o tensor vorticidade e o tensor deformação iguais a

$$\Omega = \frac{1}{2} (\nabla \vec{v} - \nabla \vec{v}^T) \quad \text{e} \quad (C.2)$$

$$S = \frac{1}{2} (\nabla \vec{v} + \nabla \vec{v}^T), \quad (C.3)$$

respectivamente.

Para desenvolvermos a equação para Q observemos primeiro o tensor $\nabla \vec{v}$:

$$\nabla \vec{v} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix} \quad (C.4)$$

e o seu transposto:

$$\nabla \vec{v}^T = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix}. \quad (\text{C.5})$$

Substituindo estes tensores na equação C.2 para a obtenção da norma do tensor vorticidade obtém-se:

$$\Omega = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix}, \quad (\text{C.6})$$

$$\Omega = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ -\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) & 0 & \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ -\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) & -\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) & 0 \end{vmatrix}. \quad (\text{C.7})$$

Este tensor é um tensor antisimétrico e sua norma é igual ao módulo do vetor vorticidade. O quadrado de sua norma é dado por.

$$|\Omega|^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2. \quad (\text{C.8})$$

Para a obtenção da norma do tensor deformação substitui-se na equação C.3 os tensores $\nabla \vec{v}$ (C.4) e $\nabla \vec{v}^T$ (C.5), obtém-se:

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix}, \quad (C.9)$$

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & 2 \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} & 2 \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix}. \quad (C.10)$$

Este é um tensor simétrico e o quadrado de sua norma é dada por:

$$|S|^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2 \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right). \quad (C.11)$$

Substituindo o quadrado das normas do tensor vorticidade (C.8) e do tensor deformação (C.11) na equação de Q (C.1), obtém-se:

$$Q = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right) - \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right) - \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right). \quad (C.12)$$

Desenvolvendo esta equação obtém-se uma equação final para Q ,

$$Q = -2 \left(\left(\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \left(\frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \left(\frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right) - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2.$$

Esta equação pode ser escrita na forma tensorial conforme descrita no capítulo 3

$$Q = - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}. \quad (\text{C.13})$$

Esta equação tem a forma mais compacta para implementação computacional.

APÊNDICE D

DADOS DOS PERFIS DE VELOCIDADE E RMS

Tabela D.1: Perfil de velocidade na direção x em $z = 0,5$ e $x = 0,5$.

y	$Re = 10.000$	$Re = 25.000$	$Re = 50.000$	$Re = 100.000$
5.26300E-003	5.13998E-004	1.21999E-004	7.86991E-004	4.11976E-004
3.68420E-002	4.69595E-003	-2.47402E-003	6.19715E-005	-2.08107E-003
7.89470E-002	3.45990E-003	-7.52505E-003	-2.53707E-003	-6.70016E-003
1.21053E-001	-2.48013E-003	-9.82407E-003	-2.81709E-003	-1.02642E-002
1.63158E-001	-8.42715E-003	-1.09631E-002	-2.89709E-003	-1.13892E-002
2.05263E-001	-1.23642E-002	-1.11671E-002	-2.39214E-003	-1.14331E-002
2.47368E-001	-1.36172E-002	-1.17631E-002	-1.50114E-003	-1.04312E-002
2.89474E-001	-1.23112E-002	-1.21401E-002	-5.32144E-004	-8.06517E-003
3.31579E-001	-9.59520E-003	-1.07411E-002	2.95855E-004	-5.23719E-003
3.73684E-001	-7.53519E-003	-8.36915E-003	1.22385E-003	-2.78921E-003
4.15789E-001	-5.49519E-003	-6.37214E-003	1.87386E-003	-3.92199E-004
4.57895E-001	-3.60916E-003	-4.26216E-003	3.18985E-003	1.97480E-003
5.00000E-001	-1.56115E-003	-2.39715E-003	4.29386E-003	3.85276E-003
5.42105E-001	7.49846E-004	-7.49151E-004	5.04585E-003	5.48679E-003
5.84211E-001	2.55286E-003	8.41855E-004	6.15484E-003	8.10376E-003
6.26316E-001	3.74586E-003	2.40487E-003	6.78684E-003	9.79474E-003
6.68421E-001	4.19787E-003	3.43689E-003	6.81484E-003	1.00668E-002
7.10526E-001	4.08987E-003	4.24490E-003	6.35088E-003	1.09418E-002
7.52632E-001	4.07688E-003	4.99390E-003	6.13790E-003	1.15598E-002
7.94737E-001	4.41989E-003	5.63591E-003	5.54290E-003	1.16589E-002
8.36842E-001	4.94791E-003	5.99493E-003	5.33590E-003	1.19199E-002
8.78947E-001	4.83193E-003	5.74294E-003	4.77394E-003	1.04479E-002
9.21053E-001	-3.39065E-004	2.86298E-003	2.16198E-003	6.32889E-003
9.63158E-001	-1.41921E-002	-1.06850E-002	-5.66109E-003	-1.09807E-003
9.94737E-001	-1.73701E-003	-3.39194E-003	-2.21907E-003	-4.60056E-004

Tabela D.2: Perfil de RMS_u em $z = 0,5$ e $x = 0,5$.

y	Re = 10.000	Re = 25.000	Re = 50.000	Re = 100.000
5.26300E-003	1.00000E-006	2.00000E-006	1.10001E-005	4.11976E-004
3.68420E-002	2.34001E-004	1.53001E-004	2.59002E-004	-2.08107E-003
7.89470E-002	8.53002E-004	3.25001E-004	4.32002E-004	-6.70016E-003
1.21053E-001	9.32998E-004	3.41000E-004	4.09002E-004	-1.02642E-002
1.63158E-001	7.27999E-004	3.20000E-004	4.09002E-004	-1.13892E-002
2.05263E-001	5.29001E-004	2.79001E-004	4.46001E-004	-1.14331E-002
2.47368E-001	4.13001E-004	2.36001E-004	3.87002E-004	-1.04312E-002
2.89474E-001	3.74002E-004	2.04000E-004	3.26001E-004	-8.06517E-003
3.31579E-001	3.38002E-004	1.51001E-004	2.55000E-004	-5.23719E-003
3.73684E-001	2.70002E-004	1.06001E-004	2.17000E-004	-2.78921E-003
4.15789E-001	2.06002E-004	7.90002E-005	1.77000E-004	-3.92199E-004
4.57895E-001	1.50001E-004	5.80002E-005	1.50001E-004	1.97480E-003
5.00000E-001	1.22001E-004	4.30001E-005	1.57999E-004	3.85276E-003
5.42105E-001	1.04001E-004	3.29999E-005	1.65999E-004	5.48679E-003
5.84211E-001	8.10003E-005	2.50000E-005	1.48000E-004	8.10376E-003
6.26316E-001	5.00003E-005	2.49999E-005	1.47001E-004	9.79474E-003
6.68421E-001	4.10003E-005	2.99999E-005	1.47000E-004	1.00668E-002
7.10526E-001	4.20001E-005	3.39999E-005	1.52000E-004	1.09418E-002
7.52632E-001	5.00001E-005	3.59999E-005	1.39000E-004	1.15598E-002
7.94737E-001	5.79999E-005	3.89999E-005	1.45000E-004	1.16589E-002
8.36842E-001	5.49998E-005	3.90000E-005	1.58002E-004	1.19199E-002
8.78947E-001	4.49997E-005	3.69999E-005	2.01003E-004	1.04479E-002
9.21053E-001	1.04000E-004	5.99992E-005	4.12996E-004	6.32889E-003
9.63158E-001	7.29995E-005	7.00001E-005	9.51005E-004	-1.09807E-003
9.94737E-001	0.00000E+000	3.00000E-006	2.45000E-004	-4.60056E-004

Tabela D.3: Perfil de velocidade na direção y em $z = 0,5$ e $y = 0,5$.

x	Re = 10.000	Re = 25.000	Re = 50.000	Re = 100.000
5.26300E-003	1.25500E-003	1.04399E-003	2.43299E-003	2.03500E-003
3.68420E-002	1.57271E-002	1.21080E-002	1.21160E-002	1.36760E-002
7.89470E-002	2.22261E-002	1.51551E-002	1.33671E-002	2.17350E-002
1.21053E-001	2.54231E-002	1.71271E-002	1.33241E-002	2.36440E-002
1.63158E-001	2.73880E-002	1.92831E-002	1.32081E-002	2.31600E-002
2.05263E-001	2.71961E-002	1.90981E-002	1.23081E-002	2.29220E-002
2.47368E-001	2.49621E-002	1.78581E-002	1.22391E-002	2.11971E-002
2.89474E-001	2.07921E-002	1.70811E-002	1.16171E-002	1.98191E-002
3.31579E-001	1.67212E-002	1.58871E-002	1.10931E-002	1.86752E-002
3.73684E-001	1.38882E-002	1.44461E-002	1.11461E-002	1.95071E-002
4.15789E-001	1.12552E-002	1.27641E-002	1.16001E-002	2.03871E-002
4.57895E-001	9.49516E-003	1.08371E-002	1.15731E-002	2.01001E-002
5.00000E-001	8.26817E-003	8.71110E-003	1.12761E-002	1.85691E-002
5.42105E-001	7.74618E-003	6.74910E-003	1.02881E-002	1.57421E-002
5.84211E-001	7.68016E-003	5.51909E-003	9.74411E-003	1.24001E-002
6.26316E-001	7.14115E-003	4.26010E-003	9.59310E-003	8.31712E-003
6.68421E-001	6.40815E-003	2.86410E-003	8.76108E-003	3.86715E-003
7.10526E-001	5.98814E-003	1.63310E-003	7.46009E-003	9.51456E-005
7.52632E-001	5.67013E-003	6.50100E-004	6.90111E-003	-2.83490E-003
7.94737E-001	5.34712E-003	9.10629E-006	6.27409E-003	-5.29689E-003
8.36842E-001	5.66510E-003	-3.59001E-005	5.67308E-003	-7.23990E-003
8.78947E-001	6.83608E-003	1.51506E-003	5.80605E-003	-6.62300E-003
9.21053E-001	8.02800E-003	3.82099E-003	5.86801E-003	-3.01598E-003
9.63158E-001	8.26300E-003	6.31299E-003	6.90802E-003	4.56297E-003
9.94737E-001	2.25100E-003	6.83600E-003	1.13810E-002	1.49320E-002

Tabela D.4: Perfil de RMS_v em $z = 0,5$ e $y = 0,5$.

x	Re = 10.000	Re = 25.000	Re = 50.000	Re = 100.000
5.26300E-003	2.00000E-006	5.99990E-006	2.89996E-005	6.39997E-005
3.68420E-002	3.25997E-004	2.42999E-004	3.05998E-004	4.47994E-004
7.89470E-002	1.52400E-003	8.10997E-004	6.71998E-004	9.93989E-004
1.21053E-001	2.10500E-003	9.55997E-004	7.40999E-004	1.11399E-003
1.63158E-001	1.99299E-003	8.72001E-004	7.26001E-004	9.94997E-004
2.05263E-001	1.81999E-003	7.04004E-004	5.83001E-004	8.06000E-004
2.47368E-001	1.67999E-003	5.17001E-004	4.32998E-004	6.25996E-004
2.89474E-001	1.34299E-003	3.94001E-004	3.09000E-004	4.48001E-004
3.31579E-001	1.00900E-003	2.62003E-004	2.37001E-004	3.00002E-004
3.73684E-001	7.60998E-004	1.77001E-004	1.82001E-004	2.26998E-004
4.15789E-001	5.19999E-004	1.28001E-004	1.52001E-004	1.76002E-004
4.57895E-001	3.55000E-004	8.80006E-005	1.44999E-004	1.56001E-004
5.00000E-001	2.23001E-004	7.10001E-005	1.28000E-004	1.65000E-004
5.42105E-001	1.64001E-004	7.29999E-005	1.34000E-004	2.03998E-004
5.84211E-001	1.41000E-004	7.30000E-005	1.46000E-004	2.14000E-004
6.26316E-001	1.24000E-004	7.60000E-005	1.35000E-004	2.45000E-004
6.68421E-001	1.16000E-004	8.40002E-005	1.32000E-004	2.66999E-004
7.10526E-001	1.21000E-004	9.70004E-005	1.31001E-004	3.08999E-004
7.52632E-001	1.38001E-004	1.15000E-004	1.35001E-004	3.27002E-004
7.94737E-001	1.56001E-004	1.40000E-004	1.60001E-004	3.73001E-004
8.36842E-001	1.71001E-004	1.65000E-004	1.81000E-004	3.71000E-004
8.78947E-001	1.70001E-004	1.46000E-004	1.88000E-004	3.39002E-004
9.21053E-001	1.29000E-004	9.50004E-005	1.52000E-004	2.68001E-004
9.63158E-001	3.40003E-005	2.80000E-005	6.30000E-005	1.53000E-004
9.94737E-001	1.05474E-020	1.05474E-020	3.00000E-006	2.70000E-005