

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E
MATEMÁTICA

MÁRCIO WILLIAN DOS REIS FILHO

JOGO DOS ASTRÁGALOS:
A PROBABILIDADE NO SEXTO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

UBERLÂNDIA - MG

2025

MÁRCIO WILLIAN DOS REIS FILHO

**JOGO DOS ASTRÁGALOS:
A PROBABILIDADE NO SEXTO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

Linha de Pesquisa: Ensino e Aprendizagem em Ciências e Matemática

Orientadora: Profa. Dra. Fabiana Fiorezi de Marco

UBERLÂNDIA - MG

2025

FICHA CATALOGRÁFICA

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFU, MG, Brasil.

R375j
2025

Reis Filho, Márcio Willian dos, 1997-
Jogo dos astrágalos [recurso eletrônico]: a probabilidade no sexto ano do ensino fundamental / Márcio Willian dos Reis Filho. - 2025.

Orientadora: Fabiana Fiorezi de Marco.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia, Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática.
Modo de acesso: Internet.
Disponível em: <http://doi.org/10.14393/ufu.di.2025.5589>
Inclui bibliografia.
Inclui ilustrações.

1. Ciência - Estudo e ensino. 2. Jogos educativos. 3. Ciências (Ensino fundamental). 4. Práticas educativas. I. Marco, Fabiana Fiorezi de, 1974-, (Orient.). II. Universidade Federal de Uberlândia. Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática. III. Título.

CDU: 50:37

Rejâne Maria da Silva
Bibliotecária-Documentalista – CRB6/1925

Bloco de Assinatura 116147 - Sequencial 1



Selecionar para Assinatura



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática
Av. João Naves de Ávila, nº 2121, Bloco 1A, Sala 207 - Bairro Santa Mônica, Uberlândia-MG, CEP 38400-902
Telefone: (34) 3230-9419 - www.pggeom.ufu.br - secretaria@pggeom.ufu.br



ATA DE DEFESA - PÓS-GRADUAÇÃO

Programa de Pós-Graduação em:	Ensino de Ciências e Matemática				
Defesa de:	Dissertação de Mestrado Profissional / Produto Educacional - PPGECEM				
Data:	25/02/2025	Hora de início:	14:00	Hora de encerramento:	16:00
Matrícula do Discente:	12212ECM019				
Nome do Discente:	Márcio Willian dos Reis Filho				
Título do Trabalho:	Jogo dos Astrágalos: a probabilidade no sexto ano do ensino fundamental				
Área de concentração:	Ensino de Ciências e Matemática				
Linha de pesquisa:	Ensino e Aprendizagem em Ciências e Matemática				
Projeto de Pesquisa de vinculação:	Atividade pedagógica na formação de professores que ensinam matemática a partir de parcerias entre instituições de ensino superior e escolas de educação básica em diferentes regiões brasileiras				

Reuniu-se por meio da videoconferência, a Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática, assim composta: Profa. Dra. Fabiana Fiorezi de Marco Matos (IME/UFU) - orientadora; Profa. Dra. Ana Cláudia Molina Zaqueu Xavier (IME/UFU) e, Profa. Dra. Flávia Dias de Souza (UTFPR). Iniciando os trabalhos a presidente da mesa apresentou a Comissão Examinadora e o candidato agradeceu a presença do público, e concedeu ao discente a palavra para a exposição do seu trabalho. A duração da apresentação do discente e o tempo de arguição e resposta foram conforme as normas do Programa. A seguir, a presidente concedeu a palavra, pela ordem sucessivamente, aos examinadores, que passaram a arguir o candidato. Ultimada a arguição, que se desenvolveu dentro dos termos regimentais, a Banca, em sessão secreta, atribuiu o resultado final, considerando o candidato:

Aprovado

Esta defesa faz parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre.

O componente diploma será expedido após cumprimento dos demais requisitos, conforme as normas do Programa, a legislação pertinente e a regulamentação interna da UFU.

Nada mais havendo a tratar foram encerrados os trabalhos. Foi lavrada a presente ata que após lida e achada conforme foi assinada pela Banca Examinadora.



Documento assinado eletronicamente por **Fabiana Fiorezi de Marco Matos, Professor(a) do Magistério Superior**, em 25/02/2025, às 16:12, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Ana Cláudia Molina Zaqueu Xavier, Professor(a) do Magistério Superior**, em 25/02/2025, às 16:55, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **FLAVIA DIAS DE SOUZA, Usuário Externo**, em 25/02/2025, às 22:12, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **6112476** e o código CRC **B917429C**.

Referência: Processo nº 23117.010581/2025-42

SEI nº 6112476

Criado por [juliana.costa](#), versão 12 por [fabiana.marco](#) em 25/02/2025 16:12:17.

MÁRCIO WILLIAN DOS REIS FILHO

**JOGO DOS ASTRÁGALOS:
A PROBABILIDADE NO SEXTO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

Linha de Pesquisa: Ensino e Aprendizagem em Ciências e Matemática

Uberlândia, 25 de fevereiro de 2025.

Banca Examinadora:

Profa. Dra. Fabiana Fiorezi de Marco (Orientadora)
Universidade Federal de Uberlândia – UFU/MG

Profa. Dra. Ana Cláudia Molina Zaqueu Xavier
Universidade Federal de Uberlândia – UFU/MG

Profa. Dra. Flávia Dias de Souza
Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR

Aos que foram farol em minha jornada
acadêmica até aqui, dedico estas páginas.

Além de parte do meu caminho,
também são parte de mim.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, expresso minha gratidão à minha família pelo apoio incondicional e pelo incentivo constante ao longo de minha vida acadêmica. À professora Dra. Fabiana Fiorezi de Marco, sou imensamente grato pela orientação durante o processo do mestrado, e por seu impacto positivo em minha trajetória na Educação Matemática desde os tempos de graduação. Às professoras Dra. Ana Cláudia Molina Zaqueu Xavier e Dra. Flávia Dias de Souza, agradeço sinceramente por dedicarem seu tempo e esforço para comporem a banca e contribuírem para o desenvolvimento deste trabalho.

Também agradeço aos estimados colegas do Grupo de Estudos e Pesquisa em Ensino de Matemática e Atividade Pedagógica (GEPEMAPe), cujas leituras e discussões foram fundamentais para o aprimoramento deste trabalho e de mim, como professor e sujeito. Aos colóquios do Grupo de Estudos e Pesquisas sobre a Atividade Pedagógica (GEPAPe), essenciais para me colocar em movimento a partir do coletivo e entrar em atividade. À Universidade Federal de Uberlândia (UFU) e todos os seus dedicados servidores, expresso minha gratidão pelo espaço de aprendizado e crescimento que proporcionaram, além da oferta de uma educação gratuita e de qualidade. Ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática (PPGECM) e seus respeitáveis membros e professores, agradeço por oferecerem um curso de pós-graduação de excelência.

Não poderia deixar de mencionar os amigos do mestrado, que compartilharam comigo os desafios e os bons frutos dessa jornada. Aos amigos de longa data, que impulsionam minha vida com discussões construtivas e noites de jogos, agradeço por tornarem cada momento mais leve e memorável. E mesmo àqueles que, por circunstâncias externas, não puderam estar tão presentes nesta etapa de minha vida e aqui não estão nomeados, os guardo um lugar especial.

Por fim, um agradecimento especial a você, caro leitor, por dedicar seu tempo e interesse em conhecer este trabalho.

Ninguém caminha sozinho.

Somos tentados a supor que o lapso entre a invenção do astrágalo e a invenção das leis das probabilidades não passou de um acaso histórico.

(Bernstein, 1997, p. 18)

RESUMO

O presente estudo, desenvolvido no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, investiga o uso do Jogo dos Astrágalos, organizado sob a perspectiva da Atividade Orientadora de Ensino (AOE), como recurso pedagógico no ensino de probabilidade para estudantes do sexto ano do Ensino Fundamental. Para tanto, foram desenvolvidas ações como criar possibilidades para o ensino de probabilidade por meio do jogo; investigar como aspectos históricos, manipulação de materiais concretos e problemas desencadeadores podem potencializar a apropriação de conceitos; e, desenvolver um Produto Educacional acessível a professores. O estudo adota como referenciais teóricos a Teoria Histórico-Cultural de Vygotsky e os pressupostos da Atividade Orientadora de Ensino de Moura. A metodologia envolveu a adaptação do jogo para o contexto educacional e a realização de propostas de ensino em sala de aula, com observações diretas, registros dos estudantes, fotografias, vídeos e diário de campo do pesquisador. A análise do material empírico foi baseada em Cenas e Episódios, conforme a abordagem de Moura, para identificar indícios de apropriação conceitual sobre conceitos de probabilidade pelos estudantes. Os resultados indicam que o Jogo dos Astrágalos, ao ser organizado de modo intencional, contribuiu para ampliar a apropriação de conceitos de probabilidade, especialmente ao introduzir a noção de espaços amostrais não-equiprováveis. Como Produto Educacional, foi desenvolvido o site astragalos.com, destinado a divulgar e expandir a proposta.

Palavras-chave: Jogo; Ensino Fundamental; Educação Matemática; Situação Desencadeadora de Aprendizagem; Teoria Histórico-Cultural; Atividade Orientadora de Ensino.

ABSTRACT

This study, developed within the Graduate Program in Science and Mathematics Teaching at the Federal University of Uberlândia, investigates the use of the Astragali Game, organized from the perspective of the Teaching-Guiding Activity (AOE), as a pedagogical resource for teaching probability to sixth-grade Elementary Education students. To this end, actions were undertaken such as creating possibilities for teaching probability through the game; investigating how historical aspects, manipulation of concrete materials, and triggering problems can enhance the appropriation of concepts; and developing an Educational Product accessible to teachers. The study adopts as theoretical references Vygotsky's Historical-Cultural Theory and the assumptions of Moura's Teaching-Guiding Activity. The methodology involved adapting the game to the educational context and implementing teaching proposals in the classroom, with direct observations, student records, photographs, videos, and the researcher's field journal. The analysis of the empirical material was based on Scenes and Episodes, following Moura's approach, to identify signs of conceptual appropriation of probability concepts by the students. The results indicate that the Astragali Game, when intentionally organized, contributed to broadening the appropriation of probability concepts, especially by introducing the notion of non-equiprobable sample spaces. As an Educational Product, the website astragalos.com was developed to disseminate and expand the proposal.

Keywords: Game; Elementary Education; Mathematics Education; Learning-Triggering Situation; Historical-Cultural Theory; Teaching-Guiding Activity.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Apostila 2 - "Métodos de Contagem e Probabilidade"	14
Figura 2: Relação de continência entre os termos selecionados.....	19
Figura 3: Pesquisa pelo termo “astrágalo” na BDTD.....	21
Figura 4: Os oito possíveis trigramas	25
Figura 5: Cerâmica do ano 540 a.C. ilustrando Aquiles e Ajax jogando dados.....	30
Figura 6: O osso astrágalo de um veado.....	32
Figura 7: Representação esquemática do esqueleto do tarso nos mamíferos domésticos	33
Figura 8: Esqueleto de tarso bovino	33
Figura 9: The Witcher, episódio “O Começo do Fim”	35
Figura 10: Lados do astrágalo correspondentes a 1, 3, 4 e 6, respectivamente.....	36
Figura 11 - Distribuição dos resultados na soma do lançamento de dois dados	41
Figura 12 - Simulação de 200 lançamentos de uma moeda	42
Figura 13: AOE: relação entre atividade de ensino e atividade de aprendizagem	52
Figura 14: Atividade Orientadora de Ensino e suas ações	55
Figura 15: Versões dos astrágalos feitas em 2018 e 2020, respectivamente.....	65
Figura 16: Versão dos astrágalos feita em 2021	66
Figura 17: Impressão 3D do astrágalo, com suporte e preenchimento.....	69
Figura 18: Versão dos astrágalos feita em 2023, em cores e enumerados	69
Figura 19: QR code – Jogo dos Astrágalos	70
Figura 20: Página inicial do site	71
Figura 21: Dados regulares de 4, 6, 8, 10, 12 e 20 lados.....	72
Figura 22: Parte da folha com registro de lançamentos.....	76
Figura 23: Registros de respostas para a pergunta “O que é Probabilidade?”	84
Figura 24: Registros de respostas para a pergunta “Quais objetos podem ser utilizados para o cálculo de probabilidades?”.....	86
Figura 25: Registros de respostas para a pergunta “Como se expressa a Probabilidade de algo acontecer? Consegue citar exemplos? Como expressar em forma de fração, decimal ou porcentagem?”	89
Figura 26: Registros de respostas para a pergunta “Qual é o valor máximo e o valor mínimo que podemos obter ao calcular uma probabilidade? Consegue citar exemplos?”	90
Figura 27: Panfletos coloridos na sala	94
Figura 28: Estudante explorando os astrágalos	98

Figura 29: Registros iniciais do lançamento dos astrágalos enumerados.....	106
Figura 30: Alteração na regra "O Cão" proposta por Arthur e Marvin	113
Figura 31: Contagem dos resultados no lançamento dos astrágalos enumerados	116
Figura 32: Registro do cálculo da probabilidade de cada lado do astrágalo - Flora	119
Figura 33: Registro do cálculo da probabilidade de cada lado do astrágalo - Zara.....	120
Figura 34: Registro do cálculo da probabilidade de cada lado do astrágalo - Taís	122
Figura 35: Registro do cálculo da probabilidade de cada lado do astrágalo - Arthur	125
Figura 36: Registro do cálculo da probabilidade de cada lado do astrágalo - Marvin	127
Figura 37: Roda de conversa sobre espaço não-equiprovável.....	131
Figura 38: Dados regulares com diferentes quantidades de lados.....	134
Figura 39: Considerações dos estudantes após a realização da proposta	139

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Quantidade de resultados por busca no portal eduCAPES.....	20
Quadro 2 – Probabilidade no lançamento de 4 astrágalos.....	37
Quadro 3 – Principais lançamentos pontuáveis no Jogo dos Astrágalos.....	38
Quadro 4 – Possíveis somas no lançamento de dois dados	41
Quadro 5 – Probabilidade no 6º ano do Ensino Fundamental	58
Quadro 6 – Unidade que aborda Probabilidade.....	58
Quadro 7 – Primeira versão do registro de lançamentos, 2018	64
Quadro 8 – Definições de conceitos relacionados à Probabilidade.....	73
Quadro 9 – Jogadas na versão adaptada do Jogo dos Astrágalos.....	78
Quadro 10 - Organização da proposta em Episódios e Cenas	81
Quadro 11 – Valores gerais para cada lado do astrágalo.....	129

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AOE	Atividade Orientadora de Ensino
BDTD	Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
DCN	Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
GEPAPe	Grupo de Estudos e Pesquisas sobre a Atividade Pedagógica
GEPEMAPe	Grupo de Estudos e Pesquisa em Ensino de Matemática e Atividade Pedagógica
MEM	Metodologias do Ensino de Matemática
MIT	Instituto Tecnológico de Massachusetts
OBMEP	Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas
PIC	Programa de Iniciação Científica Jr
PIBID	Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência
PNE	Plano Nacional de Educação
PPGECM	Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática
RPG	Role Playing Game
SDA	Situação Desencadeadora de Aprendizagem
TCC	Trabalho de Conclusão de Curso
TCL	Teorema Central do Limite
THC	Teoria Histórico-Cultural
UFU	Universidade Federal de Uberlândia

SUMÁRIO

QUAL A CHANCE DE CHEGAR ATÉ AQUI?	13
INTRODUÇÃO	18
1. REFLEXÕES SOBRE JOGO E PROBABILIDADE	24
1.1 Uma interpretação do acaso.....	24
1.2 Alguns entendimentos sobre jogo	26
1.3 Probabilidade: dos tempos antigos ao Renascimento.....	29
1.4 Um breve histórico sobre o Jogo dos Astrágalos	32
1.5 Desenvolvimento da Teoria da Probabilidade	39
1.6 A probabilidade na Contemporaneidade	43
2. JOGO E PROBABILIDADE NO CONTEXTO EDUCACIONAL	46
2.1 Perspectivas de jogo no contexto educacional.....	46
2.2 Uma aproximação com o jogo pela Atividade Orientadora de Ensino.....	50
2.3 Jogo e Probabilidade na BNCC	56
3. O CAMINHO METODOLÓGICO: DO OSSO AO JOGO	60
3.1 Primeiros passos.....	61
3.2 Processo de adaptação do Jogo dos Astrágalos.....	63
3.3 Produto Educacional - astragalos.com.....	70
3.4 Proposta para o 6º ano do Ensino Fundamental.....	71
3.5 O processo de análise	80
4. ANÁLISE DO JOGO DOS ASTRÁGALOS COMO UM POTENCIAL REFERENTE PARA UMA SITUAÇÃO DESENCADEADORA DE APRENDIZAGEM	83
4.1 Episódio I: Noções de Probabilidade	83
4.1.1 <i>Cena 1: Concepções iniciais dos estudantes sobre Probabilidade.....</i>	<i>84</i>
4.1.2 <i>Cena 2: As experiências dos anos escolares anteriores</i>	<i>88</i>
4.2 Episódio II: O Jogo dos Astrágalos	95
4.2.1 <i>Cena 1: Interação com o artefato histórico</i>	<i>96</i>
4.2.2 <i>Cena 2: A revelação do espaço não-equiprovável.....</i>	<i>105</i>
4.3 Episódio III: Espaços de Probabilidade.....	115
4.3.1 <i>Cena 1: Síntese coletiva – a emergência da aleatoriedade</i>	<i>115</i>
4.3.2 <i>Cena 2: Inferências para um espaço equiprovável</i>	<i>134</i>
5. CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	142
REFERÊNCIAS	146
APÊNDICE A – CARTILHA INFORMATIVA	150

QUAL A CHANCE DE CHEGAR ATÉ AQUI?

A Probabilidade permeia diversos aspectos do cotidiano, manifestando-se de forma muitas vezes imperceptível, seja por meio da sorte, do azar ou de intervenções sobrenaturais, independentemente do nome atribuído ao acaso. Nossas decisões são influenciadas pelo elemento aleatório, nem sempre de forma equiprovável, em escolhas tanto irrisórias quanto importantes, conscientes ou não. Optamos por utilizar a seguir a narrativa em primeira pessoa para destacar quais desses aspectos da Probabilidade, ao longo da jornada da vida acadêmica, conduziram o autor do texto até aqui.

Como aluno de escola pública, meu primeiro contato – que tenho lembranças – com a Teoria da Probabilidade ocorreu, provavelmente, durante o sétimo ano do Ensino Fundamental, após passar por um sexto ano conturbado em 2008 na disciplina de Matemática, onde não tive um professor regular, mas sim vários substitutos e horários vagos. Apesar disso, foi no sexto ano que também tive minha primeira experiência com a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), projeto crucial em minha trajetória. Infelizmente, não consegui avançar para a segunda fase e acredito que isso aconteceu por diversos fatores, incluindo a falta de orientação e de um professor regente fixo na disciplina.

Já no sétimo ano, com uma professora empenhada em recuperar os conteúdos que não foram abordados no sexto ano e em cumprir todo o conteúdo programático do sétimo ano, algo que hoje, como professor, considero ter sido uma verdadeira mágica, também surgiu o estímulo para a participação na OBMEP. Essa orientação, atrelada ao meu gosto pela Matemática, resultou na minha classificação para a segunda fase e na conquista de uma medalha de bronze.

Desde então, até o fim do Ensino Médio, em 2014, participei ativamente em todos os anos dessa competição olímpica, conquistando menções honrosas, duas medalhas de bronze e uma de prata. Além disso, tive a oportunidade de participar por seis anos consecutivos do Programa de Iniciação Científica Jr. (PIC)¹.

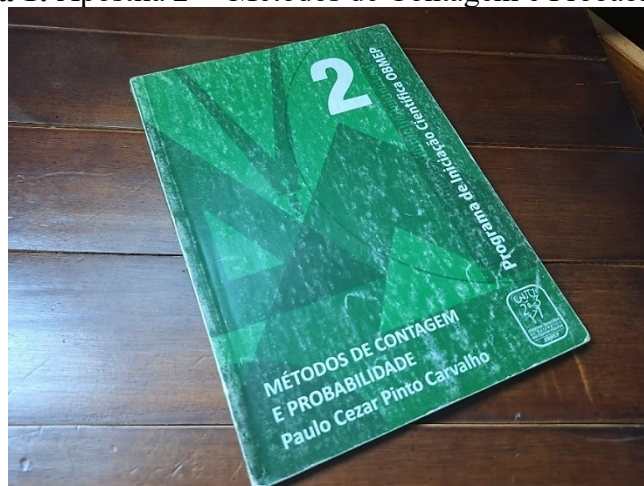
Sou natural de Patrocínio, Minas Gerais, e os encontros presenciais aconteciam na cidade vizinha, Patos de Minas, com subsídio e transporte oferecidos pela OBMEP. Lá, pude interagir com estudantes da região que compartilhavam um profundo interesse pela Matemática, e com professores universitários que ministravam aulas, a cada quinze dias, nos

¹ O Programa de Iniciação Científica Jr. (PIC) é um programa de estudos voltado para estudantes premiados da OBMEP, proporcionando contato com questões matemáticas, ampliando conhecimento científico e preparando para desempenho profissional e acadêmico. O estudante pode participar do PIC Presencial, geralmente aos sábados, ou do PIC à Distância. Estudantes têm acesso a um fórum virtual da OBMEP para tarefas complementares. O material didático é adaptado para diferentes níveis de participação (OBMEP, 2023).

sábados, para estes estudantes premiados na competição. Além disso, o programa também incluía um fórum virtual onde eram propostos desafios e tarefas para serem solucionados. Abordávamos temas avançados, em comparação com o ano que cursávamos no ensino regular e, foi nesse contexto, que cultivei grandes amizades. Mesmo após quase quinze anos e com alguns vivendo em cidades distintas, muitas dessas conexões perduram.

No PIC fui apresentado à Matemática "formal", com sua linguagem repleta de teoremas e demonstrações. Fiquei fascinado ao perceber que havia uma explicação matematicamente lógica e geral para os resultados apresentados e que ia muito além de simples exemplos. Dentro do material utilizado no programa, a Apostila 2 - "Métodos de Contagem e Probabilidade", de autoria de Paulo Cezar Pinto Carvalho (Figura 1), abrangia desde conceitos da Probabilidade Simples até a Probabilidade Condicional, passando por diversos tópicos relacionados à Contagem. Durante muito tempo, essa apostila foi minha preferida no programa.

Figura 1: Apostila 2 - "Métodos de Contagem e Probabilidade"



Fonte: Arquivo pessoal do autor.

Ainda na adolescência, durante o Ensino Médio, lembro-me de ter assistido ao filme "21", conhecido em português como "Quebrando a Banca", lançado originalmente em 2008 e dirigido por Robert Luketic. O filme narra a história de um estudante do Instituto Tecnológico de Massachusetts (MIT) que, necessitando de dinheiro para pagar a faculdade, se une a um grupo de estudantes que percorrem o país, utilizando cálculos probabilísticos para ludibriar cassinos – um método nada ortodoxo e muito distante de nossa realidade brasileira, que não possui legalmente esses tipos de casas de jogos. No entanto, foi a primeira vez que pude ver uma utilização prática da Teoria da Probabilidade no entretenimento.

Minha afinidade com a Probabilidade também foi muito influenciada pelos livros de ficção científica e comédia da série "O Guia do Mochileiro das Galáxias", escrita por Douglas

Adams. Essa série utiliza situações extremamente absurdas e humorísticas envolvendo os protagonistas Arthur, Ford, Marvin, Tricia e Zaphod, para explorar a lógica – ou a ausência dela – dentro do contexto de uma envolvente história espacial que está repleta de conceitos matemáticos, muitas vezes propositalmente equivocados.

O gerador de improbabilidade infinita é uma nova e maravilhosa invenção que possibilita atravessar imensas distâncias interestelares num simples zerézimo de segundo, sem toda aquela complicação e chatice de ter que passar pelo hiperespaço. Foi descoberto por um feliz acaso, e daí desenvolvido e posto em prática como método de propulsão pela equipe de pesquisa do governo galáctico em Damogran (Adams, 2013, p. 76).

Após concluir o Ensino Médio e decidir, junto à minha família, a não ingressar imediatamente na faculdade, mesmo que minha pontuação no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) fosse suficiente, optei por trabalhar por um ano devido a questões financeiras familiares. Isso me proporcionou o tempo necessário para refletir com tranquilidade sobre qual carreira seguir. Embora ainda estivesse indeciso entre Matemática e Engenharia Elétrica, devido a sugestões de outras pessoas e ao fato de ter cursado o nível técnico em Eletrônica durante o Ensino Médio, escolhi iniciar a graduação em Matemática para me tornar um professor. Em 2016, dei início aos meus estudos na Universidade Federal de Uberlândia (UFU), em Minas Gerais.

Durante o início da minha graduação, me deparei com o livro "O Andar do Bêbado: como o acaso determina nossa vida", escrito pelo físico Leonard Mlodinow. Este livro de divulgação científica explora conceitos de Probabilidade por meio de exemplos e casos reais, em uma linguagem de fácil compreensão, tudo isso com um humor perspicaz. Foi por meio dessa leitura que tive o primeiro contato com o Jogo dos Astrágalos.

Devemos nos perguntar por que motivo uma civilização capaz de gerar um teorema como a proposição 29 do livro 1 dos Elementos, de Euclides – “uma linha reta que cruza duas retas paralelas produz ângulos alternados idênticos; o ângulo externo é igual ao ângulo interno oposto, e a soma dos ângulos internos do mesmo lado equivale a dois ângulos retos” –, não criou uma teoria para demonstrar que se jogarmos dois dados, seria pouco sábio apostarmos um Corvette na possibilidade de que ambos caíam no número 6. Na verdade, além de não terem Corvettes, os gregos tampouco tinham dados. Tinham, contudo, seus vícios em apostas. Dispondo de uma abundância de carcaças animais, o que jogavam eram astrágalos, feitos de ossos do calcanhar (Mlodinow, 2009, p. 35).

Durante os dois anos do núcleo comum, compartilhados entre o Bacharelado e a Licenciatura, nos quais tínhamos poucas disciplinas relacionadas diretamente à área da educação, participei de diversos projetos, incluindo uma breve passagem pela Iniciação Científica em Matemática Pura. No entanto, foi na área da Educação que encontrei meus pares

por meio da regência no PIC – onde, em uma reformulação do programa, os encontros passaram a ser ministrados por estudantes do curso de Matemática –, a participação no Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID) e as aulas do curso de Licenciatura.

Duas disciplinas foram cruciais para fortalecer minha paixão pela Probabilidade: Estatística e Probabilidade, na qual tive a oportunidade de explorar cálculos mais complexos da área. Estudando seus teoremas, axiomas, somatórias e variáveis, percebi a construção matematicamente sólida e lógica por trás de conceitos aparentemente simples e cotidianos; e Metodologias do Ensino de Matemática (MEM), que proporcionou um espaço para formular um trabalho para a sala de aula. Optei por abordar o tema da Probabilidade, e, inspirado na leitura de "O Andar do Bêbado", desenvolvi em 2018 uma primeira versão de uma proposta baseada no Jogo dos Astrágalos, que culminou nesta dissertação.

Próximo ao término da graduação, durante o auge da pandemia de Covid-19, uma amiga propôs a ideia de criar um canal de videoaulas no YouTube, no qual cada vídeo se dedicaria exclusivamente a abordar uma habilidade da Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Com o envolvimento de outros quatro amigos, concebemos e implementamos o projeto no seu primeiro e único ano, abrangendo todo o conteúdo do sexto ano do Ensino Fundamental. Cada um de nós abordou um eixo temático específico. Para mim, o projeto representou mais uma oportunidade de aprofundar minha reflexão sobre as práticas relacionadas ao eixo temático de Probabilidade e Estatística, além de pensar uma segunda versão do Jogo dos Astrágalos, desta vez ao explorar experimentos sucessivos. Infelizmente, o projeto foi encerrado devido à escassez de tempo disponível dos participantes, porém todos os vídeos do projeto permanecem disponíveis online².

O passo seguinte de minha jornada, que envolveu participar do processo seletivo para o Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática (PPGECM) - Mestrado Profissional da UFU, conforme Edital PPGECM/UFU nº002/2021, incluiu o desenvolvimento do meu Anteprojeto de pesquisa. Nele, expus a ideia inicial – e, no fundo, uma grande vontade – de empregar de forma prática o Jogo dos Astrágalos no contexto educacional, fazendo menção à pesquisadora Regina Célia Grando como um dos poucos nomes teóricos que eu conhecia sobre o uso pedagógico de jogos – durante minha graduação, não havia dado ênfase a um estudo mais aprofundado desse tema, e nem mesmo o abordei em meu Trabalho de Conclusão de Curso (TCC), o qual foi focado na Resolução de Problemas.

² O vídeo citado, *Experimentos sucessivos e o jogo dos astrágalos (EF06MA30) - Parte 2* | #SemeandoMat, encontra-se disponível em: <<https://youtu.be/9Qc1owDALrA>>. Acesso em 20 set. 2023.

Após ingressar no programa e estabelecer uma parceria de orientação com a Professora Dra. Fabiana Fiorezi de Marco – que havia sido minha professora durante a graduação em algumas disciplinas, inclusive MEM – fui apresentado à Teoria Histórico-Cultural (THC) e passei a integrar o Grupo de Estudos e Pesquisa em Ensino de Matemática e Atividade Pedagógica (GEPEMAPE)³. Foi nesse contexto que tive a oportunidade de perceber o jogo como um referente para a Situação Desencadeadora de Aprendizagem (SDA), encontrando, assim, um suporte teórico pedagógico crucial para o desenvolvimento deste trabalho.

Fui repetidamente atravessado pela Probabilidade em meu caminho até chegar na Pós-Graduação. Desde os primeiros contatos com a Teoria da Probabilidade na escola, passando pelas experiências na OBMEP e no PIC, até os aprofundamentos acadêmicos e práticos na graduação e projetos. A Probabilidade sempre esteve presente em cada escolha, consciente e inconscientemente. Cada decisão e cada oportunidade, aparentemente regidas pelo “acaso”, contribuíram para o desenvolvimento desta dissertação. Agora, convido você, leitor(a), a conhecer a proposta aqui desenvolvida e refletir sobre: qual a chance de chegar até aqui?

³ Disponível no link: <<https://gepemapu.wixsite.com/gepemapu>>.

INTRODUÇÃO

Neste trabalho, estamos⁴ motivados a responder à seguinte questão: *Como o Jogo dos Astrágalos, organizado na perspectiva da Atividade Orientadora de Ensino, pode ser um potencial referente para desencadear conceitos de Probabilidade nos anos finais do Ensino Fundamental?* Para embasar nossas reflexões, fundamentamo-nos em estudos teóricos sobre jogo com intuito pedagógico, planejamos e desenvolvemos uma proposta para a sala de aula, tendo como objetivo principal investigar o uso do Jogo dos Astrágalos, organizado sob a perspectiva da Atividade Orientadora de Ensino (AOE), como recurso pedagógico no ensino de probabilidade para estudantes do sexto ano do Ensino Fundamental. Como ações da pesquisa, temos:

- Criar possibilidade para o ensino de probabilidade por meio do uso do Jogo dos Astrágalos no sexto ano do Ensino Fundamental.
- Investigar como o movimento lógico-histórico, a manipulação de materiais e um problema desencadeador podem potencializar a apropriação de conceitos de probabilidade.
- Elaborar um Produto Educacional⁵.

Na fase inicial da pesquisa, foi dedicado tempo à exploração do portal eduCAPES⁶ e da Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações⁷ (BDTD) em busca de pesquisas para os temas a serem abordados: a probabilidade, o jogo e o astrágalo. Este passo se revelou crucial para situar o autor no contexto das pesquisas em curso na área.

Inicialmente, foi conduzida uma busca abrangente no portal eduCAPES, sem filtros, mas utilizando separadamente os termos probabilidade, jogo e astrágalo para englobar o escopo do trabalho. O termo "probabilidade" resultou em 7568 registros, enquanto o termo "jogo"

⁴ A partir desse parágrafo, será adotada, nesta dissertação, a primeira pessoa do plural, por considerarmos o caráter coletivo de um trabalho acadêmico.

⁵ No Mestrado Profissional, diferentemente do mestrado acadêmico, "o mestrando necessita desenvolver um processo ou produto educativo e aplicado em condições reais de sala de aula ou outros espaços de ensino, em formato artesanal ou em protótipo. Esse produto pode ser, por exemplo, uma sequência didática, um aplicativo computacional, um jogo, um vídeo, um conjunto de videoaulas, um equipamento, uma exposição, entre outros. A dissertação deve incluir necessariamente o relato fundamentado da aplicação do produto educacional desenvolvido" (Documento Orientador de APCN - Área 46 - Ensino, da Capes, 2019, p. 5-6). Disponível no link: <<http://www.ppgecm.ufu.br/cursos/mestrado/mestrado-profissional>>.

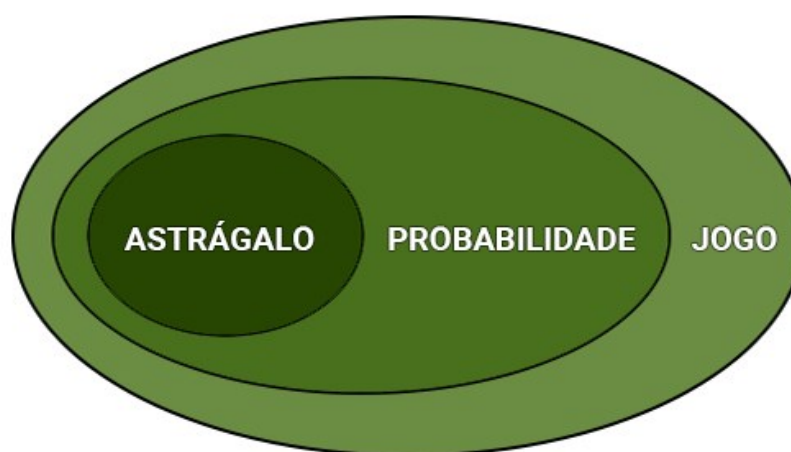
⁶ O eduCAPES é um portal educacional online desenvolvido pela Diretoria de Educação a Distância - DED/CAPES, que oferece uma ampla variedade de materiais educacionais para estudantes e professores da educação básica, superior e pós-graduação. Ele oferece diferentes formas de acesso aos materiais, seja por sincronismo com repositórios parceiros ou por meio da busca interna. Disponível no link: <<https://educapes.capes.gov.br/>>.

⁷ A Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD) reúne e compartilha, em um único portal de pesquisa, os textos completos de teses e dissertações de instituições de ensino e pesquisa no Brasil. Disponível no link: <<https://bdtd.ibict.br/>>.

apresentou 12539 resultados. Por fim, o termo "astrágalo" gerou 12 resultados. Vale ressaltar que, no caso do astrágalo, é importante notar que os trabalhos encontrados abordam áreas diversas e distintas, incluindo Pedagogia, Arqueologia e Educação Física.

Considerando, nesse trabalho, a relação de continência entre os termos selecionados, a busca nestes repositórios não deveria englobar qualquer jogo, mas sim trabalhos em que jogos estivessem associados à probabilidade, que os astrágalos tivessem a relação direta com a probabilidade e, por consequência, com o jogo (Figura 2). Para aprimorar essa busca, os pesquisadores utilizaram a ferramenta de filtro com duas estratégias na condução da pesquisa: a utilização do filtro na navegação por assunto e por título.

Figura 2: Relação de continência entre os termos selecionados



Fonte: Elaborado pelo autor.

Ao utilizar os filtros por assunto e título para a palavra-chave "Probabilidade"⁸, observamos uma diminuição no número de resultados ao refinar a busca para um termo mais específico. Além disso, notamos que a adoção do filtro "contém" em detrimento do filtro "igual" resultou em um aumento na quantidade de resultados obtidos. Foi também evidente que o sistema enfrentou dificuldades ao lidar com a busca de palavras-chave compostas por mais de um termo. Por exemplo, ao realizar a pesquisa por "jogo dos astrágalos", os resultados apresentaram materiais que discutiam exclusivamente "jogo", sem qualquer menção ao termo "astrágalos". Os resultados quantitativos obtidos foram sintetizados no Quadro 1.

⁸ Admitimos que a busca pela palavra-chave "Probabilidade" é mais precisa e direcionada em comparação com a palavra-chave "Matemática". A pesquisa utilizando o filtro a partir da palavra-chave "Matemática" também foi realizada. No entanto, os resultados não apresentaram diferenças significativas, com apenas um resultado a mais do que o encontrado com a palavra-chave "Probabilidade". Esse resultado foi o livro digital "Reflexões sobre a educação matemática" da Atena Editora, no qual a palavra "astrágalo" é mencionada apenas uma vez, no contexto do referencial teórico sobre Probabilidade.

Quadro 1 – Quantidade de resultados por busca no portal eduCAPES

Filtro			Busca por	Resultados
Assunto	Igual	Probabilidade	Probabilidade	195
			Jogo	45
			Astrágalo	0
Título	Igual	Probabilidade	Probabilidade	3
			Jogo	0
			Astrágalo	0
Assunto	Contém	Probabilidade	Probabilidade	1501
			Jogo	91
			Astrágalo	1
Título	Contém	Probabilidade	Probabilidade	256
			Jogo	28
			Astrágalo	2

Fonte: Elaborado pelo autor.

No estudo que ora apresentamos, tínhamos interesse por resultados da busca que incluíssem a palavra "astrágalo" a partir dos filtros utilizados. Ao realizarmos a busca por título, identificamos os seguintes trabalhos: a dissertação intitulada “O Ensino de Probabilidade por meio de Atividades⁹”, elaborada por Marcel Brito Soares e apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará, sob a orientação do Prof. Dr. Pedro Franco de Sá, publicada em 2018; e o Produto Educacional intitulado “Produto Educacional: Uma sequência didática para o ensino de probabilidade¹⁰”, de autoria do mesmo pesquisador e publicado em 2020. Essa dissertação também é o único resultado da busca ao considerar o filtro por assunto.

Ao buscarmos, nesses documentos, pelo termo "astrágalo" e seu plural utilizando a ferramenta de localização, foram identificados dois momentos em que o termo é mencionado em ambos os arquivos, especificamente na seção intitulada "Aspectos Históricos da Probabilidade". Neste contexto, o astrágalo surge apenas como um elemento dentro da abordagem histórica dos textos.

⁹ Disponível no link: <educapes.capes.gov.br/handle/capes/559527>. Acesso em: 23 set. 2023.

¹⁰ Disponível no link: <educapes.capes.gov.br/handle/capes/569772>. Acesso em: 23 set. 2023.

Ao efetuar a busca na BDTD utilizando diretamente o termo "astrágalo" – o banco de dados considera o seu plural e a tradução para outras línguas –, foram encontrados sete resultados, sendo cinco dissertações e duas teses, todas advindas da área de Biologia. O portal também fornece uma pré-visualização indicando o local no texto onde o termo é mencionado, conforme a Figura 3. Foi observado que, em contrapartida aos resultados obtidos no portal da eduCAPES, não houve localização da utilização do termo buscado relacionado aos elementos históricos da probabilidade.

Figura 3: Pesquisa pelo termo “astrágalo” na BDTD

A imagem mostra a interface de pesquisa da BDTD. No topo, há o logo da BDTD e links para 'Página Inicial', 'Sobre a BDTD', 'Rede BDTD', 'Acesso Aberto Brasil' e 'Serviços'. Uma barra de busca contém o termo 'astrágalo' e botões para 'Buscar' e 'Busca Avançada'. Abaixo, uma barra indica 'Busca: astrágalo'. À esquerda, há uma seção 'Refinar a Busca' com filtros por 'Instituições' (UFRGS: 2, USP: 2, UFC: 1, UFSM: 1, UNIPAMPA: 1) e 'Repositório' (Biblioteca Digital de Teses e Dissertações da UFRGS: 2). À direita, há uma barra de ordenação com 'Relevância' selecionada e botões 'Ver Tudo' e 'Exportar'. O resultado principal é uma dissertação de Pitana, Vanessa Gregis, intitulada 'Estudo do gênero *Glossotherium* Owen, 1840 (Xenarthra, Tardigrada, Mylodontidae), pleistoceno no estado do Rio Grande do Sul, Brasil', com data de defesa de 2011. Um trecho do texto mostra a palavra 'astrágalo' em destaque amarelo. Abaixo do trecho, há um link para 'Obter o texto integral' e botões para 'Dissertação' e 'Ver +'.

Fonte: Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações.

Assim, entendemos que a pesquisa aqui apresentada se valida ao apresentar uma perspectiva inédita em sua proposta: a utilização de uma representação física do Jogo dos Astrágalos para abordar Probabilidade a partir do sexto ano do Ensino Fundamental. A escolha do termo “a partir do sexto ano” dá-se pelo fato de que, em todos os anos finais do Ensino Fundamental, pautado pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC), o conteúdo de Probabilidade abordado dentro do eixo temático “Probabilidade e Estatística” é breve, em alguns anos, se resumindo à apenas uma habilidade. Por isso, supomos que a utilização do Jogo dos Astrágalos poderia ser feita, com suas devidas adaptações, em qualquer um desses anos escolares. Também surge uma inquietação ao nos questionarmos sobre quando seria o momento adequado para introduzir a ideia de espaço amostral não-equiprovável, visto que o documento normativo não aborda esse aspecto de forma específica. Algumas dessas inquietações poderão

ser exploradas em estudos futuros, pois neste momento, a proposta aqui apresentada destina seu foco a uma turma de sexto ano, na qual o autor deste texto atuou como professor regente.

A proposta foi realizada em uma escola da rede privada, localizada na cidade de Uberlândia, Minas Gerais. O autor deste estudo foi professor nessa escola no ano de realização da proposta, em 2023. A escola faz parte de uma rede internacional e adota uma parte da grade curricular ministrada em língua inglesa – bloco em que está localizada a disciplina de Matemática.

Durante o primeiro ano do Mestrado Profissional, o autor deste trabalho teve contato, em diferentes disciplinas, com propostas de pesquisas, análises e reflexões sobre produtos educacionais dos mais variados tipos e de diferentes programas, surgindo uma inquietação em relação a esses produtos: se a proposta é que sejam de fácil acesso e replicabilidade, como isso pode ser feito, considerando o extenso caminho até a localização dos produtos em repositórios de universidades ou no próprio portal da eduCAPES, ou ainda, como apêndice ao fim das dissertações?

Deste modo, a ideia inicial para criação de um Produto Educacional a partir da proposta aqui apresentada foi a de um livro digital. No entanto, impulsionados pelos fundamentos de acessibilidade, inovação e praticidade, optamos pela criação de um site que pode ser enviado e compartilhado por um link ou um QR Code, e pode conter várias seções, assim como um livro digital. Existem variáveis a serem consideradas, como os custos associados à criação de um site, incluindo a hospedagem (espaço *online* para armazenamento de arquivos) e o registro do domínio (endereço *web*). Embora existam versões gratuitas desses serviços, elas podem apresentar limitações, como um espaço de armazenamento limitado e poucas opções de personalização. Adicionalmente, é importante considerar que a inclusão do Produto Educacional na plataforma eduCAPES requer um formato PDF, o que implica a criação de uma cartilha orientando o acesso ao *site*. Positivamente, há a possibilidade da criação de um Produto Educacional dinâmico, podendo ser complementado sempre que necessário, incluindo-se novos recursos e pela praticidade de o compartilhar.

Encontramos apoio para a idealização deste Produto Educacional, a partir da Portaria CAPES 171/2018 – Instituição do GT Produção Técnica¹¹, a partir de uma das categorias de definição de um Produto de Comunicação:

O produto implica na existência de um intermediário tecnológico para que a comunicação se realize. Trata-se, portanto, de produto midiaticado. Mídia

¹¹ Disponível no link: <gov.br/capes/pt-br/centrais-de-conteudo/10062019-producao-tecnica-pdf/>. Acesso em: 23 set. 2023.

compreende o conjunto das emissoras de rádio e de televisão, de jornais e de revistas, do cinema e das outras formas de comunicação de massa, bem como, das recentes mídias sociais em suas diversas plataformas (Brasil, 2019, p. 63).

Em vista o exposto, essa dissertação está organizada em cinco seções. Na primeira, apresentamos as reflexões sobre a relação entre jogos e probabilidade, incluindo uma discussão histórica e conceitual sobre a Teoria da Probabilidade e o Jogo dos Astrágalos. Na segunda seção exploramos as perspectivas do uso de jogos no contexto educacional, destacando como a Atividade Orientadora de Ensino pode ser integrada ao ensino da probabilidade conforme as diretrizes da BNCC. Na terceira seção, detalhamos o caminho metodológico adotado, abordando o processo de adaptação do Jogo dos Astrágalos e a criação do produto educacional associado. A quarta é dedicada à análise dos episódios de ensino e aprendizagem que compuseram a realização do jogo em sala de aula, examinando os resultados e as interações dos estudantes. Finalmente, a quinta seção apresentamos as considerações finais, sintetizando as contribuições do estudo para a prática pedagógica e sugerindo direções para futuras pesquisas e novas versões da proposta.

1. REFLEXÕES SOBRE JOGO E PROBABILIDADE

A Teoria da Probabilidade é amplamente utilizada em diversas áreas do cotidiano, desde a previsão do tempo até os resultados da loteria, onde a avaliação da chance de um evento ocorrer é crucial para determinar seu resultado. As noções de probabilidade se manifestam de forma intuitiva e empírica, além de serem estruturadas matematicamente por meio do conhecimento acadêmico. O jogo permeia nossas vidas de maneira intrínseca, seja em competições amistosas, jogos de cartas ou até mesmo em envolventes sessões de *Role Playing Game* (RPG). Nesta seção, exploramos brevemente o histórico do jogo e da probabilidade, e refletimos sobre como esses dois tópicos se entrelaçam. Ao longo dessa trajetória, buscamos compreender como os jogos, em particular o Jogo dos Astrágalos, evoluíram em paralelo com o estudo da probabilidade.

1.1 Uma interpretação do acaso

Ao se pensar no conceito de Probabilidade, é provável que o termo "jogo de azar" apareça de imediato. Contudo, é importante compreendermos como eventos milenares eram interpretados, a fim de não lhes atribuir definições contemporâneas e, assim, evitar anacronismos ao se olhar para eventos históricos.

Outro termo ligado à Probabilidade é o “acaso”. Empiricamente, é de fácil entendimento, mas de difícil definição formal – o que não é o objetivo deste trabalho. Ao se buscar a Filosofia, encontramos diferentes perspectivas acerca do conceito.

Na Antiguidade, Idade Média e Período Clássico, em geral, havia aversão à ideia do acaso, que implicava em ausência de causa. Esses períodos históricos podem ser vistos como extremamente racionais, pois para um acontecimento ser aceito, era preciso ter explicação. Mesmo que essa explicação fosse mitológica, como a crença de que o trovão vinha da batalha entre deuses. A influência do cristianismo no Ocidente, longe de reduzir, ampliou mais essa busca pela racionalidade. Aquilo que escapa à compreensão humana não poderia ocorrer sem a intervenção divina (Lestienne, 2008).

Nesse aspecto, pode-se refletir sobre o I'Ching: uma antiga prática chinesa com mais de 4000 anos, baseada na interpretação de situações por meio de uma sequência de seis experimentos binários. Primeiro, um trigramma (Figura 4), um conjunto de três linhas, é obtido utilizando, por exemplo, o lançamento sucessivo de uma moeda (que determinará se será utilizada uma linha contínua ou segmentada). Com dois trigramas, forma-se um hexagrama,

onde a ordem disposta é importante. Este sistema é enriquecido com profundo simbolismo oriental, fundado na dualidade dos princípios complementares e opostos: o Yang, representando o positivo ou o masculino, e o Yin, representando o negativo ou o feminino (Crusius, 1991).

Figura 4: Os oito possíveis trigramas



Fonte: TarcisioTS¹².

Matematicamente, utilizando o princípio multiplicativo, existem 8 trigramas possíveis ($2 \times 2 \times 2$) e 64 hexagramas (8×8). No entanto, para os praticantes do I'Ching, a interpretação de uma consulta não é simplesmente uma questão probabilística de 1 em 64, mas sim a busca por objetivos pessoais, profundos e importantes. Nesse sentido, o I'Ching poderia ser classificado como um simples "jogo de azar"?

Para refletir sobre este questionamento, como pode ser compreendida a subjetividade do termo "azar"? A própria origem árabe da palavra traz um interessante contexto. Acredita-se que os cruzados, em suas longínquas expedições entre os séculos XI e XIII, tenham se familiarizado com o jogo de dados, uma prática comum na época entre a população do Oriente Médio. Ao se depararem com a maneira como essas populações se referiam aos dados como "az zahr", surgiu rapidamente o costume de usar a única palavra "azar", principalmente ao se referir às práticas lúdicas que as gerações anteriores denominavam como "destino", "fortuna", "sorte" ou "eventualidade" (Lestienne, 2008).

A partir dessas considerações, entendemos que o acaso, inicialmente, foi concebido como a ausência de causa, e que muitos eventos que poderiam ser categorizados como obra do acaso, essencialmente como o casual, encontram sua explicação no causal. No âmbito deste trabalho, consideramos o termo "acaso" como um resultado que pode ser imprevisível, pouco provável, mas ainda assim possível, em uma variedade de possíveis resultados. Também compreendemos que eventos probabilísticos, quando analisados em seus contextos históricos, vão além da simples descrição em termos matemáticos. Ao nos referirmos a eventos ocorridos antes da formulação do termo "azar", quando percebidos em seus momentos históricos como jogos, utilizamos a expressão "jogo de acaso" para designá-los.

¹² Disponível em: <<https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/b/b7/Trigramas.png>>. Acesso em: 08 jul. 2023.

1.2 Alguns entendimentos sobre jogo

A palavra "jogo" pode ser confundida no senso comum com "brinquedo" e "brincadeira", pois diferentes significados são atribuídos ao mesmo termo. Na Filosofia, que investiga a lógica da linguagem, algumas palavras só ganham significado preciso quando interpretadas dentro do contexto em que são empregadas (Kishimoto, 1998).

Para Eigen e Winkler (1993), os jogos têm suas raízes no acaso e nas regras. Cada jogo possui suas próprias regras, diferenciando-os das situações cotidianas e estabelecendo critérios específicos a serem respeitados.

Tudo o que acontece em nosso mundo se assemelha a um vasto jogo no qual nada é determinado antecipadamente, exceto as regras, e apenas as regras estão abertas à compreensão objetiva. [...] Vemos esse jogo como um fenômeno natural que, em sua dicotomia de acaso e necessidade, subjaz a todos os eventos (Eigen; Winkler, 1993, p. xi – xii, tradução nossa¹³).

Duflo (1999) destaca a importância de compreender que aquilo que nos parece uma verdade óbvia é, na verdade, uma ideia que foi historicamente produzida, resultante de uma gênese e de uma herança. Ao refletir sobre o conceito e a noção de jogo, nos deparamos com indagações como as propostas pelo autor: “Como se construiu essa noção? Qual é a história de nossa ideia de jogo? Por meio de qual processo ela se transformou naquela que conhecemos hoje em dia?” (Duflo, 1999, p. 12).

Para Huizinga (2008, p. 4), “o jogo está na gênese do pensamento, da descoberta de si mesmo, da possibilidade de experimentar, de criar e de transformar o mundo, onde se apresenta justamente o lúdico”, além de ser uma prática presente em nossa cultura, contendo características de ludicidade.

Segundo Eigen e Winkler (1993), nossas capacidades se desenvolvem por meio do jogo. Inicialmente, experimentamos o jogo dos membros e músculos, em que os apertos e chutes sem propósito de um bebê evoluem para movimentos cuidadosamente coordenados. Mais tarde, envolvemos nossos sentidos no jogo, impulsionados pela curiosidade lúdica, buscando conhecimento mais profundo. A partir da exploração lúdica de cores, formas e sons, surgem obras de arte.

O propósito do jogo, o que o jogador busca e qual é sua finalidade, têm sido objetos de reflexão ao longo do tempo. A transformação da noção de jogo ocorreu principalmente nos séculos XVII e XVIII, saindo de uma ação menos valorizada para ganhar relevância como

¹³ No original (Eigen; Winkler, 1993, p. xi – xii): “Everything that happens in our world resembles a vast game in which nothing is determined in advance but the rules, and only the rules are open to objective understanding. [...] We see this game as a natural phenomenon that, in its dichotomy of chance and necessity, underlies all events.”

campo de estudo. Aristóteles observou que os verdadeiros amantes de jogos podiam dedicar-se plenamente a eles, ao ponto de negligenciar até mesmo os cuidados com o corpo e a saúde, evidenciando, nesse sentido, como o jogo pode ser suficiente por si só. Na crença comum de que aqueles que possuem tudo concentram seu lazer no divertimento, sugeriu que os jogos são valorizados como um fim em si (Duflo, 1999). Percebemos que essas visões dos tempos antigos são reducionistas à ideia do “jogo pelo jogo”, o que por vezes ainda é presente no imaginário popular, até mesmo dentro das escolas.

A maioria das sociedades ocidentais tentou proibir ou regulamentar jogos de azar sem sucesso, mesmo com múltiplas legislações e decretos. As autoridades vigentes no decorrer dos anos, incluindo a Igreja Cristã, continuaram a condenar severamente essa forma de entretenimento. Os jogos de azar foram criticados moralmente por seus efeitos na sociedade, com jogadores envolvendo-se em comportamentos como perder dinheiro e prejudicar suas famílias (Duflo, 1999).

O acaso é um elemento central em alguns jogos e despertou o interesse dos matemáticos pela aparente complexidade dessa classe de jogos. De fato, “é do interesse pelos jogos de puro acaso que irá nascer esse ramo da Matemática que se chamará de teoria das probabilidades” (Duflo, 1999, p. 23).

Jogos que envolvem acaso, estratégia ou uma combinação de ambos possuem resultados únicos em cada ocasião, devido ao grande número de escolhas possíveis. A sequência de jogadas constantemente abre novas direções que o jogo pode seguir, como os ramos de uma árvore. O curso arbitrário que o jogo toma em cada ramificação da árvore é influenciado pelo lançamento aleatório dos dados, pela ignorância dos jogadores em relação à estratégia do oponente ou por fatores externos (Eigen; Winkler, 1993).

Ao citarmos boa sorte ou má sorte nos jogos, atribuímos valores a um conceito essencialmente neutro, classificando o quanto o acaso nos favorece ou não em cada jogada. Jogos puramente determinados pelo acaso podem ser entediantes, assim como aqueles que possuem um número limitado de variações, tornando o resultado previsível. Por exemplo, no jogo-da-velha, um jogador experiente sempre pode, no mínimo, empatar, desde que não cometa erros (Eigen; Winkler, 1993).

Ainda no período da Era Moderna, os matemáticos consideraram o jogo como um campo de estudo relevante e não mais uma ação insignificante, adequada apenas para os mais jovens. Leibniz também defendeu o estudo do jogo, não apenas de jogos de azar e cálculos de probabilidades, mas também de jogos estratégicos, como xadrez, e de jogos de pura reflexão, como paciência (Duflo, 1999).

No jogo, o espírito se exercita: na estimação das chances nos jogos de azar, na análise das estratégias e nos cálculos naqueles que pressupõem a intervenção do jogador, na adivinhação do adversário em todos os que colocam os jogadores em conflito (Duflo, 1999, p. 25).

As definições de jogo baseiam-se em perspectivas diversas, como a antropologia jurídica, que destaca a natureza contratual do jogo, e a análise das paixões, que aborda sua frivolidade e as consequências emocionais, como prazer e perdas de dinheiro e honra. As classificações do jogo são principalmente baseadas no critério do acaso, classificando-os em jogos de engenhosidade ou destreza, embora seja reconhecido que o acaso também influencia mesmo nos jogos de pura habilidade, devido à imprevisibilidade das forças dos adversários e das situações. O jogo é uma manifestação da engenhosidade humana e não deve ser subestimado como mera distração, e a diversidade de jogos inventados é uma prova da criatividade do espírito humano (Duflo, 1999).

E por qual motivo joga o jogador? Para tentar ganhar um pouco de dinheiro, para se distrair, “espantar o tédio”, para esquecer o amor ou para tornar-se célebre (Duflo, 1999). A motivação do sujeito com relação ao ato de jogar, como podemos observar, é estritamente pessoal. Entendemos que isso se transporta para a perspectiva pedagógica do jogo.

No século XVIII, o jogo e os jogadores eram uma presença constante na sociedade, o que despertou a atenção dos pensadores para esse aspecto das ações humanas. O interesse matemático pelo jogo desencadeou uma reavaliação conceitual, reconhecendo-o como um espaço para a criatividade humana, livre das limitações da realidade. No entanto, apesar dessa importância, o jogo ainda era amplamente considerado fútil, sem relevância, levando-o a ser negligenciado pela Filosofia (Duflo, 1999).

Para que o jogo ganhasse reconhecimento, duas possibilidades foram então consideradas: “que a criança se tornasse interessante e, com ela, suas atividades, ou que o jogo adquirisse um outro estatuto que não o relegasse mais à categoria de uma atividade menor, mas lhe desse um espaço no coração do ser humano” (Duflo, 1999, p. 51). Essas perspectivas, de certa forma, se complementaram e exigiram uma mudança de visão antropológica. A evolução do interesse na Educação Infantil, notadamente destacada nas obras de Mme d'Épinay e Emílio de Jean-Jacques Rousseau, revelou a necessidade de reconsiderar o lugar do jogo na sociedade. Alguns tratados abriram caminho para essa revisão ao reconhecerem o jogo como um recurso educacional. Neles, é proposto que o jogo pode ser utilizado como um meio para aprimorar o conhecimento da psicologia infantil, ao invés de recorrer à coação e tortura para fins educativos (Duflo, 1999).

Segundo Duflo (1999), são critérios para um bom jogo educativo: atividade saudável, desenvolvimento harmonioso das habilidades físicas e mentais, autoconhecimento, julgamento sobre o sensível, cultivo de habilidades e sensibilidade. “É porque, bem compreendido, o jogo é desenvolvimento do ser humano. É até mesmo, quando completo, simultaneamente signo, manifestação e tomada de posse por si da humanidade da criança” (Duflo, 1999, p. 58).

Frente às ideias dos autores mencionados, concluímos que o jogo é uma proposta que mescla acaso e regras, permitindo aos jogadores o exercício de suas habilidades mentais e/ou físicas. Cada jogo possui suas próprias regras e critérios particulares, além de ser uma possibilidade para o desenvolvimento pessoal.

1.3 Probabilidade: dos tempos antigos ao Renascimento

A noção de probabilidade tem sua origem nas práticas místicas e dos jogos de acaso em culturas antigas. Hacking (2006) alega que por meio de registros arqueológicos, descobriu-se que o astrágalo (ou talus), osso do calcanhar de animais quadrúpedes, como cervos, cavalos, bois e ovelhas, era utilizado como um tipo de dado rudimentar. Segundo David (1962), embora o uso dos astrágalos em períodos pré-históricos seja uma conjectura, pode-se afirmar com mais segurança que essa prática era comum entre os povos egípcios, babilônios, gregos e romanos da era pré-Cristã.

A presença de tabuleiros de jogos e ilustrações em tumbas egípcias pode ser interpretada como evidência de que os jogos de acaso eram um passatempo popular na sociedade antiga do Egito. Adicionalmente, descobertas arqueológicas realizadas em locais na Turquia sugerem a existência desses jogos em outras regiões, tendo sido possivelmente disseminados com a migração de egípcios ou mesmo originados em épocas ainda mais remotas e difundidos para o oeste a partir de regiões como a Arábia, a Índia ou outros locais orientais, assim como o conceito de algarismos (David, 1962).

Embora os jogos de acaso fossem altamente desenvolvidos no Egito por volta de 3500 a.C., acredita-se que tenham sido introduzidos na Grécia apenas 300 anos antes de Cristo, por Ptolomeu. A popularização desse tipo de jogo pode ter ocorrido a partir de uma idealização do jogo de tabuleiro, onde o elemento aleatório é mantido e o tabuleiro é dispensado. No entanto, há também a possibilidade de que tenha se originado a partir de apostas ou consultas aos oráculos, que têm suas raízes profundas em rituais religiosos (David, 1962).

Figura 5: Cerâmica do ano 540 a.C. ilustrando Aquiles e Ajax jogando dados



Fonte: Nick Thompson¹⁴

Durante o surgimento de Roma e dos romanos como a potência dominante na Europa, os jogos de acaso se tornaram uma forma comum de recreação entre todas as classes sociais, culminando com a promulgação de leis para proibi-los (David, 1962).

Com a influência dos antigos gregos e romanos, a criação de novos formatos de jogos e dados foram integradas ao entretenimento popular. Dessa forma, os eventos casuais passaram a ser organizados e incorporados à vida diária das pessoas. A imprevisibilidade da vida, personificada como aleatoriedade, a deusa cega, o destino ou a sorte, era uma realidade incontestável. As pessoas lidavam com tais eventos e concebiam a ideia de probabilidade em geral a partir da perspectiva de pensamento da adivinhação (David, 1962).

A prática da adivinhação perdurou até além da era cristã. Conforme o mundo pagão se desintegrou, o governo por meio da adivinhação se intensificou, ou seja, governantes e líderes políticos usavam práticas de adivinhação, recorriam ao acaso, como uma forma de tomar decisões importantes ou orientar seus atos governamentais. Eles acreditavam que a comunicação com os deuses ou com forças sobrenaturais poderia fornecer informações e previsões que os ajudariam a governar com mais eficácia ou enfrentar desafios e crises com maior segurança. Eventualmente, a religião cristã suprimiu grande parte da oracularidade pública e privada, e converteu o que restou em uma inspiração satânica. No entanto, as práticas divinatórias não foram totalmente abolidas (David, 1962).

Durante um período de quatro mil anos, houve uma gradual substituição dos astrágalo pelos dados. Os baralhos antigos, que surgiram no século XV, eram inicialmente dispendiosos

¹⁴ Disponível em: <<https://www.flickr.com/photos/pelegrino/6401554125/in/photostream/>>. Acesso em 08 jul. 2023.

e levaram centenas de anos para suplantarem completamente os dados como instrumentos de jogo e de adivinhação. Huygens e James Bernoulli concebiam o elemento aleatório em termos de dados, enquanto a interseção entre problemas de dados e de cartas começou com Montmort e de Moivre (David, 1962).

Com o surgimento do Cristianismo, o conceito de evento aleatório dos filósofos pagãos foi finalmente rejeitado. De acordo com Santo Agostinho, por exemplo, nada acontecia por acaso, sendo tudo controlado minuciosamente pela vontade de Deus. Se os eventos parecem ocorrer aleatoriamente, é devido à ignorância do homem e não na natureza dos eventos. O verdadeiro esforço do homem era descobrir e se submeter à Vontade Divina e não, presumivelmente, obscurecer essa busca olhando para padrões de comportamento em agregados de eventos (David, 1962).

A compreensão da probabilidade implica em uma relação específica entre o ser humano e o mundo ao seu redor. Lidar com ela exige uma abordagem ativa diante do desconhecido, uma postura singular de quem acredita ser capaz de discernir, ao menos em termos gerais, as leis do acaso. O ponto crucial parece residir no fato de que simplesmente experimentar uma situação de incerteza não é o suficiente para despertar a compreensão de probabilidade, muito menos para incentivar alguém a se aventurar na sua quantificação (Crusius, 1991).

Até a época do Renascimento, acredita-se que as pessoas interpretavam o futuro como uma questão de sorte ou o resultado de variações aleatórias, e a maioria das decisões era guiada pelo instinto. Quando as condições de vida estão tão diretamente ligadas à natureza, há pouco espaço para o controle humano. Enquanto as necessidades de sobrevivência restringem os indivíduos a ações fundamentais como procriar, cultivar o solo, caçar, pescar e buscar abrigo, eles não concebem situações em que possam influenciar o resultado de suas escolhas (Bernstein, 1997).

No século XVI, Girolamo Cardano, matemático, médico e filósofo, fez importantes contribuições para o campo da probabilidade em sua obra "Liber de Ludo Aleae" (Livro sobre Jogos de Azar). Ele introduziu o conceito de equiprovável¹⁵, a partir de pontos igualmente prováveis em um conjunto fundamental de probabilidade. Além disso, Cardano estabeleceu a distinção entre eventos dependentes, influenciados por eventos anteriores, e eventos independentes, que não são influenciados por eventos anteriores. Essa distinção é fundamental na teoria moderna das probabilidades. Suas contribuições pioneiras ajudaram a estabelecer as

¹⁵ Definiremos este e outros conceitos relacionados à Probabilidade na Seção 3.

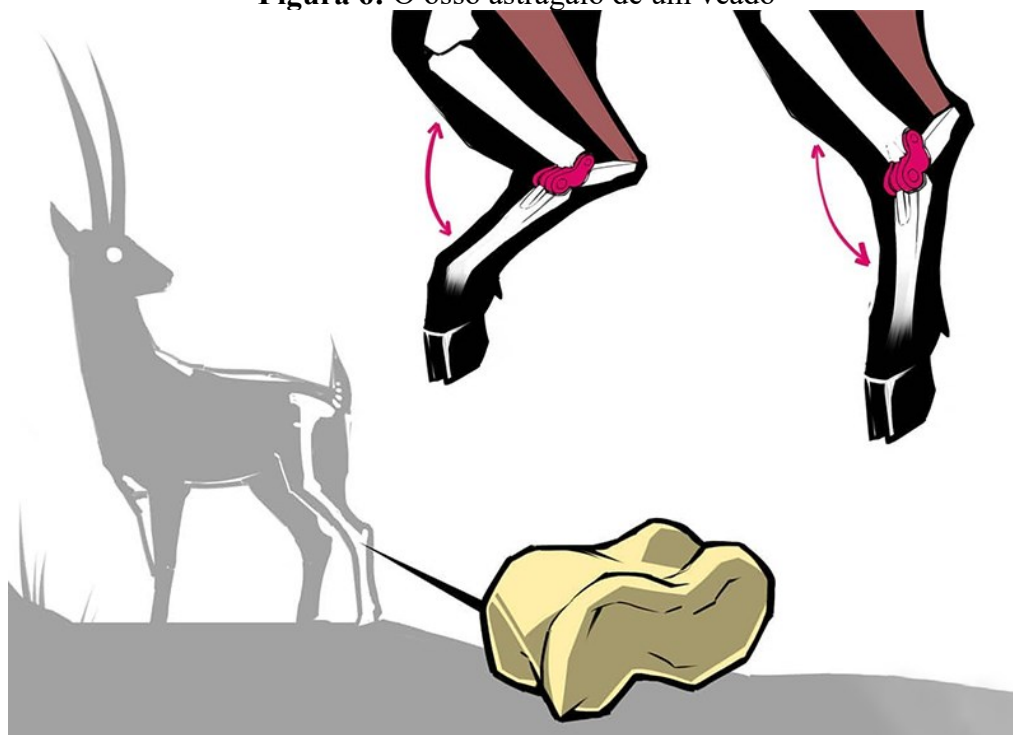
bases para o desenvolvimento posterior da Teoria da Probabilidade (Goswami; Choudhury; Sarmah, 2019).

É interessante notar como os jogos de acaso estiveram entrelaçados com a cultura e a religião de diversas sociedades antigas, influenciando não apenas o entretenimento, mas também a tomada de decisões importantes. A compreensão da probabilidade não é uma mera observação passiva do desconhecido, mas requer uma postura ativa e a capacidade de discernir padrões no acaso.

1.4 Um breve histórico sobre o Jogo dos Astrágalos

O registro mais antigo conhecido de um jogo de acaso usava um osso chamado astrágalo (ou tálus) como uma forma primitiva de dado. Simplificando, o astrágalo é um osso do tornozelo que liga a perna ao pé e está presente em muitos vertebrados. Ele ajuda a suportar o peso do corpo e permite movimentos como dobrar, esticar e mover o pé para os lados. Em mamíferos, é essencial para a estabilidade e mobilidade do tornozelo. Para o jogo, este ancestral dos dados modernos era retirado do tornozelo de carneiros ou veados, era muito sólido e quase indestrutível, pois não tinha tutano (Bernstein, 1997).

Figura 6: O osso astrágalo de um veado

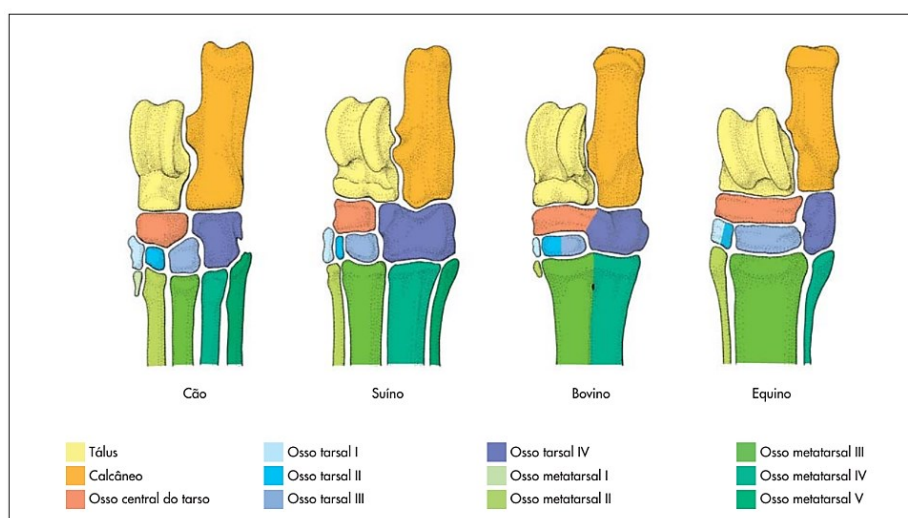


Fonte: Compilado pelo autor a partir de Kairo (@anatomika.science)¹⁶

¹⁶ Disponível em: <<https://www.instagram.com/p/By8o3gtBPTQ>>. Acesso em 12 jul. 2024.

A utilização dos astrágalos em práticas lúdicas remonta a cerca de 5000 a.C., sugerida por escavações arqueológicas que mostram uma maior incidência desse osso em comparação a outros ossos. Eles eram empregados em brincadeiras infantis na antiguidade pré-cristã, especialmente na influência greco-romana, como arremessá-los dentro de círculos desenhados no chão. Além disso, eram valorizados e dados como prêmios para o desempenho escolar (Crusius, 1991). Na Figura 7, o astrágalo (tálus) é representado no tom claro de amarelo. Na Figura 8, o astrágalo (tálus) de um animal bovino se localiza na parte superior esquerda.

Figura 7: Representação esquemática do esqueleto do tarso nos mamíferos domésticos



Fonte: König e Liebich (2016, p. 242).

Figura 8: Esqueleto de tarso bovino



Fonte: Arquivo do autor¹⁷.

¹⁷ Em junho de 2024, uma instituição privada de Ensino Superior forneceu ao autor uma peça do esqueleto do tarso bovino e alguns astrágalos. Para acessar mais imagens e vídeos, consulte o Produto Educacional.

Com o tempo, o uso do astrágalo evoluiu para se assemelhar a um jogo de dados, onde os jogadores se interessavam pela face resultante após o lançamento do osso. Na Grécia Antiga, a variação mais popular envolvia o lançamento de quatro astrágalos, com a jogada ideal chamada de *Vênus*. Além das brincadeiras, o astrágalo foi usado em jogos de tabuleiro no Egito desde a Primeira Dinastia, por volta de 3500 a.C. (Crusius, 1991).

Na realidade, a fronteira que separa um mero passatempo infantil de um jogo “adulto” é demasiado tênue e, por vezes, parece não existir. Sequer o critério de haver ou não apostas serve para diferenciar as duas situações, uma vez que o apostar não é um privilégio dos adultos. É, assim, perfeitamente possível que o homem tenha utilizado ossos em passatempos mais ou menos espontâneos antes de fazê-los instrumentos de jogos. Mas essa, igualmente, é uma questão para qual não temos uma resposta cuja veracidade possa ser rigorosamente comprovada (Crusius, 1991, p. 6).

Na região do pampa sul-americano, ainda hoje é possível testemunhar a prática do jogo conhecido como “tava” no Brasil e “taba” na Argentina e Uruguai, que envolve o uso do astrágalo. Esse costume foi introduzido na região pelos colonizadores espanhóis e logo se enraizou na cultura local. Na versão “gaúcha” do jogo, são consideradas válidas após o lançamento apenas as duas faces planas do astrágalo, denominadas *sorte* e *azar*, o que exige habilidade por parte do jogador, pois são as faces com menor superfície. É importante destacar que as crianças na mesma região onde o jogo é praticado têm o hábito comum de brincar com os pequenos ossos das patas dianteiras de alguns animais, conhecidos como “pichicos”. Esses ossos são utilizados tanto para representar animais ou objetos quanto para serem lançados ou rolados, estabelecendo uma diferenciação entre o osso “dos adultos”, o astrágalo, e os ossos “das crianças”, os pichicos (Crusius, 1991).

Na Grécia Antiga, uma versão simples e, provavelmente a mais comum, o Jogo dos Astrágalos, praticada por crianças, assemelhava-se ao atual jogo de *Cinco Marias*: todas as cinco pequenas peças eram arremessadas ao ar simultaneamente, para capturar o maior número possível na palma de uma das mãos. Uma variação envolvia os jogadores lançando uma ou mais peças em um pequeno buraco no solo, ou na abertura de um pequeno recipiente. A pessoa com o melhor controle e precisão saía vencedora (Good, 2021). No episódio 1 da primeira temporada de *The Witcher* (Figura 9), há uma cena que apresenta o jogo nessa versão.

Figura 9: The Witcher, episódio “O Começo do Fim”

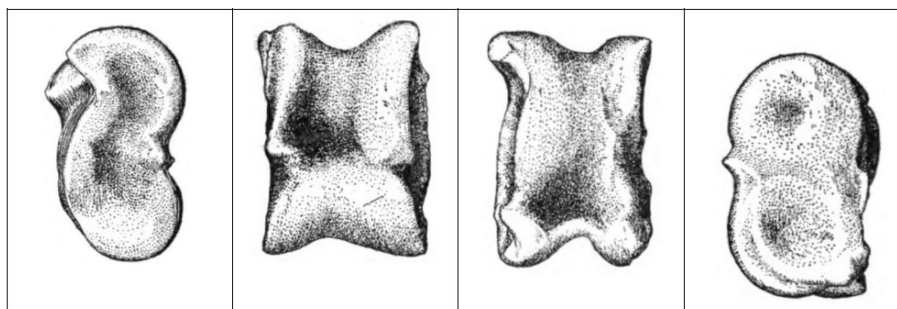


Fonte: Netflix, 2019. Criado por Lauren Schmidt Hissrich. Direção de Alik Sakharov.

Os astrágalos tinham usos distintos para adultos na Grécia Antiga, com ênfase na diferença de abordagem entre homens e mulheres. Para as mulheres, o jogo tinha uma conotação oracular e mística, simbolizando uma entrega do destino a Vênus, especialmente para jovens solteiras. A influência da deusa no jogo era tão marcante que um lançamento perfeito, onde todos os astrágalos caíam com lados diferentes, era chamado de "jogada de Vênus". Os homens, por outro lado, os tratavam como dados mais semelhantes aos que conhecemos atualmente, calculando os resultados de cada lançamento das quatro peças em uma superfície. Ao contrário do jogo moderno de dados, a contagem não se baseava no lado virado para cima, mas no lado que tocava a superfície. Embora os astrágalos não exigissem marcações numéricas devido à diferença entre seus lados, era comum inscrever números para facilitar o jogo (Good, 2021).

O astrágalo apresenta quatro longas faces planas distintas, as únicas onde ele pode repousar quando jogado, e duas pequenas extremidades arredondadas. Entre as quatro faces planas, duas são estreitas e planas, enquanto as outras duas são largas, sendo um lado ligeiramente convexo e o outro ligeiramente côncavo (Bennet, 2003). O lado superior do osso, que é largo e ligeiramente convexo, era marcado com o número 4; o lado oposto, também largo e ligeiramente côncavo, recebia o número 3; o lado lateral, plano e estreito, tinha o valor 1; e o lado lateral oposto, que é ligeiramente côncavo, era marcado com o número 6. Os números 2 e 5 eram omitidos (David, 1962).

Figura 10: Lados do astrágalo correspondentes a 1, 3, 4 e 6, respectivamente



Fonte: Tali – a Game of Knucklebones, Anwyn Davies, 2005, 2018¹⁸.

É interessante notar que a soma das faces opostas do astrágalo resulta em 7, assim como nossos dados comuns de seis lados. A transição dos astrágalos para os dados provavelmente levou milhares de anos, e é possível que os primeiros dados primitivos tenham sido feitos desgastando os lados arredondados de um astrágalo até que ficassem o mais plano possível. Existem vários dados neste formato, e acredita-se que eles não eram eficazes porque o tecido ósseo esponjoso poderia ficar exposto. Também existem versões cortadas de ossos sólidos, rusticamente cúbicas, com profundidades entalhadas parecidas com os astrágalos naturais. Os dados mais antigos encontrados são de cerâmica queimada e datam de 3000 a.C. (David, 1962).

Alguns dados antigos encontrados possuem lados opostos em ordem consecutiva: 1 oposto a 2, 3 oposto a 4, 5 oposto a 6. A marcação deixou de ser feita com numerais ou símbolos, como nos astrágalos, e passou a ser feita por marcações com números de pontos, provavelmente por ser mais simples e fácil. A ordem consecutiva deve ter continuado por um tempo, ainda sendo vista em dados do Egito por volta de 1370 a.C. Por volta desse período, a configuração se firmou nos lados opostos, somando 7, como conhecemos hoje. David (1962) afirma que, de cerca de 50 dados do período clássico que viu, 40 tinham a configuração "moderna" das faces opostas, somando 7 (David, 1962).

Neste estudo, analisamos a versão recreativa praticada na antiguidade pelos homens, que envolvia o uso de quatro astrágalos. Era notavelmente mais fácil obter um lado largo do que um estreito, levando à expectativa de que um lado estreito teria uma pontuação superior. A jogada chamada de *Vênus*, na qual cada um dos quatro lados – 1 3 4 6 – aparece em qualquer ordem, conferia a pontuação máxima, enquanto jogadas igualmente prováveis como 6 6 6 6 ou 1 1 1 1 valiam menos pontos (Bernstein, 1997).

¹⁸ Disponível em: <https://joyousdemaundes.weebly.com/uploads/4/5/9/9/45994377/knucklebones_-_tali_-_roman.pdf>. Acesso em: 25 ago. 2023.

Estudos empíricos (David, 1962) utilizando o lançamento de um astrágalo moderno de uma ovelha, mostraram que as probabilidades aproximadas são de um em dez lançamentos para os lados 1 ou 6, e quatro em dez lançamentos para os lados 3 ou 4. Em outras palavras, a probabilidade de um lançamento resultar em um dos lados largos do osso para cima é de cerca de 40%, enquanto nos lados estreitos é de 10%. Com base nesses resultados e utilizando o princípio multiplicativo, considerando que a ordem dos lançamentos não importa (por exemplo, os lançamentos 1 1 1 6 e 1 6 1 1 são equivalentes), apresentamos no Quadro 2 a probabilidade de cada possível jogada em 10000 lançamentos.

Quadro 2 – Probabilidade no lançamento de 4 astrágalos

Resultado do lançamento				Probabilidade de cada lançamento em 10000
1 1 1 1		6 6 6 6		1
3 3 3 3		4 4 4 4		256
1 1 1 3	1 1 1 4	6 6 6 3	6 6 6 4	16
3 3 3 1	3 3 3 6	4 4 4 1	4 4 4 6	256
1 1 1 6		6 6 6 1		4
3 3 3 4		4 4 4 3		1024
1 1 3 3	1 1 4 4	6 6 3 3	6 6 4 4	96
3 3 4 4				1536
1 1 6 6				6
1 1 3 4		6 6 3 4		192
3 3 1 6		4 4 1 6		192
3 3 1 4	3 3 6 4	4 4 1 3	4 4 6 3	768
1 1 6 3	1 1 6 4	6 6 1 3	6 6 1 4	48
1 6 3 4				384

Fonte: Adaptado de David (1962, p. 8).

Na perspectiva considerada, encontramos em Dicing (2018) as regras do Jogo dos Astrágalos:

- Cada jogador contribui com uma aposta para o pote¹⁹ antes de começar;

¹⁹ Em jogos com apostas, o termo "pote" diz respeito ao valor monetário ou fichas envolvidas em uma rodada – no caso do Jogo dos Astrágalos, o pote era constituído de moedas. À medida que os jogadores contribuem ou fazem apostas, o pote aumenta, e o objetivo geralmente é ganhá-lo ao ter o melhor resultado ou ao fazer com que os outros jogadores desistam. O jogador que vence o pote fica com todas as apostas acumuladas naquela rodada ou no jogo, tornando-o o prêmio almejado pelos participantes.

- O jogo progride no sentido anti-horário, com cada jogador lançando os quatro ossos e registrando os resultados;
- As "mãos", ordenadas da pontuação mais alta para a mais baixa, são:

Quadro 3 – Principais lançamentos pontuáveis no Jogo dos Astrágalos

Nome da jogada	Descrição	Representação
Vênus	Um número em cada face	1 3 4 6
Os Seis	Um, dois ou três números iguais à 6 com qualquer combinação de números 1, 3, 4	6 # # #
		6 6 # #
		6 6 6 #
Abutre de Seis	Quatro números iguais à 6	6 6 6 6
Abutre de Quatros	Quatro números iguais à 4	4 4 4 4
Abutre de Três	Quatro números iguais à 3	3 3 3 3
O Cão	Quatro números iguais à 1	1 1 1 1

Fonte: Adaptado de Dicing (2018).

- Se mais de um jogador rolar um *Os Seis* e ninguém rolar *Vênus*, então somam-se os valores dos ossos e *Os Seis* de pontuação mais alta vence (por exemplo, um *Os Seis* de 6 6 3 1 = 16 vence um *Os Seis* de 6 4 4 1 = 15);
- Se ninguém rolar um lançamento pontuável, então cada jogador adiciona outra aposta ao pote e a rodada recomeça;
- Qualquer jogador que rolar *O Cão* deve imediatamente pagar outra aposta ao pote.
- Vencedor: Uma vez que todos tenham lançado, a mão de pontuação mais alta ganha o pote;
- A ordem dos números no lançamento não é importante (por exemplo, uma jogada 1 4 4 6 é considerada igual a uma jogada 4 1 6 4);
- Há uma regra alternativa, de que se alguém tirasse *O Cão* ou um *Os Seis*, uma nova aposta seria adicionada, e o primeiro a tirar *Vênus* levaria o pote. Isso sugere que todos ainda começavam com uma aposta inicial. Aqueles sem dinheiro para apostar teriam que sair, e assim o pote poderia ser ganho se apenas uma pessoa tivesse fundos para continuar.

Segundo Crusius (1991), em um trecho do livro *De Divinatione*²⁰, Cícero nos informa que, em seu tempo, existia uma certa suspeita, especialmente entre os mais eruditos, de que o acaso não se limitaria a um único resultado, mas se manifestaria em uma sequência de eventos. Ele levanta a questão se poderíamos considerar como fruto do acaso uma série de cem jogadas em que todas resultassem em *Vênus*, insinuando que tal sequência, dada sua improbabilidade, só poderia ocorrer por meio de uma intervenção divina direta.

É certo que os antigos não foram capazes de desenvolver a noção de regularidade estatística. Fato indicativo de tal incapacidade é o de que a própria jogada de *Vênus* está longe de ser a menos provável quando do lançamento de quatro astrágalos. Ter ela sido escolhida como jogada dominante, vencedora, mostra que eles não se aperceberam de tal característica, baseando sua escolha em motivos puramente mágicos. Ou, talvez, em razões de harmonia estética (Crusius, 1991, p. 12).

O Jogo dos Astrágalos, ao abranger em suas diferentes versões desde a simples brincadeira infantil até práticas místicas e apostas, proporciona um olhar único para a cultura e tradições antigas. Ele reflete a evolução social e cultural ao longo dos séculos, evidenciando o papel do acaso. Neste estudo, buscamos contextualizar historicamente o Jogo dos Astrágalos e vislumbramos seu potencial como recurso a ser adaptado para a introdução aos conceitos de Probabilidade em sala de aula.

1.5 Desenvolvimento da Teoria da Probabilidade

O desenvolvimento da Teoria da Probabilidade começou com uma troca de correspondências entre Blaise Pascal e Pierre de Fermat, na qual discutiram o problema dos pontos. Esta questão é relacionada com um jogo de azar, no qual dois jogadores, com chances iguais de ganhar em cada rodada, contribuem igualmente para um prêmio acumulado. Eles concordam antecipadamente que o primeiro jogador a vencer um certo número de rodadas ganhará o prêmio inteiro. No entanto, surge a questão de como o prêmio deve ser dividido de forma justa caso o jogo seja interrompido antes que um dos jogadores alcance a vitória. Por meio de suas discussões, Pascal e Fermat não apenas propuseram soluções convincentes para esse problema, mas também desenvolveram conceitos fundamentais para a Teoria da

²⁰ *De Divinatione* é um tratado filosófico em dois livros escritos em 45–44 a.C. por Marco Túlio Cícero, após o assassinato de Júlio César. A obra tem a forma de um diálogo cujos interlocutores são Cícero e seu irmão Quinto Túlio Cícero.

Probabilidade: Pascal utilizou seu famoso triângulo, enquanto Fermat fez considerações sobre análise combinatória²¹ (Goswami; Choudhury; Sarmah, 2019).

Abraham de Moivre, matemático francês, desenvolveu a fórmula matemática conhecida como a fórmula de De Moivre para calcular as probabilidades de distribuições binomiais. Esta fórmula é essencial para calcular a probabilidade de um número específico de sucessos em um número fixo de tentativas independentes, onde cada tentativa possui apenas dois resultados possíveis (sucesso ou fracasso) com probabilidades constantes. É fundamental para compreender distribuições de probabilidade e modelar eventos aleatórios em larga escala. Além disso, de Moivre propôs o Teorema Central do Limite (TCL), que é um resultado fundamental na Teoria da Probabilidade. O teorema estabelece que a distribuição de probabilidade da soma de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas se aproxima de uma distribuição normal²², mesmo que as variáveis originais não sejam normalmente distribuídas (David, 1962), com as seguintes condições necessárias:

(I) Cada variável aleatória deve ser independente das outras. Isso significa que o resultado de uma variável não deve influenciar ou depender do resultado de outra. Por exemplo, ao jogar vários dados, o resultado de um dado não afeta o resultado dos outros.

(II) Todas as variáveis aleatórias devem seguir a mesma distribuição de probabilidade. Ou seja, cada variável tem a mesma média (valor esperado) e a mesma variância (medida de dispersão). Usando o exemplo dos dados, isso seria como garantir que todos os dados têm o mesmo número de faces e as mesmas chances de cair em qualquer número.

(III) É necessário ter um número suficientemente grande de variáveis aleatórias. Não há um número exato que define "suficientemente grande", mas, em termos práticos, quanto mais variáveis existirem, melhor será a aproximação à distribuição normal. Na prática, para muitos problemas, uma quantidade de 30 variáveis já pode ser suficiente.

(IV) Cada variável deve ter uma variância finita, o que significa que elas não devem ter valores extremamente extremos que ocorram frequentemente. Se as variáveis possuírem valores

²¹ Para consultar os cálculos matemáticos utilizados por Pascal e Fermat, recomendamos a leitura na íntegra do artigo citado, Akhil Goswami, Gautam Choudhury and Hemanta Kumar Sarmah, disponível no link: <https://www.researchgate.net/publication/333982487_Role_of_Fibonacci_Blaise_Pascal_Pierre_de_Fermat_and_Abraham_de_Moivre_in_the_Development_of_Number_Patterns_and_Probability_A_Historical_Search>. Acesso em 09 set. 2023.

²² Uma distribuição normal é uma função de probabilidade que possui uma curva em forma de sino, simétrica em torno da média. Ela é caracterizada pela média (o ponto central) e pela variância (a largura da curva), com a área total sob a curva somando 100%. Essa distribuição descreve como os valores de uma variável aleatória se distribuem, concentrando-se em torno de um valor central, e é amplamente utilizada para modelar fenômenos naturais e realizar inferências estatísticas (Sousa, 2019).

que podem variar demais (com uma variância infinita), a soma delas não seguirá uma distribuição normal.

No Quadro 4, apresentamos os possíveis resultados da soma do lançamento de dois dados. São 36 possibilidades, sendo a soma 7 a mais provável, e as somas 2 e 12 as menos prováveis.

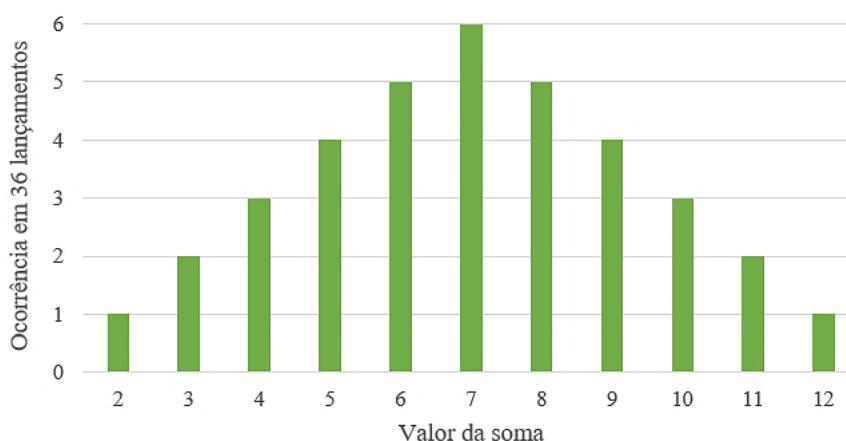
Quadro 4 – Possíveis somas no lançamento de dois dados

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Fonte: Elaborado pelo autor.

Na Figura 11, é possível observarmos como essa soma se distribui, respeitando as condições necessárias do Teorema Central do Limite, se aproximando de uma distribuição normal.

Figura 11 - Distribuição dos resultados na soma do lançamento de dois dados



Fonte: Elaborado pelo autor.

O matemático suíço Jacob Bernoulli formulou a Lei dos Grandes Números em sua obra intitulada "Ars Conjectandi", publicada postumamente em 1713. A Lei dos Grandes Números possui duas versões: a Lei Fraca dos Grandes Números e a Lei Forte dos Grandes Números, que explicam a convergência de médias para a média real. A Lei Fraca dos Grandes Números

estabelece que, à medida que o tamanho da amostra aumenta, a probabilidade de que a média da amostra se aproxime da média teórica também aumenta. Isso implica que, à medida que o tamanho da amostra cresce, a variância da média da amostra diminui, mas a média da amostra não necessariamente converge para a média teórica de forma exata. Por outro lado, a Lei Forte dos Grandes Números afirma que, à medida que o tamanho da amostra aumenta, a média da amostra converge para a média teórica de forma exata (David, 1962). Em resumo, a Lei Fraca dos Grandes Números garante que a média amostral se aproxima da média teórica com alta probabilidade, enquanto a Lei Forte dos Grandes Números garante que a média amostral converge exatamente para a média teórica quase certamente.

Na Figura 12 é possível observarmos como a proporção de caras, à medida que o número de lançamentos de uma moeda aumenta, em azul, tende ao resultado teórico de 0,5, em verde, respeitando a Lei Forte dos Grandes Números.

Figura 12 - Simulação de 200 lançamentos de uma moeda



Fonte: Elaborado pelo autor no software Statistical Applets Probability²³.

Pierre-Simon Laplace aprimorou o resultado inicialmente descoberto por Abraham de Moivre, estabelecendo que a distribuição de probabilidade da soma de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas converge para uma distribuição normal,

²³ Disponível em: <https://digitalfirst.bfwpub.com/stats_applet/stats_applet_10_prob.html>. Acesso em 08 jul. 2023.

independentemente das características das distribuições originais. Este conceito é conhecido hoje como o Teorema de De Moivre-Laplace, que aproxima uma distribuição binomial para uma distribuição normal. Além disso, Laplace propôs o Princípio da Indiferença, um princípio filosófico que sugere que, na ausência de informações relevantes, todas as possibilidades são igualmente prováveis. Embora o Princípio da Indiferença tenha sido alvo de críticas e refinamentos ao longo do tempo, sua influência no desenvolvimento da Teoria da Probabilidade e na atribuição de probabilidades a eventos incertos é relevante. Laplace também defendeu a visão de que a probabilidade é uma medida subjetiva da incerteza, podendo ser estimada com base em evidências empíricas e na opinião de um indivíduo, contribuindo assim para a abordagem subjetiva da probabilidade, especialmente na área de estatística bayesiana (Stigler, 1975).

Com Laplace tem-se a definição clássica de probabilidade, também chamada de teórica, que assume uma quantidade finita de eventos equiprováveis. Pela definição de Dantas (2004, p. 25), “[...] consideremos um espaço amostral S com N eventos simples, que suporemos igualmente possíveis. Seja A um evento de S composto de m eventos simples. A probabilidade de A , que denotaremos $P(A)$, é definida por: $P(A) = \frac{m}{N}$ ”.

Pelo exposto até o momento, entendemos que a Teoria da Probabilidade encontra suas raízes na formulação de conceitos matemáticos que abrangem uma ampla gama de contextos, tanto aplicados quanto abstratos. Essa formalização nasceu da necessidade de quantificar a incerteza presente em diversos fenômenos, tanto do mundo real quanto de abstrações teóricas. Percebemos que a formalização matemática nos oferece a linguagem acadêmica para expressar e resolver problemas probabilísticos, mas, por vezes, pode distanciar os estudantes da compreensão intuitiva e prática desses conceitos. É crucial que os estudantes também possuam uma apropriação sólida sobre probabilidades, relacionando-as a situações do mundo real e abstrato.

1.6 A probabilidade na Contemporaneidade

Andrey Kolmogorov, matemático russo, é conhecido por ter estabelecido os fundamentos axiomáticos da Teoria da Probabilidade, assim como Euclides fez com a Geometria. Ele forneceu uma definição rigorosa e matemática para a Probabilidade, tratando-a como uma medida em um espaço de probabilidade (Viali, 2008). Os três axiomas de Kolmogorov (1956), também conhecidos como os axiomas da probabilidade, definem:

- A probabilidade de um evento nunca pode ser negativa. Para qualquer evento A , a probabilidade $P(A)$ deve ser maior ou igual a zero: $P(A) \geq 0$;
- A probabilidade do espaço amostral completo é igual a 1. Ou seja, a soma de todas as probabilidades dos eventos possíveis em um espaço amostral deve ser igual a 1:

$$P(S) = 1, \text{ onde } S \text{ é o espaço amostral};$$

- Seja $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ uma sequência de eventos mutuamente exclusivos, ou seja, eventos que não podem ocorrer simultaneamente. Então, a probabilidade da união desses eventos é igual à soma das probabilidades individuais:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n).$$

Richard von Mises propôs que a probabilidade de um evento está diretamente relacionada à frequência relativa em que ele ocorre. Segundo sua abordagem frequentista, a probabilidade de um evento A é definida como o limite de S/n quando n tende ao infinito, onde S é a quantidade de vezes que o evento A ocorre e n é o número de repetições do experimento (Gama; dos Santos; da Silva, 2019).

Von Mises, considerado o pioneiro dessa abordagem, avançou a discussão ao exigir que o limite proposto seja invariante em relação a permutações no conjunto de repetições considerado. É importante ressaltar que esse conceito de limite difere da ideia de limite que geralmente se encontra no primeiro contato com as disciplinas de Cálculo, que descreve o comportamento de uma função à medida que a variável de entrada se aproxima de um determinado valor, mas sem nunca o atingir²⁴. A ideia central na perspectiva da Probabilidade é repetir o experimento um número suficientemente grande de vezes e utilizar a proporção de um determinado resultado como sua probabilidade, de acordo com Von Mises (Gama; dos Santos; da Silva, 2019).

Ao considerar-se uma quantidade de eventos que não sejam finitos e/ou não equiprováveis, pode-se utilizar da ideia da probabilidade frequentista, pois ao se repetir um experimento por muitas vezes, “nas mesmas condições, e de modo que as repetições sucessivas não dependam dos resultados anteriores, observa-se que a frequência relativa de ocorrências do evento A tende à uma constante p .” (Dantas, 2004, p. 26).

O matemático inglês Thomas Bayes apresentou um teorema que demonstra como as chances de acreditar em um argumento ou teoria específica devem ser ajustadas com base em novas evidências. A forma mais simples desse teorema calcula o impacto da evidência nas

²⁴ Para revisar as definições e teoremas matemáticos sobre limite nessa perspectiva, sugerimos a leitura dos primeiros capítulos de livros de Cálculo, escritos por autores como James Stewart e Hamilton Luiz Guidorizzi.

chances de o argumento se provar correto, usando a fórmula: Chances (sua crença estar correta, dada a nova evidência) = $RP \times \text{Chances (sua crença estar correta)}$, onde RP representa a "razão de probabilidade". Essa razão de probabilidade captura a força da evidência descoberta, e é determinada ao comparar duas "probabilidades condicionais" – isto é, probabilidades que dependem de duas premissas concorrentes. Matematicamente, as chances de um evento A ocorrer afetam as chances de um evento subsequente B . Especificamente, a “probabilidade condicional” de B , dado A , é: $P(B | A) = P(A | B) \times P(B)/P(A)$ (Matthews, 2017).

Ao observar experimentos que não podem ser reproduzidos repetidas vezes de forma idêntica, por sua raridade ou por envolverem muitas variáveis externas e mutáveis, como observar a chance de ocorrência de um tremor sísmico no Brasil, pode-se utilizar a probabilidade subjetiva. Essa corrente considera “a probabilidade de um evento como sendo a medida da crença que o observador possui na ocorrência do evento” (Dantas, 2004, p. 28), respeitando os axiomas de probabilidade.

A Teoria da Probabilidade é fundamentada em abordagens distintas, que respeitam os axiomas da probabilidade. Kolmogorov definiu a probabilidade a partir da medida em um espaço de probabilidade. Von Mises propôs a abordagem frequentista, ligando a probabilidade à frequência relativa em repetições infinitas. Bayes introduziu o teorema que ajusta crenças com base em novas evidências usando a razão de probabilidade. Para eventos raros, como terremotos, a probabilidade subjetiva é usada, refletindo a crença do observador. A partir dessas categorizações, passamos a discutir sobre quais abordagens da probabilidade são comumente mais empregadas em sala de aula e a proposta deste trabalho.

2. JOGO E PROBABILIDADE NO CONTEXTO EDUCACIONAL

Discutimos aqui um dos pontos centrais deste trabalho: o papel do jogo no contexto educacional, em especial no ensino de probabilidade. Nossos estudos abrangem perspectivas educacionais relacionadas ao uso de jogos, além de uma aproximação com a Atividade Orientadora de Ensino (AOE) e exploramos as diretrizes curriculares nacionais no que tange jogo e probabilidade. Com as reflexões apresentadas, buscamos estabelecer uma fundamentação para potencializar a utilização do Jogo dos Astrágalos no contexto educacional.

2.1 Perspectivas de jogo no contexto educacional

Nesta subseção apresentamos o jogo no contexto educacional, apoiados na Teoria Histórico-Cultural, que possui como principal referencial teórico Lev Semenovich Vygotsky, e em estudos nacionais desenvolvidos por Moura (1992), Grando (2000) e Kishimoto (1998).

Ao refletir sobre o jogo no contexto educacional, encontramos em Kishimoto (1998, p. 13) questionamentos como “se há diferença entre o jogo e o material pedagógico, se o jogo educativo empregado em sala de aula é realmente jogo e se o jogo tem um fim em si mesmo ou é um meio para alcançar objetivos”.

Segundo Moura (1992), o ensino deve levar em consideração o processo de conhecimento, abarcando a apropriação de novos conceitos e o desenvolvimento das estruturas cognitivas. Ainda segundo o autor, especificamente na Educação Matemática, é importante tentar alcançar dois objetivos fundamentais: o desenvolvimento cognitivo e a apropriação de conceitos científicos. Nesse contexto, os jogos podem desempenhar um papel importante, pois constituem instrumentos para auxiliar no ensino do conteúdo, estimular o desenvolvimento de habilidades e fomentar o desenvolvimento do sujeito.

Nesta perspectiva, Martins (1997) tece reflexões de que a abordagem na perspectiva da Teoria Histórico-Cultural busca criar condições para que os estudantes se tornem cidadãos autônomos, capazes de pensar criticamente e agir por si, livres de manipulações externas. Isso envolve investigação e discussão para a internalização de habilidades mentais que promovam o pensamento independente. A psicologia sócio-histórica, especialmente as práticas sociointeracionistas, são vistas como uma alternativa às abordagens tradicionais, colaborando para essa reflexão sobre o papel da escola na formação de sujeitos críticos e comprometidos com a sociedade.

Para os vygotskianos, os jogos são condutas que imitam ações reais e não apenas ações sobre objetos ou uso de objetos substitutos. Não há atividade

propriamente simbólica se os objetos não ficam no plano imaginário e são evocados por mais que palavras que por gestos. [...] Os estudiosos de Vygotski focalizam a questão da atividade social (Kishimoto, 1998, p. 42-43).

A compreensão de que os estudantes não são apenas receptores passivos do conhecimento, mas sim sujeitos participantes no processo de aprendizagem, tem ganhado destaque na educação brasileira a partir dos anos 1990. Embora em 2025 ainda possa persistir, em certos momentos ou sob determinadas perspectivas, uma visão mais tradicional que os percebe dessa forma. Reconhece-se que nesse processo existem elementos internos importantes, os quais não podem ser ignorados pelos educadores (Moura, 1994).

O jogo é elemento do ensino apenas como possibilitador de colocar o pensamento do sujeito em ação. O jogo é o elemento externo que irá atuar internamente no sujeito, possibilitando-o a chegar a uma nova estrutura de pensamento (Moura, 1994, p. 20).

Segundo Moura (1992), os jogos podem ser utilizados como instrumentos para a resolução de problemas e podem ser divididos em dois tipos: o jogo desencadeador de aprendizagem e o jogo de verificação. A distinção entre esses tipos não depende do jogo em si, mas sim da maneira como ele é empregado em sala de aula, influenciado pela postura do professor, a dinâmica criada e o objetivo estabelecido para cada jogo. O papel do professor é fundamental para classificar os jogos em um ou outro tipo e, assim, potencializar a apropriação dos conceitos pelos estudantes a depender da organização que fará de seu ensino. Neste trabalho, buscamos desenvolver situações em que o jogo versou como desencadeador de aprendizagem.

Para Moura (1994), o uso de jogos na Educação Matemática encontra justificativa ao introduzir uma linguagem matemática que, aos poucos, será incorporada aos conceitos matemáticos formais. Além disso, para o autor, os jogos contribuem para desenvolver a capacidade de lidar com informações e criam significados culturais para os conceitos matemáticos, auxiliando o estudo de novos conteúdos.

Segundo Marco (2004), o jogo proporciona uma experiência lúdica que permite ao professor observar o movimento do pensamento do estudante diante de situações de resolução de problemas. Dentro desse processo, o estudante avança da situação dilemática para uma compreensão mais profunda do contexto, por meio de uma análise cuidadosa, culminando na formulação de uma questão que o guia em direção à resolução do problema, ou seja, à sua síntese. Nessa progressão, o estudante tende a organizar seu processo de pensamento matemático de forma mais estruturada.

A linguagem matemática, de difícil acesso e compreensão do aluno, pode ser simplificada por meio da ação do jogo. A construção, pelo aluno, de uma linguagem auxiliar, coerente com a situação de jogo, propicia estabelecer uma “ponte” para a compreensão da linguagem matemática, enquanto forma de expressão de um conceito, e não como algo abstrato, distante e incompreensível, que se possa manipular independentemente da compreensão dos conceitos envolvidos nesta exploração. O registro no jogo, gerado por uma necessidade, pode representar um dos caminhos à construção desta linguagem matemática (Grando, 2000, p. 37).

O professor pode incorporar estratégias de resolução de problemas e jogos como componentes fundamentais de suas aulas, com o intuito de cultivar em cada estudante a habilidade de enfrentar e solucionar desafios, compreender situações-problema, elaborar planos, executá-los e realizar avaliações críticas (Moura, 1992). “Ao jogar, o sujeito está utilizando sua subjetividade, atribuindo sentido aos seus atos, às suas escolhas e à sua criação” (Marco, 2004, p. 33). Nessa perspectiva, entendemos que o estudante é um sujeito histórico, cultural e humano, assumindo um papel ativo em seu processo de aprendizagem.

Uma proposta educacional focada exclusivamente no “jogo pelo jogo”, ideia enraizada desde a Grécia Antiga, contradiz teorias e conceitos estabelecidos em diversas metodologias de ensino, destacando como crucial organização do ensino pelo professor (Cruz; Passonian, 2021). Além disso,

[...] sabemos que o jogo pelo jogo não é promotor de aprendizagem, mas [sim] aquele que possibilita à criança interpretar seus conhecimentos anteriores e dialogar com seus pares, para que, de fato, se aproprie de determinado conteúdo (Lopes; Borowsky, 2017, p. 185).

Segundo Grando (2000), os momentos pedagógicos para a utilização dos jogos em situações de sala de aula podem ser descritos em sete etapas:

1. *Familiarização com o material do jogo:* Nesta etapa, os estudantes têm contato com os elementos do jogo, como dados, peões e tabuleiros, e exploram suas características por meio de simulações de jogadas. Analogias com jogos conhecidos pelos estudantes podem ser estabelecidas.
2. *Reconhecimento das regras:* Os estudantes aprendem as regras do jogo de diversas maneiras, seja por meio de explicações do orientador, pela leitura das regras ou pela observação de partidas-modelo. Durante essas partidas, o orientador joga com um dos estudantes experientes, enquanto os demais tentam identificar as regularidades e compreender as regras.

3. *O "Jogo pelo jogo"*: Momento de jogar para garantir a compreensão das regras e explorar as noções matemáticas contidas no jogo. O foco é a internalização das regras pelos estudantes, garantindo que as compreendam e as utilizem corretamente durante o jogo.
4. *Intervenção pedagógica verbal*: Nesta fase, o orientador intervém durante o jogo por meio de perguntas e observações, estimulando os estudantes a analisar suas jogadas, prever possibilidades futuras e corrigir eventuais erros. A atenção é direcionada para os procedimentos utilizados pelos estudantes e sua relação com os conceitos matemáticos.
5. *Registro do jogo*: O registro das partidas pode acontecer, dependendo do jogo e dos objetivos da atividade. Ele pode incluir anotações dos pontos ou dos procedimentos e cálculos utilizados pelos estudantes. O registro serve como uma forma de sistematização e formalização, permitindo que os estudantes analisem suas ações e desenvolvam novas estratégias.
6. *Intervenção escrita*: Os estudantes enfrentam situações-problema relacionadas ao jogo, propostas pelo orientador ou por outros colegas. A resolução desses problemas permite uma análise mais específica do jogo, abordando diferentes aspectos que podem não ter surgido durante as partidas. O registro do jogo também é feito nesse momento.
7. *Jogar com "competência"*: O último momento consiste em retornar à situação real de jogo, considerando as intervenções anteriores. Os estudantes recorrem às estratégias e conclusões desenvolvidas durante a resolução de problemas para jogar com mais competência. Esse processo visa garantir que o jogo seja considerado sob diferentes aspectos e óticas, fortalecendo o aprendizado matemático, enquanto ainda preserva a ludicidade do jogo.

Grando (1994) ressalta que o jogo a ser utilizado deve ser um autêntico desafio ao estudante, capaz de gerar "conflitos cognitivos" e despertá-lo para ação, incentivando seu envolvimento com a proposta. Entendemos que esses desafios podem gerar uma necessidade nos estudantes.

Para isso, ao apresentar um jogo aos estudantes, é fundamental que o professor conheça o jogo e que este proporcione desafio aos estudantes, apresentando-lhes um problema a ser resolvido. Com o seu papel desencadeador, o jogo pode contribuir e estimular o processo de aprendizagem.

A importância do jogo está nas possibilidades de aproximar a criança do conhecimento científico, vivendo "virtualmente" situações de solução de problemas que os aproxima daquelas que o homem "realmente" enfrenta ou enfrentou (Moura, 1994, p. 24).

O jogo com intuito pedagógico, em especial na perspectiva da Teoria Histórico-Cultural, destaca-se como um instrumento para o ensino de Matemática, podendo promover o desenvolvimento cognitivo e a apropriação de conceitos científicos. O professor desempenha um papel central na organização do ensino com jogos em sala de aula, adotando-os conforme os objetivos estabelecidos, visando formar estudantes autônomos, habilitados no manejo de estratégias e preparados para pensar criticamente.

2.2 Uma aproximação com o jogo pela Atividade Orientadora de Ensino

A Atividade Orientadora de Ensino (AOE), conforme proposta por Moura *et al.* (2010), é entendida como uma maneira geral de organizar a atividade pedagógica, unindo a atividade de ensino (do professor) e a atividade de aprendizagem (dos estudantes). Essa abordagem, que surge como uma perspectiva teórico-metodológica fundamentada na Teoria Histórico-Cultural e na Teoria da Atividade, considera a necessidade e o motivo como elementos centrais, orientando ações que levem em conta as condições da instituição escolar, buscando a apropriação dos conceitos como um dos seus objetivos (Moura; Araujo; Serrão, 2018).

No âmbito da AOE, o professor desempenha um papel crucial como organizador da atividade, consciente das dimensões do trabalho pedagógico, incluindo conteúdo, tempo, espaço e condições tanto objetivas quanto subjetivas. Essa conscientização permite ao professor ter ferramentas para avaliar a sua proposta de ensino, interpretando as respostas dos estudantes e identificando eventuais obstáculos à apropriação do conhecimento proposto (Oliveira; Panossian, 2022).

Nesse contexto, o ensino é concebido como parte do processo educacional, cujo objetivo é a apropriação pelos estudantes dos conhecimentos desenvolvidos e acumulados pela humanidade ao longo da história e das diferentes práticas culturais. A educação visa, assim, apresentar às novas gerações os resultados obtidos pela humanidade diante de suas necessidades sociais, desde as mais básicas até as mais complexas, para que deles se apropriem. Isso ocorre por meio da interação entre as gerações, com as crianças se apropriando da cultura por meio das relações com seus pares e com os adultos (Moura; Araujo; Serrão, 2018).

Na prática da AOE, o ambiente social é importante para o desenvolvimento, proporcionando momentos nos quais os estudantes podem estabelecer relações entre si, com os adultos e com os artefatos culturais. Essas interações visam promover o desenvolvimento emocional e cognitivo dos estudantes, mobilizando-os para a aprendizagem (Moura; Araujo; Serrão, 2018).

Ao adotar os pressupostos vigotskianos, a atividade pedagógica na perspectiva da AOE busca criar situações que mobilizem os estudantes conforme os processos históricos de produção de conhecimento humano. Para tanto, são elaboradas Situações Desencadeadoras de Aprendizagem (SDA) que visam colocar os estudantes em tensão criativa, semelhante às aquelas enfrentadas pelas gerações anteriores ao resolver problemas práticos ou subjetivos, mobilizando tanto o indivíduo quanto o coletivo para buscar soluções (Moura; Araujo; Serrão, 2018, p. 421).

A situação desencadeadora de aprendizagem deve contemplar a gênese do conceito, ou seja, a sua essência; ela deve explicitar a necessidade que levou a humanidade à construção do referido conceito, como foram aparecendo os problemas e as necessidades humanas em determinada atividade e como os homens foram elaborando as soluções ou sínteses no seu movimento lógico-histórico (Moura, 2010, p. 223).

De acordo com Lopes e Borowsky (2017), a síntese histórica do conceito ressalta a necessidade que a humanidade experimentou, levando à elaboração dos conceitos matemáticos. A síntese da solução coletiva ocorre quando os estudantes buscam e criam soluções para o problema proposto, com a orientação do professor para avaliar hipóteses, teses e promover questionamentos.

[...] a solução da situação-problema pelos estudantes deve ser realizada na coletividade. Isso se dá quando aos indivíduos são proporcionadas situações que exijam o compartilhamento das ações na resolução de uma determinada situação que surge em certo contexto (Moura, 2010, p. 225).

O movimento lógico-histórico, presente na AOE, baseia-se na ideia de que o processo de desenvolvimento de um objeto ou conceito matemático deve ser estudado tanto em seu contexto histórico quanto em seu desenvolvimento lógico. Historicamente, isso envolve compreender as mudanças e etapas que o conceito passou ao longo do tempo. Logicamente, implica na reconstrução e elaboração do processo histórico pelo pensamento, não apenas copiando os passos históricos, mas formando uma compreensão teórica que reflita a essência e o conteúdo do fenômeno. Dessa forma, a abordagem lógico-histórica articula o conhecimento histórico com o desenvolvimento teórico (Dias; Saito, 2009).

De acordo com Moura (2022, p. 95), “a AOE é a mediação na atividade do professor, que tem como necessidade o ensino de um conteúdo ao sujeito em atividade, cujo objetivo é a apropriação desse conteúdo entendido como um objetivo social”.

Figura 13: AOE: relação entre atividade de ensino e atividade de aprendizagem



Fonte: Moraes (2008, p. 116) citada por Moura *et al.* (2010, p. 219).

Portanto, a AOE representa um esforço contínuo de humanização da atividade de ensino, que vai além da simples reprodução dos conteúdos, a partir da organização das ações em sala de aula ao promover conexões com a atividade de aprendizagem (Oliveira; Panossian, 2021, p. 16). Na AOE “constitui-se um modo geral de organização do ensino, em que seu conteúdo principal é o conhecimento teórico e seu objeto é a constituição do pensamento teórico do indivíduo no movimento de apropriação do conhecimento” (Moura, 2022, p. 95).

A atividade é orientadora, no sentido de que é construída na inter-relação professor e estudante e está relacionada à reflexão do professor que, durante todo o processo, sente necessidade de reorganizar suas ações por meio da contínua avaliação que realiza sobre a coincidência ou não entre os resultados atingidos por suas ações e os objetivos propostos (Moura, 2022, p. 96).

Entendemos que no processo da AOE, tanto professor e estudante assumem papéis complementares em um movimento contínuo de ensino e aprendizagem. Enquanto o estudante participa ativamente da atividade, apropriando-se do conhecimento teórico e desenvolvendo sua capacidade de análise e síntese diante das situações-problema propostas, o professor interpreta as respostas, identifica obstáculos e reorganiza suas ações pedagógicas. Essa dinâmica evidencia que a apropriação do conhecimento não se restringe ao acúmulo de

informações, mas implica a constituição do pensamento teórico, dimensão central do trabalho educativo.

A tarefa do pensamento teórico é justamente superar a “pseudoconcreticidade”, elaborar os dados da contemplação e da representação na forma de conceitos, é revelar o movimento, a essência do fenômeno, por meio do procedimento de ascensão do abstrato ao concreto. Essa é a maneira de o pensamento apropriar-se do concreto para reproduzi-lo teoricamente como coisa concreta (MARX, 1989). O concreto expressa certo todo desenvolvido, é a “concentração de muitas determinações, ou seja, a unidade do diverso” (MARX, 1989, p. 410). [...] O processo de ascensão do abstrato ao concreto deve revelar as contradições presentes na abstração inicial. O objeto deve ser tomado, com a ajuda das abstrações, em unidade com o todo, em relação com suas outras manifestações (singularidades), com sua essência e origem universais. Esse procedimento está na base da formação do pensamento teórico que provê as pessoas dos meios universais de compreensão da essência das mais diferentes esferas da vida (DAVIDOV, 1988) (Moura, 2022, p. 36).

Nesse sentido, a AOE transcende a transmissão de conteúdos, promovendo a criação de conexões consistentes entre a atividade de ensino e a atividade de aprendizagem, por meio de Situações Desencadeadoras de Aprendizagens (SDA) propostas.

As Situações Desencadeadoras de Aprendizagem (SDA) são organizadas a partir dos objetivos de ensino do professor, que se traduzem em conceitos a serem apropriados pelos estudantes no espaço de aprendizagem. O objetivo principal da SDA é provocar nos estudantes a necessidade de se envolverem ativamente na busca da solução para um problema que os mobilize para a atividade de aprendizagem e a apropriação do conceito envolvido. As SDA podem ser materializadas por meio de diferentes recursos metodológicos: jogos (com intuito pedagógico), situações emergentes do cotidiano e história virtual do conceito (Moura *et al.*, 2010). De acordo com Oliveira e Passonian (2021, p. 3), o conceito de Situação Desencadeadora de Aprendizagem (SDA) é “central, mas não pode ser interpretado de forma desvinculada das compreensões sobre a própria Atividade Orientadora de Ensino”.

Podemos compreender uma SDA como um cenário que contém um problema desencadeador, o qual se apresenta como um desafio ou uma questão que se assemelha aos processos humanos de construção do conhecimento, mobilizando a atividade de aprendizagem dos estudantes (Oliveira; Panossian, 2022). Ainda,

[...] entende-se que o professor define o problema e a situação simultaneamente, dada sua intencionalidade e considerando os aspectos teóricos da organização do ensino a partir da Atividade Orientadora de Ensino. Justamente por isso, o processo de criação ou adaptação de situações desencadeadoras de aprendizagem seria dinâmico, dependendo muito mais da intencionalidade pedagógica do que das condições já existentes (Oliveira; Panossian, 2021, p. 21).

O problema desencadeador visa despertar a necessidade de busca pela resolução de forma individual ou coletiva, em um processo que aborda os conceitos a serem apropriados. “É somente a partir do problema que uma situação se torna realmente desencadeadora de aprendizagem” (Oliveira; Panossian, 2022, p. 57).

A história virtual do conceito, como delineada por Moura *et al.* (2016), permite que os estudantes resolvam problemas em grupo para atender a necessidades históricas similares, com apresentação lúdica dos desafios, direcionando o processo de aprendizagem de forma participativa. Utilizando situações de contos infantis, lendas ou da História da Matemática, a história virtual visa envolver os estudantes na construção de soluções contextualizadas, promovendo a apropriação do conhecimento. Busca-se, assim, explorar a reflexão sobre o papel histórico na formação do conhecimento, integrando os estudantes no processo de aprendizagem.

De acordo com Moura e Lanner de Moura (1998), uma situação emergente do cotidiano ocorre quando uma observação feita por um estudante pode ser aproveitada para resolver um problema que demanda o uso de conhecimentos prévios e que seja relevante para os estudantes, permitindo que cada um possa contribuir para a solução. A criação dessas situações não se dá de forma espontânea, mas sim é intencionalmente organizada pelo professor dentro do contexto do ensino, a partir da observação trazida pelos estudantes. Isso requer uma reflexão sobre como integrar tais situações dentro da proposta de atividade de ensino do professor.

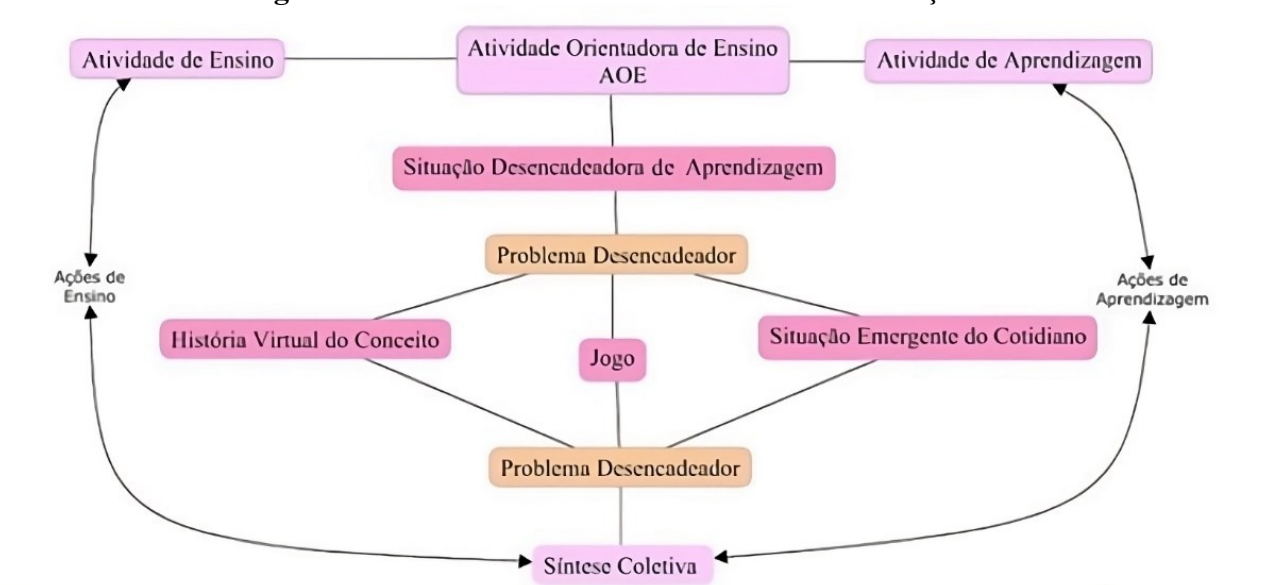
O jogo, com base na Teoria Histórico-Cultural, é reconhecido como a atividade principal na infância, desempenhando papel crucial no desenvolvimento cognitivo e cultural das crianças. Ao integrar o movimento lógico-histórico dos conceitos trabalhados, o jogo estimula os estudantes a resolverem problemas contextualizados, promovendo a transição do conhecimento empírico para o teórico (Oliveira; Panossian, 2022).

A utilização de jogos como recurso educacional é entendida como uma forma de organizar a prática pedagógica. No entanto, o professor pode se deparar com o desafio de infundir intencionalidade pedagógica ao selecionar ou elaborar um jogo e conceber uma aula em torno desse recurso. O papel do professor é essencial para orientar as relações e discussões estabelecidas pelos estudantes durante o jogo, permitindo que se apropriem de conceitos que possam estar envolvidos na situação proposta. Optar por organizar o ensino de Matemática por meio de jogos implica que, a depender das ações e intencionalidades pedagógicas do professor, os conceitos matemáticos podem ser desencadeados para que os estudantes possam se apropriar. Essa abordagem orienta a prática pedagógica quando o professor planeja as atividades de forma que as ações dos estudantes os levem a alcançar um nível mais avançado de conhecimento, sendo esse o objetivo principal da utilização de jogos (Lopes; Borowsky, 2017).

Segundo Lopes e Borowsky (2017, p. 179), “O jogo precisa desencadear uma busca pela apropriação do conceito, sendo que pode ser criado pelo professor, readaptado ou, até mesmo, um jogo que já existe no meio cultural da criança, desde que a matemática esteja presente”. O professor pode adotar dois enfoques: usar um jogo existente que perpassasse pelos conceitos matemáticos desejados, ou criar/adaptar um jogo de forma que o incorpore com os conceitos matemáticos desejados. Em ambos os casos, é essencial compreender a lógica e a história da construção do conceito, abordar o jogo proposto com intencionalidade, de modo a propor um problema de aprendizagem aos estudantes (Lopes; Borowsky, 2017).

[...] o Problema constitui-se como essência do desencadeamento da aprendizagem. Dessa forma, entendemos que o Problema Desencadeador de Aprendizagem [PDA] se constitui como a essência da SDA. O PDA não é sinônimo da SDA nem, tampouco, se confunde com ela, mas é seu elemento essencial (Virgens, 2019, p. 127).

Figura 14: Atividade Orientadora de Ensino e suas ações



Fonte: Oliveira e Panossian (2022, p. 50).

Nessa perspectiva, o professor assume um papel essencial como organizador da ação pedagógica, intervindo de maneira objetiva no processo de apropriação dos conceitos pelos estudantes. É uma Atividade Orientadora de Ensino, pois cria possibilidades de intervenção que permitem elevar o conhecimento do estudante (Moura, 2004).

O jogo pode, ou não, ser jogo no ensino. Ele pode ser tão maçante quanto a resolução de uma lista de expressões numéricas: perde a ludicidade. No entanto, resolver uma expressão numérica também pode ser lúdico, dependendo da forma como é conduzido o trabalho. O jogo deve ser jogo do conhecimento, e isto é sinônimo de movimento do conceito e de desenvolvimento (Moura, 1992, p. 49).

O jogo, com intuito pedagógico, pode viabilizar uma abordagem dinâmica e intencional no ensino, fomentando a interação entre professor e estudante, visando proporcionar meios para a apropriação de conceitos e desenvolvimento de habilidades específicas pelos estudantes. Nessa perspectiva, entendemos que o jogo e seus desdobramentos podem proporcionar desafios que desencadeiam ação e reflexão, análises e sínteses, ampliando e aprimorando o processo de apropriação dos conceitos. Entendemos e exploramos neste trabalho o Jogo dos Astrágalos como uma situação de ensino potencialmente desencadeadora de aprendizagem (Lopes; Silva; Borowsky; Perlin, 2023).

Considerando essa perspectiva de ensino orientada pela ação intencional e pela mediação reflexiva, entendemos como fundamental relacionar as propostas didáticas aos documentos normativos que orientam a educação básica no Brasil. Ao compreender o Jogo dos Astrágalos como uma potencial SDA, é necessário verificar em que medida essa proposta se articula com os objetivos e competências estabelecidos pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Nesse sentido, apresentamos a seguir os fundamentos da BNCC e suas orientações para o ensino de Probabilidade, de modo a evidenciar a pertinência do uso do jogo no contexto escolar.

2.3 Jogo e Probabilidade na BNCC

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento de caráter normativo que propõe como objetivo estabelecer as aprendizagens essenciais que todos os estudantes devem desenvolver ao longo da Educação Básica no Brasil e está em conformidade com o Plano Nacional de Educação (PNE) e as Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica (DCN). A BNCC é a atual referência nacional na formulação de currículos e propostas pedagógicas, e busca, em seu texto, contribuir para a harmonização de políticas e ações em níveis federal, estadual e municipal (Brasil, 2017).

A BNCC sugere o uso de jogos desde o Ensino Infantil até o Ensino Médio, com um enfoque especial a partir do Ensino Fundamental 1 na disciplina de Educação Física. Na área de Matemática, o jogo é contextualizado como recurso didático, sem uma orientação direta para sua utilização ou metodologia específica.

Além dos diferentes recursos didáticos e materiais, como malhas quadriculadas, ábacos, jogos, calculadoras, planilhas eletrônicas e softwares de geometria dinâmica, é importante incluir a história da Matemática como recurso que pode despertar interesse e representar um contexto significativo para aprender e ensinar Matemática. Entretanto, esses recursos e materiais precisam estar integrados a situações que propiciem a reflexão, contribuindo

para a sistematização e a formalização dos conceitos matemáticos (Brasil, 2017, p. 298).

Dentre os recursos e estratégias destacadas pela BNCC para o ensino de Matemática, destaca-se a importância de abordar conceitos que conectem os conteúdos às situações cotidianas, promovendo reflexões entre a prática e a formalização dos conceitos. Nesse contexto, Probabilidade se apresenta como um tema central, alinhando-se à proposta de fomentar o pensamento crítico e a compreensão de eventos aleatórios, em consonância com os objetivos gerais da Educação Básica. A Probabilidade está presente em todo o Ensino Fundamental e Médio, apresentada juntamente com a Estatística em uma Unidade Temática na BNCC. Segundo o documento, o estudo da Probabilidade nos anos do Ensino Fundamental I tem como finalidade “promover a compreensão de que nem todos os fenômenos são determinísticos” (Brasil, 2017, p. 274). Já no Ensino Fundamental II, o estudo é ampliado e aprofundado “por meio de atividades nas quais os estudantes façam experimentos aleatórios e simulações para confrontar os resultados obtidos com a probabilidade teórica” (Brasil, 2017, p. 274).

Existem, segundo Dantas (2004), ao menos quatro tipos de probabilidade: clássica, frequentista, subjetiva e axiomática, conforme apresentado na seção anterior. Ao observar este tema quando explorado pela BNCC, percebemos que este geralmente se aproxima das concepções clássica e frequentista. Por meio da concepção clássica, também conhecida como teórica, define-se a probabilidade para eventos simples em um espaço amostral equiprovável. Já na concepção frequentista pode-se trabalhar os experimentos de forma prática a fim de estabelecer os conceitos.

Segundo a BNCC (Brasil, 2017), os conteúdos sobre Probabilidade a serem trabalhados no sexto ano do Ensino Fundamental, alvo deste estudo, são apresentados por meio da habilidade EF06MA30²⁵, dentro da Unidade Temática de Probabilidade e Estatística, relacionados com os objetos de conhecimento apresentados no quadro a seguir.

²⁵ As habilidades apresentadas pela BNCC na etapa do Ensino Fundamental representam as aprendizagens essenciais para os estudantes em diferentes contextos escolares. Elas são descritas com um verbo que indica os processos cognitivos envolvidos e um complemento que especifica os objetos de conhecimento mobilizados. Cada competência é identificada por um código alfanumérico que indica a etapa de ensino, ano escolar, componente curricular e posição sequencial (Brasil, 2017, p. 28).

Quadro 5 – Probabilidade no 6º ano do Ensino Fundamental

Ano escolar	Objetos de conhecimento	Habilidades
6º ano	Cálculo de probabilidade como a razão entre o número de resultados favoráveis e o total de resultados possíveis em um espaço amostral equiprovável. Cálculo de probabilidade por meio de muitas repetições de um experimento (frequências de ocorrências e probabilidade frequentista).	(EF06MA30) Calcular a probabilidade de um evento aleatório, expressando-a por número racional (forma fracionária, decimal e percentual) e comparar esse número com a probabilidade obtida por meio de experimentos sucessivos.

Fonte: BNCC (Brasil, 2017, p. 304).

Na escola onde a pesquisa foi conduzida, as aulas são baseadas nos planejamentos fornecidos pela central da rede escolar no Brasil, os quais são elaborados com base no guia do professor. Este guia apresenta os conteúdos programáticos organizados em unidades, que por sua vez são divididas em lições, cada uma com uma duração prevista de 50 ou 100 minutos.

No Quadro 6, apresentamos uma descrição dos tópicos da unidade que aborda Probabilidade, com a nossa tradução livre.

Quadro 6 – Unidade que aborda Probabilidade

Lição	Objetivo de aprendizagem
Descrevendo Probabilidades	Utilizar palavras e frações para descrever probabilidades.
Probabilidade e Percentual	Utilizar porcentagens para descrever probabilidades.
Árvores de Possibilidades	Utilizar árvores de possibilidade para listar possíveis resultados e encontrar probabilidade teórica.
Conduzindo Experimentos	Conduzir experimentos e comparar os resultados com suas previsões.

Fonte: Elaborado pelo autor com base em Morrow (2006).

Cada lição é acompanhada de um objetivo de aprendizagem, que equivale à habilidade indicada pela BNCC. O guia também apresenta uma expectativa geral para a unidade, o que seria equivalente aos objetos de conhecimento da BNCC:

Em situações em que todos os resultados são igualmente prováveis, os estudantes determinam o número total de resultados de um experimento. Eles comparam o número de resultados desejados com o número total de resultados para encontrar a probabilidade teórica. Os estudantes representam a probabilidade de um evento usando um valor de 0 (impossível) a 1 (certo). Os estudantes calculam e utilizam a probabilidade teórica de um resultado para

prever a frequência desse resultado em um experimento ou jogo simples de probabilidade (Morrow *et al.*, 2006, p. iv, tradução nossa²⁶).

A partir dos conteúdos abordados no sexto ano do Ensino Fundamental, é perceptível que o guia do professor está alinhado com a BNCC, que dá prioridade às abordagens clássica e frequentista da probabilidade nesse nível de ensino. Sob essa ótica, compreender a perspectiva axiomática inerente à concepção clássica é possível. No entanto, a probabilidade subjetiva não é considerada. O documento normativo BNCC destaca o cálculo de probabilidades em espaços amostrais equiprováveis e por meio de experimentos repetidos (mesmo não orientando como fazê-lo). Este conjunto de indagações nos suscita reflexões: Como abordar a probabilidade frequentista de modo que o estudante compreenda e se aproprie de seus conceitos? Por que restringir os cálculos a espaços amostrais equiprováveis, quando, na realidade prática, é mais frequente deparar-se com espaços não-equiprováveis? Qual transição pode ser realizada entre as abordagens de probabilidade, seja da perspectiva frequentista para a clássica, ou vice-versa? Estas são questões que movimentam nossas reflexões neste trabalho.

As diferentes formas de probabilidade, desde suas compreensões iniciais aos documentos oficiais, atravessam o domínio dos jogos, ora interpretados como simples fontes de entretenimento, ora como ferramentas dos deuses, em uma conexão intrínseca na qual as escolhas dos participantes desdobram-se em múltiplas possibilidades. Dos lançamentos de dados às análises estatísticas em jogos de estratégia, a probabilidade permeia diversas dinâmicas de jogos. Na próxima seção, investigaremos na metodologia os aspectos do Jogo dos Astrágalos e suas potenciais possibilidades pedagógicas, com ênfase na organização e intencionalidade do professor.

Ancorados nas reflexões compartilhadas até o momento, apresentamos os caminhos metodológicos da nossa investigação na próxima seção.

²⁶ No original (Morrow *et al.*, 2006, p. iv): “In situations where all outcomes are equally likely, students find the total number of outcomes of an experiment. They compare the number of desired outcomes to the total number of outcomes to find the theoretical probability. Students represent the probability of an event using a value from 0 (impossible) to 1 (certain). Students calculate and use the theoretical probability of an outcome to predict the frequency of that outcome in a simple probability experiment or game.”

3. O CAMINHO METODOLÓGICO: DO OSSO AO JOGO

Nesta seção apresentamos a metodologia que possibilitou a realização desta pesquisa, tendo como princípio teórico a Teoria Histórico-Cultural, advindo do método materialismo histórico-dialético. Nesse sentido, adotamos a concepção de homem, segundo Marx (2013), como sendo aquele que se humaniza por meio do trabalho e, ao exercer uma atividade intencional, transforma a natureza circundante e desenvolve a sua consciência.

Segundo Moura (2022, p. 26), “pensar em uma ‘educação humanizadora’ implica considerar o trabalho como mediação necessária no processo de constituição dos sujeitos, e não apenas como fim em si mesmo”. Assumimos “[...] a natureza do fenômeno psicológico como algo inacabado em um movimento de perene mudança, de modo que conhecê-lo implica no olhar atento do pesquisador ao seu passado e presente, um olhar ao devir do fenômeno” (Moretti; Martins; Souza, 2017, p. 36). Ademais, Vigotski (1995, p. 67, tradução nossa²⁷) acrescenta que “estudar algo historicamente significa estudá-lo em movimento. Este é o requisito fundamental do método dialético”. Além disso, Cedro e Nascimento (2017, p. 26-27) afirmam que “[...] a característica principal do método histórico e dialético é a de que o fenômeno estudado deve ser apresentado de tal modo que permita a sua apreensão em sua totalidade”.

Diante do exposto, nesta pesquisa tivemos como central a seguinte questão de investigação: *Como o Jogo dos Astrágalos, organizado na perspectiva da Atividade Orientadora de Ensino, pode ser um potencial referente para desencadear conceitos de Probabilidade nos anos finais do Ensino Fundamental?* Em busca de responder a esta questão, elencamos as seguintes ações:

- Identificar possibilidade para o ensino de probabilidade por meio do uso Jogo dos Astrágalos no sexto ano do Ensino Fundamental.
- Investigar como o movimento histórico, a manipulação de materiais e um problema desencadeador podem potencializar a apropriação de conceitos de probabilidade.
- Elaborar um Produto Educacional.

Assim, organizamos os subitens 3.1, 3.2, 3.3, 3.4 e 3.5 com o intuito de apreendermos e apresentar o fenômeno da nossa investigação. No primeiro subitem, detalhamos a metodologia utilizada, incluindo o contexto e os participantes da pesquisa. No segundo, descrevemos o

²⁷ No original (Vigotski, 1995, p. 67): “Estudiar algo historicamente significa estudiarlo en movimiento. Esta es la exigencia fundamental del método dialéctico”.

processo de adaptação do Jogo dos Astrágalos para fins pedagógicos. No terceiro, apresentamos o desenvolvimento do Produto Educacional digital. No quarto, apresentamos a proposta para abordar conceitos de probabilidade no sexto ano do ensino fundamental, utilizando o Jogo dos Astrágalos. Por fim, no quinto, compartilhamos como foi o processo de organização do material empírico para a análise da proposta.

3.1 Primeiros passos

A proposta foi conduzida na sala de aula em que o autor deste trabalho atuou como professor regente, envolvendo todos os cinco estudantes do sexto ano do ensino fundamental da escola. Durante o desenvolvimento, os estudantes foram orientados a jogar uma versão adaptada do Jogo dos Astrágalos, utilizando versões impressas em 3D dos ossos, dados regulares e questionamentos elaborados pelo professor em folhas de registros impressas, e tomando decisões baseadas em probabilidades.

A proposta aqui apresentada e o material escrito produzido (como os registros escritos dos estudantes e anotações em diário de campo do pesquisador) foram feitos em língua portuguesa, movimento autorizado pela escola. A rede escolar adota uma metodologia que se baseia na exploração de espaços, no uso de materiais manipulativos e em propostas tanto em grupos quanto individualizadas. A configuração da sala de aula é concebida de modo a não dispor os estudantes em fileiras, e as turmas possuem, no máximo, vinte estudantes. No sexto ano, os materiais de apoio incluem um livro didático, que está integrado ao guia do professor na sua versão estendida, contendo respostas e comentários. Além disso, há um folheto adicional, que aborda tópicos inicialmente não incluídos no livro didático, mas que são parte do currículo brasileiro, e um livro de exercícios que é complementar ao livro didático, com questões diretamente relacionadas aos tópicos apresentados. O guia do professor é utilizado como referência nos modelos de planos de aula elaborados pela central brasileira da rede escolar. Esses planos são destinados ao uso e adaptação pelos professores que atuam na rede. Há um alinhamento entre os objetivos de aprendizagem delineados nos livros de apoio e os estabelecidos pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC), feito pela central brasileira da rede escolar, almejando possibilitar a abordagem de todas as habilidades ao longo do ano letivo.

Com essa turma de sexto ano, foi o segundo ano consecutivo à frente da disciplina de Matemática. Durante a realização da proposta, a turma era composta por cinco estudantes, sendo dois meninos e três meninas, todos na faixa dos 11 anos. Todos demonstraram engajamento e participação nas aulas, mesmo aqueles que expressaram que Matemática não era sua disciplina favorita.

Para assegurar a participação e integridade dos estudantes, obtivemos as assinaturas dos responsáveis pelos estudantes menores de idade em um Termo de Consentimento Livre e Esclarecido, no qual foi explicitada a proposta a ser realizada e os registros a serem feitos. Além disso, também foi obtido um Termo de Anuência Livre e Esclarecida das assinaturas dos próprios estudantes, após o convite e a explicação do projeto.

Após a autorização da escola e dos responsáveis, ao serem convidados para participar da pesquisa, a maioria dos estudantes questionou o que é o Mestrado, demonstrando entusiasmo em participar.

A produção de materiais para análise foi realizada por meio de observações diretas, registros escritos dos estudantes, fotografias, gravações audiovisuais e anotações em diário de campo do pesquisador. As observações registraram reações dos estudantes, envolvimento, estratégias utilizadas e desafios enfrentados durante o jogo. Além disso, os estudantes foram convidados a registrar reflexões e percepções em relação ao jogo e aos conceitos de probabilidade abordados.

Com o intuito de preservar a identidade dos estudantes e aprimorar a legibilidade do texto, nos inspiramos nas aventuras dos protagonistas da série de livros “O Guia do Mochileiro das Galáxias”, e durante as análises nossos colaboradores serão denominados por versões das personagens da ficção científica: Arthur, Flora, Marvin, Taís e Zara²⁸.

As observações, anotações de campo e registros escritos foram organizados seguindo a perspectiva de episódios e cenas (Moura, 1992), focando nos aspectos didáticos que emergiram do material obtido. Este procedimento visa identificar como os estudantes interagiram com o jogo, além de explorar as oportunidades e desafios na compreensão dos conceitos de probabilidade presentes na proposta do Jogo dos Astrágalos.

Moura (2004) define que

Os episódios de formação são a tentativa de construir um modo de analisar as interdependências em isolados, tendo como objeto de análise as ferramentas simbólicas usadas na revelação da intencionalidade de impactar os sujeitos envolvidos na atividade. Os episódios poderão ser frases escritas ou faladas, gestos ou ações que constituem cenas que podem revelar interdependência entre os elementos de uma ação formadora. Assim, os episódios não são definidos a partir de um conjunto de ações lineares. Pode ser uma afirmação de um participante de uma atividade não tenha impacto imediato sobre os outros sujeitos da coletividade. Esse impacto poderá estar revelado em um outro momento em que o sujeito foi solicitado a utilizar-se de algum conhecimento para participar de uma ação coletiva (Moura, 2004, p. 276).

²⁸ Na ficção científica os personagens são chamados Arthur, Ford, Marvin, Tricia e Zaphod.

Ribeiro (2011, p. 100) destaca que "os episódios de ensino podem ser apresentados como um conjunto de cenas, reunidas em diferentes circunstâncias, nas quais se destacam a incorporação de elementos representativos do processo formativo". Fraga (2023) ressalta que a decomposição do episódio em cena envolve materializações da intencionalidade do sujeito por meio de falas, gestos ou ações. Entre essas ações, incluem-se registros em desenhos ou esquemas e expressões faciais, ou qualquer forma de ferramenta simbólica utilizada para expressar o pensamento diante da atividade em curso.

Para Araujo e Moraes (2017, p. 68), "as cenas estruturadas a partir dos episódios buscam revelar as múltiplas determinações, as relações essenciais que possibilitam compreender o fenômeno para além da aparência, do imediato". Segundo Pereira (2022, p. 132), "esse método de exposição de análise possibilita que se fale com a teoria e não da teoria". Além disso, o desenvolvimento de uma mesma atividade "pode gerar cenas pertencentes a diferentes unidades de análise ou episódios distintos, onde uma mesma fala, gesto ou texto pode ser revelador de múltiplas ações formadoras" (Fraga, 2023, p. 101).

Frente às ideias apresentadas, realizamos na próxima seção, reflexões e discussões fundamentadas no material obtido durante o Jogo dos Astrágalos, que consideramos uma situação de ensino potencialmente desencadeadora de aprendizagem, enquanto problema desencadeador, para estudantes do sexto ano do ensino fundamental. Durante as observações, além de compreender a dinâmica das interações durante o jogo, foi possível identificar diversas estratégias utilizadas pelos estudantes, momentos em que exploraram e se apropriaram de conceitos de probabilidade.

3.2 Processo de adaptação do Jogo dos Astrágalos

O Jogo dos Astrágalos, representado em sua versão histórica para fins recreativos ou místicos, como qualquer outro material didático, carece de intencionalidade pedagógica. Apresentá-lo com suas regras regulares também não é uma tarefa simples, visto suas diferentes versões, finalidades e complexidade. Foi preciso pensarmos em um processo de adaptação, o qual vem sendo desenvolvido desde que a ideia de o utilizar como instrumento para ensinar conceitos de probabilidade foi concebida pela primeira vez em 2018, durante a disciplina de Metodologia do Ensino de Matemática (MEM).

Na primeira proposta para a sala de aula durante os tempos de graduação, os estudantes seriam organizados em grupos de quatro integrantes. A cada estudante seria atribuída uma folha de registro com um quadro (Quadro 7) contendo quatro colunas, correspondendo a cada astrágalo identificado. Essa identificação por cores e a enumeração das quatro faces com 1 a 4

seriam feitas pelos próprios estudantes em um momento inicial da proposta, com pincéis ou tinta, e dez linhas seriam utilizadas para registrar os lançamentos no jogo. Os dez lançamentos foram selecionados pelo número ser um divisor de cem, tornando mais simples determinar a fração equivalente que resultaria na probabilidade em termos percentuais ao utilizar a razão entre os lançamentos. O objetivo seria alcançar o maior número possível de jogadas de Vênus, aquela em que cada um dos quatro astrágalos teria um resultado diferente após o lançamento.

Quadro 7 – Primeira versão do registro de lançamentos, 2018

	AZUL	VERDE	ROSA	PRETO
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				

Fonte: Arquivo do autor.

Após uma breve exposição sobre o contexto histórico e o funcionamento do jogo, que envolvia o lançamento de quatro astrágalos representados por cores distintas, a interação seria realizada e registrada na tabela. Em seguida, seriam realizadas análises individuais, dentro dos grupos e, posteriormente, toda a sala, observando a proporção de cada uma das faces nos lançamentos, a fim de identificar semelhanças e divergências, entrar em um consenso e a partir dos registros e do raciocínio indutivo, formalizar matematicamente, e coletivamente, a fórmula para o cálculo da probabilidade.

Nessa concepção inicial, para simular os astrágalos, foram confeccionados blocos retangulares de massa de biscoito (Figura 15), com proporções semelhantes ao tamanho do osso do astrágalo, que possui seis faces – duas delas são estreitas e planas, outras duas são largas, com um lado levemente convexo e o outro levemente côncavo, e duas faces arredondadas. As bases menores foram arredondadas para evitar que, ao serem lançadas durante a simulação da etapa do jogo real, tivessem essas faces como resultado. Devido à complexidade da anatomia do osso, as representações se distanciaram do original e apresentaram irregularidades entre si.

Na segunda versão do jogo, desenvolvida em 2020 para a videoaula no âmbito do projeto Semeando para Florescer Matemática, revisitou-se a ideia inicial apresentada na disciplina de MEM. O objetivo era explicar a concepção geral do jogo no contexto da

abordagem de experimentos sucessivos. Nessa versão, optou-se por utilizar borrachas escolares com formato de bloco retangular (Figura 15), evocando a forma concebida na primeira versão, com cantos arredondados, mas ainda assim muito distantes da anatomia do osso.

Figura 15: Versões dos astrágalos feitas em 2018 e 2020, respectivamente



Fonte: Arquivo pessoal do autor.

Nos dois momentos mencionados, nota-se uma tentativa de criar uma versão simplificada do jogo ao se pensar na sua utilização em sala de aula, uma adaptação do original que utiliza o contexto histórico de forma vaga. Este fato parece demonstrar falta de intencionalidade e organização do professor, mas vale lembrar que havia uma tentativa de aproximação do material criado, até aquele momento, ao real. O ponto de partida para considerar a perspectiva do Jogo dos Astrágalos para esta pesquisa de Mestrado ocorreu durante a elaboração do Anteprojeto para o exame de seleção no segundo semestre de 2021, quando se buscou versões mais autênticas do osso por meio de impressões 3D.

O pesquisador contratou uma empresa de impressão 3D localizada em Uberlândia, Minas Gerais, utilizando recursos próprios, e após uma breve explicação sobre o material necessário, foi impressa uma versão utilizando o software Simplify3D²⁹, a partir de códigos de impressão³⁰ disponíveis gratuitamente. No entanto, essas versões foram feitas com a face inferior ligeiramente plana, resultando, por vezes, em um astrágalo que caía "em pé" ao ser lançado, algo que não ocorre com o osso original devido à sua anatomia. Os astrágalos foram impressos na cor branca para simular com mais fidelidade os ossos (Figura 16). Apesar desse detalhe, as impressões ainda desempenharam bem seu papel visual, proporcionando uma representação bastante fiel à anatomia do astrágalo.

²⁹ Software de impressão 3D. Disponível em: <<https://www.simplify3d.com/>>. Acesso em 31 ago. 2023.

³⁰ Knuclebone Dice, criado por MishaT em 26 de setembro de 2015 e disponibilizado gratuitamente no site UltiMaker Thingiverse. Disponível em: <<https://www.thingiverse.com/thing:1036458>>. Acesso em 31 ago. 2023.

Figura 16: Versão dos astrágalos feita em 2021



Fonte: Arquivo do autor.

No final de 2022, uma rápida “versão de teste” foi conduzida ao abordar conceitos de probabilidade com turmas de sexto e sétimo anos da mesma escola onde este projeto foi realizado e em que o professor já atuava como regente. No início, os estudantes foram informados de que esta seria uma proposta aprimorada para o ano seguinte e que suas opiniões eram bem-vindas para contribuir com melhorias. A ideia foi realizada em cerca de 90 minutos, dividida em três momentos. A proposta iniciou com uma revisão de frações e porcentagens, seguida por discussões sobre os fundamentos da probabilidade, incluindo conceitos como espaço equiprovável e o surgimento histórico dos dados. O último momento envolveu a experimentação prática com astrágalos impressos.

O primeiro momento foi uma conversa a partir do registro individual de respostas às perguntas relacionadas em relação entre frações e porcentagem:

1. O que é porcentagem?
2. O que representa 25% de algo? Dê ao menos um exemplo.
3. O que é 50%? Como escrever 50% em forma fracionária?
4. Como transformar a fração $\frac{2}{5}$ em porcentagem?
5. Podemos escrever qualquer fração em forma de porcentagem?

Esses questionamentos foram organizados com o propósito de revisar o conteúdo sobre frações e porcentagens. Isso se deve ao fato de que, conforme o plano anual delineado pelo guia

do professor, a unidade referente a Probabilidade é a última, distante da seção sobre decimais. Durante esse momento, ficou evidente a importância de revisar esses conceitos. No entanto, surgiu a hipótese: para compreender os conceitos de probabilidade no sexto e sétimo ano, parece ser necessário que os estudantes conheçam ou tenham se apropriado dos conceitos relacionados às operações com números decimais, frações e porcentagens. Portanto, por que não abordar a unidade de Probabilidade logo após abordar números decimais, frações e porcentagens? Tal questionamento foi levado à Coordenação Pedagógica para a realização da proposta desenvolvida neste trabalho em 2023, que autorizou a troca na ordem e abordagem da unidade de Probabilidade.

O segundo momento realizado em 2022 foi uma discussão abordando tópicos de probabilidade, também a partir de registros individuais sobre as seguintes perguntas:

1. O que é probabilidade?
2. O que significa dizer que algo tem uma chance de ocorrer?
3. O que significa dizer que algo é impossível, improvável, possível, provável ou certo? Dê ao menos um exemplo de um deles.
4. O que significa equiprovável?
5. Quando surgiu a probabilidade?
6. Quais objetos têm relação com a probabilidade?
7. Quando surgiu o primeiro dado?

Neste segundo momento, com as observações feitas por alguns estudantes, foram identificados tópicos específicos essenciais para discussão como, por exemplo, a investigação se em um dado os lados opostos têm a mesma probabilidade de serem selecionados (notamos indícios de que a ideia do espaço amostral equiprovável estava presente na fala desses estudantes), a compreensão de que a soma de todos os resultados possíveis totaliza 100%, e a capacidade de expressar a probabilidade na forma de fração. Alguns estudantes expressaram desconforto em relação ao número de questões, descrevendo a proposta como cansativa. A segunda questão levantou muitas dúvidas, levando-nos a concluir que ela precisaria ser reformulada.

A última questão, que pergunta quando surgiu o primeiro dado antes de apresentar o astrágalo, não se mostrou uma boa escolha, pois quando os estudantes tiveram contato com o astrágalo já o relacionaram com um dado. Para a proposta a ser feita no ano seguinte, decidimos evitar mencionar a palavra “dado” nos momentos de experimentação com o astrágalo, nem relacionar pela primeira vez o item com sua versão atual, durante a discussão sobre os tópicos de Probabilidade na proposta. Esperávamos que esse movimento partisse dos estudantes.

O terceiro momento ocorreu com a enumeração dos lados e cores nos astrágalos pelos estudantes, com o lançamento, registro e reflexões. Inicialmente, mostramos as versões impressas dos astrágalos para os estudantes, e explicamos o contexto histórico por trás do osso. Foi solicitado aos estudantes que identificassem os diferentes lados dos astrágalos com numerais de 1 a 4, sendo uma cor para cada valor. Notamos que os estudantes despenderam muito tempo em suas tentativas, utilizando canetinhas, pincéis e até ao colar fita adesiva nas faces do astrágalo e escrever por cima. Compreendemos que, para o ano seguinte, seria mais interessante contar com versões impressas que apresentassem cores diferentes e estivessem numeradas para facilitar a parte experimental da proposta. Observamos que a quantidade inicial de dez lançamentos dos astrágalos, escolhida por facilitar a conversão em porcentagens, revelou-se pequena para proporcionar a variabilidade de jogadas presentes no jogo, necessárias para se explorar os conceitos de probabilidade relacionados. Para obter resultados mais representativos, decidimos aumentar o número de lançamentos para vinte e cinco na próxima versão, por também ser de fácil conversão para porcentagem.

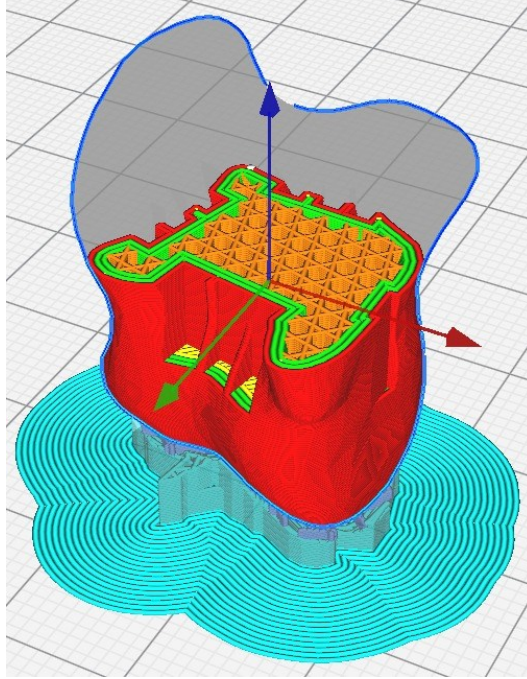
No início de 2023, ao discutir a situação com um amigo que possui uma impressora 3D e explicar a questão da face ligeiramente plana, ele sugeriu que a impressão foi provavelmente ajustada para economizar filamento. Deveria ter sido criado um pequeno suporte para encaixe na parte inferior durante o processo de impressão, uma vez que, devido à anatomia do osso, não é possível iniciar a impressão diretamente em uma de suas faces. Posteriormente, esse suporte deveria ser descartado. Após pesquisas adicionais sobre o astrágalo, notamos que o peso original do osso variava de cerca de 6 a 10 gramas. No entanto, observamos que as impressões feitas pesavam cerca de 2 gramas, sendo excessivamente leves e provavelmente ocas.

Com a ajuda desse amigo, novas impressões 3D foram feitas (Figura 17), desta vez em cores diferentes – assim, durante a proposta seria mais fácil identificar o resultado em cada astrágalo. Foi uma grata surpresa encontrar os códigos gratuitos³¹ para a impressão com a enumeração, ainda que diferente do que foi planejado nas versões iniciais citadas. Anteriormente, estava previsto enumerar cada astrágalo de 1 a 4, apenas indicando oralmente que havia duas faces que não seriam consideradas. Nesta versão encontrada, os lados são identificados com números romanos: I, III, IV e VI, seguindo a mesma convenção utilizada pelos antigos europeus na versão original – sem as numerações II e V, pois se trata dos lados arredondados. A impressão foi novamente realizada, agora com o preenchimento indicado para

³¹ Knuckelbones Die - With Emboss Numbers, criado por Vashogunartist em 12 de janeiro de 2021 e disponibilizado gratuitamente no site UltiMaker Thingiverse. Disponível em: <<https://www.thingiverse.com/thing:4720325>>. Acesso em 31 ago. 2023.

que o peso dos astrágalos se aproximasse da versão real e com o suporte que seria posteriormente descartado, assegurando que o lançamento respeitasse o que era feito a partir da anatomia original do osso.

Figura 17: Impressão 3D do astrágalo, com suporte e preenchimento



Fonte: Arquivo pessoal do autor.

Foram realizadas impressões em quatro tons distintos de filamento: prata, dourado, rosa e azul (Figura 18). A seleção dessas cores foi feita devido a um dos estudantes participantes envolvidos no projeto apresentar daltonismo, o que dificulta sua distinção entre tons de verde e vermelho. Foram produzidos quatro astrágalos de cada uma das cores escolhidas.

Figura 18: Versão dos astrágalos feita em 2023, em cores e enumerados



Fonte: Arquivo do autor.

Com as versões impressas dos astrágalos – tanto as brancas, sem marcações e com pequenas imperfeições, quanto as coloridas e enumeradas – começamos a elaborar a proposta, considerando em especial o contexto histórico do Jogo dos Astrágalos e a representação do osso como um artefato cultural.

3.3 Produto Educacional - astragalos.com

Ao contemplar a concepção de um Produto Educacional associado à pesquisa, nos deparamos com inquietações relacionadas aos livros digitais após a exploração de diversos produtos em diferentes disciplinas cursadas ao longo do mestrado, uma vez que um livro digital era a proposta inicial de produto a ser desenvolvida neste estudo. Esses, muitas vezes, apresentam desafios de acesso e compartilhamento, exigindo um longo caminho por meio da navegação em repositórios, além de diagramações visuais, no geral, pouco atrativas. A escolha aqui apresentada buscou superar tais obstáculos, proporcionando um Produto Educacional de fácil acesso e interatividade, permitindo o compartilhamento da proposta desenvolvida neste trabalho por meio de um simples link - astragalos.com - ou QR Code (Figura 19), visando inspirar, ser replicada e adaptada por outros educadores. Consideramos variáveis como custos de hospedagem e registro de domínio, com atenção para as limitações de versões gratuitas.

Figura 19: QR code – Jogo dos Astrágalos



Fonte: Arquivo do autor.

Para integrar o Produto Educacional à plataforma eduCAPES, em nossas pesquisas notamos que os arquivos são frequentemente disponibilizados em formato PDF. Observamos que muitos Produtos Educacionais são vinculados a links, como arquivos na nuvem ou plataformas de vídeo, frequentemente acompanhados por um PDF que direciona para o link correspondente. Além disso, alguns Produtos Educacionais incluem o link direcionador na seção "Outros identificadores" de suas páginas. Dado que não encontramos orientações claras

no site, decidimos criar um livreto informativo (APÊNDICE A) em formato PDF, contendo informações sobre as seções, o link do site e o QR Code, para anexar à página do Produto Educacional e incluir o link na seção "Outros identificadores".

Figura 20: Página inicial do site



Fonte: Arquivo do autor.

Com este Produto Educacional buscamos oferecer percepções sobre a contextualização histórica da Probabilidade e a História do Jogo dos Astrágalos, pois entendemos ser importante que o professor entenda o movimento lógico-histórico em que os conceitos de Probabilidade estão inseridos dentro do Jogo dos Astrágalos para poder abordá-los durante a proposta, e a criação de uma seção dedicada à abordagem do jogo pedagógico na perspectiva da Atividade Orientadora de Ensino. Para enriquecer o material e ir além do disponível nesta dissertação, consideramos, também, a implementação de uma seção com sugestões de leituras e outras experiências com os astrágalos.

3.4 Proposta para o 6º ano do Ensino Fundamental

A proposta elaborada teve uma duração total de 150 minutos, equivalente a três aulas de 50 minutos cada. Seu objetivo principal foi abordar conceitos de Probabilidade a partir do contexto do Jogo dos Astrágalos, indo além das competências propostas pela BNCC para o sexto ano do Ensino Fundamental. Para realizar esta proposta, foram necessários os seguintes materiais: alguns astrágalos sem numeração e quatro modelos 3D de astrágalos enumerados, cada um de uma cor diferente por grupo, conforme figuras anteriores. Além disso, foram

necessárias folhas contendo questões, que serão apresentadas a seguir, fichas para os estudantes registrarem suas respostas, e dados de 4, 6, 8, 10, 12 e 20 faces, conhecidos respectivamente como d4, d6, d8, d10, d12 e d20 (Figura 21).

Figura 21: Dados regulares de 4, 6, 8, 10, 12 e 20 lados



Fonte: Arquivo do autor.

Todos esses dados são poliedros que possuem como faces polígonos iguais. Com exceção do d10, todos são regulares e conhecidos como sólidos de Platão. O resultado de um lançamento é determinado pelo número que aparece na face visível, paralela ao chão, com exceção do d4. O d6 é o dado mais comum, um cubo formado por seis faces em formato de quadrado. Já o d4 é um tetraedro, composto por quatro triângulos equiláteros idênticos, e o resultado de seu lançamento é o número próximo ao vértice comum em todas as faces visíveis, já que não há uma face paralela ao chão durante o lançamento. O d8 é um octaedro, constituído por oito triângulos equiláteros idênticos. O d10 tem a forma de um trapezoide-pentagonal, formado por quadriláteros não regulares, mas iguais entre si. O d12 é um dodecaedro composto por doze pentágonos regulares idênticos. Finalmente, o d20 é um icosaedro formado por vinte triângulos equiláteros iguais.

O público-alvo da proposta foi uma turma de sexto ano da rede de ensino privada em Uberlândia, composta por cinco estudantes.

Os objetivos de aprendizagem incluíram a apropriação dos seguintes conceitos relativos à probabilidade:

- Inferir sobre e classificar eventos de probabilidade em categorias como impossível, improvável, possível, provável e certo;
- Identificar espaços amostrais equiprováveis e não-equiprováveis;
- Desenvolver a fórmula para o cálculo da probabilidade a partir das definições frequentista e teórica;
- Expressar resultados de probabilidade em forma de frações, números decimais e porcentagens.

As seguintes definições foram utilizadas durante a proposta, a partir de reflexões com os estudantes e formalização do professor.

Quadro 8 – Definições de conceitos relacionados à Probabilidade

Experimentos aleatórios	São aqueles que, ao serem repetidos nas mesmas condições, não produzem o mesmo resultado.
Evento	É todo resultado de um experimento.
Espaço amostral	É o conjunto de todos os possíveis resultados de um experimento.
Equiprovável	Quando todos os eventos têm a mesma chance de acontecer em um espaço amostral.
Não-equiprovável	Quando os eventos não têm a mesma chance de acontecer em um espaço amostral.

Fonte: Elaborado pelo autor baseado em Dantas (2004).

A seguir, apresentamos a proposta dividida em três aulas, cada uma segmentada em momentos distintos, com uma estimativa de tempo para cada um deles. A divisão por tempo no planejamento da aula é uma prática obrigatória na instituição de ensino onde a proposta foi realizada, e as expectativas de tempo são comunicadas aos estudantes durante a execução das aulas.

No entanto, reconhecemos e ressaltamos que diversos fatores dentro e fora da sala de aula podem influenciar as expectativas de tempo, resultando em aulas que podem ultrapassar ou não atingir o previsto. Acreditamos que isso deve ficar a critério do professor, que possui a autonomia para pensar, organizar e reorganizar sua proposta também no momento da realização.

A proposta foi redigida no presente do indicativo, pois se trata de um planejamento, no qual descrevemos as ações que ocorrerão durante a aula. Sugerimos que, desde o início da proposta, os estudantes sejam organizados em grupos de dois ou três estudantes. A escolha pelo

presente do indicativo reflete a intenção de expressar de forma direta e atual as ações planejadas para os momentos das aulas.

AULA 1 – CONHECENDO O ASTRÁGALO

O objetivo desta aula é revisar e articular concepções iniciais dos estudantes com conceitos fundamentais de probabilidade, além de apresentar o astrágalo como artefato histórico vinculado ao tema. A proposta tem início com um questionário individual que mobiliza concepções iniciais, seguido por uma roda de conversa para o compartilhamento das ideias e sua correlação com os conceitos formais. Na etapa final, os alunos conhecem o astrágalo, registram hipóteses sobre seu uso e acompanham sua contextualização histórica, ampliando o repertório conceitual e cultural.

Momento 1 (15 minutos) – Introdução

Neste primeiro momento da proposta, os estudantes respondem com registros escritos, individualmente, às seguintes perguntas relacionadas à probabilidade:

1. O que é Probabilidade?
2. Como surgiu a Probabilidade?
3. Como se expressa a Probabilidade de algo acontecer? Consegue citar exemplos?
Como expressar em forma de fração, decimal ou porcentagem?
4. Qual é o valor máximo e o valor mínimo que podemos obter ao calcular uma probabilidade? Consegue citar exemplos?
5. Quais objetos podem ser utilizados para o cálculo de probabilidades?
6. Ao calcular uma probabilidade, todas as possibilidades sempre têm a mesma chance de acontecer? Consegue citar exemplos?

Esta etapa serve como uma revisão para retomar tópicos de probabilidade estudados até o ano anterior e visitar representações numéricas em frações, decimais e porcentagem, conteúdos vistos anteriormente neste ano letivo. Entendemos este primeiro momento de resgate na memória como uma oportunidade para observar as concepções e lacunas internalizadas pelos estudantes, sendo assim um possível meio para potencializar a apropriação dos conceitos de probabilidade com a situação de ensino presente na proposta.

É importante ressaltar que, neste momento, não existem respostas erradas, mesmo que os estudantes optem por dizer "não sei" ou "não me lembro".

Momento 2 (20 minutos) – Roda de conversa

Os estudantes são dispostos em um grande grupo. Em uma roda de conversa, é solicitado que cada estudante, ou um representante de cada grupo, expusesse suas respostas a fim de que chegassem a um consenso para cada questionamento. Neste momento, é importante que o professor organize o diálogo do grupo de modo que, juntos, entendam que um acontecimento em probabilidade é chamado de *evento* e que todos os resultados possíveis são chamados de *espaço amostral*.

O professor formaliza esses conceitos e informa aos estudantes que eles serão utilizados durante essa aula e as próximas. Entendemos este segundo momento também como um meio para formalizar conceitos necessários durante a realização de uma situação de ensino potencialmente desencadeadora de aprendizagem.

Momento 3 (15 minutos) – Conhecendo o Astrágalo

Neste momento, os estudantes recebem um astrágalo não numerado e, individualmente, são questionados pelo professor sobre o que sabem sobre o astrágalo ou se já viram esse artefato. Após alguns instantes, o professor explica o que é um astrágalo (pode utilizar recursos visuais como as imagens aqui apresentadas nas Figuras 6, 7 e 9) – sem mencionar que é uma forma primitiva de dado – e questiona como ele poderia ser utilizado no contexto da probabilidade. Os estudantes devem registrar suas hipóteses por escrito e, ao final, é realizada uma síntese coletiva, contextualizando historicamente o astrágalo como um artefato relacionado à probabilidade e ao Jogo dos Astrágalos, sem revelar seu caráter de dado primitivo. Entendemos este momento como um meio para introduzir o artefato histórico necessário para uma situação de ensino potencialmente desencadeadora de aprendizagem.

AULA 2 – O JOGO DOS ASTRÁGALOS

O objetivo desta aula é proporcionar aos estudantes experiências de tensão criativa (Moura; Araujo; Serrão, 2018) ao se depararem com o Jogo dos Astrágalos, favorecendo a possibilidade de apropriação de conceitos de probabilidade a partir de uma situação potencialmente desencadeadora de aprendizagem. Por meio de questionamentos do professor, os estudantes são instigados a tomar decisões estratégicas, enfrentar a ausência de contribuições ao pote durante a partida, ou lidar com a interrupção do jogo. Essas experiências são mediadas pela interação com o objeto, com os colegas e com o professor, compondo o processo de aprendizagem. Embora o Jogo dos Astrágalos, em suas versões originais, não tenha intencionalidade pedagógica, foi reimaginado nesta proposta como um potencial problema desencadeador de aprendizagem. Para isso, organizamos uma versão adaptada do jogo,

utilizando réplicas em 3D do artefato histórico e mesclando regras de versões infantis e adultas, a fim de criar uma proposta que equilibre acaso e regras, conectando os estudantes ao contexto histórico-cultural do jogo

A aula está estruturada em dois momentos principais: no primeiro, os estudantes jogam com os astrágalos adaptados, registrando os resultados e utilizando as regras para vivenciar a dinâmica do jogo; no segundo, ocorre uma discussão coletiva em duplas ou trios, na qual os estudantes analisam suas observações, estimam probabilidades a partir dos registros e refletem sobre as diferenças entre probabilidades equiprováveis e não-equiprováveis, possivelmente consolidando os conceitos abordados.

Momento 1 (25 minutos) – Jogo dos Astrágalos

Os estudantes são dispostos em duplas ou trios e recebem um conjunto de 4 astrágalos, enumerados e de cores diferentes, para cada grupo. O professor explica que seria realizado o Jogo dos Astrágalos, inspirado em um antigo jogo grego, e disponibilizaria alguns minutos para que os estudantes se familiarizassem e fizessem experimentações com o material representativo do artefato histórico (Grando, 2000).

Figura 22: Parte da folha com registro de lançamentos

JOGO DOS ASTRÁGALOS – REGISTRO DE LANÇAMENTOS					
Número de lançamentos	Astrágalo				Jogada especial?
	Dourado	Prata	Rosa	Azul	
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					

Fonte: Desenvolvido pelo autor.

Logo em seguida, é entregue uma folha com uma tabela para o registro dos lançamentos (Figura 22) aos estudantes, com espaços para 25 lançamentos, valor escolhido por ser um divisor de cem, pois assim é mais simples determinar a fração equivalente que representaria a probabilidade em termos percentuais em um momento posterior. No começo do jogo, todos os jogadores recebem 25 feijões (que funcionam como as moedas na versão histórica, usadas para

fazer contribuições no pote) e um pote para cada grupo, usado para guardar os feijões durante as rodadas. No Jogo dos Astrágalos, as jogadas são classificadas conforme as combinações obtidas, e algumas delas seriam “especiais”, pois seriam nomeadas.

O professor então explica as regras desta versão adaptada do Jogo dos Astrágalos. Cada jogador deve lançar os quatro astrágalos, e depositar ou resgatar feijões do pote conforme as seguintes jogadas:

A jogada de *Vênus*, ocorre quando todos os números fossem diferentes: 1, 3, 4, 6. Para essa jogada, o jogador ganha todos os feijões do pote.

Os Seis, ocorreria quando se obtivesse um número 6 com qualquer outra combinação de números (com exceção das jogadas *Vênus* e *O Abutre*): 6, #, #, #; 6, 6, #, #; 6, 6, 6, #. Para essa jogada, o jogador deposita 1 feijão no pote, ou seja, perde um feijão que passa a compor o prêmio do jogo.

A jogada *O Abutre* ocorre quando todos os números são iguais (com exceção da jogada *O Cão*): 3, 3, 3, 3; 4, 4, 4, 4; 6, 6, 6, 6. Nesse caso, o jogador deposita 2 feijões no pote, ou seja, perde dois feijões que passam a compor o prêmio do jogo.

A jogada *O Cão* é a pior possível, ocorre quando todos os números são iguais a um: 1, 1, 1, 1. Para essa jogada, o jogador deposita 3 feijões no pote, ou seja, perde três feijões que passam a compor o prêmio do jogo.

Por fim, qualquer outra combinação de números resulta em todos os jogadores depositando 1 feijão no pote, ou seja, cada jogador perde um feijão que passa a compor o prêmio do jogo.

A cada turno, todos os jogadores lançam os 4 astrágalos, registram seus resultados e colocam a quantidade de feijões no pote. A única forma de recuperar os feijões é ganhar o pote, o que acontece com uma jogada de *Vênus*. O jogador que ficar sem feijões é eliminado da partida.

Cada grupo deve estabelecer uma decisão conjunta sobre como prosseguir caso não ocorra uma jogada de *Vênus* e todos os jogadores fiquem sem feijões, ou determinar o momento de encerrar o jogo.

O professor solicita que os estudantes, ao jogarem, realizem seus registros por escrito, observando e conjecturando sobre qual a chance de cada um dos lados ser resultado ao se lançar o astrágalo.

As jogadas especiais são sintetizadas e apresentadas aos estudantes a partir do Quadro 9, reforçando que a ordem dos números não é importante.

Quadro 9 – Jogadas na versão adaptada do Jogo dos Astrágalos

Nome da Jogada	Descrição	Representação	Ação
Vênus	Um número em cada face	1 3 4 6	O jogador ganha todos os feijões do pote
Os Seis	Um, dois ou três números iguais à 6 com qualquer combinação de números 1, 3, 4	6 # # # 6 6 # # 6 6 6 #	O jogador deposita 1 feijão no pote (perde 1 feijão)
Abutre	Quatro números iguais, diferentes de 1	6 6 6 6 4 4 4 4 3 3 3 3	O jogador deposita 2 feijões no pote (perde 2 feijões)
O Cão	Quatro números iguais à 1	1 1 1 1	O jogador deposita 3 feijões no pote (perde 3 feijões)
-	Qualquer outra combinação diferente das listadas acima	-	Todos os jogadores depositam 1 feijão no pote (perdem 1 feijão cada)

Fonte: Desenvolvido pelo autor.

Momento 2 (25 minutos) – Discutindo sobre o Jogo dos Astrágalos

Os estudantes são dispostos em duplas ou trios e, após o momento de realização do jogo, o professor provoca um diálogo elencando:

- O que vocês percebem ao jogar?
- Em uma rolagem, todos os lados possuem a mesma probabilidade? Por quê?
- Como poderíamos estimar a probabilidade de cada um dos quatro lados, com base nos seus registros?

Se necessário, o professor relembra aos estudantes que possuem, individualmente, o registro de 25 lançamentos e que poderiam encontrar uma fração equivalente de denominador cem, portanto, o valor em percentual, ou ainda agrupar seus resultados com o de outros estudantes.

É interessante que, após esse diálogo, o professor solicite que cada grupo calcule a chance de cada um dos quatro possíveis resultados em porcentagem e que os expressem durante uma plenária, definindo assim a probabilidade a partir do aspecto frequentista, que é discutido neste momento da proposta. Além disso, o professor pode questionar os estudantes sobre como refinar este resultado e encontrar a média aritmética, conteúdo abordado no ano letivo, e comparar com os valores estimados em estudos anteriores: a probabilidade de um lançamento resultar em um dos lados largos do osso para cima (III e IV) é de cerca de 40%, enquanto nos lados estreitos (I e VI) é de cerca de 10% (David, 1962).

Neste momento, o professor destaca o aspecto não-equiprovável do movimento, explicando que, embora cada lado do objeto lançado (um astrágalo) não tenha a mesma probabilidade de ocorrer, podemos ainda assim estimar as probabilidades baseando-nos nos registros de frequências obtidos pelos estudantes. Isso mostra que, mesmo com probabilidades diferentes para cada resultado, a análise frequentista permite uma aproximação das chances reais de ocorrência de cada lado.

AULA 3 – EXPERIMENTAÇÕES COM DADOS REGULARES

O objetivo desta aula é explorar a relação entre probabilidade frequentista e probabilidade teórica, a partir de experimentações com espaços amostrais equiprováveis, utilizando dados regulares com diferentes números de faces. Para isso, os estudantes realizam experimentações com dados d4, d6, d8, d10, d12 e/ou d20, registrando os resultados obtidos e analisando-os sob a perspectiva frequentista. Em seguida, participam de uma plenária para compartilhar suas observações e compará-las com a probabilidade teórica, possibilitando a formalização coletiva dos conceitos e o contraste com o espaço não-equiprovável trabalhado anteriormente.

Momento 1 (25 minutos) – Lançando Dados Regulares

Com os estudantes dispostos em duplas ou trios, o professor começa apresentando dados com diferentes números de faces (4, 6, 8, 10, 12 e 20). Cada grupo escolhe um desses dados para trabalhar. Após a escolha, o professor solicita que os estudantes façam experimentações com os dados escolhidos, ou até mesmo criem regras para um jogo, e definam como registrariam os lançamentos. Isso inclui decidir como contar e registrar os resultados e como calcular a probabilidade com base nesses resultados.

Os estudantes expressam os resultados obtidos em porcentagem. Isso envolve calcular a frequência de cada resultado e convertê-la para porcentagem, o que ajuda a visualizar a probabilidade empírica (ou seja, baseada na experimentação). Se necessário, o professor orienta os estudantes, ajudando-os a completar a análise. Isso inclui discutir como usar a análise dos lançamentos (probabilidade frequentista) para determinar a probabilidade ou comparar com a probabilidade teórica, que se baseia na análise do espaço amostral e nos resultados possíveis sem realizar os lançamentos. Também existe a possibilidade de um estudante ou grupo partir diretamente para a probabilidade teórica, ao inferir que todos os lados seriam iguais em superfície (diferente do astrágalo).

Momento 2 (15 minutos) – Plenária

Os estudantes compartilham com os colegas, suas experimentações, regras e reflexões. O professor organiza a aula com a intenção de formalizar o conceito de probabilidade frequentista e ressaltar a diferença entre o espaço equiprovável e o não equiprovável. Pode partir das observações de algum estudante ou grupo, se existem, para discutir sobre a probabilidade teórica e explicar sua diferença em relação à probabilidade frequentista. Também pode, matematicamente, construir sua fórmula com os estudantes.

Momento 3 (10 minutos) – Síntese

O professor pode resgatar os conteúdos trabalhados nas últimas duas aulas, destacando as diferenças entre a probabilidade frequentista e a teórica, além das diferenças entre o espaço amostral não-equiprovável e o equiprovável. Esses conceitos podem ter sido apropriados pelos estudantes durante a proposta.

3.5 O processo de análise

A análise do material empírico foi conduzida por meio do estudo dos registros em áudio e textos produzidos pelos estudantes. Inicialmente, procedemos com a transcrição do material bruto de áudio e vídeo, resultando na versão escrita dos diálogos da proposta realizada. Posteriormente, cada momento foi textualizado, com a padronização da linguagem e a eliminação de expressões informais, resultando em um texto mais conciso. A partir dessas textualizações, foram selecionados trechos específicos dos diálogos, que serão relatados integralmente, visando observar possíveis indícios de apropriações dos conceitos desencadeados.

Para estruturar a análise, foi essencial organizar os dados de maneira que permitisse evidenciar as interações dos estudantes e suas possíveis apropriações dos conceitos probabilísticos. Inicialmente, foram realizadas leituras minuciosas das transcrições e registros escritos, buscando identificar padrões de participação, argumentação e exploração dos conceitos. A partir dessa etapa, elaboramos categorias preliminares que orientaram a segmentação dos episódios e cenas, considerando tanto a progressão das discussões quanto os momentos em que ocorreram manifestações do pensamento probabilístico. Esse processo não seguiu uma ordem linear, mas foi pautado pela articulação entre a teoria da Atividade Orientadora de Ensino e os dados empíricos, de modo a evidenciar as relações entre as ações dos estudantes e os desafios propostos. Assim, a organização em episódios e cenas foi

construída de forma a tornar a análise mais estruturada e acessível ao leitor, favorecendo a compreensão das dinâmicas observadas durante a realização da proposta.

Nos episódios e cenas organizados, os estudantes foram identificados com os nomes fictícios Arthur, Flora, Marvin, Taís e Zara, como explicitado e o docente como Professor. Logo no início, a proposta precisou passar por adaptações, modificações e ajustes, sendo desenvolvida ao longo de quatro aulas de 50 minutos, divididas em dois blocos de 100 minutos.

Embora não tenha sido possível concluir a proposta nas três aulas originalmente planejadas, na análise fazemos referência ao planejamento inicial pelo termo **AnMn**, que indica a aula e o momento planejados, para fácil localização pelo leitor. Por exemplo, o termo **A1M2** se refere à Aula 1, Momento 2 do planejamento da proposta.

Com o objetivo de responder à pergunta de pesquisa, “*Como o Jogo dos Astrágalos, organizado na perspectiva da Atividade Orientadora de Ensino, pode ser um potencial referente para desencadear conceitos de Probabilidade nos anos finais do Ensino Fundamental?*”, apresentamos nossa análise organizada em episódios e cenas, que são agrupados conforme os aspectos que desejamos investigar, sem seguir necessariamente uma ordem cronológica entre eles. No entanto, dentro de cada cena, os acontecimentos são apresentados em sequência temporal.

Quadro 10 - Organização da proposta em Episódios e Cenas

Episódio 1: Noções de Probabilidade	Cena 1: Concepções iniciais dos estudantes sobre probabilidade
	Cena 2: As experiências dos anos escolares anteriores
Episódio 2: O Jogo dos Astrágalos	Cena 1: Interação com o artefato histórico
	Cena 2: A revelação do espaço não-equiprovável
Episódio 3: Espaços de Probabilidade	Cena 1: Síntese coletiva – a emergência da aleatoriedade
	Cena 2: Inferências para um espaço equiprovável

Fonte: Desenvolvido pelo autor.

Nesta seção, exploramos a proposta de utilizar o Jogo dos Astrágalos como um referente para uma situação potencialmente desencadeadora de aprendizagem no contexto do ensino de probabilidade para estudantes do sexto ano. A partir de uma revisão teórica e da construção de um referencial metodológico, delineamos como esse jogo, oriundo de práticas históricas, pode ser organizado para auxiliar a compreensão de conceitos probabilísticos entre os estudantes. A

proposta visa não apenas engajar os estudantes por meio de uma abordagem lúdica, mas também promover um ambiente onde a aprendizagem se dá de forma contextualizada.

Na próxima seção, apresentamos a análise do material empírico obtido durante a realização do Jogo dos Astrágalos com os estudantes. Ponderamos sobre as respostas, as interações e as reflexões dos estudantes, a partir de episódios e cenas, para avaliar nossa proposta.

4. ANÁLISE DO JOGO DOS ASTRÁGALOS COMO UM POTENCIAL REFERENTE PARA UMA SITUAÇÃO DESENCADEADORA DE APRENDIZAGEM

No intuito de atingir nosso objetivo e responder à questão central da pesquisa, nesta seção analisamos o material empírico por meio de cenas e episódios como modo de exposição (Araujo; Moraes, 2017), enfatizando a interação entre os estudantes e o artefato histórico. As ações desenvolvidas durante as intervenções pedagógicas foram analisadas sob a ótica da Teoria Histórico-Cultural, considerando a relevância do contexto histórico e social na elaboração do conhecimento. Essa abordagem não apenas possibilita a investigação das práticas em sala de aula, mas também permite avaliar como os estudantes podem se apropriar dos conceitos matemáticos envolvidos.

4.1 Episódio I: Noções de Probabilidade

Neste episódio, tínhamos como objetivo possibilitar que os estudantes revisitassem suas ideias e experiências escolares sobre probabilidade. Guiamos a discussão encorajando-os a expressar suas concepções, criando um espaço para reflexão sobre como a probabilidade se manifesta no cotidiano e nas observações práticas.

Os estudantes foram organizados em dois grupos para o momento posterior de interação com o artefato histórico, podendo escolher sua formação: um grupo foi composto por Flora, Zara e Taís, e outro por Arthur e Marvin. Após as orientações iniciais sobre o registro, especificando o uso de lápis ou caneta, distribuímos uma folha contendo seis perguntas e solicitamos que cada estudante respondesse individualmente. Embora estivessem sentados em grupos, neste momento a proposta indicava que cada um elaborasse suas próprias respostas. Esse modo de organização da aula foi inspirado na dinâmica indivíduo-grupo-classe que

[...] propõe integrar o sujeito ao movimento conceitual: deve-se, num primeiro momento, pensar individualmente sobre a situação-problema encontrada e atribuir significados próprios a ela; em seguida, discutir as sínteses elaboradas individualmente com um pequeno grupo de trabalho. Este, por sua vez, elabora uma síntese coletiva a partir das reflexões de todos os seus membros e, então, é feita uma discussão com o grupo-classe para encontrar uma possível solução ou a solução mais adequada para a situação-problema (Marco, 2009, p. 34-35).

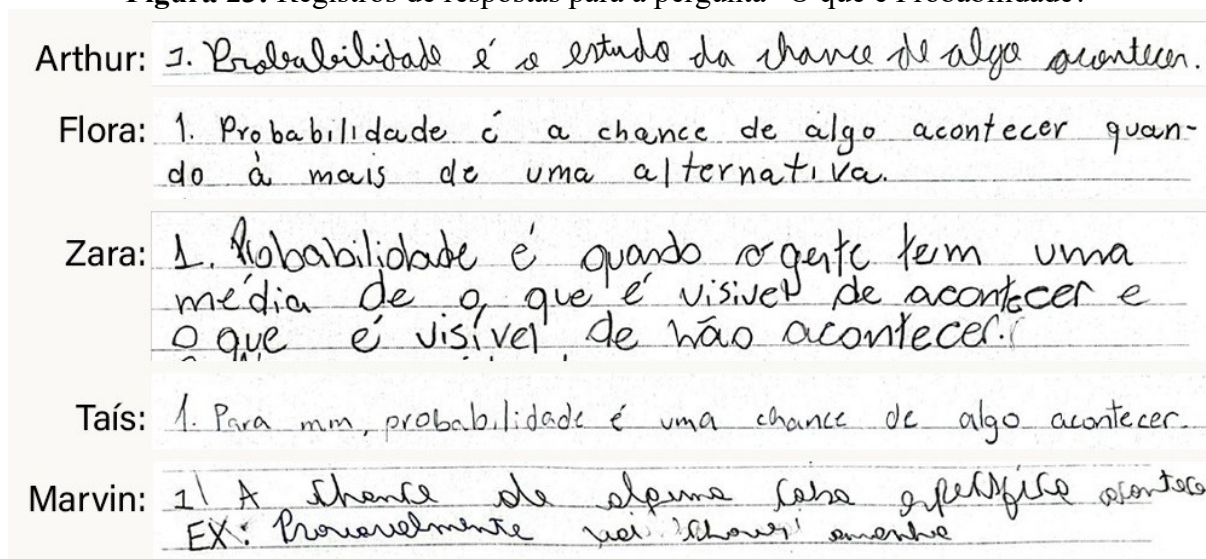
Indicamos que não havia respostas certas ou erradas, incentivando-os a escreverem o que pensavam. Após cerca de dez minutos, os estudantes foram organizados em uma roda de conversa para apresentar e refletir sobre as respostas relacionadas a Probabilidade.

4.1.1 Cena 1: Concepções iniciais dos estudantes sobre Probabilidade

Esta cena tem como objetivo principal mapear as concepções espontâneas pelos estudantes sobre probabilidade, oriundos de suas experiências vividas. Busca-se valorizar esses saberes como o ponto de partida para a elaboração do conhecimento científico.

No início da proposta (A1M1), os estudantes responderam individualmente algumas questões sobre o que é probabilidade (Figura 23).

Figura 23: Registros de respostas para a pergunta “O que é Probabilidade?”



Fonte: Arquivos do autor.

Com suas respostas em mãos, os estudantes refletiram sobre suas definições e as compartilharam com o grupo (A1M2), ocorrendo o seguinte diálogo:

Professor: O que vocês colocaram?

Arthur: Eu coloquei, tipo, Probabilidade é o estudo da chance de algo acontecer.

Zara: Probabilidade é uma média do que é visível de acontecer e o que é visível de não acontecer.

Flora: Eu coloquei que Probabilidade é a chance de algo acontecer.

Taís: Probabilidade é uma chance de algo acontecer.

Professor: Uma chance de algo acontecer. Então todos nós aqui pensamos em coisas bem parecidas, certo? Faltou só uma palavrinha aí, que ninguém falou, quando eu estou estudando a Probabilidade, mexendo com Probabilidade, eu sei as coisas que vão acontecer?

Estudantes: Não!

Professor: Eu sei os resultados possíveis?

Flora, Marvin, Taís e Zara: Não.

Arthur: Possível, sim.

Professor: Possíveis, sim, mas o que vai sair como resultado eu sei?

Estudantes: Não!

Professor: Se eu não sei o resultado do que vai sair, tem uma palavrinha chave que se usa para isso, alguém consegue pensar em alguma coisa?

Marvin: Possibilidades?

Arthur: Sorte?

Professor: É o aleatório! Vocês já ouviram essa palavra?

Estudantes: Sim

Professor: Então, a Probabilidade tem a ver, para a gente, com o estudo dos possíveis resultados quando a gente está pensando em...

Arthur: Aleatoriedade!

Professor: Aleatoriedade! A gente precisa dessa aleatoriedade. Porque senão, para que eu vou estudar a Probabilidade de algo que eu sei que vai acontecer?

Arthur descreveu probabilidade como o estudo da chance de algo acontecer. Zara a definiu como uma média entre o que é visível de acontecer e o que não é, o que levanta a questão sobre o que a estudante quis expressar com essa ideia. Ela parece vincular a ideia de probabilidade a uma experiência visual e tangível. Esse entendimento parece-nos revelar uma tendência a pensar que o acaso está diretamente relacionado àquilo que ela consegue ver ou experimentar. A visão de Zara sugere uma tentativa de entender a incerteza com base no que é observável, ou seja, eventos que podem ser "vistos" como possíveis. Esse fenômeno indica uma compreensão intuitiva da probabilidade que se aproxima da frequência observada, ou seja, dos eventos que se manifestam concretamente, e expõe o esforço dos estudantes, que se repete no desenrolar da proposta, em relacionar conceitos probabilísticos ao mundo físico e visível ao seu redor.

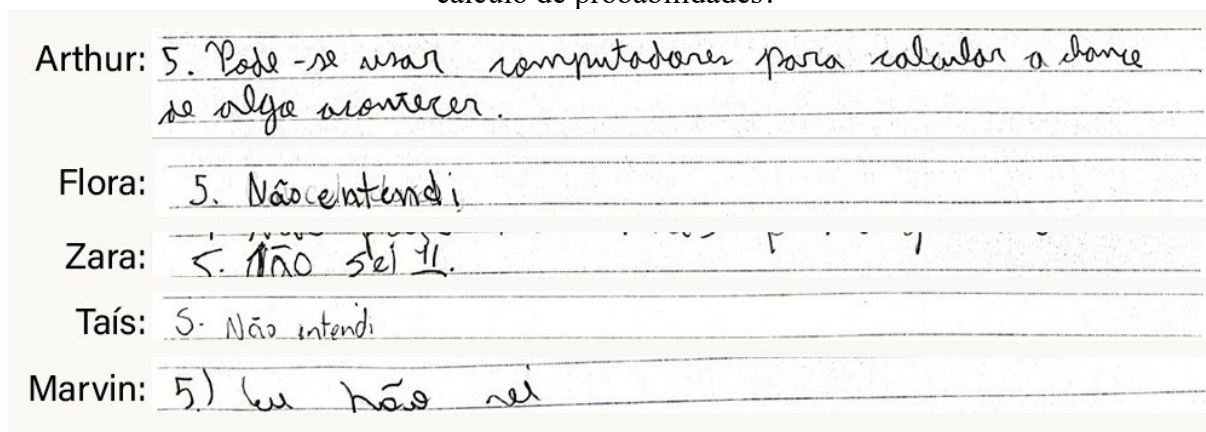
Flora e Taís também mencionaram a Probabilidade como a chance de um evento ocorrer e, quando o professor indica que, apesar de todos concordarem em suas definições, faltava uma palavra-chave, os estudantes sugeriram termos como “possibilidades” e “sorte”, até que o professor apresenta a palavra “aleatoriedade”. É interessante notar que o termo “sorte”, tão comum e enraizado no cotidiano desses estudantes, surgiu em um contexto acadêmico, durante a aula, mas sem uma definição clara por parte dos estudantes.

A associação da probabilidade ao conceito de sorte reflete uma perspectiva histórica e culturalmente intrínseca, onde o acaso sempre foi compreendido como algo desconhecido ou determinado por forças além do controle humano (David, 1962). Na Antiguidade, o acaso era interpretado como um evento fora da compreensão humana e, portanto, sob a tutela de deuses ou forças sobrenaturais. Na Idade Média, essa ideia evoluiu, e o acaso passou a ser visto como uma “intervenção divina” ou algo predeterminado pela vontade de Deus, segundo Santo Agostinho.

Essa associação persiste, como visto no uso do termo “sorte” na interação em sala de aula, onde os estudantes interpretaram o aleatório em termos de sorte, um resquício de como,

mesmo nos tempos modernos, o acaso ainda é, intuitivamente, ligado ao inesperado ou ao "acaso feliz". Isso ressalta a necessidade de abordar a probabilidade não apenas como uma teoria matemática, mas também como uma tentativa de entender e lidar com o desconhecido de forma prática, adaptando-se às incertezas com ferramentas de previsão e análise.

Figura 24: Registros de respostas para a pergunta “Quais objetos podem ser utilizados para o cálculo de probabilidades?”



Fonte: Arquivos do autor.

Ao responderem à pergunta “*Quais objetos podem ser utilizados para o cálculo de probabilidades?*” (A1M1), tivemos as respostas apresentadas na Figura 24: a maioria dos estudantes parecia não ter compreendido o foco da questão, com respostas que variaram entre “não sei” e “não entendi”. Esse “não sei” pode indicar uma dificuldade de entender a pergunta, já que os estudantes não relacionaram facilmente objetos com probabilidade. Já o “não entendi” sugere que a pergunta, para ser respondida individualmente e sem apoio, talvez tenha sido insuficiente para essa faixa etária. Essa dificuldade é potencializada quando os estudantes não possuem experiências anteriores que conectem o conteúdo ao seu cotidiano. Percebemos e recomendamos que a questão seja reformulada para futuras replicações, podendo ter a seguinte forma: “*Quais objetos, como dados e moedas, podem ser utilizados para o cálculo de probabilidades?*”

Com as respostas da figura 24 em mãos, provocamos o seguinte diálogo:

Professor: Quais objetos podem ser utilizados para o cálculo de Probabilidades?

Taís: Essa eu não respondi!

Flora: Nem eu!

Marvin: Não entendi!

Professor: Alguém respondeu essa?

Arthur: Eu entendi, coloquei que pode usar computadores para calcular a chance de algo acontecer.

Flora: Eu ia colocar calculadoras!

Professor: Olhem lá, no fundo, nós utilizamos aqueles cartazes, certo? Aqueles cartazes podem ser objetos utilizados para o cálculo de Probabilidade?

Zara: Sim, tudo que tem mais de um!

Professor: Tudo que tem mais de um?

Zara: Sim!

Arthur: E que é diferente!

Professor: Tudo que tem mais de um e que é diferente... Certo, acho que faz sentido. Alguém consegue me falar alguns objetos, pensando nisso, então? O que a gente poderia utilizar para o cálculo de Probabilidades?

Arthur: Aqueles quadradinhos pequenos, os panfletos... – *olhando para as paredes da sala* – Só contar todos!

Professor: Taís, consegue pensar em exemplo, de alguma coisa?

Taís olha ao seu redor.

Taís: Aqueles papéis ali debaixo.

Professor: Aqueles papéis ali debaixo... – *aponta para uma pequena estante de livros* – Tem como eu utilizar os livros para calcular algum tipo de Probabilidade?

Estudantes: Tem!

Arthur: Você pode colocar quantas letras tem, quantas variedades de letras têm...

Flora: Tamanhos, grossuras!

Professor: Por exemplo, qual é a chance de a gente ir ali escolher o livro favorito de Flora? A gente tem que analisar.

Ao percebermos que a pergunta não foi bem compreendida pelos estudantes (A1M2), identificamos a necessidade de reorganizarmos o ensino conforme se prevê na AOE (Moura, 2022), visando ajustar em tempo real o processo de ensino para que o objetivo de aprendizado seja de fato possível. A AOE propõe que o ensino ocorra por meio de um movimento em que a compreensão e a apropriação dos conceitos sejam atingidas progressivamente, a partir das relações estabelecidas, da interação com os artefatos históricos e com o próprio contexto de aprendizagem. Entendemos que, ao reformular a questão e incluir exemplos como os cartazes que existiam na sala, o professor adota uma abordagem que fornece aos estudantes uma referência palpável para refletir sobre o conceito de probabilidade.

Esse processo de reorganização do planejamento também é uma resposta do professor frente às necessidades de desenvolvimento dos estudantes e ao desafio de tornar o conhecimento probabilístico compreensível. A partir dessa reformulação, o professor consegue sustentar o desenvolvimento da proposta que permeia os conceitos de probabilidade ao torná-lo mais próximo de experiências dos estudantes, e assim, passíveis de apropriação. Além disso, a AOE permite que essa reorganização não seja apenas pontual, mas contínua e adaptativa, ajustando o ensino em resposta às dificuldades e avanços percebidos ao longo do processo de aprendizagem.

Taís e Flora admitiram não ter respondido, enquanto Marvin expressou sua confusão. Arthur, no entanto, mencionou que computadores poderiam ser utilizados para calcular probabilidades, e Flora sugeriu calculadoras. Fomentamos a reflexão lembrando que os cartazes na sala poderiam ser considerados objetos para esse cálculo.

A resposta de Zara, "tudo que tem mais de um", e o complemento de Arthur, "devem ser diferentes", revelam uma compreensão inicial, porém essencial, sobre a natureza dos experimentos probabilísticos. Esses comentários parecem nos indicar que os estudantes estão, intuitivamente, relacionando a ideia de probabilidade com a existência de múltiplos resultados possíveis em um conjunto de elementos. A ideia "mais de um" nos parece refletir o reconhecimento de que, para que o cálculo de probabilidades faça sentido, é necessário haver uma diversidade de resultados que possibilitem comparações e análise de frequências de ocorrência. Em outras palavras, para que uma situação seja considerada probabilística, ela deve permitir a variabilidade de resultados, e essa multiplicidade é o que possibilita a previsão e o cálculo de probabilidades (Dantas, 2004).

Além disso, o complemento de Arthur, que destaca a necessidade de que esses elementos sejam "diferentes", reforça a importância de que os resultados em um experimento probabilístico sejam distinguíveis entre si. Essa diversidade de elementos é crucial para a construção inicial de um espaço amostral, sendo o conjunto de todos os possíveis resultados distintos em uma situação de probabilidade. Por exemplo, no lançamento de um dado, cada face representa um resultado único e identificável, possibilitando calcular a chance de cada face aparecer. Sem a diferenciação entre os elementos, inicialmente o cálculo probabilístico perde seu sentido, pois não há variação para observar ou mensurar. Assim, ao trazerem essas ideias, Zara e Arthur demonstram uma compreensão fundamental para o desenvolvimento dos conceitos de probabilidade, pois percebem que tanto a quantidade quanto a diversidade dos elementos são aspectos necessários para definir um experimento probabilístico, além de contribuir com o aprendizado dos demais colegas.

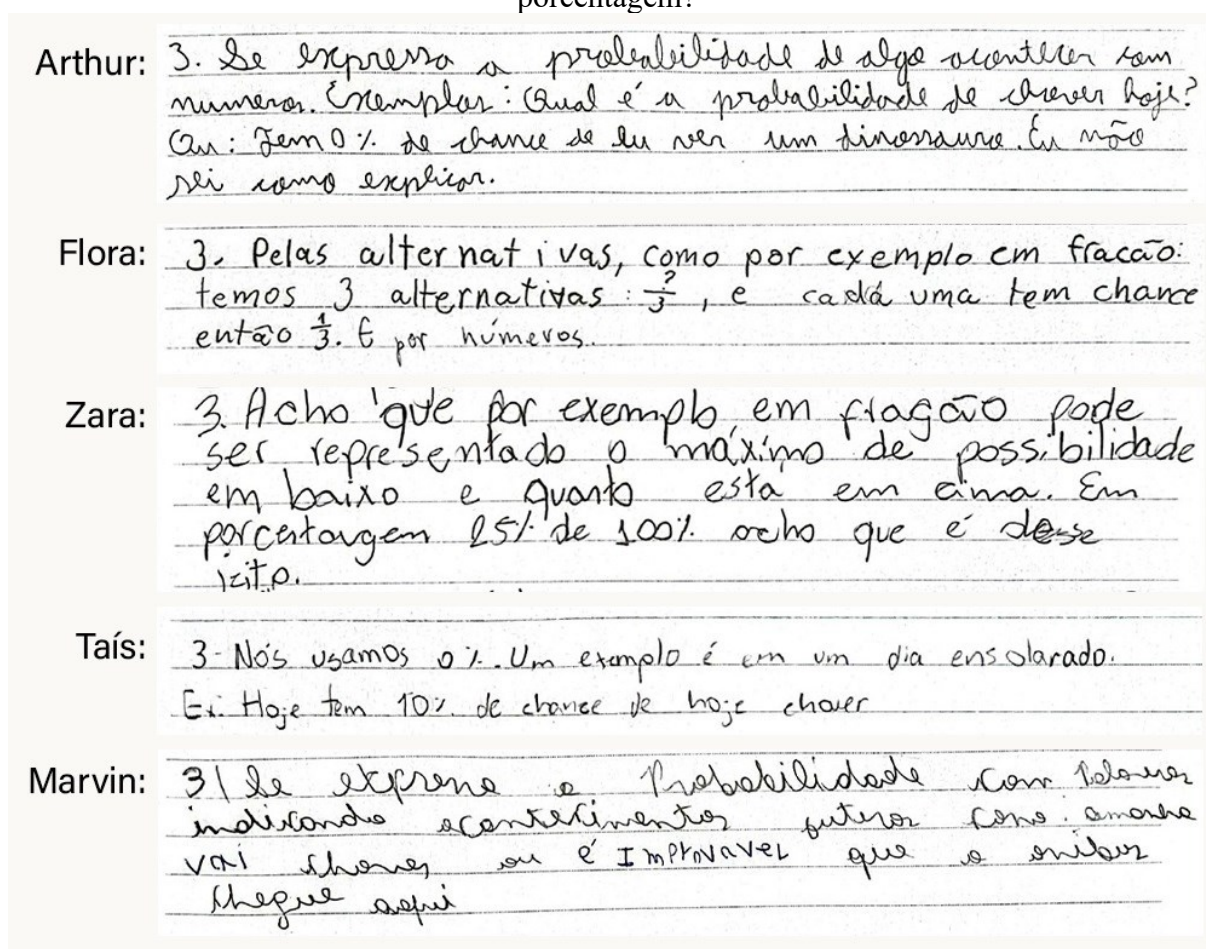
4.1.2 Cena 2: As experiências dos anos escolares anteriores

Esta cena tem como objetivo evidenciar como os estudantes mobilizam conhecimentos prévios sobre Probabilidade, abordados no ano anterior, para compreender e aprofundar conceitos fundamentais como a classificação gradual de eventos, os limites numéricos da probabilidade (0% a 100%), as diferentes formas de representação (palavras, frações, decimais e porcentagens), o espaço amostral e os experimentos aleatórios. Ao desenvolvermos a proposta, percebemos indícios de apropriação desses conceitos, revelados na retomada de ideias

como a gradação de eventos de impossível ao certo, que auxiliaram tanto na consolidação de conteúdos já trabalhados, como espaços equiprováveis, quanto na abertura para novos conhecimentos, como os espaços não-equiprováveis.

Esses indícios foram observados por meio da terceira pergunta (A1M1): “Como se expressa a Probabilidade de algo acontecer? Consegue citar exemplos? Como expressar em forma de fração, decimal ou porcentagem?” Os estudantes demonstram uma associação da Probabilidade a números representados em frações, porcentagens e por meio de palavras. É interessante notar que cada estudante se concentra em apenas um tipo de representação, revelando uma visão parcial do conceito de probabilidade e das diferentes formas em que ele pode ser expresso.

Figura 25: Registros de respostas para a pergunta “Como se expressa a Probabilidade de algo acontecer? Consegue citar exemplos? Como expressar em forma de fração, decimal ou porcentagem?”

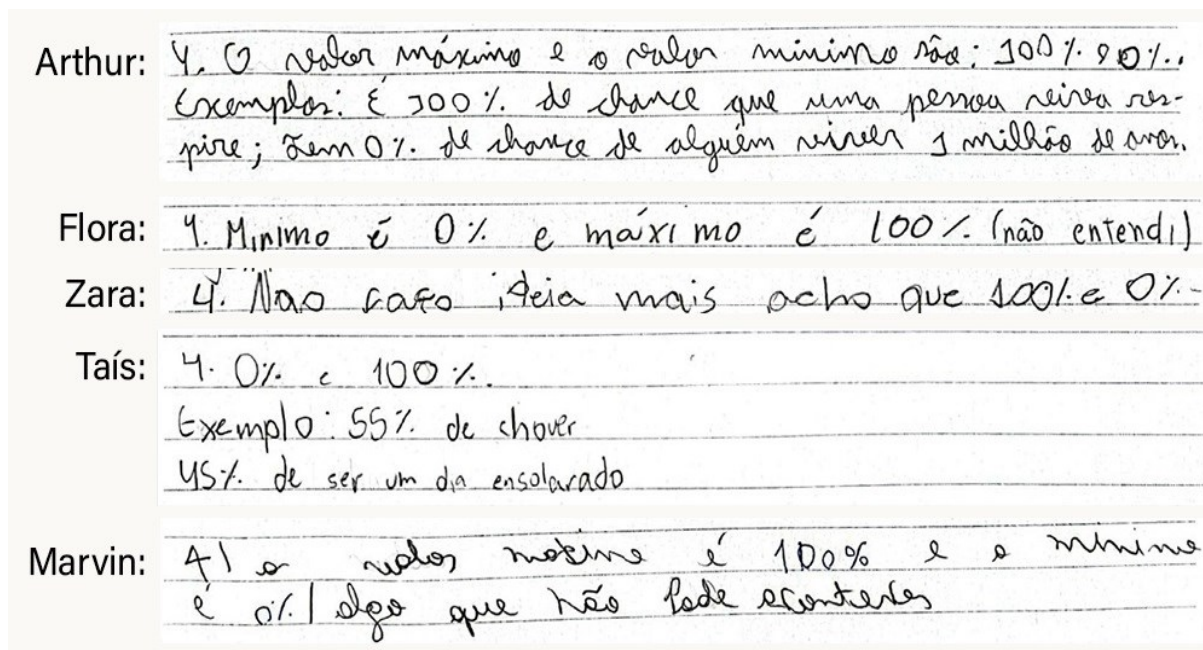


Fonte: Arquivos do autor.

Além disso, com a quarta pergunta (A1M1) — “Qual é o valor máximo e o valor mínimo que podemos obter ao calcular uma probabilidade? Consegue citar exemplos?”, — fica

evidente que todos os estudantes, mesmo os que expressam alguma incerteza em suas respostas, reconhecem que o valor mínimo de uma probabilidade é 0% e o máximo é 100%.

Figura 26: Registros de respostas para a pergunta “Qual é o valor máximo e o valor mínimo que podemos obter ao calcular uma probabilidade? Consegue citar exemplos?”



Fonte: Arquivo do autor.

Mais indícios foram observados quando os estudantes compartilharam suas percepções com os colegas (A1M2) como observamos no diálogo a seguir:

Professor: Como expressar a Probabilidade de algo acontecer? Alguém consegue citar um exemplo, de como eu explico isso em forma de fração, decimal ou porcentagem? Nessa questão, o que você pensou, Marvin?

Marvin: Nessa questão eu pensei que se expressa Probabilidade com palavras indicando uma coisa que vai acontecer no futuro, tipo, amanhã é improvável que vá chover.

Professor: Certo. Marvin falou para a gente uma palavrinha muito importante quando a gente pensa sobre Probabilidade: improvável. O que significa dizer que uma coisa é improvável de acontecer?

Marvin: Que certamente, tipo, não é certamente... Mas, que às vezes, a chance de não acontecer é maior!

Flora: Uma chance mínima de acontecer!

Professor: Uma chance mínima de acontecer, a chance de não acontecer é maior que a chance de acontecer. E aí você já falou outra palavrinha, certamente. O que é uma coisa certa na Probabilidade?

Arthur: Que vai acontecer.

Professor: Que vai acontecer. Alguém pode me dar um exemplo?

Marvin: Certamente amanhã o sol vai nascer.

Professor: É certo que amanhã o sol vai nascer. Qual outra palavrinha a gente tem? A gente já foi em certo e improvável.

Arthur: Ô Professor, eu coloquei que a Probabilidade expressa algo que vai acontecer com números.

Professor: Com números, certinho, a gente vai falar dos números também. Vamos só fechar das palavras primeiro! A gente falou certo, que é quando tem 100% de chance de acontecer, e improvável, que pode acontecer, mas tem pouca chance.

Marvin: Tem provável também, né?

Professor: Provável! O que é uma coisa provável?

Arthur: Que pode acontecer, mas que também não pode acontecer.

Marvin: Que tem mais chance de acontecer.

Professor: Então eu tenho o provável e o improvável, o provável quando tem mais chance de acontecer, o improvável quando tem menos chance de acontecer.

Marvin: E o não vai acontecer?

Professor: E o que não vai acontecer, alguém sabe qual palavrinha a gente usa?

Arthur: Impossível?

Professor: Impossível! É impossível...

Zara: Eu voar!

Professor: Zara voar, usando superpoderes! – *Estudantes riem e dispersam por um instante, falando sobre impossibilidades e superpoderes.* – E quando alguma coisa tem chance de acontecer, está mais ou menos no meio?

Flora: Provável?

Professor: Provável é quando tem mais chance de acontecer. A gente tem do zero até o cem por cento: impossível, improvável, alguma coisa, provável e certo. Alguém lembra a palavrinha do meio?

Flora: Nossa, fugiu!

Professor: Possível! Quando algo é possível de acontecer, a gente não consegue falar se é muito ou pouco. Então a gente pode expressar a chance de a Probabilidade acontecer utilizando palavras.

Esse diálogo evidencia indícios de apropriação dos conceitos de Probabilidade pelos estudantes, que demonstram a capacidade de descrever eventos utilizando termos apropriados, como "improvável," "certo," "provável," "impossível" e "possível". A interação dos estudantes com o professor revela um resgate e uma compreensão gradativa dos conceitos, refletindo o entendimento das diferentes possibilidades de ocorrência de eventos.

Esse processo de retomada e aprofundamento das ideias evidencia que os estudantes conseguem utilizar suas experiências anteriores para atribuir significado aos termos probabilísticos no contexto escolar atual. A observação do uso de palavras como "impossível", "provável" e "certo" revela que os estudantes não apenas compreendem esses conceitos, mas também conseguem organizar esse conhecimento para novas situações, mostrando uma apropriação consistente e contínua sobre conceitos de probabilidade.

Além disso, os estudantes também demonstraram conhecimento anterior ao utilizar de números para expressar probabilidades (A1M2).

Professor: E se a gente usar números, Arthur?

Arthur: Tipo, tem 0% de chance de eu ver um dinossauro.

Professor: Tem 0% de chance de o Arthur ver um dinossauro... vivo! Certo? Então aí, qual tipo de número a gente está usando?

Estudantes: Porcentagem.

Professor: E o que vocês colocaram? – *se dirigindo para os estudantes do grupo 1* – Algum complemento?

Zara: Não! Mas, coloquei a mesma coisa, a mesma ideia...

Professor: Então, como a gente pode expressar a Probabilidade por meio da porcentagem? Como o Arthur falou, tem 0% de chance de chover amanhã.

Marvin: E como fração?

Professor: E como fração, alguém consegue me dizer um exemplo?

Arthur: Fração de cem!

Marvin: Eu acho que é tipo, 3 de 10... 30 de 100 disso acontecer.

Professor: E quanto por cento é 30 de 100?

Marvin: 30%.

Professor: 30%! Alguém consegue me dar outro exemplo, com números menores, usando frações?

Arthur: Tem 19 de 100, 19% de algo acontecer.

Professor: Certo, então vamos olhar aqui em volta na sala...

Arthur: *Arthur aponta para uma tabela numérica de 1 a 100.* – Cada número tem 1 em 100.

Professor: Cada número na nossa tabela numérica tem a chance de 1 em 100.

Arthur: Não, na verdade, o três aparece dez vezes, o dois...

Professor: Aí é o número ou o dígito?

Arthur: Ah, é verdade...

Professor: Vamos pensar aqui. Qual é a chance, olhando aqueles panfletos lá, no fundo, de escolher um panfleto verde? – *Estudantes contam a quantidade de panfletos. Há dez panfletos no total, sendo cinco rosas, três laranjas e dois verdes.*

Flora: 2 de 10.

Arthur: Ou 20 de 100.

Professor: Certo, 2 de 10 ou 20 de 100. Então 2 de 10 é uma Probabilidade que estamos expressando em forma de fração. E em decimal?

Arthur: 20%.

Professor: 20% é porcentagem. O que é...

Arthur: 0,2!

Professor: 0,2. Zara, qual é o valor máximo que a gente pode obter quando calculamos uma Probabilidade?

Zara: Não sei, mas eu acho que é 100.

Professor: Máximo é 100, e o mínimo?

Zara: Acho que é 10, ou 0.

Professor: 10 ou 0, o que faz mais sentido?

Estudantes: O 0 (zero).

Professor: Então a Probabilidade vai de 0 a 100, faz sentido? Tem como uma coisa ter chance negativa de acontecer, ou ter 500% de chance de acontecer?

Estudantes: Não!

Marvin: É, só vai até o 100. Porque se você tivesse negativo... Nossa! – *confusão se estampa em seu rosto por um instante* – Se você tem 5% negativo de chance de uma coisa ruim acontecer, uma coisa boa vai acontecer?

Professor: Será? – *Estudantes riem.*

Os diálogos revelam indícios de apropriação dos conceitos de Probabilidade trabalhados no ano anterior com os estudantes, que conseguem expressar e converter probabilidades em porcentagens, frações e decimais. A discussão revela que eles entendem os limites numéricos da Probabilidade, reconhecendo que os valores variam entre 0% e 100% e descartando a possibilidade de valores negativos ou superiores a esse intervalo. Embora pareça trivial, a reflexão sobre a hipótese de um valor negativo na Probabilidade – prontamente rejeitada por sua falta de sentido – demonstra uma compreensão que remete aos axiomas fundamentais da Probabilidade (Kolmogorov, 1956).

A discussão sobre os valores mínimo e máximo da probabilidade aponta para a compreensão dos estudantes quanto aos limites numéricos, entre 0% e 100%. Essa clareza se reflete nas respostas, onde os estudantes descartam naturalmente a possibilidade de probabilidades superiores a 100%. Essa concepção, reforçada pela interação em sala, demonstra que os estudantes entendem que a probabilidade opera em um intervalo fechado e qualquer valor fora desse intervalo não corresponde a uma situação real de probabilidade (Kolmogorov, 1956). Esse entendimento é fundamental para o desenvolvimento de uma visão crítica e matemática sobre o tema.

Professor: Por exemplo, qual é a chance de a gente ir ali e escolher o livro favorito de Flora? A gente tem que analisar.

Arthur: Quantos livros tem!

Professor: Quantos livros tem, qual é o livro favorito, se o livro favorito está ali. Se o livro favorito não está ali, qual é a chance?

Estudantes: Zero!

Flora: Dos que estão ali, eu tenho um!

Professor: Então, se a gente tivesse 20 livros no total, e Flora tivesse só um livro favorito. A chance seria de?

Estudantes: 1 em 20.

Professor: E em porcentagem, seria quanto? 1 em 20, a gente tem que ir para a fração de 100.

Arthur: 5%.

Professor: 5%! A gente precisa ir para uma fração equivalente. O que eu faço no denominador 20 para virar 100?

Estudantes: Vezes 5.

Professor: Então, o que eu faço com o numerador 1?

Estudantes: Vezes 5.

Professor: Então, 5%! Tudo bem, até agora?

Nesse diálogo, os estudantes mostram que estão retomando conceitos de Probabilidade trabalhados anteriormente ao calcular a chance de escolher o livro favorito de Flora. Eles identificam rapidamente a fração "1 em 20" e a convertem para 5% utilizando o raciocínio sobre frações equivalentes com naturalidade. Essa fluidez e liberdade na resolução sugerem que os

conceitos abordados em anos anteriores foram apropriados e estão sendo reutilizados para analisar novas situações.

Professor: Tudo tem a mesma chance de acontecer?

Estudantes: Não!

Professor: Alguém consegue me dar um exemplo?

Arthur: Não tem a mesma chance de eu beber água e comer um doce, por exemplo!

Professor: Não tem a mesma chance de você beber água e comer um doce.

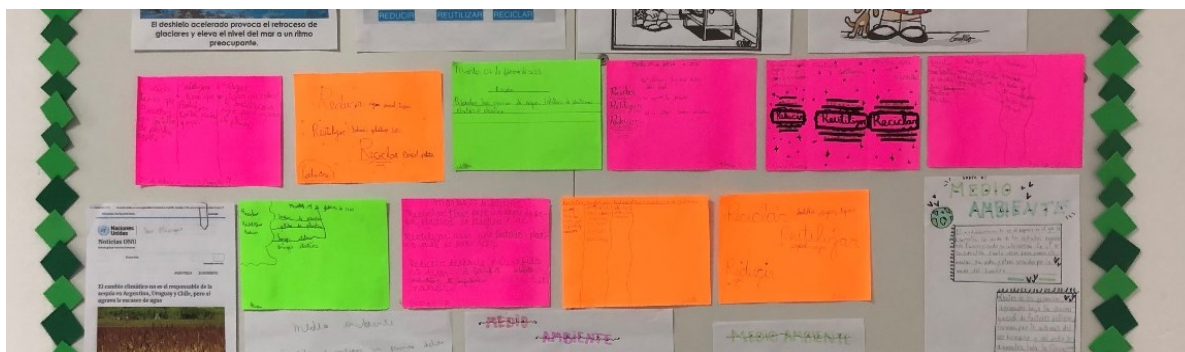
Marvin: Um doce você come algumas vezes na semana e água você tem que tomar todo dia.

Professor: Isso, certinho! Tudo bem, até aí? Então, pessoal, essas são definições na Probabilidade, que vamos utilizar bastante, que são dessas coisas que conversamos aqui. Experimentos aleatórios são aqueles que, ao serem repetidos nas mesmas condições, não produzem o mesmo resultado. Então, aqui, quando vamos escolher aleatoriamente um desses panfletos que temos na parede, devolvemos e sorteamos novamente, a gente está repetindo um experimento sob as mesmas condições. A gente chama de evento todo resultado de um experimento. Então, se eu retirar um rosa ali, qual é o evento?

Estudantes: Retirar um rosa.

Professor: E a gente chama de espaço amostral o conjunto de todos os possíveis resultados de um experimento. Então, o que é meu espaço amostral aqui neste exemplo? – *aponta para o conjunto de panfletos coloridos.*

Figura 27: Panfletos coloridos na sala



Fonte: Arquivo do autor.

Estudantes: Laranja, verde e rosa.

Professor: Na verdade, rosa, laranja, verde, rosa, rosa, rosa, verde, rosa, laranja, laranja. Todas as possibilidades. Certo?

Zara: Precisa ser na ordem?

Professor: Não precisa ser na ordem.

Marvin: Isso é o espaço amostral?

Professor: Isso, espaço amostral.

O professor formaliza, a partir das reflexões com os estudantes, a definição de experimento aleatório e espaço amostral, que será utilizada durante a proposta. Quando os estudantes calculam a probabilidade de eventos cotidianos, como escolher um objeto específico em um grupo, eles utilizam raciocínios como frações equivalentes e conversão para

porcentagem de maneira intrínseca. Entendemos que a habilidade dos estudantes em utilizar conceitos probabilísticos discutidos a novas situações revela uma fluidez conceitual que vai além da memorização, indicando uma possível apropriação dos conceitos trabalhados no ano anterior, permitindo que os estudantes os revisitem em novos contextos com autonomia e confiança. Tais conceitos são fundamentais para a próxima etapa da proposta.

Este episódio apresentou indícios de que explorar as concepções prévias de anos escolares anteriores pode ser um ponto de partida interessante para a elaboração de conceitos probabilísticos, oferecendo caminhos para responder parcialmente à nossa pergunta de pesquisa. As interações com os estudantes mostraram que suas ideias iniciais, ainda que baseadas em experiências cotidianas, podem ser ressignificadas por meio da mediação.

As discussões em grupo e as sínteses coletivas demonstraram que a contextualização histórica e social também favorece o desenvolvimento do pensamento probabilístico. Ao relacionarem suas percepções com situações conhecidas, os estudantes começaram a compreender noções fundamentais, como a variação de resultados em experimentos aleatórios. Entendemos que este episódio forneceu indícios de que conectar conhecimentos já apropriados a conceitos é uma estratégia útil para desencadear o aprendizado dos conceitos abordados.

Ao destacar o papel das interações na elaboração de sínteses coletivas de conceitos, o episódio contribuiu para responder à pergunta de pesquisa ao mostrar que as concepções prévias e conhecimentos anteriores podem ser organizados e ampliados. Esses resultados indicam que situações que exploram as intuições dos estudantes podem criar condições para que compreensões iniciais de probabilidade, com vistas ao desenvolvimento do pensamento teórico sejam estabelecidas.

4.2 Episódio II: O Jogo dos Astrágalos

Este episódio busca analisar situações que favoreçam a exploração de conceitos de probabilidade por meio de uma abordagem prática e interativa. Para isso, propõe-se a utilização de uma adaptação do Jogo dos Astrágalos, recurso de origem histórica que possibilita a vivência de situações de aleatoriedade, criando um elo entre elementos culturais e a elaboração de saberes matemáticos.

Ao manipular os astrágalos, os estudantes são incentivados a investigar noções como espaço amostral, eventos não-equiprováveis e variação de resultados em experimentos aleatórios. Acredita-se que a proposta cria condições para que se apropriem dos conceitos a partir de suas próprias experiências, articulando observações empíricas com reflexões

conceituais e ampliando sua capacidade de análise crítica em relação aos fenômenos probabilísticos.

Dessa forma, pretende-se constituir um ambiente de aprendizagem dinâmico e colaborativo, no qual a interação com o artefato histórico e a discussão coletiva favoreçam a construção compartilhada de significados. A prática, além de resgatar a dimensão lúdica do jogo, contribui para que os estudantes organizem suas percepções e estabeleçam conexões entre o conhecimento cotidiano e o teórico, fortalecendo a compreensão da probabilidade como campo do pensamento matemático.

4.2.1 Cena 1: Interação com o artefato histórico

O objetivo desta cena é promover, por meio da interação inicial dos estudantes com os astrágalos enquanto artefato histórico, a criação de condições para desencadear questionamentos e reflexões acerca de noções fundamentais da probabilidade. A proposta busca articular a curiosidade despertada pelo objeto lúdico com a necessidade de compreender suas características, de modo a favorecer o trânsito entre interpretações intuitivas e a sistematização conceitual, em consonância com a Atividade Orientadora de Ensino.

Entregamos uma impressão de astrágalo branco, sem marcações, para cada estudante (A1M3). O diálogo que surgiu revelou um momento importante de exploração inicial dos astrágalos. A interação, permeada por observações lúdicas, demonstrou curiosidade dos estudantes diante de um objeto inusitado, o que parece ter potencializado o engajamento com a proposta.

Flora: O que é isso?

Taís: É um...

Flora: Deixa eu ver se o de vocês tem o mesmo formato!

Zara: Deixa eu ver!

Flora: Tem!

Zara: Pera aí...

Flora: O meu, olhando assim, parece um porquinho!

Zara: Calma aí, me dá aqui!

Flora: Parece um carro!

Zara: Todo mundo coloca aqui, ó, com a ponta para cima.

Flora: Não parece um porquinho? Olha só, olhando assim, parece o focinho, a cabeça e a orelha... Mas parece o Stitch!

Taís: O de todo mundo parece!

Zara: Dá aqui, rapidinho! – *segura os três, lado a lado* – Olha...

Flora: Eles se encaixam?

Zara: Todos são iguais!

Taís: Vamos ver se a gente não consegue montar eles!

Flora: Me dá um aí, gente!

O primeiro problema desencadeador apresentado nesta cena, a interação com o astrágalo como artefato histórico, reflete a Atividade Orientadora de Ensino (AOE), conforme delineado por Moura (2022): nessa perspectiva, a proposta didática não se limita a apresentar o conceito de probabilidade, mas o insere em um contexto que provoca uma necessidade genuína de resolvê-lo. Ao mobilizar os estudantes para refletirem sobre eventos aleatórios utilizando os astrágalos, criamos uma relação entre o senso comum e a formalização matemática.

Ao analisar os formatos e semelhanças dos astrágalos, os estudantes iniciaram uma observação que os direcionou à necessidade de categorizar os elementos. Nesse cenário, o simples ato de comparar os objetos entre si deu origem a uma forma inicial de classificação, um processo essencial para o desenvolvimento de conceitos probabilísticos, pois fundamenta a compreensão da variabilidade e regularidade em eventos aleatórios. Essa prática, embora pareça simples, possui uma dimensão analítica crucial para o entendimento do espaço amostral. A organização e identificação das diferentes faces tornam-se etapas iniciais indispensáveis na elaboração do conceito de experimentos probabilísticos, fortalecendo a conexão entre os aspectos concretos e abstratos da aprendizagem.

Marvin: Não é idêntico...

Arthur: É idêntico, sim, é igualzinho!

Marvin: É idêntico, sim, mas... Isso aqui era para ser um corpo. A caixa torácica! Tipo assim, deita. O que parece?

Arthur: Uma caixa torácica! – *Dá uma risada.*

Marvin: De verdade!

Arthur: A melhor coisa.

Marvin: Se isso aqui tem a ver com Probabilidade, o que isso aqui seria?

Arthur: Eu não sei!

Marvin: Eu não sei o que seria. A gente não podia tentar... Isso aqui parece muito um ombro. Sei lá!

Arthur: Seria tipo essa parte aqui da gente, ó!

Marvin: Então, a caixa torácica.

A interação inicial dos estudantes com os astrágalos demonstra como o momento lúdico pode ser um recurso interessante para desencadear o interesse por conceitos que o professor intenciona trabalhar (no nosso caso, de probabilidade). Aqui, a ludicidade não apenas desperta a curiosidade dos estudantes, mas também atua como um catalisador para a reflexão coletiva de conceitos probabilísticos.

Flora: Ó, aqui encaixa!

Zara: Vê o meu!

Flora: Como você sabe que esse é o seu?

Zara: Sei lá!

Flora: Esse aqui é o da Taís, eu acho, sei lá!

Zara: Mas todos são iguais, né?

Taís: Sim!

Zara: Ó, meio que encaixa, então eles são iguais!

Flora: Sim.

Figura 28: Estudante explorando os astrágalos



Fonte: Arquivo do autor.

Zara: Porque eles encaixam um no outro, então eles são iguais. Agora a gente tem certeza.

Taís: É, gente, eu também achei parecido...

Flora: Eu acho – *fala alto com o outro grupo* – que parece um porco.

Zara: Eu acho que parece um dente.

As questões levantadas durante a manipulação dos astrágalos revelaram interpretações baseadas no senso comum, onde os estudantes recorriam inicialmente a ideias prévias e intuições para explicar os fenômenos observados. No entanto, a Atividade Orientadora de Ensino (AOE) oferece um conjunto de possibilidades que permite transformar essas compreensões iniciais em compreensões mais elaboradas. O professor, ao organizar as discussões, exerce um papel importante ao transformar percepções intuitivas em compreensões sistematizadas.

Entende-se, assim, que a aquisição de conceitos, desencadeada na atividade mediada, ocorre de forma sistematizada, intencional, e que o processo de aprendizagem deve garantir a realização de ações conscientes, de modo a possibilitar o desenvolvimento do pensamento teórico. O motivo da atividade de aprendizagem deve ser, por parte dos estudantes, a aquisição de conceitos teóricos, mediante ações conscientes que permitam a construção de um modo generalizado de ação (Moura, 2022, p. 89).

Isso corrobora a tese de Moura (2004) sobre a importância das intervenções pedagógicas na consolidação de conceitos complexos.

Marvin: Tudo tem a ver com Probabilidade, né?

Arthur: É verdade... Ah, isso aqui pode ser um objeto que, se você virar aqui, parece uma coisa. Aqui é outra, aqui é outra, aqui é outra... – *Girando o astrágalo e apontando seus lados.* – Porque Probabilidade pode ser tudo, então isso aqui também pode ser tudo.

Marvin: Aqui, parece um carro! – *interage com Flora, que fala alto que parece um porco* – Então, parece uma caixa torácica! Tem a perninha.

No diálogo entre Marvin e Arthur, a tentativa de relacionar as formas dos astrágalos a partes do corpo humano ilustra como as referências cotidianas podem ser utilizadas para iniciar a abstração. Essa associação evidencia a habilidade dos estudantes de mobilizar conhecimentos prévios e utilizá-los em novos contextos, um processo central para o desenvolvimento do pensamento teórico.

Após este momento de exploração inicial, o professor explica o que de fato é um astrágalo, com imagens informativas³².

Professor: Esse é o tálus.

Marvin: Nossa, que estranho...

Arthur: É, muito estranho.

Professor: Inicialmente, essas peças foram feitas das carcaças dos animais. Eles pegavam os ossos das ovelhas, das cabras, e, mais tarde, eles faziam versões disso em latão, em bronze, madeira, mármore e até em pedras preciosas. Quantos lados a gente tem nessa peça?

Zara: Quatro lados!

Professor: Quatro lados. Vocês conseguem identificar os quatro lados? – *Coloca a peça na posição vertical e a gira.*

Marvin: Lado? Mas tem seis, não é? – *Aponta com o dedo os quatro lados côncavos e convexos, e os dois lados arredondados.* – Aqui, aqui, aqui, aqui, aqui e aqui.

Flora: Aqui conta? – *Aponta para um dos lados arredondados.*

Professor: O que vocês acham? – *Com o astrágalo na vertical, os lados arredondados em cima e embaixo.* – Em cima e embaixo, conta ou não conta?

Marvin: Eu acho que conta!

Flora: Eu acho que conta!

Arthur: Embaixo conta. Tem dois lados. – *Aponta para os dois lados arredondados.*

Professor: A ideia aqui é utilizar isso como se fossem quatro lados, somente as laterais. Porque o de cima e o de baixo são arredondados, então a gente não os conta. Certo?

Marvin: Então são só quatro lados!

Professor: Agora olhem os lados mais largos para mim. Esse, e o de baixo. Eles são iguais?

³² Você pode encontrar essas imagens em Figura 6: O osso astrágalo de um veado (página 32); Figura 7: Representação esquemática do esqueleto do tarso nos mamíferos domésticos (página 33) e Figura 8: Esqueleto de tarso bovino (página 33). Para mais fotos e vídeos do astrágalo, consulte o Produto Educacional.

Estudantes: Não!

Professor: Vocês lembram que a gente estudou em Geometria, côncavo e convexo?

Estudantes: Sim!

Professor: Vocês conseguem me dizer qual deles é côncavo?

Arthur: Os dois são côncavos!

Professor: Os dois côncavos? Tem algum que parece “mais” côncavo?

Marvin: Esse daqui!

Professor: Esse daqui vocês conseguem ver? – *Mostra aos estudantes* – Tem um sulco maior.

Marvin: E também dá para conectar aqui. – *Estudante mostra a ideia de conectar dois pontos dentro do objeto, de forma que o segmento de reta fique com uma parte fora do objeto.*

Professor: Isso mesmo! E dos outros lados, tem um que é mais reto que o outro? Um é mais côncavo, e o outro é mais convexo.

Os estudantes demonstram habilidade de mobilizar seus conhecimentos anteriores, indicando que possivelmente se apropriaram dos conceitos de côncavo e convexo, ao estabelecerem a correlação com os lados do astrágalo. A articulação entre as observações individuais e as discussões coletivas sobre as propriedades do objeto possibilitou que eles identificassem a unicidade de cada face, um aspecto crucial para a definição do espaço amostral. Nesse processo, começa a emergir a ideia de que cada evento possui uma probabilidade específica de ocorrer. Essa compreensão inicial abre caminho para o desenvolvimento e possível apropriação de conceitos como frequência relativa e probabilidade teórica. Os estudantes continuam suas experimentações com os astrágalos, até que acidentalmente uma estudante faz um lançamento com o artefato.

Flora deixa seu astrágalo cair, e ele rola pela mesa.

Professor: O que Flora acabou de fazer aí?

Taís: Ahhh...

Zara: Qual é a chance... Qual é a chance...

Flora: O quê? Não entendi. Eu deixei cair sem querer!

Flora: Qual é a chance – *Falando alto, direcionando para o outro grupo*, – de isso aqui ser um marshmallow?

Marvin: Zero, ele é um osso.

Flora: Mas, parece um marshmallow! Olhando assim, parece.

Taís: Não parece!

Arthur: Não parece.

Flora: Parece.

Zara lança seu astrágalo sobre a mesa em silêncio repetidas vezes.

Professor: O que Zara está fazendo?

Taís: “Tacando” ele...

Professor: “Tacando” ele?

Zara: Estou fazendo uma teoria na minha cabeça!

Professor: Uma teoria na sua cabeça?

Zara: Sim!

Flora: Qual é a chance de quando eu derrubar isso aqui, o mundo explodir?

Zara: Hm... Estou entendendo!

Flora: Eu não estou, não estou entendendo não!

Zara: A parte mais alta...

Professor: A parte mais alta?

Zara: A parte que é mais funda, quando cai, fica para baixo, na maioria das vezes! E a parte mais alta, para cima.

Taís: Qual é chance do lado... – *Joga o astrágalo, que cai no chão.*

Flora: Deixa cair! Caiu com o “chifre” para cima... Não, caiu com o “chifre” para baixo! Caiu assim. – *Mostra o astrágalo em uma posição.*

Taís: O meu caiu assim! – *Mostra o astrágalo em outra posição.*

As estudantes lançam os astrágalos mais algumas vezes.

Flora: O meu só cai assim, é para cair assim?

Taís: O meu caiu assim.

Flora: É para cair assim, ou de outro jeito, Zara?

Zara: Quê?

Flora: É para cair como?

Zara: É para cair com a parte de baixo...

Flora: O meu só cai assim! O que eu faço?

Taís: Agora o meu só caiu assim...

Zara: Gente, a minha teoria está certa!

Flora: Aí, ó! O meu só cai assim. O meu caiu uma vez assim...

Taís: O meu também!

Flora: Aí, ó!

Zara: Ó, vou “tacar” cinco vezes. Vamos ver a probabilidade de cair com a parte mais curva... Vamos ver a probabilidade de a parte mais curva cair, de cinco vezes, tá bom?

Flora: Tá bom, vou anotar!

Zara: Anota aí! Uma vez. Não... – *Lança algumas vezes.* – Uma de cinco... Não! Falta mais uma, né?

Flora: Duas de cinco.

Zara: Duas de cinco... – *Lança mais uma vez.*

Flora e Zara: Duas de seis!

Zara: Ô, Professor...

Taís: O meu ali caiu...

Zara: Ô, Professor, de seis caiu duas com o lado côncavo para baixo!

Professor: De seis, caiu duas vezes o lado côncavo para baixo.

Flora: Vamos lá, anota, Zara!

Zara: Pronto. Quanto?

Flora: Com essa parte aqui, para cima! Com o “chifrezinho” para cima.

Zara: Tá bom, de quanto?

Flora: Sei lá!

Taís: Cinco!

Flora: Ó... – *Lança algumas vezes...* – Foi um assim, e um assim!

Os questionamentos levantados por Zara sobre a relação entre as faces do astrágalo, que levaram intuitivamente ao lançamento consecutivo e o cálculo de probabilidades reforçam a relevância da problematização como estratégia pedagógica. Nesse contexto, a mediação docente se apresenta como um elemento essencial para guiar os estudantes na transição entre uma compreensão empírica e uma perspectiva mais formal.

Marvin lança seu astrágalo repetidamente.

Professor: E aí, Marvin, o que você está fazendo agora?

Marvin: Eu estou vendo um negócio aqui... Às vezes, o osso cai deitado! Legal, o osso caiu do jeito mais difícil! Eu fiz assim, e ele só caiu em pé... – *lança mais algumas vezes* – Ele só cai deitado!

Os estudantes, ao experimentarem com o astrágalo, envolveram-se em um processo de investigação espontânea que os levou a observar e analisar os resultados de seus lançamentos. A prática empírica, marcada por sucessivas tentativas e a troca de percepções entre os colegas, revelou a curiosidade natural e o interesse pelo comportamento do objeto. A partir dessas observações, começaram a identificar padrões e a levantar hipóteses sobre as probabilidades de diferentes posições do astrágalo após o lançamento. Essa dinâmica destacou indícios da importância da experimentação como ponto de partida para a elaboração do conhecimento, promovendo um entendimento inicial sobre a relação entre repetição, resultados e probabilidades.

Professor: O que todo mundo está fazendo agora?

Arthur: Jogando!

Flora: Derrubando!

Professor: Quais são os meus possíveis resultados quando eu jogo esse osso?

Marvin: Ele cai deitado... Cai assim, assim, e muito provavelmente assim! – *gira o astrágalo em diferentes posições* – Porque o meu caiu assim.

Arthur: A gente pode continuar fazendo esse negócio de jogar o osso?

Professor: Pode continuar fazendo esse negócio de jogar o osso... E se a gente tivesse um jogo disso? Como chama esse osso?

Marvin: Eita, é...

Arthur: Antrópologo!

Marvin: Astras...

Arthur: Astrólogo?

Professor: Astrágalo!

Arthur: Ihh, falei certinho!

Flora: O quê?

Arthur: O osso!

Os experimentos realizados pelos estudantes, ao lidarem com as faces dos astrágalos, exemplificam a importância da relação com prática para a compreensão da aleatoriedade. Por meio da ação orientada, os estudantes formularam hipóteses e as testaram, refinando suas compreensões com base nos resultados obtidos. O processo de classificação rudimentar realizado pelos estudantes ao observarem os astrágalos nos remete à discussão sobre variabilidade e regularidade, fundamentos da teoria da probabilidade. A construção de um espaço amostral exige que os estudantes percebam a regularidade dos eventos em meio à variabilidade natural dos resultados.

Nesse sentido, o desafio que se põe é o de propor uma organização do ensino que não se limite simplesmente a reforçar o desenvolvimento do pensamento empírico, posto que se trata de um tipo de pensamento pautado nos aspectos

externos e observáveis dos objetos e fenômenos e, como tal, desenvolve-se independentemente da escolarização do sujeito (Moura, 2022, p. 76-77).

Moura (2022) destaca que esse movimento de transição entre o empírico e o teórico é central para a aprendizagem matemática.

Professor: Esses ossinhos que vocês têm aí, o pessoal os utilizava há muitos anos, para jogar.

Marvin: Mancala?

Professor: Jogar o Jogo dos Astrágalos!

Marvin: Sério, tem um jogo disso?

Professor: Tem um jogo disso! E agora eu vou entregar para vocês...

Flora: Rosa?!

Professor: Alguns coloridos, para a gente poder diferenciá-los. E, a gente tem lados diferentes, não tem?

Zara: Tem!

Professor: Faz sentido a gente chamar eles de nomes diferentes?

Zara e Marvin: Faz...

Arthur: Eu não entendi.

Professor: A gente tem lados diferentes no astrágalo, não tem?

Arthur: Sim.

Professor: Então faz sentido a gente nomear esses lados de formas diferentes? *Entrega um conjunto de quatro astrágalos coloridos, enumerados em I, III, IV, VI. Os estudantes começam a lançar e fazer experimentações.*

Zara: Professor, esses IV é do osso ou é da máquina?

Professor: Essas são inscrições que não tem no osso! A gente faz para diferenciar os lados

Marvin: Ahh! – *em voz alta* – é um dado!

Arthur: Nossa!

Professor: O quê, Marvin?

Marvin: É um dado! 1, 2... “N-I”?

Arthur: Ô Professor, não tá dando pra entender!

Taís: *Gira o astrágalo azul* – Ah, é um dado! Parece um dado.

Marvin: Por que “N”, Professor?

Flora: Porque é o “I-N” do...

Marvin: Por que tem um “N”?

Arthur: 1, 6... 1, 5, 4? Não, 6!

Professor: O 2 e o 5, a gente considera os lados arredondados. Eles são impossíveis de cair quando a gente joga!

Arthur: Sério?

Taís: 1, 4, 6...

Flora: Olha as falhas!

Zara: *Joga o astrágalo dourado* – 4! “N” eu não sei o que é...

Professor: Isso, 4! Quais números a gente tem aqui?

Flora: 6, 4, 1 e “N”!

Professor: Como?

Flora: E “N”!

Professor: Isso é o 3.

Taís: 3?

Flora: Por que 3?

Professor: Porque são três risquinhos!

Flora: Ah, tá!

Professor: Que tipo de numeração é essa?

Estudantes: Romana!

Professor: Então, a gente não tem os lados 1 e 5, pois são – *coloca o astrágalo na posição vertical* – os de cima e o de baixo, e eles são impossíveis de cair quando a gente joga.

Zara: É impossível de cair?

Taís: É...

Arthur: Então esse número aqui é 3?

Taís: Sim, o “I-N” é 3

Zara: Eu tenho um prata e um dourado.

Flora: Eu tenho rosa e branco.

Zara: *Lança o astrágalo dourado* – Uh, ganhei!

Taís: Vamos ver quem tira o maior, vamos ver!

Lançam os astrágalos.

Flora: O de Zara não pode contar.

Zara: 3 mais 3, seis!

Taís: 3!

Flora: Tá bom, vamos lá, só um!

Taís: 4!

Zara: 4!

Flora: 4! Vai!

Taís: 6.

Zara: 3.

Flora: 3.

Moura (1992) argumenta que o jogo, quando adequadamente estruturado, transforma-se em um instrumento pedagógico poderoso. A mediação do professor desempenha um papel importante na transformação das percepções intuitivas dos estudantes em compreensões sistematizadas. Como apontado por Oliveira e Panossian (2021), a organização pedagógica deve ser intencional, articulando os conceitos propostos com a realidade vivenciada pelos estudantes. Nesse sentido, a mediação no momento de exploração dos astrágalos torna-se uma possibilidade para que os estudantes avancem em sua compreensão teórica sobre probabilidade, relacionando-os de forma independente com os dados que já conhecem.

O surgimento de dúvidas e debates ao longo da proposta reflete uma dinâmica em que, conforme Moura (2004), os confrontos entre diferentes perspectivas são cruciais para que os estudantes revisem suas concepções iniciais e avancem rumo a uma aprendizagem mais sistematizada. A mediação do professor, ao fomentar essas discussões, pode potencializar o desenvolvimento conceitual.

A cena evidencia como a exploração dos astrágalos, inicialmente marcada por observações espontâneas e interpretações livres, evoluiu para um processo de investigação que possibilitou aos estudantes identificar regularidades, formular hipóteses e reconhecer propriedades do objeto em diálogo com conceitos matemáticos já estudados. Esse movimento, mediado pelo professor, demonstra o potencial da proposta para articular ludicidade, prática

experimental e reflexão teórica, criando condições para que a apropriação de conceitos probabilísticos ocorra de forma consciente e sistematizada.

4.2.2 Cena 2: A revelação do espaço não-equiprovável

O objetivo desta cena é analisar como a exploração prática do Jogo dos Astrágalos pode favorecer a compreensão dos estudantes acerca da constituição de espaços amostrais não-equiprováveis. A partir da manipulação dos astrágalos e dos registros individuais das jogadas, busca-se promover a articulação entre experiência empírica, linguagem matemática e reflexão coletiva, de modo a desencadear discussões que permitam a sistematização de conceitos probabilísticos em processo de apropriação.

O professor, então, explica as regras do jogo para os estudantes, e pede para fazerem seus registros individualmente (A2M1) em uma tabela³³.

Flora, Zara e Taís jogam pedra, papel, tesoura. Zara ganha e começa. Flora e Taís jogam novamente para definir a ordem do jogo. Flora ganha e vai em seguida.

Zara: *Segurando os quatro astrágalos – Tá, vou jogar!*

Taís: *Esse é teste!*

Flora: *6, 4...*

Zara: *Não, esse aqui é 6, miga!*

Flora: *É 4!*

Zara: *É que para mim está de ponta cabeça!*

Flora: *Ah, para você parece 6!*

Professor: *Estudantes, jogada teste! Quem vai fazer uma jogada teste?*

Flora: *A gente já fez!*

Professor: *Já fizeram, já entenderam? Em uma jogada assim – mostra o exemplo na mesa – é um “Os Seis”, quem jogou, paga um para o pote!*

Zara paga um feijão ao pote. As três anotam a jogada, mesmo que a proposta original tenha sido que cada um anotasse apenas os próprios lançamentos. Por conta disso e por ter três integrantes, este grupo demora mais no preenchimento da tabela.

A discussão sobre o espaço amostral, apresentada como uma construção coletiva, reforça a ideia de que a aprendizagem é um processo socialmente mediado. O espaço amostral, definido pelos resultados possíveis de um experimento, é compreendido aqui como um conceito que emerge da interação entre os estudantes e o artefato histórico. Moura (2018) ressalta que a articulação entre experiências concretas e abstrações teóricas é essencial para a consolidação do pensamento matemático.

Flora realiza sua jogada.

Flora: *Ó, 3-4-4-3.*

³³ Figura 22, página 76. A tabela foi elaborada com 25 lançamentos, mas pode ser ajustada conforme necessário.

Taís: Então é 3?

Flora: Prata é 3, rosa é 3. E aí, dourado e azul é IV.

Taís: Eu estou escrevendo o número mesmo!

Flora: Eu estou escrevendo IV!

Zara: Eu também.

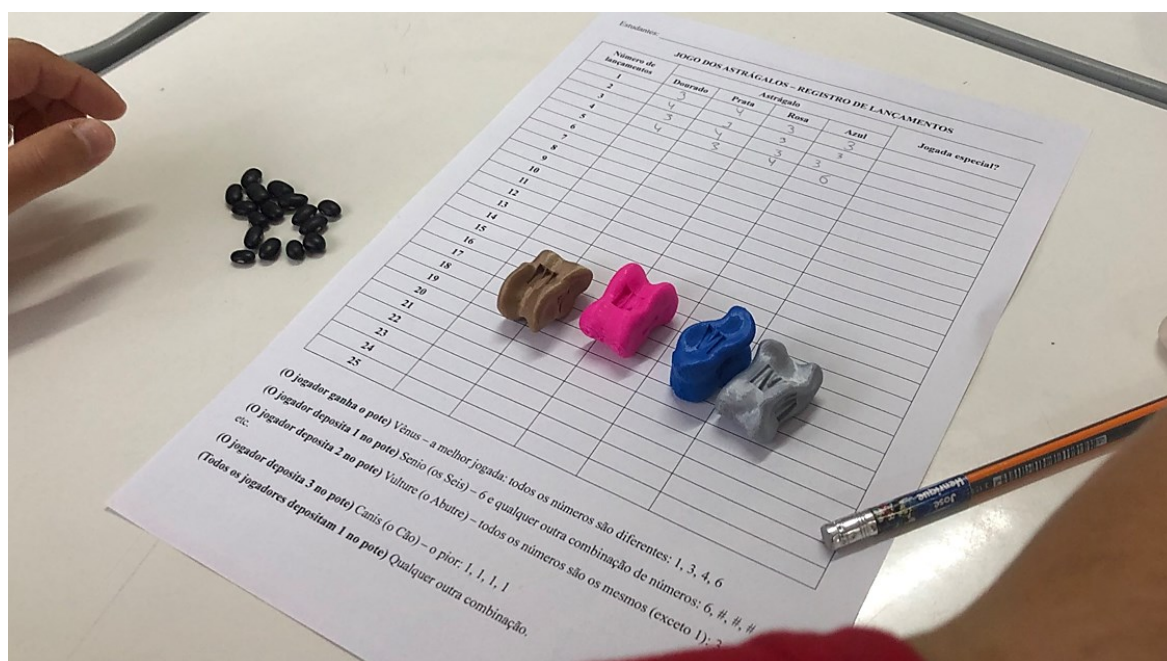
Flora: Ô Professor, vem cá!

Taís analisa a jogada.

Taís: Esse não é nada... Porque repetiu 3 e 4.

Professor: Se este não é nada, todo mundo deposita um.

Figura 29: Registros iniciais do lançamento dos astrágalos enumerados



Fonte: Arquivo do autor.

Taís realiza sua jogada.

Flora: Ô, o prata IV, VI, 3 e IV. Dois IV... É “Sênio”! É “Sênio” essa de novo, e você deposita um. Qual é o seis? O rosa, né?

Taís: O rosa.

Flora: O rosa é 6, tá? Dourado e azul é IV...

Taís: Não!

Flora: Não, prata e azul!

Zara: E dourado?

Flora: Dourado é 3!

Zara: Não, calma! Rosa é VI?

Flora: Isso.

Zara: E é “Sênio”.

Flora: E aí, dourado é 3.

Zara: Calma aí, eu preciso de uma borracha... Tá muito confuso!

Taís: Gente, escreve número mesmo! Tipo, 3, 4, 5, 6.

Flora: É, eu vou fazer assim.

Zara: Depois eu apago o resto.

Zara: O dourado?

Flora: Dourado é 3.

Zara: Prata?

Taís: 3.

Flora: Não, prata é 4.

Taís: Isso, prata é 4.

Flora: Rosa é 6 e azul é 4.

Flora e Taís dispersam por um momento, e Zara chama de volta ao jogo. Zara realiza sua jogada.

Zara: Rosa 3, prata 3 também.

Flora: Azul 4.

Taís: Dourado 4.

Flora: Todo mundo deposita um, que é qualquer outra combinação.

A discussão sobre a nomenclatura das faces dos astrágalos evidencia a importância da linguagem na elaboração do conhecimento matemático. Ao atribuir nomes às faces, os estudantes começaram a estabelecer um sistema de referência que facilitou a comunicação e a análise dos resultados. O professor, então, orientou novamente que as estudantes registrassem apenas suas jogadas individualmente.

A realização de múltiplos lançamentos dos astrágalos pelos estudantes possibilitou a coleta de dados suficientes para a construção de uma distribuição de frequências. Esse processo é crucial para a compreensão de como a lei dos grandes números (David, 1962) se manifesta na prática, aproximando a frequência relativa da probabilidade teórica à medida que o número de experimentos aumenta.

As estudantes continuam suas jogadas.

Flora: Todo mundo deposita um!

Zara: Mas Professor, isso é pura sorte!

Flora: É Probabilidade!

Taís: Todo mundo já depositou?

Flora: 4, 3, 6, 6...

Flora: Quem ganha?

Zara: A Taís...

Flora: A Taís!

Zara: Ou eu, se jogar um “Vênus” agora!

Taís: Todo mundo deposita um!

Zara: Flora, a gente morreu!

Taís: Êêêê...

Professor: O que aconteceu aqui?

Zara: A Taís ganhou!

Professor: Duas jogadoras terminaram com seus feijões e não tivemos “Jogada de Vênus”, o que vocês acham que acontece?

Zara: A Taís ganha!

Flora: Não, tenta a Taís jogar uma “Jogada de Vênus” antes de ela levar tudo! Taís, joga até seus feijões acabarem para ver se você pega uma “Jogada de Vênus”!

A reflexão coletiva proporcionada pela roda de conversa é um exemplo de como as Situações Desencadeadoras de Aprendizagem podem promover a colaboração no ambiente escolar. Segundo Moura (2022), a interação social é uma condição indispensável para a

elaboração de conhecimentos complexos. Ao discutir suas observações e interpretações, os estudantes não apenas consolidam seus aprendizados, mas também ampliam seus horizontes cognitivos.

Marvin realiza sua jogada.

Marvin: 1, 3, 3...

Arthur: Aí é 4?

Professor: Certo, aí os dois depositam.

Arthur: Tem que anotar!

Arthur realiza sua jogada.

Arthur: De novo, 3, 3... Só o prata que foi 4.

Marvin realiza sua jogada.

Marvin: “Vênus”?

Arthur: Não. 4, 4...

Marvin: 4, 4, 1, 3.

Arthur: Mesma coisa.

Arthur realiza sua jogada.

Arthur: 4, 4, 6, 3. Ô, Professor.

Marvin: Eu não sei...

Arthur: O “Sênio”, o jogador... Aí eu deposito um?

Professor: Isso, aí só você deposita um.

Arthur: Tenho que anotar.

Marvin realiza sua jogada.

Arthur: 4, 4, 3, 3. Você já depositou o seu?

Marvin: Ainda não.

Arthur realiza sua jogada.

Arthur: Ô, 3, 3, 6, 4. – *Marvin quase deposita um feijão no pote.* – Não, você não! Sou só eu agora.

Marvin realiza sua jogada.

Marvin: 3, 3, 3, 3. Eu deposito dois!

Arthur: O jogador deposita... “Vulture”, todos os números são os mesmos.

Marvin: Nossa, que sorte que eu tô!

A introdução de registros sistemáticos dos resultados dos lançamentos auxilia os estudantes na visualização e interpretação dos dados coletados. Essas representações são ferramentas fundamentais no processo estatístico, facilitando a análise e a comunicação dos achados.

A reflexão sobre a influência da forma e do peso dos astrágalos nos resultados dos lançamentos leva os estudantes a considerarem fatores que podem introduzir vieses nos experimentos. Essa conscientização é essencial para o desenvolvimento de uma postura crítica em relação à coleta e interpretação de dados, conforme salientado por Moura (2004) sobre a importância da problematização no ensino.

Arthur realiza sua jogada.

Arthur: 6, 4, 3... Vai cair 1!

Marvin: Vai cair 6!

Arthur: 1! Caiu 1, caiu 1!

Professor: Jogada de “Vênus”?

Arthur comemora e dá risadas.

Marvin: Perdi...

Arthur: Aí agora eu preciso anotar... Azul, 6, prata, 4, rosa, 1...

Marvin: Perdi...

Professor: Calma, Marvin.

Marvin: Eu já perdi, já, Professor.

Professor: Por quê?

Marvin: Só não perdi se ele ficar tirando “O Cão” toda hora, e eu tirar “Vênus”.

Professor: Tem chance?

Arthur: Tem!

Marvin: Eu diria que é impossível.

Arthur: Aí vai lá e você tira o “Vênus” agora!

Marvin: Totalmente não possível!

Marvin realiza sua jogada.

Arthur: 4, 4, 3, 1. Rosa, 1.

Arthur realiza sua jogada.

Arthur: 6...

Marvin: Ah, não importa! Você tem uma tonelada de feijões!

Marvin realiza sua jogada.

Marvin: Não, não, não...

Arthur: 6, 4, 4, 4. Meu Deus, Marvin! Isso foi azar!

Marvin: Eu sou o azar!

Arthur: Posso jogar?

Marvin: Ah, eu vou anotar em qualquer ordem! Não estou nem aí!

Arthur realiza sua jogada.

Arthur: 4, 3, 4... Nossa, Marvin, você perdeu essa! Eu joguei e fez bum, bum, bum, bum! Pode jogar! Cada um deposita um. 4, 4, 3, 3.

Marvin se prepara para jogar.

Arthur: Vamos, amigo! Você vai tirar “Vênus”!

Marvin: Vou tirar “O Cão”.

Marvin realiza sua jogada.

Arthur: 6, 3, 3, 3.

Marvin: É o feijão! As últimas palavras deste feijão...

Professor: Está no último feijão, Marvin?

Marvin: O último feijão antes da derrota.

Arthur realiza sua jogada.

Arthur: 6, 3, 3... Não! Caiu 4!

Arthur: Vamos continuar jogando?

Marvin: Claro! Será que alguém ganha em 11 rodadas? Só se tirar “O Cão”, né!

Arthur: Vai, eu vou começar!

A discussão sobre a possibilidade de prever os resultados dos lançamentos dos astrágalos introduz os estudantes ao conceito de independência dos eventos. Compreender que cada lançamento é um evento independente, que não é influenciado pelo lançamento anterior, é fundamental para o entendimento de processos aleatórios e para a utilização correta das regras de cálculo de probabilidades.

Marvin realiza sua jogada.

Marvin: 4, 4, 4, 4. Aí é “O Abutre”?

Arthur: Isso, “Vulture”. Paga dois. Ô, Professor, aí a gente conta quem tem mais?

Professor: Vocês acham que isso é coerente?

Arthur: Pode ser!

Marvin: Não, o Arthur já ganhou!

Arthur: Eu tenho 26, ganhei!

Marvin: Por um!

A constatação de que, apesar da aleatoriedade, os resultados dos lançamentos tendem a se estabilizar em determinadas frequências relativas, permite aos estudantes vislumbrar a ideia de regularidade estatística. Essa percepção é crucial para a compreensão de que, em grandes amostras, é possível identificar padrões que emergem do comportamento aleatório.

A introdução de conceitos como espaço amostral e eventos complementares, a partir da manipulação dos astrágalos, amplia o repertório teórico dos estudantes. Essa ampliação é fundamental para poderem analisar de forma mais aprofundada os fenômenos probabilísticos, estabelecendo conexões entre a prática experimental e a teoria subjacente.

Flora: Ai, Professor... Só eu tirei “Vênus” e foi na primeira jogada e não tinha nada no pote!

Professor: E aí, se tirar “Vênus” na primeira jogada e não tiver nada no pote, fica por isso mesmo?

Taís: Fica!

Flora: Sei lá! Fica, né?

Entendemos que a problematização sobre a diferença entre a previsão teórica e os resultados empíricos obtidos nos lançamentos dos astrágalos estimula o pensamento crítico dos estudantes. Essa reflexão é essencial para compreenderem as limitações dos modelos teóricos e a importância de considerar fatores contextuais na interpretação dos dados.

A problemática do acaso, abordada por meio do Jogo dos Astrágalos, permite que os estudantes reflitam sobre as diversas formas de interpretar eventos aleatórios. Moura (1994) enfatiza que a ludicidade não deve ser dissociada do rigor conceitual, mas utilizada como um meio para aproximar os estudantes de conceitos matemáticos fundamentais. A interação entre os estudantes durante as propostas com os astrágalos favorece a elaboração coletiva do conhecimento. O compartilhamento de observações e hipóteses permite que os estudantes confrontem diferentes perspectivas, enriquecendo o processo de aprendizagem.

A mediação do professor, ao orientar os estudantes na sistematização dos conceitos explorados, é fundamental para a consolidação da aprendizagem. O docente atua auxiliando na organização das ideias e na integração entre a prática experimental e a teoria, conforme argumenta Moura (2004) sobre o papel do professor na Atividade Orientadora de Ensino.

Flora realiza sua jogada.

Flora: 3, 3, 3, 6.

Zara: Ô Professor, e se [o jogo] acabar aqui e não acabar os feijões?

Professor: É isso que eu quero que aconteça, para a gente conversar um pouquinho sobre o que fazer.

É interessante notar que Zara levanta um questionamento análogo ao problema dos pontos, debatido por Blaise Pascal e Pierre de Fermat (Goswami; Choudhury; Sarmah, 2019): o que ocorre se o jogo terminar antes que os jogadores esgotem todos os seus feijões?

A integração entre a história dos astrágalos e os fundamentos matemáticos ilustram a relevância do contexto histórico na compreensão de conceitos abstratos. A compreensão do movimento histórico dos conceitos é essencial para que os estudantes atribuam significado às abstrações matemáticas. Essa abordagem reforça o papel do professor como mediador entre o passado cultural e o presente pedagógico.

O professor então aborda, com todos os estudantes, o questionamento presente na troca de correspondências entre Blaise Pascal e Pierre de Fermat, relacionada com um jogo no qual dois jogadores, com chances iguais de ganhar em cada rodada, contribuem para um prêmio acumulado, mas precisam interromper o jogo antes do seu término ou de uma jogada de Vênus (Goswami; Choudhury; Sarmah, 2019). Assim como os matemáticos buscaram uma solução para o problema dos pontos, os estudantes foram apresentados a uma situação que exigia a utilização de estratégias de cálculo e raciocínio lógico.

Professor: Imaginem agora que, por algum motivo, nós somos obrigados a parar de jogar. Como fica a divisão do pote? Eu quero que vocês conversem entre si e decidam.

Zara: Um para cada um!

Professor: A gente precisa ir embora, acabou o jogo agora.

Zara: Quem tem mais, ganha o pote!

Taís: Quem tiver menos?

Flora: Divide!

Zara: Só tem três, divide! Professor, a gente vai dividir!

Professor: Como vocês vão dividir?

Zara: Um para cada um.

Professor: E se tivesse trinta?

Zara: Trinta? Dez para cada um!

Professor: Então a ideia é pegar o que está no pote e dividir igualmente?

Estudantes: Sim!

Zara: Se não der, quem tiver mais, fica com o último!

Taís: É!

Zara: Pode ser?

Professor: É um consenso aqui?

Zara: Sim! E quem tiver mais feijões, ganha o jogo!

Professor: Ótimo! Devolvam todos os feijõezinhos que nós vamos parar de jogar, por enquanto.

Zara: Eu ganhei três vezes! Meu primeiro “Vênus” foi o melhor! Mas, primeiro foi o da Flora, foi perfeito!

As estudantes chegaram à conclusão de que, diante da necessidade de encerrar o jogo antes do término das jogadas, o pote deve ser dividido igualmente entre os participantes. Caso algum feijão restante impeça a divisão exata, ele deve ser atribuído à pessoa que acumulou mais feijões ao longo do jogo, que também será declarada vencedora. Essa solução evidencia um esforço coletivo para estabelecer critérios justos, combinando a igualdade na divisão com o reconhecimento do desempenho individual, demonstrando a reflexão em articular equidade sem deixar a competição do jogo na resolução do problema.

Marvin: Eu acho que “O Cão” poderia ser com 3, ou quatro 3... Porque 3 é muito mais fácil de pegar do que 1.

Arthur: 6, 3, 3...

Marvin: É 6 isso aqui?

Arthur: É 6.

Marvin: Não, é 4!

Arthur: É 6!

Marvin: É 4!

Arthur: Ah, não, é verdade, é 4!

Marvin: Os dois.

Arthur: Estou confundindo... Número romano!

Marvin: É, número romano confunde!

Arthur: 3, 3, 1, 4. Vai! 6, 4...

Marvin: Ô, Professor! A gente pode mudar a regra do jogo? A gente pode mudar a regra de “O Cão”?

Professor: Como vocês querem mudar a regra de “O Cão”?

Marvin: Porque o 1, ele é muito difícil de pegar! Aí não tem como ter “O Cão”.

Professor: E como vocês querem mudar a regra? Podemos mudar!

Marvin: Pode ser 3! Quatro 3!

Arthur: Não, quatro 3 não! Três 1!

Marvin: Três 1! Está bom. É difícil pegar 1! 1 é o único que a gente não pega... É mais difícil cair 1! Olha isso aqui, você faz assim e não cai ele!

Arthur: Pode jogar! 6, 4, 3, 3. É muito difícil de cair 1.

Marvin: É, eu não sei o porquê! Tipo, eu vou jogar assim para ver se cai o 1.

Arthur: 1, 1, 4, 4.

Marvin: Só porque eu falei né! Ninguém aqui tirou “O Cão”, né?

Zara: Eu tirei dois “O Cão”.

Arthur: 1, 3, 3, 3.

Marvin: Eu e o Arthur... 1, 3, 3, 3?

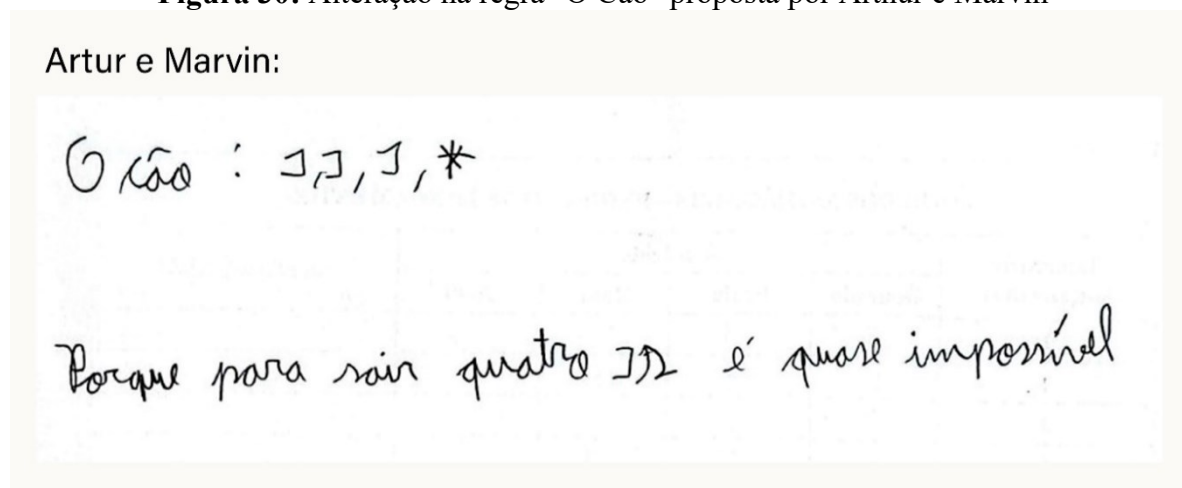
Arthur: Vai, deposita!

Marvin: Arthur e eu tiramos quatro “Vênus”!

Com essa consideração de Arthur e Marvin, a dinâmica do Jogo dos Astrágalos foi revisitada à luz das contribuições de Moura (1992) e Grando (2000), que destacam a importância de integrar os jogos à prática pedagógica intencional. De acordo com esses autores,

a organização das propostas deve permitir que os estudantes interajam com os objetos de estudo de maneira reflexiva, favorecendo a apropriação conceitual.

Figura 30: Alteração na regra "O Cão" proposta por Arthur e Marvin



Fonte: Desenvolvido pelo autor.

A partir da análise probabilística realizada pelos próprios estudantes, que observaram a quase impossibilidade de obter quatro números 1 em uma jogada, surgiram sugestões para modificar as regras do jogo, tornando-o mais viável no entendimento dos estudantes. Essas propostas, construídas coletivamente e adaptadas ao contexto da sala de aula, podem criar um ambiente propício ao desenvolvimento de habilidades probabilísticas e à promoção de aprendizagens.

Professor: Como fica a divisão do pote? Eu quero que vocês conversem entre si e decidam.

Arthur: Como assim, a divisão do pote?

Professor: A gente precisa ir embora, acabou o jogo agora,

Marvin: Ué, tem vinte e três feijões meus ali, e tem vinte e um feijões dele ali.

Professor: Então o que vocês fariam?

Marvin: A gente... Não sei...

Arthur: Eu acho que... Você acha que seria meio justo, quem tivesse com mais feijões... Tipo, tem que terminar e quem tiver mais feijões ganha?

Marvin: Ah... Eu acho que seria, né? Tem como ganhar "Vênus" a qualquer hora.

Arthur: É, mas porque, tipo, a gente tem que parar, né? Ou a gente divide, pega o pote e tem vinte e um meus e vinte e três seus, então vinte e dois para cada? Aí eu vou ter dois a mais, porque eu vou ter vinte e seis e você vai ter vinte e quatro.

Marvin: Algum jeito para dividir para que nós dois fiquemos com o mesmo tanto?

Arthur: Ô, Professor! A gente já pode falar? Quem tiver mais feijõezinhos ganha.

Professor: O consenso de vocês é isso? Se a gente precisar parar, quem tiver mais feijõezinhos ganha?

Arthur: Isso!

Após considerar diferentes possibilidades, os estudantes chegaram ao consenso de que a pessoa que acumulasse mais feijões deveria levar todos os feijões do pote. Essa decisão, baseada na ideia competitiva do desempenho acumulado ao longo da partida, contrasta com a abordagem cooperativa observada entre outras estudantes, que optaram por uma divisão igualitária do pote em situações semelhantes. A escolha de Arthur e Marvin reflete uma percepção mais competitiva e estratégica do jogo, destacando a importância de maximizar as chances de vitória em cada rodada.

A cena evidenciou que a experiência com os astrágalos possibilitou aos estudantes identificar regularidades, refletir sobre a distribuição dos resultados e discutir a constituição de espaços amostrais não-equiprováveis. As interações mediadas pelo professor, associadas à elaboração de estratégias coletivas de análise, favoreceram a construção compartilhada de significados e revelaram o potencial do jogo como recurso pedagógico para articular prática e teoria no ensino de probabilidade.

Os resultados observados indicaram que o Jogo dos Astrágalos pode funcionar como um problema desencadeador de aprendizagens ao integrar aspectos lúdicos, históricos e conceituais. A manipulação dos objetos e o registro sistemático das jogadas geraram oportunidades para que os estudantes relacionassem experimentos concretos com padrões probabilísticos, possivelmente ampliando a compreensão sobre espaços amostrais não-equiprováveis.

A proposta também se mostrou potente por estimular a formulação de hipóteses e a interpretação mais estruturada da aleatoriedade. O engajamento provocado pelo jogo possibilitou que conceitos abstratos fossem explorados em um contexto prático e colaborativo, criando condições para que os estudantes avançassem em direção a uma apropriação mais consciente dos conteúdos de probabilidade.

Por fim, o episódio reforçou que práticas que unem experimentação, mediação docente e reflexão teórica são capazes de promover avanços consistentes na aprendizagem. A experiência com os astrágalos demonstrou a aplicabilidade da proposta investigada, apontando o jogo como um recurso potencial para enriquecer o ensino de Matemática e responder à questão de pesquisa.

4.3 Episódio III: Espaços de Probabilidade

No terceiro episódio, dedicado aos espaços de probabilidade, destacam-se dois momentos: a análise coletiva de um espaço não-equiprovável e as inferências para um espaço equiprovável. Ambos são analisados à luz da Atividade Orientadora de Ensino, considerando-se as mediações do professor e as interações entre os estudantes como aspectos fundamentais para o desenvolvimento e apropriação do pensamento probabilístico.

4.3.1 Cena 1: Síntese coletiva – a emergência da aleatoriedade

Na primeira cena deste episódio, a atenção volta-se para os espaços não-equiprováveis. Utilizando astrágalos como artefato histórico, o professor promoveu discussões que levaram os estudantes a identificarem diferenças nas probabilidades associadas a cada lado do objeto. Essa mediação resgatou a importância de reconhecer que as condições do experimento impactam diretamente no cálculo da probabilidade, elemento essencial na formação do pensamento teórico.

Professor: Quero que vocês pensem agora, no astrágalo prata e no rosa, qual é a chance de sair 2, 3... Cada um dos lados! Qual a chance de sair 1, 3, 4 e 6? Flora vai olhar só para o astrágalo rosa, e a Taís só para o prata!

Flora: De 25 negócios, foram doze 3!

Zara: Como?

Professor: Você vai olhar para o astrágalo dourado, você vai dizer qual é a probabilidade de sair 1, 3, 4 e 6.

Zara: Certo!

Flora: Ô, Professor, eu contei aqui os negócios!

Professor: Consegue me explicar o que você pensou? Escreve astrágalo rosa, e coloca esses cálculos que você encontrou!

Taís: Saíram doze vezes o 4!

Flora: Saíram doze vezes o 3, oito vezes o 4, quatro vezes o 6, e uma vez o 1.

Professor: Certo, então anota aqui para mim, astrágalo rosa e coloca essas informações.

Taís: Não saiu nenhuma vez o 1!

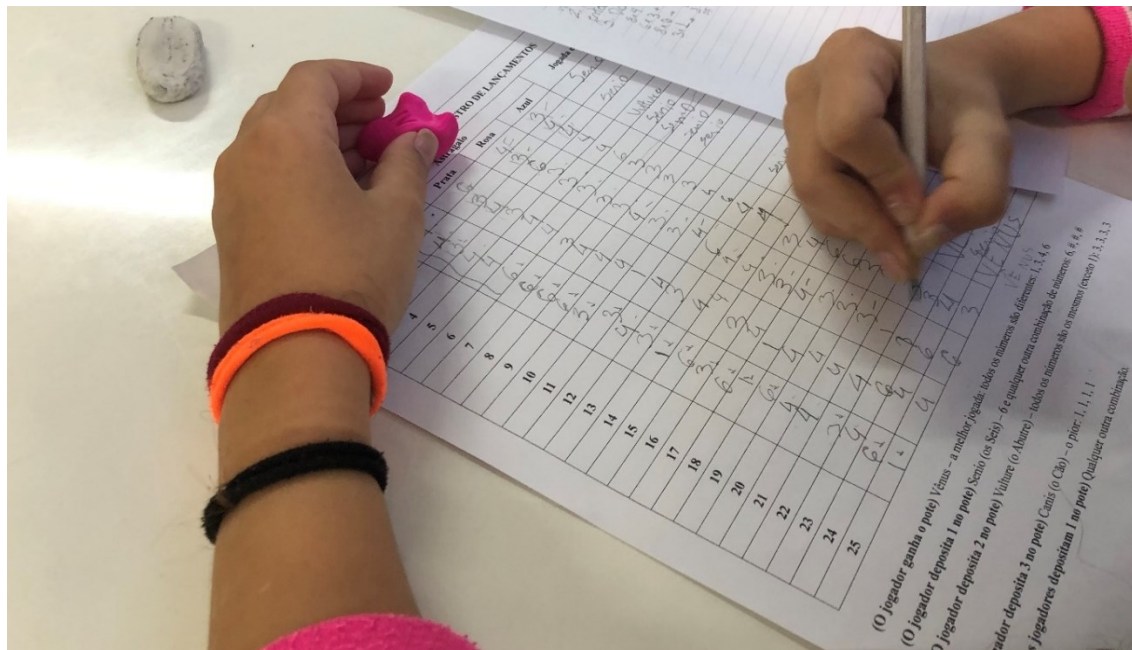
Professor: Anote aqui para mim, Taís. Dado prata, e essas informações.

Taís: Ah, tá!

Nesse momento da proposta, as anotações das estudantes começam a ganhar destaque, não apenas como simples registros, mas como uma forma de traduzir em números a experiência vivida com os lançamentos dos astrágalos. O ato de escrever cada ocorrência em um quadro transformou a observação em evidência, permitindo que a turma visualizasse o fenômeno da aleatoriedade em uma linguagem mais objetiva. Esse movimento reforça a passagem da experiência imediata para a sistematização matemática, aspecto essencial para o

desenvolvimento conceitual. A Figura 31 ilustra esse processo de organização inicial dos dados, quando a contagem de cada lado foi registrada e se tornou base para discussões posteriores.

Figura 31: Contagem dos resultados no lançamento dos astrágalos enumerados



Fonte: Arquivo do autor.

Flora: O meu saiu três vezes o 1 no prata!

Zara: É 4, 3, 6, 1?

Professor: Isso! Vocês contaram as quantidades, certo? Como eu calculo agora, as probabilidades? Flora, qual é a probabilidade de sair 3 no dado rosa?

Flora: 12 de 25.

Professor: Então anota para mim! 12 de 25. Taís, qual é a chance de sair 6 no seu dado prata?

Taís: 1 de 25.

Professor: 1 de 25, então anota para mim. Zara, qual é a chance de sair 6 no seu dado dourado?

Zara: 1 de 25.

Os diálogos entre professor e estudantes sobre a frequência dos resultados enfatizaram a diferença entre observar dados empíricos e entender conceitos teóricos. Flora (“De 25 negócios, foram doze 3”), Taís e Zara (“1 de 25”), ao registrarem as ocorrências de cada lado do astrágalo, mostraram um avanço ao relacionarem a proporção de ocorrências com o conceito do cálculo de probabilidade. Esse processo destaca como a teoria pode ser reconstruída por meio da prática, quando mediada adequadamente (Moura, 2004).

Professor: Então anotem para mim, todas essas! Zara, Taís, como eu acho esses valores em porcentagem?

As estudantes se olham por um momento, sem responder.

Professor: O que é porcentagem?

Taís: É a possibilidade de cair!

Professor: É a possibilidade de cair. Como eu chego na porcentagem, alguém lembra? A porcentagem é uma divisão por quanto? A porcentagem é uma fração de?

Estudantes: De 100.

Professor: Então, como eu chego em uma fração de 100, a partir dessas frações que vocês têm aí?

Taís: Multiplicar?

Professor: Por quanto? Olhem no denominador! Como eu chego no denominador 100?

Flora: Quatro vezes!

Zara: Multiplicar por 25! Não, por 4!

Professor: Então, encontrem esses valores para mim em porcentagem. Multiplica por?

Taís: Quatro!

Professor: Para chegar em fração de?

Zara: Cem!

Professor: Isso!

Zara: 8 vezes 4... Quanto é 8 vezes 4 hein? 32!

Estudantes efetuam os cálculos.

Flora: Pronto, Professor!

Professor: Escolha prata ou dourado e faça isso de novo!

Flora: Como assim?

Zara: Eu escolho rosa!

Taís: É para você escolher outra cor de dado.

Professor: Isso, as três vão fazer das três cores. Então faça o prata agora. Taís, quando terminar, faz do dourado e Zara faz do rosa.

Zara: Professor, e o azul?

Professor: Depois todo mundo pode fazer do azul, e aí todos fizeram de todos!

Estudantes contam e fazem seus registros.

Professor: Deixando sempre em fração de 100! Taís, vamos lá! Nesse aqui, na face 1, eu estou multiplicando por 4, certo? 0 vezes 4?

Taís: 0.

Professor: Então, qual é a probabilidade de sair 1?

Taís: 0.

Professor: Então, aqui na frente, igual a 0%. Nesse aqui, a gente faz 12 vezes?

Taís: 4.

Professor: Quanto é 12 vezes 4?

Taís: 48.

Professor: Então é 48 sobre 100. Quantos por cento é isso?

Taís: 48%.

Professor: Isso.

Taís: E aqui, 9 vezes 4... 36. Certo!

Estudantes contam e fazem seus registros.

Zara: 12 vezes 4... 8 vezes 4...

Professor: Então agora faz do prata! Flora, agora faz do dourado.

Estudantes contam e fazem seus registros.

Zara: Nossa, gente! Três do 4!

As perguntas do professor junto ao grupo das meninas promoveram reflexões sobre o que define um espaço amostral e sua relação com o resultado de uma probabilidade em porcentagem. As estudantes mobilizaram conhecimentos anteriores para encontrar os valores

da probabilidade de cada face em porcentagem ao identificarem, facilmente, que podem encontrar uma fração equivalente a partir dos vinte e cinco lançamentos.

A partir das reflexões iniciais provocadas pelas perguntas do professor, que incentivaram as estudantes a mobilizar seus conhecimentos prévios para transformar os resultados de vinte e cinco lançamentos em frações equivalentes, iniciou-se um aprofundamento da discussão sobre o que define um espaço amostral e sua relação com a probabilidade expressa em porcentagem. Essa etapa preparou o terreno para a interação dialogada, na qual o professor, por meio de questionamentos direcionados, convidou as estudantes a comparar e validar os valores obtidos. Assim, os registros individuais passaram a ser confrontados e debatidos coletivamente, permitindo que as estudantes identificassem convergências e discrepâncias nos cálculos. Essa articulação entre o pensamento intuitivo e a sistematização dos dados evidencia o processo de elaboração do conhecimento matemático, que se desenvolve por meio da mediação e da orientação do professor.

Professor: Eu quero que vocês comparem se vocês chegaram em números parecidos. Por exemplo, para sair o 3 em cada um dos dados, saíram valores parecidos? E aí, eu quero que vocês me digam, no final, qual é a probabilidade de cada um dos lados, independente da cor. Como a gente pode fazer isso? Flora, como você poderia fazer isso? No geral, qual é a probabilidade de sair um 3?

Flora: Não sei!

À medida que os cálculos avançavam, as estudantes foram desafiadas a atribuir sentido às frações construídas a partir dos 25 lançamentos, relacionando-as à noção de porcentagem. Esse passo exigiu não apenas habilidade de manipulação numérica, mas também a mobilização de conhecimentos prévios sobre equivalência de frações. Nesse contexto, os registros individuais se converteram em instrumentos de reflexão, possibilitando que cada estudante acompanhasse seu próprio raciocínio e comparasse com o das colegas. A Figura 32 exemplifica esse movimento, apresentando o registro elaborado por Flora, no qual se observa o esforço em articular frequências relativas com valores percentuais.

Figura 32: Registro do cálculo da probabilidade de cada lado do astrágalo - Flora

Flora:

Dado rosa:	
12 - 3 - ($\frac{12}{25}$) - ($\frac{48}{100}$) - 48%	
8 - 4 - ($\frac{8}{25}$) - ($\frac{32}{100}$) - 32%	
1 - 1 - ($\frac{1}{25}$) - ($\frac{4}{100}$) - 4%	
4 - 6 - ($\frac{4}{25}$) - ($\frac{16}{100}$) - 16%	
Dado prata:	
8 - 3 - ($\frac{8}{25}$) - ($\frac{32}{100}$) - 32%	
7 - 4 - ($\frac{7}{25}$) - ($\frac{28}{100}$) - 28%	
4 - 1 - ($\frac{4}{25}$) - ($\frac{16}{100}$) - 16%	
6 - 6 - ($\frac{6}{25}$) - ($\frac{24}{100}$) - 24%	
	= 3 - 40%
	4 - 40%
Dado dourado:	
5 - 3 - ($\frac{3}{25}$) - ($\frac{20}{100}$) - 20%	1 - 16%
10 - 4 - ($\frac{10}{25}$) - ($\frac{40}{100}$) - 40%	6 - 24%
4 - 1 - ($\frac{4}{25}$) - ($\frac{16}{100}$) - 16%	
6 - 6 - ($\frac{6}{25}$) - ($\frac{24}{100}$) - 24%	
Dado azul:	
7 - 3 - ($\frac{7}{25}$) - ($\frac{28}{100}$) - 28%	
12 - 4 - ($\frac{12}{25}$) - ($\frac{48}{100}$) - 48%	
0 - 1 - ($\frac{0}{25}$) - ($\frac{0}{100}$) - 0%	
6 - 6 - ($\frac{6}{25}$) - ($\frac{24}{100}$) - 24%	

Fonte: Arquivo do autor.

Professor: Qual é a chance de sair 3 em cada um deles?

Flora: 48, 32, 20 e 38.

Professor: E a chance de sair 4?

Flora: 32, 38, 40, 48.

Professor: E a chance de sair 1?

Flora: 4, 16, 16, 17.

Professor: E a chance de sair 6?

Flora: 16, 24, 24, 24.

Professor: Talvez o 6 seja o mais fácil de você me dizer uma probabilidade geral? O que você acha?

Flora: O 6 é mais fácil de dizer, porque a maioria deu o mesmo número.

Professor: Então a gente pode falar que ele é quanto?

Flora: 24?

Professor: Agora tente pensar em alguma coisa com relação aos outros, já que eles não repetiram tanto!

Flora: Eu não sei, Professor!

Professor: Eu posso falar, por exemplo, que no geral, a chance de sair o 4 é de 90%?

Flora: Não, porque é muito longe dos meus valores!

Estudantes continuam seus registros.

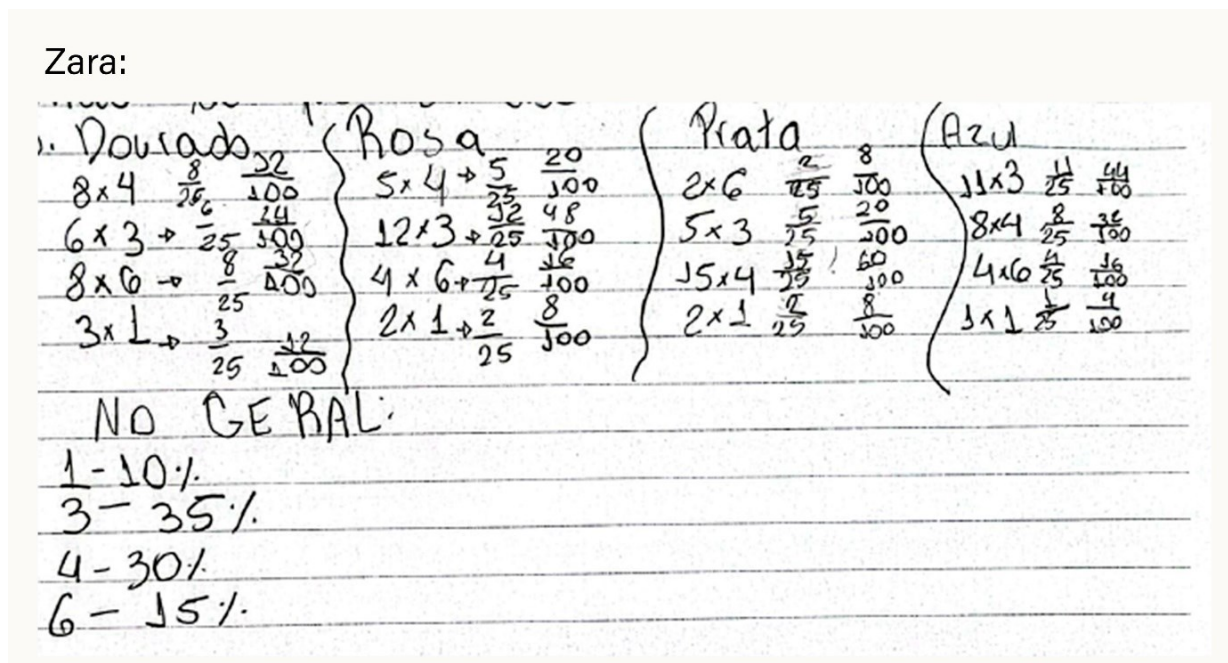
Taís: 23!

Zara: O meu foi 24!

Professor: Terminou? Zara, vou te fazer a mesma pergunta que fiz para a Flora. Você consegue me dizer, no geral, qual é a probabilidade de sair cada um dos seus resultados? Se eu perguntar qual é a probabilidade de sair 4, você consegue me dizer? Qual é a chance de sair 4 no dourado?

Os cálculos prosseguiram quando Zara sistematizou os dados referentes ao seu astrágalo dourado. Sua participação revelou a importância da comparação entre diferentes registros, pois cada astrágalo, embora de mesmo formato, apresentava particularidades nos resultados obtidos. Essa diversidade de valores permitiu ao grupo discutir não apenas a precisão dos cálculos, mas também a validade das estratégias utilizadas para chegar a eles. O registro de Zara, apresentado na Figura 33, evidencia como os resultados individuais, mesmo com variações, dialogam entre si e enriquecem o debate coletivo.

Figura 33: Registro do cálculo da probabilidade de cada lado do astrágalo - Zara



Fonte: Arquivo do autor.

Zara: 8 de 25.

Professor: Em porcentagem?

Zara: 32%.

Professor: Qual é a chance de sair 4 no rosa?

Zara: 20%.

Professor: E no prata?

Zara: 60%.

Professor: E no azul?

Zara: 32%.

Professor: Tá bom, vamos olhar para o 1 agora em todos os registros. Qual a chance de sair 1 no dourado?

Zara: 12%.

Professor: E no rosa?

Zara: 8%.

Professor: No prata?

Zara: 8%.

Professor: E no azul?

Zara: 4%.

Professor: Você consegue me dizer um valor que fica próximo de todos os valores, no geral? Qual a chance de sair 1 nesse tipo de dado?

Zara: Acho que... 10%.

Professor: Por que 10%?

Zara: Porque ele está perto de 8, 12 e um pouco do 4.

Professor: Então, você consegue fazer esse movimento para mim, escolher um valor para cada um deles? Flora, você ouviu a ideia da Zara? Faz sentido? Você também pode fazer isso para a gente?

Flora: Sim.

Estudantes efetuam cálculos e registros.

Taís: Professor, eu acabei!

Zara: Quer que eu explique?

Professor: Taís, agora a gente precisa de uma estimativa para cada um dos números. Vamos olhar o 3! Qual a porcentagem de sair 3 aqui?

A contribuição de Taís reforçou o caráter plural da proposta. Seu registro apresentou números que, embora distintos em relação aos de Flora e Zara, revelaram uma lógica interna que ampliou as possibilidades de análise em grupo. Esse momento foi fundamental para que o professor instigasse as estudantes a refletirem sobre a ideia de espaço amostral e sobre a necessidade de lidar com discrepâncias nos resultados. A Figura 34 mostra o registro de Taís, que, ao lado dos demais, fortaleceu a percepção de que a construção coletiva do conceito passa pela comparação entre diferentes tentativas de resolução.

Figura 34: Registro do cálculo da probabilidade de cada lado do astrágalo - Taís

Taís:

Branco	prata
4 = 6 vezes: $\frac{6}{25} = \frac{24}{100} = 24\%$	3 = 6 = 3 vezes: $\frac{6}{25} = \frac{24}{100} = 24\%$
1 = 1 vez: $\frac{1}{25} = \frac{4}{100} = 4\%$	3 = 9 vezes: $\frac{9}{25} = \frac{36}{100} = 36\%$
6 = 3 vezes: $\frac{3}{25} = \frac{12}{100} = 12\%$	4 = 12 vezes: $\frac{12}{25} = \frac{48}{100} = 48\%$
3 = 15 vezes: $\frac{15}{25} = \frac{60}{100} = 60\%$	1 = 0 vezes: $\frac{0}{25} = \frac{0}{100} = 0\%$
Azul	Dourado
4 = 10 vezes: $\frac{10}{25} = \frac{40}{100} = 40\%$	4 = 9 vezes: $\frac{9}{25} = \frac{36}{100} = 36\%$
1 = 0 vezes: $\frac{0}{25} = \frac{0}{100} = 0\%$	3 = 6 vezes: $\frac{6}{25} = \frac{24}{100} = 24\%$
3 = 13 vezes: $\frac{13}{25} = \frac{52}{100} = 52\%$	4 = 4 vezes: $\frac{4}{25} = \frac{16}{100} = 16\%$
6 = 2 vezes: $\frac{2}{25} = \frac{8}{100} = 8\%$	6 = 6 vezes: $\frac{6}{25} = \frac{24}{100} = 24\%$

Fonte: Arquivo do autor.

Taís: 30, 24, 60, 52.**Professor:** Vamos olhar agora o 6!**Taís:** 24, 24, 24, 8.**Professor:** Vamos pensar no 6. Tem algum valor que você poderia me dizer, no geral, que é a probabilidade do 6?**Taís:** Seria 24%.**Professor:** Por quê?**Taís:** Porque é o que mais apareceu.**Professor:** Certo! Escolhe um valor para cada um deles, baseado no que você me falou.**Zara:** Eu terminei!

O conceito de espaço amostral não-equiprovável foi explorado por meio da distribuição desigual das frequências nos lados do astrágalo. O questionamento do professor (“Você consegue me dizer um valor que fica próximo de todos os valores, no geral? Qual a chance de sair 1 nesse tipo de dado?”) e a análise de Zara sobre a frequência do lado “1” (“Acho que... 10%. [...] Porque ele está perto de 8, 12 e um pouco do 4.”) destacaram a relação entre observação empírica e construção teórica.

Após a análise empírica que evidenciou a distribuição desigual das frequências – como demonstrado na reflexão de Zara sobre o lado “1” que evidenciou a importância da observação para a elaboração teórica – o professor propõe aprofundar essa investigação de forma prática. Essa transição convida as estudantes a confrontar seus registros com cálculos formais, explorando individualmente as probabilidades de cada lado dos dados, dado o espaço amostral não-equiprovável. Assim, o diálogo que se segue, em que Arthur e Marvin questionam e

calculam as chances de cada resultado, surge como um momento de articulação entre o conhecimento empírico e a formalização teórica, evidenciando as dificuldades e as descobertas que permeiam a transição do senso comum para a sistematização matemática dos fenômenos probabilísticos.

Arthur: Ah, Professor! Como podemos calcular a probabilidade de cada um dos quatro lados com base nos seus resultados? 4 vezes... Nossa, Professor! Tem um trilhão de possibilidades! Tá bom, não um trilhão, né? Mas é muita possibilidade. Ô, Professor! Eu não entendi... Em uma rolagem, todos os lados possuem a mesma possibilidade? Como assim?

Professor: A mesma probabilidade?

Arthur: Não...

Professor: Todos tiveram a mesma chance de sair?

Marvin: Não teve não! Mas o 2 e o 5, eles também não contam?

Professor: O 2 e o 5 são possíveis?

Arthur: Não!

Arthur: Ô, Professor, mas está certo o meu raciocínio?

Professor: Sim.

Arthur: Cada dado tem quatro lados, e são quatro dados, então seria 4 vezes 4 vezes 4 vezes 4. Daria 256.

Professor: Tá, a gente está olhando individualmente, se eu quiser olhar na totalidade, os quatro juntos, aí eu posso utilizar esse pensamento. Agora eu estou pedindo uma coisa um pouquinho mais simples, quero que vocês olhem individualmente cada um dos dados. Arthur, você vai olhar o prata para mim, e o Marvin vai olhar o azul. Aí eu quero que vocês calculem para mim, qual a probabilidade de sair cada um dos lados, 1, 3, 6 e 4, Arthur, você olhando seus registros do dado prata, e Marvin, você olha do dado azul.

Marvin: Tá bom!

Arthur: Ô, Professor, eu posso fazer tipo assim, ó? – *Mostra um registro em fração.*

Professor: Pode.

Arthur: Pronto, Professor! O que eu faço agora?

Professor: Terminaram? E aí, Marvin?

Marvin: Espera aí! Eu não achei minha borracha.

Arthur: É só ir contando.

Professor: Arthur, faz do azul agora, para a gente comparar, e depois o Marvin faz do prata. Quando vocês terminarem, a mesma ideia! Escolhe outra cor, para todo mundo ter todas!

Marvin: Professor, espera aí! Deu errado aqui por quê? Ué?

Arthur: Professor, pronto, terminei com o azul! É para fazer com as outras cores?

Professor: Sim.

Professor: Certo, Marvin? Marvin, para os próximos, como você está fazendo?

Marvin: Eu estou contando e fazendo vezes quatro!

Professor: Direto?

Marvin: Aham.

Professor: Tenta fazer o registro nos próximos! Por exemplo, dado dourado, saiu 3 de 25, isso é 12 de 100. Entendeu?

Marvin: Ah...

Professor: Registra aqui, dado prata. Número 4, saiu tanto de 25, que é igual a tanto de 100.

Marvin: Mas, eu não...

Professor: Vamos lá, o 6 aqui. Quantas vezes saiu o 6?

Marvin: 1, 2, 3, 4, 5.

Professor: Então saiu 5 de?

Marvin: 5 de 25.

Professor: Qual é a fração?

Marvin: 5 de 25.

Professor: Então escreve a fração, 5 de 25. Isso é igual a?

Marvin: 20 de 100.

Professor: Que é igual a quantos por cento?

Marvin: É igual a 20%, eu coloquei.

Professor: Pronto. Já fez o dado azul, certo?

Marvin: Aham. Não, espera aí, o 4...

Professor: O 4. Conta aí para mim, quantas vezes saiu o 4.

Marvin: 1, 2, 3, 4, 5. Mesma coisa.

Arthur: Professor, olha aqui ó. No prata saiu 28%, no azul 28% o 4, no dourado 28% o 4, e agora vai ser 16%. Olha quantos 3 caiu no rosa!

Professor: Isso acontece quando estamos trabalhando com aleatoriedade.

Arthur: A gente vai calcular, tipo... Vou somar, por exemplo, o 3 de todos, 48 mais 32 mais 40 mais 60 e aí a gente vai dividir por 4 para achar a porcentagem certa?

Professor: Essa é uma opção de se fazer! E sim, no final vou pedir para vocês calcularem para mim a chance de cada um no geral! Aí vocês podem fazer inferências, ou como você falou.

Arthur: 1 em 256? Ou esse daqui que eu acabei de falar?

Professor: Esse que acabou de falar.

Arthur: O que eu vou fazer agora, Professor?

Professor: Terminou tudo?

Arthur: Aham!

Professor: Eu quero que vocês comparem, só olhem, se vocês tiraram números parecidos. Por exemplo, para sair o 3 em cada um dos dados, saíram valores parecidos? E aí eu quero que vocês me digam no final, qual é a probabilidade de cada um dos lados, independente da cor. Como a gente pode fazer isso?

Arthur: Eu só posso fazer isso direto?

Professor: Pode.

Marvin: Ô, Professor! Não caiu nenhum 6 no prata.

Arthur: Pronto, Professor!

Professor: Pronto?

Arthur: Ô, Professor! Se eu tivesse que, por exemplo, dividir esse daqui por 4 para achar em 25 ficaria 1125 de 25000? Ou de 12500?

Professor: Você fala, para quê?

Arthur: Não, se eu fosse colocar, por exemplo, esse aqui dividido por 4 daria 11,25.

Professor: Por que a gente dividiria por 4?

Arthur: Para achar, porque a gente está fazendo vezes 4, que a fração está de 25, e 25 vezes 4 é 100. E como a gente está no 100, a gente vai ter que dividir por 4. Aqui daria 11,25, que é 1125 de 2500.

Professor: E aí quando a gente divide, dá quanto? Os 45%?

Arthur: É.

Professor: Não precisa fazer a volta, mas se quiser pode!

Na continuidade da proposta, o professor articulou a participação de Arthur e Marvin, deslocando a atenção que até então estava centrada nas anotações das meninas. Esse movimento

pedagógico teve como propósito ampliar o debate, envolvendo diferentes vozes e provocando novas formas de pensar o problema. Ao serem instigados a analisar seus próprios registros, os meninos trouxeram questionamentos que tensionaram a discussão, revelando tanto dificuldades de compreensão quanto tentativas de construir procedimentos mais sistemáticos. No caso de Arthur, observou-se um esforço em organizar os resultados por meio de cálculos de médias. Esse processo foi registrado na Figura 35, que evidencia parte de suas anotações e ilustra a busca por uma formalização mais estruturada.

Figura 35: Registro do cálculo da probabilidade de cada lado do astrágalo - Arthur

Artur:

3. Prova.	4: $\frac{7}{25}$	7/25	28%	Cruz.	4: $\frac{7}{25}$	7/25	28%
	1: $\frac{5}{25}$	5/25	20%		1: $\frac{4}{25}$	4/25	16%
	6: $\frac{3}{25}$	3/25	12%		6: $\frac{6}{25}$	6/25	24%
	3: $\frac{10}{25}$	10/25	40%		3: $\frac{8}{25}$	8/25	32%
Douros.	4: $\frac{7}{25}$	7/25	28%	Rosa.	4: $\frac{4}{25}$	4/25	16%
	1: $\frac{3}{25}$	3/25	12%		1: $\frac{3}{25}$	3/25	12%
	6: $\frac{3}{25}$	3/25	12%		6: $\frac{3}{25}$	3/25	12%
	3: $\frac{12}{25}$	12/25	48%		3: $\frac{15}{25}$	15/25	60%
geral.	4: 25%	625/2500					
	1: 15%	375/2500					
	6: 15%	375/2500					
	3: 45%	1125/2500					

Fonte: Arquivo do autor.

Nesse mesmo sentido, a abordagem prática fundamentada na frequência relativa se mostra como uma possibilidade de entrada para a compreensão da probabilidade frequentista. Ao observar resultados como “12 de 25 para o lado 3”, os estudantes puderam perceber como a coleta empírica de dados, por meio dos lançamentos dos astrágalos, fornece um ponto de partida concreto para explorar relações mais complexas. A partir dessa base, o professor instiga uma discussão em que os estudantes são convidados a calcular, de maneira individual e depois coletiva, a porcentagem de ocorrência de cada número, aproximando os resultados observados à ideia de probabilidade frequentista. Esse diálogo, em que Marvin e Arthur confrontam seus registros e tentam sintetizar um valor geral, reforça a transição do conhecimento empírico para

a formalização teórica, demonstrando como a prática experimental pode conduzir à construção de modelos matemáticos mais elaborados.

Professor: Então eu vou te fazer a mesma pergunta: como eu poderia achar, no geral, a porcentagem de cada um dos números?

Marvin: Ah, eu não sei...

Professor: Se eu te perguntasse assim: qual é a chance de sair o 4 no azul, é quanto?

Marvin: É 20%.

Professor: E no prata?

Marvin: No prata é 24%.

Professor: No rosa?

Marvin: No rosa é 32%.

Professor: E no dourado?

Marvin: É 44%.

Professor: E se eu te perguntar no geral, você consegue me dizer um valor?

Marvin: Ah, em torno de 30%.

Professor: Por que você escolheu este valor?

Marvin: Porque todos os números... É porque vinte e... Não...

Professor: Pode seguir o raciocínio!

Marvin: Eu acho que 25% seria um número bom, porque tá todo...

Professor: Todos os valores?

Marvin: A maioria dos valores é mais perto do 25.

Professor: Beleza! Você consegue fazer este movimento para mim, para todos os números?

Marvin: Como assim?

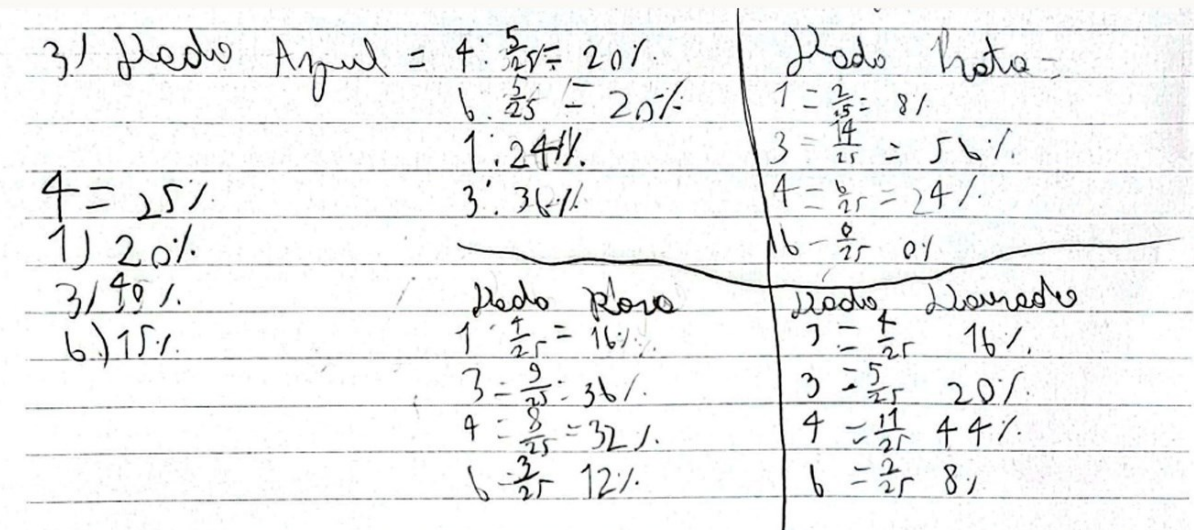
Professor: Me dar um valor para o 4, assim como você fez, um valor para o 1, um valor para o 6 e um valor para o 3. Analisando os seus resultados.

Marvin: Então eu vou colocar...

Paralelamente, Marvin também construiu seus registros, ainda que de forma mais hesitante, evidenciando as dificuldades comuns a esse tipo de tarefa. Sua escrita, entretanto, mostrou-se progressivamente mais organizada. Assim, o que antes era apenas contagem intuitiva foi gradualmente convertido em frações equivalentes e porcentagens, demonstrando o potencial processo de internalização de um conceito em construção. A Figura 36 retrata esse desenvolvimento, tornando visível o percurso de Marvin na sistematização dos resultados.

Figura 36: Registro do cálculo da probabilidade de cada lado do astrágalo - Marvin

Marvin:



Fonte: Arquivo do autor.

Arthur: Ô, Professor! Mas aí, tem algum outro jeito de calcular? Quando todo mundo terminar a gente vai calcular junto?

Professor: Aí a gente conversa!

Arthur: A gente pode somar o de todo mundo.

Professor: É uma ideia.

O professor e os estudantes se reúnem novamente para uma roda de conversa.

Professor: A gente fez esse movimento, para encontrar os valores referentes à cada uma das faces dos dados, certo? Taís, como você encontrou seus valores gerais?

Taís: Eu vi quais números tinham mais, e se eram... No 1, a maioria era mais que zero, então eu arredondei os dois maiores para um número perto, que seja terminado com zero.

Professor: Flora, como você pensou?

Flora: Eu coloquei um número que era próximo de todos.

Professor: Um número que era próximo de todos. Zara, como você fez?

Zara: Eu também fiz isso, fiz uma média. Tipo assim, que não ficasse tão perto de um nem tão longe de outro.

Professor: Você colocou um número que não ficasse tão perto de um nem tão longe de outro. Marvin, como você fez?

Marvin: Eu fiz igual ao que todo mundo fez, eu arredondei para o que tinha mais dele.

Professor: Para o que tinha mais dele! Esse movimento de olhar todos os valores que a gente registrou, ou escolher o valor que mais repete, ou escolher um valor que está próximo, estamos procurando um valor que represente todos eles, certo? Tem uma palavrinha que a Zara falou, a gente está tentando encontrar a média. Estamos tentando encontrar um valor médio. Dessa forma

que fizemos, nós estamos sendo racionais, estamos utilizando estimativa, sendo sensatos e procurando um valor próximo. Como você fez, Arthur?

Arthur: Eu peguei todas as porcentagens, por exemplo, no 3: no prata é 40, no azul é 32, no dourado é 48 e no rosa é 60, aí eu somei tudo que deu 180 e eu dividi por 4, que deu 45.

Professor: 45%. Então, a forma como Arthur fez, é uma forma matemática de encontrar esse valor que todos encontraram fazendo a inferência e refletindo. Então sempre que eu preciso achar um valor médio, um valor que represente todos os outros, eu posso fazer isso que o Arthur fez, eu somo todos os valores e divido pela quantidade. Certo? Isso quer dizer que eu vou achar um valor próximo ao que vocês pensaram. Agora, eu quero que, no geral, cada um me diga, quanto vocês acharam para o número 1. Taís, qual valor geral você achou para o 1?

Taís: 20%.

Professor: Flora, e você?

Flora: 16%.

Professor: Zara?

Zara: 10%.

Professor: Arthur?

Arthur: 15%.

Professor: Marvin?

Marvin: 20% também.

Professor: Marvin, qual valor médio você encontrou para o número 3?

Marvin: 40%.

Professor: E você, Arthur?

Arthur: 45%.

Professor: Zara?

Zara: Para qual?

Professor: Para o número 3.

Zara: 35%.

Professor: Flora?

Flora: 40%.

Professor: Taís?

Taís: 60%.

Professor: Taís, qual valor você encontrou para o 4?

Taís: 40%.

Professor: Flora?

Flora: 40%.

Professor: Zara?

Zara: 30%.

Professor: Arthur?

Arthur: 25%.

Professor: Marvin?

Marvin: Eu também achei 25%.

Professor: Marvin, para a gente terminar, qual valor você encontrou para o 6?

Marvin: 15%.

Professor: Arthur?

Arthur: Também!

Professor: Zara?

Zara: 15%.

Professor: Flora?

Flora: 24%.

Professor: Taís?

Taís: 24%.

Professor: E aí, gente? A gente achou valores muito próximos, né? Faz sentido?

Arthur: Sim!

Professor: Porque estamos jogando o mesmo tipo de dado, e estamos calculando probabilidades desses mesmos lados. Agora outra pergunta, todas as jogadas de vocês foram iguais?

Arthur, Marvin e Zara: Não!

O esforço coletivo em comparar e discutir os valores individuais resultou em uma síntese que, embora construída a partir de estratégias distintas, apresentou grande convergência entre os registros. Nesse processo, cada estudante pôde justificar seus procedimentos e confrontar suas escolhas com as dos colegas, favorecendo uma compreensão mais ampla sobre a representatividade dos dados. Para tornar essa construção mais clara e acessível, organizou-se no Quadro 11 os valores gerais atribuídos por cada participante a cada lado do astrágalo, evidenciando tanto as aproximações quanto as diferenças que emergiram da proposta.

Quadro 11 – Valores gerais para cada lado do astrágalo

Lado do Astrágalo	Arthur	Flora	Marvin	Taís	Zara
I	15%	16%	20%	20%	10%
III	45%	40%	40%	60%	35%
IV	25%	40%	25%	40%	30%
VI	15%	24%	15%	24%	15%

Fonte: Organizado pelo autor a partir dos registros dos estudantes.

Professor: Nem no próprio jogo, né? Lembram que pedi para anotar só as de vocês? *As estudantes se olham e riem.* Então, o Arthur tinha uma jogada, o Marvin tinha outra!

Arthur: *Dá uma risada e olha para as estudantes.* Vocês anotaram Taís, Flora e Zara, anotaram as três?

Professor: Só um pouquinho!

Taís: Só um pouco.

Flora: Depois a gente jogou um deles.

Professor: Tudo bem até aqui? Eu quero parabenizar vocês, porque de estudos feitos anteriormente, os valores próximos que a gente tem são 40%, 40%, 10% e 10%, ou 35%, 35%, 15% e 15%. Então todo mundo ficou próximo, isso é muito bom! *Estudantes se olham felizes e com um pouco de espanto.*

Arthur: É sério que é isso?

Professor: É sério.

Arthur: Como você sabe?

Marvin: Valores científicos.

Professor: Esses valores, cientistas fizeram estudos e chegaram a essas conclusões. Não é como a gente fez aqui, são estudos mais complexos. O Arthur deu a ideia de que a gente poderia achar a média da sala! Como a gente poderia achar a média da sala?

Arthur: A gente precisa somar... Fazer a mesma coisa que eu fiz, somar as porcentagens e achar a média de cada uma. E depois a gente soma as porcentagens de cada número, e acha!

Professor pega uma calculadora.

Professor: Marvin, qual é o seu valor 1?

Marvin: O meu valor 1 é 20%!

Professor: Arthur, e o seu?

Arthur: Do 1 é 15%!

Professor: Zara, o seu 1?

Zara: Meu 1 é 10%.

Professor: Flora, o seu 1?

Flora: 16%.

Professor: Taís, o seu 1?

Taís: 20%.

Professor: E a gente divide por quanto?

Arthur: Cinco!

Professor: A gente achou 16%! Estamos bem próximos.

Arthur: Nossa, o meu deu 15%!

Flora: O meu deu 16%!

Professor: Há muitos anos foi feito um estudo por um matemático, que encontrou valores próximos a 40% para os lados mais largos, e 10% para os mais estreitos. Bem próximo do que vocês encontraram, não é mesmo?

As respostas dos estudantes ao longo da proposta revelaram indícios consistentes de como cada um mobilizou diferentes estratégias e percepções para lidar com os resultados obtidos no jogo. Taís e Marvin indicaram que priorizaram os valores mais frequentes, aproximando-se de uma abordagem intuitiva de representatividade. Flora e Zara optaram por identificar um valor que fosse equilibrado em relação aos demais, sugerindo uma tentativa de minimizar a discrepância entre os números. Já Arthur destacou-se ao utilizar uma abordagem mais sistemática, calculando a média de forma explícita e justificando seu método como uma solução matemática para encontrar um valor representativo.

Esses diferentes métodos indicam que os estudantes partiram de interpretações individuais baseadas em senso comum e avançaram para reflexões mais estruturadas, demonstrando um progresso conceitual. A partilha de ideias foi fundamental para explorar as similaridades e diferenças nos resultados, reforçando o importante papel do diálogo no aprendizado coletivo. A proposta não apenas estimulou a construção técnica do conceito de média, mas também promoveu habilidades de análise, argumentação e colaboração.

Ao final, os registros mostraram que, apesar das abordagens distintas, os estudantes chegaram a valores próximos, indicando um entendimento comum emergente sobre a ideia de representatividade dos dados. Essa convergência reflete um movimento progressivo do conhecimento, em que a interação com o artefato histórico e as discussões em grupo fortaleceram a apropriação dos conceitos de probabilidade. Esses resultados são consistentes

com os pressupostos de Moura (2022), que enfatizam a aprendizagem como um processo dialético e interativo.

Figura 37: Roda de conversa sobre espaço não-equiprovável



Fonte: Arquivo do autor.

A convergência dos resultados e a compreensão emergente sobre a representatividade dos dados pavimentaram o caminho para a última etapa da discussão, onde o professor propõe uma reflexão mais aprofundada sobre o espaço amostral. Com base nesse momento compartilhado, o diálogo se direciona para a definição teórica do espaço amostral, desafiando os estudantes a relacionar suas observações empíricas com os conceitos formais de probabilidade. Essa transição destaca a tensão entre a expectativa de um espaço equiprovável e a realidade dos dados coletados, onde certas faces do astrágalo ocorrem com frequências discrepantes. Assim, o debate se intensifica, levando os estudantes a examinar de forma crítica como a estrutura do objeto, aliada aos registros experimentais, fundamenta a noção de espaço amostral não-equiprovável.

Professor: Vou fazer só mais uma perguntinha. Pensando no astrágalo, qual é o meu espaço amostral? Vocês se lembram o que é espaço amostral?

Arthur: 1, 3, 4, 6.

Professor: Por quê? São todas as possibilidades?

Arthur: Não! 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Marvin: São possibilidades!

Arthur: São todas as possibilidades!

Professor: Aí a gente lembra que tem duas que são impossíveis?

Arthur: Não! São 1 em um “quadribinglhão”!

Marvin: São impossíveis!

Professor: Jogando, são impossíveis.

Arthur: Não, impossíveis não! Vai que a pessoa joga a vida inteira e no último suspiro ela joga e cai assim?

Marvin: Não vai cair assim.

Professor: A anatomia do osso é arredondada, e com isso ele tem lados que não cai. Mas, o osso é arredondado, e não cai. O que vocês podem me dizer desse espaço amostral?

Arthur: Nada!

Professor: Nada? Olhem as porcentagens que vocês encontraram, ou pensem nas que o matemático que fez o estudo encontrou!

Marvin: 40%, 40%, 10%, 10%.

Professor: É tudo igual?

Marvin: Não!

Professor: Tudo tem a mesma chance de acontecer?

Marvin, Zara e Taís: Não!

Zara: O 4 e o 3 têm a mesma chance!

Professor: Isso, que são os lados um pouquinho mais largos! Então, quando a gente tem um espaço amostral em que as coisas não têm a mesma chance de acontecer, a gente chama de espaço amostral não-equiprovável.

Marvin: Equiprovável? Essa palavra existe?

Professor: Existe! Equiprovável é que tem a mesma chance de acontecer. Não-equiprovável, não tem a mesma chance de acontecer. Certo?

Estudantes: Aham.

Professor: Como vocês calcularam essa probabilidade para mim? O que vocês analisaram na hora de ver a probabilidade do número 1?

Arthur: Eu já expliquei!

Marvin: Que o 1 caiu poucas vezes.

Professor: Mas como vocês fizeram esses cálculos?

Zara: Eu fui testando, e ele foi o que caiu menos!

Professor: Então, você fez uma análise de quantas vezes o 1 caiu em suas rolagens, e você comparou isso com o quê?

Zara: Como assim?

Taís: Comparou com outro número?

Professor: Para eu encontrar quantas vezes o 1 saiu, qual a continha que a gente faz? A quantidade de vezes que saiu o número 1 dividido por?

Arthur: A quantidade de... dados? Não, não estou entendendo.

Zara: Jogadas?

Professor: Jogadas!

Arthur: Eu confundi!

Professor: Todo mundo consegue perceber que o que calculamos é a probabilidade dessa forma, olhando a quantidade de vezes que saiu o número 1, dividido pela quantidade de jogadas que a gente fez? Que foi 25?

Zara e Taís: Aham!

Professor: Se eu fizesse 50 jogadas, como faria essa conta?

Arthur: Também teria que ir anotando.

Professor: A quantidade de vezes que saiu o 1, dividido por?

Zara: 50! Pelas jogadas!

Arthur: Ô, Professor, a gente pode fazer! Uma pessoa joga os dados e as outras anotam!

Professor: Poderia ser!

Zara: A gente tem pessoas!

Esta cena destaca o impacto do uso do Jogo dos Astrágalos no desenvolvimento de uma compreensão mais profunda sobre o conceito de espaço amostral não-equiprovável. Ao utilizar o jogo como ponto de partida, os estudantes foram levados a questionar suas primeiras ideias e a explorar como diferentes probabilidades podem surgir em contextos aparentemente simples. Esse movimento, sustentado pelos pressupostos da Teoria Histórico-Cultural, evidencia a importância de um sujeito com conhecimentos mais elaborados que possa promover espaços de discussões, hipóteses, análises a partir de situações práticas.

É importante dizer que a aprendizagem que se dá na zona de desenvolvimento próximo, ao exigir uma forma de colaboração entre a criança e um indivíduo mais experiente, exige também que ocorra o processo de imitação/reprodução por parte da criança (VIGOTSKI, 1996). A imitação é um processo necessariamente racional, baseado na compreensão da operação intelectual que se imita (VIGOTSKI, 1996). Não cabe, portanto, dentro do conceito de zona de desenvolvimento próximo, o conceito de imitação mecânica. A imitação refere-se às operações intimamente relacionadas com a atividade racional da criança e que ocorrem em colaboração com um adulto, ou indivíduo mais experiente que ela. Com base nesse processo, é que a função poderá ser internalizada, passando a fazer parte do nível de desenvolvimento real da criança (Moura, 2022, p. 117).

Os registros demonstraram que a utilização do jogo despertou interesse e abriu caminhos para discussões teóricas, com base nos resultados das jogadas e na análise das frequências observadas. Além disso, a inserção de problemas desencadeadores durante a proposta permitiu um avanço no processo de apropriação do conceito de probabilidade, especialmente ao promover um ambiente colaborativo no qual os estudantes compartilharam suas hipóteses e reflexões. Essa dinâmica ilustra como a Atividade Orientadora de Ensino se alinha à ideia de promover aprendizagens, valorizando a interação e apropriação coletiva do conhecimento.

Por fim, a síntese coletiva realizada nesta cena reforçou a relevância de estratégias pedagógicas que vão além da simples transmissão de conteúdo, privilegiando a vivência e a experimentação. Entendemos que há indícios de que a apropriação do conceito de não-equiprobabilidade ficou evidente não apenas nos registros escritos, mas também nos debates que revelaram uma crescente autonomia dos estudantes para lidar com conceitos matemáticos complexos.

Em síntese, o debate coletivo apresentou indícios para que os estudantes consolidassem a ideia de que o espaço amostral dos astrágalos não é equiprovável. A partir da comparação dos registros experimentais, eles identificaram que as frequências relativas dos diferentes lados variam consideravelmente – evidenciando, por exemplo, que algumas faces ocorrem com maior regularidade do que outras. Essa constatação levou à reflexão de que, diferentemente de um espaço amostral teórico ideal, em que cada evento teria a mesma chance de ocorrer, os

resultados práticos revelam uma distribuição assimétrica, fruto das características físicas do objeto. Assim, a síntese coletiva destaca a importância de se integrar a análise empírica à elaboração teórica, permitindo uma compreensão mais profunda e contextualizada dos conceitos probabilísticos.

4.3.2 Cena 2: Inferências para um espaço equiprovável

Na Cena 2, nosso foco desloca-se para espaços equiprováveis, ampliando a compreensão dos estudantes sobre a probabilidade. Utilizando dados regulares, exploramos a ideia de que todos os eventos podem ter chances iguais de ocorrer, contrastando diretamente com as experiências anteriores com astrágalo (A3M2).

Figura 38: Dados regulares com diferentes quantidades de lados



Fonte: Arquivo do autor.

O professor oferece que os estudantes escolham um dado dentre vários dados regulares de vários lados (Figura 38).

Professor: Escolha um!

Flora: Eu peguei de quantos lados?

Taís: 16? 20?

Arthur: Ahh!

Zara: 16?

Flora: Deixa eu ver! 20, igual ao meu.

Arthur: Qual é o que tem mais lados?

Professor: Agora, o que tem 12! – Arthur pega um dado. – Esse tem 8.

Arthur: Pegaram o de 20!

Marvin: Nossa, pegaram o de 20?

Taís: O meu tem 8!

Flora: O meu tem 20! Deixa eu ver! – *Lança o dado.* – 11!

Marvin: Vou pegar o de 12.

Zara: Eu nunca peguei um de 20.

Flora: Nem eu.

Taís: Eu já!

A experimentação desempenhou um papel importante no desenvolvimento da proposta. Os estudantes, ao lançar os astrágalos e registrar os resultados, tiveram a oportunidade de explorar possibilidades e testar hipóteses, exercitando sua curiosidade e raciocínio lógico. Entendemos que a prática experimental, ao ser associada à reflexão teórica, potencializa a aprendizagem, transformando os desafios em oportunidades para a apropriação de conhecimento. A curiosidade, nesse contexto, emerge como um motor para o engajamento dos estudantes, incentivando-os a investigar e compreender os fenômenos matemáticos, agora com os dados regulares.

Professor: Quero que vocês pensem para mim agora, olhem para o dado de vocês e escolham um número.

Flora: 20.

Zara: 12.

Taís: 5.

Professor: Qual é a chance de sair este número que vocês escolheram?

Flora e Zara: 1 de 20.

Taís: 1 de 8.

Professor: Por quê?

Zara: Porque os lados são equiláteros!

Professor: Os lados são equiláteros? Os lados são todos...

Flora: Iguais!

Professor: Quero que vocês pensem agora para mim, vocês me disseram isso sem ficar jogando o dado, certo? Então, a gente não utilizou a probabilidade frequentista. A gente não precisou ficar jogando o dado. Vocês conseguem tentar achar para mim uma maneira, para eu encontrar probabilidades sem precisar jogar, que nem vocês me disseram agora? O que eu estou usando nessa probabilidade?

Flora: O tanto de lados e o tanto de vezes que aparece o número.

Flora deixa o dado escapar.

Taís: 20!

Flora: Aí, ó! Está vendo, Professor?

Professor: Mas agora você rolou o dado!

Flora: Não, foi sem querer!

Professor: Não tem problema, mas isso foi uma rolagem, certo?

Flora: Foi!

Professor: O resultado que você me falou foi sem fazer a rolagem.

Flora: Foi!

Professor: O que significa esse 1 em 20, esse 1 em 8 que vocês me disseram? Estou relacionando o quê? Esse 1 é o quê?

Zara: Esse 1?

Professor: Esse 1, o que está me dizendo?

Taís: Que é uma chance de cair esse número?

Professor: Então esse 1 está aí representando o quê?

Taís: O número que você escolheu!
Professor: O número que você escolheu! Então, a gente faz o quê?
Zara: Dividir pelo tanto de lados!
Professor: Pelo tanto de lados! O que é esse tanto de lados?
Zara: É o espa...
Flora: São as possibilidades!
Professor: São as possibilidades. Então, escrevam para mim, nesse caso a probabilidade é a relação entre o quê? O que você quer pelo...
Flora: Pelo espaço amostral?
Professor: Pelo espaço amostral, exatamente, por tudo! E nesse caso, é equiprovável ou não equiprovável?
Zara: É equiprovável!
Taís: Isso.
Professor: Por quê?
Zara: Pelo tamanho!
Professor: Qual é a chance de sair 3 aí?
Zara: 1 de 20.
Professor: E 4?
Zara: 4 de 20. Não! 1 de 20.
Flora e Taís: 1 de 20.
Professor: E 10?
Estudantes: 1 de 20.
Professor: Todos os lados aí são?
Zara: Iguais!
Taís: Números menores que 10!
Professor: No da Taís é impossível tirar 10, porque só vai até...
Taís: Oito!
Professor: Escrevam para mim, por favor!
Flora: A probabilidade...
Zara: Não! A fórmula de probabilidade...
Flora: ...de sair um número é...
Zara: ... que você escolhe e o tanto de lados?
Flora: O tanto de possibilidades!
Zara: O tanto de espaço amostral!
Flora: Isso!
Taís: É o espaço o quê?
Flora: Amostral!

As estudantes, ao analisarem o dado regular e calcular a probabilidade de um número sair, demonstraram uma compreensão teórica do conceito, sem precisar recorrer à experimentação prática. Elas conseguiram relacionar o cálculo da probabilidade à ideia de equiprobabilidade, com base no número de lados e nas possíveis ocorrências do número escolhido. A discussão revelou que, ao entenderem que todos os lados do dado são iguais, o cálculo da probabilidade pode ser feito diretamente pela relação entre o número de ocorrências desejadas e o total de possibilidades no espaço amostral. Este processo contrasta com o uso do astrágalo, um objeto com lados desiguais, onde as probabilidades não são uniformes e exigiriam um raciocínio diferente para o cálculo. A reflexão sobre o dado, portanto, demonstra como a

compreensão teórica da probabilidade equiprovável pode ser elaborada após o contato com o espaço não-equiprovável.

Professor: Marvin, eu quero que você tente me dizer agora, escolhe um dos números nesse dado e tenta me dizer qual é a chance de sair ele.

Marvin: 12!

Professor: E se precisar, você pode fazer registros.

Marvin: A chance de cair no 12 é a mesma chance de cair em tudo, então é 1 em 12.

Professor: Por que, Marvin?

Marvin: Porque todos têm o mesmo formato, o mesmo lado, o mesmo...

Professor: No que esse dado é diferente do astrágalo que estávamos usando?

Marvin: Porque todos os lados têm a mesma chance de cair.

Professor: Por que eles são?

Marvin: É, porque... Ahhh! Porque são equiprovável.

Professor: Isso! É um dado equiprovável, certo? Arthur, o que você pode me dizer...

Arthur: 1 em 12.

Professor: ...disso aqui?

Arthur: Todos os números são 1 em 12.

Professor: Por quê?

Arthur: Porque todos os lados são iguais.

Professor: Então esse é um espaço...

Arthur: Amostral.

Professor: Equiprovável ou não-equiprovável?

Arthur: Equiprovável.

Professor: Estudantes, vocês me disseram as probabilidades sem realizar experimentos!

Arthur: Nãoooo, a gente não vai realizar!

Professor: É isso que eu quero perguntar para vocês! Tem como eu calcular probabilidade sem realizar experimentos?

Marvin: Sim.

Arthur: Não, como assim? Eu não entendi.

Professor: O que vocês fizeram nessa probabilidade de vocês? Por que é 1 em 12?

Arthur: Porque todos os lados são iguais e têm 12 lados.

Professor: Tem 12 lados... Você está usando o 12 em algum lugar?

Arthur: Sim. Ahhh, a gente pode escrever embaixo, que nem fração, tipo, número de lados, e em cima, 1.

Professor: O que é esse 1?

Arthur: Porque todos os lados têm a mesma chance de sair.

Professor: Então, é o lado que eu quero que saia, dividido por?

Arthur: 12.

Professor: Que são?

Arthur: O tanto de lados!

Professor: Dá uma conversadinha com o Marvin, Arthur! Explica o que você me disse.

Arthur: Espera aí, Professor! Aí eu coloco aqui, número de lados?

Professor: Pode ser!

Marvin: Ô, Arthur! Eu não entendi nada! Como assim?

Arthur: A gente vai fazer tipo isso aqui que eu fiz, tipo uma fração. Aí embaixo você vai fazer o número de lados, que é 12, do nosso dado, e em cima, que é 1.

Marvin: Hmmm.

Arthur: Porque sempre vai ser 1... Se tem 200 lados, vai ser 1 em 200. Entendeu?

Professor: Marvin, entendeu?

Marvin: Entendi!

Os estudantes jogam os dados algumas vezes.

Marvin: Ô Arthur, qual... chuta o número que vai sair!

Arthur: Sete!

Marvin: 1 de 12, hein!

Arthur: Sete! Você chutou doze?

Marvin: Não, eu não chutei 12, eu falei que é 1 de 12 de cair 7.

Arthur: Sim!

Marvin joga o dado.

Marvin: 11! 10!

Arthur: 12!

Marvin: Eu acho que vai cair 10!

Marvin joga o dado e ambos dão risada.

Marvin: 4! 1 de 12 de cair...

Arthur: Cada um escolhe um número diferente, a gente vai jogando e, quando sair o número primeiro, ganha!

Marvin: Acho que vai sair 9.

Arthur: 10.

Marvin joga o dado sucessivamente.

Arthur: Não, é 6.

Marvin: Não, é 9!

Arthur: É 6.

Marvin: É 6. Cadê o 9? 10?

Arthur: É, 10! Vai. Falei 10, hein!

Marvin: Eu vou escolher 5! Não, 4.

Marvin joga o dado.

Arthur: 11, nossa!

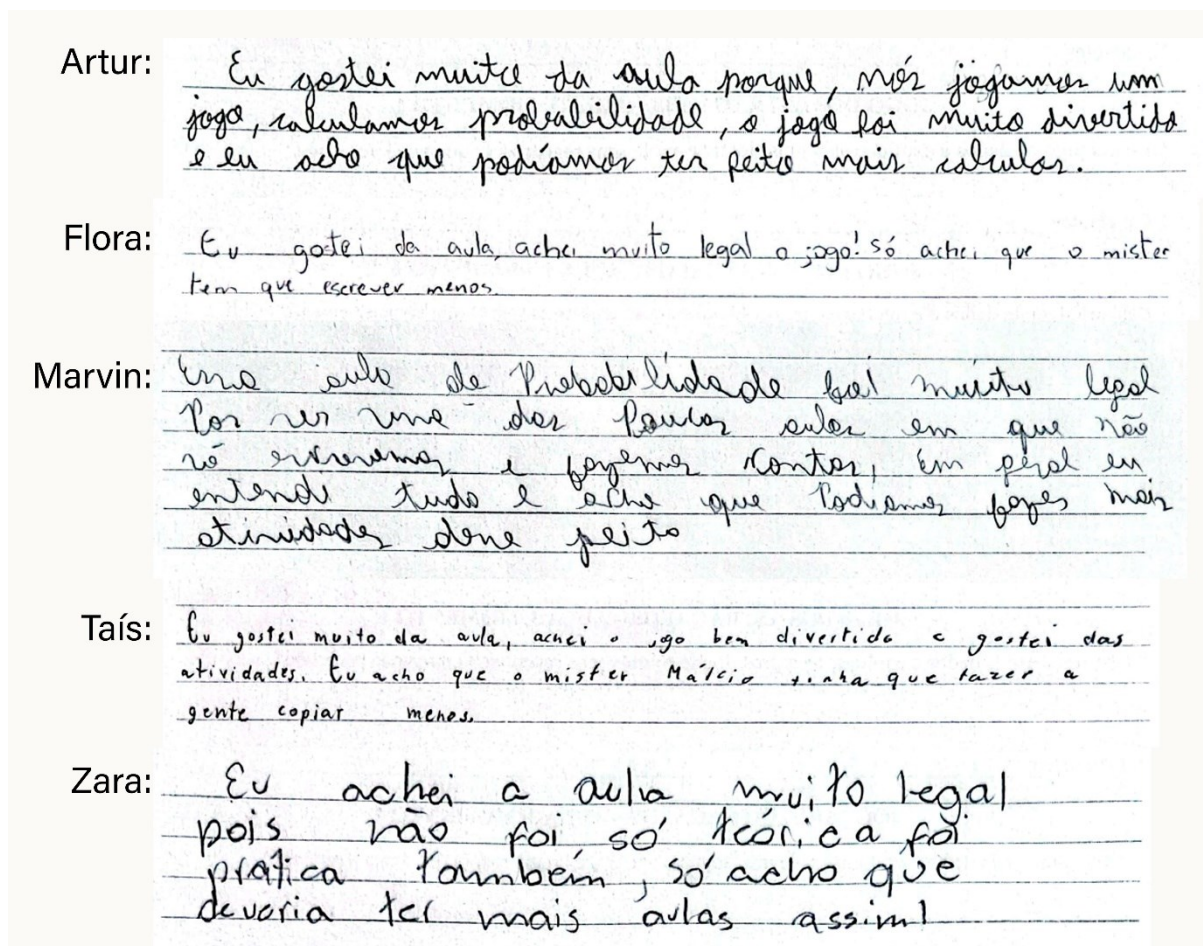
Marvin: 11, acertou?

Arthur: Não, eu falei 10. 11! Agora vai sair 10, quer ver? O dado está viciado!

Os estudantes, ao discutirem a probabilidade de sair um número em um dado, não apenas compreenderam a natureza equiprovável do dado regular, mas também exploraram diferentes formas de representar essa probabilidade. Marvin, ao calcular a chance de sair o número 12, afirmou que seria 1 em 12, utilizando a representação de fração. Arthur, por sua vez, seguiu essa linha, explicando como a fração era formada pelo número de ocorrências desejadas (1) sobre o total de lados (12), e ressaltou que essa mesma lógica seria utilizada para qualquer dado com um número diferente de faces. Além disso, o diálogo envolveu uma reflexão sobre a possibilidade de expressar essa probabilidade em outros formatos, como decimais e porcentagens, ampliando a compreensão dos estudantes sobre a flexibilidade da matemática. A transição entre as representações matemáticas permitiu que eles vissem a probabilidade sob múltiplos ângulos, ajudando a construir um entendimento mais robusto e articulado do conceito. Essa abordagem também destacou como, ao calcular probabilidades teoricamente, sem a

necessidade de experimentos, os estudantes desenvolveram uma visão um pouco mais elaborada do conceito de probabilidade e suas diversas expressões matemáticas.

Figura 39: Considerações dos estudantes após a realização da proposta



Fonte: Arquivo do autor.

De maneira geral, os estudantes valorizaram a proposta como inovadora e desafiadora, reconhecendo o papel do jogo para esclarecer dúvidas e consolidar aprendizagens, como algo divertido e distante das práticas comuns em sala de aula. Essa valorização do diálogo em sala de aula é coerente com os princípios da Teoria Histórico-Cultural, que enfatiza o papel da linguagem e da interação social no desenvolvimento cognitivo.

A análise dessa cena amplia a discussão sobre espaços equiprováveis ao contrastá-los com o espaço não-equiprovável dos astrágalos, explorado anteriormente. Até esse momento, os estudantes haviam trabalhado predominantemente com a observação empírica e a frequência relativa dos resultados para compreender como as probabilidades variam em função das características do objeto. No entanto, para avançar na formalização do conceito de probabilidade, torna-se necessário recorrer a uma abordagem mais estruturada, em que a

equiprobabilidade é assumida como um princípio matemático. Assim, essa etapa da proposta leva os estudantes a perceber que, em um dado comum, cada face tem a mesma chance de ocorrer, permitindo o cálculo teórico das probabilidades sem depender exclusivamente da experimentação. Essa transição do empírico para o teórico favorece a consolidação da ideia de espaço equiprovável, mostrando como diferentes contextos exigem diferentes formas de análise probabilística.

Os estudantes foram desafiados a extrapolar as aprendizagens do jogo para pensar em situações para além do jogo, utilizando-se de princípios matemáticos para justificar suas respostas. Esse processo evidenciou um amadurecimento na forma como os conceitos de probabilidade começaram a ser utilizados de maneira lógica e sistemática.

O estudo das interações revelou um crescimento na habilidade dos estudantes em diferenciar as probabilidades atribuídas às jogadas do astrágalo de outros contextos mais regulares, como o uso de dados tradicionais. Essa evolução aponta para a potência da proposta em introduzir conceitos fundamentais da probabilidade de forma gradativa. A integração entre a observação empírica, a análise dos registros e as discussões orientadas pelo professor possibilitou que os estudantes conectassem diferentes abordagens para interpretar e calcular probabilidades, de forma frequentista e teórica, apresentando indícios de sua apropriação de forma mais ampla.

A análise do Jogo dos Astrágalos como um recurso pedagógico revelou seu potencial para promover aprendizagens no ensino da probabilidade. Ao longo dos episódios e cenas analisados, foi possível observarmos indícios de como a proposta, ao alinhar-se aos princípios da Teoria Histórico-Cultural, favoreceu não apenas a apropriação de conceitos matemáticos, mas também o desenvolvimento de habilidades críticas e colaborativas nos estudantes.

A pesquisa evidencia que o uso de jogos na educação, especialmente quando organizado com intencionalidade pedagógica, pode transformar a maneira como os estudantes se relacionam com conteúdos complexos. Ao criar um ambiente lúdico e desafiador, o jogo possibilitou o engajamento dos estudantes, promovendo uma aprendizagem que foi além do conteúdo formal, abrangendo aspectos sociais, culturais e históricos. Do ponto de vista social, a proposta estimulou a cooperação entre os estudantes, que compartilharam estratégias, discutiram resultados e negociaram significados, fortalecendo a elaboração coletiva do conhecimento. No âmbito cultural, o Jogo dos Astrágalos permitiu uma conexão com práticas lúdicas da antiguidade, resgatando a relevância dos jogos como elementos que atravessam diferentes sociedades ao longo do tempo. Já no aspecto histórico, a proposta trouxe reflexões sobre como o conceito de probabilidade emergiu da necessidade humana de compreender o

acaso, destacando a evolução do pensamento matemático desde os primeiros registros de jogos de acaso até a formalização da teoria da probabilidade.

Durante a realização da proposta, algumas adaptações se mostraram necessárias para garantir o melhor desenvolvimento das etapas e a apropriação dos conceitos probabilísticos pelos estudantes. Inicialmente planejada para ser concluída em três aulas, a proposta precisou ser estendida para quatro aulas de 50 minutos, reorganizando os momentos de experimentação e discussão para acomodar o ritmo dos estudantes. Além disso, a necessidade de ajustes emergiu tanto na estrutura dos momentos quanto na mediação do professor, que passou a enfatizar mais as diferenças entre espaços amostrais equiprováveis e não-equiprováveis, dada a dificuldade dos estudantes em estabelecer algumas dessas distinções de maneira autônoma.

Outra adaptação relevante ocorreu no uso dos astrágalos e dados enumerados. Embora a proposta inicial previsse uma abordagem mais livre na exploração dos objetos, a experiência mostrou que algumas intervenções foram necessárias para orientar os estudantes na análise das frequências dos resultados e na formulação de inferências probabilísticas. A mediação docente foi ajustada para oferecer questionamentos mais direcionados, estimulando a comparação entre os resultados experimentais e as probabilidades teóricas. Além disso, a própria dinâmica do jogo foi revisitada quando os estudantes identificaram dificuldades em determinadas regras, levando a modificações que permitiram maior coerência entre os desafios propostos e os conceitos matemáticos trabalhados.

Essas adaptações reforçam a importância da flexibilidade no planejamento de propostas didáticas baseadas em jogos e na Atividade Orientadora de Ensino. Os ajustes realizados não apenas possibilitaram um melhor aproveitamento da proposta, mas também contribuíram para tornar o Jogo dos Astrágalos um recurso pedagógico mais acessível no ensino de Probabilidade.

Finalmente, os resultados apontam para a necessidade de novas investigações, explorando outros contextos educacionais e ampliando a acessibilidade do Jogo dos Astrágalos como recurso pedagógico. Acreditamos que este estudo representa uma importante contribuição para o campo da Educação Matemática, evidenciando suas possibilidades para o ensino e a aprendizagem de Probabilidade.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esperávamos que a realização desta proposta permitisse aos estudantes vivenciar, de forma prática e envolvente, os fundamentos da probabilidade, estimulando o pensamento crítico e promovendo uma reflexão aprofundada sobre os conceitos matemáticos subjacentes. Por meio do uso do Jogo dos Astrágalos como recurso pedagógico, acreditávamos ser possível não apenas facilitar a compreensão dos princípios probabilísticos, mas também despertar uma demanda intrínseca pelo conhecimento. A proposta visava incitar nos estudantes a curiosidade e a necessidade de explorar essas ideias de forma colaborativa, incentivando a cooperação e o compartilhamento de experiências, de modo que o processo de aprendizagem se desenvolvesse de forma dialógica e coletiva.

Nossa expectativa era, sobretudo, que a proposta atuasse como uma ponte entre a teoria e a prática, estabelecendo conexões entre o conhecimento lógico-matemático e os aspectos históricos e culturais que permeiam o jogo. Ao enfatizar a vivência prática da probabilidade, pretendíamos estimular os estudantes a expandirem sua visão sobre o tema, permitindo-lhes não apenas memorizar fórmulas e definições, mas também revisitar e reinterpretar o processo histórico de elaboração do conhecimento por meio da experimentação e da análise crítica dos fenômenos observados.

A análise dos resultados possibilitou a verificação das potencialidades e das limitações da abordagem adotada. Constatou-se que, ao participar dos diversos momentos da proposta, os estudantes demonstraram uma evolução gradativa na apropriação dos conceitos de probabilidade, refletindo o impacto positivo de uma experiência que integra o lúdico ao cognitivo. Observou-se, ainda, que as interações em sala de aula e o compartilhamento de ideias contribuíram para uma aprendizagem que transcende a assimilação teórica, consolidando um processo educacional dinâmico, reflexivo e colaborativo.

Ademais, a incorporação dos aspectos históricos e culturais presentes no Jogo dos Astrágalos enriqueceu a experiência pedagógica, conectando os estudantes a uma tradição que remete às origens da probabilidade. Essa abordagem possibilitou a criação de um diálogo entre o passado e o presente, reforçando a ideia de que o conhecimento matemático é elaborado historicamente e contextualizado, e não meramente um acúmulo isolado de dados e procedimentos. Essa conexão histórica mostra indícios de que ampliou a percepção dos estudantes acerca do desenvolvimento lógico e histórico dos conceitos probabilísticos, evidenciando a relevância do jogo enquanto artefato cultural e epistemológico.

Entendemos que a análise das implicações pedagógicas dos resultados apontou caminhos promissores para o aprimoramento dos conteúdos e das abordagens educacionais voltadas para essa faixa etária. Ficou evidente que a proposta, ao estimular a cooperação e o diálogo entre os estudantes, contribuiu para a elaboração e a construção do conhecimento probabilístico, permitindo que cada estudante identificasse suas próprias dificuldades e, por meio do diálogo e da experimentação, buscasse soluções que enriqueceram a compreensão geral do tema. Essa percepção reforça a importância de repensar as práticas pedagógicas e de incorporar estratégias que privilegiem a participação dos estudantes e a integração entre teoria e prática.

A partir da perspectiva da Atividade Orientadora de Ensino (AOE), a organização do Jogo dos Astrágalos como uma Situação Desencadeadora de Aprendizagem (SDA) evidencia-se como um caminho metodológico para a apropriação dos conceitos probabilísticos pelos estudantes. Segundo Moura (2022), a AOE transcende a simples exposição de conteúdos ao propor um movimento progressivo em que a compreensão e a internalização dos conceitos se desenvolvem a partir da interação com artefatos históricos e do próprio contexto de aprendizagem. No âmbito desta pesquisa, a experimentação do jogo em sala de aula revelou-se um elemento essencial, pois possibilitou a mobilização gradativa de conceitos matemáticos em um contexto de aprendizagem com sentido e propósito.

Dessa forma, o Jogo dos Astrágalos apresenta potencial para a proposição de um Problema Desencadeador de Aprendizagem, conforme proposto por Virgens (2019), ao instigar os estudantes a questionarem e analisarem as regularidades e irregularidades de seus lançamentos, buscando justificativas matemáticas para os fenômenos observados. Como demonstrado ao longo da análise, os estudantes avançaram na compreensão das diferenças entre espaços equiprováveis e não-equiprováveis, bem como na interpretação das frequências relativas, ultrapassando a mera experiência empírica para alcançar uma possível apropriação e compreensão mais aprofundada e teórica dos conceitos envolvidos. Tais evidências sugerem que o jogo, quando estruturado de forma intencional pelo professor, exerce uma função epistemológica ao promover desafios que incentivam a elaboração coletiva do conhecimento e a reorganização conceitual.

A relação entre a pergunta de pesquisa – *“Como o Jogo dos Astrágalos, organizado na perspectiva da Atividade Orientadora de Ensino, pode ser um potencial referente para desencadear conceitos de Probabilidade nos anos finais do Ensino Fundamental?”* – e os resultados obtidos torna-se clara ao se observar o desenvolvimento das interações em sala de aula. Os episódios analisados revelam que os estudantes não apenas participaram e se engajaram na proposta, mas também demonstraram uma crescente autonomia na formulação de hipóteses

e na interpretação dos dados coletados. A utilização do jogo com um artefato cultural, aliada à mediação docente e às intervenções pedagógicas cuidadosamente planejadas e replanejadas, possibilitou a construção de um ambiente de aprendizagem onde o conhecimento emergiu das ações dos próprios estudantes, dialogando diretamente com os pressupostos da Teoria Histórico-Cultural.

Os indícios de que a pergunta de pesquisa foi respondida podem ser observados tanto nos registros escritos dos estudantes quanto nos diálogos transcritos ao longo da análise. O reconhecimento da não-equiprobabilidade dos astrágalos, a comparação entre frequências relativas e probabilidades teóricas, bem como a articulação de diferentes formas de representação da probabilidade – utilizando frações, porcentagens e linguagem verbal – são evidências de uma possível apropriação dos conceitos trabalhados. Além disso, os momentos de síntese coletiva demonstraram que os estudantes conseguiram reorganizar suas concepções iniciais e elevar seu conhecimento a partir das discussões em grupo, um aspecto central na perspectiva da AOE.

Por fim, esta pesquisa reafirma a importância de propostas pedagógicas que integrem o lúdico ao ensino da Matemática de maneira intencional e organizada. A experiência com o Jogo dos Astrágalos demonstrou que a ludicidade não constitui um fim em si, mas sim um meio poderoso para favorecer processos de aprendizagem ricos e dialógicos. Ao adotar um enfoque fundamentado na AOE e na SDA, acreditamos que o estudo contribui de forma consistente para o campo da Educação Matemática, evidenciando que a probabilidade pode ser ensinada de modo dinâmico, histórico e culturalmente contextualizado, promovendo a formação de estudantes críticos e autônomos na elaboração do próprio conhecimento.

Percebo também que este percurso me transformou. Já compreendia que ensinar Matemática não se resume a transmitir conteúdos, mas o mestrado potencializou em mim a visão de que é necessário buscar promover a apropriação dos conceitos. A aproximação com a Teoria Histórico-Cultural reforçou e deu sentido a ideias que eu já carregava, ajudando-me a enxergar com mais clareza meu papel como professor e como estudante. O GEPEMAPe e os momentos de estudo coletivo mostraram que a formação não se encerra na defesa, mas continua em cada proposta e em cada turma. Mais do que um título, este processo representou um amadurecimento, o fortalecimento de convicções e a compreensão de que posso recriar e ampliar a proposta dos astrágalos em diferentes contextos, sempre articulando os aspectos históricos e lógicos da probabilidade em sala de aula. Ao olhar para trás, reconheço que cada etapa do caminho contribuiu para consolidar em mim a certeza de que estar em constante

movimento, reorganizando e aprendendo, é parte essencial da docência e da pesquisa que escolhi seguir.

Em síntese, entendemos que a proposta não apenas atingiu o objetivo inicial de tornar a aprendizagem dos princípios probabilísticos mais acessível, mas também apontou para novas perspectivas e desafios que devem ser enfrentados em futuras investigações. Ao estabelecer uma conexão entre o lúdico, o histórico e o lógico, o estudo demonstrou que o uso do Jogo dos Astrágalos pode ser um recurso poderoso para transformar o ensino da probabilidade, estimulando uma aprendizagem autêntica e colaborativa. Espera-se que essas reflexões e os resultados obtidos sirvam de inspiração para a continuidade de pesquisas que visem aprimorar e expandir as práticas pedagógicas na Educação Matemática, contribuindo para a formação de estudantes críticos e engajados com os saberes matemáticos que moldam o mundo contemporâneo, tendo sempre em vista sua elaboração histórica.

REFERÊNCIAS

- ADAMS, Douglas. **O guia definitivo do mochileiro das galáxias**. Editora Arqueiro, 2013.
- ARAÚJO, Elaine Sampaio; MORAES, Silvia Pereira Gonzaga de. Dos princípios da pesquisa em educação como atividade. **Educação escolar e pesquisa na teoria histórico-cultural**, p. 47-70, 2017.
- BENNETT, D. J. **Aleatoriedade**. São Paulo: Martins Fontes, 2003.
- BERNSTEIN, Peter Lewyn. **Desafio aos deuses**: a fascinante história do risco. Gulf Professional Publishing, 1997.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2017.
- BRASIL. Ministério da Educação. Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior. **Produção técnica**: grupo de trabalho. Brasília: MEC; CAPES, 2019. Disponível em: <<https://www.gov.br/capes/pt-br/centrais-de-conteudo/10062019-producao-tecnica-pdf>> Acesso em: 31 ago. 2023.
- CRESWELL, John Ward. **Projeto de pesquisa**: Métodos qualitativo, quantitativo e misto. Artmed Editora, 2007.
- CRUSIUS, Carlos Augusto. **Incerteza e acaso no mundo antigo**. Cadernos de matemática e estatística. Série G, Textos para discussão. Porto Alegre. N. 04 (ago. 1991), p. 1-24, 1991.
- CRUZ, Amanda Pasinato; PANOSSIAN, Maria Lucia. Jogos matemáticos: análise de propostas inclusivas para potencializar o cálculo mental. In: **Revista Educação Especial**, v. 34, p. 1-22, 2021. <https://doi.org/10.5902/1984686X63445>
- DANTAS, Carlos Alberto Barbosa. **Probabilidade**: Um Curso Introdutório Vol. 10. Edusp, 2004.
- DAVID, Florence Nightingale. **Games, Gods and Gambling**: the origins and history of probability and statistical ideas from the earliest times to the Newtonian era. New York: Hafner Publishing Company. 1962.
- DIAS, Marisa da Silva; SAITO, Fumikazu. **Interface entre História da Matemática e ensino**: uma aproximação entre historiografia e perspectiva lógico-histórica. In IV Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 2009, Brasília. Anais do IV Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. Brasília: SBEM, 2009. p. G05 – G05.
- DICING Games. Disponível em: <https://joyousdemaundes.weebly.com/dicing-games.html>. 2018. Acesso em: 25 ago. 2023.
- DUFLO, Colas. **O jogo**: de Pascal a Schiller. Tradução Francisco Settineri e Patrícia Chittoni Ramos. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 1999.
- EIGEN, Manfred; WINKLER, Ruthild. **Laws of the game**: how the principles of nature govern chance. Princeton University Press, 1993.
- FRAGA, Moisés Alves. **Significações de nexos conceituais em uma atividade de ensino de medida de tempo**. 2023. Tese (Doutorado em Educação Científica Matemática e Tecnológica) - Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2023. DOI: <https://doi.org/10.11606/T.48.2023.tde-15042024-105350>. Disponível em: <https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/48/48136/tde-15042024-105350/pt-br.php>. Acesso em: 2025-09-21.

- GAMA, Monica Almeida; DOS SANTOS, André Luiz Cordeiro; DA SILVA, Patrícia Nunes. **O que é probabilidade?**. Cadernos do IME-Série Matemática, n. 13, p. 42-50, 2019. <https://doi.org/10.12957/cadmat.2019.46991>
- GOOD, Alexandra. Knucklebones. In: **JHU Archaeological Museum**. 2021. Disponível em: <https://archaeologicalmuseum.jhu.edu/class-projects/archaeology-of-daily-life/childhood/knucklebones/>. Acesso em: 24 ago. 2023.
- GOSWAMI, Akhil; CHOUDHURY, Gautam; SARMAH, Hemanta Kumar. **Role of Fibonacci, Blaise Pascal, Pierre de Fermat and Abraham de Moivre in the Development of Number Patterns and Probability: A Historical Search**. International Journal of Applied Engineering Research, v. 14, n. 11, p. 2527-2535, 2019.
- GRANDO, Regina Célia. **O conhecimento matemático e o uso de jogos na sala de aula**. Tese de Doutorado. Campinas, SP. Faculdade de Educação, UNICAMP, 2000.
- GRANDO, Regina Célia. **O jogo e a matemática no contexto da sala de aula**. São Paulo: Paulus, 2004.
- HACKING, Ian. **The emergence of probability**. 2. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2006. 209p.
- HUIZINGA, Johan. **Natureza e Significado do Jogo**. São Paulo: Perspectiva, 2008.
- KISHIMOTO, Tizuko Morchida. **O jogo e a educação infantil**. São Paulo: Pioneira, 1998.
- KOLMOROGOV, Andrey Nikolaevich. **Foundations of the Theory of Probability**. Chelsea Publishing Company New Yourk, 1956. 84p.
- KÖNIG, Horst Erich; LIEBICH, Hans-Georg. **Anatomia dos Animais Domésticos: Texto e Atlas Colorido**. Artmed Editora, 2016, p. 242.
- LESTIENNE, Rémy. **O Acaso Criador**. Edusp, 2008. 296p.
- LOPES, Anemari Roesler Luersen Vieira; BOROWSKY, Halana Garcez; BINSFELD, Carine Daiana. **O jogo como orientador da prática pedagógica nos anos iniciais do Ensino Fundamental**. 2017. <https://doi.org/10.18764/2178-2229.v24n.especialp176-191>
- LOPES, Anemari Roelser Luersen Vieira; SILVA, Daine Susara Garcez da; BOROWSKY, Halana Garcez; PERLIN, Patrícia. In: SILVA, Sandra Aparecida Fraga da; CÔCO, Dilza [Orgs.]. **Clube de Matemática: experiências didático-formativas**. São Carlos: Pedro & João Editores e Edifes, 2023. 141p.
- MARCO, Fabiana Fiorezi. **Estudo dos processos de resolução de problemas mediante a construção de jogos computacionais de matemática no ensino fundamental**. Dissertação – Universidade de Campinas, Mestrado em Educação Campinas, 2004.
- MARTINS, João Carlos. **Vygotsky e o papel das interações sociais na sala de aula: reconhecer e desvendar o mundo**. Série Ideias, v. 28, p. 111-122, 1997.
- MATTHEWS, Robert. **As leis do acaso: Como a probabilidade pode nos ajudar a compreender a incerteza**. Editora Schwarcz-Companhia das Letras, 2017, 350 p.
- MLODINOW, Leonard. **O andar do bêbado: como o acaso determina nossas vidas**. Editora Schwarcz-Companhia das Letras, 2009.
- MORAES, Silvia Pereira Gonzaga de. **Avaliação do processo e ensino e aprendizagem em matemática: contribuições da teoria histórico-cultural**. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo: São Paulo, 2008

MOURA, Manoel Oriosvaldo de. **O jogo e a construção do conhecimento matemático**. Publicação séries e ideias, p. 45-52, 1992.

MOURA, Manoel Oriosvaldo de. **A séria busca no jogo: do lúdico na matemática**. Educação Matemática Em Revista, p. 17-24, 1994.

MOURA, Manoel Oriosvaldo de *et al.* Atividade orientadora de ensino: unidade entre ensino e aprendizagem. In: **Rev. Diálogo Educacional**, p. 205-229, 2010.

<https://doi.org/10.7213/rde.v10i29.3094>

MOURA, Manoel Oriosvaldo de. **A atividade pedagógica na teoria histórico-cultural**. Autores Associados, 2022. Ebook.

MOURA, Manoel Oriosvaldo de; ARAUJO, Elaine Sampaio; SERRÃO, Maria Isabel Batista. **Atividade orientadora de ensino: fundamentos**. Linhas Críticas, v. 24, 2018.

<https://doi.org/10.26512/lc.v24i0.19817>

MOURA, Manoel Oriosvaldo de; LANNER DE MOURA, Anna Regina. **Escola: um espaço cultural**. Matemática na Educação Infantil. São Paulo/Diadema: Secel, 1998.

MOURA, Manoel Oriosvaldo de; Pesquisa colaborativa: um foco na ação formadora. In: BARBOSA, Raquel Lazzari Leite (org.) **Trajetórias e perspectivas da formação de educadores**. São Paulo: Editora UNESP, 2004.

MORROW, Peggy *et al.* **Math Make Sense 6: Teacher Guide**. Pearson Addison Wesley, 2006.

OBMEP. In: **Programa de Iniciação Científica Jr. (PIC)**. Disponível em:

<https://www.obmep.org.br/pic.htm>. Acesso em: 22 set. 2023.

OLIVEIRA, Natalia Mota; PANOSSIAN, Maria Lucia (org.). **Verbetes da atividade orientadora de ensino: grupo de estudos sobre situações desencadeadoras de aprendizagem**. Capivari de Baixo: Editora Univinte, 2022.

OLIVEIRA, Natalia Mota; PANOSSIAN, Maria Lucia. Compreensões de “Situação Desencadeadora de Aprendizagem” e de “Problema Desencadeador” expressas em pesquisas acadêmicas. **Revista Venezolana de Investigación en Educación Matemática**, v. 1, n. 2, p. 1-29, 2021. <https://doi.org/10.54541/reviem.v1i2.5>

PEREIRA, Mariana Martins. **Apropriação de novas significações das operações fundamentais de matemática por professores em atividade de formação de modo remoto**. Tese de Doutorado. Universidade Federal de Uberlândia. 2022.

RIBEIRO, Flavia Dias. **A aprendizagem da docência na prática de ensino e no estágio: contribuições da teoria da atividade**. 2011. Tese de Doutorado. Universidade de São Paulo.

SOUSA, Áurea. O papel da distribuição normal na Estatística. **Correio dos Açores**, p. 14-14, 2019.

STIGLER, Stephen M. Studies in the History of Probability and Statistics. **XXXIV: Napoleonic statistics: The work of Laplace**. Biometrika, v. 62, n. 2, p. 503-517, 1975.

<https://doi.org/10.1093/biomet/62.2.503>

VIALI, Lóri. Algumas considerações sobre a origem da Teoria das Probabilidades. In: **Revista Brasileira de História da Matemática**. n. 16, v. 8, p. 143-153. Out. 2008.

VIRGENS, Wellington Pereira das. **Problemas Desencadeadores de Aprendizagem na organização do ensino: sentidos em movimento na formação de professores de matemática**.

2019. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2019.

APÊNDICE A – CARTILHA INFORMATIVA

astragalos.com
GUIA PARA PROFESSORES

JOGO DOS
ASTRÁGALOS



Márcio Willian dos Reis Filho
Fabiana Fiorezi de Marco



Programa de Pós-graduação em
Ensino de Ciências e Matemática



GEPEMAPe
GRUPO DE ESTUDO E PESQUISA EM ENSINO
DE MATEMÁTICA E CIÊNCIAS PEDAGÓGICAS



Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFU, MG, Brasil.

R375j Reis Filho, Márcio Willian dos.
 Jogo dos Astrágalos: guia para professores / Márcio Willian dos Reis
 Filho; orientadora: Fabiana Fiorezi de Marco. Uberlândia: PPGECEM,
 2025.

 Produto Educacional do Programa de Pós-graduação em Ensino de
 Ciências e Matemática.
 Inclui ilustrações.

 1. Ciências - Estudo e ensino. 2. Jogos. I. Marco, Fabiana Fiorezi de,
 (Orient.). II. Título.

CDU: 50:37

 André Carlos Francisco
 Bibliotecário-Documentalista - CRB-6/3408

O Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da UFU (PPGECM/UFU) oferece o mestrado profissional, voltado a professores da Educação Básica com formação em Biologia, Física, Química, Matemática ou Pedagogia, focado na qualificação para práticas docentes inovadoras por meio de um produto educacional vinculado à dissertação. Apresentamos aqui o produto da dissertação *Jogo dos Astrágalos: A Probabilidade no Sexto Ano do Ensino Fundamental*, um site interativo com propostas e recursos para o ensino de probabilidade. Esta cartilha convida os leitores a explorar o site e conhecer seus recursos.

MÁRCIO WILLIAN DOS REIS FILHO

Doutorando em Educação pela Universidade Federal de Uberlândia (UFU), Mestre em Ensino de Ciências e Matemática e Licenciado em Matemática pela mesma instituição, com período de intercâmbio na Universidade de Coimbra (Portugal). Atua como professor de Matemática na educação básica.



FABIANA FIOREZI DE MARCO

Professora Titular da Universidade Federal de Uberlândia (UFU), com Pós-Doutorado em Educação pela USP e Doutorado em Educação Matemática pela Unicamp. Atua como Coordenadora do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática (UFU), do Grupo de Formação de Professores da SBEM (gestão 2024-2027) e do curso de especialização para professores dos anos iniciais (EFPEMAI), ofertado pelo MEC em todo o país. Lidera o grupo de pesquisa GEPEMAPE/UFU e é editora-chefe da revista Ensino em Re-Vista.

ORGANIZAÇÃO

COMISSÃO CIENTÍFICA

Profa. Dra. Fabiana Fiorezi de Marco (Orientadora)

Universidade Federal de Uberlândia - UFU/MG

Profa. Dra. Ana Cláudia Molina Zaqueu Xavier

Universidade Federal de Uberlândia - UFU/MG

Profa. Dra. Flávia Dias de Souza

Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR

AUTORES

Márcio Willian dos Reis Filho

Fabiana Fiorezi de Marco

COORDENAÇÃO EDITORIAL

Márcio Willian dos Reis Filho

Fabiana Fiorezi de Marco

DIAGRAMAÇÃO

Márcio Willian dos Reis Filho

PRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO

Programa PPGECEM/UFU e GEPEMAPe

UFU, um bem público a serviço do Brasil.

SUMÁRIO

Carta aos leitores	6
O que é um atrágalo?	7
Por que um site?	8
A História do Jogo dos Astrágalos	9
Propostas de Ensino	10
Tutorial de impressão 3D	11
Atividade Orientadora de Ensino (AOE)	12
Dicas de leitura	13
Outros links importantes	14
Agradecimentos	15

Acesse o site
pelo QR code
ao lado!

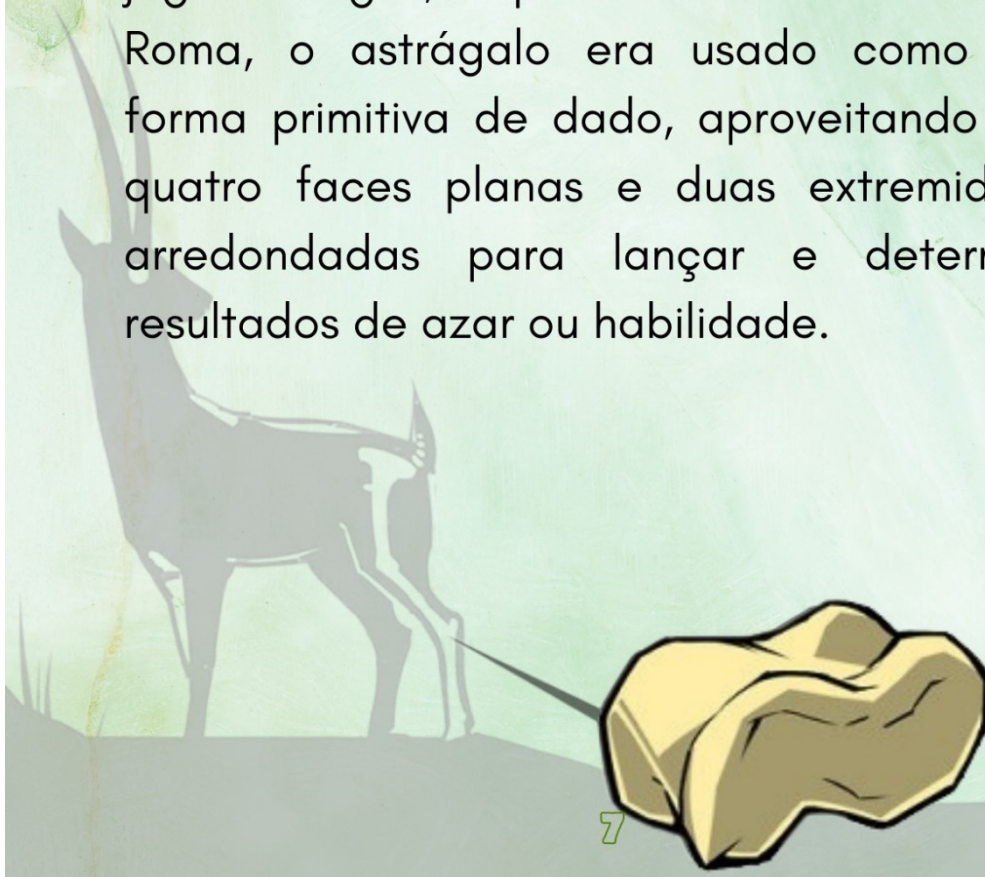


CARTA AOS LEITORES

Este material foi elaborado como uma orientação para docentes explorarem o site astragalos.com, produto educacional originado da dissertação *Jogo dos Astrágalos: a Probabilidade no Sexto Ano do Ensino Fundamental*, defendida no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal de Uberlândia. O objetivo é apresentar o conteúdo disponível em cada seção do site, orientando o acesso e a implementação dos recursos pedagógicos voltados ao ensino de Probabilidade.

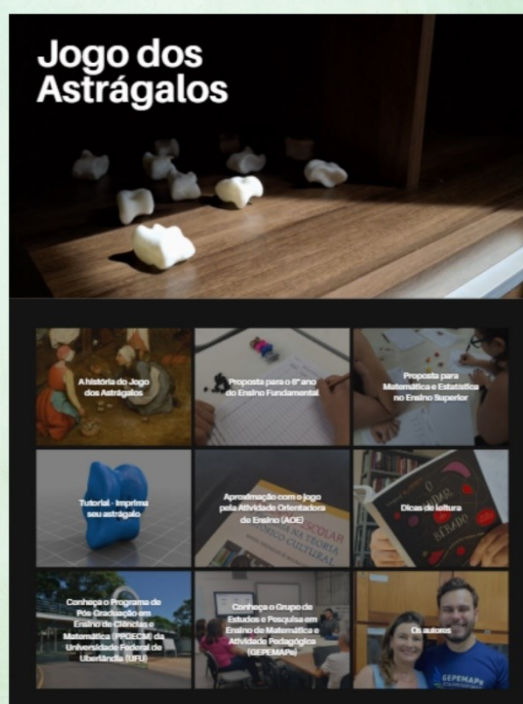
O QUE É UM ASTRÁGALO?

O astrágalo é um osso do tornozelo que conecta a perna ao pé, presente em muitos vertebrados. Ele ajuda a suportar o peso do corpo e permite movimentos como dobrar, esticar e girar o pé, sendo essencial para a estabilidade e mobilidade do tornozelo. Nos jogos antigos, especialmente na Grécia e Roma, o astrágalo era usado como uma forma primitiva de dado, aproveitando suas quatro faces planas e duas extremidades arredondadas para lançar e determinar resultados de azar ou habilidade.



POR QUE UM SITE?

Optamos pelo formato de site para o produto educacional por proporcionar acessibilidade, praticidade e dinamismo, possibilitando que o material seja atualizado continuamente, compartilhado e consultado por pessoas interessadas na temática! O site está organizado em seções.



A HISTÓRIA DO JOGO DOS ASTRÁGALOS



A seção “*A história do Jogo dos Astrágalos*” apresenta um mergulho no passado, mostrando como civilizações antigas usavam o astrágalo em jogos de azar e nas primeiras expressões de probabilidade. Essa origem histórica contextualiza o jogo como um recurso baseado na tradição lúdica e estatística, reforçando nossa proposta de conectar conteúdos pedagógicos aos fundamentos culturais e históricos.

PROPOSTAS DE ENSINO



Nas seções “*Propostas*”, você encontra duas versões do Jogo dos Astrágalos: a primeira, desenvolvida na dissertação, destinada ao 6º ano do Ensino Fundamental, e a segunda, reorganizada para alunos de graduação em Matemática e Estatística, apresentada durante uma semana de eventos na Universidade Federal de Uberlândia. Nossa proposta é que o site seja dinâmico e aberto à inclusão de novas versões e seções.

TUTORIAL DE IMPRESSÃO 3D



Na seção “*Tutorial - Imprima seu astrágalo*”, você encontra instruções para imprimir os modelos do astrágalo, com versões com ou sem numeração. É possível usar serviços de impressão 3D ou sua própria impressora 3D com o software gratuito UltiMaker Cura. Recomenda-se habilitar suportes e imprimir até quatro peças de uma vez. Tutoriais detalhados estão na playlist do canal Cultura Maker. Todos os arquivos seguem a licença Creative Commons CC BY-NC-SA 4.0.

ATIVIDADE ORIENTADORA DE ENSINO (AOE)



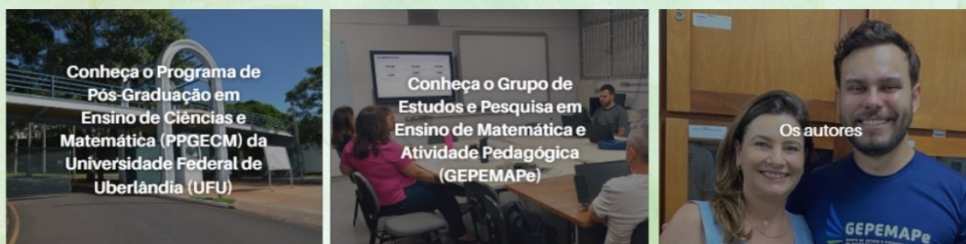
Na seção *"Aproximação com o jogo pela Atividade Orientadora de Ensino"*, nos aproximamos dessa abordagem que articula teoria e prática, permitindo que os alunos aprendam por meio da experimentação e reflexão. Jogos nessa perspectiva podem despertar a curiosidade e promover a construção coletiva do conhecimento, valorizando interação social, diálogo e conexão com contextos históricos e culturais, em consonância com a visão de Vygotsky.

DICAS DE LEITURA



Na seção “*Dicas de leitura*”, apresentamos algumas obras que foram fundamentais para a elaboração da proposta do Jogo dos Astrágalos, abrangendo desde discussões sobre acaso, risco e probabilidade em diferentes contextos históricos e científicos até estudos sobre a Atividade Orientadora de Ensino e o papel dos jogos na aprendizagem.

OUTROS LINKS IMPORTANTES



Por fim, você encontra links importantes e uma breve biografia dos autores.

Esperamos que este site funcione como um recurso de apoio às práticas pedagógicas, oferecendo material que possa inspirar e enriquecer o trabalho docente. Como produto educacional, desejamos que a proposta do Jogo dos Astrágalos possa ser reorganizada, adaptada e implementada por diferentes professores em suas próprias turmas, promovendo um ensino de probabilidade lógico, histórico e envolvente.



Este guia apresentou um panorama das seções e recursos disponíveis no produto educacional astragalos.com, criado para reunir, organizar e compartilhar conteúdos sobre o Jogo dos Astrágalos e seu potencial no ensino de probabilidade. Agora, convidamos você a explorar o site, navegar por cada seção, acessar os materiais e descobrir como esse acervo pode ajudar em sua prática pedagógica. Estamos em constante atualização, volte sempre!

Márcio Willian dos Reis Filho
Fabiana Fiorezi de Marco

OBRIGADO,
ABRAÇOS!

© 2025 Márcio Reis. Todos os direitos reservados. Este material educacional é disponibilizado sob a licença Creative Commons Atribuição-NãoComercial-Compartilhual 4.0 Internacional (CC BY-NC-SA 4.0). Você é livre para compartilhar e adaptar o conteúdo, desde que atribua o devido crédito ao autor, não o utilize para fins comerciais e distribua suas contribuições sob a mesma licença. Para mais informações, visite [Creative Commons] (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>).