

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA**  
**CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA**  
**PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA**

**SOBRE UM MÉTODO DE INTERPOLAÇÃO**  
**POLINOMIAL PARA O PROBLEMA DE**  
**LINEARIZAÇÃO EXATA**

Tese apresentada por Eurice de Souza à Universidade Federal de Uberlândia para obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica aprovada em 18/12/1998 pela banca examinadora:

Prof. Edilberto Pereira Teixeira (orientador).

Prof. Luiz Pereira Caloba, Dr. (Depto. de Eng. Elétrica - COPPE/UFRJ).

Prof<sup>ª</sup>. Vilma Alves de Oliveira, Dr<sup>a</sup>. (Depto. de Eng. Elétrica - USP, Campus de São Carlos).

Prof. Geraldo Márcio de A. Botelho, Dr., (Depto. de Matemática da UFU).

Prof. Haroldo Rodrigues de Azevedo, Dr., (Depto. de Engenharia Elétrica da UFU).

1160  
621.3  
S7294  
1001MEM

**SOBRE UM MÉTODO DE INTERPOLAÇÃO  
POLINOMIAL PARA O PROBLEMA DE  
LINEARIZAÇÃO EXATA**

**EURICE DE SOUZA**

**DIRBI/UFU**



1000187068

Tese apresentada por Eurice de Souza à Universidade Federal de Uberlândia  
como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica.

---

Professor Edilberto Pereira Teixeira  
(orientador)

---

Professor Darizon Alves de Andrade  
(coordenador)

Em memória de quem acreditava e me ensinou a acreditar: Mamãe.

A aposta de Pascal:

*Se Deus não existe, a pessoa não perde nada acreditando nele, enquanto que, se ele existe, a pessoa perde tudo não acreditando.* Les Pensées (Blaise Pascal)

## AGRADEÇO:

ao meu orientador, Professor Edilberto Pereira Teixeira, pela confiança e pelo incentivo.

ao coordenador da COPEL, Professor Darizon Andrade e ao ex-coordenador Professor Haroldo Azevedo pela atenção e desprendimento que sempre demonstraram visando a melhoria da pós-graduação.

aos funcionários da secretaria de pós-graduação da COPEL, Edite, Gonçalo e Joana pela presteza e cortesia que sempre demonstraram.

aos professores do Departamento de Matemática, em especial ao professores Geraldo Botelho e à professora Célia Zorzo pelos cursos excelentes que nos proporcionaram.

aos meus amigos de tanto tempo mas sempre presentes, professor João Bosco M. Alves e Vilma A. Oliveira, pelo incentivo, pela confiança e pelo exemplo de dedicação.

aos meus amigos da UnB, em especial ao professor Hilton Machado da Estatística e

aos professores

Humberto Abdala, Francisco Damasceno e Lélío Ribeiro do ENE, pela preocupação fraterna e pelo encorajamento.

Finalmente, agradeço à minha esposa Alcinéa e aos os meus filhos Tatiana Cecília, Ivson Tiago e Natália Rhaissa pela paciência e carinho mesmo diante dos fins de semana quase sem lazer.

de Souza, E, Sobre um Método de Interpolação Polinomial para o Problema de Linearização Exata, Uberlândia, COPEL-UFU, 1998.

Neste trabalho, apresenta-se um método de interpolação polinomial para a linearização exata de um sistema não linear por meio da realimentação dos estados. Utilizando a discretização das coordenadas de estados (restritas a um paralelepípedo) e produtos de Kronecker, as equações diferenciais parciais que descrevem as condições necessárias para a linearização exata do sistema são transformadas em um sistema de equações homogêneas. Os teoremas de existência são estabelecidos em termos da solução do sistema homogêneo mais uma condição de não trivialidade. Também é apresentado um algoritmo computacional simples e eficiente para implementar o método. Resultados computacionais mostram que, com um posicionamento adequado dos pólos na cópia difeomórfica do sistema, pode-se evitar que as trajetórias de estado escapem para muito longe do paralelepípedo de interpolação. Por meio do estudo de um caso, mostra-se como as trajetórias podem ser confinadas ao paralelepípedo mediante uma conveniente alocação dos pólos da malha fechada.

LINEARIZAÇÃO, LINEARIZAÇÃO POR REALIMENTAÇÃO, SISTEMAS NÃO LINEARES, POLINÔMIOS, ALGORITMOS DE INTERPOLAÇÃO, MÉTODOS POLINOMIAIS.

de Souza, E., On a Polynomial Interpolation Method for the Exact Linearization Problem, Uberlândia, Copel-UFU, 1998.

A polynomial interpolation method is presented for the exact linearization of a nonlinear system via state feedback. The discretization of the state coordinates (constrained to a paralelepiped) and Kronecker products are used to transform the partial differential equations describing the necessary conditions for the system exact linearization into a system of homogeneous linear equations. Existence theorems are established in terms of the solution of the homogeneous system plus a nontriviality condition. Also, a simple and efficient computational algorithm is presented for the effective implementation of the method. Computational results show that with an adequate pole allocation on the system diffeomorphic copy one can prevent the state trajectories from escaping too far away from the linearizing paralelepiped. Using a case study, it is shown how the system trajectories can be constrained to the paralelepiped by a convenient allocation of the closed-loop poles.

LINEARIZATION, FEEDBACK LINEARIZATION, NONLINEAR SYSTEMS, POLYNOMIALS, INTERPOLATION ALGORITHMS, POLYNOMIAL METHODS.

# SUMÁRIO

|          |                                                                                                  |           |
|----------|--------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>INTRODUÇÃO</b>                                                                                | <b>1</b>  |
| 1.1      | CONSIDERAÇÕES INICIAIS . . . . .                                                                 | 1         |
| 1.2      | DESCRIÇÃO DOS MÉTODOS DE LINEARIZAÇÃO . . . . .                                                  | 2         |
| 1.2.1    | Método Artesanal ( <i>scheduling</i> ) . . . . .                                                 | 3         |
| 1.2.2    | linearização Baseada na Realimentação dos Estados . . . . .                                      | 3         |
| 1.2.3    | Método de Pseudolinearização . . . . .                                                           | 4         |
| 1.2.4    | Método de linearização Tangencial . . . . .                                                      | 5         |
| 1.3      | APLICAÇÕES PRÁTICAS DO MÉTODO . . . . .                                                          | 5         |
| 1.4      | CONTRIBUIÇÃO APRESENTADA NESTE TRABALHO . . . . .                                                | 6         |
| <b>2</b> | <b>FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE LINEARIZAÇÃO VIA<br/>REALIMENTAÇÃO DE ESTADOS</b>                   | <b>10</b> |
| 2.1      | EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES PARA O CASO ESCALAR ( $p = 1$ ) . . . . .                                 | 12        |
| 2.2      | SOLUÇÕES POLINOMIAIS PARA O PROBLEMA DE LINEARI-<br>ZAÇÃO EXATA . . . . .                        | 15        |
| <b>3</b> | <b>SOLUÇÃO GENÉRICA PARA O PROBLEMA DE LINEARIZAÇÃO<br/>POR MEIO DE REALIMENTAÇÃO DE ESTADOS</b> | <b>19</b> |
| 3.1      | EXEMPLOS . . . . .                                                                               | 23        |
| 3.1.1    | Exemplo 1 . . . . .                                                                              | 23        |
| 3.1.2    | Exemplo 2 . . . . .                                                                              | 26        |
| <b>4</b> | <b>VETORIZAÇÃO DO OPERADOR DERIVADA PARCIAL</b>                                                  | <b>30</b> |
| 4.1      | AVALIAÇÃO DAS DERIVADAS PARCIAIS COM AS DISCREPÂNCIAS<br>ASSOCIADAS . . . . .                    | 33        |
| 4.1.1    | Discrepâncias entre a Derivada Efetiva e a Aproximada . . . . .                                  | 34        |
| 4.2      | REPRESENTAÇÃO MATRICIAL PARA A APROXIMAÇÃO DA<br>DERIVADA . . . . .                              | 37        |

|          |                                                              |           |
|----------|--------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>5</b> | <b>VETORIZAÇÃO DAS COORDENADAS DO PARALELEPÍPEDO</b>         | <b>42</b> |
| 5.0.1    | Avaliação Numérica das Derivadas Direcionais . . . . .       | 44        |
| 5.0.2    | aproximação Discreta para as Derivadas Direcionais . . . . . | 48        |
| 5.1      | EQUAÇÕES VETORIZADAS PARA O ERRO DE LINEARIZAÇÃO . . . . .   | 49        |
| <b>6</b> | <b>RESOLVENDO AS EQUAÇÕES DO ERRO</b>                        | <b>52</b> |
| 6.1      | SOLUÇÃO COMPUTACIONAL PARA $Mz^{(1)} \approx 0$ . . . . .    | 53        |
| 6.1.1    | Exemplo . . . . .                                            | 55        |
| 6.2      | EXISTÊNCIA DE SOLUÇÃO EXATA . . . . .                        | 59        |
| 6.3      | ESTABILIZAÇÃO DO SISTEMA . . . . .                           | 60        |
| <b>7</b> | <b>ALGORITMOS PARA INTERPOLAÇÃO TABULAR MULTIDI-</b>         |           |
|          | <b>MENSIONAL</b>                                             | <b>62</b> |
| 7.1      | FÓRMULA DE INTERPOLAÇÃO $n$ -DIMENSIONAL . . . . .           | 62        |
| 7.2      | PROBLEMA DE INTERPOLAÇÃO DIRETA . . . . .                    | 64        |
| 7.2.1    | Definindo a Interpolação Direta . . . . .                    | 64        |
| 7.2.2    | Método de Reduções Sucessivas . . . . .                      | 64        |
| 7.3      | PROBLEMA DE INTERPOLAÇÃO INVERSA . . . . .                   | 72        |
| <b>8</b> | <b>EXEMPLO</b>                                               | <b>75</b> |
| <b>9</b> | <b>CONCLUSÕES</b>                                            | <b>78</b> |

## LISTA DE FIGURAS

|     |                                                                                                                            |    |
|-----|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 3.1 | Posições $x$ para três possíveis transformações para um sistema de 1. <sup>a</sup> ordem                                   | 25 |
| 3.2 | Excitações $u$ correspondentes às primeiras coordenadas da Fig. 3.1 . . . . .                                              | 26 |
| 3.3 | Posições $x_1$ para $\psi(\delta) = \frac{1}{\delta} \sinh(\delta x_1)$ para um sistema de 2. <sup>a</sup> ordem . . . . . | 27 |
| 3.4 | Velocidades ( $x_2$ ) correspondentes às primeiras coordenadas $\psi(\delta)$ . . . . .                                    | 30 |
| 3.5 | Controles ( $u$ ) correspondentes às primeiras coordenadas $\psi(\delta)$ . . . . .                                        | 31 |
| 5.1 | Partição Celular de um paralelepípedo típico . . . . .                                                                     | 43 |
| 5.2 | Esquema de numeração para os vértices hipercúbicos . . . . .                                                               | 45 |
| 8.1 | Amostragem dos campos vetoriais $f$ e $g$ de um sistema não linear típico . .                                              | 76 |
| 8.2 | Possível transformação $z = \{z^{(1)}, z^{(2)}\}$ e funções $\alpha$ e $\beta$ associadas . . . . .                        | 76 |
| 8.3 | Trajetórias de estado para $\Lambda = \{-0.8 + j0.4, -0.8 - j0.4\}$ . . . . .                                              | 77 |
| 8.4 | Trajetórias de estado para $\Lambda = \{-1.0 + j0.5, -1.0 - j0.5\}$ . . . . .                                              | 78 |
| 8.5 | Trajetórias de estado para $\Lambda = \{-1.2 + j0.6, -1.2 - j0.6\}$ . . . . .                                              | 79 |

LISTA DE TABELAS

4.1 Esquema de interpolação par . . . . . 38

4.2 Esquema de interpolação ímpar . . . . . 40

7.1 Valores tabulares para uma função de duas variáveis . . . . . 66

7.2 Restringindo valores tabulares ao sub-paralelepípedo de interpolação . . . . 67

7.3 Destacando os pontos interpolados paralelamente ao eixo  $y$  com a eliminação da variável  $x$  . . . . . 70

7.4 Valores tabulares para problema monovariável resultante . . . . . 71

# SOBRE UM MÉTODO DE INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL PARA O PROBLEMA DE LINEARIZAÇÃO EXATA

## CAPÍTULO I

### INTRODUÇÃO

Como em muitos campos da matemática aplicada, na área de controle, depara-se com o problema das não linearidades. As não linearidades deixam perplexos tanto os técnicos como os pesquisadores pois não se dispõe de métodos analíticos gerais para resolver sistemas de equações algébricas não lineares. Equações diferenciais não lineares, totais ou parciais, muito menos. Mesmo tratando-se dos métodos numéricos, não há um método universal para resolver sistemas não lineares algébricos ou diferenciais.

#### 1.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Os métodos de linearização exata têm sido bem estudados na literatura, constituindo um tópico coberto de diversos ângulos por um bom número de livros, dentre eles (NIJMEIER e SCHAFT, 1990), (MARINO e TOMEI, 1995), (KRSTIĆ et al., 1995), (ISIDORI, 1989), (SLOTINE e LI, 1991). Não há tantas ferramentas para os sistemas não lineares. Assim, o que tem motivado a introdução dos métodos de linearização exata é a possibilidade de tornar disponíveis as diversas ferramentas, há muito disponíveis para a análise e síntese de sistemas lineares. Conceitos de fundamental importância tais como controlabilidade, observabilidade, detectabilidade e estabilizabilidade podem ser aplicados para o sistema não linear uma vez se tenha logrado construir uma cópia difeomórfica do mesmo.

O conceito do difeomorfismo é de fundamental importância para se compreender o processo de linearização exata. Para um conjunto de coordenadas  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ,

diz-se que uma transformação de coordenadas  $z = \Theta(x) = \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$  é uma transformação difeomórfica se cada uma de suas funções coordenadas for continuamente diferenciável com respeito às variáveis  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  e se, além disso, a transformação for bijetora. Em poucas palavras, trata-se de uma transformação de coordenadas bijetora e continuamente diferenciável.

Infelizmente, apenas uma classe restrita de sistemas não lineares se presta à linearização pela utilização de uma mera mudança de coordenadas. Mas, em um sistema de controle, tem-se a liberdade de fazer a realimentação das saídas ou mesmo dos estados sempre que esses sejam disponíveis para medida. Com esse artifício, um elenco maior de sistemas se torna linearizável.

## 1.2 DESCRIÇÃO DOS MÉTODOS DE LINEARIZAÇÃO

Inicialmente, são apresentadas as tendências da pesquisa relativa ao problema de linearização exata. Também, apresenta-se uma breve visão histórica do problema. Inicialmente, o problema surgiu de forma quase natural em certos sistemas mecânicos onde a natureza geométrica torna atrativa a idéia de uma mudança de coordenadas de forma que o sistema possa ser descrito de uma forma mais simples e natural. Por exemplo, para sistemas robóticos, o método já vem sendo utilizado há um bom tempo, provendo um controle suave e satisfatório das trajetórias do sistema.

Não se encontrou na literatura, até a presente data, uma classificação abrangente para o problema de linearização exata. Tampouco pretende-se aqui fazê-lo. A seguinte classificação tem apenas a finalidade de facilitar o levantamento bibliográfico:

- Método Artesanal (*scheduling*)
- linearização Baseada na Realimentação dos Estados (*feedback linearization*)
  - Método de linearização Total
  - Método de linearização Parcial
  - Método de linearização Baseado em Interpolação Polinomial
- Pseudolinearização
- linearização Tangencial (do modelo das derivadas)

### 1.2.1 Método Artesanal (*scheduling*)

Trata-se de uma maneira simples do ponto de vista analítico e complicada do ponto de vista de implementação. O objetivo básico é estender as técnicas de sistemas de controle linear para os sistemas não lineares. Nesse método, simplesmente calcula-se o modelo linear com as respectivas leis de realimentação para vários pontos de operação do sistema. Assim, programa-se, para cada região de operação no espaço, qual lei de realimentação não linear que melhor se adapta.

### 1.2.2 linearização Baseada na Realimentação dos Estados

Esta denominação é utilizada para designar todos os métodos de linearização que utilizam as variáveis de estado tanto direta como indiretamente. Os métodos são os seguintes:

#### 1.2.2.1 Método de linearização Total

As primeiras tentativas de linearizar os sistemas dinâmicos não lineares talvez ignorassem as dificuldades tanto de natureza matemática como técnicas quanto à possibilidade de se linearizar um sistema não linear arbitrário. Assim, nas primeiras tentativas, visava-se calcular uma lei de realimentação que fosse efetiva para uma ampla região de operação do sistema. As primeiras tentativas de se estender a idéia da linearização para sistemas de natureza mais abstratas datam do início dos anos 80, com os trabalhos de (YAKUBCZYK e RESPONDEK, 1980) e (HUNT et al., 1983) entre outros. Como já se mencionou, são pouquíssimos os sistemas elegíveis a uma linearização total. Assim, foi necessário relaxar certas condições a fim de tornar um conjunto maior de sistemas não lineares elegíveis à linearização exata.

#### 1.2.2.2 Método de linearização Parcial

Como será mencionado na continuação do texto, quando o número de derivadas da saída que não dependem da entrada é menor que o número de estados, a tentativa de linearizar o sistema usando como novas coordenadas as derivadas temporais da variável de saída, leva a dois subsistemas: um subsistema linearizado e outro subsistema residual, conhecido pelo nome de *dinâmica nula*. O método de linearização parcial consiste em introduzir um compensador adicional para estabilizar a dinâmica nula. A primeira tentativa partiu de

Isidori e Byrnes (ISIDORI e BYRNES, 1990) que estenderam as técnicas já conhecidas para o caso de sistemas lineares (FRANCIS, 1977), (FRANCIS e WONHAM, 1975) e (WONHAM, 1975) para estabilizar a dinâmica nula. Infelizmente, muitos desses compensadores levam a um sinal de atuação instável. Para lidar com esse problema, em (DEVASIA et al., 1996), os autores introduziram uma técnica em que se negociava o sinal de atuação causal mas instável por um sinal de atuação estável mas não causal. Bem recentemente, alguns dos autores, (DEVASIA e PADEN, 1998), estenderam o método para o âmbito dos sistemas não lineares variantes no tempo.

### 1.2.2.3 Método de linearização Baseado em Interpolação Polinomial

Neste trabalho, apresenta-se um método de linearização baseado em interpolação polinomial. Supondo-se as coordenadas do sistema restritas a um paralelepípedo, mediante a amostragem dos campos vetoriais que se apresentam na equação dinâmica do sistema, utilizando-se produtos de Kronecker juntamente com a vetorização das coordenadas, transforma-se o problema de resolver um conjunto de tediosas equações diferenciais a derivadas parciais em um sistema de equações homogêneas. Os resultados de simulação comprovam a eficiência do método (deSOUZA e TEIXEIRA, 1999b) e (deSOUZA e TEIXEIRA, 1999a). As simulações foram feitas para sistemas de uma só entrada mas o método é facilmente extensível para sistemas de múltiplas entradas e múltiplas saídas.

### 1.2.3 Método de Pseudolinearização

Devido à impossibilidade de se calcular uma transformação que seja efetiva em uma região ampla de atuação do sistema, pode-se encontrar uma transformação que linearize o sistema em uma determinada variedade (ou região) do espaço de estados (REBOULET e CHAMPETIER, 1984), por exemplo. Esse método denomina-se método de pseudo-linearização. Por exemplo, (TAN e RUGH, 1998) fazem uso desse método para investigar um novo tipo de aproximação para a equação de Hamilton-Jacobi. Para certos sistemas, parece que essa abordagem apresenta resultados satisfatórios. Porém, como acontece com uma boa parte dos métodos de síntese de sistemas de controle, há necessidade de o método ser testado mais amplamente.

### 1.2.4 Método de linearização Tangencial

Uma nova abordagem apresentada por (REIF et al., 1997) estende o método de linearização para uma classe mais ampla de sistemas. Basicamente, são apresentados dois teoremas. No primeiro, estabelecem-se condições para a queda exponencial das trajetórias  $x$  do sistema. Mostra-se que se o vetor tangente,  $\dot{x}$ , decai exponencialmente, também assim decairá o vetor de estado. No segundo teorema, são estabelecidas as condições sobre a lei de controle e mudança de coordenadas para que o vetor tangente seja transformado em um sistema linear variante no tempo. Técnicas padrão para a estabilização do vetor tangente são utilizadas. Outros trabalhos utilizando técnicas semelhantes, podem ser encontrados nas publicações recentes (WEINZIERL, 1995) e (REIF et al., 1998).

## 1.3 APLICAÇÕES PRÁTICAS DO MÉTODO

O método de linearização exata se apresenta como uma técnica natural no caso de sistemas dinâmicos descritos de forma geométrica, tais como robôs e manipuladores mecânicos em geral. Muitos dos artigos acima citados estão repletos de aplicações para o método de linearização exata. Mencionamos aqui dois artigos publicados bem recentemente. No primeiro, (CHIASSON, 1998), o autor considera o problema interessante do ponto de vista da engenharia elétrica do controle de um motor elétrico de indução. Basicamente, mostrou o autor que, desde que o fluxo do rotor seja não nulo, a partir do modelo de quadratura direta do motor de indução, pode-se chegar pelo método de linearização exata a uma única transformação de realimentação dinâmica linearizante.

No segundo exemplo, (SINGH e BOSSART, 1993), considera-se o problema do controle de atitude de uma estação espacial utilizando a técnica CMG, giroscópios de momentos de controle. Usando o método de linearização via realimentação, chegaram os autores a três sistemas dinâmicos simples desacoplados e controláveis e que descrevem as dinâmicas acopladas de rolamento, mergulho e guinada. Resultados apresentados parecem bem satisfatórios, chegando ainda a uma descrição dinâmica precisa para o sistema.

## 1.4 CONTRIBUIÇÃO APRESENTADA NESTE TRABALHO

Para fixar de maneira mais nítida as contribuições apresentadas nesse trabalho, será apresentada uma análise mais detalhada dos métodos de linearização visto de forma sucinta

no tópico 1.2.2

O método tem sido bem estudado na literatura (Isidori, Slotine) tanto para sistemas escalares quanto para sistemas de múltiplas entradas e múltiplas saídas. Para facilidade de estudo, o método costuma ser dividido em dois métodos, a saber

- Método de linearização baseado na dinâmica entrada-saída;
- Método de linearização baseado na realimentação de estados.

#### Método de linearização baseado na dinâmica entrada-saída

Aqui, será considerado principalmente o problema de linearização entrada-saída de um sistema dotado de uma só entrada e de uma só saída (SISO). Resultados similares existem para o caso de sistemas de múltiplas entradas e múltiplas saídas. Para esses, deve-se levar em conta o conceito de primordial importância do grau relativo. Para um sistema de uma só entrada, o grau relativo é igual ao número de derivadas da saída do sistema que não dependem da entrada, ou seja, podem ser explicitadas exclusivamente em termos dos estados do sistema. Para que um sistema seja completamente linearizável via linearização entrada saída, é necessário que o grau relativo do sistema,  $r$ , seja igual ao número de estados,  $n$ . Sempre que  $r < n$ , resultam dois subsistemas, um subsistema linearizado e um subsistema residual, conhecido na literatura como dinâmica nula.

A dinâmica nula do sistema tem propriedades similares às daquelas de um sistema descrito por meio de uma função de transferência. A dinâmica nula será estável quando a aproximação linear associada ao sistema residual oriundo da linearização entrada-saída tiver todos os pólos localizados no semi-plano esquerdo aberto. Pode-se demonstrar que os pólos da aproximação linear associada à dinâmica nula são iguais aos zeros associados à aproximação linear da planta. Infelizmente, muitas plantas encontradas na prática se comportam como sistemas de fase não mínima, possuindo uma dinâmica nula instável. Vários métodos têm sido propostos na literatura com o objetivo de estabilizar a dinâmica nula. Por exemplo, em um artigo recente, (DEVASIA et al., 1996) propuseram um procedimento em que o problema de rastreamento assintótico de um sistema dotado de dinâmica nula instável é solucionado mediante a adição de um sinal de atuação não causal. Esse sinal de pré-atuação é produzido por meio de uma iteração baseada no método de Picard. Isto torna possível o rastreamento de um sinal desejado sem que para isso a entrada tenha que se tornar instável, o que ocorre com o método de Isidori-Byrnes (ISIDORI e

BYRNES, 1990). O método de Isidori-Byrnes é uma extensão para o âmbito dos sistemas não lineares do problema do rastreamento assintótico formulado para o caso de sistemas lineares por diversos autores, dentre eles (FRANCIS, 1977), (FRANCIS e WONHAM, 1975) e (WONHAM, 1975). Em um artigo bem recente, (DEVASIA e PADEN, 1998), o método é estendido para uma classe ainda mais ampla de sistemas não lineares, os sistemas variantes no tempo.

Quando a dinâmica nula do sistema for estável, apenas a realimentação de saída será suficiente para estabilizar o sistema em torno do ponto de equilíbrio e para o rastreamento assintótico da entrada. Deve-se salientar que, mesmo quando a dinâmica nula do sistema for estável, isso não garantirá a estabilidade global do sistema composto, subsistema linearizado + dinâmica nula. A estabilidade é garantida apenas em torno do ponto de equilíbrio.

#### Método de linearização baseado na realimentação de estados

O método de linearização via realimentação de estados consiste em se eleger como nova saída do sistema uma função suave dos estados tal que o sistema assim se transforme em sistema totalmente linearizável. Isto é, que com a nova saída, o grau relativo do sistema modificado seja igual ao número de estados. Também, para essa abordagem podem ser apontados alguns obstáculos. São esses os principais:

- Todos os estados devem ser acessíveis para medição.
- Certas condições severas precisam ser satisfeitas para que o sistema possua solução exata.
- Mesmo quando o problema é consistente, precisa-se resolver um sistema de equações a derivadas parciais de difícil solução.

Para solucionar o primeiro problema, costuma-se recorrer ao projeto de observadores não lineares de estados para produzir uma estimativa assintótica dos estados do sistema. Mesmo com a utilização desse remédio, um problema adicional surge: devido à inexistência de um teorema semelhante ao teorema da separação, válido apenas para o âmbito dos sistemas lineares, torna-se difícil assegurar a estabilidade do sistema aumentado (planta + observador). O segundo problema ocorre devido ao fato de que, (com

excessão dos sistemas de primeira e de segunda ordem, onde a condição única para a linearização total consiste na controlabilidade do sistema em torno do ponto de equilíbrio) para um sistema arbitrário, dificilmente são satisfeitas as condições necessárias para a linearização total do sistema .

O terceiro problema para a linearização via realimentação de estados é que, mesmo quando as condições necessárias para a existência de solução são satisfeitas, um sistema de equações a derivadas parciais de difícil solução necessita ser resolvido.

Neste trabalho, consideram-se os dois últimos problemas que ocorrem na linearização via realimentação de estados. Considera-se o caso especial, mas freqüente em Engenharia, em que a planta pode ser descrita por meio de um sistema de equações dinâmicas na forma afim, isto é, onde a coordenada de controle aparece como um fator linear do lado direito:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u$$

Utilizando a discretização e vetorização das coordenadas de estado, que neste trabalho ficam restritas ao interior de um paralelepípedo, um método baseado nos quadrados mínimos é introduzido para a solução do problema de linearização exata via realimentação de estados. Para as coordenadas vetorizadas, utilizam-se produtos de Kronecker para produzir uma aproximação adequada para as derivadas direcionais em relação aos campos vetoriais  $f(x)$  e  $g(x)$ . Assim, o sistema de equações a derivadas parciais de difícil solução é transformado em um sistema de equações algébricas lineares, em geral inconsistente.

Quando o sistema de equações algébricas é consistente, resulta para o sistema uma solução exata. No caso de um sistema involutivo, desde que o erro na estimativa das aproximações para as derivadas direcionais seja desprezível, a solução situar-se-á suficientemente próxima à solução exata. No caso de um sistema quase difeomórfico, obtém-se uma solução baseada nos quadrados mínimos.

## CAPÍTULO II

### FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE LINEARIZAÇÃO VIA REALIMENTAÇÃO DE ESTADOS

Considere-se o sistema dinâmico descrito pela seguinte equação diferencial,

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^n g^{(i)}(x)u_i(x) \quad (2.1)$$

onde  $x$  é o vetor de estados  $n$ -dimensional,  $f(x)$  e  $g^{(i)}(x)$ ,  $i = 1, 2, \dots, p$ , são campos vetoriais definidos sobre os vetores de estados e  $u_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, p$  são as entradas do sistema. Com respeito aos campos vetoriais  $f(x)$  e  $g^{(i)}(x)$  será suposto que as funções coordenadas sejam analíticas na região  $X$ , campo de definição dessas funções, que se admite como sendo uma região compacta.

Também, considere-se o problema de se encontrar uma transformação difeomórfica  $z = \Theta(x)$  na região compacta  $X$ , (aqui, considerada um paralelepípedo), juntamente com o controle apropriado

$$u = \alpha(x) + \sum_{i=1}^p \beta^i(x)v_k \quad (2.2)$$

onde  $\alpha(x)$  e  $\beta^i(x)$ , ( $i = 1, 2, \dots, q$ ,  $q \leq p$ ) são os vetores linearizantes de dimensões  $p \times 1$  e  $v$  é o novo vetor de entradas do sistema  $^1 q \times 1$ , de sorte que, nas novas coordenadas, o sistema pode ser descrito por meio da equação diferencial linear

$$\dot{z} = Az + Bv \quad (2.3)$$

---

<sup>1</sup> Em geral, o número de colunas de  $\beta$  pode ser menor que  $p$ . De fato, sempre que o número de entradas é maior que o número de saídas, pode ser interessante negociar o número de entradas por um erro de linearização menor.

onde  $A$  e  $B$  são matrizes de respectivas dimensões  $n \times n$  e  $n \times q$  e, para o par  $(A, B)$  impõe-se a condição de controlabilidade.

Com respeito à existência de solução para o problema de linearização exata via realimentação de estados, neste texto, apenas o caso de sistemas de uma só entrada será considerado extensivamente. Contudo, conforme claramente indicado pelo contexto, algumas equações valem igualmente para o caso multivariável. Seja

$$z := \Theta(x) = \begin{bmatrix} z^{(1)} & z^{(2)} & \dots & z^{(2)} \end{bmatrix}^T \quad (2.4)$$

o vetor associado ao conjunto das novas coordenadas do sistema linearizado.

Calculando a derivada em relação ao tempo para o novo vetor de estado,  $z$ , obtém-se a seguinte expressão:

$$\dot{z} = \frac{\partial \Theta}{\partial x} \times (f(x) + g(x)\alpha(x) + g(x)\beta(x) v). \quad (2.5)$$

Comparando com (2.3), obtêm-se as condições:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial x} \times (f(x) + g(x)\alpha(x)) = Az. \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial x} \times (g(x)\beta(x)) = B. \quad (2.7)$$

Tanto no caso de sistemas de uma só entrada quanto no caso de sistemas dotados de múltiplas entradas, basicamente, o sistema a derivadas parciais acima necessita ser resolvido a fim de prover uma mudança de coordenadas juntamente com a ação de controle representada pelos vetores  $\alpha(x)$  e  $\beta^{(i)}(x)$ , ( $i = 1, 2, \dots, q$ ,  $q \leq p$ ).

## 2.1 EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES PARA O CASO ESCALAR ( $p = 1$ )

O problema da existência de soluções para o problema de linearização exata para sistemas de uma só entrada é um assunto bem estudado na literatura (ISIDORI, 1989), (SLOTINE

e LI, 1991). Os teoremas de existência para o problema de linearização exata costumam ser definidos em termos do teorema de Frobenius que garante a existência de solução para as equações a derivadas parciais a partir da involutividade de uma certa distribuição que se constrói com o auxílio da operação produtos de Lie (colchetes de Lie) que será definida mais à frente.

Neste texto, será apresentada uma breve revisão dos principais resultados apresentados em (ISIDORI, 1989) visando, principalmente, estabelecer a correlação entre o caso geral lá considerado e a solução polinomial, objeto do estudo que ora se desenvolve. Assim, serão estabelecidas as bases para uma adequada interpretação dos resultados numéricos.

Primeiramente, apresentamos a definição da derivada de uma função escalar ao longo de um campo vetorial.

**Definição 1** — *(Derivada de uma função escalar ao longo de um campo vetorial)*

Seja  $f(x)$  um campo vetorial e  $\phi(x)$  uma função escalar. Define-se a derivada de  $\phi(x)$  na direção  $f$  da forma:

$$L_f \phi := \frac{\partial \phi}{\partial x} \times f. \quad (2.8)$$

Também, define-se a derivada da função escalar ao longo do campo  $f$ , repetida  $k$ -vezes da seguinte forma:

$$L_f^k \phi := L_f L_f^{k-1} \phi, \quad k > 1, \quad L_f^0 \phi := \phi. \quad (2.9)$$

Visto que a forma canônica de Brunowsky pode sempre ser lograda mediante uma mudança linear de coordenadas combinada com uma realimentação de estados, o procedimento padrão utilizado consiste, primeiro, em supor as matrizes  $A$  e  $B$  em tal forma canônica, a menos densa possível. Assim, utilizando a definição anterior, o par de equações a derivadas parciais em (2.6, 2.7) pode ser escrito:

$$L_g \phi = L_g L_f \phi = \dots = L_g L_f^{n-2} \phi = 0, \quad (2.10)$$

$$L_g L_f^{n-1} \phi \neq 0, \quad (2.11)$$

A condição (2.11) que envolve uma desigualdade recebe o nome de *condição de não trivialidade* e por esse nome será conhecida ao longo do texto. Afinal, anular-se a expressão à esquerda em (2.11) significa que o sistema fica à deriva, sem controle. Quanto à consistência do primeiro conjunto de equações, esta depende da involutividade de uma certa distribuição. Para distinguir as condições (2.10), será, neste texto utilizado o nome *condições de consistência*. Diz-se que uma distribuição é involutiva se a dimensão da mesma for invariante com respeito aos produtos de Lie de suas colunas. Quer dizer, o produto de Lie de quaisquer pares de colunas da distribuição são elementos da mesma distribuição, podendo portanto ser escritas como combinação linear das colunas da distribuição. Isto oferece a base para a aplicação do teorema de consistência de Frobenius que se baseia na involutividade da distribuição.

A propósito, define-se a seguir o produto de Lie entre dois campos vetoriais:

**Definição 2** (*Produto de Lie entre dois campos vetoriais*) Sejam  $f(x)$  e  $g(x)$  dois campos vetoriais. Define-se o produto de Lie de  $g$  com  $f$ , também conhecido como colchete de Lie, como

$$ad_f g := [f, g] = L_f g - L_g f = \frac{\partial g}{\partial x} f - \frac{\partial f}{\partial x} g. \quad (2.12)$$

Em particular, define o produto de Lie repetido ( $k$ -vezes) em um campo vetorial  $g$  com um campo vetorial  $f$ , da seguinte forma:

$$ad_f^k g := [f, ad_f^{k-1} g](x), \quad k \geq 1, \quad ad_f^0 g := g. \quad (2.13)$$

A existência de solução para o problema de linearização exata (local) para um sistema de

uma só entrada é expresso por meio do seguinte:

**Lema 1 :** (Isidori, página 164)

Existe uma solução dotada de valores reais  $\phi(x)$  definida em uma vizinhança  $U$  de  $x^0$ , que resolve as equações a derivadas parciais descritas em (2.10) e satisfazendo as condições de não trivialidade 2.11), se e somente se

1. A matriz  $\begin{bmatrix} g(x^0) & \text{ad}_f g(x^0) & \dots & \text{ad}_f^{n-1} g(x^0) \end{bmatrix}$  possui posto igual a  $n$ ,
2. A distribuição  $\begin{bmatrix} g & \text{ad}_f g & \dots & \text{ad}_f^{n-2} g \end{bmatrix}$  é involutiva em uma vizinhança de  $x^0$ .

Primeiramente, serão definidas funções polinomiais com seus respectivos graus e soluções polinomiais para o problema de linearização exata.

## 2.2 SOLUÇÕES POLINOMIAIS PARA O PROBLEMA DE LINEARIZAÇÃO EXATA

Agora, o caso especial será considerado em que (2.10, 2.11) admitem uma solução polinomial. Considerando que as funções coordenadas dos campos vetoriais  $f$  e  $g$  sejam analíticas com respeito ao vetor de estados e que o sistema possua uma solução exata. Logo sempre haverá a possibilidade de se selecionar uma pseudo-solução polinomial provendo uma aproximação satisfatória para o problema.

Isto decorre do fato de que as novas coordenadas serão funções analíticas dos estados sempre que as funções coordenadas de  $f$  e  $g$  o forem.

Primeiramente, apresenta-se a definição de função polinomial multivariável.

**Definição 3** Diz-se que  $\phi(x)$  é uma função polinomial de grau  $a = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  se e somente se  $\phi(x)$  pode ser escrita em uma das formas

$$\begin{aligned} & \phi(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) \\ &= \sum_{k=0}^{a_i} \gamma_{i,k}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) x_i^k \end{aligned} \quad (2.14)$$

para  $i = 1, 2, \dots, n$ . Quer dizer,  $f(x)$  é um polinômio de grau  $a_i$  com respeito a cada variável  $x_i$ .

Para fixar idéias, será apresentado a seguir um exemplo de função polinomial genérica de grau  $a = \{2, 3\}$

$$\begin{aligned}
 \phi(x_1, x_2) &= a_{00} + a_{10}x_2 + a_{20}x_2^2 + a_{30}x_2^3 \\
 &+ (a_{01} + a_{11}x_2 + a_{21}x_2^2 + a_{31}x_2^3)x_1 + (a_{02} + a_{12}x_2 + a_{22}x_2^2 + a_{32}x_2^3)x_1^2 \\
 &= a_{00} + a_{01}x_1 + a_{02}x_1^2 + (a_{10} + a_{11}x_1 + a_{12}x_1^2)x_2 \\
 &+ (a_{20} + a_{21}x_1 + a_{22}x_1^2)x_2^2 + (a_{30} + a_{31}x_1 + a_{32}x_1^2)x_2^3.
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

Agora, pode-se introduzir a definição de solução polinomial exata:

**Definição 4** *O sistema de equações a derivadas parciais descrito por (2.6, 2.7) admite uma solução polinomial exata se para algum  $a = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ , existe pelo menos uma função  $\phi$  da forma (2.14) que satisfaz (2.10, 2.11)*

Antes de se atentar para a busca de uma solução numérica para o problema de linearização exata, uma observação importante é quanto à não unicidade da solução (quando a mesma existe).

No que se segue, será buscada uma solução polinomial da forma que será definida. Também, todas as equações restritivas para o problema serão estabelecidas tão somente em termos das derivadas direcionais ao longo das direções  $f$  e  $g$ . Por isso, será difícil estabelecer-se uma conexão entre os resultados que se apresentarão e aqueles associados à operação colchete de Lie. Conseqüentemente, as condições de consistência (ou quase-consistência) deverão ser expressas diretamente em termos do análogo polinomial das equações (2.10, 2.11).

Outro assunto que merece ser considerado quando está-se buscando uma solução numérica para o problema diz respeito à não unicidade da solução. Este assunto tem sido considerado na literatura. Contudo, nos exemplos mencionados por ((ISIDORI, 1989), (SLOTINE e LI, 1991)) parece que a preocupação maior tem se concentrado em tirar proveito da não unicidade com o intuito de buscar a solução mais simples.

No capítulo seguinte, as condições do Lema acima serão utilizadas para checar a consistência de qualquer prospectiva solução para o problema.

## CAPÍTULO III

# SOLUÇÃO GENÉRICA PARA O PROBLEMA DE LINEARIZAÇÃO POR MEIO DE REALIMENTAÇÃO DE ESTADOS

Neste capítulo, será estudada a solução genérica para o problema de linearização via realimentação de estados para sistemas de uma só entrada. Sabe-se que dada uma solução  $\phi$ , tal que adotando-se  $\phi$  como a nova saída do sistema, seja o grau relativo do sistema igual a  $n$ , pode-se construir de imediato o novo sistema de coordenadas correspondente ao sistema linearizado,

$$\{\phi \quad L_f \phi \quad \dots \quad L_f^{n-1} \phi\} \quad (3.1)$$

Por isso, é bem oportuno que chamemos a função primeira coordenada,  $\phi$ , de solução particular do problema. Já é sabido de há muito que a solução para o problema de linearização exata via realimentação de estados não é única.

Neste texto, porém, pretende-se ir mais além: caracterizar construtivamente tal conjunto solução e indicar algumas linhas mestras de como se pode tirar proveito da não unicidade com o objetivo de melhorar o desempenho dinâmico do sistema. Alguns exemplos são apresentados para mostrar a influência da escolha da primeira coordenada,  $\phi$ , no desempenho dinâmico do sistema. Primeiramente, será apresentado o seguinte lema:

**Lema 2** *O gradiente de qualquer solução particular (primeira coordenada)  $\psi(x)$  para a linearização do sistema não linear (2.1) em uma região aberta  $U$  deve forçosamente satisfazer a seguinte relação:*

$$\frac{\partial \psi(x)}{\partial x} = \lambda(x) \frac{\partial \phi(x)}{\partial x},$$

onde  $\phi(x)$  é uma solução particular e  $\lambda(x)$  é uma função escalar suave. Também, para

que haja consistência, deve existir uma função escalar suave  $\theta(x)$ , tal que

$$\lambda = \frac{\partial \theta}{\partial \phi} \text{ ou}$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial x}.$$

Demonstração: Seja  $\phi(x)$  uma solução particular para o problema de linearização exata. Então, na região  $U$ , a seguinte relação se verifica:

$$\frac{\partial \phi(x)}{\partial x} [g, \text{ad}_f g, \dots, \text{ad}_f^{m-1} g] = [0, \dots, 0, \lambda_1(x)]$$

onde  $\lambda_1(x)$  é uma função suave que não se anula. Mas, para que haja consistência, na mesma região, as colunas da distribuição controlabilidade

$$[g, \text{ad}_f g, \dots, \text{ad}_f^{n-1} g]$$

necessitam ser linearmente independentes. Mas isto implica em se poder escrever

$$\frac{\partial \phi(x)}{\partial x} = \lambda_1(x) [\xi_1(x) \ \xi_2(x) \ \dots \ \xi_n(x)],$$

onde  $\xi(x) = [\xi_1(x) \ \xi_2(x) \ \dots \ \xi_n(x)]$  é a  $n$ -ésima linha da inversa da distribuição controlabilidade e  $\lambda_1(x)$  é uma função suave que não se desvanece. Agora, para uma uma solução  $\psi(x)$ , também existe uma solução  $\lambda_2(x)$  que não se anula, tal que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi(x)}{\partial x} &= \lambda_2(x) [\xi_1(x) \ \xi_2(x) \ \dots \ \xi_n(x)] \\ &:= \frac{\lambda_2(x)}{\lambda_1(x)} \lambda_1(x) [\xi_1(x) \ \xi_2(x) \ \dots \ \xi_n(x)] \\ &= \frac{\lambda_2(x)}{\lambda_1(x)} \frac{\partial \phi(x)}{\partial x} := \lambda(x) \frac{\partial \phi(x)}{\partial x}. \end{aligned}$$

A segunda parte do lema pode ser provada usando-se o seguinte raciocínio. Para que a equação acima seja consistente, deve existir uma função suave  $\theta(\cdot)$ , tal que  $\psi(x)$  pode ser

escrito da forma  $\psi(x) = \theta(\phi(x))$ . Avaliando o gradiente, resulta

$$\frac{\partial \psi(x)}{\partial x} = \lambda(x) \frac{\partial \phi(x)}{\partial x}, \quad \lambda(x) = \frac{\partial \theta(x)}{\partial \phi} \neq 0.$$

Agora, será apresentado o seguinte teorema:

**Teorema 1** *Seja a função suave  $z_1 = \phi(x)$  uma solução particular para o problema de linearização exata de um sistema afim de uma só entrada para  $x$  pertencendo a uma vizinhança  $U$  de  $x^0$ . Então, qualquer solução pode ser descrita da forma  $z_1 = \psi(x) = \theta(\phi(x))$ , onde  $\theta(\cdot)$  é uma função suave satisfazendo a condição de não trivialidade  $\frac{\partial \theta}{\partial \phi} \neq 0$  na região  $U$ .*

Demonstração: Suponha-se que exista uma solução particular  $z_1 = \phi(x)$  em uma vizinhança  $U$  de  $x^0$ , que transforme o sistema descrito pelo par  $(f, g)$  para a forma canônica de Brunowsky. Então, por meio das novas coordenadas (3.1), juntamente com as funções associadas

$$\alpha(x) = -L_f^n \phi(x) / L_g L_f^{n-1} \phi(x), \quad \beta(x) = 1 / L_g L_f^{n-1} \phi(x)$$

o sistema assume a forma canônica de Brunowsky. Primeiramente, será provada a suficiência, *i.e.*, se  $z_1 = \phi(x)$  é uma solução particular para o problema, então,  $z_1 = \theta(\phi(x))$ , onde  $\frac{\partial \theta}{\partial \phi} \neq 0$ , também é solução para o mesmo problema. Isto se demonstra avaliando o gradiente e usando a regra da cadeia

$$\frac{\partial \theta}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial x} [g \text{ } ad_f g \text{ } \dots \text{ } ad_f^{n-1} g] = [0 \text{ } 0 \text{ } \dots \text{ } *].$$

onde o símbolo " \*" significa tratar-se de uma entrada não nula. Agora, a fim de provar a necessidade, suponha-se que exista uma solução mais geral da forma

$$\psi(x) = c_1 \theta_1(x) + c_2 \theta_2(x),$$

onde  $\theta_1(x) = \theta(\phi(x))$  e  $\theta_2(x)$  é uma função suave arbitrária. Avaliando o gradiente,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \psi(x)}{\partial x} \begin{bmatrix} g & \text{ad}_f g & \dots & \text{ad}_f^{n-1} g \end{bmatrix} \\ &= [c_1 \ c_2] \begin{bmatrix} \partial \theta_1(x)/\partial x & \partial \theta_2(x)/\partial x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g & \text{ad}_f g & \dots & \text{ad}_f^{n-1} g \end{bmatrix} \\ &= [c_1 \ c_2] \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & * \\ x & \dots & x & * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & * \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

De acordo com o lema anterior, para que a equação precedente seja consistente, o coeficiente  $c_2$  pode ser não nulo se e somente se os coeficientes "x" forem identicamente nulos. Mas isto equivale a afirmar que os gradientes são linearmente dependentes. Também, de acordo com o lema anterior, isto significa que a forma estabelecida no teorema para a solução é preservada.

No problema da linearização exata o mapeamento difeomórfico (3.1) é apenas subsidiário. O interesse reside especialmente no resultado da lei de realimentação (2.2) ligeiramente modificada de forma a incorporar os sinais de rastreo e de estabilização, ou

$$u = \left( r + F_n \phi(x) + F_{n-1} L_f \phi(x) + \dots + F_1 L_f^{n-1} \phi(x) - L_f^n \phi(x) \right) / L_g L_f^{n-1} \phi(x) \quad (3.2)$$

onde  $F_1, F_2, \dots, F_n$  são as entradas do vetor de realimentação estabilizante e  $w$  é a nova referência.

Deve-se notar que, à medida que o mapeamento difeomórfico é modificado pela utilização de uma nova solução primeira coordenada,  $\psi = \theta(z_1)$ , modifica-se o sinal de excitação. Assim, embora o mesmo sistema difeomorficamente similar seja conseguido por meio dessa ação de controle genérica, a liberdade na escolha da solução particular pode ser utilizada de forma a melhorar o desempenho do sistema.

A seguir, dois exemplos são apresentados para exibir a influência da escolha da transformação difeomórfica no desempenho dinâmico do sistema.

### 3.1 EXEMPLOS

Dois exemplos são utilizados para ilustrar o efeito da escolha da função primeira coordenada sobre o desempenho do sistema. Embora qualquer sistema não linear elegível para a linearização por realimentação pudesse ser utilizado, a fim de não anuviar a apresentação, optou-se pelos exemplos mais simples de sistemas de primeira e segunda ordem. A escolha torna mais fácil obter-se uma nítida compreensão acerca do efeito da transformação adicional de coordenadas sobre o desempenho do sistema.

#### 3.1.1 Exemplo 1

A fim de se ganhar um pouco de perspicácia, será considerado o sistema de primeira ordem descrito pela seguinte equação diferencial

$$\dot{x} = u. \quad (3.3)$$

Será considerado o efeito de um par de transformações de coordenadas globalmente difeomórficas sobre (3.3) descritas pelas seguintes equações

$$i) \ z = \sinh^{-1}(x), \quad (3.4)$$

$$ii) \ z = \sinh(x). \quad (3.5)$$

Diferenciando (3.4, 3.5), resulta

$$i) \ \dot{z} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \dot{x} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} u, \quad (3.6)$$

$$ii) \ \dot{z} = \cosh(x) \dot{x} = \cosh(x) u \quad (3.7)$$

Considerando a prescrição para o sistema transformado dos pólos  $\mu_1$  e  $\mu_2$ , segue-se

$$i) \ u_1 = \mu_1 \sqrt{1+x^2} \sinh^{-1}(x); \quad (3.8)$$

$$ii) \ u_2 = \mu_2 \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}; \quad (3.9)$$

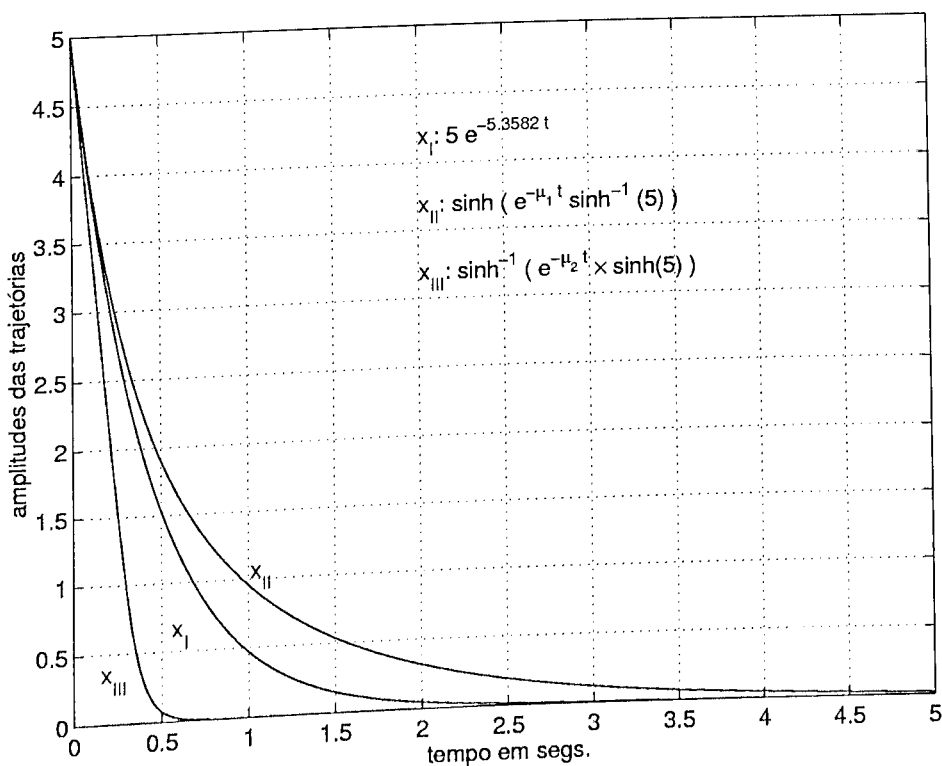


Figura 3.1. Posições  $x$  para três possíveis transformações para um sistema de 1ª ordem fornecendo a seguinte solução para as coordenadas  $x$

$$i) x = \sinh(e^{\mu_1 t} \sinh^{-1}(x^0)); \quad (3.10)$$

$$ii) x = \sinh^{-1}(e^{\mu_2 t} \sinh(x^0)). \quad (3.11)$$

Notando que os esforços de controle são proporcionais às amplitudes dos autovalores e são monotonicamente crescentes com a amplitude do estado,  $x$ , procede-se à seguinte normalização

$$i) \mu_1 = -1, \quad (3.12)$$

$$ii) \mu_2 = -\sqrt{1 + (x^0)^2} \sinh^{-1}(x^0) \frac{\cosh(x^0)}{\sinh(x^0)}. \quad (3.13)$$

Essa escolha proporciona para  $u_1$  e  $u_2$  as mesmas amplitudes máximas. Assim,

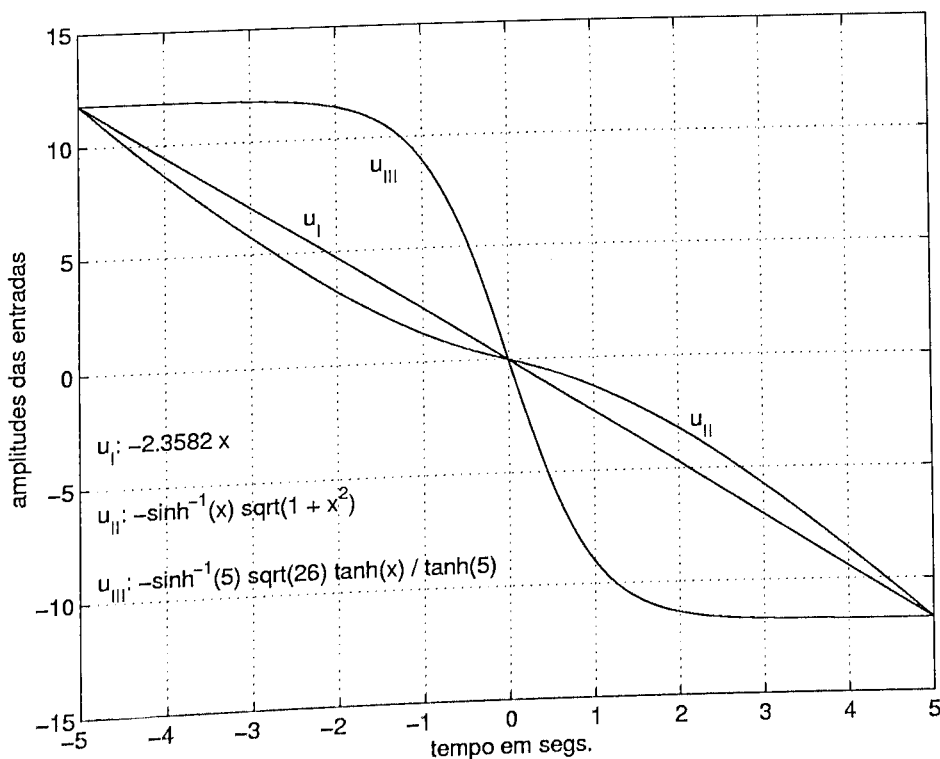


Figura 3.2. Excitações  $u$  correspondentes às primeiras coordenadas da Fig. 3.1

com  $\mu_1$  e  $\mu_2$  calculados pela fórmula (3.12, 3.13), os gráficos do estado  $x$  calculado pelas fórmulas (3.10, 3.11) são mostrados na Fig. 3.1. Também, os gráficos dos esforços de controle para cada um dos casos são exibidos na Fig. 3.2.

Este exemplo simples claramente mostra o efeito da escolha das coordenadas adicionais no desempenho do sistema. A lei de controle (II) obtida com a ajuda da transformação  $z = \sinh(x)$  preserva as amplitudes do sistema em torno da condição inicial, fornecendo porém um ganho elevado próximo ao ponto de equilíbrio. Conseqüentemente, um ganho substancial é obtido usando a transformação  $z = \sinh(x)$ . Quanto à escolha (III), correspondente à escolha  $z = \sinh^{-1}(x)$ , esta atua numa direção oposta, para um mesmo ganho inicial, deteriorando o desempenho do sistema em torno do ponto de equilíbrio. Obviamente, seria preferível a ação de controle convencional (I) à ação de controle (III).

### 3.1.2 Exemplo 2

Agora, será considerado o seguinte sistema de segunda ordem:

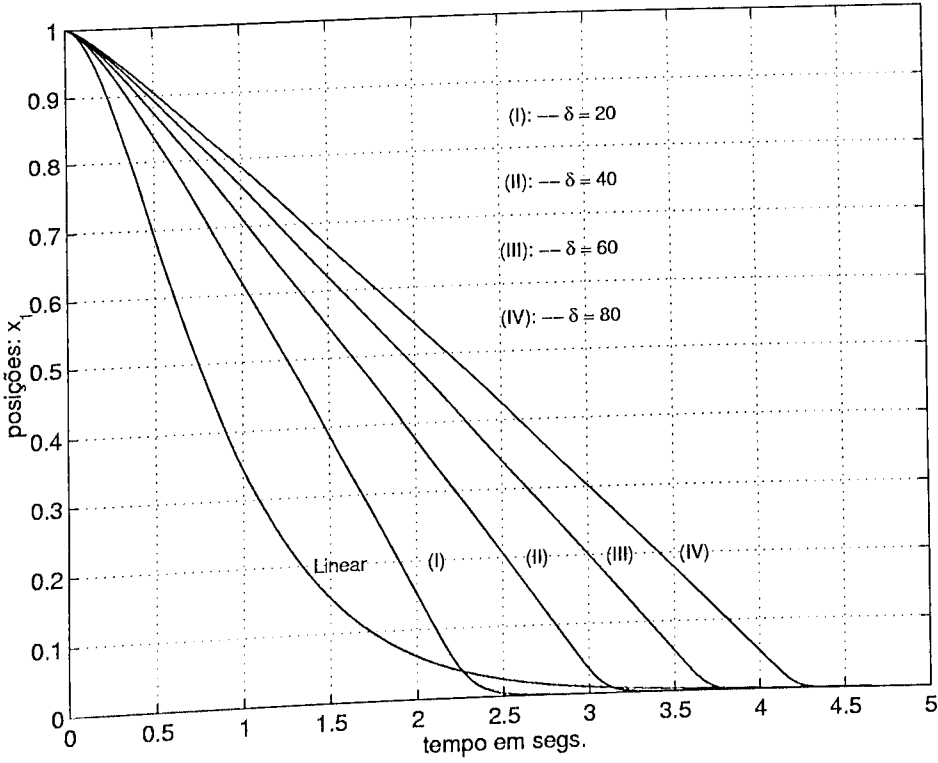


Figura 3.3. Posições  $x_1$  para  $\psi(\delta) = \frac{1}{\delta} \sinh(\delta x_1)$  para um sistema de 2ª ordem

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ u \end{bmatrix}. \quad (3.14)$$

De acordo com o teorema 2, (3.14) é um sistema linear invariante com respeito a qualquer transformação genérica em relação à sua primeira coordenada. A partir da perspicácia que foi adquirida do exemplo simples acima, será considerada a seguinte classe de novas coordenadas primeiras

$$z_1 = \psi(x) := \frac{1}{\delta} \sinh(\delta x_1), \quad (3.15)$$

juntamente com as funções inversas associadas

$$\psi^{-1}(z_1) := \frac{1}{\delta} \sinh^{-1}(\delta x_1), \quad (3.16)$$

onde  $\delta$  é um parâmetro ajustável de projeto.

As soluções simbólicas correspondentes à condição inicial  $(x_1, x_2) = (1, 0)$  foram avaliadas. Também, os sistemas transformados correspondentes a  $\delta = 20, 40, 60$  e  $80$  foram simulados. A solução particular  $\psi^0(x) = \phi(x) = x_1$  foi também simulada. Para facilidade de comparação, foram prescritos pólos coincidentes para o sistema malha-fechada. Os pólos para o sistema linearizado foram escolhidos para cada valor de  $\delta$ , de sorte que, a máxima amplitude da coordenada de controle (no caso, a aceleração do sistema) foi limitada em 5 unidades. Considerando a solução estabilizante, a seguinte coordenada de controle resulta

$$u(x) = - \left( \frac{\mu\nu}{\delta} + \delta x_2^2 \right) \tanh(\delta x_1) + (\mu + \nu) x_2, \quad (3.17)$$

com as resultantes coordenadas  $z$  e  $x$

$$z_1 = e^{\nu t} \left( \frac{\mu}{\delta} S - x_2^0 C \right) - e^{\mu t} \left( \frac{\nu}{\delta} S - x_2^0 C \right) \quad (3.18)$$

$$z_2 = \nu e^{\nu t} \left( \frac{\mu}{\delta} S - x_2^0 C \right) - \mu e^{\mu t} \left( \frac{\nu}{\delta} S - x_2^0 C \right) \quad (3.19)$$

$$x_1(t) = \frac{1}{\delta} \sinh^{-1}(\delta z_1(t)), \quad (3.20)$$

$$x_2(t) = \frac{z_2(t)}{\sqrt{1 + (\delta z_1(t))^2}}, \quad (3.21)$$

onde

$$S := S(\delta) = \frac{\sinh(x_1^0 \delta)}{\mu - \nu}, \quad C := C(\delta) = \frac{\cosh(x_1^0 \delta)}{\mu - \nu}.$$

A simulação foi levada a cabo para diversas condições iniciais e configurações da malha fechada com resultados satisfatórios. Aqui a simulação é exibida para a condição inicial  $x^0 = (1, 0)$  nas figuras 3.3, 3.4, 3.5. A solução associada à transformação mais simples  $\psi^0(x) = x_1$  é destacada pela palavra *Linear*. As soluções associadas à transformação  $\psi(x) = \frac{1}{\delta} \times \sinh(\delta x_1)$  são destacadas pelos algarismos romanos I)-IV) para  $\delta = 20, 40, 60, 80$ . Também, para o segundo exemplo considerado, a mudança adicional de coordenadas efetivamente permitiu uma considerável melhoria no desempenho dinâmico

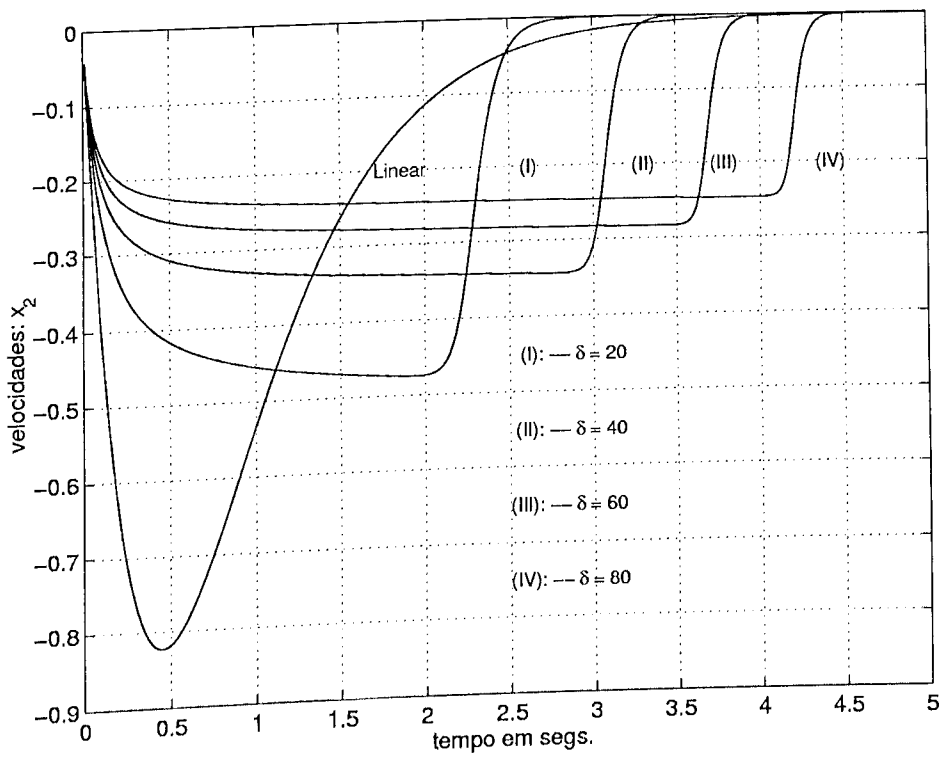


Figura 3.4. Velocidades ( $x_2$ ) correspondentes às primeiras coordenadas  $\psi(\delta)$

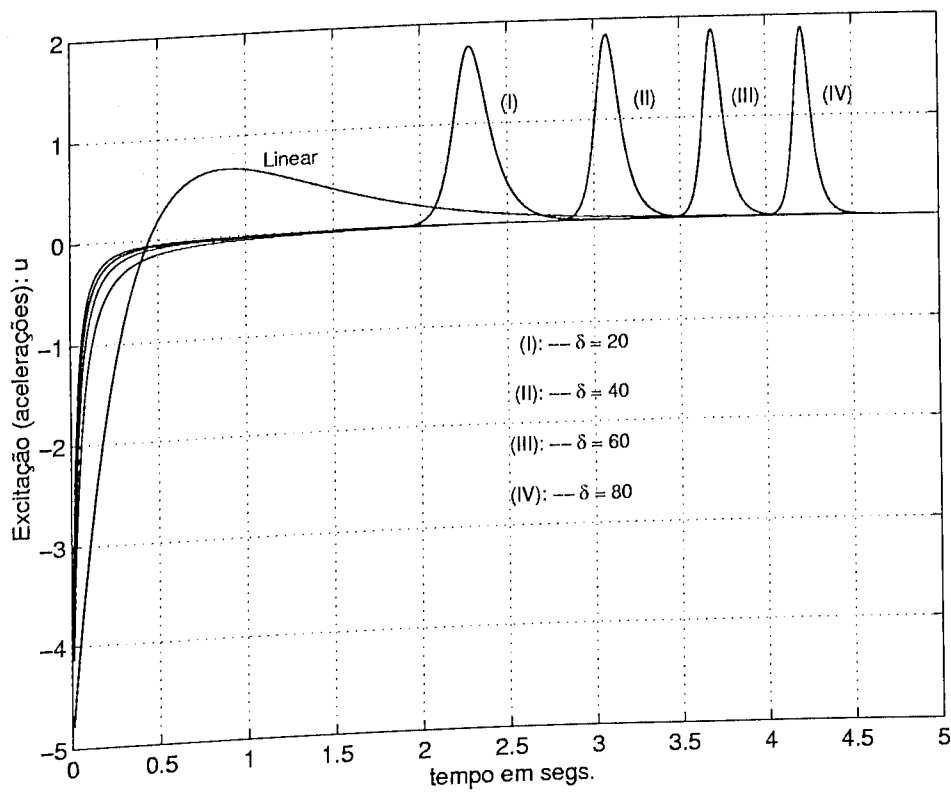


Figura 3.5. Controles ( $u$ ) correspondentes às primeiras coordenadas  $\psi(\delta)$

do sistema, preservando as amplitude da entrada do sistema próximo às condições iniciais consideradas. Embora próximo às condições iniciais, as trajetórias do sistema para os casos I)-IV) evoluam de início mais lentamente na direção do equilíbrio, à medida que as mesmas se aproximam do ponto de equilíbrio, o alto ganho proporcionado pela lei "*sinh*" assegura para o sistema uma alta precisão, com menores tempos de acomodação. as leis de controle do tipo "*sinh*" do que para a lei de controle linear convencional. Isto proporciona uma redução na fadiga do mecanismo.

As possibilidades são infinitas e constitui um desafio para a imaginação do projetista a escolha de transformações adicionais de coordenadas para cada especificação particular de projeto. Da consideração desses exemplos simples, parece que a intuição é um bom tutor para ajudar o projetista na escolha de transformações adicionais para cada objetivo de projeto.

## CAPÍTULO IV

### VETORIZAÇÃO DO OPERADOR DERIVADA PARCIAL

Suponha-se uma função multivariável

$$\omega := \omega \left( x^{(1)}, x_0^{(2)}, \dots, x_0^{(n)} \right), \quad (4.1)$$

onde o índice "0" colocado sob as variáveis  $x^{(2)}, x^{(3)}, \dots, x^{(n)}$ , indica que estas se mantêm fixas, restringindo-se a variação à direção correspondente à primeira coordenada. Assim, discretizando a função multivariável  $\omega$  com respeito à sua primeira coordenada, em uma notação simples, pode-se escrever:

$$\omega = [\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{m_1}]^T, \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} \omega_i &= \omega \left( x_i^{(1)}, x_0^{(2)}, \dots, x_0^{(n)} \right), \\ i &= 1, 2, \dots, m_1. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Para simplificar ainda mais a notação, sejam

$$y_i := x_i^{(1)}, \quad (4.4)$$

$$\omega_i = \omega(y_i, x_0^{(2)}, \dots, x_0^{(n)}) := \omega(y_i). \quad (4.5)$$

Supondo que se esteja utilizando uma aproximação polinomial de ordem  $p$  para cada  $(p+1)$ -upla de pontos consecutivos  $(y_0, \omega_0), (y_1, \omega_1), (y_2, \omega_2), \dots, (y_p, \omega_p)$ , sob a hipótese de que as abscissas são distintas, pode-se escrever a fórmula de interpolação de Lagrange

$$\rho(y) = \sum_{k=0}^p \omega_k \frac{\prod_{j=0, j \neq k}^p (y - y_j)}{\prod_{j=0, j \neq k}^p (y_k - y_j)} \quad (4.6)$$

onde  $\rho(y)$  é um polinômio que coincide com  $\omega(y)$  sobre os pontos amostrais  $y = y_k$ , e da teoria da interpolação, sabe-se que existe  $\xi \in [y_0, y_p]$ , tal que

$$\omega(y) - \rho(y) = \frac{\omega^{(p+1)}(\xi)}{(p+1)!} \times \pi(y) \quad (4.7)$$

onde

$$\pi(y) = \prod_{i=0}^p (y - y_i) \quad (4.8)$$

#### 4.1 AVALIAÇÃO DAS DERIVADAS PARCIAIS COM AS DISCREPÂNCIAS ASSOCIADAS

Agora, as fórmulas de interpolação acima serão utilizadas para calcular numericamente as derivadas parciais com as discrepâncias associadas. Para isso, primeiramente, diferenciando (4.6) com respeito a  $y$ , pode-se escrever

$$\left. \frac{d\rho(y)}{dy} \right|_s = \sum_{k=0}^p \omega_k \sum_{i=0}^p \frac{\prod_{j=0, j \neq i, j \neq k}^p (y - y_j)}{\prod_{j=0, j \neq q}^p (y_k - y_j)} \quad (4.9)$$

sendo de interesse os valores das derivadas obtidos através dessa fórmula sobre os pontos amostrais

$$\left. \frac{d\rho(y)}{dy} \right|_s = \sum_{k=0}^p D_{sk} \omega_k \quad (4.10)$$

onde o subíndice indica que se avaliou a derivada em  $y = y_s$ , e

$$D_{sk} = \frac{\prod_{j=0, j \neq i, j \neq k}^p (y_s - y_j)}{\prod_{j=0, j \neq q}^p (y_k - y_j)}. \quad (4.11)$$

#### 4.1.1 Discrepâncias entre a Derivada Efetiva e a Aproximada

Do ponto de vista prático, é interessante estabelecer a relação entre o grau da interpolação e o erro no cálculo das derivadas por meio da fórmula (4.9). Em síntese, será mostrado que o erro poderá ser feito tão pequeno quanto desejado. Para isso, apresenta-se a seguir, o seguinte:

**Teorema 2** *Suponha-se que os elementos  $y_0, y_1, \dots, y_p$  satisfaçam a relação  $y_0 < y_1 < \dots < y_p$ . Seja a derivada da função  $\omega(y)$  aproximada por meio da fórmula (4.9). E seja  $\tilde{y} = \{\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_p\}$  um conjunto de abscissas satisfazendo  $\tilde{y}_1 \in [y_0, y_1]$ ,  $\tilde{y}_2 \in [y_1, y_2]$ ,  $\dots$ ,  $\tilde{y}_p \in [y_{p-1}, y_p]$  e para os quais a derivada efetiva e aproximada coincidem. Considere-se o intervalo  $[a, b]$  onde*

$$a := y_0, \quad b := y_p,$$

então,

1. *existe pelo menos um conjunto de pontos  $\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_p$  satisfazendo as condições prévias.*
2. *para cada  $y \in [a, b]$ , existe um  $\xi \in [a, b]$ , tal que o erro entre a derivada efetiva e a derivada aproximada pode ser dado por*

$$e(y) = \frac{\omega^{p+1}(\xi)}{p!} \times \prod_{i=1}^p (y - \tilde{y}_i), \quad (4.12)$$

Demonstração:

Para provar a primeira afirmação do teorema, por definição dos polinômios de Lagrange, as funções  $\omega$  e  $\rho$  coincidem pelo menos nos pontos  $y_0, y_1, \dots, y_p$ . Assim, usando o teorema de Rolle, conclui-se que a discrepância entre a derivada efetiva e a aproximada deverá se anular

- pelo menos uma vez entre  $y_0$  e  $y_1$ ; pelo menos uma vez entre  $y_1$  e  $y_2$ ;  $\dots$  pelo menos uma vez entre  $y_{p-1}$  e  $y_p$ .

Logo, conclui-se que o conjunto  $\tilde{y}$  é não vazio.

Para demonstrar a segunda parte, considere-se uma função da forma

$$\Psi(z) = \frac{d\omega(z)}{dz} - \frac{d\rho(z)}{dz} - K\Theta(z).$$

onde

$$\Theta(z) = \prod_{i=1}^p (z - \tilde{y}_i).$$

definida no conjunto  $[a, b] - \{\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_p\}$ .

É claro que a função  $\Psi$  se anula em cada um dos pontos  $\{\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_p\}$ . Logo, fixando-se

$$K = \frac{\frac{d\omega}{dy}(y) - \frac{d\rho(y)}{dy}}{\Theta(y)},$$

deverá haver pelo menos uma raiz adicional,  $y \neq \tilde{y}_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, p$ , para  $\Psi = 0$ . Por conseguinte, pelo teorema de Rolle, no intervalo  $[a, b]$ ,  $\Psi$  se anula pelo menos  $p + 1$  vezes;

- $\frac{d\Psi}{dz}$  se anula pelo menos  $p$  vezes; ...  $\frac{d^p\Psi}{dz^p}$  se anula pelo menos 1 vez.

E como

$$\frac{d^p\Theta}{dz^p} = p!, \quad \frac{d^{p+1}\rho}{dz^{p+1}} = 0,$$

tira-se

$$\frac{d^{p+1}\omega}{dz^{p+1}} - K \frac{d^p\Theta}{dz^p} = 0,$$

ou

$$K = \frac{\frac{d^{p+1}\omega}{dz^{p+1}}(\xi)}{p!} = \frac{\frac{d\omega}{dy}(y) - \frac{d\rho(y)}{dy}}{\Theta(y)}.$$

onde  $\xi$  é um elemento do intervalo  $[a, b]$ . Isto completa a prova do teorema.

Para que se possa utilizar efetivamente o teorema 2 para estimar uma cota superior para o módulo do erro de aproximação da derivada será estabelecido o seguinte corolário:

**Corolário 1** *Defina-se o conjunto  $\in \mathfrak{R}^p$ ,  $\bar{y} = \{\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_p\}$  onde  $\bar{y}_1 \in [y_0, y_1]$ ,  $\bar{y}_2 \in [y_1, y_2]$ ,  $\dots$ ,  $\bar{y}_p \in [y_{p-1}, y_p]$ . então a discrepância entre a derivada efetiva e a aproximada satisfaz a seguinte relação:*

$$|e(y)| \leq \sup_{\xi \in [a, b]} \left| \frac{\omega^{p+1}(\xi)}{p!} \right| \times \prod_{i=1}^p |y - \bar{y}_i|, \quad (4.13)$$

Um caso interessante a ser considerado é a avaliação da discrepância no ponto central no caso de uma aproximação polinomial par (que equivale a um número ímpar de pontos) e espaçamento uniforme . Nesse caso a equação (4.13) pode ser reescrita:

$$|e(y)| \leq \sup_{\xi \in [a, b]} \left| \omega^{p+1}(\xi) \right| \times \frac{((p/2)!)^2}{p!} \times h^p. \quad (4.14)$$

#### NOTAS:

- O teorema ora apresentado para lidar com o erro de interpolação no cálculo da derivada via interpolação de Lagrange apresenta uma certa sutileza em relação ao teorema do resto cuja prova se pode encontrar na literatura de cálculo numérico, por exemplo, (BAKHVALOV, 1975).
- Seguindo a mesma técnica acima, esse teorema pode ser generalizado para o cálculo de derivadas de ordem superior. Por exemplo, utilizando o mesmo argumento baseado no teorema de Role pode-se afirmar que as discrepâncias entre a derivada segunda aproximada via fórmula de Lagrange e a efetiva possuem raízes entre  $y_0$  e  $y_2$ , entre  $y_1$  e  $y_3$ , etc.

- O ponto interessante que se pode deduzir do teorema 2 e seu corolário é que, desde que a função  $\omega$  seja suave, o erro na cálculo da derivada por meio de (4.9) pode ser feito arbitrariamente pequeno mediante a escolha apropriada do grau ( $p$ ) do polinômio interpolador.

## 4.2 REPRESENTAÇÃO MATRICIAL PARA A APROXIMAÇÃO DA DERIVADA

Para estabelecer a aproximação para a derivada a partir dos pontos amostrais, serão introduzidos dois parâmetros:

- $m_s$ , o número de pontos amostrais,
- $p$ , o grau do polinômio interpolador

Para ser mais específico, suponha-se  $m_s = 7$ . Deve-se observar que, para cada ponto amostral, poderão ser eleitos até  $m_s + 1$  conjuntos de pontos amostrais consecutivos tais que o ponto considerado pertença ao conjunto selecionado. Um critério heurístico simples pode reduzir bastante as possibilidades:

**Heurística 1** *Serão selecionados prioritariamente os conjuntos de coeficientes que produzam sempre a aproximação mais central.*

Espera-se que, com esse critério, sejam minimizados os erros de interpolação. No que se segue, mostra-se que para uma interpolação de grau par isso conduz a uma representação única para o operador derivada.

Aproximação par: – Para facilitar a exposição, será considerado o caso de uma aproximação de grau 4 (aproximação quártica). Observe-se o esquema de interpolação par que se apresenta na tabela 1, cujos elementos componentes serão esclarecidos na continuação do texto. A primeira linha representa os pontos amostrais. Os elementos não vagos a partir da segunda linha da tabela indicam as linhas subseqüentes da matriz de coeficientes ( $D_{sk}$ ) utilizada para produzir a interpolação do grau desejado. Os elementos marcados com "S" (respectivamente, "N") representam que a linha da matriz ( $D_{sk}$ ) que produz (respectivamente, não produz) a aproximação mais central. Também se apresenta a matriz dos coeficientes para a aproximação quártica:

Tabela 4.1. Esquema de interpolação par

| <i>amostras utilizadas</i> | $\omega_1$           | $\omega_2$           | $\omega_3$           | $\omega_4$      | $\omega_5$           | $\omega_6$           | $\omega_7$           |
|----------------------------|----------------------|----------------------|----------------------|-----------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| coefs. utilizados          | 1. <sup>a</sup> lin. | 2. <sup>a</sup>      | 3. <sup>a</sup>      | 4. <sup>a</sup> | 5. <sup>a</sup> lin. |                      |                      |
| regra: (S/N)               | S                    | S                    | S                    | N               | N                    |                      |                      |
| coefs. utilizados          |                      | 1. <sup>a</sup> lin. | 2. <sup>a</sup>      | 3. <sup>a</sup> | 4. <sup>a</sup>      | 5. <sup>a</sup> lin. |                      |
| regra: (S/N)               |                      | N                    | N                    | S               | N                    | N                    |                      |
| coefs. utilizados          |                      |                      | 1. <sup>a</sup> lin. | 2. <sup>a</sup> | 3. <sup>a</sup>      | 4. <sup>a</sup>      | 5. <sup>a</sup> lin. |
| regra: (S/N)               |                      |                      | N                    | N               | S                    | S                    | S                    |

$$D_4 = \frac{1}{12h} \begin{bmatrix} -25 & 48 & -36 & 16 & -3 \\ -3 & -10 & 18 & -6 & 1 \\ 1 & -8 & 0 & 8 & -1 \\ -1 & 6 & -18 & 10 & 3 \\ 3 & -16 & 36 & -48 & 25 \end{bmatrix}$$

(4.15)

Por exemplo, quando se considera uma aproximação quártica, o polinômio interpolador que se constrói a partir das amostras  $\{\omega_1, \dots, \omega_5\}$  é o que produz as três melhores aproximações  $\frac{\partial \omega}{\partial y}|_1, \frac{\partial \omega}{\partial y}|_2, \frac{\partial \omega}{\partial y}|_3$ . Note-se que para as aproximações  $\frac{\partial \omega}{\partial y}|_4$ , segundo a regra heurística estabelecida, é mister se comute para o polinômio que se constrói a partir das amostras  $\{\omega_2, \dots, \omega_6\}$ .

Finalmente, em perfeita simetria com o primeiro polinômio, pode-se verificar que a melhor aproximação para  $\frac{\partial \omega}{\partial y}|_5, \frac{\partial \omega}{\partial y}|_6, \frac{\partial \omega}{\partial y}|_7$ , se produz comutando para o polinômio que se constrói a partir das amostras  $\{\omega_3, \dots, \omega_7\}$ .

Agora, pode-se a título de ilustração apresentar a relação matriz-vetor correspondente aos dados da tabela 4.1:

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)_s \approx \Delta_4 \times \hat{\omega},$$

(4.16)

Tabela 4.2. Esquema de interpolação ímpar

| <i>amostras<br/>utilizadas</i>    | $\omega_1$               | $\omega_2$               | $\omega_3$               | $\omega_4$               | $\omega_5$               | $\omega_6$               | $\omega_7$               |
|-----------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| coefs. utilizados<br>regra: (S/N) | 1 <sup>a</sup> lin.<br>S | 2 <sup>a</sup><br>S      | 3 <sup>a</sup><br>S      | 4 <sup>a</sup> lin.<br>N |                          |                          |                          |
| coefs. utilizados<br>regra: (S/N) |                          | 1 <sup>a</sup> lin.<br>N | 2 <sup>a</sup><br>S      | 3 <sup>a</sup><br>S      | 4 <sup>a</sup> lin.<br>N |                          |                          |
| coefs. utilizados<br>regra: (S/N) |                          |                          | 1 <sup>a</sup> lin.<br>N | 2 <sup>a</sup><br>S      | 3 <sup>a</sup><br>S      | 4 <sup>a</sup> lin.<br>N |                          |
| coefs. utilizados<br>regra: (S/N) |                          |                          |                          | 1 <sup>a</sup> lin.<br>N | 2 <sup>a</sup><br>S      | 3 <sup>a</sup><br>S      | 4 <sup>a</sup> lin.<br>S |

onde

$$\Delta_4 = \frac{1}{12h} \begin{bmatrix} -25 & 48 & -36 & 16 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & -10 & 18 & -6 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -8 & 0 & 8 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -8 & 0 & 8 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -8 & 0 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 6 & -18 & 10 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -16 & 36 & -48 & 25 \end{bmatrix}$$

(4.17)

e o índice  $s$  indica que as derivadas são calculadas sobre as coordenadas  $s = 1, 2, \dots, m_s$  sobre os pontos amostrais.

Aproximação ímpar: – Na tabela 4.2 apresenta-se o esquema de interpolação quando se utiliza uma aproximação ímpar. Usando a equação (4.11), pode-se também construir a matriz dos coeficientes para a aproximação cúbica:

$$D_3 = \frac{1}{6h} \begin{bmatrix} -11 & 18 & -9 & 2 \\ -2 & -3 & 6 & -1 \\ 1 & -3 & 6 & 2 \\ -2 & 9 & -18 & 11 \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

Neste caso, deve-se notar que, com exceção dos pontos próximos à fronteira, sempre haverá duas possibilidades na seleção do polinômio interpolador. Isso, todavia não é importante. Pode-se, por exemplo, selecionar o esquema marcado em **negrito** que privilegia a seleção dos polinômios mais à direita. Continuando, apresenta-se a relação matriz-vetor resultante:

$$\left( \frac{\partial \omega}{\partial y} \Big|_s \right) \approx \Delta_3 \times \hat{\omega}, \quad (4.19)$$

onde

$$\Delta_3 = \frac{1}{6h} \begin{bmatrix} -11 & 18 & -9 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 6 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 6 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 6 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 9 & -18 & 11 \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

Deve-se notar que a construção da matriz interpoladora segue o mesmo esquema para uma aproximação de orden arbitrária. Também, dois instrumentos estão à disposição para controlar o erro de diferenciação:  $h$ , a amplitude do intervalo de discretização, e  $p$ , o grau do polinômio interpolador  $\rho(y)$ .

## CAPÍTULO V

### VETORIZAÇÃO DAS COORDENADAS DO PARALELEPÍPEDO

No que se segue, a vetorização das coordenadas do paralelepípedo bem como produtos de Kronecker serão utilizados para derivar relações do tipo matriz-vetor para a avaliação numérica da realimentação linearizante juntamente com a transformação difeomórfica associada.

Primeiramente, será introduzida a notação oportuna. Seja  $x^{(j)}$  a  $j$ -ésima coordenada do vetor de estados,

$$x = \begin{bmatrix} x^{(1)} & x^{(2)} & \dots & x^{(n)} \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

então

$$\omega := \omega(x) = \omega(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}) \quad (5.2)$$

é uma função vetorial definida sobre as coordenadas do sistema,  $x^{(j)}, j = 1, 2, \dots, n$ . Considere-se que cada coordenada tenha sido discretizada em  $m_k$  pontos. Assim, o seguinte vetor associado às amostras tomadas ao longo da coordenada  $x^{(j)}$ , é apresentado

$$x_s^{(j)} := (x_{i_j}^{(j)}) = \begin{bmatrix} x_1^{(j)} & x_2^{(j)} & \dots & x_{m_j}^{(j)} \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

Com a discretização (5.3) das coordenadas de estado, ao longo dos pontos amostrais, a função vetorial em (5.2) pode ser descrita por

$$\begin{aligned} \omega &= \omega(x_{i_1}^{(1)}, x_{i_2}^{(2)}, \dots, x_{i_n}^{(n)}) \\ &:= \omega(i_1, i_2, \dots, i_n) \end{aligned} \quad (5.4)$$

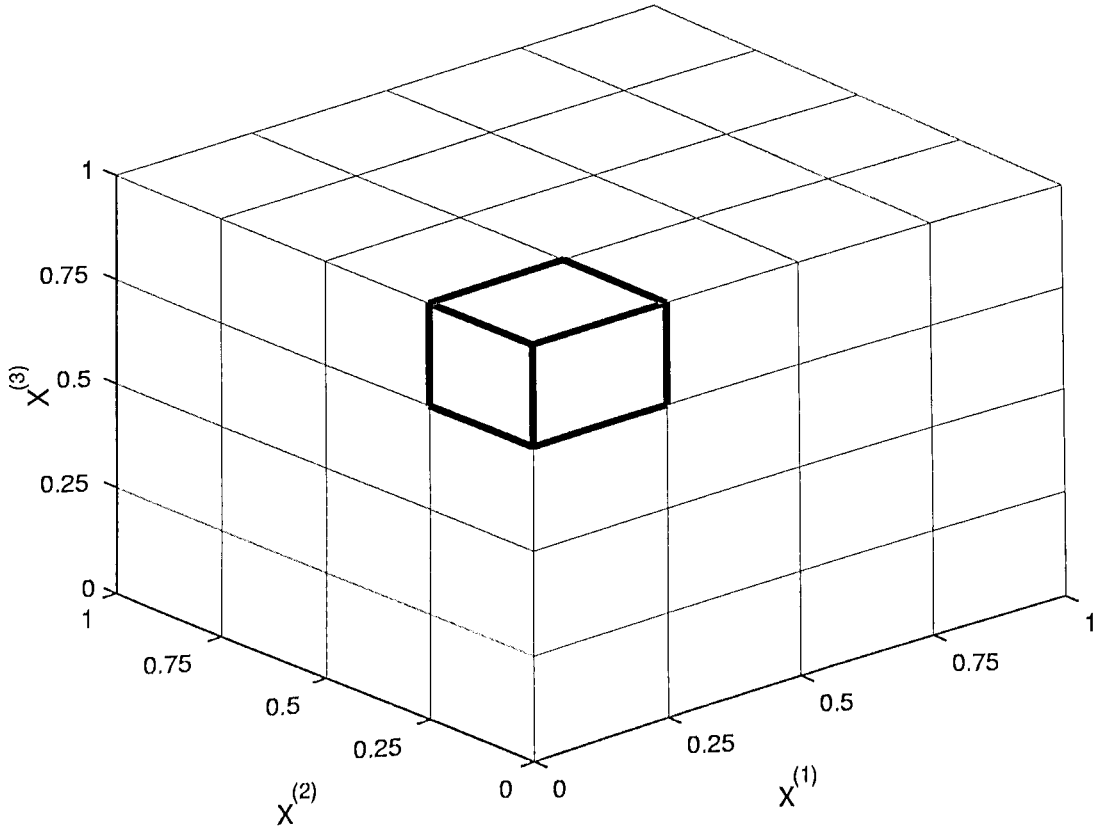


Figura 5.1. Partição Celular de um paralelepípedo típico

para  $i_k = 1, 2, \dots, m_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ .

Conforme mostrado na Fig. 5.1, a discretização das coordenadas de estados particiona o paralelepípedo de estados em  $m$  células hipercúbicas, onde

$$m = (m_1 - 1) \times (m_2 - 1) \times \dots \times (m_n - 1) \quad (5.5)$$

Ainda, uma célula hipercúbica típica é mostrada na Fig. 5.1. A fim de vetorizar a função vetorial,  $\omega$ , introduz-se a numeração dos vértices dos hipercubos de estados (vide Fig. 5.2). As seguintes coordenadas vetoriais são introduzidas para a função vetorizada,

$$\hat{\omega} := \hat{\omega}(l(i_1, i_2, \dots, i_n)) \quad (5.6)$$

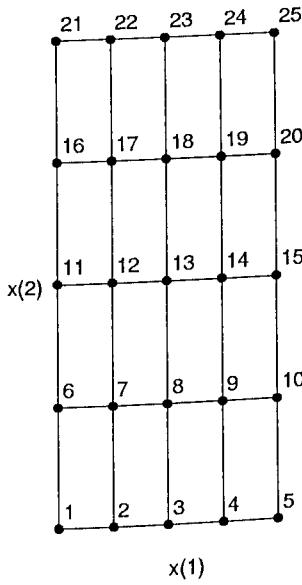
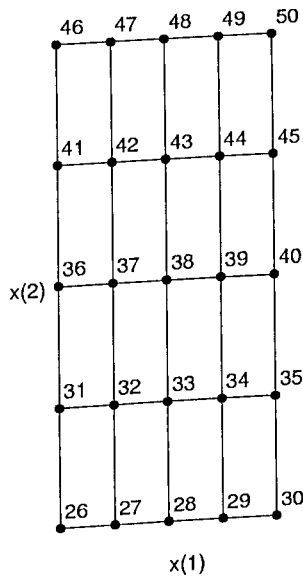
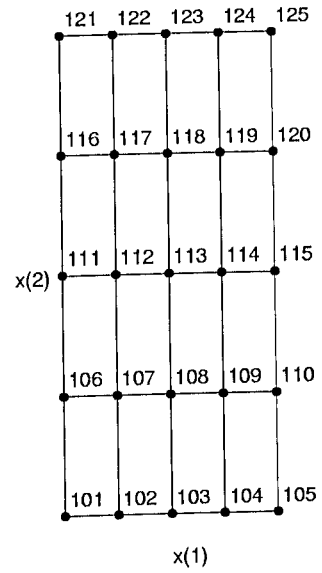
Fig. 5.2.a: Plano  $x(3)=0$ Fig. 5.2.b: Plano  $x(3)=0.25$ Fig. 5.2.c: Plano  $x(3)=1$ 

*Figura 5.2. Esquema de numeração para os vértices hipercúbicos do paralelepípedo*

onde as coordenadas  $l$  associadas ao vetor poderão ser expressas em termos das coordenadas  $(i_1, i_2, \dots, i_n)$  por meio da seguinte relação bijetiva

$$\begin{aligned} l &:= l(i_1, i_2, \dots, i_n) \\ &= i_1 + m_1 i_2 + m_1 m_2 i_3 + \dots + m_1 m_2 \dots m_{n-1} i_n. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Nas Figs. 5.2a–5.2c é mostrado como o mapeamento da representação das  $n$ –coordenadas para o vetor de coordenadas  $l$  pode ser construído (aqui, considera-se  $n = 3$ ,  $m_1, m_2, m_3 = 5$ ). Extensão para  $n$  e  $m_k$  arbitrários é sistemática.

Com a discretização acima descrita, ferramentas apropriadas serão desenvolvidas para lidar com o problema de linearização aproximada. Na seção seguinte, estas ferramentas serão utilizadas para a avaliação numérica das derivadas direcionais.

### 5.0.1 Avaliação Numérica das Derivadas Direcionais

Para facilidade de visualização, será suposto que o espaço  $X$  tenha dimensão igual a 3. Também, será considerado que cada coordenada tenha sido discretizada em 3 níveis. Uti-

lizando coordenadas  $l$  em (5.7), a função vetorial discreta em (5.6) pode ser representada da forma:

$$\hat{\omega} = [\hat{\omega}_{111} \ \hat{\omega}_{112} \ \hat{\omega}_{113} \ \hat{\omega}_{121} \ \hat{\omega}_{122} \ \hat{\omega}_{123} \ \hat{\omega}_{131} \ \hat{\omega}_{132} \ \hat{\omega}_{133} \ \hat{\omega}_{211} \ \dots \ \hat{\omega}_{233} \ \hat{\omega}_{311} \ \dots \ \hat{\omega}_{333}] \quad (5.8)$$

Seja  $D_1$  a representação matricial da derivada parcial ao longo das coordenadas  $x_{i1}^{(1)}$ , obtida através de um dos esquemas de interpolação descritos anteriormente. Em resultado da aplicação do operador derivada em conexão com a versão vetorizada do campo vetorial (5.8), resulta

$$\left. \frac{\partial \omega}{\partial x^{(1)}} \right|_l := \begin{bmatrix} D_1 [\hat{\omega}_{111} \ \hat{\omega}_{112} \ \hat{\omega}_{113}]^T \\ D_1 [\hat{\omega}_{121} \ \hat{\omega}_{122} \ \hat{\omega}_{123}]^T \\ D_1 [\hat{\omega}_{131} \ \hat{\omega}_{132} \ \hat{\omega}_{133}]^T \\ D_1 [\hat{\omega}_{211} \ \hat{\omega}_{212} \ \hat{\omega}_{213}]^T \\ D_1 [\hat{\omega}_{221} \ \hat{\omega}_{222} \ \hat{\omega}_{223}]^T \\ D_1 [\hat{\omega}_{231} \ \hat{\omega}_{232} \ \hat{\omega}_{233}]^T \\ D_1 [\hat{\omega}_{311} \ \hat{\omega}_{312} \ \hat{\omega}_{313}]^T \\ D_1 [\hat{\omega}_{321} \ \hat{\omega}_{322} \ \hat{\omega}_{323}]^T \\ D_1 [\hat{\omega}_{331} \ \hat{\omega}_{332} \ \hat{\omega}_{333}]^T \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

Os índices  $l$  indicam que as derivadas são avaliadas sobre as coordenadas  $l$ . Seja utilizado o símbolo  $D^{(1)}$  para a representação da derivada parcial com relação a  $x^{(1)}$ , tomada sobre todas as coordenadas  $l$  dos vértices dos hipercubos do paralelepípedo. Então de (5.9), segue-se

$$\left. \frac{\partial \omega}{\partial x^{(1)}} \right|_l := D^{(1)} \times \hat{\omega} = (I_3 \otimes I_2 \otimes D_1) \times \hat{\omega}, \quad (5.10)$$

onde

$$D^{(1)} = \begin{bmatrix} D_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_1 \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

sendo que os zeros representam blocos de zeros de dimensões apropriadas. Utilizando produtos de Kronecker, a matriz  $D^{(1)}$  pode ser representada da forma compacta

$$D^{(1)} = I_3 \otimes I_2 \otimes D_1. \quad (5.12)$$

onde  $I_1, I_2, I_3$ , representam matrizes-identidade de dimensões apropriadas ( $m_1 \times m_1, m_2 \times m_2, m_3 \times m_3$ , respectivamente, no caso aqui considerado, todas são  $3 \times 3$ ). Para as aproximações discretas das derivadas parciais com respeito às outras coordenadas, usando raciocínio similar, as seguintes matrizes podem ser escritas:

$$D^{(2)} = I_3 \otimes D_2 \otimes I_1, \quad D^{(3)} = D_3 \otimes I_2 \otimes I_1 \quad (5.13)$$

onde  $D_1, D_2, D_3$ , são matrizes de dimensões apropriadas ( $m_1 \times m_1, m_2 \times m_2, m_3 \times m_3$ , respectivamente). Agora, generalizando as fórmulas (5.12)-(5.13) para dimensões arbitrárias, seguindo os mesmos passos, obtém-se:

$$D^{(k)} = I_n \otimes \dots \otimes I_{k+1} D_k \otimes I_{k-1} \otimes \dots \otimes I_1, \quad (5.14)$$

### 5.0.2 aproximação Discreta para as Derivadas Direcionais

Agora, a representação discreta para a derivada da função  $\zeta(x)$  ao longo do campo vetorial  $\xi(x)$ ,  $\frac{\partial \zeta}{\partial x} \times \xi$ , pode ser obtida. Seja "  $\odot$  " utilizado para denotar o produto coordenada por coordenada (produto de Hadamard) entre dois vetores. Escrevendo a derivada direcional como a soma

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} \times \xi = \sum_{s=1}^n \xi_s(x) \frac{\partial \zeta}{\partial x^{(s)}}, \quad (5.15)$$

e utilizando aproximações para as derivadas parciais <sup>1</sup> .

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \zeta}{\partial x} \times \xi \right|_l &:= \Xi \hat{\zeta} = \sum_{s=1}^n \hat{\xi}_s \odot (D^{(s)} \hat{\zeta}) \\ &= \sum_{s=1}^n \text{diag}(\hat{\xi}_s) (D^{(s)} \hat{\zeta}) = \left[ \sum_{s=1}^n \text{diag}(\hat{\xi}_s) D^{(s)} \right] \hat{\zeta}, \end{aligned} \quad (5.16)$$

Com simples inspeção da equação acima, tira-se a representação matricial para a aproximação da derivada direcional ao longo do campo vetorial  $\xi(x)$ :

$$\Xi = \sum_{s=1}^n \left[ \text{diag}(\hat{\xi}_s) D^{(s)} \right] \quad (5.17)$$

Na seção seguinte, com o auxílio da representação matricial para a derivada direcional (5.17) acima, serão deduzidas equações vetorizadas para o erro de linearização.

## 5.1 EQUAÇÕES VETORIZADAS PARA O ERRO DE LINEARIZAÇÃO

Sejam  $A = (a_{ij})$ ,  $B = (b_i)$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$  a representação do sistema linearizado no espaço de estados com respeito a um novo conjunto apropriado de coordenadas,  $z = \Theta(x)$ , e seja

<sup>1</sup> É fácil verificar que, se  $d$  é o produto algébrico de  $f$  com  $g$ , ou seja, a versão discreta pode ser escrita,  $\hat{d} = \hat{f} \odot \hat{g} = \hat{g} \odot \hat{f}$ , então pode, também, ser escrita como uma das relações matriz-vetor  $\hat{d} = \text{diag}(\hat{f}) \times \hat{g} = \text{diag}(\hat{g}) \times \hat{f}$

$u = \alpha(x) + \beta(x) v$  como em (2.2). A versão contínua do erro de linearização pode ser escrita para  $i = 1, 2, \dots, n$ ,

$$e^{(i)} = \frac{\partial z^{(i)}}{\partial x} (f + g\alpha + g\beta v) - \sum_{j=1}^n a_{ij} z^{(j)} - b_i v, \quad (5.18)$$

cujas versão discreta pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \hat{e}^{(i)} &= \sum_{s=1}^n \text{diag}(\hat{f}_s) D^{(s)} \hat{z}^{(i)} - \sum_{j=1}^n a_{ij} \hat{z}^{(j)} \\ &+ \sum_{s=1}^n \text{diag}(\hat{\alpha} \odot \hat{g}_s) D^{(s)} \hat{z}^{(i)} \\ &+ \sum_{s=1}^n \text{diag}(\hat{v} \odot \hat{\beta} \odot \hat{g}_s) D^{(s)} \hat{z}^{(i)} - b_i \hat{v}, \end{aligned} \quad (5.19)$$

onde  $\hat{\alpha}$  y  $\hat{\beta}$  são os vetores definidos abaixo:

$$\hat{\alpha} = [\hat{\alpha}_1 \ \hat{\alpha}_2 \ \dots \ \hat{\alpha}_m], \quad (5.20)$$

$$\hat{\beta} = [\hat{\beta}_1 \ \hat{\beta}_2 \ \dots \ \hat{\beta}_m]. \quad (5.21)$$

Fazendo uso de algumas propriedades dos produtos de Hadamard, pode-se obter

$$\begin{aligned} \hat{e}^{(i)} &= (\Phi + \text{diag}(\hat{\alpha}) \Gamma) \hat{z}^{(i)} - \sum_{j=1}^n a_{ij} \hat{z}^{(j)} \\ &+ \text{diag}(\hat{v}) \text{diag}(\hat{\beta}) \Gamma \hat{z}^{(i)} - b_i \hat{v}. \end{aligned} \quad (5.22)$$

onde  $\Phi$  e  $\Gamma$  são as aproximações discretas para as derivadas direcionais ao longo dos campos vetoriais  $f$  e  $g$ , ou seja

$$\Phi = \sum_{s=1}^n \text{diag}(\hat{f}_s) \times D^{(s)}, \quad (5.23)$$

$$\Gamma = \sum_{s=1}^n \text{diag}(\hat{g}_s) \times D^{(s)}, \quad (5.24)$$

Separando os termos  $\hat{v}$  e usando (5.22) para  $\hat{z}^{(1)}, \hat{z}^{(2)}, \dots, \hat{z}^{(n)}$ , resulta o seguinte par de equações compactas para o erro de linearização:

$$\hat{E}_z = (\Phi + \text{diag}(\hat{\alpha}) \Gamma) \hat{Z} - \hat{Z} A^T, \quad (5.25)$$

$$\hat{E}_v = \text{diag}(\hat{\beta}) \Gamma \hat{Z} - B^T \otimes d_m, \quad (5.26)$$

onde  $d_m$  e  $\hat{Z}$  são as matrizes  $m \times 1$  e  $m \times n$  abaixo definidas:

$$d_m = [1 \ 1 \ \dots \ 1]^T, \quad (5.27)$$

$$\hat{Z} = [\hat{z}^{(1)} \ \hat{z}^{(2)} \ \dots \ \hat{z}^{(n)}]^T. \quad (5.28)$$

## CAPÍTULO VI

### RESOLVENDO AS EQUAÇÕES DO ERRO

Para formular um algoritmo eficiente para resolver o par de equações (5.25, 5.26), primeiro deve-se considerar que o sistema linearizado na forma de Brunowsky,

$$[A : B] = \begin{bmatrix} 0 & I_{n-1} & : & 0 \\ 0 & 0 & & 1 \end{bmatrix}, \quad (6.1)$$

onde os zeros representam blocos de zeros de dimensões apropriadas. Então de (5.25, 5.26), as seguintes condições resultam

$$\Gamma \hat{z}^{(i)} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad (6.2)$$

$$\hat{\beta} \odot (\Gamma \hat{z}^{(n)}) = d_m. \quad (6.3)$$

Considerando, as condições (6.2, 6.3), então (5.25, 5.26) podem ser escritas

$$\Phi \hat{z}^{(i)} - \hat{z}^{(i+1)} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad (6.4)$$

$$\Phi \hat{z}^{(n)} + \hat{\alpha} \odot (\Gamma \hat{z}^{(n)}) = 0. \quad (6.5)$$

Eliminando os vetores  $z^{(2)}, z^{(3)}, \dots, z^{(n)}$  de (6.4), consegue-se primeiramente

$$M \hat{z}^{(1)} = 0, \quad (6.6)$$

onde

$$M = \begin{bmatrix} \Gamma \\ \Gamma\Phi \\ \vdots \\ \Gamma\Phi^{n-2} \end{bmatrix}. \quad (6.7)$$

Agora, os vetores associados às coordenadas  $\alpha$  e  $\beta$  e os vetores linearizantes podem ser providos a partir das seguintes relações

$$\hat{z}^{(i+1)} = \Phi \hat{z}^{(i)}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad (6.8)$$

$$\hat{\alpha} = - \left( \Phi^n \hat{z}^{(1)} \right) / \left( \Gamma \Phi^{n-1} \hat{z}^{(1)} \right). \quad (6.9)$$

$$\hat{\beta} = d_m / \left( \Gamma \Phi^{n-1} \hat{z}^{(1)} \right), \quad (6.10)$$

onde os traços de fração denotam a divisão de vetores coordenada por coordenada.

## 6.1 SOLUÇÃO COMPUTACIONAL PARA $Mz^{(1)} \approx 0$

Primeiramente, apresentamos o procedimento baseado nos quadrados mínimos para resolver o sistema homogêneo.

Em se tratando de um sistema genericamente inconsistente, em vez de se resolver  $Mz^{(1)} = 0$ , será buscada a solução para o seguinte problema dos quadrados mínimos:

$$\underset{z^{(1)}}{Min} \quad \frac{\|Mz^{(1)}\|}{\|z^{(1)}\|} \quad (6.11)$$

Como é conhecido na literatura (GOLUB e LOAN, 1989), a solução mais precisa para tal problema pode se derivada mediante o algoritmo decomposição em valores singulares

(*SVD*). Contudo, tal algoritmo tem um custo um tanto elevado. Além disso, uma das etapas do algoritmo *SVD* envolve o cálculo de valores espectrais que não desfruta da mesma estabilidade de outros métodos de fatoração, como a fatoração QR, por exemplo. Por isso, neste texto apresenta-se o algoritmo baseado na fatoração QR que tem sido utilizado com sucesso para substituir o algoritmo *SVD*. Sua eficácia tem sido bem comprovada na prática acompanhando de perto a eficiência do algoritmo *SVD*. Exemplos apresentados na continuação do texto confirmam esta afirmativa.

### Algoritmo 1

*Suponha-se, como é o caso de interesse, que a matriz  $M$  possua o número de linhas maior que o número de colunas. Sabe-se que o uso de tal fatoração conduz a uma matriz  $R$  com os elementos diagonais com valores absolutos decrescentes. Além disso, sendo o posto da matriz defectivo, ocorrerá que as últimas linhas da matriz  $R$  anular-se-ão.*

1. *Dada a matriz  $M$ , obtenha a seguinte fatoração QR:*

$$M = Q R P^T;$$

- *onde  $Q$  é uma matriz ortogonal com a mesma dimensão da matriz  $M$ ,*
- *$R$  é uma matriz triangular superior;*
- *$P$  é uma matriz permutação.*

2. *Observando os valores decrescentes dos elementos diagonais de  $R$ , utilize um critério baseado em uma determinada tolerância para considerar algumas linhas da matriz  $R$  como nulas. Seja  $\tilde{n}$  o número dessas linhas.*
3. *Particione-se a matriz  $R$  da forma:*

$$R = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ 0 & R_{22} \end{bmatrix}$$

*onde  $R_{22}$  é o bloco  $\tilde{n} \times \tilde{n}$  a ser desprezado.*

4. Tomando  $z^{(1)}$  da forma

$$\tilde{z}_i = [\tilde{d}_i^T \quad \tilde{e}_i^T]^T \quad i = 1, 2, \dots, \tilde{n}.$$

onde  $\tilde{e}_i$  é um vetor canônico com um "1" na posição  $i$  e  $\tilde{d}_i$  é a parte do vetor  $\tilde{z}_i$  a ser determinada.

5. Para determinar o sub-vetor  $\tilde{d}_i$ , resolva o sistema

$$R_{11}\tilde{d}_i = -R_{12}\tilde{e}_i.$$

6. Juntando ao vetor  $\tilde{z}_i$  a parte acima determinada, obtenha uma das colunas da solução homogênea aproximada, usando a relação de permutação

$$z_i = P \tilde{z}_i.$$

À saída do algoritmo, tem-se a aproximação para o subespaço associado à solução homogênea:

$$\hat{Z}^{(1)} = [z_1 \ z_2 \ \dots \ z_{\tilde{n}}]. \quad (6.12)$$

#### 6.1.1 Exemplo

Para a matriz  $M_1$  dada abaixo, resolva o sistema homogêneo  $M_1 z \approx 0$  usando os algoritmos  $QR$  e  $SVD$ .

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0.32 & 0.24 & 1.04 & 333.69 \\ 0.08 & 1.57 & 40.72 & 252.98 \\ 86.37 & 3.02 & 0.23 & 235.11 \\ 0.29 & 0.36 & 3.50 & 251.38 \\ 12.61 & 17.09 & 52.81 & 545.87 \\ 3.09 & 93.49 & 3.87 & 169.86 \\ 0.17 & 65.70 & 18.15 & 364.57 \\ 0.80 & 0.65 & 42.02 & 61.22 \end{bmatrix}; \quad (6.13)$$

Ora, para a primeira matriz, a fatoração  $QR$  fornece o seguinte resultado

$$M_1 = Q_1 R_1 P_1^T \quad (6.14)$$

onde as matrizes  $Q$ ,  $P$  e  $R$  são apresentadas abaixo

$$Q_1 = \begin{bmatrix} -0.3834 & -0.2201 & 0.1794 & -0.4709 \\ -0.2907 & -0.1530 & 0.1361 & 0.3807 \\ -0.2702 & -0.1265 & -0.9482 & -0.0396 \\ -0.2889 & -0.1640 & 0.1343 & -0.3042 \\ -0.6273 & -0.1930 & 0.1205 & 0.2438 \\ -0.1952 & 0.8218 & -0.0717 & 0.0046 \\ -0.4189 & 0.4141 & 0.1094 & -0.0806 \\ -0.0703 & -0.0343 & 0.0229 & 0.6880 \end{bmatrix} \quad (6.15)$$

$$R_1 = \begin{bmatrix} -870.2311 & -58.0064 & -32.2048 & -57.7507 \\ 0 & 99.9820 & -10.9106 & -7.9982 \\ 0 & 0 & -80.4550 & 15.0152 \\ 0 & 0 & 0 & 54.2762 \end{bmatrix} \quad (6.16)$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.17)$$

Usando o algoritmo acima, chega-se à seguinte solução  $z_{gr}$  abaixo. A título de comparação, apresenta-se ao lado da mesma a solução que se obtém utilizando o algoritmo  $SVD$ ,  $z_{svd}$ .

$$z_{qr} = \begin{bmatrix} 0.18201872498152 \\ 0.09788345204656 \\ 0.97529818383142 \\ -0.07798375591553 \end{bmatrix} \quad z_{svd} = \begin{bmatrix} -0.31437971278592 \\ -0.15161918080171 \\ -0.93334042541348 \\ 0.08398017915341 \end{bmatrix} \quad (6.18)$$

O erro associado à pseudo-solução quando se utiliza o algoritmo  $QR$  é igual a (52.9355), sendo apenas um pouco menor que no caso de se utilizar o algoritmo  $SVD$  (52.0742). Compare-se agora os métodos resolvendo o sistema homogêneo quase consistente para a matriz  $M_2$  abaixo,

$$M_2 = \begin{bmatrix} 0.73 & 84.07 & 4.84 & 4.42 \\ 0.34 & 3.15 & 35.36 & 25.42 \\ 0.42 & 1.25 & 0.35 & 0.54 \\ 1.14 & 10.48 & 7.74 & 6.35 \\ 0.16 & 0.28 & 2.15 & 1.64 \\ 0.32 & 15.17 & 1.92 & 1.67 \\ 1.77 & 2.67 & 0.18 & 1.35 \\ 0.68 & 0.20 & 0.36 & 0.72 \end{bmatrix} \quad (6.19)$$

Neste caso, os resultados obtidos com o uso dos algoritmos  $QR$  e  $SVD$  são praticamente indistinguíveis. São estes os resultados:

$$R = \begin{bmatrix} -86.1769 & -7.3119 & -0.9826 & -6.3640 \\ 0 & -35.8998 & -0.5254 & -25.9134 \\ 0 & 0 & -2.1462 & -1.4639 \\ 0 & 0 & 0 & -0.0048 \end{bmatrix} \quad (6.20)$$

$$z_{qr} = \begin{bmatrix} -0.48571933123431 \\ -0.00403953187118 \\ -0.50691086703479 \\ 0.71211079638606 \end{bmatrix} \quad z_{svd} = \begin{bmatrix} -0.48572025763540 \\ -0.00403951687076 \\ -0.50691055984336 \\ 0.71211038325905 \end{bmatrix} \quad (6.21)$$

A seguir, se apresenta uma proposição que trata da solução polinomial exata para sistemas de uma só entrada.

## 6.2 EXISTÊNCIA DE SOLUÇÃO EXATA

**Proposição 1** *Para a existência de solução polinomial exata de ordem  $a = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  para o problema de linearização exata via realimentação de estados para o sistema dinâmico não linear de uma única entrada, descrito por (2.1), as condições seguintes são necessárias:*

1. a equação (6.6) é consistente
2. existe um elemento  $\zeta^*$ , tal que, com  $\hat{z}^{(1)} = \Xi \zeta^*$ , se verifica

$$\Gamma \Phi^{n-1} \hat{z}^{(1)} > 0, \quad (6.22)$$

onde  $\Xi$  é a matriz cujas colunas compõem o espaço solução de (6.6).

Demonstração:

A demonstração da primeira parte é óbvia e será omitida. Para provar a segunda parte, utilizar-se-á o seguinte argumento: escrevendo (6.3) da forma

$$\hat{\beta} \odot (\Gamma \Phi^{n-1} \hat{z}^{(1)}) = d_m, \quad (6.23)$$

em vista da continuidade da solução (solução polinomial no caso considerado), se para

qualquer par de amostras adjacentes, o ganho de ponderação de entrada  $\Gamma\Phi^{n-1}\hat{z}^{(1)}$  assume sinais distintos, invocando o teorema do valor intermediário, em algum ponto do intervalo, a ponderação de entrada anular-se-á.

NOTAS:

- Não há perda de generalidade em se assumir sinal positivo para (6.22). Claramente, se  $\Xi\zeta$  é solução particular,  $-\Xi\zeta$  também o é.
- No caso de não alternância de sinais entre um par de amostras adjacentes, o teorema do valor intermediário não garante que a função não se possa anular.
- Admitindo (5.25, 5.26) uma solução polinomial exata, claramente deve haver um vetor  $\zeta$ , tal que

$$\Gamma\Phi^{n-1}\Xi\zeta > 0. \quad (6.24)$$

Isto é estabelecido pelo teorema que vem a seguir.

**Teorema 3** *Se o problema (5.25, 5.26) admite uma solução polinomial exata, então, pelo menos existe um vetor que satisfaz a condição de não trivialidade (6.24).*

**Demonstração:** A prova é por contradição. Suponha-se que (5.25, 5.26) admita uma solução polinomial exata, mas que não exista um vetor  $\zeta$ , tal que, com a combinação  $\Xi\zeta$  para formar a primeira coordenada, não se verifique a condição de não trivialidade (6.24). Isso contradiz a hipótese do teorema. A prova se completa.

### 6.3 ESTABILIZAÇÃO DO SISTEMA

Após a transformação do sistema para um difeomorficamente equivalente à forma de Brunowsky, uma ação adicional de controle se faz necessária para estabilizar o sistema

malha fechada. Para este mister, a nova ação de controle assume a forma:

$$\hat{v} = \hat{Z}F + \hat{w},$$

onde  $F \in \mathbb{R}^n$  é um vetor de ganhos apropriado e  $w$  é a nova referência do sistema. Simplesmente, raciocinando em termos do modelo linear

$$\dot{z} = Az + Bv, \quad v = F^T z + w. \quad (6.25)$$

Deve-se eleger o vetor  $F$  com o objetivo de posicionar os pólos da matriz  $(A + BF^T)$  em um lugar adequado do plano complexo. Esse procedimento pode ser levado a cabo com a utilização do seguinte algoritmo:

- Algoritmo 2**
1. Para o sistema afim de uma só entrada descrito por (2.1), amostrado conforme (5.2), (5.3), (5.6) e 5.7), construa as matrizes  $\Phi$ ,  $\Gamma$  e  $M$  como mostrado em (5.23), (5.24) e (6.7). Resolva o sistema homogêneo (6.6) para poder expressar a solução da forma:  $\hat{z}^{(1)} = \Xi \hat{\zeta}$ .
  2. Encontre uma solução de sinal definido, quer dizer, avalie  $\hat{\zeta}^*$ , tal que  $\Gamma \Phi^{n-1} \Xi \hat{\zeta}^* > 0$
  3. Tome os vetores associados às coordenadas  $z$  como

$$\hat{z}^{(1)} = \Xi \hat{\zeta}^* \quad (6.26)$$

$$\hat{z}^{(i+1)} = \Phi \hat{z}^{(i)}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1. \quad (6.27)$$

4. Avalie os vetores linearizantes usando (6.8), (6.9) e (6.10), adaptando (6.9) para incluir as ações linearizante e estabilizante, ou seja

$$\hat{\alpha} = -\Phi^n \hat{z}^{(1)} / \Gamma \Phi^{n-1} \hat{z}^{(1)} + \hat{Z}F. \quad (6.28)$$

## CAPÍTULO VII

### ALGORITMOS PARA INTERPOLAÇÃO TABULAR MULTIDIMENSIONAL

Neste capítulo, será mostrado primeiramente que o problema de interpolação  $n$ -dimensional pode ser reduzido a diversos problemas de interpolação uni-dimensionais. Outro problema que será resolvido diz respeito à adaptação do esquema de interpolação às coordenadas vetorizadas utilizadas ao longo deste texto. Ainda outro problema será abordado e que será definido mais à frente, o problema de interpolação inversa para mapeamentos difeomórficos. O ponto culminante deste capítulo será a apresentação de algoritmos eficientes para os problemas de interpolação estudados.

Algoritmos de interpolação multidimensional possuem alguns aspectos simples do ponto de vista analítico. Por exemplo, é uma tarefa simples generalizar o método de interpolação de Lagrange para uma função qualquer de  $n$ -variáveis. A seguir, apresentar-se-á a fórmula de interpolação  $n$ -dimensional:

#### 7.1 FÓRMULA DE INTERPOLAÇÃO $n$ -DIMENSIONAL

Considere-se uma função de  $n$ -variáveis  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  com os seus valores conhecidos ao longo de uma grade multidimensional de pontos

$$P_{i_1 i_2 \dots i_n} := P(x_{1, i_1} x_{2, i_2} \dots x_{n, i_n}) \quad (7.1)$$

com  $i_1 = 1, 2, \dots, p_1; i_2 = 1, 2, \dots, p_2; \dots, i_n = 1, 2, \dots, p_n$ . Logo, o polinômio de  $n$ -variáveis dado abaixo é o polinômio interpolador de grau  $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  que interpola  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  no paralelepípedo, que contém os pontos  $P_{i_1 i_2 \dots i_n}$  e que, passa por cada um dos pontos dessa grade multidimensional.

$$\begin{aligned}
 f_{i_1 i_2 \dots i_n} &:= f(x_1, x_2, \dots, x_n)|_{emP_{i_1 i_2 \dots i_n}} \\
 &= g_{p_1 p_2 \dots p_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)|_{emP_{i_1 i_2 \dots i_n}},
 \end{aligned} \tag{7.2}$$

onde

$$\begin{aligned}
 &g_{p_1 p_2 \dots p_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) \\
 &= \sum_{k_1=1}^{p_1} \sum_{k_2=1}^{p_2} \dots \sum_{k_n=1}^{p_n} f_{k_1 k_2 \dots k_n} \theta_{k_1 k_2 \dots k_n}(x_1, x_2, \dots, x_n),
 \end{aligned} \tag{7.3}$$

sendo os polinômios elementares de Lagrange  $n$ -dimensionais dados por

$$\begin{aligned}
 &\theta_{k_1 k_2 \dots k_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \\
 &\frac{\prod_{\substack{i_1=1 \\ i_1 \neq k_1}}^{p_1} (x_1 - x_{1,i_1}) \prod_{\substack{i_2=1 \\ i_2 \neq k_2}}^{p_2} (x_2 - x_{2,i_2}) \dots \prod_{\substack{i_n=1 \\ i_n \neq k_n}}^{p_n} (x_n - x_{n,i_n})}{\prod_{\substack{i_1=1 \\ i_1 \neq k_1}}^{p_1} (x_{1,k_1} - x_{1,i_1}) \prod_{\substack{i_2=1 \\ i_2 \neq k_2}}^{p_2} (x_{2,k_2} - x_{2,i_2}) \dots \prod_{\substack{i_n=1 \\ i_n \neq k_n}}^{p_n} (x_{n,k_n} - x_{n,i_n})}
 \end{aligned} \tag{7.4}$$

Escrever uma tal fórmula mais parece uma questão de paciência, podendo a mesma ser reproduzida em questão de minutos porquanto trata-se duma repetição para a dimensão maior das várias facetas da fórmula de interpolação unidimensional. Contudo, do ponto de vista computacional, para programar uma tal fórmula, se estaria na dependência de uma linguagem que permitisse o endereçamento  $n$ -dimensional.

Nas seções seguintes serão apresentados algoritmos que permitem lidar com o problema de interpolação  $n$ -dimensional fazendo uso do endereçamento vetorial. Assim, antes de entrar no algoritmo, as amostras referentes ao problema  $n$ -dimensional deverão ser vetorizadas, de acordo com o esquema de vetorização que foi descrito no capítulo 5, por exemplo.

## 7.2 PROBLEMA DE INTERPOLAÇÃO DIRETA

Serão considerados dois problemas básicos de interpolação. Primeiro, o problema de interpolação direta, que será considerado nesta seção e consiste em se estimar os valores de uma função a partir de valores dados em uma tabela  $n$ -dimensional usando um polinômio interpolador de determinado grau. O segundo é o problema de interpolação inversa que consiste em se estimar o argumento de um mapeamento difeomórfico dado por  $n$  tabelas  $n$ -dimensionais, dada uma  $n$ -upla de valores associados às funções coordenadas.

### 7.2.1 Definindo a Interpolação Direta

Considere-se uma grade  $n$ -dimensional com valores de uma função de  $n$  variáveis (valores tabulares) associados a cada um dos pontos da grade que chamaremos de vértices, visto que naturalmente estão associados aos vértices de hipercubos  $n$ -dimensionais. O problema direto consiste em se avaliar o valor da função em algum ponto intermediário, i.e., em um ponto que não pertença a um dos vértices a partir dos valores tabulares.

### 7.2.2 Método de Reduções Sucessivas

Suponha-se que cada variável  $x_i$  tenha sido amostrada em  $m_i$  pontos segundo o esquema descrito em (5.4), (5.6) e (5.7). Neste caso, o número de pontos da tabela  $n$ -dimensional será igual a  $\tau = m_1 \times m_2 \times \dots \times m_n$ .

Será suposto que para interpolar o valor da função  $\phi(x_1, x_2, \dots, x_n)$  se utilize um grau  $a = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ . Neste caso, escrevendo os polinômios elementares  $n$ -dimensionais de Lagrange da forma de produto de polinômios de Lagrange elementares,

$$\theta_{k_1 k_2 \dots k_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{s=1}^n \theta_{k_s}^{p_s}(x_s); \quad (7.5)$$

onde

$$\theta_{k_s}^{p_s}(x_s) := \frac{\prod_{i_s=1}^{p_s} (x_s - x_{s,i_s})}{\prod_{i_s=1}^{p_s} (x_{s,k_s} - x_{s,i_s})}, \quad i_s \neq k_s. \quad (7.6)$$

Após algumas manipulações simples, a fórmula de interpolação fica

$$g_{p_{i_1} i_2 \dots i_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{k_1=1}^{p_1} \sum_{k_2=1}^{p_2} \dots \sum_{k_{n-1}=1}^{p_{n-1}} f'_{k_1 k_2 \dots k_{n-1}} \prod_{s=1}^{n-1} \theta_{k_s}^s(x_s), \quad (7.7)$$

onde  $f'_{k_1 k_2 \dots k_{n-1}}$  representam interpolações de primeira ordem com relação à variável  $x_n$ , dadas por

$$f'_{k_1 k_2 \dots k_{n-1}} = \sum_{k_n=1}^{p_n} f_{k_1 k_2 \dots k_n} \theta_{k_n}^n(x_n). \quad (7.8)$$

Essas equações definem o método de reduções sucessivas. Segundo (7.8), após se efetuarem  $p_1 \times p_2 \times \dots \times p_{n-1}$  interpolações unidimensionais o problema se reduz ao problema de dimensão imediatamente inferior (7.7). Esse procedimento é iterado até que o problema se reduza a uma mera interpolação de Lagrange sobre um intervalo real simples. Efetuada essa última interpolação, ter-se-á o valor efetivo da função  $n$ -dimensional interpolada para o argumento dado.

Para ilustrar a aplicação do método de reduções sucessivas, será apresentado um exemplo simples no espaço a duas dimensões. Primeiro o problema será equacionado em termos das coordenadas cartesianas. Em seguida, serão apresentados os algoritmos em termos de coordenadas vetorizadas.

Seja a função

$$z = 10 \times \operatorname{sen} \left( \frac{\pi x}{2} \right) \times \cos \left( \frac{\pi x}{2} \right)$$

amostrada dentro do paralelepípedo  $x = [-1, 1], y = [-1, 1]$  com  $m_1 = m_2 = 6$ . Supõe-se que cada variável  $x_i$  tenha sido amostrada segundo o esquema descrito no capítulo 5. Neste caso, o número de pontos da tabela  $n$ -dimensional será igual a

$$\tau = m_1 \times m_2 \times \dots \times m_n.$$

Tabela 7.1. Valores tabulares para uma função de duas variáveis

|            | $x = -1.0$      | $x = -0.6$      | $x = -0.2$      | $x = 0.2$      | $x = 0.6$      | $x = 1.0$      |
|------------|-----------------|-----------------|-----------------|----------------|----------------|----------------|
| $y = -1.0$ | -5.0<br>(1)     | -3.2102<br>(2)  | -1.1062<br>(3)  | 1.1062<br>(4)  | 3.2102<br>(5)  | 5.0<br>(6)     |
| $y = -0.6$ | -6.3004<br>(7)  | -4.0451<br>(8)  | -1.3938<br>(9)  | 1.3938<br>(10) | 4.0451<br>(11) | 6.3004<br>(12) |
| $y = -0.2$ | -6.9840<br>(13) | -4.4840<br>(14) | -1.5451<br>(15) | 1.5451<br>(16) | 4.4840<br>(17) | 6.9840<br>(18) |
| $y = 0.2$  | -6.9840<br>(19) | -4.4840<br>(20) | -1.5451<br>(21) | 1.5451<br>(22) | 4.4840<br>(23) | 6.9840<br>(24) |
| $y = 0.6$  | -6.3004<br>(25) | -4.0451<br>(26) | -1.3938<br>(27) | 1.3938<br>(28) | 4.0451<br>(29) | 6.3004<br>(30) |
| $y = 1.0$  | -5.0<br>(31)    | -3.2102<br>(32) | -1.1062<br>(33) | 1.1062<br>(34) | 3.2102<br>(35) | 5.0<br>(36)    |

Para facilidade de manipulação numérica, os dados serão apresentados também na forma da tabela 7.1 (para  $p_1 = p_2 = 6$ ).

Considere-se o problema de se estimar por interpolação cúbica o valor não tabular da função correspondente à coordenada cartesiana  $(x, y) = (-0.4, 0.3)$ . No caso da interpolação cúbica uni-dimensional, para interpolar a função em um ponto  $x$  qualquer, utilizam-se quatro valores. Sempre que possível, deve-se naturalmente utilizar o valor mais central. Isso implicaria se utilizarem dois valores à esquerda e dois valores à direita. No caso aqui considerado, de interpolação bi-dimensional, o esquema de interpolação deverá envolver, sempre que possível

Número de coordenadas =  
 ( duas coordenadas a esquerda + duas coordenadas a direita )  
 $\times$  ( duas coordenadas acima + duas coordenadas abaixo )  
 $4 \times 4 = 16$ .

Caso o ponto a ser interpolado se encontre próximo a um dos vértices, o número

Tabela 7.2. Restringindo valores tabulares ao sub-paralelepípedo de interpolação

|            | $x = -1.0$      | $x = -0.6$      | $x = -0.2$      | $x = 0.2$      |
|------------|-----------------|-----------------|-----------------|----------------|
| $y = -0.2$ | -6.9840<br>(13) | -4.4840<br>(14) | -1.5451<br>(15) | 1.5451<br>(16) |
| $y = 0.2$  | -6.9840<br>(19) | -4.4840<br>(20) | -1.5451<br>(21) | 1.5451<br>(22) |
| $y = 0.6$  | -6.3004<br>(25) | -4.0451<br>(26) | -1.3938<br>(27) | 1.3938<br>(28) |
| $y = 1.0$  | -5.0<br>(31)    | -3.2102<br>(32) | -1.1062<br>(33) | 1.1062<br>(34) |

de pontos a ser utilizado é semelhante, mudando apenas a distribuição geométrica dos mesmos.

Serão utilizados, portanto, 16 valores tabulares. Para facilitar a visualização, destacamos da tabela acima a sub-tabela com os valores tabulares a serem utilizados:

Primeiramente será mostrado, de forma construtiva, que as coordenadas vetorizadas que serão efetivamente utilizadas na avaliação do valor não tabular da função poderão ser escritas da forma:

$$C = V + p_f \quad (7.9)$$

onde

- $V$  a menor dentre as coordenadas dos vértices do sub-paralelepípedo de interpolação (no caso aqui considerado, igual a 13). Chamaremos o vértice  $V$  pelo nome de *vértice principal*.
- $p_f$  é uma lista dos valores fixos para cada grau ( $n$ -dimensional) de interpolação. Aqui, o grau é igual  $\{3, 3\}$ , que equivale a uma dupla especificação de interpolação cúbica.

Por inspeção, tiramos para esse exemplo:

$$p_f = \text{vec}(P_f) \quad (7.10)$$

onde  $\text{vec}(\cdot)$  significa que estão sendo tomadas as coordenadas vetorizadas de  $(\cdot)$ , sendo que, para esse exemplo:

$$P_f = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \\ 12 & 13 & 14 & 15 \\ 18 & 19 & 20 & 21 \end{bmatrix} \quad (7.11)$$

Quer dizer,  $p_f$  é obtido diretamente a partir da vetorização das coordenadas do sub-paralelepípedo aqui representado pela matriz  $P_f$ , que será designado pelo nome de *paralelepípedo fundamental*.

Deve-se observar que  $P_f$  é função dos parâmetros de amostragem ( $m_s = (m_1, m_2, \dots, m_n)$ ) e dos parâmetros de interpolação ( $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ ). Esta dependência pode então ser colocada da forma:

$$P_f = P_f((m_1, m_2, \dots, m_n), (a_1, a_2, \dots, a_n)) \quad (7.12)$$

A seguir, apresenta-se um esquema eficiente para o cálculo das coordenadas vetorizadas do paralelepípedo fundamental.

**Algoritmo 3** 1. Faça  $i = 0$ . Defina inicialmente  $m_0 := 1$ .  
 $m_1, m_2, \dots, m_n$  como o número de amostras para as coordenadas  $x_1, x_2, \dots, x_n$   
 $P_f := [0 \ 1 \ \dots \ a_1]^T$

2. Faça  $i = i + 1$ . Defina

$$L_f := \left( \prod_{k=0}^{i-1} m_k \right) \times [0 \ 1 \ \dots \ a_i]$$

A seguir, tome

$$P_f = \underbrace{[P_f \ P_f \ \dots \ P_f]}_{(a_i + 1) \text{ vezes}} + \left[ \begin{array}{c} L_f \\ L_f \\ \vdots \\ L_f \end{array} \right] \left. \vphantom{\begin{array}{c} L_f \\ L_f \\ \vdots \\ L_f \end{array}} \right\} \begin{array}{l} \text{Linhas Repetidas} \\ \left( \prod_{k=1}^{i-1} a_k \right) \text{ vezes} \end{array}$$

Tome  $p_f$  como  $p_f = \text{vec}(P_f)$ .

3. Se  $i = n - 1$ , pare. Caso contrário, volte para 2.)

O esquema computacional acima poderia ser apresentado de forma mais compacta utilizando produtos de Kronecker. Porém, da maneira acima, o esquema se apresenta mais transparente e eficiente do ponto de vista computacional.

Após a implementação do algoritmo acima para o problema proposto no início desta seção, obtém-se, como esperado:

$$p_f = [0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 12 \ 13 \ 14 \ 15 \ 18 \ 19 \ 20 \ 21]^T$$

Para facilidade de exposição, suponha-se que em vez das coordenadas vetorizadas esteja-se de posse das coordenadas cartesianas. No caso de uma grade de dimensão 2, como no exemplo considerado, podem-se efetuar interpolações cúbicas ao longo de uma das direções. Por exemplo, fixando  $y = 0.3$ , podem-se achar os valores de

|                 |                 |          |                      |
|-----------------|-----------------|----------|----------------------|
| $f(-0.4, -0.2)$ | Interpolando na | primeira | linha da tabela 7.2. |
| $f(-0.4, 0.2)$  | "               | segunda  | "                    |
| $f(-0.4, 0.6)$  | "               | terceira | "                    |
| $f(-0.4, 1.0)$  | "               | quarta   | "                    |

Como se pode ver no destaque na tabela acima, podem ser eliminadas as colunas anteriores, reduzindo-se o problema a um problema de interpolação sobre a reta dos reais.

Tabela 7.3. Destacando os pontos interpolados paralelamente ao eixo  $y$  com a eliminação da variável  $x$ 

|            | $x = -1.0$      | $x = -0.6$      | $x = -0.4$     | $x = -0.2$      | $x = 0.2$      |
|------------|-----------------|-----------------|----------------|-----------------|----------------|
| $y = -0.2$ | -6.9840<br>(13) | -4.4840<br>(14) | <b>-3.0524</b> | -1.5451<br>(15) | 1.5451<br>(16) |
| $y = 0.2$  | -6.9840<br>(19) | -4.4840<br>(20) | <b>-3.0524</b> | -1.5451<br>(21) | 1.5451<br>(22) |
| $y = 0.6$  | -6.3004<br>(25) | -4.0451<br>(26) | <b>-2.7536</b> | -1.3938<br>(27) | 1.3938<br>(28) |
| $y = 1.0$  | -5.0<br>(31)    | -3.2102<br>(32) | <b>-2.1852</b> | -1.1062<br>(33) | 1.1062<br>(34) |

Finalmente, interpolando com respeito à variável  $y$ , obtém-se  $f(-0.4, 03) = -3.0045$ . Note-se que até o número de decimais apresentado na tabela, o resultado exato seria  $f(-0.4, 03) = -3.0048$ .

Ora, o esquema acima utilizado é bastante geral e é bem fácil verificar-se que o mesmo funciona para qualquer dimensão. Tem-se à disposição os mesmos dados que os das coordenadas convencionais, só que empilhados, e organizados de certa forma. Assim, podem ser efetuadas as mesmas operações desde que o endereçamento seja devidamente corrigido para atender ao esquema vetorizado.

A seguir, será apresentado um algoritmo apropriado para efetuar a interpolação  $n$ -dimensional sobre as coordenadas vetorizadas. Basicamente são efetuadas as mesmas operações de interpolações que foram descritas acima, com a única diferença de se utilizar o endereçamento vetorizado obtido com o auxílio do algoritmo anterior.

#### Algoritmo 4 (Interpolação $n$ -dimensional sobre as coordenadas vetorizadas)

Sejam  $K_1, K_2, \dots, K_m$ , onde  $m = m_1 \times m_2 \times \dots \times m_n$ , as coordenadas vetorizadas associadas aos valores tabulares da função  $K$ , objeto da interpolação que será realizada,

1. Utilizando o algoritmo anterior, determine as coordenadas do paralelepípedo funda-

Tabela 7.4. Valores tabulares para problema monovariável resultante

|            |           |
|------------|-----------|
| $y = -0.2$ | $-3.0524$ |
| $y = 0.2$  | $-3.0524$ |
| $y = 0.6$  | $-2.7536$ |
| $y = 1.0$  | $-2.1852$ |

mental, pf .

- Determine a coordenada  $V$  do vértice principal associado ao ponto  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  a ser interpolado.
- Obtenha os valores associados ao paralelepípedo a ser usado na interpolação, usando

$$U = K (V + p_f) .$$

Defina, inicialmente como dimensão do paralelepípedo,

$$H = \prod_{i=1}^n (a_i + 1) .$$

- Faça  $i = 1, 2, \dots, n$  e elimine a  $i$ -ésima coordenada, efetuando a interpolação de Lagrange.

$$S = \sum_{j=1}^{a_i+1} \frac{\prod_{k \neq j} (x_i - X_i^k)}{\prod_{k \neq j} (X_i^j - X_i^k)} \times \begin{bmatrix} U(j) \\ U(a_i + 1 + j) \\ U(2(a_i + 1) + j) \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Atualize  $U$  e  $H$ , usando

$$\begin{aligned} U &= S \\ H &= \frac{H}{a_i + 1} . \end{aligned}$$

Assim, o esquema de interpolação direta deve envolver dois algoritmos. No primeiro, calculam-se as coordenadas vetorizadas do paralelepípedo fundamental. No segundo, recursivamente, vão sendo reduzidas as dimensões do paralelepípedo, até, por último, recair-se em um problema elementar de interpolação sobre a reta dos reais.

### 7.3 PROBLEMA DE INTERPOLAÇÃO INVERSA

#### Definindo a Interpolação Inversa

Esse problema parece menos comum na literatura. Seu uso menos freqüente talvez se deva à restrição que os objetos onde se lhes pode aplicar: As funções precisam ser bijetoras e possuir derivadas até certa ordem.

Considere-se uma grade  $n$ -dimensional com valores de uma função de  $n$  variáveis (valores tabulares) associados a cada um dos pontos da grade (vértices). O problema direto consiste em se avaliar o valor da função em algum ponto intermediário, i.e., em um ponto que não pertença a um dos vértices a partir dos valores tabulares. O problema inverso consiste em, dada uma  $n$ -upla de valores de um mapeamento bijetor e diferenciável até os graus definidos para cada uma das funções coordenadas, avaliar o argumento do tal mapeamento. Em termos simples,

$$\text{Dado : } \begin{cases} z^{(1)}(x) = z_0^{(1)}, \\ z^{(2)}(x) = z_0^{(2)}, \\ \vdots \\ z^{(n)}(x) = z_0^{(n)}, \end{cases} \quad \text{encontrar o valor de } x.$$

Ou de forma compacta:

$$\text{Dado } z = \Theta(x), \text{ achar } x = \Theta^{-1}(z).$$

Visando a obtenção de um algoritmo para esse problema, perturba-se a variável  $x$ , para se obter uma perturbação correspondente na variável  $z$ ,

$$z + \Delta z = \Theta(x + \Delta x) \approx \Theta(x) + \frac{\partial \Theta(x)}{\partial x} \times \Delta x.$$

Visto tratar-se de uma transformação difeomórfica, a matriz jacobiana resulta sempre inversível. Um problema que se teve que solucionar foi a obtenção de uma boa aproximação para a matriz jacobiana. A solução aplicada foi utilizar-se os algoritmos de interpolação direta para estimar uma boa aproximação para as entradas da matriz jacobiana, cada vez novas aproximações são obtidas para as coordenadas do campo vetorial  $z$ .

Logo abaixo, se apresenta uma implementação do algoritmo:

**Algoritmo 5** (*Interpolação inversa  $n$ -dimensional utilizando as coordenadas vetorizadas*)

*Sejam as colunas associadas às coordenadas vetorizadas do campo  $z = \Theta(x) = [z^{(1)}(x) \ z^{(2)}(x) \ \dots \ z^{(n)}(x)]^T$ , transformação difeomórfica do vetor  $x$ .*

*Seja a matriz por blocos*

$$\hat{D} = [\hat{D}^1 \ \hat{D}^2 \ \dots \ \hat{D}^n], \quad (7.13)$$

onde cada bloco  $\hat{D}^i$  é a matriz obtida mediante a aplicação da versão matricial do operador derivada parcial em relação à variável  $x^{(i)}$ . Dado um determinado valor da variável de estados transformada  $z_{in}$ , à saída do algoritmo, obtém-se o valor da variável de estados  $x_{in}$ , cuja transformada (a menos de erros de interpolação) equivale a  $z_{in}$ .

1. Faça  $x = x^0$ ,  $k = 0$ .

2. Enquanto  $\|z_{in} - z_k\| < \text{tolerância especificada}$ , faça o que se segue. Para o valor de  $x_k$ , utilize o algoritmo de interpolação direta para calcular

- Linha da matriz  $\hat{D}$ , aproximação de acordo com o grau de interpolação especificado para os elementos da matriz jacobiana.
- Linha da matriz  $Z$ , aproximações segundo o grau da interpolação especificada para os elementos do vetor transformado  $z$ .

Use o algoritmo de Newton-Raphson para atualizar o valor de  $x$ ,

$$x^{k+1} = x^k + J^{-1} (z_{in} - z^k),$$

onde  $J$  é a matriz jacobiana, obtida pelo arranjo da linha correspondente à interpolação da matriz  $\hat{D}$  (7.13) para o valor atual de  $x$  (ou seja,  $x_k$ ).

3. Se o erro for aceitável, pare. Caso contrário, volte para 2.

## CAPÍTULO VIII

### EXEMPLO

Considere-se o sistema descrito por

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_2 + \frac{1}{5}x_1x_2 \\ -2x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -10 \\ 3 + \cos\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right) \end{bmatrix} u \quad (8.1)$$

Usando as expressões para  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $g_1$ ,  $g_2$  acima, foram construídos as matrizes  $\Phi$ ,  $\Gamma$  e  $M$ . As funções coordenadas dos campos vetoriais  $f$  e  $g$  amostradas são exibidas na Fig.8.1. Com a tolerância utilizada,  $10^{-5}$ , obteve-se um espaço solução de dimensão 6, satisfazendo as condições de consistência. Uma combinação adequada foi tomada de forma a satisfazer a condição de não trivialidade. Com isso, obtiveram-se as novas coordenadas  $z^{(1)}$  e  $z^{(2)}$  e as funções linearizantes  $\alpha$  e  $\beta$  mostradas na Fig. 8.2.

Os pólos da malha fechada foram selecionados para estabilizar o sistema. O sistema malha-fechada foi simulado para um conjunto de condições iniciais representativas. Para cada posição  $x$  no espaço de estados foram construídos as funções de realimentação linearizantes ( $\alpha$  e  $\beta$ ) utilizando interpolação polinomial a partir dos valores discretos associados aos vértices das células hipercúbicas armazenados nos vetores  $\hat{\alpha}$  e  $\hat{\beta}$

Os resultados da simulação podem ser resumidos nos gráficos  $x_1 \times x_2$  mostrados na Fig.8.3.

Supondo que a transformação linearizante mais a ação da realimentação sejam exatas no interior do paralelepípedo, então, enquanto a trajetória do sistema permanecer no interior da região de interpolação, a estabilidade estará assegurada.

Uma vez que a trajetória escape da região de interpolação, o cálculo dos coeficientes da interpolação baseado no comportamento dinâmico no interior do paralelepípedo pode ser utilizado para aproximar a linearização do sistema na região exterior. Entretanto, dependendo da amplitude do afastamento da trajetória para longe da região de interpolação,

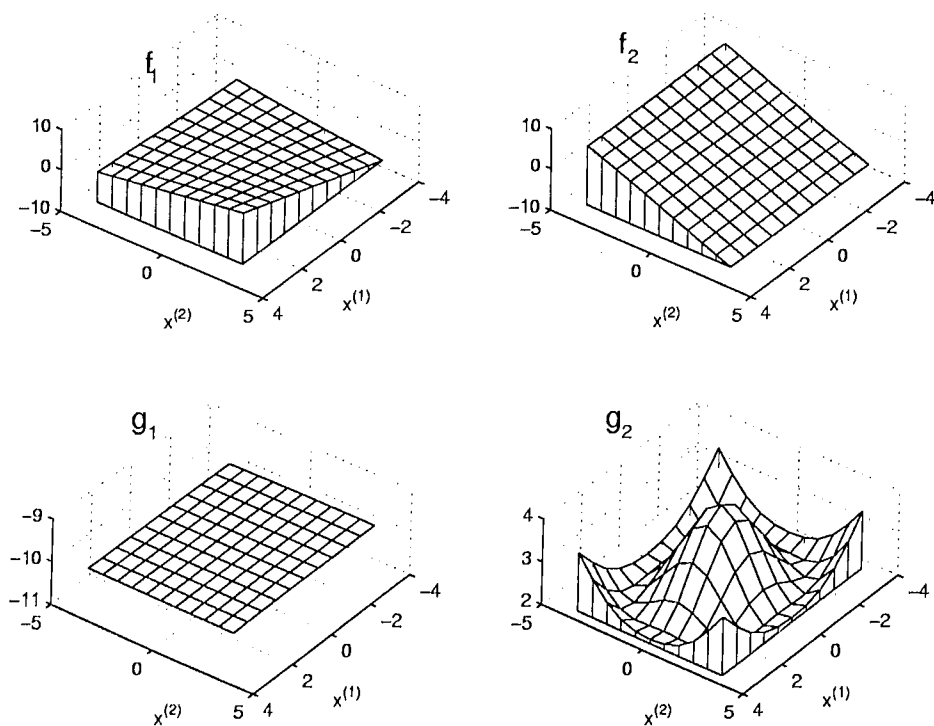


Figura 8.1. Amostragem dos campos vetoriais  $f$  e  $g$  de um sistema não linear típico

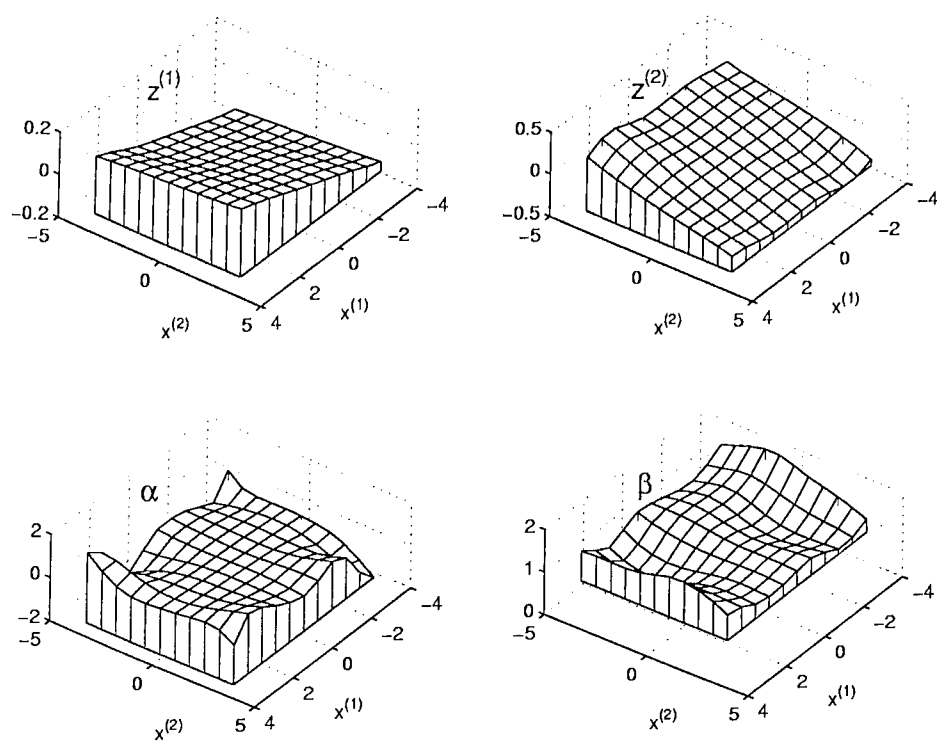


Figura 8.2. Possível transformação  $z = \{z^{(1)}, z^{(2)}\}$  e funções  $\alpha$  e  $\beta$  associadas

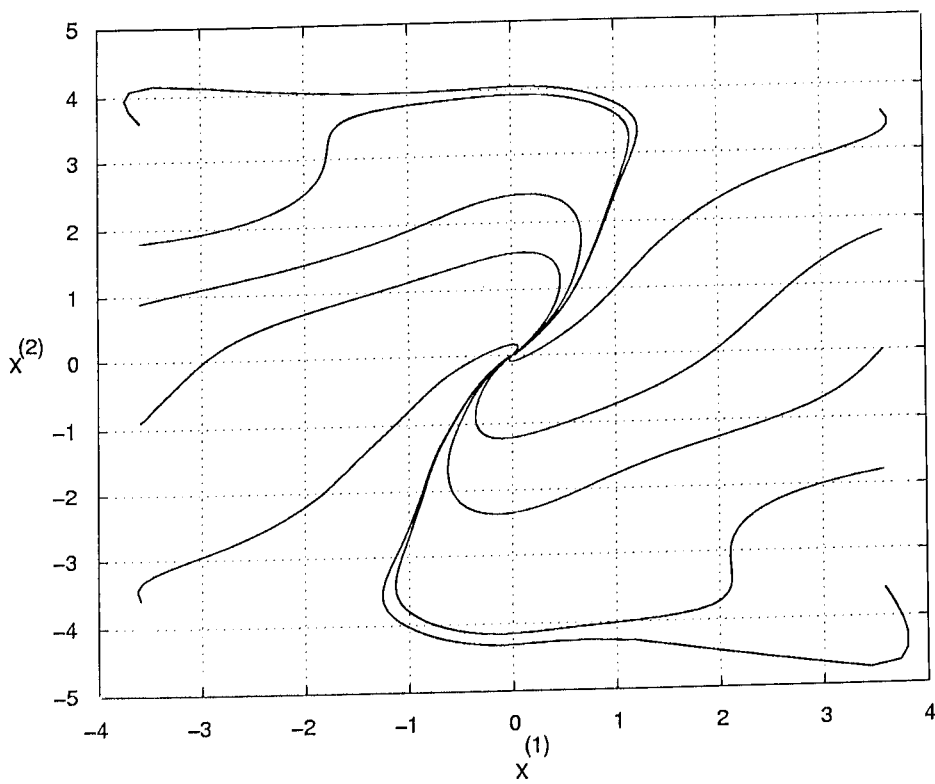


Figura 8.3. Trajetórias de estado para  $\Lambda = \{-0.8 + j0.4, -0.8 - j0.4\}$

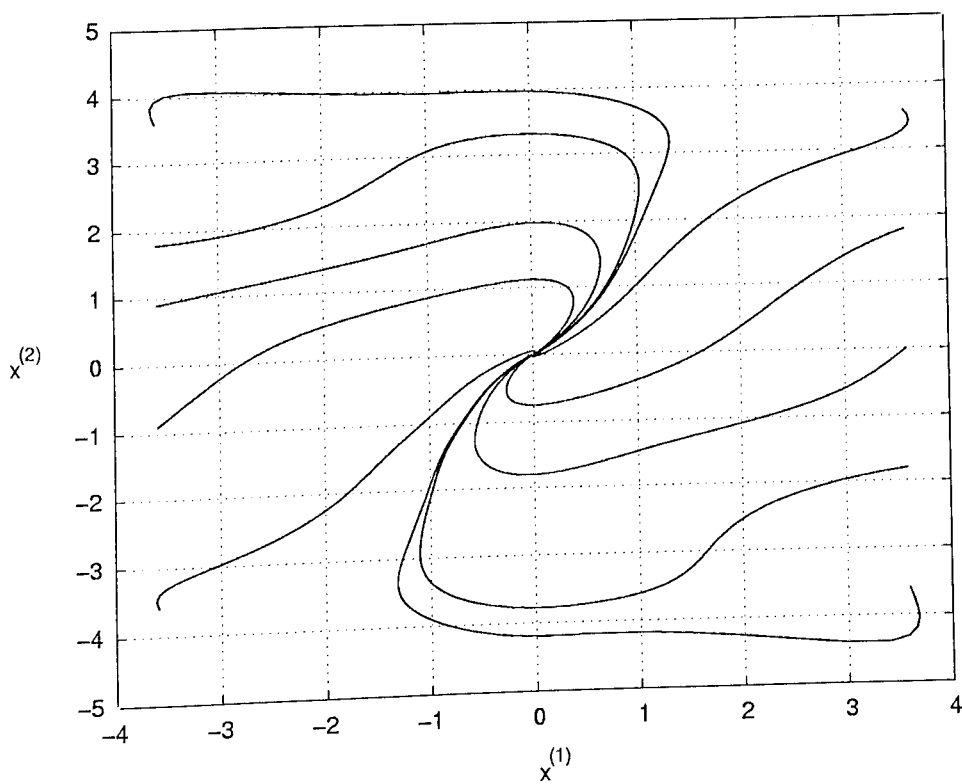


Figura 8.4. Trajetórias de estado para  $\Lambda = \{-1.0 + j0.5, -1.0 - j0.5\}$

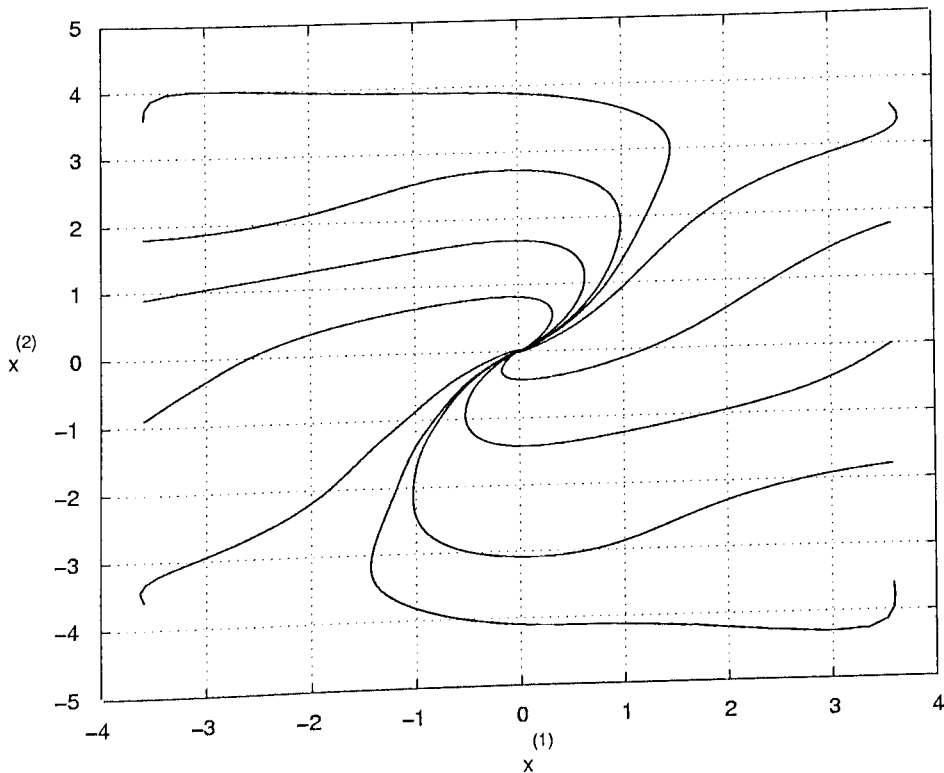


Figura 8.5. Trajetórias de estado para  $\Lambda = \{-1.2 + j0.6, -1.2 - j0.6\}$

talvez não mais ocorra a estabilidade. Este fato às vezes pode causar que a região efetiva de estabilidade seja menor que a região de interpolação.

Estes argumentos justificam a importância da seleção adequada dos pólos do sistema linearizado com o objetivo de limitar o sobredisparo das trajetórias do sistema, principalmente, próximo às fronteiras da região de interpolação. Na prática, como pode ser comprovado no exemplo considerado, com uma escolha adequada dos pólos da malha fechada, a região de estabilidade pode até ser ampliada.

## CAPÍTULO IX

### CONCLUSÕES

Neste trabalho, foi tratado o problema da linearização exata de um sistema não linear por meio da realimentação dos estados. Considerou-se o caso particular mas freqüente em Engenharia em que a equação dinâmica do sistema é afim com respeito ao vetor de controle. Para que se logre a linearização exata de um sistema não linear afim, alguns obstáculos necessitam ser transpostos. O primeiro obstáculo é decorrente do problema da medição ou estimação dos estados. O segundo tem que ver com as condições severas que necessitam ser atendidas para que o problema seja consistente. Por último, vem o problema da efetiva avaliação da solução do problema quando o mesmo é consistente.

Neste texto, são considerados os dois últimos problemas. No caso em que o sistema admite solução exata, essa, em geral, é não única. Aqui, foram apresentados resultados relacionados com o problema da não unicidade. Mediante um teorema, mostrou-se que todas as possíveis soluções para o caso em que o problema é consistente podem ser construídas de forma sistemática a partir de uma solução primeira coordenada qualquer. Alguns exemplos foram apresentados para ilustrar como se pode tirar proveito da não unicidade com o objetivo de obter para o sistema um comportamento dinâmico mais geral e satisfatório.

Mesmo no caso de o sistema admitir uma solução exata, não existe um método sistemático para se construir uma prospectiva solução. A construção da solução para o sistema de equações a derivadas parciais pode ser levada a cabo por meio da prova de suficiência do teorema de Frobenius, a qual, construtivamente, converte o problema de equações a derivadas parciais em um conjunto de equações a derivadas totais não lineares. Mas, mesmo para o caso de equações a derivadas totais, em geral, não existe uma maneira sistemática de se construir a solução, sendo essa, mesmo quando possível, de um tremendo grau de dificuldade. Para lidar numericamente com o problema, primeiro procedeu-se à vetorização funções coordenadas do sistema, supostas analíticas com respeito às coorde-

nadas de estados. Usando-se interpolação polinomial e produtos de Kronecker, obteve-se uma aproximação da forma matriz-vetor para o operador derivada direcional. Assim, converteu-se o sistema de equações a derivadas parciais em um sistema de equações lineares homogêneas. A perspicácia obtida do estudo da não unicidade da solução provê a base para a compreensão dos problemas numéricos a serem resolvidos na construção da solução polinomial: primeiro tem-se que resolver um sistema de equações lineares homogêneas. A seguir, com o conjunto solução obtido anteriormente, deve-se tomar uma combinação linear que satisfaça uma condição de não trivialidade. No caso de admitir o sistema uma solução apenas aproximada, constrói-se uma solução no sentido dos quadrados mínimos.

A solução obtida é descrita como implicitamente polinomial, no sentido de que, em vez de coeficientes de polinômios, são produzidas as soluções nos vértices hipercúbicos no interior do paralelepípedo, domínio dos estados para os quais se constrói a solução. Os demais resultados para o problema são construídos utilizando métodos de interpolação polinomial. Vários algoritmos foram apresentados para lidar com o problema da construção dos valores fora dos vértices hipercúbicos utilizando as coordenadas vetorizadas.

Apresentam-se a seguir algumas sugestões para pesquisa futura.

Neste trabalho, considerou-se apenas o problema da linearização total usando interpolação polinomial. Um desdobramento natural consiste em se considerar o problema da linearização parcial mediante uma adaptação apropriada do método ora proposto. Para isso, deve-se incluir um procedimento para a estabilização do subsistema residual.

Também, neste texto, apresentou-se apenas o tratamento de sistemas de uma só entrada. Sugere-se que se considere no futuro o caso de sistemas de múltiplas entradas e múltiplas saídas. Alguns resultados aqui apresentados são facilmente extensíveis para o caso multivariável.

Resultados de simulação confirmam a expectativa de uma concentração maior de erros de interpolação próximo às fronteiras do paralelepípedo. Uma sugestão para futuras pesquisas consiste em se utilizar espaçamento não uniforme a fim de reduzir a concentração de erros de interpolação próximo às regiões limítrofes.

Dependendo da geometria do sistema há outros tipos de interpolação mais apropriados para aproximar o comportamento dinâmico do sistema. Por exemplo, se uma das funções coordenadas de um sistema exhibe um comportamento periódico (ou quase

periódico) em uma certa direção, parece que a expansão em séries periódicas ao longo de tal direção se apresenta como uma opção bem mais natural. Os argumentos acima justificam a implementação de métodos mixtos de interpolação. No entanto, só a experiência dirá se os resultados serão suficientes para justificar tal complicação adicional.

## BIBLIOGRAFIA

- BAKHVALOV, N. S. (1975). *Numerical Methods*, Mir Publishers, Moscow.
- CHIASSON, J. (1998). A new approach to dynamic feedback linearization control of an induction machine, *IEEE Trans. Automat. Contr.* **43**: 391–397.
- deSOUZA, E. e TEIXEIRA, E. P. (1999a). Linealización exacta vía interpolación polinómica, *aceito para publicação na revista: Informação Tecnológica*.
- deSOUZA, E. e TEIXEIRA, E. P. (1999b). On a polynomial interpolation method for the exact linearization problem, *aceito para publicação no Congresso Internacional: IFAC World Congress – Beijing, China*.
- DEVASIA, S., CHEN, D. e PADEN, B. (1996). Nonlinear inversion-based output tracking, *IEEE Trans. Automat. Contr.* **41**: 930–942.
- DEVASIA, S. e PADEN, B. (1998). Stable inversion for nonlinear nonminimum-phase time varying systems, *IEEE Trans. Automat. Contr.* **43**: 283–288.
- FRANCIS, B. A. (1977). The linear multivariable regulator problem, *SIAM Journal Control and Optimazition* **15**: 486–505.
- FRANCIS, B. A. e WONHAM, W. M. (1975). The internal model principle for linear multivariable regulators, *Journal Appl. Math. Optimazition* **2**: 170–194.
- GOLUB, G. H. e LOAN, C. F. V. (1989). *Matrix Computations*, The Johns Hopkins University Press, Baltimore.
- HUNT, L., SU, R. e MEYER, G. (1983). Design of multiinput nonlinear systems, *Differential Geometric Control Theory*, 268–298.
- ISIDORI, A. (1989). *Nonlinear Control Systems – An Introduction*, Springer Verlag, New York.
- ISIDORI, A. e BYRNES, C. I. (1990). Output regulation of nonlinear systems, *IEEE Trans. Automat. Contr.* **35**: 131–140.
- KRSTIĆ, M., KANELAKOPOULOS, I. e KOKOTOVIĆ, P. (1995). *Nonlinear and Adaptive Control Systems*, J. Wiley, New York.

- MARINO, R. e TOMEI, P. (1995). *Nonlinear Control Design: Geometric, Adaptive and Robust*, Prentice Hall, London.
- NIJMEIER, H. e SCHAFT, A. V. D. (1990). *Nonlinear Dynamical Control Systems*, Springer Verlag, Berlin.
- REBOULET, C. e CHAMPETIER, C. (1984). A new method for linearizing non-linear systems, *International Journal of Control* **40**: 631–638.
- REIF, K., WEINZIERL, K., ZELL, A. e UNBEHAUEN, R. (1997). Nonlinear feedback stabilization by tangential linearization, *Int. J. Control* **68**: 673–687.
- REIF, K., WEINZIERL, K., ZELL, A. e UNBEHAUEN, R. (1998). A homotopy approach for nonlinear control synthesis, *IEEE Trans. Automat. Contr.* **43**: 1311–1319.
- SINGH, S. N. e BOSSART, T. C. (1993). Exact feedback linearization and control of space station using *cmg*, *IEEE Trans. Automat. Contr.* **38**: 184–187.
- SLOTINE, J. e LI, W. (1991). *Applied Nonlinear Control*, Prentice Hall, New York.
- TAN, H. e RUGH, W. J. (1998). Pseudolinearization and nonlinear optimal control, *IEEE Trans. Automat. Contr.* **43**: 386–391.
- WEINZIERL, K. (1995). *Konzepte zur Steuerung und Regelung nichtlinearer Systeme auf der Basis der Jacobi-Linearisierung*, PhD Dissertation, Universität Erlangen, Aachen, Germany: Shaker.
- WONHAM, W. M. (1975). *Linear Multivariable Control: A Geometric Approach*, Springer Verlag, New York.
- YAKUBCZYK, B. e RESPONDEK, W. (1980). On linearization of control systems, *Bull. Academy Polon. Sci. Math* **28**: 517–522.