

**JOSÉ OCTAVIO MARQUES SELEGATO
PEDRO HENRIQUE TERRA ARCIPRETTI**

**EFEITO COMPARATIVO DO AFILAMENTO EM UMA
VIGA ENGASTADA-LIVRE DE SEÇÃO-CAIXÃO COM
PAREDES FINAS CONSTITUÍDAS POR MATERIAL
COMPÓSITO E CONVENCIONAL**



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA AERONÁUTICA**

2019

**JOSÉ OCTAVIO MARQUES SELEGATO
PEDRO HENRIQUE TERRA ARCIPRETTI**

**Efeito Comparativo do Afilamento em uma Viga Engastada-Livre
de Seção-Caixa com Paredes Finas Constituídas por
Material Compósito e Convencional**

Projeto de Conclusão de Curso
apresentado ao corpo docente do Curso
de Graduação em Engenharia
Aeronáutica da Universidade Federal de
Uberlândia, como parte dos requisitos
para obtenção do título de **BACHAREL
EM ENGENHARIA AERONÁUTICA.**

Orientadora: Profa. Dra. Núbia dos
Santos Saad

UBERLÂNDIA – MG

2019

**JOSÉ OCTAVIO MARQUES SELEGATO
PEDRO HENRIQUE TERRA ARCIPRETTI**

**Efeito Comparativo do Afilamento em uma Viga Engastada-Livre
de Seção-Caixa com Paredes Finas Constituídas por
Material Compósito e Convencional**

Projeto de Conclusão de Curso
Aprovado pelo corpo docente do Curso
de Graduação em Engenharia
Aeronáutica da Universidade Federal de
Uberlândia.

Banca Examinadora:

Profa. Dra. Núbia dos Santos Saad – FEMEC/UFU – Orientadora

Prof. Dr. Tobias Souza Moraes – FEMEC/UFU

Eng. MSc. Jefferson Gomes do Nascimento – FEMEC/UFU (doutorando)

Uberlândia, 20 de dezembro de 2019.

DEDICATÓRIAS

Dedico esse trabalho à minha família, que indiscutivelmente me apoiou no sonho de me tornar engenheiro desde o primeiro momento. Dedico esse trabalho também aos meus amigos, que dentro e fora de classe souberam compartilhar, com generosidade, de conhecimentos e vivências para que eu me tornasse um ser humano melhor. (**José Octavio Marques Selegato**)

Dedico o presente trabalho à minha família, em especial a meus pais, Israel Arcipretti Júnior e Olezia Terra de Oliveira, por todo apoio e suporte que me deram durante minha trajetória, à minha namorada, Ana Paula Barbosa de Souza, pelo apoio emocional, essencial para suportar momentos difíceis, a meus colegas de graduação pela oportunidade de fazer parte de suas vidas durante o curso, da partilha de conhecimento e pelos amigos que ganhei e por fim, aos docentes que se comprometeram a esta árdua tarefa do desenvolvimento intelectual. (**Pedro Henrique Terra Arcipretti**)

AGRADECIMENTOS

(José Octavio Marques Selegato)

A Deus, que, me concedendo saúde, permitiu com que o acesso ao conhecimento fosse um meio para construção do meu caráter e para minha evolução enquanto indivíduo.

À minha família, que continuamente me ensina sobre superação e perseverança.

Aos meus amigos da vida, por cada diálogo que resulta em aprendizado, sabedoria e liberdade.

À Universidade Federal de Uberlândia, por fornecer projetos extracurriculares indispensáveis para complementação da formação em engenharia.

(Pedro Henrique Terra Arcipretti)

A meus pais, por apoiarem minhas decisões e me mostrarem que nada é impossível caso se dedique.

À Universidade Federal de Uberlândia e seus representantes, pela oportunidade de fazer parte de uma Instituição de qualidade. Em especial, à professora e orientadora Núbia dos Santos Saad, pelo ser humano incrível que ela é.

A meu amigo e parceiro de TCC, José Octávio Marques Selegato, pela paciência e trabalho em equipe.

A todas as pessoas que fizeram parte da minha vida, que me fizeram quem sou. E deixo a reflexão: “Nada é permanente, exceto a mudança” (*Heráclito*)

SELEGATO, J.O.M.; ARCIPRETTI, P.H.T. **Efeito Comparativo do Afilamento em uma Viga Engastada-Livre de Seção-Caixa com Paredes Finas Constituídas por Material Compósito e Convencional**. 2019. 107 f. Projeto de Conclusão de Curso – Curso de Graduação em Engenharia Aeronáutica, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG.

RESUMO

O presente trabalho apresenta uma análise sobre o comportamento estrutural de uma viga constituída por paredes finas, com seção transversal do tipo caixa, no tocante às tensões normais e de cisalhamento. Foi considerada uma viga com a presença de afilamento e sem a presença do afilamento, com condições de extremidade engastada-livre, simulando uma asa de aeronave. Tal viga foi solicitada por cargas concentradas e excêntricas atuantes perpendicularmente ao seu eixo, proporcionando esforços combinados de flexão, torção e cisalhamento. Foram compilados os desenvolvimentos analíticos de comportamento estrutural de vigas de paredes finas, via métodos analíticos, considerando a idealização estrutural por *Booms*, com emprego de materiais estruturais isotrópicos e compósitos. Foram obtidas tensões normais e cisalhantes críticas para quatro modelos diferentes de combinação de materiais e de idealização estrutural, e confrontadas com as adquiridas com modelagem numérica por elementos finitos, realizado com o auxílio do programa computacional NX NASTRAN® (2016). Os desvios obtidos com as comparações dos resultados obtidos foram satisfatórios. Destaca-se a constatação do impacto do afilamento sobre as propriedades de inércia e de massa da viga.

SELEGATO, J.O.M.; ARCIPRETTI, P.H.T. **Comparative effect of the Structural Behavior of Free-crimped Closed-section Thin-walled Composite and Conventional Beam.** 2019. 107 f. Term Paper – Bachelor of Aeronautical Engineering, Federal University of Uberlândia, Uberlândia, MG.

ABSTRACT

The present work presents a analysis about the structural behavior of a beam made of thin walls, with coffin-type cross-section, concerning the normal stresses and shear. It was considered a beam with and without presence of tapering, with free end boundary conditions, simulating an aircraft wing. The beam was loaded by concentrated and eccentric loads acting perpendicular to its axis, providing the flexion, torsion and shear combined efforts. Analytical developments of structural behavior applied by thin walls beams were compiled by analytical methods, considering the structural idealization of *Booms*, using isotropic and composites materials. Normal stresses and critical shear stress were considered for four different models of material combination and structural idealization, and compared to the acquired with finite element numerical modeling, performed with the aid of NX NASTRAN® (2016) software. The deviations obtained with the results comparisons were satisfactory. It highlights the tapering impact on the inertia and beam mass properties.

Keywords: *Box beam. Structural idealization. Booms. Stresses in beams. Tapering.*

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1	Carga axial atuante em uma viga. Fonte: (HIBBELER, 2011).	3
Figura 2.2	Região de deformação uniforme em uma viga perante uma carga axial. Fonte: (HIBBELER, 2011).	4
Figura 2.3	Deformação uniforme constante devida a uma tensão normal constante σ . Fonte: (HIBBELER, 2011).	5
Figura 2.4	Vista esquemática global de viga compósita com paredes finas. Fonte: (MEGSON, 2013).	6
Figura 2.5	Ensaio de tração fora do eixo de ortotropia em um estratificado. Fonte: (BOUVET, 2015).	7
Figura 2.6	Representação de um elemento estrutural de geometria retangular para aferir os efeitos fletores. Fonte: (HIBBELER, 2011).	11
Figura 2.7	Representação dos efeitos de flexão para visualização da tração (fibras inferiores) e compressão (fibras superiores). Fonte: Adaptada de (HIBBELER, 2011).	11
Figura 2.8	Convenção de sentido positivo para forças, momentos e deslocamentos. Fonte: (MEGSON, 2013).	13
Figura 2.9	Sistema de forças internas e externas em estrutura genérica. Fonte: (MEGSON, 2013).	13
Figura 2.10	Decomposição de um momento fletor para $\theta < 90^\circ$, em componentes segundo os planos x e y da seção transversal de uma viga. Fonte: (MEGSON, 2013).	14
Figura 2.11	Decomposição de um momento fletor para $\theta > 90^\circ$, em componentes segundo os planos x e y da seção transversal de uma viga.. Fonte: (MEGSON, 2013).	14
Figura 2.12	Visualização da linha neutra (LN) em uma seção transversal qualquer, sujeita à flexão. Fonte: (MEGSON, 2013).	15
Figura 2.13	Viga arbitrária representando uma seção sujeita à carga cisalhante S. Fonte: (MEGSON, 2013).	20
Figura 2.14	Carregamento equivalente em uma viga de seção aberta. Fonte: (MEGSON, 2013).	22
Figura 2.15	Posição do centro de cisalhamento para vigas de seção aberta. Fonte: (MEGSON, 2013).	22
Figura 2.16	Visualização do centro de cisalhamento S em uma seção fechada qualquer. Fonte: (MEGSON, 2013).	23
Figura 2.17	Torção de uma viga de seção fechada. Fonte: (MEGSON, 2013).	25

Figura 2.18	Determinação da distribuição do fluxo de cisalhamento em uma viga de seção fechada sujeita à torção. Fonte: (MEGSON, 2013).	25
Figura 2.19	Convenção de sinais para áreas varridas. Fonte: (MEGSON, 2013).	26
Figura 2.20	Painel antes da idealização estrutural. Fonte: (MEGSON, 2014).	27
Figura 2.21	Painel após a idealização estrutural. Fonte: (MEGSON, 2014).	27
Figura 2.22	Seção típica real de uma asa. Fonte: (MEGSON, 2013).	28
Figura 2.23	Idealização estrutural de uma seção de asa, por Booms. Fonte: (MEGSON, 2013).	29
Figura 2.24	Representação da hipótese de Love-Kirchoff. Fonte: Adaptada de (BOUVET, 2015).	32
Figura 2.25	Aplicação da hipótese de Love-Kirchoff nos diferentes planos do estratificado. Fonte: Adaptada de (BOUVET, 2015).	32
Figura 2.26	Deformações ao longo da espessura do estratificado frente à diferentes solicitações. Fonte: Adaptada de (BOUVET, 2015).	33
Figura 2.27	Ponto P sujeito às tensões σ_x e τ_{xy} . Fonte: (BOUVET, 2015).	36
Figura 2.28	Efeito do afilamento na análise de uma viga. Fonte: (MEGSON, 2014).	37
Figura 2.29	Efeito de afilamento na análise de vigas de seções abertas e fechadas. Fonte: (MEGSON, 2014).	40
Figura 2.30	Efeito de afilamento na análise de vigas de seções abertas e fechadas (vista lateral). Fonte: (MEGSON, 2014).	41
Figura 2.31	Efeito de afilamento na análise de vigas de seções abertas e fechadas (vista superior). Fonte: (MEGSON, 2014).	41
Figura 2.32	Output com os resultados da análise de flambagem no Nastran. Fonte: Elaborado em (NX Nastran®, 2016).	48
Figura 3.1	Viga com Booms sem afilamento. Fonte: Elaborado em (CATIA®, 2011).	50
Figura 3.2	Especificações geométricas dos enrijecedores. Fonte: Elaborado em (CATIA®, 2011).	50
Figura 3.3	Carga excêntrica aplicada à viga. Fonte: Elaborado em (CATIA®, 2011).	52
Figura 3.4	Viga com Booms com afilamento. Fonte: Elaborado em (CATIA®, 2011).	53
Figura 4.1	Disposição dos Booms na viga sem afilamento. Fonte: Elaborado em (CATIA®, 2011).	51
Figura 4.2	Região cujo índice de falha é mais crítico para a primeira camada de Fibra de Carbono. Fonte: Elaborado em (NX Nastran®, 2016).	62
Figura 4.3	Região cujo índice de falha é mais crítico para a quinta camada de Fibra de Carbono. Fonte: Elaborado em (NX Nastran®, 2016).	65
Figura 4.4	Região cujo índice de falha é mais crítico para a terceira camada de Fibra de Carbono. Fonte: Elaborado em (NX Nastran®, 2016).	68
Figura 4.5	Região cujo índice de falha é mais crítico para a sexta camada de Fibra de Carbono. Fonte: Elaborado em (NX Nastran®, 2016).	66

Figura 5.1	Geometria final da viga sem afilamento. Fonte: Elaborado em (CATIA®, 2011).	78
Figura 5.2	Viga sem afilamento após ser discretizada. Fonte: Elaborado em (HyperMesh®, 2014).	79
Figura 5.3	Região de maior tensão: região inferior do engaste da viga sem afilamento de Alumínio. Fonte: Elaborado em (NX Nastran®, 2016).	80
Figura 5.4	Primeiro modo de flambagem da viga sem afilamento de Alumínio. Fonte: Elaborado em (NX Nastran®, 2016).	80
Figura 5.5	Visualização das tensões no Output 7033. Fonte: Elaborado em (NX Nastran®, 2016).	81
Figura 5.6	Distribuição dos deslocamentos ao longo da viga de Alumínio sem afilamento. Fonte: Elaborado em (NX Nastran®, 2016).	83
Figura 5.7	Distribuição das rotações ao longo da viga de Alumínio sem afilamento. Fonte: Elaborado em (NX Nastran®, 2016).	83
Figura 5.8	Região mais crítica na Camada 2: região superior do engaste da viga sem afilamento de Fibra de Carbono. Fonte: Elaborado em (NX Nastran®, 2016).	85
Figura 5.9	Primeiro modo de flambagem da viga sem afilamento de Fibra de Carbono. Fonte: Elaborado em (NX Nastran®, 2016).	85
Figura 5.10	Distribuição dos deslocamentos ao longo da viga de Fibra de Carbono sem afilamento. Fonte: Elaborado em (NX Nastran®, 2016).	87
Figura 5.11	Distribuição das rotações ao longo da viga de Fibra de Carbono sem afilamento. Fonte: Elaborado em (NX Nastran®, 2016).	87
Figura 6.12	Viga com afilamento após ser discretizada. Fonte: Elaborado em (HyperMesh®, 2014).	88

LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1	Área correspondente a cada <i>Boom</i> da seção idealizada.	55
Tabela 4.2	Tensões normais de flexão aos quais os <i>Booms</i> para material isotrópico estão sujeitos.	57
Tabela 4.3	Fibra de Carbono: tensão atuantes nos Booms.	58
Tabela 4.4	Valores de q_b ao longo da seção.	61
Tabela 4.5	Fluxos e Tensões de Cisalhamento atuantes na seção transversal do material isotrópico.	61
Tabela 4.6	Tensões de ruptura para a fibra de carbono.	65
Tabela 4.7	Índice de Falha em todas as camadas do estratificado.	70
Tabela 4.8	Dimensões da seção K considerando-se o afilamento dos componentes.	71
Tabela 4.9	Area dos <i>Booms</i> considerando-se o afilamento dos componentes.	71
Tabela 4.10	Tensões normais de flexão atuante nos <i>Booms</i> na viga afilada.	72
Tabela 4.11	Parâmetros para cálculo do fluxo cisalhante na viga afilada.	75
Tabela 4.12	Fluxo cisalhante em cada trecho da viga afilada.	76
Tabela 4.13	Índice de Falha em todas as camadas do estratificado afilado.	77
Tabela 5.1	Comparação entre o resultado numérico e teórico para os <i>Booms</i> .	81
Tabela 5.2	Comparação entre o resultado teórico e numérico para os trechos da seção.	82
Tabela 5.3	Valores máximos de deslocamento e rotação para a viga de alumínio sem afilamento.	82
Tabela 5.4	Distribuição das camadas de fibras em material compósito para a viga sem afilamento.	84
Tabela 5.5	Índices de falha em cada camada da Fibra de Carbono na viga sem afilamento.	86
Tabela 5.6	Valores máximos de deslocamento e rotação para a viga de alumínio sem afilamento.	86

Tabela 6.7	Resultado numérico para os <i>Booms</i> na viga afilada.	89
Tabela 6.8	Resultado numérico para mesas e almas na viga afilada.	89
Tabela 6.9	Valores máximos de deslocamento e rotação para a viga de alumínio sem afilamento.	90
Tabela 6.10	Índices de falha em cada camada da Fibra de Carbono na viga com afilamento.	91
Tabela 6.11	Valores máximos de deslocamento e rotação para a viga de Fibra de Carbono com afilamento.	91
Tabela 7.1	Comparação das tensões normais para os <i>Booms</i> na viga sem afilamento.	92
Tabela 7.2	Comparação das tensões normais para os <i>Booms</i> na viga com afilamento.	93
Tabela 7.3	Comparação das tensões cisalhantes no caso numérico e analítico para os trechos na viga sem afilamento.	94
Tabela 7.4	Comparação das tensões cisalhantes no caso numérico e analítico para os trechos na viga com afilamento.	94
Tabela 7.5	Diferença relativa entre os Índice de Falha encontrados na viga sem afilamento.	97
Tabela 7.6	Diferença relativa entre os Índice de Falha encontrados na viga com afilamento.	98
Tabela 7.7	Comparação entre Translação, Rotação, Cargas de Flambagem e Crítica além da Massa Final das viga em Alumínio e Fibra de Carbono, sem e com afilamento.	101

SUMÁRIO

CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO.....	1
CAPÍTULO II – REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	3
2.1 Introdução.....	3
2.2 Carga Axial em Seção Transversal de Vigas com Paredes Finas.....	3
2.2.1 Material Isotrópico	3
2.2.2 Material Compósito.....	5
2.3 Flexão Assimétrica em Seção Transversal de Vigas com Paredes Finas	10
2.3.1 Material Isotrópico	10
2.3.2 Material Compósito.....	18
2.4. Cargas Cisalhantes em Seção Transversal de Vigas com Paredes Finas	20
2.4.1 Material Isotrópico	20
Centro de Cisalhamento.....	22
Alocação do Centro de Cisalhamento.....	23
2.4.2 Material Compósito.....	24
2.5 Torção em Seção Transversal de Vigas com Paredes Finas.....	24
2.5.1 Material isotrópico.....	24
2.5.2 Materiais Compósitos	26
2.6 Idealização Estrutural	27
2.6.1 Flexão e Cisalhamento em Vigas de Seção Fechada Idealizada.....	29
2.7 Afilamento de viga com paredes finas	37
2.7.1 Material Isotrópico	37
2.7.2 Critério de Tsai-Wu.....	43
2.8 Flambagem.....	44
2.8.1 Flambagem no NX Nastran.....	46
CAPÍTULO III – MATERIAIS E MÉTODOS	49
3.1 Apresentação	49
3.2 Aspectos Elástico-Geométricos e de Carregamento da Viga.....	49
3.2.1 Viga Caixa sem Afilamento.....	49
3.2.2 Viga Caixa com Afilamento.....	52
CAPÍTULO IV – ANÁLISE TEÓRICA DAS TENSÕES QUE SOLICITAM A VIGA.....	54
4.1 Modelo Teórico sem Afilamento.....	54
4.1.1 Tensões Normais Devidas ao Momento de Flexão	56
4.1.1.2 Materiais Compósitos	57
4.1.2 Tensões Tangenciais devidas ao Momento de Torção (T_z)	58
4.1.3 Tensões Tangenciais Devidas à Força Cortante.....	59
4.2 Modelo Teórico com Afilamento.....	70
4.2.1 Tensões Normais Devidas ao Momento de Flexão	71
4.2.2 Tensões Tangenciais devidas ao Momento de Torção (T_z)	73
4.2.3 Tensões Tangenciais Devidas à Força Cortante.....	73
4.2.4 Índices de Falha	77
CAPÍTULO V – ANÁLISE NUMÉRICA DAS TENSÕES QUE SOLICITAM A VIGA SEM AFILAMENTO.....	78
5.1 Modelo Numérico.....	78
5.1.1 Material Isotrópico	79
5.1.2 Material Compósito.....	83
CAPÍTULO VI – ANÁLISE NUMÉRICA DAS TENSÕES QUE SOLICITAM A VIGA COM AFILAMENTO.....	88

6.2 Modelo Numérico.....	88
6.2.1 Material Isotrópico	88
6.2.2 Material Compósito	90
CAPÍTULO VII - ANÁLISE DE RESULTADOS E DISCUSSÕES	92
7.1 Resultados das Análises dos Modelos.....	92
7.1.1 Material Isotrópico	92
7.1.2 Material Compósito	97
7.2 Comparação Final entre Material Isotrópico e Compósito.....	101
CAPÍTULO VIII - CONCLUSÕES	104
CAPÍTULO IX - REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	106

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

O início da utilização dos materiais metálicos na indústria aeronáutica teve início na Alemanha. A busca por ligas resistentes e de baixa densidade fomentou a busca pelo dimensionamento de estruturas mais leves e com maior tolerância ao dano. As ligas mais comuns na indústria aeronáutica são aquelas da série 2xxx, 7xxx e 8xxx, que, na sua concepção são misturadas a elementos como Cobre, Lítio e Zinco. Em termos de propriedades, o principal objetivo de utilização das ligas de alumínio em detrimento do alumínio puro é que esse último possui uma baixa resistência (limite de escoamento de 10 MPa na condição recozida), o que limita sua utilidade comercial (BRAGA, 2011).

A partir da década de 60, a ideia dos materiais compósitos de alto desempenho começou a ser difundida na indústria aeroespacial. A chance do projetista flexibilizar o projeto estrutural, atendendo e melhorando quesitos de desempenho em vôo da aeronave, seria um grande diferencial na utilização desse material (REZENDE, 2019).

Assim sendo, os materiais compósitos são cada vez mais utilizados na indústria graças à sua relação elevada entre performance e massa, frente à importância crucial do critério de massa nas estruturas aeronáutica e aeroespaciais. Essa relação elevada performance/ massa é devido à utilização de materiais com características mecânicas específicas elevadas, tal como o carbono, o vidro, o Kevlar ou o boro. Esse tipo de material apresenta, entretanto, o inconveniente de ser frágil e, então, deve ser utilizado em uma mistura com um material menos frágil do tipo resina. Esse é o conceito base dos materiais compósitos: acrescentar um material de reforço eficiente e frágil (tipicamente na forma de fibras mais ou menos longas segundo as aplicações) à uma matriz menos eficiente porém menos frágil (usualmente uma resina). Cria-se também uma interface entre esses dois materiais que possuirá um papel em relação ao comportamento global do compósito (BOUVET, 2015).

Evidentemente que os compósitos não apresentam somente vantagens, e um de seus maiores inconvenientes é o preço, tanto do material quanto o preço do processo de fabricação. Pode-se, por exemplo, citar o tempo de validade das resinas epóxi, os aparelhos

de cura do material estratificado, os dispositivos de injeção de resina, a construção dos moldes e contramoldes ou ainda a necessidade do controle não destrutivo afim de garantir a “saúde” do material, o que complica o processo de fabricação, aumentando o seu preço final. A fragilidade dos compósitos ao impacto é igualmente prejudiciável, já que esse fenômeno conduz ao super-dimensionamento e, por consequência, à uma diminuição do ganho potencial em detrimento da garantia de uma tenacidade residual após o impacto. (BOUVET, 2015).

Nota-se, então, que a estrutura compósita é mais complexa em relação à um material padrão homogêneo, do tipo metálico, e isso implica em uma teoria própria e específica para esse material. A concepção de uma estrutura compósita implica em conceber ao mesmo tempo um material e uma estrutura; esta é a diferença fundamental entre o conceito de uma estrutura metálica e de uma estrutura em compósito. Materiais compósitos necessitam, além disso, de parâmetros clássicos necessários para dimensionamento de uma estrutura, tal como ocorre com os metais. Entre esses parâmetros citam-se a geometria e a concepção do material. Junto às etapas clássicas de escolha da geometria da estrutura, serão adicionadas as escolhas sobre a direção das fibras ou o processo de elaboração do compósito. (BOUVET, 2015).

Nesse contexto, este trabalho tem como objetivo fazer a análise das tensões de uma viga de seção-caixão, com paredes finas, considerando-se a idealização estrutural por *Booms*, engastada em uma das extremidades e livre na outra, simulando uma asa aeronáutica. Dois cenários serão analisados mantendo-se todas as características anteriores, entretanto, num primeiro caso a viga não possui afilamento e, no segundo caso, possui afilamento característico baseado no que é aplicado na indústria aeronáutica, segundo BRENNER (2012). Além disso, faz-se a análise dos dois cenários para um material isotrópico (liga de Alumínio) e para um material compósito (Fibra de Carbono). Busca-se compilar todas as formulações teóricas intervenientes constantes nas literaturas de ensino de graduação de elementos estruturais aeronáuticos. Para fins de comparação, é feita também uma modelagem via Método dos Elementos Finitos, com a utilização do software NX Nastran® (2016).

Os resultados são bastante satisfatórios e revelam a maneira com que a escolha precisa da direção das fibras nos materiais compósitos se refletem nas respostas efetivas tanto dos enrijecedores como dos painéis de paredes finas, influenciando diretamente na massa final e na resistência do conjunto. Acrescenta-se que o modelo de viga tomado como objeto de estudo será construído para a realização de aulas práticas da disciplina Estruturas de Aeronaves II, do Curso de Graduação em Engenharia Aeronáutica da UFU, pela Profa. Núbia dos Santos Saad, responsável por essa disciplina.

CAPÍTULO II

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 Introdução

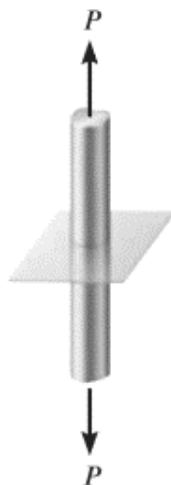
Neste capítulo, serão averiguadas as tensões aplicadas em vigas de seções transversais fechadas de paredes finas solicitadas à carga axial, de flexão, cisalhamento e torção, além do estudo do efeito do afilamento em uma viga. Destaca-se que as fundamentações teóricas apresentadas nesta Subseção estão baseadas em MEGSON (2013), BOUVET (2015) e HIBBELER (2011).

2.2 Carga Axial em Seção Transversal de Vigas com Paredes Finas

2.2.1 Material Isotrópico

Elementos estruturais frequentemente são submetidos a cargas axiais, tanto por tração quanto por compressão, como representado pela Figura 2.1.

Figura 2.1 - Carga axial atuante em uma viga.



Fonte: Hibbeler, 2011.

Com isso, é possível obter a distribuição de tração média que atua na seção transversal. Entretanto, é necessário definir duas hipóteses simplificadoras referentes ao material e à aplicação da carga. A viga deve permanecer retilínea durante todo o processo de aplicação de carga. Além disso, a seção transversal deve permanecer plana durante a deformação e a carga deve ser aplicada ao longo do eixo centroide da seção transversal, para se obter deformações uniformes. Inclusive este é o motivo de não se considerar regiões próximas as extremidades, onde pode ocorrer deformações localizadas.

Muitos dos materiais utilizados em engenharia podem ser aproximados por materiais homogêneos e isotrópicos de modo que ao aplicar a carga através do centroide na área de seção transversal, a barra se deformará uniformemente ao longo da região central do comprimento, como ilustra a Figura 2.2.

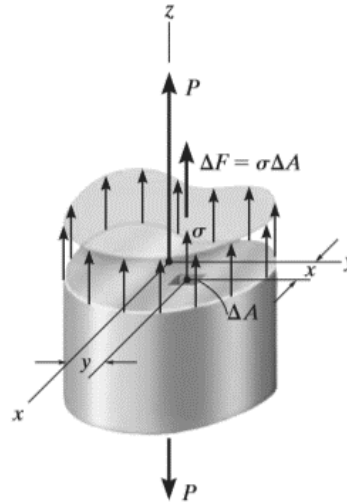
Figura 2.2 - Região de deformação uniforme em uma viga perante uma carga axial.



Fonte: Hibbeler, 2011.

Visto que a viga está submetida a uma deformação uniforme constante, logo tem-se uma resultante de uma tensão normal constante σ , conforme esquema da Figura 2.3.

Figura 2.3 - Deformação uniforme constante devida a uma tensão normal constante σ .



Fonte: Hibbeler, 2011.

Cada pequena área da seção transversal (ΔA) é submetida a uma força respectiva (ΔF). Considerando cada ΔA da seção transversal como infinitesimal (dA) temos uma força equivalente (dF), Equação (2.1).

$$\Delta F = \sigma \cdot \Delta A \quad (2.1)$$

Assim, o somatório de todas estas dA e dF é o equivalente à área total da seção transversal (A) e à carga axial (P), respectivamente, Equação (2.2). De maneira que percebe-se que σ é constante, Equação (2.4).

$$\int dF = \int_A \sigma \cdot dA \quad (2.2)$$

$$P = \sigma \cdot A \quad (2.3)$$

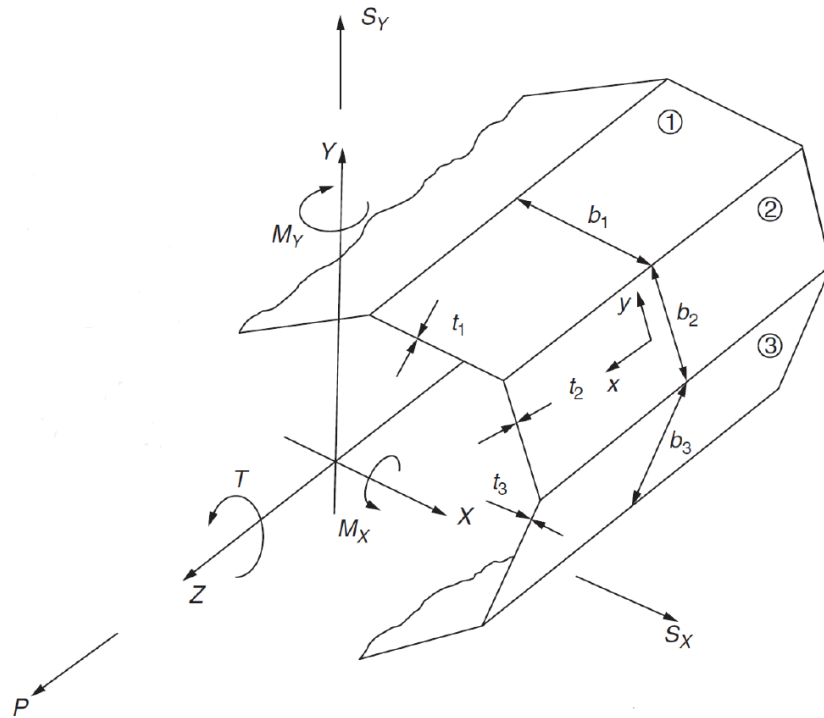
$$\sigma = \frac{P}{A} \quad (2.4)$$

2.2.2 Material Compósito

Em se tratando de materiais compósitos, aplica-se a mesma carga axial P , similarmente ao abordado na Subseção 2.2.1; porém, neste caso, tal carga será absorvida em parcelas, por cada parede laminada constituinte da viga compósita (exemplificadas por 1, 2 e 3 na Figura 2.4, e denominadas simplesmente por lâminas), definindo-se a carga P_i

absorvida pela lâmina genérica i . Semelhantemente ao caso de materiais isotrópicos, será considerado que as seções permanecem planas sob as solicitações e deformações intervenientes.

Figura 2.4 – Vista esquemática global de viga composta com paredes finas.



Fonte: Megson, 2013.

Destaca-se que a deformação longitudinal ocorrida em cada lâmina ($\epsilon_{x,i}$) é a mesma deformação longitudinal da viga (ϵ_z), referentes os eixos coordenados mostrados na Figura 2.4. Assim, escrevem-se as seguintes expressões, em função do módulo de elasticidade de cada lâmina, segundo o eixo x do sistema de coordenadas locais ($E_{x,i}$):

$$\frac{P_i}{b_i t_i} = \epsilon_{x,i} \cdot E_{x,i} \quad (2.5)$$

$$P_i = \epsilon_z \cdot b_i \cdot t_i \cdot E_{x,i} \quad (2.6)$$

Assim, a carga axial total aplicada na viga constituída por n lâminas, pode ser equacionada por:

$$P = \varepsilon_Z \cdot \sum_{i=1}^n b_i \cdot t_i \cdot E_{x,i}. \quad (2.7)$$

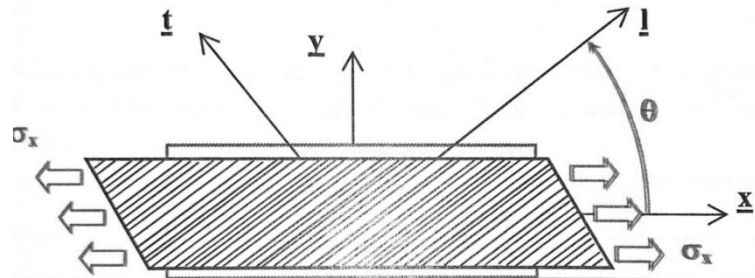
E, portanto, a deformação linear específica longitudinal que ocorre na viga é obtida por:

$$\varepsilon_Z = \frac{P}{\sum_{i=1}^n b_i \cdot t_i \cdot E_{x,i}} = \frac{P}{\sum_{i=1}^n b_i \cdot t_i \cdot E_{Z,i}}. \quad (2.8)$$

Registra-se que, conforme mostrado pela Equação (2.8), o módulo de elasticidade de cada lâmina pode ser escrito, tanto com referência ao sistema de coordenadas locais ($E_{x,i}$) como globais ($E_{Z,i}$).

Em um caso geral de esforço axial em um compósito unidirecional fora do seu plano de ortotropia, se é observado que um esforço de tração segundo o eixo x produz, ao mesmo tempo, um alongamento segundo x, um encurtamento segundo y e igualmente um esforço cisalhante, diz-se que ocorre acoplamento tração/ cisalhamento (BOUVET, 2015). Esse cenário é evidenciado na Figura 2.5.

Figura 2.5 – Ensaio de tração fora do eixo de ortotropia em um estratificado.



Fonte: Bouvet, 2015.

Esse acoplamento é visível sobre a matriz de rigidez. A matriz de rigidez é matriz que permite estabelecer uma relação ligando as tensões às deformações no referencial (x,y).

Inicialmente, determinam-se as tensões no referencial (l,t) a partir daquelas em (x,y):

$$\underline{\sigma}_{(l,t)} = \underline{R}^t \cdot \underline{\sigma}_{(x,y)} \cdot \underline{R} \quad (2.9)$$

Onde $\underline{R}$ é a matriz de passagem de (x,y) para (l,t):

$$\underline{R} = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix}_{(\underline{x}, \underline{y})}, \text{ com } \begin{cases} c = \cos(\theta) \\ s = \sin(\theta) \end{cases} \quad (2.10)$$

Permite-se, então, a seguinte notação:

$$\begin{bmatrix} \sigma_l \\ \sigma_t \\ \tau_{lt} \end{bmatrix}_{(l,t)} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2.s.c \\ s^2 & c^2 & -2.s.c \\ -s.c & s.c & (c^2 - s^2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}_{(x,y)} = \underline{T} \cdot \underline{\sigma}_{(x,y)} \quad (2.11)$$

Um procedimento análogo levará às deformações, alterando em (2.10) θ por $-\theta$ e, então, s em $-s$ sem alterar c :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy}/2 \end{bmatrix}_{(x,y)} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & -2.s.c \\ s^2 & c^2 & 2.s.c \\ s.c & -s.c & (c^2 - s^2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_l \\ \varepsilon_t \\ \gamma_{lt}/2 \end{bmatrix}_{(l,t)} \quad (2.12)$$

Lembra-se que na matriz de deformações, o termo não diagonal é ε_{xy} e não γ_{xy} , com:

$$\varepsilon_{xy} = \gamma_{xy}/2 \quad (2.13)$$

Donde, realizando a substituição de (2.13) em (2.12), obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}_{(x,y)} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & -s.c \\ s^2 & c^2 & s.c \\ 2.s.c & -2.s.c & (c^2 - s^2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_l \\ \varepsilon_t \\ \gamma_{lt} \end{bmatrix}_{(l,t)} = \underline{T}' \cdot \underline{\varepsilon}_{(l,t)} \quad (2.14)$$

E, substituindo:

$$\underline{\varepsilon}_{(x,y)} = \underline{S}_{(x,y)} \cdot \underline{\sigma}_{(x,y)} = \underline{T}' \cdot \underline{S}_{(l,t)} \cdot \underline{T} \cdot \underline{\sigma}_{(x,y)} \quad (2.15)$$

Obtém-se, então, a matriz de flexibilidade:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}_{(\underline{x}, \underline{y})} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & -\frac{\nu_{xy}}{E_x} & \frac{\eta_x}{E_x} \\ -\frac{\nu_{xy}}{E_x} & \frac{1}{E_y} & \frac{\eta_y}{E_y} \\ \frac{\eta_x}{E_x} & \frac{\eta_y}{E_y} & \frac{1}{G_{xy}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}_{(\underline{x}, \underline{y})} \quad (2.16)$$

Donde as seguintes relações são válidas:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{E_x} = \frac{c^4}{E_l} + \frac{s^4}{E_t} + c^2 \cdot s^2 \cdot \left(\frac{1}{G_{lt}} - 2 \cdot \frac{\nu_{lt}}{E_l} \right) \\ \frac{1}{E_y} = \frac{s^4}{E_l} + \frac{c^4}{E_t} + c^2 \cdot s^2 \cdot \left(\frac{1}{G_{lt}} - 2 \cdot \frac{\nu_{lt}}{E_l} \right) \\ \frac{\nu_{xy}}{E_x} = \frac{\nu_{lt}}{E_l} (c^4 + s^4) - c^2 \cdot s^2 \cdot \left(\frac{1}{E_l} + \frac{1}{E_t} - \frac{1}{G_{lt}} \right) \\ \frac{1}{G_{xy}} = 4 \cdot c^2 \cdot s^2 \left(\frac{1}{E_l} + \frac{1}{E_t} + 2 \cdot \frac{\nu_{lt}}{E_l} \right) + \frac{(c^2 - s^2)^2}{G_{lt}} \\ \frac{\eta_x}{E_x} = 2 \cdot c \cdot s \cdot \left(\frac{c^2}{E_l} - \frac{s^2}{E_t} + (c^2 - s^2) \cdot \left(\frac{\nu_{lt}}{E_l} - \frac{1}{2 \cdot G_{lt}} \right) \right) \\ \frac{\eta_y}{E_y} = 2 \cdot c \cdot s \cdot \left(\frac{s^2}{E_l} - \frac{c^2}{E_t} - (c^2 - s^2) \cdot \left(\frac{\nu_{lt}}{E_l} - \frac{1}{2 \cdot G_{lt}} \right) \right) \end{array} \right. \quad (2.17)$$

Os dois termos de acoplamento η_x/E_x e η_y/E_y , que geralmente são não nulos, irão provocar cisalhamento em caso de solicitação de tração e alongamentos em caso de solicitação em cisalhamento.

Da mesma maneira, pode-se obter a matriz de rigidez segundo (x,y):

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}_{(\underline{x}, \underline{y})} = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix}_{(\underline{x}, \underline{y})} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}_{(\underline{x}, \underline{y})} \quad (2.18)$$

com:

$$\left\{ \begin{array}{l} Q'_{11} = \beta \cdot E_l \cdot c^4 + \beta \cdot E_t \cdot s^4 + 2 \cdot (\beta \cdot v_{lt} \cdot E_t + 2 \cdot G_{lt}) \cdot c^2 \cdot s^2 \\ Q'_{22} = \beta \cdot E_l \cdot s^4 + \beta \cdot E_t \cdot c^4 + 2 \cdot (\beta \cdot v_{lt} \cdot E_t + 2 \cdot G_{lt}) \cdot c^2 \cdot s^2 \\ Q'_{12} = (\beta \cdot E_l + \beta \cdot E_t - 4 \cdot G_{lt}) \cdot c^2 \cdot s^2 + \beta \cdot v_{lt} \cdot E_t \cdot (c^4 + s^4) \\ Q'_{66} = (\beta \cdot E_l + \beta \cdot E_t - 2 \cdot (\beta \cdot v_{lt} \cdot E_t + G_{lt})) \cdot c^2 \cdot s^2 + G_{lt} (c^4 + s^4) \\ Q'_{16} = (\beta \cdot E_l - \beta \cdot v_{lt} \cdot E_t - 2 \cdot G_{lt}) \cdot c^3 \cdot s + (\beta \cdot v_{lt} \cdot E_t - \beta \cdot E_t + 2 \cdot G_{lt}) \cdot c \cdot s^3 \\ Q'_{26} = (\beta \cdot E_l - \beta \cdot v_{lt} \cdot E_t - 2 \cdot G_{lt}) \cdot c \cdot s^3 + (\beta \cdot v_{lt} \cdot E_t - \beta \cdot E_t + 2 \cdot G_{lt}) \cdot c^3 \cdot s \end{array} \right. \quad (2.19)$$

Na prática, utilizam-se sobretudo as fibras à 0°, 90°, 45° e -45°. Com isso, as matrizes de rigidez para as respectivas direções são:

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{Q}^{0^\circ} = \begin{bmatrix} \beta \cdot E_l & \beta \cdot v_{lt} \cdot E_t & 0 \\ \beta \cdot v_{lt} \cdot E_t & \beta \cdot E_t & 0 \\ 0 & 0 & G_{lt} \end{bmatrix}_{(x,y)} \\ \underline{Q}^{90^\circ} = \begin{bmatrix} \beta \cdot E_t & \beta \cdot v_{lt} \cdot E_t & 0 \\ \beta \cdot v_{lt} \cdot E_t & \beta \cdot E_l & 0 \\ 0 & 0 & G_{lt} \end{bmatrix}_{(x,y)} \\ \underline{Q}^{45^\circ} = \begin{bmatrix} \frac{\beta}{4} (E_l + E_t + 2 \cdot v_{lt} \cdot E_t) + G_{lt} & \frac{\beta}{4} (E_l + E_t + 2 \cdot v_{lt} \cdot E_t) - G_{lt} & \frac{\beta}{4} (E_l - E_t) \\ \frac{\beta}{4} (E_l + E_t + 2 \cdot v_{lt} \cdot E_t) - G_{lt} & \frac{\beta}{4} (E_l + E_t + 2 \cdot v_{lt} \cdot E_t) + G_{lt} & \frac{\beta}{4} (E_l - E_t) \\ \frac{\beta}{4} (E_l - E_t) & \frac{\beta}{4} (E_l - E_t) & \frac{\beta}{4} (E_l + E_t - 2 \cdot v_{lt} \cdot E_t) \end{bmatrix}_{(x,y)} \\ \underline{Q}^{-45^\circ} = \begin{bmatrix} \frac{\beta}{4} (E_l + E_t + 2 \cdot v_{lt} \cdot E_t) + G_{lt} & \frac{\beta}{4} (E_l + E_t + 2 \cdot v_{lt} \cdot E_t) - G_{lt} & \frac{\beta}{4} (E_t - E_l) \\ \frac{\beta}{4} (E_l + E_t + 2 \cdot v_{lt} \cdot E_t) - G_{lt} & \frac{\beta}{4} (E_l + E_t + 2 \cdot v_{lt} \cdot E_t) + G_{lt} & \frac{\beta}{4} (E_t - E_l) \\ \frac{\beta}{4} (E_t - E_l) & \frac{\beta}{4} (E_t - E_l) & \frac{\beta}{4} (E_l + E_t - 2 \cdot v_{lt} \cdot E_t) \end{bmatrix}_{(x,y)} \end{array} \right. \quad (2.20)$$

2.3 Flexão Assimétrica em Seção Transversal de Vigas com Paredes Finas

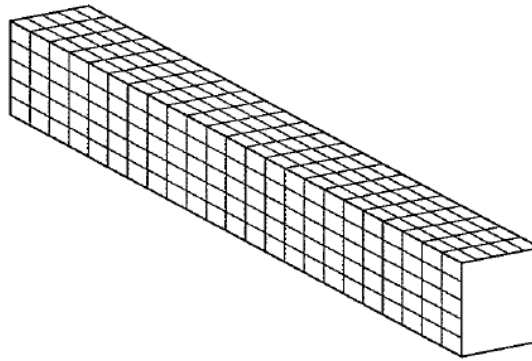
2.3.1 Material Isotrópico

Viu-se na Seção 2.2 que elementos sujeitos a uma carga axial em seu comprimento, seja por tração ou compressão, geram uma distribuição uniforme de tensão em suas seções transversais. Entretanto, cargas aplicadas perpendicularmente ao comprimento a fazem fletir, de modo que este arqueamento pode ser côncavo (—) ou convexo (—), dependendo do sentido de aplicação. Assim, com uma aplicação de carga superior, a área superficial

superior se torna menor do que a inferior, dado seus formatos côncavo e convexo, respectivamente. O oposto acontece para aplicação de carga inferior.

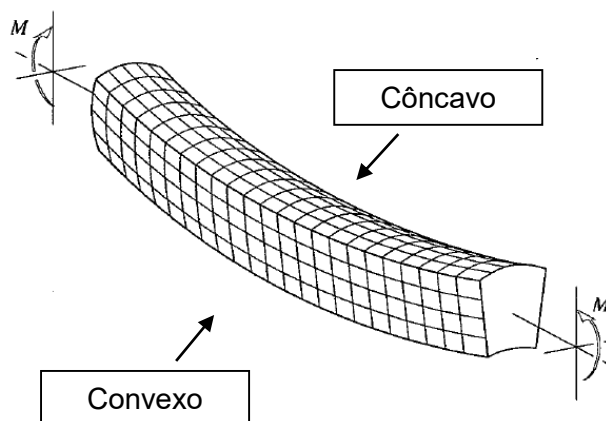
Desta forma, como a tensão é diretamente proporcional à deformação, tem-se que há uma variação de tensão através da profundidade da viga, dada as diferentes deformações nas superfícies superior e inferior. Esta relação é demonstrada para um elemento estrutural de geometria retangular na Figura 2.6. Ao aplicar o momento em suas extremidades, o elemento sofre flexão e com isso há diferença de deformação nas superfícies superior e inferior, vide Figura 2.7.

Figura 2.6 - Representação de um elemento estrutural de geometria retangular para aferir os efeitos fletores.



Fonte: Hibbeler, 2011.

Figura 2.7 - Representação dos efeitos de flexão para visualização da tração (fibras inferiores) e compressão (fibras superiores).



Fonte: Adaptada de Hibbeler, 2011.

Isso posto, por ocasião do surgimento nas seções transversais do momento fletor que divide a seção transversal em duas regiões, sendo uma comprimida e outra tracionada, por tensões normais oriundas deste momento, existe uma linha que divide ambas as regiões, denominada linha neutra (LN). Logo, o módulo da tensão normal ao longo da seção transversal reduz a zero até a LN e depois aumenta, diferentemente da viga carregada por carga axial, em que tal distribuição ocorre uniformemente.

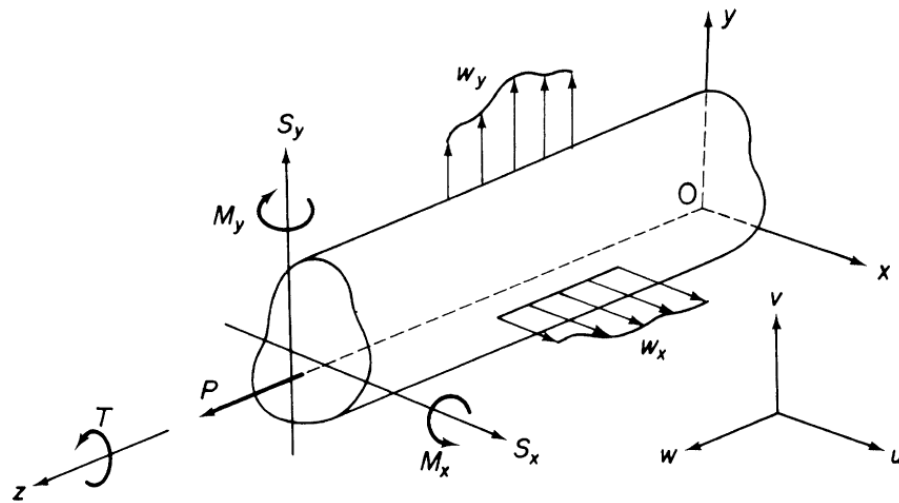
Sabe-se que o valor de tensão normal em um ponto na seção transversal de uma viga sujeita à flexão depende da posição deste ponto em relação à LN, da carga aplicada e das propriedades geométricas dessa seção.

Antes de se deduzir a equação de distribuição de tensão normal gerada em um elemento estrutural em flexão pura, é necessário fazer algumas considerações iniciais. A primeira delas é a de que os planos das seções transversais se mantêm planos e normais às fibras longitudinais da viga após o momento fletor. Além disso, assume-se que o material da viga seja linearmente elástico, ou seja, obedece à Lei de Hooke, e que este material seja homogêneo. No entanto, antes de se deduzir uma expressão para a distribuição de tensão normal, deve-se estabelecer uma convenção de sinais para momentos, forças e deslocamentos.

Forças, momentos e deslocamentos são referenciados a um sistema arbitrário de eixos Oxyz, no qual Oz é paralelo com o eixo longitudinal da viga e Oxy são os eixos do plano da seção transversal. Tem-se MEGSON (2014) como referência para a nomenclatura adotada neste trabalho: M, S, P, T e w, para momento fletor, força cisalhante, carga axial ou normal, momento de torção e carga distribuída, respectivamente. Quando apropriado, essas variáveis serão subscritas pelos nomes dos eixos coordenados para indicar sentido e direção.

Dada a Figura 2.8, adota-se o referencial de MEGSON (2014) para as direções e sentidos positivos para as forças e momentos externos aplicados a uma viga, assim como as direções positivas das componentes de deslocamentos u, v e w para qualquer ponto da seção transversal da viga, paralelo aos eixos coordenados x, y e z, respectivamente. Segundo esta convenção, os momentos fletores (M_x e M_y) são positivos quando geram tensão de tração no primeiro quadrante da seção transversal da viga.

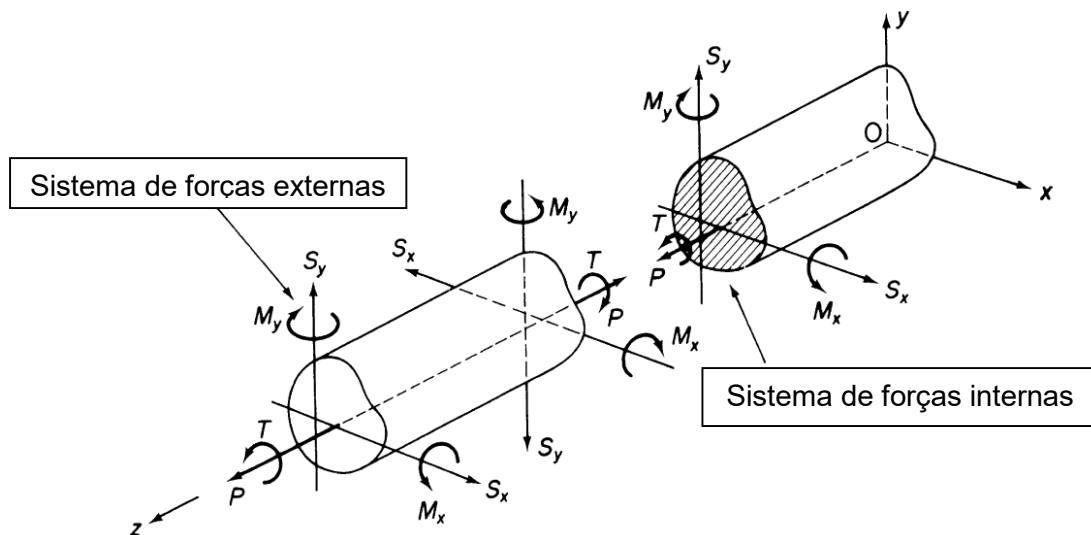
Figura 2.8 - Convenção de sentido positivo para forças, momentos e deslocamentos.



Fonte: Megson, 2013.

Se referirmos forças e momentos internos àquela face de uma seção que é vista quando vista na direção Oz , então, como mostrado na Figura 2.9, forças e momentos internos positivos estão na mesma direção e sentido que as cargas aplicadas externamente, enquanto na face oposta, eles formam um sistema oposto.

Figura 2.9 - Sistema de forças internas e externas em estrutura genérica.



Fonte: Megson, 2013.

Um momento fletor M , quando aplicado em um plano longitudinal qualquer paralelo ao eixo z pode ser decomposto nas componentes M_x e M_y pelas regras de decomposição de

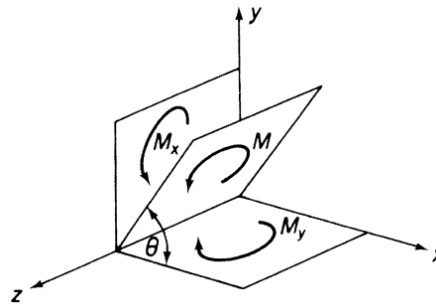
vetores. Esta situação pode ser representada visualmente, como mostram as Figuras 2.10 e 2.11. Para ambos os casos, têm-se:

$$M_x = M \cdot \sin \theta, \quad (2.21)$$

$$M_y = M \cdot \cos \theta. \quad (2.22)$$

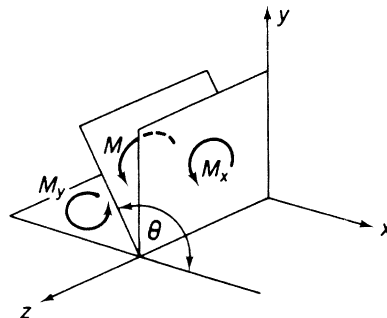
Defere-se então que, para $\theta > 90^\circ$, M_x e M_y são positivos; e, para $\theta < 90^\circ$, são negativos.

Figura 2.10 - Decomposição de um momento fletor para $\theta < 90^\circ$, em componentes segundo os planos x e y da seção transversal de uma viga.



Fonte: Megson, 2013.

Figura 2.11 - Decomposição de um momento fletor para $\theta > 90^\circ$, em componentes segundo os planos x e y da seção transversal de uma viga.

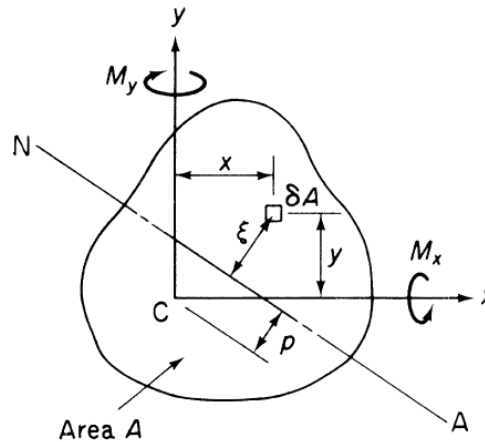


Fonte: Megson, 2013.

2.3.1.1 Distribuição de Tensões Normais devidas à Flexão

Considere-se uma viga com seção transversal genérica, conforme Figura 2.12. A viga suporta os momentos de flexão M_x e M_y e flete em torno de algum eixo em sua seção transversal, que é, portanto, um eixo de tensão zero ou um eixo neutro (NA). Este eixo é a já citada LN, onde, tanto as tensões como as deformações advindas dessa flexão são nulas.

Figura 2.12 - Visualização da linha neutra (LN) em uma seção transversal qualquer, sujeita à flexão.



Fonte: Megson, 2013.

Supondo que o lugar geométrico do centroide (C) da seção transversal coincide com a origem do sistema cartesiano xy , a tensão normal σ_z correspondente a um elemento infinitesimal de área δA locada na coordenada (x, y) e distante ξ da LN, é definida por:

$$\sigma_z = E \cdot \varepsilon_z \quad (2.23)$$

em que E é o módulo de elasticidade do material e ε_z a deformação linear na direção longitudinal da viga.

Caso a viga seja arqueada para um raio de curvatura ρ sobre a LN, então, as seções transversais são assumidas como mantidas planas após a flexão. Assim, escreve-se a deformação linear que ocorre na direção do seu eixo longitudinal:

$$\varepsilon_z = \frac{\xi}{\rho} \quad (2.24)$$

Sendo a distância ξ equacionada por:

$$\xi = x \cdot \sin \alpha + y \cdot \cos \alpha \quad (2.25)$$

Substituindo ε_z na Equação (2.23), reescreve-se:

$$\sigma_z = E \cdot \frac{\xi}{\rho} \quad (2.26)$$

A viga suporta momentos fletores puros de modo que a carga normal resultante em qualquer seção seja nula, ou seja:

$$\int_A \sigma_z \cdot dA = 0 \quad (2.27)$$

Assim sendo, substituindo σ_z na Equação (2.27) e eliminando a constante E/ρ , obtém-se:

$$\int_A \xi \cdot dA = 0 \quad (2.28)$$

Isto é, o primeiro momento de área da seção transversal da viga em torno da LN é zero. Depreende-se então que a LN passa pelo centroide da seção transversal. Este resultado é válido para uma seção qualquer, sob momento de flexão qualquer, equivalente a um caso de flexão simétrica genérica (MEGSON, 2013).

Combinando as Equações (2.25) e (2.26), equaciona-se a tensão normal que solicita a seção transversal de um elemento estrutural sob flexão assimétrica:

$$\sigma_z = \frac{E}{\rho} \cdot (x \cdot \sin \alpha + y \cdot \cos \alpha). \quad (2.29)$$

Os momentos resultantes da distribuição de tensão normal interna têm o mesmo sentido dos momentos aplicados, M_x e M_y .

$$M_x = \int_A \sigma_z \cdot y \cdot dA \quad (2.30)$$

$$M_y = \int_A \sigma_z \cdot x \cdot dA \quad (2.31)$$

Substituindo σ_z nas Equações (2.30) e (2.31) e definindo os segundos momentos de área da seção em torno dos eixos Cx e Cy como:

$$I_{xx} = \int_A y^2 \cdot dA, \quad (2.32)$$

$$I_{yy} = \int_A x^2 \cdot dA, \quad (2.33)$$

$$I_{xy} = \int_A x \cdot y \cdot dA. \quad (2.34)$$

Chega-se a:

$$M_x = E \cdot \frac{\sin \alpha}{\rho} \cdot I_{xy} + E \cdot \frac{\cos \alpha}{\rho} \cdot I_{xx}, \quad (2.35)$$

$$M_y = E \cdot \frac{\sin \alpha}{\rho} \cdot I_{yy} + E \cdot \frac{\cos \alpha}{\rho} \cdot I_{xy}. \quad (2.36)$$

Na forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \end{Bmatrix} = \frac{E}{\rho} \cdot \begin{bmatrix} I_{xy} & I_{xx} \\ I_{yy} & I_{xy} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sin \alpha \\ \cos \alpha \end{Bmatrix}. \quad (2.37)$$

Em que:

$$\frac{E}{\rho} \cdot \begin{Bmatrix} \sin \alpha \\ \cos \alpha \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xy} & I_{xx} \\ I_{yy} & I_{xy} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \end{Bmatrix}. \quad (2.38)$$

Assim, da Equação (2.29), tem-se:

$$\sigma_z = \left(\frac{M_y \cdot I_{xx} - M_x \cdot I_{xy}}{I_{xx} \cdot I_{yy} - I_{xy}^2} \right) \cdot x + \left(\frac{M_x \cdot I_{yy} - M_y \cdot I_{xy}}{I_{xx} \cdot I_{yy} - I_{xy}^2} \right) \cdot y. \quad (2.39)$$

Alternativamente:

$$\sigma_z = \frac{M_x \cdot (I_{xx} \cdot y - I_{xy} \cdot x)}{I_{xx} \cdot I_{yy} - I_{xy}^2} + \frac{M_y \cdot (I_{xx} \cdot x - I_{xy} \cdot y)}{I_{xx} \cdot I_{yy} - I_{xy}^2} \quad (2.40)$$

No caso em que a seção transversal tem Cx ou Cy (ou ambos) como um eixo de simetria, o produto de momento de inércia I_{xy} é zero tendo Cxy como eixos principais, e a flexão denominada simétrica (MEGSON, 2013). Desta forma, a Equação (2.40) se reduz a:

$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_{xx}} \cdot y + \frac{M_y}{I_{yy}} \cdot x \quad (2.41)$$

Além disso, se um dos momentos M_x ou M_y for nulo, ter-se-ão as seguintes expressões para as tensões normais, que traduzem o caso denominado “flexão simples reta”, um caso específico da flexão simétrica (MEGSON, 2014):

$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_{xx}} \cdot y, \quad (2.42)$$

$$\sigma_z = \frac{M_y}{I_{yy}} \cdot x. \quad (2.43)$$

Também pode ser observado nas Equações (2.42) e (2.43), σ_z é zero quando y é zero; e σ_z quando x é zero. Portanto, para a flexão simétrica do tipo simples reta, o eixo x se torna a LN quando $M_y = 0$ e o eixo y quando $M_x = 0$. Assim, constata-se que a posição da LN depende da forma de aplicação das cargas, bem como das propriedades geométricas da seção transversal, exclusivamente responsáveis pelos momentos de inércia da mesma.

2.3.2 Material Compósito

Para um material compósito sujeito à cargas de flexão, procurar-se-á uma expressão para a tensão normal na qual um elemento está sujeito de forma análoga ao material homogêneo e de módulo de elasticidade constante. Para o caso dos materiais compósitos, entretanto, deve-se levar em consideração os seguintes fatores: o parâmetro E pode variar entre as camadas do laminado. Em todo caso, a expressão obtida terá variáveis análogas ao material homogêneo: módulo de elasticidade, raio de curvatura da viga, coordenadas do elemento de análise e inclinação do eixo neutro em relação ao eixo longitudinal. Tendo-se por base a Equação (2.29) substituída em (2.30) e (2.31), vem:

$$M_X = \int_A \frac{E_{z,i}}{\rho} \cdot (X \cdot \sin\alpha + Y \cdot \cos\alpha) \cdot Y \cdot dA \quad (2.44)$$

$$M_Y = \int_A \frac{E_{z,i}}{\rho} \cdot (X \cdot \sin\alpha + Y \cdot \cos\alpha) \cdot X \cdot dA \quad (2.45)$$

ou

$$M_X = \frac{\sin\alpha}{\rho} \cdot \int_A E_{z,i} \cdot X \cdot Y \cdot dA + \frac{\cos\alpha}{\rho} \cdot \int_A E_{z,i} \cdot Y^2 \cdot dA \quad (2.46)$$

$$M_Y = \frac{\sin\alpha}{\rho} \cdot \int_A E_{z,i} \cdot X^2 \cdot dA + \frac{\cos\alpha}{\rho} \cdot \int_A E_{z,i} \cdot X \cdot Y \cdot dA \quad (2.47)$$

E, em relação aos eixos coordenados XYZ, os momentos de inércia de segunda ordem, acrescidos do módulo de elasticidade variável para cada laminado ($E_{z,i}$), tornam-se:

$$I'_{XX} = \int_A E_{z,i} \cdot Y^2 \cdot dA, \quad I'_{YY} = \int_A E_{z,i} \cdot X^2 \cdot dA, \quad I'_{XY} = \int_A E_{z,i} \cdot X \cdot Y \cdot dA \quad (2.48)$$

de maneira que, substituindo em (2.46) e (2.47), obtem-se, respectivamente:

$$\begin{cases} M_X = \frac{\sin\alpha}{\rho} \cdot I'_{XY} + \frac{\cos\alpha}{\rho} \cdot I'_{XX} \\ M_Y = \frac{\sin\alpha}{\rho} \cdot I'_{YY} + \frac{\cos\alpha}{\rho} \cdot I'_{XY} \end{cases} \quad (2.49)$$

Resolvendo o sistema anterior, têm-se:

$$\frac{\sin\alpha}{\rho} = \frac{M_Y \cdot I'_{XX} - M_X \cdot I'_{XY}}{I'_{XX} \cdot I'_{YY} - I'^2_{XY}} \quad (2.50)$$

$$\frac{\cos\alpha}{\rho} = \frac{M_X \cdot I'_{YY} - M_Y \cdot I'_{XY}}{I'_{XX} \cdot I'_{YY} - I'^2_{XY}} \quad (2.51)$$

E, a partir da Equação (2.41), feitas as devidas substituições, obtém-se:

$$\sigma_z = E_{z,i} \left[\left(\frac{M_Y \cdot I'_{XX} - M_X \cdot I'_{XY}}{I'_{XX} \cdot I'_{YY} - I'^2_{XY}} \right) X + \left(\frac{M_X \cdot I'_{YY} - M_Y \cdot I'_{XY}}{I'_{XX} \cdot I'_{YY} - I'^2_{XY}} \right) Y \right] \quad (2.52)$$

2.4. Cargas Cisalhantes em Seção Transversal de Vigas com Paredes Finas

2.4.1 Material Isotrópico

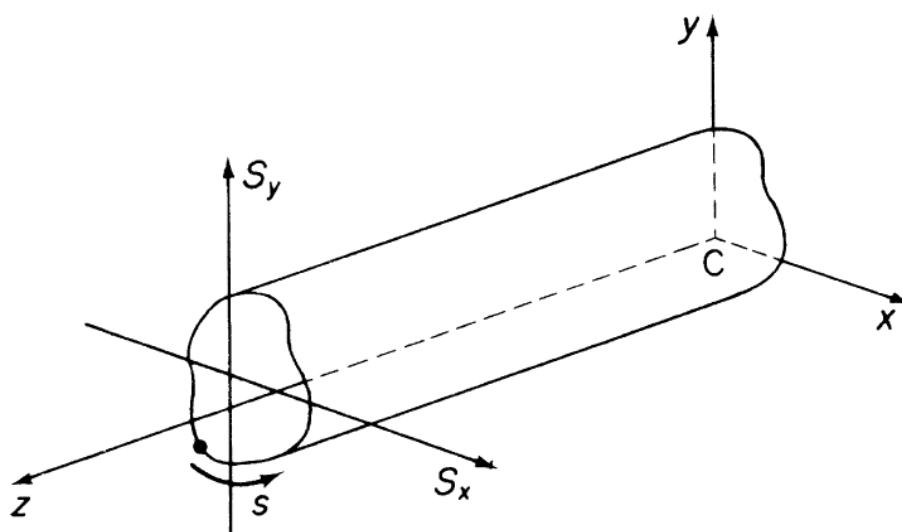
Para esta análise, assume-se que os efeitos de restrição axial são desprezíveis; que as tensões de cisalhamento normais à viga são desprezadas; que tensões axiais em planos normais à superfície da viga são constantes em toda a espessura da parede; e, ainda, que a viga apresenta seção transversal uniforme, mas podendo a espessura das paredes variar ao longo do contorno da seção transversal fechada e vazada. Além disso, potências quadradas ou superiores aplicadas à espessura t são negligenciadas quando da determinação das propriedades de inércia das seções.

2.4.1.2 Seção Transversal Fechada

Para a seção transversal fechada, algumas considerações precisam ser realizadas. Primeiramente, as cargas cisalhantes serão aplicadas em pontos da seção transversal que não coincidam com o centro de cisalhamento. Logo, efeitos de torção assim como efeitos cisalhantes são considerados.

Além disso, como segunda consideração, geralmente não é possível escolher uma origem na qual o parâmetro s seja o ponto no qual o fluxo cisalhante seja conhecido. Considere, então, uma viga de seção fechada arbitrária como mostrada na Figura 2.13:

Figura 2.13 – Viga arbitrária representando uma seção sujeita à carga cisalhante S .



Fonte: Megson, 2013.

As cargas cisalhantes são aplicadas em um ponto da seção transversal que, em geral, causa tensões normais de flexão e fluxos cisalhantes em um estado de equilíbrio. Forças inerciais e tensões circunferenciais são desprezadas. Portanto:

$$\frac{\partial q}{\partial s} + t \cdot \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \quad (2.53)$$

Em que t é a espessura das paredes da viga. Obtém-se, por integração da Equação (2.53), a expressão do fluxo de cisalhamento.

$$\int_0^s \frac{\partial q}{\partial s} \cdot ds = - \left(\frac{S_x \cdot I_{xx} - S_y \cdot I_{xy}}{I_{xx} \cdot I_{yy} - I_{xy}^2} \right) \int_0^s t \cdot x \cdot ds - \left(\frac{S_y \cdot I_{yy} - S_x \cdot I_{xy}}{I_{xx} \cdot I_{yy} - I_{xy}^2} \right) \int_0^s t \cdot y \cdot ds \quad (2.54)$$

Escolhendo um ponto de origem para se iniciar a trajetória genérica s , correspondendo a este, o fluxo de cisalhamento de valor desconhecido $q_{s,0}$, reescreve-se a Equação (2.54):

$$q_s = - \left(\frac{S_x \cdot I_{xx} - S_y \cdot I_{xy}}{I_{xx} \cdot I_{yy} - I_{xy}^2} \right) \int_0^s t \cdot x \cdot ds - \left(\frac{S_y \cdot I_{yy} - S_x \cdot I_{xy}}{I_{xx} \cdot I_{yy} - I_{xy}^2} \right) \int_0^s t \cdot y \cdot ds + q_{s,0} \quad (2.55)$$

Logo, considerando um método de solução para a seção fechada, tem-se que em uma seção genérica, ou “básica”, o fluxo cisalhante será :

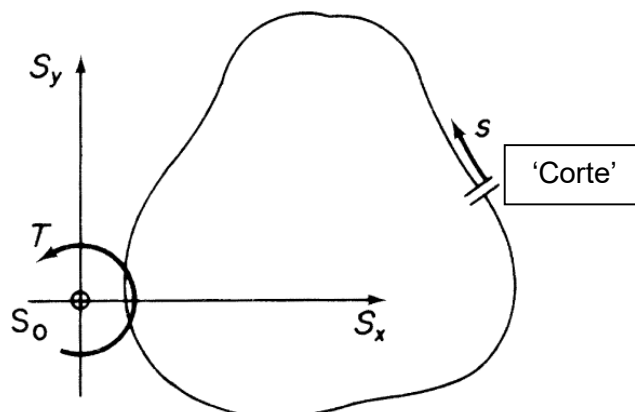
$$q_s = q_b + q_{s,0} \quad (2.56)$$

Donde para q_b supõe-se que a viga de seção fechada seja “cortada” em um ponto conveniente, o que produz uma seção “aberta”. Este conceito é evidenciado na Figura 2.14.

A distribuição do fluxo cisalhante q_b ao longo desta seção “aberta” será dada pela Equação (2.57):

$$q_b = - \left(\frac{S_x \cdot I_{xx} - S_y \cdot I_{xy}}{I_{xx} \cdot I_{yy} - I_{xy}^2} \right) \int_0^s t \cdot x \cdot ds - \left(\frac{S_y \cdot I_{yy} - S_x \cdot I_{xy}}{I_{xx} \cdot I_{yy} - I_{xy}^2} \right) \int_0^s t \cdot y \cdot ds \quad (2.57)$$

Figura 2.14 - Carregamento equivalente em uma viga de seção aberta.

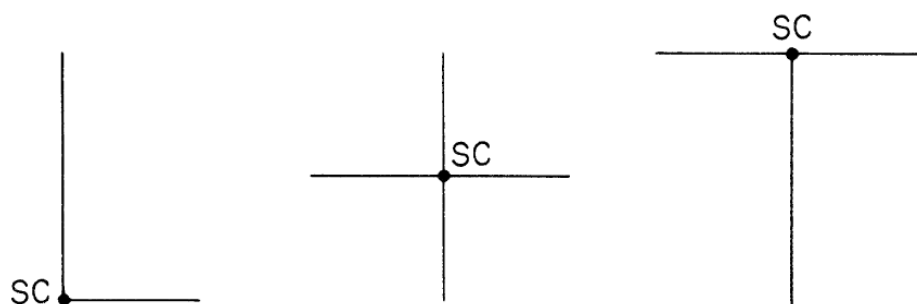


Fonte: Megson, 2013.

Centro de Cisalhamento

O centro de cisalhamento, representado por C.C., S. ou S.C. é um ponto contido no plano que contém a seção transversal, no qual as cargas cisalhantes não produzem torção. Em seções transversais que possuem um eixo de simetria, o centro de cisalhamento estará contido neste eixo. Em outras seções também com geometrias peculiares (em forma de cruz, em forma das letras “L” ou “T”, por exemplo) (Figura 2.15), o ponto de interseção das bordas será o centro de cisalhamento, desde que as cargas resultantes internas de cisalhamento passem através destes pontos (MEGSON, 2013).

Figura 2.15 – Posição do centro de cisalhamento para vigas de seção aberta.



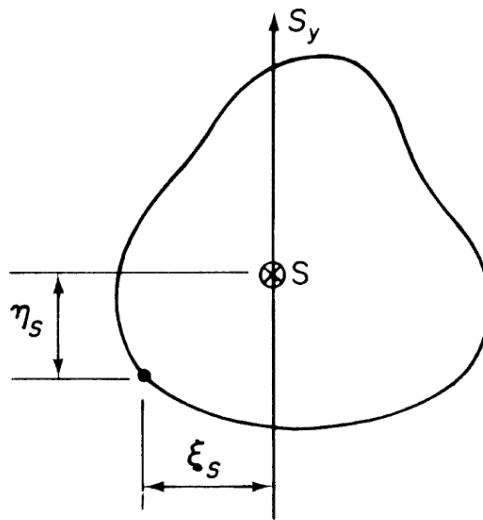
Fonte: Megson, 2013.

Alocação do Centro de Cisalhamento

É apresentado o desenvolvimento proposto por MEGSON (2013), para a obtenção do ponto correspondente ao centro de cisalhamento (C.C., S. ou S.C.) de seções transversais fechadas.

Tomando-se uma seção genérica fechada de paredes finas, mostrada na Figura 2.16, considera-se S em qualquer ponto conveniente dessa seção.

Figura 2.16 – Visualização do centro de cisalhamento S em uma seção fechada qualquer.



Fonte: Megson, 2013.

Para determinar a coordenada ξ_s do centro de cisalhamento S da viga de seção fechada, aplica-se uma carga de cisalhamento S_y arbitrária em S, calcula-se a distribuição de fluxo cisalhante q_s devido à S_y e então igualam-se os momentos interno e externo.

No caso de seções fechadas, o fluxo cisalhante tem a parcela de um fluxo desconhecido $q_{s,0}$ correspondente ao fluxo que ocorre no local onde a seção fechada tenha sido cortada. Assim, segundo MEGSON (2013), bastará calcular o valor de $q_{s,0}$, para que se possa realizar o equacionamento de momento anunciado, a fim de obter a locação do centro de cisalhamento S.

Para o cálculo de $q_{s,0}$ basta lembrar que, quando as cargas cisalhantes estão atuando no centro de cisalhamento, não ocorre torção, ou seja, a taxa de torção é nula. Assim, da Equação (2.58), obtém-se a Equação (2.59):

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{1}{2A} \cdot \oint \frac{q_s}{Gt} \cdot ds \quad (2.58)$$

$$0 = \oint \frac{q_s}{Gt} \cdot ds \quad (2.59)$$

Ou, ainda:

$$0 = \oint \frac{1}{Gt} \cdot (q_b + q_{s,0}) \cdot ds \quad (2.60)$$

Resultando, assim, na expressão do fluxo desconhecido $q_{s,0}$:

$$q_{s,0} = - \frac{\oint \left(\frac{q_b}{Gt} \right) \cdot ds}{\oint \frac{ds}{Gt}} \quad (2.61)$$

2.4.2 Material Compósito

2.4.2.2 Seção Transversal Fechada

O mesmo argumento utilizado para seções abertas se aplica para as seções fechadas, porém a equação passa a ter a seguinte forma:

$$q_s = - E_{Z,i} \cdot \left[\frac{S_X \cdot I'_{XX} - S_Y \cdot I'_{XY}}{I'_{XX} \cdot I'_{YY} - I'^2_{XY}} \int_0^s t_i \cdot x \cdot ds + \left(\frac{S_Y \cdot I'_{YY} - S_X \cdot I'_{XX}}{I'_{XX} \cdot I'_{YY} - I'^2_{XY}} \right) \int_0^s t_i \cdot y \cdot ds \right] + q_{s,0} \quad (2.62)$$

2.5 Torção em Seção Transversal de Vigas com Paredes Finas

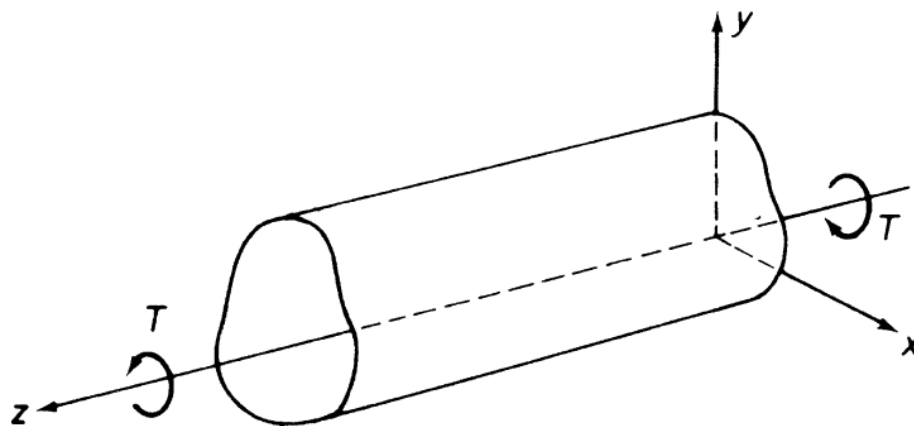
2.5.1 Material isotrópico

2.5.1.2 Seção Transversal Fechada

De acordo com MEGSON (2013), uma viga de seção fechada sujeita exclusivamente a um torque T , sem qualquer tensão axial, como mostra a Figura 2.17, desenvolve algumas tensões características. Deduz-se que a aplicação de um torque puro em uma viga de seção fechada resulta no desenvolvimento de um fluxo de cisalhamento constante na parede da

viga. Entretanto, a tensão do cisalhamento τ pode variar ao longo da seção transversal, visto que a espessura da parede t é uma função de s .

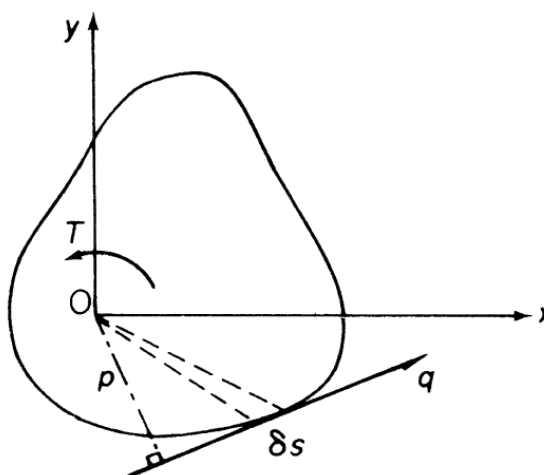
Figura 2.17 – Torção de uma viga de seção fechada.



Fonte: Megson, 2013.

A relação entre o torque aplicado e o fluxo cisalhante constante gerado é obtido considerando o equilíbrio entre torções, como observado na Figura 2.18.

Figura 2.18 – Determinação da distribuição do fluxo de cisalhamento em uma viga de seção fechada sujeita à torção.



Fonte: Megson, 2013.

Logo, tem-se:

$$T = \oint p \cdot q \cdot ds \quad (2.63)$$

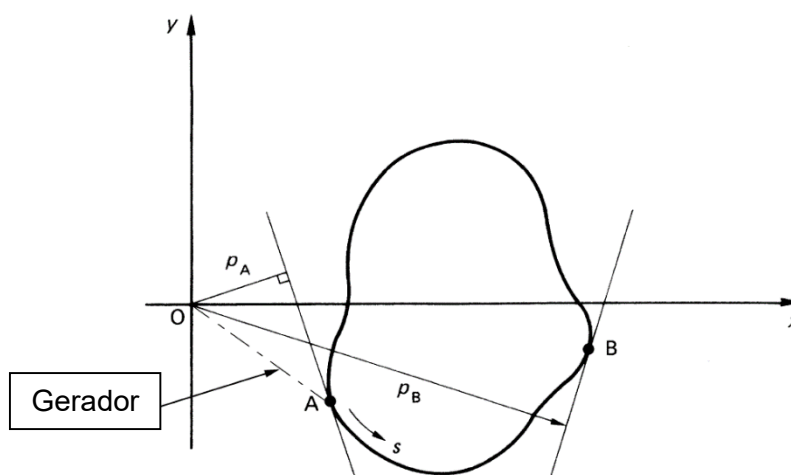
Visto que q é uma constante e $\oint p \cdot ds = 2A$, escreve-se:

$$T = 2.A.q \quad (2.64)$$

Nota-se que a origem O dos eixos na Figura 2.18 pode ser posicionada fora da seção transversal da viga desde que o momento do fluxo de cisalhamento interno (cujo resultado é um torque puro) seja o mesmo em qualquer ponto do seu plano. Para uma origem fora da seção transversal o termo $\oint p.q.ds$ envolverá a somatória das áreas positivas e negativas. O sinal de uma área é determinado pelo sinal de p, que está associado à convenção de sinal para o torque que o acompanha. Se o movimento da base de p ao longo da tangente em qualquer ponto na direção positiva de s leva a uma rotação anti-horária, p é positivo.

Portanto, na Figura 2.19, uma origem em OA rotacionando em torno de O, inicialmente varrerá uma área negativa já que p_A é negativo. Em B, entretanto, p_B é positivo já que a área varrida tem o sinal trocado.

Figura 2.19 – Convenção de sinais para áreas varridas.



Fonte: Megson, 2013.

2.5.2 Materiais Compósitos

2.5.2.2 Seção Transversal Fechada

A distribuição do fluxo de cisalhamento em uma viga de paredes finas de seção fechada sujeita a um momento de torção é:

$$T = 2.A.q \quad (2.65)$$

Ou

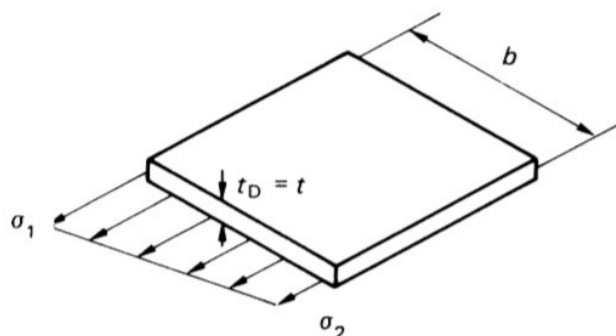
$$q = \frac{T}{2.A} \quad (2.66)$$

A obtenção da Equação (2.66) se baseia em considerações de equilíbrio, portanto não depende das propriedades elásticas da viga. Assim, ela pode ser aplicada tanto para seções isotrópicas como compósitas.

2.6 Idealização Estrutural

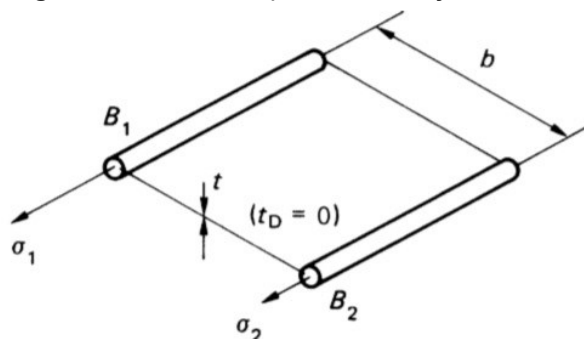
Suponha-se que se deseja idealizar, estruturalmente, o trecho do painel esquematizado na Figura 2.20 por uma combinação de *Booms* que suportem tensões normais e por paredes que suportem tensões de cisalhamento.

Figura 2.20 - Painel antes da idealização estrutural



Fonte: Megson, 2014.

Figura 2.21 - Painel após a idealização estrutural.



Fonte: Megson, 2014.

Na Figura 2.20, a espessura t_D do revestimento que suporta as tensões normais é igual à espessura real t , porém, na Figura 2.21, considera-se $t_D=0$. Suponha-se também que a distribuição de tensões normais no painel real varie linearmente de um valor desconhecido σ_1 a outro valor desconhecido σ_2 . Evidentemente, a análise deve prever os extremos das tensões σ_1 e σ_2 . Fazendo a equivalência dos momentos fletores pelas duas situações, real e idealizada, escreve-se:

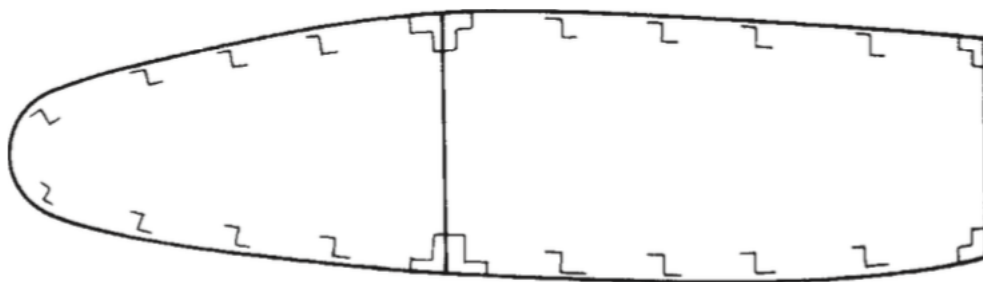
$$\sigma_2 \cdot t_D \cdot \frac{b^2}{2} + \frac{1}{3} \cdot (\sigma_1 - \sigma_2) \cdot t_D \cdot b^2 = \sigma_1 \cdot B_1 \cdot b \quad (2.67)$$

Em que se tem:

$$B_1 = \frac{t_D \cdot b}{6} \left(2 + \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right) \quad (2.68)$$

Numa seção transversal de asa ilustrada pela Figura 2.22, as nervuras e as longarinas de bordo têm seções transversais bem menores se comparadas com a seção completa da asa. Com isso, a variação das tensões ao longo dessas áreas é também pequena no âmbito de toda a seção transversal deste elemento estrutural.

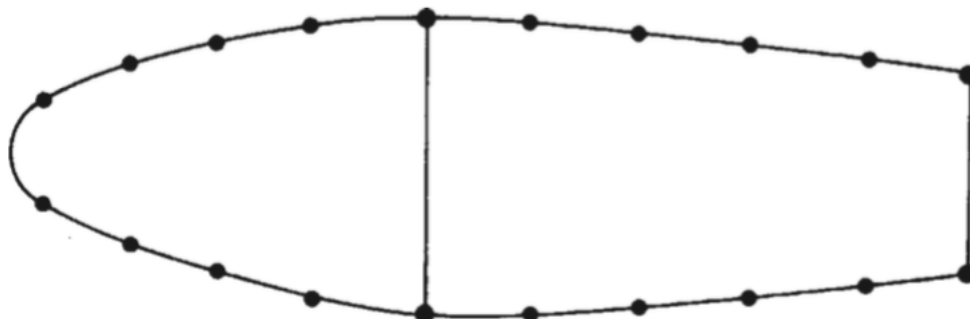
Figura 2.22 – Seção típica real de uma asa.



Fonte: Megson, 2013.

Além disso, a distância entre o centroide de uma nervura e o revestimento adjacente à mesma é também bastante pequena. Assim, é razoável assumir que a tensão normal seja constante ao longo das seções transversais das nervuras. Em conformidade, podem-se substituir as áreas das nervuras e das longarinas de bordo por áreas concentradas, conhecidas por *Booms*, sendo estes alocados sobre a linha média do revestimento, nos quais a tensão normal seja constante, como mostrado na Figura 2.23.

Figura 2.23 – Idealização estrutural de uma seção de asa, por *Booms*.



Fonte: Megson, 2013.

Em seções de fuselagem e asa, as nervuras e as longarinas de bordo suportam a maior parte das tensões normais, enquanto o revestimento é mais eficaz para resistir aos esforços cisalhantes (MEGSON, 2013).

2.6.1 Flexão e Cisalhamento em Vigas de Seção Fechada Idealizada

Será apresentada os efeitos da idealização estrutural na análise de uma seção fechada quando da utilização de material isotrópico ou compósito.

2.6.1.1 Material Isotrópico

As análises realizadas na Subseção 2.3 apresentam desenvolvimentos que culminam na expressão que permite o cálculo da distribuição de tensões normais que ocorrem ao longo de toda a seção transversal real, por meio da Equação (2.40).

Nessa expressão, as coordenadas (x,y) de quaisquer pontos da seção transversal são referenciadas a eixos com origem no centróide desta seção. Além disso, as propriedades de inércia da seção I_{xx} , I_{yy} e I_{xy} são calculadas em relação a tais eixos, denominados centroidais.

Ao se considerar a idealização estrutural da seção, a distribuição de tensões normais correspondente consistirá em uma série de tensões normais concentradas nos centroides dos *Booms*.

Ainda na Equação (2.40), registra-se que, ao se transformar a seção transversal real em uma condição idealizada por *Booms*, as inércias reais serão calculadas também com relação aos eixos centroidais, porém, levando em consideração apenas as áreas dos

Booms, lembrando que suas inércias locais são nulas, por corresponderem, a rigor, a pontos.

Similarmente, com relação às tensões de cisalhamento, as expressões para cálculo do fluxo cisalhante são simplificadas no contexto da idealização estrutural. Segundo MEGSON (2014), por meio da Equação (2.62), dado que o *Boom* gera descontinuidade no fluxo cisalhante, sempre que um deles é detectado, o fluxo cisalhante recebe um incremento semelhante à parcela da parede do painel, porém, equacionada pontualmente, ou seja:

$$q_s = - \left(\frac{S_x \cdot I_{xx} - S_y \cdot I_{xy}}{I_{xx} \cdot I_{yy} - I_{xy}^2} \right) \cdot \left(\int_0^s t_D \cdot x \cdot ds + \sum_{r=1}^n B_r \cdot x_r \right) - \left(\frac{S_y \cdot I_{yy} - S_x \cdot I_{xy}}{I_{xx} \cdot I_{yy} - I_{xy}^2} \right) \cdot \left(\int_0^s t_D \cdot y \cdot ds + \sum_{r=1}^n B_r \cdot y_r \right) + q_{s,0} \quad (2.69)$$

Observa-se a espessura t_D será nula na condição estrutural idealizada. Assim, a Equação (2.69) se reduzirá a:

$$q_s = - \left(\frac{S_x \cdot I_{xx} - S_y \cdot I_{xy}}{I_{xx} \cdot I_{yy} - I_{xy}^2} \right) \cdot \sum_{r=1}^n B_r \cdot x_r - \left(\frac{S_y \cdot I_{yy} - S_x \cdot I_{xy}}{I_{xx} \cdot I_{yy} - I_{xy}^2} \right) \cdot \sum_{r=1}^n B_r \cdot y_r + q_{s,0} \quad (2.70)$$

2.6.2.1 Material Compósito

Em se tratando de viga constituída por material compósito, no tocante à flexão, com idealização estrutural, as tensões normais são obtidas semelhantemente ao caso apresentado na Subseção 2.3.2, com a diferença do cálculo das inércias apenas pelos *Booms*, com respectivos módulos de elasticidade:

$$\sigma_z = E_{z,i} \cdot \left[\left(\frac{M_y \cdot I'_{xx} - M_x \cdot I'_{xy}}{I'_{xx} \cdot I'_{yy} - I'^2_{xy}} \right) \cdot X + \left(\frac{M_x \cdot I'_{yy} - M_y \cdot I'_{xy}}{I'_{xx} \cdot I'_{yy} - I'^2_{xy}} \right) \cdot Y \right] \quad (2.71)$$

Com relação ao cisalhamento, de modo semelhante ao supra ponderado, escreve-se a equação do fluxo cisalhante que atua nas paredes da seção idealizada, decorrente de cargas de cisalhamento:

$$q_s = -E_{Z,i} \left[\left(\frac{S_X \cdot I_{XX} - S_X \cdot I_{XY}}{I_{XX} \cdot I_{YY} - I_{XY}^2} \right) \cdot \sum_{r=1}^n B_r \cdot X_r + \left(\frac{S_Y \cdot I_{YY} - S_X \cdot I_{XY}}{I_{XX} \cdot I_{YY} - I_{XY}^2} \right) \cdot \sum_{r=1}^n B_r \cdot Y_r \right] + q_{s,0} \quad (2.72)$$

Acrescenta-se que, sob a ação do momento de torção, o cálculo do fluxo cisalhante da seção idealizada não difere da seção real, valendo as mesmas expressões apresentadas na Subseção 2.5.2.2.

Posteriormente ao cálculo dos esforços, é interessante, no que tange ao dimensionamento das estruturas compósitas, utilizar de um critério de ruptura às solicitações planas atuantes. Para que a utilização de um critério seja viável, torna-se necessário o cálculo prévio das tensões longitudinais, transversais e cisalhantes na direção de cada fibra do estratificado. O critério utilizado nesse projeto é detalhado posteriormente na Seção 2.7.2.

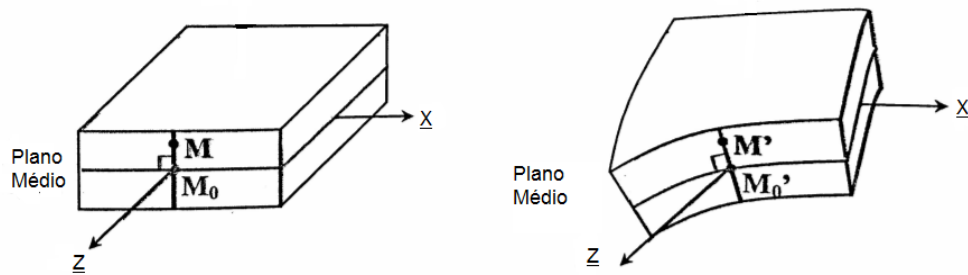
Assim sendo, a metodologia exposta é baseada em BOUVET (2015) e envolve, primeiramente, o cálculo do fluxo de momento nas direções dos eixos coordenados (x,y), tal que:

$$\begin{cases} M_z = \int_{-h/2}^{h/2} y \cdot \sigma_z \cdot dy \\ M_x = \int_{-h/2}^{h/2} y \cdot \sigma_x \cdot dy \\ M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} y \cdot \tau_{xy} \cdot dy \end{cases} \quad (2.73)$$

Tais fluxos de momento estão representados em [N.mm/mm], ou seja, [N], e representam o momento recebido por uma placa de lado unitário. Em vista das definições, M_x representa o fluxo de momento devido à tensão σ_z através de uma face normal à x e, então, está dirigida segundo y (ao longo da espessura do estratificado). A definição análoga vale para a direção y e M_{xy} é o momento devido às tensões τ_{xy} , também definido como fluxo de momento de deformação.

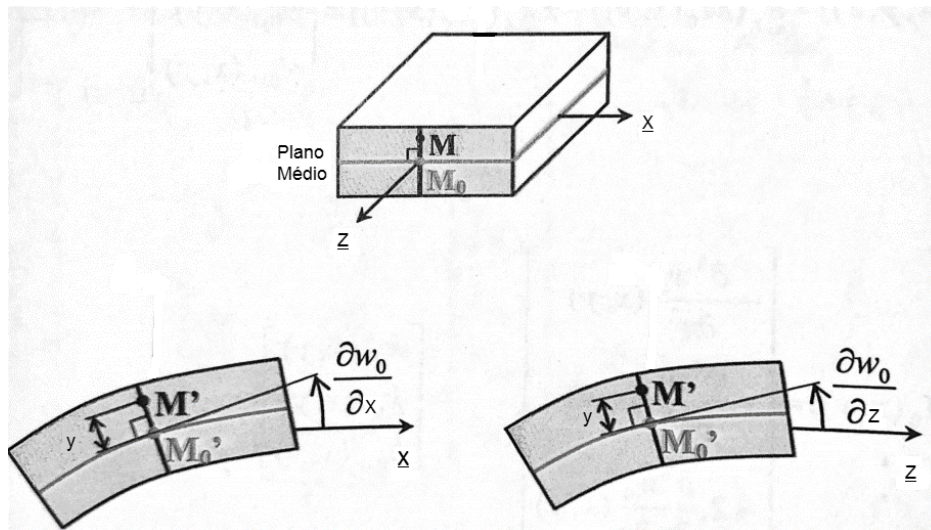
Seja uma placa estratificada que apresenta simetria espelhada e solicitada pelas solicitações exteriores de momento (M_x , M_y e M_{xy}) em seu plano médio. Aplica-se a hipótese de Love-Kirchoff de que um vetor normal ao plano médio anterior à deformação permanecerá um segmento de direção perpendicular ao plano médio após a deformação (BOUVET, 2015). A Figura 2.24 representa a referida hipótese, ao passo que a Figura 2.25 evidencia como ela se aplica aos diferentes planos do estratificado.

Figura 2.24 – Representação da hipótese de Love-Kirchoff.



Fonte: Adaptada de Bouvet, 2015.

Figura 2.25 – Aplicação da hipótese de Love-Kirchoff nos diferentes planos do estratificado.



Fonte: Adaptada de Bouvet, 2015.

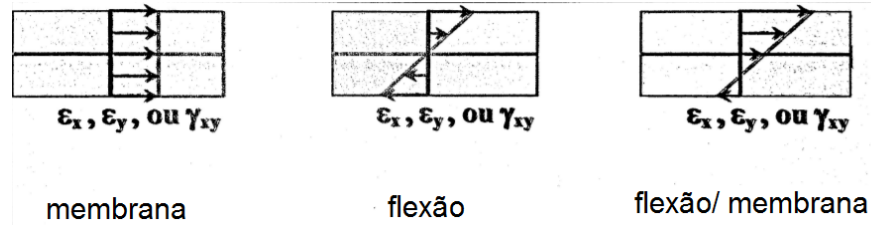
E o deslocamento de um ponto qualquer $M(x,y,z)$ do estratificado pode, então, colocar-se da seguinte forma:

$$\underline{u}(M(x,y,z)) = \begin{bmatrix} u(x,y,z) \\ v(x,y,z) \\ w(x,y,z) \end{bmatrix}_{(\underline{x},\underline{y},\underline{z})} = \begin{bmatrix} u_0(z,y) - y \cdot \frac{\partial w_0}{\partial z}(z,y) \\ v_0(z,y) - y \cdot \frac{\partial w_0}{\partial y}(z,y) \\ w_0(z,y) \end{bmatrix}_{(\underline{x},\underline{y},\underline{z})} \quad (2.74)$$

Os deslocamentos $u_0(x,y)$ e $v_0(x,y)$ são os deslocamentos devidos aos esforços de membrana (numa primeira aproximação), o deslocamento $w_0(x,y)$ é o deslocamento segundo z do plano médio devido à flexão e $\frac{\partial w_0}{\partial x}(x,y)$ e $\frac{\partial w_0}{\partial y}(x,y)$ representam os respectivos

ângulos de rotação da normal ao plano médio segundo os eixos x e y. Com isso, pode-se deduzir as deformações, que não são constantes ao longo da espessura, porém são lineares ao longo desta, conforma ilustra a Figura 2.26.

Figura 2.26 – Deformações ao longo da espessura do estratificado frente à diferentes solicitações.



Fonte: Adaptada de Bouvet, 2015.

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(M(x,y,z)) = \begin{bmatrix} \varepsilon_x(x,y,z) \\ \varepsilon_y(x,y,z) \\ \gamma_{xy}(x,y,z) \end{bmatrix}_{(x,y,z)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x}(z,y) - y \cdot \frac{\partial^2 w_0}{\partial z^2}(z,y) \\ \frac{\partial v_0}{\partial y}(z,y) - y \cdot \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}(z,y) \\ \frac{\partial u_0}{\partial y}(z,y) + \frac{\partial v_0}{\partial z}(z,y) - y \cdot 2 \cdot \frac{\partial^2 w_0}{\partial z \partial y}(z,y) \end{bmatrix}_{(x,y,z)} \quad (2.75)$$

Ou, ainda:

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(M(x,y,z)) = \underline{\underline{\varepsilon}}_0(M_0(z,y)) + y \cdot \underline{\underline{k}}_0(M_0(z,y)) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{0x}(z,y) \\ \varepsilon_{0y}(z,y) \\ \gamma_{0xy}(z,y) \end{bmatrix}_{(x,y,z)} + y \cdot \begin{bmatrix} k_{0x}(z,y) \\ k_{0y}(z,y) \\ k_{0xy}(z,y) \end{bmatrix}_{(x,y,z)} \quad (2.76)$$

Tal que:

$$\underline{\underline{k}}_0(M_0(z,y)) = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial z^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2 \cdot \frac{\partial^2 w_0}{\partial z \partial y} \end{bmatrix}_{(x,y,z)} = \begin{bmatrix} k_{0x}(z,y) \\ k_{0y}(z,y) \\ k_{0xy}(z,y) \end{bmatrix} \quad (2.77)$$

Donde $\underline{k}_0(M_0(x,y))$ representa as curvaturas da placa definidas ao nível do plano médio. Por consequência, as informações do plano médio, notadamente suas deformações planas e suas curvaturas, permitem determinar as deformações de um ponto qualquer da placa. Uma vez que as deformações são lineares ao longo da espessura e o comportamento elástico e homogêneo das camadas são as mesmas para uma fibra mas diferentes de uma fibra para outra, as tensões serão, então, lineares em cada fibra com eventuais descontinuidades nas interfaces.

Pode-se, então, conhecer a lei de comportamento de uma fibra e determinar as tensões atuantes em sua direção à partir das deformações:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x^k \\ \sigma_y^k \\ \tau_{xy}^k \end{bmatrix}_{(x,y,z)} = \begin{bmatrix} Q_{11}^k & Q_{12}^k & Q_{16}^k \\ Q_{12}^k & Q_{22}^k & Q_{26}^k \\ Q_{16}^k & Q_{26}^k & Q_{66}^k \end{bmatrix}_{(x,y,z)} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}_{(x,y,z)} \quad \text{para } 1 \leq k \leq n \quad (2.78)$$

Que pode-se escrever da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x^k \\ \sigma_y^k \\ \tau_{xy}^k \end{bmatrix}_{(x,y,z)} = \begin{bmatrix} Q_{11}^k & Q_{12}^k & Q_{16}^k \\ Q_{12}^k & Q_{22}^k & Q_{26}^k \\ Q_{16}^k & Q_{26}^k & Q_{66}^k \end{bmatrix}_{(x,y,z)} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{0x} \\ \varepsilon_{0y} \\ \gamma_{0xy} \end{bmatrix}_{(x,y,z)} + z \cdot \begin{bmatrix} Q_{11}^k & Q_{12}^k & Q_{16}^k \\ Q_{12}^k & Q_{22}^k & Q_{26}^k \\ Q_{16}^k & Q_{26}^k & Q_{66}^k \end{bmatrix}_{(x,y,z)} \cdot \begin{bmatrix} k_{0x} \\ k_{0y} \\ k_{0xy} \end{bmatrix}_{(x,y,z)} \quad (2.79)$$

Isso permite após integração ao longo da espessura de determinar os fluxos de esforço e de momento em função dessas deformações e das curvaturas do plano médio:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ T_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix}_{(x,y,z)} = \begin{bmatrix} \underline{A} & \underline{B} \\ \underline{B} & \underline{D} \end{bmatrix}_{(x,y,z)} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{0x} \\ \varepsilon_{0y} \\ \gamma_{0xy} \\ k_{0x} \\ k_{0y} \\ k_{0xy} \end{bmatrix}_{(x,y,z)} \quad (2.80)$$

Com:

$$\begin{cases} A_{ij} = \sum_{k=1}^n Q_{ij}^k (z^k - z^{k-1}) & [N/mm] \\ B_{ij} = \sum_{k=1}^n Q_{ij}^k \cdot \frac{(z^k)^2 - (z^{k-1})^2}{2} & [N] \\ D_{ij} = \sum_{k=1}^n Q_{ij}^k \frac{(z^k)^3 - (z^{k-1})^3}{3} & [N.mm] \end{cases} \quad (2.81)$$

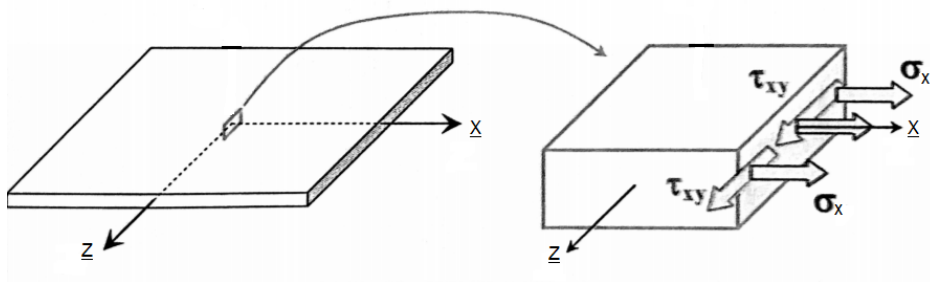
Donde A é a matriz 3x3 de rigidez em membrana, D é a matriz 3x3 de rigidez em flexão e B é a matriz de acoplamento entre o comportamento em membrana e o comportamento de flexão. As deformações não possuem unidade, as curvaturas são dadas em mm⁻¹, os fluxos de esforço em N/mm, os fluxos de momento em N, e, então, as rigidezes A_{ij} serão em N/mm, as rigidezes B_{ij} em N e D_{ij} em N.mm. Portanto, são verdadeiras as seguintes relações:

$$\begin{cases} \epsilon_{0x} = \frac{\partial u_0}{\partial z} \\ \epsilon_{0y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \gamma_{0xy} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial z} \\ k_{0x} = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial z^2} \\ k_{0y} = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ k_{0xy} = -2 \cdot \frac{\partial^2 w_0}{\partial z \partial y} \end{cases} \quad \begin{cases} N_z = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_z \cdot dy \\ N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x \cdot dy \\ T_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} \cdot dy \\ M_z = \int_{-h/2}^{h/2} y \cdot \sigma_z \cdot dy \\ M_x = \int_{-h/2}^{h/2} y \cdot \sigma_x \cdot dy \\ M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} y \cdot \tau_{xy} \cdot dy \end{cases} \quad (2.82)$$

A matriz de acoplamento B será particularmente nula para um estratificado apresentando simetria espelhada. Pode-se igualmente notar frente às relações entre A e D que A, como será explicitado posteriormente, não depende da posição das fibras, ao passo que D depende de suas posições respectivas. Isso é devido ao fato de que A representa a rigidez plana da placa e depende, em termos gerais, do número de fibras em cada direção. Já D representa a rigidez de flexão da placa e depende, concomitantemente, do número de fibras em cada direção e de suas posições referenciadas ao plano médio: quanto mais longes estão maior a rigidez. (BOUVET, 2015).

Analogamente, a Figura 2.27 considera um ponto P situado sobre o plano médio do estratificado, à uma face normal x , de comprimento dz segundo z ao longo de toda a espessura.

Figura 2.27 – Ponto P sujeito às tensões σ_x e τ_{xy} .



Fonte: Bouvet, 2015.

Essa face é submetida às tensões às tensões σ_x na direção x e τ_{xy} segundo y :

$$\begin{cases} N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x \cdot dy \\ T_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} \cdot dy \end{cases} \quad (2.83)$$

Da mesma maneira, para uma face normal à z submetida à tensão σ_z na direção z e τ_{xy} segundo y , define-se:

$$\begin{cases} N_z = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_z \cdot dy \\ T_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} \cdot dy \end{cases} \quad (2.84)$$

E, portanto, considerando a ação dos fluxos de esforços normais segundo z (N_z), segundo x (N_x) e o fluxo de esforço em cisalhamento τ_{xy} :

$$\begin{cases} N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x \cdot dy \\ N_z = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_z \cdot dy \\ T_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} \cdot dy \end{cases} \quad (2.85)$$

Então, o campo de tensão e de deformação para os fluxos de esforço normal e de cisalhamento tornam-se uma solução particular das Equações (2.80) e (2.79), respectivamente:

$$\begin{bmatrix} \sigma_z^k \\ \sigma_x^k \\ \tau_{xy}^k \end{bmatrix}_{(x,y,z)} = \begin{bmatrix} Q_{11}^k & Q_{12}^k & Q_{16}^k \\ Q_{12}^k & Q_{22}^k & Q_{26}^k \\ Q_{16}^k & Q_{26}^k & Q_{66}^k \end{bmatrix}_{(x,y,z)} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{0x} \\ \varepsilon_{0y} \\ \gamma_{0xy} \end{bmatrix}_{(x,y,z)} \quad \text{para } 1 \leq k \leq n \quad (2.86)$$

$$\begin{bmatrix} N_z \\ N_x \\ T_{xy} \end{bmatrix}_{(x,y,z)} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix}_{(x,y,z)} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{0x} \\ \varepsilon_{0y} \\ \gamma_{0xy} \end{bmatrix}_{(x,y,z)} \quad (2.87)$$

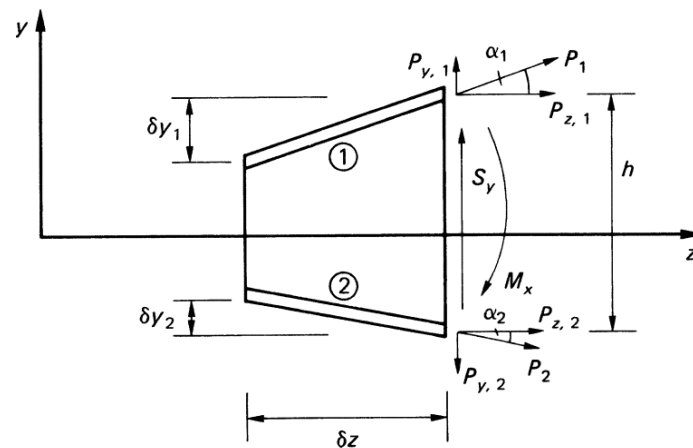
2.7 Afilamento de viga com paredes finas

2.7.1 Material Isotrópico

2.7.1.1 Afilamento de longarina de asa

Considere primeiro o caso simples de uma viga, por exemplo, uma longarina de asa, posicionada no plano yz e compreendendo duas flanges e uma teia (entrelaçamento): um comprimento elementar δz da viga é mostrado na Figura 2.28. Na seção z, a viga é submetida a um momento de flexão positivo M_x e uma força de cisalhamento positiva S_y . Os momentos de flexão $P_{z,1}$ e $P_{z,2}$ são paralelos ao eixo z da viga.

Figura 2.28 - Efeito do afilamento na análise de uma viga.



Fonte: Megson, 2014.

Para uma viga em que se presume que as flanges resistem a todas as tensões diretas, $P_{z,1} = \frac{M_x}{h}$ e $P_{z,2} = -\frac{M_x}{h}$. No caso em que se assume que a teia (entrelaçamento) é totalmente eficaz na resistência à tensão direta, $P_{z,1}$ e $P_{z,2}$ são determinados multiplicando as tensões diretas $\sigma_{z,1}$ e $\sigma_{z,2}$ pelas áreas de flange B_1 e B_2 .

$$S_x \cdot \eta_0 - S_y \cdot \xi_0 = \oint p \cdot q_b \cdot ds + 2 \cdot A \cdot q_{s,0} \quad (2.88)$$

$$0 = \oint p \cdot q_b \cdot ds + 2 \cdot A \cdot q_{s,0} \quad (2.89)$$

$P_{z,1}$ e $P_{z,2}$ são os componentes na direção z das cargas axiais P_1 e P_2 nos flanges. Estes têm componentes $P_{y,1}$ e $P_{y,2}$ paralelos ao eixo y dados por:

$$P_{y,1} = P_{z,1} \cdot \frac{\delta_{y1}}{\delta_z} \quad (2.90)$$

$$P_{y,2} = P_{z,2} \cdot \frac{\delta_{y2}}{\delta_z} \quad (2.91)$$

Em que, para a direção do afilamento mostrado, δ_{y2} é negativo. A carga axial no flange 1 é dada por:

$$P_1 = (P_{z,1}^2 + P_{y,1}^2)^{1/2} \quad (2.92)$$

Substituindo por $P_{y,1}$ da Equação (2.92) temos:

$$P_1 = \frac{(\delta_z^2 + \delta_y^2)^{1/2}}{\delta_z} = \frac{P_{z,1}}{\cos(\alpha_1)} \quad (2.93)$$

Similarmente,

$$P_2 = \frac{P_{z,2}}{\cos(\alpha_2)} \quad (2.94)$$

A força de cisalhamento interna S_y compreende a resultante $S_{y,w}$ dos fluxos de cisalhamento da teia (entrelaçamento) juntamente com os componentes verticais de P_1 e P_2 . Portanto,

$$S_y = S_{y,w} + P_{y,1} + P_{y,2} \quad (2.95)$$

Ou,

$$S_y = S_{y,w} + P_{z,1} \cdot \frac{\delta_{y_1}}{\delta_z} + P_{z,2} \cdot \frac{\delta_{y_2}}{\delta_z} \quad (2.96)$$

Então,

$$S_{y,w} = S_y - P_{z,1} \cdot \frac{\delta_{y_1}}{\delta_z} - P_{z,2} \cdot \frac{\delta_{y_2}}{\delta_z} \quad (2.97)$$

Mais uma vez nota-se que δ_{y_2} na Equação (2.97) é negativo. A Equação (2.97) pode ser usada para determinar a distribuição do fluxo de cisalhamento na teia (entrelaçamento). Para uma viga completamente idealizada, o fluxo de cisalhamento da teia (entrelaçamento) é constante através da profundidade e é dado por $\frac{S_{y,w}}{h}$. Para uma viga na qual a teia (entrelaçamento) é totalmente eficaz na resistência a tensões diretas, a distribuição de fluxo de cisalhamento da teia (entrelaçamento) é encontrada tal que S_y é substituído por $S_{y,w}$ e que é simplificada para:

$$q_s = -\frac{S_{y,w}}{I_{xx}} \cdot \left(\int_0^s t_D \cdot y \cdot ds + B_1 \cdot y_1 \right) \quad (2.98)$$

Ou,

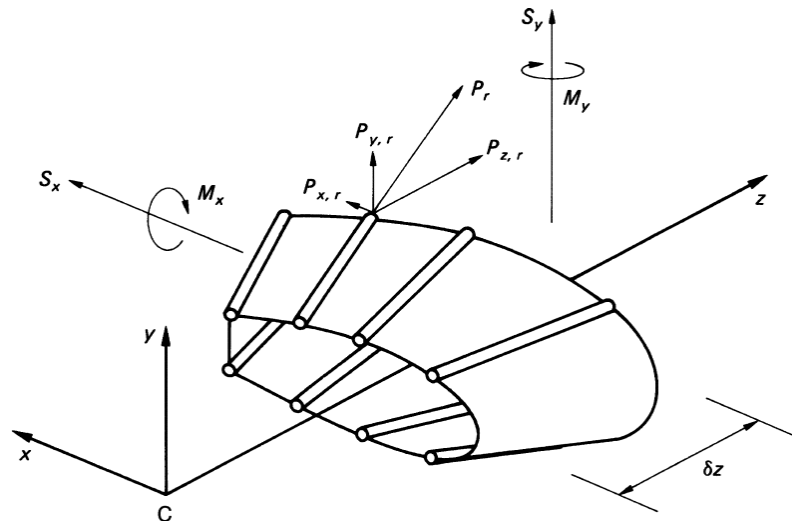
$$q_s = -\frac{S_{y,w}}{I_{xx}} \cdot \left(\int_0^s t_D \cdot y \cdot ds + B_2 \cdot y_2 \right) \quad (2.99)$$

2.7.1.2 Vigas seção aberta e fechada

No ramo aeronáutico, não é difícil encontrar exemplos práticos do caso mais geral de viga afilada em duas direções ao longo de seu comprimento e compreendendo um arranjo de casca e booms, dado que estruturas basilares se encaixam nesta definição, como asas e fuselagens. A viga pode ser de seção aberta ou fechada; e os efeitos de afilamento são determinados de maneira idêntica em ambos os casos.

A Figura 2.29 mostra um comprimento infinitesimal qualquer δz de uma viga com cargas de cisalhamento S_x e S_y na seção z ; adotando direções positivas conforme representado.

Figura 2.29 - Efeito de afilamento na análise de vigas de seções abertas e fechadas.



Fonte: Megson, 2014.

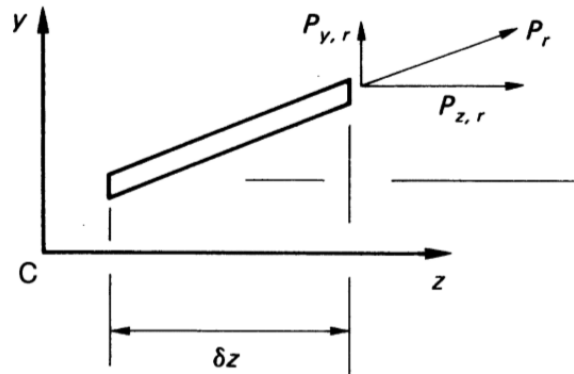
Nota-se que, se a viga é de seção aberta, as cargas de cisalhamento são aplicadas através de seu centro de cisalhamento, de modo que nenhuma torção ocorra na viga. Além das cargas de cisalhamento, a viga é submetida aos momentos de flexão M_x e M_y , que produzem tensões principais σ_z nos booms e nas cascas. Suponha que, no n -ésimo boom, a tensão principal em uma direção paralela ao eixo z seja $\sigma_{z,r}$, que pode ser encontrada por meio da Equação (2.71). O componente $P_{z,r}$ da carga axial P_r no n -ésimo boom é dado por:

$$P_{z,r} = \sigma_{z,r} \cdot B_r \quad (2.100)$$

Na qual B_r é a área transversal no r -ésimo boom.

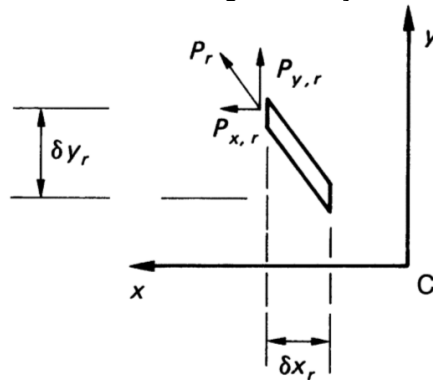
As Figuras 2.30 e 2.31 representam as vistas lateral e superior do r -ésimo boom, respectivamente.

Figura 2.30 - Efeito de afilamento na análise de vigas de seções abertas e fechadas (vista lateral).



Fonte: Megson, 2014.

Figura 2.31 - Efeito de afilamento na análise de vigas de seções abertas e fechadas (vista superior).



Fonte: Megson, 2014.

Por decomposição de vetores, observa-se que:

$$P_{y,r} = P_{z,r} \cdot \frac{\delta y_r}{\delta z} \quad (2.101)$$

$$P_{x,r} = P_{y,r} \cdot \frac{\delta x_r}{\delta y_r} \quad (2.102)$$

Substituindo (2.101) em (2.102):

$$P_{x,r} = P_{z,r} \frac{\delta_{x_r}}{\delta_{y_r}} \quad (2.103)$$

A carga axial P_r é dada por:

$$P_r = (P_{x,r}^2 + P_{y,r}^2 + P_{z,r}^2)^{1/2} \quad (2.104)$$

As cargas de cisalhamento aplicadas S_x e S_y são regidas pelas resultantes dos fluxos de cisalhamento nos painéis e entrelaçamentos, juntamente com as componentes $P_{x,r}$ e $P_{y,r}$ das cargas axiais nos booms. Portanto, se $S_{x,w}$ e $S_{y,w}$ são as resultantes dos fluxos de cisalhamento do painel e do entrelaçamento e há um total de m booms na seção, assim:

$$S_x = S_{x,w} + \sum_{r=1}^m P_{x,r} \quad (2.105)$$

$$S_y = S_{y,w} + \sum_{r=1}^m P_{y,r} \quad (2.106)$$

Substituindo as Equações (2.101) e (2.102) nas Equações (2.105) e (2.106), respectivamente, temos:

$$S_x = S_{x,w} + \sum_{r=1}^m P_{z,r} \cdot \frac{\delta_{x_r}}{\delta_z} \quad (2.107)$$

$$S_y = S_{y,w} + \sum_{r=1}^m P_{z,r} \cdot \frac{\delta_{y_r}}{\delta_z} \quad (2.108)$$

Portanto,

$$S_{x,w} = S_x - \sum_{r=1}^m P_{z,r} \cdot \frac{\delta_{x_r}}{\delta_z} \quad (2.109)$$

$$S_{y,w} = S_y - \sum_{r=1}^m P_{z,r} \cdot \frac{\delta_{y_r}}{\delta_z} \quad (2.110)$$

O cálculo da distribuição de fluxo cisalhante em vigas que possuem a área dos *Booms* variável é baseado num método alternativo. Nesse método, assume-se que a carga nos *Booms* varia linearmente ao longo de seu comprimento. Com isso, a mudança na carga que solicita o Boom por unidade de comprimento da barra é dado por:

$$\Delta P = \frac{P_{z,1} - P_{z,2}}{Z_1 - Z_2} \quad (2.111)$$

Nesse ponto, vale ressaltar que usualmente são consideradas distâncias adjacentes da ordem de 350 à 700mm e que, para tais valores, a solução é praticamente idêntica à solução exata na qual não se considera enrijecedores de área variável.

2.7.2 Critério de Tsai-Wu

Um grande número de critérios de ruptura de uma camada de fibras unidirecional sujeita à solicitações planas existem na literatura. Em comum, todas são baseadas nas cinco solicitações de base que são: tração e compressão segundo a direção longitudinal, tração e compressão segundo a direção transversa e o cisalhamento. (BOUVET, 2015).

Tsai-Wu propôs um critério de ruptura que apresenta, como vantagem, transitar continuamente da tração à compressão sem a necessidade de verificar o sinal das tensões atuantes. Propôs-se adicionar um termo de tensão linear ao termo quadrático afim de adicionar a informação sobre o sinal das tensões. O processo fica evidente na Equação (2.112):

$$\begin{aligned} f_{||} \cdot \sigma_{||} + f_{\perp} \cdot \sigma_{\perp} + f_s \cdot \tau_{lt} + f_{||l} \cdot \sigma_{||}^2 + f_{tt} \cdot \sigma_{\perp}^2 + f_{ss} \cdot \tau_{lt}^2 + \\ + 2 \cdot f_{lt} \cdot \sigma_{||} \cdot \sigma_{\perp} + 2 \cdot f_{ls} \cdot \sigma_{||} \cdot \tau_{lt} + 2 \cdot f_{ts} \cdot \sigma_{\perp} \cdot \tau_{lt} \leq 1 \end{aligned} \quad (2.112)$$

Donde a notação s é advinda do termo cisalhante. Além disso, esse critério não depende do sinal de τ_{lt} :

$$f_s = f_{ls} = f_{ts} = 0 \quad (2.113)$$

Escrevendo esse critério em tração/ compressão segundo as direções longitudinal e transversal, e posteriormente em cisalhamento, obtêm-se:

$$\begin{cases} f_{ll} \cdot \sigma_l^t + f_{ll} \cdot (\sigma_l^t)^2 \leq 1 \\ f_{ll} \cdot \sigma_l^c + f_{ll} \cdot (\sigma_l^c)^2 \leq 1 \\ f_{tt} \cdot \sigma_t^t + f_{tt} \cdot (\sigma_t^t)^2 \leq 1 \\ f_{tt} \cdot \sigma_t^c + f_{tt} \cdot (\sigma_t^c)^2 \leq 1 \\ f_{ss} \cdot (\tau_{lt}^r)^2 \leq 1 \end{cases} \quad (2.114)$$

E, por último, o coeficiente f_{lt} é obtido graças à um ensaio suplementar. Entretanto, na maior parte dos casos, esse coeficiente possui importância secundária e pode ser aproximado satisfatoriamente por:

$$f_{lt} \approx -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{f_{ll} \cdot f_{tt}} \quad (2.115)$$

Donde o critério de Tsai-Wu é, portanto:

$$\left(\frac{1}{\sigma_l^t} + \frac{1}{\sigma_l^c} \right) \cdot \sigma_l - \frac{\sigma_l^2}{\sigma_l^t \cdot \sigma_l^c} + \left(\frac{1}{\sigma_t^t} + \frac{1}{\sigma_t^c} \right) \cdot \sigma_t - \frac{\sigma_t^2}{\sigma_t^t \cdot \sigma_t^c} - \frac{\sigma_l \cdot \sigma_t}{\sqrt{\sigma_l^t \cdot \sigma_l^c \cdot \sigma_t^t \cdot \sigma_t^c}} + \left(\frac{\tau_{lt}^r}{\tau_{lt}^r} \right)^2 \leq 1 \quad (2.116)$$

2.8 Flambagem

A análise de flambagem nos fornece características referentes à estabilidade da estrutura, fornecendo seu limite de integridade (MICHELE, 2013).

De forma geral, a equação linear do movimento de uma estrutura previamente sujeita à um carregamento qualquer é dada pela Equação (2.117):

$$[M] \cdot \ddot{u} + [C] \cdot \dot{u} + [K] \cdot u + [K^d] \cdot u = P(t) \quad (2.117)$$

Donde $[M]$ é a matriz de massa, $[C]$ a matriz de amortecimento viscoso, $[K]$ a de rigidez do material e $[K^d]$ a de rigidez diferencial. Essa última, segundo MICHELE (2013), é uma matriz necessária para contabilizar a mudança na energia potencial associada com a rotação dos elementos sujeitos à carga qualquer; os efeitos na rigidez dependem linearmente dos deslocamentos. Por fim, $P(t)$ é a força aplicada no domínio temporal.

Da Equação (2.117) assume-se uma solução harmônica sob a seguinte forma:

$$\{u\} = \{\phi\} \cdot \sin(\omega \cdot t) \quad (2.118)$$

Donde $\{\phi\}$ são os autovetores ou modos de vibração e ω é a frequência angular natural. A solução harmônica significa que todos os graus de liberdade da estrutura em vibração movem-se de maneira sincronizada. A estrutura não altera sua forma durante o movimento e somente sua amplitude é alterada. Logo, se ocorre uma diferenciação dessa solução harmônica na equação do movimento, o seguinte sistema é obtido:

$$-\omega^2 \cdot [M] \cdot \{\phi\} \cdot \sin(\omega \cdot t) + [K] \cdot \{\phi\} \cdot \sin(\omega \cdot t) = 0 \quad (2.119)$$

E que, após simplificações, torna-se:

$$([K] - \omega^2 \cdot [M]) \cdot \{\phi\} = 0 \quad (2.120)$$

A Equação (2.120) é um conjunto de equações algébricas homogêneas relativas aos autovetores e que formam a base para o problema dos autovalores, sendo este último uma forma específica da equação que possui diversas aplicações na matriz de álgebra linear. A forma básica de uma equação de problema de autovalores é:

$$[A - \lambda \cdot I] \cdot x = 0 \quad (2.121)$$

Donde A é uma matriz quadrada, λ são os autovalores, I é a matriz identidade e x os autovetores. Especificamente na análise estrutural, a presença das matrizes de rigidez e de massa na Equação (2.120) resultam na representação física das frequências naturais e modos de vibração. Por esse motivo, a equação de problema dos autovalores é escrita em termos de K, ω e M, tal que $\omega^2 = \lambda$.

Com isso, há duas soluções possíveis da Equação (2.120). A primeira delas é considerar que:

$$\det |[K] - \omega^2 \cdot [M]| \neq 0 \quad (2.122)$$

E a única solução possível torna-se:

$$\{\phi\} = 0 \quad (2.123)$$

Essa é a solução trivial, mas que não fornece nenhuma informação útil do ponto de vista físico, uma vez que representa um caso de não ocorrência de movimento.

Já a segunda solução possível considera que:

$$\det |[K] - \omega^2.[M]| = 0 \quad (2.124)$$

E a solução não trivial para $\{\phi\} \neq 0$ é obtida. Do ponto de vista estrutural, o problema matemático geral de autovalores reduz-se à uma solução das equações seguintes:

$$\det |[K] - \omega^2.[M]| \quad (2.125)$$

$$\det |[K] - \lambda.[M]| \quad (2.126)$$

Com $\lambda = \omega^2$. Com isso, o determinante será zero para um conjunto específico de valores λ_i . Existe, então, um autovetor $\{\phi_i\}$ que satisfaz e é correspondente à cada autovalor. Com isso, pode-se reescrever a Equação (2.120) da seguinte forma:

$$([K] - \omega_i^2.[M]).\{\phi_i\} = 0, \quad i=1,2,3,4... \quad (2.127)$$

Cada autovalor e autovetor define um modo de vibração livre da estrutura. O i-ésimo autovalor λ_i é relacionado à i-ésima frequência natural segundo a seguinte relação:

$$f_i = \frac{\omega_i}{2.\pi} \quad (2.128)$$

Donde f_i é a i-nésima frequência natural, com $\omega_i = \sqrt{\lambda_i}$.

O número possível de autovalores e autovetores é igual ao número de graus de liberdade da estrutura. Quando uma estrutura elástica e linear está vibrando livremente ou em uma vibração forçada, a sua forma defletida em qualquer valor de tempo é uma combinação linear de todos os seus modos normais. Matematicamente, tem-se:

$$\{u\} = \sum_i (\phi_i) \cdot \xi_i \quad (2.129)$$

Donde $\{u\}$ é o vetor dos deslocamentos físicos, (ϕ_i) é o i-ésimo modo de vibração e ξ_i o i-ésimo deslocamento modal.

Retomando-se a Equação (2.120), precisa-se considerar a rigidez diferencial. Ela é criada pela tensão inicial devido às cargas aplicadas, e isso pode incluir a rigidez seguinte,

se aplicável. Ignorando-se o amortecimento para permitir operações aritméticas, o problema de autovalor pode ser formulado da seguinte forma:

$$[(K + K^d) - \omega^2.M].\{\phi\} = \{0\} \quad (2.130)$$

A Equação (2.130) a equação geral para análise dos modos normais com carga qualquer aplicada. Entretanto, a mesma pode ser reescrita para uma análise dinâmica de flambagem em uma frequência constante. Para a flambagem estática, o termo de inércia não é levado em conta, já que sua frequência de vibração é zero. Com isso, reescreve-se:

$$[K + K^d].\{\phi\} = \{0\} \quad (2.131)$$

No qual $\{\phi\}$ representa os deslocamentos virtuais. A solução não-trivial existe para um autovalor que faça o determinante de $[K+K^d]$ desaparecer, o que leva ao seguinte problema de autovalor:

$$[K + \lambda.K^d].\{\phi\} = \{0\} \quad (2.132)$$

Nesse caso, λ é um autovalor multiplicador à carga aplicada para que a carga crítica de flambagem seja atingida. Se cargas estáticas são aplicadas além da carga de flambagem em questão, a Equação (2.132) deve incluir uma rigidez diferencial adicional, tal que:

$$[K + K_{\text{carga}}^d + \lambda.K_{\text{flambagem}}^d].\{\phi\} = \{0\} \quad (2.133)$$

E, então, a rigidez diferencial é distinguida da carga constante aplicada e da carga de flambagem variável. A análise de flambagem com excessivas cargas aplicadas pode fornecer soluções errôneas. Essa análise de flambagem é restrita à materiais lineares e elásticos com deformações infinitesimais.

2.8.1 Flambagem no NX Nastran

Segundo MICHELE (2013), inicialmente é preciso determinar quais as cargas são críticas para a estrutura. Isso é feito de forma a detectar as maiores cargas de teor compressivo. Geralmente, o critério de seleção pode ser o “*Minimum Principal Stress*”, “*Max/Min Shear Stress*” ou “*Maximum Compression Stress*” nas direções x ou y. Os valores procurados são os valores extremos negativos, uma vez que o sinal negativo indica a

compressão. No caso dos materiais compósitos tais tensões são encontradas basicamente pelo comando “*Minimum Principal Stress*”. Uma vez que as cargas críticas são detectadas, a análise de flambagem é realizada para cada uma delas. No arquivo de texto fornecido como um dos *outputs* do *solver*, os resultados são mostrados como evidencia a Figura 2.32:

Figura 2.32 – Output com os resultados da análise de flambagem no Nastran.

MODE NO.	EXTRACTION ORDER	EIGENVALUE	REAL EIGENVALUES		GENERALIZED MASS	GENERALIZED STIFFNESS
			RADIANS	CYCLES		
1	1	1.080715E+00	1.039574E+00	1.654534E-01	1.095162E+03	1.183557E+03
2	2	1.082735E+00	1.040546E+00	1.656080E-01	1.142836E+03	1.237389E+03
3	3	1.117162E+00	1.056959E+00	1.682202E-01	1.322208E+03	1.477120E+03
4	4	1.117323E+00	1.057035E+00	1.682323E-01	1.228879E+03	1.373054E+03
5	5	1.118283E+00	1.057489E+00	1.683046E-01	9.797547E+02	1.095643E+03
6	6	1.132521E+00	1.064200E+00	1.693726E-01	9.201334E+02	1.042071E+03
7	7	1.159465E+00	1.076784E+00	1.713756E-01	7.644786E+02	8.863861E+02
8	8	1.166462E+00	1.080029E+00	1.718919E-01	1.121179E+03	1.307814E+03
9	9	1.168662E+00	1.081047E+00	1.720539E-01	1.159282E+03	1.354808E+03
10	10	1.181494E+00	1.086965E+00	1.729959E-01	1.181130E+03	1.395497E+03

rigidez generalizada. Também é apresentada a Equação de Rayleigh para uma estrutura elástica linear:

$$\{\phi_i\} = i\text{-ésimo modo de vibração} \quad (2.134)$$

$$\{\phi_i\}^T \cdot [M] \cdot \{\phi_j\} = 0, \text{ se } i \neq j \quad (2.135)$$

$$\{\phi_j\}^T \cdot [M] \cdot \{\phi_j\} = m_j = j\text{-ésima massa generalizada} \quad (2.136)$$

$$\{\phi_j\}^T \cdot [K] \cdot \{\phi_j\} = 0, \text{ se } i \neq j \quad (2.137)$$

$$\{\phi_j\}^T \cdot [K] \cdot \{\phi_j\} = k_j = j\text{-ésima rigidez generalizada} = \omega_j^2 \cdot m_j \quad (2.138)$$

$$\omega_j^2 = \frac{\{\phi_j\}^T \cdot [K] \cdot \{\phi_j\}}{\{\phi_j\}^T \cdot [M] \cdot \{\phi_j\}} \quad (2.139)$$

A Equação (2.136) é conhecida como a propriedade de ortogonalidade dos modos normais, afirmando que cada modo normal é único e distinto dos outros. Fisicamente, a ortogonalidade dos modos significa que cada modo de vibração é único e um desses modos não pode ser obtido através de uma combinação linear de quaisquer outros modos. Além disso, modo qualquer da estrutura pode ser representado usando-se sua massa e rigidez generalizadas. Esse processo torna-se útil ao formular-se modelos dinâmicos equivalentes.

No Nastran, segundo MICHELE (2013), recomenda-se que a densidade da malha deve ser adequada para capturar o maior número possível de semi-ondas. Os elementos também devem ser direcionados em uma mesma orientação, para que seja considerado corretamente a contribuição de todos esses elementos.

CAPÍTULO III

MATERIAIS E MÉTODOS

3.1 Apresentação

Para se utilizar o conhecimento explicitado ao longo da Revisão Bibliográfica, considerar-se-ão duas vigas: uma com e outra sem afilamento. De todo modo, ambas são do tipo caixão e contêm enrijecedores do tipo “*Booms*” ao longo do seu comprimento. Tais enrijecedores encontram-se longitudinalmente nas paredes verticais e horizontais e as vigas estão na condição engastada-livre. Além disso, para a viga com e sem afilamento ocorre a condição de carga excêntrica, sendo esta atuante no plano da seção transversal que contém a extremidade livre da viga. Sua direção é vertical e o seu sentido é para baixo.

As tensões atuantes serão obtidas através de duas metodologias: teórico-analítica e numérica. Na primeira, utilizar-se-ão expressões oriundas de MEGSON (2013), apresentadas na sessão anterior. Na segunda metodologia, utilizar-se-á o Método de Elementos Finitos (MEF), através de programas computacionais como o HyperMesh® (2014) e Femap NX Nastran® (2016). As vigas serão avaliadas para material isotrópico e também para material compósito.

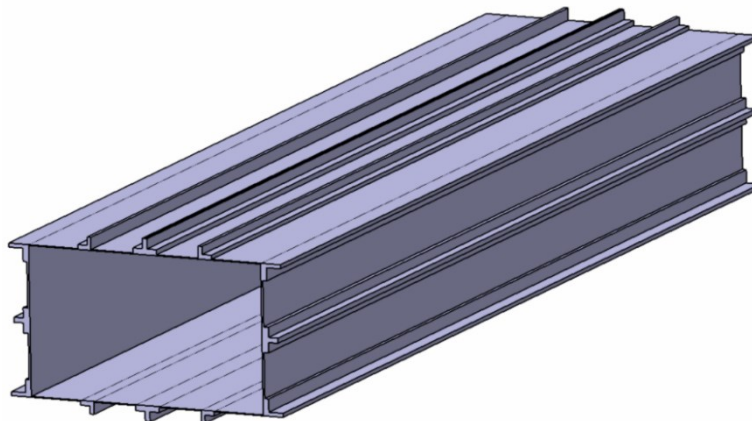
Espera-se com esse estudo, uma análise do comportamento estrutural da viga quando quesitos de afilamento e de materiais são levados em conta durante o dimensionamento.

3.2 Aspectos Elástico-Geométricos e de Carregamento da Viga

3.2.1 Viga Caixão sem Afilamento

Nesse cenário, o elemento estrutural considerado é ilustrado na Figura 3.1.

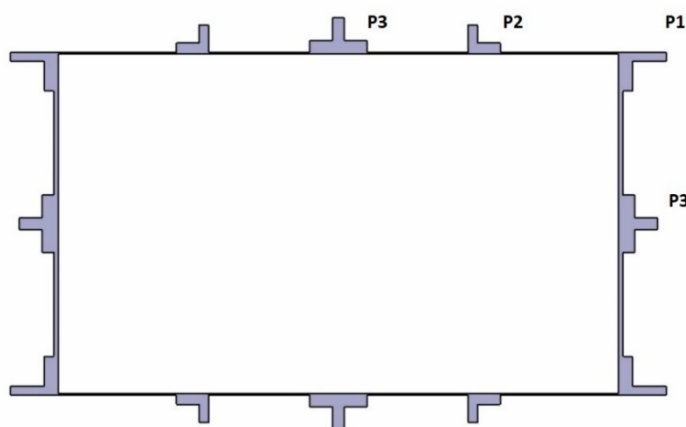
Figura 3.1 – Viga com *Booms* sem afilamento.



Fonte: Elaborado em (CATIA®, 2011).

A escolha dessa viga tem por objetivo simular a condição próxima à situação real de asa aeronáutica, constituída por painéis e reforçadores. Suas dimensões, tomadas com base na estrutura similar existente no Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA), são as seguintes: 250 mm x 150 mm x 1100 mm. A espessura das paredes verticais é constante e vale 2,0 mm e as paredes horizontais também possuem espessura uniforme de 0,8 mm. Os elementos de reforço, suas geometrias e dimensões são evidenciados na Figura 3.2 e na Tabela 3.1.

Figura 3.2 – Especificações geométricas dos enrijecedores.



Fonte: Elaborado em (CATIA®, 2011).

Tabela 3.1 – Informações sobre os enrijecedores utilizados.

Enrijecedor	Tipo	Quantidade	Dimensões
P ₁	Cantoneira	4	19 mm x 17 mm x 4 mm
P ₂	Cantoneira	4	14 mm x 12 mm x 4 mm
P ₃	Perfil T	4	25 mm x 15 mm x 5 mm

Fonte: Elaborada pelos autores, 2019.

Os materiais escolhidos serão o Alumínio Aeronáutico e a Fibra de Carbono.

O alumínio foi escolhido como o material isotrópico de análise. As ligas da série 2xxx (Al-Cu) e 7xxx (Al-Zn-Mg-Cu) são os dois principais grupos utilizados na indústria aeronáutica. Tais ligas aliam propriedades mecânicas de alta resistência e baixa densidade, o que permite o dimensionamento de estruturas mais leves e com maior tolerância ao dano, tais como asas e partes da fuselagem (BRAGA, 2011). Nesse estudo, utilizar-se-á a liga de Alumínio 2024-T3, cujas propriedades são as seguintes (ASM, 2016):

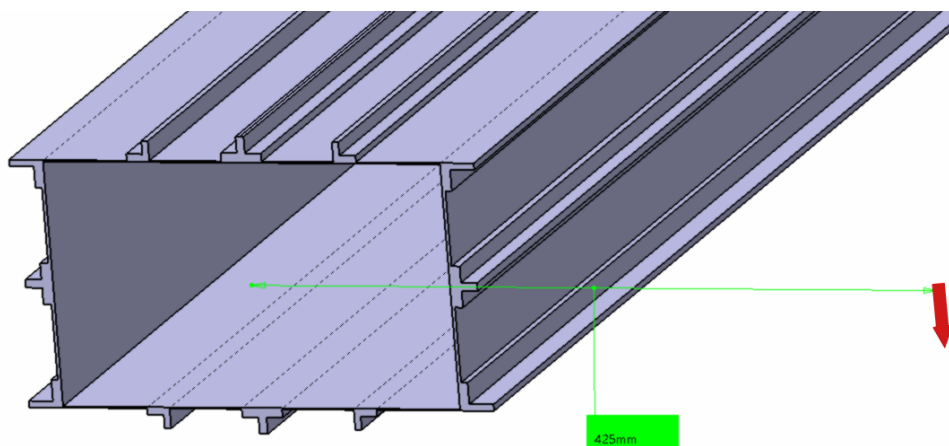
- Módulo de Elasticidade: $E = 73100 \text{ N/mm}^2$;
- Módulo de Rigidez ao Cisalhamento: $G = 27500 \text{ N/mm}^2$;
- Coeficiente de Poisson: $\nu = 0,33$;
- Densidade: $\rho = 2780 \text{ kg/m}^3$.

A fibra de carbono foi escolhida como o material compósito de análise. As elevadas propriedades específicas desse material geram consequências como redução de peso dos componentes estruturais, redução no consumo de combustível e aumento da autonomia da aeronave. Outrossim, a redução de seus custos de fabricação vem permitindo o aumento gradual de sua utilização, observada na atualidade, principalmente, nas aeronaves Boeing 787 e Airbus A350 (VERA, 2012). Serão consideradas lâminas em resina epóxi com fibras de carbono em fração volumétrica de 60%, cujas propriedades são as seguintes (GAY, 2015):

- Módulo de Elasticidade Longitudinal: $E_l = 134000 \text{ N/mm}^2$;
- Módulo de Elasticidade Transversal: $E_t = 7000 \text{ N/mm}^2$;
- Módulo de Rigidez ao Cisalhamento $G_{lt} = 4200 \text{ N/mm}^2$;
- Coeficiente de Poisson: $\nu = 0,25$;
- Densidade: $\rho = 1530 \text{ kg/m}^3$.

No que se refere ao carregamento, foi aplicada uma carga de 200 kgf com direção vertical e sentido para baixo, distante 300 mm da parede direita da viga, tomando-se por base o eixo de referência cartesiano que percorre-se o eixo “z” positivo. O ponto de aplicação da carga é o plano que contém a seção transversal da extremidade da viga, como ilustrado na Figura 3.3:

Figura 3.3 – Carga excêntrica aplicada à viga.



Fonte: Elaborado em (CATIA®, 2011).

A escolha de aplicação de uma carga excêntrica tem por objetivo produzir, em seção qualquer da viga, tensões normais e cisalhantes decorrentes de esforços de flexão, torção e cisalhamento. Com isso, espera-se uma investigação completa dos esforços na estrutura, contemplando a teoria base de Estruturas de Aeronaves.

3.2.2 Viga Caixão com Afilamento

A viga caixão com afilamento mantém grande parte das características quando comparadas ao que foi descrito na seção anterior. Notadamente, o módulo, direção, sentido e distância da carga e seu ponto de aplicação mantêm-se os mesmos; além disso, serão utilizados os mesmos materiais na estrutura da viga: liga de alumínio 2024-T3 para o caso isotrópico e fibra de carbono para o caso compósito, cujas propriedades mecânicas de ambos também mantêm-se as mesmas. As dimensões de comprimento longitudinal e as espessuras das paredes vertical e horizontal são idênticas ao primeiro caso. A seção transversal no ponto de engaste possui as mesmas dimensões da viga sem afilamento. As dimensões da seção transversal livre possuem 94 mm de largura e 56,4 mm de altura. As

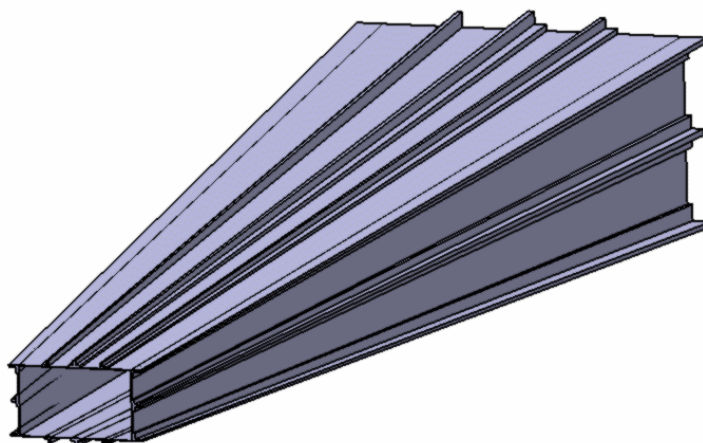
respectivas seções variam linearmente ao longo do comprimento longitudinal da viga e, sendo o afilamento (λ) a relação entre corda na ponta da asa sobre a corda na raiz da asa, calcula-se:

$$\lambda = \frac{\text{corda na ponta}}{\text{corda na raiz}} = \frac{94}{250} = 0,376 \quad (3.1)$$

Esse valor de afilamento foi previamente delimitado para esse projeto e obtido a partir do estudo de BRENNER (2012). Os doze enrijecedores variam suas dimensões na mesma proporção do afilamento da sessão.

Portanto, de posse de tais informações, a Figura 3.4 mostra a geometria final para a viga caixão com afilamento.

Figura 3.4 – Viga com *Booms* com afilamento.



Fonte: Elaborado em (CATIA®, 2011).

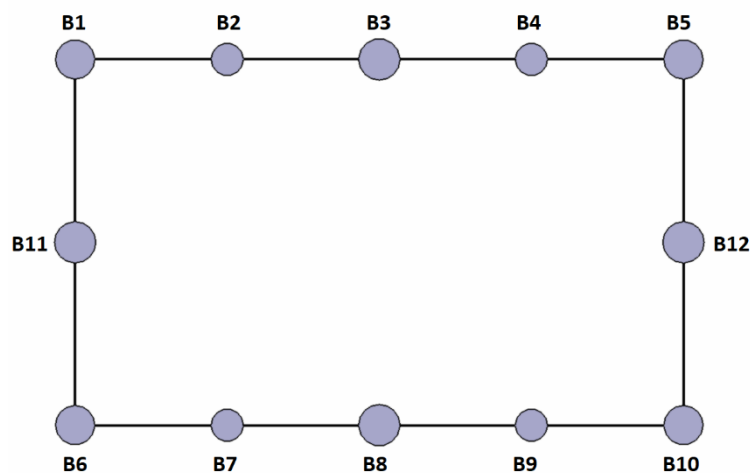
CAPÍTULO IV

ANÁLISE TEÓRICA DAS TENSÕES QUE SOLICITAM A VIGA

4.1 Modelo Teórico sem Afilamento

Para a análise teórico-analítica da viga, foi considerada a idealização estrutural por *Booms*, apresentada na Subseção 2.6 conforme ilustrado na Figura 4.1.

Figura 4.1 – Disposição dos *Booms* na viga sem afilamento.



Fonte: Elaborado pelos autores em (CATIA®, 2011).

Nota-se que os *Booms* laterais (*Booms* 11 e 12) não são levados em conta para o dimensionamento. Isso se deve ao fato de que a suas posições não retém os esforços normais provocados pelo momento fletor ($y=0$). Assim sendo, os elementos 11 e 12 possuirão função de aumentar a inércia local, sendo avaliado o seu efeito apenas na análise numérica, que será explicitada no Capítulo V. Para o modelo teórico, como explicitado adiante, considerar-se-á, então, apenas os *Booms* de 1 a 10.

O primeiro passo para a análise teórica é conhecer a área de cada *Boom*. Para isso, evoca-se a equação (2.68), aplicando-a ao *Boom* B₁. Destaca-se a seguinte simplificação: apesar de equação base ter como parâmetro os valores das tensões normais no ponto de

análise, iremos substituir esses valores de tensões pelas respectivas coordenadas em y . Isso se deve ao fato de que as tensões normais são simplificadas pelos parâmetros de inércia e momento fletor. Nesse caso, y será os valores pontuais das coordenadas verticais do *Boom* em análise até o ponto onde M_x está aplicado, que será o eixo centroidal da seção. Logo, reiterando o *Boom* B_1 :

$$B_1 = A_1 + \frac{t_{1-2} l_{1-2}}{6} \left[2 + \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right] + \frac{t_{1-10} l_{1-10}}{6} \left[2 + \frac{\sigma_{10}}{\sigma_1} \right] \quad (4.1)$$

$$B_1 = A_1 + \frac{t_{1-2} l_{1-2}}{6} \left[2 + \frac{y_2}{y_1} \right] + \frac{t_{1-10} l_{1-10}}{6} \left[2 + \frac{y_{10}}{y_1} \right] \quad (4.2)$$

$$B_1 = 128 + \frac{0,8 \cdot 62,5}{6} \left[2 + \frac{75}{75} \right] + \frac{2 \cdot 150}{6} \left[2 + \frac{-75}{75} \right] = 203 \text{ mm}^2 \quad (4.3)$$

Aplicando-se a metodologia anteriormente explicitada para os outros *Booms*, obtém-se a Tabela 4.1

Tabela 4.1 – Área correspondente a cada *Boom* da seção idealizada.

Boom	Área [mm²]
B ₁	203
B ₂	138
B ₃	225
B ₄	138
B ₅	203
B ₆	203
B ₇	138
B ₈	225
B ₉	138
B ₁₀	203

Fonte: Elaborado pelos autores, 2019.

4.1.1 Tensões Normais Devidas ao Momento de Flexão

Uma vez calculada a área dos booms, parte-se para o cálculo das primeiras tensões a serem analisadas: as tensões normais devidas ao momento de flexão. Essa tensão é decorrente da carga vertical aplicada, que provoca o momento em torno de x denominado M_x .

4.1.1.1 Materiais Isotrópicos

Como premissa tem-se a Equação (2.39), através da qual simplificações serão realizadas. Primeiramente, a viga possui dupla simetria geométrica, o que permite afirmar que o momento de inércia I_{xy} é nulo ($I_{xy}=0$). Em seguida, considera-se que apenas os *Booms* absorvam as tensões normais em estudo - premissa para essa idealização estrutural. Então, ao fim, tem-se:

$$\sigma_z = \frac{M_x Y_r}{I_{xx}} = \frac{F(l - z)Y_r}{I_{xx}} \quad (4.4)$$

Com efeito, foi considerada uma seção genérica K através da qual as tensões normais fossem calculadas. Essa seção, disposta no meio do comprimento da viga, nos fornece $z = 550$ e, com auxílio da regra da mão direita, podemos calcular o momento M_x , tal que:

$$M_x = +F \cdot (l - z) = + (200 \cdot 9,81) \cdot 550 = 1,079 \cdot 10^6 \text{ N.mm} \quad (4.5)$$

A partir da idealização estrutural, o cálculo do momento de inércia I_{xx} será:

$$I_{xx} = \sum_{i=1}^r A_i y_i^2 = 75^2 (4 \cdot 203 + 4 \cdot 138 + 2 \cdot 225) = 1,020 \cdot 10^7 \text{ mm}^4 \quad (4.6)$$

E a Equação (4.4) se resume ao seguinte:

$$\sigma_z = 0,1058 \cdot Y_r \quad (4.7)$$

De posse do fato de que a posição Y_r dos *Booms* é fixa e equivale à +75 para os aqueles de 1 à 5, -75 para os de 6 à 10, faz-se a Tabela 4.2 com base na Equação (4.7).

Tabela 4.2 – Tensões normais de flexão aos quais os *Booms* para material isotrópico estão sujeitos.

Booms	Tensão sujeita [N/mm²]
1, 2, 3, 4, 5	+7,935
6, 7, 8, 9, 10	-7,935
11,12	0

Fonte: Elaborada pelos autores, 2019.

4.1.1.2 Materiais Compósitos

Para os materiais compósitos parte-se do princípio da Equação (2.71). Aplicam-se as devidas simplificações para esse caso, tal que ocorrem também dois eixos de simetria, resultando em momento de inércia I_{xy} nulo ($I_{xy}=0$) e a não presença de momento fletor em y fornece M_y nulo. A expressão anteriormente citada se resume, por fim, ao seguinte:

$$\sigma_z = E_{z,i} \left(\frac{M_x}{I_{xx}} \right) Y \quad (4.8)$$

Como no caso anteriormente exposto, o momento M_x possui o mesmo valor, de $1,079 \cdot 10^6$ N.mm. Além disso, como toda a viga é constituída do mesmo material, o módulo de elasticidade é constante, e vale 134000 N/mm². O cálculo do momento de inércia I_{xx} será:

$$I'_{xx} = E_{z,i} A_r Y_r^2 = 134000 \cdot 75^2 (4 \cdot 203 + 4 \cdot 138 + 2 \cdot 225) = 1,367 \times 10^{12} \text{ mm}^4 \quad (4.9)$$

Portanto, a Equação (4.8) se resume ao seguinte:

$$\sigma_z = 0,1058 \cdot Y \quad (4.10)$$

Como no caso anterior, a posição Y dos *Booms* é fixa e equivale à $+75$ para os aqueles de 1 à 5, -75 para os de 7 à 11, e Y é zero para os *Booms* 6 e 12. A Tabela 4.3, com base na Equação (4.10), mostra os resultados.

Tabela 4.3 – Fibra de Carbono: tensão atuantes nos Booms.

Booms	Tensão sujeita [N/mm²]
1, 2, 3, 4, 5	+7,935
6, 7, 8, 9, 10	-7,935
11,12	0

Fonte: Elaborada pelos autores, 2019.

Nota-se, a partir das Equações (4.7) e (4.10), que as tensões normais devidas ao momento fletor para o material isotrópico e compósito são as mesmas. Essa aproximação ocorre pelo fato de que o material compósito, ponderado pelo módulo de elasticidade, possui seu efeito anulado no numerador e no denominador da Equação (4.8), já que possuem mesma magnitude.

4.1.2 Tensões Tangenciais devidas ao Momento de Torção (T_z)

Sabe-se que o momento de torção gerado na sessão será oriundo da carga excêntrica aplicada. Para análise desse caso, a carga excêntrica é levada para o Centro de Cisalhamento (coincidente com o Centro de Gravidade) da seção transversal. Junto à carga agora centrada, é levado o momento de torção calculado pelo produto desta carga pelo braço de alavanca da mesma.

Neste caso, o Momento de Torção (T) será:

$$T = F.d = (200 \cdot 9,81) \cdot (300 + 125) = + 833.850 \text{ N.mm} \quad (4.11)$$

O valor positivo gerado, pela regra da mão direita, indica o sentido anti-horário do momento de torção.

4.1.2.1 Material Isotrópico

Para o caso do material isotrópico, é válida a relação:

$$q_T = \tau_T \cdot t \quad (4.12)$$

A partir da Equação (2.64), pode-se calcular o parâmetro q_T , tal que:

$$q_T = \frac{833850}{2 \cdot [(250) \cdot (150)]} = 11,12 \text{ N/mm} \quad (4.13)$$

Por fim, calcula-se a tensão cisalhante devida ao momento torçor, evocando a Equação (4.12). Tem-se, portanto, dois valores de tensões dependentes das espessuras das paredes vertical e horizontal e que, nesse caso, serão denominadas de alma e mesa, respectivamente. Daí:

$$\tau_{T,alma} = \frac{11,12}{2} = 5,560 \text{ N/mm}^2 \quad (4.14)$$

$$\tau_{T,mesa} = \frac{11,12}{0,8} = 13,90 \text{ N/mm}^2 \quad (4.15)$$

4.1.2.2 Material Compósito

Para o material compósito iremos encontrar os mesmos valores de tensões cisalhantes oriundas do momento torçor. Isso ocorre pois, nesse caso, não ocorre a dependência das propriedades mecânicas do material nos cálculos realizados. Sendo assim, chegaremos aos mesmos valores oriundos das Equações (4.14) e (4.15), tal que:

$$\tau_{T,alma} = \frac{11,12}{2} = 5,560 \text{ N/mm}^2 \quad (4.16)$$

$$\tau_{T,mesa} = \frac{11,12}{0,8} = 13,90 \text{ N/mm}^2 \quad (4.17)$$

4.1.3 Tensões Tangenciais Devidas à Força Cortante

A força cortante gerada na seção da viga também é fruto da manobra de levar-se a carga excêntrica para o centro de cisalhamento da seção transversal.

4.1.3.1 Material Isotrópico

A partir da Equação (4.12), chega-se a uma condição análoga ao que foi exposto no caso do momento torçor, tal que o fluxo cisalhante, de índice “s”, será:

$$q_s = \tau_s \cdot t \quad (4.18)$$

O parâmetro q_s , na seção fechada, depende dos valores de q_b e $q_{s,0}$. A partir da Equação (2.56), calcula-se, primeiramente, q_b . Para isso, algumas simplificações são realizadas. Primeiramente, é levada em conta a dupla simetria da seção. Em seguida, despreza-se a espessura do painel decorrente das premissas para cálculo de estruturas com *Booms*. E a expressão toma a seguinte forma:

$$q_b = - \frac{F}{I_{xx}} \sum_{i=1}^r B_r y_r \quad (4.19)$$

Em seguida, o painel de seção fechada é “cortado” em um ponto de tal forma que, nesse caso de estudo, começa-se no trecho 1-2. Percorre-se, conseqüentemente, a seção no sentido anti-horário. Como premissa da teoria, os efeitos de cada *Boom* sobrepõe-se a medida que a seção é percorrida. Matematicamente, foi concebida a Tabela 4.4, através da qual, nesse caso, o índice “t” indica o valor total e o índice “l” indica o valor local do parâmetro calculado.

Para finalizar o cálculo do fluxo cisalhante devido à força cortante precisa-se determinar $q_{s,0}$. Fez-se isso a partir da Equação (2.61). Portanto, tem-se que:

$$q_{s,0} = +3,612 \text{ N/mm} \quad (4.20)$$

Por fim, retomando as Equações (2.70) e (4.18), a tensão cisalhante τ_s dependerá do fluxo atuante em cada trecho e, então, a Tabela 4.5 mostra os resultados finais. Também é retomada nessa tabela as tensões cisalhantes oriundas do momento torçor e a tensão cisalhante resultante, sendo esta última a resultante vetorial das tensões cisalhantes obtidas.

Tabela 4.4 – Valores de q_b ao longo da seção.

Trecho	Parâmetro calculado	Fluxo cisalhante q_b [N/mm]
1-2	q_{b1-2}	0
2-3	$q_{b2-3(t)} = q_{b1-2} + q_{b2-3(l)}$	-1,990
3-4	$q_{b3-4(t)} = q_{b2-3(t)} + q_{b3-4(l)}$	-5,235
4-5	$q_{b4-5(t)} = q_{b3-4(t)} + q_{b4-5(l)}$	-7,225
5-6	$q_{b5-6(t)} = q_{b4-5(t)} + q_{b5-6(l)}$	-10,15
6-7	$q_{b6-7(t)} = q_{b5-6(t)} + q_{b6-7(l)}$	-7,225
7-8	$q_{b7-8(t)} = q_{b6-7(t)} + q_{b7-8(l)}$	-5,235
8-9	$q_{b8-9(t)} = q_{b7-8(t)} + q_{b8-9(l)}$	-1,990
9-10	$q_{b9-10(t)} = q_{b8-9(t)} + q_{b9-10(l)}$	0
10-1	$q_{b10-1(t)} = q_{b9-10(t)} + q_{b10-1(l)}$	+2,928

Fonte: Elaborado pelos autores, 2019.

Tabela 4.5 – Fluxos e tensões de cisalhamento atuantes na seção transversal do material isotrópico.

Trecho	τ_T [N/mm ²]	$q_s = q_b + q_{s,0}$ [N/mm]	τ_s [N/mm ²]	$ \tau_{\text{Resultante}} $ [N/mm ²]
1-2	+13,90	+3,612	+4,515	18,41
2-3	+13,90	+1,622	+2,028	15,92
3-4	+13,90	-1,623	-2,028	11,87
4-5	+13,90	-3,613	-4,516	9,384
5-6	+5,560	-6,538	-3,269	2,291
6-7	+13,90	-3,613	-4,516	9,384
7-8	+13,90	-1,623	-2,028	11,87
8-9	+13,90	+1,622	+2,028	15,92
9-10	+13,90	+3,612	+4,515	18,42
10-1	+5,560	+6,540	+3,270	8,830

Fonte: Elaborado pelos autores, 2019.

4.1.3.2 Material Compósito

Como no caso da tensão cisalhante oriunda do momento torçor, para a tensão cisalhante decorrente da força cortante aplicada aos materiais compósitos encontraremos os mesmos valores da tensão cisalhante resultante. Isso acontece quando realizamos as devidas simplificações, anulando o momento de inércia no caso da dupla simetria e simplificando os módulos de elasticidade que ponderam os cálculos, já que se trata de um único material. Portanto, a Tabela 4.5 também contempla resultados com compósitos.

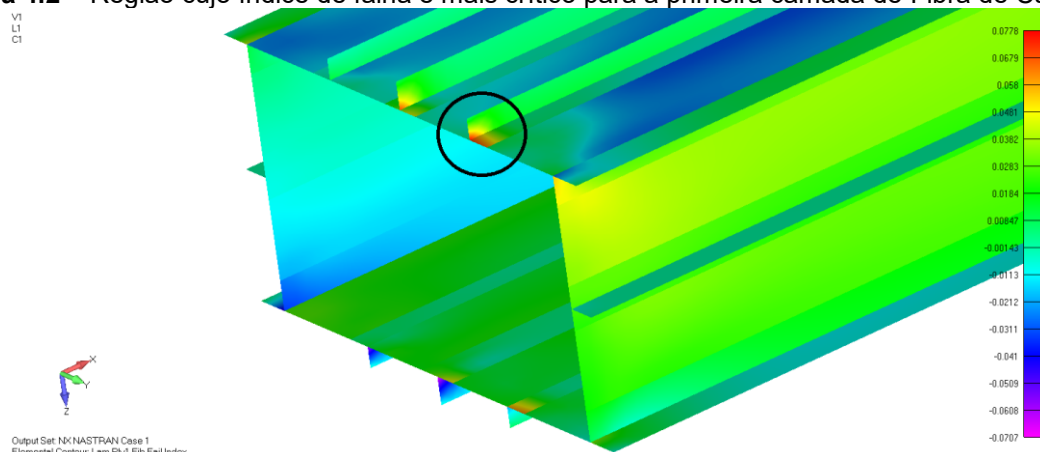
4.1.4 Índices de Falha

Para que a comparação seja cabível entre o caso teórico-analítico e numérico, utiliza-se nesse ponto uma metodologia inversa. Reitera-se, primeiramente que, pelo fato da Fibra de Carbono ser um material ortotrópico, o cálculo numérico das tensões é feito, nesse projeto, através do critério de Tsai-Wu e o resultado obtido desse critério é denominado “Índice de Falha” (Seção 2.7.2).

A metodologia inversa tem como premissa a análise numérica. Primeiramente localiza-se, via software, o grupo e a região nos quais o Índice de Falha é mais crítico. Uma vez identificados, utiliza-se a teoria da placa estratificada em membrana para verificação do índice local. Esse processo é repetido para as 20 camadas do estratificado.

Começa-se, então, pela camada 1. Por observação via NX Nastran® (2016), o grupo mais crítico é a cantoneira B2 na região do engaste, conforme Figura 4.2. De acordo com a Tabela 5.4, a fibra dessa camada está direcionada à $+45^\circ$. Essa região, vide teoria, suporta somente esforços oriundos do momento fletor.

Figura 4.2 – Região cujo índice de falha é mais crítico para a primeira camada de Fibra de Carbono.



Fonte: Elaborado em (NX Nastran®, 2016).

A partir das observações anteriores, desenvolvem-se os cálculos da seguinte forma: primeiramente, a partir da Equação (2.73), calcula-se o fluxo de momento no engaste:

$$M_x = \int_{-2}^2 (-2) \cdot (15,86) \cdot dz = -126,9 \text{ N.mm/mm} \quad (4.21)$$

Posteriormente, calculam-se os termos da matriz de rigidez em flexão da placa, com base na Equação (2.81). Considera-se para o cálculo, com base na prática, que $E_t = 7000/2 = 3500 \text{ MPa}$. Afim de não se penalizar de forma considerável e de diminuir a influência das fissurações matriciais secundárias, aumenta-se artificialmente, como critério, a deformação à ruptura da matriz. Para isso, diminui-se artificialmente o seu módulo de Young mantendo-se a mesma tensão transversa à ruptura. É como se a resina trabalhasse menos (BOUVET, 2015). Com o auxílio do MATLAB®, obtem-se, então, a seguinte matriz:

$$D = \begin{bmatrix} 371490 & 96357 & 14274 \\ 96357 & 208320 & 14274 \\ 14274 & 14274 & 33938 \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

O sistema matricial para esse caso, referente à Equação (2.80), fica:

$$\begin{bmatrix} -126,9 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 371490 & 96357 & 14274 \\ 96357 & 208320 & 14274 \\ 14274 & 14274 & 33938 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k_{0x} \\ k_{0y} \\ k_{0xy} \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

Tal que, através de rotina no MATLAB, calculam-se as curvaturas no plano médio:

$$\begin{aligned} \epsilon_{0x} &= 0 \text{ } \mu\epsilon \\ \epsilon_{0y} &= 0 \text{ } \mu\epsilon \\ \gamma_{0xy} &= 0 \text{ } \mu\epsilon \\ k_{0x} &= -3,888 \cdot 10^{-4} \text{ } \mu\epsilon \\ k_{0y} &= 1,780 \cdot 10^{-4} \text{ } \mu\epsilon \\ k_{0xy} &= 2,634 \cdot 10^{-5} \text{ } \mu\epsilon \end{aligned} \quad (4.24)$$

A partir das curvaturas no plano médio, calculam-se as respectivas deformações na camada de número 1 com base na Equação (2.76), em $y = -2,5 \text{ mm}$.

$$\varepsilon(M(x,y,z)) = \varepsilon_0(M_0(x,y)) + y \cdot k_0(M_0(x,y)) \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= 777,6 \mu\varepsilon \\ \varepsilon_y &= -356,0 \mu\varepsilon \\ \gamma_{xy} &= -52,68 \mu\varepsilon \end{aligned} \quad (4.26)$$

E, a partir da matriz de rigidez orientada à +45°, segundo a referência (x,y) e com base na Equação (2.78):

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 39012 & 30612 & 32625 \\ 30612 & 39012 & 32625 \\ 32625 & 32625 & 33938 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 777,6 \\ -356,0 \\ -52,68 \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

Donde, como resultado do sistema da Equação (4.28), tem-se as tensões orientadas segundo (x,y):

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 17,72 \text{ MPa} \\ \sigma_y &= 8,197 \text{ MPa} \\ \tau_{xy} &= 11,96 \text{ MPa} \end{aligned} \quad (4.28)$$

E, por fim, determinam-se as tensões nos sentidos longitudinal e transversal das fibras à +45° no referencial (l,t) através da matriz de passagem R:

$$\begin{bmatrix} \sigma_l \\ \sigma_t \\ \tau_{lt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 & 1 \\ 0,5 & 0,5 & -1 \\ -0,5 & 0,5 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 17,72 \\ 8,197 \\ 11,96 \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

Tal que:

$$\begin{aligned} \sigma_l &= 24,92 \text{ MPa} \\ \sigma_t &= 0,9985 \text{ MPa} \\ \tau_{lt} &= -4,762 \text{ MPa} \end{aligned} \quad (4.30)$$

A partir das tensões de ruptura da Fibra de Carbono é concebida a Tabela 4.6, que nos permite, com base em (4.30), utilizar o critério de Tsai-Wu.

Tabela 4.6 – Tensões de ruptura para a fibra de carbono.

Parâmetro	Valor [MPa]
Tração à ruptura (direção longitudinal)	1270
Compressão à ruptura (direção longitudinal)	-1130
Tração à ruptura (direção transversal)	42
Compressão à ruptura (direção transversal)	-141
Tensão de ruptura em cisalhamento	63

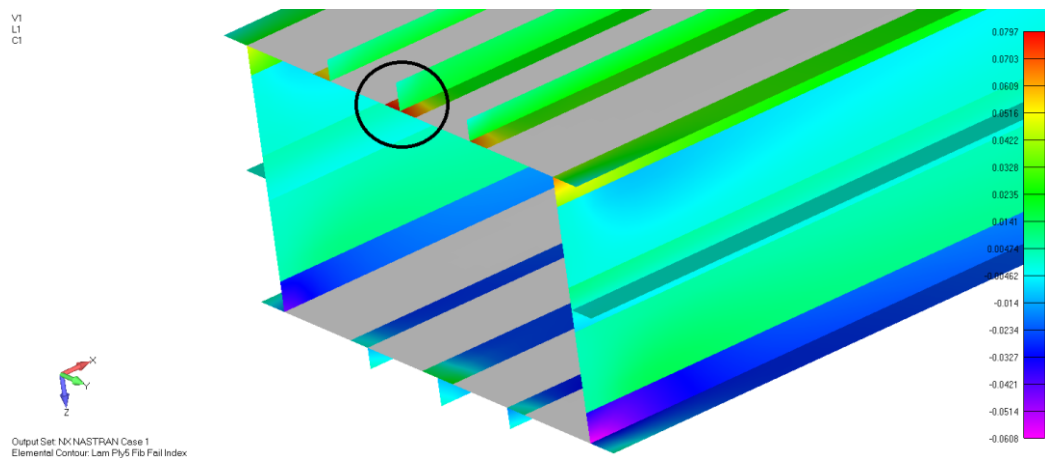
Fonte: Elaborado pelos autores, 2019.

Usando o referido critério a partir da Equação (2.116), obtém-se o Índice de Falha (IF), tal que:

$$\begin{aligned}
 IF = & \left(\frac{1}{1270} + \frac{1}{1130} \right) \cdot 24,92 - \frac{24,92^2}{1270 \cdot 1130} + \left(\frac{1}{42} + \frac{1}{141} \right) \cdot 0,9985 - \frac{0,9985^2}{42 \cdot 141} - \\
 & - \frac{24,92 \cdot 0,9985}{\sqrt{1270 \cdot 1130 \cdot 42 \cdot 141}} + \left(\frac{4,762}{63} \right)^2
 \end{aligned}$$

$$IF = 0,0775 \quad (4.31)$$

Na camada de número 5 o grupo mais crítico é o perfil T (B3) também na região do engaste, conforme Figura 4.3. De acordo com a Tabela 5.4, a fibra dessa camada está direcionada a 90°.

Figura 4.3 – Região cujo índice de falha é mais crítico para a quinta camada de Fibra de Carbono.

Fonte: Elaborado em (NX Nastran®, 2016).

Como no primeiro caso, essa região suporta somente esforços oriundos do momento fletor. Entretanto, devido às propriedades geométricas e de distribuição das fibras, o fluxo atuante e sua matriz de rigidez não serão os mesmos. Recalculando-se tais parâmetros, obtêm-se os seguintes resultados:

$$M_x = -198,25 \text{ N.mm/mm} \quad (4.32)$$

$$D = \begin{bmatrix} 763450 & 160280 & 18352 \\ 160280 & 366510 & 18352 \\ 18352 & 18352 & 194920 \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

De posse de (4.32) e (4.33), calculam-se as curvaturas no plano médio e, posteriormente, as respectivas deformações na camada 5, em $y = -1,5 \text{ mm}$. Com as deformações e a matriz de rigidez à 90° , calculam-se as tensões em $(\underline{x}, \underline{y})$ que, rotacionadas no mesmo sentido, configuram o resultado final, tal que:

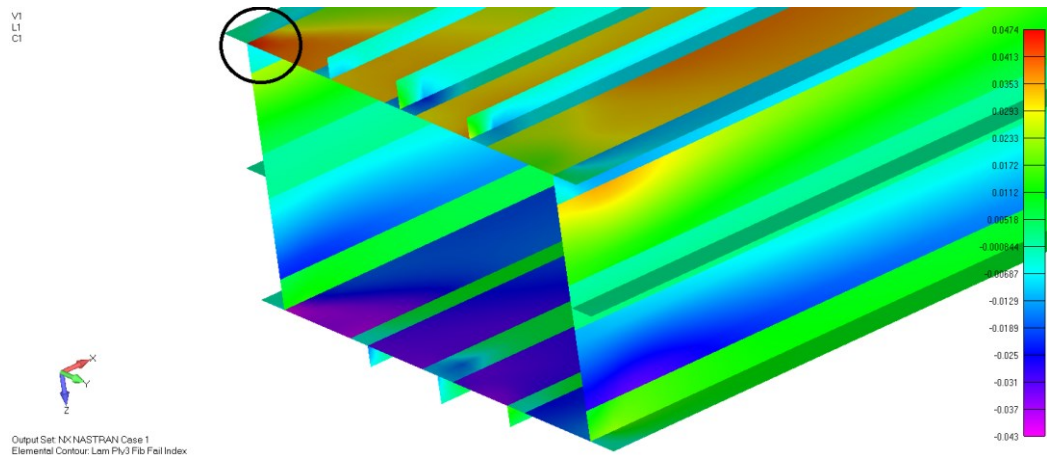
$$\begin{aligned} \sigma_l &= -24,63 \text{ MPa} \\ \sigma_t &= 1,339 \text{ MPa} \\ \tau_{lt} &= 0,0960 \text{ MPa} \end{aligned} \quad (4.34)$$

E, pelo critério de Tsai-Wu:

$$IF = 0,0815 \quad (4.35)$$

Em seguida, considera-se um exemplo em outro grupo. Para a camada de número 3, nota-se que o grupo mais crítico é a base horizontal superior, no trecho 4-5, na região do engaste, conforme Figura 4.4. De acordo com a Tabela 5.4, a fibra dessa camada está direcionada à -45° . Essa região, vide teoria, suporta somente esforços cisalhantes oriundos do momento torçor e da carga cortante.

Figura 4.4 – Região cujo índice de falha é mais crítico para a terceira camada de Fibra de Carbono.



Fonte: Elaborado em (NX Nastran®, 2016).

A partir da Equação (2.85), calcula-se o fluxo do esforço de cisalhamento T_{xy} momento no engaste.

$$T_{xy} = \int_{-0,4}^{0,4} (9,384) \cdot dz = 7,507 \text{ N/mm} \quad (4.36)$$

Analogamente, calculam-se os termos da matriz de rigidez em membrana da placa com base na Equação (2.81). Continua-se considerando, para camadas quaisquer, $E_t = 3500 \text{ MPa}$. Então:

$$A = \begin{bmatrix} 31210 & 24490 & 0 \\ 24490 & 31210 & 0 \\ 0 & 0 & 27150 \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

A partir das matrizes do fluxo atuante e de rigidez, calculam-se as deformações no plano médio segundo a referência ($\underline{x}, \underline{y}$):

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= 0 \text{ } \mu\epsilon \\ \varepsilon_y &= 0 \text{ } \mu\epsilon \\ \gamma_{xy} &= 276,5 \text{ } \mu\epsilon \end{aligned} \quad (4.38)$$

Evoca-se a matriz de rigidez orientada a -45° segundo ($\underline{x}, \underline{y}$) para cálculo das tensões na referida direção, tal que, como resultado, obtém-se:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -9,021 \text{ MPa} \\ \sigma_y &= -9,021 \text{ MPa} \end{aligned} \quad (4.39)$$

$$\tau_{xy} = 9,384 \text{ MPa}$$

E, por fim, nos sentidos longitudinal e transversal das fibras a -45° segundo referencial ($\underline{l}, \underline{t}$) através da matriz de passagem, obtêm-se as tensões finais:

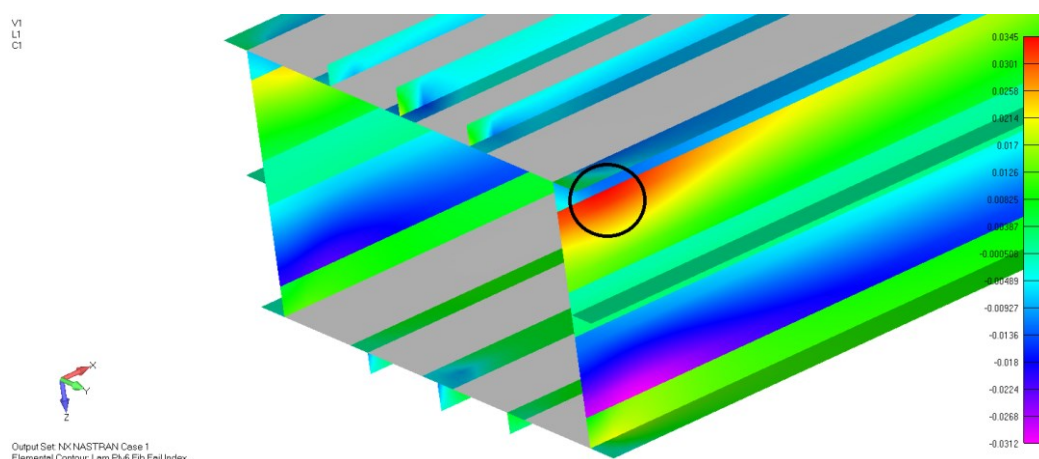
$$\begin{aligned}\sigma_l &= -18,40 \text{ MPa} \\ \sigma_t &= 0,3630 \text{ MPa} \\ \tau_{lt} &= 0 \text{ MPa}\end{aligned}\tag{4.40}$$

E, pelo critério de Tsai-Wu:

$$IF = 0,0416\tag{4.41}$$

Afim de contemplar o cálculo do Índice de Falha nos quatro grupos da estrutura (cantoneira, perfil T, base vertical e base horizontal), considera-se a camada de número 6. Nela, o grupo mais crítico é a base vertical direita, no trecho 10-1, na região tal que $z = 24$ mm, ilustrado na Figura 4.5. A fibra dessa camada está direcionada à 90° . Essa região suporta, como no caso anterior, somente esforços cisalhantes oriundos do momento torçor e da carga cortante.

Figura 4.5 – Região cujo índice de falha é mais crítico para a sexta camada de fibra de carbono.



Fonte: Elaborado em (NX Nastran®, 2016).

De modo similar ao caso anterior, na parede vertical são alteradas as propriedades geométricas e de distribuição das fibras o que, conseqüentemente, altera o fluxo atuante e a matriz de rigidez. Recalculando-se tais parâmetros:

$$T_{xy} = 17,66 \text{ N/mm} \quad (4.42)$$

$$A = \begin{bmatrix} 107762 & 31487 & 0 \\ 31487 & 107762 & 0 \\ 0 & 0 & 38136 \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

Com isso calculam-se as deformações na camada. E, das deformações e da matriz de rigidez a 90°, calculam-se as tensões em ($\underline{x}, \underline{y}$) que, rotacionadas também a 90°, configuram o seguinte resultado na referência ($\underline{l}, \underline{t}$):

$$\begin{aligned} \sigma_l &= 0 \text{ MPa} \\ \sigma_t &= 0 \text{ MPa} \\ \tau_{lt} &= -1,945 \text{ MPa} \end{aligned} \quad (4.44)$$

E, pelo critério de Tsai-Wu:

$$IF = 0,0309 \quad (4.45)$$

O cálculo do Índice de Falha nos locais mais críticos e para as 20 camadas presentes no estratificado segue o mesmo procedimento desenvolvido nos casos anteriores. A Tabela 4.7 sumariza essa metodologia, com as camadas, grupo pertencente, região da viga e o valor local do índice.

Tabela 4.7 – Índice de Falha em todas as camadas do estratificado.

Camada	Índice de Falha teórico-analítico	Grupo Crítico	Região [NX Nastran®, 2016]
1	0,0775	Cantoneira (B2)	Engaste
2	0,0733	Cantoneira (B1)	Engaste
3	0,0416	Mesa Superior	Engaste
4	0,0511	Mesa Inferior	Trecho 9-10 z = 216 mm
5	0,0815	Perfil T (B3)	Engaste
6	0,0309	Alma Direita	Trecho 10-1 z = 24 mm
7	0,0238	Cantoneira (B10)	Engaste
8	0,0411	Perfil T (B3)	Engaste
9	0,0238	Cantoneira (B10)	Engaste
10	0,0238	Cantoneira (B10)	Engaste
11	0,0238	Cantoneira (B10)	Engaste
12	0,0756	Cantoneira (B1)	Engaste
13	0,0368	Perfil T (B3)	z = 112 mm
14	0,0238	Cantoneira (B4)	Engaste
15	0,0733	Cantoneira (B1)	Engaste
16	0,0771	Cantoneira (B4)	Engaste
17	0,0235	Perfil T (B8)	Engaste
18	0,0241	Perfil T (B8)	Engaste
19	0,0610	Perfil T (B8)	Engaste
20	0,0741	Perfil T (B3)	Engaste

Fonte: Elaborado pelos autores, 2019.

4.2 Modelo Teórico com Afilamento

Inicialmente, o afilamento provoca alterações nas dimensões das seções transversais ao longo da viga. Essa relação vale para as mesa, alma e enrijecedores tal que, percorrendo-se o eixo longitudinal da viga, parâmetros geométricos como comprimento e a altura desses componentes alteram-se para que seja mantido o afilamento no valor de 0,376. Contudo, considera-se que todas as espessuras serão mantidas as mesmas do caso sem afilamento, além de ser mantida a seção K, na metade da viga, em $z = 550\text{mm}$. Na

referida seção, as dimensões da seção transversal, cantoneiras e perfil T são evidenciadas na Tabela 4.8.

Tabela 4.8 – Dimensões da seção K considerando-se o afilamento dos componentes.

Componente	Dimensões
Seção Transversal	172 mm x 103,2 mm
Cantoneira P ₁	13,07 mm x 11,70 mm x 4 mm
Cantoneira P ₂	9,632 mm x 8,256 mm x 4 mm
Perfil T	17,20 mm x 10,32 mm x 5 mm

Fonte: Elaborado pelos autores, 2019.

E, com base na Equação (4.1), recalculam-se as áreas dos *Booms*, dando origem à Tabela 4.9:

Tabela 4.9 – Área dos Booms considerando-se o afilamento dos componentes.

Boom	Área [mm²]
B1	134,7
B2	89,95
B3	146,1
B4	89,95
B5	134,7
B6	134,7
B7	89,95
B8	146,1
B9	89,95
B10	134,7

Fonte: Elaborado pelos autores, 2019.

Com isso, de modo análogo à Seção 4.1, calcular-se-ão as tensões normais devidas ao momento de flexão e as tensões tangenciais devidas tanto ao momento de torção quanto à força cisalhante.

4.2.1 Tensões Normais Devidas ao Momento de Flexão

Mantendo-se o referencial (x,y,z), o momento fletor M_x atuante na estrutura será o mesmo , tal que:

$$M_x = +F.(l - z) = + (200*9,81)*550 = 1,079.10^6 \text{ N.mm} \quad (4.46)$$

E, a partir da idealização estrutural, o cálculo do momento de inércia para esse caso será:

$$I_{xx} = \sum_{i=1}^r A_r y_r^2 = 75^2 (4*134,7 + 4*89,95 + 2*146,1) = 6,698.10^6 \text{ mm}^4 \quad (4.47)$$

E a Equação (4.4) se resume ao seguinte:

$$\sigma_z = 0,1611 \cdot Y_r \quad (4.48)$$

Donde Y_r é a posição fixa dos *Booms* e equivale à +51,6 para aqueles de 1 à 5 e - 51,6 para os de 6 à 10. Portanto, faz-se a Tabela 4.10 com base na Equação (4.48).

Tabela 4.10 – Tensões normais de flexão atuante nos *Booms* na viga afilada.

Booms	Tensão sujeita [N/mm²]
1, 2, 3, 4, 5	+8,313
6, 7, 8, 9, 10	-8,313
11,12	0

Fonte: Elaborada pelos autores, 2019.

4.2.1.1 Materiais Compósitos

Conforme a teoria desenvolvida anteriormente, a Tabela 4.10 aplica-se também às tensões normais devidas ao momento de flexão no qual o material compósito também está sujeito.

4.2.2 Tensões Tangenciais devidas ao Momento de Torção (T_z)

O Momento de Torção (T), oriundo da carga excêntrica na seção transversal K será:

$$T = F.d = (200 \cdot 9,81) \cdot (300 + 125) = + 833.850 \text{ N.mm} \quad (4.49)$$

4.2.2.1 Material Isotrópico

A partir da Equação (2.64), pode-se calcular o fluxo cisalhante q_T oriundo do momento torçor na seção K, tal que:

$$q_T = \frac{833850}{2 \cdot [(172) \cdot (103,2)]} = 23,49 \text{ N/mm} \quad (4.50)$$

E a tensão cisalhante devida ao momento torçor, reitera-se a Equação (4.12), tal que:

$$\tau_{T,alma} = \frac{23,49}{2} = 11,75 \text{ N/mm}^2 \quad (4.51)$$

$$\tau_{T,mesa} = \frac{23,49}{0,8} = 29,36 \text{ N/mm}^2 \quad (4.52)$$

4.2.2.2 Material Compósito

As Equações (4.51) e (4.52) são aplicáveis para o caso do material compósito, como já justificado e explicitado no caso sem afilamento.

4.2.3 Tensões Tangenciais Devidas à Força Cortante

A força cortante gerada na seção da viga também é fruto da manobra de levar-se a carga excêntrica para o centro de cisalhamento da seção transversal, como no caso sem afilamento. Para o caso do afilamento, por outro lado, são necessárias operações afim de encontrar-se o fluxo cisalhante atuante em cada trecho da seção e a respectiva tensão cisalhante gerada.

$$P_{y,1} \cdot \xi_1 = 69,21.86 = +5952 \text{ N.mm} \quad (4.60)$$

Analogamente, repete-se o processo para os *Booms* de 1 a 10. A Tabela 4.11 sumariza os resultados obtidos.

Tabela 4.11 – Parâmetros para cálculo do fluxo cisalhante na viga afilada.

Boom	$P_{z,r}$	$\delta_{x,r}/\delta_z$	$\delta_{y,r}/\delta_z$	$P_{x,r}$	$P_{y,r}$	P_r	ξ_r	η_r	$P_{x,r} \cdot \eta_r$	$P_{y,r} \cdot \xi_r$
B ₁	1627	0,07090	-0,04254	115,4	-69,21	1632	86	51,6	-5955	+5952
B ₂	1086	0,03545	-0,04254	38,50	-46,20	1088	43	51,6	-1987	+1987
B ₃	1765	0	-0,04254	0	-75,08	1766	0	51,6	0	0
B ₄	1086	-0,03545	-0,04254	-38,50	-46,20	1088	43	51,6	1987	-1987
B ₅	1627	-0,07090	-0,04254	-115,4	-69,21	1632	86	51,6	5955	-5952
B ₆	-1627	-0,07090	0,04254	115,4	-69,21	-1632	86	51,6	5955	-5952
B ₇	-1086	-0,03545	0,04254	38,50	-46,20	-1088	43	51,6	1987	-1987
B ₈	-1765	0	0,04254	0	-75,08	-1766	0	51,6	0	0
B ₉	-1086	0,03545	0,04254	-38,50	-46,20	-1088	43	51,6	-1987	1987
B ₁₀	-1627	0,07090	0,04254	-115,4	-69,21	-1632	86	51,6	-5955	5955

Fonte: Elaborado pelos autores, 2019.

A força cortante, atuante em direção paralela ao eixo y, será obtida com base na Equação (2.106) e nos dados da Tabela 4.11, tal que:

$$S_{y,w} = (-200.9,81) - (-611,8) = -1350,2 \text{ N} \quad (4.61)$$

E o fluxo cisalhante resultante será:

$$q_s = q_b + q_{s,0} \quad (4.62)$$

O fluxo cisalhante “básico” (q_b) para cada trecho é calculado com base na Equação (2.98), representada nesse caso através da Equação (4.63). Como no caso da viga sem afilamento, o trecho no qual a seção foi “cortada” corresponde ao trecho 1-2.

$$q_b = \frac{-S_{y,w}}{I_{xx}} \cdot \sum_{r=1}^{10} B_r \cdot y_r \quad (4.63)$$

O fluxo inicial ($q_{s,0}$) é calculado através da Equação (2.89).

Então, de posse de q_b e de $q_{s,0}$ calcula-se o fluxo cisalhante resultante q_s através da Equação (4.62). Dela utiliza-se a Equação (4.18) para o cálculo da tensão cisalhante resultante τ_s . Evoca-se os resultados obtidos através das Equações (4.51) e (4.52), que adicionam as tensões devidas ao momento torçor em cada trecho.

Tendo como premissa o raciocínio anteriormente exposto, calcula-se, por fim, a tensão cisalhante resultante devida à combinação da força cortante e do momento torçor. Os resultados das operações matemáticas anteriores nos levam à Equação (4.64) e à Tabela 4.12.

$$q_{s,0} = -1.696 \text{ N/mm} \quad (4.64)$$

Tabela 4.12 – Fluxo cisalhante em cada trecho da viga afilada.

Trecho	q_b [N/mm]	q_s [N/mm]	τ_s [N/mm ²]	τ_T [N/mm ²]	$ \tau_{\text{Resultante}} $ [N/mm ²]
1-2	0	-1,696	-2,120	+29,36	27,24
2-3	-0,9357	-2,632	-3,290	+29,36	26,07
3-4	-2,456	-4,152	-5,190	+29,36	24,17
4-5	-3,392	-5,088	-6,360	+29,36	23,00
5-6	-4,793	-6,489	-3,244	+11,75	8,506
6-7	-3,392	-5,088	-6,360	+29,36	23,00
7-8	-2,456	-4,152	-5,190	+29,36	24,17
8-9	-0,9357	-2,632	-3,290	+29,36	26,07
9-10	0	-1,696	-1,696	+29,36	27,66
10-1	+1,401	-0,295	-0,148	+11,75	11,60

Fonte: Elaborado pelos autores, 2019.

4.2.3.2 Material Compósito

Como no caso da tensão cisalhante oriunda do momento torçor, para a tensão cisalhante decorrente da força cortante aplicada aos materiais compósitos encontraremos os mesmos valores da tensão cisalhante resultante. A Tabela 4.12 também cabe como resultado final para o caso dos materiais compósitos.

4.2.4 Índices de Falha

Para que a comparação seja cabível entre o caso teórico-analítico e numérico, adota-se a mesma metodologia do caso anterior. Nela, utiliza-se a metodologia inversa, culminando com aplicação do critério de Tsai-Wu para o cálculo do Índice de Falha (IF).

A Tabela 4.13 sumariza essa metodologia, com as camadas, o Índice de Falha calculado, o grupo mais crítico pertencente à respectiva camada e a região da viga.

Tabela 4.13 – Índice de Falha em todas as camadas do estratificado afilado.

Camada	Índice de Falha	Grupo Crítico	Região [NX Nastran®, 2016]
1	0,0411	Cantoneira (B5)	Engaste
2	0,2355	Mesa Inferior	Trecho 9-10 z = 210 mm
3	0,2731	Mesa Inferior	Trecho 9-10 z = 210 mm
4	0,0388	Alma Direita	Engaste
5	0,0654	Cantoneira (B10)	Engaste
6	0,0700	Cantoneira (B9)	Engaste
7	0,1892	Perfil T (B8)	Engaste
8	0,0402	Perfil T (B3)	Engaste
9	0,0341	Cantoneira (B1)	Engaste
10	0,0341	Cantoneira (B1)	Engaste
11	0,0341	Cantoneira (B1)	Engaste
12	0,0980	Cantoneira (B10)	Engaste
13	0,0399	Perfil T (B3)	Engaste
14	0,0435	Cantoneira (B4)	z = 21 mm
15	0,1601	Cantoneira (B10)	Engaste
16	0,0998	Cantoneira (B10)	Engaste
17	0,0243	Perfil T (B8)	Engaste
18	0,0243	Perfil T (B8)	Engaste
19	0,1355	Perfil T (B3)	Engaste
20	0,0844	Perfil T (B8)	Engaste

Fonte: Elaborado pelos autores, 2019.

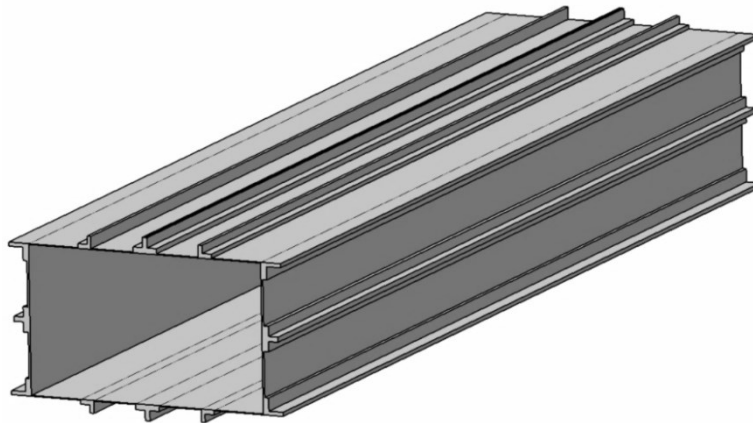
CAPÍTULO V

ANÁLISE NUMÉRICA DAS TENSÕES QUE SOLICITAM A VIGA SEM AFILAMENTO

5.1 Modelo Numérico

O modelo numérico tem a sua origem no software CATIA® (2011). De posse da geometria da viga caixão sem afilamento, como descrito no Capítulo III, o desenho foi concebido como evidencia a Figura 5.1.

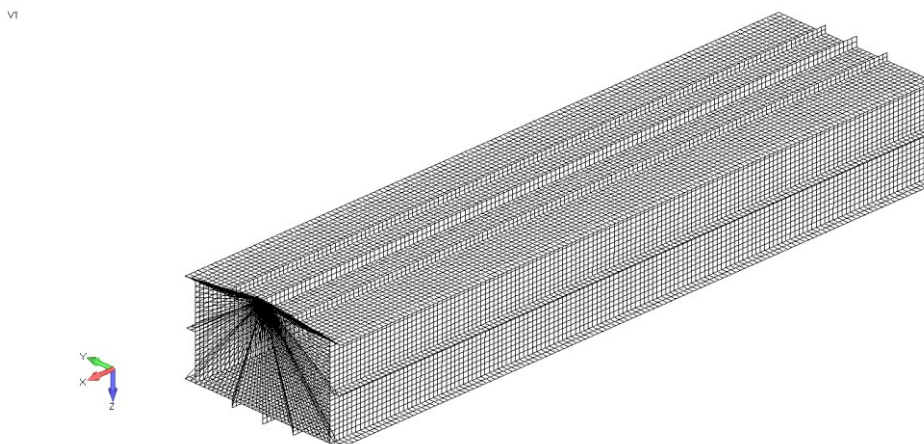
Figura 5.1 – Geometria final da viga sem afilamento.



Fonte: Elaborado em (CATIA®, 2011).

O segundo passo foi a utilização do software HyperMesh® (2014) com o objetivo de importar a geometria proveniente do CAD, discretizá-la e, a partir da malha gerada, exportá-la para o *solver*. Nesse caso, por uma questão de capacidade computacional, definiu-se o tamanho do elemento em 8 mm. A Figura 5.2 mostra a geometria após aplicação da malha. O software também permite que sejam colocados elementos rígidos. Como pode ser observado na extremidade livre da viga caixão, o elemento rígido do tipo RBE2 foi aplicado para distribuir forças e momentos em toda seção transversal.

Figura 5.2 – Viga sem afilamento após ser discretizada.



Fonte: Elaborado em (HyperMesh®, 2014).

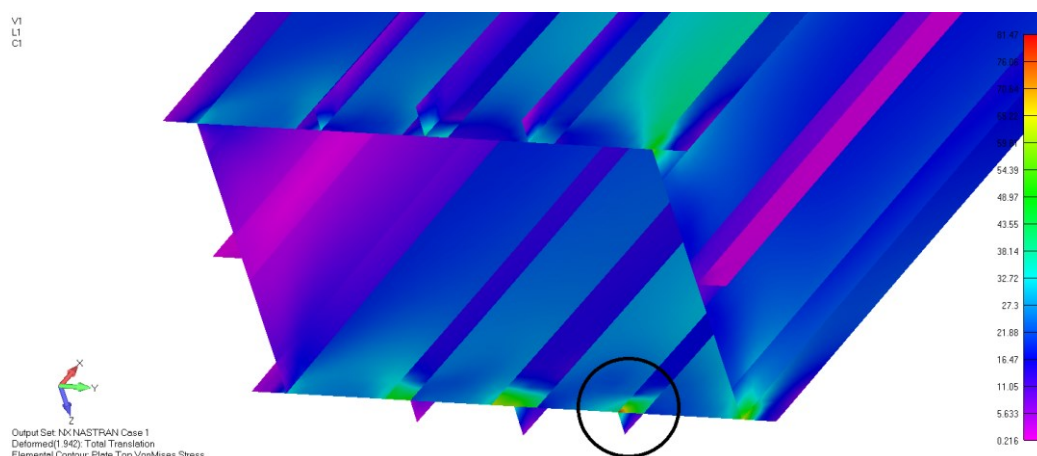
5.1.1 Material Isotrópico

No software NX Nastran® (2016) e utilizando as informações descritas ao longo da Idealização Estrutural, alguns passos primordiais foram primeiramente definidos. Por exemplo, a divisão da estrutura em grupos (base horizontal, base vertical, cantoneiras e perfil T), as respectivas espessuras, a definição do material como sendo uma chapa (*plate*), as propriedades do Alumínio 2024-T3 e sua isotropia. Além disso, a força aplicada, seu módulo, direção e sentido e o momento atrelado à carga excêntrica foram aplicados no nó independente do elemento rígido. Também definiu-se as condições de contorno e o ponto de engaste como sendo todos os nós pertencentes à seção transversal da face engastada. Os três graus de liberdade de rotação (RX, RY e RZ) e os três de translação (TX, TY e TZ) nessa seção foram bloqueados.

Uma vez definidos todas as condições para análise, iniciou-se o processo de simulação. Primeiramente escolheu-se a análise tipo 1 (Estática), que permite, no pós processamento, observar a distribuição das tensões, deslocamentos e rotações na estrutura. Posteriormente foi realizada a análise tipo 7 (Flambagem). Essa última análise se faz importante pois estamos trabalhando com um componente leve e delgado. A flambagem, por ser uma instabilidade que leva a estrutura para uma nova posição de equilíbrio, pode ser acompanhada de grandes deformações ou de deformações plásticas que levam a estrutura à seu colapso (TOLEDO, BASTOS e CURY, 2015)

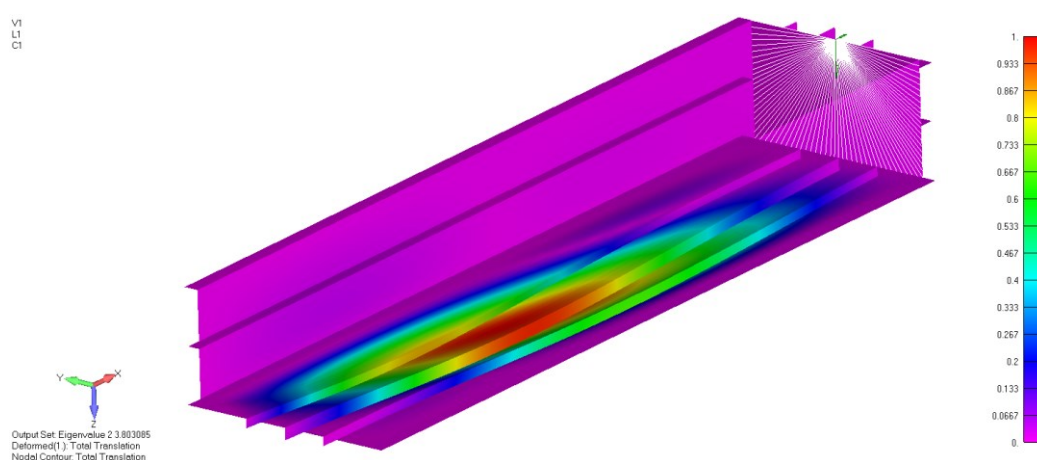
Completada a análise, as Figuras 5.3 e 5.4 ilustram a distribuição das tensões na região mais crítica e o primeiro modo de flambagem, respectivamente.

Figura 5.3 – Região de maior tensão: região inferior do engaste da viga sem afilamento de Alumínio.



Fonte: Elaborado em (NX Nastran®, 2016).

Figura 5.4 – Primeiro modo de flambagem da viga sem afilamento de Alumínio.



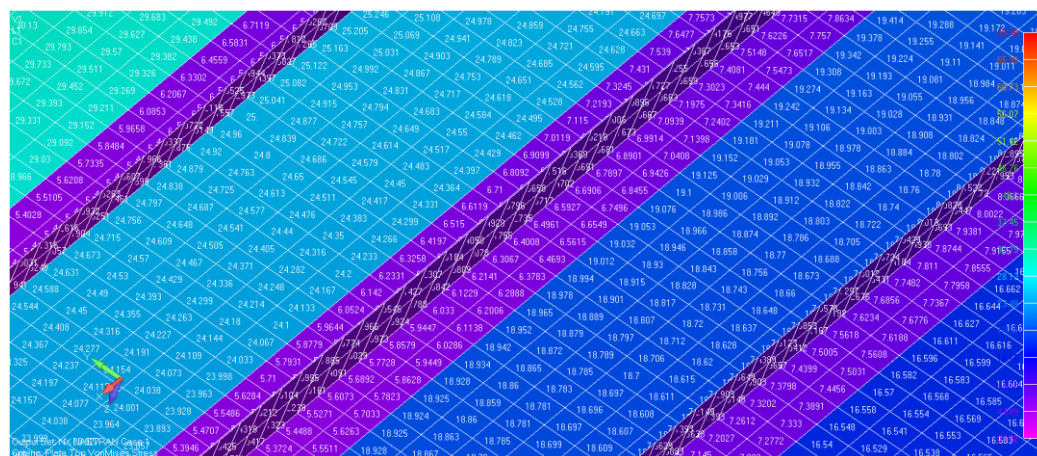
Fonte: Elaborado em (NX Nastran®, 2016).

Para que caiba uma comparação, determinou-se, também no caso numérico, a seção K. Lembra-se que a referida seção está localizada na metade do comprimento da viga, ou seja, em $z = 550$ mm.

Como descrito ao longo da teoria, as tensões normais devidas ao momento fletor foram comparadas com as tensões nos enrijecedores (*Booms*) e as tensões cisalhantes devido à carga cortante e ao momento torçor foram comparadas com as tensões nas mesas e almas. Para isso utilizou-se, no software, os dados de pós processamento. O NX Nastran®

(2016) nos fornece os dados de tensão em cada elemento da viga e o critério utilizado nesse caso para permitir a comparação foi realizar uma média das tensões no grupo em análise. Para a visualização das tensões normais utilizou-se o “Output 7033 – Plate Top VonMisses Stress” e para a visualização das tensões cisalhantes utilizou-se o “Output 7031 – Plate Top MaxShear Stress”. A Figura 5.5 ilustra, no software, como são mostrados os dados de pós processamento.

Figura 5.5 – Visualização das tensões no Output 7033.



Fonte: Elaborado em (NX Nastran®, 2016).

As Tabelas 5.1 e 5.2 mostram, então, as tensões resultantes oriundas da análise numérica.

Tabela 5.1 – Comparação entre o resultado numérico e teórico para os Booms.

Trecho	$ \sigma_{\text{Resultante: Numérica}} $ [N/mm ²]
Boom 1	9,228
Boom 2	8,564
Boom 3	8,186
Boom 4	8,384
Boom 5	7,628
Boom 6	7,790
Boom 7	8,566
Boom 8	8,744
Boom 9	9,854
Boom 10	9,377

Fonte: Elaborado pelos autores, 2019.

Tabela 5.2 – Comparação entre o resultado teórico e numérico para os trechos da seção.

Trecho	$\tau_{\text{Resultante}}$: Numérica] [N/mm²]
Trecho 1-2	18,11
Trecho 2-3	14,26
Trecho 3-4	10,57
Trecho 4-5	9,643
Trecho 5-6	3,420
Trecho 6-7	9,142
Trecho 7-8	11,20
Trecho 8-9	14,90
Trecho 9-10	18,14
Trecho 10-1	9,781

Fonte: Elaborado pelos autores, 2019.

Sobre a flambagem, observou-se que ela ocorre na parte inferior da viga, conforme Figura 5.4. Numericamente, o primeiro modo ocorre a 3,803 da carga aplicada, ou seja, ocorrerá à uma carga de aproximadamente 760,6 kgf. Aumentando-se a carga progressivamente e o respectivo momento gerado devido à sua excentricidade, nota-se que é necessária uma carga de 985 kgf para que se atinja a tensão de escoamento, que é de 345 MPa (ASM, 2016).

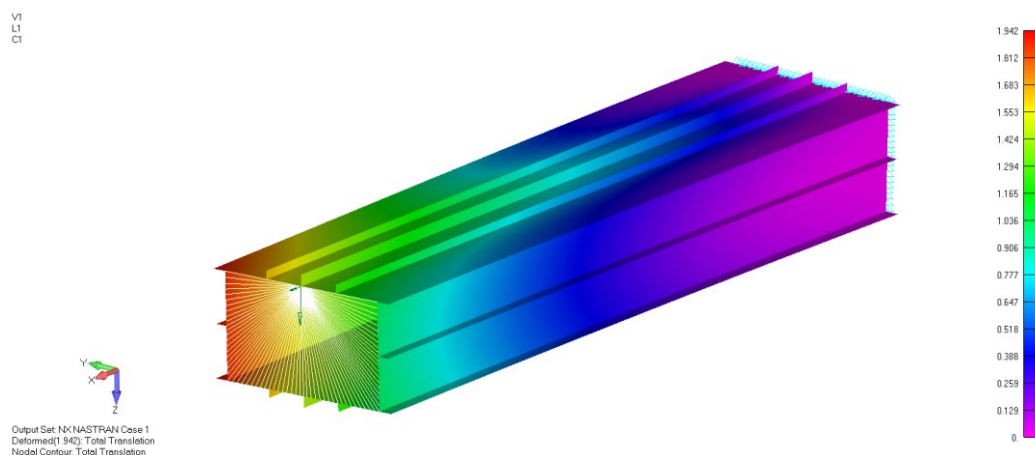
Como informação adicional, a massa do conjunto é de 7,618 kg. Por fim, a Tabela 5.3 evidencia os valores máximos de deslocamento e rotação para a carga aplicada de 200 kgf e as Figuras 5.6 e 5.7 a distribuição desses parâmetros ao longo da viga.

Tabela 5.3 – Valores máximos de deslocamento e rotação para a viga de alumínio sem afilamento.

Deslocamento Máximo [mm]	Rotação Máxima [rad]
1,942	0,0056

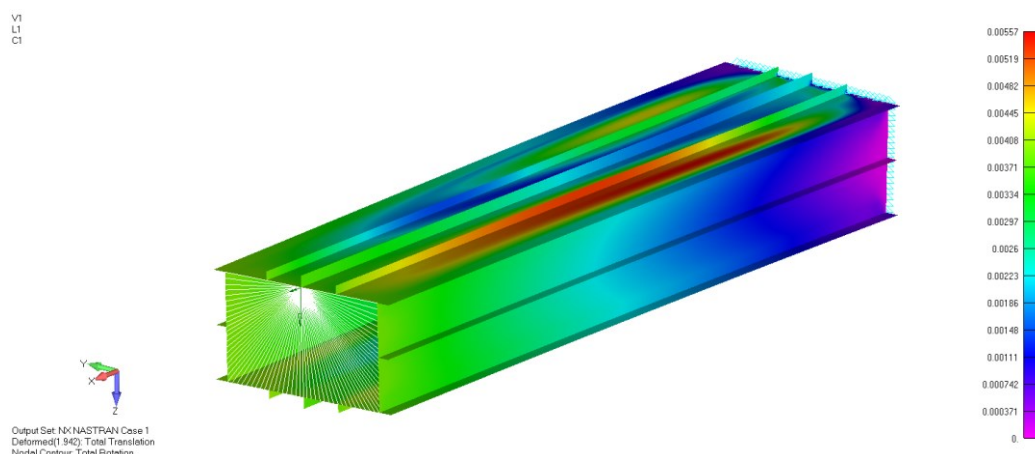
Fonte: Elaborado pelos autores, 2019.

Figura 5.6 – Distribuição dos deslocamentos ao longo da viga de Alumínio sem afilamento.



Fonte: Elaborado em (NX Nastran®, 2016).

Figura 5.7 – Distribuição das rotações ao longo da viga de Alumínio sem afilamento.



Fonte: Elaborado em (NX Nastran®, 2016).

5.1.2 Material Compósito

Para os materiais compósitos, são realizadas as mesmas etapas do caso anterior. Entretanto, a metodologia utilizada é diferente. Isso quer dizer que, após a divisão da estrutura nos 4 grupos principais (base horizontal, base vertical, cantoneiras e perfil T), definiu-se a fibra de carbono como material ortotrópico. A espessura total do laminado de cada um desses grupos foi definida com base na sobreposição de camadas de fibras escolhidas, ou seja, após definir a propriedade do material como laminado (*Laminate*) precisou-se escolher uma configuração da disposição das fibras de carbono.

Então, ficou determinado que cada camada de fibra de carbono (conjunto resina + fibras) possui espessura local de 0,2 ou 0,25 mm. Além disso, optou-se por uma distribuição que possuía simetria espelhada. Na prática, a simetria espelhada é utilizada pois ela evita o arqueamento ou a deformação da placa após o seu resfriamento. Com o objetivo de adaptar o material às solicitações da estrutura – clara vantagem dos materiais compósitos – evitou-se a configuração de um estratificado quase isotrópico. As fibras a $+45^\circ$ e -45° foram escolhidas para ter-se uma rigidez ao cisalhamento e colocá-las nas camadas externas do laminado aumenta a resistência à flambagem e permite uma proteção das fibras principais que retêm os esforços. Por tais motivos, as fibras a $+45^\circ$ e -45° foram utilizadas principalmente nas mesas e almas. Já as fibras a 0° e 90° foram escolhidas para suportar o momento fletor nas direções longitudinal e transversal. Evitou-se utilizar fibras a 90° em duas camadas consecutivas já que isso pode contribuir na geração de tensões interlaminares e consequentemente na delaminação da estrutura compósita. Tentou-se, também, manter pelo menos 10% de fibras em cada direção para proteção da integridade do estratificado mesmo após fissuração da matriz de certas camadas (BOUVET, 2015).

A Tabela 5.4 indica, portanto, a distribuição das camadas para os grupos citados anteriormente.

Tabela 5.4 – Distribuição das camadas de fibras em material compósito para a viga sem afilamento.

Grupo	Configuração	Espessura por camada [mm]	Espessura Final [mm]
Mesas	$[+45^\circ, -45^\circ]_s$	0,2	0,8
Alma	$[+45^\circ, -45^\circ, 90^\circ, 0^\circ]_s$	0,25	2
Cantoneiras	$[+45^\circ, -45^\circ, 0^\circ_2, 90^\circ, 0^\circ_3]_s$	0,25	4
Perfil T	$[+45^\circ, -45^\circ, 0^\circ_2, 90^\circ, 0^\circ_2, 90^\circ, 0^\circ_2]_s$	0,25	5

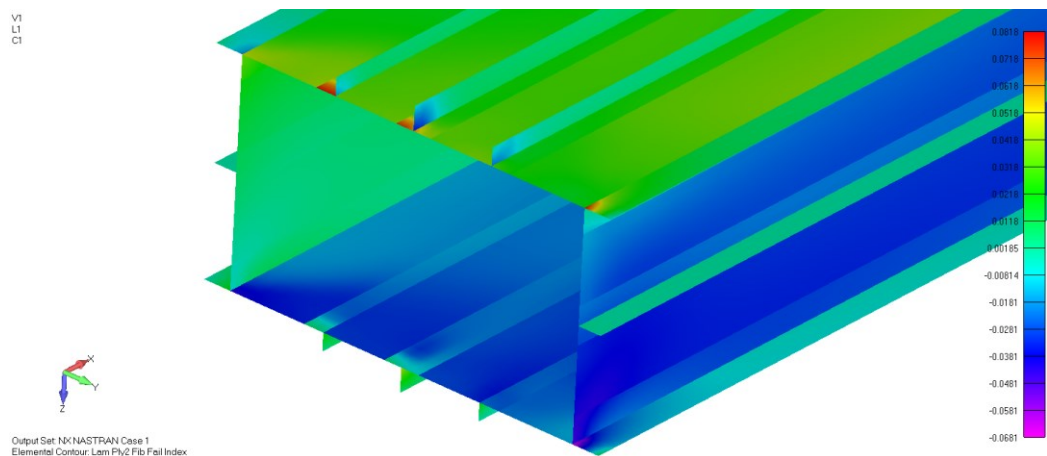
Fonte: Elaborado pelos autores, 2019.

A análise estática em materiais laminados no NX Nastran® (2016) não fornece a tensão em cada elemento, mas sim o seu índice de falha. Um índice de falha superior a 1 indica que o material falhou.

A carga aplicada, o momento resultante, as condições de contorno foram feitos de forma análoga ao caso do material isotrópico. Também, num primeiro momento, realizou-se a análise tipo 1 (Estática) e, posteriormente, a análise tipo 7 (Flambagem). As Figuras 5.8 e 5.9 ilustram a distribuição dos índices de falha nos elementos no engaste da estrutura e o seu primeiro modo de flambagem, respectivamente. Já a Tabela 5.5 evidencia o índice de

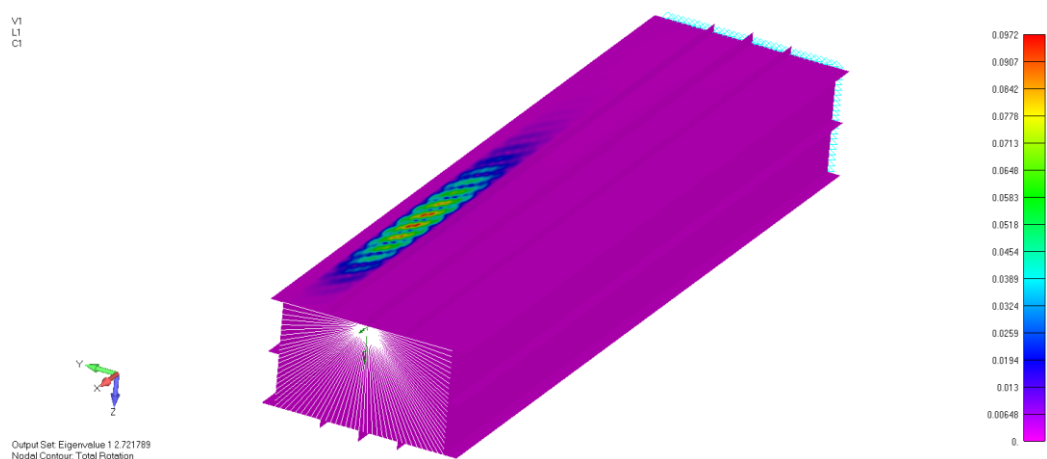
falha em cada camada do material compósito para a carga aplicada de 200 kgf. Notadamente, os grupos e regiões nos quais encontram-se esses índices são os mesmos da Tabela 4.7.

Figura 5.8 – Região mais crítica na Camada 2: região superior do engaste da viga sem afilamento de Fibra de Carbono.



Fonte: Elaborado em (NX Nastran®, 2016).

Figura 5.9 – Primeiro modo de flambagem da viga sem afilamento de Fibra de Carbono.



Fonte: Elaborado em (NX Nastran®, 2016).

Tabela 5.5 – Índices de Falha em cada camada da fibra de carbono na viga sem afilamento.

Camada	Índice de Falha
1	0,0778
2	0,0818
3	0,0474
4	0,0366
5	0,0803
6	0,0347
7	0,0218
8	0,0533
9	0,0214
10	0,0212
11	0,0210
12	0,0716
13	0,0261
14	0,0227
15	0,0751
16	0,0677
17	0,0290
18	0,0327
19	0,0433
20	0,0803

Fonte: Elaborado pelos autores, 2019.

O primeiro modo de flambagem ocorre na região superior da viga a 2,722 da carga aplicada, ou seja, à aproximadamente 544 kgf. Para que processos de delaminação se iniciem (Índice de Falha = 1), a estrutura deve estar sujeita à uma carga limite de 1600 kgf.

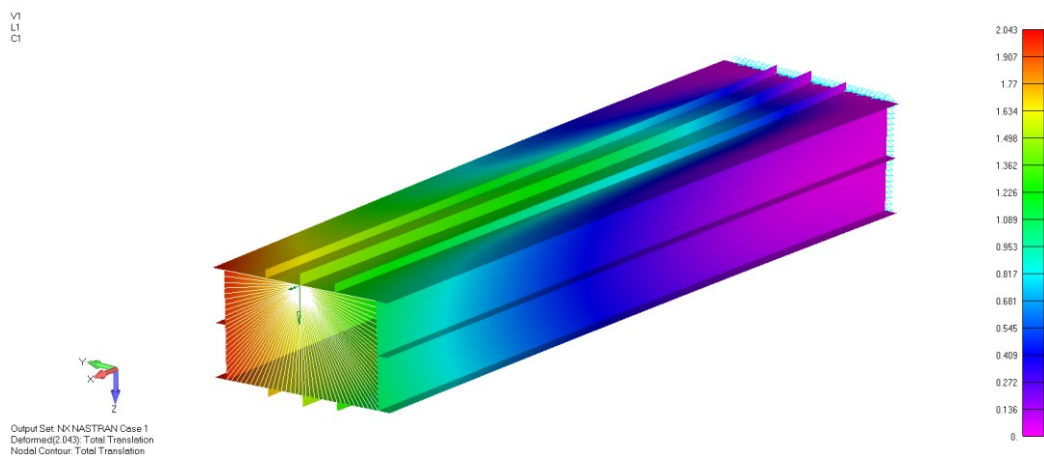
Por fim, a massa da viga caixão sem afilamento concebida em fibra de carbono é de 4,193 kg. A Tabela 5.6 mostra o deslocamento e rotação máximos verificados para esse caso. As Figuras 5.10 e 5.11 ilustram a distribuição desses parâmetros ao longo da viga.

Tabela 5.6 – Valores máximo de deslocamento e rotação para a viga de alumínio sem afilamento.

Deslocamento Máximo [mm]	Rotação Máxima [rad]
2,043	0,0110

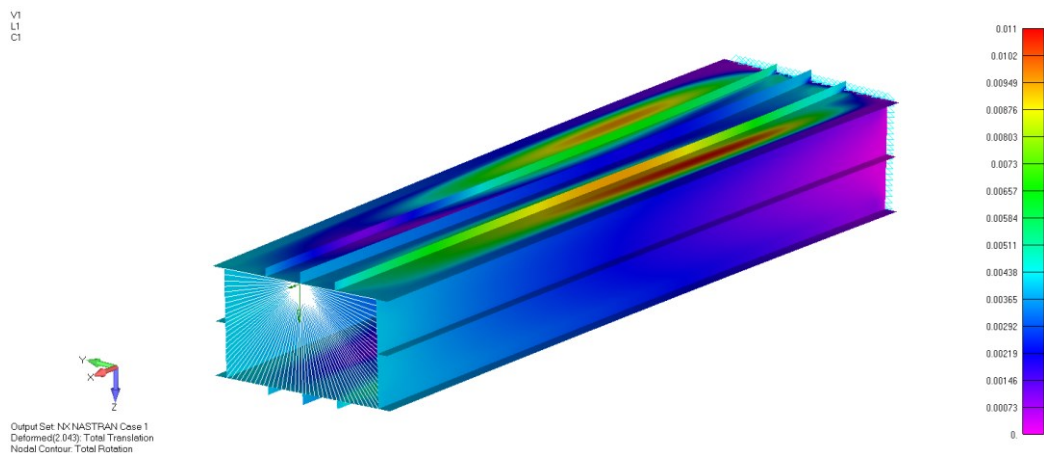
Fonte: Elaborado pelos autores, 2019.

Figura 5.10 – Distribuição dos deslocamentos ao longo da viga de Fibra de Carbono sem afilamento.



Fonte: Elaborado em (NX Nastran®, 2016).

Figura 5.11 – Distribuição das rotações ao longo da viga de Fibra de Carbono sem afilamento.



Fonte: Elaborado em (NX Nastran®, 2016).

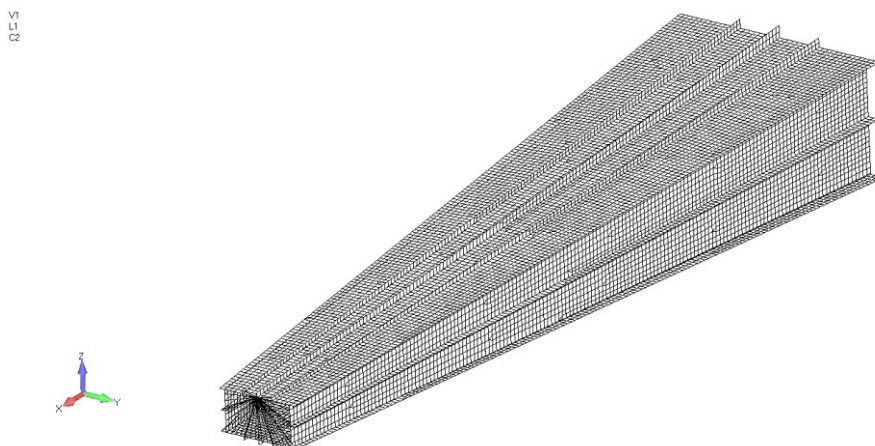
CAPÍTULO VI

ANÁLISE NUMÉRICA DAS TENSÕES QUE SOLICITAM A VIGA COM AFILAMENTO

6.2 Modelo Numérico

O modelo numérico tem a sua origem no software CATIA® (2011). Após conceber a geometria no referido *software*, realizou-se a discretização da geometria no HyperMesh® (2014). Nesse caso, por uma questão de capacidade computacional, definiu-se o tamanho do elemento em 7 mm. A Figura 6.12 mostra a geometria após aplicação da malha.

Figura 6.12 – Viga com afilamento após ser discretizada.



Fonte: Elaborado em (HyperMesh®, 2014).

6.2.1 Material Isotrópico

Para o material isotrópico com afilamento, seguiu-se a mesma metodologia expressa para viga sem afilamento no tocante à divisão da estrutura, definição do material, das espessuras, do tipo de elemento utilizado, das cargas e da condição de engaste.

Também como no caso do material isotrópico sem afilamento, realizou-se primeiramente a análise do tipo 1 (Estática). As tensões normais devidas ao momento fletor foram comparadas com as tensões nos enrijecedores (*Booms*) e as tensões cisalhantes devido à carga cortante e ao momento torçor foram comparadas com as tensões nas mesas e almas através dos *Outputs* 7033 e 7031, respectivamente. Ambos tiveram como referencial a seção K. Posteriormente, a análise tipo 7 (Flambagem) foi realizada. O valor médio das tensões resultantes atuantes no *Boom* é evidenciado na Tabela 6.7, enquanto as tensões médias atuantes em cada trecho de mesas e almas é evidenciado na Tabela 6.8.

Tabela 6.7 – Resultado numérico para os *Booms* na viga afilada.

Trecho	$\sigma_{\text{Resultante}}$: Numérica [N/mm²]
Boom 1	10,37
Boom 2	10,18
Boom 3	9,089
Boom 4	9,310
Boom 5	8,918
Boom 6	8,739
Boom 7	9,138
Boom 8	9,358
Boom 9	10,52
Boom 10	10,29

Fonte: Elaborado pelos autores, 2019.

Tabela 6.8 – Resultado numérico para mesas e almas na viga afilada.

Trecho	$\tau_{\text{Resultante}}$: Numérica [N/mm²]
Trecho 1-2	33,90
Trecho 2-3	30,45
Trecho 3-4	26,45
Trecho 4-5	25,56
Trecho 5-6	13,55
Trecho 6-7	25,38
Trecho 7-8	26,92
Trecho 8-9	30,46
Trecho 9-10	34,57
Trecho 10-1	10,58

Fonte: Elaborado pelos autores, 2019.

Sobre a flambagem, observou-se que ela ocorre a 2,454 da carga aplicada, ou seja, a uma carga de aproximadamente 509,8 kgf. É necessária uma carga de 660 kgf para que se atinja a tensão de escoamento, que é de 345 MPa (ASM, 2016). Como informação adicional, a massa do conjunto é de 5,226 kg. Por fim, a Tabela 6.9 evidencia os valores máximos de deslocamento e rotação para a carga aplicada de 200 kgf.

Tabela 6.9 – Valores máximos de deslocamento e rotação para a viga de alumínio sem afilamento.

Deslocamento Máximo [mm]	Rotação Máxima [rad]
3,473	0,0191

Fonte: Elaborado pelos autores, 2019.

6.2.2 Material Compósito

A metodologia para o material compósito da viga afilada é a mesma daquela aplicada para a viga sem afilamento. São mantidos os grupos, as espessuras dos componentes de cada grupo, a disposição das fibras, a carga aplicada e a seção de engaste com o objetivo de analisar-se o Índice de Falha na análise tipo 1 (Estática) e, na análise tipo 7 (Flambagem), se o primeiro modo ocorre para valores acima de 1.

A Tabela 6.10 evidencia o índice de falha em cada camada do material compósito para a carga aplicada de 200 kgf. Notadamente, os grupos e regiões nos quais encontram-se esses índices são os mesmos da Tabela 4.13.

Tabela 6.10 – Índices de falha em cada camada da fibra de carbono na viga com afilamento.

Camada	Índice de Falha
1	0,0450
2	0,2732
3	0,2321
4	0,0442
5	0,0666
6	0,0609
7	0,1924
8	0,0376
9	0,0339
10	0,0358
11	0,0378
12	0,1041
13	0,0419
14	0,0505
15	0,1725
16	0,0927
17	0,0214
18	0,0217
19	0,1472
20	0,0817

Fonte: Elaborado pelos autores, 2019.

O primeiro modo de flambagem ocorre na região superior da viga a 2,304 da carga aplicada, ou seja, à aproximadamente 406,9 kgf. Processos de delaminação se iniciam à uma carga limite de 1100 kgf. Por fim, a massa da viga caixão sem afilamento concebida em fibra de carbono é de 2,876 kg. A Tabela 5.11 mostra o deslocamento e rotação máximos verificados para esse caso.

Tabela 6.11 - Valores máximos de deslocamento e rotação para a viga de fibra de carbono com afilamento.

Deslocamento Máximo [mm]	Rotação Máxima [rad]
3,508	0,0197

Fonte: Elaborado pelos autores, 2019.

CAPÍTULO VII

ANÁLISE DE RESULTADOS E DISCUSSÕES

7.1 Resultados das Análises dos Modelos

Nessa seção do capítulo da Análise de Resultado e Discussões, analisar-se-ão os modelos teórico-analítico e numérico da viga caixão com e sem afilamento, concebida em Alumínio e também em Fibra de Carbono. Serão comparadas as tensões, deslocamentos, rotações e os modos de flambagem atuantes em cada caso e, a partir disso, serão feitos comentários sobre os resultados obtidos.

7.1.1 Material Isotrópico

Inicialmente, a Tabela 7.1 mostra as tensões normais obtidas através do modelo teórico-analítico e através do modelo numérico na viga sem afilamento e a diferença relativa entre esses resultados.

Tabela 7.1 – Comparação das tensões normais para os *Booms* na viga sem afilamento.

Trecho	$ \sigma_{\text{Resultante: Numérica}} $ [N/mm ²]	$ \sigma_{\text{Resultante: Analítica}} $ [N/mm ²]	Diferença Relativa
Boom 1	9,228	7,935	16,29%
Boom 2	8,564	7,935	7,927%
Boom 3	8,186	7,935	3,163%
Boom 4	8,384	7,935	5,658%
Boom 5	7,628	7,935	3,869%
Boom 6	7,790	7,935	1,827%
Boom 7	8,566	7,935	7,952%
Boom 8	8,744	7,935	10,19%
Boom 9	9,854	7,935	24,18%
Boom 10	9,377	7,935	18,17%

Fonte: Elaborado pelos autores, 2019.

A Tabela 7.2 é análoga à Tabela 7.1, mostrando os resultados numérico e teórico e a diferença relativa, porém no tocante à viga com afilamento.

Tabela 7.2 – Comparação das tensões normais para os *Booms* na viga com afilamento.

Trecho	$\sigma_{\text{Resultante: Numérica}}$ [N/mm²]	$\sigma_{\text{Resultante: Analítica}}$ [N/mm²]	Diferença Relativa
Boom 1	10,37	8,313	24,75%
Boom 2	10,18	8,313	22,51%
Boom 3	9,089	8,313	9,934%
Boom 4	9,310	8,313	12,00%
Boom 5	8,918	8,313	7,285%
Boom 6	8,739	8,313	5,132%
Boom 7	9,138	8,313	9,934%
Boom 8	9,358	8,313	12,58%
Boom 9	10,52	8,313	26,57%
Boom 10	10,29	8,313	23,84%

Fonte: Elaborado pelos autores, 2019.

A Tabela 7.3 evidencia as tensões cisalhantes por trecho obtidas no cálculo teórico-analítico e no caso numérico para a viga sem afilamento e a Tabela 7.4 faz o mesmo procedimento, mas no tocante à viga com afilamento. As respectivas diferenças relativas também são explicitadas.

Tabela 7.3 – Comparação das tensões cisalhantes no caso numérico e analítico para os trechos na viga sem afilamento.

Trecho	$ \tau_{\text{Resultante: Numérica}} $ [N/mm ²]	$ \tau_{\text{Resultante: Analítica}} $ [N/mm ²]	Diferença Relativa
Trecho 1-2	18,11	18,41	1,629%
Trecho 2-3	14,26	15,92	10,42%
Trecho 3-4	10,57	11,87	10,95%
Trecho 4-5	9,643	9,384	2,760%
Trecho 5-6	3,420	2,291	49,27%
Trecho 6-7	9,142	9,384	2,579%
Trecho 7-8	11,20	11,87	5,644%
Trecho 8-9	14,90	15,92	6,407%
Trecho 9-10	18,14	18,42	1,520%
Trecho 10-1	9,781	8,830	10,77%

Fonte: Elaborado pelos autores, 2019.

Tabela 7.4 – Comparação das tensões cisalhantes no caso numérico e analítico para os trechos na viga com afilamento.

Trecho	$ \tau_{\text{Resultante: Numérica}} $ [N/mm ²]	$ \tau_{\text{Resultante: Analítica}} $ [N/mm ²]	Diferença Relativa
Trecho 1-2	33,90	27,24	24,44%
Trecho 2-3	30,45	26,07	16,80%
Trecho 3-4	26,45	24,17	9,433%
Trecho 4-5	25,56	23,00	11,13%
Trecho 5-6	13,55	8,506	59,30%
Trecho 6-7	25,38	23,00	10,35%
Trecho 7-8	26,92	24,17	11,38%
Trecho 8-9	30,46	26,07	16,84%
Trecho 9-10	34,57	27,66	24,98%
Trecho 10-1	10,58	11,60	8,793%

Fonte: Elaborado pelos autores, 2019.

Nota-se, das Tabelas 7.1 e 7.2, que as tensões normais obtidas no modelo numérico não são constantes e variam ao longo de cada *Boom* analisado. Isso difere da condição analítica de que, na seção K, *Booms* de mesma coordenada Y_r estão sujeitas à mesma solicitação. A diferença mínima relativa é da ordem de 1,827% e a máxima relativa, da

ordem de 24,18% no caso da viga sem afilamento; já no caso da viga com afilamento as diferenças mínima e máxima são de 5,132% e 26,57%, respectivamente.

Em ambos os casos pode-se dizer que a existência da diferença nos resultados é oriunda, num primeiro momento, do critério de análise escolhido no NX Nastran® (2016). Pelo critério de Von Mises, o cálculo da tensão efetiva leva em conta a combinação de todas as diferentes tensões atuantes na seção de análise, ao passo que no modelo teórico aplicado aos *Booms*, somente as tensões normais são levadas em conta.

Sobre a existência da diferença de resultados observa-se que o ponto de maior divergência nas tensões normais é o do *Boom* 9, que corresponde aos trechos nos quais a tensão cisalhante é a maior, entre os trechos 8-9 e 9-10 (Tabelas 7.3 e 7.4). Esse fenômeno ocorre tanto para a viga com afilamento quanto para a viga sem afilamento.

Esse fato permite concluir o seguinte: o modelo teórico que indica a atuação das tensões cisalhantes somente às mesas e almas é limitado. As tensões cisalhantes também estão atuantes nos *Booms*, ainda que em escala reduzida. Prova disso é que, quando analisa-se o caso inverso, os locais de menor divergência nas tensões normais - que correspondem ao *Boom* 6 nas Tabelas 7.1 e 7.2 - são os locais onde as tensões cisalhantes resultantes são as menores observadas (Trechos 5-6 e 6-7 das Tabelas 7.3 e 7.4).

Quanto à análise das tensões cisalhantes, observa-se que em ambos modelos ela varia ao longo dos trechos, conforme Tabelas 7.3 e 7.4. A partir do Trecho 1-2, as tensões resultantes decrescem até o trecho 5-6, crescem do trecho 6-7 ao trecho 9-10 e decrescem no trecho 10-1. Os resultados podem ser explicados pelo cálculo da tensão resultante oriunda dos fluxos cisalhante e torçor. Nesse caso, a menor diferença relativa é de 1,52%, com um máximo de 49,27% na viga sem afilamento. Já na viga afilada a mínima e máxima diferença relativa é da ordem de 8,79% e 59,30%, respectivamente. Nota-se que nos dois casos a região de maior discrepância de resultados acontece no trecho 5-6. Esse é o ponto de menor tensão cisalhante e torna-se plausível afirmar o seguinte: para a viga sem afilamento, a diferença entre os valores de tensões encontradas segundo a Tabela 7.3 é, em média, de 0,7811 N/mm². Uma variação dessa ordem nas baixas tensões provoca diferenças relativas que são mais significativas quando comparadas às diferenças nas maiores tensões. O mesmo acontece para a viga afilada na qual a diferença média das tensões cisalhantes segundo a Tabela 7.4 é de 3,8374 N/mm².

Apesar da divergência de resultados, o comportamento das tensões indica uma aproximação entre os modelos nos dois cenários.

Outro fato que pode ser levado em conta na divergência de resultados são as diferenças nas considerações da modelagem teórico e numérica. Cita-se, por exemplo, o

fato de que, por um lado, todo o cálculo teórico-analítico leva em conta uma viga na qual os enrijecedores são elementos pontuais cuja influência não leva em conta sua inércia local. Já no cálculo numérico não é levada em conta inicialmente a viga como um todo, mas sim, a combinação e a soma dos diferentes elementos de placa que, a partir das interações desses elementos, fornecem a forma e o comportamento da viga sujeita à carga excêntrica.

Ainda no caso numérico, o cálculo das tensões leva em consideração pequenos efeitos que são negligenciados na modelagem teórico-analítica, notadamente o efeito combinado das tensões normais e cisalhantes em qualquer elemento de análise e a inércia local. Outrossim, a modelagem numérica exigiu que o ponto de aplicação da carga excêntrica fosse sobre um elemento de massa da estrutura, ao passo que o método teórico-analítico considera o ponto de aplicação da carga como sendo o centro de massa da seção. A aplicação pontual da carga em local que não o centróide da seção, gera, também, efeitos locais que podem distanciar os dois modelos apresentados.

A malha utilizada também pode ser um fator de divergência de resultados. Nota-se, por exemplo que, em módulo, *Booms* opostos ou sob a mesma linha de ação do momento fletor estão sujeitos à mesma tensão, segundo o caso analítico. Isso não ocorre para o método numérico e pode-se atrelar à limitação computacional os erros decorrentes principalmente do caso onde acontece o afilamento, já que, comparativamente, a seção transversal de tal análise é menor e exigiria uma maior discretização dos componentes.

Por fim, para manter o padrão de algarismos significativos, pequenas aproximações foram feitas, o que pode, após contínuos processos de cálculos, gerar divergências de menor ordem.

Por outro lado, o que torna efetiva a abordagem e a modelagem teórico-analítica e numérica vem do fato de que as maiores tensões resultantes teóricas são encontradas nos mesmos locais no caso numérico. Por exemplo: as maiores tensões na seção K estão localizadas no Boom 9, junto ao trecho 9-10 de distribuição das tensões cisalhantes. Isso pode ser observado na Figura 5.3, no qual no NX Nastran®, 2016 o ponto de cores mais avermelhadas indica essa mesma região como tendo as maiores tensões aplicadas.

A modelagem numérica nos indica que o material escoou para uma carga de 660 kgf na viga com afilamento e de 985 kgf para a viga sem afilamento. Em ambos os casos, o primeiro módulo de flambagem é atingido anteriormente à carga necessária para que o material escoe. Portanto, o principal critério de dimensionamento será a flambagem, visto que ela ocorre a uma carga de 509,8 kgf para a viga com afilamento e de 760,6 kgf na viga sem afilamento, na mesa inferior desta (Figura 5.4). É compreensível esse comportamento, já que as mesas inferiores estão sujeitas à compressão oriunda do momento fletor.

7.1.2 Material Compósito

Para o Material Compósito foi concebida a Tabela 7.5, que evidencia os Índices de Falha encontrados através do modelo numérico e teórico-analítico e a respectiva diferença relativa para cada camada.

Tabela 7.5 – Diferença relativa entre os Índice de Falha encontrados na viga sem afilamento.

Camada	Índice de Falha Numérico	Índice de Falha Analítico	Diferença Relativa
1	0,0778	0,0775	0,3871%
2	0,0818	0,0733	11,60%
3	0,0474	0,0416	13,94%
4	0,0366	0,0511	28,38%
5	0,0803	0,0815	1,472%
6	0,0347	0,0309	12,30%
7	0,0218	0,0238	8,403%
8	0,0533	0,0411	29,68%
9	0,0214	0,0238	10,08%
10	0,0212	0,0238	10,92%
11	0,0210	0,0238	11,76%
12	0,0716	0,0756	5,291%
13	0,0261	0,0368	29,08%
14	0,0227	0,0238	4,621%
15	0,0751	0,0733	2,456%
16	0,0677	0,0771	12,19%
17	0,0290	0,0235	23,40%
18	0,0327	0,0241	35,68%
19	0,0433	0,0610	29,02%
20	0,0803	0,0741	8,367%

Fonte: Elaborado pelos autores, 2019.

A Tabela 7.6 realiza o mesmo procedimento para o caso da viga em Fibra de Carbono com afilamento.

Tabela 7.6 – Diferença relativa entre os Índice de Falha encontrados na viga com afilamento.

Camada	Índice de Falha Numérico	Índice de Falha Analítico	Diferença Relativa
1	0,0450	0,0411	9,489%
2	0,2732	0,2355	15,50%
3	0,2321	0,2731	15,01%
4	0,0442	0,0388	13,91%
5	0,0666	0,0654	1,834%
6	0,0609	0,0700	13,00%
7	0,1924	0,1892	1,691%
8	0,0376	0,0402	6,468%
9	0,0339	0,0341	0,5865%
10	0,0358	0,0341	4,985%
11	0,0378	0,0341	10,85%
12	0,1041	0,0980	6,224%
13	0,0419	0,0399	5,012%
14	0,0505	0,0435	16,09%
15	0,1725	0,1601	7,745%
16	0,0927	0,0798	16,16%
17	0,0214	0,0243	11,93%
18	0,0217	0,0243	10,70%
19	0,1472	0,1355	8,635%
20	0,0817	0,0844	3,199%

Fonte: Elaborado pelos autores, 2019.

Das Tabelas 4.7 e 4.13, que indicam a região da viga na qual o índice de falha é mais crítico em cada camada, nota-se que, apesar de grande parte dessas regiões críticas se localizarem no engaste, como no material isotrópico, tal regra não se faz verdadeira para todas as camadas. Da Tabela 4.7 nota-se que 3 regiões críticas estão localizadas fora do engaste. A quarta camada de laminado é mais crítica em uma posição $z = 216$ mm, na mesa inferior. Já a camada de número 6, a 24 mm de distância do engaste é mais crítica na alma direita e a 13ª camada é mais crítica no *Boom* B3 a 112 mm de distância do engaste. O mesmo é visto na viga com afilamento, no qual as camadas 2 e 3 são mais críticas na mesa inferior a uma distância $z = 210$ mm e o *Boom* B4, na sua 14ª possui índice de falha crítico a 21 mm de distância do engaste.

Então, ao longo do método analítico e também do método numérico, pode-se notar que há uma maior complexidade para dimensionamento das estruturas em material compósito. A escolha do posicionamento da fibra, a quantidade de fibras em cada direção, o cálculo para análise das tensões longitudinais e transversais em cada uma das direções das fibras e a consequente análise do Índice de Falha são fatores que tornam a previsibilidade em encontrar os pontos mais críticos para o dimensionamento da estrutura dificultada. Nota-se, por exemplo, que a região cujo Índice de Falha é maior para cada camada do estratificado pode ocorrer em diferentes componentes e isso faz com que a interação entre o método numérico e analítico seja mais intensa com relação ao material isotrópico.

Cada simples alteração de parâmetro do material compósito, seja a direção de fibras quaisquer ou a espessura do laminado, exige que os cálculos sejam refeitos em sua totalidade. Por esse motivo, optou-se por manter a distribuição das fibras tanto no caso sem afilamento como no caso com afilamento.

No que se refere aos resultados, para a carga excêntrica aplicada de 200 kgf, a estrutura suportará os esforços com tranquilidade, seja sem afilamento ou com afilamento. No primeiro caso, a fibra mais solicitada é a de número 5 do *Boom 3* (Perfil T), na região do engaste. Essa fibra encontra-se posicionada à 90°. Já para o segundo caso, a fibra mais solicitada é a de número 2 da mesa inferior, localizada em posição intermediária da viga ($z = 210$ mm) e posicionada a -45°. Aumentando-se a carga progressivamente até que o Índice de Falha unitário seja obtido, o padrão de maior solicitação não é mantido para as fibras de número 5 e 2, o que corrobora certa imprevisibilidade presente nos compósitos em geral.

Ainda sobre a carga progressiva, o método numérico fornece que o Índice de Falha unitário é atingido para uma carga de 1600 kgf para a viga sem afilamento e de 1100 kgf para a viga com afilamento. Na prática outras questões devem ser levadas em conta. A natureza das fibras, da matriz, das interfaces, das solicitações e da taxa de fibras são fatores indispensáveis na análise da ruptura das fibras, da fissuração matricial ou na delaminação fibras/ matriz. Com isso, não somente a análise estática, mas também a de flambagem (microflambagem de enrijecedores), a de resistência aos danos (impacto), de envelhecimento, umidade e ruptura de interfaces (bordo de placas) devem ser mensuradas. Isso faz com que, na prática, processos de dimensionamento e certificação estejam acompanhados de um certo número de ensaios experimentais afim de garantir a rigidez da estrutura (BOUVET, 2015).

A partir da Tabela 7.5, nota-se que, em média, a diferença relativa para a viga sem afilamento está na ordem de 14,45%, com valor mínimo relativo de 0,3871% e máximo de 35,68%. Já a viga com afilamento possui, em média e a partir da Tabela 7.6, erros de 6,730%, com mínimo de 0,0% e máximo de 16,16%.

A divergência dos resultados pode ser explicada, num primeiro momento, pelo acúmulo de pequenas considerações ao longo do memorial de cálculo. Inicialmente, os erros acontecem ao considerar que os *Booms* estão solicitados apenas em esforços oriundos do momento fletor e as mesas e almas apenas em esforços oriundos do momento torçor e força cortante. Como no material isotrópico, para o compósito tal consideração também é limitada.

Além disso, os pequenos ajustes no cálculo das tensões teóricas são perpetuados no cálculo dos fluxos de esforço em cisalhamento e momento fletor, o que contribui para o acúmulo de pequenos erros.

Como premissa de cálculo, consideramos o módulo de elasticidade transversal a metade do valor nominal teórico para que seja compensado o efeito das fissurações matriciais secundárias. Isso também contribui nas eventuais divergências, já que é uma consideração prática e que condiz com a realidade, segundo BOUVET (2015).

Ainda assim, é pertinente confirmar a aproximação que ocorre entre o modelo teórico-analítico e numérico, já que a simplicidade da geometria da viga facilita a comparação com o modelo teórico da placa em membrana. Na prática, as geometrias das estruturas aeronáuticas em material compósito faz com que o modelo teórico torne-se complexo e, então, o modelo numérico torna-se o principal fator de análise e decisão. Nele, pode-se reconceber a estrutura ao otimizar as camadas e espessuras do material. Evidentemente que à cada modificação os índices de falha são alterados, o que pode revelar um processo custoso em termos de tempo de cálculo e análise. Ainda assim, o objetivo maior é o de minimizar a massa total e tornar o Índice de Falha mais próximo de 1, respeitando os devidos fatores de segurança.

Nesse caso, a flambagem ocorre, visualmente, na mesa superior da viga. O padrão de translação do seu primeiro modo (Figura 5.9) indica que a instabilidade é decorrente dos esforços de cisalhamento. O cisalhamento possui uma componente em tração a 45° e à compressão a -45°, sendo essa última o componente que pode levar a flambagem.

Como no caso anterior, a flambagem também será o principal critério de dimensionamento para a viga com e sem afilamento, pois a carga necessária para que a estrutura inicie esse processo de instabilidade é de 406,9 e 544 kgf, respectivamente. Esses valores são inferiores – e, portanto, mais críticos no dimensionamento – comparativamente aos seus primeiros modo de ruptura, com cargas de 1100 e 1600 kgf.

7.2 Comparação Final entre Material Isotrópico e Compósito

Inicialmente, a Tabela 7.7 compara o deslocamento e rotação máximos, a carga necessária para que o primeiro modo de flambagem ocorra, a carga crítica e a massa final da viga tanto para o Alumínio 2024-T3 quanto para a Fibra de Carbono.

Tabela 7.7 – Comparação entre Translação, Rotação, Cargas de Flambagem e Crítica além da Massa Final das viga em Alumínio e Fibra de Carbono, sem e com afilamento.

Tipo de Viga		Translação Máx. [mm]	Rotação Máx. [rad]	Flambagem [kgf]	Carga Crítica [kgf]	Massa Final [kg]
Alumínio	Sem Afilamento	1,942	0,0056	760,6	985	7,618
	Com Afilamento	3,473	0,0191	509,8	660	5,226
Fibra de Carbono	Sem Afilamento	2,043	0,0110	544	1600	4,193
	Com Afilamento	3,508	0,0197	406,9	1100	2,876

Fonte: Elaborado pelos autores, 2019.

Nota-se, a partir da Tabela 7.7, que em quesitos de translação e rotação máximos, a viga sem afilamento, devido às características de inércia maiores, se desloca menos e rotaciona menos em relação à viga com afilamento e para ambos materiais observa-se esse comportamento.

Ainda sobre características de inércia na viga sem e com afilamento, comparando-se de modo geral as tensões normais que solicitam os *Booms*, através das Tabelas 7.1 e 7.2, comparando-se também as tensões cisalhantes para cada trecho, nas Tabelas 7.3 e 7.4 e os índices de falha no material compósito através das Tabelas 7.5 e 7.6, um mesmo comportamento é observado. O momento de inércia da seção K ou de seção qualquer da viga afilada que não a do engaste é menor comparada à viga não afilada. Para os quatro modelos analisados, o fato de não se considerar os *Booms* B_{11} e B_{12} indica uma fonte de erro razoável de ser considerada na inércia das seções. E como esse parâmetro de inércia é menor, as tensões normais e cisalhantes resultantes nas seções tornam-se maiores comparativamente à mesma região da viga sem afilamento, em consonância com as Equações (2.40), (2.52), (2.70), (2.72) e (2.98). Além disso, também, a carga crítica de flambagem e de rompimento ou escoamento do material torna-se menor quando o

afilamento é levado em conta para o mesmo material. Esse comportamento confirma a teoria de que de modo geral, tendo-se como base a flambagem de Euler, quanto menor a inércia da seção, menor também será a carga crítica de flambagem.

A flambagem do Alumínio acontece para uma carga crítica superior quando comparada à Fibra de Carbono, nos dois tipos de viga. Ainda assim, tem-se um coeficiente de segurança nesse caso (3,803 e 2,549 para o Alumínio com e sem afilamento e 2,722 e 2,034 para a Fibra de Carbono nos mesmos cenários). Isso garantirá uma margem aceitável do coeficiente no que tange ao domínio aeronáutico, em que para quesitos de dimensionamento, geralmente encontra-se entre 1,5 e 2 (STEPHAN e LABELLE, 2007).

Ainda que, em ambos cenários, o alumínio translada e rotaciona em menores proporções quando comparado à Fibra de Carbono, esse não é um fator que necessariamente indica a eficiência da estrutura em si. A carga crítica para que a Fibra de Carbono rompa é, em média, 1,6 vezes superior à carga necessária para que o Alumínio inicie o escoamento. Por fim, a massa da viga em Fibra de Carbono é aproximadamente 45% menor quando comparada ao Alumínio nos casos com e sem afilamento.

Portanto, a análise da maior eficiência estrutural das vigas em estudo leva em conta principalmente a massa da estrutura e, de posse desse fato, a Fibra de Carbono é mais eficiente. Isso se reflete em uma característica citada que é a rigidez específica desse material, logo, quando analisa-se as propriedades do compósito em relação à sua densidade, tais propriedades são superiores quando comparadas ao material metálico em questão.

Além disso, como explicitado anteriormente, a versatilidade do compósito em moldar o material de acordo com os esforços e necessidades do projeto é um diferencial determinante na sua escolha. Outrossim, a necessidade de uma quantidade menor de elementos de fixação na estrutura dos compósitos, tais como parafusos e rebites, faz com que o processo de fabricação seja facilitado, gerando na estrutura final menos pontos concentradores de tensão.

Por outro lado, o método numérico não deve ser levado em conta exclusivamente. Essa metodologia não prevê pequenas fissurações e delaminações que podem eventualmente ocorrer na estrutura antes da carga crítica. Esses eventos são oriundos, por exemplo, do modo como o material compósito é concebido, além de que procedimentos manuais de fabricação tendem a distanciar as propriedades reais das propriedades nominais do material. E ocorre também o fato de não haver muitos estudos sobre a manutenção da resistência dos compósitos frente à ação prolongada de combustíveis, lubrificantes e produtos químicos de natureza corrosiva (TITA, 1999).

Idealmente, então, feita a comparação entre o cálculo teórico-analítico e numérico, a estrutura real, principalmente em material compósito mas também em material metálico, deve ser projetada e ensaiada exaustivamente com coeficientes de segurança rígidos para que o funcionamento e operação do elemento possam ocorrer satisfatoriamente e a longo prazo.

CAPÍTULO VIII

CONCLUSÕES

Dentro do contexto aeronáutico, nota-se a importância fundamental do domínio de estruturas frente aos novos avanços dessa indústria. O foco crescente dos projetos em estudo visam operações em aeronaves mais leves, capazes de cruzar grandes distâncias, geradoras de pouco ruído, amigáveis com o meio ambiente, com alto desempenho e com eficiência aerodinâmica crescente. De certa forma, cada um desses quesitos recai sobre o domínio de estruturas e materiais, já que materiais mais leves e mais resistentes são capazes de criar um contexto favorável para o bom desempenho da aeronave como um todo. Sendo assim, o foco dos projetos aeronáuticos visa o uso crescente dos materiais compósitos, que substituem progressivamente o uso dos materiais metálicos em componentes como a asa.

Nesse estudo, uma asa foi modelada como sendo uma viga caixão e pode-se estimar satisfatoriamente como o efeito do afilamento e dos materiais influenciam no dimensionamento e na escolha da estrutura mais eficiente. Pode-se observar, por exemplo, que o afilamento é benéfico do ponto de vista estrutural, e que uma menor massa da estrutura implicará em menores custos de produção e aumento da performance da aeronave. Por outro lado, com o afilamento a margem do coeficiente de segurança é diminuída mas, ainda assim, permite uma otimização. Como exemplo, no caso do compósito pode-se otimizar o número de camadas, as espessuras e as direções das fibras, encontrando-se ao fim índices de falha que ainda poderão ser aceitáveis para o funcionamento da estrutura em segurança.

Do ponto de vista técnico, a presença dos *Booms* é fundamental para uma boa performance da estrutura. Durante o projeto, nas regiões mais críticas desta, como o engaste, foi mais perceptível a análise do efeito das solicitações e as interações decorrentes de esforços normais e cisalhantes. Em regiões intermediárias, principalmente no que se refere ao material compósito, a interação entre esforços normais e cisalhantes provocou erros relativos de maior ordem, já que foi preciso extrapolar a condição que o modelo teórico-analítico proveu de que esforços cisalhantes solicitam a alma e a mesa e esforços normais solicitam apenas os *Booms*.

Ainda sobre esse estudo, a geometria relativamente simples da viga caixão, formada por elementos conhecidos, tal como placas e enrijecedores na forma de cantoneiras e perfil T, faz com que seja possível a comparação com um modelo teórico-analítico efetivo. Apesar das diferenças relativas possuírem uma gama considerável de valores, quando analisa-se o efeito global dos cálculos, conclui-se que a aproximação foi efetiva e retrata o comportamento da estrutura da viga. Entretanto, na prática, existem estruturas geometricamente complexas, que dificultam principalmente a análise teórico-analítica, exigindo uma rigorosa e atenta análise numérica. Nesse ponto, então, fica evidente como que a concepção, análise e modo de fabricação de uma estrutura devem ser levados em conta concomitantemente. Fica evidente nesse ponto, também, como ensaios com a estrutura real são um complemento efetivo ao modelo numérico e, então, ensaios podem ser uma sugestão para o avanço no estudo desse projeto.

Como função desse projeto, obteve-se a consolidação do aprendizado na disciplina de Estruturas Aeronáuticas I e II, além da consolidação no aprendizado de “*Dimensionnement des structures composites*” (ISAE-SUPAERO), principalmente na metodologia teórico-analítica para materiais compósitos. Formulações teóricas com relação ao comportamento de elementos estruturais aeronáuticos de paredes finas foram detalhadamente apresentadas e desenvolvidas através de cálculos, compilando em completude aspectos importantes à concepção de projetos estruturais aeronáuticos.

Obteve-se também um aprofundamento nos softwares utilizados em disciplinas como Projeto Aeronáutico Assistido por Computador, mas deve-se reiterar principalmente a extrema contribuição do aprendizado oriundo dos projetos de extensão, notadamente a Equipe Tucano Aerodesign. Com o desenvolvimento desse trabalho, foi possível explorar ferramentas reais de desenvolvimento de um projeto aeronáutico, tal como CATIA® (2011), HyperMesh® (2014) e NX Nastran® (2016), usadas no cotidiano da equipe.

Esse projeto também destina-se à modelagem completa de uma viga caixão para o seu futuro propósito no âmbito do ensaio. Em outras palavras, procurou-se discretizar de modo didático, prático e efetivo os métodos de cálculo para futura comparação com a estrutura real, para fins de ensino prático aos alunos do curso de Graduação em Engenharia Aeronáutica da UFU.

Finalmente, registra-se que, com a realização deste Projeto de Conclusão de Curso, foram adquiridos importantes conhecimentos que agregam competências valiosas ao aprendizado sobre análise do comportamento estrutural de estruturas aeronáuticas.

CAPÍTULO IX

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BOUVET, Christophe. **Dimensionnement des structures composites**: Issu du rapprochement SUPAERO et ENSICA. [S. l.]: Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace, Novembro 2015.

BRAGA, Ana Paola Villalva. **Análise de ligas de alumínio aeronáuticas conformadas por jateamento com granalhas - Caracterização e previsão de deformação**. Orientador: Prof. Dr. Fernando José Gomes Landgraf. 2011. 269 p. Trabalho de conclusão de curso (Mestrado em Engenharia Metalúrgica e de Materiais) - Universidade de São Paulo, [S. l.], 2011.

CATIA. P3 V5R21. [S. l.]: Dassault Systèmes, 2011. Disponível em: <https://www.3ds.com/products-services/catia/?wockw=CATIA>. Acesso em: 26 nov. 2019.

HIBBELER, R.C. **Resistência dos Materiais**. 5ª.ed. São Paulo: Editora Pearson, 2004. 666p.

HYPERMESH. 13.0.110. [S. l.]: Altair™, 2014. Disponível em: <https://www.altair.com/hypermesh/>. Acesso em: 26 nov. 2019.

MEGSON, T.H.G. **Aircraft Structures for Engineering Students**. 5th.ed. UK: Butterworth-Heinemman, 2013. 804p.

NX Nastran. V.11.0.1. [S. l.]: MacNeal-Schwendler Corporation (MSC), 2016. Disponível em: <https://www.mscsoftware.com/product/msc-nastran>. Acesso em: 26 nov. 2019.

RAIANO, Michele. Linear Buckling Analysis: How to perform a linear Buckling in Nastran. [S. l.], 1 ago. 2013. Disponível em: <https://www.aerospacengineering.net/linear-buckling-analysis/>. Acesso em: 6 jan. 2020.

STEPHAN, Pierre; LABELLE, Didier. Réflexions sur l'utilisation de calcul de structures. **Techno méca**: Technologie, Morlaàs, ano 2007, p. 32-47, 1 maio 2007.

TOLEDO, Elson Magalhães; BASTOS, Flávia de Souza; CURY, Alexandre Abrahão. **Apostila de Resistência dos Materiais II**. [S. l.]: Universidade Federal de Juiz de Fora, 2017. 135 p.

VERA, Rômulo Vinícius. **Estruturas aeronáuticas de interior em compósito natural: fabricação, análise estrutural e de inflamabilidade**. 2012. 118 p. Trabalho de conclusão de curso (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, [S. l.], 2012.

WEIL BRENNER, Martin. **Conception préliminaire et optimisation multidisciplinaire d'avion à fuselage intégré**. 2012. 111 p. Trabalho de conclusão de curso (Mestrado em Ciências Aplicadas) - Université de Montréal, Département de génie mécanique école polytechnique de Montréal, 2012.