
Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática

Elis Coimbra de Moura

Espaços e teoremas clássicos de Análise Funcional

Uberlândia - MG

2018

Elis Coimbra de Moura

Espaços e Teoremas Clássicos de Análise Funcional

Monografia apresentada a Faculdade de Matemática, UFU, como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Matemática, sob a orientação da Profa. Dra. Elisa Regina dos Santos.

Aprovada em 18/12/2018

BANCA EXAMINADORA

Elisa Regina dos Santos

Profa. Dra. Elisa Regina dos Santos (Orientadora)

V. Fávoro

Prof. Dr. Vinícius Vieira Fávaro

Laís Bássame Rodrigues

Profa. Dra. Laís Bássame Rodrigues

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por ter guiado e cuidado de mim durante toda essa jornada e por ter me dado forças nos momentos de dificuldade.

Agradeço aos meus pais Rosalvo e Waldirene todo o carinho, amor, zelo e por acreditarem em mim. Por serem o maior símbolo de amor e companheirismo, me ensinarem todos os meus valores, por serem meu maior suporte e inspiração durante toda a minha graduação e por nunca desistirem de mim.

Agradeço minha irmã Luana por sempre estar comigo, por ser a força necessária que precisava neste último semestre da graduação, por toda paciência comigo, por todas as brincadeiras e por ser minha melhor amiga.

Agradeço meu namorado Matheus Manoel por todo amor. Sem dúvidas, conhecê-lo foi a melhor coisa da minha graduação. Ele segurou minhas mãos quando estava ansiosa, me incentivou, me influenciou, limpou minhas lágrimas e cuidou de mim. Obrigada por todas as risadas, todo o companheirismo e toda a felicidade que me proporciona estar ao seu lado.

Agradeço a minha orientadora Elisa Regina a paciência e dedicação durante os últimos 3 anos de orientação. Ela foi minha professora inspiração de toda minha graduação. Obrigada por todas as conversas durante os seminários. Por ter se tornado muito mais que uma orientadora pra mim, mas sim uma amiga.

Agradeço a todos os meus amigos Japa, Gabriel Eurípedes, Aline, Gabriel Santos, Brendha, Carol, Gisele, João Paulo, Jeniffer, Léo, Gabi, Luísa e Jessiene, os quais se tornaram amigos para toda a vida. Obrigado por todos os cafés, todos os conselhos mais confusos, por nossos momentos de tristeza e alegria compartilhados, todas as risadas e todas as brincadeiras.

Agradeço ao Grupo PET Matemática por todo aprendizado que me foi proporcionado ao ter participado deste grupo durante 3 anos e meio. Por todas as pessoas que fizeram parte deste programa e contribuíram de alguma forma, tanto pra meu crescimento acadêmico como também para meu crescimento pessoal.

Agradeço aos professores Vinícius Vieira Fávaro e Laís Bássame Rodrigues por aceitarem o convite

de participarem da minha banca e por todas as sugestões feitas no trabalho.

Aos meus pais, minha irmã Luana e meu namorado Matheus

Resumo

Neste trabalho apresentaremos espaços normados clássicos estudados em Análise Funcional, incluindo espaços de sequências, espaços de funções contínuas e os espaços L_p e L_∞ . Também apresentaremos e demonstraremos alguns resultados clássicos dessa teoria, a saber: o Teorema de Banach-Steinhaus, o Teorema da Aplicação Aberta, o Teorema do Gráfico Fechado e, as formas vetoriais e versões geométricas do Teorema de Hahn-Banach.

Palavras-Chave: Espaços Normados, Espaços de Banach, Operadores Lineares Contínuos

Abstract

In this work we will present some classical normed spaces studied in Functional Analysis, including spaces of sequences, spaces of continuous functions and the spaces L_p and L_∞ . We will also present and demonstrate some classic results of this theory, namely: the Banach-Steinhaus Theorem, the Open Mapping Theorem, the Closed Graph Theorem, and the geometric and analytic versions of the Hahn-Banach Theorem.

Key-Words: Normed Spaces, Banach Spaces, Continuous Linear Operators

Sumário

1	Introdução	9
2	Espaços Normados	11
2.1	Definições e primeiros exemplos	11
2.2	Espaços de sequências	18
2.3	Os espaços $L_p(X, \Sigma, \mu)$	22
2.4	O espaço $L_\infty(X, \Sigma, \mu)$	27
2.5	Conjuntos Compactos em espaços vetoriais normados	29
2.6	Espaços Separáveis	31
3	Operadores Lineares Contínuos	35
3.1	Caracterizações dos operadores lineares contínuos	36
3.2	Exemplos	39
3.3	O Teorema de Banach-Steinhaus	41
3.4	O Teorema da Aplicação Aberta	45
3.5	O Teorema do Gráfico Fechado	48
4	Teoremas de Hahn-Banach	50
4.1	O teorema da extensão de Hahn-Banach	50
4.2	Versões vetoriais do Teorema de Hahn-Banach	55
4.3	Aplicações do Teorema de Hahn-Banach em espaços separáveis	59
4.4	Formas geométricas do Teorema de Hahn-Banach (caso real)	61

Capítulo 1

Introdução

O estudo da Análise Funcional tem como foco principal os espaços vetoriais normados, entre eles os espaços de Banach, e as transformações lineares contínuas entre tais espaços. Pode-se perceber então que a teoria de Análise Funcional tem relação com a teoria de Álgebra Linear. A diferença que temos entre o estudo dessas teorias é que em Análise Funcional preocupa-se com a continuidade das transformações lineares em espaços de dimensão qualquer enquanto a Álgebra Linear não. Isto se deve ao fato de que uma transformação linear definida em um espaço vetorial de dimensão finita, munido de uma norma qualquer, é sempre contínua.

Em 1903, J. Hadamard começou a chamar transformações lineares que assumem valores em um corpo de escalares de *funcionais* e, em 1922, P. Levy publicou um livro onde apareceu pela primeira vez o nome desta teoria chamada *Análise Funcional*.

O conceito de norma surgiu entre 1920 e 1922 em trabalhos publicados pelos matemáticos N. Wiener, E. Helly, Banach e H. Hahn. A definição usada atualmente foi apresentada por Banach em sua tese defendida em 1920 e publicada em 1922. Quando a teoria surgiu, Banach e seus colegas chamaram os espaços vetoriais normados completos de *espaços de tipo B*. Mais tarde, em 1928, M. Fréchet cunhou o termo *espaço de Banach*, que é um dos conceitos básicos da Análise Funcional.

Um dos teoremas principais da Análise Funcional é o Teorema de Banach-Steinhaus, que foi provado em 1927 em um artigo publicado por Banach e Steinhaus. Ambos deram grandes contribuições em Análise Funcional e tiveram papéis centrais na escola polonesa do século XX. Mais tarde em 1932 mais dois teoremas importantes foram provados. Conhecidos hoje como Teorema da Aplicação Aberta e Teorema do Gráfico Fechado tais resultados foram provados por Banach e são considerados o marco fundador da Análise Funcional.

Formas diversas do Teorema de Hahn-Banach foram provadas por Helly em 1912 e por Hahn em 1922. Em 1927 Hahn publicou uma demonstração do teorema para funcionais lineares definidos em

espaços de Banach. Só em 1929 Banach demonstrou o Teorema de Hahn-Banach para funcionais em espaços normados. O caso complexo do Teorema de Hahn-Banach foi demonstrado em 1936 por F. Murray para funcionais lineares definidos no espaço L_p , $p > 1$. O caso mais geral foi mostrado mais tarde em trabalhos publicados por G. A. Soukhomlinov e por H. F. Bohnenblust e A. Sobczyk.

Em 1933 uma primeira versão das *formas geométricas do Teorema de Hahn-Banach* foi mostrada por Mazur. A partir de então resultados similares passaram a ser chamados da mesma maneira.

Capítulo 2

Espaços Normados

Neste capítulo serão apresentadas desde as definições básicas, tais como norma e espaço vetorial normado, seguindo em direção a resultados sobre espaços de Banach. Pelo caminho serão estudados os comportamentos de espaços normados especiais na teoria de Análise Funcional, são eles: os espaços L_p , $p \geq 1$ e os espaços de sequências.

Como todo espaço normado é um espaço métrico, também estudaremos um pouco da topologia em tais espaços, em particular, as propriedades que dizem respeito a compacidade e separabilidade. Essas propriedades são essenciais para o estudo dos operadores lineares contínuos. Neste capítulo utilizamos como referências principais [1] e [5].

2.1 Definições e primeiros exemplos

Definição 2.1.1. *Seja E um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ (onde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Uma função $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada de **norma** se satisfaz as seguintes propriedades:*

1. $\|x\| \geq 0$ para todo $x \in E$ e $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
2. $\|ax\| = |a|\|x\|$ para todo $a \in \mathbb{K}$ e todo $x \in E$.
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para quaisquer $x, y \in E$.

Um espaço vetorial munido de uma norma chama-se **espaço vetorial normado** ou **espaço normado**. Todo espaço normado é um espaço métrico com a métrica dada por $d(x, y) = \|x - y\|$, como podemos verificar abaixo:

1. $d(x, x) = \|x - x\| = 0$.
2. $x \neq y \Rightarrow d(x, y) = \|x - y\| > 0$.

$$3. d(x, y) = \|x - y\| = \|y - x\| = d(y, x).$$

$$4. d(x, z) = \|x - z\| = \|x - y + y - z\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| = d(x, y) + d(y, z).$$

Dizemos que a métrica d é induzida pela norma $\|\cdot\|$. Assim podemos aplicar toda a teoria de espaços métricos aos espaços normados. Em particular, uma sequência em um espaço normado E é convergente para um vetor $x \in E$ se $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$.

Definição 2.1.2. Uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ de elementos de um espaço métrico E é dita de Cauchy, se para todo $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todos $m, n \in \mathbb{N}$ com $m, n > n_0$, temos

$$d(x_m, x_n) < \epsilon$$

Há uma relação entre sequências de Cauchy e sequências convergentes. É possível demonstrar que toda sequência convergente é de Cauchy mas nem toda sequência de Cauchy é convergente. É por este fato que temos a seguinte definição:

Definição 2.1.3. Um espaço métrico E é dito **completo** quando toda sequência de Cauchy de elementos de E é convergente.

Com estas definições podemos definir e demonstrar alguns resultados importantes em Análise Funcional.

Definição 2.1.4. Um espaço vetorial normado é chamado **espaço de Banach** quando for um espaço métrico completo com a métrica induzida pela norma.

Exemplo 2.1.1. Seja X um conjunto não-vazio. Uma função $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ é **limitada** se sua imagem for um subconjunto limitado de $\mathbb{K}$, ou seja, existe $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in X$. O conjunto $B(X)$ de todas as funções limitadas $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ é um espaço vetorial com as operações usuais de funções. E torna-se um espaço de Banach com a norma

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

Vejamos que $\|\cdot\|_{\infty}$ satisfaz as condições para ser norma.

1. $\|f\|_{\infty} = \sup\{|f(x)| : x \in X\} \geq 0$ e $\|f\|_{\infty} = \sup\{|f(x)| : x \in X\} = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0, \forall x \in X$.
2. $\|af\|_{\infty} = \sup\{|af(x)| : x \in X\} = \sup\{|a||f(x)| : x \in X\} = |a| \sup\{|f(x)| : x \in X\} = |a|\|f\|_{\infty}$.
3. $\|f + g\|_{\infty} = \sup\{|f(x) + g(x)| : x \in X\} \leq \sup\{|f(x)| + |g(x)| : x \in X\} \leq \sup\{|f(x)| : x \in X\} + \sup\{|g(x)| : x \in X\} = \|f\|_{\infty} + \|g\|_{\infty}$.

Então, $\|f\|_\infty$ é uma norma em $B(X)$.

Mostremos que $B(X)$ é espaço de Banach, para isto só falta mostrar que este é um espaço completo. Seja $(f_n)_{n=1}^\infty$ uma sequência de Cauchy em $B(X)$. Dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|f_m - f_n\| < \epsilon$, para todo $n, m \geq n_0$. Assim, dado $x \in X$ tem-se

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq \sup\{|f_n(x) - f_m(x)| : x \in X\} < \frac{\epsilon}{2}, \quad \forall m, n \geq n_0.$$

Então $(f_n(x))_{n=1}^\infty$ é de Cauchy em $\mathbb{K}$, para todo $x \in X$, e como $\mathbb{K}$ é completo $(f_n(x))_{n=1}^\infty$ é convergente. Defina $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ por $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$. Vamos mostrar que $f \in B(X)$ e que $f_n \rightarrow f$.

Fazendo $m \rightarrow \infty$ temos

$$\sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in X\} \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon, \quad \forall n \geq n_0. \quad (2.1)$$

Como $(f_n)_{n=1}^\infty$ é de Cauchy, $(f_n)_{n=1}^\infty$ é limitada. Assim existe $M > 0$ tal que $\|f_n\|_\infty \leq M$, para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja, $|f_n(x)| \leq M$, para todo $x \in X$ e para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $f_n \rightarrow f$, dado $\epsilon = 1$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f_n(x) - f(x)| < 1, \quad \forall n \geq n_0, \quad x \in X.$$

Em particular, para n_0 vale que

$$\begin{aligned} |f_{n_0}(x) - f(x)| &< 1, \quad \forall x \in X \\ -|f_{n_0}(x)| + |f(x)| &< 1, \quad \forall x \in X \\ |f(x)| &< 1 + |f_{n_0}(x)| = 1 + M, \quad \forall x \in X. \end{aligned}$$

Assim, mostramos que f é uma função limitada, logo $f \in B(X)$. E voltando em (2.1) segue que $f_n \rightarrow f$. Daí, podemos concluir que $B(X)$ é espaço de Banach.

Proposição 2.1.1. *Sejam E um espaço de Banach e F um subespaço vetorial de E . Então F é um espaço de Banach com a norma induzida por E se, e só se, F é fechado em E .*

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Suponha que F é um espaço de Banach e tome $(x_n)_{n=1}^\infty$ uma sequência em F tal que $x_n \rightarrow x$ em E . Então, $(x_n)_{n=1}^\infty$ é de Cauchy em F e, portanto, convergente em F , pois F é completo por hipótese. Então existe $y \in F$ tal que $x_n \rightarrow y$. Pela unicidade do limite da sequência, temos que $x = y$. Logo, F é fechado.

$(\Leftarrow)$ Suponha F fechado em E e seja $(x_n)_{n=1}^\infty$ uma sequência de Cauchy em F . Então $(x_n)_{n=1}^\infty$ é de Cauchy em E e, portanto, existe $x \in E$ tal que $x_n \rightarrow x$. Como F é fechado segue que $x \in F$. Logo, F é completo. $\square$

Exemplo 2.1.2. Seja $C[a, b]$ o conjunto das funções contínuas de $[a, b]$ em $\mathbb{R}$. $C[a, b]$ é um subespaço vetorial do espaço de Banach $B[a, b]$ e portanto é um espaço normado com a norma

$$\|f\|_{\infty} = \sup\{|f(x)| : x \in [a, b]\} = \max\{|f(x)| : x \in [a, b]\}.$$

Vejamos que $C[a, b]$ é um espaço de Banach pela Proposição 2.1.1, logo basta provar que $C[a, b]$ é subespaço fechado de $B[a, b]$. Para isto observe que se $f_n \subseteq C[a, b]$ e $f_n \rightarrow f$ em $B[a, b]$. Segue de ([2], Teorema 9.2) que f é contínua por ser limite uniforme de funções contínuas, ou seja, $f \in C[a, b]$.

Exemplo 2.1.3. Definimos o espaço das funções continuamente diferenciáveis por

$$C^1[a, b] := \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ é diferenciável em } [a, b] \text{ e } f' \in C[a, b]\}.$$

De forma usual, nos extremos consideraremos os limites laterais correspondentes. Podemos observar que $C^1[a, b]$ é subespaço vetorial de $C[a, b]$. Entretanto, veremos mais adiante que $C^1[a, b]$ não é fechado em $C[a, b]$ e portanto não é completo na norma $\|\cdot\|_{\infty}$, pela Proposição 2.1.1. Consideremos outra norma neste espaço

$$\|f\|_{C^1} = \|f\|_{\infty} + \|f'\|_{\infty}.$$

Vejamos que $\|\cdot\|_{C^1}$ satisfaz as condições para ser norma.

$$1. \|f\|_{C^1} = \|f\|_{\infty} + \|f'\|_{\infty} \geq 0$$

e

$$\|f\|_{C^1} = \|f\|_{\infty} + \|f'\|_{\infty} = 0 \Leftrightarrow \|f\|_{\infty} = 0 \text{ e } \|f'\|_{\infty} = 0 \Leftrightarrow f = 0.$$

$$2. \|af\|_{C^1} = \|af\|_{\infty} + \|af'\|_{\infty} = |a|\|f\|_{\infty} + |a|\|f'\|_{\infty} = |a|(\|f\|_{\infty} + \|f'\|_{\infty}) = |a|\|f\|_{C^1}.$$

$$3. \|f + g\|_{C^1} = \|f + g\|_{\infty} + \|(f + g)'\|_{\infty} \leq \|f\|_{\infty} + \|g\|_{\infty} + \|f'\|_{\infty} + \|g'\|_{\infty} = \|f\|_{C^1} + \|g\|_{C^1}.$$

Assim, $C^1[a, b]$ é um espaço normado com a norma $\|\cdot\|_{C^1}$.

Provemos que $(C^1[a, b], \|\cdot\|_{C^1})$ é um espaço completo. Dada uma sequência de Cauchy $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ em $(C^1[a, b], \|\cdot\|_{C^1})$, como $\|f\|_{\infty} \leq \|f\|_{C^1}$ e $\|f'\|_{\infty} \leq \|f\|_{C^1}$, segue que as sequências $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ e $(f'_n)_{n=1}^{\infty}$ são sequências de Cauchy em $C[a, b]$. Do exemplo anterior sabemos que $C[a, b]$ é completo, logo existem $f, g \in C[a, b]$ tais que $f_n \rightarrow f$ e $f'_n \rightarrow g$ uniformemente. Por outro lado, pelo Teorema Fundamental do Cálculo podemos escrever

$$f_n(x) - f_n(a) = \int_a^x (f'_n)'(t)dt,$$

para todos $x \in [a, b]$ e $n \in \mathbb{N}$. Tomando o limite quando $n \rightarrow \infty$, concluímos que $f \in C^1[a, b]$ e que $f' = g$. Segue que $f_n \rightarrow f$ em $C^1[a, b]$. Assim, podemos concluir que $C^1[a, b]$ é completo e portanto espaço de Banach.

Podemos definir o espaço das funções duas vezes continuamente diferenciáveis por

$$C^2[a, b] = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ é diferenciável em } [a, b] \text{ e } f' \in C^1[a, b]\}.$$

De forma análoga, $C^2[a, b]$ se torna espaço de Banach com a norma

$$\|f\|_{C^2} = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty + \|f''\|_\infty.$$

Indutivamente, para $k \in \mathbb{N}$, definimos o espaço das funções k vezes continuamente diferenciáveis por

$$C^k = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ é diferenciável em } [a, b] \text{ e } f' \in C^{k-1}[a, b]\}.$$

Temos de maneira análoga que C^k se torna espaço de Banach com a norma

$$\|f\|_{C^k} = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty + \cdots + \|f^{(k)}\|_\infty.$$

Agora o objetivo será demonstrar que todo espaço de dimensão finita é completo, para isto será necessário o lema a seguir.

Lema 2.1.1. *Seja $B = \{x_1, \dots, x_n\}$ um conjunto de vetores linearmente independentes de um espaço normado. Então existe uma constante $c > 0$, que depende do conjunto B , tal que*

$$\|a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n\| \geq c(|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|),$$

para todos $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$.

Demonstração. Vejamos que $\|\cdot\|_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$\|(a_1, \dots, a_n)\|_A = \left\| \sum_{j=1}^n a_j x_j \right\|$$

é uma norma em $\mathbb{R}^n$:

1. $\|(a_1, \dots, a_n)\|_A = \left\| \sum_{j=1}^n a_j x_j \right\| \geq 0$ e $\|(a_1, \dots, a_n)\|_A = 0 \Leftrightarrow \left\| \sum_{j=1}^n a_j x_j \right\| = 0 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^n a_j x_j = 0 \Leftrightarrow a_j = 0, \forall j = 1, \dots, n \Leftrightarrow (a_1, \dots, a_n) = \vec{0}$.
2. $\|a(a_1, \dots, a_n)\|_A = \left\| \sum_{j=1}^n a(a_j x_j) \right\| = \left\| a \sum_{j=1}^n a_j x_j \right\| = |a| \left\| \sum_{j=1}^n a_j x_j \right\| = |a| \cdot \|(a_1, \dots, a_n)\|_A$.
3. $\|(a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n)\|_A = \left\| \sum_{j=1}^n (a_j + b_j) x_j \right\| = \left\| \sum_{j=1}^n a_j x_j + \sum_{j=1}^n b_j x_j \right\| \leq \left\| \sum_{j=1}^n a_j x_j \right\| + \left\| \sum_{j=1}^n b_j x_j \right\| = \|(a_1, \dots, a_n)\|_A + \|(b_1, \dots, b_n)\|_A$.

Como $\|(a_1, \dots, a_n)\|_1 = |a_1| + \dots + |a_n|$ também é norma em $\mathbb{R}^n$, por ([3], Teorema 8)), existe $c > 0$ tal que

$$\|a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n\| \geq c(|a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|).$$

A demonstração é análoga no caso de $\mathbb{C}^n$. □

Teorema 2.1.1. *Todo espaço normado de dimensão finita é um espaço de Banach. Consequentemente, todo subespaço de dimensão finita de um espaço normado E é fechado em E .*

Demonstração. Sejam E um espaço normado de dimensão finita e $B = \{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ uma base normalizada de E . Dada uma sequência de Cauchy $(x_k)_{k=1}^\infty$ em E , para cada $k \in \mathbb{N}$, existem únicos escalares $(a_1^{(k)}, \dots, a_n^{(k)})$ tais que $x_k = a_1^{(k)}\beta_1 + \dots + a_n^{(k)}\beta_n$. Dado $\epsilon > 0$, pode-se tomar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_k - x_m\| < c\epsilon$ para todos $k, m \geq n_0$, onde c é a constante do lema anterior para o conjunto linearmente independente B . Segue que

$$\sum_{j=1}^n |a_j^{(k)} - a_j^{(m)}| \leq \frac{1}{c} \left\| \sum_{j=1}^n (a_j^{(k)} - a_j^{(m)})\beta_j \right\| = \frac{1}{c} \|x_k - x_m\| < \epsilon, \quad \forall k, m \geq n_0.$$

Daí, para cada $j = 1, \dots, n$, a sequência de escalares $(a_j^{(k)})_{k=1}^\infty$ é de Cauchy e, portanto, convergente. Seja $b_j = \lim_{k \rightarrow \infty} a_j^{(k)}$ para $j = 1, \dots, n$. Neste caso, temos

$$\lim_k \sum_{j=1}^n |a_j^{(k)} - b_j| = 0.$$

Definindo $x = b_1\beta_1 + \dots + b_n\beta_n$, temos $x \in E$ e

$$\lim_k \|x_k - x\| = \lim_k \left\| \sum_{j=1}^n (a_j^{(k)} - b_j)\beta_j \right\| \leq \lim_k \sum_{j=1}^n |a_j^{(k)} - b_j| = 0.$$

Assim, podemos concluir que $x_k \rightarrow x$. Portanto, E é espaço de Banach.

Além disso, sendo E um espaço normado qualquer, todo subespaço de dimensão finita de E será Banach pelo que acabamos de provar e, em particular, será fechado em E pela Proposição 2.1.1. □

Vejamos agora que entre espaços normados de dimensão infinita existem espaços de Banach e espaços que não são de Banach.

Exemplo 2.1.4. *Denotaremos por c_0 o conjunto de todas as sequências de escalares convergentes para 0, ou seja,*

$$c_0 = \{(a_k)_{k=1}^\infty : a_k \in \mathbb{K} \text{ para todo } k \in \mathbb{N} \text{ e } a_k \rightarrow 0\}.$$

Podemos ver que c_0 é um espaço vetorial com operações usuais de soma e multiplicação por escalar de sequências. Além disso, c_0 é um espaço normado com a seguinte norma:

$$\|(a_k)_{k=1}^\infty\|_\infty = \sup\{|a_k| : k \in \mathbb{N}\}.$$

De fato, vejamos que $\|\cdot\|_\infty$ satisfaz as condições para ser norma:

$$1. \|(a_k)_{k=1}^\infty\|_\infty = \sup\{|a_k| : k \in \mathbb{N}\} \geq 0 \text{ e}$$

$$\|(a_k)_{k=1}^\infty\|_\infty = \sup\{|a_k| : k \in \mathbb{N}\} = 0 \Leftrightarrow |a_k| = 0, \forall k \in \mathbb{N} \Leftrightarrow a_k = 0, \forall k \in \mathbb{N}.$$

$$2. \|a(a_k)_{k=1}^\infty\|_\infty = \sup\{|aa_k| : k \in \mathbb{N}\} = \sup\{|a||a_k| : k \in \mathbb{N}\} = |a| \sup\{|a_k| : k \in \mathbb{N}\} = |a| \cdot \|(a_k)_{k=1}^\infty\|_\infty.$$

$$3. \|(a_k + b_k)_{k=1}^\infty\|_\infty = \sup\{|a_k + b_k| : k \in \mathbb{N}\} \leq \sup\{|a_k| : k \in \mathbb{N}\} + \sup\{|b_k| : k \in \mathbb{N}\} = \|(a_k)_{k=1}^\infty\|_\infty + \|(b_k)_{k=1}^\infty\|_\infty.$$

Mostremos agora que c_0 é um espaço de Banach. Seja $(x_n)_{n=1}^\infty$ uma sequência de Cauchy em c_0 . Escrevamos $x_n = (a_n^{(k)})_{k=1}^\infty$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Para cada $j \in \mathbb{N}$, vale a desigualdade

$$|a_n^{(j)} - a_m^{(j)}| \leq \sup\{|a_n^{(k)} - a_m^{(k)}| : k \in \mathbb{N}\} = \|x_n - x_m\|_\infty.$$

Assim a sequência $(a_n^{(j)})_{n=1}^\infty$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{K}$. Logo $(a_n^{(j)})_{n=1}^\infty$ é convergente. Quando $n \rightarrow \infty$ temos $a_n^{(j)} \rightarrow a_j$ para cada $j \in \mathbb{N}$. Chamando $x = (a_j)_{j=1}^\infty$, vamos checar que $x \in c_0$ e que $x_n \rightarrow x$.

Primeiramente mostremos que $x \in c_0$. Dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned} m, n \geq n_0 &\Rightarrow \|x_m - x_n\|_\infty < \epsilon \\ &\Rightarrow \sup\{|a_n^{(k)} - a_m^{(k)}| : \text{para todo } k \in \mathbb{N}\} < \epsilon \\ &\Rightarrow |a_n^{(k)} - a_m^{(k)}| < \epsilon \end{aligned}$$

Fazendo $m \rightarrow \infty$ temos $|a_{n_0} - a_j| < \epsilon$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Daí, $|a_j| < \epsilon + |a_{n_0}^{(j)}|$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Agora $x_{n_0} = (a_{n_0}^{(j)}) \in c_0$. Então existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $j \geq j_0$ então $|a_{n_0}^{(j)}| < \epsilon$, o que implica $|a_j| < \epsilon + |a_{n_0}^{(j)}| < 2\epsilon$. Logo, $a_j \rightarrow 0$, ou seja, $x \in c_0$.

Mostremos que $x_n \rightarrow x$. Dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n \geq n_0 \Rightarrow \|x_m - x_n\|_\infty < \epsilon.$$

Daí, segue que

$$m, n \geq n_0 \Rightarrow \|x_m - x_n\|_\infty = \sup\{|a_n^{(k)} - a_m^{(k)}| : k \in \mathbb{N}\} < \epsilon.$$

Fazendo $m \rightarrow \infty$ temos

$$\|x_n - x\|_\infty = \sup\{|a_n^{(k)} - a_k| : k \in \mathbb{N}\} < \epsilon, \forall m, n \geq n_0.$$

Portanto, $x_n \rightarrow x$.

Portanto, c_0 é espaço de Banach.

Exemplo 2.1.5. Denotemos agora por c_{00} o subespaço de c_0 formado pelas seqüências eventualmente nulas, ou seja,

$$c_{00} = \{(a_k) \in c_0 : \text{existe } k_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } a_k = 0 \text{ para todo } k > k_0\}.$$

Considere os vetores $x_1 = (1, 0, 0, \dots)$, $x_2 = (1, \frac{1}{2}, 0, \dots)$, $\dots$, $x_n = (1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, 0, \dots)$, $\dots$. Temos então que (x_n) é seqüência em c_{00} . Tomando $x = (\frac{1}{k})_{k=1}^\infty \in c_0$, segue que $\|x_n - x\|_\infty = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$, ou seja, $x_n \rightarrow x$ em c_0 . Como $x \notin c_{00}$, resulta que c_{00} não é fechado. Da Proposição 2.1.1, c_{00} é um espaço normado incompleto, portanto não é espaço de Banach.

2.2 Espaços de seqüências

Para cada número real $p \geq 1$, definimos

$$\ell_p = \{(a_j)_{j=1}^\infty : a_j \in \mathbb{K} \text{ para todo } j \in \mathbb{N} \text{ e } \sum_{j=1}^\infty |a_j|^p < \infty\}.$$

Consideremos em ℓ_p a seguinte norma

$$\|(a_j)_{j=1}^\infty\|_p = \left(\sum_{j=1}^\infty |a_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Vamos mostrar que ℓ_p é um espaço normado e espaço de Banach com a norma anterior, para isto alguns resultados são necessários.

Proposição 2.2.1. (Desigualdade de Hölder para seqüências) Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $p, q > 1$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então

$$\sum_{j=1}^n |a_j b_j| \leq \left(\sum_{j=1}^n |a_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{j=1}^n |b_j|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

para quaisquer $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$.

Demonstração. Primeiramente demonstremos que a desigualdade abaixo é válida para quaisquer a e b positivos:

$$a^{\frac{1}{p}} \cdot b^{\frac{1}{q}} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}. \quad (2.2)$$

Para isso, consideremos para cada $0 < \alpha < 1$, a função $f = f_\alpha : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(t) = t^\alpha - \alpha t$. Note que f tem máximo em $t = 1$ e portanto $t^\alpha \leq \alpha t + (1 - \alpha)$ para todo $t > 0$. Fazendo $t = \frac{a}{b}$ e $\alpha = \frac{1}{p}$ obtém-se (2.2). De fato,

$$\left(\frac{a}{b} \right)^\alpha \leq \alpha \left(\frac{a}{b} \right) + (1 - \alpha) \Rightarrow a^\alpha \cdot b^{1-\alpha} \leq a\alpha + b(1 - \alpha).$$

Note que $1 - \alpha = \frac{1}{q}$. Daí temos que

$$a^{\frac{1}{p}} \cdot b^{\frac{1}{q}} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}.$$

Observe que para $a = 0$ ou $b = 0$, (2.2) é válida.

Tomemos a, b da seguinte forma

$$a = \frac{|a_j|^p}{\sum_{j=1}^n |a_j|^p} \text{ e } b = \frac{|b_j|^q}{\sum_{j=1}^n |b_j|^q}.$$

Substituindo a e b em (2.4) obtemos

$$\begin{aligned} & \left(\frac{|a_j|^p}{\sum_{j=1}^n |a_j|^p} \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\frac{|b_j|^q}{\sum_{j=1}^n |b_j|^q} \right)^{\frac{1}{q}} \leq \frac{1}{p} \left(\frac{|a_j|^p}{\sum_{j=1}^n |a_j|^p} \right) + \frac{1}{q} \left(\frac{|b_j|^q}{\sum_{j=1}^n |b_j|^q} \right) \\ \Rightarrow & \frac{|a_j|}{\left(\sum_{j=1}^n |a_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}} \cdot \frac{|b_j|}{\left(\sum_{j=1}^n |b_j|^q \right)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{1}{p} \left(\frac{|a_j|^p}{\sum_{j=1}^n |a_j|^p} \right) + \frac{1}{q} \left(\frac{|b_j|^q}{\sum_{j=1}^n |b_j|^q} \right) \\ \Rightarrow & \frac{|a_j b_j|}{\left(\sum_{j=1}^n |a_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^n |b_j|^q \right)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{1}{p} \left(\frac{|a_j|^p}{\sum_{j=1}^n |a_j|^p} \right) + \frac{1}{q} \left(\frac{|b_j|^q}{\sum_{j=1}^n |b_j|^q} \right), \quad \forall j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Somando as desigualdades para cada j , teremos

$$\frac{\sum_{j=1}^n |a_j b_j|}{\left(\sum_{j=1}^n |a_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^n |b_j|^q \right)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{1}{p} \left(\frac{\sum_{j=1}^n |a_j|^p}{\sum_{j=1}^n |a_j|^p} \right) + \frac{1}{q} \left(\frac{\sum_{j=1}^n |b_j|^q}{\sum_{j=1}^n |b_j|^q} \right) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Assim, podemos concluir que

$$\sum_{j=1}^n |a_j b_j| \leq \left(\sum_{j=1}^n |a_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^n |b_j|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

□

Proposição 2.2.2. (Desigualdade de Minkowski para sequências) Para $p \geq 1$, temos

$$\left(\sum_{j=1}^n |a_j + b_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j=1}^n |a_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^n |b_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

para quaisquer $n \in \mathbb{N}$ e escalares $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$.

Demonstração. Se $p = 1$, a desigualdade segue da desigualdade triangular do valor absoluto. Suponha $p > 1$. Temos que

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n |a_j + b_j|^p &= \sum_{j=1}^n |a_j + b_j|^{p-1} \cdot |a_j + b_j| \\ &\leq \sum_{j=1}^n |a_j| |a_j + b_j|^{p-1} + \sum_{j=1}^n |b_j| |a_j + b_j|^{p-1}. \end{aligned}$$

Se $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, então $(p-1)q = p$, e segue da Desigualdade de Hölder que

$$\sum_{j=1}^n |a_j| \cdot |b_j + a_j|^{p-1} \leq \left(\sum_{j=1}^n |a_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{j=1}^n |a_j + b_j|^p \right)^{\frac{1}{q}}$$

e

$$\sum_{j=1}^n |b_j| \cdot |b_j + a_j|^{p-1} \leq \left(\sum_{j=1}^n |b_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{j=1}^n |a_j + b_j|^p \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Logo, teremos

$$\sum_{j=1}^n |a_j + b_j|^p \leq \left(\sum_{j=1}^n |a_j + b_j|^p \right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left(\left(\sum_{j=1}^n |a_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^n |b_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right).$$

Como $1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{p}$, obtemos então

$$\left(\sum_{j=1}^n |a_j + b_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j=1}^n |a_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^n |b_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

□

Verifiquemos que ℓ_p é espaço normado para $1 \leq p < \infty$. Observe que ℓ_p é um espaço vetorial com as operações usuais de soma de seqüências e multiplicação por escalar. Mostremos que $\|\cdot\|_p$ é norma em ℓ_p . Sejam $x = (x_j)_{j=1}^\infty$ e $y = (y_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p$.

1. $\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^\infty |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \geq 0$ e também

$$\|x\|_p = 0 \Leftrightarrow \left(\sum_{j=1}^\infty |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} = 0 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^\infty |x_j|^p = 0 \Leftrightarrow |x_j|^p = 0, \forall j \in \mathbb{N} \Leftrightarrow x_j = 0, \forall j \in \mathbb{N}.$$

2. Seja $a \in \mathbb{K}$,

$$\|ax\|_p = \left(\sum_{j=1}^\infty |ax_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{j=1}^\infty |a|^p |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} = |a| \left(\sum_{j=1}^\infty |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} = |a| \|x\|_p.$$

3. Temos pela desigualdade de Minkowski para seqüências que

$$\|x + y\|_p = \left(\sum_{j=1}^\infty |x_j + y_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j=1}^\infty |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^\infty |y_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|x\|_p + \|y\|_p.$$

Logo, ℓ_p é um espaço normado com a norma $\|\cdot\|_p$.

Mostremos agora que ℓ_p é espaço de Banach. Seja $(x_n)_{n=1}^\infty$ uma seqüência de Cauchy em ℓ_p . Seja $x_n = (x_j^{(n)})_{j=1}^\infty$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Então, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|x_n - x_m\|_p = \left(\sum_{j=1}^\infty |x_j^{(n)} - x_j^{(m)}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \epsilon, \quad \forall m, n \geq n_0. \quad (2.3)$$

Em particular,

$$|x_j^{(n)} - x_j^{(m)}| \leq \|x_m - x_n\|_p \leq \epsilon, \quad \forall m, n \geq n_0 \text{ e } \forall j \in \mathbb{N}.$$

Logo, $(x_j^{(n)})_{n=1}^\infty$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{K}$ para cada $j \in \mathbb{N}$. Seja $a_j = \lim_{n \rightarrow \infty} x_j^{(n)}$ para cada $j \in \mathbb{N}$, e seja $x = (a_j)_{j=1}^\infty$. Provemos que $x \in \ell_p$ e que $(x_n)_{n=1}^\infty$ converge a x .

Segue de (2.3) que

$$\left(\sum_{j=1}^k |x_j^{(n)} - x_j^{(m)}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \epsilon, \quad \forall m, n \geq n_0 \text{ e } k \in \mathbb{N}.$$

Fazendo $m \rightarrow \infty$, obtemos

$$\left(\sum_{j=1}^k |x_j^{(n)} - a_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \epsilon, \quad \forall n \geq n_0 \text{ e } k \in \mathbb{N}.$$

Logo,

$$\left(\sum_{j=1}^\infty |x_j^{(n)} - a_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \epsilon, \quad \forall n \geq n_0.$$

Assim, $x_n - x \in \ell_p$ e $\|x_n - x\|_p \leq \epsilon$, para todo $n \geq n_0$. Daí, $x = (x - x_n) + x_n \in \ell_p$ e $\|x_n - x\|_p \rightarrow 0$.

Portanto, podemos afirmar que ℓ_p é espaço de Banach.

Para $p = \infty$, definimos ℓ_∞ como o espaço das sequências limitadas de escalares, ou seja,

$$\ell_\infty = \{(a_j)_{j=1}^\infty : a_j \in \mathbb{K}, \quad \forall j \in \mathbb{N} \text{ e } \sup_{j \in \mathbb{N}} |a_j| < \infty\}.$$

Podemos observar que ℓ_∞ é espaço vetorial com as operações usuais de soma de sequências e multiplicação por escalar.

Mostremos que $\|(a_j)_{j=1}^\infty\|_\infty = \sup\{|a_j| : j \in \mathbb{N}\}$ é uma norma em ℓ_∞ .

$$1. \|x\|_\infty = \sup\{|a_j| : j \in \mathbb{N}\} \geq 0 \text{ e}$$

$$\|x\|_\infty = \sup\{|a_j| : j \in \mathbb{N}\} = 0 \Leftrightarrow |a_j| = 0, \forall j \in \mathbb{N} \Leftrightarrow a_j = 0, \forall j \in \mathbb{N}.$$

$$2. \|ax\|_\infty = \sup\{|aa_j| : j \in \mathbb{N}\} = \sup\{|a||a_j| : j \in \mathbb{N}\} = |a| \sup\{|a_j| : j \in \mathbb{N}\} = |a| \|x\|_\infty.$$

$$3. \|x + y\|_\infty = \sup\{|a_j + b_j| : j \in \mathbb{N}\} \leq \sup\{|a_j| : j \in \mathbb{N}\} + \sup\{|b_j| : j \in \mathbb{N}\} = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty.$$

Concluimos que ℓ_∞ é espaço normado com a norma $\|\cdot\|_\infty$.

Mostremos agora que ℓ_∞ é espaço de Banach. Seja $(x_n)_{n=1}^\infty$ uma sequência de Cauchy em ℓ_∞ .

Escrevamos $(x_n) = (a_j^{(n)})_{j=1}^\infty$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|x_n - x_m\|_\infty = \|(a_j^{(n)})_{j=1}^\infty - (a_j^{(m)})_{j=1}^\infty\|_\infty = \|(a_j^{(n)} - a_j^{(m)})_{j=1}^\infty\|_\infty = \sup\{|a_j^{(n)} - a_j^{(m)}| : j \in \mathbb{N}\} < \epsilon, \quad \forall m, n \geq n_0.$$

Observe que $|a_j^{(n)} - a_j^{(m)}| \leq \sup\{|a_j^{(n)} - a_j^{(m)}| : j \in \mathbb{N}\} < \epsilon$, para todo $m, n \geq n_0$. Daí, $(a_j^{(n)})_{n=1}^\infty$ é sequência de Cauchy em $\mathbb{K}$. Como $\mathbb{K}$ é completo segue que $(a_j^{(n)})_{n=1}^\infty$ converge em $\mathbb{K}$. Digamos $\lim_{n \rightarrow \infty} a_j^{(n)} = a_j$ para todo $j \in \mathbb{N}$ e seja $x = (a_j)_{j=1}^\infty$. Provemos que $x \in \ell_\infty$ e $x_n \rightarrow x$. Sabemos que

$$\sup\{|a_j^{(n)} - a_j^{(m)}| : j \in \mathbb{N}\} < \epsilon, \quad \forall m, n \geq n_0.$$

Fazendo $m \rightarrow \infty$ temos

$$\sup\{|a_j^{(n)} - a_j| : j \in \mathbb{N}\} \leq \epsilon, \quad \forall n \geq n_0.$$

Logo, $x_n - x = (a_n^{(j)} - a_j) \in \ell_\infty$ e $\|x_n - x\|_\infty \leq \epsilon$ para todo $n \geq n_0$. Segue que $x = (a_j) = (a_j^{(n)}) - (a_j^{(n)} - a_j) \in \ell_\infty$. Assim $x = (a_j)_{j=1}^\infty \in \ell_\infty$ e $\|x_n - x\|_\infty \rightarrow 0$. Daí, podemos concluir que ℓ_∞ é espaço de Banach.

O fato de toda sequência convergente ser limitada implica que c_0 é subespaço de ℓ_∞ e por c_0 ser Banach, c_0 é subespaço fechado de ℓ_∞ pela Proposição 2.1.1.

2.3 Os espaços $L_p(X, \Sigma, \mu)$

Nesta seção iremos utilizar alguns conceitos básicos de medida e integração. Para um estudo detalhado de tais conceitos indicamos a referência [2].

Sejam (X, Σ, μ) um espaço de medida e $1 \leq p < \infty$. O conjunto de todas as funções mensuráveis de X em $\mathbb{K}$ tais que

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

será denotado por $\mathcal{L}_p(X, \Sigma, \mu)$.

Teorema 2.3.1. (*Desigualdade de Hölder para integrais*) *Sejam $p, q > 1$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ e (X, Σ, μ) um espaço de medida. Se $f \in \mathcal{L}_p(X, \Sigma, \mu)$ e $g \in \mathcal{L}_q(X, \Sigma, \mu)$, então $fg \in \mathcal{L}_1(X, \Sigma, \mu)$ e*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q.$$

Demonstração. Se $\|f\|_p = 0$ ou $\|g\|_q = 0$, é fácil verificar a desigualdade. Suponhamos então $\|f\|_p \neq 0 \neq \|g\|_q$. Considere a desigualdade provada na Proposição 2.2.1

$$a^{\frac{1}{p}} \cdot b^{\frac{1}{q}} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}. \quad (2.4)$$

Tomando

$$a = \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} \text{ e } b = \frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q}$$

e substituindo na desigualdade (2.2), temos:

$$\begin{aligned}
a^{\frac{1}{p}} \cdot b^{\frac{1}{q}} &\leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q} \Rightarrow \left(\frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q} \right)^{\frac{1}{q}} \leq \frac{1}{p} \left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \right)^p + \frac{1}{q} \left(\frac{|g(x)|}{\|g\|_q} \right)^q \\
&\Rightarrow \frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \cdot \frac{|g(x)|}{\|g\|_q} \leq \frac{1}{p} \left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \right)^p + \frac{1}{q} \left(\frac{|g(x)|}{\|g\|_q} \right)^q \\
&\Rightarrow \frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_p \|g\|_q} \leq \frac{1}{p} \left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \right)^p + \frac{1}{q} \left(\frac{|g(x)|}{\|g\|_q} \right)^q.
\end{aligned}$$

Aplicando a integral nos membros da desigualdade anterior, temos

$$\int_X \frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_p \|g\|_q} d\mu = \frac{1}{\|f\|_p \|g\|_q} \int_X |f(x)g(x)| d\mu = \frac{\|fg\|_1}{\|f\|_p \|g\|_q}, \quad (2.5)$$

$$\int_X \frac{1}{p} \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} d\mu = \frac{1}{p \|f\|_p^p} \int_X |f(x)|^p d\mu = \frac{1}{p \|f\|_p^p} \cdot \|f\|_p^p = \frac{1}{p}, \quad (2.6)$$

$$\int_X \frac{1}{q} \frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q} d\mu = \frac{1}{q \|g\|_q^q} \int_X |g(x)|^q d\mu = \frac{1}{q \|g\|_q^q} \cdot \|g\|_q^q = \frac{1}{q}. \quad (2.7)$$

Podemos concluir de (2.5), (2.6) e (2.7) que

$$\frac{\|fg\|_1}{\|f\|_p \|g\|_q} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Logo, $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$. □

Teorema 2.3.2. (*Desigualdade de Minkowski para integrais*) Sejam $1 \leq p < \infty$ e (X, Σ, μ) um espaço de medida. Se $f, g \in \mathcal{L}_p(X, \Sigma, \mu)$, então $f + g \in \mathcal{L}_p(X, \Sigma, \mu)$ e

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p. \quad (2.8)$$

Demonstração. Se $p = 1$ ou $\|f + g\|_p = 0$, observemos que a desigualdade (2.8) é válida. Vamos supor $\|f + g\|_p \neq 0$ e $p > 1$. Para todo $x \in X$, temos

$$\begin{aligned}
|f(x) + g(x)|^p &\leq (|f(x)| + |g(x)|)^p \\
&\leq (\max\{|f(x)|, |g(x)|\} + \max\{|f(x)|, |g(x)|\})^p \\
&\leq (2 \max\{|f(x)|, |g(x)|\})^p \\
&\leq 2^p (|f(x)|^p + |g(x)|^p).
\end{aligned}$$

Aplicando a integral na desigualdade anterior, teremos

$$\int_X |f(x) + g(x)|^p d\mu \leq \int_X 2^p (|f(x)|^p + |g(x)|^p) d\mu = 2^p \int_X |f(x)|^p d\mu + 2^p \int_X |g(x)|^p d\mu < \infty.$$

Assim,

$$\int_X |f(x) + g(x)|^p d\mu < \infty \Rightarrow \left(\int_X |f(x)| + |g(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \Rightarrow f + g \in \mathcal{L}_p(X, \Sigma, \mu).$$

Agora vamos provar que a desigualdade (2.8) é válida. Veja que

$$\begin{aligned} |f(x) + g(x)|^p &= |f(x) + g(x)| \cdot |f(x) + g(x)|^{p-1} \\ &\leq |f(x) + g(x)|^{p-1} \cdot (|f(x)| + |g(x)|) \\ &= |f(x)| \cdot |f(x) + g(x)|^{p-1} + |g(x)| \cdot |f(x) + g(x)|^{p-1}, \text{ para todo } x \in X, \end{aligned}$$

ou seja,

$$|f(x) + g(x)|^p \leq |f(x)| \cdot |f(x) + g(x)|^{p-1} + |g(x)| \cdot |f(x) + g(x)|^{p-1}, \text{ para todo } x \in X. \quad (2.9)$$

Tomando $q > 1$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ temos que $(p-1)q = p$ e, portanto, $|f + g|^{p-1} = |f + g|^{\frac{p}{q}} \in \mathcal{L}_q(X, \Sigma, \mu)$, pois $\int_X (|f + g|^{\frac{p}{q}})^q d\mu = \int_X |f + g|^p d\mu < \infty$. Da Desigualdade de Hölder, temos:

$$\int_X |f| \cdot |f + g|^{p-1} d\mu \leq \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_X |f + g|^{(p-1)q} d\mu \right)^{\frac{1}{q}}, \quad (2.10)$$

$$\int_X |g| \cdot |f + g|^{p-1} d\mu \leq \left(\int_X |g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_X |f + g|^{(p-1)q} d\mu \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (2.11)$$

Somando as equações (2.10) e (2.11) e também utilizando (2.9) teremos

$$\int_X |f + g|^p d\mu \leq \left(\int_X |f + g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left[\left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X |g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \right].$$

Dividindo ambos os membros da desigualdade anterior por $(\int_X |f + g|^p d\mu)^{\frac{1}{q}}$, temos

$$\frac{\int_X |f + g|^p d\mu}{(\int_X |f + g|^p d\mu)^{\frac{1}{q}}} \leq \left[\left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X |g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \right].$$

Logo, obtemos

$$\left(\int_X |f + g|^p d\mu \right)^{1 - \frac{1}{q}} \leq \left[\left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X |g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \right],$$

o que implica $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$. □

Note que $\|\cdot\|_p$ não é em geral uma norma em $\mathcal{L}_p(X, \Sigma, \mu)$, pois tem-se o caso em que $\|f\|_p = 0$ para f não identicamente nula. De modo geral, se (X, Σ, μ) é um espaço de medida, introduzimos então uma relação de equivalência dizendo que duas funções $f, g : X \rightarrow \mathbb{K}$ são equivalentes se $f = g$ μ -quase sempre, isto é, se existe um conjunto $A \in \Sigma$ tal que $\mu(A) = 0$ e $f(x) = g(x)$ para todo $x \notin A$. Denotando a classe de equivalência de uma função f por $[f]$, no conjunto quociente

$$L_p(X, \Sigma, \mu) := \{[f] : f \in \mathcal{L}_p(X, \Sigma, \mu)\},$$

as operações $[f + g] = [f] + [g]$ e $[cf] = c[f]$ estão bem definidas e tornam $L_p(X, \Sigma, \mu)$ um espaço vetorial. Além disso, definindo

$$|[f]|_p = \|f\|_p,$$

corrigimos assim o que faltava para $|\cdot|_p$ ser norma. Mostremos agora que $|\cdot|_p$ é de fato uma norma $L_p(X, \Sigma, \mu)$:

1. $|[f]|_p = \|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \geq 0$ e $|[f]|_p = \|f\|_p = 0 \Leftrightarrow \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = 0 \Leftrightarrow \left(\int_X |f|^p d\mu\right) = 0 \Leftrightarrow f = 0, \mu\text{-quase sempre.}$
2. $\|c[f]\|_p = |[cf]|_p = \left(\int_X |cf|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = |c| \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = |c| |[f]|_p.$
3. $\|[f + g]\|_p = \|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p = |[f]|_p + \|g\|_p.$

Logo, $L_p(X, \Sigma, \mu)$ é um espaço normado com a norma $|\cdot|_p$.

Teorema 2.3.3. *Se $1 \leq p < \infty$, então $L_p(X, \Sigma, \mu)$ é um espaço de Banach com a norma*

$$|[f]|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Demonstração. Basta mostrar que $L_p(X, \Sigma, \mu)$ é completo. Seja $([f_n])_{n=1}^\infty$ uma sequência de Cauchy em $L_p(X, \Sigma, \mu)$. Então, dado $\epsilon > 0$, existe $M = M(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int_X |f_n - f_m|^p d\mu = \|f_n - f_m\|_p^p < \epsilon^p, \quad \forall m, n \geq M.$$

Seja $(g_k)_{k=1}^\infty$ uma subsequência de $(f_n)_{n=1}^\infty$ tal que $\|g_{k+1} - g_k\|_p < 2^{-k}$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Considere a função

$$g : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}, \quad g(x) = |g_1(x)| + \sum_{k=1}^\infty |g_{k+1}(x) - g_k(x)|. \quad (2.12)$$

Sabemos que g é mensurável e não negativa. Além disso,

$$|g(x)|^p = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(|g_1(x)| + \sum_{k=1}^n |g_{k+1}(x) - g_k(x)| \right)^p.$$

Pelo Lema de Fatou, temos que

$$\begin{aligned} \int_X |g|^p d\mu &= \int_X \lim_{n \rightarrow \infty} \left(|g_1| + \sum_{k=1}^n |g_{k+1} - g_k| \right)^p d\mu \\ &= \int_X \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(|g_1| + \sum_{k=1}^n |g_{k+1} - g_k| \right)^p d\mu \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X \left(|g_1| + \sum_{k=1}^n |g_{k+1} - g_k| \right)^p d\mu. \end{aligned}$$

Assim, temos que

$$\int_X |g|^p d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X \left(|g_1| + \sum_{k=1}^n |g_{k+1} - g_k| \right)^p d\mu.$$

Elevando ambos os membros a $\frac{1}{p}$, obtemos

$$\begin{aligned} \left(\int_X |g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\int_X \left(|g_1| + \sum_{k=1}^n |g_{k+1} - g_k| \right)^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \left\| |g_1| + \sum_{k=1}^n |g_{k+1} - g_k| \right\|_p \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\|g_1\|_p + \sum_{k=1}^n \|g_{k+1} - g_k\|_p \right) \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|g_1\|_p + \sum_{k=1}^n 2^{-k} = \|g_1\|_p + 1. \end{aligned}$$

Então, definindo $A = \{x \in X : g(x) < \infty\}$, podemos concluir que $\mu(X - A) = 0$. Logo, a série (2.12) converge exceto talvez no conjunto de medida nula $X - A$, isto é, a série converge quase sempre. Segue que a função $g \cdot \chi_A \in \mathcal{L}_p(X, \Sigma, \mu)$, onde χ_A é a função característica de A . Defina então $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ por

$$f(x) = \begin{cases} g_1(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (g_{k+1}(x) - g_k(x)), & \text{se } x \in A, \\ 0, & \text{se } x \notin A. \end{cases}$$

Como $g_k = g_1 + (g_2 - g_1) + (g_3 - g_2) + \cdots + (g_k - g_{k-1})$, temos

$$|g_k(x)| \leq |g_1(x)| + \sum_{j=1}^{k-1} |g_{j+1}(x) - g_j(x)| \leq g(x)$$

para todo $x \in X$ e $g_k(x) \rightarrow f(x)$ para todo $x \in A$, isto é, a sequência $(g_k)_{k=1}^{\infty}$ converge para f μ -quase sempre. Pelo Teorema da Convergência Dominada, segue que $f \in \mathcal{L}_p(X, \Sigma, \mu)$. Como $|f - g_k|^p \leq (|f| + |g_k|)^p \leq (2g)^p \cdot \chi_A \mu$ -quase sempre, e $\lim_{k \rightarrow \infty} |f - g_k|^p = 0$, μ -quase sempre, novamente pelo Teorema da Convergência Dominada, temos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_X |f - g_k|^p d\mu = \int_X 0 d\mu = 0.$$

Concluimos que $g_k \rightarrow f$ em $\mathcal{L}_p(X, \Sigma, \mu)$, e portanto $[g_k] \rightarrow [f]$ em $L_p(X, \Sigma, \mu)$. Assim $[f_n]$ é uma sequência de Cauchy que tem uma subsequência $([g_k])_{k=1}^{\infty}$ que converge para $[f]$. Logo, $[f_n] \rightarrow [f]$ em $L_p(X, \Sigma, \mu)$. $\square$

2.4 O espaço $L_\infty(X, \Sigma, \mu)$

Seja $\mathcal{L}_\infty(X, \Sigma, \mu)$ o conjunto de todas as funções mensuráveis que são limitadas μ -quase sempre, isto é, existem um conjunto $N \in \Sigma$ e um número real k tais que $\mu(N) = 0$ e $|f(x)| \leq k$ para todo $x \notin N$. Se $f \in \mathcal{L}_\infty(X, \Sigma, \mu)$ e $N \in \Sigma$ é um conjunto de medida nula, definimos

$$S_f(N) = \sup\{|f(x)| : x \notin N\} \text{ e } \|f\|_\infty = \inf\{S_f(N) : N \in \Sigma \text{ e } \mu(N) = 0\}.$$

Pode-se observar que podemos ter $\|f\|_\infty = 0$ com f não identicamente nula. Para resolver este problema vamos utilizar as classes de equivalência análogas às definidas na seção anterior e considerar o conjunto $L_\infty(X, \Sigma, \mu)$ de todas as classes de equivalência das funções mensuráveis $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ que são limitadas μ -quase sempre. O conjunto $L_\infty(X, \Sigma, \mu)$ é um espaço vetorial com as operações anteriores. Se $[f] \in L_\infty(X, \Sigma, \mu)$ definimos

$$\|[f]\|_\infty = \|f\|_\infty.$$

Vamos demonstrar que $\|\cdot\|$ está bem definida em $L_\infty(X, \Sigma, \mu)$. Tome $h \in [f]$. Logo, existe $N \in \Sigma$ tal que $f(x) = h(x)$ para todo $x \notin N$ e $\mu(N) = 0$. Assim,

$$S_f(N) = \sup\{|f(x)| : x \notin N\} = \sup\{|h(x)| : x \notin N\} = S_h(N).$$

Segue que

$$\begin{aligned} \|f\|_\infty &= \inf\{S_f(N) : N \in \Sigma \text{ e } \mu(N) = 0\} \\ &= \inf\{S_h(N) : N \in \Sigma \text{ e } \mu(N) = 0\} = \|h\|_\infty. \end{aligned}$$

Portanto, $\|[f]\|_\infty = \|f\|_\infty$ está bem definida.

Agora, vamos demonstrar que $\|\cdot\|_\infty$ é uma norma em $L_\infty(X, \Sigma, \mu)$.

1. Seja $f \in L_\infty(X, \Sigma, \mu)$. Então $S_f(N) = \sup\{|f(x)| : x \notin N\} \geq 0$ para todo $N \in \Sigma$ de medida nula. Logo, $\|f\|_\infty = \inf\{S_f(N) : N \in \Sigma \text{ e } \mu(N) = 0\} \geq 0$. Além disso, temos que

$$S_f(N) = 0 \Leftrightarrow \sup\{|f(x)| : x \notin N\} = 0 \Leftrightarrow f = 0 \text{ para todo } x \notin N.$$

Daí, $\|f\|_\infty = 0 \Leftrightarrow \inf\{S_f(N) : N \in \Sigma \text{ e } \mu(N) = 0\} = 0 \Leftrightarrow \exists N \in \Sigma \text{ tal que } \mu(N) = 0 \text{ e } S_f(N) = 0 \Leftrightarrow f = 0 \text{ } \mu\text{-quase sempre.}$

2. Observe que para $a \in \mathbb{K}$, $S_{af} = \sup\{|af(x)| : x \notin N\} = \sup\{|a||f(x)| : x \notin N\} = |a| \sup\{|f(x)| : x \notin N\} = |a|S_f(N).$

Dai, temos

$$\begin{aligned}
\|af\|_\infty &= \inf\{S_{af}(N) : N \in \Sigma \text{ e } \mu(N) = 0\} \\
&= \inf\{|a|S_f(N) : N \in \Sigma \text{ e } \mu(N) = 0\} \\
&= |a| \inf\{S_f(N) : N \in \Sigma \text{ e } \mu(N) = 0\} \\
&= |a|\|f\|_\infty.
\end{aligned}$$

3. Veja que $S_{f+g}(N) = \sup\{|f(x)+g(x)| : x \notin N\} \leq \sup\{|f(x)|+|g(x)| : x \notin N\} \leq \sup\{|f(x)| : x \notin N\} + \sup\{|g(x)| : x \notin N\} = S_f(N) + S_g(N)$. Observe que se $N_1, N_2 \in \Sigma$ e $\mu(N_1) = \mu(N_2) = 0$ temos $N = N_1 \cup N_2 \in \Sigma$, $\mu(N) = 0$ e

$$S_f(N) + S_g(N) = \sup_{x \notin N} |f(x)| + \sup_{x \notin N} |g(x)| \leq \sup_{x \notin N_1} |f(x)| + \sup_{x \notin N_2} |g(x)| = S_f(N_1) + S_g(N_2).$$

Dai,

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_\infty &= \inf\{S_{f+g}(N) : N \in \Sigma \text{ e } \mu(N) = 0\} \\
&\leq \inf\{S_f(N) + S_g(N) : N \in \Sigma \text{ e } \mu(N) = 0\} \\
&\leq \inf\{S_f(N_1) + S_g(N_2) : N_1, N_2 \in \Sigma \text{ e } \mu(N_1) = \mu(N_2) = 0\} \\
&= \inf\{S_f(N_1) : N_1 \in \Sigma \text{ e } \mu(N_1) = 0\} + \inf\{S_g(N_2) : N_2 \in \Sigma \text{ e } \mu(N_2) = 0\} \\
&= \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.
\end{aligned}$$

Logo, $\|\cdot\|_\infty$ é norma.

Vejamos que se $[f]_\infty \in L_\infty(X, \Sigma, \mu)$, então $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$, μ -quase sempre. Pela definição de $\|f\|_\infty$ existe uma sequência de conjuntos $(N_n)_{n=1}^\infty$ de medida nula tais que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_f(N_n) = \|f\|_\infty \text{ e } |f(x)| \leq S_f(N_n), \quad \forall x \notin N_n. \quad (2.13)$$

Tomando $N = \bigcup_{n=1}^\infty N_n$ resulta que N tem medida nula e $|f(x)| \leq S_f(N_n)$ para todo $x \notin N$. Fazendo $n \rightarrow \infty$, temos $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$.

Teorema 2.4.1. $L_\infty(X, \Sigma, \mu)$ é um espaço de Banach.

Demonstração. Vamos mostrar que $L_\infty(X, \Sigma, \mu)$ é completo. Seja $([f_n])_{n=1}^\infty$ uma sequência de Cauchy em $L_\infty(X, \Sigma, \mu)$. Por (2.13), para cada $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ existe $M_{m,n} \in \Sigma$ com $\mu(M_{m,n}) = 0$ e

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty, \quad \forall x \notin M_{m,n}.$$

Seja $M = \bigcup_{m,n=1}^\infty M_{m,n}$. Então $\mu(M) = 0$ e para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$,

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty, \quad \forall x \notin M. \quad (2.14)$$

Então, para cada $x \notin M$, a sequência $(f_n(x))_{n=1}^\infty$ é de Cauchy em $\mathbb{K}$ e, portanto, convergente. Podemos então definir $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ como

$$f(x) = \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x), & \text{se } x \notin M \\ 0, & \text{se } x \in M. \end{cases}$$

Segue que f é mensurável. Por (2.14) e como $[f_n]_{n=1}^\infty$ é de Cauchy, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sup_{x \notin M} |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon, \quad \forall m, n \geq n_0.$$

Fazendo $m \rightarrow \infty$ temos

$$\sup_{x \notin M} |f_n(x) - f(x)| < \epsilon, \quad \forall n \geq n_0. \quad (2.15)$$

Assim, $(f_n)_{n=1}^\infty$ é uniformemente convergente para f em $X - M$. De (2.15) resulta que $f_n - f \in \mathcal{L}_\infty(X, \Sigma, \mu)$ para n suficientemente grande. Daí, como $f = f_n - (f_n - f)$ segue que $[f] \in L_\infty(X, \Sigma, \mu)$.

Assim, podemos reescrever (2.15) e concluir que

$$\|[f_n] - [f]\|_\infty = \|f_n - f\|_\infty \leq \sup_{x \notin M} |f_n(x) - f(x)| < \epsilon, \quad \forall n \geq n_0.$$

Portanto $([f_n])_{n=1}^\infty$ converge para $[f]$ em $L_\infty(X, \Sigma, \mu)$. □

A ocorrência mais frequente dos $L_p(X, \Sigma, \mu)$ se dá quando $X = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$, Σ é a sigma álgebra dos conjuntos Lebesgue mensuráveis (que contém os borelianos) e μ é a medida de Lebesgue. Neste caso escreve-se $L_p[a, b]$.

2.5 Conjuntos Compactos em espaços vetoriais normados

Definição 2.5.1. Um subconjunto K de um espaço métrico é **compacto**, se toda sequência formada por elementos de K possui subsequência convergente em K .

Proposição 2.5.1. Se E é um espaço vetorial normado de dimensão finita, então os compactos em E são precisamente os conjuntos limitados e fechados.

Demonstração. Conjuntos compactos em espaços métricos são sempre fechados e limitados. Basta então provar que todo conjunto limitado e fechado $K \subseteq E$ é compacto. Suponha que $\dim E = n$ e seja $\{e_1, \dots, e_n\}$ uma base normalizada de E . Como estamos em espaços métricos, basta mostrar que toda sequência em K admite subsequência convergente em K . Seja portanto $(x_m)_{m=1}^\infty$ uma sequência em K . Para cada m existem escalares $a_1^{(m)}, \dots, a_n^{(m)}$ tais que $x_m = \sum_{j=1}^n a_j^{(m)} e_j$. Como K é limitado, existe $L > 0$ tal que $\|x_m\| \leq L$ para todo m . Pelo Lema 2.1.1 existe $c > 0$ tal que

$$L \geq \|x_m\| = \left\| \sum_{j=1}^n a_j^{(m)} e_j \right\| \geq c \left(\sum_{j=1}^n |a_j^{(m)}| \right) = c \|(a_1^{(m)}, \dots, a_n^{(m)})\|_1$$

para todo $m \in \mathbb{N}$. Assim, a sequência $\left((a_1^{(m)}, \dots, a_n^{(m)})\right)_{m=1}^{\infty}$ é limitada em $\mathbb{K}^n$. Pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass esta sequência possui subsequência $\left((a_1^{(m_k)}, \dots, a_n^{(m_k)})\right)_{k=1}^{\infty}$ que converge para um certo $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{K}^n$. De

$$\left\| \sum_{j=1}^n a_j^{(m_k)} e_j - \sum_{j=1}^n b_j e_j \right\| \leq \sum_{j=1}^n |a_j^{(m_k)} - b_j| = \left\| (a_1^{(m_k)}, \dots, a_n^{(m_k)}) - b \right\|_1 \rightarrow 0,$$

concluimos que $x_{m_k} \rightarrow \sum_{j=1}^n b_j e_j$. Por K ser fechado sabemos que $\sum_{j=1}^n b_j e_j \in K$. $\square$

Definição 2.5.2. *Seja E um espaço normado. O conjunto*

$$B_E = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$$

*é chamado de **bola unitária fechada** de E .*

Corolário 2.5.1. *A bola unitária fechada em um espaço normado de dimensão finita é compacta*

Apresentamos abaixo um lema que será necessário para demonstrar que a bola unitária fechada em espaços de dimensão infinita nunca será compacta.

Lema 2.5.1. *(Lema de Riesz) Seja M um subespaço fechado próprio de um espaço normado E e seja θ um número real tal que $0 < \theta < 1$. Então existe $y \in E - M$ tal que $\|y\| = 1$ e $\|y - x\| \geq \theta$ para todo $x \in M$.*

Demonstração. Seja $y_0 \in E - M$ e considere o número

$$d = \text{dist}(y_0, M) := \inf_{x \in M} \|y_0 - x\|.$$

Como M é fechado e $y_0 \notin M$, temos $d > 0$. De fato, suponha $d = 0$. Então existiria uma sequência de elementos de M convergindo para y_0 , e nesse caso teríamos $y_0 \in M$, pois M é fechado. Como $\frac{d}{\theta} > d$, podemos escolher $x_0 \in M$ tal que

$$\|y_0 - x_0\| \leq \frac{d}{\theta}.$$

Escolhendo

$$y = \frac{y_0 - x_0}{\|y_0 - x_0\|},$$

as condições requeridas são satisfeitas. Podemos observar que y tem norma 1 e não pertence a M . Seja $x \in M$. Como M é subespaço vetorial, $(x_0 + \|y_0 - x_0\|x) \in M$, e portanto $d \leq \|y_0 - (x_0 + \|y_0 - x_0\|x)\|$. Por fim,

$$\|y - x\| = \left\| \frac{y_0 - x_0}{\|y_0 - x_0\|} - x \right\| = \frac{\|y_0 - (x_0 + \|y_0 - x_0\|x)\|}{\|y_0 - x_0\|} \geq \frac{d}{\|y_0 - x_0\|} \geq \theta.$$

$\square$

Teorema 2.5.1. *Um espaço normado E tem dimensão finita se, e somente se, a bola unitária fechada de E é compacta.*

Demonstração. O Corolário 2.5.1 garante a prova da ida da afirmação. Resta provar que se a bola é compacta, então o espaço tem dimensão finita. Suponha que E tem dimensão infinita. Escolha $x_1 \in E$ de norma 1. Como $\dim E = \infty$, o subespaço $[x_1]$ gerado por x_1 é um subespaço próprio de E . Por ter dimensão finita, $[x_1]$ é subespaço fechado de E pelo Teorema 2.1.1. Pelo Lema de Riesz, com $\theta = \frac{1}{2}$, existe $x_2 \in E - [x_1]$ de norma 1 tal que

$$\|x_2 - x_1\| \geq \frac{1}{2}.$$

Aplicando novamente o mesmo argumento para o subespaço $[x_1, x_2]$, que continua sendo um subespaço fechado próprio pelas mesmas razões, existe $x_3 \in E - [x_1, x_2]$ de norma 1 tal que

$$\|x_3 - x_j\| \geq \frac{1}{2} \text{ para } j=1,2.$$

Podemos continuar esse processo indefinidamente pois em todas as etapas teremos um subespaço de dimensão finita de E , logo fechado e próprio. Procedendo dessa forma, construímos uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em B_E tal que

$$\|x_m - x_n\| \geq \frac{1}{2}$$

sempre que $m \neq n$. Assim, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência em B_E que não possui subsequência convergente, o que impede que B_E seja compacta. $\square$

2.6 Espaços Separáveis

Definição 2.6.1. *Um espaço métrico M é **separável** quando contém um subconjunto denso e enumerável.*

Exemplo 2.6.1. *Espaços normados de dimensão finita são separáveis. Seja E um espaço normado de dimensão finita n . Escolha $\{x_1, \dots, x_n\}$ uma base de E e, no caso real, considere o conjunto*

$$A = \left\{ \sum_{j=1}^n a_j x_j : n \in \mathbb{N} \text{ e } a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{Q} \right\},$$

das combinações lineares dos vetores da base com escalares em $\mathbb{Q}$. No caso complexo podemos substituir $\mathbb{Q}$ por $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q} = \{p + iq : p, q \in \mathbb{Q}\}$.

Mostremos que A é denso em E e enumerável. Fixemos $x = r_1 x_1 + \dots + r_n x_n \in E$ e $\epsilon > 0$. Como $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$, temos que para todo $r_i \in \mathbb{R}$, existe $a_i \in \mathbb{Q}$ tal que $|r_i - a_i| < \frac{\epsilon}{n}$. Assim,

$y = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n \in A$ é tal que

$$\begin{aligned} \|x - y\| &\leq \|(r_1x_1 + \cdots + r_nx_n) - (a_1x_1 + \cdots + a_nx_n)\| \\ &= \|(r_1 - a_1)x_1 + \cdots + (r_n - a_n)x_n\| \\ &\leq |r_1 - a_1|\|x_1\| + \cdots + |r_n - a_n|\|x_n\| \\ &< \frac{\epsilon}{n} + \cdots + \frac{\epsilon}{n} = \epsilon. \end{aligned}$$

Logo, podemos concluir que A é denso em E .

Para mostrarmos que A é enumerável basta considerar a função $f : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \cdots \times \mathbb{Q} \rightarrow A$, dada por $f(a_1, \dots, a_n) = \sum_{j=1}^n a_jx_j$. Como f é bijetora, então segue que A é enumerável.

Disto obtemos que A é separável.

Dado um subconjunto A de um espaço vetorial E , denotamos por $[A]$ o subconjunto E gerado por A , isto é, o conjunto de todas combinações lineares finitas de elementos de A .

Lema 2.6.1. *Um espaço normado E é separável se, e somente se, existe um subconjunto enumerável $A \subseteq E$ tal que $[A]$ é denso em E .*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Se A for enumerável e denso em E , então $E = \overline{A} \subseteq \overline{[A]} \subseteq E$ e portanto $[A]$ é denso em E .

($\Leftarrow$) Reciprocamente, suponhamos que exista um subconjunto enumerável $A \subseteq E$ tal que $\overline{[A]} = E$. Chamemos de B o conjunto formado por todas combinações finitas dos elementos de A com coeficientes em $\mathbb{Q}_{\mathbb{K}}$, onde $\mathbb{Q}_{\mathbb{R}} = \mathbb{Q}$ e $\mathbb{Q}_{\mathbb{C}} = \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$, ou seja, para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$B_n = \{a_1x_1 + \cdots + a_nx_n : x_1, \dots, x_n \in A, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Q}_{\mathbb{K}}\}$$

e assim obtemos que

$$B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$$

Podemos ver que B é enumerável, pois cada B_n é enumerável. Provaremos que B é denso em E . Sejam $x \in E$ e $\epsilon > 0$. Como $\overline{[A]} = E$, existe $y_0 \in [A]$ tal que $\|x - y_0\| < \frac{\epsilon}{2}$. Digamos $y_0 = b_1x_1 + \cdots + b_kx_k$, onde $k \in \mathbb{N}$, $b_1, \dots, b_k \in \mathbb{K}$ e $x_1, \dots, x_k \in A$. Como $\mathbb{Q}_{\mathbb{K}}$ é denso em $\mathbb{K}$, existem $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Q}_{\mathbb{K}}$ tais que

$$|a_j - b_j| < \frac{\epsilon}{2 \left(1 + \sum_{i=1}^k \|x_i\|\right)}, \text{ para todo } j = 1, \dots, k.$$

Tomando $y = a_1x_1 + \dots + a_kx_k$ temos que $y \in B$ e

$$\begin{aligned}
\|x - y\| &= \|x - y_0 + y_0 - y\| \\
&\leq \|x - y_0\| + \|y_0 - y\| \\
&\leq \frac{\epsilon}{2} + \|(b_1 - a_1)x_1 + \dots + (b_k - a_k)x_k\| \\
&\leq \frac{\epsilon}{2} + \max_{j=1, \dots, k} |b_j - a_j| (\|x_1\| + \dots + \|x_k\|) \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \left(\frac{\epsilon}{2 + (1 + \sum_{j=1}^k \|x_j\|)} \right) \sum_{i=1}^k \|x_i\| \\
&\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,
\end{aligned}$$

o que prova que $\overline{B} = E$. Assim $B \subseteq E$ é enumerável e denso em E , completando a demonstração de que E é separável. □

Exemplo 2.6.2. c_0 e ℓ_p , $1 \leq p < \infty$, são separáveis.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, considere $e_n = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ a sequência formada por 1 na n -ésima coordenada e 0 nas demais. Os vetores $e_1, e_2, \dots$ são chamados vetores unitários canônicos dos espaços de sequências. Dado $x = (a_j)_{j=1}^\infty \in c_0$, temos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\| x - \sum_{j=1}^k a_j e_j \right\|_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} \|(0, 0, \dots, 0, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots)\|_\infty = \limsup_k |a_j| = 0,$$

pois $a_j \rightarrow 0$ quando $j \rightarrow \infty$, e resulta que $\sum_{j=1}^k a_j e_j \rightarrow x$ quando $k \rightarrow \infty$ em c_0 . Logo, $x \in \overline{A}$ onde $A = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. Segue do lema anterior que c_0 é separável. Dado $x = (a_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p$, como

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\| x - \sum_{j=1}^k a_j e_j \right\|_p^p = \lim_{k \rightarrow \infty} \|(0, \dots, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots)\|_p^p = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=k+1}^\infty |a_j|^p = 0,$$

pois a série $\sum_{j=1}^\infty |a_j|^p$ é convergente, o mesmo argumento mostra que ℓ_p é separável.

Exemplo 2.6.3. ℓ_∞ não é separável.

Suponha que ℓ_∞ contenha uma sequência $(x_n)_{n=1}^\infty$ densa. Para cada $n \in \mathbb{N}$ escrevamos $x_n = (a_j^{(n)})_{j=1}^\infty$. Seja $y = (b_j)_{j=1}^\infty$ a sequência definida por $b_j = 0$ se $|a_j^{(j)}| \geq 1$; e $b_j = a_j^{(j)} + 1$ se $|a_j^{(j)}| < 1$. Podemos observar que $y \in \ell_\infty$ pois $|b_j| < 2$ para todo j . Da densidade da sequência $(x_n)_{n=1}^\infty$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|y - x_{n_0}\|_\infty < 1$. Mas

$$\|y - x_n\|_\infty = \sup\{|b_1 - a_1^{(n)}|, |b_2 - a_2^{(n)}|, \dots, |b_n - a_n^{(n)}|, |b_{n+1} - a_{n+1}^{(n)}|, \dots\} \geq |b_n - a_n^{(n)}|.$$

Agora,

$$|b_n - a_n^{(n)}| = \begin{cases} |0 - a_n^{(n)}|, & \text{se } |a_n^{(n)}| \geq 1 \\ |a_n^{(n)} + 1 - a_n^{(n)}|, & \text{se } |a_n^{(n)}| < 1. \end{cases}$$

Logo, teremos que

$$\|y - x_n\|_\infty \geq |b_n - a_n^{(n)}| = \begin{cases} |a_n^{(n)}|, & \text{se } |a_n^{(n)}| \geq 1 \\ 1, & \text{se } |a_n^{(n)}| < 1 \end{cases} \geq 1,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, o que é uma contradição. Segue que ℓ_∞ não é separável.

Agora para mostrar a separabilidade do espaço $C[a, b]$ precisamos de um teorema clássico.

Teorema 2.6.1. (Teorema da Aproximação de Weierstrass) Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Então para todo $\epsilon > 0$ existe um polinômio $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $|P(x) - f(x)| < \epsilon$ para todo $x \in [a, b]$.

Exemplo 2.6.4. $C[a, b]$ é separável.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ considere a função $t \in [a, b] \mapsto f_n(t) = t^n \in \mathbb{N}$. Tomando $A = \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ temos $A \subseteq C[a, b]$ e $[A]$ é o conjunto dos polinômios. Segue do Teorema da Aproximação de Weierstrass que $\overline{[A]} = C[a, b]$ e portanto $C[a, b]$ é separável pelo Lema 2.6.1.

Exemplo 2.6.5. $L_p[a, b]$, $1 \leq p < \infty$, é separável.

Sejam $f \in L_p[a, b]$ e $\epsilon > 0$ dado. O conjunto das funções contínuas é denso em $L_p[a, b]$ [1, Teorema 1.7.1] e portanto existe $g \in C[a, b]$ tal que $\|f - g\|_p < \frac{\epsilon}{2}$. Do Teorema da Aproximação de Weierstrass existe um polinômio P tal que $\|g - P\|_\infty < \frac{\epsilon}{2(b-a)}$. Assim,

$$\begin{aligned} \|f - P\|_p &\leq \|f - g\|_p + \|g - P\|_p \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \left(\int_a^b |g - P|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \left(\int_a^b \sup\{|g(x) - P(x)| : x \in [a, b]\}^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \frac{\epsilon}{2} + ((b-a)\|g - P\|_\infty^p)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + (b-a)\|g - P\|_\infty \\ &< \epsilon. \end{aligned}$$

Logo, o conjunto dos polinômios é denso em $L_p[a, b]$. A separabilidade de $L_p[a, b]$ segue como no exemplo anterior.

Capítulo 3

Operadores Lineares Contínuos

Neste capítulo demonstraremos algumas propriedades básicas dos operadores lineares contínuos. Essas serão necessárias pois os resultados principais da teoria de Análise Funcional (o Teorema de Hahn-Banach, o Teorema de Banach-Steinhaus, o Teorema da Aplicação Aberta e o Teorema do Gráfico Fechado) são resultados cujo objeto principal de estudo são tais operadores. Neste capítulo utilizamos as referências [1] e [5].

Definição 3.0.1. *Sejam E e F espaços normados sobre $\mathbb{K}$. Uma função $T : E \rightarrow F$ é um **operador linear contínuo** se é linear, isto é,*

$$(i) \quad T(x + y) = T(x) + T(y), \text{ para quaisquer } x, y \in E,$$

$$(ii) \quad T(\alpha x) = \alpha T(x) \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{K} \text{ e } x \in E,$$

e também contínua, isto é, para todos $x_0 \in E$ e $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\|T(x) - T(x_0)\| < \epsilon$, sempre que $x \in E$ e $\|x - x_0\| < \delta$.

Denotaremos o conjunto de todos os operadores lineares contínuos de E em F por $\mathcal{L}(E, F)$. É fácil ver que $\mathcal{L}(E, F)$ é um espaço vetorial com as operações usuais de funções. Quando $F = \mathbb{K}$, escreveremos E' no lugar de $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$, chamamos esse espaço de **dual topológico** de E ou de **dual** de E , e dizemos que seus elementos são **funcionais lineares contínuos**.

Definição 3.0.2. *Sejam E e F espaços vetoriais normados. Dizemos que estes são **topologicamente isomorfos** ou **isomorfos** se existir um operador linear contínuo bijetor $T : E \rightarrow F$ cujo inverso $T^{-1} : F \rightarrow E$ é contínuo. Tal operador T é chamado de **isomorfismo topológico**.*

Definição 3.0.3. *Sejam E e F espaços vetoriais normados. Uma função $f : E \rightarrow F$, não necessariamente linear, tal que $\|f(x)\| = \|x\|$, para todo $x \in E$ é chamada **isometria**. Um operador linear $T : E \rightarrow F$ que é uma isometria é chamado de **isometria linear**.*

3.1 Caracterizações dos operadores lineares contínuos

Teorema 3.1.1. *Sejam E, F espaços normados sobre $\mathbb{K}$ e $T : E \rightarrow F$ linear. As seguintes condições são equivalentes:*

- (a) T é lipschitziano.
- (b) T é uniformemente contínuo.
- (c) T é contínuo.
- (d) T é contínuo em algum ponto de E .
- (e) T é contínuo na origem.
- (f) $\sup\{\|T(x)\| : x \in E \text{ e } \|x\| < 1\} < \infty$.
- (g) Existe uma constante $C \geq 0$ tal que $\|T(x)\| \leq C\|x\|$, para todo $x \in E$.

Demonstração. ($a \Rightarrow b$) Seja T lipschitziano. Então existe $c > 0$ tal que

$$\|T(x) - T(y)\| \leq c\|x - y\|, \forall x, y \in E.$$

Daí, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta = \frac{\epsilon}{c} > 0$ tal que

$$x, y \in E, \|x - y\| < \delta \Rightarrow \|T(x) - T(y)\| \leq c\|x - y\| < c \cdot \frac{\epsilon}{c} = \epsilon.$$

Assim, pode-se concluir que T é uniformemente contínuo.

($b \Rightarrow c$) Trivial.

($c \Rightarrow d$) Trivial.

($d \Rightarrow e$) Suponha T contínuo no ponto $x_0 \in E$. Seja $\epsilon > 0$. Então existe $\delta > 0$ tal que $\|T(x) - T(x_0)\| < \epsilon$, sempre que $\|x - x_0\| < \delta$. Tome $x \in E$ tal que $\|x - 0\| = \|x\| < \delta$. Então $\|(x + x_0) - x_0\| = \|x\| < \delta$.

Portanto

$$\begin{aligned} \|T(x) - T(0)\| &= \|T(x) - 0\| = \|T(x)\| \\ &= \|T(x) - T(x_0) + T(x_0)\| \\ &= \|T(x + x_0) - T(x_0)\| < \epsilon. \end{aligned}$$

Provando assim que T é contínuo na origem.

($e \Rightarrow f$) Como T é contínua na origem, existe $\delta > 0$ tal que $\|T(x)\| < 1$ sempre que $\|x\| < \delta$. Se $\|x\| \leq 1$, temos $\|\frac{\delta x}{2}\| < \delta$, e então, $\frac{\delta}{2}\|T(x)\| = \|T(\frac{\delta x}{2})\| < 1$. Isso prova que $\sup\{\|T(x)\| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\} \leq \frac{2}{\delta} < \infty$.

($f \Rightarrow g$) Para $x \in E$, $x \neq 0$, temos

$$\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = \left\| T\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| \leq \sup\{\|T(y)\| : \|y\| \leq 1\},$$

e portanto $\|T(x)\| \leq (\sup\{\|T(y)\| : \|y\| \leq 1\}) \cdot \|x\|$ para todo $x \neq 0$. A desigualdade para $x = 0$ é claramente válida.

($g \Rightarrow a$) Dados $x_1, x_2 \in E$, temos que

$$\|T(x_1) - T(x_2)\| = \|T(x_1 - x_2)\| \leq C\|x_1 - x_2\|,$$

e portanto T é lipschitziano com constante C . □

Corolário 3.1.1. *Seja $T : E \rightarrow F$ um operador linear bijetor entre espaços normados. Então T é um isomorfismo se, e só se, existem constantes $C_1, C_2 > 0$ tais que $C_1\|x\| \leq \|T(x)\| \leq C_2\|x\|$, para todo $x \in E$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Como T é contínuo, existe $C_2 \geq 0$ tal que $\|T(x)\| \leq C_2\|x\|$ para todo $x \in E$. Observe que $C_2 \neq 0$, caso contrário teríamos T identicamente nulo, o que não ocorre pois T é isomorfismo. Como T é isomorfismo, T^{-1} é contínuo. Daí, existe $C \geq 0$ tal que $\|T^{-1}(y)\| \leq C\|y\|$, para todo $y \in F$. Observe que $C \neq 0$, pois T^{-1} é bijetor. Em particular, para todo $x \in E$ temos que $\|x\| = \|T^{-1}(T(x))\| \leq C\|T(x)\|$, o que implica que $\frac{1}{C}\|x\| \leq \|T(x)\|$. Chamando $C_1 = \frac{1}{C}$, temos $C_1\|x\| \leq \|T(x)\| \leq C_2\|x\|$.

($\Leftarrow$) Por hipótese existe $C_2 > 0$ tal que $\|T(x)\| \leq C_2\|x\|$, para todo $x \in E$. Logo, pelo teorema anterior, T é contínuo. Por outro lado, existe $C_1 > 0$ tal que $C_1\|x\| \leq \|T(x)\|$, para todo $x \in E$. Assim, $C_1\|T^{-1}(y)\| \leq \|T(T^{-1}(y))\| = \|y\|$ para todo $y \in F$, o que implica $\|T^{-1}(y)\| \leq \frac{1}{C_1}\|y\|$ para todo $y \in F$. Pelo teorema anterior, T^{-1} é contínua e portanto T é um isomorfismo. □

Proposição 3.1.1. *Sejam E e F espaços normados.*

- (a) *A expressão $\|T\| = \sup\{\|T(x)\| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\}$ define uma norma no espaço $\mathcal{L}(E, F)$.*
- (b) *$\|T(x)\| \leq \|T\| \cdot \|x\|$ para todos $T \in \mathcal{L}(E, F)$ e $x \in E$.*
- (c) *Se F for Banach então $\mathcal{L}(E, F)$ também é Banach.*

Demonstração. (a) Mostremos que $\sup\{\|T(x)\| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\}$ é uma norma.

1. $\|T\| = \sup\{\|T(x)\| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\} \geq 0$

e

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\} = 0 \Leftrightarrow \|T(x)\| = 0, \forall x \in E : \|x\| \leq 1 \Leftrightarrow T(x) = 0, \forall x \in E.$$

2. Observe que

$$\begin{aligned}\|aT\| &= \sup\{\|aT(x)\| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\} \\ &= \sup\{|a|\|T(x)\| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\} \\ &= |a| \sup\{\|T(x)\| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\} \\ &= |a|\|T\|.\end{aligned}$$

3. Além disso,

$$\begin{aligned}\|T + S\| &= \sup\{\|(T + S)(x)\| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\} \\ &\leq \sup\{\|T(x)\| + \|S(x)\| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\} \\ &\leq \sup\{\|T(x)\| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\} + \sup\{\|S(x)\| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\} \\ &= \|T\| + \|S\|.\end{aligned}$$

Por 1, 2 e 3 podemos concluir que $\mathcal{L}(E, F)$ é espaço normado com a norma $\|\cdot\|$.

(b) Para $x \in E$ e $x \neq 0$, temos que

$$\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = \left\| T \left(\frac{x}{\|x\|} \right) \right\| \leq \sup\{\|T(y)\| : y \in E \text{ e } \|y\| \leq 1\}$$

e assim segue que

$$\|T(x)\| \leq \sup\{\|T(y)\| : y \in E \text{ e } \|y\| \leq 1\} \|x\|.$$

Como a desigualdade acima é claramente verdadeira para $x = 0$, obtemos $\|T(x)\| \leq \|T\| \cdot \|x\|$ para todo $x \in E$.

(c) Seja $(T_n)_{n=1}^\infty$ uma em $\mathcal{L}(E, F)$. Dado $\epsilon > 0$, existe n_0 tal que $\|T_m - T_n\| \leq \epsilon$ para todo $m, n \geq n_0$.

Logo,

$$\|T_n(x) - T_m(x)\| = \|(T_n - T_m)(x)\| \leq \|T_n - T_m\| \cdot \|x\| \leq \epsilon \|x\| \quad (3.1)$$

para todos $x \in E$ e $m, n \geq n_0$. Segue que para cada $x \in E$, a sequência $(T_n(x))_{n=1}^\infty$ é de Cauchy em F , logo convergente pois F é Banach. Podemos então definir

$$T : E \rightarrow F, \quad T(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x).$$

A linearidade de T segue das propriedades dos limites. Fazendo $m \rightarrow \infty$ em (3.1) obtemos

$$\|(T_n - T)(x)\| = \|T_n(x) - T(x)\| \leq \epsilon \|x\| \quad (3.2)$$

para todos $x \in E$ e $n \geq n_0$. Em particular,

$$\|(T_{n_0} - T)(x)\| = \|T_{n_0}(x) - T(x)\| \leq \epsilon \|x\|$$

para todos $x \in E$, o que nos garante que $(T - T_{n_0}) \in \mathcal{L}(E, F)$. Portanto $T = (T - T_{n_0}) + T_{n_0} \in \mathcal{L}(E, F)$. De (3.2) segue também que $\|T_n - T\| \leq \epsilon$, para todo $n \geq n_0$, o que implica $T_n \rightarrow T$ em $\mathcal{L}(E, F)$. □

Também é verdadeira a seguinte igualdade

$$\|T\| = \inf\{C : \|T(x)\| \leq C\|x\| \text{ para todo } x \in E\}.$$

No caso de funcionais lineares, a norma dos operadores se transforma em

$$\|\phi\| = \sup\{|\phi(x)| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\}$$

para todo espaço normado E e todo funcional linear $\phi \in E'$.

Corolário 3.1.2. *O dual E' de qualquer espaço normado E é um espaço de Banach.*

3.2 Exemplos

Podemos verificar que em qualquer espaço normado E , a identidade em E é um operador linear contínuo de norma 1. Seja $T : E \rightarrow E$ onde $T(x) = x$ para todo $x \in E$. Assim, teremos que

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup\{\|T(x)\| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\} \\ &= \sup\{\|x\| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Podemos verificar da mesma maneira que entre dois espaços normados quaisquer E e F , o operador nulo é um operador linear contínuo de norma 0. Utilizando a mesma ideia podemos observar que se $\phi \in E'$, $y \in F$ e $\phi \otimes y : E \rightarrow F$ é dado por $\phi \otimes y(x) = \phi(x)y$, então $\phi \otimes y$ é um operador linear de

norma $\|\phi\| \|y\|$. De fato,

$$\begin{aligned}\|\phi \otimes y\| &= \sup\{|\phi \otimes y(x)| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\} \\ &= \sup\{|\phi(x)| \|y\| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\} \\ &= \|y\| \sup\{|\phi(x)| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\} \\ &= \|\phi\| \cdot \|y\|.\end{aligned}$$

Agora vejamos alguns exemplos em espaços específicos.

Exemplo 3.2.1. *Seja $1 \leq p \leq \infty$. Escolhamos uma sequência $(b_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p$ e consideremos o operador $T : \ell_\infty \rightarrow \ell_p$ dado por $T((a_j)_{j=1}^\infty) = (a_j b_j)_{j=1}^\infty$.*

Observe T satisfaz as condições para ser linear:

1. $T((a_j + c_j)_{j=1}^\infty) = ((a_j + c_j)b_j)_{j=1}^\infty = (a_j b_j)_{j=1}^\infty + (c_j b_j)_{j=1}^\infty = T((a_j)_{j=1}^\infty) + T((c_j)_{j=1}^\infty)$.
2. $T((\alpha a_j)_{j=1}^\infty) = (\alpha a_j b_j)_{j=1}^\infty = \alpha (a_j b_j)_{j=1}^\infty = \alpha T((a_j)_{j=1}^\infty)$.

Temos que

$$\|T(a_j)_{j=1}^\infty\|_p = \|(a_j b_j)_{j=1}^\infty\|_p = \left(\sum_{j=1}^\infty |a_j b_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j=1}^\infty |b_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \sup_j |a_j| = \|(b_j)_{j=1}^\infty\|_p \cdot \|(a_j)_{j=1}^\infty\|_\infty,$$

*para toda sequência $(a_j)_{j=1}^\infty \in \ell_\infty$. Podemos observar que a sequência $(b_j)_{j=1}^\infty$ é fixa, ou seja, $\|(b_j)_{j=1}^\infty\|_p$ é uma constante a qual podemos chamar de C . Então temos que $\|T(a_j)\|_p \leq C \|a_j\|_\infty$. Pelo Teorema 3.1.1, T é contínuo e $\|T\| \leq \|(b_j)_{j=1}^\infty\|_p$. Tomando $x = (1, 1, \dots)_\infty \in \ell_\infty$, temos $\|x\|_\infty = 1$ e que $\|T(x)\|_p = \|(b_j)_{j=1}^\infty\|_p$, logo $\|T\| = \|(b_j)_{j=1}^\infty\|_p$. Este operador T é chamado de **operador diagonal** pela sequência $(b_j)_{j=1}^\infty$.*

Exemplo 3.2.2. *Transportando o exemplo acima para os espaços de funções, considere $1 \leq p < \infty$ e escolha uma função $g \in L_p[0, 1]$. Assim como antes, o operador $T : C[0, 1] \rightarrow L_p[0, 1]$ dado por $T(f) = fg$ é linear e contínuo. Observe que T satisfaz as condições para ser linear:*

1. $T(f + h) = (f + h)g = fg + hg = T(f) + T(g)$.
2. $T(\alpha f) = (\alpha f)g = \alpha(fg) = \alpha T(f)$.

Além disso,

$$\begin{aligned}
\|T(f)\|_p &= \|f \cdot g\|_p = \left(\int_0^1 |fg|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\int_0^1 |f|^p |g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\int_0^1 \left(\max_{x \in [0,1]} |f(x)| \right)^p |g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \max_{x \in [0,1]} |f(x)| \left(\int_0^1 |g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \|f\|_\infty \left(\int_0^1 |g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_\infty \|g\|_p.
\end{aligned}$$

Como g é fixa, temos uma constante $C = \|g\|_p > 0$ tal que $\|T(f)\| \leq C\|f\|$. Assim T é contínuo e $\|T\| \leq \|g\|_p$. Se tomarmos $f(x) = 1$ para todo $x \in [0, 1]$, temos $\|f\|_\infty = 1$ e $\|T(f)\|_p = \|g\|_p$, logo podemos dizer que $\|T\| = \|g\|_p$.

Este operador é chamado de **operador multiplicação** pela função g .

Exemplo 3.2.3. Considere o subconjunto $P[0, 1]$ de $C[0, 1]$ formado pelas funções polinomiais. É fácil observar que $P[0, 1]$ é subespaço vetorial de $C[0, 1]$, logo ele é subespaço normado com a norma $\|\cdot\|_\infty$ herdada de $C[0, 1]$. É claro também que o operador derivação, $T : P[0, 1] \rightarrow P[0, 1]$ onde $T(f) = f'$ é linear. Suponha que T seja contínuo. Neste caso existe $C > 0$ tal que $\|T(f)\|_\infty \leq C\|f\|_\infty$ para todo $f \in P[0, 1]$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ tome $f_n \in P[0, 1]$ a função dada por $f_n(t) = t^n$. Assim teremos que

$$n = \|f'_n\|_\infty = \|T(f_n)\|_\infty \leq C\|f_n\|_\infty = C$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, e isso é contradição. Logo T é descontínuo.

3.3 O Teorema de Banach-Steinhaus

Antes de enunciarmos e demonstrarmos o Teorema de Banach-Steinhaus provaremos um resultado preliminar.

Teorema 3.3.1. (Teorema de Baire) Sejam (M, d) um espaço métrico completo e $(F_n)_{n=1}^\infty$ uma sequência de subconjuntos fechados de M tais que $M = \bigcup_{n=1}^\infty F_n$. Então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\text{int}(F_{n_0}) \neq \emptyset$.

Demonstração. Seja $\text{int}(A)$ o interior de um subconjunto A , onde $A \subseteq M$. Suponha por absurdo que $\text{int}(F_n) = \emptyset$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Chamando $A_n = (F_n)^C = (M - F_n)$, cada A_n é aberto pois cada F_n é fechado. Além disso,

$$\overline{A_n} = \overline{(F_n)^C} = (\text{int}(F_n))^C = \emptyset^C = M$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Podemos concluir que cada A_n é não vazio. Seja $x_1 \in A_1$, como cada A_1 é aberto, existe $0 < \delta_1 < 1$ tal que a bola fechada $B[x_1, \delta_1] \subseteq A_1$. Já que $\overline{A_2} = M$, temos que $A_2 \cap B(x_1, \delta_1) \neq \emptyset$. Daí como $A_2 \cap B(x_1, \delta_1)$ é aberto, existem $x_2 \in A_2$ e $0 < \delta_2 < \frac{1}{2}$ tais que $B[x_2, \delta_2] \subseteq A_2 \cap B(x_1, \delta_1) \subseteq A_2 \cap B[x_1, \delta_1]$. Prosseguindo desta maneira construímos uma sequência $(x_n)_{n=1}^\infty$ em M e uma sequência $(\delta_n)_{n=1}^\infty$ de números reais tais que

$$0 < \delta_n < \frac{1}{n} \quad \text{e} \quad B[x_{n+1}, \delta_{n+1}] \subseteq A_{n+1} \cap B[x_n, \delta_n]$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Dado $\epsilon > 0$ escolha $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > \frac{2}{\epsilon}$. Se $m, n \geq n_0$, como $B[x_n, \delta_n] \cap B[x_m, \delta_m] \subseteq B[x_{n_0}, \delta_{n_0}]$, temos

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x_{n_0}) + d(x_n, x_{n_0}) \leq 2\delta_{n_0} < \frac{2}{n_0} < \epsilon.$$

Isso mostra que $(x_n)_{n=1}^\infty$ de Cauchy em M . Como M é completo, segue que $x_n \rightarrow x$ onde $x \in M$. Já que $x_m \in B[x_m, \delta_m] \subseteq B[x_n, \delta_n]$ para todo $m \geq n$ e $B[x_n, \delta_n]$ é um conjunto fechado, temos que $x \in B[x_n, \delta_n] \subseteq A_n$. Portanto,

$$x \in \bigcap_{n=1}^\infty A_n = \bigcap_{n=1}^\infty (F_n)^C = \left(\bigcup_{n=1}^\infty F_n \right)^C = M^C = \emptyset,$$

o que é uma contradição. Logo, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\text{int}(F_n) \neq \emptyset$. □

Teorema 3.3.2. (Teorema de Banach-Steinhaus) *Seja E um espaço de Banach, F um espaço normado e $(T_i)_{i \in I}$ uma família de operadores em $\mathcal{L}(E, F)$ satisfazendo a condição de que para cada $x \in E$, existe $C_x < \infty$ tal que*

$$\sup_{i \in I} \|T_i(x)\| < C_x. \tag{3.3}$$

Então $\sup_{i \in I} \|T_i\| < \infty$.

Demonstração. Por hipótese cada T_i é contínuo, o que implica que o conjunto

$$\{x \in E : \|T_i(x)\| \leq n\} = (\|\cdot\| \circ T_i)^{-1}([0, n])$$

é fechado para cada n e cada $i \in I$. Dessa forma, o conjunto

$$A_n := \left\{ x \in E : \sup_{i \in I} \|T_i(x)\| \leq n \right\} = \bigcap_{i \in I} \{x \in E : \|T_i(x)\| \leq n\}$$

é fechado por ser uma interseção arbitrária de fechados. De (3.3) segue que $E = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$ e, portanto, pode-se aplicar o Teorema de Baire. Assim, existe algum A_{n_0} que possui o interior não vazio. Sejam

$a \in \text{int}(A_{n_0})$ e $r > 0$ tais que $\{x \in E : \|x - a\| \leq r\} \subseteq \text{int}(A_{n_0})$. Tome $y \in E$ com $\|y\| \leq 1$. Se $x = a + ry$ então $\|x - a\| = \|ry\| \leq r$ e portanto $x \in A_{n_0}$. Daí,

$$\|T_i(x - a)\| \leq \|T_i(x)\| + \|T_i(a)\| \leq n_0 + n_0$$

para todo $i \in I$. Logo $\|T_i(ry)\| = \|T_i(x - a)\| \leq 2n_0$ e $\|T_i(y)\| \leq \frac{2n_0}{r}$, para todo $i \in I$.

Portanto, $\sup_{i \in I} \|T_i\| \leq \frac{2n_0}{r}$. □

O Teorema de Banach-Steinhaus também é conhecido como Teorema da Limitação Uniforme. O próximo corolário trata-se de uma propriedade interessante das sequências de operadores contínuos definidos em espaços de Banach.

Corolário 3.3.1. *Sejam E um espaço de Banach, F um espaço normado e $(T_n)_{n=1}^\infty$ uma sequência em $\mathcal{L}(E, F)$ tal que $(T_n(x))_{n=1}^\infty$ é convergente em F para todo $x \in E$. Se definirmos $T : E \rightarrow F$, onde $T(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x)$, então T é um operador linear contínuo.*

Demonstração. A linearidade de T segue de que

$$\begin{aligned} T(x + y) &= \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x + y) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x) + T_n(y) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x) + \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(y) \\ &= T(x) + T(y) \end{aligned}$$

e também de que

$$\begin{aligned} T(\alpha x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(\alpha x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha T_n(x) \\ &= \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x) \\ &= \alpha T(x), \end{aligned}$$

para todos $x, y \in E$ e $\alpha \in \mathbb{K}$. Por hipótese, para cada $x \in E$ a sequência $(T_n(x))_{n=1}^\infty$ é convergente, e portanto limitada. Assim $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n(x)\| < \infty$ para todo $x \in E$. Pelo Teorema de Banach-Steinhaus, existe $C > 0$ tal que $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\| \leq C$. Como cada T_n é contínuo, para cada $n \in \mathbb{N}$ e para todo $x \in E$ temos que

$$\|T_n(x)\| \leq \|T_n\| \|x\| \leq C \|x\|.$$

Fazendo, $n \rightarrow \infty$, temos $\|T(x)\| \leq C \|x\|$ para todo $x \in E$. Logo T é contínuo. □

Definição 3.3.1. *Sejam E_1, E_2 e F espaços vetoriais. Uma aplicação $B : E_1 \times E_2 \rightarrow F$ é dita **bilinear** se $B(x_1, \cdot) : E_2 \rightarrow F$ e $B(\cdot, x_2) : E_1 \rightarrow F$ são operadores lineares para quaisquer $x_1 \in E_1$ e $x_2 \in E_2$ fixados.*

Corolário 3.3.2. *Sejam E_1, E_2 e F espaços vetoriais normados, E_2 completo e $B : E_1 \times E_2 \rightarrow F$ uma aplicação bilinear. Suponha B separadamente contínua, isto é, $B(x, \cdot) : E_2 \rightarrow F$ e $B(\cdot, y) : E_1 \rightarrow F$ são operadores lineares contínuos para quaisquer $x \in E_1$ e $y \in E_2$ fixados. Então $B : E_1 \times E_2 \rightarrow F$ é uma aplicação contínua.*

Demonstração. Considere $F = \{B(x, \cdot) : x \in E_1, \|x\| \leq 1\} \subseteq \mathcal{L}(E_2, F)$. Por hipótese $B(\cdot, y)$ é linear e contínuo para cada $y \in E_2$, portanto, para todo $x \in E_1, \|x\| \leq 1$, temos

$$\|B(x, y)\| \leq \|B(\cdot, y)\|_{\mathcal{L}(E_1, F)} =: C_y.$$

Assim, a família F é pontualmente limitada e, pelo Teorema de Banach-Steinhaus, existe C tal que

$$\sup_{\|x\| \leq 1} \sup_{\|y\| \leq 1} \|B(x, y)\| < C.$$

Segue da bilinearidade de B que

$$\|B(x, y)\| \leq C\|x\| \cdot \|y\|$$

para todos $x \in E_1$ e $y \in E_2$. A continuidade de B segue da seguinte maneira. Seja $(x_n, y_n) \rightarrow (x, y)$ em $E_1 \times E_2$. Então $x_n \rightarrow x$ em E_1 e $y_n \rightarrow y$ em E_2 . Em particular, existe $M \geq 0$ tal que $\|x_n\| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\|y\| \leq M$. Daí,

$$\begin{aligned} \|B(x_n, y_n) - B(x, y)\| &\leq \|B(x_n, y_n) - B(x_n, y)\| + \|B(x_n, y) - B(x, y)\| \\ &= \|B(x_n, y_n - y)\| + \|B(x_n - x, y)\| \\ &\leq C\|x_n\|\|y_n - y\| + C\|x_n - x\|\|y\| \\ &\leq CM(\|x_n - x\| + \|y_n - y\|) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Assim podemos concluir que B é contínua. □

Notemos no exemplo abaixo a necessidade do espaço do domínio ser completo no Teorema de Banach-Steinhaus.

Exemplo 3.3.1. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, considere o funcional linear contínuo $\phi_n : c_{00} \rightarrow \mathbb{K}$ onde $\phi_n((a_j)_{j=1}^\infty) = na_n$. Podemos observar que $(\phi_n)_{n=1}^\infty \subseteq (c_{00})'$ e que*

$$\begin{aligned} \|\phi_n\| &= \sup\{|\phi_n((a_j)_{j=1}^\infty)| : (a_j)_{j=1}^\infty \in c_{00} \text{ e } \|(a_j)_{j=1}^\infty\| \leq 1\} \\ &= \sup\{|na_n| : (a_j)_{j=1}^\infty \in c_{00} \text{ e } \|(a_j)_{j=1}^\infty\| \leq 1\} \\ &= n \sup\{|a_n| : (a_j)_{j=1}^\infty \in c_{00} \text{ e } \|(a_j)_{j=1}^\infty\| \leq 1\} \\ &= n \end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Dada uma sequência $(a_j)_{j=1}^\infty \in c_{00}$, tomando j_0 tal que $a_j = 0$ para todo $j \geq j_0$, segue que $\phi_n((a_j)_{j=1}^\infty) = 0$ para todo $n \geq j_0$. Assim, $\sup_n |\phi_n(x)| < \infty$ para todo $x \in c_{00}$, mas $\sup_n \|\phi_n\| = \infty$.

3.4 O Teorema da Aplicação Aberta

Lema 3.4.1. *Sejam E um espaço de Banach, F um espaço normado e $T : E \rightarrow F$ um operador linear contínuo. Se existirem $R, r > 0$ tais que $\overline{T(B_E(0, R))} \supseteq B_F(0, r)$, então $T(B_E(0, R)) \supseteq B_F(0, \frac{r}{2})$.*

Demonstração. Como para qualquer conjunto $M \subseteq E$ e $a \in \mathbb{K}$ vale que $a\overline{M} = \overline{aM}$, temos que

$$B_F(0, ar) \subseteq \overline{aT(B_E(0, R))} = \overline{T(B_E(0, aR))} \quad (3.4)$$

para todo $a \in \mathbb{R}$ positivo. Seja $y \in B_F(0, \frac{r}{2})$. Temos que mostrar que $y \in T(B_E(0, R))$. Por (3.4) existe $x_1 \in B_E(0, \frac{R}{2})$ tal que $\|y - T(x_1)\| < \frac{r}{4}$, isto é, $y - T(x_1) \in B_F(0, \frac{r}{4})$. Novamente por (3.4) existe $x_2 \in B_F(0, \frac{R}{4})$ tal que

$$\|y - T(x_1) - T(x_2)\| < \frac{r}{8}.$$

Como (3.4) vale para todo $a > 0$, podemos continuar este processo indefinidamente de forma a construir uma sequência $(x_n)_{n=1}^\infty$ em E tal que $x_n \in B_E(0, \frac{R}{2^n})$ e

$$\|y - T(x_1) - \cdots - T(x_n)\| < \frac{r}{2^{n+1}} \quad (3.5)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

A série $\sum_{n=1}^\infty \|x_n\|$ é convergente pois $\|x_n\| < \frac{R}{2^n}$ para todo n . Logo

$$\left\| \sum_{j=n}^m x_j \right\| \leq \sum_{j=n}^m \|x_j\| \rightarrow 0 \text{ quando } m > n \rightarrow \infty,$$

e portanto a sequência $\left(\sum_{j=1}^n x_j \right)_{n=1}^\infty$ é de Cauchy em E . Como E é Banach, a sequência $\left(\sum_{j=1}^n x_j \right)_{n=1}^\infty$ converge para algum $x \in E$. Daí,

$$\begin{aligned} \|x\| &= \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n x_j \right\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \|x_j\| \\ &= \|x_1\| + \sum_{n=2}^\infty \|x_n\| \\ &< \sum_{n=1}^\infty \frac{R}{2^n} = R \end{aligned}$$

e portanto $x \in B_E(0, R)$. Fazendo $n \rightarrow \infty$ em (3.5), obtemos

$$\begin{aligned} \|y - T(x)\| &= \left\| y - T \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n x_j \right) \right\| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|y - T(x_1) - \cdots - T(x_n)\| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r}{2^{n+1}} = 0, \end{aligned}$$

e assim $y = T(x)$. Concluindo que $y \in T(B_E(0, R))$. $\square$

Teorema 3.4.1. (*Teorema da Aplicação Aberta*) *Sejam E e F espaços de Banach e $T : E \rightarrow F$ linear, contínuo e sobrejetor. Então T é uma aplicação aberta. Em particular, todo operador linear contínuo e bijetor entre espaços de Banach é isomorfismo.*

Demonstração. Como $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_E(0, n)$ e por hipótese T é sobrejetor, temos a igualdade

$$F = T(E) = \bigcup_{n=1}^{\infty} T(B_E(0, n)) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{T(B_E(0, n))}.$$

Pelo Teorema de Baire, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\overline{T(B_E(0, n_0))}$ tem interior não vazio. Assim existem $b \in F$ e $r > 0$ tais que $B_F(b, r) \subseteq \overline{T(B_E(0, n_0))}$. Como

$$\overline{T(B_E(0, n_0))} = -\overline{T(B_E(0, n_0))},$$

resulta que

$$B_F(-b, r) = -B_F(b, r) \subseteq \overline{T(B_E(0, n_0))}.$$

Como $x = \frac{1}{2}(b+x) + \frac{1}{2}(-b+x)$,

$$\begin{aligned} B_F(0, r) &\subseteq \frac{1}{2}B_F(b, r) + \frac{1}{2}B_F(-b, r) \\ &\subseteq \frac{1}{2}\overline{T(B_E(0, n_0))} + \frac{1}{2}\overline{T(B_E(0, n_0))} \\ &= \overline{T(B_E(0, n_0))}, \end{aligned}$$

onde a última igualdade é válida pois $\overline{T(B_E(0, n_0))}$ é convexo. Pelo lema anterior sabemos que $T(B_E(0, n_0)) \supseteq B_F(0, p)$ para $p = \frac{r}{2}$. Vejamos que $T(B_E(x, cn_0)) \supseteq B_F(T(x), cp)$ para todo $x \in E$ e todo $c > 0$. Observe que $B_E(x, cn_0) = x + B_E(0, cn_0)$, o que implica

$$\begin{aligned} T(B_E(x, cn_0)) &= T(x) + T(B_E(0, cn_0)) \\ &\supseteq T(x) + B_F(0, cp) = B_F(T(x), cp). \end{aligned}$$

Mostremos que $T(U)$ é aberto em F para cada U aberto em E , para concluir que T é uma aplicação aberta. Sejam $x \in U$ e $c > 0$ tais que $B_E(x, cn_0) \subseteq U$. Então $B_F(T(x), cp) \subseteq T(B_E(x, cn_0)) \subseteq T(U)$, mostrando assim que $T(U)$ é aberto.

Caso o operador T seja bijetor, como $T(V)$ é aberto em F para cada aberto V em E podemos concluir que T^{-1} é contínuo, logo o operador T é isomorfismo. $\square$

Vejamos no exemplo abaixo que a hipótese dos espaços serem completos é essencial.

Exemplo 3.4.1. Seja $T : c_{00} \rightarrow c_{00}$ o operador linear dado por $T((a_n)_{n=1}^\infty) = (a_1, \frac{a_2}{2}, \frac{a_3}{3}, \dots)$. Mostremos que T satisfaz as hipóteses de ser linear, bijetor e contínuo, mas não é um isomorfismo, ou seja, T^{-1} não é contínuo. O operador T satisfaz as condições para ser linear. De fato,

$$\begin{aligned} T((a_n + b_n)_{n=1}^\infty) &= \left(a_1 + b_1, \frac{a_2 + b_2}{2}, \dots\right) \\ &= \left(a_1, \frac{a_2}{2}, \dots\right) + \left(b_1, \frac{b_2}{2}, \dots\right) \\ &= T((a_n)_{n=1}^\infty) + T((b_n)_{n=1}^\infty), \end{aligned}$$

e também $T((\alpha a_n)_{n=1}^\infty) = (\alpha a_1, \frac{\alpha a_2}{2}, \dots) = \alpha (a_1, \frac{a_2}{2}, \dots) = \alpha T((a_n)_{n=1}^\infty)$.

Mostraremos que T é contínuo. Vamos tentar utilizar o Teorema 3.1.1 item (g). Seja $(a_n)_{n=1}^\infty \in c_{00}$. Assim pela definição de c_{00} existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n = 0$ para todo $n \geq n_0$. Daí

$$\begin{aligned} \|T((a_n)_{n=1}^\infty)\|_\infty &= \left\| \left(a_1, \frac{a_2}{2}, \frac{a_3}{3}, \dots\right) \right\|_\infty \\ &= \sup \left\{ \left| \frac{a_n}{n} \right| : n \in \mathbb{N} \right\} \\ &= \max \left\{ \left| \frac{a_n}{n} \right| : n < n_0 \right\} \\ &\leq \max \{ |a_n| : n < n_0 \} \\ &= \sup \{ |a_n| : n \in \mathbb{N} \} \\ &= \|(a_n)_{n=1}^\infty\|_\infty. \end{aligned}$$

Logo T é contínuo.

Mostremos agora que T é bijetor. Primeiramente verifiquemos que T é injetor. Sejam $(a_n)_{n=1}^\infty, (b_n)_{n=1}^\infty \in c_{00}$. Então

$$\begin{aligned} T((a_n)_{n=1}^\infty) &= T((b_n)_{n=1}^\infty) \\ \Rightarrow \left(a_1, \frac{a_2}{2}, \frac{a_3}{3}, \dots\right) &= \left(b_1, \frac{b_2}{2}, \frac{b_3}{3}, \dots\right) \\ \Rightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ \vdots \end{cases} \\ \Rightarrow (a_n)_{n=1}^\infty &= (b_n)_{n=1}^\infty. \end{aligned}$$

Podemos concluir T ser injetor. Vejamos que T é sobrejetor. Dados $(y_n)_{n=1}^\infty \in c_{00}$, queremos mostrar que existe $(a_n)_{n=1}^\infty \in c_{00}$ tal que $T((a_n)_{n=1}^\infty) = (y_n)_{n=1}^\infty$, ou seja, $(y_n)_{n=1}^\infty = (a_1, \frac{a_2}{2}, \frac{a_3}{3}, \dots)$. Basta tomar $(a_n)_{n=1}^\infty = (y_1, 2y_2, 3y_3, \dots)$ o que implica $T(y_1, 2y_2, 3y_3, \dots) = (y_1, y_2, y_3, \dots)$. Podemos concluir então que T é sobrejetor. Logo o operador T é bijetor.

Falta mostrar então que o operador T^{-1} não é contínuo. Observe que $T^{-1} : c_{00} \rightarrow c_{00}$ onde $T^{-1}((a_n)_{n=1}^\infty) = (a_1, 2a_2, 3a_3, \dots)$. Suponha que T^{-1} é contínuo. Logo, pelo Teorema 3.1.1 item (g) existe $C > 0$ tal que

$$\|T^{-1}(a_n)_{n=1}^\infty\| \leq C\|(a_n)_{n=1}^\infty\|,$$

ou seja,

$$\sup\{n|a_n| : n \in \mathbb{N}\} \leq C \sup\{|a_n| : n \in \mathbb{N}\}.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, considere a sequência $e_1 = (1, 0, 0, \dots), e_2 = (0, 1, 0, \dots), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 1, 0, \dots)$, onde 1 está n -ésimo termo. Observe que $e_n \in c_{00}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Segue daí que se $e_n^{(j)}$ é a j -ésima entrada e_n , então

$$n = \sup\{n|e_n^{(j)}| : j \in \mathbb{N}\} \leq C \sup\{|e_n^{(j)}| : j \in \mathbb{N}\} = C, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

o que é uma contradição. Logo, podemos concluir que T^{-1} é descontínuo.

3.5 O Teorema do Gráfico Fechado

Sejam E e F espaços normados e $T : E \rightarrow F$ um operador linear. O **gráfico** de T é o conjunto

$$\begin{aligned} G(T) &= \{(x, y) : x \in E \text{ e } y = T(x)\} \\ &= \{(x, T(x)) : x \in E\} \subseteq E \times F. \end{aligned}$$

$G(T)$ é subespaço vetorial de $E \times F$ com qualquer uma das normas usuais. Vejamos que o fato de $G(T)$ ser fechado determina que T é contínuo.

Teorema 3.5.1. (Teorema do Gráfico Fechado) *Sejam E e F espaços de Banach e $T : E \rightarrow F$ um operador linear. Então T é contínuo se, e somente se, $G(T)$ é fechado $E \times F$.*

Demonstração. Suponha T contínuo. Então a função $f : E \times F \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$f(x, y) = \|T(x) - y\|$$

é contínua, e portanto $G(T) = f^{-1}(\{0\})$ é fechado por ser a imagem inversa do fechado $\{0\}$ pela função contínua f .

Reciprocamente, suponha $G(T)$ fechado. Queremos mostrar que T é contínuo. Temos que $E \times F$ é espaço de Banach com a norma da soma denotada por $\|\cdot\|_1$. A função $\pi : G(T) \rightarrow E$ dada por

$$\pi(x, T(x)) = x$$

é linear e bijetora. Além disso, π é contínua pois

$$\begin{aligned}\|\pi(x, T(x))\| &= \|x\| \\ &\leq \|x\| + \|T(x)\| \\ &= \|(x, T(x))\|_1.\end{aligned}$$

Do Teorema 3.4.1 segue então que π é isomorfismo, ou seja, π^{-1} é contínua, e portanto existe $C > 0$ tal que $\|(x, T(x))\|_1 \leq C\|x\|$ para todo $x \in E$. Logo

$$\|T(x)\| \leq \|T(x)\| + \|x\| = \|(x, T(x))\|_1 \leq C\|x\|$$

para todo $x \in E$. Isso prova que T é contínuo. $\square$

Exemplo 3.5.1. *Sejam E um espaço de Banach e $T : E \rightarrow E'$ um operador linear simétrico, isto é, T é linear e*

$$T(x)(y) = T(y)(x) \quad \text{para todos } x, y \in E.$$

Mostremos que T é contínuo. Pelo Teorema do Gráfico Fechado, basta verificar que $G(T)$ é fechado. Para isto seja $(x_n)_{n=1}^\infty$ uma sequência convergindo para x em E e suponha $T(x_n) \rightarrow \varphi$ em E' . Fixado $y \in E$, temos

$$T(y)(x_n) \rightarrow T(y)(x) = T(x)(y)$$

quando $n \rightarrow \infty$ e, além disso, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned}n \geq n_0 &\Rightarrow \|T(x_n) - \varphi\| < \frac{\epsilon}{\|y\|} \\ &\Rightarrow \|T(x_n)(y) - \varphi(y)\| < \frac{\epsilon\|y\|}{\|y\|} \\ &\Rightarrow \|T(x_n)(y) - \varphi(y)\| < \epsilon,\end{aligned}$$

ou seja, $T(x_n)(y) \rightarrow \varphi(y)$. Agora temos que

$$\varphi(y) \leftarrow T(x_n)(y) = T(y)(x_n) \rightarrow T(y)(x) = T(x)(y).$$

Assim podemos concluir que $\varphi(y) = T(x)(y)$. Como $y \in E$ foi escolhido arbitrariamente, $\varphi = T(x)$, e portanto $G(T)$ é fechado.

Capítulo 4

Teoremas de Hahn-Banach

Neste capítulo apresentaremos a demonstração do Teorema de Hahn-Banach, que se trata do estudo da extensão de funcionais lineares contínuos em subespaços vetoriais para espaços normados sob algumas condições. Depois disso seguiremos para as demonstrações da Primeira e Segunda Formas Geométricas do Teorema de Hahn-Banach. Utilizamos como referência [1] e [5].

4.1 O teorema da extensão de Hahn-Banach

Para demonstrarmos o Teorema de Hahn-Banach(caso real) é necessário o Lema de Zorn.

Lema 4.1.1. *(Lema de Zorn) Todo conjunto parcialmente ordenado, não vazio e no qual todo subconjunto totalmente ordenado tem cota superior, tem elemento maximal.*

Teorema 4.1.1. *(Teorema de Hahn-Banach (caso real)) Sejam E um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e $p : E \rightarrow \mathbb{R}$ uma função que satisfaz as seguintes propriedades:*

1. $p(ax) = ap(x)$ para todos $a > 0$ e $x \in E$.
2. $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ para todos $x, y \in E$.

Sejam G subespaço vetorial de E e $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional linear tal que $\varphi(x) \leq p(x)$ para todo $x \in G$. Então existe um funcional linear $\varphi' : E \rightarrow \mathbb{R}$ que estende φ , isto é, $\varphi'(x) = \varphi(x)$ para todo $x \in G$, e que satisfaz $\varphi'(x) \leq p(x)$ para todo $x \in E$.

Demonstração. Vamos considerar a família P de funcionais lineares definidos em subespaços de E que contém G :

$$P = \left\{ \begin{array}{l} \phi : D(\phi) \subseteq E \rightarrow \mathbb{R} : D(\phi) \text{ é subespaço vetorial de } E, \\ \phi \text{ é linear, } G \subseteq D(\phi), \phi(x) = \varphi(x) \text{ para todo } x \in G \\ \text{e } \phi(x) \leq p(x) \text{ para todo } x \in D(\phi) \end{array} \right\}.$$

Em P , definimos a relação abaixo

$$\phi_1 \leq \phi_2 \Leftrightarrow D(\phi_1) \subseteq D(\phi_2) \text{ e } \phi_2 \text{ estende } \phi_1, \text{ isto é, } \phi_2(x) = \phi_1(x) \text{ para todo } x \in D(\phi_1).$$

Esta é uma relação de ordem parcial sobre o conjunto P , pois satisfaz as seguintes propriedades para todos ϕ_1, ϕ_2 e ϕ_3 em P :

1. $\phi_1 \leq \phi_1$, pois $D(\phi_1) \subseteq D(\phi_1)$ e ϕ_1 estende ϕ_1 .
2. Se $\phi_1 \leq \phi_2$ e $\phi_2 \leq \phi_1$, então $D(\phi_1) \subseteq D(\phi_2)$, $D(\phi_2) \subseteq D(\phi_1)$, ϕ_2 estende ϕ_1 e ϕ_1 estende ϕ_2 , então $\phi_1 = \phi_2$.
3. Se $\phi_1 \leq \phi_2$ e $\phi_2 \leq \phi_3$, então $D(\phi_1) \subseteq D(\phi_2)$, $D(\phi_2) \subseteq D(\phi_3)$, ϕ_2 estende ϕ_1 e ϕ_3 estende ϕ_2 , então $D(\phi_1) \subseteq D(\phi_3)$ e ϕ_3 estende ϕ_1 . Logo, $\phi_1 \leq \phi_3$.

A família P não é vazia pois $\varphi \in P$. Vamos utilizar o Lema de Zorn para a família P , para isto vejamos que todo subconjunto totalmente ordenado de P admite uma cota superior. Seja $Q \subseteq P$ totalmente ordenado com a relação $\leq$ definida no conjunto P . Defina $\phi_Q : D(\phi) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$D(\phi_Q) = \bigcup_{\theta \in Q} D(\theta) \text{ e } \phi_Q(x) = \theta(x) \text{ se } x \in D(\theta).$$

Observe que ϕ_Q está bem definida. De fato, dado $y \in D(\phi_Q)$, se $y \in D(\theta_i)$ e $y \in D(\theta_j)$ com $i \neq j$, como Q é totalmente ordenado devemos ter $\theta_i \leq \theta_j$ ou $\theta_j \leq \theta_i$. Suponhamos sem perda de generalidade $\theta_i \leq \theta_j$, neste caso $D(\theta_i) \subseteq D(\theta_j)$ e $\theta_j(x) = \theta_i(x)$ para todo $x \in D(\theta_i)$. Em particular $\theta_i(y) = \theta_j(y)$. Assim ϕ_Q está bem definida. Notemos que $\phi_Q \in P$, pois satisfaz todas as propriedades da família P , e mostremos ϕ_Q é cota superior para Q .

Temos que mostrar que para todo $\psi \in Q$, temos $\psi \leq \phi_Q$. Mas isso pode ser mostrado apenas verificando a forma como a função ϕ_Q está definida:

$$D(\phi_Q) = \bigcup_{\theta \in Q} D(\theta) \supseteq D(\psi),$$

e além do mais $\phi_Q(x) = \psi(x)$ para todo $x \in D(\psi)$. Logo ϕ_Q é cota superior de Q .

Utilizando o Lema de Zorn podemos concluir que P admite um elemento maximal φ' . Agora para finalizarmos a prova do teorema basta mostrarmos que $D(\varphi') = E$. Suponhamos por absurdo que $D(\varphi') \neq E$. Assim podemos escolher $x_0 \in E - D(\varphi')$ e definir $\phi' : D(\phi') \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$D(\phi') : D(\varphi') + [x_0] \text{ e } \phi'(x + tx_0) = \varphi'(x) + t\alpha,$$

onde α será uma constante escolhida de tal maneira que $\phi' \in P$. Queremos primeiramente que α satisfaça as desigualdades abaixo:

$$\varphi'(x) + \alpha = \phi'(x + x_0) \leq p(x + x_0) \text{ para todo } x \in D(\varphi') \text{ e}$$

$$\varphi'(x) - \alpha = \phi'(x - x_0) \leq p(x - x_0) \text{ para todo } x \in D(\varphi').$$

Note que devemos ter

$$\alpha \leq p(x + x_0) - \varphi'(x) \text{ e } \alpha \geq \varphi'(x) - p(x - x_0),$$

o que implica

$$\alpha \leq \inf_{x \in D(\varphi')} \{p(x + x_0) - \varphi'(x)\} \text{ e } \alpha \geq \sup_{x \in D(\varphi')} \{\varphi'(x) - p(x - x_0)\}.$$

Para isso ocorrer basta escolher α de modo que

$$\sup_{x \in D(\varphi')} \{\varphi'(x) - p(x - x_0)\} \leq \alpha \leq \inf_{x \in D(\varphi')} \{p(x + x_0) - \varphi'(x)\}.$$

Esta escolha é possível pois para $x, y \in D(\varphi')$ temos que

$$\begin{aligned} \varphi'(x) + \varphi'(y) &= \varphi'(x + y) \leq p(x + y) \\ &= p(x + x_0 + y - x_0) \\ &\leq p(x + x_0) + p(y - x_0), \end{aligned}$$

e daí segue

$$\varphi'(y) - p(y - x_0) \leq p(x + x_0) - \varphi'(x)$$

para quaisquer $x, y \in D(\varphi')$, isto significa que podemos escolher α satisfazendo as duas desigualdades anteriores. Agora observemos que

1. Para $t > 0$

$$\phi'(x + tx_0) = \phi'\left(t\left(\frac{x}{t} + x_0\right)\right) = t\phi'\left(\frac{x}{t} + x_0\right) \leq tp\left(\frac{x}{t} + x_0\right) = p(x + tx_0).$$

2. Para $t < 0$

$$\phi'(x + tx_0) = \phi'\left(-t\left(\frac{x}{-t} - x_0\right)\right) = -t\phi'\left(\frac{x}{-t} - x_0\right) \leq -tp\left(\frac{x}{-t} - x_0\right) = p(x + tx_0).$$

3. Para $t = 0$

$$\phi'(x + tx_0) = \phi'(x) = \varphi'(x) \leq p(x) = p(x + tx_0).$$

Assim podemos concluir que $\phi' \in P$, $\varphi' \leq \phi'$ e $\varphi' \neq \phi'$. Contradizendo assim a hipótese da maximilidade de φ' . Temos então que $D(\varphi') = E$. □

Teorema 4.1.2. (Teorema de Hahn-Banach) *Sejam E um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ e $p : E \rightarrow \mathbb{R}$ uma função que satisfaz*

$$p(ax) = |a|p(x) \text{ para todos } a \in \mathbb{K} \text{ e } x \in E, \tag{4.1}$$

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y) \text{ para todos } x, y \in E. \quad (4.2)$$

Se $G \subseteq E$ é um subespaço vetorial e $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ um funcional linear tal que $|\varphi(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in G$, então existe um funcional linear $\varphi' : E \rightarrow \mathbb{K}$ que estende φ a E e que satisfaz $|\varphi'(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in E$.

Demonstração. Primeiramente vejamos que $p(x) \geq 0$ para todo $x \in E$. Da equação (4.2) temos que

$$p(0) = p(0+0) \leq 2p(0)$$

e assim $p(0) \geq 0$. Da equação (4.1) resulta que $p(x) = p(-x)$ e assim, para todo $x \in E$,

$$2p(x) = p(x) + p(-x) \geq p((x) + (-x)) = p(0) \geq 0.$$

Mostremos primeiro o caso em que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Nesse caso a hipótese nos garante que $\varphi(x) \leq p(x)$ para todo $x \in E$. Assim, recaímos nas hipóteses do Teorema de Hahn-Banach (caso real) que garante que existe um funcional linear $\varphi' : E \rightarrow \mathbb{R}$ que estende φ a E e que satisfaz $\varphi'(x) \leq p(x)$ para todo $x \in E$. Da equação (4.1) temos que

$$-\varphi'(x) = \varphi'(-x) \leq p(-x) = |-1|p(x) = p(x),$$

para todo $x \in E$. Logo $|\varphi'(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in E$.

Provemos agora o caso em que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Nesse caso E é um subespaço vetorial complexo e φ assume valores em $\mathbb{C}$. Definiremos $\varphi_1, \varphi_2 : G \rightarrow \mathbb{R}$ por $\varphi_1(x) = \operatorname{Re}(\varphi(x))$ e $\varphi_2(x) = \operatorname{Im}(\varphi(x))$. Temos que φ_1 e φ_2 são funcionais lineares reais e $\varphi(x) = \varphi_1(x) + i\varphi_2(x)$. Chamemos de $E_{\mathbb{R}}$ e $G_{\mathbb{R}}$ os espaços vetoriais reais subjacentes a E e G , ou seja, como conjunto o espaço respectivo é o mesmo, a adição é a mesma e apenas a multiplicação por escalar é feita apenas em $\mathbb{R}$. Então φ_1 e φ_2 são funcionais lineares sobre $G_{\mathbb{R}}$. Para $x \in G_{\mathbb{R}}$, obtemos

$$\varphi_1(x) \leq |\varphi_1(x)| \leq |\varphi(x)| \leq p(x).$$

Pelo Teorema de Hahn-Banach (caso real), existe um funcional linear $\varphi'_1 : E_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$ que estende φ_1 a $E_{\mathbb{R}}$ e que satisfaz $\varphi'_1(x) \leq p(x)$ para todo $x \in E_{\mathbb{R}}$. Mostremos o caso de φ_2 . Para cada $x \in G$,

$$i(\varphi_1(x) + i\varphi_2(x)) = i\varphi(x) = \varphi(ix) = \varphi_1(ix) + i\varphi_2(ix).$$

Portanto $\varphi_2(x) = -\varphi_1(ix)$ para todo $x \in G$. Definindo então

$$\varphi' : E \rightarrow \mathbb{C} \text{ onde } \varphi'(x) = \varphi'_1(x) - i\varphi'_1(ix),$$

segue que $\varphi'(x) = \varphi(x)$ para todo $x \in G$. De fato,

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= \varphi'_1(x) - i\varphi'_1(ix) \\ &= \varphi_1(x) - i\varphi_1(ix) \\ &= \varphi(x) + i\varphi_2(x) \\ &= \varphi(x).\end{aligned}$$

Mostremos que φ' é funcional linear no espaço complexo E . Observe que $\varphi'(x+y) = \varphi'(x) + \varphi'(y)$ para todo $x, y \in E$. Dados $a+ib \in \mathbb{C}$ e $x \in E$,

$$\begin{aligned}\varphi'((a+ib)x) &= \varphi'_1(ax+ibx) - i\varphi'_1(i(a+ib)x) \\ &= a\varphi'_1(x) + b\varphi'_1(ix) - i(a\varphi'_1(ix) - b\varphi'_1(x)) \\ &= (a+bi)(\varphi'_1(x) - i\varphi'_1(ix)) \\ &= (a+ib)\varphi'(x).\end{aligned}$$

Mostremos agora que $|\varphi'(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in E$. Se $\varphi'(x) = 0$, então a desigualdade é verdadeira porque $p(x) \geq 0$. Tome $x \in E$ tal que $\varphi'(x) \neq 0$. Então existe θ tal que $\varphi'(x) = |\varphi'(x)|e^{i\theta}$. Segue que $|\varphi'(x)| = e^{-i\theta}\varphi'(x) = \varphi'(e^{-i\theta}x)$. Como $|\varphi'(x)|$ é real, pela equação (4.1), obtemos

$$|\varphi'(x)| = \varphi'(e^{-i\theta}x) = \varphi'_1(e^{-i\theta}x) \leq p(e^{-i\theta}x) = |e^{-i\theta}|p(x) = p(x).$$

□

Corolário 4.1.1. *Seja G um subespaço de um espaço normado E sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ e seja $\varphi : G \rightarrow \mathbb{K}$ um funcional linear contínuo. Então existe um funcional linear contínuo $\varphi' : E \rightarrow \mathbb{K}$ cuja restrição a G coincide com φ e $\|\varphi'\| = \|\varphi\|$.*

Demonstração. Seja $p(x) : E \rightarrow \mathbb{R}$ onde $p(x) = \|\varphi\|||x||$. Observe que p satisfaz as seguintes propriedades:

1. $p(ax) = \|\varphi\|||ax|| = \|\varphi\|||a|||x|| = |a|p(x)$;
2. $p(x+y) = \|\varphi\|||x+y|| \leq \|\varphi\|(|x| + |y|) = \|\varphi\|||x|| + \|\varphi\|||y|| = p(x) + p(y)$.

Como por hipótese $G \subseteq E$ é um subespaço vetorial de E e $\varphi : G \rightarrow \mathbb{K}$ é um funcional linear contínuo, vale a desigualdade abaixo

$$|\varphi(x)| \leq \|\varphi\|||x|| = p(x)$$

para todo $x \in G$. Daí, aplicando o Teorema de Hahn-Banach, existe $\varphi' : E \rightarrow \mathbb{K}$ funcional linear tal que $|\varphi'(x)| \leq \|\varphi\|||x|| = p(x)$. Logo $\|\varphi'\| \leq \|\varphi\|$. Por outro lado, $\|\varphi(x)\| = \|\varphi'(x)\| \leq \|\varphi'\|||x||$ para todo $x \in G$. Então $\|\varphi\| \leq \|\varphi'\|$. Assim, podemos concluir que $\|\varphi\| = \|\varphi'\|$. □

Corolário 4.1.2. *Seja E um espaço normado. Para todo $x_0 \in E$, $x_0 \neq 0$, existe um funcional linear $\varphi \in E'$ tal que $\|\varphi\| = 1$ e $\varphi(x_0) = \|x_0\|$.*

Demonstração. Sejam $G = [x_0]$ subespaço vetorial de E e $\varphi : G \rightarrow \mathbb{K}$ com $\varphi(ax_0) = a\|x_0\|$ funcional linear contínuo. Pelo Corolário 4.1.1, existe $\varphi' : E \rightarrow \mathbb{K}$ funcional linear contínuo cuja restrição a G coincide com φ e

$$\begin{aligned}\|\varphi'\| &= \|\varphi\| = \sup\{|\varphi(ax_0)| : ax_0 \in G \text{ e } \|ax_0\| \leq 1\} \\ &= \sup\{|a|\|x_0\| : ax_0 \in G \text{ e } \|ax_0\| \leq 1\} \\ &= 1.\end{aligned}$$

Falta mostrar que $\varphi'(x_0) = \|x_0\|$. Para isto observe que

$$\varphi'(x_0) = \varphi(x_0) = \|x_0\|.$$

□

Corolário 4.1.3. *Sejam E um espaço normado, $E \neq \{0\}$, e $x \in E$. Então*

$$\begin{aligned}\|x\| &= \sup\{|\varphi(x)| : \varphi \in E' \text{ e } \|\varphi\| \leq 1\} \\ &= \max\{|\varphi(x)| : \varphi \in E' \text{ e } \|\varphi\| \leq 1\}.\end{aligned}$$

Demonstração. Para cada $\varphi \in E'$ com $\|\varphi\| \leq 1$, temos que $|\varphi(x)| \leq \|\varphi\|\|x\| \leq \|x\|$. Isso mostra que

$$\sup\{|\varphi(x)| : \varphi \in E' \text{ e } \|\varphi\| \leq 1\} \leq \|x\|.$$

O fato do supremo ser atingido em um funcional de norma 1 é garantido pelo corolário anterior. □

4.2 Versões vetoriais do Teorema de Hahn-Banach

Definição 4.2.1. *Seja E um espaço de Banach. Um operador linear contínuo $P : E \rightarrow E$ é uma **projeção** se $P^2 = P \circ P = P$.*

Observe que se $P \neq 0$ é uma projeção então, $\|P\| \geq 1$.

Proposição 4.2.1. *Seja F um subespaço do espaço de Banach E . As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *Existe uma projeção $P : E \rightarrow E$ cuja imagem coincide com F , ou seja, $\text{Im}(P) = F$. Neste caso diremos que P é uma projeção sobre F .*

2. F é fechado e existe um subespaço fechado G de E tal que $E = F \oplus G$, isto é, $E = F + G$ e $F \cap G = \{0\}$.

Neste caso $F = \{x \in E : P(x) = x\}$ e $G = \ker(P)$.

Demonstração. (a) $\Rightarrow$ (b) Primeiramente iremos mostrar que a igualdade abaixo é válida

$$F = \{x \in E : P(x) = x\}.$$

Se $x \in F$, tomando $y \in E$ tal que $P(y) = x$, resulta que $x = P(y) = P(P(y)) = P(x)$. Se $x = P(x)$, então $x \in \text{Im}(P) = F$. Chamaremos de id_E o operador identidade em E . Assim

$$F = \{x \in E : P(x) = x\} = \{x \in E : (P - \text{id}_E)(x) = 0\} = (P - \text{id}_E)^{-1}(\{0\}),$$

e o conjunto F será fechado pois é a imagem inversa do fechado $\{0\}$ pela função contínua $(P - \text{id}_E)$.

Tome agora $G = \ker(P)$. Temos assim que G é subespaço fechado de E . Para todo $x \in E$ vale que $(x - P(x)) \in G$, pois $P(x - P(x)) = P(x) - P(P(x)) = 0$, $P(x) \in F$ e $x = (x - P(x)) + P(x)$. Se $x \in G \cap F$, temos $x = P(x)$ pois $x \in F$ e $P(x) = 0$ pois $x \in G$. Daí, $x = 0$.

(b) $\Rightarrow$ (a) Para cada $x \in E$, existem únicos $x_1 \in F$ e $x_2 \in G$ tais que $x = x_1 + x_2$. O operador $P : E \rightarrow E$ dado por $P(x) = x_1$ está bem definido, é linear, $P^2 = P$, $\text{Im}(P) = F$, $\ker(P) = G$ e $F = \{x \in E : P(x) = x\}$. Resta provar que P é contínuo. Seja $(x_n)_{n=1}^\infty$ uma sequência em E tal que $x_n \rightarrow x$ e $P(x_n) \rightarrow y$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, escreva $x_n = y_n + z_n$ com $y_n \in F$ e $z_n \in G$. Então $z_n = x_n - y_n = x_n - P(x_n) \rightarrow x - y$. Como G é fechado, $x - y \in G$, e portanto $P(x) = P(y)$. Mas por outro lado, $y_n = P(x_n) \rightarrow y$. Como F é fechado, $y \in F$. Assim $y = P(y) = P(x)$. Pelo Teorema do Gráfico Fechado temos que P é contínuo. $\square$

Definição 4.2.2. Um subespaço F do espaço de Banach E é **complementado** se satisfaz as condições da proposição anterior. Dizemos que F é λ -**complementado**, $\lambda \geq 1$, se F é complementado por uma projeção de norma igual a λ .

Segue da proposição anterior que todo subespaço complementado de um espaço de Banach é fechado.

Exemplo 4.2.1. Todo subespaço de dimensão finita de um espaço de Banach é complementado.

Seja F um subespaço de dimensão n do espaço de Banach E e $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ base de F . Para cada $j = 1, \dots, n$, considere o funcional linear contínuo $\varphi_j \in F'$ dado por $\varphi_j \left(\sum_{k=1}^n a_k e_k \right) = a_j$. Pelo Teorema de Hahn-Banach, existe $\varphi'_j \in E'$ extensão de φ_j a E . Falta mostrar então que $P = \sum_{j=1}^n \varphi'_j e_j$

é uma projeção de E sobre F . Primeiramente mostremos que P é uma projeção:

$$\begin{aligned}
P^2(x) &= P(P(x)) = P\left(\sum_{j=1}^n \varphi'_j(x)e_j\right) \\
&= \sum_{j=1}^n \varphi'_j(x)P(e_j) \\
&= \sum_{j=1}^n \varphi'_j(x)\left(\sum_{k=1}^n \varphi'_k(e_j)e_k\right) \\
&= \sum_{j=1}^n \varphi'_j(x)\left(\sum_{k=1}^n \varphi_k(e_j)e_k\right) \\
&= \sum_{j=1}^n \varphi'_j(x)e_j = P(x).
\end{aligned}$$

Agora mostremos que P é projeção de E sobre F . Como $P(x) = \sum_{j=1}^n \varphi'_j(x)e_j \in F$ temos que $\text{Im}(P) = F$.

Exemplo 4.2.2. Sejam E e F espaços de Banach. Por meio da projeção $(x, y) \in E \times F \mapsto (x, 0) \in E \times F$, observemos que $E = E \times \{0\}$ é 1-complementado em $E \times F$. De fato, P é uma projeção, $\text{Im}(P) = E \times \{0\}$ e

$$\begin{aligned}
\|P(x, y)\| &= \sup\{\|P(x, y)\| : (x, y) \in E \times F \text{ e } \|(x, y)\| \leq 1\} \\
&= \sup\{\|(x, 0)\| : (x, y) \in E \times F \text{ e } \|(x, y)\| \leq 1\} \\
&\leq 1
\end{aligned}$$

se considerarmos em $E \times F$ qualquer uma das normas clássicas.

Observaremos que operadores definidos em subespaços complementados podem ser estendidos ao espaço todo.

Proposição 4.2.2. Sejam G um espaço normado, F um subespaço complementado do espaço de Banach E e $T \in \mathcal{L}(F, G)$. Então existe $\tilde{T} \in \mathcal{L}(E, G)$ extensão de T a E .

Demonstração. Sejam P uma projeção de E sobre F e $\tilde{T} = T \circ P \in \mathcal{L}(E, G)$. Então, para todo $x \in F$, temos que

$$\tilde{T}(x) = T \circ P(x) = T(P(x)) = T(x).$$

□

Quando o subespaço não é complementado os operadores lineares contínuos nem sempre podem ser estendidos, como veremos na proposição abaixo.

Proposição 4.2.3. *Sejam E um espaço de Banach e F um subespaço não complementado de E . Então não existe operador linear contínuo $T : E \rightarrow F$ tal que $T(x) = x$ para todo $x \in F$, ou seja, o operador identidade em F não pode ser estendido continuamente a E .*

Demonstração. Suponha que existe $T : E \rightarrow F$ tal que $T(x) = x$, para todo $x \in F$. A inclusão $i_F : F \rightarrow E$ é linear e contínua, logo $i_F \circ T$ é um operador linear contínuo de E em E . Como $T(x) \in F$ para todo $x \in E$, segue que $T^2(x) = T(T(x)) = T(x)$ para todo x em E . Assim $i_F \circ T$ seria projeção sobre F , o que contradiz o fato de F não ser complementado em E . $\square$

Teorema 4.2.1. *(Teorema de Phillips) Sejam F um subespaço do espaço normado E e $T \in \mathcal{L}(F, l_\infty)$. Então existe $\tilde{T} \in \mathcal{L}(E, l_\infty)$ extensão de T a E . Mas ainda, $\|\tilde{T}\| = \|T\|$.*

Demonstração. Considere o funcional linear contínuo de norma 1:

$$\varphi_n : l_\infty \rightarrow \mathbb{K} \quad \text{onde} \quad \varphi_n((a_j)_{j=1}^\infty) = a_n.$$

Assim, $\varphi_n \circ T \in F'$ para todo n e $T(x) = ((\varphi_n \circ T)(x))_{n=1}^\infty$ para todo $x \in F$. Pelo Teorema de Hahn-Banach, para cada n existe φ'_n extensão de $\varphi_n \circ T$ a E com $\|\varphi_n \circ T\| = \|\varphi'_n\|$. Podemos observar que o operador $\tilde{T} : E \rightarrow l_\infty$ onde $\tilde{T}(x) = (\varphi'_n(x))_{n=1}^\infty$ é linear. Para todo $x \in F$ temos que

$$\tilde{T}(x) = (\varphi'_n(x))_{n=1}^\infty = (\varphi_n \circ T(x))_{n=1}^\infty = T(x),$$

ou seja, $\tilde{T}$ estende T . Note que

$$\begin{aligned} \|\tilde{T}(x)\| &= \sup_n |\varphi'_n(x)| \\ &\leq \sup_n \|\varphi'_n\| \|x\| \\ &= \sup_n \|\varphi \circ T\| \|x\| \\ &\leq \sup_n \|\varphi_n\| \|T\| \|x\| \\ &= \|T\| \|x\|, \end{aligned}$$

e portanto $\tilde{T}$ é contínuo e $\|\tilde{T}\| \leq \|T\|$. Como $\tilde{T}$ estende T , obtemos que $\|T\| \leq \|\tilde{T}\|$. Logo $\|T\| = \|\tilde{T}\|$. $\square$

Corolário 4.2.1. *Se l_∞ é subespaço fechado de um espaço de Banach E então é 1-complementado em E .*

Demonstração. Utilize o Teorema de Phillips para o operador linear identidade em l_∞ para obter $T : E \rightarrow l_\infty$ que estende a identidade e $\|T\| = 1$. Sendo i o operador inclusão de l_∞ em E , temos que $i \circ T$ é uma projeção de E sobre l_∞ de norma 1. $\square$

4.3 Aplicações do Teorema de Hahn-Banach em espaços separáveis

Como vamos observar os espaços separáveis tem propriedades especiais que tornam a teoria dos espaços separáveis bem mais rica que a geral. Relembre que, se A é um subconjunto de um espaço normado E e $x \in E$, então

$$\text{dist}(x, A) = \inf \{ \|x - y\| : y \in A \}.$$

Proposição 4.3.1. *Sejam E um espaço normado, M um subespaço fechado de E , $y_0 \in E - M$ e $d = \text{dist}(y_0, M)$. Então existe um funcional linear $\phi \in E'$ tal que $\|\phi\| = 1$, $\phi(y_0) = d$ e $\phi(x) = 0$, para todo $x \in M$.*

Demonstração. Seja $N = M + [y_0]$. Então para $z \in N$ existem únicos $a \in \mathbb{K}$ e $x \in M$ tais que $z = x + ay_0$. Defina

$$\phi_0 : N \longrightarrow \mathbb{K}, \quad \phi_0(x + ay_0) = ad.$$

Podemos observar que ϕ_0 é linear. De fato, dados $z = x + ay_0$ e $w = y + by_0$, onde $a, b \in \mathbb{K}$ e $x, y \in M$, temos que

$$\phi_0(z + w) = \phi_0(x + y + (a + b)y_0) = (a + b)d = ad + bd = \phi_0(z) + \phi_0(w)$$

e também

$$\phi_0(\alpha z) = \phi_0(\alpha x + \alpha ay_0) = \alpha ad = \alpha(\phi_0(z)).$$

Além disso, $\phi_0(M) = \{0\}$ e $\phi_0(y_0) = d$. Provemos que $\|\phi_0\| = 1$. Seja $z = x + ay_0 \in N$. Para $a \neq 0$, vale

$$\|z\| = \|x + ay_0\| = |a| \left\| \frac{x}{-a} - y_0 \right\| \geq d|a| = |\phi_0(z)|,$$

e para $a = 0$, como $\|x\| \geq 0$, a desigualdade $\|z\| \geq |\phi_0(z)|$ é direta. Segue que $\|\phi_0\| \leq 1$.

Agora, dado $\epsilon > 0$, existe $x_\epsilon \in M$ tal que

$$d \leq \|y_0 - x_\epsilon\| \leq d + \epsilon.$$

Tome $z_\epsilon = \frac{y_0 - x_\epsilon}{\|y_0 - x_\epsilon\|}$. Então $z_\epsilon \in N$, $\|z_\epsilon\| = 1$ e

$$\phi_0(z_\epsilon) = \frac{d}{\|y_0 - x_\epsilon\|} \geq \frac{d}{d + \epsilon}.$$

Como ϵ é arbitrário, temos $\|\phi_0\| \geq 1$. Logo, $\|\phi_0\| = 1$. Pelo Teorema de Hahn-Banach, existe $\phi \in E'$ que estende ϕ_0 a E tal que $\|\phi\| = \|\phi_0\| = 1$. □

Teorema 4.3.1. *Se E' é separável, então E é separável.*

Demonstração. Seja $S_{E'}$ a esfera unitária de E' , isto é, $S_{E'} = \{\phi \in E' : \|\phi\| = 1\}$. É possível mostrar que todo subconjunto de espaço métrico separável também é separável, logo $S_{E'}$ é separável. Seja $\{\phi_n : n \in \mathbb{N}\}$ um subconjunto enumerável e denso de $S_{E'}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos tomar $x_n \in S_E$ tal que $|\phi_n(x_n)| \geq \frac{1}{2}$. Chamemos $M = \overline{\{x_1, x_2, \dots\}}$ e provemos que $M = E$. Para tanto, suponhamos $M \neq E$ e escolhamos $y_0 \in E - M$. Pela proposição anterior, existe um funcional $\phi \in E'$ com $\|\phi\| = 1$ tal que $\phi(y_0) = d = \text{dist}(y_0, M)$ e $\phi(x) = 0$ para todo $x \in M$. Então

$$\|\phi - \phi_n\| = \sup_{x \in B_E} |(\phi - \phi_n)(x)| \geq |(\phi - \phi_n)(x_n)| = |\phi_n(x_n)| \geq \frac{1}{2},$$

o que é um absurdo, já que $\{\phi_n : n \in \mathbb{N}\}$ é denso em $S_{E'}$. Portanto $M = E$ e a separabilidade de E segue do Lema 2.6.1. $\square$

Proposição 4.3.2. *Todo espaço normado separável é isomorfo isometricamente a um subespaço de ℓ_∞ .*

Demonstração. No caso em que $E = \{0\}$ não há o que fazer. Suponha então que $E \neq \{0\}$. Sejam E um espaço normado separável e $D = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ um subconjunto enumerável denso em E . Podemos supor $0 \notin D$. Pelo Corolário 4.1.2, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe um funcional linear $\phi_n \in E'$ tal que $\|\phi_n\| = 1$ e $\phi_n(x_n) = \|x_n\|$. Considere

$$T : E \longrightarrow \ell_\infty, \quad T(x) = (\phi_n(x_n))_{n=1}^\infty.$$

É claro que $|\phi_n(x)| \leq \|\phi_n\| \|x\| = \|x\|$ para todos $n \in \mathbb{N}$ e $x \in E$, portanto T está bem definido, isto é, $(\phi_n(x))_{n=1}^\infty \in \ell_\infty$, para todo $x \in E$. Além disso, T é linear e

$$\|T(x)\| = \sup\{|\phi_n(x)| : n \in \mathbb{N}\} \leq \|x\|, \quad (4.3)$$

o que prova que T é contínuo. Note que

$$\|T(x_k)\| = \sup\{|\phi_n(x_k)| : n \in \mathbb{N}\} \geq |\phi_k(x_k)| = \|x_k\| \quad (4.4)$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. De (4.3) e (4.4) resulta que $\|T(x_k)\| = \|x_k\|$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Da densidade do conjunto $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ e da continuidade da função $x \in E \mapsto \|T(x)\| \in \mathbb{R}$ segue que $\|T(x)\| = \|x\|$, para todo $x \in E$. De fato, dado $x \in E$, existe $(y_k)_{k=1}^\infty \subset D$ tal que $y_k \longrightarrow x$. Daí,

$$\|x\| \longleftarrow \|y_k\| = \|T(y_k)\| \longrightarrow \|T(x)\|.$$

Assim, T é um isomorfismo isométrico entre E e $T(E) \subset \ell_\infty$. $\square$

4.4 Formas geométricas do Teorema de Hahn-Banach (caso real)

Definição 4.4.1. *Seja V um espaço vetorial não nulo. Um **hiperplano** de V é um subespaço $W \neq V$ tal que se W_1 é um subespaço de V e $W \subseteq W_1$, então $W_1 = V$ ou $W_1 = W$.*

Notemos na próxima proposição que os hiperplanos são exatamente os núcleos dos funcionais lineares.

Proposição 4.4.1. *Sejam V um espaço vetorial, $V \neq \{0\}$ e W um subespaço vetorial de V . Então W é um hiperplano de V se, e somente se, existe um funcional linear não nulo tal que $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\ker(\varphi) = W$.*

Demonstração. Suponhamos que W seja hiperplano de V . Queremos mostrar que $\ker(\varphi) = W$ para algum $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}$ não nulo. Como $W \neq V$, podemos escolher $v_0 \in V - W$. Tomando $W' = [W \cup \{v_0\}]$, como $W \subseteq W'$ e $W \neq W'$, podemos concluir que $W' = V$. Assim cada $v \in V$ pode ser escrito de maneira única como $v = u + av_0$ com $u \in W$ e $a \in \mathbb{R}$. O funcional $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}$ onde $\varphi(u + av_0) = a$ é não nulo, linear, e $\ker(\varphi) = W$.

Reciprocamente, seja $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}$ funcional linear não nulo tal que $\ker(\varphi) = W$. Temos $\ker(\varphi) \neq V$ pois $\varphi \neq 0$. Seja W_1 subespaço de V tal que $\ker(\varphi) \subseteq W_1$. Basta mostrar que $\ker(\varphi) \neq W_1$, então $W_1 = V$. Suponhamos que $\ker(\varphi) \neq W_1$ e escolhamos $v_0 \in W_1 - \ker(\varphi)$. Dado $v \in V$, tomando $u = v - \frac{\varphi(v)v_0}{\varphi(v_0)}$, temos então que $u \in \ker(\varphi) \subseteq W_1$. Segue que $v = u + \frac{\varphi(v)v_0}{\varphi(v_0)} \in W_1$.

□

Definição 4.4.2. *Se H é um hiperplano de V e $v_0 \in V$, o conjunto*

$$v_0 + H = \{v_0 + v : v \in H\}$$

*é chamado **hiperplano afim** de V .*

Da Proposição 4.4.1 sabemos que os hiperplanos afins são os conjuntos da forma

$$\{v \in V : \varphi(v) = a\},$$

onde φ é um funcional linear não nulo em V e $a \in \mathbb{R}$. Chamaremos muitas vezes os hiperplanos afim simplesmente de hiperplanos.

Proposição 4.4.2. *Seja $H = \{x \in E : \varphi(x) = a\}$ um hiperplano afim de um espaço normado E , onde φ é funcional linear em E e $a \in \mathbb{R}$. Então o hiperplano afim H é fechado se, e somente se, o funcional linear φ é contínuo.*

Demonstração. Supondo φ contínuo, o hiperplano afim $H = \varphi^{-1}(\{a\})$ é fechado. Reciprocamente, suponha que H seja fechado. Então $E - H$ é aberto e não vazio, logo existem $x_0 \in E - H$ e $r > 0$ tais que $B(x_0, r) \subseteq E - H$. Como $\varphi(x_0) \neq a$, podemos supor $\varphi(x_0) < a$. Mostremos que então $\varphi(x) < a$ para todo $x \in B(x_0, r)$. Note que se existisse $x_1 \in B(x_0, r)$ com $\varphi(x_1) > a$, tomando $t = \frac{\varphi(x_1) - a}{\varphi(x_1) - \varphi(x_0)}$ teríamos $tx_0 + (1 - t)x_1 \in B(x_0, r)$ e

$$\begin{aligned}\varphi(tx_0 + (1 - t)x_1) &= t\varphi(x_0) + (1 - t)\varphi(x_1) \\ &= \left(\frac{\varphi(x_1) - a}{\varphi(x_1) - \varphi(x_0)} \varphi(x_0) \right) + \left(1 - \frac{\varphi(x_1) - a}{\varphi(x_1) - \varphi(x_0)} \right) \varphi(x_1) \\ &= a,\end{aligned}$$

o que contradiz $B(x_0, r) \subseteq E - H$. Então podemos afirmar que $\varphi(x) < a$ para todo $x \in B(x_0, r)$. Portanto $\varphi(x_0) + r\varphi(z) = \varphi(x_0 + rz) < a$ para todo $z \in E$ com $\|z\| < 1$. Como $\| -z \| = \|z\|$, temos

$$\frac{\varphi(x_0) - a}{r} < \varphi(z) < \frac{a - \varphi(x_0)}{r}$$

para todo $z \in E$ com $\|z\| \leq 1$. Então $\|\varphi\| \leq \frac{a - \varphi(x_0)}{r}$, o que prova a continuidade do operador φ . $\square$

Definição 4.4.3. *Seja C um subconjunto convexo, aberto e que contém a origem do espaço normado E . A aplicação*

$$p_C : E \rightarrow \mathbb{R}, \quad \text{onde} \quad p_C(x) = \inf \left\{ a > 0 : \frac{x}{a} \in C \right\},$$

*é chamada de **funcional de Minkowski** de C .*

Proposição 4.4.3. *O funcional de Minkowski tem as seguintes propriedades:*

- a) $p_C(bx) = bp_C(x)$, para todo $b > 0$ e $x \in E$.
- b) $C = \{x \in E : p_C(x) < 1\}$.
- c) Existe $M > 0$ tal que $0 \leq p_C(x) \leq M\|x\|$ para todo $x \in E$.
- d) $p_C(x + y) \leq p_C(x) + p_C(y)$ para todos $x, y \in E$.

Demonstração. (a) Observe que

$$\begin{aligned}p_C(bx) &= \inf \left\{ a > 0 : \frac{bx}{a} \in C \right\} \\ &= \inf \left\{ bd > 0 : \frac{bx}{bd} \in C \right\} \\ &= \inf \left\{ bd > 0 : \frac{x}{d} \in C \right\} \\ &= b \inf \left\{ d > 0 : \frac{x}{d} \in C \right\} \\ &= bp_C(x).\end{aligned}$$

(b) Como C é um conjunto aberto, para todo $x \in C$ existe $r > 0$ tal que $(1+r)x \in C$. Assim $\frac{x}{(1+r)^{-1}} \in C$ e portanto $p_C(x) \leq (1+r)^{-1} < 1$.

Reciprocamente, suponhamos que $p_C(x) < 1$. Então da definição de ínfimo existe $0 < a < 1$ tal que $\frac{x}{a} \in C$. Como C é convexo temos que $x = a\left(\frac{x}{a}\right) + (1-a)0 \in C$.

(c) Seja $r > 0$ tal que $B(0, r) \subseteq C$. Para $0 < s < r$ temos que $s\frac{x}{\|x\|} \in C$, para todo $x \in E$ e $x \neq 0$. De (a) e (b) obtemos que

$$\begin{aligned} 1 &> p_C\left(s\frac{x}{\|x\|}\right) = \frac{s}{\|x\|}p_C(x) \\ &\Rightarrow p_C(x) \leq \frac{\|x\|}{s} \end{aligned}$$

para todo $x \in E$ não nulo. A desigualdade também é válida para $x = 0$. Assim, tomando $M = \frac{1}{s}$, temos $0 \leq p_C(x) \leq M\|x\|$.

(d) Sejam $x, y \in E$ e $\epsilon > 0$ dados. Vejamos que $\frac{x}{p_C(x)+\epsilon} \in C$. Por (a) obtemos a igualdade abaixo

$$p_C\left(\frac{x}{p_C(x)+\epsilon}\right) = \left(\frac{1}{p_C(x)+\epsilon}\right)p_C(x) < 1,$$

e pelo item (b) segue que $\frac{x}{p_C(x)+\epsilon} \in C$. Da mesma forma $\frac{y}{p_C(y)+\epsilon} \in C$. Como C é convexo, tomando $0 < t < 1$ onde $t = \frac{p_C(x)+\epsilon}{p_C(x)+p_C(y)+\epsilon}$, temos que

$$\frac{x+y}{p_C(x)+p_C(y)+2\epsilon} = t\left(\frac{x}{p_C(x)+\epsilon}\right) + (1-t)\left(\frac{y}{p_C(y)+\epsilon}\right) \in C.$$

De (a) e (b) concluímos que

$$\frac{1}{p_C(x)+p_C(y)+2\epsilon}p_C(x+y) = p_C\left(\frac{x+y}{p_C(x)+p_C(y)+2\epsilon}\right) < 1,$$

e assim $p_C(x+y) < p_C(x)+p_C(y)+2\epsilon$. Quando $\epsilon \rightarrow 0$ obtemos $p_C(x+y) \leq p_C(x)+p_C(y)$. $\square$

Lema 4.4.1. *Seja C um subconjunto convexo, aberto, próprio, e não vazio do espaço normado E e seja $x_0 \in E - C$. Então existe um funcional linear $\varphi \in E'$ tal que $\varphi(x) < \varphi(x_0)$ para todo $x \in C$.*

Demonstração. Suponha $0 \notin C$. Escolha $z_0 \in C$, considere $D = \{x - z_0 : x \in C\}$ e $y_0 = x_0 - z_0$. Temos que $y_0 \in D$, $0 \in D$ e D é convexo aberto. Podemos então considerar o funcional de Minkowski p_D de D . Sejam $G = [y_0]$ e $g(ty_0) = tp_D(y_0)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $g(x) \leq p_D(x)$ para todo $x \in G$. De fato, para $t > 0$, temos que

$$g(ty_0) = tp_D(y_0) = p_D(ty_0),$$

pela proposição anterior. Para $t \leq 0$, temos

$$g(ty_0) = tp_D(y_0) \leq 0 \leq p_D(ty_0),$$

pois $p_D(x) \geq 0$ para todo $x \in E$. Pelo Teorema de Hahn-Banach existe um funcional linear $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\varphi(x) = g(x)$ para todo $x \in G$ e $\varphi(x) \leq p_D(x)$ para todo $x \in E$. Da Proposição 4.4.3 (c) existe $M > 0$ tal que $\varphi(x) \leq p_D(x) \leq M\|x\|$ para $x \in E$. Pode-se concluir então que φ é contínuo. Da Proposição 4.4.3 (b) segue que $\varphi(y) \leq p_D(y) < 1$ para todo $y \in D$. Como $p_D(y_0) \geq 1$ pois $y_0 \notin D$, temos

$$\varphi(y) < 1 \geq p_D(y_0) = g(y_0) = \varphi(y_0) = \varphi(y_0 - z_0)$$

para todo $y \in D$. Da desigualdade anterior e da definição de D segue que

$$\varphi(x) = \varphi(x - z_0) + \varphi(z_0) < \varphi(x_0 - z_0) + \varphi(z_0) = \varphi(x_0)$$

para todo $x \in C$. Se $0 \in C$, basta tomar $z_0 = 0$. Segue que $\varphi(x) < \varphi(x_0)$ para todo $x \in C$. $\square$

Lema 4.4.2. *Sejam E um espaço normado real, $\varphi \in E'$ um funcional linear não nulo e A um subconjunto convexo, não vazio, aberto de E . Então $\varphi(A)$ é um intervalo aberto (não necessariamente limitado).*

Demonstração. Como $\varphi \neq 0$, então φ é sobrejetor, pois sua imagem é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}$. Note que $\varphi(A)$ é convexo. De fato, dados $\varphi(x_1), \varphi(x_2) \in \varphi(A)$ temos que $t\varphi(x_1) + (1-t)\varphi(x_2) = \varphi(tx_1 + (1-t)x_2) \in \varphi(A)$, já que A é convexo. Logo, $\varphi(A)$ é um intervalo.

No caso, em que $\varphi(A)$ é limitado superiormente, chamemos de a sua extremidade superior. Suponhamos que $a \in \varphi(A)$. Então existe $x \in A$ tal que $\varphi(x) = a$ e $\varphi(y) \leq a$ para todo $y \in A$. Como A é aberto existe $\epsilon > 0$ tal que a bola aberta de centro x e raio ϵ está contida em A . Seja $z \in E$ um vetor não nulo. De

$$\left\| x + \frac{\epsilon z}{2\|z\|} - x \right\| = \frac{\epsilon\|z\|}{2\|z\|} = \frac{\epsilon}{2} < \epsilon,$$

podemos concluir que $x + \frac{\epsilon z}{2\|z\|} \in A$. Nesse caso,

$$a \geq \varphi\left(x + \frac{\epsilon z}{2\|z\|}\right) = \varphi(x) + \frac{\epsilon}{2\|z\|}\varphi(z) = a + \frac{\epsilon}{2\|z\|}\varphi(z).$$

Assim podemos concluir que $\varphi(z) \leq 0$. Como z é vetor não nulo arbitrário, isso contradiz o fato de φ ser sobrejetora, e portanto $a \notin \varphi(A)$. Da mesma maneira prova-se que: se $\varphi(A)$ é limitado inferiormente, então $\varphi(A)$ não contém sua extremidade inferior, mostrando assim que $\varphi(A)$ é um intervalo aberto. $\square$

Teorema 4.4.1. *(Primeira forma geométrica do Teorema de Hahn-Banach) Sejam A e B subconjuntos convexos, não vazios e disjuntos do espaço normado E . Se A é aberto, então existem um funcional linear $\varphi \in E'$ e $a \in \mathbb{R}$ tais que*

$$\varphi(x) < a \leq \varphi(y)$$

para todo $x \in A$ e $y \in B$. Podemos dizer que o hiperplano fechado $H = \{z \in E : \varphi(z) = a\}$ separa A e B .

Demonstração. Seja $C = \{a - b : a \in A \text{ e } b \in B\}$. Notemos que:

1. C é aberto, pois pode ser escrito da seguinte maneira $C = \bigcup_{b \in B} \{a - b : a \in A\}$.
2. C é convexo. De fato, dados $x_1, x_2 \in A$, $y_1, y_2 \in B$ e $0 < t < 1$, temos que

$$t(x_1 - y_1) + (1 - t)(x_2 - y_2) = (tx_1 + (1 - t)x_2) - (ty_1 + (1 - t)y_2) \in C.$$

3. $\emptyset \neq C \neq E$, pois A e B são disjuntos e não vazios.

Como $0 \notin C$, pois $A \cap B = \emptyset$, pelo Lema 4.4.1 existe um funcional $\varphi \in E'$ tal que $\varphi(z) < \varphi(0) = 0$ para todo $z \in C$. Logo,

$$\varphi(x) = \varphi(x - y) + \varphi(y) < \varphi(y) \quad (4.5)$$

para todo $x \in A$ e $y \in B$. Por B ser não vazio, $a := \sup_{x \in A} \varphi(x)$ é um número real. Temos que $\varphi(A) \subseteq (-\infty, a]$ e da equação (4.5) segue que $a \leq \varphi(y)$ para todo $y \in B$. Do Lema 3.4 sabemos que $\varphi(A)$ é intervalo aberto, logo $\varphi(A) \subseteq (-\infty, a)$, isto é, $\varphi(x) < a$ para todo $x \in A$. Podemos concluir que $\varphi(x) < a \leq \varphi(y)$ para todos $x \in A$ e $y \in B$. $\square$

Teorema 4.4.2. (*Segunda forma geométrica do Teorema de Hahn-Banach*) Sejam A e B subconjuntos convexos, não vazios e disjuntos do espaço normado E . Se A é fechado e B é compacto, então existem um funcional $\varphi \in E'$ e $a, b \in \mathbb{R}$ tais que

$$\varphi(x) \leq a < b \leq \varphi(y)$$

para todos $x \in A$ e $y \in B$. Para $c \in (a, b)$ diz-se que o hiperplano fechado $H = \{z \in E : \varphi(z) = c\}$ separa A e B estritamente.

Demonstração. Mostremos que é possível escolher $\epsilon > 0$ de modo que $A + B(0, \epsilon)$ e $B + B(0, \epsilon)$ sejam abertos, disjuntos e convexos.

1. Para qualquer escolha de $\epsilon > 0$, os conjuntos $A + B(0, \epsilon)$ e $B + B(0, \epsilon)$ são abertos, pois

$$A + B(0, \epsilon) = \bigcup_{\alpha \in A} (\alpha + B(0, \epsilon)) = \bigcup_{\alpha \in A} B(\alpha, \epsilon).$$

Da mesma maneira temos que $B + B(0, \epsilon)$ é uma união qualquer de conjuntos abertos.

2. Para qualquer escolha de $\epsilon > 0$, como A e B são convexos e $B(0, \epsilon)$ também é convexo, temos que $A + B(0, \epsilon)$ e $B + B(0, \epsilon)$ são convexos.

3. Basta então provar que é possível escolher $\epsilon > 0$ tal que $A + B(0, \epsilon)$ e $B + B(0, \epsilon)$ sejam disjuntos.

Suponha que não seja possível. Nesse caso, para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\left(A + B\left(0, \frac{1}{n}\right)\right) \cap \left(B + B\left(0, \frac{1}{n}\right)\right) \neq \emptyset.$$

Logo existem $(x_n)_{n=1}^\infty \subseteq A$, $(y_n)_{n=1}^\infty \subseteq B$ e $(z_n)_{n=1}^\infty, (w_n)_{n=1}^\infty \subseteq B(0, \frac{1}{n})$ tais que $x_n + z_n = y_n + w_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim,

$$\|x_n - y_n\| = \|z_n - w_n\| < \frac{2}{n} \quad (4.6)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Como B é compacto, $(y_n)_{n=1}^\infty$ tem subsequência convergente em B , digamos que $y_{n_k} \rightarrow \beta \in B$. Pela equação (4.6) segue que $x_{n_k} \rightarrow \beta$. Como A é fechado, $\beta \in A$. Logo $\beta \in A \cap B$, o que contradiz A e B serem disjuntos.

Fixemos $\epsilon > 0$ tal que $A + B(0, \epsilon)$ e $B + B(0, \epsilon)$ sejam disjuntos. Pela Primeira Forma Geométrica do Teorema de Hahn-Banach existe um hiperplano fechado $H = \{z \in E : \varphi(z) = c\}$ de E que separa $A + B(0, \epsilon)$ e $B + B(0, \epsilon)$. Logo para $x \in A$ e $y \in B$ temos

$$\varphi(x) + \sup_{\|z_1\| < \epsilon} \varphi(z_1) \leq c \leq \varphi(y) + \inf_{\|z_2\| < \epsilon} \varphi(z_2),$$

e da linearidade de φ temos

$$\varphi(x) + \epsilon \cdot \sup_{\left\|\frac{z_1}{\epsilon}\right\| < 1} \varphi\left(\frac{z_1}{\epsilon}\right) \leq c \leq \varphi(y) + \epsilon \cdot \inf_{\left\|\frac{z_2}{\epsilon}\right\| < 1} \varphi\left(\frac{z_2}{\epsilon}\right).$$

Resulta que $\varphi(x) + \epsilon\|\varphi\| \leq c \leq \varphi(y) - \epsilon\|\varphi\|$ para todo $x \in A$ e $y \in B$. Basta tomar $a = c - \epsilon\frac{\|\varphi\|}{2}$ e $b = c + \epsilon\frac{\|\varphi\|}{2}$. Assim teremos para $x \in A$

$$\begin{aligned} \varphi(x) &\leq c - \epsilon\|\varphi\| \\ &< \varphi(x) - \epsilon\frac{\|\varphi\|}{2} \\ &\leq a. \end{aligned}$$

Dáí, podemos concluir que $\varphi(x) \leq a$ para todo $x \in A$. E também obteremos para $y \in B$

$$\begin{aligned} c + \frac{\epsilon}{2}\|\varphi\| &< c + \epsilon\|\varphi\| \\ &\leq \varphi(y). \end{aligned}$$

Logo temos que $b \leq \varphi(y)$ para todo $y \in B$. Podemos concluir que $\varphi(x) \leq a < b \leq \varphi(y)$ para todos $x \in A$ e $y \in B$.

□

Corolário 4.4.1. *Seja M um subespaço fechado do espaço normado E . Então para todo $x_0 \in E - M$ existe um funcional $\varphi \in E'$ tal que $\varphi(x_0) = 1$ e $\varphi(x) = 0$ para todo $x \in M$.*

Demonstração. Pela Segunda Forma Geométrica do Teorema de Hahn-Banach para $A = M$ e $B = [x_0]$, existem um funcional linear $\psi \in E'$ e $c \in \mathbb{R}$ tais que $\psi(x) < x < \psi(x_0)$ para todo $x \in M$. Mas a imagem de um subespaço por um operador linear é um subespaço no contradomínio, logo $\psi(x) = 0$ para todo $x \in M$. Assim $\psi(x_0) > 0$ e portanto basta tomar $\varphi = \frac{1}{\psi(x_0)}\psi$, o que implica $\varphi(x_0) = \frac{\psi(x_0)}{\psi(x_0)} = 1$ e $\varphi(x) = 0$ para todo $x \in M$. $\square$

Corolário 4.4.2. *Seja M um subespaço do espaço normado E . Então para todo $x_0 \in E, x_0 \in \overline{M}$ se, e somente se, $\varphi(x_0) = 0$ para todo $\varphi \in E'$ tal que $\varphi(x) = 0$ para todo $x \in M$. Podemos representar $\overline{M}$ da seguinte maneira*

$$\overline{M} = \bigcap \{ \ker(\varphi) : \varphi \in E' \text{ e } M \subseteq \ker(\varphi) \}.$$

Demonstração. ($\subseteq$) Suponha $x_0 \in \overline{M}$. Para todo $\varphi \in E'$ tal que $M \subseteq \ker(\varphi)$, $\overline{M} \subseteq \overline{\ker(\varphi)} = \ker(\varphi)$, pois $\ker(\varphi)$ é fechado.

($\supseteq$) Suponha $x_0 \notin \overline{M}$. Como $\overline{M}$ é um subespaço fechado de E , pelo corolário anterior existe um funcional linear $\varphi_0 \in E'$ tal que $\varphi_0(x_0) = 1$ e $\varphi_0(x) = 0$ para todo $x \in \overline{M}$. Logo,

$$x_0 \notin \bigcap \{ \ker(\varphi) : \varphi \in E' \text{ e } M \subseteq \ker(\varphi) \}.$$

$\square$

Referências Bibliográficas

- [1] G. Botelho, D. Pellegrino, E. Teixeira. *Fundamentos de Análise Funcional*, 2^a edição, SBM, 2015.
- [2] R. G. Bartle. *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*, University of Illinois, 1995.
- [3] E. L. Lima. *Curso de Análise, Volume 2*. Projeto Euclides, 11^a edição, 2011.
- [4] E. L. Lima. *Espaços Métricos*, Projeto Euclides, 4^a edição, IMPA, 2011.
- [5] J. Mujica. *Notas de Aula de Análise Funcional*, IMECC-UNICAMP, 2009.