

Universidade Federal de Uberlândia

Instituto de Ciências Exatas e Naturais do Pontal

Curso de Matemática

Trabalho de Conclusão de Curso

**Formalização dos Números Racionais e
Reais**

por

Pedro Rangel

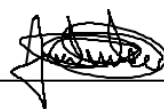
Licenciatura em Matemática – Ituiutaba - MG

Orientador: Prof. Dr. João Carlos Moreira

Formalização dos Números Racionais e Reais

Este exemplar corresponde à redação final da Monografia devidamente corrigida e defendida por **Pedro Rangel** e aprovada pela comissão julgadora.

Ituiutaba, 30 de março de 2022.



Prof. Dr. João Carlos Moreira

Banca Examinadora:

Prof. Dr. João Carlos Moreira
Prof. Dr. Moises Rodrigues Cirilo do Monte
Profa. Dra. Patrícia Borges dos Santos

Monografia apresentada a Instituto de Ciências Exatas e Naturais do Pontal, UFU como requisito parcial para obtenção do título de Licenciada em Matemática.

Dedico este trabalho a todos meus familiares e amigos.

Agradecimentos

A todos meus familiares por me apoiarem nessa trajetória e fase da minha vida, dentre eles: minha mãe **Jamily Helena Rodrigues**, meu pai **Francisco Luiz Correa Rangel**, meu irmão **Gabriel Rodrigues Rosemwinkel**, minha avó **Zalfa Poppi**, meu avô **Mario Rodrigues** e minha tia-avó **Maria Aparecida do Carmo Poppi**.

Aos professores pela paciência e valiosos ensinamentos durante toda a minha trajetória acadêmica, em particular ao meu orientador e amigo **Prof. Dr. João Carlos Moreira**.

Aos membros da banca avaliadora; **Prof. Dr. Moises Rodrigues Cirilo do Monte** e **Profa. Dra. Patrícia Borges dos Santos**, pelas contribuições agregadas a esse trabalho.

Aos meus amigos, pelos valiosos momentos e aprendizados durante essa fase da minha vida, dentre eles: **Beatriz Akiria de Assis Quaresma**, **Daniel Alves da Silva**, **Roberta Agnes Mendes Melo**, **Luana Barbosa da Silva**, **Natália Oliveira do Nascimento**, **Welton Costa Lavércio**.

À **Universidade Federal de Uberlândia (UFU)** e ao **Instituto de Ciências Exatas e Naturais do Pontal (ICENP)** por tudo que me proporcionou.

RESUMO

Neste trabalho realizamos um estudo sobre a formalização do sistema numérico dos números racionais e reais, tema este fundamental na Álgebra e nas demais áreas que se fundamentam em tais conjuntos. A iniciativa de escolher esse tema surgiu da realização de uma iniciação científica acerca da construção do conjunto dos números racionais, fazendo uso da linguagem formal de primeira e segunda ordem. A partir disto, foi proposto realizar um estudo a respeito da construção e formalização desses conjuntos. O objetivo deste trabalho é apresentar um estudo sobre a formalização dos sistemas numéricos dos números racionais e reais como sistemas matemáticos, trazendo uma construção formal por meio da linguagem lógica de primeira e segunda ordem. Primeiramente estudamos alguns conceitos que serviram de base para desenvolver as teorias propostas neste trabalho, e após isso, construir essas teorias com a devida formalidade. Sendo assim, essa pesquisa é de caráter bibliográfico e teve como principais referências: Bourbaki (1974); Chang (1990) e Keisler (1990); Deskins (1964); Moreira (2019); Hilbert (1950) e Ackermann (1950); Kennington (2020); Krapp (2014); Moreira (2020); Suppes (1960). Os resultados alcançados neste trabalho foram principalmente o desenvolvimento de conteúdos além dos vistos na graduação, a utilização de uma linguagem formal para construir as teorias propostas e também a proposta de utilizar uma metodologia que possibilite formalização de uma teoria.

Palavras-chave: Sistema matemático, sistema numérico, linguagem formal.

LISTA DE SÍMBOLOS

$=_{\mathbb{Z}}$	Relação de igualdade em $\mathbb{Z}$.
$<_{\mathbb{Z}}$	Desigualdade restrita em $\mathbb{Z}$.
$\leq_{\mathbb{Z}}$	Relação de ordem total em $\mathbb{Z}$.
A_n	Axioma dos números inteiros de número n .
P_n	Proposição de número n .
L_n	Lema de número n .
$\models_n$	A sentença de número n é válida.
$\vdash$	Início da demonstração.
$\blacksquare$	Final da demonstração.
$\stackrel{\text{def}}{=}$	Igual por definição.
$\in$	Pertence.
$\subset$	Contido.
$\forall$	Quantificador universal, lê-se: Para todo.
$\exists$	Quantificador existencial, lê-se: Existe.
$\leftrightarrow$	Bi condicional, lê-se: Equivalente.
$\Leftrightarrow$	O lado esquerdo é uma notação para o lado direito.
$\rightarrow$	Condicional, lê-se: Implica.
$\vee$	Operador lógico de disjunção inclusiva.
$\underline{\vee}$	Operador lógico de disjunção exclusiva.
$\wedge$	Operador lógico de conjunção.
$\neg$	Operador lógico de negação.
$()$	Funcionam como pontuação na separação entre termos e fórmulas.
ιw	Um conjunto w tal que ...
$\aleph_0$	Número cardinal Aleph zero.
$\aleph_1$	Número cardinal Aleph um.
Λ	Absurdo.
$A_n \downarrow P_n$	Implica pelo axioma de número n e/ou implica pela proposição de número n .
$A_n \uparrow P_n$	Equivalente pelo axioma de número n e/ou equivalente pela proposição de número n .

Sumário

AGRADECIMENTOS	IV
RESUMO	V
INTRODUÇÃO.....	11
CAPÍTULO 1 – SISTEMAS MATEMÁTICOS.....	14
1.1 SISTEMAS MATEMÁTICOS	14
1.2 SISTEMAS ALGÉBRICOS	18
CAPÍTULO 2 – SISTEMAS FORMAIS.....	23
2.1 ABORDAGEM HISTÓRICA	23
2.2 ABORDAGEM FORMAL	25
CAPÍTULO 3 – TEORIA DOS NÚMEROS RACIONAIS.....	32
3.1 ABORDAGEM HISTÓRICA	32
3.2 ABORDAGEM ALGÉBRICA	34
3.3 OPERAÇÕES DE ADIÇÃO E MULTIPLICAÇÃO DOS NÚMEROS RACIONAIS.....	42
3.4 OPERAÇÕES DE SUBTRAÇÃO E DIVISÃO DOS NÚMEROS RACIONAIS	54
3.5 O SISTEMA NUMÉRICO DOS NÚMEROS RACIONAIS	56
3.6 PROPRIEDADES IMPORTANTES	60
CAPÍTULO 4 – TEORIA DOS NÚMEROS REAIS	68
4.1 ABORDAGEM HISTÓRICA	68
4.2 SEQUÊNCIAS DE CAUCHY EM $\mathbb{Q}$	69
4.3 ABORDAGEM ALGÉBRICA.....	78
4.4 OPERAÇÕES DE ADIÇÃO E MULTIPLICAÇÃO DOS NÚMEROS REAIS.....	87
4.5 OPERAÇÕES DE SUBTRAÇÃO E DIVISÃO PARA OS NÚMEROS REAIS.....	100
4.6 SISTEMA NUMÉRICO DOS NÚMEROS REAIS	103
4.7 PROPRIEDADE IMPORTANTES.....	106
CONSIDERAÇÕES.....	113
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	114

INTRODUÇÃO

Neste trabalho apresentaremos uma formalização dos sistemas numéricos dos racionais e reais por meio de um sistema lógico-matemático. A ideia de formalizar a construção de tais sistemas, visa aprofundar o tema e desconstruir a noção intuitiva dos mesmos, para tal formalização utilizamos as linguagens de primeira e segunda ordem.

A iniciativa de se fazer um estudo aprofundado sobre a formalização desses sistemas, surgiu principalmente da realização de uma iniciação científica sobre equações polinomiais, pois para realizar a solubilidade por radicais de uma equação é necessário ter conhecimento sobre as propriedades básicas dessas teorias. Ademais, outro fator que propiciou este estudo foi a realização de outra iniciação científica sobre a construção do conjunto dos números racionais, fazendo uso da linguagem simbólica de primeira e segunda ordem. A partir disto, foi proposto realizar um estudo sobre a formalização desses conjuntos.

Para formalizar esses sistemas foram estudados alguns conceitos abrangidos pela área da Álgebra, dentre eles, os conceitos de grupo, anel, corpo, sistema numérico, álgebra, sistema relacional, sistema algébrico e sistema matemático, e também estudos da literatura histórica destas definições no âmbito da Matemática. Além do mais, foi necessário estudar alguns conceitos desenvolvidos pela teoria de modelos acerca da formalização de uma teoria com a utilização de uma linguagem formal.

Com isso, foram realizados estudos bibliográficos acerca do tema e as principais referências utilizadas são: Bourbaki (1974); Chang (1990) e Keisler (1990); Deskins (1964); Hilbert (1950) e Ackermann (1950); Krapp (2014); Kennington (2020); Moreira (2019); Moreira (2020); Suppes (1960).

Os resultados alcançados nesse trabalho foram principalmente o desenvolvimento de conteúdos além dos vistos na graduação, a utilização de uma linguagem formal para construir as teorias propostas e também a proposta de utilizar uma metodologia que possibilite a formalização de uma teoria.

Objetivo

O objetivo deste trabalho é apresentar um estudo sobre a formalização dos sistemas numéricos dos números racionais e reais como sistemas matemáticos, trazendo uma construção formal utilizando a linguagem lógica de primeira e segunda ordem.

Organização do Trabalho

O presente trabalho foi organizado da seguinte maneira:

No capítulo 1, apresentaremos algumas definições que serviram de base para a construção dos sistemas numéricos dos racionais e reais. Nesse capítulo utilizamos uma linguagem sincopada a fim de apresentar tais definições na linguagem formal. Nesse capítulo foram utilizadas as seguintes referências: Bourbaki (1974); Deskins (1964); Grillet (2007); Mal'cev (1970); Moreira (2019); Moreira (2020); Pinedo (2008); Tarski (1956 - 1958) e Vaught (1956 – 1958).

No capítulo 2, introduzimos uma abordagem lógica afim de formalizar a construção dos sistemas numéricos abordados, observando que tais construções foram baseadas na teoria de sistemas matemáticos. Neste capítulo foram utilizadas as seguintes referências: Burris (2021) e Legris (2021); Chang (1990) e Keisler (1990); Gödel (1992); Hilbert (1934) e Bernays (1934); Hilbert (1950) e Ackermann (1950); Kennedy (2008); Kennington (2020); Moreira (2019); O'Connor (1999) e Robertson (1999); O'Connor (2003) e Robertson (2003); Peano (1889); Russel (1903); Russell (1963) e Whitehead (1963); Stoll (1963); Shoenfield (1967); Suppes (1960).

Nos capítulos 3 e 4, trouxemos a construção formal dos sistemas dos números racionais e reais, respectivamente. Para isto, definimos os pressupostos primitivos necessários para construção de tais sistemas numéricos. Neste capítulo foram utilizadas as seguintes referências: Dedekind (1892); Deskins (1964); Ebbinghaus, et al (1991); Kahn (2009); Kitcher (1978); Krapp (2014); Machado (2014); Nechaev (2011); O'Connor (1999b) e Robertson (1999b); O'Connor (2000) e Robertson (2000); Vogel (2008); O'Connor (2002) e Robertson (2002); O'Connor (2004) e Robertson (2004); O'Connor (1998) e Robertson (1998); O'Connor (2005)

e Robertson (2005); O'Connor (1997) e Robertson (1997); Sieg (2003) e Schlimm (2003); Suppes (1960); Tannery (1894); Weiss (2015).

CAPITULO 1 – Sistemas Matemáticos

1.1 Sistemas Matemáticos

Para a construção formal dos conjuntos dos números racionais e reais, utilizamos algumas propriedades do conjunto dos números inteiros. Todas essas propriedades são passíveis de demonstração, porém, não serão demonstradas no contexto desse trabalho e sim consideradas como axiomas.

- $$\begin{aligned}
 A_1. & (\forall x)(\exists 0)(x + 0 =_{\mathbb{Z}} 0 + x =_{\mathbb{Z}} x) \\
 A_2. & (\forall x)(\exists (-x))(x + (-x) =_{\mathbb{Z}} (-x) + x =_{\mathbb{Z}} 0) \\
 A_3. & (\forall x)(\exists 1)(x \cdot 1 =_{\mathbb{Z}} 1 \cdot x =_{\mathbb{Z}} x) \\
 A_4. & (\forall x)(\forall y)(\forall z)(x + (y + z) =_{\mathbb{Z}} (x + y) + z) \\
 A_5. & (\forall x)(\forall y)(x + y =_{\mathbb{Z}} y + x) \\
 A_6. & (\forall x)(\forall y)(\forall z)(x \cdot (y \cdot z) =_{\mathbb{Z}} (x \cdot y) \cdot z) \\
 A_7. & (\forall x)(\forall y)(x \cdot y =_{\mathbb{Z}} y \cdot x) \\
 A_8. & (\forall x)(\forall y)(\forall z)(x \cdot (y + z) =_{\mathbb{Z}} x \cdot y + x \cdot z) \\
 A_9. & (\forall x)(\forall y)(x \cdot y =_{\mathbb{Z}} 0 \rightarrow (x =_{\mathbb{Z}} 0) \vee (y =_{\mathbb{Z}} 0)) \\
 A_{10}. & (\forall x)(\forall y)(\forall c)(x =_{\mathbb{Z}} y \leftrightarrow x + c =_{\mathbb{Z}} y + c) \\
 A_{11}. & (\forall x)(\forall y)(\forall c)(c \in \mathbb{Z}^*)(x =_{\mathbb{Z}} y \leftrightarrow x \cdot c =_{\mathbb{Z}} y \cdot c) \\
 A_{12}. & (\forall x)(\forall y)(\forall c)(x \leq_{\mathbb{Z}} y \leftrightarrow x + c \leq_{\mathbb{Z}} y + c) \\
 A_{13}. & (\forall x)(\forall y)(\forall c)(c \in \mathbb{Z}_+^*)(x \leq_{\mathbb{Z}} y \leftrightarrow x \cdot c \leq_{\mathbb{Z}} y \cdot c) \\
 A_{14}. & (\forall x)(\forall y)((x <_{\mathbb{Z}} y) \vee (x =_{\mathbb{Z}} y) \vee (y <_{\mathbb{Z}} x)) \\
 A_{15}. & (\forall x)(x =_{\mathbb{Z}} x) \\
 A_{16}. & (\forall x)(\forall y)((x =_{\mathbb{Z}} y) \rightarrow (y =_{\mathbb{Z}} x)) \\
 A_{17}. & (\forall x)(\forall y)(\forall z)((x =_{\mathbb{Z}} y) \wedge (y =_{\mathbb{Z}} z) \rightarrow (x =_{\mathbb{Z}} z)) \\
 A_{18}. & (\forall x)(x \leq_{\mathbb{Z}} x) \\
 A_{19}. & (\forall x)(\forall y)((x \leq_{\mathbb{Z}} y) \wedge (y \leq_{\mathbb{Z}} x) \rightarrow (x =_{\mathbb{Z}} y)) \\
 A_{20}. & (\forall x)(\forall y)(\forall z)((x \leq_{\mathbb{Z}} y) \wedge (y \leq_{\mathbb{Z}} z) \rightarrow (x \leq_{\mathbb{Z}} z)) \\
 A_{21}. & (\forall x)(\forall y)(0 \leq_{\mathbb{Z}} x)(0 \leq_{\mathbb{Z}} y)((-x) \cdot (-y) =_{\mathbb{Z}} x \cdot y) \\
 A_{22}. & (\forall x)(\forall y)(0 \leq_{\mathbb{Z}} x)(0 \leq_{\mathbb{Z}} y)(x \cdot (-y) =_{\mathbb{Z}} (-x) \cdot y =_{\mathbb{Z}} -x \cdot y) \\
 A_{23}. & (\forall x)(\forall y)((x \leq_{\mathbb{Z}} 0) \wedge (y \leq_{\mathbb{Z}} 0) \rightarrow (0 \leq_{\mathbb{Z}} x \cdot y))
 \end{aligned}$$

Agora que definimos os axiomas que serão utilizados para o processo de formalização, destacamos alguns conceitos básicos a serem utilizados em nossa construção. Primeiramente apresentamos o conceito de conjunto que, de acordo com Cantor (1845 – 1918), é qualquer coleção de objetos de um todo, definidos e separados através de nossa intuição ou nosso pensamento, não importando a natureza nem a ordem desses objetos no conjunto. Esses objetos são chamados de elementos do conjunto. (MOREIRA, 2019)

Definição 1. O *produto direto* de A por B , denotado por $A \times B$ é o conjunto de todos os pares (x, y) tal que $x \in A$ e $y \in B$.

$$\left((A \times B) \stackrel{\text{def}}{=} (\iota w)(\forall(x, y))((x, y) \in w \leftrightarrow (x \in A) \wedge (y \in B)) \right)$$

Definição 2. Uma *relação* R sobre $A \times B$, é qualquer subconjunto do produto direto de A por B .

$$\left((R \subseteq (A \times B)) \stackrel{\text{def}}{=} (\iota w)(\forall(x, y))((x, y) \in w \rightarrow (x, y) \in (A \times B)) \right)$$

Definição 3. Uma relação R sobre E é dita de *equivalência* se:

$$\left((\forall x)(\forall y)(\forall z) \left(\begin{array}{c} xRx \\ \wedge \\ xRy \rightarrow yRx \\ \wedge \\ (xRy) \wedge (yRz) \rightarrow xRz \end{array} \right) \right)$$

Definição 4. Uma relação R sobre E é dita de *ordem parcial* se:

$$\left((\forall x)(\forall y)(\forall z) \left(\begin{array}{c} xRx \\ \wedge \\ (xRy) \wedge (yRx) \rightarrow x = y \\ \wedge \\ (xRy) \wedge (yRz) \rightarrow xRz \end{array} \right) \right)$$

Definição 5. Uma relação de ordem parcial R sobre E é dita de *ordem total* se:

$$\left((\forall x)(\forall y)(\forall z) \left((xRy) \vee (x = y) \vee (yRx) \right) \right)$$

Definição 6. Uma *classe de equivalência* $\bar{x}$ é o conjunto de todos os elementos y que estão relacionados com x , por meio da relação de equivalência R .

$$(\bar{x} \stackrel{\text{def}}{=} (\iota w)(\forall y)(y \in w \leftrightarrow yRx))$$

Definição 7. Uma relação $f \subseteq (E \times E)$, é dita uma *função* se:

$$\left((f: E \rightarrow E) \Leftrightarrow (\forall x)(\exists! y)((x, y) \in f) \right)$$

Definição 8. Uma *operação interna* φ sobre E é uma função $\varphi: E \times E \rightarrow E$.

Definição 9. Uma *operação externa* φ sobre A é uma função $\varphi: A \times B \rightarrow A$.

Definição 10. O *conjunto quociente* de $A \times B$ sobre uma relação de equivalência R é definido por:

$$\left((A \times B)/R \stackrel{\text{def}}{=} \{ \overline{(x, y)} : (x, y) \in (A \times B) \} \right)$$

Escólio. Uma *Estrutura matemática*, é um objeto matemático que unifica conceitos da matemática e é utilizado como ponto de partida para o desenvolvimento de uma teoria. Nessa teoria, esses conceitos podem ser considerados como primitivos. (MOREIRA, 2019)

Definição 11. Uma família de conjuntos E_j em U , com $j \in J$, denotado por $(E_j)_{j \in J}$, é definido por:

$$\left((E_j)_{j \in J} \stackrel{\text{def}}{=} \{ E_j : j \in J \} \right) (E_j \in U)$$

Definição 12. Dada uma família de conjuntos E_j , com $j \in J$ e I um conjunto de índices, definimos o conjunto chamado de união da família E_α , $\alpha \in I$, denotado por $\bigcup_{\alpha \in I} E_\alpha$, é definido por:

$$\left(\bigcup_{\alpha \in I} E_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \{x : (\exists \alpha \in I) \wedge (x \in E_\alpha)\} \right)$$

Definição 13. O produto direto de uma família de conjunto não vazios E_α , $\alpha \in I$, denotado por $\prod_{\alpha \in I} E_\alpha$, é o conjunto de todas as funções $f: I \rightarrow \bigcup_{\alpha \in I} E_\alpha$, onde $f(\alpha) \in E_\alpha$, $\forall \alpha \in I$.

$$\left(\prod_{\alpha \in I} E_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \left(f: I \rightarrow \bigcup_{\alpha \in I} E_\alpha \right) : (\forall \alpha)(\alpha \in I)(f(\alpha) \in E_\alpha) \right\} \right)$$

Definição 14. Uma relação ω -ária sobre E , onde ω é um número cardinal, é qualquer subconjunto do produto direto de E^ω .

Definição 15. Uma operação ω -ária sobre E é uma função do produto direto de E^ω sobre o conjunto E .

Definição 14. Um *sistema matemático*, denotado por $S = (E, R, O, A)$, é uma classe de estrutura matemática composta de um conjunto não vazio E , uma família $R = (r_j)_{j \in J}$ de relações ω_j -ária sobre E , uma família $O = (o_k)_{k \in K}$ de operações ω_k -ária sobre E e uma família $A = (a_l)_{l \in L}$ de axiomas.

$$S = (E, R, O, A) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c} E \Leftrightarrow (\iota w)(\exists x)(x \in w) \\ \wedge \\ R \Leftrightarrow (\exists (r_j)_{j \in J}) \left(\left(r_j \subseteq \left(\left(\prod_{\lambda \in J} E \right) \times E \right) \right) \underline{\vee} ((r_j)_{j \in J} = \emptyset) \right) \\ \wedge \\ O \Leftrightarrow (\exists (o_k)_{k \in K}) \left(\left(o_k : \left(\prod_{\lambda \in K} E \right) \times E \rightarrow E \right) \underline{\vee} ((o_k)_{k \in K} = \emptyset) \right) \\ \wedge \\ A \Leftrightarrow ((\exists (a_l)_{l \in L}) \underline{\vee} ((a_l)_{l \in L} = \emptyset)) \end{array} \right)$$

Escólio. No caso em que a família de relações, operações e axiomas são todas vazias temos que o sistema matemático é apenas o conjunto E , que neste caso não considerado como sendo um sistema matemático.

Escólio. Para definir o sistema matemático dos números racionais e reais, iremos utilizar uma versão mais simples de sistema matemático, pois utilizaremos apenas um número finito de relações, operações e axiomas para construção desses sistemas.

1.2 Sistemas algébricos

Definição 15. Um sistema matemático $S = (E, \emptyset, O, \emptyset)$, é chamado de *álgebra universal* ou simplesmente *álgebra*.

$$S = (E, O) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c} E \Leftrightarrow (\iota w)(\exists x)(x \in w) \\ \wedge \\ O \Leftrightarrow (\exists (o_k)_{k \in K}) \left(o_k : \left(\prod_{\lambda \in K} E \right) \times E \rightarrow E \right) \end{array} \right)$$

Definição 16. Uma álgebra $S = (E, O)$, onde $O = \{\varphi\}$ e φ é uma operação binária sobre E é chamada de *magma*.

$$(S_1 = (E, \{\varphi\})) \Leftrightarrow S = (E, O) \wedge (\exists! \varphi)(\varphi \in (o_k)_{k \in K})$$

Escólio. $S_1 = (E, \{\varphi\})$, denota a álgebra chamada *magma*.

Definição 17. Um magma $S_1 = (E, \{\varphi\})$, é chamado de *semigrupo* se φ é associativa.

$$\left(S_2 = (E, \{\varphi\}) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c} (S_1 = (E, \{\varphi\})) \\ \wedge \\ (\forall x)(\forall y)(\forall z)(x \varphi (y \varphi z) = (x \varphi y) \varphi z) \end{array} \right) \right)$$

Escólio. $S_2 = (E, \{\varphi\})$, denota a álgebra chamada *semigrupo*.

Definição 18. Um semigrupo $S_2 = (E, \{\varphi\})$, é chamado de *monóide* se para todo elemento de E existe um único elemento neutro e_φ em E em relação a operação φ .

$$\left(S_3 = (E, \{\varphi\}) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c} (S_2 = (E, \{\varphi\})) \\ \wedge \\ (\forall x)(\exists! e_\varphi)(x \varphi e_\varphi = e_\varphi \varphi x = x) \end{array} \right) \right)$$

Escólio. $S_3 = (E, \{\varphi\})$, denota a álgebra chamada *monóide*.

Definição 19. Um monóide $S_3 = (E, \{\varphi\})$, é chamado de *grupo* se para todo elemento de E existe um único elemento simétrico em E , em relação a operação φ .

$$\left(S_4 = (E, \{\varphi\}) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c} (S_3 = (E, \{\varphi\})) \\ \wedge \\ (\forall x)(\exists! y)(x \varphi y = y \varphi x = e_\varphi) \end{array} \right) \right)$$

Escólio. $S_4 = (E, \{\varphi\})$, denota a álgebra chamada *grupo*.

Definição 20. Um grupo $S_4 = (E, \{\varphi\})$, é chamado de *grupo abeliano* ou *comutativo*, se a operação φ for comutativa.

$$\left(S_5 = (E, \{\varphi\}) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c} (S_4 = (E, \{\varphi\})) \\ \wedge \\ (\forall x)(\forall y)(x \varphi y = y \varphi x) \end{array} \right) \right)$$

Escólio. $S_5 = (E, \{\varphi\})$, denota a álgebra chamada *grupo abeliano* ou *comutativo*.

Definição 21. Uma álgebra $S = (E, \{\varphi, \psi\})$, é chamado de *sistema numérico*, se ambas as operações forem associativas, comutativas e pelo menos uma das operações seja distributiva com relação à outra.

$$S_6 = (E, \{\varphi, \psi\}) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c} (S = (E, \{\varphi, \psi\})) \\ \wedge \\ (\forall x)(\forall y)(\forall z)(x \varphi (y \varphi z) = (x \varphi y) \varphi z) \\ \wedge \\ (\forall x)(\forall y)(\forall z)(x \psi (y \psi z) = (x \psi y) \psi z) \\ \wedge \\ (\forall x)(\forall y)(x \varphi y = y \varphi x) \\ \wedge \\ (\forall x)(\forall y)(x \psi y = y \psi x) \\ \wedge \\ (\forall x)(\forall y)(\forall z) \left(\begin{array}{c} (x \varphi (y \psi z) = (x \varphi y) \psi (x \varphi z)) \\ \vee \\ (x \psi (y \varphi z) = (x \psi y) \varphi (x \psi z)) \end{array} \right) \end{array} \right)$$

Escólio. $S_6 = (E, \{\varphi, \psi\})$, denota a álgebra chamada *sistema numérico*, e seus elementos são chamados de números.

Definição 22. Uma álgebra $S = (E, \{\varphi, \psi\})$, é chamado de *anel* se, $S = (E, \{\varphi\})$ é um grupo abeliano, $S = (E, \{\psi\})$ é um semigrupo e ψ seja distributiva em relação a φ .

$$S_7 = (E, \{\varphi, \psi\}) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c} ((S_5 = (E, \{\varphi\})) \wedge (S_2 = (E, \{\psi\}))) \\ \wedge \\ (\forall x)(\forall y)(\forall z)(x \psi (y \varphi z) = (x \psi y) \varphi (x \psi z)) \end{array} \right)$$

Escólio. $S_7 = (E, \{\varphi, \psi\})$, denota a álgebra, chamada *anel*.

Definição 23. Um anel $S_7 = (E, \{\varphi, \psi\})$ é chamado *anel comutativo* se, ψ for comutativo.

$$\left(S_8 = (E, \{\varphi, \psi\}) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c} (S_7 = (E, \{\varphi, \psi\})) \\ \wedge \\ (\forall x)(\forall y)(x \psi y = y \psi x) \end{array} \right) \right)$$

Escólio. $S_8 = (E, \{\varphi, \psi\})$, denota a álgebra, chamada **anel comutativo**.

Definição 24. Um anel $S_7 = (E, \{\varphi, \psi\})$ é chamado **anel com unidade** se, para todo elemento de E existe um único elemento neutro e_ψ em E em relação a operação ψ . Neste caso, tal elemento é chamado **unidade do anel**.

$$\left(S_9 = (E, \{\varphi, \psi\}) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c} (S_7 = (E, \{\varphi, \psi\})) \\ \wedge \\ (\forall x)(\exists! e_\psi)(x \psi e_\psi = e_\psi \psi x = x) \end{array} \right) \right)$$

Escólio. $S_9 = (E, \{\varphi, \psi\})$, denota a álgebra, chamada **anel com unidade**.

Definição 25. Um **anel comutativo com unidade** $S = (E, \{\varphi, \psi\})$ é chamado de anel de integridade ou domínio se vale a lei do anulamento com relação a operação ψ .

$$\left(S_{10} = (E, \{\varphi, \psi\}) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c} ((S_8 = (E, \{\varphi, \psi\})) \wedge (S_9 = (E, \{\varphi, \psi\}))) \\ \wedge \\ (\forall x)(\forall y)(x \psi y = e_\varphi \rightarrow (x = e_\varphi) \vee (y = e_\varphi)) \end{array} \right) \right)$$

Escólio. $S_{10} = (E, \{\varphi, \psi\})$, denota a álgebra, chamada **anel de integridade** ou **domínio**.

Definição 26. Um anel comutativo com unidade $S = (E, \{\varphi, \psi\})$, é chamado de **corpo** se todo elemento não nulo do anel admite elemento simétrico com relação a operação ψ .

$$\left(S_{11} = (E, \{\varphi, \psi\}) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c} ((S_8 = (E, \{\varphi, \psi\})) \wedge (S_9 = (E, \{\varphi, \psi\}))) \\ \wedge \\ (\forall x)(\exists y)(x \neq e_\varphi)(x \psi y = y \psi x = e_\psi) \end{array} \right) \right)$$

Escólio. $S_{11} = (E, \{\varphi, \psi\})$, denota a álgebra, chamada **corpo**.

Definição 27. Um sistema matemático $S = (E, R, \emptyset, \emptyset)$, é chamado de *sistema relacional*.

$$\left(S = (E, R) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c} E \Leftrightarrow (\iota w)(\exists x)(x \in w) \\ \wedge \\ R \Leftrightarrow (\exists (r_j)_{j \in J}) \left(r_j \subseteq \left(\left(\prod_{\lambda \in J} E \right) \times E \right) \right) \end{array} \right) \right)$$

Definição 28. Um sistema matemático $S = (E, R, O, \emptyset)$, é chamado de *sistema algébrico* ou *estrutura algébrica*.

$$\left(S = (E, R, O) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c} E \Leftrightarrow (\iota w)(\exists x)(x \in w) \\ \wedge \\ R \Leftrightarrow (\exists (r_j)_{j \in J}) \left(r_j \subseteq \left(\left(\prod_{\lambda \in J} E \right) \times E \right) \right) \\ \wedge \\ O \Leftrightarrow (\exists (o_k)_{k \in K}) \left(o_k : \left(\prod_{\lambda \in K} E \right) \times E \rightarrow E \right) \end{array} \right) \right)$$

CAPÍTULO 2 – Sistemas Formais

2.1 Abordagem Histórica

Nesta seção falaremos sobre a evolução da lógica matemática. Começando pela *lógica proposicional*, em seguida a *lógica de predicados* e por fim a *teoria de modelos* destacando os principais matemáticos que contribuíram para o seu desenvolvimento.

A lógica proposicional, devida a Aristóteles (384 – 322 a.C), de acordo com O'Connor (1999a) e Robertson (1999a) trouxe grandes contribuições para sistematizar a lógica dedutiva na matemática. De acordo com Burris (2021) e Legris (2021), o livro “*Mathematical Analysis of Logic*” publicado em 1847 por George Boole, foi a primeira tentativa de algebrização da lógica aristotélica, que atualmente é conhecida como *Álgebra Booleana*.

Em meados de 1889, Giuseppe Peano (1858 – 1932) em seu artigo intitulado “*Arithmetices Principia, Nova Methodo Exposita*” propôs um conjunto de axiomas para formalização da teoria dos números naturais. Peano (1889), afirma ter fundamentado parte das notações e proposições lógicas empregada em seu trabalho, baseado nos estudos de George Boole. Dois fatos importantes que observamos nesse artigo foi o uso de um método axiomático para construção dos números naturais e a lógica simbólica da época para formalizar essa teoria, simbologia essa bem diferente em comparação com as notações que são empregadas na lógica atualmente. De fato, Kennedy (1974) afirma que Peano é mais conhecido por ser um pioneiro da lógica simbólica e um promovedor do método axiomático.

Alguns anos após Giuseppe Peano trazer suas contribuições para a teoria dos números, outros matemáticos continuaram os estudos para lógica matemática. Em 1903 o matemático Bertrand Russell (1872 – 1970), publicou seu livro intitulado “*The principles of Mathematics*”, que segundo ele Russell (1903) tem dois objetivos principais: Provar que toda matemática pura¹ trabalha exclusivamente com conceitos derivados de um número pequeno de conceitos lógicos

¹ “Matemática pura é a classe de todas as proposições da forma “ p implica q ”, onde p e q são proposições contendo uma ou mais variáveis, as mesmas nas duas proposições, e nem p e nem q contém quaisquer constantes exceto constantes lógicas.” (RUSSELL, 1903, p. 3, tradução nossa)

fundamentais e que todas proposições desse contexto podem ser deduzidas por um número pequeno de princípios lógicos. O segundo objetivo é trazer uma explicação de alguns conceitos fundamentais que a Matemática aceitava como indefiníveis.

Pouco tempo após a publicação do livro, outros estudos do autor foram desenvolvidos, nos quais ele escreveu em conjunto com Alfred North Whitehead (1861 – 1947). No ano de 1910 eles publicaram o primeiro volume de “*Principia Mathematica*”. No prefácio Russell (1963) e Whitehead (1963) afirmam que os trabalhos de Giuseppe Peano que os motivaram para o tratamento simbólico-lógico abordado no livro. Neste livro, os autores trouxeram pela primeira vez a notação de quantificador existencial ($\exists$) e operador descrição (ι), trazendo também as suas utilidades no contexto da lógica. A estrutura sintática do livro em questão, possui uma familiaridade grande com cálculo de predicados, isto é, Whitehead e Russell podem ser considerados inspiradores para o desenvolvimento do cálculo de predicados como teoria da lógica matemática.

Em meados de 1928 foi publicado o livro “*Grundzüge der theortischen Logik*” que foi escrito pelos matemáticos David Hilbert (1862 – 1943) e Willhelm Ackermann (1896 – 1962), neste livro é discutido os princípios da lógica matemática. O propósito da linguagem simbólica na lógica matemática é alcançar na lógica o que se tem alcançado na Matemática, ou seja, o tratamento científico exato de seus assuntos, destacando que as sentenças e conceitos são representados por fórmulas livres de paradoxos semânticos, que são comumente encontradas na linguagem sincopada. De fato, Hilbert e Ackermann consideram que o ponto alto do desenvolvimento da lógica matemática e o uso da linguagem simbólica foi devido ao surgimento do livro “*Principia Mathematica*” escrito por Whitehead e Russell. Pouco tempo depois Hilbert baseado na lógica tenta introduzir uma nova metodologia para formalização da Matemática. (HILBERT, 1950) e (ACKERMANN, 1950)

Hilbert e outros matemáticos deram continuidade aos estudos da lógica matemática, e em 1934 foi publicado o livro “*Grundlagen der Mathematik*” escrito por David Hilbert (1862 – 1943) e Paul Isacc Bernays (1888 – 1977). Esse livro trata de alguns aspectos da formalização dos fundamentos da Matemática, trazendo principalmente aspectos sobre lógica matemática e teoria dos números.

Ele trata da lógica proposicional de maneira rigorosa, que já vinha sendo desenvolvida por Peano, Russell e Whitehead em seus publicados. O ponto alto do mesmo é a introdução da abordagem de sujeito, predicado, variáveis e parâmetros nas sentenças lógicas. A união dessas ideias com a estrutura da lógica proposicional, é chamada de *lógica de predicados*, tendo em vista que o principal motivador de sua investigação foi devido as limitações que a lógica proposicional apresentava para formalizar determinadas inferências. Além disso, os autores enfatizam que o objetivo principal da lógica de predicados é de formalizar qualquer teoria axiomática. (HILBERT, 1934) e (BERNAYS, 1934)

Segundo O'Connor (2003) e Robertson (2003) uma das grandes descobertas na lógica matemática durante o século XX, foram os teoremas da incompletude, provados por Kurt Gödel (1906 – 1978) e que foram publicados no livro “*Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme*” em 1931.

Neste livro, Gödel (1992) disserta um pouco a respeito dos sistemas axiomáticos estabelecidos em “*Principia Mathematica*” e o sistema axiomático para a teoria de conjuntos de Zermelo-Fraenkel, sendo eles os sistemas axiomáticos mais abrangentes da época. Gödel afirma que é de se supor que a partir dos axiomas e regras de inferências estabelecidos nesses sistemas axiomáticos sejam suficientes para formalizar qualquer questão matemática da mesma, porém, o autor refuta essa suposição e enfatiza não ser uma particularidade dos sistemas axiomáticos supracitados, mas de uma classe muito extensa de sistemas formais.

2.2 Abordagem Formal

Definição 29. Um *sistema formal* ou *lógico* para um sistema matemático $S = (E, R, O, A)$, consiste em um sistema de pensamento abstrato bem definido em S , composto de uma linguagem, denotada por $L(S)$, bem como o seu estudo sintático e semântico.

Escólio. Para construir uma linguagem $L(S)$ para um sistema matemático S , é necessário determinarmos sua *assinatura*, isto é, um conjunto $\Sigma(S)$ de símbolos.

Definição 30. Uma sequência de símbolos da assinatura, representado por $a_1 a_2 \cdots a_n$ é chamada *expressão* da linguagem $L(S)$. Para a formação das expressões da linguagem $L(S)$, é

necessário um conjunto de regras de sintaxe. Do ponto de vista semântico, uma expressão poderá ser uma *variável*, um *termo* ou uma *fórmula*.

Definição 31. Se $\Sigma(S)$ e $\Sigma'(S)$ são assinaturas das linguagens $L(S)$ e $L'(S)$ e se $\Sigma(S) \subset \Sigma'(S)$, então dizemos que $L(S)$ é uma *restrição* de $L'(S)$ ou que $L'(S)$ é uma *extensão* de $L(S)$.

Definição 32. A cardinalidade de uma linguagem $L(S)$ é definida por $\text{card}(L) = \max\{\text{card}(\Sigma(S)), \aleph_0\}$.

Definição 33. Um *sistema formal de primeira ordem* para $S = (E, R, O, A)$ é um sistema formal, composto de uma linguagem de primeira ordem, denotada por $L^1(S)$ e regras de sintaxe.

Escólio. A assinatura de uma linguagem $L^1(S)$ é composta de *símbolos constantes, relações e operações*.

Exemplo 1. A assinatura da linguagem $L^1(S_{\mathbb{Z}})$ do sistema matemático $S_{\mathbb{Z}} = (\mathbb{Z}, \{=, \leq\}, \{+, \cdot\}, \{A_l\}_{l \in L})$, é denotada por $\Sigma(S_{\mathbb{Z}})$ é definido por:

$$\Sigma(S_{\mathbb{Z}}) = \left\{ \{a, a_j, b, b_j, \dots, z, z_j\}_{j \in \mathbb{N}}, \{=, \leq, \in\}, \{+, \cdot, \wedge, \vee, \underline{\vee}, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow\} \right\}$$

e a $\text{card}(S_{\mathbb{Z}}) = \max\{\text{card}(\Sigma(S_{\mathbb{Z}})), \aleph_0\} = \aleph_0$

Exemplo 2. A assinatura da linguagem $L^1(S_{\mathbb{Q}})$ do sistema matemático $S_{\mathbb{Q}} = (\mathbb{Q}, \{=, \leq\}, \{+, \cdot\}, \{A_l\}_{l \in L})$, é denotada por $\Sigma(S_{\mathbb{Q}})$ é definido por:

$$\Sigma(S_{\mathbb{Q}}) = \left\{ \{a, a_j, b, b_j, \dots, z, z_j\}_{j \in \mathbb{N}}, \{=, \leq, \in\}, \{+, \cdot, \wedge, \vee, \underline{\vee}, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow\} \right\}$$

e a $\text{card}(S_{\mathbb{Q}}) = \max\{\text{card}(\Sigma(S_{\mathbb{Q}})), \aleph_0\} = \aleph_0$

Observe que $\{a, a_j, b, b_j, \dots, z, z_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ representa uma família de objetos de $\mathbb{Q}$, $=$ e $\leq$ são as relações de igualdade e de ordem total em $\mathbb{Q}$ e $\in$ uma relação unária, $+$ e $\cdot$ representa as operações de adição e multiplicação em $\mathbb{Q}$ e $\wedge, \vee, \underline{\vee}, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow$ são operadores lógicos.

Exemplo 3. A assinatura da linguagem $L^1(S_{\mathbb{R}})$ do sistema matemático $S_{\mathbb{R}} = (\mathbb{R}, \{=, \leq\}, \{+, \cdot\}, \{A_l\}_{l \in L})$, é denotada por $\Sigma(S_{\mathbb{R}})$ é definido por:

$$\Sigma(S_{\mathbb{R}}) = \left\{ \{a, a_j, b, b_j, \dots, z, z_j\}_{j \in \mathbb{R}}, \{=, \leq, \in\}, \{+, \cdot, \wedge, \vee, \underline{\vee}, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow\} \right\}$$

e a $\text{card}(S_{\mathbb{R}}) = \max\{\text{card}(\Sigma(S_{\mathbb{R}})), \aleph_0\} = \aleph_1$

Observe que $\{a, a_j, b, b_j, \dots, z, z_j\}_{j \in \mathbb{R}}$ representa uma família de objetos de $\mathbb{R}$, $=$ e $\leq$ são as relações de igualdade e de ordem total em $\mathbb{R}$ e $\in$ uma relação unária, $+$ e $\cdot$ representa as operações de adição e multiplicação em $\mathbb{R}$ e $\wedge, \vee, \underline{\vee}, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow$ são operadores lógicos.

Outros símbolos que são de extrema importância para compreender o sistema formal e representar a linguagem $L^1(S)$ são:

Variáveis: São expressos por letras do alfabeto latino $\{a, b, \dots, z\}$, com ou sem índices e representam de maneira abstrata, um elemento do conjunto E .

Exemplo 4. No contexto do sistema dos números racionais e reais $\{a, a_j, b, b_j, \dots, z, z_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ e $\{a, a_j, b, b_j, \dots, z, z_j\}_{j \in \mathbb{R}}$ representam objetos genéricos dos respectivos sistemas supracitados.

Observe, que a representação dos objetos de $S_{\mathbb{Q}}$ e $S_{\mathbb{R}}$ utilizada anteriormente não explicita como são os objetos desses sistemas, mas adiante nos capítulos 3 e 4 explicitaremos esses objetos.

Quantificadores lógicos: Para quantificar os objetos do conjunto E , são utilizados os quantificadores universal e existencial, que são simbolizados por $\forall, \exists$ e $\exists!$ respectivamente.

Exemplo 5. $(\forall x)(\exists! y)(x + y = y + x = 0)$

Operadores lógicos: Para operar sentenças lógicas são utilizadas as seguintes expressões $\wedge$ (conjunção), $\vee$ (disjunção inclusiva), $\underline{\vee}$ (disjunção exclusiva), $\neg$ (negação), $\rightarrow$ (condicional) e $\leftrightarrow$ (bi condicional).

Exemplo 6. $(\forall x)(\forall y)(x \cdot y = 0 \rightarrow (x = 0) \vee (y = 0))$

Exemplo 7. $(\forall x)(\forall y)((x < y) \underline{\vee} (x = y) \underline{\vee} (y < x))$

Parênteses: $()$, funcionam como pontuação na separação entre os termos e fórmulas.

O símbolo $\Leftrightarrow$: Significa que “o lado esquerdo é notação para o lado direito”.

Exemplo 8. $o_k(x_1, x_2, \dots, x_n) \Leftrightarrow o_k x_1 \cdots x_n$, onde o_k representa uma operação qualquer de um sistema matemático.

Exemplo 9. $r_j(x_1, x_2, \dots, x_n) \Leftrightarrow r_j x_1 \cdots x_n$, onde r_j representa uma relação qualquer de um sistema matemático.

Operador descrição: A letra grega ι (iota), possui o seguinte significado “um objeto tal que ...”

Exemplo 10. Para representar o sistema numérico dos números inteiros não-negativos como subconjunto de $\mathbb{Z}$, usando linguagem formal de primeira ordem:

$$\mathbb{Z}^+ \Leftrightarrow (\iota w)(w \subset \mathbb{Z})(\forall x)(x \in w \leftrightarrow x \geq 0)$$

A sentença acima lê-se: $\mathbb{Z}^+$ é uma notação para subconjunto w de $\mathbb{Z}$ tal que para todo x , x pertence a w se, e somente se, x é maior ou igual a zero.

Exemplo 11. Para representar o conjunto vazio como subconjunto de $\mathbb{R}$, usando linguagem formal de primeira ordem:

$$\emptyset \Leftrightarrow (\iota w)(w \subset \mathbb{R})(\forall x)(x \notin w)$$

A sentença acima lê-se: $\emptyset$ é uma notação para o subconjunto w de $\mathbb{R}$ tal que para todo x , x não pertence a w .

Sentença Válida: O símbolo $\models$ no início de uma sentença, representa que “a sentença ... é válida”.

Exemplo 12. $\models (\exists x)(x \in \mathbb{N})(x - 1 = 0)$

Para construção dos conjuntos dos números racionais e reais, utilizaremos o símbolo $(\models_i)_{i \in I}$, para denotar sentenças verdadeiras dentro do nosso contexto.

Descrição de definição: O símbolo **def**, descrito sobre alguma relação ou operador lógico estabelecida em um sistema matemático, significa que decorre de definições previamente estabelecidas.

Exemplo 13. $(\forall n)(n \in \mathbb{N})(n \cdot 1 \stackrel{\text{def}}{=} n)$

Exemplo 14. $(\forall x)(x \in \mathbb{Z}) \left((x > 0) \stackrel{\text{def}}{\leftrightarrow} (\exists n)(n \in \mathbb{N}) \left(x \in \overline{(n + 1, 1)} \right) \right)$

Absurdo²: A letra grega Λ (lambda), possui o seguinte significado “A condição ..., implica em um absurdo”

Exemplo 15. $(\exists x)(x \in \mathbb{N})(x + 1 = 0) \rightarrow (x = -1) \rightarrow \Lambda$

Exemplo 16. $(\exists x)(x \in \mathbb{R})(x^2 + 1 = 0) \rightarrow (x = \pm\sqrt{-1}) \rightarrow \Lambda$

Definição 33. Um *termo* de $L^1(S)$ é uma expressão usada para representar os objetos de S . Os termos elementares de uma linguagem são constantes $(c_i)_{i \in I}$, que denotam os elementos do sistema S . O agrupamento de dois ou mais termos, obtidos através de operações continua sendo um termo.

² Essa simbologia foi introduzida por Ioseph Peano, em seu livro “*Arithmetices Principia nova methodo exposita*”, e é utilizado quando uma sentença resulta em um absurdo ou é falsa. (PEANO, 1889, p. 6)

Definição 34. Uma *fórmula atômica* da $L^1(S)$ é uma expressão do tipo $r_j(t_1, \dots, t_n)$, onde r_j é uma relação e $t_1, \dots, t_n$ são termos da linguagem. O agrupamento de duas ou mais fórmulas atômicas, obtidos através de operadores lógicos e regras de sintaxe, determinam as *fórmulas moleculares*.

Definição 35. As *variáveis* de uma fórmula, podem ser *dependentes* ou *independentes*. As variáveis independentes são chamadas de *parâmetros* ou *variáveis livres*.

Definição 36. Uma fórmula sem parâmetros, $F(x_1, \dots, x_n)$ é também chamada de *fórmula fechada* ou *proposição*.

Definição 37. Uma **derivação formal** em um sistema matemático S , denotada por $\vdash_F$, consiste de um agrupamento de uma sequência finita de proposições verdadeiras, que denotamos por $P_1 \rightarrow P_2 \rightarrow \dots \rightarrow P_n$, onde cada proposição P_i , da derivação formal é obtida pelo passo $P_{i-1} \rightarrow P_i$, utilizando os objetos do sistema matemático S e as regras de derivação de um sistema formal.

Definição 38. Um **teorema** em um sistema matemático S , consiste na proposição obtida no último passo de uma derivação formal $\vdash_F$, utilizando os axiomas de uma estrutura matemática S e as regras de derivação de um sistema formal.

Escólio. Um teorema em um sistema matemático S , no qual já foi mostrado a sua veracidade, pode ser considerado como axioma de S .

Definição 39. Um **corolário** de um sistema matemático S , consiste em uma proposição verdadeira obtida de uma derivação formal $\vdash_F$, utilizando um teorema de S .

Definição 40. Um **lema** de um sistema matemático S , consiste em uma proposição verdadeira obtida de uma derivação formal $\vdash_F$, utilizando resultados já demonstrados em S e que será utilizado para obter um teorema ou corolário.

Definição 41. Um **predicado** é uma função P , onde seus valores $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$, são sentenças sobre n -uplas.

Definição 42. Uma **lei** ou **tautologia** de um sistema matemático S , é uma fórmula que se torna válida, sob qualquer interpretação lógica das variáveis dos predicados.

Definição 43. A reunião de conceitos primitivos e derivados, leis, conjecturas, teoremas corolários, lemas, paradoxos e demais possíveis resultados decorrentes dos objetos de um sistema matemático S , obtidos através de um sistema formal, é chamado de **teoria formal de S** e neste caso S é chamado de **modelo matemático** para essa teoria.

CAPÍTULO 3 – Teoria dos Números Racionais

3.1 Abordagem Histórica

Segundo O'Connor (1999b) e Robertson (1999b), um dos primeiros indícios do surgimento intuitivo dos números racionais e irracionais foi no Egito antigo com o livro “*The Elements*” escrito pelo filósofo matemático Euclides de Alexandria (325 - 265 a.C). Sua obra é dividida em 13 livros e daremos destaque aos livros 7 e 10, que trata acerca da teoria dos números. No livro 7 é apresentado o famoso Algoritmo de Euclides que é utilizado para determinar o maior divisor comum entre dois números, que hoje é amplamente generalizado e utilizado em diversos contextos da Matemática. No livro 10, o autor discute algumas noções sobre números racionais e irracionais, estudados anteriormente pelo filósofo grego Theaetetus de Atenas (417 - 369 a.C) acerca de medidas comensuráveis e incommensuráveis.

De acordo com O'Connor (2000) e Robertson (2000), na Índia, o matemático e astrônomo Brahmagupta (598 - 670) escreveu o livro “*Brahmasphutasiddhanta*” que trazia uma das primeiras tentativas de inserção dos números negativos e do zero. Neste livro, ele definia o número zero como sendo a subtração de um número por si mesmo, propondo também estender os conceitos da aritmética para realizar divisões pelo número zero, no qual ele sugere que:

- Números positivos ou negativos quando divididos por zero são uma fração do zero como denominador;
- O zero dividido por números negativos ou positivos é zero ou é expresso como uma fração com zero como numerador e a quantidade finita como denominador;
- Zero dividido por zero é zero.

Sendo algumas dessas propostas equivocadas e devido aos avanços da aritmética dos números caíram em desuso. Apesar disso, não deixou de ser uma boa tentativa, a de inserir os números negativos e o zero visando estender o sistema numérico da época.

Segundo Vogel (2008), o matemático alemão Johannes Widmann (1462 - 1498) em 1489 publicou o livro “*Behende und hupsche Rechnung auf allen kauffmanschafft*”, no qual trazia pela primeira vez a simbologia na adição (+) e subtração (−). Algum tempo depois

surgiu o símbolo para representar a relação de igualdade (=) no livro “*The Whetstone of Witte*” escrito por Robert Recorde (1510 - 1558) que foi publicado em meados de 1557. (O'CONNOR; ROBERTSON, 2002)

Entre os séculos XVI e XVII foi um grande momento de criação e elaboração das simbologias que são empregadas hoje em dia no contexto da Matemática. Segundo O'Connor (2004) e Robertson (2004), o matemático Simon Stevin (1548 - 1620) foi o primeiro a descrever completamente as frações decimais com a devida formalidade e disseminar seu uso na Europa. Pouco depois, o matemático John Napier (1550 - 1617) introduziu a representação decimal de uma fração. (O'CONNOR; ROBERTSON, 1998)

Um dos matemáticos que contribuiu para o desenvolvimento da teoria dos números racionais foi Bernard Placidus Johann Nepomuk Bolzano (1781 – 1848), que torno de 1820 e 1825 escreveu algumas anotações acerca dos números racionais, que só vieram a ser publicados no livro “*Reine Zahlenlehre*” em 1976 e editado por Jan Berg. (O'CONNOR; ROBERTSON, 2005).

Segundo Kitcher (1978) o livro traz o desenvolvimento aritmético da teoria dos números racionais evidenciando a contribuição efetiva de Bolzano, por meio da generalização da operação das operações elementares, bem como a prova algumas propriedades.

Após definir essas operações ele introduziu a operação de divisão, caracterizando essa como operação inversa da multiplicação, e assim ele desenvolveu o conjunto dos números racionais como um conjunto fechado para as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão. (Kitcher, 1978) e (EBBINGHAUS, et al 1991)

Outro matemático que contribuiu para construção da teoria dos números, foi Richard Dedekind (1831 – 1916). Grande parte de seu mérito advém da construção dos números reais desenvolvida por ele, mas apesar disso um aspecto que poucos sabem é que o mesmo também sabia formas de construir os números inteiros e racionais, como extensões do conjunto dos números naturais.

De acordo com Sieg (2003) e Schlimm (2003), Dedekind deixou três manuscritos sobre o desenvolvimento dessas teorias, sendo eles, “*Die Schöpfung der Null und der negativen*

ganzen Zahlen”, “*Ganze und rationale Zahlen*” e “*Die Erweiterung des Zahlbegriffs auf Grund der Reihe der natürlichen Zahlen*”, sendo que os dois primeiros manuscritos foram escritos por volta de 1872 e o terceiro depois de 1888. Todos os manuscritos foram encontrados em *Dedekind's Nachlass* e não foram publicados pelo autor, a partir disso faremos uma breve discussão a respeito do primeiro e segundo manuscrito.

De acordo com Nechaev (2011) o matemático Jules Tannery (1848 – 1910) foi quem construiu os números racionais como pares de números inteiros, e foi publicado em seu livro “*Leçons d' Arithmétique: théorique et pratique*” em seu promulgado Tannery definiu uma fração (número racional), igualdade entre frações e as operações de adição e multiplicação. Diferente de muitos matemáticos que tratam a teoria dos números de maneira totalmente algébrica, o autor abordava a sua construção baseado em aspectos totalmente geométricos. (TANNERY,1894)

De acordo com O'Connor (1997) e Robertson (1997) no século XIX, o matemático Giuseppe Peano (1858 - 1932) propôs um conjunto de axiomas para formalização da teoria dos números naturais publicados em seu livro “*Arithmetices Principia nova methodo exposita*” em 1889, tal contribuição possibilitou a construção formal da teoria dos números inteiros e consecutivamente a teoria dos números racionais e reais.

3.2 Abordagem algébrica

$$\models_1 \Leftrightarrow ((\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*) \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y) : (x \in \mathbb{Z}) \wedge (y \in \mathbb{Z}^*)\})$$

$$P_1 \Leftrightarrow (R_1 \stackrel{\text{def}}{=} \{((a, b), (c, d)) \in (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*)^2 : ((a, b)R_1(c, d) \leftrightarrow a \cdot d =_{\mathbb{Z}} b \cdot c)\})$$

$$P_{1.1} \Leftrightarrow ((\forall x)(xR_1x))$$

$\vdash$

$$\begin{aligned}
& (x \Leftrightarrow (a, b)) \\
& \quad \downarrow \\
& (xR_1x) \\
& \quad \Downarrow \\
& ((a, b)R_1(a, b)) \\
& \quad \downarrow P_1 \downarrow A_7 \\
& (a \cdot b =_{\mathbb{Z}} b \cdot a)
\end{aligned}$$

■

$$P_{1.2} \Leftrightarrow \left((\forall x)(\forall y)((xR_1y) \rightarrow (yR_1x)) \right)$$

⊢

$$\begin{aligned}
& \left((x \Leftrightarrow (a, b)) \wedge (y \Leftrightarrow (c, d)) \right) \\
& \quad \downarrow \\
& (xR_1y) \\
& \quad \Downarrow \\
& ((a, b)R_1(c, d)) \\
& \quad \downarrow P_1 \\
& (a \cdot d =_{\mathbb{Z}} b \cdot c) \\
& \quad \downarrow A_{16} \\
& (b \cdot c =_{\mathbb{Z}} a \cdot d) \\
& \quad \downarrow A_7 \\
& (c \cdot b =_{\mathbb{Z}} d \cdot a) \\
& \quad \downarrow P_1 \\
& ((c, d)R_1(a, b)) \\
& \quad \Downarrow \\
& (yR_1x)
\end{aligned}$$

■

$$P_{1.3} \Leftrightarrow \left((\forall x)(\forall y)(\forall z) \left(((xR_1y) \wedge (yR_1z)) \rightarrow (xR_1z) \right) \right)$$

⊢

$$\begin{aligned}
& ((x \Leftrightarrow (a, b)) \wedge (y \Leftrightarrow (c, d)) \wedge (z \Leftrightarrow (e, f))) \\
& \quad \downarrow \\
& ((xR_1y) \wedge (yR_1z)) \\
& \quad \Downarrow \\
& (((a, b)R_1(c, d)) \wedge ((c, d)R_1(e, f))) \\
& \quad \Downarrow P_1 \\
& ((a \cdot d =_{\mathbb{Z}} b \cdot c) \wedge (c \cdot f =_{\mathbb{Z}} d \cdot e)) \\
& \quad \Downarrow A_{11} \\
& (((a \cdot d) \cdot f =_{\mathbb{Z}} (b \cdot c) \cdot f) \wedge (b \cdot (c \cdot f) =_{\mathbb{Z}} b \cdot (d \cdot e))) \\
& \quad \Downarrow A_6 \\
& (((a \cdot d) \cdot f =_{\mathbb{Z}} (b \cdot c) \cdot f) \wedge ((b \cdot c) \cdot f =_{\mathbb{Z}} (b \cdot d) \cdot e)) \\
& \quad \downarrow A_{17} \\
& ((a \cdot d) \cdot f =_{\mathbb{Z}} (b \cdot d) \cdot e) \\
& \quad \Downarrow A_6 \\
& (a \cdot (d \cdot f) =_{\mathbb{Z}} b \cdot (d \cdot e)) \\
& \quad \Downarrow A_7 \\
& (a \cdot (f \cdot d) =_{\mathbb{Z}} b \cdot (e \cdot d)) \\
& \quad \Downarrow A_6 \\
& ((a \cdot f) \cdot d =_{\mathbb{Z}} (b \cdot e) \cdot d) \\
& \quad d \neq 0 \Downarrow A_{11} \\
& (a \cdot f =_{\mathbb{Z}} b \cdot e) \\
& \quad \Downarrow P_1 \\
& ((a, b)R_1(e, f)) \\
& \quad \Downarrow \\
& (xR_1z)
\end{aligned}$$

■

$$P_2 \Leftrightarrow (R_2 \stackrel{\text{def}}{=} \{((a, b), (c, d)) \in (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_+^*)^2 : ((a, b)R_2(c, d) \leftrightarrow a \cdot d <_{\mathbb{Z}} b \cdot c)\})$$

$$P_{2.1} \Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(\forall z) \left(((xR_2y) \wedge (yR_2z)) \rightarrow (xR_2z) \right)$$

 $\vdash$

$$\begin{aligned}
& ((x \Leftrightarrow (a, b)) \wedge (y \Leftrightarrow (c, d)) \wedge (z \Leftrightarrow (e, f))) \\
& \quad \downarrow \\
& ((xR_2y) \wedge (yR_2z)) \\
& \quad \Downarrow \\
& (((a, b)R_2(c, d)) \wedge ((c, d)R_2(e, f))) \\
& \quad \Downarrow P_1 \\
& ((a \cdot d <_{\mathbb{Z}} b \cdot c) \wedge (c \cdot f <_{\mathbb{Z}} d \cdot e)) \\
& \quad \downarrow A_{13} \\
& (((a \cdot d) \cdot f <_{\mathbb{Z}} (b \cdot c) \cdot f) \wedge (b \cdot (c \cdot f) <_{\mathbb{Z}} b \cdot (d \cdot e))) \\
& \quad \downarrow A_{20} \\
& ((a \cdot d) \cdot f <_{\mathbb{Z}} b \cdot (d \cdot e)) \\
& \quad \downarrow A_6 \\
& (a \cdot (d \cdot f) <_{\mathbb{Z}} b \cdot (d \cdot e)) \\
& \quad \downarrow A_7 \\
& (a \cdot (f \cdot d) <_{\mathbb{Z}} b \cdot (e \cdot d)) \\
& \quad \downarrow A_6 \\
& ((a \cdot f) \cdot d <_{\mathbb{Z}} (b \cdot e) \cdot d) \\
& \quad \downarrow A_{13} \\
& (a \cdot f <_{\mathbb{Z}} b \cdot e) \\
& \quad \Downarrow P_1 \\
& ((a, b)R_2(e, f)) \\
& \quad \Downarrow \\
& (xR_2z)
\end{aligned}$$

■

$$P_3 \Leftrightarrow (R_3 \stackrel{\text{def}}{=} \{((a, b), (c, d)) \in (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_+^*)^2 : (((a, b)R_1(c, d)) \underline{\vee} ((a, b)R_2(c, d)))\})$$

$$P_{3.1} \Leftrightarrow (\forall x)(\forall y) \left((xR_2y) \underline{\vee} (xR_1y) \underline{\vee} (yR_2x) \right)$$

⊢

$$\begin{array}{c}
((x \Leftrightarrow (a, b)) \wedge (y \Leftrightarrow (c, d))) \\
\downarrow \\
A_{14} \\
\downarrow \\
\left(\left((a \cdot d <_{\mathbb{Z}} b \cdot c) \xleftrightarrow{P_2} ((a, b) R_2 (c, d)) \right) \right) \\
\quad \quad \quad \underline{\vee} \\
\left((a \cdot d =_{\mathbb{Z}} b \cdot c) \xleftrightarrow{P_1} ((a, b) R_1 (c, d)) \right) \\
\quad \quad \quad \underline{\vee} \\
\left((c \cdot b <_{\mathbb{Z}} d \cdot a) \xleftrightarrow{P_2} ((c, d) R_2 (a, b)) \right) \\
\downarrow \\
((x R_2 y) \underline{\vee} (x R_1 y) \underline{\vee} (y R_2 x))
\end{array}$$

■

$$P_{3.2} \Leftrightarrow (\forall x)(x R_3 x)$$

⊢

$$\begin{array}{c}
P_{1.1} \\
\downarrow \\
(\forall x)(x R_1 x) \\
\downarrow P_3 \\
(x R_3 x)
\end{array}$$

■

$$P_{3.3} \Leftrightarrow (\forall x)(\forall y) \left(((x R_3 y) \wedge (y R_3 x)) \rightarrow (x R_3 y) \right)$$

⊢

$$\begin{array}{c}
((x \Leftrightarrow (a, b)) \wedge (y \Leftrightarrow (c, d))) \\
\downarrow \\
((xR_3y) \wedge (yR_3x)) \\
\Downarrow \\
(((xR_1y) \vee (xR_2y)) \wedge ((yR_1x) \vee (yR_2x))) \\
\downarrow \\
\left(P_{1.3} \rightarrow \left((\forall x)(\forall y) \left(((xR_1y) \wedge (yR_1x)) \rightarrow (xR_1y) \right) \right) \right) \\
\vee \\
\left((\forall x)(\forall y) \left(((xR_1y) \wedge (yR_2x)) \xrightarrow{P_{3.1}} \Lambda \right) \right) \\
\vee \\
\left((\forall x)(\forall y) \left(((xR_2y) \wedge (yR_1x)) \xrightarrow{P_{3.1}} \Lambda \right) \right) \\
\vee \\
\left((\forall x)(\forall y) \left(((xR_2y) \wedge (yR_2x)) \xrightarrow{P_{3.1}} \Lambda \right) \right)
\end{array}$$

■

$$L_1 \Leftrightarrow ((\forall x)(\forall y)(\forall z) (((xR_1y) \wedge (yR_2z)) \rightarrow (xR_2z)))$$

⊢

$$\begin{array}{c}
((x \Leftrightarrow (a, b)) \wedge (y \Leftrightarrow (c, d)) \wedge (z \Leftrightarrow (e, f))) \\
\downarrow \\
((xR_1y) \wedge (yR_2z)) \\
\Downarrow \\
(((a, b)R_1(c, d)) \wedge ((c, d)R_2(e, f))) \\
P_1 \downarrow P_2 \\
((a \cdot d =_{\mathbb{Z}} b \cdot c) \wedge (c \cdot f <_{\mathbb{Z}} d \cdot e)) \\
\downarrow A_{13} \\
(((a \cdot d) \cdot f =_{\mathbb{Z}} (b \cdot c) \cdot f) \wedge (b \cdot (c \cdot f) <_{\mathbb{Z}} b \cdot (d \cdot e))) \\
\downarrow A_6 \\
(((a \cdot d) \cdot f =_{\mathbb{Z}} (b \cdot c) \cdot f) \wedge ((b \cdot c) \cdot f <_{\mathbb{Z}} b \cdot (d \cdot e))) \\
\downarrow A_{20} \\
((a \cdot d) \cdot f <_{\mathbb{Z}} b \cdot (d \cdot e)) \\
\downarrow A_6 \\
(a \cdot (d \cdot f) <_{\mathbb{Z}} b \cdot (d \cdot e)) \\
\downarrow A_7
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
& \downarrow A_7 \\
& (a \cdot (f \cdot d) <_{\mathbb{Z}} b \cdot (e \cdot d)) \\
& \downarrow A_6 \\
& ((a \cdot f) \cdot d <_{\mathbb{Z}} (b \cdot e) \cdot d) \\
& \downarrow A_{13} \\
& (a \cdot f <_{\mathbb{Z}} b \cdot e) \\
& \downarrow P_2 \\
& ((a, b)R_2(e, f)) \\
& \Downarrow \\
& (xR_2z)
\end{aligned}$$

■

$$L_2 \Leftrightarrow \left((\forall x)(\forall y)(\forall z) \left(((xR_2y) \wedge (yR_1z)) \rightarrow (xR_2z) \right) \right)$$

⊢

$$\begin{aligned}
& ((x \Leftrightarrow (a, b)) \wedge (y \Leftrightarrow (c, d)) \wedge (z \Leftrightarrow (e, f))) \\
& \downarrow \\
& ((xR_2y) \wedge (yR_1z)) \\
& \Downarrow \\
& (((a, b)R_2(c, d)) \wedge ((c, d)R_1(e, f))) \\
& \quad P_1 \downarrow P_2 \\
& ((a \cdot d <_{\mathbb{Z}} b \cdot c) \wedge (c \cdot f =_{\mathbb{Z}} d \cdot e)) \\
& \downarrow A_{13} \\
& (((a \cdot d) \cdot f <_{\mathbb{Z}} (b \cdot c) \cdot f) \wedge (b \cdot (c \cdot f) =_{\mathbb{Z}} b \cdot (d \cdot e))) \\
& \downarrow A_6 \\
& (((a \cdot d) \cdot f <_{\mathbb{Z}} (b \cdot c) \cdot f) \wedge ((b \cdot c) \cdot f =_{\mathbb{Z}} b \cdot (d \cdot e))) \\
& \downarrow A_{20} \\
& ((a \cdot d) \cdot f <_{\mathbb{Z}} b \cdot (d \cdot e)) \\
& \downarrow A_6 \\
& (a \cdot (d \cdot f) <_{\mathbb{Z}} b \cdot (d \cdot e)) \\
& \downarrow A_7 \\
& (a \cdot (f \cdot d) <_{\mathbb{Z}} b \cdot (e \cdot d)) \\
& \downarrow A_6 \\
& ((a \cdot f) \cdot d <_{\mathbb{Z}} (b \cdot e) \cdot d) \\
& \downarrow A_{13} \\
& (a \cdot f <_{\mathbb{Z}} b \cdot e) \\
& \downarrow P_2 \\
& ((a, b)R_2(e, f)) \\
& \Downarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{c} \Downarrow \\ (xR_2z) \end{array}$$

■

$$P_{3.4} \Leftrightarrow \left((\forall x)(\forall y)(\forall z) \left(((xR_3y) \wedge (yR_3z)) \rightarrow (xR_3z) \right) \right)$$

⊢

$$\begin{array}{c} ((x \Leftrightarrow (a, b)) \wedge (y \Leftrightarrow (c, d)) \wedge (z \Leftrightarrow (e, f))) \\ \downarrow \\ ((xR_3y) \wedge (yR_3z)) \\ \Downarrow \\ \left(((xR_1y) \vee (xR_2y)) \wedge ((yR_1z) \vee (yR_2z)) \right) \\ \Downarrow \\ \left(\begin{array}{c} P_{1.3} \rightarrow (\forall x)(\forall y)(\forall z) \left(((xR_1y) \wedge (yR_1z)) \rightarrow (xR_1z) \right) \\ \vee \\ P_{1.3} \rightarrow (\forall x)(\forall y)(\forall z) \left(((xR_2y) \wedge (yR_2z)) \rightarrow (xR_2z) \right) \\ \vee \\ L_1 \rightarrow (\forall x)(\forall y)(\forall z) \left(((xR_1y) \wedge (yR_2z)) \rightarrow (xR_2z) \right) \\ \vee \\ L_2 \rightarrow (\forall x)(\forall y)(\forall z) \left(((xR_2y) \wedge (yR_1z)) \rightarrow (xR_2z) \right) \end{array} \right) \end{array}$$

■

$$\models_2 \Leftrightarrow \left(\overline{(c, d)} \stackrel{\text{def}}{=} \{(a, b) \in (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*) : (a, b)R_1(c, d)\} \right)$$

$$\models_3 \Leftrightarrow \left(\mathbb{Q} \Leftrightarrow \left((\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*) / R_1 \stackrel{\text{def}}{=} \{ \overline{(a, b)} : (a, b) \in (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*) \} \right) \right)$$

Escólio. Agora que definimos os objetos de $\mathbb{Q}$, vamos inserir a notação usual que estamos habituados que a representação dos objetos de $\mathbb{Q}$, como fração que serão usados apenas em alguns exemplos desse capítulo, ou seja,

$$\frac{a}{b} \Leftrightarrow \overline{(a, b)}$$

$$\models_4 \Leftrightarrow \left(=_{\mathbb{Q}} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \left(\overline{(a, b)}, \overline{(c, d)} \right) \in (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) : \left(\overline{(a, b)} =_{\mathbb{Q}} \overline{(c, d)} \leftrightarrow a \cdot d =_{\mathbb{Z}} b \cdot c \right) \right\} \right)$$

$$\models_5 \Leftrightarrow \left(<_{\mathbb{Q}} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \left(\overline{(a,b)}, \overline{(c,d)} \right) \in (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) : \left(\overline{(a,b)} <_{\mathbb{Q}} \overline{(c,d)} \leftrightarrow a \cdot d <_{\mathbb{Z}} b \cdot c \right) \right\} \right)$$

$$\models_6 \Leftrightarrow \left(\leq_{\mathbb{Q}} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \left\{ \left(\overline{(a,b)}, \overline{(c,d)} \right) \in (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) : \left(\left(\overline{(a,b)} =_{\mathbb{Q}} \overline{(c,d)} \right) \vee \left(\overline{(a,b)} <_{\mathbb{Q}} \overline{(c,d)} \right) \right\} \right\} \right)$$

Escólio. A partir desse momento as relações $=_{\mathbb{Q}}$ e $\leq_{\mathbb{Q}}$ passaram a ser vistas respectivamente como a relação de igualdade em $\mathbb{Q}$ e a relação de ordem total em $\mathbb{Q}$.

3.3 Operações de adição e multiplicação dos números racionais

$$\models_7 \Leftrightarrow \left(+ \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c} (\forall x)(\forall y) \left(\begin{array}{c} + : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q} \\ (x,y) \mapsto +(x,y) \Leftrightarrow x + y \end{array} \right) \\ \wedge \\ \left(x + y =_{\mathbb{Q}} \overline{(a,b)} + \overline{(c,d)} =_{\mathbb{Q}} \overline{(a \cdot d + b \cdot c, b \cdot d)} \right) \end{array} \right) \right)$$

$$P_4 \Leftrightarrow \left((\forall x)(\forall y)(\forall z)(\forall w) \left(\left((x =_{\mathbb{Q}} w) \wedge (y =_{\mathbb{Q}} z) \right) \rightarrow (x + y =_{\mathbb{Q}} w + z) \right) \right)$$

$\vdash$

$$\begin{aligned} & \left((x \Leftrightarrow \overline{(a,b)}) \wedge (y \Leftrightarrow \overline{(c,d)}) \wedge (z \Leftrightarrow \overline{(e,f)}) \wedge (w \Leftrightarrow \overline{(g,h)}) \right) \\ & \quad \downarrow \\ & \left((x =_{\mathbb{Q}} w) \wedge (y =_{\mathbb{Q}} z) \right) \\ & \quad \updownarrow \\ & \left(\left(\overline{(a,b)} =_{\mathbb{Q}} \overline{(g,h)} \right) \wedge \left(\overline{(c,d)} =_{\mathbb{Q}} \overline{(e,f)} \right) \right) \\ & \quad \updownarrow P_1 \\ & \left((a \cdot h =_{\mathbb{Z}} b \cdot g) \wedge (c \cdot f =_{\mathbb{Z}} d \cdot e) \right) \\ & \quad \downarrow A_{11} \\ & \left(((a \cdot h) \cdot (d \cdot f) =_{\mathbb{Z}} (b \cdot g) \cdot (d \cdot f)) \wedge ((b \cdot h) \cdot (c \cdot f) =_{\mathbb{Z}} (b \cdot h) \cdot (d \cdot e)) \right) \\ & \quad \updownarrow A_{17} \updownarrow A_6 \\ & \left((a \cdot (h \cdot d) \cdot f =_{\mathbb{Z}} b \cdot (g \cdot d) \cdot f) \wedge (b \cdot (h \cdot c) \cdot f =_{\mathbb{Z}} b \cdot (h \cdot d) \cdot e) \right) \\ & \quad \updownarrow A_{17} \updownarrow A_7 \\ & \left((a \cdot (d \cdot h) \cdot f =_{\mathbb{Z}} b \cdot (d \cdot g) \cdot f) \wedge (b \cdot (c \cdot h) \cdot f =_{\mathbb{Z}} b \cdot (d \cdot h) \cdot e) \right) \\ & \quad \updownarrow A_{17} \updownarrow A_6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& A_{17} \updownarrow A_6 \\
& \left(((a \cdot d) \cdot (h \cdot f) =_{\mathbb{Z}} (b \cdot d) \cdot (g \cdot f)) \wedge ((b \cdot c) \cdot (h \cdot f) =_{\mathbb{Z}} (b \cdot d) \cdot (h \cdot e)) \right) \\
& \quad \downarrow A_{10} \\
& \left(((a \cdot d) \cdot (h \cdot f)) + ((b \cdot c) \cdot (h \cdot f)) =_{\mathbb{Z}} ((b \cdot d) \cdot (g \cdot f)) + ((b \cdot c) \cdot (h \cdot f)) \right) \\
& \quad \wedge \\
& \left(((b \cdot d) \cdot (g \cdot f)) + ((b \cdot c) \cdot (h \cdot f)) =_{\mathbb{Z}} ((b \cdot d) \cdot (g \cdot f)) + ((b \cdot d) \cdot (h \cdot e)) \right) \\
& \quad \downarrow A_{17} \\
& ((a \cdot d) \cdot (h \cdot f) + (b \cdot c) \cdot (h \cdot f) =_{\mathbb{Z}} (b \cdot d) \cdot (g \cdot f) + (b \cdot d) \cdot (h \cdot e)) \\
& \quad A_{17} \updownarrow A_8 \\
& (((a \cdot d) + (b \cdot c)) \cdot (h \cdot f) =_{\mathbb{Z}} (b \cdot d) \cdot ((g \cdot f) + (h \cdot e))) \\
& \quad \updownarrow P_1 \\
& \left(\overline{(a \cdot d + b \cdot c, b \cdot d)} =_{\mathbb{Q}} \overline{(g \cdot f + h \cdot e, h \cdot f)} \right) \\
& \quad \updownarrow \\
& (x + y =_{\mathbb{Q}} w + z)
\end{aligned}$$

■

$$(\forall n)(n > 2) \left(\forall \overline{(a_i, b_i)} \right) (i \in \mathbb{N}) \rightarrow \sum_{i=1}^n \overline{(a_i, b_i)} =_{\mathbb{Q}} \left(\overline{(a_1, b_1)} + \overline{(a_2, b_2)} + \dots + \overline{(a_n, b_n)} \right)$$

Exemplo. $\left(\left(\frac{1}{2} \Leftrightarrow \overline{(1,2)} \right) \wedge \left(1 \Leftrightarrow \overline{(1,1)} \right) \rightarrow \left(\frac{1}{2} + 1 =_{\mathbb{Q}} \frac{3}{2} \right) \right)$

⊢

$$\left(\frac{1}{2} + 1 \Leftrightarrow \overline{(1,2)} + \overline{(1,1)} =_{\mathbb{Q}} \overline{(1 \cdot 1 + 2 \cdot 2, 2 \cdot 1)} =_{\mathbb{Q}} \overline{(3,2)} \Leftrightarrow \frac{3}{2} \right)$$

■

Exemplo. $\left(\left(\frac{3}{2} \Leftrightarrow \overline{(3,2)} \right) \wedge \left(\frac{5}{2} \Leftrightarrow \overline{(5,2)} \right) \rightarrow \left(\frac{3}{2} + \frac{5}{2} =_{\mathbb{Q}} \frac{8}{2} \right) \right)$

⊢

$$\left(\frac{3}{2} + \frac{5}{2} \Leftrightarrow \overline{(3,2)} + \overline{(5,2)} =_{\mathbb{Q}} \overline{(3 \cdot 2 + 2 \cdot 5, 2 \cdot 2)} =_{\mathbb{Q}} \overline{(16,4)} =_{\mathbb{Q}} \overline{(8,2)} \Leftrightarrow \frac{8}{2} \right)$$

■

$P_5 \Leftrightarrow \left((\forall x)(\exists! e_1)(x + e_1 =_{\mathbb{Q}} e_1 + x =_{\mathbb{Q}} x) \right)$

⊢

 $\vdash_1$

$$\begin{aligned}
& \left((x \Leftrightarrow \overline{(a, b)}) \wedge (e_1 \Leftrightarrow \overline{(c, d)}) \right) \\
& \quad \downarrow \\
& (x + e_1 =_{\mathbb{Q}} x) \\
& \quad \Downarrow \\
& \left(\overline{(a, b)} + \overline{(c, d)} \stackrel{\mathbb{F}_4}{=}_{\mathbb{Q}} \overline{(a \cdot d + b \cdot c, b \cdot d)} =_{\mathbb{Q}} \overline{(a, b)} \right) \\
& \quad \Downarrow P_1 \\
& ((a \cdot d + b \cdot c) \cdot b =_{\mathbb{Z}} (b \cdot d) \cdot a) \\
& \quad \Downarrow A_7 \\
& ((a \cdot d + b \cdot c) \cdot b =_{\mathbb{Z}} (d \cdot b) \cdot a) \\
& \quad \Downarrow A_7 \\
& ((a \cdot d + b \cdot c) \cdot b =_{\mathbb{Z}} a \cdot (d \cdot b)) \\
& \quad \Downarrow A_6 \\
& ((a \cdot d + b \cdot c) \cdot b =_{\mathbb{Z}} (a \cdot d) \cdot b) \\
& \quad A_{11} \Downarrow A_1 \\
& (a \cdot d + b \cdot c =_{\mathbb{Z}} a \cdot d + 0) \\
& \quad A_5 \Downarrow A_{10} \\
& (b \cdot c =_{\mathbb{Z}} 0) \\
& \quad \downarrow A_9 \\
& ((b =_{\mathbb{Z}} 0) \vee (c =_{\mathbb{Z}} 0)) \\
& \quad \downarrow b \neq 0 \\
& (c =_{\mathbb{Z}} 0) \\
& \quad \downarrow \\
& (\forall d)(d \in \mathbb{Z}^*) \left(\overline{(c, d)} =_{\mathbb{Q}} \overline{(0, d)} \right)
\end{aligned}$$

$\vdash_2$

$$\begin{aligned}
& \left((x \Leftrightarrow \overline{(a, b)}) \wedge (e_1 \Leftrightarrow \overline{(c, d)}) \right) \\
& \quad \downarrow \\
& (e_1 + x =_{\mathbb{Q}} x) \\
& \quad \downarrow \\
& \left(\overline{(c, d)} + \overline{(a, b)} \stackrel{\mathbb{F}_4}{=}_{\mathbb{Q}} \overline{(c \cdot b + d \cdot a, d \cdot b)} =_{\mathbb{Q}} \overline{(a, b)} \right) \\
& \quad \Downarrow P_1 \\
& ((c \cdot b + d \cdot a) \cdot b =_{\mathbb{Z}} (d \cdot b) \cdot a) \\
& \quad \Downarrow A_7 \\
& ((b \cdot c + a \cdot d) \cdot b =_{\mathbb{Z}} a \cdot (d \cdot b)) \\
& \quad \Downarrow A_6 \\
& ((b \cdot c + a \cdot d) \cdot b =_{\mathbb{Z}} (a \cdot d) \cdot b) \\
& \quad A_{11} \downarrow A_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& A_{11} \downarrow A_1 \\
& (a \cdot d + b \cdot c =_{\mathbb{Z}} a \cdot d + 0) \\
& \quad \updownarrow A_{10} \\
& (b \cdot c =_{\mathbb{Z}} 0) \\
& \quad \downarrow A_9 \\
& ((b =_{\mathbb{Z}} 0) \vee (c =_{\mathbb{Z}} 0)) \\
& \quad \downarrow b \neq 0 \\
& (c =_{\mathbb{Z}} 0) \\
& \quad \downarrow \\
& (\forall d)(d \in \mathbb{Z}^*) \left(\overline{(c, d)} =_{\mathbb{Q}} \overline{(0, d)} \right)
\end{aligned}$$

$\vdash_3$

$$\begin{aligned}
& (\forall x)(\exists e_2)(e_1 \neq_{\mathbb{Q}} e_2)(x + e_2 =_{\mathbb{Q}} e_2 + x =_{\mathbb{Q}} x) \\
& \quad \downarrow \vdash_2 \\
& \left((x =_{\mathbb{Q}} e_1) \left((e_1 + e_2 =_{\mathbb{Q}} e_1) \wedge (e_1 + e_2 =_{\mathbb{Q}} e_2) \right) \right) \\
& \quad \updownarrow P_{1.2} \\
& \left((e_1 =_{\mathbb{Q}} e_1 + e_2) \wedge (e_1 + e_2 =_{\mathbb{Q}} e_2) \right) \\
& \quad \updownarrow P_{1.3} \\
& (e_1 =_{\mathbb{Q}} e_2) \\
& \quad \downarrow \\
& \quad \downarrow \Lambda \\
& \quad \downarrow \\
& (\forall x)(\nexists e_2)(e_1 \neq_{\mathbb{Q}} e_2)(x + e_2 =_{\mathbb{Q}} e_2 + x =_{\mathbb{Q}} x) \\
& \quad \downarrow \\
& (\forall x)(\exists! e_1)(x + e_1 =_{\mathbb{Q}} e_1 + x =_{\mathbb{Q}} x)
\end{aligned}$$

■

Escólio.

$$\begin{aligned}
& (e_1 = \overline{(0, d)} \stackrel{\text{def}}{=} \{(a, b) : (a, b) =_{\mathbb{Q}} (0, d)\}) \\
& \quad \updownarrow \\
& (e_1 = \{(a, b) : a \cdot d =_{\mathbb{Z}} b \cdot 0\}) \\
& \quad \updownarrow \\
& (e_1 = \{(a, b) : a \cdot d =_{\mathbb{Z}} 0\}) \\
& \quad \updownarrow \\
& (e_1 = \{(a, b) : a =_{\mathbb{Z}} 0\})
\end{aligned}$$

Exemplo. $\left(\left(\frac{1}{2} \Leftrightarrow \overline{(1, 2)} \right) \wedge \left(0 \Leftrightarrow \overline{(0, 1)} \right) \rightarrow \left(\frac{1}{2} + 0 =_{\mathbb{Q}} \frac{1}{2} \right) \right)$

$\vdash$

$$\left(\frac{1}{2} + 0 \Leftrightarrow \overline{(1, 2)} + \overline{(0, 1)} =_{\mathbb{Q}} \overline{(1 \cdot 1 + 2 \cdot 0, 2 \cdot 1)} =_{\mathbb{Q}} \overline{(1, 2)} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \right)$$

■

$$P_6 \Leftrightarrow \left((\forall x)(\exists! y_1)(x + y_1 =_{\mathbb{Q}} y_1 + x =_{\mathbb{Q}} e_1) \right)$$

 $\vdash$
 $\vdash_1$

$$\begin{aligned}
 & \left((x \Leftrightarrow \overline{(a, b)}) \wedge (y_1 \Leftrightarrow \overline{(c, d)}) \right) \\
 & \quad \downarrow \\
 & (x + y_1 =_{\mathbb{Q}} e_1) \\
 & \quad \downarrow \\
 & \left(\overline{(a, b)} + \overline{(c, d)} \stackrel{\mathbb{F}_4}{=}_{\mathbb{Q}} \overline{(a \cdot d + b \cdot c, b \cdot d)} =_{\mathbb{Q}} \overline{(0, 1)} \right) \\
 & \quad \uparrow P_1 \\
 & \left(((a \cdot d + b \cdot c) \cdot 1 =_{\mathbb{Z}} (b \cdot d) \cdot 0) \right) \\
 & \quad \uparrow A_3 \\
 & (a \cdot d + b \cdot c =_{\mathbb{Z}} (b \cdot d) \cdot 0) \\
 & \quad \uparrow A_9 \\
 & (a \cdot d + b \cdot c =_{\mathbb{Z}} 0) \\
 & \quad \uparrow A_{10} \\
 & \left(((-a) \cdot d + (a \cdot d + b \cdot c) =_{\mathbb{Z}} (-a) \cdot d + 0) \right) \\
 & \quad \uparrow A_4 \\
 & \left(((-a) \cdot d + a \cdot d) + b \cdot c =_{\mathbb{Z}} (-a) \cdot d + 0 \right) \\
 & \quad \uparrow A_2 \\
 & (0 + b \cdot c =_{\mathbb{Z}} (-a) \cdot d + 0) \\
 & \quad \uparrow A_1 \\
 & (b \cdot c =_{\mathbb{Z}} (-a) \cdot d) \\
 & \quad \uparrow A_7 \\
 & (c \cdot b =_{\mathbb{Z}} d \cdot (-a)) \\
 & \quad \uparrow P_1 \\
 & \left(\overline{(c, d)} =_{\mathbb{Q}} \overline{(-a, b)} \right)
 \end{aligned}$$

 $\vdash_2$

$$\begin{aligned}
& \left((x \Leftrightarrow \overline{(a,b)}) \wedge (y_1 \Leftrightarrow \overline{(c,d)}) \right) \\
& \quad \downarrow \\
& (y_1 + x =_{\mathbb{Q}} e_1) \\
& \quad \downarrow \\
& \left(\overline{(c,d)} + \overline{(a,b)} \stackrel{\mathbb{F}_4}{=}_{\mathbb{Q}} \overline{(c \cdot b + d \cdot a, d \cdot b)} =_{\mathbb{Q}} \overline{(0,1)} \right) \\
& \quad \updownarrow P_1 \\
& \left(((c \cdot b + d \cdot a) \cdot 1 =_{\mathbb{Z}} (d \cdot b) \cdot 0) \right) \\
& \quad \updownarrow A_3 \\
& (c \cdot b + d \cdot a =_{\mathbb{Z}} (d \cdot b) \cdot 0) \\
& \quad \updownarrow A_9 \\
& (c \cdot b + d \cdot a =_{\mathbb{Z}} 0) \\
& \quad \updownarrow A_{10} \\
& \left(((c \cdot b + d \cdot a) + (-d \cdot a) =_{\mathbb{Z}} 0 + (-d \cdot a)) \right) \\
& \quad \updownarrow A_4 \\
& (c \cdot b + (d \cdot a + (-d \cdot a)) =_{\mathbb{Z}} 0 + (-d \cdot a)) \\
& \quad \updownarrow A_2 \\
& (c \cdot b + 0 =_{\mathbb{Z}} 0 + (-d \cdot a)) \\
& \quad A_{22} \updownarrow A_1 \\
& (c \cdot b =_{\mathbb{Z}} d \cdot (-a)) \\
& \quad \updownarrow P_1 \\
& \left(\overline{(c,d)} =_{\mathbb{Q}} \overline{(-a,b)} \right) \\
& \quad \downarrow \\
& (\exists y_1) (y_1 \Leftrightarrow \overline{(c,d)} =_{\mathbb{Q}} \overline{(-a,b)})
\end{aligned}$$

$\vdash_3$

$$\begin{aligned}
& (\forall x)(\exists y_2)(y_1 \neq_{\mathbb{Q}} y_2)(x + y_2 =_{\mathbb{Q}} y_2 + x =_{\mathbb{Q}} e_1) \\
& \quad \downarrow \\
& \quad \left((x \Leftrightarrow \overline{(a,b)}) \wedge (y_2 \Leftrightarrow \overline{(e,f)}) \right) \\
& \quad \downarrow \\
& \quad (x + y_2 =_{\mathbb{Q}} e_1) \\
& \quad \updownarrow \\
& \quad \left(\overline{(a,b)} + \overline{(e,f)} \stackrel{\mathbb{F}_4}{=} \overline{(a \cdot f + b \cdot e, b \cdot f)} =_{\mathbb{Q}} \overline{(0,1)} \right) \\
& \quad \updownarrow P_1 \\
& \quad ((a \cdot f + b \cdot e) \cdot 1 =_{\mathbb{Z}} (b \cdot f) \cdot 0) \\
& \quad \updownarrow A_3 \\
& \quad (a \cdot f + b \cdot e =_{\mathbb{Z}} (b \cdot f) \cdot 0) \\
& \quad \updownarrow A_9 \\
& \quad (a \cdot f + b \cdot e =_{\mathbb{Z}} 0) \\
& \quad \updownarrow A_{10} \\
& \quad (((-a \cdot f) + (a \cdot f + b \cdot e) =_{\mathbb{Z}} (-a \cdot f) + 0)) \\
& \quad \updownarrow A_4 \\
& \quad ((-a \cdot f + a \cdot f) + b \cdot e =_{\mathbb{Z}} (-a \cdot f) + 0) \\
& \quad \updownarrow A_2 \\
& \quad (0 + b \cdot e =_{\mathbb{Z}} (-a \cdot f) + 0) \\
& \quad \updownarrow A_{22} \updownarrow A_1 \\
& \quad (b \cdot e =_{\mathbb{Z}} (-a) \cdot f) \\
& \quad \downarrow A_7 \\
& \quad (e \cdot b =_{\mathbb{Z}} f \cdot (-a)) \\
& \quad \updownarrow P_1 \\
& \quad (\overline{(e,f)} =_{\mathbb{Z}} \overline{(-a,b)}) \\
& \quad \downarrow \\
& \quad \wedge \\
& \quad \downarrow \\
& (\exists y_2)(y_1 \neq_{\mathbb{Q}} y_2) \left((\forall x)(x + y_2 =_{\mathbb{Q}} y_2 + x =_{\mathbb{Q}} e_1) \right) \\
& \quad \downarrow \\
& (\forall x)(\exists! y_1)(x + y_1 =_{\mathbb{Q}} y_1 + x =_{\mathbb{Q}} e_1)
\end{aligned}$$

■

Exemplo. $\left(\left(\frac{2}{5} \Leftrightarrow \overline{(2,3)} \right) \wedge \left(-\frac{2}{5} \Leftrightarrow \overline{(-2,3)} \right) \rightarrow \left(\frac{2}{5} + \left(-\frac{2}{5} \right) =_{\mathbb{Q}} 0 \right) \right)$

$\vdash$

$$\left(\begin{array}{c} \frac{2}{5} + \left(-\frac{2}{5} \right) \Leftrightarrow \overline{(2,3)} + \overline{(-2,3)} =_{\mathbb{Q}} \overline{(2 \cdot 3 + 3 \cdot (-2), 3 \cdot 3)} =_{\mathbb{Q}} \overline{(6 - 6, 9)} \\ \updownarrow \\ \overline{(0,9)} \Leftrightarrow 0 \end{array} \right)$$

■

$$\models_8 \Leftrightarrow \left(\cdot \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c} (\forall x)(\forall y) \left(\begin{array}{c} \cdot : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q} \\ (x, y) \mapsto \cdot (x, y) \Leftrightarrow x \cdot y \end{array} \right) \\ \wedge \\ (x \cdot y =_{\mathbb{Q}} \overline{(a, b)} \cdot \overline{(c, d)} =_{\mathbb{Q}} \overline{(a \cdot c, b \cdot d)}) \end{array} \right) \right)$$

$$P_7 \Leftrightarrow \left((\forall x)(\forall y)(\forall z)(\forall w) \left(\left((x =_{\mathbb{Q}} w) \wedge (y =_{\mathbb{Q}} z) \right) \rightarrow (x \cdot y =_{\mathbb{Q}} w \cdot z) \right) \right)$$

⊢

$$\left((x \Leftrightarrow \overline{(a, b)}) \wedge (y \Leftrightarrow \overline{(c, d)}) \wedge (z \Leftrightarrow \overline{(e, f)}) \wedge (w \Leftrightarrow \overline{(g, h)}) \right)$$

↓

$$\left((x =_{\mathbb{Q}} w) \wedge (y =_{\mathbb{Q}} z) \right)$$

⋈

$$\left(\left(\overline{(a, b)} =_{\mathbb{Q}} \overline{(g, h)} \right) \wedge \left(\overline{(c, d)} =_{\mathbb{Q}} \overline{(e, f)} \right) \right)$$

⋈ P_1

$$\left((a \cdot h =_{\mathbb{Z}} b \cdot g) \wedge (c \cdot f =_{\mathbb{Z}} d \cdot e) \right)$$

⋈ A_{11}

$$\left(((a \cdot h) \cdot (c \cdot f) =_{\mathbb{Z}} (b \cdot g) \cdot (c \cdot f)) \wedge ((b \cdot g) \cdot (c \cdot f) =_{\mathbb{Z}} (b \cdot g) \cdot (d \cdot e)) \right)$$

⋈ A_{17}

$$\left((a \cdot h) \cdot (c \cdot f) =_{\mathbb{Z}} (b \cdot g) \cdot (d \cdot e) \right)$$

⋈ A_6

$$(a \cdot (h \cdot c) \cdot f =_{\mathbb{Z}} b \cdot (g \cdot d) \cdot e)$$

⋈ A_7

$$(a \cdot (c \cdot h) \cdot f =_{\mathbb{Z}} b \cdot (d \cdot g) \cdot e)$$

⋈ A_6

$$\left((a \cdot c) \cdot (h \cdot f) =_{\mathbb{Z}} (b \cdot d) \cdot (g \cdot e) \right)$$

⋈ P_1

$$\left(\overline{(a \cdot c, b \cdot d)} =_{\mathbb{Q}} \overline{(g \cdot e, h \cdot f)} \right)$$

⋈

$$(x \cdot y =_{\mathbb{Q}} w \cdot z)$$

■

$$(\forall n)(n > 2) \left(\forall \overline{(a_i, b_i)} \right) (i \in \mathbb{N}) \rightarrow \prod_{i=1}^n \overline{(a_i, b_i)} =_{\mathbb{Q}} \left(\overline{(a_1, b_1)} \cdot \overline{(a_2, b_2)} \right) \cdot \dots \cdot \overline{(a_n, b_n)} \Big)$$

Exemplo. $\left(\left(\frac{1}{3} \Leftrightarrow \overline{(1,3)} \right) \wedge \left(\frac{2}{3} \Leftrightarrow \overline{(2,3)} \right) \rightarrow \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} =_{\mathbb{Q}} \frac{2}{9} \right) \right)$

⊢

$$\left(\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \Leftrightarrow \overline{(1,3)} \cdot \overline{(2,3)} =_{\mathbb{Q}} \overline{(1 \cdot 2, 3 \cdot 3)} =_{\mathbb{Q}} \overline{(2,9)} \Leftrightarrow \frac{2}{9} \right)$$

■

Exemplo. $\left(\left(\frac{1}{5} \Leftrightarrow \overline{(1,5)} \right) \wedge \left(-\frac{3}{2} \Leftrightarrow \overline{(-3,2)} \right) \rightarrow \left(\frac{1}{5} \cdot \frac{3}{2} =_{\mathbb{Q}} \frac{3}{10} \right) \right)$

⊢

$$\left(\frac{1}{5} \cdot \left(-\frac{3}{2} \right) \Leftrightarrow \overline{(1,5)} \cdot \overline{(-3,2)} =_{\mathbb{Q}} \overline{(1 \cdot (-3), 5 \cdot 2)} =_{\mathbb{Q}} \overline{(-3,10)} \Leftrightarrow -\frac{3}{10} \right)$$

■

$$P_8 \Leftrightarrow \left((\forall x)(\exists! e'_1)(x \cdot e'_1 =_{\mathbb{Q}} e'_1 \cdot x =_{\mathbb{Q}} x) \right)$$

⊢

⊢₁

$$\begin{aligned} & \left((x \Leftrightarrow \overline{(a,b)}) \wedge (e'_1 \Leftrightarrow \overline{(c,d)}) \right) \\ & \quad \downarrow \\ & (x \cdot e'_1 =_{\mathbb{Q}} x) \\ & \quad \Downarrow \\ & \left(\overline{(a,b)} \cdot \overline{(c,d)} \stackrel{\mathbb{F}_5}{=}_{\mathbb{Q}} \overline{(a \cdot c, b \cdot d)} =_{\mathbb{Q}} \overline{(a,b)} \right) \\ & \quad \Downarrow P_1 \\ & ((a \cdot c) \cdot b =_{\mathbb{Z}} (b \cdot d) \cdot a) \\ & \quad \Downarrow A_6 \\ & ((a \cdot c) \cdot b =_{\mathbb{Z}} b \cdot (d \cdot a)) \\ & \quad \Downarrow A_7 \\ & ((a \cdot c) \cdot b =_{\mathbb{Z}} (d \cdot a) \cdot b) \\ & \quad \Downarrow A_{11} \\ & (a \cdot c =_{\mathbb{Z}} d \cdot a) \\ & \quad \Downarrow A_7 \\ & (c \cdot a =_{\mathbb{Z}} d \cdot a) \\ & \quad \Downarrow P_1 \\ & (\overline{(c,d)} =_{\mathbb{Q}} \overline{(a,a)}) \end{aligned}$$

$\vdash_2$

$$\begin{aligned}
& \left((x \Leftrightarrow \overline{(a, b)}) \wedge (e'_1 \Leftrightarrow \overline{(c, d)}) \right) \\
& \quad \downarrow \\
& (e'_1 \cdot x =_{\mathbb{Q}} x) \\
& \quad \updownarrow \text{def} \\
& \left(\overline{(c, d)} \cdot \overline{(a, b)} \stackrel{\mathbb{F}_5}{=}_{\mathbb{Q}} \overline{(c \cdot a, d \cdot b)} =_{\mathbb{Q}} \overline{(a, b)} \right) \\
& \quad \updownarrow P_1 \\
& ((c \cdot a) \cdot b =_{\mathbb{Z}} (d \cdot b) \cdot a) \\
& \quad \updownarrow A_6 \\
& ((c \cdot a) \cdot b =_{\mathbb{Z}} d \cdot (b \cdot a)) \\
& \quad \updownarrow A_7 \\
& ((c \cdot a) \cdot b =_{\mathbb{Z}} d \cdot (a \cdot b)) \\
& \quad \updownarrow A_6 \\
& ((c \cdot a) \cdot b =_{\mathbb{Z}} (d \cdot a) \cdot b) \\
& \quad \updownarrow A_{11} \\
& (c \cdot a =_{\mathbb{Z}} d \cdot a) \\
& \quad \updownarrow P_1 \\
& (\overline{(c, d)} =_{\mathbb{Q}} \overline{(a, a)})
\end{aligned}$$

 $\vdash_3$

$$\begin{aligned}
& (\forall x)(\exists e'_2)(e'_1 \neq_{\mathbb{Q}} e'_2)(x \cdot e'_2 =_{\mathbb{Q}} e'_2 \cdot x =_{\mathbb{Q}} x) \\
& \quad \downarrow \vdash_2 \\
& \left((x =_{\mathbb{Q}} e'_1) \left((e'_1 \cdot e'_2 =_{\mathbb{Q}} e'_1) \wedge (e'_1 \cdot e'_2 =_{\mathbb{Q}} e'_2) \right) \right) \\
& \quad \updownarrow P_1 \\
& \left((e'_1 =_{\mathbb{Q}} e'_1 \cdot e'_2) \wedge (e'_1 \cdot e'_2 =_{\mathbb{Q}} e'_2) \right) \\
& \quad \updownarrow P_1 \\
& (e'_1 =_{\mathbb{Q}} e'_2) \\
& \quad \downarrow \\
& \Lambda \\
& \quad \downarrow \\
& (\forall x)(\nexists e'_2)(e'_1 \neq_{\mathbb{Q}} e'_2)(x \cdot e'_2 =_{\mathbb{Q}} e'_2 \cdot x =_{\mathbb{Q}} x) \\
& \quad \downarrow \\
& (\forall x)(\exists! e'_1)(x \cdot e'_1 =_{\mathbb{Q}} e'_1 \cdot x =_{\mathbb{Q}} x)
\end{aligned}$$

■

Escólio.

$$\begin{aligned}
(e'_1 = \overline{(a, a)} &\stackrel{\text{def}}{=} \{(a, b) : (a, b) =_{\mathbb{Q}} (a, a)\}) \\
&\downarrow \\
(e_1 = \{(a, b) : a \cdot a &=_{\mathbb{Z}} b \cdot a\}) \\
&\downarrow \\
(e_1 = \{(a, b) : a &=_{\mathbb{Z}} b\})
\end{aligned}$$

Exemplo. $\left(\left(-\frac{2}{3} \Leftrightarrow \overline{(-2, 3)} \right) \wedge \left(1 \Leftrightarrow \overline{(1, 1)} \right) \rightarrow \left(\left(-\frac{2}{3} \right) \cdot 1 = -\frac{2}{3} \right) \right)$

$\vdash$

$$\left(\left(-\frac{2}{3} \right) \cdot 1 \Leftrightarrow \overline{(-2, 3)} \cdot \overline{(1, 1)} =_{\mathbb{Q}} \overline{(-2 \cdot 1, 3 \cdot 1)} =_{\mathbb{Q}} \overline{(-2, 3)} \Leftrightarrow -\frac{2}{3} \right)$$

■

$$P_9 \Leftrightarrow \left((\forall x)(\exists! y'_1)(x \neq_{\mathbb{Q}} e_1)(x \cdot y'_1 =_{\mathbb{Q}} y'_1 \cdot x =_{\mathbb{Q}} e'_1) \right)$$

$\vdash$

$\vdash_1$

$$\begin{aligned}
&\left(\left((x \Leftrightarrow \overline{(a, b)}) \wedge (a \neq_{\mathbb{Z}} 0) \right) \wedge (y'_1 \Leftrightarrow \overline{(c, d)}) \right) \\
&\quad \downarrow \\
&(x \cdot y'_1 =_{\mathbb{Q}} e'_1) \\
&\quad \downarrow \\
&\left(\overline{(a, b)} \cdot \overline{(c, d)} \stackrel{\text{F}_5}{=}_{\mathbb{Q}} \overline{(a \cdot c, b \cdot d)} =_{\mathbb{Q}} \overline{(1, 1)} \right) \\
&\quad \downarrow P_1 \\
&((a \cdot c) \cdot 1 =_{\mathbb{Z}} (b \cdot d) \cdot 1) \\
&\quad \downarrow A_3 \\
&(a \cdot c =_{\mathbb{Z}} b \cdot d) \\
&\quad \downarrow A_7 \\
&(c \cdot a =_{\mathbb{Z}} d \cdot b) \\
&\quad \downarrow P_1 \\
&(\overline{(c, d)} =_{\mathbb{Q}} \overline{(b, a)})
\end{aligned}$$

$\vdash_2$

$$\begin{aligned}
& \left(\left((x \Leftrightarrow \overline{(a,b)}) \wedge (a \neq_{\mathbb{Z}} 0) \right) \wedge (y'_1 \Leftrightarrow \overline{(c,d)}) \right) \\
& \quad \downarrow \\
& (y'_1 \cdot x =_{\mathbb{Q}} e'_1) \\
& \quad \updownarrow \\
& \left(\overline{(c,d)} \cdot \overline{(a,b)} \stackrel{\models_5}{=}_{\mathbb{Q}} \overline{(c \cdot a, d \cdot b)} =_{\mathbb{Q}} \overline{(1,1)} \right) \\
& \quad \updownarrow P_1 \\
& ((c \cdot a) \cdot 1 =_{\mathbb{Z}} (d \cdot b) \cdot 1) \\
& \quad \updownarrow A_3 \\
& (c \cdot a = d \cdot b) \\
& \quad \updownarrow P_1 \\
& (\overline{(c,d)} =_{\mathbb{Q}} \overline{(b,a)})
\end{aligned}$$

$$\therefore (\exists y'_1) (y'_1 \Leftrightarrow \overline{(c,d)} =_{\mathbb{Q}} \overline{(b,a)})$$

$\vdash_3$

$$\begin{aligned}
& (\forall x)(\exists y_2)(x \neq_{\mathbb{Q}} e_1)(y'_1 \neq_{\mathbb{Q}} y'_2)(x \cdot y'_2 =_{\mathbb{Q}} y'_2 \cdot x =_{\mathbb{Q}} e'_1) \\
& \quad \downarrow \\
& \left(\left((x \Leftrightarrow \overline{(a,b)}) \wedge (a \neq_{\mathbb{Z}} 0) \right) \wedge (y'_2 \Leftrightarrow \overline{(e,f)}) \right) \\
& \quad \downarrow \\
& (x \cdot y'_2 =_{\mathbb{Q}} e'_1) \\
& \quad \updownarrow \\
& \left(\overline{(a,b)} \cdot \overline{(e,f)} \stackrel{\models_5}{=}_{\mathbb{Q}} \overline{(a \cdot e, b \cdot f)} =_{\mathbb{Q}} \overline{(1,1)} \right) \\
& \quad \updownarrow P_1 \\
& ((a \cdot e) \cdot 1 =_{\mathbb{Z}} (b \cdot f) \cdot 1) \\
& \quad \updownarrow A_3 \\
& (a \cdot e =_{\mathbb{Z}} b \cdot f) \\
& \quad \updownarrow A_7 \\
& (e \cdot a = f \cdot b) \\
& \quad \updownarrow P_1 \\
& (\overline{(e,f)} = \overline{(b,a)}) \\
& \quad \downarrow \\
& \Lambda \\
& \quad \downarrow \\
& (\forall x)(\exists y_2)(x \neq_{\mathbb{Q}} e_1)(y'_1 \neq_{\mathbb{Q}} y'_2) \left((x \cdot y_2 =_{\mathbb{Q}} y_2 \cdot x =_{\mathbb{Q}} e'_1) \right) \\
& \quad \downarrow \\
& (\forall x)(\exists! y'_1)(x \neq_{\mathbb{Q}} e_1)(x \cdot y'_1 =_{\mathbb{Q}} y'_1 \cdot x =_{\mathbb{Q}} e'_1)
\end{aligned}$$

■

Exemplo. $\left(\left(\frac{7}{5} \Leftrightarrow \overline{(7, 5)} \right) \wedge \left(\frac{5}{7} \Leftrightarrow \overline{(5, 7)} \right) \rightarrow \left(\frac{7}{5} \cdot \frac{5}{7} =_{\mathbb{Q}} 1 \right) \right)$

$\vdash$

$$\left(\frac{7}{5} \cdot \frac{5}{7} \Leftrightarrow \overline{(7, 5)} \cdot \overline{(5, 7)} =_{\mathbb{Q}} \overline{(7 \cdot 5, 5 \cdot 7)} =_{\mathbb{Q}} \overline{(35, 35)} \Leftrightarrow \overline{(1, 1)} \Leftrightarrow 1 \right)$$

■

3.4 Operações de Subtração e Divisão dos Números Racionais

$$\models_9 \Leftrightarrow \left(- \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c} (\forall x)(\forall y) \left(\begin{array}{c} - : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q} \\ (x, y) \mapsto -(x, y) \Leftrightarrow x - y \end{array} \right) \\ \wedge \\ (x - y =_{\mathbb{Q}} x + (-y) =_{\mathbb{Q}} \overline{(a, b)} + \overline{(-c, d)} =_{\mathbb{Q}} \overline{(a \cdot d - b \cdot c, b \cdot d)}) \end{array} \right) \right) \right)$$

$$P_{10} \Leftrightarrow \left((\forall x)(\forall y)(\forall z)(\forall w) \left(\left((x =_{\mathbb{Q}} w) \wedge (-y =_{\mathbb{Q}} -z) \right) \rightarrow (x - y =_{\mathbb{Q}} w - z) \right) \right)$$

$\vdash$

$$\begin{aligned} & \left((x \Leftrightarrow \overline{(a, b)}) \wedge (-y \Leftrightarrow \overline{(-c, d)}) \wedge (-z \Leftrightarrow \overline{(-e, f)}) \wedge (w \Leftrightarrow \overline{(g, h)}) \right) \\ & \quad \downarrow \\ & \left((x =_{\mathbb{Q}} w) \wedge (-y =_{\mathbb{Q}} -z) \right) \\ & \quad \Downarrow \\ & \left(\overline{(a, b)} =_{\mathbb{Q}} \overline{(g, h)} \wedge \overline{(-c, d)} =_{\mathbb{Q}} \overline{(-e, f)} \right) \\ & \quad \Downarrow P_1 \\ & \left((a \cdot h =_{\mathbb{Z}} b \cdot g) \wedge ((-c) \cdot f =_{\mathbb{Z}} d \cdot (-e)) \right) \\ & \quad \downarrow A_{11} \\ & \left(((a \cdot h) \cdot (d \cdot f) =_{\mathbb{Z}} (b \cdot g) \cdot (d \cdot f)) \wedge ((b \cdot h) \cdot ((-c) \cdot f) =_{\mathbb{Z}} (b \cdot h) \cdot ((-d) \cdot e)) \right) \\ & \quad \Downarrow A_6 \\ & \left((a \cdot (h \cdot d) \cdot f =_{\mathbb{Z}} b \cdot (g \cdot d) \cdot f) \wedge (b \cdot (h \cdot (-c)) \cdot f =_{\mathbb{Z}} b \cdot (h \cdot (-d)) \cdot e) \right) \\ & \quad \Downarrow A_7 \\ & \left((a \cdot (d \cdot h) \cdot f =_{\mathbb{Z}} b \cdot (d \cdot g) \cdot f) \wedge (b \cdot ((-c) \cdot h) \cdot f =_{\mathbb{Z}} b \cdot ((-d) \cdot h) \cdot e) \right) \\ & \quad \Downarrow A_6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \Downarrow A_6 \\
& \left(((a \cdot d) \cdot (h \cdot f) =_{\mathbb{Z}} (b \cdot d) \cdot (g \cdot f)) \wedge ((b \cdot (-c)) \cdot (h \cdot f) =_{\mathbb{Z}} (b \cdot (-d)) \cdot (h \cdot e)) \right) \\
& \Downarrow A_{10} \\
& \left(((a \cdot d) \cdot (h \cdot f)) + ((b \cdot (-c)) \cdot (h \cdot f)) =_{\mathbb{Z}} (b \cdot d) \cdot (g \cdot f) + ((b \cdot (-c)) \cdot (h \cdot f)) \right) \\
& \quad \wedge \\
& \quad \left((b \cdot d) \cdot (g \cdot f) + ((b \cdot (-c)) \cdot (h \cdot f)) =_{\mathbb{Z}} (b \cdot d) \cdot (g \cdot f) + (b \cdot (-d)) \cdot (h \cdot e) \right) \\
& \quad A_{22} \downarrow A_{17} \\
& ((a \cdot d) \cdot (h \cdot f) + (-b \cdot c) \cdot (h \cdot f) =_{\mathbb{Z}} (b \cdot d) \cdot (g \cdot f) + (b \cdot (-d)) \cdot (h \cdot e)) \\
& \quad \Downarrow A_8 \\
& ((a \cdot d - b \cdot c) \cdot (h \cdot f) =_{\mathbb{Z}} (b \cdot d) \cdot (g \cdot f - h \cdot e)) \\
& \quad \Downarrow P_1 \\
& (\overline{(a \cdot d - b \cdot c, b \cdot d)} =_{\mathbb{Q}} \overline{(g \cdot f - h \cdot e, h \cdot f)}) \\
& \quad \Downarrow \\
& (x - y =_{\mathbb{Q}} w - z)
\end{aligned}$$

■

$$\mathbb{F}_{10} \Leftrightarrow \left(\div \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c} (\forall x)(\forall y) \left(\begin{array}{c} \div : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^* \rightarrow \mathbb{Q} \\ (x, y) \mapsto \div (x, y) \Leftrightarrow x \div y \end{array} \right) \\ \wedge \\ (x \div y =_{\mathbb{Q}} x \cdot y^{-1} =_{\mathbb{Q}} \overline{(a, b)} \cdot \overline{(d, c)} =_{\mathbb{Q}} \overline{(a \cdot d, b \cdot c)}) \end{array} \right) \right) \right)$$

$$P_{11} \Leftrightarrow \left((\forall x)(\forall y)(\forall z)(\forall w) \left(((x =_{\mathbb{Q}} w) \wedge (y^{-1} =_{\mathbb{Q}} z^{-1})) \rightarrow (x \div y =_{\mathbb{Q}} w \div z) \right) \right)$$

⊢

$$\begin{aligned}
& ((x \Leftrightarrow \overline{(a, b)}) \wedge (y^{-1} \Leftrightarrow \overline{(d, c)}) \wedge (z^{-1} \Leftrightarrow \overline{(f, e)}) \wedge (w \Leftrightarrow \overline{(g, h)})) \\
& \quad \downarrow \\
& ((x =_{\mathbb{Q}} w) \wedge (y^{-1} =_{\mathbb{Q}} z^{-1})) \\
& \quad \Downarrow \\
& ((\overline{(a, b)} =_{\mathbb{Q}} \overline{(g, h)}) \wedge (\overline{(d, c)} =_{\mathbb{Q}} \overline{(f, e)})) \\
& \quad \Downarrow P_1 \\
& ((a \cdot h =_{\mathbb{Z}} b \cdot g) \wedge (d \cdot e =_{\mathbb{Z}} c \cdot f)) \\
& \quad A_7 \Downarrow A_{11} \\
& (((a \cdot h) \cdot (d \cdot e) =_{\mathbb{Z}} (b \cdot g) \cdot (d \cdot e)) \wedge ((b \cdot g) \cdot (d \cdot e) =_{\mathbb{Z}} (b \cdot g) \cdot (c \cdot f))) \\
& \quad \downarrow A_{17} \\
& ((a \cdot h) \cdot (d \cdot e) =_{\mathbb{Z}} (b \cdot g) \cdot (c \cdot f)) \\
& \quad \Downarrow A_{11}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \downarrow A_{11} \\
& (a \cdot (h \cdot d) \cdot e =_{\mathbb{Z}} b \cdot (g \cdot c) \cdot f) \\
& \downarrow A_6 \\
& (a \cdot (d \cdot h) \cdot e =_{\mathbb{Z}} b \cdot (c \cdot g) \cdot f) \\
& \downarrow A_7 \\
& ((a \cdot d) \cdot (h \cdot e) =_{\mathbb{Z}} (b \cdot c) \cdot (g \cdot f)) \\
& \downarrow A_6 \\
& (\overline{(a \cdot d, b \cdot c)} =_{\mathbb{Q}} \overline{(g \cdot f, h \cdot e)}) \\
& \downarrow P_1 \\
& (x \cdot y^{-1} =_{\mathbb{Q}} w \cdot z^{-1}) \\
& \downarrow \\
& (x \div y =_{\mathbb{Q}} w \div z)
\end{aligned}$$

■

3.5 O sistema numérico dos Números Racionais

$$P_{12} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c} (S_6 = (\mathbb{Q}, \{+, \cdot\}, \{\leq_{\mathbb{Q}}, =_{\mathbb{Q}}\}, \{A_1, \dots, A_{23}\})) \\ \downarrow \\ (\forall x)(\forall y)(\forall z)(x + (y + z) =_{\mathbb{Q}} (x + y) + z) \\ \wedge \\ (\forall x)(\forall y)(\forall z)(x \cdot (y \cdot z) =_{\mathbb{Q}} (x \cdot y) \cdot z) \\ \wedge \\ (\forall x)(\forall y)(x + y =_{\mathbb{Q}} y + x) \\ \wedge \\ (\forall x)(\forall y)(x \cdot y =_{\mathbb{Q}} y \cdot x) \\ \wedge \\ (\forall x)(\forall y)(\forall z)(x \cdot (y + z) =_{\mathbb{Q}} (x \cdot y) + (x \cdot z)) \end{array} \right)$$

$$P_{12.1} \Leftrightarrow ((\forall x)(\forall y)(x + (y + z) =_{\mathbb{Q}} (x + y) + z))$$

⊢

$$\begin{aligned}
& \left((x \Leftrightarrow \overline{(a,b)}) \wedge (y \Leftrightarrow \overline{(c,d)}) \wedge (z \Leftrightarrow \overline{(e,f)}) \right) \\
& \quad \downarrow \\
& \quad (x + (y + z)) \\
& \quad \Updownarrow \\
& \quad \left(\overline{(a,b)} + \left(\overline{(c,d)} + \overline{(e,f)} \right) \right) \\
& \quad \parallel_{\mathbb{Q} \models_4} \\
& \quad \left(\overline{(a,b)} + \overline{(c \cdot f + d \cdot e, d \cdot f)} \right) \\
& \quad \parallel_{\mathbb{Q} \models_4} \\
& \quad \overline{\left((a \cdot (c \cdot f) + b \cdot (c \cdot f + d \cdot e), b \cdot (d \cdot f)) \right)} \\
& \quad \parallel_{\mathbb{Q} A_8} \\
& \quad \overline{\left((a \cdot (c \cdot f) + b \cdot (c \cdot f) + b \cdot (d \cdot e), b \cdot (d \cdot f)) \right)} \\
& \quad \parallel_{\mathbb{Q} A_6} \\
& \quad \overline{\left(((a \cdot c) \cdot f + (b \cdot c) \cdot f + (b \cdot d) \cdot e, (b \cdot d) \cdot f) \right)} \\
& \quad \parallel_{\mathbb{Q} A_8} \\
& \quad \overline{\left(((a \cdot c + b \cdot c) \cdot f + (b \cdot d) \cdot e, (b \cdot d) \cdot f) \right)} \\
& \quad \parallel_{\mathbb{Q} \models_4} \\
& \quad \left(\overline{(a \cdot c + b \cdot c, b \cdot d)} + \overline{(e, f)} \right) \\
& \quad \parallel_{\mathbb{Q} \models_4} \\
& \quad \parallel_{\mathbb{Q} \models_4} \\
& \quad \left(\left(\overline{(a,b)} + \overline{(c,d)} \right) + \overline{(e,f)} \right) \\
& \quad \Updownarrow \\
& \quad ((x + y) + z)
\end{aligned}$$

■

$$P_{12.2} \Leftrightarrow \left((\forall x)(\forall y)(x + y =_{\mathbb{Q}} y + x) \right)$$

⊢

$$\begin{aligned}
& \left((x \Leftrightarrow \overline{(a,b)}) \wedge (y \Leftrightarrow \overline{(c,d)}) \right) \\
& \quad \downarrow \\
& \quad (x + y) \\
& \quad \Downarrow \\
& \quad \left(\overline{(a,b)} + \overline{(c,d)} \right) \\
& \quad \parallel_{\mathbb{Q} \models_4} \\
& \quad \overline{(a \cdot d + b \cdot c, b \cdot d)} \\
& \quad \parallel_{\mathbb{Q} A_5} \\
& \quad \left(\overline{(b \cdot c + a \cdot d, b \cdot d)} \right) \\
& \quad \parallel_{\mathbb{Q} A_7} \\
& \quad \left(\overline{(c \cdot b + d \cdot a, d \cdot b)} \right) \\
& \quad \parallel_{\mathbb{Q} \models_4} \\
& \quad \left(\overline{(c,d)} + \overline{(a,b)} \right) \\
& \quad \Downarrow \\
& \quad (y + x)
\end{aligned}$$

■

$$P_{12.3} \Leftrightarrow \left((\forall x)(\forall y)(x \cdot y =_{\mathbb{Q}} y \cdot x) \right)$$

⊢

$$\begin{aligned}
& \left((x \Leftrightarrow \overline{(a,b)}) \wedge (y \Leftrightarrow \overline{(c,d)}) \right) \\
& \quad \downarrow \\
& \quad (x \cdot y) \\
& \quad \Downarrow \\
& \quad \left(\overline{(a,b)} \cdot \overline{(c,d)} \right) \\
& \quad \parallel_{\mathbb{Q} \models_5} \\
& \quad \left(\overline{(a \cdot c, b \cdot d)} \right) \\
& \quad \parallel_{\mathbb{Q} A_7} \\
& \quad \left(\overline{(c \cdot a, d \cdot b)} \right) \\
& \quad \parallel_{\mathbb{Q} \models_5} \\
& \quad \left(\overline{(c,d)} \cdot \overline{(a,b)} \right) \\
& \quad \Downarrow \\
& \quad (y \cdot x)
\end{aligned}$$

■

$$P_{12.4} \Leftrightarrow \left((\forall x)(\forall y)(\forall z)(x \cdot (y \cdot z) =_{\mathbb{Q}} (x \cdot y) \cdot z) \right)$$

⊢

$$\begin{aligned}
& \left((x \Leftrightarrow \overline{(a,b)}) \wedge (y \Leftrightarrow \overline{(c,d)}) \wedge (z \Leftrightarrow \overline{(e,f)}) \right) \\
& \quad \downarrow \\
& (x \cdot (y \cdot z)) \\
& \quad \Updownarrow \\
& \overline{(a,b)} \cdot \overline{((c,d) \cdot (e,f))} \\
& \quad \parallel_{\mathbb{Q} \models_5} \\
& \overline{(a,b)} \cdot \overline{(c \cdot e, d \cdot f)} \\
& \quad \parallel_{\mathbb{Q} \models_5} \\
& \overline{(a \cdot (c \cdot e), b \cdot (d \cdot f))} \\
& \quad \parallel_{\mathbb{Q} \models_{A_6}} \\
& \overline{((a \cdot c) \cdot e, (b \cdot d) \cdot f)} \\
& \quad \parallel_{\mathbb{Q} \models_5} \\
& \overline{(a \cdot c, b \cdot d) \cdot (e, f)} \\
& \quad \parallel_{\mathbb{Q} \models_5} \\
& \overline{((a,b) \cdot (c,d)) \cdot (e,f)} \\
& \quad \Updownarrow \\
& ((x \cdot y) \cdot z)
\end{aligned}$$

■

$$P_{12.5} \Leftrightarrow \left((\forall x)(\forall y)(\forall z)(x \cdot (y + z) =_{\mathbb{Q}} x \cdot y + x \cdot z) \right)$$

⊢

$$\begin{aligned}
& \left((x \Leftrightarrow \overline{(a,b)}) \wedge (y \Leftrightarrow \overline{(c,d)}) \wedge (z \Leftrightarrow \overline{(e,f)}) \right) \\
& \quad \downarrow \\
& (x \cdot (y + z)) \\
& \quad \Downarrow \\
& \left(\overline{(a,b)} \cdot \left(\overline{(c,d)} + \overline{(e,f)} \right) \right) \\
& \quad \parallel_{\mathbb{Q}} \models_4 \\
& \left(\overline{(a,b)} \cdot \overline{(c \cdot f + d \cdot e, d \cdot f)} \right) \\
& \quad \parallel_{\mathbb{Q}} \models_5 \\
& \overline{\left((a \cdot (c \cdot f) + a \cdot (d \cdot e), b \cdot (d \cdot f)) \right)} \\
& \quad \parallel_{\mathbb{Q}} P_8 \\
& \left(\overline{(b,b)} \cdot \overline{(a \cdot (c \cdot f) + a \cdot (d \cdot e), b \cdot (d \cdot f))} \right) \\
& \quad \parallel_{\mathbb{Q}} \models_5 \\
& \overline{\left((b \cdot (a \cdot (c \cdot f) + a \cdot (d \cdot e)), b \cdot (b \cdot (d \cdot f))) \right)} \\
& \quad \parallel_{\mathbb{Q}} A_8 \\
& \overline{\left(((b \cdot a \cdot (c \cdot f) + b \cdot a \cdot (d \cdot e)), b \cdot (b \cdot (d \cdot f))) \right)} \\
& \quad \parallel_{\mathbb{Q}} A_6 \\
& \overline{\left(((b \cdot (a \cdot c) \cdot f + b \cdot (a \cdot d) \cdot e), b \cdot (b \cdot d) \cdot f) \right)} \\
& \quad \parallel_{\mathbb{Q}} A_7 \\
& \overline{\left((((a \cdot c) \cdot b \cdot f + (a \cdot d) \cdot b \cdot e), b \cdot (b \cdot d) \cdot f) \right)} \\
& \quad \parallel_{\mathbb{Q}} \models_4 \\
& \left(\overline{(a \cdot c, b \cdot d)} + \overline{(a \cdot e, b \cdot f)} \right) \\
& \quad \parallel_{\mathbb{Q}} \models_5 \\
& \left(\overline{(a,b)} \cdot \overline{(c,d)} + \overline{(a,b)} \cdot \overline{(e,f)} \right) \\
& \quad \Downarrow \\
& (x \cdot y + x \cdot z)
\end{aligned}$$

■

3.6 Propiedades importantes

$$P_{13} \Leftrightarrow \left((\forall x)(\forall y) \left((x \cdot y =_{\mathbb{Q}} e_1) \rightarrow (x =_{\mathbb{Q}} e_1) \vee (y =_{\mathbb{Q}} e_1) \right) \right)$$

⊢

⊢₁

$$\begin{aligned}
& \left((x = \overline{(a, b)}) \wedge (y = \overline{(c, d)}) \right) \\
& \quad \downarrow \\
& (x \neq e_1)(x \cdot y = e_1) \\
& \quad \updownarrow \\
& \left(\overline{(a, b)} \cdot \overline{(c, d)} \stackrel{\models_5}{=}_{\mathbb{Q}} \overline{(a \cdot c, b \cdot d)} =_{\mathbb{Q}} \overline{(0, 1)} \right) \\
& \quad \updownarrow P_1 \\
& ((a \cdot c) \cdot 1 =_{\mathbb{Z}} (b \cdot d) \cdot 0) \\
& \quad A_3 \updownarrow A_9 \\
& (a \cdot c =_{\mathbb{Z}} 0) \\
& \quad a \neq_{\mathbb{Z}} 0 \updownarrow A_9 \\
& (c =_{\mathbb{Z}} 0) \\
& \quad \updownarrow P_3 \\
& (\forall d)(d \in \mathbb{Z}^*) \left(y =_{\mathbb{Q}} \overline{(0, d)} \right) \\
& \quad \updownarrow \\
& (y =_{\mathbb{Q}} e_1)
\end{aligned}$$

$\vdash_2$

$$\begin{aligned}
& \left((x = \overline{(a, b)}) \wedge (y = \overline{(c, d)}) \right) \\
& \quad \downarrow \\
& (y \neq e_1)(x \cdot y = e_1) \\
& \quad \updownarrow \\
& \left(\overline{(a, b)} \cdot \overline{(c, d)} \stackrel{\models_5}{=}_{\mathbb{Q}} \overline{(a \cdot c, b \cdot d)} =_{\mathbb{Q}} \overline{(0, 1)} \right) \\
& \quad \updownarrow P_1 \\
& ((a \cdot c) \cdot 1 =_{\mathbb{Z}} (b \cdot d) \cdot 0) \\
& \quad A_3 \updownarrow A_9 \\
& (a \cdot c =_{\mathbb{Z}} 0) \\
& \quad c \neq_{\mathbb{Z}} 0 \updownarrow A_9 \\
& (a =_{\mathbb{Z}} 0) \\
& \quad \updownarrow P_3 \\
& (\forall b)(b \in \mathbb{Z}^*) \left(x =_{\mathbb{Q}} \overline{(0, b)} \right) \\
& \quad \updownarrow \\
& (x =_{\mathbb{Q}} e_1)
\end{aligned}$$

■

$$P_{14} \Leftrightarrow \left((\forall x)(\forall y)(\forall z)(x =_{\mathbb{Q}} y \leftrightarrow x + z =_{\mathbb{Q}} y + z) \right)$$

$\vdash$

$$\begin{aligned}
& \left((x \Leftrightarrow \overline{(a,b)}) \wedge (y \Leftrightarrow \overline{(c,d)}) \wedge (z \Leftrightarrow \overline{(e,f)}) \right) \\
& \quad \downarrow \\
& (x =_{\mathbb{Q}} y) \\
& \quad \Downarrow \\
& (\overline{(a,b)} =_{\mathbb{Q}} \overline{(c,d)}) \\
& \quad \Downarrow P_1 \\
& (a \cdot d =_{\mathbb{Z}} b \cdot c) \\
& \quad \Downarrow A_{11} \\
& \left(((a \cdot d) \cdot (f \cdot f) =_{\mathbb{Z}} (b \cdot c) \cdot (f \cdot f)) \wedge ((b \cdot c) \cdot (f \cdot f) =_{\mathbb{Z}} b \cdot (f \cdot c) \cdot f) \right) \\
& \quad \Downarrow A_{17} \\
& \left((a \cdot (f \cdot d) \cdot f =_{\mathbb{Z}} (a \cdot d) \cdot (f \cdot f)) \wedge ((a \cdot d) \cdot (f \cdot f) =_{\mathbb{Z}} b \cdot (f \cdot c) \cdot f) \right) \\
& \quad \Downarrow A_{10} \quad \Downarrow A_{17} \\
& ((a \cdot f \cdot d \cdot f) + (b \cdot e \cdot d \cdot f) =_{\mathbb{Z}} (b \cdot f \cdot c \cdot f) + (b \cdot e \cdot d \cdot f)) \\
& \quad \Downarrow A_{10} \\
& \left(\begin{aligned} & ((a \cdot f \cdot d \cdot f) + (b \cdot e \cdot d \cdot f) =_{\mathbb{Z}} (b \cdot f \cdot c \cdot f) + (b \cdot e \cdot d \cdot f)) \\ & \wedge \\ & ((b \cdot f \cdot c \cdot f) + (b \cdot e \cdot d \cdot f) =_{\mathbb{Z}} (b \cdot f \cdot c \cdot f) + (b \cdot f \cdot d \cdot e)) \end{aligned} \right) \\
& \quad \Downarrow A_{17} \\
& ((a \cdot f \cdot d \cdot f) + (b \cdot e \cdot d \cdot f) =_{\mathbb{Z}} (b \cdot f \cdot c \cdot f) + (b \cdot f \cdot d \cdot e)) \\
& \quad \Downarrow A_8 \\
& \left(\begin{aligned} & ((a \cdot f + b \cdot e) \cdot (d \cdot f) =_{\mathbb{Z}} (a \cdot f \cdot d \cdot f) + (b \cdot e \cdot d \cdot f)) \\ & \wedge \\ & ((b \cdot f \cdot c \cdot f) + (b \cdot f \cdot d \cdot e) =_{\mathbb{Z}} (b \cdot f) \cdot (c \cdot f + d \cdot e)) \end{aligned} \right) \\
& \quad \Downarrow A_{17} \\
& ((a \cdot f + b \cdot e) \cdot (d \cdot f) =_{\mathbb{Z}} (b \cdot f) \cdot (c \cdot f + d \cdot e)) \\
& \quad \Downarrow P_1 \\
& (\overline{(a \cdot f + b \cdot e, b \cdot f)} =_{\mathbb{Q}} \overline{(c \cdot f + d \cdot e, d \cdot f)}) \\
& \quad \Downarrow \models_4 \\
& \left((\overline{(a,b)} + \overline{(e,f)}) =_{\mathbb{Q}} (\overline{(c,d)} + \overline{(e,f)}) \right) \\
& \quad \Downarrow \\
& (x + z =_{\mathbb{Q}} y + z)
\end{aligned}$$

■

$$P_{15} \Leftrightarrow \left((\forall x)(\forall y)(\forall z)(z \in \mathbb{Q}^*)(x =_{\mathbb{Q}} y \leftrightarrow x \cdot z =_{\mathbb{Q}} y \cdot z) \right)$$

⊢

$$\begin{aligned}
& \left((x \Leftrightarrow \overline{(a,b)}) \wedge (y \Leftrightarrow \overline{(c,d)}) \wedge \left((z \Leftrightarrow \overline{(e,f)}) \wedge (e \neq_{\mathbb{Z}} 0) \right) \right) \\
& \quad \downarrow \\
& (x =_{\mathbb{Q}} y) \\
& \quad \Downarrow \\
& (\overline{(a,b)} =_{\mathbb{Q}} \overline{(c,d)}) \\
& \quad \Downarrow P_1 \\
& (a \cdot d =_{\mathbb{Z}} b \cdot c) \\
& \quad \Downarrow A_{11} \\
& ((a \cdot d) \cdot (e \cdot f) =_{\mathbb{Z}} (b \cdot c) \cdot (e \cdot f)) \\
& \quad A_6 \Downarrow A_7 \\
& (a \cdot (d \cdot e) \cdot f =_{\mathbb{Z}} (b \cdot c) \cdot (f \cdot e)) \\
& \quad A_7 \Downarrow A_6 \\
& ((a \cdot (e \cdot d) \cdot f) =_{\mathbb{Z}} (b \cdot (f \cdot c) \cdot e)) \\
& \quad \Downarrow A_6 \\
& ((a \cdot e) \cdot (d \cdot f) =_{\mathbb{Z}} (b \cdot f) \cdot (c \cdot e)) \\
& \quad \Downarrow P_1 \\
& (\overline{(a \cdot e, b \cdot f)} =_{\mathbb{Q}} \overline{(c \cdot e, d \cdot f)}) \\
& \quad \Downarrow \models_5 \\
& \left(\overline{((a,b) \cdot (e,f))} =_{\mathbb{Q}} \overline{((c,d) \cdot (e,f))} \right) \\
& \quad \Downarrow \\
& (x \cdot z =_{\mathbb{Q}} y \cdot z)
\end{aligned}$$

■

$$P_{16} \Leftrightarrow ((\forall x)(\forall y)(\forall z)(x <_{\mathbb{Q}} y \rightarrow x + z <_{\mathbb{Q}} y + z))$$

⊢

$$\begin{aligned}
& \left((x \Leftrightarrow \overline{(a,b)}) \wedge (y \Leftrightarrow \overline{(c,d)}) \wedge (z \Leftrightarrow \overline{(e,f)}) \right) \\
& \quad \downarrow \\
& (x <_{\mathbb{Q}} y) \\
& \quad \Downarrow \\
& (\overline{(a,b)} <_{\mathbb{Q}} \overline{(c,d)}) \\
& \quad \Downarrow P_2 \\
& (a \cdot d <_{\mathbb{Z}} b \cdot c) \\
& \quad f \neq 0 \Downarrow A_{13} \\
& ((a \cdot d) \cdot (f \cdot f) <_{\mathbb{Z}} (b \cdot c) \cdot (f \cdot f)) \\
& \quad A_6 \Downarrow A_7 \\
& (a \cdot (f \cdot d) \cdot f <_{\mathbb{Z}} b \cdot (f \cdot c) \cdot f) \\
& \quad \Downarrow A_6
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \downarrow A_6 \\
& (a \cdot f) \cdot (d \cdot f) <_{\mathbb{Z}} (b \cdot f) \cdot (c \cdot f) \\
& \downarrow A_{12} \\
& ((a \cdot f \cdot d \cdot f) + (b \cdot e \cdot d \cdot f)) <_{\mathbb{Z}} (b \cdot f \cdot c \cdot f) + (b \cdot e \cdot d \cdot f) \\
& A_6 \downarrow A_7 \\
& ((a \cdot f \cdot d \cdot f) + (b \cdot e \cdot d \cdot f)) <_{\mathbb{Z}} (b \cdot f \cdot c \cdot f) + (b \cdot (d \cdot e) \cdot f) \\
& A_7 \downarrow A_6 \\
& ((a \cdot f \cdot d \cdot f) + (b \cdot e \cdot d \cdot f)) <_{\mathbb{Z}} (b \cdot f \cdot c \cdot f) + (b \cdot f \cdot d \cdot e) \\
& \downarrow A_8 \\
& ((a \cdot f + b \cdot e) \cdot (d \cdot f)) <_{\mathbb{Z}} (b \cdot f) \cdot (c \cdot f + d \cdot e) \\
& \downarrow P_2 \\
& (\overline{(a \cdot f + b \cdot e, b \cdot f)}) <_{\mathbb{Q}} (\overline{(c \cdot f + d \cdot e, d \cdot f)}) \\
& \downarrow \models_4 \\
& \left((\overline{(a, b)} + \overline{(e, f)}) <_{\mathbb{Q}} (\overline{(c, d)} + \overline{(e, f)}) \right) \\
& \downarrow \\
& (x + z <_{\mathbb{Q}} y + z)
\end{aligned}$$

■

$$P_{17} \Leftrightarrow \left((\forall x)(\forall y)(\forall z)(z \in \mathbb{Q}_+^*)(x <_{\mathbb{Q}} y \leftrightarrow x \cdot z <_{\mathbb{Q}} y \cdot z) \right)$$

⊢

$$\begin{aligned}
& \left((x \Leftrightarrow \overline{(a, b)}) \wedge (y \Leftrightarrow \overline{(c, d)}) \wedge \left((z \Leftrightarrow \overline{(e, f)}) \wedge (e \neq_{\mathbb{Z}} 0) \right) \right) \\
& \downarrow \\
& (x <_{\mathbb{Q}} y) \\
& \downarrow \\
& ((a, b) <_{\mathbb{Q}} (c, d)) \\
& \downarrow \\
& (a \cdot d <_{\mathbb{Z}} b \cdot c) \\
& e \cdot f \neq 0 \downarrow A_{13} \\
& ((a \cdot d) \cdot (e \cdot f)) <_{\mathbb{Z}} (b \cdot c) \cdot (e \cdot f) \\
& A_6 \downarrow A_7 \\
& (a \cdot (e \cdot d) \cdot f) <_{\mathbb{Z}} b \cdot (e \cdot c) \cdot f \\
& A_6 \downarrow A_7 \\
& ((a \cdot e) \cdot (d \cdot f)) <_{\mathbb{Z}} (b \cdot f) \cdot (c \cdot e) \\
& \downarrow P_2 \\
& (\overline{(a \cdot e, b \cdot f)}) <_{\mathbb{Q}} (\overline{(c \cdot e, d \cdot f)}) \\
& \downarrow \models_5
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{c}
\Downarrow \models_5 \\
\left(\left(\overline{(a,b)} \cdot \overline{(e,f)} \right) <_{\mathbb{Q}} \left(\overline{(c,d)} \cdot \overline{(e,f)} \right) \right) \\
\Downarrow \\
(x \cdot z <_{\mathbb{Q}} y \cdot z)
\end{array}$$

■

$$P_{18} \Leftrightarrow \left((\forall x)(\forall y)(\forall z)(x \leq_{\mathbb{Q}} y \leftrightarrow x + z \leq_{\mathbb{Q}} y + z) \right)$$

⊢

$$\begin{array}{c}
\left(\left(P_{14} \rightarrow (\forall x)(\forall y)(\forall z)(x =_{\mathbb{Q}} y \leftrightarrow x + z =_{\mathbb{Q}} y + z) \right) \right) \\
\wedge \\
\left(P_{16} \rightarrow (\forall x)(\forall y)(\forall z)(x <_{\mathbb{Q}} y \leftrightarrow x + z <_{\mathbb{Q}} y + z) \right) \\
\downarrow \\
(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x \leq_{\mathbb{Q}} y \leftrightarrow x + z \leq_{\mathbb{Q}} y + z)
\end{array}$$

■

$$P_{19} \Leftrightarrow \left((\forall x)(\forall y)(\forall z)(z \in \mathbb{Q}_+^*)(x \leq_{\mathbb{Q}} y \leftrightarrow x \cdot z \leq_{\mathbb{Q}} y \cdot z) \right)$$

⊢

$$\begin{array}{c}
\left(\left(P_{15} \rightarrow (\forall x)(\forall y)(\forall z)(x =_{\mathbb{Q}} y \leftrightarrow x \cdot z =_{\mathbb{Q}} y \cdot z) \right) \right) \\
\wedge \\
\left(P_{17} \rightarrow (\forall x)(\forall y)(\forall z)(z \in \mathbb{Q}_+^*)(x <_{\mathbb{Q}} y \leftrightarrow x \cdot z <_{\mathbb{Q}} y \cdot z) \right) \\
\downarrow \\
(\forall x)(\forall y)(\forall z)(z \in \mathbb{Q}_+^*)(x \leq_{\mathbb{Q}} y \leftrightarrow x \cdot z \leq_{\mathbb{Q}} y \cdot z)
\end{array}$$

■

$$P_{20} \Leftrightarrow \left((\forall x)(\forall y) \left((-x) \cdot (-y) =_{\mathbb{Q}} x \cdot y \right) \right)$$

⊢

$$\begin{array}{c}
\left(\left(x \Leftrightarrow \overline{(a,b)} \right) \wedge \left(y \Leftrightarrow \overline{(c,d)} \right) \wedge \left(-x \Leftrightarrow \overline{(-a,b)} \right) \wedge \left(-y \Leftrightarrow \overline{(-c,d)} \right) \right) \\
\downarrow \\
\left(\left((-x) \cdot (-y) \Leftrightarrow \overline{(-a,b)} \cdot \overline{(-c,d)} \stackrel{\models_5}{=}_{\mathbb{Q}} \overline{((-a) \cdot (-c), b \cdot d)} \right) \right) \\
\wedge \\
\left(\left(\overline{((-a) \cdot (-c), b \cdot d)} \stackrel{A_{21}}{=}_{\mathbb{Q}} \overline{(a \cdot c, b \cdot d)} \stackrel{\models_5}{=}_{\mathbb{Q}} \overline{(a,b)} \cdot \overline{(c,d)} \Leftrightarrow x \cdot y \right) \right) \\
\downarrow P_{1.3}
\end{array}$$

$$\downarrow P_{1.3}$$

$$\left((-x) \cdot (-y) =_{\mathbb{Q}} x \cdot y \right)$$

■

$$P_{21} \Leftrightarrow \left((\forall x)(\forall y) \left(x \cdot (-y) =_{\mathbb{Q}} (-x) \cdot y =_{\mathbb{Q}} -(x \cdot y) \right) \right)$$

 $\vdash$

$$\vdash_1$$

$$\left(\left((x \Leftrightarrow \overline{(a, b)}) \wedge (y \Leftrightarrow \overline{(c, d)}) \wedge (-x \Leftrightarrow \overline{(-a, b)}) \wedge (-y \Leftrightarrow \overline{(-c, d)}) \right) \right.$$

$$\downarrow$$

$$\left(\left(x \cdot (-y) \Leftrightarrow \overline{(a, b)} \cdot \overline{(-c, d)} \stackrel{\mathbb{F}_5}{=}_{\mathbb{Q}} \overline{(a \cdot (-c), b \cdot d)} \stackrel{A_{22}}{=}_{\mathbb{Q}} \overline{-(a \cdot c), b \cdot d} \right) \right.$$

$$\wedge$$

$$\left(\left(\overline{-(a \cdot c), b \cdot d} \stackrel{\mathbb{F}_5}{=}_{\mathbb{Q}} \overline{(-1, 1)} \cdot \overline{(a \cdot c, b \cdot d)} \stackrel{\mathbb{F}_5}{=}_{\mathbb{Q}} \overline{(-1, 1)} \cdot \overline{(a, b) \cdot (c, d)} \right) \Leftrightarrow -(x \cdot y) \right) \left. \right)$$

$$\downarrow P_{1.3}$$

$$(x \cdot (-y) =_{\mathbb{Q}} -(x \cdot y))$$

$$\vdash_2$$

$$\left(\left((x \Leftrightarrow \overline{(a, b)}) \wedge (y \Leftrightarrow \overline{(c, d)}) \wedge (-x \Leftrightarrow \overline{(-a, b)}) \wedge (-y \Leftrightarrow \overline{(-c, d)}) \right) \right.$$

$$\downarrow$$

$$\left(\left(-(x \cdot y) \Leftrightarrow \overline{(-1, 1)} \cdot \overline{(a, b) \cdot (c, d)} \stackrel{\mathbb{F}_5}{=}_{\mathbb{Q}} \overline{(-1, 1)} \cdot \overline{(a \cdot c, b \cdot d)} \stackrel{\mathbb{F}_5}{=}_{\mathbb{Q}} \overline{-(a \cdot c), b \cdot d} \right) \right.$$

$$\wedge$$

$$\left(\left(\overline{-(a \cdot c), b \cdot d} \stackrel{A_{22}}{=}_{\mathbb{Q}} \overline{((-a) \cdot c, b \cdot d)} \stackrel{\mathbb{F}_5}{=}_{\mathbb{Q}} \overline{(-a, b)} \cdot \overline{(c, d)} \right) \Leftrightarrow (-x) \cdot y \right) \left. \right)$$

$$\downarrow P_{1.3}$$

$$(-(x \cdot y) =_{\mathbb{Q}} (-x) \cdot y)$$

 $\vdash_3$

$$\left(\vdash_2 \rightarrow (x \cdot (-y) =_{\mathbb{Q}} -(x \cdot y)) \right)$$

$$\wedge$$

$$\left(\vdash_1 \rightarrow (-(x \cdot y) =_{\mathbb{Q}} (-x) \cdot y) \right)$$

$$\downarrow P_{1.3}$$

$$(x \cdot (-y) =_{\mathbb{Q}} (-x) \cdot y)$$

■

$$P_{22} \Leftrightarrow \left((\forall x)(\forall y) \left((x <_{\mathbb{Q}} 0) \wedge (y <_{\mathbb{Q}} 0) \rightarrow (0 <_{\mathbb{Q}} x \cdot y) \right) \right)$$

⊢

$$\begin{pmatrix}
 \left((x = \overline{(a,b)}) \wedge (y = \overline{(c,d)}) \right) \\
 \downarrow \\
 \left((x <_{\mathbb{Q}} 0) \wedge (y <_{\mathbb{Q}} 0) \right) \\
 \Downarrow \\
 \left((\overline{(a,b)} <_{\mathbb{Q}} \overline{(0,1)}) \wedge (\overline{(c,d)} <_{\mathbb{Q}} \overline{(0,1)}) \right) \\
 \Downarrow P_2 \\
 ((a <_{\mathbb{Z}} 0) \wedge (c <_{\mathbb{Z}} 0)) \\
 \Downarrow A_{23} \\
 (0 <_{\mathbb{Z}} a \cdot c) \\
 A_9 \Downarrow A_3 \\
 (0 \cdot (b \cdot d) <_{\mathbb{Z}} 1 \cdot (a \cdot c)) \\
 \Downarrow P_2 \\
 (\overline{(0,1)} <_{\mathbb{Q}} \overline{(a \cdot c, b \cdot d)}) \\
 \downarrow \\
 (0 <_{\mathbb{Q}} x \cdot y)
 \end{pmatrix}$$

■

Capítulo 4 – Teoria dos Números Reais

4.1 Abordagem Histórica

Diferentemente da teoria dos números racionais que existem poucas evidências acerca de sua construção, a teoria dos números reais pode ser construída de diversas maneiras, aqui citaremos algumas delas.

Um das primeiras metodologias apresentadas para construção dos números reais foi proposta por Simon Stevin (1548 – 1620), em seu artigo intitulado “*De Thiende and L’Arithmetique*”, onde ele define um número real como uma soma infinita de frações, escrita da seguinte maneira:

$$\left(\left(x = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{a_k}{b_k} \right) \wedge (b_k \geq 2) \right)$$

Desta forma ele conseguiu definir as operações de adição e multiplicação, bem como uma ordenação para seus elementos. No entanto o cálculo de somas e produtos eram feitos de uma maneira complicada. (WEISS, 2015)

Uma das metodologias mais famosas para a construção dos números reais foi proposta por Richard Dedekind (1831 – 1916) em seu artigo intitulado “*Stetigkeit und irrationale Zahlen*”, no qual ele interpretava que todo número real x determinava uma partição do conjunto dos números racionais em dois conjuntos A e B , sendo $A = \{q \in \mathbb{Q}: q < x\}$ e $B = \{q \in \mathbb{Q}: q \geq x\}$. Todas as partições do conjunto $\mathbb{Q}$ que satisfaça essas condições são chamados de **Cortes de Dedekind**. A ideia de Dedekind era criar uma bijeção entre o conjunto dos números reais e o conjunto de todos os cortes em $\mathbb{Q}$. Além disso, ele conseguiu definir uma relação de ordem e operações de adição e multiplicação para tal conjunto (DEDEKIND, 1892).

Outra metodologia famosa para construir o conjunto dos números reais foi proposta por Georg Cantor (1845 – 1918), em seu artigo intitulado “*Grundlagen einer allgemeinen mannigfaltigkeitslehre*”, onde ele define que um número real x é o limite de uma sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de números racionais. Em meio a construção é possível mostrar que todas as sequências $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de números racionais é uma sequência de Cauchy, a priori Cantor sabia o que era um número real, mas não sabia o comportamento do conjunto como um todo, para isso

ele criou um conjunto $\mathcal{C}_{\mathbb{Q}}$ tal que os elementos são todas as sequências de Cauchy de números racionais, e definiu a seguinte relação de equivalência $\sim$, na qual duas sequências (a_n) e (b_n) estão relacionados mediante a relação $\sim$ se, e somente se, o limite de $|a_n - b_n|$ converge para 0. Assim, Cantor definiu o conjunto de todos os números reais como sendo o conjunto quociente de $\mathcal{C}_{\mathbb{Q}}$ sobre a relação $\sim$, isto é, $\mathbb{R} \Leftrightarrow (\mathcal{C}_{\mathbb{Q}}/\sim \Leftrightarrow (\iota y)(\forall (a_n)_{n \in \mathbb{N}}) (\overline{(a_n)_{n \in \mathbb{N}}} \in y \leftrightarrow ((a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{C}_{\mathbb{Q}})))$ (WEISS, 2015).

4.2 Sequências de Cauchy em $\mathbb{Q}$

$$\models_{11} \Leftrightarrow \left((a_n)_{n \in \mathbb{N}} \Leftrightarrow \left((\forall n)(n \in \mathbb{N})(\exists \phi) \left(\begin{array}{c} \phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q} \\ n \mapsto \phi(n) \Leftrightarrow a_n \end{array} \right) \right) \right)$$

Escólio. A partir desse momento a iremos utilizar a seguinte notação para sequências de números racionais:

$$(a_n) \Leftrightarrow (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

$$\models_{12} \Leftrightarrow \left(\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n =_{\mathbb{Q}} l \right) \Leftrightarrow (\exists l)(\forall \varepsilon)(\exists n_0)(0 <_{\mathbb{Q}} \varepsilon) \left((\forall n)(n_0 <_{\mathbb{N}} n) \rightarrow |a_n - l| <_{\mathbb{Q}} \varepsilon \right) \right)$$

$$P_{23} \Leftrightarrow \left((\forall k)(k \in \mathbb{Q}) \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} k =_{\mathbb{Q}} k \right) \right)$$

⊢

$$\left(\begin{array}{c} \left((\forall k)(\forall \varepsilon)(\forall n_0)(0 <_{\mathbb{Q}} \varepsilon) \left((\forall n)(n_0 <_{\mathbb{N}} n) \rightarrow |k - k| <_{\mathbb{Q}} \varepsilon \right) \right) \\ \updownarrow \\ (|k - k| <_{\mathbb{Q}} \varepsilon) \\ \updownarrow \\ (|0| <_{\mathbb{Q}} \varepsilon) \\ \updownarrow \\ (0 <_{\mathbb{Q}} \varepsilon) \end{array} \right)$$

■

$$\models_{13} \Leftrightarrow \left((\forall x) \left((0 \leq_{\mathbb{Q}} x \rightarrow |x| =_{\mathbb{Q}} x) \vee (x \leq_{\mathbb{Q}} 0 \rightarrow |x| =_{\mathbb{Q}} -x) \right) \right)$$

$$P_{24} \Leftrightarrow \left((\forall x)(\forall y)(|x \cdot y| =_{\mathbb{Q}} |x| \cdot |y|) \right)$$

$\vdash$

$\vdash_1$

$$\begin{aligned} & \left((0 \leq_{\mathbb{Q}} x) \wedge (0 \leq_{\mathbb{Q}} y) \right) \vee \left((x \leq_{\mathbb{Q}} 0) \wedge (y \leq_{\mathbb{Q}} 0) \right) \\ & \quad \downarrow \models_{10} \\ & \left((|x| =_{\mathbb{Q}} x) \wedge (|y| =_{\mathbb{Q}} y) \right) \vee \left((|x| =_{\mathbb{Q}} -x) \wedge (|y| =_{\mathbb{Q}} -y) \right) \\ & \quad \downarrow P_{15} \\ & \left(\begin{array}{c} \left((|x| \cdot |y| =_{\mathbb{Q}} x \cdot |y|) \wedge (x \cdot |y| =_{\mathbb{Q}} x \cdot y) \right) \\ \vee \\ \left((|x| \cdot |y| =_{\mathbb{Q}} -x \cdot |y|) \wedge (-x \cdot |y| =_{\mathbb{Q}} (-x) \cdot (-y)) \right) \end{array} \right) \\ & \quad \downarrow P_{1.3} \\ & \left(\begin{array}{c} (|x| \cdot |y| =_{\mathbb{Q}} x \cdot y =_{\mathbb{Q}} |x \cdot y|) \\ \vee \\ (|x| \cdot |y| =_{\mathbb{Q}} (-x) \cdot (-y) =_{\mathbb{Q}} x \cdot y =_{\mathbb{Q}} |x \cdot y|) \end{array} \right) \end{aligned}$$

$\vdash_2$

$$\begin{aligned} & \left((0 \leq_{\mathbb{Q}} x) \wedge (y \leq_{\mathbb{Q}} 0) \right) \vee \left((x \leq_{\mathbb{Q}} 0) \wedge (0 \leq_{\mathbb{Q}} y) \right) \\ & \quad \downarrow \models_{10} \\ & \left((|x| =_{\mathbb{Q}} x) \wedge (|y| =_{\mathbb{Q}} -y) \right) \vee \left((|x| =_{\mathbb{Q}} -x) \wedge (|y| =_{\mathbb{Q}} y) \right) \\ & \quad \downarrow P_{15} \\ & \left(\begin{array}{c} \left((|x| \cdot |y| =_{\mathbb{Q}} x \cdot |y|) \wedge (x \cdot |y| =_{\mathbb{Q}} x \cdot (-y)) \right) \\ \vee \\ \left((|x| \cdot |y| =_{\mathbb{Q}} -x \cdot |y|) \wedge (-x \cdot |y| =_{\mathbb{Q}} (-x) \cdot y) \right) \end{array} \right) \\ & \quad \downarrow P_{1.3} \\ & \left(\begin{array}{c} (|x| \cdot |y| =_{\mathbb{Q}} x \cdot (-y) =_{\mathbb{Q}} -x \cdot y =_{\mathbb{Q}} |x \cdot y|) \\ \vee \\ (|x| \cdot |y| =_{\mathbb{Q}} (-x) \cdot y =_{\mathbb{Q}} -x \cdot y =_{\mathbb{Q}} |x \cdot y|) \end{array} \right) \end{aligned}$$

■

$$P_{25} \Leftrightarrow \left((\forall x)(-|x| \leq_{\mathbb{Q}} x \leq_{\mathbb{Q}} |x|) \right)$$

$\vdash$

$$\begin{array}{c}
\left(\left(\left(0 \leq_{\mathbb{Q}} x \right) \rightarrow \left(\left(-|x| \stackrel{\mathbb{F}_{10}}{=}_{\mathbb{Q}} -x \leq_{\mathbb{Q}} 0 \right) \wedge \left(0 \leq_{\mathbb{Q}} x \stackrel{\mathbb{F}_{10}}{=}_{\mathbb{Q}} |x| \right) \right) \right) \right) \\
\downarrow \\
(-|x| \leq_{\mathbb{Q}} x \leq_{\mathbb{Q}} |x|) \\
\wedge \\
\left(\left(\left(x \leq_{\mathbb{Q}} 0 \right) \rightarrow \left(\left(-|x| \stackrel{\mathbb{F}_{10}}{=}_{\mathbb{Q}} x \leq_{\mathbb{Q}} 0 \right) \wedge \left(0 \leq_{\mathbb{Q}} -x \stackrel{\mathbb{F}_{10}}{=}_{\mathbb{Q}} |x| \right) \right) \right) \right) \\
\downarrow \\
(-|x| \leq_{\mathbb{Q}} x \leq_{\mathbb{Q}} |x|) \\
\downarrow \\
((x \leq_{\mathbb{Q}} |x|) \wedge (-|x| \leq_{\mathbb{Q}} x))
\end{array}$$

■

$$P_{26} \Leftrightarrow ((\forall x)(\forall y)(|x + y| \leq_{\mathbb{Q}} |x| + |y|))$$

⊢

$$\begin{array}{c}
\left(\left(\left(0 \leq_{\mathbb{Q}} x + y \right) \right. \right. \\
\downarrow \mathbb{F}_{10} \\
\left. \left((x \leq_{\mathbb{Q}} |x|) \wedge (y \leq_{\mathbb{Q}} |y|) \right) \right. \\
\downarrow P_{14} \\
\left. \left((x + y \leq_{\mathbb{Q}} |x| + y) \wedge (|x| + y \leq_{\mathbb{Q}} |x| + |y|) \right) \right. \\
\downarrow P_{2.3} \\
\left. (x + y \leq_{\mathbb{Q}} |x| + |y|) \right) \\
\wedge \\
\left(\left(x + y \leq_{\mathbb{Q}} 0 \right) \right. \\
\downarrow \mathbb{F}_{10} \\
\left. ((-x \leq_{\mathbb{Q}} |x|) \wedge (-y \leq_{\mathbb{Q}} |y|)) \right. \\
\downarrow P_{14} \\
\left. (((-x) + (-y) \leq_{\mathbb{Q}} |x| + (-y)) \wedge (|x| + (-y) \leq_{\mathbb{Q}} |x| + |y|)) \right. \\
\downarrow P_{2.3} \\
\left. \left(-(x + y) \stackrel{P_{9.5}}{=}_{\mathbb{Q}} (-x) + (-y) \leq_{\mathbb{Q}} |x| + |y| \right) \right) \\
\downarrow \\
(|x + y| \leq_{\mathbb{Q}} |x| + |y|)
\end{array}$$

■

$$P_{27} \Leftrightarrow ((\forall x)(|x| =_{\mathbb{Q}} |-x|))$$

⊢

$$\left(\left(\left(0 \leq_{\mathbb{Q}} x \right) \rightarrow \left(\left(|x| \stackrel{\mathbb{F}_{10}}{=}_{\mathbb{Q}} x \right) \wedge \left(x =_{\mathbb{Q}} -(-x) \stackrel{\mathbb{F}_{10}}{=}_{\mathbb{Q}} |-x| \right) \right) \rightarrow (|x| =_{\mathbb{Q}} |-x|) \right) \right. \\ \left. \wedge \right. \\ \left. \left(\left(x \leq_{\mathbb{Q}} 0 \right) \rightarrow \left(\left(|x| \stackrel{\mathbb{F}_{10}}{=}_{\mathbb{Q}} -x \right) \wedge \left(-x \stackrel{\mathbb{F}_{10}}{=}_{\mathbb{Q}} |-x| \right) \right) \rightarrow (|x| =_{\mathbb{Q}} |-x|) \right) \right) \\ \downarrow \\ (\forall x)(|x| =_{\mathbb{Q}} |-x|)$$

■

$$P_{28} \Leftrightarrow \left((\forall (a_n))(\exists l_1)(\exists l_2) \left(\left(\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n =_{\mathbb{Q}} l_1 \right) \wedge \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n =_{\mathbb{Q}} l_2 \right) \right) \rightarrow (l_1 =_{\mathbb{Q}} l_2) \right) \right)$$

⊢

$$\begin{aligned} & (l_1 \neq_{\mathbb{Q}} l_2) \\ & \downarrow \\ & \left((\exists l_1)(\forall \varepsilon)(\exists n_1) \left(0 <_{\mathbb{Q}} \varepsilon <_{\mathbb{Q}} \frac{|l_2 - l_1|}{2} \right) \left((\forall n)(n_1 <_{\mathbb{N}} n) \rightarrow |a_n - l_1| <_{\mathbb{Q}} \varepsilon \right) \right) \\ & \quad \wedge \\ & \left((\exists l_2)(\forall \varepsilon)(\exists n_2) \left(0 <_{\mathbb{Q}} \varepsilon <_{\mathbb{Q}} \frac{|l_2 - l_1|}{2} \right) \left((\forall n)(n_2 <_{\mathbb{N}} n) \rightarrow |a_n - l_2| <_{\mathbb{Q}} \varepsilon \right) \right) \\ & \downarrow \\ & \left((\forall \varepsilon)(\exists n_0 =_{\mathbb{N}} \max\{n_1, n_2\}) (0 <_{\mathbb{Q}} \varepsilon) \left((\forall n)(n_0 <_{\mathbb{N}} n) \rightarrow |l_2 - l_1| <_{\mathbb{Q}} 2\varepsilon \right) \right) \\ & \downarrow \\ & \left(|l_2 - l_1| \stackrel{P_6}{=}_{\mathbb{Q}} |l_2 - a_n + a_n - l_1| \stackrel{P_{26}}{\leq}_{\mathbb{Q}} |l_2 - a_n| + |a_n - l_1| <_{\mathbb{Q}} \varepsilon + \varepsilon \stackrel{P_{27}}{=}_{\mathbb{Q}} 2\varepsilon \right) \\ & \downarrow \\ & \left(\frac{|l_2 - l_1|}{2} <_{\mathbb{Q}} \varepsilon \right) \\ & \downarrow \\ & \wedge \\ & \downarrow \\ & (\forall (a_n))(\exists ! l) \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n =_{\mathbb{Q}} l \right) \end{aligned}$$

■

$$\models_{14} \Leftrightarrow \left((a_n)_{n \in \mathbb{N}}^c \Leftrightarrow \left((\forall \varepsilon)(\exists n_0)(0 <_{\mathbb{Q}} \varepsilon) \left(\begin{array}{c} ((\forall n)(\forall m)((n_0 <_{\mathbb{N}} n) \wedge (n_0 <_{\mathbb{N}} m))) \\ \downarrow \\ (|a_m - a_n| <_{\mathbb{Q}} \varepsilon) \end{array} \right) \right) \right) \right)$$

Escólio. A expressão $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}^c$ é uma notação para uma sequência de Cauchy em $\mathbb{Q}$.

$$P_{29} \Leftrightarrow \left((\forall (a_n)) \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n =_{\mathbb{Q}} l \right) \rightarrow ((a_n)_{n \in \mathbb{N}}^c) \right)$$

⊢

$$\begin{array}{c} \left((\exists l)(\forall \varepsilon)(\exists n_0)(0 <_{\mathbb{Q}} \varepsilon) \left((\forall m)(n_0 <_{\mathbb{N}} m) \rightarrow |a_m - l| <_{\mathbb{Q}} \frac{\varepsilon}{2} \right) \right) \\ \wedge \\ \left((\exists l)(\forall \varepsilon)(\exists n_0)(0 <_{\mathbb{Q}} \varepsilon) \left((\forall n)(n_0 <_{\mathbb{N}} n) \rightarrow |a_n - l| <_{\mathbb{Q}} \frac{\varepsilon}{2} \right) \right) \\ \downarrow \\ \downarrow \\ \left(\begin{array}{c} \left(|a_m - a_n| \stackrel{P_6}{=} |a_m - l + l - a_n| \stackrel{P_{12.1}}{=} |(a_m - l) + (l - a_n)| \stackrel{P_{12.2}}{=} |(a_m - l) + (-a_n + l)| \right) \\ \wedge \\ \left(|(a_m - l) + (-a_n + l)| \stackrel{P_{12.5}}{=} |(a_m - l) + (-(a_n - l))| \stackrel{P_{26}}{\leq}_{\mathbb{Q}} |a_m - l| + |a_n - l| \stackrel{P_{27}}{<}_{\mathbb{Q}} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} =_{\mathbb{Q}} \varepsilon \right) \end{array} \right) \\ \downarrow P_{3.4} \\ (|a_m - a_n| <_{\mathbb{Q}} \varepsilon) \\ \downarrow \models_{11} \\ ((a_n)_{n \in \mathbb{N}}^c) \end{array}$$

■

$$P_{30} \Leftrightarrow \left((\forall (a_n)_{n \in \mathbb{N}}^c) \rightarrow (\forall n)(\exists k)(0 <_{\mathbb{Q}} k)(|a_n| \leq_{\mathbb{Q}} k) \right)$$

⊢

$$\begin{array}{c} \left((\forall \varepsilon)(\exists n_0)(0 <_{\mathbb{Q}} \varepsilon) \left(\begin{array}{c} ((\forall n)(\forall m)((n_0 <_{\mathbb{N}} n) \wedge (n_0 <_{\mathbb{N}} m))) \\ \downarrow \\ (|a_n - a_m| <_{\mathbb{Q}} \varepsilon) \end{array} \right) \right) \right) \\ \downarrow \\ \left(|a_n - a_m| =_{\mathbb{Q}} |a_n + (-a_m)| \stackrel{P_{26}}{\leq}_{\mathbb{Q}} |a_n| + |-a_m| \stackrel{P_{27}}{\leq}_{\mathbb{Q}} |a_n| + |a_m| <_{\mathbb{Q}} \varepsilon \right) \\ P_{3.4} \downarrow P_{18} \end{array}$$

$$\begin{aligned}
& P_{3.4} \downarrow P_{18} \\
& (|a_n| - |a_m|) + |a_m| \leq_{\mathbb{Q}} \varepsilon + |a_m| \\
& \quad \updownarrow P_{12.1} \\
& (|a_n| + (-|a_m| + |a_m|) \leq_{\mathbb{Q}} \varepsilon + |a_m|) \\
& \quad \updownarrow P_6 \\
& (|a_n| + 0 \leq_{\mathbb{Q}} \varepsilon + |a_m|) \\
& \quad \updownarrow P_5 \\
& (|a_n| \leq_{\mathbb{Q}} \varepsilon + |a_m| =_{\mathbb{Q}} k)
\end{aligned}$$

■

$$P_{31} \Leftrightarrow \left((\forall(a_n))(\forall(b_n))(\exists l_1)(\exists l_2) \left(\left(\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n =_{\mathbb{Q}} l_1 \right) \wedge \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n =_{\mathbb{Q}} l_2 \right) \right) \downarrow \left((\exists(l_1 + l_2)) \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n + b_n =_{\mathbb{Q}} l_1 + l_2 \right) \right) \right) \right)$$

⊢

$$\begin{aligned}
& \left((\exists l_1)(\forall \varepsilon)(\exists n_1)(0 <_{\mathbb{Q}} \varepsilon) \left((\forall m)(n_1 <_{\mathbb{N}} n) \rightarrow |a_n - l_1| <_{\mathbb{Q}} \frac{\varepsilon}{2} \right) \right) \\
& \quad \wedge \\
& \left((\exists l_2)(\forall \varepsilon)(\exists n_2)(0 <_{\mathbb{Q}} \varepsilon) \left((\forall n)(n_2 <_{\mathbb{N}} n) \rightarrow |b_n - l_2| <_{\mathbb{Q}} \frac{\varepsilon}{2} \right) \right) \\
& \quad \downarrow \\
& \left((\exists(l_1 + l_2))(\forall \varepsilon)(\exists n_0)(n_0 =_{\mathbb{N}} \max\{n_1, n_2\})(0 <_{\mathbb{Q}} \varepsilon) \left(\begin{array}{c} ((\forall n)(n_0 <_{\mathbb{N}} n)) \\ \downarrow \\ (|(a_n + b_n) - (l_1 + l_2)| <_{\mathbb{Q}} \varepsilon) \end{array} \right) \right) \\
& \quad \downarrow \\
& \left(\left(\left(\begin{array}{c} P_{12.5} \\ |(a_n + b_n) - (l_1 + l_2)| =_{\mathbb{Q}} |a_n + b_n - l_1 - l_2| =_{\mathbb{Q}} |a_n - l_1 + b_n - l_2| \end{array} \right) \right) \right. \\
& \quad \wedge \\
& \quad \left. \left(\begin{array}{c} P_{26} \\ |a_n - l_1 + b_n - l_2| \leq_{\mathbb{Q}} |a_n - l_1| + |b_n - l_2| <_{\mathbb{Q}} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} =_{\mathbb{Q}} \varepsilon \end{array} \right) \right) \\
& \quad \downarrow P_{3.4} \\
& (|(a_n + b_n) - (l_1 + l_2)| <_{\mathbb{Q}} \varepsilon)
\end{aligned}$$

■

$$P_{32} \Leftrightarrow \left((\forall(a_n))(\forall(b_n))(\exists l_1)(\exists l_2) \left(\left(\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n =_{\mathbb{Q}} l_1 \right) \wedge \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n =_{\mathbb{Q}} l_2 \right) \right) \downarrow \left((\exists(l_1 \cdot l_2)) \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \cdot b_n =_{\mathbb{Q}} l_1 \cdot l_2 \right) \right) \right) \right)$$

$$\begin{aligned}
P_{32.1} &\Leftrightarrow \left((\forall(a_n))(\forall(b_n))(\exists l_1)(\exists l_2)(l_1 \neq_{\mathbb{Q}} 0) \left(\left(\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n =_{\mathbb{Q}} l_1 \right) \wedge \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n =_{\mathbb{Q}} l_2 \right) \right) \right) \right) \\
&\quad \left(\left(\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \cdot b_n =_{\mathbb{Q}} l_1 \cdot l_2 \right) \right) \right) \\
&\quad \downarrow \\
&\quad \left((\exists(l_1 \cdot l_2)) \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \cdot b_n =_{\mathbb{Q}} l_1 \cdot l_2 \right) \right) \\
&\quad \downarrow \\
&\quad \left((\exists l_1)(\forall \varepsilon)(\exists n_1)(0 <_{\mathbb{Q}} \varepsilon) \left(\left((\forall n)(n_1 <_{\mathbb{N}} n) \rightarrow |a_n - l_1| <_{\mathbb{Q}} \frac{\varepsilon}{2 \cdot k} \right) \wedge (\exists k)(|b_n| \leq_{\mathbb{Q}} k) \right) \right) \\
&\quad \wedge \\
&\quad \left((\exists l_2)(\forall \varepsilon)(\exists n_2)(0 <_{\mathbb{Q}} \varepsilon) \left((\forall n)(n_2 <_{\mathbb{N}} n) \rightarrow |b_n - l_2| <_{\mathbb{Q}} \frac{\varepsilon}{2 \cdot |l_1|} \right) \right) \\
&\quad \downarrow \\
&\quad \downarrow \\
&\quad \left((\exists(l_1 \cdot l_2))(\forall \varepsilon)(\exists n_0)(n_0 =_{\mathbb{N}} \max\{n_1, n_2\})(0 <_{\mathbb{Q}} \varepsilon) \left(\left((\forall n)(n_0 <_{\mathbb{N}} n) \right) \right. \right. \\
&\quad \quad \left. \left. \downarrow \right. \right. \\
&\quad \quad \left. \left. (|a_n \cdot b_n - (l_1 \cdot l_2)| <_{\mathbb{Q}} \varepsilon) \right) \right) \\
&\quad \downarrow \\
&\quad \left(\left(|a_n \cdot b_n - (l_1 \cdot l_2)| =_{\mathbb{Q}} |(a_n \cdot b_n) - (b_n \cdot l_1) + (b_n \cdot l_1) - (l_1 \cdot l_2)| \right) \right) \\
&\quad \wedge \\
&\quad \left(\left(|a_n \cdot b_n - (b_n \cdot l_1) + (b_n \cdot l_1) - (l_1 \cdot l_2)| =_{\mathbb{Q}} |b_n \cdot (a_n - l_1) + l_1 \cdot (b_n - l_2)| \right) \right) \\
&\quad \downarrow P_{1.3} \\
&\quad \left(\left(|a_n \cdot b_n - (l_1 \cdot l_2)| =_{\mathbb{Q}} |b_n \cdot (a_n - l_1) + l_1 \cdot (b_n - l_2)| \right) \right) \\
&\quad \wedge \\
&\quad \left(\left(|b_n \cdot (a_n - l_1) + l_1 \cdot (b_n - l_2)| \leq_{\mathbb{Q}} |b_n| \cdot |a_n - l_1| + |l_1| \cdot |b_n - l_2| \right) \right) \\
&\quad \downarrow P_{3.4} \\
&\quad \left(\left(|a_n \cdot b_n - (l_1 \cdot l_2)| \leq_{\mathbb{Q}} |b_n| \cdot |a_n - l_1| + |l_1| \cdot |b_n - l_2| \right) \right) \\
&\quad \wedge \\
&\quad \left(\left(|b_n| \cdot |a_n - l_1| + |l_1| \cdot |b_n - l_2| <_{\mathbb{Q}} k \cdot \frac{\varepsilon}{2 \cdot k} + |l_1| \cdot \frac{\varepsilon}{2 \cdot |l_1|} \right) \right) \\
&\quad \downarrow P_{3.4} \\
&\quad \left(\left(|a_n \cdot b_n - (l_1 \cdot l_2)| <_{\mathbb{Q}} k \cdot \frac{\varepsilon}{2 \cdot k} + |l_1| \cdot \frac{\varepsilon}{2 \cdot |l_1|} \right) \right) \\
&\quad \wedge \\
&\quad \left(\left(k \cdot \frac{\varepsilon}{2 \cdot k} + |l_1| \cdot \frac{\varepsilon}{2 \cdot |l_1|} \leq_{\mathbb{Q}} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \right) \right) \\
&\quad \downarrow P_{3.4} \\
&\quad (|a_n \cdot b_n - (l_1 \cdot l_2)| <_{\mathbb{Q}} \varepsilon)
\end{aligned}$$

■

$$\begin{aligned}
P_{32.2} &\Leftrightarrow \left((\forall(a_n))(\forall(b_n))(\exists l_1)(\exists l_2)(l_2 \neq_{\mathbb{Q}} 0) \left(\left(\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n =_{\mathbb{Q}} l_1 \right) \wedge \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n =_{\mathbb{Q}} l_2 \right) \right) \right) \right) \\
&\quad \downarrow \\
&\left((\exists l_1)(\forall \varepsilon)(\exists n_1)(0 <_{\mathbb{Q}} \varepsilon) \left((\forall n)(n_1 <_{\mathbb{N}} n) \rightarrow |a_n - l_1| <_{\mathbb{Q}} \frac{\varepsilon}{2 \cdot |l_2|} \right) \right) \\
&\quad \wedge \\
&\left((\exists l_2)(\forall \varepsilon)(\exists n_2)(0 <_{\mathbb{Q}} \varepsilon) \left(\left((\forall n)(n_2 <_{\mathbb{N}} n) \rightarrow |b_n - l_2| <_{\mathbb{Q}} \frac{\varepsilon}{2 \cdot k} \right) \wedge (\exists k)(|a_n| \leq_{\mathbb{Q}} k) \right) \right) \\
&\quad \downarrow \\
&\left((\exists(l_1 \cdot l_2))(\forall \varepsilon)(\exists n_0)(n_0 =_{\mathbb{Q}} \max\{n_1, n_2\})(0 <_{\mathbb{Q}} \varepsilon) \left(\begin{array}{c} (\forall n)(n_0 <_{\mathbb{N}} n) \\ \downarrow \\ (|a_n \cdot b_n - (l_1 \cdot l_2)| <_{\mathbb{Q}} \varepsilon) \end{array} \right) \right) \\
&\quad \downarrow \\
&\left(\begin{array}{c} \left(|a_n \cdot b_n - (l_1 \cdot l_2)| \stackrel{P_6}{=}_{\mathbb{Q}} |a_n \cdot b_n - (a_n \cdot l_2) + (a_n \cdot l_2) - (l_1 \cdot l_2)| \right) \\ \wedge \\ \left(|a_n \cdot b_n - (a_n \cdot l_2) + (a_n \cdot l_2) - (l_1 \cdot l_2)| \stackrel{P_{12.3}}{=}_{\mathbb{Q}} |a_n \cdot (b_n - l_2) + l_2 \cdot (a_n - l_1)| \right) \end{array} \right) \\
&\quad \downarrow P_{12.5} \\
&\downarrow P_{1.3} \\
&\left(\begin{array}{c} (|a_n \cdot b_n - (l_1 \cdot l_2)| \stackrel{P_{26}}{=}_{\mathbb{Q}} |a_n \cdot (b_n - l_2) + l_2 \cdot (a_n - l_1)|) \\ \wedge \\ \left(|a_n \cdot (b_n - l_2) + l_2 \cdot (a_n - l_1)| \leq_{\mathbb{Q}} |a_n| \cdot |b_n - l_2| + |l_2| \cdot |a_n - l_1| \right) \end{array} \right) \\
&\quad \downarrow P_{24} \\
&\downarrow P_{3.4} \\
&\left(\begin{array}{c} (|a_n \cdot b_n - (l_1 \cdot l_2)| \leq_{\mathbb{Q}} |a_n| \cdot |b_n - l_2| + |l_2| \cdot |a_n - l_1|) \\ \wedge \\ \left(|a_n| \cdot |b_n - l_2| + |l_2| \cdot |a_n - l_1| <_{\mathbb{Q}} k \cdot \frac{\varepsilon}{2 \cdot k} + |l_2| \cdot \frac{\varepsilon}{2 \cdot |l_2|} \right) \end{array} \right) \\
&\quad \downarrow P_{3.4} \\
&\left(\begin{array}{c} \left(|a_n \cdot b_n - (l_1 \cdot l_2)| <_{\mathbb{Q}} k \cdot \frac{\varepsilon}{2 \cdot k} + |l_2| \cdot \frac{\varepsilon}{2 \cdot |l_2|} \right) \\ \wedge \\ \left(k \cdot \frac{\varepsilon}{2 \cdot k} + |l_2| \cdot \frac{\varepsilon}{2 \cdot |l_2|} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} =_{\mathbb{Q}} \varepsilon \right) \end{array} \right) \\
&\quad \downarrow P_{3.4} \\
&(|a_n \cdot b_n - (l_1 \cdot l_2)| <_{\mathbb{Q}} \varepsilon)
\end{aligned}$$

■

$$P_{32.3} \Leftrightarrow \left((\forall(a_n))(\forall(b_n))(\exists l_1)(\exists l_2)(l_1 =_{\mathbb{Q}} 0)(l_2 =_{\mathbb{Q}} 0) \left(\left(\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n =_{\mathbb{Q}} l_1 \right) \wedge \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n =_{\mathbb{Q}} l_2 \right) \right) \right) \right) \downarrow \left((\exists(l_1 \cdot l_2)) \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \cdot b_n =_{\mathbb{Q}} l_1 \cdot l_2 \right) \right)$$

⊢

$$\begin{aligned} & \left((\exists 0)(\forall \varepsilon)(\exists n_1)(0 <_{\mathbb{Q}} \varepsilon) \left((\forall n)(n_1 <_{\mathbb{N}} n) \rightarrow |a_n - 0| <_{\mathbb{Q}} \varepsilon \right) \right) \\ & \quad \wedge \\ & \left((\exists 0)(\forall \varepsilon)(\exists n_2)(0 <_{\mathbb{Q}} \varepsilon) \left((\forall n)(n_2 <_{\mathbb{N}} n) \rightarrow |b_n - 0| <_{\mathbb{Q}} \varepsilon \right) \right) \\ & \quad \downarrow \\ & \left((\exists 0)(\forall \varepsilon)(\exists n_0)(n_0 = \max\{n_1, n_2\})(0 <_{\mathbb{Q}} \varepsilon) \left((\forall n)(n_0 <_{\mathbb{N}} n) \rightarrow |(a_n \cdot b_n) - 0| <_{\mathbb{Q}} \varepsilon^2 \right) \right) \\ & \quad \downarrow \\ & \left(|a_n \cdot b_n - 0| =_{\mathbb{Q}} |a_n \cdot b_n| =_{\mathbb{Q}} |a_n| \cdot |b_n| <_{\mathbb{Q}} \varepsilon \cdot \varepsilon =_{\mathbb{Q}} \varepsilon^2 \right) \end{aligned}$$

■

$$P_{33} \Leftrightarrow \left((\forall(a_n))(\forall k) \left(\left((\exists l_1) \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n =_{\mathbb{Q}} l_1 \right) \right) \right) \downarrow \left((\exists(k \cdot l_1)) \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} k \cdot (a_n) =_{\mathbb{Q}} k \cdot l_1 \right) \right) \right)$$

⊢

$$\begin{aligned} & \left((\exists l_1)(\forall \varepsilon)(\exists n_0)(0 <_{\mathbb{Q}} \varepsilon) \left((\forall m)(n_1 <_{\mathbb{N}} n) \rightarrow |a_n - l_1| <_{\mathbb{Q}} \frac{\varepsilon}{|k|} \right) \right) \\ & \quad \downarrow \\ & \left((\exists(k \cdot l_1))(\forall \varepsilon)(\exists n_0)(0 <_{\mathbb{Q}} \varepsilon) \left((\forall n)(n_0 <_{\mathbb{N}} n) \rightarrow (|(k \cdot a_n) - (k \cdot l_1)| <_{\mathbb{Q}} \varepsilon) \right) \right) \\ & \quad \downarrow \\ & \left(|(k \cdot a_n) - (k \cdot l_1)| =_{\mathbb{Q}} |k \cdot (a_n - l_1)| =_{\mathbb{Q}} |k| \cdot |a_n - l_1| <_{\mathbb{Q}} |k| \cdot \frac{\varepsilon}{|k|} =_{\mathbb{Q}} \varepsilon \right) \\ & \quad \updownarrow P_{3.4} \\ & (|(k \cdot a_n) - (k \cdot l_1)| <_{\mathbb{Q}} \varepsilon) \end{aligned}$$

■

4.3 Abordagem Algébrica

$$\models_{15} \Leftrightarrow \left(\mathcal{C}_{\mathbb{Q}} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ (a_n) : (\forall \varepsilon)(\exists n_0)(0 <_{\mathbb{Q}} \varepsilon) \left(\begin{array}{c} (\forall n)(\forall m)((n_0 <_{\mathbb{N}} n) \wedge (n_0 <_{\mathbb{N}} m)) \\ \downarrow \\ (|a_m - a_n| <_{\mathbb{Q}} \varepsilon) \end{array} \right) \right\} \right)$$

$$P_{34} \Leftrightarrow \left(R_4 \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ ((a_n), (b_n)) \in (\mathcal{C}_{\mathbb{Q}} \times \mathcal{C}_{\mathbb{Q}}) : \left((a_n)R_4(b_n) \leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n - b_n =_{\mathbb{Q}} 0 \right) \right\} \right)$$

$$P_{34.1} \Leftrightarrow ((\forall x)(xR_4x))$$

⊢

$$\begin{array}{c} (x \Leftrightarrow (a_n)) \\ \downarrow \\ ((\forall n)(n \in \mathbb{N})(a_n - a_n =_{\mathbb{Q}} 0)) \\ \downarrow \\ \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n - a_n =_{\mathbb{Q}} \lim_{n \rightarrow +\infty} 0 =_{\mathbb{Q}} 0 \right) \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \begin{array}{cc} P_6 & P_{23} \end{array} \end{array}$$

■

$$P_{34.2} \Leftrightarrow ((\forall x)(\forall y)(xR_4y \rightarrow yR_4x))$$

⊢

$$\begin{array}{c} ((x \Leftrightarrow (a_n)) \wedge (y \Leftrightarrow (b_n))) \\ \downarrow \\ (xR_4y) \\ \Downarrow \\ ((a_n)R_4(b_n)) \\ \Downarrow P_{34} \\ \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n - b_n =_{\mathbb{Q}} 0 \right) \\ \Downarrow \\ \left((\exists 0)(\forall \varepsilon)(\exists n_0)(0 <_{\mathbb{Q}} \varepsilon) \left((\forall n)(n_0 <_{\mathbb{N}} n) \rightarrow |a_n - b_n - 0| <_{\mathbb{Q}} \varepsilon \right) \right) \\ \downarrow \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\downarrow \\
\left(|(b_n - a_n) - 0| \stackrel{P_5}{=}_{\mathbb{Q}} |(b_n - a_n)| \stackrel{P_{27}}{=}_{\mathbb{Q}} |-(b_n - a_n)| \stackrel{P_{12.5}}{=}_{\mathbb{Q}} |a_n - b_n| \stackrel{P_5}{=}_{\mathbb{Q}} |(a_n - b_n) - 0| \stackrel{P_{20}}{<_{\mathbb{Q}}} \varepsilon \right) \\
\downarrow P_{3.4} \\
(|(b_n - a_n) - 0| <_{\mathbb{Q}} \varepsilon) \\
\downarrow \models_9 \\
\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n - a_n =_{\mathbb{Q}} 0 \right) \\
\updownarrow \\
((b_n)R_4(a_n)) \\
\updownarrow \\
(yR_4x)
\end{array}$$

■

$$P_{34.3} \Leftrightarrow \left((\forall x)(\forall y)(\forall z) \left(((xR_4y) \wedge (yR_4z)) \rightarrow (xR_4z) \right) \right)$$

 $\vdash$

$$\begin{array}{c}
((x \Leftrightarrow (a_n)) \wedge (y \Leftrightarrow (b_n)) \wedge (z \Leftrightarrow (c_n))) \\
\downarrow \\
((xR_4y) \wedge (yR_4z)) \\
\updownarrow \\
(((a_n)R_4(b_n)) \wedge ((b_n)R_4(c_n))) \\
\downarrow \\
\left(\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n - b_n =_{\mathbb{Q}} 0 \right) \wedge \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n - c_n =_{\mathbb{Q}} 0 \right) \right) \\
\updownarrow \\
\left(\left((\exists 0)(\forall \varepsilon)(\exists n_1)(0 <_{\mathbb{Q}} \varepsilon) \left((\forall n)(n_1 <_{\mathbb{N}} n) \rightarrow |(a_n - b_n) - 0| <_{\mathbb{Q}} \frac{\varepsilon}{2} \right) \right) \right. \\
\quad \wedge \\
\left. \left((\exists 0)(\forall \varepsilon)(\exists n_2)(0 <_{\mathbb{Q}} \varepsilon) \left((\forall n)(n_2 <_{\mathbb{N}} n) \rightarrow |(b_n - c_n) - 0| <_{\mathbb{Q}} \frac{\varepsilon}{2} \right) \right) \right) \\
\downarrow \\
\left((\exists 0)(\forall \varepsilon)(\exists n_0)(n_0 =_{\mathbb{N}} \max\{n_1, n_2\})(0 <_{\mathbb{Q}} \varepsilon) \left((\forall n)(n_0 <_{\mathbb{N}} n) \rightarrow |(a_n - c_n) - 0| <_{\mathbb{Q}} \varepsilon \right) \right) \\
\downarrow \\
\left(\left(|(a_n - c_n) - 0| \stackrel{P_5}{=}_{\mathbb{Q}} |a_n - b_n + b_n - c_n| \stackrel{P_{12.1}}{=}_{\mathbb{Q}} |(a_n - b_n) + (b_n - c_n)| \right) \right. \\
\quad \wedge \\
\left. \left(|(a_n - b_n) + (b_n - c_n)| \stackrel{P_{26}}{\leq}_{\mathbb{Q}} |a_n - b_n| + |b_n - c_n| <_{\mathbb{Q}} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \right) \right) \\
\downarrow P_{3.4}
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
& \downarrow P_{3.4} \\
& (|(a_n - c_n) - 0| <_{\mathbb{Q}} \varepsilon) \\
& \downarrow \models_9 \\
& \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n - c_n =_{\mathbb{Q}} 0 \right) \\
& \updownarrow \\
& ((a_n)R_4(c_n)) \\
& \updownarrow \\
& (xR_4z)
\end{aligned}$$

■

$$P_{35} \Leftrightarrow \left(R_5 \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ ((a_n), (b_n)) \in (\mathcal{C}_{\mathbb{Q}} \times \mathcal{C}_{\mathbb{Q}}) : \left((a_n)R_5(b_n) \leftrightarrow (\exists \delta)(\exists n_0)(0 <_{\mathbb{Q}} \delta) \left(\begin{array}{c} (\forall n)(n_0 <_{\mathbb{N}} n) \\ \downarrow \\ (a_n + \delta <_{\mathbb{Q}} b_n) \end{array} \right) \right) \right\} \right)$$

$$P_{35.1} \Leftrightarrow \left((\forall x)(\forall y)(\forall z) \left(((xR_5y) \wedge (yR_5z)) \rightarrow (xR_5z) \right) \right)$$

⊢

$$\begin{aligned}
& ((x \Leftrightarrow (a_n)) \wedge (y \Leftrightarrow (b_n)) \wedge (z \Leftrightarrow (c_n))) \\
& \downarrow \\
& ((xR_5y) \wedge (yR_5z)) \\
& \updownarrow \\
& (((a_n)R_5(b_n)) \wedge ((b_n)R_5(c_n))) \\
& \updownarrow \\
& \left((\exists \delta_1)(\exists n_1)(0 <_{\mathbb{Q}} \delta_1) \left((\forall n)(n_1 <_{\mathbb{N}} n) \rightarrow (a_n + \delta_1 <_{\mathbb{Q}} b_n) \right) \right) \\
& \quad \wedge \\
& \left((\exists \delta_2)(\exists n_2)(0 <_{\mathbb{Q}} \delta_2) \left((\forall n)(n_2 <_{\mathbb{N}} n) \rightarrow (b_n + \delta_2 <_{\mathbb{Q}} c_n) \right) \right) \\
& \updownarrow \\
& (\exists \delta)(\exists n_0)(\delta =_{\mathbb{Q}} \max\{\delta_1, \delta_2\})(n_0 =_{\mathbb{N}} \max\{n_1, n_2\})(0 <_{\mathbb{Q}} \delta) \left(\begin{array}{c} (\forall n)(n_0 <_{\mathbb{N}} n) \\ \downarrow \\ (a_n + (2 \cdot \delta) <_{\mathbb{Q}} c_n) \end{array} \right) \\
& \updownarrow \\
& ((a_n + \delta <_{\mathbb{Q}} b_n) \wedge (b_n + \delta <_{\mathbb{Q}} c_n)) \\
& \updownarrow P_{16} \\
& (((a_n + \delta) + \delta <_{\mathbb{Q}} b_n + \delta) \wedge (b_n + \delta <_{\mathbb{Q}} c_n)) \\
& \updownarrow P_{3.4} \\
& ((a_n + \delta) + \delta <_{\mathbb{Q}} c_n) \\
& \updownarrow P_{12.1}
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{c}
\downarrow P_{12.1} \\
(a_n + (\delta + \delta) <_{\mathbb{Q}} c_n) \\
\downarrow \\
((a_n)_{R_5}(c_n)) \\
\Downarrow \\
(xR_5z)
\end{array}$$

■

$$P_{36} \Leftrightarrow (R_6 \stackrel{\text{def}}{=} \{((a_n), (b_n)) \in (\mathcal{C}_{\mathbb{Q}} \times \mathcal{C}_{\mathbb{Q}}) : ((a_n)R_6(b_n) \Leftrightarrow (((a_n)R_4(b_n)) \underline{\vee} ((a_n)R_5(b_n))))\})$$

$$P_{36.1} \Leftrightarrow (\forall x)(\forall y) \left((xR_5y) \underline{\vee} (xR_4y) \underline{\vee} (yR_5x) \right)$$

⊢

$$\begin{array}{c}
((x \Leftrightarrow (a_n)) \wedge (y \Leftrightarrow (b_n))) \\
\downarrow \\
P_{3.1} \\
\downarrow \\
\left(\left((\exists \varepsilon)(\exists n_0)(0 <_{\mathbb{Q}} \delta) \left((\forall n)(n_0 <_{\mathbb{N}} n) \rightarrow (a_n + \delta <_{\mathbb{Q}} b_n) \right) \xrightarrow{P_{35}} (a_n)R_5(b_n) \right) \right. \\
\quad \underline{\vee} \\
\left. \left((\exists 0)(\forall \varepsilon)(\exists n_0)(0 <_{\mathbb{Q}} \varepsilon) \left((\forall n)(n_0 <_{\mathbb{N}} n) \rightarrow |(a_n - b_n) - 0| <_{\mathbb{Q}} \varepsilon \right) \right) \right. \\
\quad \quad \quad \downarrow P_5 \downarrow P_{25} \\
\quad \quad \quad (\exists 0)(\forall \varepsilon)(\exists n_0)(0 <_{\mathbb{Q}} \varepsilon) \left((\forall n)(n_0 <_{\mathbb{N}} n) \rightarrow a_n - b_n <_{\mathbb{Q}} \varepsilon \right) \\
\quad \quad \quad \downarrow P_{34} \\
\quad \quad \quad ((a_n)R_4(b_n)) \\
\quad \quad \quad \underline{\vee} \\
\left. \left((\exists \varepsilon)(\exists n_0)(0 <_{\mathbb{Q}} \delta) \left((\forall n)(n_0 <_{\mathbb{N}} n) \rightarrow (b_n + \delta <_{\mathbb{Q}} a_n) \right) \xrightarrow{P_{35}} (b_n)R_5(a_n) \right) \right) \\
\Downarrow \\
((xR_5y) \underline{\vee} (xR_4y) \underline{\vee} (yR_5x))
\end{array}$$

■

$$P_{36.2} \Leftrightarrow (\forall x)(xR_6x)$$

⊢

$$\begin{aligned}
& (x \Leftrightarrow (a_n)) \\
& \downarrow \\
& P_{34.1} \\
& \downarrow \\
& ((\forall x)(xR_4x)) \\
& \downarrow \\
& (xR_4x) \\
& \Downarrow \\
& (xR_6x)
\end{aligned}$$

■

$$P_{36.3} \Leftrightarrow ((\forall x)(\forall y) (((xR_6y) \wedge (yR_6x)) \rightarrow (xR_4y)))$$

⊢

$$\begin{aligned}
& ((xR_6y) \wedge (yR_6x)) \\
& \Downarrow \\
& (((xR_4y) \underline{\vee} (xR_5y)) \wedge ((yR_4x) \underline{\vee} (yR_5x))) \\
& \Downarrow P_{34.2} \\
& \left(((\forall x)(\forall y) (((xR_4y) \wedge (yR_4x)) \rightarrow xR_4y)) \right. \\
& \quad \underline{\vee} \\
& \quad \left((\forall x)(\forall y) \left(((xR_4y) \wedge (yR_5x)) \xrightarrow{P_{36.1}} \Lambda \right) \right) \\
& \quad \underline{\vee} \\
& \quad \left((\forall x)(\forall y) \left(((xR_5y) \wedge (yR_4x)) \xrightarrow{P_{36.1}} \Lambda \right) \right) \\
& \quad \underline{\vee} \\
& \quad \left. \left((\forall x)(\forall y) \left(((xR_5y) \wedge (yR_5x)) \xrightarrow{P_{36.1}} \Lambda \right) \right) \right)
\end{aligned}$$

■

$$L_1 \Leftrightarrow ((\forall x)(\forall y)(\forall z) (((xR_4y) \wedge (yR_5z)) \rightarrow (xR_5z)))$$

⊢

$$\begin{aligned}
& ((x \Leftrightarrow (a_n)) \wedge (y \Leftrightarrow (b_n)) \wedge (z \Leftrightarrow (c_n))) \\
& \quad \downarrow \\
& ((xR_4y) \wedge (yR_5z)) \\
& \quad \Downarrow \\
& (((a_n)R_4(b_n)) \wedge ((b_n)R_5(c_n))) \\
& \quad P_1 \Downarrow P_2 \\
& \left(\begin{array}{c} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n - b_n =_{\mathbb{Q}} 0 \right) \\ \wedge \\ \left((\exists \delta)(\exists n_0)(0 <_{\mathbb{Q}} \delta) \left((\forall n)(n_2 <_{\mathbb{N}} n) \rightarrow (b_n + \delta <_{\mathbb{Q}} c_n) \right) \right) \end{array} \right) \\
& \quad \Downarrow \\
& \left(\begin{array}{c} \left((\forall \varepsilon)(\exists n_0)(0 <_{\mathbb{Q}} \varepsilon) \left((\forall n)(n_1 <_{\mathbb{N}} n) \rightarrow (|a_n - b_n| - 0 <_{\mathbb{Q}} \varepsilon) \right) \right) \\ \wedge \\ \left((\exists \delta)(\exists n_0)(0 <_{\mathbb{Q}} \delta) \left((\forall n)(n_2 <_{\mathbb{N}} n) \rightarrow (b_n + \delta <_{\mathbb{Q}} c_n) \right) \right) \end{array} \right) \\
& \quad \downarrow \\
& \left((\exists(\delta - \varepsilon))(\exists n_0)(n_0 =_{\mathbb{N}} \max\{n_1, n_2\})(0 <_{\mathbb{Q}} \varepsilon <_{\mathbb{Q}} \delta) \left(\begin{array}{c} (\forall n)(n_0 <_{\mathbb{N}} n) \\ \downarrow \\ (a_n + (\delta - \varepsilon) <_{\mathbb{Q}} c_n) \end{array} \right) \right) \\
& \quad \downarrow \\
& \left(\begin{array}{c} P_{25} \quad P_5 \\ a_n - b_n \leq_{\mathbb{Q}} |a_n - b_n| =_{\mathbb{Q}} |(a_n - b_n) - 0| <_{\mathbb{Q}} \varepsilon \end{array} \right) \\
& \quad \downarrow P_{3,4} \\
& ((a_n - b_n <_{\mathbb{Q}} \varepsilon) \wedge (b_n + \delta <_{\mathbb{Q}} c_n)) \\
& \quad P_6 \downarrow P_{12,5} \\
& ((a_n + \delta + (-\delta - b_n) <_{\mathbb{Q}} \varepsilon) \wedge (b_n + \delta <_{\mathbb{Q}} c_n)) \\
& \quad \downarrow P_{12,2} \\
& ((a_n + \delta - (b_n + \delta) <_{\mathbb{Q}} \varepsilon) \wedge (b_n + \delta <_{\mathbb{Q}} c_n)) \\
& \quad P_{16} \downarrow P_{12,1} \\
& ((a_n + \delta + (-(b_n + \delta) + (b_n + \delta)) <_{\mathbb{Q}} \varepsilon + (b_n + \delta)) \wedge (b_n + \delta <_{\mathbb{Q}} c_n)) \\
& \quad P_6 \downarrow P_5 \\
& ((a_n + \delta <_{\mathbb{Q}} \varepsilon + (b_n + \delta)) \wedge (b_n + \delta <_{\mathbb{Q}} c_n)) \\
& \quad P_{16} \downarrow P_{12,2} \\
& ((a_n + \delta <_{\mathbb{Q}} \varepsilon + (b_n + \delta)) \wedge (\varepsilon + (b_n + \delta) <_{\mathbb{Q}} \varepsilon + c_n)) \\
& \quad \downarrow P_{3,4} \\
& (a_n + \delta <_{\mathbb{Q}} \varepsilon + c_n) \\
& \quad P_{16} \downarrow P_{12,2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& P_{16} \downarrow P_{12.2} \\
& \left((a_n + \delta) - \varepsilon <_{\mathbb{Q}} \varepsilon + c_n - \varepsilon \right) \\
& P_{12.2} \downarrow P_{12.1} \\
& (a_n + (\delta - \varepsilon) <_{\mathbb{Q}} (\varepsilon - \varepsilon) + c_n) \\
& P_6 \downarrow P_5 \\
& (a_n + (\delta - \varepsilon) <_{\mathbb{Q}} c_n) \\
& \downarrow \\
& ((a_n)R_5(c_n)) \\
& \Downarrow \\
& (xR_5z)
\end{aligned}$$

■

$$L_2 \Leftrightarrow \left((\forall x)(\forall y)(\forall z) \left(((xR_5y) \wedge (yR_4z)) \rightarrow (xR_5z) \right) \right)$$

⊢

$$\begin{aligned}
& \left((x \Leftrightarrow (a_n)) \wedge (y \Leftrightarrow (b_n)) \wedge (z \Leftrightarrow (c_n)) \right) \\
& \downarrow \\
& ((xR_5y) \wedge (yR_4z)) \\
& \Downarrow \\
& (((a_n)R_5(b_n)) \wedge ((b_n)R_4(c_n))) \\
& \Downarrow \\
& \left(\left((\exists \delta)(\exists n_1)(0 <_{\mathbb{Q}} \delta) \left((\forall n)(n_1 <_{\mathbb{N}} n) \rightarrow (a_n + \delta <_{\mathbb{Q}} b_n) \right) \right) \right. \\
& \quad \wedge \\
& \quad \left. \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n - c_n = 0 \right) \right) \\
& \Downarrow \\
& \left(\left((\exists \delta)(\exists n_1)(0 <_{\mathbb{Q}} \delta) \left((\forall n)(n_1 <_{\mathbb{N}} n) \rightarrow (a_n + \delta <_{\mathbb{Q}} b_n) \right) \right) \right. \\
& \quad \wedge \\
& \quad \left. \left((\forall \varepsilon)(\exists n_2)(0 <_{\mathbb{Q}} \varepsilon) \left((\forall n)(n_2 <_{\mathbb{N}} n) \rightarrow (|b_n - c_n| <_{\mathbb{Q}} \varepsilon) \right) \right) \right) \\
& \downarrow \\
& \left((\exists(\delta - \varepsilon))(\exists n_0)(n_0 =_{\mathbb{N}} \max\{n_1, n_2\})(0 <_{\mathbb{Q}} \varepsilon <_{\mathbb{Q}} \delta) \left(\begin{array}{c} (\forall n)(n_0 <_{\mathbb{N}} n) \\ \downarrow \\ (a_n + (\delta - \varepsilon) <_{\mathbb{Q}} c_n) \end{array} \right) \right) \\
& \downarrow \\
& \left(b_n - c_n \leq_{\mathbb{Q}} |b_n - c_n| \stackrel{P_5}{=}_{\mathbb{Q}} |(b_n - c_n) - 0| <_{\mathbb{Q}} \varepsilon \right) \\
& \downarrow P_{3.4} \\
& ((a_n + \delta <_{\mathbb{Q}} b_n) \wedge (b_n - c_n <_{\mathbb{Q}} \varepsilon)) \\
& P_6 \downarrow P_{12.1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& P_6 \downarrow P_{12.1} \\
& \left((a_n + \delta <_{\mathbb{Q}} b_n) \wedge (b_n + \delta + (-\delta - c_n) <_{\mathbb{Q}} \varepsilon) \right) \\
& P_{12.2} \downarrow P_{12.5} \\
& \left((a_n + \delta <_{\mathbb{Q}} b_n) \wedge (b_n + \delta - (c_n + \delta) <_{\mathbb{Q}} \varepsilon) \right) \\
& P_{12.1} \downarrow P_{16} \\
& \left((a_n + \delta <_{\mathbb{Q}} b_n) \wedge (b_n + \delta + (-(c_n + \delta) + (c_n + \delta)) <_{\mathbb{Q}} \varepsilon + (c_n + \delta)) \right) \\
& P_6 \downarrow P_5 \\
& \left((a_n + \delta <_{\mathbb{Q}} b_n) \wedge (b_n + \delta <_{\mathbb{Q}} \varepsilon + (c_n + \delta)) \right) \\
& P_{12.1} \downarrow P_{16} \\
& \left(((a_n + \delta) + \delta <_{\mathbb{Q}} b_n + \delta) \wedge (b_n + \delta <_{\mathbb{Q}} (\varepsilon + c_n) + \delta) \right) \\
& P_{3.4} \downarrow P_{16} \\
& (a_n + \delta <_{\mathbb{Q}} \varepsilon + c_n) \\
& \downarrow P_{16} \\
& ((a_n + \delta) - \varepsilon <_{\mathbb{Q}} (\varepsilon + c_n) - \varepsilon) \\
& P_{12.2} \downarrow P_{12.1} \\
& (a_n + (\delta - \varepsilon) <_{\mathbb{Q}} c_n + (\varepsilon - \varepsilon)) \\
& P_6 \downarrow P_5 \\
& (a_n + (\delta - \varepsilon) <_{\mathbb{Q}} c_n) \\
& \downarrow \\
& ((a_n)R_5(c_n)) \\
& \Downarrow \\
& (xR_5z)
\end{aligned}$$

■

$$P_{36.4} \Leftrightarrow \left((\forall x)(\forall y)(\forall z) \left(((xR_6y) \wedge (yR_6z)) \rightarrow (xR_6z) \right) \right)$$

⊢

$$\begin{aligned}
& ((xR_6y) \wedge (yR_6z)) \\
& \Downarrow \\
& \left(((xR_4y) \underline{\vee} (xR_5y)) \wedge ((yR_4z) \underline{\vee} (yR_5z)) \right) \\
& \Downarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{c}
\updownarrow \\
\left(\begin{array}{c}
P_{34.3} \rightarrow \left(((xR_4y) \wedge (yR_4z)) \rightarrow (xR_4z) \right) \\
\quad \underline{\vee} \\
P_{35.1} \rightarrow \left(((xR_5y) \wedge (yR_5z)) \rightarrow (xR_5z) \right) \\
\quad \underline{\vee} \\
L_1 \rightarrow \left(((xR_4y) \wedge (yR_5z)) \rightarrow (xR_5z) \right) \\
\quad \underline{\vee} \\
L_2 \rightarrow \left(((xR_5y) \wedge (yR_4z)) \rightarrow (xR_5z) \right)
\end{array} \right)
\end{array}$$

■

$$\models_{16} \Leftrightarrow \left(\overline{(b_n)} \stackrel{\text{def}}{=} \{(a_n) \in \mathcal{C}_{\mathbb{Q}} : (a_n)R_4(b_n)\} \right)$$

$$\models_{17} \Leftrightarrow \left(\mathbb{R} \Leftrightarrow \left((\mathcal{C}_{\mathbb{Q}}/R_4) \stackrel{\text{def}}{=} \{\overline{(a_n)} : (a_n) \in \mathcal{C}_{\mathbb{Q}}\} \right) \right)$$

Escólio. $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (\exists (a_n)) \left(((a_n) \in \mathcal{C}_{\mathbb{Q}}) \wedge (x =_{\mathbb{R}} \overline{(a_n)}) \right)$

Escólio. Agora que definimos os objetos de $\mathbb{R}$, vamos inserir a notação usual que estamos habituados:

$$x \Leftrightarrow \overline{(a_n)} \Leftrightarrow \overline{(a_n)}_{n \in \mathbb{N}}$$

$$\models_4 \Leftrightarrow \left(=_{\mathbb{R}} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \left(\overline{(a,b)}, \overline{(c,d)} \right) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) : \left(\overline{(a,b)} =_{\mathbb{R}} \overline{(c,d)} \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n - b_n =_{\mathbb{Q}} 0 \right) \right\} \right)$$

$$\models_5 \Leftrightarrow \left(<_{\mathbb{R}} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \left(\overline{(a,b)}, \overline{(c,d)} \right) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) : \left(\overline{(a,b)} <_{\mathbb{R}} \overline{(c,d)} \Leftrightarrow (\exists \delta)(\exists n_0)(0 <_{\mathbb{Q}} \delta) \left(\begin{array}{c} (\forall n)(n_0 <_{\mathbb{N}} n) \\ \downarrow \\ (a_n + \delta <_{\mathbb{Q}} b_n) \end{array} \right) \right) \right\} \right)$$

$$\models_6 \Leftrightarrow \left(\leq_{\mathbb{R}} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \left\{ (\overline{(a,b)}, \overline{(c,d)}) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) : \left((\overline{(a,b)} =_{\mathbb{R}} \overline{(c,d)}) \vee (\overline{(a,b)} <_{\mathbb{R}} \overline{(c,d)}) \right) \right\} \right\} \right)$$

Escólio. A partir desse momento as relações $=_{\mathbb{Q}}$ e $\leq_{\mathbb{Q}}$ passaram a ser vistas respectivamente como a relação de igualdade em $\mathbb{Q}$ e a relação de ordem total em $\mathbb{Q}$.

Exemplo. $\left(\left(\frac{a}{b} \in \mathbb{R} \right) \leftrightarrow \left(\exists \left(\frac{a}{b} \right) \right) \left(\left(\left(\frac{a}{b} \right) \in \mathcal{C}_{\mathbb{Q}} \right) \wedge \left(\frac{a}{b} =_{\mathbb{R}} \overline{\left(\frac{a}{b} \right)} \right) \right) \right)$

$\vdash$

$$\begin{array}{c} (P_{23} \wedge P_{29}) \\ \downarrow \\ \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a}{b} - \frac{a}{b} =_{\mathbb{Q}} 0 \right) \wedge \left(\left(\frac{a}{b} \right) \in \mathcal{C}_{\mathbb{Q}} \right) \\ \downarrow \\ \left(\frac{a}{b} \in \mathbb{R} \right) \end{array}$$

■

4.4 Operações de adição e multiplicação dos números reais

$$\models_{15} \Leftrightarrow \left(+ \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c} (\forall x)(\forall y) \left(\begin{array}{c} + : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto +(x, y) \Leftrightarrow x + y \end{array} \right) \\ \wedge \\ (x + y =_{\mathbb{R}} \overline{(a_n)} + \overline{(b_n)} =_{\mathbb{R}} \overline{(a_n + b_n)}) \end{array} \right) \right)$$

$$P_{37} \Leftrightarrow \left((\forall x)(\forall y)(\forall z)(\forall w) \left(((x =_{\mathbb{R}} w) \wedge (y =_{\mathbb{R}} z)) \rightarrow (x + y =_{\mathbb{R}} z + w) \right) \right)$$

$\vdash$

$$\begin{aligned}
& \left((x \Leftrightarrow \overline{(a_n)}) \wedge (y \Leftrightarrow \overline{(b_n)}) \wedge (z \Leftrightarrow \overline{(c_n)}) \wedge (w \Leftrightarrow \overline{(d_n)}) \right) \\
& \quad \downarrow \\
& \quad ((x =_{\mathbb{R}} w) \wedge (y =_{\mathbb{R}} z)) \\
& \quad \Downarrow \\
& \quad \left((\overline{(a_n)} =_{\mathbb{R}} \overline{(d_n)}) \wedge (\overline{(b_n)} =_{\mathbb{R}} \overline{(c_n)}) \right) \\
& \quad \updownarrow P_{34} \\
& \quad \left(\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n - d_n =_{\mathbb{Q}} 0 \right) \wedge \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n - c_n =_{\mathbb{Q}} 0 \right) \right) \\
& \quad \Downarrow \\
& \quad \left(\begin{array}{c} (\exists 0)(\forall \varepsilon)(\exists n_1)(0 <_{\mathbb{Q}} \varepsilon) \left((\forall n)(n_1 <_{\mathbb{N}} n) \rightarrow (|(a_n - d_n) - 0| <_{\mathbb{Q}} \frac{\varepsilon}{2}) \right) \\ \wedge \\ (\exists 0)(\forall \varepsilon)(\exists n_2)(0 <_{\mathbb{Q}} \varepsilon) \left((\forall n)(n_2 <_{\mathbb{N}} n) \rightarrow (|(b_n - c_n) - 0| <_{\mathbb{Q}} \frac{\varepsilon}{2}) \right) \end{array} \right) \\
& \quad \downarrow \\
& \quad (\exists 0)(\forall \varepsilon)(\exists n_0)(n_0 =_{\mathbb{N}} \max\{n_1, n_2\})(0 < \varepsilon) \left(\begin{array}{c} (\forall n)(n_0 <_{\mathbb{N}} n) \\ \downarrow \\ (|((a_n + b_n) - (c_n + d_n)) - 0| <_{\mathbb{Q}} \varepsilon) \end{array} \right) \\
& \quad \downarrow \\
& \quad \downarrow \\
& \quad \left(\begin{array}{c} |((a_n + b_n) - (c_n + d_n)) - 0| \stackrel{P_4}{=}_{\mathbb{Q}} |(a_n + b_n) - (c_n + d_n)| \stackrel{P_{9,2}}{=}_{\mathbb{Q}} |(a_n + b_n) + (-d_n - c_n)| \\ \downarrow P_{9,5} \end{array} \right) \\
& \quad \downarrow P_{1.3} \\
& \quad \left(\begin{array}{c} |((a_n + b_n) - (c_n + d_n)) - 0| \stackrel{P_{9,1}}{=}_{\mathbb{Q}} |(a_n + b_n) + (-d_n - c_n)| \stackrel{P_{9,2}}{=}_{\mathbb{Q}} |a_n + ((-d_n) + b_n) - c_n| \\ \downarrow P_{1.3} \end{array} \right) \\
& \quad \downarrow P_{1.3} \\
& \quad \left(\begin{array}{c} |((a_n + b_n) - (c_n + d_n)) - 0| \stackrel{P_{9,1}}{=}_{\mathbb{Q}} |a_n + ((-d_n) + b_n) - c_n| \stackrel{P_4}{=}_{\mathbb{Q}} |(a_n - d_n) + (b_n - c_n) - 0| \\ \downarrow P_{1.3} \end{array} \right) \\
& \quad \downarrow P_{1.3} \\
& \quad \left(\begin{array}{c} |((a_n + b_n) - (c_n + d_n)) - 0| \stackrel{P_{21}}{=}_{\mathbb{Q}} |(a_n - d_n) + (b_n - c_n) - 0| \leq_{\mathbb{Q}} |a_n - d_n| + |b_n - c_n| \\ \downarrow P_{2.3} \end{array} \right) \\
& \quad \left(|((a_n + b_n) - (c_n + d_n)) - 0| \leq_{\mathbb{Q}} |a_n - d_n| + |b_n - c_n| <_{\mathbb{Q}} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} =_{\mathbb{Q}} \varepsilon \right) \\
& \quad \downarrow \\
& \quad \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n) - (c_n + d_n) =_{\mathbb{Q}} 0 \right) \\
& \quad \updownarrow P_{29} \\
& \quad \left(\overline{(a_n + b_n)} =_{\mathbb{R}} \overline{(c_n + d_n)} \right) \\
& \quad \Downarrow \\
& \quad (x + y =_{\mathbb{R}} z + w)
\end{aligned}$$

■

$$(\forall m)(m > 2) \left(\forall (\overline{a_n^j}) \right) (j \in \mathbb{N}) \rightarrow \sum_{j=1}^m \overline{a_n^j} =_{\mathbb{R}} \left((\overline{a_n^1} + \overline{a_n^2}) + \dots + \overline{a_n^m} \right)$$

$$P_{38} \Leftrightarrow ((\forall x)(\exists! e_1)(x +_{\mathbb{R}} e_1 =_{\mathbb{R}} e_1 +_{\mathbb{R}} x =_{\mathbb{R}} x))$$

$\vdash$

$\vdash_1$

$$\left((x \Leftrightarrow \overline{a_n}) \wedge (e_1 \Leftrightarrow \overline{e_n^1}) \right)$$

$\downarrow$

$$(x + e_1 =_{\mathbb{R}} x)$$

$\Downarrow$

$$(\overline{a_n} + \overline{e_n^1} =_{\mathbb{R}} \overline{a_n})$$

$\Downarrow \models_{15}$

$\Downarrow \models_{15}$

$$(\overline{a_n + e_n^1} =_{\mathbb{R}} \overline{a_n})$$

$\Downarrow P_{34}$

$$\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n + e_n^1) - a_n =_{\mathbb{Q}} 0 \right)$$

$\Downarrow P_{12.2}$

$$\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} -a_n + (a_n + e_n^1) =_{\mathbb{Q}} 0 \right)$$

$\Downarrow P_{12.1}$

$$\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} (-a_n + a_n) + e_n^1 =_{\mathbb{Q}} 0 \right)$$

$\Downarrow P_6$

$$\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} 0 + e_n^1 =_{\mathbb{Q}} 0 \right)$$

$\Downarrow P_5$

$$\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} e_n^1 =_{\mathbb{Q}} 0 \right)$$

$\Downarrow P_5$

$$\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} e_n^1 - 0_n =_{\mathbb{Q}} 0 \right)$$

$\Downarrow P_{34}$

$$(\overline{e_n^1} =_{\mathbb{R}} \overline{0_n})$$

$\vdash_2$

$$\begin{aligned}
& \left((x \Leftrightarrow \overline{(a_n)}) \wedge (e_1 \Leftrightarrow \overline{(e_n^1)}) \right) \\
& \quad \downarrow \\
& \left(\overline{(e_n^1)} + \overline{(a_n)} =_{\mathbb{R}} \overline{(a_n)} \right) \\
& \quad \updownarrow \mathbb{F}_{15} \\
& \left(\overline{(e_n^1 + a_n)} =_{\mathbb{R}} \overline{(a_n)} \right) \\
& \quad \updownarrow P_{34} \\
& \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} (e_n^1 + a_n) - a_n =_{\mathbb{Q}} 0 \right) \\
& \quad \updownarrow P_{12.1} \\
& \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} e_n^1 + (a_n - a_n) =_{\mathbb{Q}} 0 \right) \\
& \quad \updownarrow P_6 \\
& \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} e_n^1 + 0 =_{\mathbb{Q}} 0 \right) \\
& \quad \updownarrow P_5 \\
& \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} e_n^1 =_{\mathbb{Q}} 0 \right) \\
& \quad \updownarrow P_5 \\
& \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} e_n^1 - 0_n =_{\mathbb{Q}} 0 \right) \\
& \quad \updownarrow P_{34} \\
& \left(\overline{(e_n^1)} =_{\mathbb{R}} \overline{(0_n)} \right)
\end{aligned}$$

$\vdash_3$

$$\begin{aligned}
& (\forall x)(\exists e'_1)(e_1 \neq_{\mathbb{R}} e'_1)(x + e'_1 =_{\mathbb{R}} e'_1 + x =_{\mathbb{R}} x) \\
& \quad \downarrow \\
& \left((x =_{\mathbb{R}} e_1) \left((e_1 + e'_1 =_{\mathbb{R}} e_1) \wedge (e_1 + e'_1 =_{\mathbb{R}} e'_1) \right) \right) \\
& \quad \updownarrow P_{34.2} \\
& \left((e_1 =_{\mathbb{R}} e_1 + e'_1) \wedge (e_1 + e'_1 =_{\mathbb{R}} e'_1) \right) \\
& \quad \updownarrow P_{34.3} \\
& (e_1 =_{\mathbb{R}} e'_1) \\
& \quad \downarrow \\
& \Lambda \\
& \quad \downarrow \\
& \left((\forall x)(\nexists e'_1)(e_1 \neq_{\mathbb{R}} e'_1)(x + e'_1 =_{\mathbb{R}} e'_1 + x =_{\mathbb{R}} x) \right) \\
& \quad \downarrow \\
& \left((\forall x)(\exists! e_1)(x + e_2 =_{\mathbb{R}} e_2 + x =_{\mathbb{R}} x) \right)
\end{aligned}$$

■

Escólio. $e_1 = \left\{ (a_n) : \left((a_n) =_{\mathbb{R}} (0_n) \leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n - 0_n =_{\mathbb{Q}} 0 \leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n =_{\mathbb{Q}} 0 \right) \right\}$

$$P_{39} \Leftrightarrow ((\forall x)(\exists! y)(x + y =_{\mathbb{R}} y + x =_{\mathbb{R}} e_1))$$

$\vdash$

$\vdash_1$

$$\begin{aligned} & \left((x \Leftrightarrow \overline{(a_n)}) \wedge (y \Leftrightarrow \overline{(b_n)}) \wedge (e_1 \Leftrightarrow \overline{(0_n)}) \right) \\ & \quad \downarrow \\ & (x + y =_{\mathbb{R}} e_1) \\ & \quad \Downarrow \\ & (\overline{(a_n)} + \overline{(b_n)} =_{\mathbb{R}} \overline{(0_n)}) \\ & \quad \Updownarrow \models_{15} \\ & (\overline{(a_n + b_n)} =_{\mathbb{R}} \overline{(0_n)}) \\ & \quad \Updownarrow P_{34} \end{aligned}$$

$\setminus$

$$\begin{aligned} & \quad \Updownarrow P_{34} \\ & \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n) - 0_n =_{\mathbb{Q}} 0 \right) \\ & \quad \Updownarrow P_5 \\ & \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n + b_n =_{\mathbb{Q}} 0 \right) \\ & \quad \Updownarrow P_{12.2} \\ & \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n + a_n =_{\mathbb{Q}} 0 \right) \\ & \quad \Updownarrow P_{20} \\ & \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n - (-a_n) =_{\mathbb{Q}} 0 \right) \\ & \quad \Updownarrow P_{34} \\ & (\overline{(b_n)} =_{\mathbb{R}} \overline{(-a_n)}) \end{aligned}$$

$\vdash_2$

$$\begin{aligned}
& \left((x \Leftrightarrow \overline{(a_n)}) \wedge (y \Leftrightarrow \overline{(b_n)}) \wedge (e_1 \Leftrightarrow \overline{(0_n)}) \right) \\
& \quad \downarrow \\
& \left(\overline{(b_n)} + \overline{(a_n)} =_{\mathbb{R}} \overline{(0_n)} \right) \\
& \quad \updownarrow \models_{15} \\
& \left(\overline{(b_n + a_n)} =_{\mathbb{R}} \overline{(0_n)} \right) \\
& \quad \updownarrow P_{34} \\
& \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} (b_n + a_n) - 0_n =_{\mathbb{Q}} 0 \right) \\
& \quad \updownarrow P_5 \\
& \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n + a_n =_{\mathbb{Q}} 0 \right) \\
& \quad \updownarrow P_{20} \\
& \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n - (-a_n) =_{\mathbb{Q}} 0 \right) \\
& \quad \updownarrow P_{34} \\
& \left(\overline{(b_n)} =_{\mathbb{R}} \overline{(-a_n)} \right)
\end{aligned}$$

$\vdash_3$

$$\begin{aligned}
& (\forall x)(\exists y')(y \neq_{\mathbb{R}} y')(x + y' =_{\mathbb{R}} y' + x =_{\mathbb{R}} e_1) \\
& \quad \downarrow \\
& \left((x \Leftrightarrow \overline{(a_n)}) \wedge (y' \Leftrightarrow \overline{(c_n)}) \wedge (e_1 \Leftrightarrow \overline{(0_n)}) \right) \\
& \quad \downarrow \\
& \left(\overline{(a_n)} + \overline{(c_n)} =_{\mathbb{R}} \overline{(0_n)} \right) \\
& \quad \updownarrow \models_{15} \\
& \left(\overline{(a_n + c_n)} =_{\mathbb{R}} \overline{(0_n)} \right) \\
& \quad \updownarrow P_{34} \\
& \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n + c_n) - 0_n =_{\mathbb{Q}} 0 \right) \\
& \quad \updownarrow P_5 \\
& \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n + c_n =_{\mathbb{Q}} 0 \right) \\
& \quad \updownarrow P_{12.2} \\
& \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n + a_n =_{\mathbb{Q}} 0 \right) \\
& \quad \updownarrow P_{20} \\
& \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n - (-a_n) =_{\mathbb{Q}} 0 \right) \\
& \quad \updownarrow P_{34} \\
& \left(\left(\overline{(c_n)} =_{\mathbb{R}} \overline{(-a_n)} \right) \wedge \left(\overline{(-a_n)} =_{\mathbb{R}} \overline{(b_n)} \right) \right) \\
& \quad \updownarrow P_{34.3} \\
& \left(\overline{(c_n)} =_{\mathbb{R}} \overline{(b_n)} \right) \\
& \quad \updownarrow \\
& (y' =_{\mathbb{R}} y) \\
& \quad \downarrow \\
& \quad \downarrow \wedge \\
& \quad \downarrow \\
& ((\nexists y')(y' \neq y)(x + y' =_{\mathbb{R}} y' + x =_{\mathbb{R}} e_1)) \\
& \quad \downarrow \\
& ((\forall x)(\exists! y)(x + y =_{\mathbb{R}} y + x =_{\mathbb{R}} e_1))
\end{aligned}$$

■

$$\begin{aligned}
& \models_{16} \Leftrightarrow \left(\cdot \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c} (\forall x)(\forall y) \left(\begin{array}{c} \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \cdot (x, y) \Leftrightarrow x \cdot y \end{array} \right) \\ \wedge \\ (x \cdot y =_{\mathbb{R}} \overline{(a_n)} \cdot \overline{(b_n)} =_{\mathbb{R}} \overline{(a_n \cdot b_n)}) \end{array} \right) \right) \right)
\end{aligned}$$

$$P_{40} \Leftrightarrow \left((\forall x)(\forall y)(\forall z)(\forall w) \left(((x =_{\mathbb{R}} w) \wedge (y =_{\mathbb{R}} z)) \rightarrow (x \cdot y =_{\mathbb{R}} z \cdot w) \right) \right)$$

⊢

$$\begin{aligned}
& \left((x \Leftrightarrow \overline{(a_n)}) \wedge (y \Leftrightarrow \overline{(b_n)}) \wedge (z \Leftrightarrow \overline{(c_n)}) \wedge (w \Leftrightarrow \overline{(d_n)}) \right) \\
& \quad \downarrow \\
& \quad ((x =_{\mathbb{R}} w) \wedge (y =_{\mathbb{R}} z)) \\
& \quad \Downarrow \\
& \quad \left((\overline{(a_n)} =_{\mathbb{R}} \overline{(d_n)}) \wedge (\overline{(b_n)} =_{\mathbb{R}} \overline{(c_n)}) \right) \\
& \quad \Downarrow P_{34} \\
& \quad \left(\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n - d_n =_{\mathbb{Q}} 0 \right) \wedge \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n - c_n =_{\mathbb{Q}} 0 \right) \right) \\
& \quad \Downarrow \\
& \quad \left((\exists 0)(\forall \varepsilon)(\exists n_1)(0 <_{\mathbb{Q}} \varepsilon) \left(\begin{array}{c} (\forall n)(n_1 <_{\mathbb{N}} n) \\ \downarrow \\ (|a_n - d_n| <_{\mathbb{Q}} \frac{\varepsilon}{2 \cdot k_2}) \end{array} \right) \wedge (\exists k_1)(0 <_{\mathbb{Q}} k_1)(|d_n| \leq_{\mathbb{Q}} k_1) \right) \\
& \quad \quad \quad \wedge \\
& \quad \quad \quad \left((\exists 0)(\forall \varepsilon)(\exists n_2)(0 <_{\mathbb{Q}} \varepsilon) \left(\begin{array}{c} (\forall n)(n_2 <_{\mathbb{N}} n) \\ \downarrow \\ (|b_n - c_n| <_{\mathbb{Q}} \frac{\varepsilon}{2 \cdot k_1}) \end{array} \right) \wedge (\exists k_2)(0 <_{\mathbb{Q}} k_2)(|b_n| \leq_{\mathbb{Q}} k_2) \right) \right) \\
& \quad \quad \quad \downarrow \\
& \quad \quad \quad (\exists 0)(\forall \varepsilon)(n_0 = \max\{n_1, n_2\})(0 <_{\mathbb{Q}} \varepsilon) \left(\begin{array}{c} (\exists n_0)(\forall n)(n_0 < n) \\ \downarrow \\ (|((a_n \cdot b_n) - (c_n \cdot d_n)) - 0| <_{\mathbb{Q}} \varepsilon) \end{array} \right) \\
& \quad \quad \quad \downarrow \\
& \quad \quad \quad \left(\begin{array}{c} \left(|((a_n \cdot b_n) - (c_n \cdot d_n)) - 0| \stackrel{P_5}{=}_{\mathbb{Q}} |(a_n \cdot b_n) - (b_n \cdot d_n) + (b_n \cdot d_n) - (c_n \cdot d_n)| \right) \\ \wedge \\ \left(|(a_n \cdot b_n) - (b_n \cdot d_n) + (b_n \cdot d_n) - (c_n \cdot d_n)| \stackrel{P_{12.3}}{=}_{\mathbb{Q}} |(a_n - d_n) \cdot b_n + (b_n - c_n) \cdot d_n| \right) \\ \wedge \\ \left(|(a_n - d_n) \cdot b_n + (b_n - c_n) \cdot d_n| \stackrel{P_{24}}{\leq}_{\mathbb{Q}} |a_n - d_n| \cdot |b_n| + |b_n - c_n| \cdot |d_n| \right) \\ \wedge \\ \left(|a_n - d_n| \cdot |b_n| + |b_n - c_n| \cdot |d_n| <_{\mathbb{Q}} \frac{\varepsilon}{2 \cdot k_2} \cdot k_2 + \frac{\varepsilon}{2 \cdot k_1} \cdot k_1 \stackrel{P_9}{=}_{\mathbb{Q}} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} =_{\mathbb{Q}} \varepsilon \right) \end{array} \right) \\
& \quad \quad \quad \downarrow P_{3.4} \\
& \quad \quad \quad (|((a_n \cdot b_n) - (c_n \cdot d_n)) - 0| <_{\mathbb{Q}} \varepsilon) \\
& \quad \quad \quad \downarrow \\
& \quad \quad \quad \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n \cdot b_n) - (c_n \cdot d_n) =_{\mathbb{Q}} 0 \right) \\
& \quad \quad \quad \Downarrow P_{34} \\
& \quad \quad \quad \left(\overline{(a_n \cdot b_n)} =_{\mathbb{R}} \overline{(c_n \cdot d_n)} \right) \\
& \quad \quad \quad \Downarrow \\
& \quad \quad \quad (x \cdot y =_{\mathbb{R}} z \cdot w)
\end{aligned}$$

■

$$(\forall m)(m > 2) \left(\forall \overline{(a_n^j)} \right) (j \in \mathbb{N}) \rightarrow \prod_{j=1}^m \overline{(a_n^j)} =_{\mathbb{R}} \left(\left(\overline{(a_n^1)} \cdot \overline{(a_n^2)} \right) \cdot \overline{(a_n^3)} \right) \cdot \dots \cdot \overline{(a_n^m)} \right)$$

$$P_{41} \Leftrightarrow ((\forall x)(\exists! e_2)(x \cdot e_2 =_{\mathbb{R}} e_2 \cdot x =_{\mathbb{R}} x))$$

⊢

 $\vdash_1$

$$\begin{aligned}
 & \left(\left((x \Leftrightarrow \overline{(a_n)}) \wedge (\exists k)(0 <_{\mathbb{Q}} k)(|a_n| \leq_{\mathbb{Q}} k) \right) \wedge (e_2 \Leftrightarrow \overline{(e_n^2)}) \right) \\
 & \quad \downarrow \\
 & \quad \left(\overline{(a_n)} \cdot \overline{(e_n^2)} =_{\mathbb{R}} \overline{(a_n)} \right) \\
 & \quad \updownarrow \models_{16} \\
 & \quad \left(\overline{(a_n \cdot e_n^2)} =_{\mathbb{R}} \overline{(a_n)} \right) \\
 & \quad \updownarrow P_{34} \\
 & \quad \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n \cdot e_n^2) - a_n =_{\mathbb{Q}} 0 \right) \\
 & \quad \updownarrow P_8 \\
 & \quad \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n \cdot e_n^2) - a_n \cdot 1_n =_{\mathbb{Q}} 0 \right) \\
 & \quad \updownarrow P_{12.5} \\
 & \quad \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \cdot (e_n^2 - 1_n) =_{\mathbb{Q}} 0 \right) \\
 & \quad \updownarrow \\
 & \quad (\exists 0)(\forall \varepsilon)(\exists n_0)(0 <_{\mathbb{Q}} \varepsilon) \left((\forall n)(n_0 <_{\mathbb{N}} n) \rightarrow |(a_n \cdot (e_n^2 - 1_n)) - 0| <_{\mathbb{Q}} \varepsilon \right) \\
 & \quad \updownarrow \\
 & \quad \left(\left(|a_n| \cdot |e_n^2 - 1_n| \stackrel{P_{24}}{=}_{\mathbb{Q}} |a_n \cdot (e_n^2 - 1_n)| \stackrel{P_5}{=}_{\mathbb{Q}} |(a_n \cdot (e_n^2 - 1_n)) - 0| <_{\mathbb{Q}} \varepsilon \right) \right. \\
 & \quad \quad \wedge \\
 & \quad \left. \left(|(e_n^2 - 1_n) - 0| \stackrel{P_5}{=}_{\mathbb{Q}} \frac{1}{|a_n|} \cdot (|a_n| \cdot |e_n^2 - 1_n|) \stackrel{P_{17}}{<_{\mathbb{Q}}} \frac{1}{|a_n|} \cdot \varepsilon <_{\mathbb{Q}} \frac{1}{k} \cdot \varepsilon =_{\mathbb{Q}} \frac{\varepsilon}{k} \right) \right) \\
 & \quad \quad \updownarrow P_{3.4} \\
 & \quad \quad \left(|(e_n^2 - 1_n) - 0| <_{\mathbb{Q}} \frac{\varepsilon}{k} \right) \\
 & \quad \quad \updownarrow \\
 & \quad (\exists 0)(\forall \varepsilon)(\exists n_0)(0 <_{\mathbb{Q}} \varepsilon) \left((\forall n)(n_0 <_{\mathbb{N}} n) \rightarrow |(e_n^2 - 1_n) - 0| <_{\mathbb{Q}} \frac{\varepsilon}{k} \right) \\
 & \quad \quad \updownarrow
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c}
\Downarrow \\
\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} e_n^2 - 1_n =_{\mathbb{Q}} 0 \right) \\
\Downarrow P_{34} \\
\left(\overline{(e_n^2)} =_{\mathbb{R}} \overline{(1_n)} \right)
\end{array}$$

$\vdash_2$

$$\begin{array}{c}
\left(\left((x \Leftrightarrow \overline{(a_n)}) \wedge (\exists k)(0 <_{\mathbb{Q}} k)(|a_n| \leq_{\mathbb{Q}} k) \right) \wedge (e_2 \Leftrightarrow \overline{(e_n^2)}) \right) \\
\downarrow \\
\left(\overline{(e_n^2)} \cdot \overline{(a_n)} =_{\mathbb{R}} \overline{(a_n)} \right) \\
\Downarrow \mathbb{F}_{16} \\
\left(\overline{(e_n^2 \cdot a_n)} =_{\mathbb{R}} \overline{(a_n)} \right) \\
\Downarrow P_{34} \\
\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} (e_n^2 \cdot a_n) - a_n =_{\mathbb{Q}} 0 \right) \\
\Downarrow P_8 \\
\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} (e_n^2 \cdot a_n) - 1_n \cdot a_n =_{\mathbb{Q}} 0 \right) \\
\Downarrow P_{12.5} \\
\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} (1_n - e_n^2) \cdot a_n =_{\mathbb{Q}} 0 \right) \\
\Downarrow \\
(\exists 0)(\forall \varepsilon)(\exists n_0)(0 <_{\mathbb{Q}} \varepsilon) \left((\forall n)(n_0 <_{\mathbb{N}} n) \rightarrow |((1_n - e_n^2) \cdot a_n) - 0| <_{\mathbb{Q}} \varepsilon \right) \\
\Downarrow \\
\left(\left(|1_n - e_n^2| \cdot |a_n| =_{\mathbb{Q}} |1_n - e_n^2| \cdot |a_n| =_{\mathbb{Q}} |((1_n - e_n^2) \cdot a_n) - 0| <_{\mathbb{Q}} \varepsilon \right) \right. \\
\quad \wedge \\
\left. \left(|1_n - e_n^2| - 0| =_{\mathbb{Q}} (|1_n - e_n^2| \cdot |a_n|) \cdot \frac{1}{|a_n|} <_{\mathbb{Q}} \varepsilon \cdot \frac{1}{|a_n|} < \varepsilon \cdot \frac{1}{k} =_{\mathbb{Q}} \frac{\varepsilon}{k} \right) \right) \\
\quad \quad \quad \downarrow P_{27} \quad \downarrow P_{3.4} \\
\left(|(e_n^2 - 1_n) - 0| <_{\mathbb{Q}} \frac{\varepsilon}{k} \right) \\
\downarrow \\
(\exists 0)(\forall \varepsilon)(\exists n_0)(0 <_{\mathbb{Q}} \varepsilon) \left((\forall n)(n_0 <_{\mathbb{N}} n) \rightarrow |(e_n^2 - 1_n) - 0| <_{\mathbb{Q}} \frac{\varepsilon}{k} \right) \\
\Downarrow \\
\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} e_n^2 - 1_n =_{\mathbb{Q}} 0 \right) \\
\Downarrow P_{34} \\
\left(\overline{(e_n^2)} =_{\mathbb{R}} \overline{(1_n)} \right)
\end{array}$$

$\vdash_3$

$$\begin{aligned}
& (\forall x)(\exists e'_2)(e_2 \neq_{\mathbb{R}} e'_2)(x \cdot e'_2 =_{\mathbb{R}} e'_2 \cdot x =_{\mathbb{R}} x) \\
& \quad \downarrow \\
& \left((x =_{\mathbb{R}} e_2) \left((e_2 \cdot e'_2 =_{\mathbb{R}} e_2) \wedge (e_2 \cdot e'_2 =_{\mathbb{R}} e_2) \right) \right) \\
& \quad \updownarrow P_{34.2} \\
& \left((e_2 =_{\mathbb{R}} e_2 \cdot e'_2) \wedge (e_2 \cdot e'_2 =_{\mathbb{R}} e'_2) \right) \\
& \quad \updownarrow P_{34.3} \\
& (e_2 =_{\mathbb{R}} e'_2) \\
& \quad \downarrow \\
& \Lambda \\
& \quad \downarrow \\
& (\forall x)(\nexists e'_2)(e_2 \neq_{\mathbb{R}} e'_2)(x \cdot e'_2 =_{\mathbb{R}} e'_2 \cdot x =_{\mathbb{R}} x) \\
& \quad \downarrow \\
& (\forall x)(\exists! e_2) \left((x \cdot e_2 =_{\mathbb{R}} e_2 \cdot x =_{\mathbb{R}} x) \right)
\end{aligned}$$

■

Escólio. $e_2 = \{(a_n) : (a_n) =_{\mathbb{R}} (1_n)\} = \left\{ (a_n) : \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n - 1_n =_{\mathbb{Q}} 0 \right\}$

$$P_{42} \Leftrightarrow ((\forall x)(\exists! y')(x \neq_{\mathbb{R}} e_1)(x \cdot y' =_{\mathbb{R}} y' \cdot x =_{\mathbb{R}} e_2))$$

$\vdash$

$\vdash_1$

$$\begin{aligned}
& \left(\left((x \Leftrightarrow \overline{(a_n)}) \wedge (\exists k)(0 <_{\mathbb{Q}} k)(|a_n| \leq_{\mathbb{Q}} k) \right) \wedge (y' \Leftrightarrow \overline{(b_n)}) \wedge (e_2 \Leftrightarrow \overline{(1_n)}) \right) \\
& \quad \downarrow \\
& \left(\overline{(a_n)} \cdot \overline{(b_n)} =_{\mathbb{R}} \overline{(1_n)} \right) \\
& \quad \updownarrow \models_{16} \\
& \left(\overline{(a_n \cdot b_n)} =_{\mathbb{R}} \overline{(1_n)} \right) \\
& \quad \updownarrow P_{34} \\
& \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \cdot b_n - 1_n =_{\mathbb{Q}} 0 \right) \\
& \quad \updownarrow \\
& (\exists 0)(\forall \varepsilon)(\exists n_0)(0 <_{\mathbb{Q}} \varepsilon) \left((\forall n)(n_0 <_{\mathbb{N}} n) \rightarrow |(a_n \cdot b_n - 1_n) - 0| <_{\mathbb{Q}} \varepsilon \right) \\
& \quad \updownarrow \\
& \left(|a_n| \cdot |b_n - a_n^{-1}| \stackrel{P_{24}}{=}_{\mathbb{Q}} |a_n \cdot (b_n - a_n^{-1})| \stackrel{P_{12.5}}{=}_{\mathbb{Q}} |a_n \cdot b_n - a_n \cdot a_n^{-1}| \stackrel{P_9}{=}_{\mathbb{Q}} |(a_n \cdot b_n - 1_n) - 0| <_{\mathbb{Q}} \varepsilon \right) \\
& \quad \downarrow P_{3.4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \downarrow P_{3.4} \\
& (|a_n| \cdot |b_n - a_n^{-1}| <_{\mathbb{Q}} \varepsilon) \\
& \updownarrow \\
& \left(|(b_n - a_n^{-1}) - 0| \stackrel{P_5}{=}_{\mathbb{Q}} |b_n - a_n^{-1}| \stackrel{P_8}{=}_{\mathbb{Q}} \frac{1}{|a_n|} \cdot |a_n| \cdot |b_n - a_n^{-1}| \stackrel{P_{18}}{<}_{\mathbb{Q}} \frac{1}{|a_n|} \cdot \varepsilon <_{\mathbb{Q}} \frac{1}{k} \cdot \varepsilon \stackrel{P_9}{=}_{\mathbb{Q}} \frac{\varepsilon}{k} \right) \\
& \downarrow P_{3.4} \\
& \left(|(b_n - a_n^{-1}) - 0| <_{\mathbb{Q}} \frac{\varepsilon}{k} \right) \\
& \updownarrow \\
& (\exists 0)(\forall \varepsilon)(\exists n_0)(0 <_{\mathbb{Q}} \varepsilon) \left((\forall n)(n_0 <_{\mathbb{N}} n) \rightarrow |(b_n - a_n^{-1}) - 0| <_{\mathbb{Q}} \frac{\varepsilon}{k} \right) \\
& \updownarrow \\
& \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n - a_n^{-1} =_{\mathbb{Q}} 0 \right) \\
& \updownarrow P_{34} \\
& \left(\overline{(b_n)} =_{\mathbb{R}} \overline{(a_n^{-1})} \right)
\end{aligned}$$

$\vdash_2$

$$\begin{aligned}
& \left(\left((x \Leftrightarrow \overline{(a_n)}) \wedge (\exists k)(0 <_{\mathbb{Q}} k)(|a_n| \leq_{\mathbb{Q}} k) \right) \wedge (y' \Leftrightarrow \overline{(b_n)}) \wedge (e_2 \Leftrightarrow \overline{(1_n)}) \right) \\
& \downarrow \\
& \left(\overline{(b_n)} \cdot \overline{(a_n)} =_{\mathbb{R}} \overline{(1_n)} \right) \\
& \updownarrow \models_{16} \\
& \left(\overline{(b_n \cdot a_n)} =_{\mathbb{R}} \overline{(1_n)} \right) \\
& \updownarrow P_{34} \\
& \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n \cdot a_n - 1_n =_{\mathbb{Q}} 0 \right) \\
& \updownarrow \\
& (\exists 0)(\forall \varepsilon)(\exists n_0)(0 <_{\mathbb{Q}} \varepsilon) \left((\forall n)(n_0 <_{\mathbb{N}} n) \rightarrow |(b_n \cdot a_n - 1_n) - 0| <_{\mathbb{Q}} \varepsilon \right) \\
& \updownarrow \\
& \left(|b_n - a_n^{-1}| \cdot |a_n| \stackrel{P_{24}}{=}_{\mathbb{Q}} |(b_n - a_n^{-1}) \cdot a_n| \stackrel{P_{12.5}}{=}_{\mathbb{Q}} |b_n \cdot a_n - a_n^{-1} \cdot a_n| \stackrel{P_9}{=}_{\mathbb{Q}} |b_n \cdot a_n - 1_n| - 0| <_{\mathbb{Q}} \varepsilon \right) \\
& \downarrow P_{3.4} \\
& (|b_n - a_n^{-1}| \cdot |a_n| <_{\mathbb{Q}} \varepsilon) \\
& \updownarrow \\
& \left(|(b_n - a_n^{-1}) - 0| \stackrel{P_5}{=}_{\mathbb{Q}} |b_n - a_n^{-1}| \stackrel{P_8}{=}_{\mathbb{Q}} |b_n - a_n^{-1}| \cdot |a_n| \cdot \frac{1}{|a_n|} \stackrel{P_{18}}{<}_{\mathbb{Q}} \varepsilon \cdot \frac{1}{|a_n|} <_{\mathbb{Q}} \varepsilon \cdot \frac{1}{k} =_{\mathbb{Q}} \frac{\varepsilon}{k} \right) \\
& \downarrow P_{3.4} \\
& \left(|(b_n - a_n^{-1}) - 0| <_{\mathbb{Q}} \frac{\varepsilon}{k} \right) \\
& \updownarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \Downarrow \\
& (\exists 0)(\forall \varepsilon)(\exists n_0)(0 <_{\mathbb{Q}} \varepsilon) \left((\forall n)(n_0 <_{\mathbb{N}} n) \rightarrow |(b_n - a_n^{-1}) - 0| <_{\mathbb{Q}} \frac{\varepsilon}{k} \right) \\
& \Downarrow \\
& \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n - a_n^{-1} =_{\mathbb{Q}} 0 \right) \\
& \Downarrow P_{34} \\
& \left(\overline{(b_n)} =_{\mathbb{R}} \overline{(a_n^{-1})} \right)
\end{aligned}$$

$\vdash_3$

$$\begin{aligned}
& (\forall x)(\exists y)(x \neq_{\mathbb{R}} e_1)(y \neq_{\mathbb{R}} y')(x \cdot y =_{\mathbb{R}} y \cdot x =_{\mathbb{R}} e_2) \\
& \downarrow \\
& \left((x \Leftrightarrow \overline{(a_n)}) \wedge (y \Leftrightarrow \overline{(c_n)}) \wedge (e_2 \Leftrightarrow \overline{(1_n)}) \right) \\
& \downarrow \\
& \left(\overline{(a_n)} \cdot \overline{(c_n)} =_{\mathbb{R}} \overline{(1_n)} \right) \\
& \Downarrow \models_{16} \\
& \left(\overline{(a_n \cdot c_n)} =_{\mathbb{R}} \overline{(1_n)} \right) \\
& \Downarrow P_{34} \\
& \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n \cdot c_n) - 1_n =_{\mathbb{Q}} 0 \right) \\
& \Downarrow P_9 \\
& \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \cdot c_n - a_n \cdot a_n^{-1} =_{\mathbb{Q}} 0 \right) \\
& \Downarrow P_{12.5} \\
& \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \cdot (c_n - a_n^{-1}) =_{\mathbb{Q}} 0 \right) \\
& \Downarrow \models_9 \\
& (\exists 0)(\forall \varepsilon)(\exists n_0)(0 <_{\mathbb{Q}} \varepsilon) \left((\forall n)(n_0 < n) \rightarrow |(a_n \cdot (c_n - a_n^{-1})) - 0| <_{\mathbb{Q}} \varepsilon \right) \\
& \Downarrow \\
& (|a_n| \cdot |c_n - a_n^{-1}| =_{\mathbb{Q}} |a_n \cdot (c_n - a_n^{-1})| =_{\mathbb{Q}} |(a_n \cdot (c_n - a_n^{-1})) - 0| <_{\mathbb{Q}} \varepsilon) \\
& \downarrow P_{3.4} \\
& (|a_n| \cdot |c_n - a_n^{-1}| <_{\mathbb{Q}} \varepsilon) \\
& \Downarrow \\
& \left(|(c_n - a_n^{-1}) - 0| \stackrel{P_8}{=}_{\mathbb{Q}} \frac{1}{|a_n|} \cdot |a_n| \cdot |c_n - a_n^{-1}| \stackrel{P_{18}}{<}_{\mathbb{Q}} \frac{1}{|a_n|} \cdot \varepsilon <_{\mathbb{Q}} \frac{1}{k} \cdot \varepsilon =_{\mathbb{Q}} \frac{\varepsilon}{k} \right) \\
& \downarrow P_{3.4} \\
& \left(|(c_n - a_n^{-1}) - 0| <_{\mathbb{Q}} \frac{\varepsilon}{k} \right) \\
& \Downarrow \\
& (\exists 0)(\forall \varepsilon)(\exists n_0)(0 <_{\mathbb{Q}} \varepsilon) \left((\forall n)(n_0 <_{\mathbb{N}} n) \rightarrow |(c_n - a_n^{-1}) - 0| <_{\mathbb{Q}} \frac{\varepsilon}{k} \right) \\
& \Downarrow \models_9
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \Downarrow \models_9 \\
& \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n - a_n^{-1} =_{\mathbb{Q}} 0 \right) \\
& \Downarrow P_{34} \\
& \left(\overline{(c_n)} =_{\mathbb{R}} \overline{(a_n^{-1})} \right) \\
& \Downarrow \\
& (y =_{\mathbb{R}} y') \\
& \downarrow \\
& \Lambda \\
& \downarrow \\
& (\forall x)(\exists y)(y \neq_{\mathbb{Q}} y')(x \cdot y =_{\mathbb{R}} y \cdot x =_{\mathbb{R}} e_2) \\
& \downarrow \\
& (\forall x)(\exists! y)(x \cdot y =_{\mathbb{R}} y \cdot x =_{\mathbb{R}} e_2)
\end{aligned}$$

■

4.5 Operações de subtração e divisão para os números reais

$$\begin{aligned}
\models_{17} \Leftrightarrow & \left(- \Leftrightarrow \left((\forall x)(\forall y) \left(\begin{array}{c} - : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto -(x, y) \Leftrightarrow x - y \end{array} \right) \right. \right. \\
& \left. \left. \wedge \left(x - y =_{\mathbb{R}} x + (-y) =_{\mathbb{R}} \overline{(a_n)} + \overline{(-b_n)} =_{\mathbb{R}} \overline{(a_n + (-b_n))} \right) \right) \right)
\end{aligned}$$

$$P_{43} \Leftrightarrow \left((\forall x)(\forall y)(\forall z)(\forall w) \left(((x =_{\mathbb{R}} w) \wedge (-y =_{\mathbb{R}} -z)) \rightarrow (x - y =_{\mathbb{R}} w - z) \right) \right)$$

⊢

$$\begin{aligned}
& \left((x \Leftrightarrow \overline{(a_n)}) \wedge (-y \Leftrightarrow \overline{(b_n)}) \wedge (-z \Leftrightarrow \overline{(-c_n)}) \wedge (w \Leftrightarrow \overline{(d_n)}) \right) \\
& \downarrow \\
& ((x =_{\mathbb{R}} w) \wedge (-y =_{\mathbb{R}} -z)) \\
& \Downarrow \\
& \left((\overline{(a_n)} =_{\mathbb{R}} \overline{(d_n)}) \wedge (\overline{(-b_n)} =_{\mathbb{R}} \overline{(-c_n)}) \right) \\
& \downarrow \\
& \left(\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n - d_n =_{\mathbb{Q}} 0 \right) \wedge \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} (-b_n) - c_n =_{\mathbb{Q}} 0 \right) \right) \\
& \Downarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \Downarrow \\
& \left((\exists 0)(\forall \varepsilon)(\exists n_1)(0 <_{\mathbb{Q}} \varepsilon) \left((\forall n)(n_1 <_{\mathbb{N}} n) \rightarrow |(a_n - d_n) - 0| <_{\mathbb{Q}} \frac{\varepsilon}{2} \right) \right) \\
& \quad \wedge \\
& \left((\exists 0)(\forall \varepsilon)(\exists n_2)(0 <_{\mathbb{Q}} \varepsilon) \left((\forall n)(n_2 <_{\mathbb{N}} n) \rightarrow |((-b_n) - c_n) - 0| <_{\mathbb{Q}} \frac{\varepsilon}{2} \right) \right) \\
& \quad \downarrow \\
& (\exists 0)(\forall \varepsilon)(\exists n_0)(n_0 =_{\mathbb{N}} \max\{n_1, n_2\})(0 <_{\mathbb{Q}} \varepsilon) \left(\begin{array}{c} (\forall n)(n_0 <_{\mathbb{N}} n) \\ \downarrow \\ (|(a_n - b_n) - (c_n - d_n) - 0| <_{\mathbb{Q}} \varepsilon) \end{array} \right) \\
& \quad \Downarrow \\
& \left(\begin{array}{c} \left(|(a_n - b_n) - (c_n - d_n) - 0| \stackrel{P_5}{=}_{\mathbb{Q}} |(a_n + (-b_n)) - (c_n + (-d_n))| \right) \\ \stackrel{\mathbb{F}_{17}}{\wedge} \\ \left(|(a_n + (-b_n)) - (c_n + (-d_n))| \stackrel{\mathbb{F}_{17}}{=}_{\mathbb{Q}} |(a_n + (-b_n)) + (-c_n + d_n)| \right) \\ \stackrel{P_{20}}{\wedge} \\ \left(|(a_n + (-b_n)) + (-c_n + d_n)| \stackrel{P_{12.1}}{=}_{\mathbb{Q}} |(a_n + d_n) + ((-b_n) - c_n)| \right) \\ \stackrel{P_{12.2}}{\wedge} \\ \left(|(a_n + d_n) + ((-b_n) - c_n)| \stackrel{P_{20}}{=}_{\mathbb{Q}} |(a_n - (-d_n)) + ((-b_n) - c_n)| \right) \\ \wedge \\ \left(|(a_n - (-d_n)) + ((-b_n) - c_n)| \stackrel{P_{26}}{\leq}_{\mathbb{Q}} |a_n - (-d_n)| + |(-b_n) - c_n| <_{\mathbb{Q}} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} =_{\mathbb{Q}} \varepsilon \right) \end{array} \right) \\
& \quad \downarrow \\
& (|(a_n - b_n) - (c_n - d_n) - 0| <_{\mathbb{Q}} \varepsilon) \\
& \quad \downarrow \\
& \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n - b_n) - (c_n - d_n) =_{\mathbb{Q}} 0 \right) \\
& \quad \downarrow \\
& \left(\overline{(a_n - b_n)} =_{\mathbb{R}} \overline{(c_n - d_n)} \right) \\
& \quad \Downarrow \\
& (x - y =_{\mathbb{R}} w - z)
\end{aligned}$$

■

$$\begin{aligned}
\mathbb{F}_{18} & \Leftrightarrow \left(\div \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c} (\forall x)(\forall y) \left(\begin{array}{c} \div : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \div (x, y) \Leftrightarrow x \div y \end{array} \right) \\ \wedge \\ (x \div y =_{\mathbb{R}} x \cdot (y^{-1}) =_{\mathbb{R}} \overline{(a_n)} \cdot \overline{(b_n^{-1})} =_{\mathbb{R}} \overline{(a_n \cdot b_n^{-1})}) \end{array} \right) \right) \\
P_{44} & \Leftrightarrow \left((\forall x)(\forall y)(\forall z)(\forall w) \left(((x =_{\mathbb{R}} w) \wedge (y^{-1} =_{\mathbb{R}} z^{-1})) \rightarrow (x \div y =_{\mathbb{R}} w \div z) \right) \right)
\end{aligned}$$

⊢

$$\begin{aligned}
& \left((x \Leftrightarrow \overline{(a_n)}) \wedge (y^{-1} \Leftrightarrow \overline{(b_n^{-1})}) \wedge (z^{-1} \Leftrightarrow \overline{(d_n^{-1})}) \wedge (w \Leftrightarrow \overline{(d_n)}) \right) \\
& \quad \downarrow \\
& \quad ((x =_{\mathbb{R}} w) \wedge (y^{-1} =_{\mathbb{R}} z^{-1})) \\
& \quad \Downarrow \\
& \quad \left((\overline{(a_n)} =_{\mathbb{R}} \overline{(d_n^{-1})}) \wedge (\overline{(b_n^{-1})} =_{\mathbb{R}} \overline{(c_n)}) \right) \\
& \quad \downarrow \\
& \quad \left(\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n - d_n^{-1} =_{\mathbb{Q}} 0 \right) \wedge \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n^{-1} - c_n =_{\mathbb{Q}} 0 \right) \right) \\
& \quad \Downarrow \\
& \quad \left((\exists 0)(\forall \varepsilon)(\exists n_1)(0 <_{\mathbb{Q}} \varepsilon) \left(\begin{array}{c} (\forall n)(n_1 <_{\mathbb{N}} n) \\ \downarrow \\ |(a_n - d_n^{-1}) - 0| <_{\mathbb{Q}} \frac{\varepsilon}{2 \cdot k_2} \end{array} \right) \wedge (\exists k_2)(0 <_{\mathbb{Q}} k_2)(|a_n| \leq_{\mathbb{Q}} k_2) \right) \right. \\
& \quad \quad \wedge \\
& \quad \quad \left. (\exists 0)(\forall \varepsilon)(\exists n_2)(0 <_{\mathbb{Q}} \varepsilon) \left(\begin{array}{c} (\forall n)(n_2 <_{\mathbb{N}} n) \\ \downarrow \\ |(b_n^{-1} - c_n) - 0| <_{\mathbb{Q}} \frac{\varepsilon}{2 \cdot k_1} \end{array} \right) \wedge (\exists k_1)(0 <_{\mathbb{Q}} k_1)(|c_n| \leq_{\mathbb{Q}} k_1) \right) \right) \\
& \quad \downarrow \\
& \quad (\exists 0)(\forall \varepsilon)(\exists n_0)(n_0 =_{\mathbb{N}} \max\{n_1, n_2\})(0 <_{\mathbb{Q}} \varepsilon) \left(\begin{array}{c} (\forall n)(n_0 <_{\mathbb{N}} n) \\ \downarrow \\ (|(a_n \cdot b_n^{-1} - c_n \cdot d_n^{-1}) - 0| <_{\mathbb{Q}} \varepsilon) \end{array} \right) \\
& \quad \Downarrow \\
& \quad \left(\begin{array}{c} \left(|(a_n \cdot b_n^{-1} - c_n \cdot d_n^{-1}) - 0| =_{\mathbb{Q}} |a_n \cdot b_n^{-1} - c_n \cdot a_n + c_n \cdot a_n - c_n \cdot d_n^{-1}| \right) \\ \wedge \\ \left(|a_n \cdot b_n^{-1} - c_n \cdot a_n + c_n \cdot a_n - c_n \cdot d_n^{-1}| =_{\mathbb{Q}} |a_n \cdot (b_n^{-1} - c_n) + c_n \cdot (a_n - d_n^{-1})| \right) \\ \wedge \\ \left(|a_n \cdot (b_n^{-1} - c_n) + c_n \cdot (a_n - d_n^{-1})| \leq_{\mathbb{Q}} |a_n| \cdot |b_n^{-1} - c_n| + |c_n| \cdot |a_n - d_n^{-1}| \right) \\ \wedge \\ \left(|a_n| \cdot |b_n^{-1} - c_n| + |c_n| \cdot |a_n - d_n^{-1}| <_{\mathbb{Q}} k_1 \cdot \frac{\varepsilon}{2 \cdot k_1} + k_2 \cdot \frac{\varepsilon}{2 \cdot k_2} =_{\mathbb{Q}} \varepsilon \right) \end{array} \right) \\
& \quad \downarrow P_7 \\
& \quad (|(a_n \cdot b_n^{-1} - c_n \cdot d_n^{-1}) - 0| <_{\mathbb{Q}} \varepsilon) \\
& \quad \downarrow \\
& \quad \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n \cdot b_n^{-1}) - (c_n \cdot d_n^{-1}) =_{\mathbb{Q}} 0 \right) \\
& \quad \downarrow \\
& \quad \left(\overline{(a_n \cdot b_n^{-1})} =_{\mathbb{R}} \overline{(c_n \cdot d_n^{-1})} \right) \\
& \quad \Downarrow \\
& \quad (x \div y =_{\mathbb{R}} w \div z)
\end{aligned}$$

■

4.6 Sistema numérico dos números reais

$$P_{45} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c} (S_6 = (\mathbb{R}, \{+, \cdot\}, \{=_{\mathbb{R}}, \leq_{\mathbb{R}}\}, \{A_1, \dots, A_{23}, P_1, \dots, P_{52}\})) \\ \downarrow \\ \left(\begin{array}{c} (\forall x)(\forall y)(\forall z)(x + (y + z) = (x + y) + z) \\ \wedge \\ (\forall x)(\forall y)(\forall z)(x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z) \\ \wedge \\ (\forall x)(\forall y)(x + y = y + x) \\ \wedge \\ (\forall x)(\forall y)(x \cdot y = y \cdot x) \\ \wedge \\ (\forall x)(\forall y)(\forall z)(x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)) \end{array} \right) \end{array} \right)$$

$$P_{45.1} \Leftrightarrow ((\forall x)(\forall y)(\forall z)(x + (y + z) =_{\mathbb{R}} (x + y) + z))$$

⊢

$$\begin{aligned} & \left((x = \overline{(a_n)}) \wedge (y = \overline{(b_n)}) \wedge (z = \overline{(c_n)}) \right) \\ & \quad \downarrow \\ & \quad x + (y + z) \\ & \quad \updownarrow \\ & \quad \overline{(a_n)} + (\overline{(b_n)} + \overline{(c_n)}) \\ & \quad \quad \parallel_{\mathbb{R}} \models_{15} \\ & \quad \quad \overline{(a_n)} + \overline{(b_n + c_n)} \\ & \quad \quad \parallel_{\mathbb{R}} \models_{15} \\ & \quad \quad \overline{(a_n + (b_n + c_n))} \\ & \quad \quad \parallel_{\mathbb{R}} P_{12.1} \\ & \quad \quad \overline{((a_n + b_n) + c_n)} \\ & \quad \quad \parallel_{\mathbb{R}} \models_{15} \\ & \quad \quad \overline{(a_n + b_n)} + \overline{(c_n)} \\ & \quad \quad \parallel_{\mathbb{R}} \models_{15} \\ & \quad \quad (\overline{(a_n)} + \overline{(b_n)}) + \overline{(c_n)} \\ & \quad \quad \updownarrow \\ & \quad \quad (x + y) + z \end{aligned}$$

■

$$P_{45.2} \Leftrightarrow ((\forall x)(\forall y)(\forall z)(x \cdot (y \cdot z) =_{\mathbb{R}} (x \cdot y) \cdot z))$$

⊢

$$\begin{aligned}
 & \left((x = \overline{(a_n)}) \wedge (y = \overline{(b_n)}) \wedge (z = \overline{(c_n)}) \right) \\
 & \quad \downarrow \\
 & \quad x \cdot (y \cdot z) \\
 & \quad \Updownarrow \\
 & \quad \overline{(a_n)} \cdot \overline{(b_n \cdot c_n)} \\
 & \quad \quad \quad \parallel_{\mathbb{R}} \models_{16} \\
 & \quad \quad \overline{(a_n)} \cdot \overline{(b_n \cdot c_n)} \\
 & \quad \quad \quad \parallel_{\mathbb{R}} \models_{16} \\
 & \quad \quad \overline{(a_n \cdot (b_n \cdot c_n))} \\
 & \quad \quad \quad \parallel_{\mathbb{R}} P_{12.4} \\
 & \quad \quad \overline{((a_n \cdot b_n) \cdot c_n)} \\
 & \quad \quad \quad \parallel_{\mathbb{R}} \models_{16} \\
 & \quad \quad \overline{(a_n \cdot b_n)} \cdot \overline{(c_n)} \\
 & \quad \quad \quad \parallel_{\mathbb{R}} \models_{16} \\
 & \quad \quad \overline{((a_n \cdot b_n) \cdot c_n)} \\
 & \quad \quad \quad \Updownarrow \\
 & \quad \quad (x \cdot y) \cdot z
 \end{aligned}$$

■

$$P_{45.3} \Leftrightarrow ((\forall x)(\forall y)(\forall z)(x + y =_{\mathbb{R}} y + x))$$

⊢

$$\begin{aligned}
 & \left((x = \overline{(a_n)}) \wedge (y = \overline{(b_n)}) \wedge (z = \overline{(c_n)}) \right) \\
 & \quad \downarrow \\
 & \quad x + y \\
 & \quad \quad \quad \Updownarrow \\
 & \quad \quad \overline{(a_n)} + \overline{(b_n)} \\
 & \quad \quad \quad \parallel_{\mathbb{R}} \models_{15} \\
 & \quad \quad \overline{(a_n + b_n)} \\
 & \quad \quad \quad \parallel_{\mathbb{R}} P_{12.2} \\
 & \quad \quad \overline{(b_n + a_n)} \\
 & \quad \quad \quad \parallel_{\mathbb{R}} \models_{15} \\
 & \quad \quad \overline{(b_n)} + \overline{(a_n)} \\
 & \quad \quad \quad \Updownarrow \\
 & \quad \quad y + x
 \end{aligned}$$

■

$$P_{45.4} \Leftrightarrow ((\forall x)(\forall y)(\forall z)(x \cdot y =_{\mathbb{R}} y \cdot x))$$

⊢

$$\begin{array}{c}
 \left((x = \overline{(a_n)}) \wedge (y = \overline{(b_n)}) \wedge (z = \overline{(c_n)}) \right) \\
 \downarrow \\
 x \cdot y \\
 \Downarrow \\
 \overline{(a_n) \cdot (b_n)} \\
 \parallel_{\mathbb{R} \models_{16}} \\
 \overline{(a_n \cdot b_n)} \\
 \parallel_{\mathbb{R} \models_{12.3}} \\
 \overline{(b_n \cdot a_n)} \\
 \parallel_{\mathbb{R} \models_{16}} \\
 \overline{(b_n) \cdot (a_n)} \\
 \Downarrow \\
 y \cdot x
 \end{array}$$

■

$$P_{45.5} \Leftrightarrow ((\forall x)(\forall y)(\forall z)(x \cdot (y + z) =_{\mathbb{R}} (x \cdot y) + (x \cdot z)))$$

⊢

$$\begin{array}{c}
 \left((x = \overline{(a_n)}) \wedge (y = \overline{(b_n)}) \wedge (z = \overline{(c_n)}) \right) \\
 \downarrow \\
 x \cdot (y + z) \\
 \Downarrow \\
 \overline{(a_n) \cdot ((b_n) + (c_n))} \\
 \parallel_{\mathbb{R} \models_{15}} \\
 \overline{(a_n) \cdot (b_n + c_n)} \\
 \parallel_{\mathbb{R} \models_{16}} \\
 \overline{(a_n \cdot (b_n + c_n))} \\
 \parallel_{\mathbb{R} \models_{12.5}} \\
 \overline{(a_n \cdot b_n + a_n \cdot c_n)} \\
 \parallel_{\mathbb{R} \models_{15}}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\Downarrow_{\mathbb{R} \models_{15}} \\
\overline{(a_n \cdot b_n)} + \overline{(a_n \cdot c_n)} \\
\Downarrow_{\mathbb{R} \models_{16}} \\
\overline{(a_n)} \cdot \overline{(b_n)} + \overline{(a_n)} \cdot \overline{(c_n)} \\
\Downarrow \\
x \cdot y + x \cdot z
\end{array}$$

■

4.7 Propriedade importantes

$$P_{46} \Leftrightarrow \left((\forall x)(\forall y) \left((x \cdot y =_{\mathbb{R}} e_1) \rightarrow (x =_{\mathbb{R}} e_1) \vee (y =_{\mathbb{R}} e_1) \right) \right)$$

 $\vdash$

$$\begin{array}{c}
\vdash_1 \\
\left(\left((x \Leftrightarrow \overline{(a_n)}) \wedge (x \neq_{\mathbb{R}} \overline{(0_n)}) \right) \wedge \left((y \Leftrightarrow \overline{(b_n)}) \wedge (\exists k)(0 <_{\mathbb{N}} k)(|b_n| \leq_{\mathbb{Q}} k) \right) \right) \\
\downarrow \\
(x \cdot y =_{\mathbb{R}} e_1) \\
\Downarrow \\
\left(\overline{(a_n)} \cdot \overline{(b_n)} =_{\mathbb{R}} \overline{(0_n)} \right) \\
\downarrow \models_{16} \\
\left(\overline{(a_n \cdot b_n)} =_{\mathbb{R}} \overline{(0_n)} \right) \\
\downarrow P_{34} \\
\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \cdot b_n - 0_n =_{\mathbb{Q}} 0 \right) \\
\downarrow P_5 \\
\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \cdot b_n =_{\mathbb{Q}} 0 \right) \\
\downarrow \\
(\exists 0)(\forall \varepsilon)(\exists n_0)(0 <_{\mathbb{Q}} \varepsilon) \left((\forall n)(n_0 <_{\mathbb{N}} n) \rightarrow (|a_n \cdot b_n - 0| <_{\mathbb{Q}} \varepsilon \cdot k) \right) \\
\downarrow \\
\left(\begin{array}{c} P_5 \\ |a_n| \cdot |b_n| =_{\mathbb{Q}} |a_n \cdot b_n - 0| <_{\mathbb{Q}} \varepsilon \\ P_{24} \end{array} \right) \\
\downarrow \\
\left(|b_n - 0| \stackrel{P_5}{=}_{\mathbb{Q}} \frac{1}{|a_n|} \cdot |a_n| \cdot |b_n| \stackrel{P_{18}}{<}_{\mathbb{Q}} \frac{1}{|a_n|} \cdot \varepsilon \cdot k <_{\mathbb{Q}} \frac{1}{k} \cdot \varepsilon \cdot k \stackrel{P_8}{=}_{\mathbb{Q}} \varepsilon \right) \\
\downarrow P_{12.3} \\
(\exists 0)(\forall \varepsilon)(\exists n_0)(0 <_{\mathbb{Q}} \varepsilon) \left((\forall n)(n_0 <_{\mathbb{N}} n) \rightarrow |b_n - 0| <_{\mathbb{Q}} \varepsilon \right) \\
\downarrow
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\downarrow \\
\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n =_{\mathbb{Q}} 0 \right) \\
\downarrow P_5 \\
\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n - 0_n =_{\mathbb{Q}} 0 \right) \\
\downarrow P_{34} \\
\left(\overline{(b_n)} =_{\mathbb{R}} \overline{(0_n)} \right) \\
\Downarrow \\
(y =_{\mathbb{R}} e_1)
\end{array}$$

$\vdash_2$

$$\begin{array}{c}
\left(\left((x \Leftrightarrow \overline{(a_n)}) \wedge (\exists k)(0 <_{\mathbb{N}} k)(|a_n| \leq_{\mathbb{Q}} k) \right) \wedge \left((y \Leftrightarrow \overline{(b_n)}) \wedge (y \neq_{\mathbb{R}} \overline{(0_n)}) \right) \right) \\
\downarrow \\
(x \cdot y = e_1) \\
\Downarrow \\
\left(\overline{(a_n)} \cdot \overline{(b_n)} = \overline{(0_n)} \right) \\
\downarrow \mathbb{F}_{16} \\
\left(\overline{(a_n \cdot b_n)} = \overline{(0_n)} \right) \\
\downarrow P_{34} \\
\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n \cdot b_n - 0_n) =_{\mathbb{Q}} 0 \right) \\
\downarrow P_5 \\
\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \cdot b_n =_{\mathbb{Q}} 0 \right) \\
\downarrow \\
(\exists 0)(\forall \varepsilon)(\exists n_0)(0 <_{\mathbb{Q}} \varepsilon) \left((\forall n)(n_0 <_{\mathbb{N}} n) \rightarrow |a_n \cdot b_n - 0| <_{\mathbb{Q}} \varepsilon \cdot k \right) \\
\downarrow \\
\left(|a_n| \cdot |b_n| \stackrel{P_5}{=}_{\mathbb{Q}} |a_n \cdot b_n - 0| <_{\mathbb{Q}} \varepsilon \right)_{P_{24}} \\
\downarrow \\
\left(|a_n - 0| \stackrel{P_5}{=}_{\mathbb{Q}} |a_n| \cdot |b_n| \cdot \frac{1}{|b_n|} <_{\mathbb{Q}} k \cdot \frac{1}{|b_n|} <_{\mathbb{Q}} \varepsilon \cdot k \cdot \frac{1}{k} \stackrel{P_8}{=}_{\mathbb{Q}} \varepsilon \right)_{P_9} \\
\downarrow \\
(\exists 0)(\forall \varepsilon)(\exists n_0)(0 <_{\mathbb{Q}} \varepsilon) \left((\forall n)(n_0 <_{\mathbb{N}} n) \rightarrow |a_n - 0| <_{\mathbb{Q}} \varepsilon \right) \\
\Downarrow \\
\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0 \right) \\
\downarrow P_5 \\
\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n - 0_n = 0 \right) \\
\downarrow P_{34}
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\downarrow P_{34} \\
\left(\overline{(a_n)} = \overline{(0_n)} \right) \\
\Updownarrow \\
(x = e_1)
\end{array}$$

■

$$P_{47} \Leftrightarrow ((\forall x)(\forall y)(\forall z)(x =_{\mathbb{R}} y \leftrightarrow x + z =_{\mathbb{R}} y + z))$$

⊢

$$\begin{array}{c}
\left((x \Leftrightarrow \overline{(a_n)}) \wedge (y \Leftrightarrow \overline{(b_n)}) \wedge (z \Leftrightarrow \overline{(c_n)}) \right) \\
\downarrow \\
(x =_{\mathbb{R}} y) \\
\Updownarrow \\
\left(\overline{(a_n)} =_{\mathbb{R}} \overline{(b_n)} \right) \\
\Updownarrow P_{34} \\
\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n - b_n =_{\mathbb{Q}} 0 \right) \\
\Updownarrow \\
\left((\exists 0)(\forall \varepsilon)(\exists n_0)(0 <_{\mathbb{Q}} \varepsilon) \left((\forall n)(n_0 <_{\mathbb{N}} n) \rightarrow |(a_n - b_n) - 0| <_{\mathbb{Q}} \varepsilon \right) \right) \\
\Updownarrow \\
(|(a_n - b_n) - 0| <_{\mathbb{Q}} \varepsilon) \\
P_{12.2} \Updownarrow P_5 \\
(|a_n + c_n + (-c_n) - b_n| <_{\mathbb{Q}} \varepsilon) \\
P_{12.2} \Updownarrow P_{12.5} \\
(|(a_n + c_n) - (b_n + c_n)| <_{\mathbb{Q}} \varepsilon) \\
\Updownarrow P_5 \\
(|((a_n + c_n) - (b_n + c_n)) - 0| <_{\mathbb{Q}} \varepsilon) \\
\Updownarrow \\
\left((\exists 0)(\forall \varepsilon)(\exists n_0)(0 <_{\mathbb{Q}} \varepsilon) \left((\forall n)(n_0 <_{\mathbb{N}} n) \rightarrow |((a_n + c_n) - (b_n + c_n)) - 0_n| <_{\mathbb{Q}} \varepsilon \right) \right) \\
\Updownarrow \\
\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n + c_n) - (b_n + c_n) =_{\mathbb{Q}} 0 \right) \\
\Updownarrow P_{34} \\
\left(\overline{(a_n + c_n)} =_{\mathbb{R}} \overline{(b_n + c_n)} \right) \\
\Updownarrow \models_{15} \\
\left(\overline{(a_n)} + \overline{(c_n)} =_{\mathbb{R}} \overline{(b_n)} + \overline{(c_n)} \right) \\
\Updownarrow \\
(x + z =_{\mathbb{R}} y + z)
\end{array}$$

■

$$P_{48} \Leftrightarrow ((\forall x)(\forall y)(\forall z)(z \in \mathbb{R}^*)(x =_{\mathbb{R}} y \leftrightarrow x \cdot z =_{\mathbb{R}} y \cdot z))$$

$\vdash$

$$\begin{aligned}
& \left((x \Leftrightarrow \overline{(a_n)}) \wedge (y \Leftrightarrow \overline{(b_n)}) \wedge \left((z \Leftrightarrow \overline{(c_n)}) \wedge (z \neq_{\mathbb{R}} (0_n)) \right) \right) \\
& \quad \downarrow \\
& (x =_{\mathbb{R}} y) \\
& \quad \Downarrow \\
& (\overline{(a_n)} =_{\mathbb{R}} \overline{(b_n)}) \\
& \quad \Downarrow P_{34} \\
& \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n - b_n =_{\mathbb{Q}} 0 \right) \\
& \quad \Downarrow \\
& \left((\exists 0)(\forall \varepsilon)(\exists n_0)(0 <_{\mathbb{Q}} \varepsilon) \left((\forall n)(n_0 <_{\mathbb{N}} n) \rightarrow |(a_n - b_n) - 0_n| <_{\mathbb{Q}} \frac{\varepsilon}{k} \right) \right) \\
& \quad \Downarrow \\
& \left(|a_n - b_n| \stackrel{P_5}{=}_{\mathbb{Q}} |(a_n - b_n) - 0_n| <_{\mathbb{Q}} \frac{\varepsilon}{k} \right) \\
& \quad \downarrow P_{3.4} \\
& \left(|a_n - b_n| <_{\mathbb{Q}} \frac{\varepsilon}{k} \right) \\
& \quad \Downarrow P_{19} \\
& \left(|a_n - b_n| \cdot |c_n| <_{\mathbb{Q}} \frac{\varepsilon}{k} \cdot |c_n| \right) \\
& \quad \Downarrow \\
& \left(|a_n - b_n| \cdot |c_n| <_{\mathbb{Q}} \frac{\varepsilon}{k} \cdot |c_n| \stackrel{P_5}{=}_{\mathbb{Q}} \frac{\varepsilon}{k} \cdot k =_{\mathbb{Q}} \varepsilon \right) \\
& \quad \downarrow P_{3.4} \\
& \left(|(a_n - b_n) \cdot c_n| \stackrel{P_{24}}{=}_{\mathbb{Q}} |a_n - b_n| \cdot |c_n| <_{\mathbb{Q}} \varepsilon \right) \\
& \quad \Downarrow P_{3.4} \\
& (|(a_n - b_n) \cdot c_n| <_{\mathbb{Q}} \varepsilon) \\
& \quad \Downarrow P_5 \\
& \left(|(a_n \cdot c_n - b_n \cdot c_n) - 0_n| \stackrel{P_{12.5}}{=}_{\mathbb{Q}} |(a_n - b_n) \cdot c_n| <_{\mathbb{Q}} \varepsilon \right) \\
& \quad \downarrow P_{3.4} \\
& (|(a_n \cdot c_n - b_n \cdot c_n) - 0_n| <_{\mathbb{Q}} \varepsilon) \\
& \quad \Downarrow \\
& \left((\exists 0)(\forall \varepsilon)(\exists n_0)(0 <_{\mathbb{Q}} \varepsilon) \left((\forall n)(n_0 <_{\mathbb{N}} n) \rightarrow |(a_n \cdot c_n - b_n \cdot c_n) - 0_n| <_{\mathbb{Q}} \varepsilon \right) \right) \\
& \quad \Downarrow \\
& \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \cdot c_n - b_n \cdot c_n =_{\mathbb{Q}} 0 \right) \\
& \quad \Downarrow P_{34}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \Downarrow P_{34} \\
& \left(\overline{(a_n \cdot c_n)} =_{\mathbb{R}} \overline{(b_n \cdot c_n)} \right) \\
& \Downarrow \models_{16} \\
& \left(\overline{(a_n)} \cdot \overline{(c_n)} =_{\mathbb{R}} \overline{(b_n)} \cdot \overline{(c_n)} \right) \\
& \Downarrow \\
& (x \cdot z =_{\mathbb{R}} y \cdot z)
\end{aligned}$$

■

$$P_{49} \Leftrightarrow ((\forall x)(\forall y)(\forall z)(x <_{\mathbb{R}} y \leftrightarrow x + z <_{\mathbb{R}} y + z))$$

⊢

$$\begin{aligned}
& \left((x \Leftrightarrow \overline{(a_n)}) \wedge (y \Leftrightarrow \overline{(b_n)}) \wedge (z \Leftrightarrow \overline{(c_n)}) \right) \\
& \downarrow \\
& (x <_{\mathbb{R}} y) \\
& \Downarrow \\
& \left(\overline{(a_n)} <_{\mathbb{R}} \overline{(b_n)} \right) \\
& \Downarrow P_{35} \\
& \left((\exists \varepsilon)(\exists n_0)(0 <_{\mathbb{Q}} \varepsilon) \left((\forall n)(n_0 <_{\mathbb{N}} n) \rightarrow (a_n + \varepsilon <_{\mathbb{Q}} b_n) \right) \right) \\
& \Downarrow \\
& (a_n + \varepsilon <_{\mathbb{Q}} b_n) \\
& \Downarrow P_{18} \\
& (a_n + \varepsilon + c_n <_{\mathbb{Q}} b_n + c_n) \\
& \Downarrow P_{12.2} \\
& (a_n + c_n + \varepsilon <_{\mathbb{Q}} b_n + c_n) \\
& \downarrow \\
& \left((\exists \varepsilon)(\exists n_0)(0 <_{\mathbb{Q}} \varepsilon) \left((\forall n)(n_0 <_{\mathbb{N}} n) \rightarrow ((a_n + c_n) + \varepsilon <_{\mathbb{Q}} b_n + c_n) \right) \right) \\
& \Downarrow P_{35} \\
& \left(\overline{(a_n + c_n)} <_{\mathbb{R}} \overline{(b_n + c_n)} \right) \\
& \Downarrow \models_{15} \\
& \left(\left(\overline{(a_n)} + \overline{(c_n)} \right) <_{\mathbb{R}} \left(\overline{(b_n)} + \overline{(c_n)} \right) \right) \\
& \Downarrow \\
& (x + z <_{\mathbb{R}} y + z)
\end{aligned}$$

■

$$P_{50} \Leftrightarrow ((\forall x)(\forall y)(\forall z)(z \in \mathbb{R}_+^*)(x <_{\mathbb{R}} y \leftrightarrow x \cdot z <_{\mathbb{R}} y \cdot z))$$

⊢

$$\begin{aligned}
& \left((x \Leftrightarrow \overline{(a_n)}) \wedge (y \Leftrightarrow \overline{(b_n)}) \wedge (z \Leftrightarrow \overline{(c_n)}) \right) \\
& \quad \downarrow \\
& (x <_{\mathbb{R}} y) \\
& \quad \Downarrow \\
& \left(\overline{(a_n)} <_{\mathbb{Q}} \overline{(b_n)} \right) \\
& \quad \Downarrow P_{35} \\
& \left((\exists \varepsilon)(\exists n_0)(0 <_{\mathbb{Q}} \varepsilon) \left((\forall n)(n_0 <_{\mathbb{N}} n) \rightarrow (a_n + \varepsilon <_{\mathbb{Q}} b_n) \right) \right) \\
& \quad \Downarrow \\
& (a_n + \varepsilon <_{\mathbb{Q}} b_n) \\
& \quad \Downarrow P_{19} \\
& \left((a_n + \varepsilon) \cdot c_n <_{\mathbb{Q}} b_n \cdot c_n \right) \\
& \quad \Downarrow P_{12.5} \\
& (a_n \cdot c_n + \varepsilon \cdot c_n <_{\mathbb{Q}} b_n \cdot c_n) \\
& \quad \downarrow \\
& \left((\exists \varepsilon)(\exists n_0)(0 <_{\mathbb{Q}} \varepsilon) \left((\forall n)(n_0 <_{\mathbb{N}} n) \rightarrow (a_n \cdot c_n + \varepsilon \cdot c_n <_{\mathbb{Q}} b_n \cdot c_n) \right) \right) \\
& \quad \Downarrow P_{35} \\
& \left(\overline{(a_n \cdot c_n)} <_{\mathbb{R}} \overline{(b_n \cdot c_n)} \right) \\
& \quad \Downarrow \models_{16} \\
& \left(\left(\overline{(a_n)} \cdot \overline{(c_n)} \right) <_{\mathbb{R}} \left(\overline{(b_n)} \cdot \overline{(c_n)} \right) \right) \\
& \quad \Downarrow \\
& (x \cdot z <_{\mathbb{R}} y \cdot z)
\end{aligned}$$

■

$$P_{51} \Leftrightarrow ((\forall x)(\forall y)(\forall z)(x \leq_{\mathbb{R}} y \leftrightarrow x + z \leq_{\mathbb{R}} y + z))$$

⊢

$$\begin{aligned}
& \left(\left(P_{47} \rightarrow (\forall x)(\forall y)(\forall z)(x = y \leftrightarrow x + z = y + z) \right) \right. \\
& \quad \wedge \\
& \quad \left. \left(P_{49} \rightarrow (\forall x)(\forall y)(\forall z)(x < y \leftrightarrow x + z < y + z) \right) \right) \\
& \quad \downarrow \\
& (\forall x)(\forall y)(\forall z)(x \leq_{\mathbb{R}} y \leftrightarrow x + z \leq_{\mathbb{R}} y + z)
\end{aligned}$$

■

$$P_{52} \Leftrightarrow ((\forall x)(\forall y)(\forall z)(z \in \mathbb{R}_+^*)(x \leq_{\mathbb{R}} y \leftrightarrow x \cdot z \leq_{\mathbb{R}} y \cdot z))$$

⊢

$$\begin{array}{c}
\left(\begin{array}{c} (P_{48} \rightarrow (\forall x)(\forall y)(\forall z)(z \in \mathbb{R}^*)(x =_{\mathbb{R}} y \leftrightarrow x \cdot z =_{\mathbb{R}} y \cdot z)) \\ \wedge \\ (P_{50} \rightarrow (\forall x)(\forall y)(\forall z)(z \in \mathbb{R}_+^*)(x <_{\mathbb{R}} y \leftrightarrow x \cdot z <_{\mathbb{R}} y \cdot z)) \end{array} \right) \\
\downarrow \\
(\forall x)(\forall y)(\forall z)(z \in \mathbb{R}_+^*)(x \leq_{\mathbb{R}} y \leftrightarrow x + z \leq_{\mathbb{R}} y + z)
\end{array}$$

■

CONSIDERAÇÕES

Com a formalização do sistema numérico dos números racionais e reais, via sistemas matemáticos, foi possível ter uma visão construtiva, sistemática e detalhada de tais conjuntos, o que propiciou aprofundar o tema e desconstruir a noção intuitiva que atribuímos aos mesmos.

O presente trabalho contribuiu para a formação acadêmica do autor, possibilitando um estudo detalhado de assuntos importantes das áreas de Álgebra, Teoria de Sistemas Matemáticos, Teoria de Modelos e História da Matemática. Além disso, contribuiu para o desenvolvimento da escrita do autor, utilizando linguagem formal de primeira e segunda ordem, tanto em aspectos sintáticos, quanto em semânticos.

Uma das principais propostas do trabalho foi a utilização da teoria de sistemas matemáticos, pois a ideia desta é justamente propor uma metodologia que permita a formalização de uma determinada teoria, partindo de alguns conceitos básicos e utilizando linguagem própria e adequada para formalizá-la. Além disso, espera-se que esse trabalho contribua para o conhecimento de estudantes de graduação e que sirva de base para novas pesquisas no âmbito da Matemática.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BOURBAKI. N.; **Elementes of Mathematics: Algebra**. 1 ed. Boston: Addison-Wasley, 1974.
- BURRIS. S., LEGRIS. J.; **The Algebra of Logic Tradition**. (2021). Disponível em: < <https://plato.stanford.edu/entries/algebra-logic-tradition/> > Acesso em: 18 mar. 2021.
- CANTOR. G. Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen. **Mathematische Annalen**, Leipzig, vol. 5, n. 1, p. 123 – 132, 1 mar. 1872.
- CHANG C. C.; KEISLER H. J. **Model Theory**. 3 ed. New York: Elsevier Science Publishers B. V., 1990.
- DEDEKIND. R.; **Stetigkeit uns irrationale Zahlen**. (1892). Disponível em: < http://www.opera-platonis.de/dedekind/Dedekind_Stetigkeit_2.pdf >. Acesso em: 18 nov. 2020.
- DESKINS. W. E. **Abstract Algebra**. 3 ed. New York: The Macmillan Company, 1964.
- EBBINGHAUS E. D. et al. **Numbers**. 1 ed. New York: Springer-Verlag, 1991.
- GÖDEL. K. **On formally undecidable propositions of principia mathematica and relate systems**. Tradução de Meltzer B. 1 ed. New York: Dover Publications, INC, 1992.
- GRILLET. P. A.; **Abstract Algebra**. 2 ed. New York: Springer-Verlag, 2007.
- HILBERT. D.; BERNAYS. P. **Grundlagen der Mathematik**. 1 ed. Berlin: Julius Springer, 1934.
- HILBERT. D; ACKERMANN. W. **Principles of Mathematical Logic**. Tradução de Steinhardt F, Leckie G. G. e Hammond L. M. New York: Chelsea Publishing Company, 1950.
- KAHN, P. J. The Rational Numbers. 2009. Disponível em: < <http://pi.math.cornell.edu/~kahn/ProveIt%20Notes/rationals09.pdf> >. Acesso em: 05 mar. 2022.
- KRAPP L. S. **Constructions of the real numbers: a set theoretical approach**. 2014. Disponível em: < http://www.math.uni-konstanz.de/~krapp/research/Constructions_of_the_real_numbers.pdf >. Acesso em: 05 mar. 2022.
- KENNEDY. H. C.; Peano's Concept of Number. **International Commission for the History of Mathematics**. Berlin, vol. 1, p. 387 – 408, 1974.
- KENNINGTON A. U. **Mathematical logic reconstructed: Applicable natural deduction**. (2020). Disponível em: < <http://www.geometry.org/tex/conc/ml.html> >. Acesso em: 05 mar. 2022.

KITCHER. P. Bernard Bolzano: Grössenlehre II. Reine Zahlenlehre. **Historia Mathematica**, Berlin, vol. 5, n. 3, p. 358-363, x ago. 1978.

MAL'CEV A. I. **Algebraic Systems**. Tradução Seckler B. D. e Doohovskoy A. P. 1 ed. New York: Springer-Verlag, 1973.

MACHADO G. M. **A construção dos números**. 2014. Trabalho de Conclusão de Curso. (Graduação) – Curso de Licenciatura em Matemática, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2014.

MOREIRA. J. C. **Teoria dos Sistemas Matemáticos – Gênese**. 2019a. Disponível em: <<https://d6scj24zvfbbo.cloudfront.net/a511e06670edd8d620fe74a53dbdb5bd/200002256-96b4896b4a/LIVRO%20TEORIA%20DOS%20SISTEMAS%20MATEMÁTICOS%20INVERNO-0.pdf>>. Acesso em: 05 mar. 2022.

MOREIRA. J. C. **Teoria dos Números Inteiros**. 2020. Disponível em: <<https://d6scj24zvfbbo.cloudfront.net/a511e06670edd8d620fe74a53dbdb5bd/200002262-3c1ef3c1f2/LIVRO%20INVERNO%20TEORIA%20DOS%20NÚMEROS%20INTEIROS.pdf>>. Acesso em: 05 mar. 2022.

NECHAEV V. I.; **Number**. 2011. Disponível em: <<https://encyclopediaofmath.org/wiki/Number>>. Acesso em: 09 ago. 2021.

O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. **Euclid of Alexandria**, 1999b. Disponível em: <<https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Euclid/>>. Acesso em: 21 set. 2020.

O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. **Brahmagupta**, 2000. Disponível em: <<https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Brahmagupta/>>. Acesso em: 21 set. 2020.

O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. **Robert Recorde**, 2002. Disponível em: <<https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Recorde/>>. Acesso em: 21 set. 2020.

O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. **Simon Stevin**, 2004. Disponível em: <<https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Stevin/>>. Acesso em: 21 set. 2020.

O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. **John Napier**, 1998. Disponível em: <<https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Napier/>>. Acesso em: 21 set. 2020.

O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. **Giuseppe Peano**, 1997. Disponível em: <<https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Peano/>>. Acesso em: 21 set. 2020.

O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. **Kurt Gödel**, 2003. Disponível em: <<https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Godel/>>. Acesso em: 2 dez. 2021.

O'CONNOR. J. J., ROBERTSON. E. F.; **Aristotle**. (1999a). Disponível em: <<https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Aristotle/>>. Acesso em: 18 nov. 2020.

PEANO. I.; **Arithmetices Principia: Nova Methodo Exposita**. 1 ed. Taurinorum: Fratres Bocca, 1889.

PINEDO. C. Q. **Fundamentos da Matemática**. 2008. Disponível em: <<https://silo.tips/downloadFile/fundamentos-da-matematica-5>>. Acesso em: 06 mar. 2022.

RUSSELL. B.; WHITEHEAD. A. N.; **Principia Mathematica**. 2 ed. London: The syndics of the Cambridge University Press, 1963.

RUSSELL, B. **The Principles of Mathematics**. 1 ed. Cambridge: University Press, 1903.

SHOENFIELD. J. R.; **Mathematical Logic**. 1 ed. Boston: Addison-Wesley, 1967.

SIEG. W.; SCHLIMM D. **Dedekind's Analysis of Number: Systems and Axioms**. 1 ed. Pittsburgh: Carnegie Mellon, 2003.

STOLL. R. R.; **Set Theory and Logic**. 1 ed. New York: Dover Publications, INC, 1963.

SUPPES. P. **Axiomatic Set Theory**. 1 ed. New York: D. Van Nostrand Company, INC, 1960.

TARSKI A.; VAUGHT R. L. Arithmetical extensions of relational systems. **Compositio Mathematica**. London, vol. 13, p. 81-102, 1956-1958.

TANNERY. J. **Leçons d'Arithmétique: théorique et pratique**. 1 ed. Paris: Armand Colin, 1894.

VOGEL. K. **Widmann, Johannes**. 2008. Disponível em: <<https://www.encyclopedia.com/science/dictionaries-thesauruses-pictures-and-press-releases/widman-or-weideman-or-wideman-johannes>>. Acesso em: 7 abr. 2021.

WEISS. I.; **The Real Numbers – A survey of constructions**. (2015). Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/282695092_Survey_Article_The_real_numbers-A_survey_of_constructions>. Acesso em: 18 nov. 2020.