

Universidade Federal de Uberlândia

Instituto de Ciências Exatas e Naturais do Pontal

Curso de Matemática

Trabalho de Conclusão de Curso

**Operadores Compactos
e Teoria Espectral**

por

Jordi Faria Alves

Licenciatura em Matemática - Ituiutaba - MG

Orientadora: Profa. Dra. Evaneide Alves Carneiro

Operadores Compactos e Teoria Espectral

Ituiutaba, 04 de dezembro de 2020.

Profa. Dra. Evaneide Alves Carneiro

Banca examinadora:

Profa. Dra. Evaneide Alves Carneiro.

Profa. Dra. Patrícia Borges dos Santos.

Prof. Dr. Marcelo Gonçalves Oliveira
Vieira.

Monografia apresentada ao Instituto de
Ciências Exatas e Naturais do Pontal,
UFU como requisito parcial para ob-
tenção do título de **Licenciado em Ma-
temática**.

À minha Orientadora
Evaneide

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a minha orientadora Evaneide Alves Carneiro por me orientar e ajudar durante todo o processo. Agradeço aos membros da banca, Marcelo Gonçalves Oliveira Vieira e Patrícia Borges do Santos, por todas as contribuições feitas ao trabalho.

Agradeço a minha mãe Vanda Aparecida da Silva Alves, meu pai Benoni Faria Alves, meu irmão Benoni Faria Alves Junior, meu avô Sebastião Benonio, minha avó Maria das Graças de Jesus e também a minha família, por todo o apoio dado durante o curso.

Agradeço aos meus professores, pelos ensinamentos e auxílio nas dificuldades, agradeço em especial aos professores Alisson Rafael Aguiar Barbosa, Homero Ghioti da Silva, Rogério Fernando Pires, Tânia Maria Machado de Carvalho e Wallisom da Silva Rosa.

E agradeço aos meus amigos André Luis Martins Tomaz da Silva, Luana Barbosa da Silva, Lucas Augusto Vaz Secco que estiveram comigo desde o começo. E aos amigos Beatriz Akiria de Assis Quaresma, Roberta Agnes Mendes Melo, Welton Costa Lavércio, Cássio Lopes Donato de Lanna, Matheus Silveira Campos, Laurinda Aparecida Ferreira De Moraes que chegaram depois. Além disso, agradeço aos amigos Eras Saturnino, João Vitor Santos Silva, Leticia Arantes, Marcelo Gonçalves dos Reis Filho, Matheus Belizario, Naiad Cristina Santos Silva e Ualisson Pereira Freitas que estiveram comigo antes mesmo do começo. E também a todos os outros amigos que me apoiaram.

RESUMO

Neste trabalho, fizemos uma análise das propriedades presentes em operadores lineares definidos em espaços de dimensão infinita, procurando ver condições ou restrições que preservam as mesmas propriedades de espaços de dimensão finita. Algumas coisas importantes que observamos foram a continuidade dos operadores e completude dos espaços, mas além disso, algumas outras condições foram necessárias para diferentes resultados, como por exemplo trabalhar com operadores compactos. Dois dos principais resultados estudados foram a Alternativa de Fredholm, que nos diz, entre outras coisas, que um operador compacto sobre um espaço de Banach é injetor se, e somente se, for sobrejetor, e também a diagonalização de um operador, que faz parte da teoria espectral. A metodologia que utilizamos foi a pesquisa bibliográfica, focando em dois autores, que são o Kreyszig e o Brezis, duas referências bastante utilizadas em cursos de Análise Funcional.

Palavras-chave: Operadores Compactos. Alternativa de Fredholm. Diagonalização de um operador. Teoria Espectral. Análise Funcional.

CONTEÚDO

Agradecimentos	i
Resumo	ii
Lista de Símbolos	v
Introdução	1
Objetivo	1
Estrutura dos Tópicos Apresentados	2
1 Teoria Espectral em Dimensão Finita	3
1.1 Autovalores e Autovetores	3
1.2 Espectro e Resolvente	4
1.3 Existência de Autovalores	5
1.4 Multiplicidades Algébrica e Geométrica	8
2 Operadores Compactos e Alternativa de Fredholm	11
2.1 Definições Básicas	11
2.2 Operadores Compactos e Algumas Propriedades	20
2.3 A Teoria de Riesz-Fredholm	27
3 Teoria Espectral em Dimensão Infinita	36
3.1 O Espectro de um Operador Compacto	36
3.2 Decomposição Espectral de um Operador Compacto Autoadjunto	45

3.3 Exemplos e Contraexemplos	52
Considerações	60
Bibliografia	63

Lista de Símbolos

Notações Gerais

A^T	Matriz transposta da matriz A .
I_k	Matriz identidade de ordem k .
I	Operador identidade ou matriz identidade.
$E(\lambda, T)$	Autoespaço de T associado ao autovalor λ .
$\sigma(A)$	Espectro da matriz quadrada A .
$\rho(A)$	Conjunto resolvente da matriz quadrada A .
$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais.
$\mathbb{K}$	Corpo de escalares qualquer.

$\mathbb{R}$	Corpo dos números reais.
$\mathbb{C}$	Corpo dos números complexos.
$M_{m \times n}(\mathbb{K})$	Espaço de matrizes de ordem m por n .
$M_n(\mathbb{K})$	Espaço de matrizes quadradas de ordem n .
$\bar{z}$	Conjugado do número complexo z .
A°	Interior do conjunto A .
$\overline{F}$	Fecho do conjunto F .
$\mathcal{L}(E, F)$	Espaço dos operadores lineares limitados de E em F .
$\mathcal{K}(E, F)$	Espaço dos operadores compactos de E em F .
$\mathcal{L}(E)$	Espaço dos operadores lineares limitados sobre E .
$\mathcal{K}(E)$	Espaço dos operadores compactos sobre E .
$N(T)$	Núcleo do operador T .
$Im(T)$	Imagem do operador T .

$\dim(E)$	Dimensão do espaço E .
$X \oplus Y$	Soma direta dos espaços X e Y .
$M^\perp$	Espaço ortogonal ao conjunto M .
$\rho(T)$	Conjunto resolvente do operador T .
$\sigma(T)$	Espectro do operador T .
$AV(T)$	Conjunto dos autovalores do operador T .
$C(K)$	Espaço das funções contínuas de um compacto K em $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
B_E	Bola fechada de centro 0 e raio 1 em um espaço normado E .
S_H	Esfera de centro 0 e raio 1 em um espaço de Hilbert H .
$E^\star$	Espaço dual do espaço E .
$E^{\star\star}$	Espaço bidual do espaço E .
$T^\star$	Operador adjunto do operador T .
R_λ	Operador resolvente.
T_λ	Operador inverso do operador resolvente.

Introdução

Operadores lineares são um importante tópico de estudo de disciplinas de Álgebra Linear. Nesses cursos, os operadores são estudados sobre espaços vetoriais de dimensão finita, pois neles, obtemos uma variedade de resultados úteis para se trabalhar com tais operadores. Já operadores lineares definidos sobre espaços de dimensão infinita são mais complexos de se trabalhar e existe uma maior variedade de casos a considerar. Um exemplo, que costuma ser o mais comum é: operadores lineares que podem ser injetores e não serem sobrejetores.

A seguinte pergunta nos guiou nesta pesquisa: existem operadores em espaços de dimensão infinita que se assemelham, em algum aspecto, aos operadores lineares sobre espaços de dimensão finita? Em caso afirmativo, qual é o grau de semelhança que é possível obter? Na tentativa de responder a essas perguntas e com o objetivo descrito a seguir, estudamos o conteúdo citado adiante.

Objetivo

O objetivo deste trabalho é fazer uma análise mais detalhada de alguns operadores lineares definidos em espaços de dimensão infinita e apresentar resultados com propriedades que facilitam seu entendimento e utilização. O pré-requisito imaginado para o entendimento do conteúdo aqui apresentado é ter cursado com aproveitamento a disciplina Álgebra Linear e alguma familiaridade com as propriedades básicas dos números complexos.

Estrutura dos Tópicos Apresentados

O presente trabalho está dividido da seguinte maneira:

- No capítulo 1, iremos introduzir alguns conceitos preliminares, focando em uma parte da álgebra linear que algumas vezes não é tão aprofundada ou discutida em um primeiro curso, trabalhando alguns conceitos como autovalor, autovetor e outros tópicos referentes à teoria espectral em dimensão finita.
- No capítulo 2, apresentamos os conceitos de espaço de Banach e operadores compactos, numa primeira seção, desenvolvendo diversas propriedades e demonstramos alguns teoremas necessários para a segunda seção. No segundo momento discutimos sobre a solução da equação $u - Tu = f$, onde T é um operador compacto de E em E e $f \in E$, apresentamos mais alguns resultados, para enfim podermos demonstrar a alternativa de Fredholm que, além de nos dar a resposta para o problema discutido, nos dá outros resultados, desde que T seja um operador compacto e E seja um espaço de Banach (apresentaremos as definições no decorrer do capítulo 2).
- No capítulo 3, fizemos uma divisão em três seções. Na primeira reconstruímos a teoria espectral apresentada no capítulo 1, mas com a diferença de abordar a discussão para espaços de dimensão infinita. Posteriormente abordamos a decomposição espectral de um compacto autoadjunto, só que dessa vez, trabalharemos com espaços de Hilbert e produtos internos sobre o corpo dos reais. Na terceira seção, apresentamos exemplos e contraexemplos para alguns dos resultados apresentados.

CAPÍTULO 1

Teoria Espectral em Dimensão Finita

1.1 Autovalores e Autovetores

Definição 1.1 (Transformação linear). Sejam E e F dois espaços vetoriais sobre o mesmo corpo. Dizemos que uma função $T : E \rightarrow F$ é uma *transformação linear* se para todo $x, y \in E$ e escalar λ tem-se que:

- (1) $T(x + y) = Tx + Ty$,
- (2) $T(\lambda x) = \lambda Tx$.

Se $E = F$ dizemos que T é um operador linear.

Sejam E um $\mathbb{C}$ -espaço vetorial de dimensão finita, $e = (e_1, \dots, e_n)$ e $b = (b_1, \dots, b_n)$ duas bases de E , $T : E \rightarrow E$ um operador linear e $A = (a_{ij})$ a matriz do operador T com respeito às bases e e b .

Definição 1.2 (Autovalor e Autovetor). Um *autovalor* de uma matriz $A = (a_{ij})$ é um escalar $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $Ax = \lambda x$ tenha uma solução $x \neq 0$. Além disso, o vetor x é chamado de *autovetor* de A associado ao autovalor λ .

Proposição 1.3. Dada a matriz A do operador $T : E \rightarrow E$, o subconjunto de E , formado por todos os autovetores de A associados ao autovalor λ mais o vetor nulo, é um subespaço vetorial de E , ou seja, $E(\lambda, T) = \{x \in E \mid x = 0 \text{ ou } Ax = \lambda x\}$ é subespaço de E .

Demonstração. Temos que $E(\lambda, T) \neq \emptyset$, pois $0 \in E(\lambda, T)$ por definição. Agora sejam $x, y \in E(\lambda, T)$ e $\alpha \in \mathbb{C}$. Então:

$$A(\alpha x + y) = A(\alpha x) + Ay = \alpha(Ax) + \lambda y = \alpha(\lambda x) + \lambda y = \lambda(\alpha x + y),$$

ou seja, $(\alpha x + y) \in E(\lambda, T)$.

Portanto $E(\lambda, T)$ é um subespaço vetorial de E . □

Definição 1.4 (Autoespaço). Dada a matriz $A = (a_{ij})$ do operador $T : E \rightarrow E$, o subespaço de E formado por todos os autovetores de A associado ao autovalor λ mais o vetor nulo é chamado de *autoespaço* de A associado ao autovalor λ e denotado por $E(\lambda, T)$.

1.2 Espectro e Resolvente

Definição 1.5 (Espectro e Resolvente). O conjunto $\sigma(A)$ de todos os autovalores de A é chamado de *espectro* de A . O complemento $\rho(A) = \mathbb{C} \setminus \sigma(A)$ no plano complexo é chamado de conjunto *resolvente* de A .

Exemplo 1.6. Consideremos a matriz $A = \begin{pmatrix} a & bi \\ bi & a \end{pmatrix}$ de uma transformação linear $T : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$, onde $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e considere $\mathbb{C}^2$ como um $\mathbb{C}$ -espaço vetorial. Iremos calcular os autovalores de A . Seja $(c, d) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Suponhamos sem perda de generalidade que $c \neq 0$. Então:

$$\begin{aligned} T(c, d) = \lambda(c, d) &\Leftrightarrow (ac + bdi, bci + ad) = (\lambda c, \lambda d) \\ &\Leftrightarrow (ac - \lambda c + bdi, bci + ad - \lambda d) = (0, 0) \\ &\Leftrightarrow ((a - \lambda)c, (a - \lambda)d) = (-bdi, -bci) \\ &\Leftrightarrow (a - \lambda, (a - \lambda)d) = \left(\frac{-bdi}{c}, -bci \right) \\ &\Leftrightarrow \frac{-bdi}{c} \cdot d = -bci \Leftrightarrow d^2 = c^2, \end{aligned}$$

ou seja, os autovetores de A são do tipo (c, c) e $(c, -c)$. Para calcular os autovalores iremos usar os vetores $(1, 1), (1, -1) \in \mathbb{C}^2$. Temos $T(1, 1) = (a + bi, bi + a) = (a + bi)(1, 1)$ e $T(1, -1) = (a - bi, -a + bi) = (a - bi)(1, -1)$. Portanto os autovalores de A são $\lambda_1 = a + bi$ e $\lambda_2 = a - bi$.

Utilizamos a definição de autovalor para obter esse resultado, agora o que podemos dizer da existência de autovalores e sobre como podemos encontrá-los em geral? Responderemos a essa pergunta na seção seguinte.

1.3 Existência de Autovalores

Teorema 1.7 (Autovalor de uma matriz). Os autovalores de uma matriz quadrada $A = (a_{ij})$ de ordem n são dados pela solução da equação característica de A , que é a equação $\det(A - \lambda I) = 0$, isto é:

$$\lambda \in \mathbb{C} \text{ é um autovalor de } A \Leftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0. \quad (1.1)$$

Consequentemente, A tem ao menos um autovalor (e no máximo n autovalores distintos).

Demonstração. $\lambda \in \mathbb{C}$ é um autovalor de $A \Leftrightarrow$ existe $x \neq 0$ tal que $Ax = \lambda x \Leftrightarrow$ existe $x \neq 0$ tal que $Ax - \lambda x = (A - \lambda I)x = 0 \Leftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0$, pois o sistema homogêneo associado tem solução $x \neq 0$.

Assim, os autovalores de uma matriz A de ordem $n \geq 1$ são as soluções da equação característica da matriz, e tais soluções são as raízes de um polinômio com coeficientes complexos. Pelo Teorema Fundamental da Álgebra temos que $\det(A - \lambda I) = 0$ tem pelo menos uma raiz complexa e no máximo n raízes distintas.

□

Observação 1.8. Recordemos o seguinte fato, se A for uma matriz quadrada, então $Ax = 0$, para alguma matriz coluna $x \neq 0$ se, e somente se, $\det(A) = 0$. Esse é um fato demonstrado em cursos de álgebra linear que utilizamos de maneira natural na demonstração anterior. Além disso, uma das interpretações de significados dessa equivalência é que A é uma matriz de uma transformação não injetora.

Exemplo 1.9. Consideremos a matriz $A = \begin{pmatrix} 3 - i2\sqrt{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 13 \\ 2 & 0 & 3 + i2\sqrt{3} \end{pmatrix}$. Iremos calcular os autovalores de A utilizando o Teorema 1.7 visto anteriormente.

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3 - i2\sqrt{3} - \lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 13 \\ 2 & 0 & 3 + i2\sqrt{3} - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 21\lambda + 26 = 0$$

Calculando as raízes desse polinômio, obtemos os autovalores de A , que são $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 2 + 3i$ e $\lambda_3 = 2 - 3i$.

Definição 1.10 (Autovalor e Autovetor de um Operador). Sejam E um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial e $T : E \rightarrow E$ um operador linear. Um *autovalor* do operador T é um escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $Tx = \lambda x$ tenha uma solução $x \neq 0$. Além disso, o vetor $x \in E$ é chamado de *autovetor* de T associado ao autovalor λ .

Exemplo 1.11. Observe que toda a teoria desenvolvida aqui está sobre o corpo dos complexos. Estamos fazendo isso, pois se trabalhássemos com o corpo dos reais o Teorema 1.7 não seria verdadeiro. Ao analisarmos o operador $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, onde $\mathbb{R}^2$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, dado por $T(x, y) = (-y, x)$, que assim definido é operador rotação em $\frac{\pi}{2}$ radianos no sentido anti-horário, podemos constatar que T não possui autovalores. De fato, supondo que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que a equação

$$T(x, y) = \lambda(x, y) \Rightarrow (-y, x) = (\lambda x, \lambda y)$$

tenha solução $(x, y) \neq (0, 0)$, então $x \neq 0$ ou $y \neq 0$. Suponhamos sem perda de generalidade que $x \neq 0$, então $\lambda = \frac{-y}{x}$ e, consequentemente, $x = \frac{-y}{x} \cdot y$ ou $x^2 = -y^2$, que só tem solução $x = y = 0$. Absurdo, pois $(x, y) \neq (0, 0)$ por hipótese. Portanto, T não possui autovalores.

Teorema 1.12. Toda matriz quadrada representa um operador linear $T : E \rightarrow E$ em um espaço vetorial E de dimensão finita. Os autovalores da matriz da transformação T independem das particulares bases de E consideradas, ou seja, se duas matrizes da transformação T são dadas por bases distintas em E elas continuam tendo os mesmos autovalores.

Demonstração. Analisemos o que acontece na mudança de uma base de E para outra. Sejam $e = (e_1, \dots, e_n)$ e $b = (b_1, \dots, b_n)$ duas bases quaisquer para E , escritas como

vetores. Por definição de base, cada e_i , é uma combinação linear de b_k 's e da mesma maneira vale que cada b_k é uma combinação linear dos e_i 's. Podemos escrever:

$$b = eC \quad \text{ou} \quad b^T = C^T e^T, \quad (1.2)$$

onde C é uma matriz quadrada de ordem n não singular (de determinante não nulo). Cada $x \in E$ tem uma única representação com relação a cada uma das duas bases consideradas, ou seja,

$$x = ex_1 = \sum \xi_i e_i = bx_2 = \sum \eta_i b_i$$

onde $x_1 = (\xi_i)$ e $x_2 = (\eta_i)$ são vetores colunas. A partir disso e da equação (1.2) nós temos $ex_1 = bx_2 = eCx_2$. Consequentemente

$$x_1 = Cx_2. \quad (1.3)$$

Similarmente, para $Tx = y = ey_1 = by_2$ nós temos

$$y_1 = Cy_2. \quad (1.4)$$

Consequentemente, se T_1 e T_2 denotam as matrizes que representam T com respeito a e e b , respectivamente, então

$$y_1 = T_1 x_1 \quad \text{e} \quad y_2 = T_2 x_2$$

e a partir disso,

$$CT_2 x_2 = Cy_2 = y_1 = T_1 x_1 = T_1 Cx_2$$

Multiplicando à esquerda por C^{-1} nós obtemos a lei de transformação

$$T_2 = C^{-1}T_1C \quad (1.5)$$

com C determinada pelas bases de acordo com (1.2) (e independe da transformação T). Usando (1.5) e que $\det(C^{-1})\det C = 1$, podemos ver agora que os determinantes das equações características de T_1 e T_2 são iguais:

$$\begin{aligned}
\det(T_2 - \lambda I) &= \det(C^{-1}T_1C - \lambda C^{-1}IC) \\
&= \det(C^{-1}(T_1 - \lambda I)C) \\
&= \det(C^{-1}) \det(T_1 - \lambda I) \det(C) \\
&= \det(T_1 - \lambda I).
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Com isso concluímos do Teorema 1.7 que T_1 e T_2 tem os mesmos autovalores. $\square$

Teorema 1.13 (Existência de autovalores). Um operador linear T em um $\mathbb{C}$ -espaço vetorial $E \neq \{0\}$, tem dimensão finita, tem ao menos um autovalor.

Demonstração. Seja A uma matriz da transformação $T : E \rightarrow E$, onde $E \neq \{0\}$ de dimensão $n \geq 1$. Então $A \in M_n(\mathbb{C})$, logo $\det(A - \lambda I) = 0$ é um polinômio não constante e portanto tem pelo menos uma raiz complexa, ou seja, pelo Teorema 1.7, A tem ao menos um autovalor. $\square$

1.4 Multiplicidades Algébrica e Geométrica

Definição 1.14 (Multiplicidades Algébrica e Geométrica). Seja uma matriz quadrada A de uma transformação T . A *multiplicidade algébrica* do autovalor λ de A (ou de T) é a multiplicidade de λ como raiz do polinômio característico, e a dimensão do autoespaço de A (ou de T) associado a λ é chamada de *multiplicidade geométrica* de λ .

Exemplo 1.15 (Multiplicidade). Encontraremos os autovalores e suas multiplicidades da matriz associada da seguinte transformação:

$$T : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n, \quad \text{dada por} \quad T(x_1, \dots, x_n) = (x_1 + x_2, \dots, x_{n-1} + x_n, x_n)$$

Usaremos a base canônica de $\mathbb{K}^n$, que é formada pelos vetores $e_i = (\delta_{i1}, \dots, \delta_{in})$, para $i \in \{1, \dots, n\}$, onde:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}.$$

Aplicando a transformação temos:

$$Te_1 = (1, 0, \dots, 0), \quad Te_{n-1} = (0, \dots, 1, 1, 0), \quad Te_n = (0, \dots, 0, 1, 1).$$

Então a matriz da transformação é

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Notemos que se $i > j$, então $a_{ij} = 0$, logo A é uma matriz triangular superior e portanto $\det(A - \lambda I) = (1 - \lambda)^n$, que é o produto da diagonal principal.

Portanto $\lambda = 1$ é o único autovalor de A com multiplicidade algébrica n , enquanto a multiplicidade geométrica é 1, pois observando que

$$\begin{aligned} T(x_1, \dots, x_n) = 1 \cdot (x_1, \dots, x_n) &\Leftrightarrow (x_1 + x_2, \dots, x_n) - (x_1, \dots, x_n) = (0, 0, \dots, 0) \\ &\Leftrightarrow (x_2, x_3, \dots, x_n, 0) = (0, \dots, 0) \Leftrightarrow x_i = 0, \forall i > 1 \end{aligned}$$

concluimos que $\mathbb{K}^n(1, T)$ tem como base $\{(1, 0, \dots, 0)\} = \{e_1\}$.

Com isso podemos fazer a seguinte reflexão: o que podemos dizer da multiplicidade algébrica e da multiplicidade geométrica? Há alguma relação entre as multiplicidades? Para responder a esse questionamento, temos a seguinte proposição.

Proposição 1.16. A multiplicidade geométrica de um autovalor não pode exceder a multiplicidade algébrica.

Demonstração. Seja γ um autovalor de T com multiplicidade geométrica k . Então existe $B = \{a_1, \dots, a_k\}$ base de $E(\gamma, T)$ e consequentemente existe um complemento de B , $C = \{a_{k+1}, \dots, a_n\}$ para uma base de E dada por $B \cup C = \{a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n\}$. Então $T(a_i) = \gamma a_i$, para todo $a_i \in B$ e $T(a_i) = \sum_{j=1}^n t_{ij} a_j$, para todo $a_i \in C$, e portanto escreveremos a matriz A da transformação em blocos, $A = \begin{pmatrix} \gamma I_k & M \\ 0 & N \end{pmatrix}$, onde $N \in M_{n-k}(\mathbb{C})$ dada pelos coeficientes t_{ij} 's das combinações lineares dos $T(a_j)$, com $i, j > k$, $M \in M_{k \times (n-k)}(\mathbb{C})$ dada pelos coeficientes t_{ij} 's das combinações lineares dos $T(a_j)$, com $j > k \geq i$, e $0 \in M_{(n-k) \times k}(\mathbb{C})$ representando a matriz identicamente nula.

Além disso, temos que:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I_n) &= \det(\gamma I_k - \lambda I_k) \cdot \det(N - \lambda I_{n-k}) \\ &= \det((\gamma - \lambda) I_k) \cdot \det(N - \lambda I_{n-k}) \\ &= (\gamma - \lambda)^k \det(N - \lambda I_{n-k}), \end{aligned}$$

e portanto a multiplicidade algébrica de γ é maior do que ou igual a k . Além disso, como visto no problema anterior, tal desigualdade pode ser estrita. $\square$

CAPÍTULO 2

Operadores Compactos e Alternativa de Fredholm

2.1 Definições Básicas

Nesta seção, iremos introduzir alguns conceitos necessários para o restante do trabalho. Estaremos sempre trabalhando com espaços vetoriais normados e completos, e além disso utilizaremos muito os conceitos de sequência e conjunto fechado.

Definição 2.1 (Operador linear). Sejam E e F dois espaços vetoriais sobre o mesmo corpo. Dizemos que uma função $T : E \rightarrow F$ é um *operador linear* se para todo $x, y \in E$ e escalar λ tem-se que $T(\lambda x + y) = \lambda Tx + Ty$.

Observação 2.2. Estamos definindo novamente, pois em espaços de dimensão finita operadores lineares eram reservados para transformações lineares que possuem o mesmo espaço como domínio e contradomínio, já em espaços de dimensão infinita operador linear e transformação linear são equivalentes. Em livros de análise funcional, no caso nas nossas referências essa é uma nomenclatura comum. Por isso, deixamos explicado que a partir de agora quando apresentarmos um operador $T : E \rightarrow F$ podemos ter $E \neq F$.

Definição 2.3 (Núcleo de um operador). Sejam E e F dois espaços sobre o mesmo corpo e $T : E \rightarrow F$ um operador linear. Definimos como *núcleo do operador T* o conjunto $N(T) = \{x \in E \mid Tx = 0\}$.

Definição 2.4 (Produto Interno e Espaços com Produto Interno). Seja E um $\mathbb{C}$ -espaço vetorial de qualquer dimensão. Um *produto interno* sobre E é uma função $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{C}$ que satisfaz:

$$\begin{aligned} (P1) \quad & \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}, \forall x, y \in E, \\ (P2) \quad & \langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle, \forall x, y \in E \text{ e } \forall \lambda \in \mathbb{C}, \\ (P3) \quad & \langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle, \forall x, y, z \in E, \\ (P4) \quad & \langle x, x \rangle \in \mathbb{R}_+, \forall x \in E \setminus \{0\}, \end{aligned}$$

onde $\overline{\langle y, x \rangle}$ é o conjugado complexo de $\langle y, x \rangle$ e $\mathbb{R}_+ = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \lambda > 0\}$. O par $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ é denominado *espaço vetorial com produto interno*, ou simplesmente, *espaço com produto interno*. Notação: estamos utilizando $\langle \cdot, \cdot \rangle(x, y) = \langle x, y \rangle$ (lê-se produto interno de x por y).

Proposição 2.5. Seja E um espaço com produto interno. Então as seguintes propriedades são válidas:

- (i) $\langle x, 0 \rangle = \langle 0, x \rangle = 0$, para todo $x \in E$;
- (ii) $\langle \lambda x + y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$, para todo $x, y, z \in E$ e para todo $\lambda \in \mathbb{C}$;
- (iii) $\langle x, \lambda y + z \rangle = \bar{\lambda} \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$, para todo $x, y, z \in E$ e para todo $\lambda \in \mathbb{C}$.

Demonstração.

(i) De fato, $\langle 0, x \rangle = \langle 0 + 0, x \rangle = \langle 0, x \rangle + \langle 0, x \rangle$, por (P3), então pela lei do cancelamento temos que $\langle 0, x \rangle = 0$ e consequentemente, usando (P1) temos $\langle x, 0 \rangle = \overline{\langle 0, x \rangle} = \bar{0} = 0$.

(ii) Observamos que $\langle \lambda x + y, z \rangle = \langle \lambda x, z \rangle + \langle y, z \rangle$, por (P3). Agora, usando (P2) temos $\langle \lambda x, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle$. Juntando as informações, concluímos que $\langle \lambda x + y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$.

(iii) Para esse item, vale que $\langle x, \lambda y + z \rangle = \overline{\langle \lambda y + z, x \rangle}$ após aplicarmos (P1). Em seguida, usamos o item anterior, propriedades dos números complexos e (P1) para obtermos:

$$\overline{\langle \lambda y + z, x \rangle} = \overline{\lambda \langle y, x \rangle + \langle z, x \rangle} = \bar{\lambda} \cdot \overline{\langle y, x \rangle} + \overline{\langle z, x \rangle} = \bar{\lambda} \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle.$$

Ou seja, $\langle x, \lambda y + z \rangle = \bar{\lambda} \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$. □

Definição 2.6 (Norma e Espaço Normado). Seja E um $\mathbb{C}$ -espaço vetorial de qualquer dimensão. Uma *norma* sobre E é uma função $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz:

- (N1) $\|x\| \geq 0, \forall x \in E$,
- (N2) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
- (N3) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|, \forall x \in E \text{ e } \forall \lambda \in \mathbb{C}$,
- (N4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in E$.

A desigualdade (N4) é conhecida como desigualdade triangular. O par $(E, \|\cdot\|)$ é denominado *espaço vetorial normado*, ou simplesmente, *espaço normado*. Notação: estamos utilizando $\|\cdot\|(x) = \|x\|$ (lê-se norma de x).

Observação 2.7. Observe que se E é um espaço normado, então para quaisquer $x, y \in E$ temos que $\|x - y\| = \|(-1) \cdot (y - x)\| = |-1| \cdot \|y - x\| = \|y - x\|$.

Definição 2.8 (Ortogonalidade). Seja E um espaço com produto interno. Dizemos que dois vetores $x, y \in E$ são *ortogonais* se $\langle x, y \rangle = 0$.

Observação 2.9. Observe que se $x, y \in E$ são ortogonais, então y e x também são. De fato, $\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle} = \overline{0} = 0$. Além disso, αx e βy também são ortogonais, para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, pois $\langle \alpha x, \beta y \rangle = \alpha \cdot \bar{\beta} \cdot \langle x, y \rangle = \alpha \cdot \bar{\beta} \cdot 0 = 0$.

Observação 2.10. Seja E um espaço com produto interno. Então para todos os vetores $x, y \in E$, com $y \neq 0$, y é ortogonal ao vetor $z = x - \lambda \cdot y$, onde $\lambda = \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle}$. Vale que $\langle y, y \rangle > 0$, pois $y \neq 0$. Repare que, segundo o item (iii) da Proposição 2.5 e (P1) da Definição 2.4, temos:

$$\langle y, z \rangle = \langle y, x - \lambda y \rangle = \langle y, x \rangle - \frac{\overline{\langle x, y \rangle}}{\langle y, y \rangle} \cdot \langle y, y \rangle = \langle y, x \rangle - \frac{\langle y, x \rangle}{\langle y, y \rangle} \cdot \langle y, y \rangle = \langle y, x \rangle - \langle y, x \rangle = 0.$$

Com isso vemos que, para todo $x, y \in E$, com $y \neq 0$, podemos escrever $x = \lambda y + z$, onde y e z são ortogonais.

Proposição 2.11 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz). Sejam E um espaço com produto interno e $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ (ainda não podemos chamar $\|x\|$ de norma de x , só estamos usando a mesma notação). Então:

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

Demonstração. Se $x = 0$ ou $y = 0$, da Proposição 2.5, temos que $0 = \langle x, y \rangle \leq \|x\|\|y\| = 0$. Agora, suponhamos $x \neq 0$ e $y \neq 0$. Como $y \neq 0$, então pela Observação 2.10 podemos escrever $x = \lambda y + z$, com y e z ortogonais e $\lambda = \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle} = \frac{\langle x, y \rangle}{\|y\|^2}$. Temos:

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &= \|\lambda y + z\|^2 = \langle \lambda y + z, \lambda y + z \rangle = \langle \lambda y, \lambda y \rangle + \langle \lambda y, z \rangle + \langle z, \lambda y \rangle + \langle z, z \rangle \\ &= \|\lambda y\|^2 + \|z\|^2 = |\lambda|^2 \|y\|^2 + \|z\|^2 \geq \left(\frac{\langle x, y \rangle}{\|y\|^2} \right)^2 \cdot \|y\|^2 = \frac{\langle x, y \rangle^2}{\|y\|^4} \cdot \|y\|^2 \\ &= \frac{\langle x, y \rangle^2}{\|y\|^2} \Leftrightarrow \|x\|^2 \|y\|^2 \geq \langle x, y \rangle^2 \Leftrightarrow \|x\| \|y\| \geq |\langle x, y \rangle|. \end{aligned}$$

Na primeira linha das igualdades acima, usamos a Observação 2.9 para concluir que $\langle \lambda y, z \rangle = 0 = \langle z, \lambda y \rangle$. $\square$

Proposição 2.12. Todo espaço vetorial com produto interno E é um espaço vetorial normado munido com a norma $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Demonstração. Por P4 da Definição 2.4, temos que a função $\|\cdot\|$ está bem definida, pois $\langle x, x \rangle \geq 0$, para todo $x \in E$.

Observe que (N1) é satisfeita pela própria definição de $\|\cdot\|$. Agora suponha que $\|x\| = 0$. Então:

$$\sqrt{\langle x, x \rangle} = 0 \Leftrightarrow \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0,$$

pois se $x \neq 0$, pela propriedade (P4) teríamos $\langle x, x \rangle > 0$. Então a propriedade (N2) é satisfeita. Agora, se $x \in E$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, então:

$$\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x \rangle} = \sqrt{\lambda \bar{\lambda} \langle x, x \rangle} = \sqrt{|\lambda|^2 \langle x, x \rangle} = |\lambda| \sqrt{\langle x, x \rangle} = |\lambda| \|x\|.$$

Portanto $\|\cdot\|$ satisfaz a propriedade (N3) de norma. Agora resta mostrar que vale a desigualdade triangular da norma assim definida. Sejam $x, y \in E$. Então:

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \overline{\langle x, y \rangle} + \langle y, y \rangle \\ &= \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}(\langle x, y \rangle) + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2 \Leftrightarrow \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \end{aligned}$$

onde $\operatorname{Re}(\langle x, y \rangle)$ é a parte real do número complexo $\langle x, y \rangle$ e a primeira desigualdade vem da Proposição 2.11, a desigualdade de Cauchy-Schwarz, pois $\operatorname{Re}(\langle x, y \rangle) \leq |\langle x, y \rangle|$. Com isso

$\|\cdot\|$ satisfaz todas as propriedades e, portanto, é uma norma sobre E , induzida do produto interno. Assim vemos que todo espaço com produto interno é um espaço normado, com a norma dada por $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$. $\square$

Definição 2.13 (Conjunto Limitado). Seja E um espaço normado. Dizemos que $X \subset E$ é um *conjunto limitado* se existe um número real $k > 0$ tal que $\|x\| \leq k$, para todo $x \in X$.

Definição 2.14 (Sequência e Convergência). Seja E um espaço normado qualquer. Uma *sequência* em E é uma função $x : \mathbb{N} \rightarrow E$. Escrevemos $x(n) = x_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e usualmente escreveremos a sequência na forma (x_n) ou $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Dizemos que a sequência (x_n) *converge* se existe $x \in E$ de forma que para todo $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n - x\| < \epsilon$, para todo $n \geq n_0$. Notação: $x_n \rightarrow x$ ou $\lim x_n = x$.

Proposição 2.15 (Unicidade do limite). Seja E um espaço normado. Se (x_n) é uma sequência convergente em E , então existe um único $x \in E$ tal que $x_n \rightarrow x$.

Demonstração. Suponhamos que existam dois vetores $x, y \in E$ tais que $x_n \rightarrow x$ e $x_n \rightarrow y$. Então para todo $\epsilon > 0$, existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que $\|x_n - x\| \leq \epsilon$ e $\|x_n - y\| \leq \epsilon$, sempre que $n \geq n_1$ e $n \geq n_2$. Seja $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Usando a desigualdade triangular e a Observação 2.7, obtemos:

$$\|x - y\| = \|x - x_n + x_n - y\| \leq \|x - x_n\| + \|x_n - y\| = \|x_n - x\| + \|x_n - y\| \leq 2\epsilon,$$

sempre que $n \geq n_0$. Portanto, como para todo $\epsilon > 0$ temos que $\|x - y\| \leq 2\epsilon$, então $\|x - y\| = 0$, ou seja, por (N2) da definição de norma, $x - y = 0$, ou ainda, $x = y$. Concluímos a unicidade do limite de qualquer sequência convergente em um espaço normado. $\square$

Definição 2.16 (Fecho e Conjunto Fechado). Sejam E um espaço normado e $F \subset E$. Definimos como *fecho* de F o conjunto $\overline{F} = \{x \in E \mid \exists (x_n) \subset F \text{ tal que } x_n \rightarrow x\}$. Dizemos que o conjunto F é *fechado* se $F = \overline{F}$. (Observe que tomando sequências constantes concluímos que $F \subset \overline{F}$.)

Definição 2.17 (Bola aberta). Sejam E um espaço normado, $x \in E$ e $\epsilon > 0$. Definimos como *bola aberta* de centro x e raio ϵ o conjunto $B(x, \epsilon) = \{y \in E \mid \|x - y\| < \epsilon\}$.

Definição 2.18 (Interior e Conjunto Aberto). Sejam E um espaço normado e $A \subset E$. Definimos como *interior* de A o conjunto $A^\circ = \{x \in A \mid B(x, \epsilon) \subset A \text{ para algum } \epsilon > 0\}$. Dizemos que o conjunto A é *aberto* se $A = A^\circ$. (Observe que $A^\circ \subset A$ por definição.)

Proposição 2.19. Sejam E um espaço normado, $x \in E$ e $r > 0$. A bola aberta $B(x, r)$ é um conjunto aberto.

Demonstração. Se $y \in B(x, r)$, então $\|x - y\| < r$. Tome $r_0 = r - \|x - y\| > 0$, ou seja, $r = r_0 + \|x - y\|$. Agora, se $z \in B(y, r_0)$ temos que $\|y - z\| < r_0$. observemos que

$$\|x - z\| = \|x - y + y - z\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| < \|x - y\| + r_0 = r.$$

Portanto, $z \in B(x, r)$ e conseqüentemente $y \in B(x, r)^\circ$. Como y é arbitrário temos $B(x, r) \subset B(x, r)^\circ$. E portanto, $B(x, r)$ é aberto. $\square$

Definição 2.20 (Subsequência). Sejam E um espaço normado e (x_n) uma sequência em E . Uma *subsequência* de (x_n) é uma função $x \circ \varphi : \mathbb{N} \rightarrow E$, dada por $x(\varphi(n)) = x_{\varphi(n)}$, onde φ é uma função injetora e crescente de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{N}$. Outra notação utilizada é (x_{n_k}) , onde $n_k = \varphi(k)$.

Proposição 2.21. Sejam E um espaço normado de qualquer dimensão e (x_n) uma sequência convergente para o limite $x \in E$. Se (x_{n_k}) é uma subsequência de (x_n) , então $x_{n_k} \rightarrow x$.

Demonstração. Se $x_n \rightarrow x$, então para todo $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n - x\| < \epsilon$, sempre que $n \geq n_0$. Como n_k é injetora e crescente temos que existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_k \geq n_0$, sempre que $k \geq k_0$. Portanto $\|x_{n_k} - x\| < \epsilon$ sempre que $k \geq k_0$, ou seja, $x_{n_k} \rightarrow x$. $\square$

Proposição 2.22. Seja E um espaço normado. Então valem:

(1) Se $(x_n) \subset E$ é uma sequência tal que $x_n \rightarrow x \in E$, e $Z = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ então $\overline{Z} = Z \cup \{x\}$. Aqui estamos utilizando Z como conjunto dos termos (ou imagem) da sequência (x_n) .

(2) $X \subset E$ é aberto se, e somente se, $Y = E \setminus X$ é fechado.

Demonstração.

(1) **Ida** ($Z \cup \{x\} \subset \overline{Z}$): Tome $y_r = x_k$, para todo $r \in \mathbb{N}$, uma sequência em Z , onde $k \in \mathbb{N}$ é fixo. Então para todo $\epsilon > 0$ tem-se $\|y_r - x_k\| = 0 < \epsilon$, para todo $r \in \mathbb{N}$, ou seja,

$y_r \rightarrow x_k$ e $x_k \in \overline{Z}$. Agora, considere $(x_n) \subset Z$, então $x_n \rightarrow x$ por hipótese, logo $x \in \overline{Z}$.

Volta ($\overline{Z} \subset Z \cup \{x\}$): Tome $y \in \overline{Z}$, então existe uma sequência $(y_r) \subset Z$ tal que $y_r \rightarrow y$. Se (y_r) assume um número finito de valores, então existe um $r_0 \in \mathbb{N}$ tal que $y_r = y$, para todo $r \geq r_0$. Caso contrário, para todo $r_0 \in \mathbb{N}$ existe $r \geq r_0$ tais que $y_r \neq y$ e $\|y_r - y\| \geq \epsilon$, para $\epsilon = \|y_r - y\|$, contradizendo a hipótese de convergência. Se (y_r) se torna constante a partir de algum momento, então converge para esse limite, ou seja, $y \in Z$. Agora, dado $\epsilon > 0$, existe $r_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_r - x\| < \epsilon$ sempre que $r \geq r_0$. Caso existam infinitos termos distintos, chame $y_r = x_{r_k}$, para algum $k \in \mathbb{N}$. Então existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $r_k \geq r_0$ sempre que $k \geq k_0$. E consequentemente, $\|y_r - x\| = \|x_{r_k} - x\| < \epsilon$ sempre que $k \geq k_0$. Portanto $y_r \rightarrow x$ e pela unicidade do limite $x = y$, como por hipótese $y_r \rightarrow y$.

Logo, $\overline{Z} = Z \cup \{x\}$.

(2) Seja X aberto. Tome $(y_n) \subset Y$ uma sequência convergente para um limite $y \in E$. Se $y \in X$, existe $r > 0$ tal que $B(y, r) \subset X$ e como $y_n \rightarrow y$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|y_n - y\| < r$ sempre que $n \geq n_0$. Ou seja, $y_{n_0} \in X$. Absurdo, pois $(y_n) \subset Y = E \setminus X$. Então $y \in Y$ e Y é fechado.

Agora seja Y fechado. Tome $x \in X$. Se para cada $\frac{1}{n} > 0$ temos que $B(x, \frac{1}{n}) \not\subset X$, então tome $y_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap Y$. Dado $\epsilon > 0$, tome $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\epsilon > \frac{1}{n_0}$, desta forma $\|y_n - x\| < \frac{1}{n_0} < \epsilon$ sempre que $n \geq n_0$. Ou seja, $y_n \rightarrow x$, como Y é fechado então $x \in Y = E \setminus X$. Absurdo, pois $x \in X$. Portanto existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $B(x, \frac{1}{n}) \subset X$, logo X é aberto. $\square$

Definição 2.23 (Sequência de Cauchy). Sejam E um espaço normado e (x_n) uma sequência em E . Dizemos que (x_n) é uma *sequência de Cauchy* se para todo $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n - x_m\| < \epsilon$ sempre que $n, m \geq n_0$.

Observação 2.24. Sejam E um espaço normado e (x_n) uma sequência convergente em E . Então (x_n) é uma sequência de Cauchy. De fato, supondo que $x \in E$ é o limite de (x_n) , então para todo $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n - x\| < \frac{\epsilon}{2}$ sempre que $n \geq n_0$. Agora,

aplicando a desigualdade triangular e a Observação 2.7, obtemos:

$$\begin{aligned}\|x_n - x_m\| &= \|(x_n - x) + (x - x_m)\| \leq \|x_n - x\| + \|-1 \cdot (-x + x_m)\| \\ &= \|x_n - x\| + \|-1\| \|-x + x_m\| = \|x_n - x\| + \|x_m - x\| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,\end{aligned}$$

sempre que $n, m \geq n_0$. Portanto (x_n) é uma sequência de Cauchy.

Definição 2.25 (Compacto). Seja E um espaço normado de qualquer dimensão. Dizemos que um subconjunto K de E é *compacto* se para toda sequência $(x_n) \subset K$, existir uma subsequência $(x_{n_k}) \subset K$ convergente para algum $x \in K$.

Definição 2.26 (Completude). Seja E um espaço normado de qualquer dimensão. Dizemos que $X \subset E$ é um conjunto *completo* se toda sequência de Cauchy em X tiver um limite $x \in X$. Isto é, se (x_n) é uma sequência de Cauchy em X , existe $x \in X$ tal que $x_n \rightarrow x$. Se $X = E$, dizemos que E é um *espaço completo*.

Proposição 2.27. Sejam E um espaço normado, $X \subset K \subset E$, onde X é um conjunto fechado. Vale que:

- (a) Se K é compacto, então X também será.
- (b) Se K é completo, então X também será.

Demonstração.

- (a) Seja (x_n) uma sequência em X , então (x_n) é uma sequência em K . Como K é compacto existe uma subsequência (x_{n_k}) convergente para algum $x \in K$. Mas como X é fechado e a subsequência também está em X , temos que $x \in X$. Portanto X é compacto.
- (b) Seja (x_n) uma sequência de Cauchy em X , consequentemente (x_n) é uma sequência de Cauchy em K , que é completo, logo existe um $x \in K$ tal que $x_n \rightarrow x$. Novamente, como X é fechado, então $x \in X$. E portanto X é completo. $\square$

Definição 2.28 (Operador Limitado). Sejam E e F dois espaços normados de qualquer dimensão. Dizemos que o operador $T : E \rightarrow F$ é *limitado* se existe $c > 0$ tal que

$$\|Tx\| \leq c \cdot \|x\|, \quad \forall x \in E.$$

Observe que utilizamos as mesmas notações para as normas de E e F , mas acima $\|x\|$ é a norma em E e $\|T(x)\|$ é a norma em F .

Definição 2.29 (Função contínua). Sejam E e F dois espaços normados. Dizemos que uma função $f : E \rightarrow F$ é *contínua* se para toda sequência $(x_n) \subset E$ convergente para um limite $x \in E$ tem-se que $f(x_n) \rightarrow f(x) \in F$.

Observação 2.30. Se E e F são conjuntos não vazios quaisquer e $f : E \rightarrow F$. Então $f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$, onde $A, B \subset F$. De fato,

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(A \setminus B) &\Leftrightarrow f(x) \in A \setminus B \Leftrightarrow f(x) \in A \text{ e } f(x) \notin B \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \text{ e } x \notin f^{-1}(B) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B). \end{aligned}$$

Observe que $f^{-1}(F \setminus A) = f^{-1}(F) \setminus f^{-1}(A) = E \setminus f^{-1}(A)$, ou seja, imagem inversa do complementar é o complementar da imagem inversa.

Proposição 2.31. Sejam E e F dois espaços normados e $f : E \rightarrow F$ uma função. Então f é contínua se, e somente se, para todo aberto A em F o conjunto $f^{-1}(A)$ é um aberto em E (ou seja, imagem inversa de aberto é aberto).

Demonstração. Inicialmente, note que pela observação anterior e pela Proposição 2.22 item (2) a imagem inversa de aberto ser aberto equivale a imagem inversa de fechado ser fechado.

Suponhamos que f é contínua. Tome $Y \subset F$ um conjunto fechado qualquer. Se $(x_n) \in f^{-1}(Y)$ é uma sequência convergente para um limite $x \in E$. Como f é contínua, então $f(x_n) \rightarrow f(x)$, mas como Y é fechado, então $f(x) \in Y$. Portanto $x \in f^{-1}(Y)$ e consequentemente $f^{-1}(Y)$ é fechado, pois (x_n) é arbitrária.

Suponhamos que $f^{-1}(A)$ é aberto se A é aberto. Seja $(x_n) \subset E$ convergente para um limite $x \in E$. Para todo $\epsilon > 0$, o conjunto $B(f(x), \epsilon) \subset F$ é aberto, segundo a Proposição 2.19. Por hipótese, $f^{-1}(B(f(x), \epsilon))$ é aberto. Logo, como $x \in f^{-1}(B(f(x), \epsilon))$, então existe $\delta > 0$, tal que $B(x, \delta) \subset f^{-1}(B(f(x), \epsilon))$. Agora, como (x_n) converge para x , então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n - x\| < \delta$ sempre que $n \geq n_0$. Ou seja, para todo $n \geq n_0$ temos que $x_n \in f^{-1}(B(f(x), \epsilon))$ e, consequentemente, $f(x_n) \in B(f(x), \epsilon)$. Portanto $\|f(x_n) - f(x)\| < \epsilon$ sempre que $n \geq n_0$, isto é, $f(x_n) \rightarrow f(x)$. Logo, f é contínua. $\square$

Teorema 2.32. Sejam $T : E \rightarrow F$ um operador linear, onde E e F são espaços normados. Então:

- (a) T é contínuo se, e somente se, T é limitado.
 (b) Se T é contínuo em um único ponto, então T é contínuo.

Demonstração. Ver Teorema 2.7-9 em [3], página 97. □

Observação 2.33. Seja $T : E \rightarrow F$ um operador limitado, onde E e F são espaços normados. Se $K \subset E$ é compacto, então $T(K) \subset F$ também é.

De fato, seja $(y_n) \subset T(K)$ uma sequência qualquer. Então existe uma sequência $(x_n) \subset K$ tal que $y_n = Tx_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Como K é compacto, existe uma subsequência (x_{n_k}) convergente para algum $x \in K$. E como T é limitada, pelo teorema anterior, temos que T é contínuo. Logo $y_{n_k} = Tx_{n_k} \rightarrow Tx \in T(K)$, ou seja, dada uma sequência arbitrária em $T(K)$, existe uma subsequência que converge em $T(K)$. Portanto $T(K)$ é compacto.

2.2 Operadores Compactos e Algumas Propriedades

Definição 2.34 (Espaço de Banach). Dizemos que um espaço normado E é um *espaço de Banach* se E é completo com respeito à sua norma.

Definição 2.35 (Supremo). Seja $X \subset \mathbb{R}$ um subconjunto não vazio. Chamamos de supremo de X o número $s = \sup X$ tal que:

- (i) $s \geq x$, para todo $x \in X$.
 (ii) Para todo $\epsilon > 0$, existe $x \in X$ tal que $x \geq s - \epsilon$.

Repare que se X não for limitado superiormente, então o supremo de X diverge, ou seja, não existe.

Para esta seção, E e F denotam espaços de Banach sobre $\mathbb{C}$, e $B_E = \{x \in E; \|x\| \leq 1\}$. O espaço vetorial normado dos operadores lineares limitados de E em F será denotado por $\mathcal{L}(E, F)$, com a norma $\|T\| = \sup_{x \in B_E} \|Tx\|$. Se $E = F$, $\mathcal{L}(E, F)$ será denotado simplesmente por $\mathcal{L}(E)$.

Observação 2.36. Para demonstrar que $\mathcal{L}(E, F)$ é de fato um espaço vetorial, observamos inicialmente que $0 \in \mathcal{L}(E, F)$. Agora, sejam $T, S \in \mathcal{L}(E, F)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Então, para

todo $u, v \in E$ e $\alpha \in \mathbb{C}$ temos:

$$\begin{aligned} (\lambda \cdot T + S)(\alpha \cdot u + v) &= \lambda \cdot T(\alpha \cdot u + v) + S(\alpha \cdot u + v) \\ &= \lambda \cdot (\alpha \cdot Tu + Tv) + \alpha Su + Sv \\ &= \alpha \cdot (\lambda Tu + Su) + \lambda Tv + Sv \\ &= \alpha \cdot (\lambda \cdot T + S)u + (\lambda T + S)v. \end{aligned}$$

Com isso, vemos que uma combinação linear de operadores lineares é um operador linear. Agora, observemos que:

$$\begin{aligned} \|(\lambda T + S)u\| &= \|\lambda Tu + Su\| \leq |\lambda| \|Tu\| + \|Su\| \\ &\leq |\lambda| \cdot c_1 \cdot \|u\| + c_2 \cdot \|u\| = (\lambda c_1 + c_2) \|u\|. \end{aligned}$$

Portanto, uma combinação linear de operadores limitados é um operador limitado, ou seja, $(\lambda T + S) \in \mathcal{L}(E, F)$. Mostramos que $\mathcal{L}(E, F)$ é não vazio e fechado para as operações de soma e multiplicação por escalar. A comutatividade deriva da comutatividade no espaço F , pois $(T+S)u = Tu + Su = Su + Tu = (S+T)u$, e de forma análoga para a propriedade associativa. Agora, seja $T \in \mathcal{L}(E, F)$ e tome $0, -T \in \mathcal{L}(E, F)$. Então:

$$\begin{aligned} (T + 0)u &= Tu + 0u = Tu + 0 = Tu, \quad \forall u \in E, \\ (T + (-T))u &= Tu + (-T)u = Tu + (-Tu) = 0, \quad \forall u \in E, \end{aligned}$$

ou seja, a soma satisfaz todas as propriedades de espaço vetorial. Resta verificar a multiplicação por escalar. Sejam $T, S \in \mathcal{L}(E, F)$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Então:

$$\begin{aligned} (\alpha \cdot (\beta T))u &= \alpha \cdot (\beta T)u = \alpha \cdot (\beta Tu) = (\alpha\beta) \cdot Tu = ((\alpha\beta)T)u, \quad \forall u \in E, \\ (1T)u &= 1 \cdot Tu = Tu, \quad \forall u \in E, \\ (\alpha(T + S))u &= \alpha(T + S)u = \alpha(Tu + Su) = \alpha Tu + \alpha Su = (\alpha T)u + (\alpha S)u, \quad \forall u \in E, \\ ((\alpha + \beta)T)u &= (\alpha + \beta)Tu = \alpha Tu + \beta Tu = (\alpha T)u + (\beta T)u, \quad \forall u \in E. \end{aligned}$$

Então $\mathcal{L}(E, F)$ satisfaz todas as propriedades de espaço vetorial. A prova de que $\mathcal{L}(E, F)$ é de fato um espaço normado com a norma dada por $\|T\| = \sup_{x \in B_E} \|Tx\|$ pode ser encontrada no Lema 27-2. em [3], página 92.

Nos resultados a seguir, usamos as seguintes notações: Se $r > 0$, denotamos as bolas aberta e fechada de raio r e centro $y \in E$ por $B_E(y, r) = \{x \in E; \|x - y\| < r\}$ e $B_E[y, r] = \{x \in E; \|x - y\| \leq r\}$, respectivamente. Dado um conjunto Ω não vazio, então $C(\Omega)$ denota o conjunto de todas as funções contínuas $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$.

Definição 2.37 (Operador Compacto). Um operador $T \in \mathcal{L}(E, F)$ é um *operador compacto* se $T(B_E)$ tiver fecho compacto em F (com respeito à sua norma). Onde $B_E = \{x \in E \mid \|x\| \leq 1\}$ e $T(B_E) = \{Tx \in F \mid x \in B_E\}$.

O conjunto de todos os operadores compactos de E em F é denotado por $\mathcal{K}(E, F)$. Para simplificar, denotamos $\mathcal{K}(E) = \mathcal{K}(E, E)$.

Proposição 2.38. Sejam $T, S \in \mathcal{K}(E, F)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Então $(\lambda \cdot T + S) \in \mathcal{K}(E, F)$.

Demonstração. Iniciemos mostrando que, se $\lambda \in \mathbb{C}$ e $U, V \subset F$ são compactos, então $W = \lambda \cdot U + V$ é um compacto. De fato, seja $(w_i) \subset W$ uma sequência. Então existem sequências $(u_i) \subset U$ e $(v_i) \subset V$ tais que $w_i = \lambda \cdot u_i + v_i$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Como U é compacto, então existe uma subsequência u_{i_j} que converge para $u \in U$, e como V também é compacto, então existe uma subsequência $v_{i_{j_k}}$ que converge para $v \in V$. Portanto $w_{i_{j_k}} = \lambda \cdot u_{i_{j_k}} + v_{i_{j_k}}$ converge para $w = \lambda \cdot u + v \in W$, pois

$$\|w_{i_{j_k}} - w\| = \|\lambda \cdot u_{i_{j_k}} + v_{i_{j_k}} - (\lambda \cdot u + v)\| \leq |\lambda| \cdot \|u_{i_{j_k}} - u\| + \|v_{i_{j_k}} - v\|.$$

Agora, sejam $T, S \in \mathcal{K}(E, F)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Observamos que se $f \in (\lambda \cdot T + S)(B_E)$, então existe $x \in B_E$ tal que $f = (\lambda \cdot T + S)(x) = \lambda \cdot T(x) + S(x)$, logo $f \in \lambda \cdot T(B_E) + S(B_E)$. Além disso, temos que $T(B_E) \subset \overline{T(B_E)}$ e $S(B_E) \subset \overline{S(B_E)}$. Assim temos as seguintes relações de inclusão:

$$(\lambda \cdot T + S)(B_E) \subset (\lambda \cdot T)(B_E) + S(B_E) = \lambda \cdot T(B_E) + S(B_E) \subset \lambda \cdot \overline{T(B_E)} + \overline{S(B_E)},$$

e consequentemente $\overline{(\lambda \cdot T + S)(B_E)} \subset \lambda \cdot \overline{T(B_E)} + \overline{S(B_E)}$, que é um compacto. Portanto $\overline{(\lambda \cdot T + S)(B_E)}$ é compacto, pois é um fechado contido em um compacto, logo $(\lambda \cdot T + S) \in \mathcal{K}(E, F)$. $\square$

Definição 2.39 (Totalmente Limitado). Um subconjunto $X \subset E$ é *totalmente limitado* se para todo $\epsilon > 0$, existem $x_1, \dots, x_n \in X$ tais que $X \subset \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \epsilon)$.

Teorema 2.40. Seja E espaço normado. Um subconjunto $K \subset E$ é compacto se, e somente se, é completo e totalmente limitado.

Demonstração. Ver Teorema 45.1. em [5], página 276. $\square$

Proposição 2.41. Sejam E um espaço completo e $K \subset E$ um conjunto totalmente limitado. Então $\overline{K}$ é compacto.

Demonstração. Observamos que $\overline{K}$ é completo, pois E é completo. Agora, dado $\epsilon > 0$, existem $u_1, \dots, u_r \in K$ tais que $K \subset \bigcup_{i \in I_r} B(u_i, \epsilon/2)$, onde $I_r = \{n \in \mathbb{N}; n \leq r\}$, pois K é totalmente limitado por hipótese. Então:

$$\overline{K} \subset \overline{\bigcup_{i \in I_r} B(u_i, \epsilon/2)} = \bigcup_{i \in I_r} \overline{B(u_i, \epsilon/2)} \subset \bigcup_{i \in I_r} B(u_i, \epsilon).$$

Portanto $\overline{K}$ é completo e totalmente limitado, logo pelo Teorema 2.40 é compacto. $\square$

Teorema 2.42. O conjunto $\mathcal{K}(E, F)$ é um subespaço fechado de $\mathcal{L}(E, F)$ (com respeito à norma $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(E, F)}$).

Demonstração. Primeiro mostraremos que $\mathcal{K}(E, F)$ é um subespaço de $\mathcal{L}(E, F)$. Para isso observamos que o operador nulo $0 \in \mathcal{K}(E, F)$, pois $0(B_E) = \{0\}$ tem fecho compacto. Pela Proposição 2.38 sabemos que $(\lambda \cdot T + S) \in \mathcal{K}(E, F)$, para todo $S, T \in \mathcal{K}(E, F)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Então $\mathcal{K}(E, F)$ é um subespaço de $\mathcal{L}(E, F)$. Agora seja $(T_n) \subset \mathcal{K}(E, F)$ tal que $T_n \rightarrow T \in \mathcal{L}(E, F)$. Queremos mostrar que $T \in \mathcal{K}(E, F)$. Para todo $\epsilon > 0$, seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $\|T_n - T\| < \epsilon/3$.

Como $T_n(B_E)$ tem fecho compacto, então $T_n(B_E)$ é totalmente limitado e por isso existem $T_n(x_1), \dots, T_n(x_r) \in T_n(B_E)$ tais que $T_n(B_E) \subset \bigcup_{i \in I_r} B(T_n(x_i), \epsilon/3)$. Afirmamos

que $T(B_E) \subset \bigcup_{i \in I_r} B(T(x_i), \epsilon)$. De fato, para todo $x \in B_E$, existe um $i \in I_r$ tal que

$T_n(x) \in B(T_n(x_i), \epsilon/3)$, pois $T_n(B_E) \subset \bigcup_{i \in I_r} B(T_n(x_i), \epsilon/3)$, e com isso temos:

$$\begin{aligned} \|T(x) - T(x_i)\| &\leq \|T(x) - T_n(x) + T_n(x) - T_n(x_i) + T_n(x_i) - T(x_i)\| \leq \\ &\leq \|T(x) - T_n(x)\| + \|T_n(x) - T_n(x_i)\| + \|T_n(x_i) - T(x_i)\| < \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 = \epsilon. \end{aligned}$$

Então $T(x) \in \bigcup_{i \in I_r} B(T(x_i), \epsilon)$, logo $T(B_E) \subset \bigcup_{i \in I_r} B(T(x_i), \epsilon)$. Portanto $T(B_E)$ é totalmente limitado, além disso, F é Banach (completo) e, então pela Proposição 2.41 tem fecho compacto, ou seja, $T \in \mathcal{K}(E, F)$. $\square$

Definição 2.43. Um operador $T \in \mathcal{L}(E, F)$ é dito de *posto finito* se a imagem de T , denotada por $Im(T)$, tem dimensão finita.

Proposição 2.44. Seja E um $\mathbb{C}$ -espaço normado de dimensão finita. Então $K \subset E$ é compacto se, e somente se, K é fechado e limitado.

Demonstração. Ver Teorema 2.5-3 em [3], página 77. $\square$

Observação 2.45. Todo operador contínuo de posto finito é compacto. De fato, seja $T \in \mathcal{L}(E, F)$ de posto finito. Como T é limitado, então existe $c \geq 0$ tal que $\|Tx\| \leq c \cdot \|x\|$, para todo $x \in E$. Além disso, $T(B_E) \subset \text{Im}(T)$ é limitado, pois $\|Tx\| \leq c \cdot \|x\| \leq c$, para todo $x \in B_E$. Então $\overline{T(B_E)}$ é fechado e limitado em um espaço de dimensão finita, $\text{Im}(T)$, e portanto pela Proposição 2.44 é compacto. Logo $T \in \mathcal{K}(E, F)$.

Corolário 2.46. Seja (T_n) uma sequência de operadores de posto finito e seja $T \in \mathcal{L}(E, F)$ tal que $\|T_n - T\| \rightarrow 0$. Então $T \in \mathcal{K}(E, F)$.

Demonstração. Se (T_n) é uma sequência de operadores de posto finito, então pela Observação 2.45 temos que (T_n) é uma sequência de operadores compactos, que por hipótese converge para T . Pelo Teorema 2.42 sabemos que $\mathcal{K}(E, F)$ é fechado, portanto $T \in \mathcal{K}(E, F)$. $\square$

Observação 2.47. O “problema de aproximação” lida com o inverso do corolário acima: dado um operador compacto T , sempre existe uma sequência (T_n) de operadores de posto finito tal que $\|T_n - T\| \rightarrow 0$? Essa pergunta ficou em aberto por um longo tempo até que P. Enflo descobriu um contraexemplo em 1972 (veja [2]). A construção original é bastante complicada, e posteriormente foram encontrados exemplos mais simples. O problema da aproximação é válido para alguns casos especiais, por exemplo se F é um espaço de Hilbert (a definição de espaço de Hilbert será dada no Capítulo 3). Mais geralmente, se F possui uma base de Schauder (veja a definição 5 em [1], página 146), então o problema da aproximação é válido para todo espaço E e todo operador compacto de E em F .

Proposição 2.48. Sejam E , F e G três espaços de Banach. Se $T \in \mathcal{L}(E, F)$ e $S \in \mathcal{K}(F, G)$ [respectivamente, $T \in \mathcal{K}(E, F)$ e $S \in \mathcal{L}(F, G)$], então $S \circ T \in \mathcal{K}(E, G)$.

Demonstração. Se $\overline{T(B_E)}$ é compacto, então $S(\overline{T(B_E)})$ é um compacto, pois S é contínua e compacidade é preservada por continuidade pela Observação 2.33. Além disso, como $S(T(B_E)) \subset S(\overline{T(B_E)})$, então seu fecho está contido em um compacto, logo é compacto.

Agora seja $\overline{S(B_F)}$ compacto. Como T é limitado temos que existe $\lambda \geq 0$ tal que $T(B_E) \subset \lambda \cdot B_F$, pois $\|T(x)\| \leq \lambda \cdot \|x\|$, ou seja, $S(T(B_E)) \subset \lambda \cdot S(B_F) \subset \lambda \cdot \overline{S(B_F)}$. Portanto $S(T(B_E))$ tem fecho contido em um compacto, logo $\overline{S(T(B_E))}$ é compacto, provando que $S \circ T \in \mathcal{K}(E, F)$. $\square$

Definição 2.49 (Funcional Linear). Seja E for um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ de qualquer dimensão. Dizemos que $f : E \rightarrow \mathbb{C}$ é um *funcional linear* se f for um operador linear.

Definição 2.50 (Dual e Bidual). Seja E um espaço vetorial normado sobre um corpo $\mathbb{C}$. O *espaço dual* de E , denotado por E^* , é o conjunto de todos os funcionais lineares limitados de E em $\mathbb{C}$. Ou seja, $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{C})$. O *espaço bidual* de E é o dual de E^* , ou seja, $E^{**} = \mathcal{L}(E^*, \mathbb{C})$.

Observação 2.51. Sejam E um espaço de Banach e E^{**} o bidual de E . Existe um operador $C : E \rightarrow E^{**}$, chamado de imersão canônica de E em E^{**} , que associa a cada $x \in E$ o funcional $Cx : E^* \rightarrow \mathbb{C}$, dado por $Cx(f) = \langle f, x \rangle = f(x)$, para todo $f \in E^*$.

A imersão canônica C definida acima é linear e injetora. De fato, se $x, y \in E$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ tem-se que, para todo $f \in E^*$:

$$C(\lambda \cdot x + y)(f) = f(\lambda \cdot x + y) = \lambda \cdot f(x) + f(y) = \lambda \cdot Cx(f) + Cy(f).$$

Além disso, se $Cx = 0$, então $f(x) = 0$, para todo $f \in E^*$, logo $x = 0$.

Definição 2.52 (Espaço Reflexivo). Seja E um espaço normado. Dizemos que E é um *espaço reflexivo* se a imersão canônica for sobrejetora, isto é, $C(E) = E^{**}$.

Definição 2.53 (Adjunto). Seja um operador $T \in \mathcal{L}(E, F)$. O *operador adjunto* de T é o operador $T^* : F^* \rightarrow E^*$, definido por $T^*f = \langle f, T \rangle : E \rightarrow \mathbb{C}$, onde para todo $u \in E$ tem-se $T^*f(u) = \langle f, T \rangle(u) = \langle f, Tu \rangle = f(Tu)$.

Observação 2.54. Na definição anterior usamos a notação de produto interno que é apenas uma notação, por enquanto, não relacionada ao produto interno definido anteriormente. Mas quando trabalhamos com espaços de Hilbert (iremos definir mais adiante), podemos fazer uma caracterização de E com E^* e, portanto, as definições irão coincidir.

Teorema 2.55 (Ascoli-Arzelà). Sejam E um espaço normado, $K \subset E$ um subconjunto compacto, e $\mathcal{H}$ um subconjunto limitado de $C(K)$. Se $\mathcal{H}$ é uniformemente equicontínuo, isto é,

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ tal que } \|x - y\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon, \quad \forall f \in \mathcal{H},$$

então o fecho de $\mathcal{H}$ é compacto.

Demonstração.

Para o caso complexo ver Teorema A5 em [6], página 394.

Para o caso real ver Teorema 4.25 em [1], página 111. $\square$

Proposição 2.56 (Schauder). Se $T \in \mathcal{K}(E, F)$, então $T^* \in \mathcal{K}(F^*, E^*)$.

Demonstração. Seja $T \in \mathcal{K}(E, F)$. Provaremos que $T^*(B_{F^*})$ tem fecho compacto em E^* . Seja (v_n) uma sequência em B_{F^*} , e mostraremos que $(T^*(v_n))$ tem uma subsequência convergente. Denotaremos $K = \overline{T(B_E)}$, que é um compacto. Consideremos $\mathcal{H} \subset C(K)$ (espaço das funções contínuas definida em K) dado por:

$$\mathcal{H} = \{\varphi_n : x \in K \rightarrow \langle v_n, x \rangle; n = 1, 2, \dots\}.$$

Afirmamos que $\mathcal{H}$ é limitado e uniformemente equicontínuo. De fato,

$$\varphi_n \in \mathcal{H} \Rightarrow \|\varphi_n\| = \sup_{x \in K} |\varphi_n(x)| = \sup_{x \in K} |\langle v_n, x \rangle| \leq \sup_{x \in K} \|v_n\| \|x\| < M.$$

Além disso,

$$|\varphi_n(x) - \varphi_n(y)| = |\langle v_n, x - y \rangle| \leq \|v_n\| \|x - y\| \leq \|x - y\|.$$

Portanto, dado $\epsilon > 0$, tomando $\delta = \epsilon$, temos:

$$\|x - y\| < \delta \Rightarrow |\varphi_n(x) - \varphi_n(y)| < \epsilon, \forall n = 1, 2, \dots$$

Pelo Teorema 2.55, o fecho de $\mathcal{H}$ em $C(K)$ é compacto. Portanto, existe uma subsequência (φ_{n_j}) que converge uniformemente em K para uma função $\varphi \in C(K)$. Em particular, temos:

$$\sup_{u \in B_E} |\varphi_{n_j}(Tu) - \varphi(Tu)| = \sup_{u \in B_E} |\langle v_{n_j}, Tu \rangle - \varphi(Tu)| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0.$$

Logo,

$$\sup_{u \in B_E} |\langle v_{n_j}, Tu \rangle - \langle v_{n_l}, Tu \rangle| \leq \sup_{u \in B_E} |\langle v_{n_j}, Tu \rangle - \varphi(Tu)| + \sup_{u \in B_E} |\varphi(Tu) - \langle v_{n_l}, Tu \rangle| \xrightarrow{j, l \rightarrow \infty} 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \|T^*(v_{n_j}) - T^*(v_{n_l})\|_{E^*} &= \sup_{u \in B_E} |\langle T^*(v_{n_j}) - T^*(v_{n_l}), u \rangle| \\ &= \sup_{u \in B_E} |\langle v_{n_j}, Tu \rangle - \langle v_{n_l}, Tu \rangle| \xrightarrow{j, l \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

ou seja, $(T^*(v_{n_j}))$ converge em E^* . Portanto $T^*(B_{F^*})$ tem fecho compacto, ou seja, $T^* \in \mathcal{K}(F^*, E^*)$ $\square$

2.3 A Teoria de Riesz-Fredholm

Nosso objetivo é demonstrar a Alternativa de Fredholm, que lida com a solução da equação $u - Tu = f$, sendo T um operador compacto de E em E . Esse resultado nos diz que:

- ou a equação $u - Tu = f$ tem solução única para todo $f \in E$;
- ou a equação homogênea $u - Tu = 0$ admite n soluções linearmente independentes, e nesse caso, a equação não homogênea $u - Tu = f$ tem solução se, e somente se, f satisfaz certas condições de ortogonalidade.

Outra das afirmações da Alternativa de Fredholm é que, se $T \in \mathcal{K}(E)$, o operador $I - T$ é injetor se, e somente se, é sobrejetor. Essa propriedade é familiar em espaços de dimensão finita. Contudo em espaços de dimensão infinita um operador linear pode ser injetor (ou sobrejetor) sem ser sobrejetor (respectivamente injetor), por exemplo o salto à direita (respectivamente o salto à esquerda) no espaço l^2 , como veremos no exemplo a seguir. Sendo assim, essa é uma notável propriedade do operador $I - T$ com $T \in \mathcal{K}(E)$.

Exemplo 2.57. O salto à direita é um operador limitado $T : l^2 \rightarrow l^2$, definido por $T(x_1, x_2, \dots) = (0, x_1, \dots)$, onde $l^2 = \{x = (x_1, x_2, \dots); \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty\}$. Esse operador é injetor, pois se $x \in N(T)$, então $T(x_1, x_2, \dots) = (0, x_1, \dots) = (0, 0, \dots)$. Logo $x_i = 0$, para todo $i \in \mathbb{N}$, portanto $x = 0$ e $N(T) = \{0\}$. Mas não é sobrejetor, pois dado $(1, 0, \dots)$ não existe $x \in l^2$ tal que $Tx = (1, 0, \dots)$, pois a primeira coordenada de Tx é sempre 0. O salto à esquerda é análogo, mas é definido por $T(x_1, x_2, \dots) = (x_2, x_3, \dots)$, e é um operador sobrejetor e não injetor.

Definição 2.58 (Ínfimo). Seja $X \subset \mathbb{R}$ um subconjunto não vazio. Chamamos de ínfimo de X o número $i = \inf X$ tal que:

- $i \leq x$, para todo $x \in X$.
- Para todo $\epsilon > 0$, existe $x \in X$ tal que $x \leq i + \epsilon$.

Repare que se X não for limitado inferiormente, então o ínfimo de X diverge, ou seja, não existe.

Definição 2.59. Sejam E um $\mathbb{C}$ -espaço normado, $u \in E$ e $M \subset E$. A distância entre o ponto u e o conjunto M é definido por $d(u, M) = \inf_{v \in M} \|u - v\|$. Observe que se M é

um subespaço de E e $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, então:

$$d(\lambda u, M) = \inf_{v \in M} \|\lambda u - v\| = \inf_{v \in M} |\lambda| \|u - \lambda^{-1}v\| = |\lambda| \inf_{w \in M} \|u - w\| = |\lambda| d(u, M),$$

onde $w = \lambda^{-1}v$, pois M é subespaço.

Lema 2.60 (Lema de Riesz). Seja E um espaço vetorial normado e $M \subset E$ um subespaço linear fechado tal que $M \neq E$. Então:

$$\forall \epsilon \in (0, 1) \quad \exists u \in E \quad \text{tal que } \|u\| = 1 \text{ e } d(u, M) \geq 1 - \epsilon.$$

Demonstração. Seja $v \in E$ com $v \notin M$. Como M é fechado, então

$$d = d(v, M) > 0.$$

Escolha qualquer $m_0 \in M$ tal que

$$d \leq \|v - m_0\| \leq d/(1 - \epsilon).$$

Então

$$u = \frac{v - m_0}{\|v - m_0\|}$$

satisfaz a desigualdade enunciada. De fato, para todo $m \in M$, temos:

$$\|u - m\| = \left\| \frac{v - m_0}{\|v - m_0\|} - m \right\| = \frac{\|v - (m_0 + \|v - m_0\| \cdot m)\|}{\|v - m_0\|} \geq \frac{d}{\|v - m_0\|} \geq 1 - \epsilon,$$

pois $m_0 + \|v - m_0\| \cdot m \in M$. □

Teorema 2.61 (Completeness). Se um espaço normado M é reflexivo, então M é um espaço completo, isto é, um espaço de Banach.

Demonstração. Ver Teorema 4.6-4 em [3], página 241. □

Teorema 2.62 (Teorema do Vetor Mínimo). Seja H um espaço com produto interno e $Y \neq \emptyset$ um subconjunto convexo e completo de H . Então para todo $x \in H$ existe um único $y \in Y$ tal que

$$\delta = \inf_{y_0 \in Y} \|x - y_0\| = \|x - y\|$$

Demonstração. Ver Teorema 3.3-1 em [3], página 144. □

Observação 2.63. Se $M \subset E$ é reflexivo podemos escolher $\epsilon = 0$ no Lema 2.60, pois neste caso para $d = d(v, M)$, existe $m_0 \in M$ tal que $d = \|m_0 - v\|$. De fato, como M é um espaço reflexivo, então pelo Teorema da Completude 2.61 M é um espaço de Banach, ou seja, completo. E como M é um subespaço, então é convexo. Portanto M satisfaz as hipóteses do Teorema do Vetor Mínimo 2.62, então para todo $v \in E$ existe um $m_0 \in M$ tal que $d = \|m_0 - v\|$. Tomando $u = \frac{v-m_0}{\|v-m_0\|}$ teremos que:

$$\|u - m\| = \left\| \frac{v - m_0}{\|v - m_0\|} - m \right\| = \frac{\|v - (m_0 + \|v - m_0\| \cdot m)\|}{\|v - m_0\|} \geq \frac{d}{\|v - m_0\|} = 1,$$

pois $m_0 + \|v - m_0\| \cdot m \in M$.

Teorema 2.64 (Riesz). Seja E um espaço vetorial normado com B_E compacto. Então E tem dimensão finita.

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que $\dim(E) = \infty$. Então existe uma sequência (E_n) de subespaços de dimensão finita de E tais que $E_{n-1} \subset E_n$ e $E_{n-1} \neq E_n$. Pelo Lema 2.60 existe uma sequência (u_n) com $u_n \in E_n$ tal que $\|u_n\| = 1$ e $d(u_n, E_{n-1}) \geq 1/2$. Se $n > m$, temos $E_m \subset E_{n-1}$ e assim $\|u_n - u_m\| \geq d(u_n, E_{n-1}) \geq 1/2$. Portanto (u_n) não admite nenhuma subsequência de Cauchy, logo não admite subsequência convergente, o que contradiz a hipótese de que B_E é compacto. Portanto E tem dimensão finita. $\square$

A partir de agora consideraremos o corpo dos escalares apenas como $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Observamos que todas as demonstrações apresentadas anteriormente, valem não só para $\mathbb{C}$ como para $\mathbb{R}$.

Definição 2.65 (Hiperplano). Seja E um $\mathbb{R}$ -espaço normado. Um *hiperplano* afim é um subconjunto H de E definido por $H = \{x \in E; f(x) = \alpha\} = f^{-1}(\alpha)$, onde f é um dado funcional linear e α é um número real. Denotaremos $H = [f = \alpha]$ e diremos que $f = \alpha$ é a equação de H .

Definição 2.66. Sejam E um $\mathbb{R}$ -espaço normado, e A e B subconjuntos de E . Dizemos que um hiperplano $H = [f = \alpha]$ *separa* A e B se

$$f(x) \leq \alpha \leq f(y), \quad \forall x \in A \quad \forall y \in B.$$

Dizemos que H *separa estritamente* A e B se

$$f(x) < \alpha < f(y), \quad \forall x \in A \quad \forall y \in B.$$

Definição 2.67 (Conjunto Convexo). Seja E um espaço vetorial. Dizemos que $X \subset E$ é *convexo* se para todo $x, y \in X$ tem-se que $\alpha x + (1 - \alpha)y \in X$, para todo $\alpha \in [0, 1]$.

Teorema 2.68 (Hahn-Banach, segunda forma geométrica). Sejam $A \subset E$ e $B \subset E$ dois conjuntos convexos não vazios tais que $A \cap B = \emptyset$. Se A é fechado e B é compacto, então existe um hiperplano fechado que separa estritamente A e B .

Demonstração. Ver Teorema 1.7 em [1], página 7. $\square$

Definição 2.69 (Espaço Ortogonal). Sejam $M \subset E$ e $N \subset E^*$ subconjuntos não vazios. Definimos o *espaço ortogonal* a M por $M^\perp = \{f \in E^*; \langle f, u \rangle = 0, \forall u \in M\}$. Definimos o *espaço ortogonal* a N por $N^\perp = \{u \in E; \langle f, u \rangle = 0, \forall f \in N\}$.

Proposição 2.70. Sejam M um subespaço de E e N um subespaço de E^* . Então:

- (1) $\overline{M} = (M^\perp)^\perp$,
- (2) $\overline{N} \subset (N^\perp)^\perp$.

Demonstração.

(1) $(M^\perp)^\perp$ é fechado, pois dada uma sequência $(u_n) \subset (M^\perp)^\perp$ tal que $u_n \rightarrow u \in E$, então $f(u_n) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e para toda $f \in M^\perp$ e portanto pela continuidade das f 's em $M^\perp \subset E^*$ temos $f(u) = 0$, ou seja, $u \in (M^\perp)^\perp$. Temos ainda que se $u \in M$, então $f(u) = 0$, para todo $f \in M^\perp$, então $u \in (M^\perp)^\perp$, logo $M \subset (M^\perp)^\perp$. Agora seja $y \in \overline{M}$, então existe $(y_n) \subset M \subset (M^\perp)^\perp$ tal que $y_n \rightarrow y$ e, como $(M^\perp)^\perp$ é fechado e $(y_n) \subset (M^\perp)^\perp$, temos que $y \in (M^\perp)^\perp$. Portanto $\overline{M} \subset (M^\perp)^\perp$.

Agora, suponhamos por absurdo que exista $u \in (M^\perp)^\perp$ com $u \notin \overline{M}$. Como $\overline{M}$ é um subespaço fechado, é convexo, e uma vez que $\{u\}$ é unitário, é compacto e convexo. Como $u \notin \overline{M}$, então $\{u\} \cap \overline{M} = \emptyset$. Logo pelo Teorema 2.68 existe um hiperplano $H = [f = \alpha]$ que separa estritamente esses conjuntos, ou seja,

$$f(v) < \alpha < f(u), \forall v \in \overline{M}.$$

Portanto como $\overline{M}$ é um subespaço e f é limitado, então $f = 0$, assim $f \in M^\perp$ e $f(u) = 0$, pois $u \in (M^\perp)^\perp$. Essa contradição, sobre a existência do hiperplano, mostra que $(M^\perp)^\perp \subset \overline{M}$, e portanto $\overline{M} = (M^\perp)^\perp$.

(2) $(N^\perp)^\perp$ é fechado, pois dada uma sequência $(f_n) \subset (N^\perp)^\perp$ tal que $f_n \rightarrow f \in E^*$, então para todo $u \in N^\perp$ temos que $f_n(u) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e portanto converge para $f(u) = 0$, ou seja, $f \in (N^\perp)^\perp$. Temos ainda que, se $f \in N$, então $f(u) = 0$, para todo $u \in N^\perp$. Assim, $f \in (N^\perp)^\perp$, logo $N \subset (N^\perp)^\perp$ e portanto $\overline{N} \subset (N^\perp)^\perp$. $\square$

Proposição 2.71. Seja $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Então:

- (i) $\text{Im}(T)^\perp = N(T^*)$,
- (ii) $\text{Im}(T^*)^\perp = N(T)$,
- (iii) $\overline{\text{Im}(T)} = N(T^*)^\perp$,
- (iv) $\overline{\text{Im}(T^*)} \subset N(T)^\perp$.

Demonstração.

- (i) Temos $f \in N(T^*) \Leftrightarrow T^*f(u) = \langle f, Tu \rangle = 0$, para todo $u \in E \Leftrightarrow \langle f, Tu \rangle = 0$, para todo $Tu \in \text{Im}(T) \Leftrightarrow f \in \text{Im}(T)^\perp$.
- (ii) Temos $u \in N(T) \Leftrightarrow Tu = 0 \Leftrightarrow \langle f, Tu \rangle = 0$, para todo $f \in F^* \Leftrightarrow \langle T^*f, u \rangle = 0$, para todo $T^*f \in \text{Im}(T^*) \Leftrightarrow u \in \text{Im}(T^*)^\perp$.
- (iii) De (i) sabemos que $\text{Im}(T)^\perp = N(T^*)$, então pela Proposição 2.70 item (1) sabemos que $\overline{\text{Im}(T)} = (\text{Im}(T)^\perp)^\perp = N(T^*)^\perp$.
- (iv) De (ii) sabemos que $\text{Im}(T^*)^\perp = N(T)$, então pela Proposição 2.70 item (2) sabemos que $\overline{\text{Im}(T^*)} \subset (\text{Im}(T^*)^\perp)^\perp = N(T)^\perp$. $\square$

Definição 2.72 (Soma direta). Sejam E um espaço vetorial e $X, Y \subset E$ dois subespaços. Dizemos que a soma $X + Y = \{x + y \mid x \in X \text{ e } y \in Y\}$ é uma *soma direta* de subespaços, se $X \cap Y = \{0\}$. Escrevemos $X \oplus Y$.

Definição 2.73 (Codimensão). Sejam E um espaço vetorial e $X \subset E$ um subespaço. Chamamos de *codimensão* de X a dimensão de um subespaço Y tal que $E = X \oplus Y$.

Teorema 2.74 (Alternativa de Fredholm). Seja $T \in \mathcal{K}(E)$. Então:

- (a) $N(I - T)$ tem dimensão finita,
- (b) $\text{Im}(I - T)$ é fechado, e mais precisamente $\text{Im}(I - T) = N(I - T^*)^\perp$,
- (c) $N(I - T) = \{0\} \Leftrightarrow \text{Im}(I - T) = E$,
- (d) $\dim(N(I - T)) = \dim(N(I - T^*))$.

Demonstração.

(a) Seja $E_1 = N(I - T)$. Notemos que $x \in B_{E_1}$ se, e somente se, $x = Tx$ e $\|x\| \leq 1$. Então $x = Tx \in T(B_E)$, logo $B_{E_1} \subset T(B_E) \subset \overline{T(B_E)}$, portanto B_{E_1} é compacto, por ser um fechado dentro de um compacto. Pelo Teorema 2.64 concluímos que E_1 tem dimensão finita.

(b) Seja $f_n = u_n - Tu_n \rightarrow f \neq 0$, tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ temos que $u_n \notin N(I - T)$. Queremos mostrar que $f \in \text{Im}(I - T)$. Denotando $d_n = d(u_n, N(I - T)) \neq 0$, para

todo $n \in \mathbb{N}$. Desde que $N(I - T)$ tem dimensão finita, existe $v_n \in N(I - T)$ tal que $d_n = \|u_n - v_n\|$. Como $v_n - Tv_n = 0$, temos

$$f_n = (u_n - v_n) - T(u_n - v_n). \quad (2.1)$$

Afirmamos que a sequência $\|u_n - v_n\|$ é limitada. Suponha que não. Então existe uma subsequência tal que $\|u_{n_k} - v_{n_k}\| \rightarrow \infty$. Tome $w_n = \frac{(u_n - v_n)}{\|u_n - v_n\|}$. De (2.1) vemos que

$$\begin{aligned} w_{n_k} - Tw_{n_k} &= \frac{(u_{n_k} - v_{n_k})}{\|u_{n_k} - v_{n_k}\|} - T\left(\frac{(u_{n_k} - v_{n_k})}{\|u_{n_k} - v_{n_k}\|}\right) \\ &= \frac{(u_{n_k} - v_{n_k}) - T(u_{n_k} - v_{n_k})}{\|u_{n_k} - v_{n_k}\|} = \frac{f_{n_k}}{\|u_{n_k} - v_{n_k}\|} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

pois f_{n_k} é convergente, logo limitada. Escolhendo uma outra subsequência (ainda indicado por w_{n_k} por simplicidade), podemos assumir que $Tw_{n_k} \rightarrow z$, pois $Tw_{n_k} \in T(B_E)$ e T é compacto. Portanto $w_{n_k} = T(w_{n_k}) + (w_{n_k} - T(w_{n_k})) \rightarrow z + 0 = z$ e, então, teremos que $w_{n_k} - T(w_{n_k}) \rightarrow z - Tz = 0$, ou seja, $z \in N(I - T)$. Deste modo temos que $d(w_{n_k}, N(I - T)) \rightarrow 0$. Por outro lado, como $v_n \in N(I - T)$,

$$d(w_{n_k}, N(I - T)) = \frac{d(u_{n_k}, N(I - T))}{\|u_{n_k} - v_{n_k}\|} = 1,$$

o que é uma contradição. Portanto $\|u_n - v_n\|$ é limitada. Como T é um operador compacto, podemos extrair uma subsequência de tal modo que $T(u_{n_k} - v_{n_k})$ converge para um limite l . De (2.1) segue que $u_{n_k} - v_{n_k} \rightarrow f + l$. Tomando $g = f + l$ e considerando a continuidade do operador $I - T$, temos que $u_{n_k} - v_{n_k} - T(u_{n_k} - v_{n_k}) \rightarrow g - Tg = f + l - l = f$, isto é, $f \in \text{Im}(I - T)$. Isso completa a prova de que o operador $I - T$ tem o conjunto imagem fechado. Como $\text{Im}(I - T) = \overline{\text{Im}(I - T)}$ obtemos pela Proposição 2.71 que

$$\text{Im}(I - T) = N(I - T^*)^\perp.$$

(c) Primeiro mostraremos a ida. Suponha, por absurdo, que

$$E_1 = \text{Im}(I - T) \neq E.$$

Então E_1 é um espaço de Banach e $T(E_1) \subset E_1$. Portanto $T|_{E_1} \in \mathcal{K}(E_1)$ e $E_2 = (I - T)(E_1)$ é um subespaço fechado de E_1 . Além disso, $E_2 \neq E_1$ (pois $(I - T)$ é injetor). Tomando

$E_n = (I - T)^n(E)$, obtemos uma sequência estritamente decrescente de subespaços fechados. Usando o lema de Riesz podemos construir uma sequência (u_n) de tal modo que $u_n \in E_n$, $\|u_n\| = 1$ e $d(u_n, E_{n+1}) \geq 1/2$. Obtemos

$$Tu_n - Tu_m = -(u_n - Tu_n) + (u_m - Tu_m) + (u_n - u_m).$$

Observe que se $n > m$, então $E_{n+1} \subset E_n \subset E_{m+1} \subset E_m$ e portanto

$$-(u_n - Tu_n) + (u_m - Tu_m) + u_n \in E_{m+1}.$$

Segue que $\|Tu_n - Tu_m\| \geq d(u_m, E_{m+1}) \geq 1/2$. Isso é impossível, pois T é um operador compacto. Consequentemente provamos que $\text{Im}(I - T) = E$.

Reciprocamente, suponhamos que $\text{Im}(I - T) = E$. Pela Proposição 2.71 item (i) vemos que $N(I - T^*) = \text{Im}(I - T)^\perp = E^\perp = \{0\}$. Desde que $T^* \in \mathcal{K}(E^*)$, aplicando a etapa anterior obtemos $\text{Im}(I - T^*) = E^*$. Usando novamente a Proposição 2.71 item (ii), concluímos que $N(I - T) = \text{Im}(I - T^*)^\perp = (E^*)^\perp = \{0\}$.

(d) Sejam $d = \dim(N(I - T))$ e $d^* = \dim(N(I - T^*))$. Provaremos inicialmente que $d^* \leq d$. Suponhamos por absurdo que $d < d^*$. Como $N(I - T)$ tem dimensão finita, então admite um complemento em E , que denotaremos por G . Portanto $E = N(I - T) \oplus G$ e existe uma projeção contínua:

$$P : E \rightarrow N(I - T)$$

$$u + v \longmapsto u.$$

Por outro lado, usando o item (b), vemos que $\text{Im}(I - T) = N(I - T^*)^\perp$ tem codimensão finita d^* e portanto tem um complemento em E , que denotaremos por F , de dimensão d^* . Desde que $d < d^*$, existe uma transformação linear $A : N(I - T) \rightarrow F$ que é injetora, mas não é sobrejetora. Seja $S = T + A \circ P$. Como $A \circ P$ tem posto finito, então $S \in \mathcal{K}(E)$. Afirmamos que $N(I - S) = \{0\}$. De fato, se

$$0 = u - Su = u - Tu - (A \circ Pu),$$

então, como $u - Tu \in \text{Im}(I - T)$ e $(A \circ Pu) \in F$,

$$u - Tu = 0 \quad \text{e} \quad A \circ Pu = 0,$$

isto é, $u \in N(I - T)$ e $Au = 0$. Consequentemente $u = 0$, pois A é injetor. Aplicando (c) para o operador S , obtemos que $Im(I - S) = E$. Isso é um absurdo, uma vez que existe algum $f \in F$ com $f \notin Im(A)$, e desta forma a equação $u - Su = f$ não tem solução, pois

$$u - Su = f \Rightarrow u - Tu - (A \circ Pu) = f.$$

Assim provamos que $d^* \leq d$. Aplicando este fato para T^* , obtemos

$$\dim(N(I - T)) \leq \dim(N(I - T^{**})) \leq \dim(N(I - T^*)) \leq \dim(N(I - T)).$$

Mas $N(I - T^{**}) \supset N(I - T)$, pela imersão canônica de T em T^{**} e portanto $d = d^*$. $\square$

Observação 2.75. A Alternativa de Fredholm nos apresenta um resultado sobre um operador compacto e o operador identidade sobre E . Agora sejam $T \in \mathcal{K}(E, F)$ e $S \in \mathcal{L}(E, F)$, onde E, F são espaços de Banach e S é bijetor. Então:

- (a) $N(S - T)$ tem dimensão finita,
- (b) $Im(S - T)$ é fechado, e mais precisamente $Im(S - T) = N(S - T^*)^\perp$,
- (c) $N(S - T) = \{0\} \Leftrightarrow Im(S - T) = E$,
- (d) $\dim(N(S - T)) = \dim(N(S - T^*))$.

$$(a) \dim(N(S - T)) < \infty.$$

De fato, observe que $S^{-1}T \in \mathcal{K}(E)$, pois é a composição de um operador compacto com um operador limitado. Agora, note que pela Alternativa de Fredholm 2.74 temos que $\dim(N(I - S^{-1}T)) < \infty$. Como S é bijetor então $N(S) = \{0\}$, logo

$$\begin{aligned} u \in N(S - T) &\Leftrightarrow (S - T)u = 0 \Leftrightarrow S(I - S^{-1}T)u = 0 \\ &\Leftrightarrow (I - S^{-1}T)u = 0 \Leftrightarrow u \in N(I - S^{-1}T). \end{aligned}$$

Portanto $N(S - T) = N(I - S^{-1}T)$ tem dimensão finita.

$$(b) Im(S - T) \text{ é fechada, mais precisamente, } Im(S - T) = N(S^* - T^*)^\perp.$$

Seja $f_n = (S - T)u_n \rightarrow f$. Então pela continuidade de S^{-1} (resultado que iremos demonstrar no próximo capítulo, no Corolário 3.10) temos que $S^{-1}f_n = u_n - S^{-1}Tu_n \rightarrow S^{-1}f$. Mas como $Im(I - S^{-1}T)$ é fechada, existe $u \in E$ tal que $S^{-1}f = u - S^{-1}Tu$, ou

seja, $f = S(u - S^{-1}Tu) = Su - SS^{-1}Tu = Su - Tu = (S - T)u$. Portanto $Im(S - T)$ é fechado, ou seja, $\overline{Im(S - T)} = Im(S - T)$. E pela Proposição 2.71 item (iii) temos que $\overline{Im(S - T)} = N(S^* - T^*)^\perp$, então como a imagem é fechada teremos a igualdade $Im(S - T) = N(S^* - T^*)^\perp$.

(c) $N(S - T) = \{0\}$ se, e só se, $Im(S - T) = F$.

Se $N(S - T) = \{0\}$, então $N(I - S^{-1}T) = \{0\}$. Portanto $Im(I - S^{-1}T) = E$, então $Im(S - T) = (S - T)(E) = S(I - S^{-1}T)(E) = S((I - S^{-1}T)(E)) = S(E) = F$, pois S é bijetor.

Se $Im(S - T) = F$, então

$$\begin{aligned} Im(I - S^{-1}T) &= (I - S^{-1}T)(E) = S^{-1}(S - T)(E) \\ &= S^{-1}((S - T)(E)) = S^{-1}(F) = E. \end{aligned}$$

Portanto pela Alternativa de Fredholm 2.74 temos que $N(I - S^{-1}T) = \{0\}$, ou seja, $N(S - T) = \{0\}$.

(d) $\dim(N(S - T)) = \dim(N(S^* - T^*))$.

Repare que $(S^*)^{-1} = (S^{-1})^*$. De fato, se $S \in \mathcal{L}(E, F)$, então $S^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$. Agora sejam $S^* : F^* \rightarrow E^*$ e $(S^{-1})^* : E^* \rightarrow F^*$ os adjuntos de S e S^{-1} , respectivamente. Tome $f \in F^*$, então para todo $u \in F$, temos que:

$$((S^{-1})^* \circ S^*)(f)u = (S^{-1})^*(S^*(f))u = (S^*(f))(S^{-1}u) = f(SS^{-1}u) = f(u).$$

Ou seja, a composição é o operador identidade sobre F^* , portanto $(S^{-1})^*$ é o inverso à esquerda de S^* . Agora seja $e \in E^*$, então para todo $v \in E$ vale que:

$$(S^* \circ (S^{-1})^*)(e)v = S^*((S^{-1})^*(e))u = (S^{-1})^*(e)(Su) = e(S^{-1}Su) = e(u)$$

Lembre-se que $N(S - T) = N(I - S^{-1}T)$, então $N(S^* - T^*) = N((I - S^{-1}T)^*)$. Portanto $\dim(N(S - T)) = \dim(N(I - S^{-1}T)) = \dim(N((I - S^{-1}T)^*)) = \dim(N(S^* - T^*))$.

Portanto, as afirmações do Teorema 2.74 (Alternativa de Fredholm) continuam válidas se trocarmos o operador identidade por um operador bijetor limitado.

CAPÍTULO 3

Teoria Espectral em Dimensão Infinita

3.1 O Espectro de um Operador Compacto

No primeiro capítulo trabalhamos com a teoria espectral em dimensão finita e no segundo capítulo trabalhamos com os operadores compactos e a alternativa de Fredholm. Neste capítulo iremos trabalhar com a teoria espectral em espaços normados de qualquer dimensão, concentrando os estudos em operadores compactos.

Seja $E \neq \{0\}$ um espaço normado e $T : E \rightarrow E$ um operador linear. Associamos a T o operador

$$T_\lambda = (T - \lambda I) : E \rightarrow E, \quad (3.1)$$

onde λ é um número complexo e I é o operador identidade em E . O operador T_λ aparecerá naturalmente e será importante no estudo das propriedades espectrais de T .

Definição 3.1 (Operador Resolvente). Se o operador T_λ tem inverso, o denotaremos por $R_\lambda(T)$, ou seja,

$$R_\lambda(T) = T_\lambda^{-1} = (T - \lambda I)^{-1} : E \rightarrow E. \quad (3.2)$$

O operador $R_\lambda(T)$ é chamado de *operador resolvente* de T ou, simplesmente, resolvente de T . Em vez de $R_\lambda(T)$ escreveremos apenas R_λ se o operador T em discussão estiver claro.

O nome “resolvente” é apropriado, pois $R_\lambda(T)$ ajuda a resolver a equação $T_\lambda x = y$. Temos $x = T_\lambda^{-1}y = R_\lambda(T)y$, desde que $R_\lambda(T)$ exista.

Notemos que $R_\lambda(T)$ é um operador linear, pois $R_\lambda(T)$ é a função inversa do operador T_λ e inversos de operadores lineares são operadores lineares. Ver em [3], página 88. Exemplos de operadores que não satisfazem a $N(T) = \{0\} \Leftrightarrow \text{Im}(T) = E$ são osperados salto à esquerda e salto à direita em 2.57.

Para prosseguir nossa investigação de T , T_λ e R_λ precisaremos dos seguintes conceitos, os quais são básicos na teoria espectral.

Definição 3.2 (Conjunto Resolvente e Espectro). Seja $T \in \mathcal{L}(E)$. O *conjunto resolvente*, denotado por $\rho(T)$, é o conjunto definido por:

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid T_\lambda = (T - \lambda I) \text{ é bijetor de } E \text{ em } E\}. \quad (3.3)$$

O espectro, denotado por $\sigma(T)$, é o complemento do conjunto resolvente, isto é, $\sigma(T) = \mathbb{R} \setminus \rho(T)$.

Definição 3.3 (Autovalor e Autoespaço). Um número real λ é dito ser um *autovalor* de T se

$$N(T_\lambda) \neq \{0\}.$$

O conjunto $N(T_\lambda)$ é denominado *autoespaço* de correspondente ao autovalor λ . O conjunto de todos os autovalores de T é denotado por $AV(T)$.

Observação 3.4. No primeiro capítulo definimos como autovalor um escalar λ tal que a equação $Ax = \lambda x$ tenha pelo menos uma solução não trivial, e o autoespaço correspondente a λ é o conjunto de todas as soluções dessa equação. Neste capítulo, definimos de forma diferente, pois não existe matriz de operador em dimensão infinita. Porém as definições são equivalentes para espaços de dimensão finita.

Observação 3.5. Notemos que se $\lambda \in \rho(T)$ então T_λ é bijetor, logo existe T_λ^{-1} . Neste caso, $R_\lambda = T_\lambda^{-1} \in \mathcal{L}(E)$, como demonstraremos mais adiante.

Observação 3.6. Temos a inclusão $AV(T) \subset \sigma(T)$. De fato, se $\lambda \in AV(T)$, então T_λ não é injetor, logo não é bijetor e portanto $\lambda \in \sigma(T) = \mathbb{R} \setminus \rho(T)$. Como veremos nos exemplos ao final do capítulo, esta inclusão pode ser estrita, ou seja, pode existir $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que:

$$N(T_\lambda) = \{0\} \text{ e } Im(T_\lambda) \neq E,$$

isto é, T_λ é injetor, mas não é sobrejetor.

Exemplo 3.7. Como já vimos anteriormente no Exemplo 2.57, o operador salto à direita em l^2 é injetor, mas não é sobrejetor. Estudaremos esse operador mais detalhadamente adiante.

Teorema 3.8 (Teorema da Aplicação Aberta). Sejam E e F dois espaços de Banach e $T : E \rightarrow F$ um operador linear contínuo que é sobrejetor. Então existe uma constante $c > 0$ tal que:

$$B_F(0, c) \subset T(B_E(0, 1)). \quad (3.4)$$

Demonstração. Ver Teorema 2.6 em [1], página 35. □

Observação 3.9. O teorema anterior garante que a imagem direta de um conjunto aberto em E por T é um conjunto aberto em F . De fato, suponhamos que $U \subset E$ é aberto e fixemos $y_0 \in T(U)$. Então existe $x_0 \in U$ tal que $y_0 = Tx_0$. Seja $r > 0$ tal que $B_E(x_0, r) \subset U$. Observe que $B_E(x_0, r) = x_0 + B_E(0, r) \subset U$. Logo:

$$T(B_E(x_0, r)) = T(x_0 + B_E(0, r)) = Tx_0 + T(B_E(0, r)) = y_0 + T(B_E(0, r)) \subset T(U).$$

Aplicando o Teorema 3.8, obtemos $B_F(0, c) \subset T(B_E(0, 1))$, mas observe que pela linearidade do espaço e do operador temos:

$$B_F(0, rc) = r \cdot B_F(0, c) \subset r \cdot T(B_E(0, 1)) = T(r \cdot B_E(0, 1)) = T(B_E(0, r))$$

pois $r > 0$. E com isso concluímos que

$$B_F(y_0, rc) \subset T(U).$$

Portanto T leva abertos de E em abertos de F , desde que E e F sejam espaços de Banach e T seja limitado e sobrejetor.

Corolário 3.10. Sejam E e F dois espaços de Banach e $T : E \rightarrow F$ um operador linear contínuo que é bijetor. Então o operador inverso $T^{-1} : F \rightarrow E$ é contínuo.

Demonstração. Se $U \subset E$ é aberto, então, pela Observação 3.9, temos que $(T^{-1})^{-1}(U) = T(U)$ é aberto. Portanto T^{-1} é um operador contínuo. $\square$

Com isso vemos que a afirmação feita na Observação 3.5 é verdadeira. Basta aplicar o Corolário 3.10 para o caso $E = F$.

Definição 3.11 (Contração). Seja $f : X \rightarrow Y$ uma função, onde X e Y são espaços normados. Dizemos que f é uma *contração* se existe $c \in (0, 1)$ tal que para todo $x, y \in X$ tem-se que $\|f(x) - f(y)\| \leq c \cdot \|x - y\|$.

Teorema 3.12 (Teorema do Ponto Fixo de Banach). Seja $f : X \rightarrow X$ uma função, onde X é um espaço completo e f é uma contração. Então existe um único $x \in X$ tal que $f(x) = x$.

Demonstração. Tome qualquer $x_0 \in X$ e defina a sequência (x_n) dada por $x_n = f^n x_0$. Agora observe que para qualquer $m \in \mathbb{N}$, usando recursivamente a desigualdade $\|f(x) - f(y)\| \leq c \cdot \|x - y\|$, temos:

$$\begin{aligned} \|x_{m+1} - x_m\| &= \|f(x_m) - f(x_{m-1})\| \leq c \cdot \|x_m - x_{m-1}\| \\ &= c \cdot \|f(x_{m-1}) - f(x_{m-2})\| \leq c^2 \cdot \|x_{m-1} - x_{m-2}\| \\ &= c^2 \cdot \|f(x_{m-2}) - f(x_{m-3})\| \leq c^3 \cdot \|x_{m-2} - x_{m-3}\| \\ &\dots = c^{m-1} \cdot \|f(x_1) - f(x_0)\| \leq c^m \cdot \|x_1 - x_0\|. \end{aligned}$$

Pela uso recursivo da desigualdade triangular e pela fórmula da soma de uma progressão geométrica obtemos, para todo $n > m$,

$$\begin{aligned} \|x_m - x_n\| &\leq \sum_{i=0}^{n-m-1} \|x_{m+i} - x_{m+i+1}\| \leq \sum_{i=0}^{n-m-1} (c^{m+i} \cdot \|x_1 - x_0\|) \\ &= \left(\sum_{i=0}^{n-m-1} c^{m+i} \right) \cdot \|x_1 - x_0\| = c^m \cdot \frac{1 - c^{n-m}}{1 - c} \cdot \|x_1 - x_0\|. \end{aligned}$$

Desde que $c \in (0, 1)$, temos $1 - c^{n-m} < 1$, pois $n > m$. Consequentemente,

$$\|x_m - x_n\| \leq \frac{c^m}{1 - c} \cdot \|x_1 - x_0\|.$$

Como $c \in (0, 1)$ e $\|x_1 - x_0\|$ é uma constante, $\|x_m - x_n\|$ fica suficientemente pequeno quando m é suficientemente grande e $n > m$, portanto (x_n) é uma sequência de Cauchy. E X é completo, então existe $x \in X$ tal que $x_n \rightarrow x$. Agora, observe que:

$$\begin{aligned}\|x - f(x)\| &= \|x - x_m + x_m - f(x)\| \leq \|x - x_m\| + \|x_m - f(x)\| \\ &= \|x - x_m\| + \|f(x_{m-1}) - f(x)\| \leq \|x - x_m\| + c \cdot \|x_{m-1} - x\|,\end{aligned}$$

e podemos fazer a segunda parte da desigualdade suficientemente pequena, pois $x_m \rightarrow x$. Disso, concluímos que $\|x - f(x)\| = 0$, ou seja, $x - f(x) = 0$ ou $x = f(x)$. Isso mostra que f tem um ponto fixo. Para finalizar, suponhamos que exista um outro ponto fixo, $y \in X$ tal que $f(y) = y$. Então:

$$\|x - y\| = \|f(x) - f(y)\| \leq c \cdot \|x - y\| \Leftrightarrow 0 \leq (c - 1) \cdot \|x - y\|,$$

o que implica que $c - 1 \geq 0$, ou seja, $c \geq 1$, pois $\|x - y\| \geq 0$. Absurdo. Portanto f possui um único ponto fixo. $\square$

Proposição 3.13. O espectro de $\sigma(T)$ de um operador limitado $T : E \rightarrow E$, onde E é um espaço de Banach, é compacto e

$$\sigma(T) \subset [-\|T\|, \|T\|].$$

Demonstração. Seja $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $|\lambda| > \|T\|$. Queremos mostrar que T_λ é bijetor, o que implica que $\sigma(T) \subset [-\|T\|, \|T\|]$. Dado $f \in E$, a equação $T_\lambda u = Tu - \lambda u = f$ tem uma única solução. Reescrevendo a equação, obtemos $u = \lambda^{-1}(Tu - f)$. Agora, considerando a função $S : E \rightarrow E$, dada por $Sv = \lambda^{-1}(Tv - f)$, temos que S é uma contração. De fato, sejam $v, w \in E$. Temos:

$$\begin{aligned}\|Sv - Sw\| &= \|\lambda^{-1}(Tv - f) - \lambda^{-1}(Tw - f)\| = \|\lambda^{-1}(Tv - f - Tw + f)\| \\ &= \frac{\|Tv - Tw\|}{|\lambda|} = \frac{\|T(v - w)\|}{|\lambda|} \leq \frac{\|T\|}{|\lambda|} \cdot \|v - w\|.\end{aligned}$$

Observe que $\frac{\|T\|}{|\lambda|} < 1$, pois $\|T\| < |\lambda|$. Então $S : E \rightarrow E$ é uma contração e E é um espaço de Banach, logo completo. Aplicando o Teorema 3.12 (Teorema do Ponto Fixo de Banach) temos que existe um único $u \in E$ tal que $Su = u$, ou seja $Tu - \lambda u = f$. Portanto T_λ é bijetor e consequentemente $\sigma(T) \subset [-\|T\|, \|T\|]$.

Agora mostraremos que $\rho(T) = \mathbb{R} \setminus \sigma(T)$ é aberto. Inicialmente tome $\lambda_0 \in \rho(T)$. Dado $\lambda \in \mathbb{R}$ (suficientemente próximo de λ_0) e $f \in E$, tentaremos resolver a equação

$$Tu - \lambda u = f. \quad (3.5)$$

A equação (3.5) pode ser reescrita como

$$Tu - \lambda_0 u = f + (\lambda - \lambda_0)u,$$

isto é,

$$u = (T - \lambda_0 I)^{-1}[f + (\lambda - \lambda_0)u] = R_{\lambda_0}[f + (\lambda - \lambda_0)u]. \quad (3.6)$$

A equação (3.6) é válida desde que $\lambda_0 \in \rho(T)$, dada a Observação 3.5. Agora podemos definir uma função $S : E \rightarrow E$, dada por $Sv = R_{\lambda_0}[f + (\lambda - \lambda_0)v]$, para todo $v \in E$. Temos que S é uma contração desde que λ seja suficientemente próximo de λ_0 . De fato, se $v, w \in E$ temos:

$$\begin{aligned} \|Sv - Sw\| &= \|R_{\lambda_0}[f + (\lambda - \lambda_0)v] - R_{\lambda_0}[f + (\lambda - \lambda_0)w]\| \\ &= \|R_{\lambda_0}[(\lambda - \lambda_0)(v - w)]\| \\ &= \|(\lambda - \lambda_0) \cdot R_{\lambda_0}(v - w)\| \\ &= |\lambda - \lambda_0| \|R_{\lambda_0}(v - w)\| \leq |\lambda - \lambda_0| \|R_{\lambda_0}\| \|v - w\|, \end{aligned}$$

então S é uma contração, pois $|\lambda - \lambda_0| \cdot \|R_{\lambda_0}\| < 1$. Aplicando novamente o Teorema 3.12 (Teorema do Ponto Fixo de Banach) a equação (3.6) tem uma única solução para todo $f \in E$, logo T_λ é uma bijeção e portanto $\lambda \in \rho(T)$, como queríamos. Portanto $\rho(T)$ é aberto e, conseqüentemente, $\sigma(T)$ é fechado. Como já mostramos que o espectro é limitado, então $\sigma(T)$ é compacto. $\square$

Teorema 3.14. Seja $T \in \mathcal{K}(E)$ com $\dim E = \infty$. Temos:

- (a) $0 \in \sigma(T)$,
- (b) $\sigma(T) \setminus \{0\} = AV(T) \setminus \{0\}$,
- (c) Um dos seguintes casos é válido:

- $\sigma(T) = \{0\}$,
- $\sigma(T)$ é um conjunto finito,
- $\sigma(T)$ é uma sequência convergindo para 0.

Demonstração.

(a) Suponha que a afirmação não é válida, isto é, $0 \notin \sigma(T)$. Então $T = T - 0I$ é bijetor e pela Observação 3.5 temos que $T^{-1} \in \mathcal{L}(E)$. Agora, aplicando a Proposição 2.48 temos $I = T \circ T^{-1} \in \mathcal{K}(E)$, então $\overline{I(B_E)} = B_E$ é compacto e, conseqüentemente, pelo Teorema 2.64 (Teorema de Riesz) $\dim E < \infty$. Absurdo, pois por hipótese, E tem dimensão infinita. Portanto $0 \in \sigma(T)$.

(b) Seja $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$. Queremos mostrar que λ é um autovalor de T . Caso não seja, então $N(T - \lambda I) = \{0\}$. Tomemos $u \in N(T - \lambda I)$. Então, como $\lambda \neq 0$,

$$(T - \lambda I)u = 0 \Leftrightarrow -\lambda \cdot \left(\frac{1}{-\lambda} T + I \right) u = 0 \Leftrightarrow \left(I - \frac{1}{\lambda} T \right) u = 0.$$

Portanto $\{0\} = N(T - \lambda I) = N(I - \frac{1}{\lambda} T)$, pela Proposição 2.38 sabemos que $\frac{1}{\lambda} T \in \mathcal{K}(E)$ e pela Alternativa de Fredholm item (c) (Teorema 2.74) temos que $Im(I - \frac{1}{\lambda} T) = E$. Agora observemos que

$$Im(T - \lambda I) = Im \left[\frac{\lambda}{\lambda} (T - \lambda I) \right] = \lambda Im \left(I - \frac{1}{\lambda} T \right) = \lambda E = E,$$

pois $\lambda \neq 0$. Portanto $T - \lambda I$ é bijetor, logo $\lambda \in \rho(T)$. Absurdo, pois por hipótese $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$, ou seja, $\lambda \in AV(T)$ e com isso $\sigma(T) \setminus \{0\} \subset AV(T)$. Por outro lado, pela Observação 3.6 sabemos que $AV(T) \subset \sigma(T)$. Portanto $\sigma(T) \setminus \{0\} = AV(T) \setminus \{0\}$. $\square$

Lema 3.15. Sejam $T \in \mathcal{K}(E)$ e $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de números reais, distintos dois a dois, tal que

$$\lambda_n \rightarrow \lambda$$

e

$$\lambda_n \in \sigma(T) \setminus \{0\} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Então $\lambda = 0$. Em outras palavras, todos os pontos de $\sigma(T) \setminus \{0\}$ são pontos isolados.

Demonstração. Sabemos do Teorema 3.14 item (b) que $\lambda_n \in AV(T)$; Tome $e_n \in N(T - \lambda_n I) \setminus \{0\}$ de tal modo que $(T - \lambda_n I)e_n = 0$. Seja E_n o espaço gerado por $\{e_1, \dots, e_n\}$. Afirmamos que $E_n \subset E_{n+1}$, $E_n \neq E_{n+1}$ para todo n . Mostraremos por indução, para $n = 1$ só existe o conjunto E_1 e logo vale. Agora nossa hipótese de indução

diz que vale para um n qualquer, ou seja, que $\{e_1, \dots, e_n\}$ é um conjunto linearmente independente. Suponha por absurdo que $e_{n+1} = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$. Então

$$Te_{n+1} = \lambda_{n+1}e_{n+1} = \lambda_{n+1} \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_{n+1} e_i$$

e

$$Te_{n+1} = T\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i Te_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i e_i.$$

Tirando a diferença das duas formas de Te_{n+1} obtemos

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_{n+1} e_i - \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i e_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i (\lambda_{n+1} - \lambda_i) e_i = 0.$$

Isto significa que $\alpha_i (\lambda_{n+1} - \lambda_i) = 0$, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, pois por hipótese $\{e_1, \dots, e_n\}$ é um conjunto linearmente independente. Com isso, $\alpha_i = 0$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, pois $\lambda_i \neq \lambda_j$ sempre que $i \neq j$ por hipótese, então $e_{n+1} = 0$. Absurdo, desde que e_{n+1} é um autovetor, portanto não nulo. Com isso, provamos que $E_n \subset E_{n+1}$, $E_n \neq E_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Aplicando o Lema 2.60 (Lema de Riesz), podemos construir uma sequência $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de tal modo que $u_n \in E_n$, $\|u_n\| = 1$ e $d(u_n, E_{n-1}) \geq \frac{1}{2}$ para todo $n \geq 2$. Para $n > m \geq 2$ temos:

$$E_{m-1} \subset E_m \subset E_{n-1} \subset E_n.$$

Por outro lado, se $v \in (T - \lambda_n)E_n$, então existe $u \in E_n$ tal que $(T - \lambda_n I)u = v$, onde $u = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$. De fato,

$$\begin{aligned} (T - \lambda_n I)u &= (T - \lambda_n I) \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i (T - \lambda_n I)e_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i (Te_i - \lambda_n e_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i (\lambda_i e_i - \lambda_n e_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i (\lambda_i - \lambda_n) e_i = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i (\lambda_i - \lambda_n) e_i = v. \end{aligned}$$

Com isso $v \in E_{n-1}$. Logo $(T - \lambda_n)E_n \subset E_{n-1}$. Portanto temos:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{Tu_n}{\lambda_n} - \frac{Tu_m}{\lambda_m} \right\| &= \left\| \frac{Tu_n - \lambda_n u_n}{\lambda_n} - \frac{Tu_m - \lambda_m u_m}{\lambda_m} + u_n - u_m \right\| \\ &= \left\| u_n - \left[\frac{(T - \lambda_m I)u_m}{\lambda_m} - \frac{(T - \lambda_n I)u_n}{\lambda_n} + u_m \right] \right\| \\ &\geq d(u_n, E_{n-1}) \geq \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

uma vez que $\frac{(T - \lambda_m I)u_m}{\lambda_m} - \frac{(T - \lambda_n I)u_n}{\lambda_n} + u_m \in E_{n-1}$, pois é uma combinação linear dos vetores $(T - \lambda_m I)u_m \in E_{m-1} \subset E_{n-1}$, $(T - \lambda_n I)u_n \in E_{n-1}$ e $u_m \in E_m \subset E_{n-1}$.

Se $\lambda_n \rightarrow \lambda$ e $\lambda \neq 0$, como $T \in \mathcal{K}(E)$ e $u_n \in B_E$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então podemos assumir, pela definição de operador compacto, uma subsequência adequada de (Tu_n) que seja convergente, que seguiremos denotando por (Tu_n) . Assim,

$$\left\| \frac{Tu_n}{\lambda_n} - \frac{Tu_m}{\lambda_m} \right\| \rightarrow \left\| \frac{Tu}{\lambda} - \frac{Tu}{\lambda} \right\| = 0.$$

Isso é um absurdo, já que $\left\| \frac{Tu_n}{\lambda_n} - \frac{Tu_m}{\lambda_m} \right\| \geq \frac{1}{2}$ sempre que $n > m \geq 2$. Então $\lambda = 0$. $\square$

Demonstração do item (c) do Teorema 3.14.

Para todo inteiro $n \geq 1$ o conjunto

$$\sigma(T) \cap \left\{ \lambda \in \mathbb{R} \mid |\lambda| \geq \frac{1}{n} \right\}$$

é finito (caso contrário, desde que $\sigma(T)$ é um conjunto compacto, existiria uma sequência de números reais, distintos dois a dois, convergente para $\lambda \geq \frac{1}{n}$, e isso contradiz o Lema 3.15.) Consequentemente, se $\sigma(T)$ possui uma infinidade de pontos distintos, podemos ordená-los como uma sequência convergindo para 0. $\square$

Observação 3.16. Dada qualquer sequência (α_n) convergindo para 0, existe um operador compacto T de tal modo que $\sigma(T) = (\alpha_n) \cup \{0\}$. Em l^2 é suficiente considerar o operador $Tu = (\alpha_1 u_1, \alpha_2 u_2, \dots, \alpha_n u_n, \dots)$, onde $u = (u_1, u_2, \dots, u_n, \dots)$. Seja $\alpha = \sup\{(\alpha_n)\}$. Então:

$$\|Tu\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n u_n|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| |u_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha| |u_n| = |\alpha| \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = |\alpha| \|u\| \leq \infty$$

Portanto $Tu \in l^2$ e T está de fato bem definida. Observe também que se $T_n u = (\alpha_1 u_1, \dots, \alpha_n u_n, 0, 0, \dots)$, então T_n converge para T , onde cada T_n é de posto finito, ou seja, T é limite de operadores de posto finito, logo, pelo Corolário 2.46, T é compacto. Com este exemplo, vemos que para um operador T qualquer, podemos ter $0 \in AV(T)$ ou $0 \notin AV(T)$. No caso em que 0 é um autovalor, o núcleo ou autoespaço correspondente, $N(T)$, pode ser de dimensão finita ou infinita.

3.2 Decomposição Espectral de um Operador Compacto Autoadjunto

Definição 3.17 (Espaço de Hilbert). Dizemos que H um espaço vetorial real munido com um produto interno é um *espaço de Hilbert* se H é completo com a norma induzida pelo produto interno.

Seja $E = H$ um espaço de Hilbert e $T \in \mathcal{L}(H)$. É possível identificar H^* e H , e assim podemos ver T^* como um operador limitado de H em si mesmo (Veja a seção 5.2 do Brezis). Usaremos a partir de agora $S_H = \{u \in H \mid \langle u, u \rangle = 1\}$, onde H representa um espaço de Hilbert.

Definição 3.18 (Operador Autoadjunto). Um operador $T \in \mathcal{L}(H)$ é dito *auto adjunto* se $T^* = T$, isto é,

$$\langle Tu, v \rangle = \langle u, Tv \rangle \quad \forall u, v \in H.$$

Definição 3.19 (Denso). Sejam E um espaço normado e $X \subset Y \subset E$. Dizemos que X é *denso* em Y se $Y \subset \overline{X}$. Observe que se $E = Y$ ou Y é fechado vale a igualdade.

Definição 3.20 (Enumerável). Seja X um conjunto qualquer. Dizemos que X é *enumerável* se X é finito ou existe uma função bijetora de X em $\mathbb{N}$.

Definição 3.21 (Espaço separável). Seja E um espaço normado. Dizemos que $Y \subset E$ é *separável* se existe um conjunto $X \subset Y$ tal que X é enumerável e denso em Y . Observação: se $Y = E$, então dizemos que o espaço é separável.

Definição 3.22 (Base de Hilbert). Seja H um espaço de Hilbert. Dizemos que uma sequência $(e_n)_{n \geq 1} \subset H$ é uma *base ortonormal* ou *base de Hilbert* se satisfaz as seguintes propriedades:

- (i) $\|e_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\langle e_n, e_m \rangle = 0$, sempre que $m \neq n$;
- (ii) O espaço gerado por $(e_n)_{n \geq 1}$ é denso em H .

Observação 3.23. Observe que agora estamos trabalhando com H sendo um espaço de Hilbert sobre o corpo $\mathbb{R}$. Então as seguintes considerações são válidas:

- (a) Sobre a definição de produto interno, temos que $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle} = \langle y, x \rangle$, pois $\langle y, x \rangle \in \mathbb{R}$.

(b) Do item (a) concluímos que o produto interno real é linear na segunda coordenada, pois fixando $x \in H$ na primeira coordenada, temos $\langle x, \lambda y + z \rangle = \lambda \cdot \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$, para todo $y, z \in H$ e para todo $\lambda \in \mathbb{C}$.

(c) O operador identidade é autoadjunto, isto é, $\langle Ix, y \rangle = \langle x, Iy \rangle$.

(d) Uma combinação linear de operadores autoadjuntos é um operador autoadjunto. De fato, se $\lambda \in \mathbb{C}$ e $S, T \in \mathcal{L}(H)$ são auto adjuntos, então:

$$\langle (\lambda T + S)x, y \rangle = \lambda \cdot \langle Tx, y \rangle + \langle Sx, y \rangle = \lambda \cdot \langle x, Ty \rangle + \langle x, Sy \rangle = \langle x, (\lambda T + S)y \rangle.$$

(e) Se H é um espaço de Hilbert e $T \in \mathcal{L}(H)$ é autoadjunto, então $\text{Im}(T)^\perp = N(T)$. De fato, $u \in N(T) \Leftrightarrow Tu = 0 \Leftrightarrow \langle Tu, v \rangle = 0$, para todo $v \in H \Leftrightarrow \langle u, Tv \rangle = 0$ para todo $v \in H \Leftrightarrow \langle u, w \rangle = 0$ para todo $w \in \text{Im}(T)$.

Proposição 3.24. Seja $T \in \mathcal{L}(H)$ um operador auto adjunto. Denotamos

$$m = \inf_{u \in S_H} \langle Tu, u \rangle \quad e \quad M = \sup_{u \in S_H} \langle Tu, u \rangle$$

Então $\sigma(T) \subset [m, M]$ e $m, M \in \sigma(T)$. Além disso, $\|T\| = \max\{|m|, |M|\}$.

Demonstração. Seja $\lambda > M$. Provaremos que $\lambda \in \rho(T)$. Temos:

$$\langle Tu, u \rangle = \left\langle \|u\| T \left(\frac{u}{\|u\|} \right), \|u\| \frac{u}{\|u\|} \right\rangle = \|u\|^2 \left\langle T \left(\frac{u}{\|u\|} \right), \frac{u}{\|u\|} \right\rangle \leq M \|u\|^2,$$

onde $u \in H \setminus \{0\}$. Também vale para $u = 0$, pois $0 = \langle Tu, u \rangle \leq M \|u\|^2 = 0$. Ou seja,

$$\langle Tu, u \rangle \leq M \|u\|^2, \quad \forall u \in H,$$

e portanto:

$$\langle \lambda u - Tu, u \rangle = \lambda \langle u, u \rangle - \langle Tu, u \rangle \geq \lambda \|u\|^2 - M \|u\|^2 = \|u\|^2 \cdot (\lambda - M), \quad \forall u \in H,$$

onde $\lambda - M > 0$. Aplicando a Desigualdade de Cauchy-Schwarz 2.11, temos:

$$\|(\lambda I - T)u\| \|u\| \geq |\langle (\lambda I - T)u, u \rangle| \geq \|u\|^2 \cdot (\lambda - M),$$

ou seja, $\|(\lambda I - T)u\| \geq (\lambda - M) \cdot \|u\|$, para todo $u \in H$. Observe que se $(\lambda I - T)u = 0$, então $u = 0$, pois $(\lambda - M) \cdot \|u\| \leq \|(\lambda I - T)u\| = 0$, e assim, $\|u\| = 0$, ou seja, T é injetor. Pela Observação 3.23 itens (c) e (d) temos que $\lambda I - T$ é autoadjunto e do item (e) temos que $\text{Im}(T)^\perp = \{0\}$, ou seja, a imagem de T contém uma base de Hilbert de H , isto é,

$\overline{Im(T)} = H$. Agora, tome $y \in H$. Então existe uma sequência $x_n \in H$ tal que $Tx_n \rightarrow y$, ou seja, (Tx_n) é convergente, logo de Cauchy. Dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned} (\lambda - M) \cdot \|x_n - x_m\| &\leq \|(\lambda I - T)(x_n - x_m)\| = \|(\lambda I - T)x_n - (\lambda I - T)x_m\| \\ &< (\lambda - M) \cdot \epsilon \Rightarrow \|x_n - x_m\| < \epsilon, \end{aligned}$$

sempre que $n \geq n_0$. Portanto (x_n) é de Cauchy e como H é completo existe $x \in H$ tal que $x_n \rightarrow x$. Como T é contínua, então $Tx_n \rightarrow Tx$, e como o limite é único, $y = Tx \in Im(T)$. Portanto $Im(T) = H$ e T é sobrejetor. E com isso, deduzimos que $\lambda I - T$ é bijetor e consequentemente $\lambda \in \rho(T)$. Analogamente, se $\lambda < m$ teremos que

$$\langle (T_\lambda)u, u \rangle = \langle Tu, u \rangle - \lambda \langle u, u \rangle \geq m\|u\|^2 - \lambda\|u\|^2 = (m - \lambda)\|u\|^2 \quad \forall u \in H$$

onde $m - \lambda > 0$. E, com isso, concluímos que $\sigma(T) \subset [m, M]$.

Essa foi a primeira parte da demonstração. O restante pode ser encontrado na Proposição 6.9 em [1], página 165. $\square$

Corolário 3.25. Seja $T \in \mathcal{L}(H)$ um operador autoadjunto tal que $\sigma(T) = \{0\}$. Então $T = 0$.

Demonstração. Suponhamos por absurdo que $T \neq 0$. Então $\|T\| \geq 0$. Pela proposição anterior temos que $m \neq 0$ ou $M \neq 0$, pois $\|T\| = \max\{|m|, |M|\} \geq 0$. Suponhamos sem perda de generalidade que $m \neq 0$, então pela Proposição 3.24 temos que $0 \neq m \in \sigma(T) = \{0\}$, absurdo. Portanto $T = 0$. $\square$

Teorema 3.26. Todo espaço de Hilbert separável possui uma base ortonormal.

Demonstração. Ver Teorema 5.11 em [1], página 143. $\square$

Observação 3.27 (Existência do Vetor Mínimo). Seja H um espaço com produto interno e $\emptyset \neq Y \subset H$. Para todo $x \in H$, o Teorema do Vetor Mínimo 2.62 nos garante a existência e unicidade de um vetor $y \in Y$, mas para a demonstração da existência basta que Y seja completo. Caso seja convexo também obteremos a unicidade.

Observação 3.28 (Axioma da Escolha). Seja X um conjunto de conjuntos não vazios, isto é, se $y \in X$, então y é um conjunto e $y \neq \emptyset$. O Axioma da Escolha nos diz que existe uma função escolha

$$f : X \rightarrow \cup X, \text{ onde } \cup X = \bigcup_{z \in X} z, \text{ tal que } f(z) \in z, \text{ para todo } z \in X.$$

Teorema 3.29. Seja Y um subconjunto de um espaço de Hilbert H . Então:

- (a) Y é completo se, e somente se, Y é fechado.
- (b) Se Y é um subespaço de dimensão finita, então Y é completo.
- (c) Se H é separável e Y é fechado, então Y também é. De forma mais geral, todo subconjunto fechado de um espaço com produto interno separável é um espaço separável.

Demonstração.

(a) ($\Rightarrow$) Se (x_n) é uma sequência em Y que converge para algum $x \in H$, então pela Observação 2.24 temos (x_n) é uma sequência de Cauchy. Como Y é completo então (x_n) converge para algum $y \in Y$. Então pela Proposição 2.21 temos que $x = y \in Y$ e como (x_n) é arbitrária concluímos que Y é fechado.

($\Leftarrow$) Se (x_n) é uma sequência de Cauchy em $Y \subset H$, então, como H é completo, então (x_n) convergente para algum $x \in H$. Agora, como Y é fechado teremos que $x \in Y$. Portanto Y é completo já que (x_n) é uma sequência arbitrária.

(b) Sejam $(x_n) \subset Y$ uma sequência de Cauchy e $e = (e_1, \dots, e_k)$ uma base ortonormal de Y . Então para todo $n \in \mathbb{N}$ temos que $x_n = \sum_{i=1}^k \alpha_{in} e_i$, onde $\alpha_{in} \in \mathbb{C}$. Agora dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n - x_m\|^2 < \epsilon^2$, sempre que $n, m \geq n_0$. Observe que:

$$\begin{aligned} \|x_n - x_m\|^2 &= \left\| \sum_{i=1}^k \alpha_{in} e_i + \sum_{i=1}^k \alpha_{im} e_i \right\|^2 = \left\| \sum_{i=1}^k (\alpha_{in} - \alpha_{im}) e_i \right\|^2 \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^k (\alpha_{in} - \alpha_{im}) e_i, \sum_{i=1}^k (\alpha_{in} - \alpha_{im}) e_i \right\rangle \\ &= \left(\sum_{i=1}^k (\alpha_{in} - \alpha_{im}) \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^k \overline{(\alpha_{jn} - \alpha_{jm})} \right) \cdot \langle e_i, e_j \rangle \\ &= \sum_{i=1}^k |\alpha_{in} - \alpha_{im}|^2 < \epsilon^2 \Rightarrow |\alpha_{in} - \alpha_{im}| < \epsilon, \end{aligned}$$

sempre que $n \geq n_0$, onde $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$, pois e é uma base ortonormal. Então, para todo $i = 1, \dots, k$, temos que $(\alpha_{in}) \subset \mathbb{C}$ é uma sequência de Cauchy. Como $\mathbb{C}$ é completo existem escalares α_i , para todo $i = 1, \dots, k$, tais que $\alpha_{in} \rightarrow \alpha_i$. Desta forma, $x_n \rightarrow x \in Y$, onde $x = \sum_{i=1}^k \alpha_i e_i$. De fato, dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|\alpha_{in} - \alpha_i| < \frac{\epsilon}{k}$, para todo

$i = 1, \dots, k$, sempre que $n \geq n_0$. Agora, observe que:

$$\begin{aligned} \|x_n - x\| &= \left\| \sum_{i=1}^k \alpha_{in} e_i - \sum_{i=1}^k \alpha_i e_i \right\| = \left\| \sum_{i=1}^k (\alpha_{in} - \alpha_i) e_i \right\| \\ &\leq \sum_{i=1}^k (|\alpha_{in} - \alpha_i| \cdot \|e_i\|) < \sum_{i=1}^k \frac{\epsilon}{k} = \epsilon, \end{aligned}$$

sempre que $n \geq n_0$, lembrando que $\|e_i\| = 1$, pois e é uma base ortonormal. Portanto (x_n) é convergente e, conseqüentemente, Y é completo.

(c) De fato, para Y enumerável nada há para demonstrar, pois $Y \subset \bar{Y}$.

Agora suponhamos que Y é não enumerável. Como H é separável, existe $Z \subset H$ enumerável tal que $\bar{Z} = H$. Recordando que $\bar{Y}$ é um fechado em um espaço completo, então pelo item (a) teremos que $\bar{Y}$ é completo.

Agora, para todo $z \in Z$, pela Observação da Existência do Vetor Mínimo 3.27, existe $y \in \bar{Y}$ tal que $d(z, \bar{Y}) = \|z - y\|$. Denote por X_z o conjunto de todos os vetores y tais que $d(z, \bar{Y}) = \|z - y\|$. Note que $X_z \neq \emptyset$, para todo $z \in Z$. Logo existe uma função $g : Z \rightarrow \{X_z \mid z \in Z\} = W$ tal que $g(z) = X_z$.

Consideremos a função escolha do Axioma da Escolha 3.28 sobre W , sendo $h : W \rightarrow X$, dada por $h(X_z) = y$ de forma que y satisfaz $d(z, \bar{Y}) = \|z - y\|$. Tome $f : Z \rightarrow X$ dada por $f = h \circ g$, onde

$$X = \bigcup_{z \in Z} X_z.$$

Se $y_0 \in Y$, então existe uma sequência $(x_n) \subset Z$ tal que $x_n \rightarrow y_0$. Dado $\epsilon > 0$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n - y_0\| < \frac{\epsilon}{2}$, sempre que $n \geq n_1$.

Observe que, como $x_n \rightarrow y_0 \in Y \subset \bar{Y}$, então $d(x_n, \bar{Y}) \rightarrow 0$, pois

$$d(x_n, \bar{Y}) = \inf_{y \in \bar{Y}} \|x_n - y\| \leq \|x_n - y_0\| \rightarrow 0.$$

Portanto, existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, \bar{Y}) < \frac{\epsilon}{2}$, sempre que $n \geq n_2$.

Tome $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, então

$$\begin{aligned}\|f(x_n) - y_0\| &= \|y_n - y_0\| = \|y_n - x_n + x_n - y_0\| \\ &\leq \|y_n - x_n\| + \|x_n - y_0\| \\ &= d(x_n, \overline{Y}) + \|x_n - y\| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,\end{aligned}$$

sempre que $n \geq n_0$ e onde $y_n = f(x_n)$, ou seja, $y_n \rightarrow y_0$. Portanto $Y \subset \overline{f(Z)}$, com $f(Z)$ enumerável, pois Z é enumerável. Portanto Y é separável. □

O próximo teorema é um resultado fundamental. Ele afirma que todo operador compacto autoadjunto pode ser *diagonalizado* em alguma base adequada.

Definição 3.30 (Soma de Hilbert). Seja (E_n) uma sequência de subespaços fechados de H . Dizemos que H é um *soma de Hilbert* dos E_n 's e escrevemos $H = \oplus_n E_n$ se:

(a) Os espaços E_n 's são mutuamente ortogonais, isto é,

$$\langle u, v \rangle = 0 \quad \forall u \in E_n \quad \forall v \in E_m, \quad n \neq m,$$

(b) O espaço vetorial gerado por $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ é denso em H .

Teorema 3.31. Sejam H um espaço de Hilbert separável e $T \in \mathcal{K}(H)$ um operador autoadjunto. Então existe uma base de Hilbert composta de autovalores de T .

Demonstração. Seja $(\lambda_n)_{n \geq 1}$ uma sequência, não necessariamente infinita de todos os (não nulos e distintos dois a dois) autovalores de T (veja o Teorema 3.14). Façamos:

$$\lambda_0 = 0, \quad E_0 = N(T) \quad \text{e} \quad E_n = N(T - \lambda_n I), \quad \forall n \geq 1.$$

Recordando que

$$0 \leq E_0 \leq \infty \quad \text{e} \quad 0 < E_n < \infty.$$

Afirmamos que H é a soma de Hilbert dos E_n 's, $n = 0, 1, 2, \dots$:

(i) Os espaços $(E_n)_{n \geq 1}$ são mutualmente ortogonais.

De fato, se $u \in E_m$ e $v \in E_n$, com $n \neq m$, então

$$Tu = \lambda_m u \quad \text{e} \quad Tv = \lambda_n v,$$

de modo a

$$\lambda_m \langle u, v \rangle = \langle Tu, v \rangle = \langle u, Tv \rangle = \lambda_n \langle u, v \rangle,$$

ou seja,

$$\lambda_m \langle u, v \rangle - \lambda_n \langle u, v \rangle = (\lambda_m - \lambda_n) \langle u, v \rangle = 0.$$

Como $\lambda_m - \lambda_n \neq 0$, pois $m \neq n$, então

$$\langle u, v \rangle = 0.$$

(ii) Seja F o espaço vetorial gerado pelos espaços $(E_n)_{n \geq 0}$. Queremos mostrar que F é denso em H .

Observe que, para todo $u \in F$ existem sequências $(u_n)_{n \geq 0}$, onde $u_n \in E_n$, e $(c_n)_{n \geq 0} \subset \mathbb{R}$ tais que $u = \sum_{n=0}^{\infty} c_n u_n$. Então

$$Tu = T \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n u_n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n T u_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \lambda_n u_n \in F.$$

Portanto $T(F) \subset F$. Para todo $u \in F^\perp$ então para todo $v \in F$ tem-se que $\langle u, v \rangle = 0$. Portanto $\langle Tu, v \rangle = \langle u, Tv \rangle = 0$, pois $Tv \in T(F) \subset F$. Segue disso que $T(F^\perp) \subset F^\perp$.

O operador T restrito a $F^\perp$ será denotado por T_0 . Este é um operador compacto autoadjunto em $F^\perp$. Afirmamos que $\sigma(T_0) = \{0\}$. Suponhamos que não; então existe $0 \neq \lambda \in \sigma(T_0)$. Desde que $\lambda \in AV(T_0)$, há algum $u \in F^\perp$, $u \neq 0$, tal que $T_0 u = \lambda u$. Portanto λ é um autovalor de T , logo $\lambda = \lambda_n$ para algum $n \geq 1$. Deste modo $u \in E_n \subset F$. Desde que $u \in F \cap F^\perp$, deduzimos que $u = 0$; contradizendo a hipótese. Concluimos que $\sigma(T_0) = \{0\}$.

Aplicando o Corolário 3.25, deduzimos que $T_0 = 0$, isto é, T se anula em $F^\perp$. Segue que $F^\perp \subset N(T) \subset F$ e consequentemente $F^\perp \subset F$. Isto implica que $F^\perp = \{0\}$, e também que F é denso em H .

Finalmente, escolhemos em cada subespaço E_n uma base de Hilbert, chamada de B_n . A existência das bases para $n \geq 1$ é justificada, pois como T é compacto, a Alternativa de Fredholm 2.74 nos dá que a dimensão de cada E_n é finita. Para justificar a existência da base de E_0 é só aplicar o Teorema 3.26, pois como $E_0 = N(T)$ é fechado, temos pelo Teorema 3.29 que E_0 é completo, logo de Hilbert, e separável. Para todos $m, n \in \mathbb{N}$, com $m \neq n$, temos que as bases B_n e B_m são independentes. Consequentemente $B = \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n$

é uma base de F . Portanto B é uma base de Hilbert de H composta de autovalores de T . $\square$

Observação 3.32. Seja T um operador compacto autoadjunto. Da análise anterior vemos que podemos escrever qualquer elemento $u \in H$ como

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n, \text{ com } u_n \in E_n.$$

Então $Tu = T(\sum_{n=0}^{\infty} u_n) = \sum_{n=0}^{\infty} Tu_n = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n u_n$. Dado um inteiro $k \geq 1$, seja:

$$T_k u = \sum_{n=1}^k \lambda_n u_n.$$

Temos que $T_k(H)$ está contido nos espaços $G_k = \cup_{n=1}^k E_n$. Sendo uma união finita de espaços de dimensão finita, cada G_k tem dimensão finita. Portanto, T_k é um operador de posto finito e vale:

$$\|T_k - T\| \leq \sup_{n \geq k+1} |\lambda_n| \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad k \rightarrow \infty,$$

pois, observando que (λ_n) é uma sequência de autovalores de T , pelo Teorema 3.14 temos que λ_n converge para 0. Vemos assim que, em um espaço de Hilbert, todo operador compacto autoadjunto é o limite de uma sequência de operadores de posto finito. Esse resultado continua válido sem a hipótese do operador ser autoadjunto, embora não demonstremos aqui esse resultado mais geral (veja a Observação 2.47).

3.3 Exemplos e Contraexemplos

Com o objetivo de estudarmos alguns operadores que servem de exemplos relacionados com as definições e resultados vistos anteriormente, definiremos o espaço $l^p(\mathbb{R})$, com $1 \leq p \leq \infty$, um subespaço do espaço das sequências reais. Mais especificamente, analisaremos propriedades espectrais de dois operadores em l^2 , o salto à esquerda, S_e , e o salto à direita, S_d , dentre outros exemplos.

Definição 3.33 (O espaço $l^p(\mathbb{R})$). O espaço $l^p(\mathbb{R})$, onde $1 \leq p < \infty$, é o espaço de todas as sequências reais, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$, tais que:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty.$$

Para o caso, $p = \infty$, o espaço $l^p(\mathbb{R})$ é o espaço de todas as sequências reais, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$, tais que

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| \leq \infty.$$

Definição 3.34 (Salto à esquerda e Salto à direita). Seja $x \in l^p(\mathbb{R})$, onde $1 \leq p \leq \infty$. Definimos o operador *salto à esquerda* $S_e : l^p(\mathbb{R}) \rightarrow l^p(\mathbb{R})$ por:

$$S_e x = S_e(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = (x_2, x_3, \dots, x_{n+1}, \dots).$$

O operador *salto à direita* $S_d : l^p(\mathbb{R}) \rightarrow l^p(\mathbb{R})$ é definido por:

$$S_d x = S_d(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = (0, x_1, \dots, x_{n-1}, \dots).$$

Observação 3.35. A norma em l^p , para $1 \leq p < \infty$, dada por:

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

para todo $x = (x_1, x_2, \dots) \in l^p$.

Já a norma em l^∞ é dada por

$$\|x\| = \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i|,$$

para todo $x = (x_1, x_2, \dots) \in l^p$.

Proposição 3.36. Sejam $E = l^p$, com $1 \leq p \leq \infty$ e (λ_n) um sequência limitada em $\mathbb{R}$. Consideremos o operador $T \in \mathcal{L}(E)$ definido por:

$$Tx = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \dots, \lambda_n x_n, \dots),$$

onde $x = (x_1, x_2, \dots) \in E$. Então $T \in \mathcal{K}(E)$ se, e somente se, $\lambda_n \rightarrow 0$.

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Seja $T \in \mathcal{K}(E)$, e suponhamos por absurdo que $\lambda_n \not\rightarrow 0$. Então como (λ_n) não converge para 0 existe $\delta > 0$ e uma subsequência λ_{n_k} tal que $|\lambda_{n_k}| > \delta$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Repare que para $k > j$, onde $1 \leq p < \infty$, temos:

$$\begin{aligned} \|T(e_{n_k}) - T(e_{n_j})\|^p &= \|\lambda_{n_k} e_{n_k} - \lambda_{n_j} e_{n_j}\|^p \\ &= \|(0, \dots, 0, -\lambda_{n_j}, 0, \dots, 0, \lambda_{n_k}, 0, \dots)\|^p \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p = |-\lambda_{n_j}|^p + |\lambda_{n_k}|^p \\ &= |\lambda_{n_k}|^p + |\lambda_{n_j}|^p > \delta^p + \delta^p > \delta^p \\ &\Rightarrow \|T(e_{n_k}) - T(e_{n_j})\| > \delta. \end{aligned}$$

E para $p = \infty$ temos: $\|T(e_{n_k}) - T(e_{n_j})\| = \sup\{|\lambda_{n_k}|, |\lambda_{n_j}|\} \geq |\lambda_{n_k}| > \delta$. Portanto $(T(e_{n_k})) \subset T(B_E) \subset \overline{T(B)}$ não admite subsequência convergente. Absurdo, pois T é compacto, ou seja, $\overline{T(B)}$ é compacto.

($\Leftarrow$) Suponhamos que $\lambda_n \rightarrow 0$. Consideremos os operadores $T_n : l^p \rightarrow l^p$ dados por $T_n x = (\lambda_1 x_1, \dots, \lambda_n x_n, 0, \dots)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, que são operadores de posto finito. Afirmamos que $T_n \rightarrow T$. Se $1 \leq p < \infty$, dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $x \in B_E$:

$$\|T_n x - T x\|^p = \sum_{i=n+1}^{\infty} |\lambda_i x_i|^p = \sum_{i=n+1}^{\infty} |\lambda_i|^p |x_i|^p < \epsilon^p \cdot \sum_{i=n+1}^{\infty} |x_i|^p \leq \epsilon^p \cdot \|x\|^p \leq \epsilon^p,$$

sempre que $n \geq n_0$, o que mostra que $T_n \rightarrow T$. Agora, se $p = \infty$, dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $x \in B_E$:

$$\|T_n x - T x\|^p = \sup_{i>n} \{|\lambda_i x_i|\}^p = \sup_{i>n} \{|\lambda_i| |x_i|\}^p \leq \sup_{i>n} \{|\lambda_i|\}^p < \epsilon^p,$$

desde que $n \geq n_0$. E novamente $T_n \rightarrow T$. Portanto, para qualquer $1 \leq p \leq \infty$, temos pelo Corolário 2.46 que T é compacto. $\square$

Proposição 3.37. Sejam E e F dois espaços de Banach, e $T \in \mathcal{K}(E, F)$. Se $\dim(E) = \infty$, então existe uma sequência (u_n) em E tal que $\|u_n\| = 1$ e $\|Tu_n\| \rightarrow 0$.

Demonstração. Suponha que para toda sequência $(u_n) \subset E$ com $\|u_n\| = 1$, temos $\|Tu_n\| \not\rightarrow 0$. Isso implica que existe $\delta > 0$ tal que:

$$\left\| T \left(\frac{u}{\|u\|} \right) \right\| \geq \delta, \quad \forall u \in E, \quad u \neq 0 \Rightarrow \|T(u)\| \geq \delta \cdot \|u\|, \quad \forall u \in E.$$

Assim, T é injetora. Afirmamos que $\text{Im}(T)$ é fechado. De fato, seja $(y_n) \subset \text{Im}(T)$ tal que $y_n \rightarrow y \in F$. Escrevendo $y_n = Tx_n$, vemos que (Tx_n) é de Cauchy em F . Assim,

$$\|x_n - x_m\| \leq \frac{\|Tx_n - Tx_m\|}{\delta} \rightarrow 0.$$

Então (x_n) é uma sequência de Cauchy em E , e como E é completo, existe $x \in E$ tal que $x_n \rightarrow x$. Como T é contínua, $Tx_n \rightarrow Tx$. Pela unicidade do limite temos que $y = Tx$, mostrando que $\text{Im}(T)$ é fechado. Consideremos agora o operador $T_0 \in \mathcal{K}(E, \text{Im}(T))$, $T_0 = T$. O operador T_0 é uma bijeção, então pelo Corolário 3.10, $T_0^{-1} \in \mathcal{L}(\text{Im}(T), E)$. Assim,

$$B_E = \overline{B_E} = T_0^{-1}(\overline{T_0(B_E)}),$$

ou seja, B_E é compacto pela Observação 2.33, pois T^{-1} é contínua e $\overline{T_0(B_E)}$ é compacto. Portanto, pelo Teorema de Riesz 2.64, $\dim(E) < \infty$, contradizendo a hipótese. $\square$

Proposição 3.38. Sejam E e F dois espaços de Banach, e $T \in \mathcal{K}(E, F)$. Suponha que $Im(T)$ é fechado. Temos:

- (1) T é um operador de posto finito.
- (2) Se $\dim(N(T)) < \infty$, então $\dim(E) < \infty$.

Demonstração.

(1) Como $Im(T)$ é fechado, ele é completo, pela Proposição 2.27 e portanto é um espaço de Banach. Assim, $T \in \mathcal{L}(E, Im(T))$ é sobrejetor. Pelo Teorema da Aplicação Aberta 3.8, existe $c > 0$ tal que $B_{Im(T)} \subset c \cdot T(B_E)$, logo $\overline{B_{Im(T)}} \subset c \cdot \overline{T(B_E)}$. Assim, $\overline{B_{Im(T)}}$ é compacto, pois é um fechado contido em um compacto, pela Proposição 2.27. Portanto, pelo Teorema de Riesz 2.64, $\dim(Im(T)) < \infty$.

(2) Suponhamos que $\dim(E) = \infty$. Sejam B uma base de $N(T)$, e C o complemento de B para uma base de E . Afirmamos que C tem finitos elementos. De fato, o conjunto $T(C) = \{Tu \mid u \in C\}$ gera a imagem de T , além disso, se tomarmos $\sum_{i=1}^n \lambda_i Tu_i = T(\sum_{i=1}^n \lambda_i u_i) = 0$, onde $Tu_i \in T(C)$. Então $\sum_{i=1}^n \lambda_i u_i \in N(T)$, então $\lambda_i = 0$, para todo $i = 1, \dots, n$, pois os vetores u_i 's estão em C e são linearmente independentes aos vetores de B . Portanto $T(C)$ é l.i. e então uma base da imagem. Logo o número de elementos em $T(C)$ e C é finito e, conseqüentemente, B tem infinitos elementos. Ou seja, $\dim(N(T)) = \infty$. Portanto $\dim(N(T)) < \infty$ implica que $\dim(E) < \infty$. $\square$

Proposição 3.39 (Propriedades Espectrais dos Saltos). Se considerarmos os operadores “salto à direita” e “salto à esquerda” em $l^2(\mathbb{R})$, então as seguintes propriedades são válidas:

- 1 - Tais operadores não são compactos e ambos têm norma 1, isto é, $\|S_d\| = \|S_e\| = 1$.
- 2 - O conjunto de autovalores de S_d é vazio, isto é, $AV(S_d) = \emptyset$.
- 3 - O espectro de S_d é $\sigma(S_d) = [-1, 1]$.
- 4 - O conjunto de autovalores de S_e é $AV(S_e) = (-1, 1)$. E seus autoespaços são unicamente gerados, isto é, existe um $x \in E$ tal que $N(S_e - \lambda I) = \{tx \mid t \in \mathbb{R}\}$, onde λ é um autovalor de S_e .
- 5 - O espectro de S_e é $\sigma(S_e) = [-1, 1]$.
- 6 - Além disso, $S_d^* = S_e$ e $S_e^* = S_d$.

Demonstração.

(1) Para todo $x \in E$ temos $\|S_d x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 = \|x\|^2$, portanto $\|S_d\| = 1$.

E para todo $x \in E$ temos $\|S_e x\|^2 = \sum_{i=2}^{\infty} |x_i|^2 \leq \|x\|^2$, então $\|S_e\| \leq 1$. Porém, observe que, para $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0, \dots)$ temos que $\|e_2\| = 1$ e $\|S_e e_2\| = 1$. Então $\|S_e\| \geq 1$. Portanto $\|S_e\| = 1$.

Veja que para todo $x \in E$ temos que

$$(S_e \circ S_d)x = S_e(S_d x) = S_e(0, x_1, x_2, \dots) = (x_1, x_2, \dots) = x,$$

então $S_e \circ S_d = I$, o operador identidade. Suponha que $S_d \in \mathcal{K}(E)$ ou $S_e \in \mathcal{K}(E)$, então pela Proposição 2.48 a composição deles também será compacto. Mas isso é um absurdo pois o operador identidade não é compacto em espaços de dimensão infinita. Portanto $S_d \notin \mathcal{K}(E)$ e $S_e \notin \mathcal{K}(E)$.

(2) Suponhamos que exista $\alpha \in AV(S_d)$, então existe $x \in l^2$, com $x \neq 0$ tal que $S_d x = \alpha x$. Então:

$$(0, x_1, x_2, \dots) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots) \Rightarrow \alpha x_1 = 0,$$

então ou $\alpha = 0$, mas nesse caso $x = 0$ o que é um absurdo, ou $x_1 = 0$. Caso $x_1 = 0$, então $\alpha x_2 = 0$ e analogamente $x_2 = 0$, pois $\alpha = 0$ implica em $x = 0$. E assim por diante, concluímos que $x_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja, $x = 0$. Absurdo, pois $x \neq 0$ por hipótese, então não existe $\alpha \in AV(S_d)$. Portanto $AV(S_d) = \emptyset$.

(3) Já sabemos, pelas observações iniciais, que $\sigma(S_d) \subset [-1, 1]$.

Seja agora $\lambda \in [-1, 1]$. Afirmamos que $S_d - \lambda I$ não é sobrejetor, $\forall \lambda \neq 0$. Se $\lambda = 0$, então já sabemos que $S_d - \lambda I = S_d$ não é sobrejetor.

De fato, se $y = (-1, 0, 0, \dots)$, então $(S_d - \lambda I)x \neq y$, para todo $x \in l^2$, pois

$$(S_d - \lambda I)x = (0, x_1, x_2, \dots) - \lambda(x_1, x_2, x_3, \dots) = (-\lambda x_1, x_1 - \lambda x_2, x_2 - \lambda x_3, \dots).$$

Se $(S_d - \lambda I)x = y$, então $-\lambda x_1 = -1$ ou $x_1 = \frac{1}{\lambda}$. Assim, $x_1 - \lambda x_2 = \frac{1}{\lambda} - \lambda x_2 = 0$, então $x_2 = \frac{1}{\lambda^2}$. Assim sucessivamente, concluímos que $x_n = \frac{1}{\lambda^n} = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^n$. Mas, neste caso,

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{2i} = \infty,$$

pois $\left|\frac{1}{\lambda}\right| \geq 1$. Assim, $x \notin l^2$.

Portanto, $[-1, 1] \subset \sigma(S_d)$, o que prova que $\sigma(S_d) = [-1, 1]$.

(4) Seja $\lambda \in (-1, 1)$, e consideremos agora, $x = (1, \lambda, \lambda^2, \dots, \lambda^n, \dots)$. Então $x \in l^2$, pois $\|x\|^2 = 1 + \sum_{i=2}^{\infty} (\lambda^{i-1})^2 \leq \infty$, uma vez que $|\lambda| < 1$.

$$S_e x = (\lambda, \lambda^2, \lambda^3, \dots) = \lambda(1, \lambda, \lambda^2, \dots) = \lambda x.$$

Então $\lambda \in AV(S_e)$ ou $(-1, 1) \subset AV(S_e)$. Como $AV(S_e) \subset \sigma(S_e) \subset [-1, 1]$, resta verificarmos se 1 e -1 são autovalores.

Se $S_e x = x$, então $x_1 = x_2 = x_3 = \dots$. Como $x \in l^2$, então $x = 0$. E se $S_e x = -x$, então $x_1 = -x_2 = x_3 = -x_4 = \dots$. E como antes, $x \in l^2$, então $x = 0$. Assim, 1 e -1 não são autovalores.

Portanto $AV(S_e) = (-1, 1)$. Os autoespaços associados ao autovalor λ são da forma $N(S_e - \lambda I) = \{t(1, \lambda, \lambda^2, \dots) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

(5) Já mostramos que $(-1, 1) = AV(S_e) \subset \sigma(S_e) \subset [-1, 1]$. Resta verificar se $\{-1, 1\} \subset \sigma(S_e)$. Mas sabemos que o espectro é um compacto, então a única possibilidade é $\sigma(S_e) = [-1, 1]$.

(6) Queremos calcular S_d^* , sabemos que para todo $x, y \in l^2$ tem-se que

$$\begin{aligned} \langle S_d^* x, y \rangle &= \langle x, S_d y \rangle = \langle (x_1, x_2, \dots), (0, y_1, \dots) \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_{i+1} y_i \\ &= \langle (x_2, x_3, \dots), (y_1, y_2, \dots) \rangle = \langle S_e x, y \rangle. \end{aligned}$$

Portanto $S_d^* = S_e$. Observe que $S_e^* = (S_d^*)^* = S_d$, então $S_e^* = S_d$. □

Observação 3.40. Se $T \in \mathcal{L}(H)$ é autoadjunto e bijetivo, então T^{-1} é autoadjunto. De fato, como T é autoadjunto, vale que

$$\langle T^{-1}u, v \rangle = \langle T^{-1}u, T(T^{-1}v) \rangle = \langle TT^{-1}u, T^{-1}v \rangle = \langle u, T^{-1}v \rangle, \quad \forall u, v \in H.$$

Portanto T^{-1} é autoadjunto.

Proposição 3.41. Sejam H um espaço de Hilbert e que $T \in \mathcal{L}(H)$ é autoadjunto.

(1) As seguintes propriedades são equivalentes:

- (a) $\langle Tu, u \rangle \geq 0, \quad \forall u \in H$;
- (b) $\sigma(T) \subset [0, \infty)$.

(2) As seguintes propriedades são equivalentes:

$$(c) \|T\| \leq 1 \text{ e } \langle Tu, u \rangle \geq 0, \forall u \in H;$$

$$(d) 0 \leq \langle Tu, u \rangle \leq \|u\|^2, \forall u \in H;$$

$$(e) \sigma(T) \subset [0, 1];$$

$$(f) \langle Tu, u \rangle \geq \|Tu\|^2, \forall u \in H.$$

Demonstração.

(1) [(a) $\Rightarrow$ (b)] Pela Proposição 3.24 $m = \inf_{u \in S_H} \{\langle Tu, u \rangle\} \geq 0$ e $\sigma(T) \subset [m, M]$, então $\sigma(T) \subset [0, \infty)$.

(1) [(a) $\Leftarrow$ (b)] Se existe $u \in H$ tal que $\langle Tu, u \rangle < 0$, então pela Proposição 3.24 teríamos que $m \leq \langle Tu, u \rangle < 0$ e, portanto, $\sigma(T) \not\subset [0, \infty)$, contradizendo a hipótese.

(2) [(c) $\Rightarrow$ (d)] Aplicando o fato de T ser limitado e unitário, e a desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos $0 \leq \langle Tu, u \rangle \leq \|Tu\| \|u\| \leq \|T\| \|u\|^2 = \|u\|^2$, para todo $u \in H$. Ou seja, $0 \leq \langle Tu, u \rangle \leq \|u\|^2, \forall u \in H$.

(2) [(d) $\Rightarrow$ (e)] De (a) temos que $\sigma(T) \subset [0, \infty)$, pois $0 \leq \langle Tu, u \rangle$. E, pela Proposição 3.24, $M = \sup_{u \in S_H} \{\langle Tu, u \rangle\} \leq \sup_{u \in S_H} \{\|u\|^2\} = 1$. Como $\sigma(T) \subset [m, M]$ e $M \leq 1$, então $\sigma(T) \subset [0, 1]$.

(2) [(e) $\Rightarrow$ (f)] Como $\sigma(T) \subset [0, 1]$, então para todo $-\epsilon < 0$ temos que $(T - (-\epsilon)I) = (T + \epsilon I)$ é uma bijeção de H em H . Afirmamos que $\sigma(T + \epsilon I) \subset [\epsilon, 1 + \epsilon]$. De fato, se $\alpha < \epsilon$ ou $\alpha > 1 + \epsilon$, então:

$$(T + \epsilon I - \alpha I) = (T - (\alpha - \epsilon)I),$$

que é uma bijeção, pois em ambos os casos, $\alpha - \epsilon < 0$ ou $\alpha - \epsilon > 1$, e $\sigma(T) \subset [0, 1]$. Portanto, $\sigma((T + \epsilon I)^{-1}) \subset [\frac{1}{1+\epsilon}, \frac{1}{\epsilon}]$ e usando a observação anterior, temos que $(T + \epsilon I)^{-1}$ é autoadjunto. Para todo $v \in H, v \neq 0$, vale:

$$\begin{aligned} \langle (T + \epsilon I)^{-1} \left(\frac{v}{\|v\|} \right), \frac{v}{\|v\|} \rangle &= \frac{1}{\|v\|^2} \cdot \langle (T + \epsilon I)^{-1} v, v \rangle \geq \frac{1}{1 + \epsilon} \Rightarrow \langle v, (T + \epsilon I)^{-1} v \rangle \geq \frac{\|v\|^2}{1 + \epsilon} \Rightarrow \\ \langle (T + \epsilon I)u, (T + \epsilon I)^{-1} (T + \epsilon I)u \rangle &= \langle (T + \epsilon I)u, u \rangle \geq \frac{\|(T + \epsilon I)u\|^2}{1 + \epsilon}, \end{aligned}$$

onde $v = (T + \epsilon I)u$ para todo $u \in H$, $u \neq 0$. Fazendo ϵ suficientemente pequeno, temos $\langle Tu, u \rangle \geq \|Tu\|^2$, para todo $u \in H$, pois para $u = 0$ vale a igualdade.

(2) [(f) $\Rightarrow$ (c)] Como $\langle Tu, u \rangle \geq \|Tu\|^2$, aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz obtemos $\|Tu\|^2 \leq \langle Tu, u \rangle \leq \|Tu\|\|u\|$, para todo $u \in H$. Então $\|Tu\| \leq \|u\|$, para todo $u \in H$. Logo, $\|T\| \leq 1$. $\square$

Considerações

Iniciamos os trabalhos, considerando de antemão que os leitores têm conhecimentos prévios de álgebra linear, abordando importantes definições para a teoria espectral em dimensão finita, como: autovalor, espectro, resolvente, etc. Nesses espaços de dimensão finitas, existem diversas propriedades que facilitam seu estudo, como, operadores são injetores se, e somente se, são sobrejetores, ou como, em conjunto de autovalores é igual ao espectro, ou ainda, dado um operador autoadjunto sobre um espaço com produto interno existe uma base do espaço, composto por autovalores do operador. Tais propriedades deixam de ser válidas em espaços de dimensão infinita.

No decorrer do trabalho, expandimos os conceitos trabalhados e dois desses novos conceitos foram o de operador compacto e o espaço Banach, completo pela sua norma. Desde que tenhamos um operador compacto, podemos estender as propriedades de injetor equivale a sobrejetor e sobre o conjunto de autovalores coincide com o espectro, a menos, ocasionalmente do zero, isso desde que os operadores trabalhados estejam sobre espaços de Banach.

Seguindo nosso estudo, trabalhando com espaços com produto interno de dimensões infinitas, novamente uma condição importante é a completude dos espaços trabalhados, tais espaços são chamados de espaços de Hilbert. Agora, desde que tenhamos um operador limitado e autoadjunto sobre um espaço de Hilbert, conseguimos garantir a existência de uma base do espaço formada por autovetores do operador.

A seguir apresentaremos uma tabela comparando os principais resultados de acordo com a variação da dimensão dos espaços e suas propriedades com completude, onde E é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e $T : E \rightarrow E$ é um operador linear.

Tabela 3.1: Propriedades de operadores sobre E

Proposições	$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ $\dim(E) < \infty$ E é normado	$\mathbb{K} = \mathbb{C}$ $\dim(E) < \infty$ E é normado	$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ $\dim(E) = \infty$ E é Banach	$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ $\dim(E) = \infty$ E é Hilbert
T é limitado	Sim	Sim	Não	Não
$N(T) = \{0\} \Leftrightarrow Im(T) = E$	Sim	Sim	Não	Não
$AV(T) \neq \emptyset$	Não	Sim	Não	Não
$\sigma(T) \setminus \{0\} = AV(T) \setminus \{0\}$	Sim	Sim	Não	Não

A tabela nos dá algumas comparações importantes de operadores em espaços de dimensão finita com espaços de dimensão infinita. Um exemplo de um operador linear não limitado pode ser encontrado em [3], exemplo 2.7-5, página 93. Os operadores salto à direita e salto à esquerda do Exemplo 2.57 são dois contraexemplos da afirmação $N(T) = \{0\} \Leftrightarrow Im(T) = E$. As duas últimas afirmações tem contraexemplos apresentados na Proposição 3.39 (Propriedades Espectrais dos Saltos).

Notemos que propriedades das transformações lineares que são quase naturais em dimensão finita em geral não valem em dimensão infinita. Precisamos exigir um pouco mais do espaço e dos operadores. Se T é compacto em um espaço de Banach e $S \in \mathcal{L}(E)$ é bijetor, então $N(S - T) = \{0\} \Leftrightarrow Im(S - T) = E$, demonstrado na Observação 2.75. Se T é um operador compacto e $\dim(E) = \infty$, então $\sigma(T) \setminus \{0\} = AV(T) \setminus \{0\}$, esse é um resultado do Teorema 3.14. Além disso, vimos também, no Teorema 3.31, que se T é autoadjunto e E é um espaço de Hilbert separável então existe uma base composta por

autovetores T .

Acima resumimos alguns dos principais resultados estudados, e esperamos que este trabalho seja usado por alunos de graduação como uma referência para estudos voltados para a análise funcional. Durante o corpo do trabalho, procuramos trazer os termos e notações de uma maneira mais natural para os leitores e que estejam de acordo com as referências utilizadas.

BIBLIOGRAFIA

- [1] BREZIS, H., **Functional analysis, sobolev spaces and partial differential equations**. Universitext (Berlin. Print). Springer, New York, 2010.
- [2] ENFLO, P., **A Counterexample to the aproximation property in banach spaces**, Acta Math. **130** (1973), pp. 309-317.
- [3] KREYSZIG, E., **Introductory functional analysis with applications**. John Wiley and Sons. Inc, 1989.
- [4] LIMA, E. L., **Análise real - volume 2**. Rio de Janeiro: SBM - Coleção Matemática Universitária, 2004.
- [5] MUNKRES, J. R., **Topology**: second edition. Prentice Hall. Inc, 2000.
- [6] RUDIN, W., **FUNCTIONAL ANALYSIS**: second edition. Library of Congress. Inc, 1991.