

SALOMÉ GABRIELLE LUCILLE BONNAND

Desenvolvimento de um modelo numérico 3D para
técnica inversa de condução de calor



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

2017

SALOMÉ GABRIELLE LUCILLE BONNAND

**Desenvolvimento de um modelo numérico 3D para técnica inversa
de condução de calor**

TCC apresentado ao Programa de Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para a obtenção do título de **ENGENHEIRA MECÂNICA**.

Área de Transferência de calor.

Orientador : Profa. Priscila Ferreira
Barbosa de Sousa

UBERLÂNDIA – MG

2017

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, Dominique e Catherine, pelo amor e pelo apoio que eles me deram durante todos esses anos de universidade, e também por terem me apoiado a fazer o duplo diploma no Brasil. À minha irmã pela ajuda na minha pesquisa de carreira. À minha avó por todo apoio às minhas decisões.

À orientadora e amiga, Priscila Fereira Barbosa de Sousa, pela orientação, o ensinamento e especialmente pela amizade e paciência com o meu português.

À minha amiga e companheira Mary por ter me apoiado nos momentos mais difíceis e pela paciência. Às minhas amigas que sempre estiveram do meu lado no Brasil e que me ajudaram a entender a cultura Brasileira, Ana Lucia, Kamila, Ludmila. A Uberlândia Rugby Feminino que foi minha família do Brasil.

Ao amigo Bruno – China e à minha amiga Debora, por me socorrerem durante minhas atrapalhadas computacionais e pela amizade.

À coordenação do programa de graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Uberlândia, por me ter aceitado no programa de duplo diploma.

Bonnand, S. Desenvolvimento de um modelo numérico 3D para técnica inversa de condução de calor, 2017, Projeto de fim de curso de Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG.

Resumo

A temperatura e o calor estão presentes em várias aplicações industriais. Em vários casos é necessário o conhecimento preciso dos processos térmicos e dos campos de temperatura. Em processos de fabricação onde a geração excessiva de calor pode provocar desgaste prematuro da ferramenta, mudança nas propriedades das peças usinadas, etc, o conhecimento do calor gerado e do campo de temperatura é de grande importância. Nesses processos a fonte de geração de calor é observada na interface de corte peça/ferramenta, que é uma região de difícil acesso. Nestes casos comumente faz-se uso de técnicas inversas que são técnicas que conseguem recriar a condição de contorno a partir de temperaturas experimentais. Existem várias técnicas inversas em condução de calor e todas dependem de um modelo direto do problema térmico, neste contexto este trabalho apresenta um modelo numérico 3D generalista que pode ser aplicado em técnicas inversas. No caso o modelo será aplicado ao *Software de aplicação e análise de observadores por funções de Green* desenvolvido por Kroll (2016) e visa ampliar o uso e o entendimento da técnica inversa.

Palavras chaves: Solução numérica, condução de calor, técnica inversa

LISTA DE SÍMBOLOS

LETRAS GREGAS

α	Coeficiente de difusão térmica em $m^2.s^{-1}$
θ	Temperatura em K
ρ	Densidade de massa ou massa volumétrica em $kg.m^{-3}$
φ	<i>Densidade de fluxo de calor em $W.m^{-2}$</i>
ϕ	Taxa de transferência de calor em W

Subscrito

k	Condutividade térmica em $W.m^{-1}.K^{-1}$
h	Coeficiente de transferência por convecção em $W.m^{-2}.K^{-1}$
C_p	Calor específico em $J.kg^{-1}.K^{-1}$

SUMÁRIO

AGRADECIMENTOS	iii
Resumo.....	iv
LISTA DE SÍMBOLOS	v
 CAPÍTULO I	
Introdução	1
 CAPÍTULO II	
Objetivos	3
 CAPÍTULO III	
Fundamentação Teórica	4
3.1 Transferência de Calor	4
3.1.1 <i>Condução, convecção e radiação</i>	5
3.2 A resolução de um problema direto	6
3.2.1 <i>Equação da difusão de calor</i>	7
3.2.2 <i>Condições iniciais e de contorno</i>	8
3.3 Método de aproximação numérica e malha	9
3.4 Resolução do sistema linear usando o Matlab®	15
 CAPÍTULO IV	
Modelo Numérico 3D.....	17
4.1 Modelo Numérico 3D Desenvolvido	17
4.2 Interface do modelo direto	20
4.3 Validação do modelo numérico	22
4.3.1 <i>Validação com resultados experimentais</i>	22

CAPÍTULO V

Experimento 3D de Condução de Calor	25
5.1 Bancada experimental	25
5.2 Resultados experimentais	27

CAPÍTULO VI

Software de aplicação e análise de observadores por funções de Green.....	30
6.1 Técnica Inversa e Descrição do software.....	30
6.2 Resultados de estimação de fluxo a partir do modelo numérico 3D desenvolvido..	37
6.2.1. <i>Estimação do fluxo de calor experimental</i>	37

CAPÍTULO VII

Conclusões	42
7.1 Considerações finais.....	42
7.2 Sugestões para trabalhos futuros	43

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	44
---	-----------

CAPÍTULO I

Introdução

A transferência térmica, comumente conhecida como transferência de calor, pode ser entendida como uma transferência de energia microscópica desordenada. O calor e a temperatura são fenômenos físicos explorados desde o tempo dos homens das cavernas. Em 1200 a.C o homem já utilizava o fogo como fonte de luz e calor. Até o século XVIII, os cientistas achavam que o calor e o fenômeno da combustão dependiam da presença de um fluido chamado *flogisto*, essa teoria criada pelo pesquisador alemão *Georges Ernst Stahl* em 1697 vigorou por muitos anos apesar de errada (MAGALHÃES; DA COSTA, 1994). Somente a partir de um avanço da termodinâmica estatística que o calor foi definido como uma transferência de energia a partir da agitação térmica das partículas em nível microscópico. A temperatura é, portanto, uma grandeza macroscópica que representa o reflexo da energia cinética das partículas na escala microscópica. Assim a transferência de calor se dá através dos choques entre as partículas mais agitadas e menos agitadas. A temperatura é então uma grandeza física que está associada de alguma forma ao estado de movimentação ou agitação das moléculas e o calor pode ser entendido como energia térmica em trânsito devido um gradiente de temperatura.

A temperatura e o calor estão presentes no dia a dia em várias aplicações sejam domésticas ou industriais, podemos citar o uso de isolantes na engenharia civil visando conforto térmico, os processos de refrigeração, a secagem de grãos, a produção alimentícia, etc. Em vários setores da indústria é necessário o conhecimento preciso dos processos térmicos e dos campos de temperatura. Em processos de fabricação, tais como usinagem e soldagem, onde a geração excessiva de calor pode provocar desgaste prematuro da ferramenta, mudança nas propriedades das peças usinadas, defeitos de fabricação entre outros, o conhecimento do calor gerado e do campo de temperatura é de grande importância. Nesses processos a fonte de geração de calor é a interface peça ferramenta, que é uma região de difícil acesso para sensores de temperatura e principalmente para transdutores de calor, para se determinar a distribuição de temperatura e então poder controlar e aperfeiçoar o processo é necessário conhecer as condições de contorno. Para isso comumente faz-se uso de técnicas inversas, ou seja, técnicas que conseguem recriar a condição de contorno a

partir de temperaturas experimentais neste caso, o calor gerado na interface de corte. A técnica inversa baseada em funções de Green e observadores dinâmicos proposta por Sousa (2006) e revista por Kroll (2016), que apresenta a técnica a partir de uma interface amigável e interativa ampliando o uso da mesma, demonstrou um grande potencial na solução de problemas inversos em condução de calor. A técnica é baseada na teoria de sistemas e controle e utiliza filtros passa baixa na estimação, conseguindo resultados interessantes mesmo lidando com dados experimentais muito ruidosos. Para a aplicação da técnica inversa é necessário um modelo térmico direto que represente o processo térmico avaliado. A técnica, que foi desenvolvida em Matlab®, é independente do modelo direto que pode ser obtido a partir de qualquer linguagem e método numérico, Kroll. (2016).

Para um bom entendimento da técnica inversa é importante conhecer todas as fases de execução. Neste projeto um modelo numérico 3D de condução de calor foi desenvolvido no software Matlab®. Esse modelo representa um caso teste que será disponibilizado juntamente com o software da técnica inversa. O objetivo é que o usuário possa entender a importância e a aplicação do modelo direto na solução inversa, através de modelo numérico generalista, didático e que possa facilmente ser reproduzido em laboratório.

CAPÍTULO II

Objetivos

GERAL:

Desenvolver um modelo numérico de condução de calor tridimensional.

ESPECIFICOS:

- Aplicar o modelo direto na técnica inversa baseada em funções de Green e Observadores Dinâmicos.
- Desenvolver uma bancada experimental.
- Associar o modelo numérico ao modelo físico reproduzido em laboratório, verificando fontes de erro, interferências nas medições e equipamentos.
- Aplicar conhecimentos adquiridos em disciplinas como instrumentação, metrologia, transferência de calor 1, algoritmo e programação de computadores, controle e sistemas digitais entre outras.

CAPÍTULO III

Fundamentação Teórica

Problemas diretos em transferência de calor representam a solução da equação da difusão a partir do conhecimento das condições de contorno e propriedades do material. Eles descrevem como os parâmetros do modelo influenciam no estado do sistema. Matematicamente estes problemas são ditos “bem postos” e se caracterizam por satisfazerem três requisitos:

- Existência : a solução do problema deve existir;
- Unicidade : esta solução deve ser única;
- Estabilidade: a solução deve conseguir se estabilizar mediante pequenas variações do problema;

3.1 Transferência de Calor

A termodinâmica clássica permite prever a quantidade total de energia envolvida num processo para que este passe de um estado de equilíbrio para outro. Já a Transferência de Calor permite descrever quantitativamente (no espaço e no tempo) a evolução das grandezas características do sistema, em particular a evolução da temperatura entre o estado inicial e o estado final. Existem três mecanismos de transferência de calor: a condução, a convecção e a radiação, entretanto antes de abordar esses modos de transferência, algumas definições se fazem necessárias:

- **Taxa de transferência de calor** (ϕ ou q em W) através de uma superfície é a quantidade de calor (Q em J) que atravessa essa superfície por unidade de tempo t .
- **Fluxo de calor** (ϕ ou q'' em $W.m^{-2}$) é a taxa de transferência de calor em uma direção definida por unidade de área perpendicular à direção do calor.

3.1.1 Condução, convecção e radiação

A condução está relacionada ao transporte de energia térmica (calor) em um meio sólido devido ao gradiente de temperatura. A condução de calor deve ser entendida como a transferência térmica através de choques microscópicos entre partículas de energias diferentes, as partículas mais quentes transmitem a energia cinética para aquelas mais frias, sendo mais eficiente portanto em meios sólidos. Essa transferência de calor ocorre de acordo com a *lei de Fourier*, Eq.(3.1), que estabelece que o fluxo de calor através de um material é proporcional ao gradiente negativo da temperatura.

$$\vec{\varphi}_{cond} = -k \overrightarrow{grad(\theta)} \quad (3.1)$$

Onde k condutividade térmica em $W.m^{-1}.K^{-1}$.

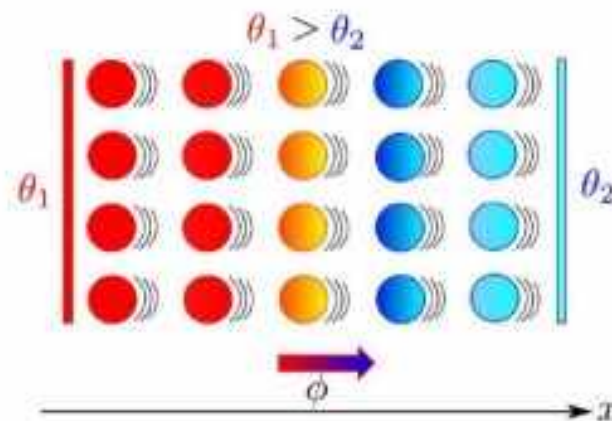


Figura 3.1 - Transferência de calor por condução, fonte BEAUGRAND (2013)

A convecção pode ser entendida como a transferência de calor entre um sólido e um fluido. A energia é transmitida pelo movimento do fluido. Essa forma de transferência de calor ocorre de acordo com a *lei de resfriamento de Newton*, Eq.(3.2), que estabelece que o fluxo de calor é proporcional à diferença de temperaturas entre superfície e fluido.

$$\varphi_{conv} = h(T_s - T_\infty) \quad (3.2)$$

Onde,

h	Coeficiente de transferência por convecção em $W.m^{-2}.K^{-1}$
T_s	Temperatura da superfície do sólido em K
T_∞	Temperatura do ambiente (particularmente do fluido) em K

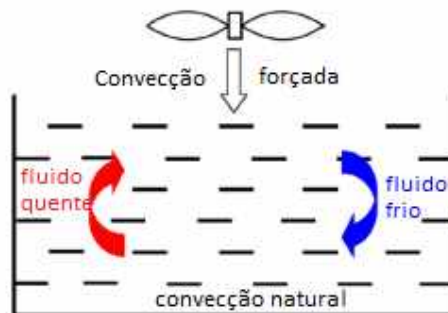


Figura 3.2 - Transferência de calor por convecção, fonte BEAUGRAND (2013)

A radiação térmica é a energia emitida por toda matéria que se encontra a uma temperatura finita. Independente da forma da matéria, a emissão pode ser atribuída a mudanças nas configurações dos elétrons que constituem os átomos ou moléculas. A energia do campo de radiação é transportada por ondas eletromagnéticas. Um exemplo típico desse modo de transferência é o aquecimento do planeta Terra pela luz solar.

O fluxo de calor transmitido pela radiação pode ser descrito como

$$\varphi_{rad} = \sigma \cdot \varepsilon \cdot (\theta_s^4 - \theta_\infty^4) \quad (3.3)$$

Onde, $\sigma = 5,67 \times 10^{-8} W/m^2 K^4$ é a constante de Stefan Boltzman e ε a emissividade da superfície.

3.2 A resolução de um problema direto

Para resolver o problema direto de transferência de calor primeiro define-se a equação da difusão térmica e, a partir das condições de contorno e condição inicial, é possível se determinar o campo de temperatura.

3.2.1 Equação da difusão de calor

A fim de conhecer a distribuição de temperatura num sistema, submetido a trocas de calor, é necessário desenvolver a equação da difusão térmica que é obtida a partir da equação da conservação da energia em um volume de controle diferencial, Fig. 3.3.

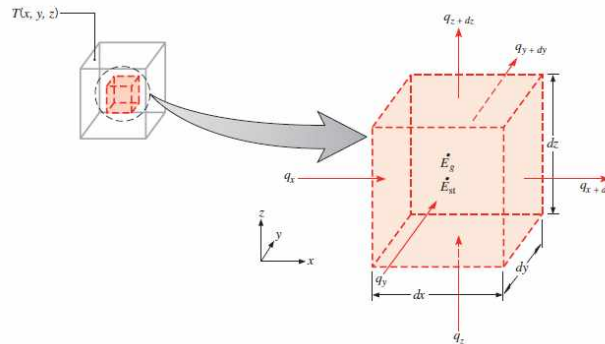


Figura 3.3 - Volume de controle diferencial, fonte INCROPERA, DEWITT, 2002.

Aplicando o balanço de energia no volume infinitesimal e substituindo as equações das taxas de transferência de calor apropriadas para um sistema tridimensional e em regime transiente temos:

$$\rho \cdot C_p \cdot \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \text{div} \left(k \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(T) \right) + P \quad \text{fonte, aula de Transferência de calor, INSA LYON} \quad (3.4)$$

k condutividade térmica em $W.m^{-1}.K^{-1}$.

ρ massa específica em $kg.m^{-3}$

C_p Calor específica em $J.kg^{-1}.K^{-1}$

P Produção de calor em $W.m^{-3}$

Matematicamente,

$$\text{div} \left(k \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(T) \right) = \text{div} \left[k \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \\ \frac{\partial T}{\partial z} \end{pmatrix} \right] = \text{div} \left[k \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial x} \vec{x} + \frac{\partial T}{\partial y} \vec{y} + \frac{\partial T}{\partial z} \vec{z} \right) \right] = k \cdot \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (3.5)$$

Equação (3.4) torna-se:

$$\rho \cdot C_p \cdot \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = k \cdot \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + P \quad (3.6)$$

Considerando que não existe energia sendo gerada no sistema: $P=0$, a equação da difusão de calor final é descrita pela Eq. (3.7):

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.7)$$

Onde, α é a difusividade térmica : $\alpha = \frac{k}{\rho C_p} \text{ m}^2/\text{s}$

3.2.2 Condições iniciais e de contorno

Para determinar a distribuição da temperatura em um meio e, assim resolver a equação do calor Eq. (3.7), é necessário conhecer as condições físicas existentes nas fronteiras e as condições existentes no sistema em um dado instante inicial. A condição inicial define o estado térmico do sistema no instante inicial que se nota : $\theta_0 = \theta(x;0)$.

Existem três tipos de condições de contorno em transferência de calor. A primeira condição corresponde a situação na qual a superfície é mantida a uma temperatura fixa T_s . Essa condição é chamada de *condição de Dirichlet* e é notada $T(0;t)=T_s$. A segunda corresponde à existência de um fluxo de calor fixo ou constante q_s'' na superfície. Esse fluxo de calor está relacionado ao gradiente de temperatura. Essa condição é conhecida como a *condição de Neumann* e é descrita a partir de um balanço na fronteira de forma que: $-k \frac{\partial T(0,t)}{\partial x} = q_s''$. Um caso particular da condição de *Neumann* corresponde a uma superfície perfeitamente isolada, ou adiabática, para a qual $\frac{\partial T(0,t)}{\partial x} = 0$. A terceira condição corresponde a existência de aquecimento (ou resfriamento) por convecção na superfície: $-k \frac{\partial T(0,t)}{\partial x} = h[T_\infty - T(0,t)]$.

3.3 Método de aproximação numérica e malha

Os métodos numéricos permitem uma solução aproximada da equação do calor através de um modelo matemático. Existem vários métodos numéricos que podem ser aplicados na solução da equação diferencial, dentre eles podemos citar o *método dos elementos finitos*, o *método dos elementos de contorno* e o *método dos volumes finitos*.

Nesta abordagem o método dos volumes finitos é aplicado para uma geometria retangular tridimensional em regime transiente. Este método integra as equações diferenciais do problema em um volume conhecido e é comumente usado em conjunto com malhas estruturadas.

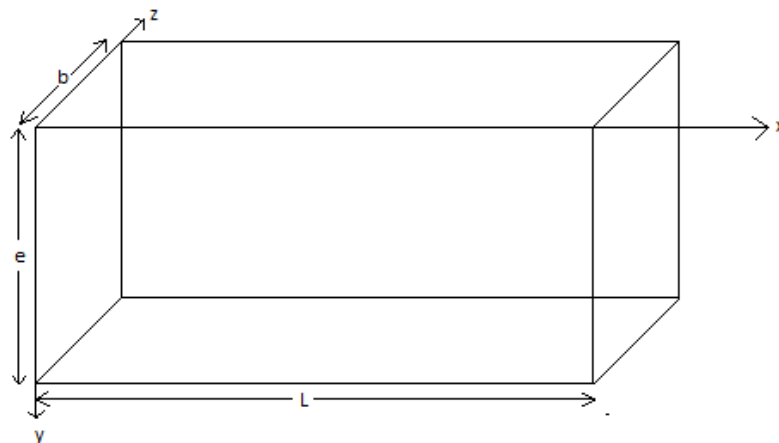


Figura 3.4 - Problema 3D

Na Figura 3.4 **L** é o comprimento, **e** a altura e **b** a largura.

Para a solução numérica a peça retangular é dividida em pequenos volumes finitos, considerando meios volumes na fronteira. No centro de cada volume finito, um nó é colocado. Cada nó é separado pela distância Δ_x na direção $\vec{x}$, Δ_y na direção $\vec{y}$ e Δ_z na direção $\vec{z}$. A malha numérica é definida pela quantidade de nós estabelecida em cada sentido sendo, n_x , n_y , n_z , o número de nós nas direções $\vec{x}$, $\vec{y}$ e o $\vec{z}$, respectivamente.

Assim a malha numérica é obtida dividindo-se o comprimento **L**, a altura **e** e a largura **b** em n_x , n_y e n_z células respectivamente.

$$\Delta_x = \frac{L}{n_x - 1} \quad \Delta_y = \frac{e}{n_y - 1} \quad \Delta_z = \frac{b}{n_z - 1} \quad (3.8-a-b-c)$$

A Figura 3.5 apresenta a malha numérica para o problema 3D.

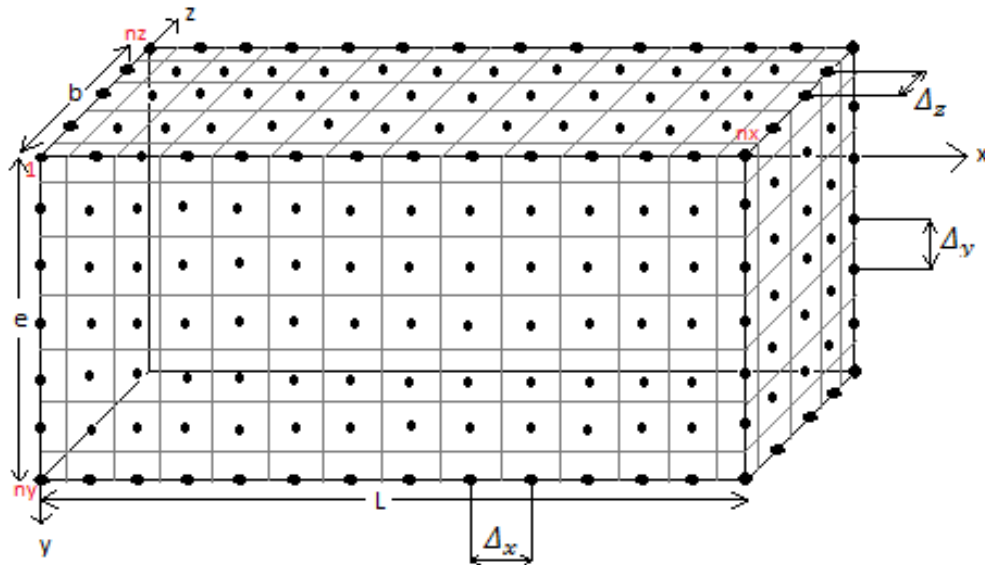


Figura 3.5 - Malha numérica do problema 3D

O método dos volumes finitos é um balanço, em nível de volume elementar, que satisfaz os princípios de conservação da propriedade em análise a partir da solução de integrais no espaço e no tempo. Tomando a equação (3.7), equação de transferência de calor tridimensional transiente, a integração no tempo e espaço da equação diferencial é feita no volume de controle mostrado na Fig. 3.6.

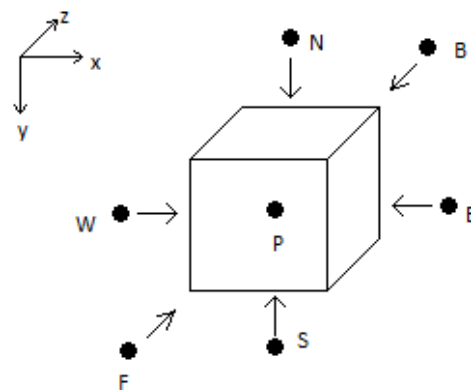


Figura 3.6 - Malha numérica para volume elementar 3D

$$\underbrace{\int_t^{t+\Delta t} \int_W \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) dx dt}_{1} + \underbrace{\int_t^{t+\Delta t} \int_N \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) dy dt}_{2} + \underbrace{\int_t^{t+\Delta t} \int_F \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right) dz dt}_{3} = \underbrace{\frac{1}{\alpha} \int_t^{t+\Delta t} \int_W \int_N \int_F \frac{\partial T}{\partial t} dz dy dx dt}_{4} \quad (3.9)$$

Observa-se na equação (3.9) a derivada parcial no tempo $\frac{\partial T}{\partial t}$. Para resolver essa derivada é preciso realizar uma discretização temporal. Considere a Fig. 3.7 que apresenta a variação Temperatura x tempo, ($T \times t$):

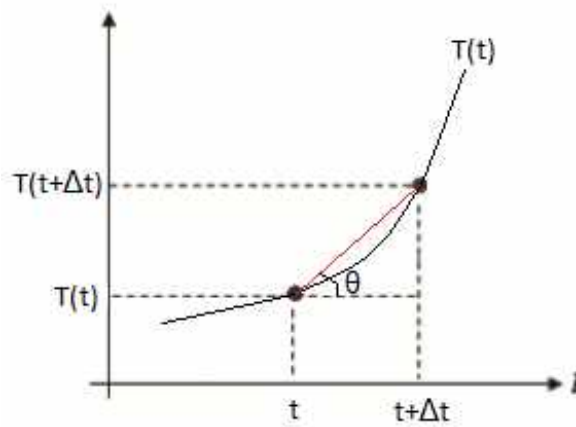


Figura 3.7 - Gráfico da Temperatura versus tempo

$$\tan \theta = \frac{T(t+\Delta t) - T(t)}{t+\Delta t - t} = \frac{T(t+\Delta t) - T(t)}{\Delta t} \quad (3.10)$$

E então a derivada parcial no tempo é:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T(t+\Delta t) - T(t)}{\Delta t} \quad (3.11)$$

Os termos “1”, “2” e “3” da Eq. (3.9) serão determinados da mesma forma. Na sequência apresenta-se o procedimento para discretizar o termo “1”, uma vez que, o processo é análogo para as outras dimensões.

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_W^E \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) dx dt = \int_t^{t+\Delta t} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_E - \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_W \right) dt \quad (3.12)$$

A integração no tempo aproxima uma variável qualquer f , entre o instante corrente, t , e o instante de tempo a ser determinado, $t+\Delta t$, Fig. 3.8.

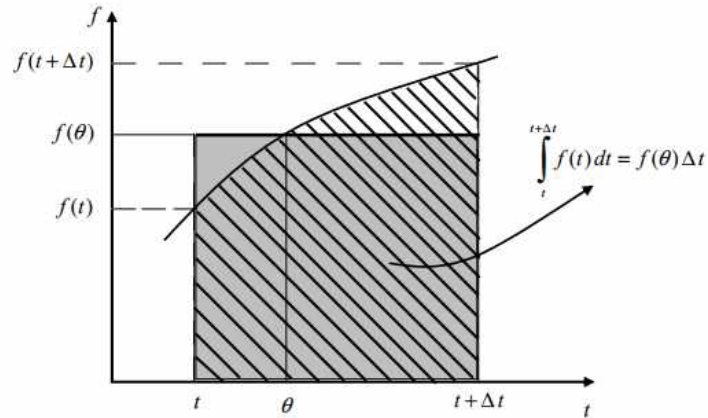


Figure 3.8 : Integração no tempo

Assim, para o caso onde $f(t) = T(t)$, tem-se:

$$\int_t^{t+\Delta t} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_E - \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_W \right) dt = \left[\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_E^\theta - \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_W^\theta \right] \Delta t \quad (3.13)$$

As derivadas avaliadas em “W” e “E” são aproximadas, respectivamente, pela derivada central em relação a P e W e E e P, como:

$$\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_E^\theta = \frac{T_E^\theta - T_P^\theta}{\Delta x} \quad e \quad \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_W^\theta = \frac{T_W^\theta - T_P^\theta}{\Delta x}$$

Deste modo, a equação aproximada apresenta a forma seguinte, Eq. 3.14:

$$\left[\frac{T_E^\theta - T_P^\theta}{\Delta x} + \frac{T_W^\theta - T_P^\theta}{\Delta x} + \frac{T_N^\theta - T_P^\theta}{\Delta y} + \frac{T_S^\theta - T_P^\theta}{\Delta y} + \frac{T_F^\theta - T_P^\theta}{\Delta z} + \frac{T_B^\theta - T_P^\theta}{\Delta z} \right] \Delta t = \frac{\Delta x \Delta y \Delta z}{\alpha} [T_P^{t+\Delta t} - T_P^t] \quad (3.14)$$

De forma geral, a temperatura T pode ser representada pela função de interpolação no tempo:

$$T^\theta = \theta T^{t+\Delta t} + (1-\theta) T^t \quad (3.15)$$

Onde $\theta = 0 \rightarrow$ Método explícito

$\theta = 1 \rightarrow$ Método implícito

$\theta = 1/2 \rightarrow$ Método de Crank-Nicholson

No modelo numérico desenvolvido se baseia na metodologia implícita.

Com uma formulação totalmente implícita tem-se,

$$T = T^{t+\Delta t} \quad (3.16)$$

E substituindo T^θ por $T^{t+\Delta t}$ na equação da energia numérica,

$$\left[\frac{T_E^{t+\Delta t} - T_p^{t+\Delta t}}{\Delta x} + \frac{T_W^{t+\Delta t} - T_p^{t+\Delta t}}{\Delta x} + \frac{T_N^{t+\Delta t} - T_p^{t+\Delta t}}{\Delta y} + \frac{T_S^{t+\Delta t} - T_p^{t+\Delta t}}{\Delta y} + \frac{T_F^{t+\Delta t} - T_p^{t+\Delta t}}{\Delta z} + \frac{T_B^{t+\Delta t} - T_p^{t+\Delta t}}{\Delta z} \right] \Delta t = \frac{\Delta x \Delta y \Delta z}{\alpha} [T_p^{t+\Delta t} - T_p^t] \quad (3.17)$$

Rearranjando a equação da energia totalmente implícita, tem-se:

$$\begin{aligned} T_p^{t+\Delta t} \left[\frac{\Delta_x^2 \Delta_y^2 \Delta_z^2}{\alpha \Delta_t} + 2\Delta_x \Delta_z + 2\Delta_y \Delta_z + 2\Delta_x \Delta_y \right] - \Delta_y \Delta_z T_E^{t+\Delta t} - \Delta_y \Delta_z T_W^{t+\Delta t} - \Delta_x \Delta_z T_N^{t+\Delta t} - \Delta_x \Delta_z T_S^{t+\Delta t} \\ - \Delta_x \Delta_y T_F^{t+\Delta t} - \Delta_x \Delta_y T_B^{t+\Delta t} = \left[\frac{\Delta_x \Delta_y \Delta_z}{\alpha \Delta_t} \right] T_p^t \end{aligned} \quad (3.18)$$

Agora fazendo

$$A_p = \frac{\Delta_x^2 \Delta_y^2 \Delta_z^2}{\alpha \Delta_t} + 2\Delta_x \Delta_z + 2\Delta_y \Delta_z + 2\Delta_x \Delta_y$$

$$A_E = A_W = -\Delta_y \Delta_z$$

$$A_N = A_S = -\Delta_x \Delta_z$$

$$A_F = A_B = -\Delta_x \Delta_y$$

$$B_p = \frac{\Delta_x \Delta_y \Delta_z}{\alpha \Delta_t}$$

Tem-se

$$A_p T_p^{t+\Delta t} + A_E T_E^{t+\Delta t} + A_W T_W^{t+\Delta t} + A_N T_N^{t+\Delta t} + A_S T_S^{t+\Delta t} + A_F T_F^{t+\Delta t} + A_B T_B^{t+\Delta t} = B_p T_P^t \quad (3.19)$$

Ou seja, a solução do problema está condicionada a solução de um sistema linear do tipo:

$$A.T=B \text{ no qual } T= A^{-1}.B \quad (3.20)$$

A matriz A de um problema de volumes finitos é caracterizada por ser uma matriz de zeros com dominância da diagonal principal. Em problemas tridimensionais a matriz é hepta-diagonal como mostrado na Fig. 3.9. O espaçamento entre as diagonais da matriz podem também ser visualizadas como na figura:

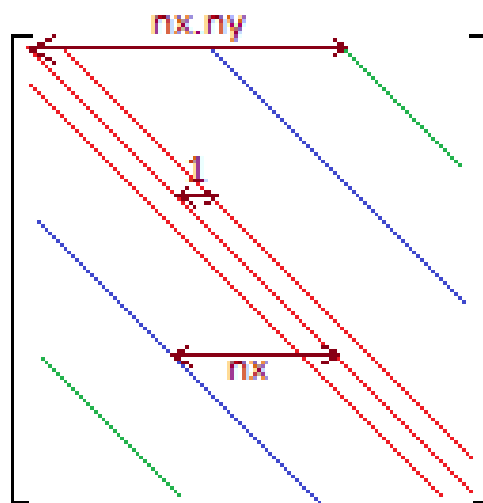


Figura 3.9 - Estrutura da matriz de coeficiente

3.4 Resolução do sistema linear usando o Matlab®.

Usando a ferramenta Matlab® a resolução do sistema linear pode ser obtida facilmente mesmo para matrizes com grande tamanho. Os passos detalhados abaixo descrevem o procedimento para a solução do sistema linear.

Passo 1 : Dados de entrada

Declarar os valores conhecidos: geometria do material, propriedades termo físicas (condutividade k e o coeficiente de difusão α), o coeficiente de transferência por convecção h e a temperatura ambiente T_∞

Passo 2 : Malha

Criar a malha numérica considerando os números de nós em cada direção n_x, n_y e n_z assim como o espaçamento entre cada nó Δ_x, Δ_y e Δ_z .

Passo 3 : Fluxo e tempo

Alimentar o programa com os valores de fluxo. O passo de tempo, dt , é determinado como a diferença entre o tempo 2 e o tempo 1.

Passo 4 : Inicialização das matrizes A, B e T0

A matriz A é inicializada como uma matriz zeros, quadrada, de tamanho $n_x \cdot n_y \cdot n_z$. O termo B é um vetor coluna de tamanho $n_x \cdot n_y \cdot n_z$ inicializado no programa com o valor zero e o vetor T0 é inicializado com $n_x \cdot n_y \cdot n_z$ colunas com o valor da temperatura inicial.

Passo 5 : Definição das matrizes A e B

Dependendo da posição do nó, os coeficientes das matrizes A e vetor B serão diferentes. Determina-se a posição através dos parâmetros i na direção $\vec{x}$, j na direção $\vec{y}$ e k na direção $\vec{z}$. A fim de se definir a posição na matriz dos coeficientes para cada nó, define-se o parâmetro p tal que:

$$p = n_x(j-1) + i + n_x n_y(k-1) \quad (3.21)$$

Assim,

$$A_p = A(p, p)$$

$$A_E = A(p, p+1)$$

$$A_W = A(p, p-1)$$

$$A_N = A(p, p-n_x)$$

$$A_S = A(p, p+n_x)$$

$$A_F = A(p, p-n_x n_y)$$

$$A_B = A(p, p+n_x n_y)$$

$$B_P = B(p, 1)$$

Passo 6 : Ciclo tempo

Fazendo variar o ciclo com o tempo, resolve-se o sistema linear $A.T = B$ com a ferramenta existente no software Matlab®. Um vetor temperatura para o tempo Δt correspondendo aos nós definidos com o parâmetro **p** é obtido.

Para cada tempo é necessário atualizar o vetor T0 com o valor obtido T a fim de se calcular o próximo passo no tempo. O vetor B deve ser atualizado a cada iteração no tempo.

Finalmente, para verificar a validade da solução numérica, o balanço de energia deve ser avaliado, considerando a equação da conservação da energia no tempo Δt :

$$\dot{E}_{ent} + \dot{E}_{ger} - \dot{E}_{sai} = \dot{E}_{ac} \quad (3.22)$$

Assim a solução numérica será válida se o balanço for aproximadamente zero para cada passo no tempo, Eq. (3.23)

$$Balanço = \dot{E}_{ent} + \dot{E}_{ger} - \dot{E}_{sai} - \dot{E}_{ac} \cong 0 \quad (3.23)$$

CAPÍTULO IV

Modelo Numérico 3D

O modelo numérico desenvolvido para o estudo de caso consiste de um paralelepípedo com propriedades termo físicas constantes. O modelo 3D desenvolvido em MATLAB® a partir do método dos volumes finitos, formulação implícita e malha estruturada é apresentado neste capítulo.

4.1 Modelo Numérico 3D Desenvolvido

A Figura 4.1 apresenta esquematicamente o problema de calor que consiste de uma peça retangular tridimensional.

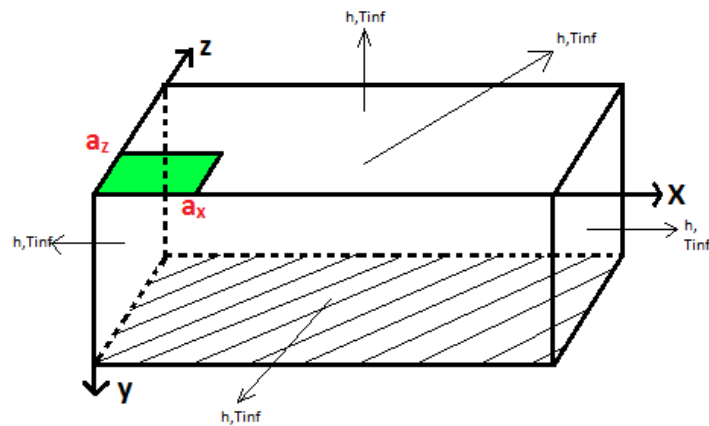


Figure 4.1 - Esquema do problema

A equação da difusão de calor é descrita por:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (4.1)$$

E as condições de contorno e inicial são:

$$-k \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} = q_1(t) \text{ na } S_1 (0 \leq x \leq a_x, 0 \leq z \leq a_z) \quad (4.1b)$$

$$k \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} = h(T - T_\infty) \text{ na } S_2 (x, z \in S / (x, z) \notin S_1) \quad (4.1c)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{h}{k} (T - T_\infty) \quad (4.1d)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L} = \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=b} = -\frac{h}{k} (T - T_\infty) \quad (4.1e)$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=e} = 0 \quad (4.1f)$$

$$T(x, y, z, 0) = T_0 \quad (4.1g)$$

Observa-se que a face inferior da peça é isolada e as demais estão expostas a transferência de calor por convecção, podendo também ser adiabáticas. A área $S_1 = \mathbf{a}_x \times \mathbf{a}_z$, na Fig. 4.1, representa a região de fluxo de calor imposto. Para a solução numérica, primeiro é necessário aplicar o método de volumes de controle e obter as equações diferenciais pertinentes para o problema, assim serão identificados os coeficientes das matrizes A e B. A Figura 4.2 representa cada um dos volumes que devem ser equacionados para se resolver o campo de temperatura.

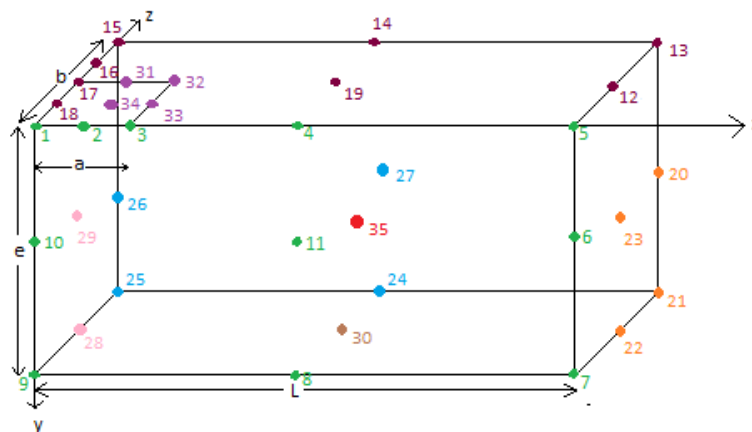


Figura 4.2 - Divisão da peça para as equações

Para melhor entendimento a equação em volumes finitos para o **nó 1**, esquematizado na Fig. 4.2, é detalhada a seguir:

Volume finito 1 : $(x=0, y=0, z=0) \rightarrow (i=1, j=1, k=1)$

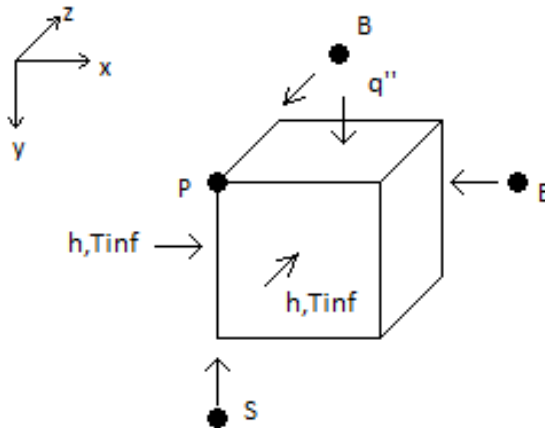


Figura 4.3 - Nó número 1

$$q_{cv1} + q_{E-P} + q'' \cdot A + q_{S-P} + q_{cv2} + q_{B-P} = \rho \cdot C_p \cdot V \cdot \frac{\partial T_P}{\partial t} \quad (4.2a)$$

$$\begin{aligned} & h \frac{\Delta_y \Delta_z}{4} (T_{inf} - T_P^{t+1}) + K \frac{\Delta_y \Delta_z}{4} \frac{(T_E^{t+1} - T_P^{t+1})}{\Delta_x} + q'' \cdot \frac{\Delta_x \Delta_z}{2} + K \frac{\Delta_x \Delta_z}{4} \frac{(T_S^{t+1} - T_P^{t+1})}{\Delta_y} \\ & + h \frac{\Delta_y \Delta_x}{4} (T_{inf} - T_P^{t+1}) + K \frac{\Delta_x \Delta_y}{4} \frac{(T_B^{t+1} - T_P^{t+1})}{\Delta_z} = \rho \cdot C_p \cdot \frac{\Delta_x \Delta_y \Delta_z}{2} \cdot \frac{(T_P^{t+1} - T_P^t)}{\Delta_t} \end{aligned} \quad (4.2b)$$

Dividindo as equações por a condutividade k, tem-se

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\Delta_x \Delta_y \Delta_z}{8a\Delta_t} + \frac{h\Delta_y \Delta_z}{4K} + \frac{h\Delta_y \Delta_x}{4K} + \frac{\Delta_y \Delta_z}{4\Delta_x} + \frac{\Delta_x \Delta_z}{4\Delta_y} + \frac{\Delta_x \Delta_y}{4\Delta_z} \right] T_P^{t+1} - \frac{\Delta_y \Delta_z}{4\Delta_x} T_E^{t+1} - \frac{\Delta_x \Delta_z}{4\Delta_y} T_S^{t+1} \\ & - \frac{\Delta_x \Delta_y}{4\Delta_z} T_B^{t+1} = \frac{\Delta_x \Delta_y \Delta_z}{8a\Delta_t} T_P^t + \left[\frac{h\Delta_y \Delta_z}{4K} + \frac{h\Delta_y \Delta_x}{4K} \right] T_{inf} + \frac{q'' \Delta_x \Delta_z}{4K} \end{aligned} \quad (4.2c)$$

E então os coeficientes são:

$$A_p = \left[\frac{\Delta_x \Delta_y \Delta_z}{8\alpha \Delta_t} + \frac{h \Delta_y \Delta_z}{4K} + \frac{h \Delta_y \Delta_x}{4K} + \frac{\Delta_y \Delta_z}{4\Delta_x} + \frac{\Delta_x \Delta_z}{4\Delta_y} + \frac{\Delta_x \Delta_y}{4\Delta_z} \right]$$

$$A_E = -\frac{\Delta_y \Delta_z}{4\Delta_x}$$

$$A_W = 0$$

$$A_N = 0$$

$$A_S = -\frac{\Delta_x \Delta_z}{4\Delta_y}$$

$$A_F = 0$$

$$A_B = -\frac{\Delta_x \Delta_y}{4\Delta_z}$$

$$B_P = \frac{\Delta_x \Delta_y \Delta_z}{8\alpha \Delta_t} T_P^t + \left[\frac{h \Delta_y \Delta_z}{4K} + \frac{h \Delta_y \Delta_x}{4K} \right] T_{inf} + \frac{q'' \Delta_x \Delta_z}{4K}$$

Seguindo o procedimento exemplificado pelas Eqs. (4.2) obtêm-se as equações para todos os nós da malha numérica. De posse das equações e seus coeficientes a solução do problema direto se dá conforme detalhado na seção 3.3 do Capítulo III.

4.2 Interface do modelo direto

O modelo direto tem como principal objetivo servir de caso teste para o *Software de aplicação e análise de observadores por funções de Green*, Kroll (2016) que será detalhado na seção 6.1, assim é necessária hora o cálculo da sensibilidade, hora o cálculo da temperatura. A interface desenvolvida para o modelo direto 3D, apresentada na Fig. 4.4, visa simplificar e ampliar o uso do modelo direto de condução de calor desenvolvido neste projeto.

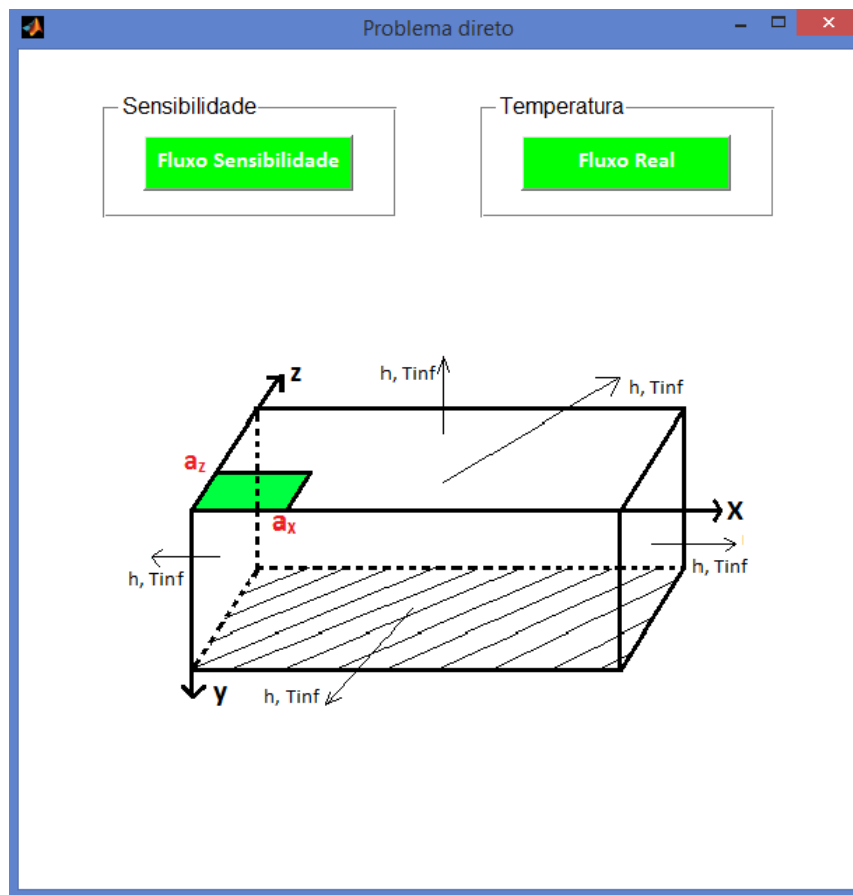


Figura 4.4 – Interface do cálculo de problema direto 3D pelo software MATLAB®

A interface é simples e conta com duas opções, cálculo da sensibilidade e cálculo da temperatura. Para o modelo direto é necessário alimentar o programa com um arquivo de dados de fluxo, seja o fluxo para o cálculo das sensibilidades, seja o fluxo real ou estimado para cálculo das temperaturas. O arquivo de fluxo deve ter o formato **.txt** e deve conter duas colunas, sendo o tempo na primeira coluna e o fluxo na segunda. Para o cálculo da sensibilidade o fluxo deve ter o valor unitário para tempos que tiverem o fluxo ativo.

Uma vez escolhido o fluxo, a interface chama a função principal que resolve o problema direto. O gráfico da temperatura para sensores pré-selecionados em função do tempo é gerado. Após a solução do problema direto o programa gera um arquivo **Temperaturas.txt** que contém o tempo e a temperatura, e um arquivo **Teta.txt** com o tempo e a diferença de temperatura, $Teta = Temperatura - Temperatura\ Inicial$, que é dado de entrada para o problema inverso.

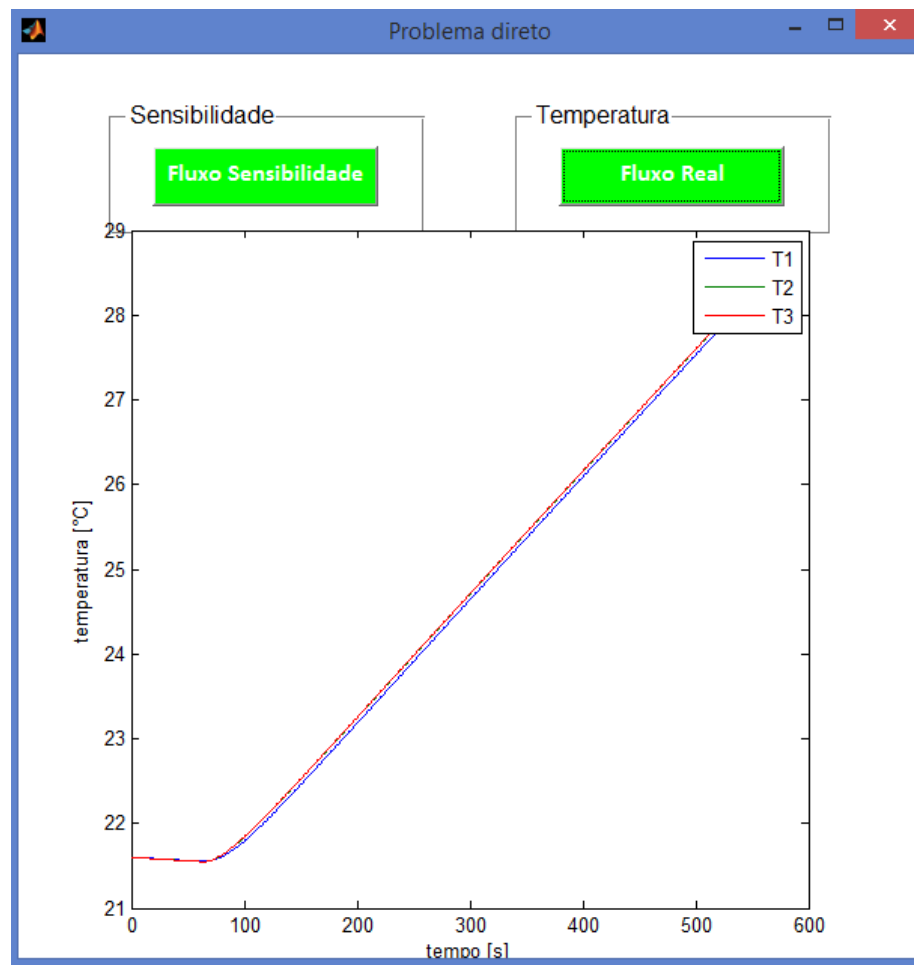


Figura 4.5 – Gráfico da temperatura na interface do modelo direto

4.3 Validação do modelo numérico

4.3.1. Validação com resultados experimentais

Como o modelo numérico desenvolvido é complexo são necessários testes para garantir a confiabilidade dos resultados. Nesta seção os resultados obtidos serão comparados com os publicados por Sousa (2006). Sousa apresenta um experimento unidimensional feito com uma amostra de cobre ($k = 401 \text{ W/mK}$ e $\alpha = 117 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$) de dimensões $0.05 \times 0.05 \times 0.003 \text{ (m)}$ que é aquecida na superfície superior ($0.05 \times 0.05 \text{ (m)}$) por um fluxo de calor o que garante a condução de calor unidimensional. A amostra é totalmente isolada ($h = 0$ e $T_{\text{inf}} = 0$). A Figura 4.6 esquematiza o experimento:

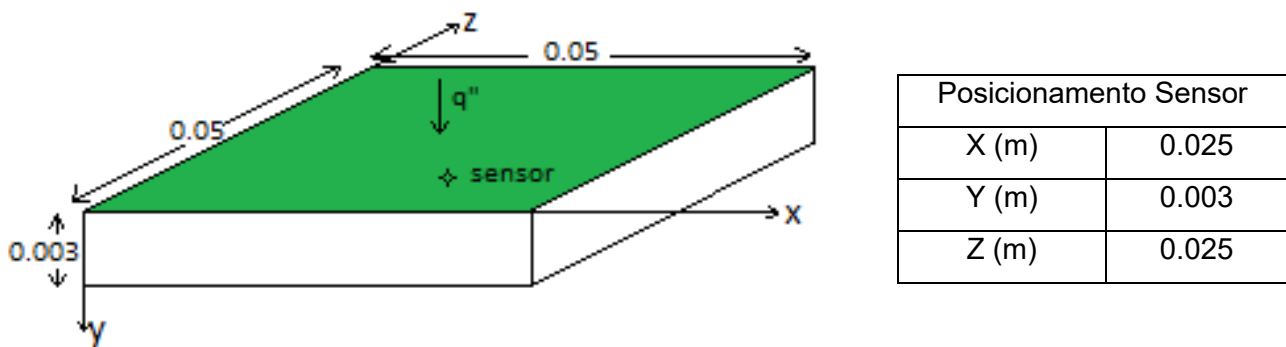


Figura 4.6 - Modelo térmico unidimensional

Os dados coletados neste experimento foram recuperados para a validação do modelo numérico. O fluxo de calor e a temperatura experimentais medidos são apresentados na Fig. 4.7.

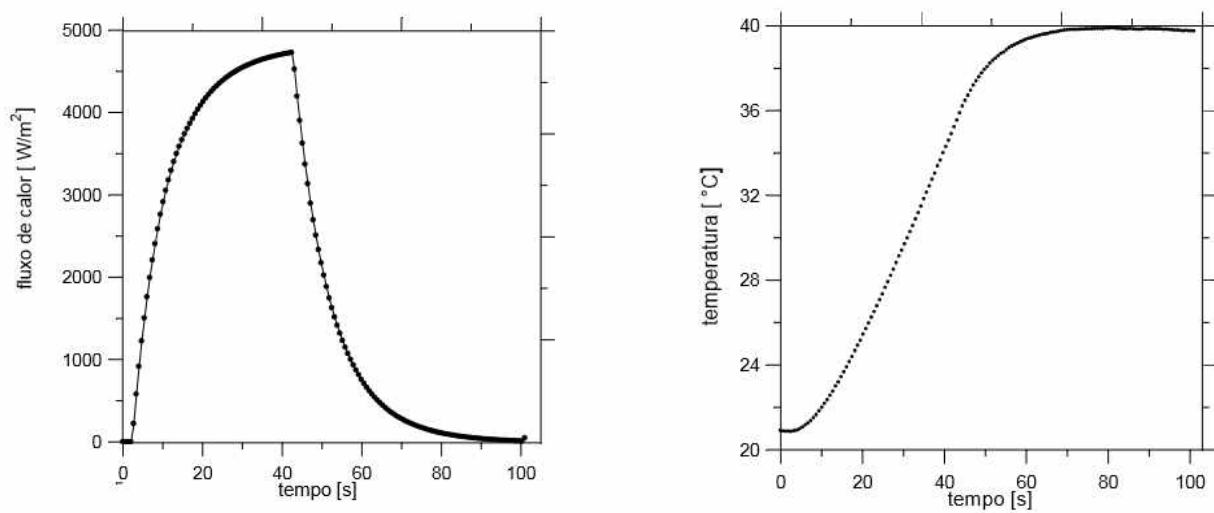
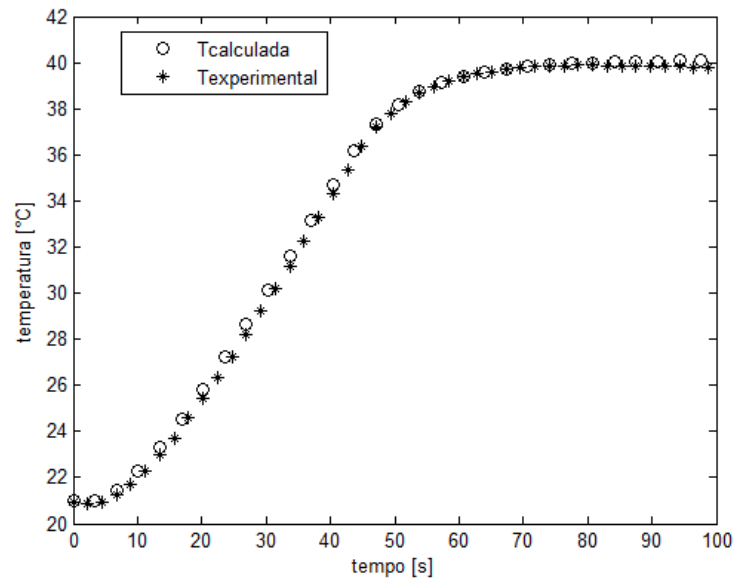


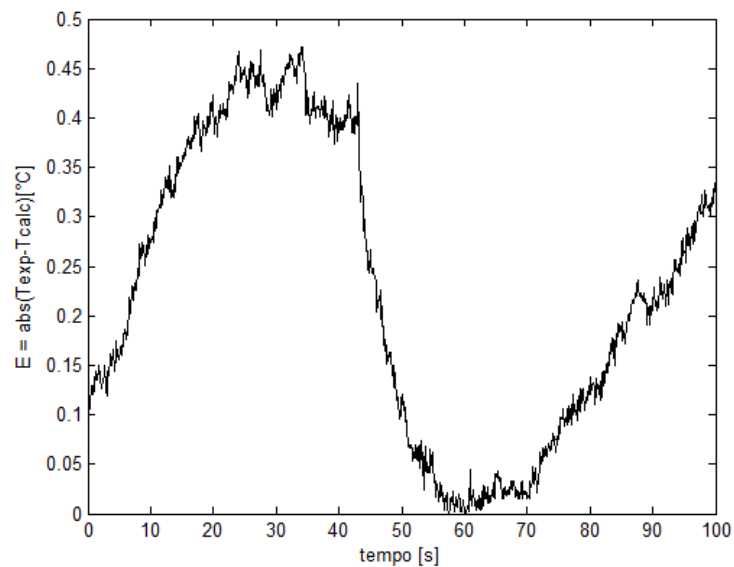
Figura 4.7 - a) Fluxo térmico medido pelo transdutor. b) temperatura experimental (SOUSA, 2006)

Para a solução numérica é necessário adaptar a geometria e as condições de contorno, inserindo o fluxo de calor experimental recuperado da dissertação de Sousa, e

isolando as demais paredes, além de informar as propriedades térmicas do cobre. A Figura 4.8a apresenta a comparação entre a temperatura calculada com o modelo direto 3D e a temperatura experimental (SOUSA, 2006).



(a)



(b)

Figura 4.8 – a) comparação temperatura calculada x experimental. b) Erro absoluto

Observa-se que as temperaturas apresentam boa concordância comprovando a confiabilidade da solução numérica desenvolvida.

CAPÍTULO V

Experimento 3D de Condução de Calor

O objetivo desse projeto é desenvolver um modelo numérico de transferência de calor 3D que possa ser usado para melhor entendimento do *Software de aplicação e análise de observadores por funções de Green*, Kroll (2016). A técnica inversa estima o fluxo de calor a partir de temperaturas experimentais. Assim, para aplicar o modelo direto, apresentado e validado no capítulo anterior, temperaturas experimentais são necessárias. Neste capítulo apresenta-se o procedimento experimental realizado no LTCME – Laboratório de ensino e pesquisa em transferência de calor: Modelagem e experimento da Universidade Federal de Uberlândia.

5.1 Bancada experimental

O experimento realizado em condições controladas avalia uma amostra de alumínio ($k = 237 \text{ W/(m.K)}$ e $\alpha = 97.1 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$) de dimensões $L = 0.084\text{m}$, $b = 0.084\text{m}$ e $e = 0.004\text{m}$. Primeiramente fazem-se marcações na amostra nos pontos onde se deseja conhecer a distribuição da temperatura, dois pontos na parte superior da amostra e um na parte inferior, as posições são apresentadas em coordenadas x , y e z na Tab. 5.1.

Tabela 5.1 - Posição dos termopares

mm	T1	T2	T3
X	65	65	65
Y	0	0	4
Z	45	5	5

Em cada um desses pontos, um termopar tipo *k* é soldado à amostra, minimizando problemas como o da resistência térmica de contato e o da movimentação do termopar durante o experimento. Os termopares foram conectados a um sistema de aquisição de dados, KEYSIGHT 34972A LXI Data Acquisition.

Para a condição de fluxo de calor imposto, um aquecedor elétrico e um transdutor de fluxo com dimensões 0.05x0.05 (m) são acoplados a amostra. O aquecedor é conectado a uma fonte de alimentação de corrente contínua, BK Precision, que por efeito Joule proporciona a geração de calor. O transdutor de fluxo é posicionado entre o aquecedor e a amostra de alumínio e conectado ao sistema de aquisição de dados, para medir o fluxo térmico fornecido à amostra. Para minimizar o efeito da resistência de contato entre o aquecedor, o transdutor e a amostra, pasta térmica é usada na união destes elementos. Para assegurar a condição de isolamento e evitar perdas de calor esse conjunto é colocado entre placas de poliestireno. O conjunto amostra, transdutor de fluxo, aquecedor elétrico e termopares superiores é observado na Fig. 5.1.

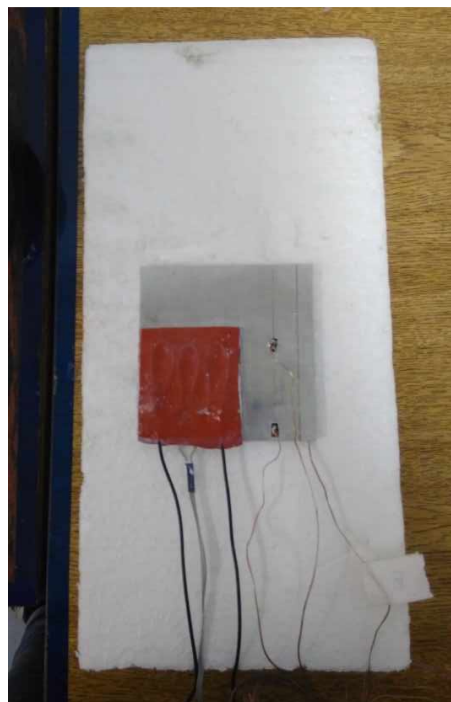


Figura 5.1 - Conjunto experimental contendo amostra, aquecedor, transdutor, termopares e poliestireno

A Figura 5.2 apresenta a bancada experimental desenvolvida para obtenção das temperaturas em regime transiente.

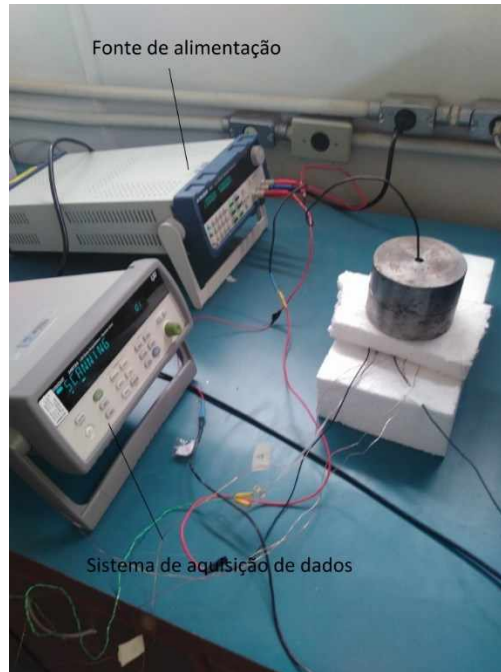


Figura 5.2 - Aparato experimental contendo aquecedor, fonte de alimentação, transdutor, sistema de aquisição e termopares fixados à amostra.

A fonte de alimentação fornece tensão e corrente ao aquecedor elétrico. O transdutor, posicionado logo acima do aquecedor, capta e transmite essa tensão ao sistema de aquisição de dados. O fluxo de calor pode ser determinado a partir da curva de calibração do transdutor, Eq. (5.1). O transdutor utilizado neste experimento é o número 6 e a curva de calibração permite a transformação do sinal da tensão U_6 (V) em fluxo de calor Q ($\frac{W}{m^2}$).

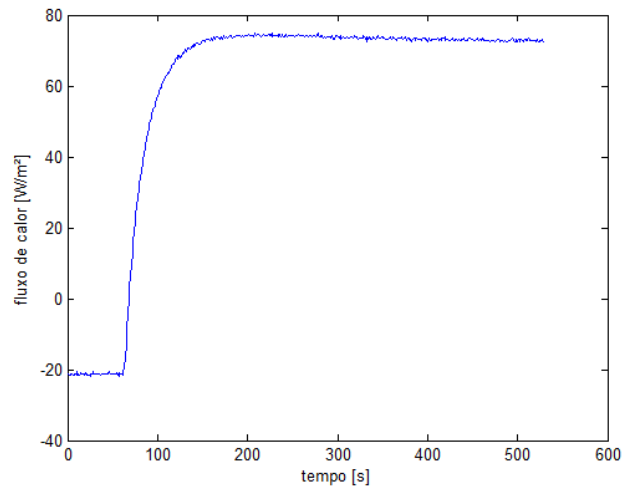
$$Q = 651063.46 \times U_6 - 20.205 \quad (5.1)$$

5.2 Resultados experimentais

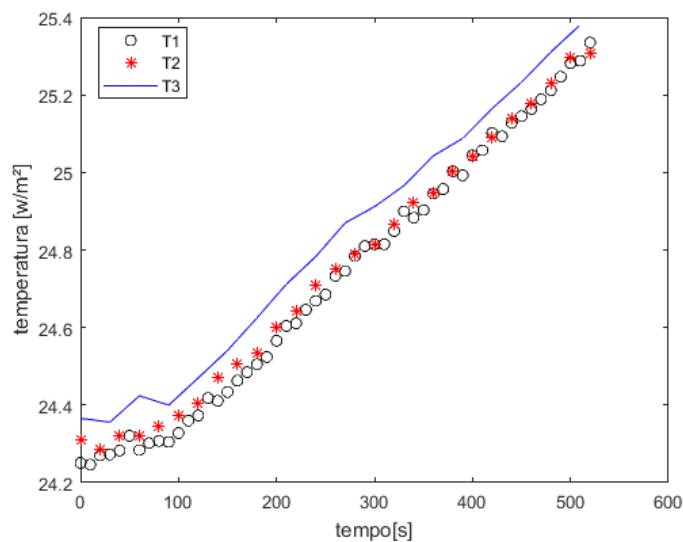
Primeiro experimento:

- Temperatura inicial: 24.3°C
- Tensão de alimentação do aquecedor: 2V e um corrente de 5A.

A partir desses parâmetros experimentais o fluxo térmico e a evolução das temperaturas experimentais, nos pontos definidos anteriormente, são apresentados na Fig. 5.3.



(a)



(b)

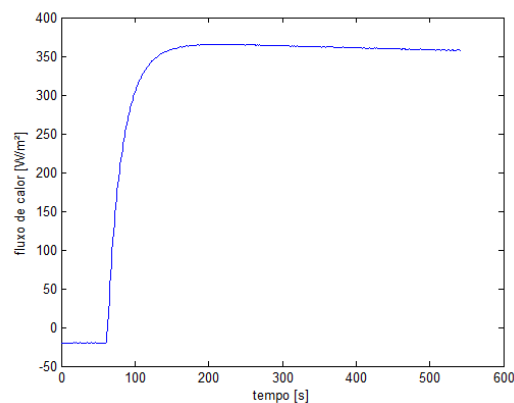
Figura 5.3: (a) Fluxo de calor- experimento 1 (b) Temperaturas – experimento 1

Percebe-se que com a aplicação de um fluxo de calor de aproximadamente 72 W/m^2 , a diferença de temperatura durante 7min45' é de apenas 1°C . Como o gradiente de temperatura não foi muito significativo, um segundo experimento foi realizado.

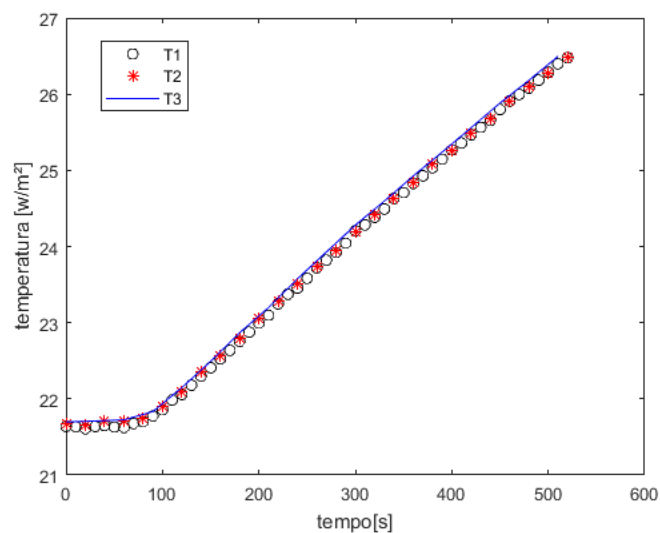
Segundo experimento:

- Temperatura inicial: 21.6°C
- Tensão de alimentação do aquecedor: 40V e um corrente de 5A.

O fluxo de calor imposto e a evolução das temperaturas experimentais, nos pontos definidos anteriormente, são apresentados na Fig. 5.4



(a)



(b)

Figura 5.4: (a) Fluxo de calor- experimento 2 (b) Temperaturas – experimento 2

Como esperado, com fluxo de aproximadamente 400 W/m² obteve-se um gradiente de temperatura de 5°C durante os 8 minutos de experimento. De posse dos dados experimentais o próximo passo é aplicar o modelo direto na interface da solução inversa, o que será apresentado na sequência.

CAPÍTULO VI

Software de aplicação e análise de observadores por funções de Green

A técnica de observadores dinâmicos baseada em funções de Green inicialmente proposta por Sousa, (2006) resolve problemas inversos em condução de calor baseada na definição e obtenção da função transferência de um sistema dinâmico usando-se funções de Green e técnicas de controle. Esta técnica tem aplicação imediata em problemas multidimensionais desde que as condições de contorno não ativas sejam homogêneas e o fluxo de calor desconhecido seja imposto em uma determinada região. A técnica inversa, ainda, incorpora parâmetros de ajuste que variam dependendo do nível de ruído presente nos dados experimentais. O *software de aplicação e análise de observadores por funções de Green* dinamizou e ampliou a possibilidade de uso da técnica inversa baseada em funções de Green e observadores dinâmicos, uma vez que, a interface intuitiva permite que o usuário resolva o problema inverso sem que se tenha conhecimento do algoritmo, neste capítulo será apresentado o software de solução da técnica inversa bem como a aplicação do modelo direto desenvolvido na solução de problemas inversos.

6.1 Técnica Inversa e Descrição do software

Para entendimento da técnica inversa pode-se representar o problema térmico através de um sistema dinâmico conforme mostrado na Fig. 6.1.

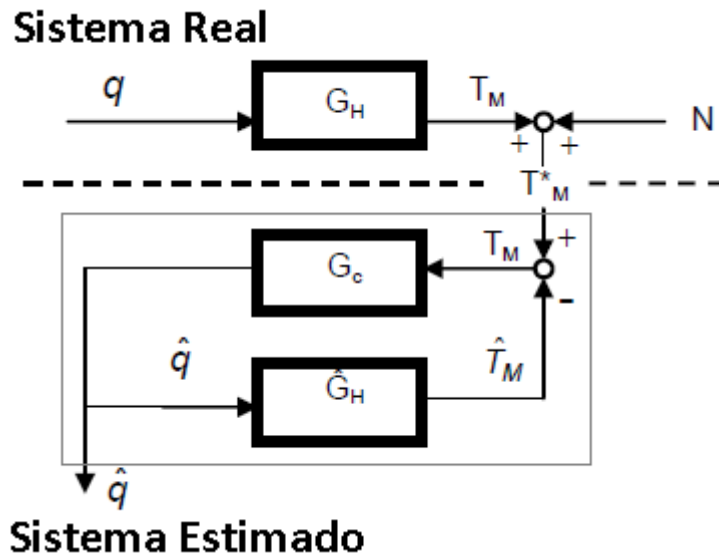


Figura 6.1 - Diagrama de blocos representando o problema térmico (Kroll, 2016)

Na figura observa-se que acima da linha tracejada têm-se representado o sistema real, onde o fluxo de calor desconhecido (q) é imposto a amostra com função de transferência G_h , tendo como saída a temperatura T_M , temperatura está corrompida por um ruído N fruto do procedimento experimental denominada T_M^* .

Sousa (2008) conclui que a função de transferência do modelo térmico, G_h , pode ser obtida através de um problema térmico auxiliar, que possui as mesmas características físicas do problema original, porém com um fluxo de calor unitário e constante no tempo e, temperatura inicial igual a zero, o que se denomina sensibilidade. A sensibilidade então é obtida a partir do problema auxiliar (fluxo unitário), também chamado de sensibilidade. Como o sistema dinâmico equivalente é linear, invariante e fisicamente realizável (Bendat & Pierson, 1986) a função resposta $\overline{G}_h(x, y, z, s)$ é a mesma qualquer que seja o conjunto entrada/saída.

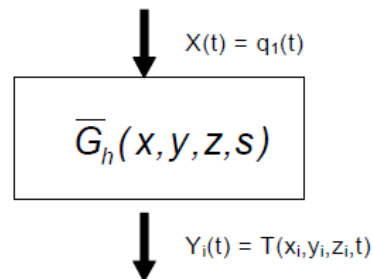


Figura 6.2 - Representação da função resposta $\overline{G}_h$. (Sousa, 2006)

Partindo da resposta temporal do problema auxiliar, faz-se uma aproximação polinomial da temperatura no tempo, e realiza-se a transformada de Laplace deste polinômio. A

transformada de Laplace de um polinômio é simples, e a função de transferência de G_h é obtida a partir da Eq. (6.1):

$$\overline{T^+}(x, y, z, s) = \overline{G_h}(x, y, z, s) \frac{1}{s} \quad (6.1)$$

$$\overline{G_h}(x, y, z, s) = \overline{T^+}(x, y, z, s) s = s \left[\frac{a_1}{s} + \frac{a_2}{s^2} + \frac{a_3}{2s^3} \dots \right] \quad (6.2)$$

Na Figura 6.1, abaixo da linha tracejada observa-se o problema inverso. No sistema estimado, têm-se o modelo de referência estimado $\widehat{G_h}$ (o qual se assume precisamente conhecido: $G_h = \widehat{G_h}$) que funciona como a realimentação do sistema, e uma função de transferência auxiliar G_c , sua função é manipular o fluxo estimado $\hat{q}$ de modo a minimizar a diferença entre a temperatura estimada e a medida ($(T_M^* - \hat{T}_M) \rightarrow 0$).

A partir da Fig. 6.1, pode-se definir:

$$T_M^* = T_M + N \quad (6.3)$$

$$T_M^* = G_h \cdot q + N \quad (6.4)$$

E, a partir da equação de um sistema em malha fechada:

$$\hat{q} = \frac{G_c}{1 + G_c G_h} T_M^* \quad (6.5)$$

Substituindo a Eq. (6.4) em (6.5):

$$\hat{q} = \frac{G_c G_h}{1 + G_c G_h} q + \frac{G_c}{1 + G_c G_h} N \quad (6.6)$$

Trabalhando a Eq. (6.6), obtêm-se as seguintes relações:

$$G_Q = \frac{G_c G_h}{1 + G_c G_h} \quad (6.7)$$

$$G_N = \frac{G_C}{1 + G_C G_h} \quad (6.8)$$

$$\hat{q} = G_Q q + G_N N \quad (6.9)$$

G_Q e G_N são chamados de estimadores, G_Q define o comportamento da estimação do fluxo de calor e G_N define o comportamento do ruído.

Das equações (6.7) e (6.8), define-se uma relação entre os estimadores G_Q e G_N com a função de transferência estimada G_h .

$$G_h = G_Q G_N^{-1} \rightarrow |G_N(j\omega)| = \frac{|G_Q(j\omega)|}{|G_h(j\omega)|} \quad (6.10)$$

Analisando a Eq. (6.10) conclui-se que para se obter a melhor estimação $|G_N(j\omega)| \rightarrow 0$, $|G_Q(j\omega)| \rightarrow 1$ e $\phi G_Q(j\omega) \rightarrow 0$, assim teremos que $\hat{q} \rightarrow q$.

Segundo Kroll, (2016), “*um aspecto importante sobre a técnica baseada em observadores dinâmicos de Sousa (2006) é a forma como se aborda a função de correção G_c . Diferente das técnicas que usam filtros e focam no projeto da função de transferência de correção, o método baseado em observadores usa a estrutura de um observador apenas como um pensamento experimental para demonstrar as correlações entre a função de transferência do sinal e do ruído.*” Assim a partir das Eq. (6.5) e (6.8) pode-se definir a equação que se refere ao estimador como:

$$\bar{\hat{q}}(s) = \bar{G}_N(s) \times \bar{T}_M^*(s) \quad (6.11)$$

A função de transferência do sinal (G_Q) tem o comportamento similar ao de um filtro passa baixa: $|G_Q(j\omega)| \rightarrow 1$ e $\phi G_Q(j\omega) \rightarrow 0$ abaixo da frequência de corte, na técnica faz-se uso de um filtro Chebyshev tipo I recursivo que apresenta esse comportamento.

Definidos G_h e G_Q obtém-se G_N a partir da Eq. (6.10) e juntamente com a Eq. (6.11), pode-se relacionar a função de transferência G_N com o fluxo de calor estimado e com a temperatura medida.

$$\overline{G_N}(s) = \frac{\overline{\hat{q}}(s)}{\overline{T_M^*}(s)} = \frac{\sum_{i=0}^{m_N} b_{N,L,i} s^i}{\sum_{i=0}^{n_N} a_{N,L,i} s^i} \quad (6.12)$$

Onde $b_{N,L,i}$ são os m_N coeficientes da função de transferência G_N no domínio de Laplace no numerador e $a_{N,L,i}$ são os n_N coeficientes no denominador.

Observa-se que o domínio de Laplace é contínuo, e os sinais de temperatura são discretos coletados no tempo e com período definido, portanto deve-se aplicar a transformada discreta de Laplace para o domínio discreto Z . Realizando a transformação bilinear na Eq. (6.12), assim:

$$G_N(z) = \frac{\hat{q}(z)}{T_M^*(z)} = \frac{\sum_{i=0}^{m_N} b_{N,Z,i} z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^{n_N} a_{N,Z,i} z^{-i}} \quad (6.13)$$

A partir desta equação, o fluxo estimado pode ser trabalhado para se realizar a transformada z inversa:

$$\hat{q}(z) = \sum_{i=0}^{m_N} b_{N,Z,i} z^{-i} T_M^*(z) - \sum_{i=1}^{n_N} a_{N,Z,i} z^{-i} \hat{q}(z) \quad (6.14)$$

Realizando a transformada inversa tem-se:

$$\hat{q}(k) = \sum_{i=0}^{m_N} b_{N,Z,i} z^{-i} T_M^*(k-i) - \sum_{i=1}^{n_N} a_{N,Z,i} z^{-i} \hat{q}(k-i) \quad (6.15)$$

Nota-se que para estimar o fluxo, é necessário o fluxo estimado e temperatura de tempos passados e do tempo atual, isso acarreta uma mudança ou atraso de fase, interferindo nos resultados. Este atraso pode ser removido adaptando uma filtragem reversa na Eq. (6.6):

$$\hat{q}'(k) = \sum_{i=0}^{m_Q} b_i \hat{q}(k-i) - \sum_{i=1}^{n_Q} a_i z^{-1} \hat{q}'(k-i) \quad (6.16)$$

Onde $\hat{q}'$ é o fluxo estimado revertido filtrado, nota-se que os coeficientes utilizados agora são da função de transferência do sinal (G_Q). Os passos abaixo descrevem o funcionamento deste algoritmo.

1° passo: $q_F(z) = G_N(z) \cdot T_M^*(z)$

2° passo: $q_B(z) = G_Q(z) \cdot \bar{q}_F(z)$

3° passo: $\hat{q}(z) = \bar{q}_F(z)$

Onde $q_F(z)$ é o fluxo de calor a ser filtrado. Ele será filtrado pelo seu conjugado $\bar{q}_F(z)$, obtendo-se $q_B(z)$ que deve ser revertido para obter o valor estimado final $\hat{q}(z)$.

Kroll (2016) em seu trabalho resume a técnica inversa em um fluxograma claro e direto, que simplifica o entendimento da técnica inversa, Fig. 6.3. Neste trabalho o objetivo é aplicar o modelo direto na interface desenvolvida por Kroll.

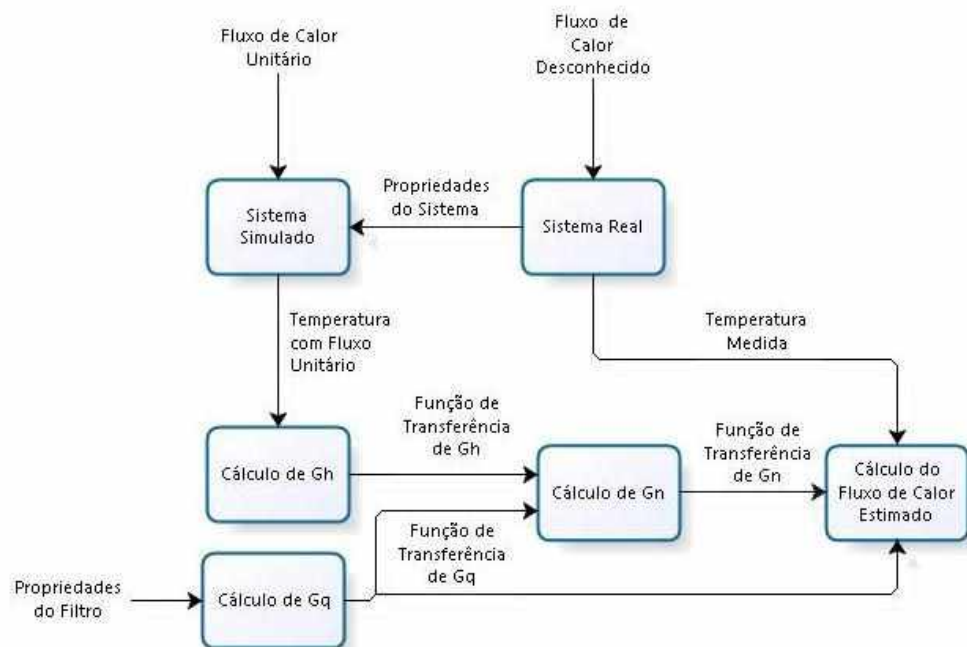


Figura 6.3 - Diagrama esquemático da técnica inversa (Kroll B.C. 2016).

A Figura 6.4 apresenta a interface criada por Kroll (2016) para melhor compreensão e uso da técnica inversa. Ao abrir o matlab e compilar o programa *observadores.m* a interface é aberta, Fig. 6.4.

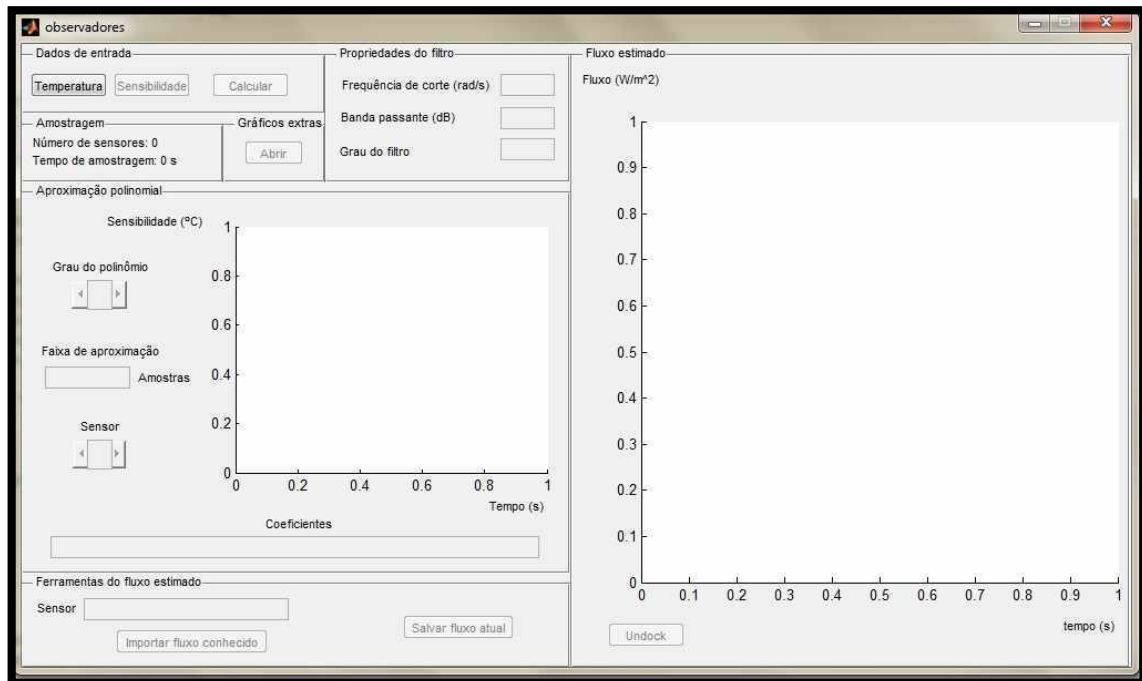


Figura 6.4 - Interface do Software

Observa-se que apenas o botão *Temperatura* pode ser ativado na interface, esse botão alimenta o software da técnica inversa com dados experimentais, importante frisar que os dados de temperatura devem estar subtraídos da temperatura inicial, ou seja, $\theta = T - T_0$. Após a leitura dos dados de temperatura o software ativa o botão *sensibilidade*, que é alimentado por dados de sensibilidade calculados a partir de um modelo direto. Esses arquivos, tanto o de temperatura quanto o de sensibilidade precisam estar disponíveis e formatados de forma que a primeira coluna seja o tempo de amostragem, e as outras representem cada sensor e sua evolução no tempo, os arquivos devem ser do tipo *.txt* ou *.dat*. O próximo passo é ativar o botão *calcular*, que cruza os dados fornecidos e calcula uma primeira estimativa do fluxo de calor desconhecido. Essa primeira estimativa é feita usando um filtro passa baixa com parâmetros predeterminados. Esses parâmetros devem ser ajustados pelo usuário para uma melhor estimativa. Ajustados os parâmetros automaticamente o gráfico de fluxo estimado, presente na interface, é atualizado. A interface conta ainda com a opção de se estimar o fluxo de calor a partir de qualquer um dos sensores existentes, ou ainda a partir da soma de mais de um se necessário, detalhe mostrado na Fig. 6.5.

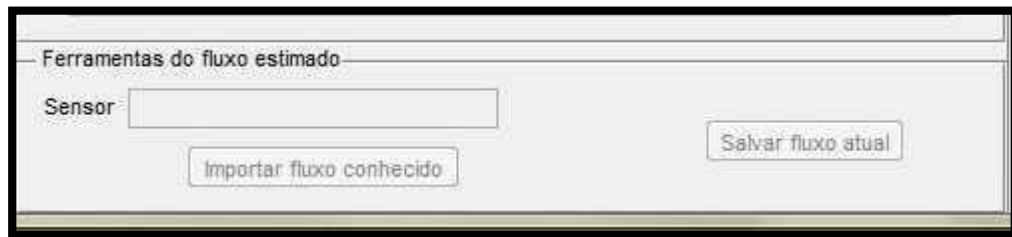


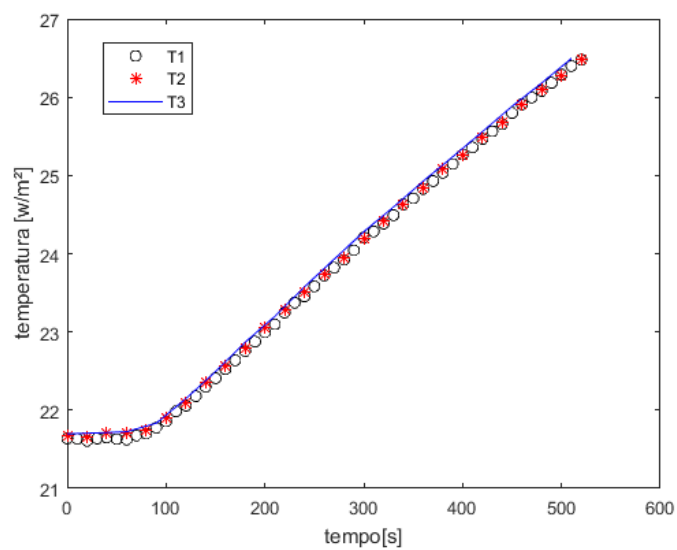
Figura 6.5 - Campo da interface onde se identifica a partir de qual sensor se estimar o fluxo

É possível também importar um fluxo de calor conhecido para comparar com a estimativa obtida. Outras funções podem ser observadas na interface, entretanto as principais e que serão aplicadas na seção seguinte já foram comentadas.

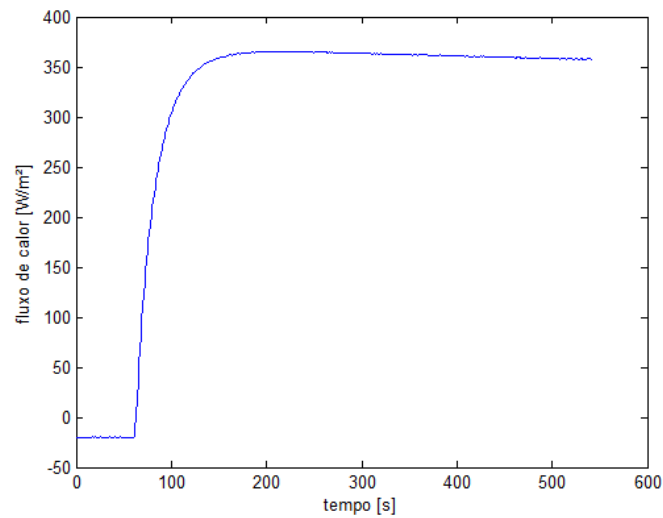
6.2 Resultados de estimativa de fluxo a partir do modelo numérico 3D desenvolvido

6.2.1. Estimativa do fluxo de calor experimental

No Capítulo V um experimento sob condições controladas foi realizado e os dados de temperatura e fluxo medidos podem ser observados na Fig. 6.6.



(a)



(b)

Figura 6.6 – (a)- Temperaturas experimentais, (b) Fluxo de calor medido. (Seção 5.2 segundo experimento)

Para a técnica inversa considera-se que o fluxo de calor é desconhecido e será estimado a partir das temperaturas experimentais. Sabe-se que para a técnica inversa, além de temperaturas experimentais, é necessário o cálculo da sensibilidade através do modelo direto. Assim, primeiro recorre-se ao modelo direto para o cálculo da sensibilidade, Fig. 6.7.

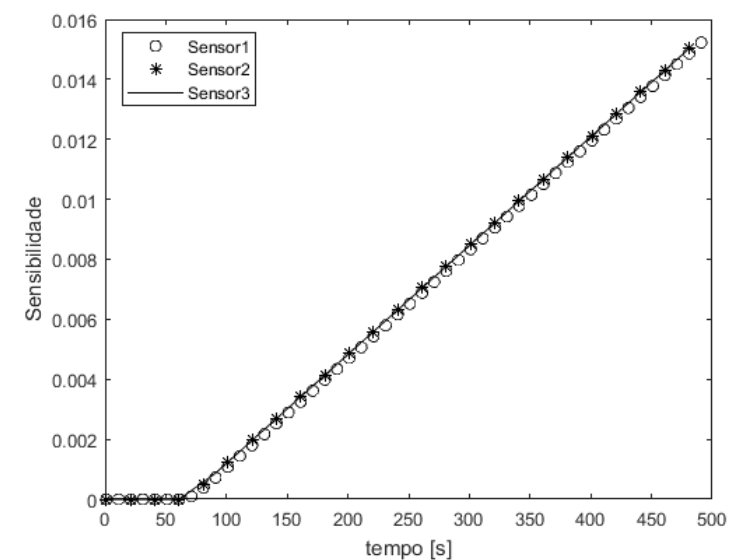


Figura 6.7 – Sensibilidade

De posse dos dados de temperatura e sensibilidade o fluxo de calor é calculado a partir da técnica inversa usando informações coletadas pelo sensor 1. Uma primeira estimativa é apresentada no gráfico da interface, Fig. 6.8.

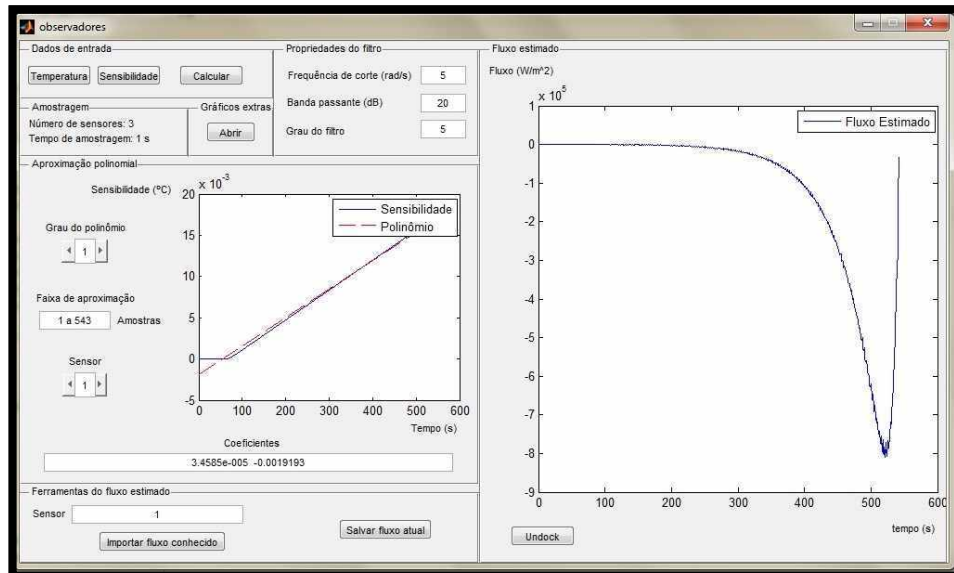


Figura 6.8 - Primeira estimativa com os parâmetros iniciais

Alguns detalhes da técnica inversa apresentados por Kroll (2016) precisam ser entendidos para uma estimativa satisfatória, primeiro, o polinômio de aproximação, por exemplo, não pode ter o termo constante negativo. Na interface, basta substituir o termo negativo por zero e o resultado atualizado pode ser visto na Fig. 6.9.

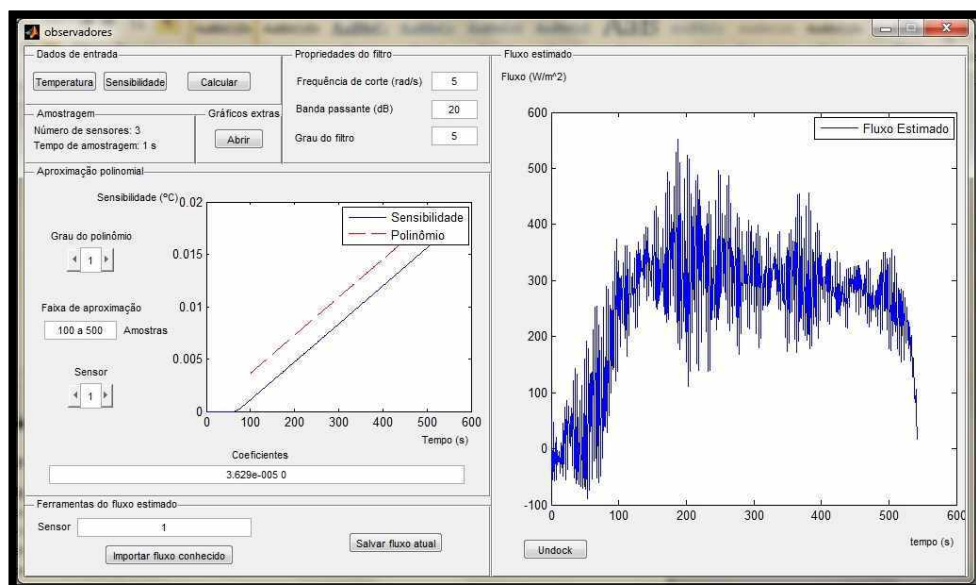


Figura 6.9 - Correção do termo negativo e estimativa corrigida

Observa-se nesta estimação a presença de muito ruído, outro aspecto abordado por Kroll trata dos parâmetros do filtro passa baixa que devem ser ajustados a fim de se reduzir o efeito dos ruídos no resultado estimado. A Figura 6.10 apresenta em detalhe o campo de parâmetros do filtro na interface e a Fig. 6.11 mostra o fluxo de calor estimado a partir dos dados coletados e com um filtro mais adequado, a escolha do filtro depende do usuário e é feita através de tentativa e erro.

Propriedades do filtro

Frequência de corte (rad/s) 5

Banda passante (dB) 20

Grau do filtro 5

Figura 6.10- Parâmetros do filtro

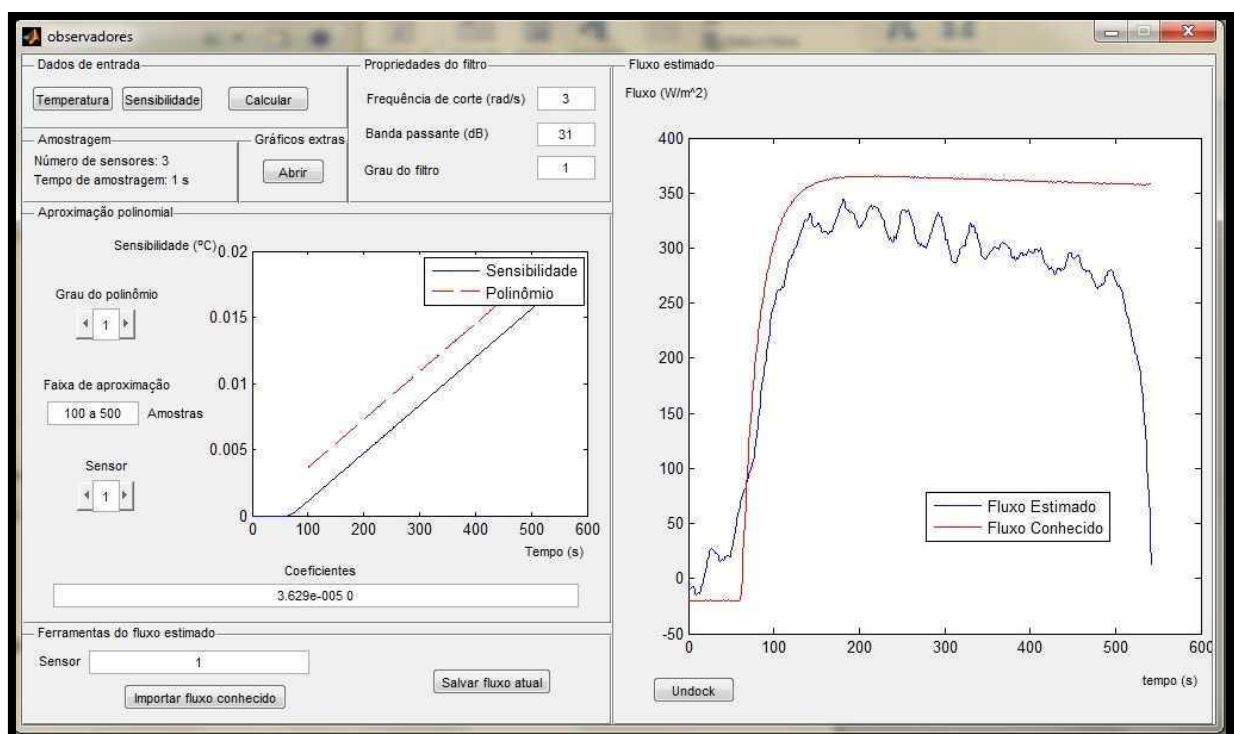
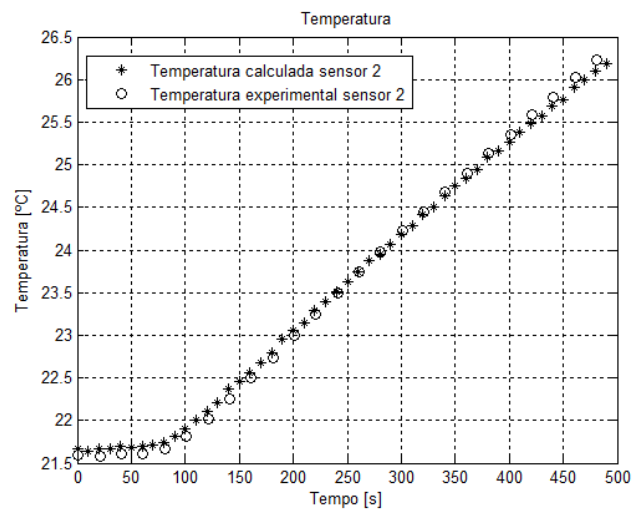


Figura 6.11 - Fluxo estimado e fluxo medido no experimento

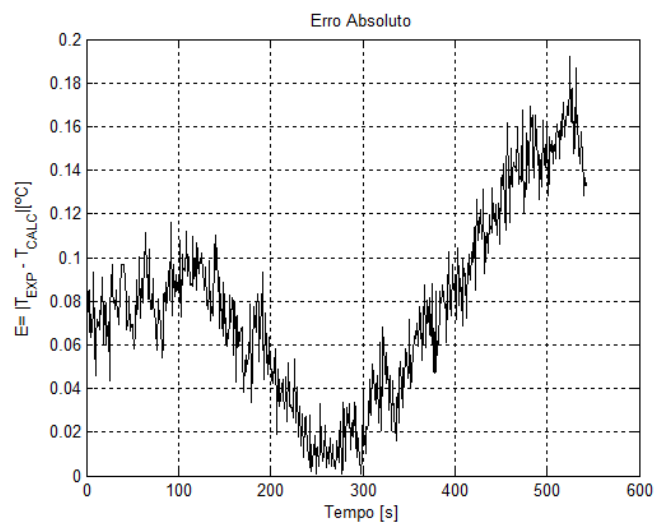
Uma vez que o fluxo de calor experimental é conhecido torna-se possível, através da interface, criar um gráfico comparativo, Fig. 6.11. Observa-se que o fluxo estimado apresenta

boa concordância com o fluxo medido, apresentando um desvio de +/- 2% em relação ao fluxo imposto.

Uma forma de avaliar o resultado estimado é resolver o problema direto considerando o fluxo estimado como condição de contorno. A temperatura para o sensor 2 é mostrada na Fig. 6.12, que ainda apresenta o erro absoluto da diferença entre a temperatura experimental e a calculada pelo modelo direto.



(a)



(b)

Figura 6.12 – (a) Temperatura Experimental e calculada, (b) erro absoluto

CAPÍTULO VII

Conclusões

7.1 Considerações finais

A solução de problemas diretos é muito conhecida no mundo científico e amplamente utilizada. Encontram-se facilmente soluções de problemas diretos uni e bidimensionais (Incropera e Dewitt, 2002). O modelo numérico desenvolvido resolve problemas diretos de condução de calor em geometria 3D.

O programa desenvolvido permite resolver estes problemas de maneira simples e direta. A interface gráfica faz com que o usuário resolva o problema facilmente sem que seja necessário desenvolver um algoritmo de solução numérica, para utilizar a interface o usuário precisa informar apenas o fluxo de calor que será imposto à amostra.

Realizou-se comparação para o caso unidimensional, entre as temperaturas obtidas experimentalmente e as temperaturas obtidas pelo método numérico. Esta comparação permite de confirmar a confiabilidade do programa, que já havia sido validado numericamente através do balanço de energia. Neste sentido o objetivo principal do projeto foi alcançado

Kroll (2016), declara em seu trabalho que O *Software de aplicação e análise de observadores por funções de Green* pode ser operado sem complicações e afirma ainda que até mesmo usuários que desconheçam em profundidade a técnica conseguem obter estimações a partir desse software, entretanto ele explicita que é necessário um modelo direto de condução de calor. Neste sentido esse projeto apresenta um modelo direto que igualmente pode ser resolvido por usuários que não tenham conhecimento profundo de soluções numéricas de problemas térmicos.

A fim de verificar a utilização do modelo para a solução de um problema inverso de condução de calor um experimento foi desenvolvido em laboratório, e os resultados estimados a partir do software e do modelo direto apresentam ótima concordância com os resultados experimentais. As interfaces gráficas tanto do modelo direto quanto da técnica inversa buscam a flexibilização do método clássico, possibilitando a aplicação imediata em problemas de condução de calor com modelagem tridimensional.

7.2 Sugestões para trabalhos futuros

Como propostas para trabalhos futuros seguem as seguintes sugestões:

- Extensão desta técnica para problemas térmicos com fluxos de calor transientes variando com a posição.
- Incrementar a interface gráfica de maneira que o utilizador possa escolher as dimensões e o material da peça bem como a localização do fluxo. Atualmente o procedimento proposto só pode ser aplicado em sistemas cujo fluxo de calor seja imposto em somente uma determinada região, e para uma amostra com geometria e posição de sensores pré-definidos. Importante esclarecer, que o usuário pode dentro do algoritmo alterar as propriedades e geometria do material, mas para isso este deve ter noções de programação.
- Desenvolvimento da programação afim de que seja aplicada em sistemas expostos a radiação. Atualmente o procedimento proposto só pode ser aplicado em sistemas cujas condições de contorno não ativas sejam homogêneas ou expostas a meios convectivos.
- Desenvolvimento do *Software de aplicação e análise de observadores por funções de Green*, Kroll (2016) a fim de incorporar na interface um botão podendo calcular o problema direto e assim utilizar os dados de temperatura e sensibilidade para a resolução do problema inverso.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BEATRIZ L. A. MAGALHÃES E A. M. AMORIM DA COSTA. O Flogisto na Gênese das Teorias de Lavoisier. **QUÍMICA – Boletim da Sociedade Portuguesa de Química**. Portugal, série II, n.53, abr-jun. 1994. Disponível em: <<http://www.spq.pt/magazines/BSPQ/577/article/3000630/pdf>>. Acesso em abr. 2017.

BRUNO CÉSAR KROLL. **Desenvolvimento de um software de análise e aplicação da técnica inversa de transferência de calor de observadores por funções de Green**, 2016. 51 f. Projeto de Fim de Curso – Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia.

FRANCK P. INCROPERA; DAVID P. DEWITT. **Fundamentos de Transferência de Calor e de Massa**. 5a edição. N.Y: John Wiley & Sons, INC, 2002. 698p.

GUERRIC BEAUGRAND. **Déploiement adaptatif d'un réseau de capteur mobile pour des phénomènes régis par des équations aux dérivées partielles**, 2013. 36 f. MASTER Mathématiques et Applications – Institut des Sciences et Techniques de l'Ingénieur d'Angers. Disponível em : <isabiblio.univ-angers.fr/BeaugrandGuerric/documents/rapport_stage.pdf>.

MIGUEL VAZ JÚNIOR E.Mec. M.Eng. Ph.D. **Introdução ao método de volumes finitos**. Universidade do Estado de Santa Catarina. Centro de Ciências tecnológicas. Departamento de Engenharia Mecânica. 5a edição. Fev. 2015. Disponível em: <<http://www.joinville.udesc.br/portal/professores/vazjr/materiais/Apostila5e.pdf>>. Acesso em: maio 2017.

PAULO AUGUSTO BISQUOLO. Calorimetria: O estudo dos fenômenos de transferência de calor. **Página 3 Pedagogia & Comunicação**. Jul. 2005. Disponível em: <<https://educacao.uol.com.br/disciplinas/fisica/calorimetria-o-estudo-dos-fenomenos-de-transferencia-de-calor.htm>> Acesso em abr. 2017.

PRISCILA FERREIRA BARBOSA DE SOUSA. **Desenvolvimento de uma Técnica baseada em funções de Green e Observadores dinâmicos para aplicação em Problemas Inversos**, 2006. 83 f. Dissertação de Mestrado – Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia.