

ADEMAR NUNES DO VALE JÚNIOR

BANCADA DIDÁTICA PARA ENSAIOS E ANÁLISES DE VIBRAÇÃO



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

2017

ADEMAR NUNES DO VALE JÚNIOR

Orientador

Prof. Dr. Aldemir Aparecido Cavalini Jr

BANCADA DIDÁTICA PARA ENSAIOS E ANÁLISES DE VIBRAÇÃO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Engenharia Aeronáutica da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para obtenção do título de BACHAREL EM ENGENHARIA AERONÁUTICA.

Uberlândia - MG

2017

ADEMAR NUNES DO VALE JÚNIOR

BANCADA DIDÁTICA PARA ENSAIOS E ANÁLISES DE VIBRAÇÃO

Projeto de conclusão de curso
APROVADO pelo Colegiado do Curso de
Graduação em Engenharia Aeronáutica
da Faculdade de Engenharia Mecânica da
Universidade Federal de Uberlândia.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Aldemir Cavalini Junior - UFU - Orientador

Profa. Dra. Elaine Gomes Assis - FEMEC - UFU

Vinicius Nunes Carvalho - FEMEC - UFU

UBERLÂNDIA
2017

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, por sempre ter me dado força e saúde para superar todas as dificuldades.

À Universidade Federal de Uberlândia, pela oportunidade de fazer o curso, e seu competente corpo docente, responsável por minha formação pessoal, e profissional.

Ao Prof. Dr. Aldemir Cavalini Junior, pelo suporte no pouco tempo que lhe coube, pelas suas correções, ensinamentos e incentivos.

Aos familiares, em especial meus pais, Ademar Nunes do Vale e Denise Fátima Pereira, que estiveram ao meu lado em todos os momentos de dificuldade, que sempre me incentivaram, e me apoiaram.

A todos, muito obrigado!

Junior, A. N. V. **Bancada Didática Para Ensaio e Análises De Vibração**. 2017. Trabalho de Conclusão de Curso, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG.

RESUMO

Atualmente, a análise dinâmica estrutural é imprescindível para a concepção de qualquer projeto que envolvam forças sobre estruturas relacionados à engenharia moderna. Essa análise é realizada com intuito de obter as respostas dinâmicas da estrutura quando excitada por cargas dinâmicas. Uma vez obtidas as respostas, é possível calcular e otimizar os parâmetros da estrutura, alterando sua massa, rigidez e amortecimento. No presente trabalho, foi realizada uma análise de vibração em uma bancada didática experimental juntamente com a resolução matemática das equações que regem o movimento do sistema. Considerando a importância do estudo de dinâmica de estruturas, o objetivo geral deste trabalho consiste em propor, construir e analisar uma bancada didática que sirva como ferramenta de auxílio durante a aprendizagem de estudantes na disciplina Dinâmica de Estruturas Aeronáuticas.

Palavras chave: análise de vibrações, bancada didática, modelo matemático.

Junior, A. N. V. **Academic Rig For Testing And Analysis Of Vibrations**. 2017.
Final Project. Federal University of Uberlândia, Uberlândia, MG.

ABSTRACT

Nowadays, the dynamic structural analysis is indispensable to the conception of any project that involves forces applied over structure related to modern engineering. This analysis is performed in order to get the responses of certain dynamic loads over the structures. Once obtained the responses, it is possible to calculate and optimize its parameters, such as the mass, stiffness, and damping. In this present work, a vibration analysis was performed in an academic rig together with the mathematical equations governing the system motion. Considering the importance of the dynamic structural study to understand its vibrations, the main goal of this work is proposing, build, and analyze an academic rig that promote as aid tool during learning of students in the subject Aeronautical Structures Dynamics.

Keywords: *vibrations, academic rig, mathematic model.*

LISTA DE ABREVIações

FRF	Função de Resposta em Frequência
GDL	Graus de Liberdade

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	9
1.1 Contextualização	9
1.2 Conceitos Iniciais.....	10
1.3 Análise Modal	11
1.4 Objetivos.....	12
1.5 Organização do Trabalho	12
 2. MODELAGEM MATEMÁTICA	 14
2.1 Modelos Matemáticos de Sistemas de Vários Graus de Liberdade	14
2.2 Princípio do Trabalho Virtual	14
2.3 Princípio de Hamilton.....	16
2.4 Equações de Lagrange.....	19
2.5 Frequências Naturais e Modos de Vibração	20
2.6 Domínio Modal.....	21
2.7 Sistemas Amortecidos	22
 3. BANCADA EXPERIMENTAL DE TESTES	 24
3.1 Proposta da Bancada	24
3.2 Parâmetros Iniciais	25
3.2 Configurações da Bancada	26
 4. RESULTADOS	 39
 5. CONCLUSÕES	 46
 BIBLIOGRAFIA	 47
 ANEXO	 48

1. INTRODUÇÃO

1.1 Contextualização

A análise dinâmica de estruturas é um ramo essencial quando se trata de problemas de engenharia. Compreender e conhecer as respostas dinâmicas de estruturas que são constantemente sujeitas a excitações dos mais variados tipos se torna importante em inúmeras aplicações.

Dessa maneira, vários estudos e testes são realizados de modo a determinar os carregamentos dinâmicos que as estruturas estão sujeitas. Estas são projetadas de modo que resistam as oscilações e esforços causados por forças externas. Para tanto, são realizados testes experimentais e estudos baseados em modelos matemáticos. Neste sentido, a técnica de elementos finitos é uma ferramenta computacional amplamente utilizada na indústria.

O estudo do comportamento dinâmico de estruturas é realizado visando o entendimento acerca das interações entre seus componentes e as respostas de vibração aos estímulos fornecidos. Na tentativa de verificar conceitos, validar modelos teóricos e possibilitar um maior entendimento de problemas reais de engenharia, o uso de bancadas experimentais simulando efeitos mecânicos em escala reduzida é um método extensivamente utilizado em universidades e centros de pesquisa (JESUS; CAVALCANTE, 2011).

Devido à dificuldade e falta de conveniência financeira em se analisar componentes em tamanhos reais, assim como o crescente desenvolvimento e evolução de sistemas eletrônicos e de instrumentação, sistemas experimentais de pequeno porte vêm sendo utilizados para simulações e testes na engenharia. Assim sendo, sistemas computacionais de aquisição de dados passaram a ser utilizados de forma disseminada. A Fig. 1.1 apresenta o exemplo de ensaio representado em escala.



Figura 1.1 – Ensaio em Túnel de Vento de protótipo da Aeronave EMBRAER KC-390

(Fonte: Economia.ig.com.br).

1.2 Conceitos Iniciais

O entendimento da vibração de um sistema com N graus de liberdade consiste basicamente na análise dos seus modos naturais de vibração, dos fatores de amortecimento e das frequências naturais da estrutura. As frequências naturais indicam a taxa de oscilação livre da estrutura, depois de cessada a força que provocou seu movimento (BOLINA, 2014). Em outras palavras, representam o quanto a estrutura vibra quando não há forças aplicadas sobre ela.

Quando se tem uma frequência natural do sistema mecânico coincidindo com a frequência de excitação, tem-se o aparecimento da ressonância. Este fenômeno acontece quando um sistema físico recebe energia por meio de excitações de frequência igual a uma de suas frequências naturais de vibração. Assim, o sistema físico passa a vibrar com amplitudes cada vez maiores, provocando deslocamentos

excessivos no sistema, podendo, inclusive, levar a falha de alguns componentes. Por conta desse efeito que as vibrações podem causar, testes de vibrações foram incluídos nas normas e procedimentos de projeto e de verificação experimental nos diversos ramos da engenharia.

Os modos de vibração por sua vez são as formas como a estrutura vibra em cada uma de suas frequências naturais. Para cada frequência natural existe um modo de vibração específico, ou um perfil de vibração. Ao excitar uma estrutura, ela irá vibrar em todos os modos simultaneamente. A Fig. 1.2 exemplifica esses perfis de vibração em separado.

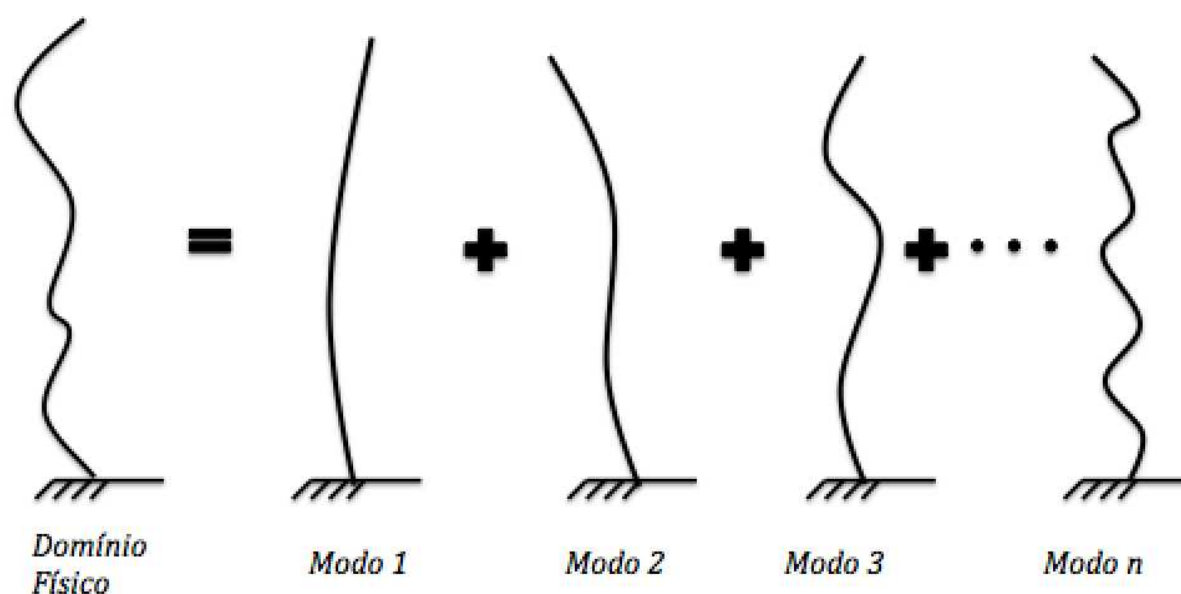


Figura 1.2 – Modos de vibração. Elaborado pelo Autor

Em modelos de sistemas dinâmicos, os amortecedores são considerados elementos ideais e não possuem massa e elasticidade. As forças de amortecimento consideradas são produzidas quando ocorrem velocidades relativas entre suas extremidades (MAMEDE, 2008). Existem vários tipos de modelos propostos para representar o amortecimento, sendo o amortecimento viscoso (modelo em que se considera a força proporcional à velocidade) um dos mais usados no estudo de vibrações. Para o presente trabalho, foi utilizada a hipótese de amortecimento proporcional. Este se trata de um modelo especial de amortecimento viscoso que

admite a matriz de amortecimento como uma combinação linear das matrizes de massa e de rigidez. Tal modelo é conhecido como amortecimento de Rayleigh.

1.3 Análise Modal

A análise modal é o processo constituído de técnicas teóricas e experimentais que possibilitam a construção de um modelo matemático representativo acerca do comportamento dinâmico de sistemas mecânicos a fim de determinar seus parâmetros modais (BOLINA, 2014).

A dificuldade de se analisar a resposta de vibração de um sistema com N graus de liberdade consiste na natureza acoplada do sistema, ou seja, suas equações de movimento estão interligadas. Portanto, os métodos de análise caminham no sentido de desacoplar o problema e fazer a análise de cada grau de liberdade individualmente.

Nesse sentido, o método modal se baseia em transformar o sistema de coordenadas do modelo para um novo sistema de coordenadas, o sistema modal ou de coordenadas principais. As equações interligadas originais do movimento são transformadas em equações desacopladas para o sistema de coordenadas modais. Cada equação desacoplada representa o movimento de um modo de vibrar, o que facilita a solução do problema.

A sequência da análise modal de um sistema mecânico é: transformar para um sistema de coordenadas principais, resolver as equações neste sistema de coordenadas e retornar ao sistema de coordenadas físicas.

1.4 Objetivos

Com base na argumentação precedente, torna-se claro que este trabalho de conclusão tem como motivação a obtenção de conhecimento sobre a vibração de estruturas utilizadas para a validação das teorias associadas à análise de vibrações. Nesse sentido, bancadas didáticas ganham relevância à medida que possibilitam a compreensão das respostas em vibração promovidas por excitações externas.

Portanto, o presente trabalho tem como finalidade propor, construir e analisar uma bancada didática que possibilite complementar aulas teóricas e contemplar a importância do estudo da dinâmica de estruturas e análises de vibração em sistemas mecânicos.

1.5 Organização do Trabalho

Este trabalho é dividido em 5 capítulos. Além deste capítulo 1 que trata da contextualização e das motivações que fizeram surgir o presente trabalho, o capítulo 2 discorre sobre os conceitos e a formulação matemática de modelos de sistemas dinâmicos sujeitos a esforços. O capítulo 3 apresenta a bancada didática construída, assim como suas possíveis variações de configurações e modelos matemáticos associados. O capítulo 4 apresenta os resultados e comparações entre modelos teóricos e experimentais e o capítulo 5 mostra as conclusões obtidas com este trabalho.

2. MODELAGEM MATEMÁTICA

2.1 Modelos Matemáticos de Sistemas de Vários Graus de Liberdade

Inicialmente, tem-se como interesse determinar as equações de movimento de sistemas dinâmicos com vários graus de liberdade (Veja Fig. 2.1). Os princípios da mecânica analítica que embasam o desenvolvimento destas equações são: Princípio do Trabalho Virtual, Princípio de Hamilton e as Equações de Lagrange.

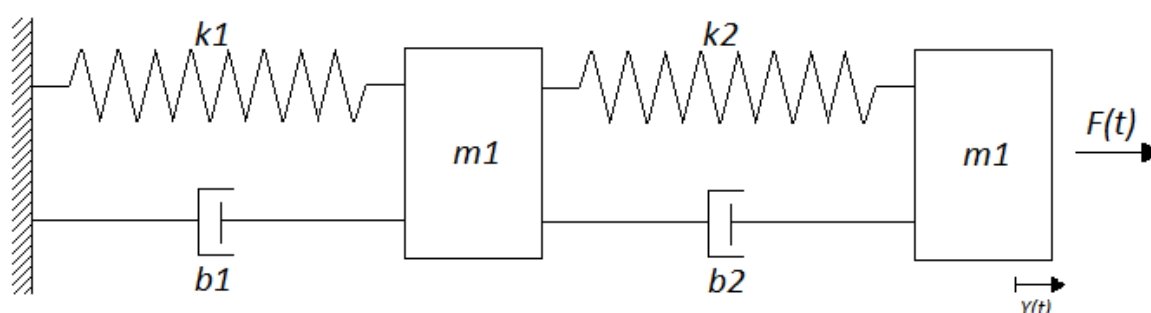


Figura 2.1 – Sistema dinâmico com 2 graus de liberdade. Fonte: Elaborado pelo Autor

2.2 Princípio do Trabalho Virtual

O Princípio do Trabalho Virtual fornece uma ferramenta útil para se determinar o equilíbrio de um sistema. Para que se entenda o Princípio do Trabalho Virtual, dois conceitos se fazem necessários: o deslocamento virtual e o princípio de d'Alembert.

O deslocamento virtual pode ser caracterizado como qualquer deslocamento não real, que possa existir e que não é sujeito ao carregamento aplicado. Já o Princípio de d'Alembert afirma que a soma das diferenças entre as forças agindo em um sistema qualquer e as derivadas no tempo dos momentos deste sistema ao longo de um deslocamento virtual é zero. (CRAIG; KURDILA, 2006)

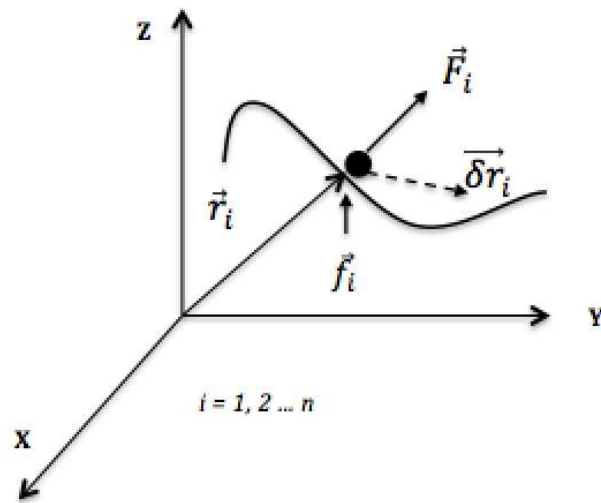


Figura 2.2 - Descrição espacial das componentes de força e posição de uma partícula. Fonte: Elaborada pelo Autor

Na Fig. 2.2, $\vec{F}_i$ é a resultante das forças impostas sobre a partícula P_i (massa m_i), $\vec{f}_i$ é a força de restrição exercida sobre P_i e $\vec{r}_i$ é o vetor posição de P_i .

Pela segunda Lei de Newton:

$$\vec{F}_i + \vec{f}_i = m_i \ddot{\vec{r}}_i \quad (2.1)$$

Para o equilíbrio dinâmico (Princípio de d'Alembert) :

$$\vec{F}_i + \vec{f}_i - m_i \ddot{\vec{r}}_i = 0 \quad (2.2)$$

Aplicando o conceito acima dos chamados deslocamentos virtuais $\delta \vec{r}_i$ na Eq. (2.2), percebe-se que o trabalho virtual realizado pelas forças envolvidas em P_i é nulo.

$$(\vec{F}_i + \vec{f}_i - m_i \ddot{\vec{r}}_i) \delta \vec{r}_i = 0 \quad (2.3)$$

Para a análise, é importante saber que $\delta v(x, t)$ é uma mudança infinitesimal, imaginária e arbitrária na configuração $v(x, t)$ como se observa na Fig. 2.3 a seguir.

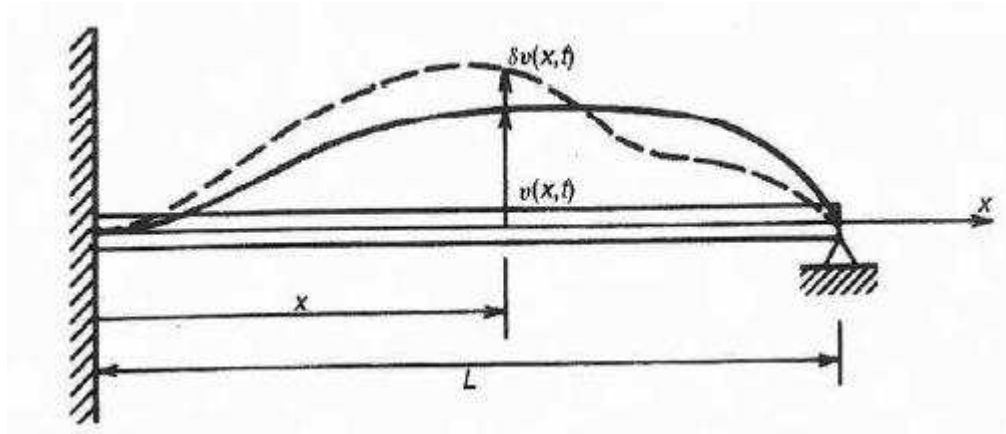


Figura 2.3 – Perturbação infinitesimal na configuração $v(x, t)$

Fonte: CRAIG JUNIOR; KURDILA, 2006, p. 56

No caso da partícula pontual, $\vec{f}_i$ e $\delta\vec{r}_i$ serão perpendiculares e portanto a Eq. (2.3) para um sistema com N partículas fica:

$$\sum_{i=1}^n (\vec{F}_i - m_i \ddot{\vec{r}}_i) \delta\vec{r}_i = 0 \quad (2.4)$$

Assim pode-se representar matematicamente o princípio do Trabalho Virtual por:

$$\delta W = \delta W_{força\ reais} + \delta W_{força\ inercia} = 0 \quad (2.5)$$

sendo que $\delta W_{força\ reais} = \vec{F}_i \delta\vec{r}_i$ e $\delta W_{força\ inercia} = -m_i \ddot{\vec{r}}_i \delta\vec{r}_i$.

Portanto, o enunciado do princípio do trabalho virtual pode ser descrito por: “é nulo o trabalho realizado ao longo de um deslocamento virtual infinitesimal arbitrário de um sistema, a partir de uma posição de equilíbrio” (LEECH, 1971).

2.3 Princípio de Hamilton

Pode-se dizer que o princípio dinâmico sobre o qual se baseia toda a mecânica e, ainda mais, para toda a física clássica é o princípio de Hamilton (CAVALINI, 2004). O Princípio de Hamilton pode ser transcrito como: “para todas as

possíveis trajetórias ao longo das quais o sistema dinâmico pode se mover de um ponto para outro dentro de um intervalo de tempo específico, a real trajetória seguida é a que minimiza a integral da diferença entre as energias cinética e potencial.”

Para entender matematicamente o Princípio de Halmilton, primeiramente, deve-se saber:

$\delta(\text{variação virtual}) \longrightarrow \text{Propriedades do Operador Diferencial}$

$$\delta W \longrightarrow \delta W_{\text{Forças Reais}}$$

A Eq. (2.4) pode ser reescrita como:

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i \delta \vec{r}_i - \sum_{i=1}^n m_i \ddot{\vec{r}}_i \delta \vec{r}_i = 0 \quad (2.6)$$

com base na seguinte identidade:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\dot{\vec{r}}_i \delta \vec{r}_i) &= \ddot{\vec{r}}_i \delta \vec{r}_i + \dot{\vec{r}}_i \delta \dot{\vec{r}}_i = \ddot{\vec{r}}_i \delta \vec{r}_i + \delta \left(\frac{1}{2} \dot{\vec{r}}_i \dot{\vec{r}}_i \right) \\ \ddot{\vec{r}}_i \delta \vec{r}_i &= \frac{d}{dt} (\dot{\vec{r}}_i \delta \vec{r}_i) - \delta \left(\frac{1}{2} \dot{\vec{r}}_i \dot{\vec{r}}_i \right) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Substituindo a Eq. (2.7) na Eq. (2.4), tem-se:

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i \delta \vec{r}_i - \sum_{i=1}^n m_i \frac{d}{dt} (\dot{\vec{r}}_i \delta \vec{r}_i) + \delta \left(\sum_{i=1}^n m_i \frac{1}{2} \dot{\vec{r}}_i \dot{\vec{r}}_i \right) = 0 \quad (2.8)$$

Sendo que o trabalho virtual e a energia cinética são dados, respectivamente, por $\sum_{i=1}^n \vec{F}_i \delta \vec{r}_i = \delta W$ e $T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \dot{\vec{r}}_i \dot{\vec{r}}_i$.

A Eq. (2.7) pode ser escrita na forma:

$$\delta W + \delta T = \sum_{i=1}^n m_i \frac{d}{dt} (\dot{\vec{r}}_i \delta \vec{r}_i) \quad (2.9)$$

É importante saber que:

$$T = T(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i)$$

$$\delta T = \frac{\partial T}{\partial \vec{r}_i} \delta \vec{r}_i + \frac{\partial T}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \delta \dot{\vec{r}}_i \rightarrow \text{Diferencial total} \quad (2.10)$$

Multiplicando a Eq. (2.9) por dt e integrando entre os instantes de tempo t_1 e t_2 , tem-se:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta W + \delta T) dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n m_i \frac{d}{dt} (\dot{\vec{r}}_i \delta \vec{r}_i) dt = \left[\sum_{i=1}^n m_i \dot{\vec{r}}_i \delta \vec{r}_i \right]_{t_1}^{t_2} \quad (2.11)$$

Admitindo que $\delta \vec{r}_i(t_1) = \delta \vec{r}_i(t_2) = 0$, tem-se:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta W + \delta T) dt = 0 \quad (2.12)$$

É comum o trabalho virtual ser dividido em duas parcelas, sejam elas o trabalho devido as forças conservativas e não conservativas:

$$\delta W = \delta W_{cons} + \delta W_{nc} = -\delta v + \delta W_{nc} \quad (2.13)$$

Para a continuidade da análise, é necessário saber que:

- $v = v(\vec{r}_i) \rightarrow \text{Energia potencial};$
- $\delta v = \frac{\partial v}{\partial \vec{r}_i} \delta \vec{r}_i;$
- $\delta W_{cons} = -\delta v$ pela força ser oposta ao deslocamento virtual;
- $\delta W_{nc} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \delta \vec{r}_i$ é o trabalho virtual realizado por forças não conservativas (amortecimento e forças externas não conservativas).

Por fim, o Princípio de Hamilton Estendido é dado por:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta \mathcal{L} dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W_{nc} dt = 0 \quad (2.14)$$

onde $\mathcal{L} = T - V$ é conhecido como Lagrangeano do sistema.

2.4 Equações de Lagrange

Para entender o desenvolvimento das Equações de Lagrange, faz-se necessário primeiramente definir o que são coordenadas generalizadas. As coordenadas generalizadas podem ser definidas como sendo um conjunto de N estados independentes minimamente suficientes para especificar o movimento do sistema.(CAVALINI,2004)

As Equações de Lagrange são formuladas em termos de coordenadas generalizadas q_j e de suas derivadas temporais $\dot{q}_j$ ($j = 1, 2, \dots, N$). Assim, para um conjunto de N partículas:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_j, t) \quad (2.15)$$

Pode-se definir tanto a energia potencial quanto a energia cinética em função das coordenadas generalizadas. Assim,

$$\begin{aligned} T &= T(q_j, \dot{q}_j, t) \\ v &= v(q_j, t) \end{aligned} \quad (2.16)$$

Logo, o Lagrangeano é dado por:

$$\mathcal{L} = T - v = \mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t) \quad (2.17)$$

O diferencial do Lagrangeano mostrado pela Eq. (2.17) fica:

$$\delta \mathcal{L} = \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \right) \quad (2.18)$$

O trabalho virtual das forças não conservativas é dado por:

$$\delta W_{nc} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \delta \vec{r}_i \quad (2.19)$$

Para expressar δW_{nc} em termos das coordenadas generalizadas é preciso representar os deslocamentos virtuais em termos dessas coordenadas, como:

$$\delta \vec{r}_i = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_N} \delta q_N = \sum_{j=1}^N \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \quad (2.20)$$

Agora, substituindo a Eq. (20) na Eq. (19) temos:

$$\delta W_{nc} = \sum_{j=1}^N \left(\sum_{i=1}^n \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j \quad (2.21)$$

ou ainda,

$$\delta W_{nc} = \sum_{j=1}^N Q_j \delta q_j \quad (2.22)$$

onde $Q_j = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$ são denominados esforços generalizados.

Para chegar as Equações de Lagrange, deve-se substituir as Eqs. (2.18) e (2.22) na Eq. (2.14) que define o Princípio de Hamilton Estendido. Portanto:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = Q_j \quad (2.23)$$

2.5 Frequências Naturais e Modos de Vibração

Considerando um sistema dinâmico com N graus de liberdade livre de forças externas e de forças de amortecimento, pode-se escrever a equação que descreve o movimento do sistema como:

$$M_{NxN} \ddot{u}_{Nx1} + K_{NxN} u_{Nx1} = 0_{Nx1} \quad (2.24)$$

A solução da Eq. (2.24) pode ser encontrada admitindo-se que o deslocamento e a aceleração podem ser escritas, respectivamente, como:

$$u = U \cos(\omega t) \quad (2.25)$$

$$\ddot{u} = -\omega^2 U \cos(\omega t) \quad (2.26)$$

Substituindo as Eqs. (25) e (26) na Eq. (24), tem-se:

$$-M \omega^2 U \cos(\omega t) + K U \cos(\omega t) = 0 \quad (2.27)$$

Colocando U em evidência,

$$\begin{aligned} [K - \omega^2 M]U &= 0 \\ [K - \lambda M]U &= 0 \end{aligned} \quad (2.28)$$

Para garantir a solução não trivial, é necessária a seguinte condição:

$$\det(K - \lambda M) = 0 \quad (2.29)$$

Sendo que $D(\omega) = K - \lambda M$ é a matriz dinâmica. Quando o determinante da Eq. (29) é determinado, encontra-se uma equação de ordem N cuja raízes são os autovalores ($\lambda_r = \omega_r^2$).

Para cada autovalor λ_r , determina-se um autovetor U_r correspondente. Assim, define-se:

$$\Phi = [\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_N] \quad (2.30)$$

2.6 Domínio Modal

Podemos definir novas coordenadas para descrever o movimento dado pela Eq. (24). Assim, as coordenadas modais (coordenadas principais η) são tais que:

$$u = \Phi \eta \quad (2.31)$$

Substituindo a Eq. (31) na Eq. (24) e multiplicando pela transposta da matriz modal Φ^T , tem-se:

$$\Phi^T M \Phi \ddot{\eta} + \Phi^T K \Phi \eta = 0 \quad (2.32)$$

sendo que:

$$\begin{aligned} \Phi^T M \Phi &= M_m = \text{dig}(M_1, M_2, \dots, M_N) \rightarrow \text{matriz de massa modal} \\ \Phi^T K \Phi &= K_m = \text{dig}(K_1, K_2, \dots, K_N) \rightarrow \text{matriz de rigidez modal} \end{aligned} \quad (2.33)$$

A Eq. (32) é chamada de equação do movimento em coordenadas principais. Para um sistema de três graus de liberdade, a referida equação se torna:

$$\begin{bmatrix} m_{m_1} & 0 & 0 \\ 0 & m_{m_2} & 0 \\ 0 & 0 & m_{m_3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\eta}_1 \\ \ddot{\eta}_2 \\ \ddot{\eta}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{m_1} & 0 & 0 \\ 0 & k_{m_2} & 0 \\ 0 & 0 & k_{m_3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.34)$$

2.7 Sistemas Amortecidos

As equações de movimento de um sistema N graus de liberdade, forçado e amortecido possui a forma:

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = p(t) \quad (2.35)$$

Em coordenadas principais:

$$M_m \ddot{\eta} + C_m \dot{\eta} + K_m \eta = \Phi^T p(t) \quad (2.36)$$

onde $M_m = \Phi^T M \Phi = \text{diag}(M_r)$ é a matriz de massa modal, $K_m = \Phi^T K \Phi = \text{diag}(K_r)$ é a matriz de rigidez modal e $C_m = \Phi^T C \Phi$ é a matriz de amortecimento modal.

A matriz de amortecimento pode ser obtida a partir das matrizes de massa e de rigidez (amortecimento de Rayleigh). Assim,

$$C = a_0 M + a_1 K \quad (2.37)$$

onde a_0 e a_1 são constantes reais quaisquer. Desta forma:

$$C_m = \Phi^T C \Phi = \text{diag}(C_r) = \text{diag}(a_0 + a_1 \omega_r^2) M_r \quad (2.38)$$

Lembrando-se da relação abaixo:

$$\xi_r = \frac{C_r}{C_c} = \frac{C_r}{2\omega_r M_r} = \text{fator de amortecimento} \quad (2.39)$$

chega-se à:

$$\begin{aligned} C_r &= 2\xi_r \omega_r M_r = (a_0 + a_1 \omega_r^2) M_r \\ \xi_r &= \frac{1}{2} \left(\frac{a_0}{\omega_r} + a_1 \omega_r \right) \end{aligned} \quad (2.40)$$

3. BANCADA EXPERIMENTAL DE TESTES

3.1 Proposta da bancada

A proposta consistiu basicamente em elaborar um projeto no qual alunos de engenharia pudessem utilizar a bancada para complementar aulas teóricas de vibração, possibilitando-os confirmar teorias a partir de análises visuais.

Mais precisamente, a bancada proposta teve como meta, a de contribuir na explicação de movimentos simétricos e assimétricos de uma asa de aeronave. Nesse sentido, dentre as possíveis configurações idealizadas, uma tangenciou a ideia de simular as asas e a fuselagem de um avião com blocos e réguas de alumínio. Foi realizado um prévio desenho da base da bancada no software *CATIA V5r20* como se vê na Fig 3.1.

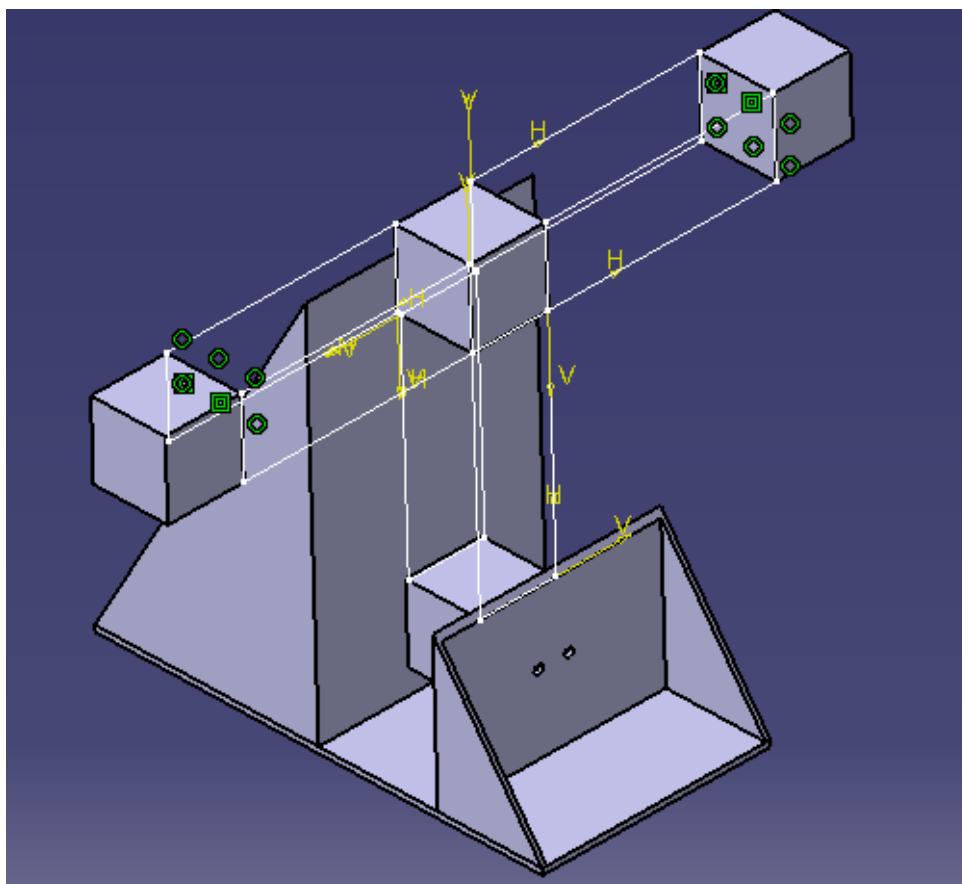


Figura 3.1 – Proposta da bancada. Fonte: Elaborado pelo Autor

Para a construção da base da bancada, utilizou-se de chapas de alumínio. As chapas passaram pelos processos de laminação e soldagem para ganharem o aspecto apresentado.

3.2 Parâmetros Iniciais

Com o intuito de se determinar a rigidez e o amortecimento da bancada de testes (veja a Fig. 3.2), primeiramente foi necessário pesar as quatro massas do sistema em uma balança de precisão. Os valores obtidos para cada massa foi: $m_1 = 186.73$ gramas, $m_2 = 198.05$ gramas, $m_3 = 199.73$ gramas e $m_4 = 198.13$ gramas.



Figura 3.2 – Bancada de testes construída.

A determinação dos outros parâmetros, por sua vez, foi obtido através da comparação das funções de resposta em frequência (FRF's) encontradas utilizando a teoria apresentada no Capítulo 2 com respostas experimentais para diferentes configurações da bancada de testes que será apresentada.

3.3 Configurações da Bancada

Dentre os possíveis sistemas mecânicos que a bancada pode ser configurada, destacam-se as três maneiras apresentadas. Para estas configurações, obteve-se as equações de movimento do sistema. Contudo, apenas a configuração 1 (m_1 engastada) foi submetida a testes experimentais.

3.3.1 Configuração: Engastado – Livre

Esta configuração consiste em engastar a primeira massa com a ajuda de dois grampos de fixação nodular, resultando em um sistema com 3 graus de liberdade como pôde-se ver na Fig. 3.2. Para desenvolver o equacionamento deste sistema mecânico amortecido, utilizou-se a esquematização dada na Fig. 3.3.

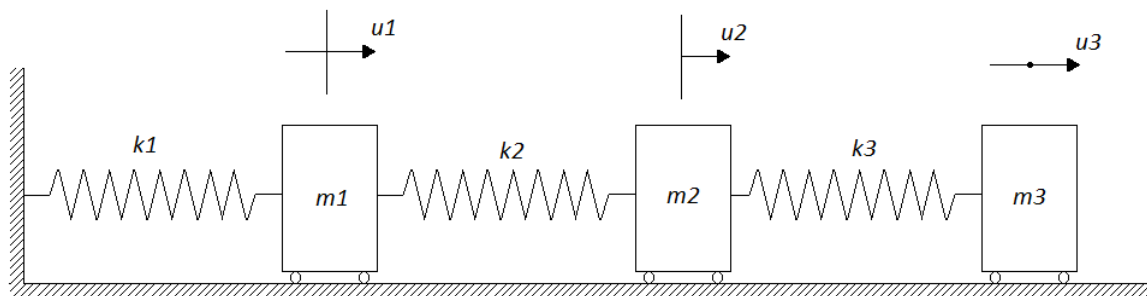


Figura 3.3 – Esquema de um sistema mecânico de três graus de liberdade.

Segundo a Fig. 3.3, a formulação para as energia cinética e potencial em função do graus de liberdade u_1 , u_2 e u_3 fica, respectivamente:

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{u}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{u}_2^2 + \frac{1}{2}m_3\dot{u}_3^2 \quad (3.1)$$

$$V = \frac{1}{2}k_1u_1^2 + \frac{1}{2}k_2(u_2 - u_1)^2 + \frac{1}{2}k_3(u_3 - u_2)^2 \quad (3.2)$$

As derivadas do Lagrangiano em relação aos graus de liberdade são:

- Coordenada u_1

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_1} = m_1 \dot{u}_1 \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_1} = -(k_1 u_1 - k_2 u_2 + k_2 u_1) \quad (3.4)$$

- Coordenada u_2

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_2} = m_2 \dot{u}_2 \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_2} = -(k_2 u_2 - k_2 u_1 - k_3 u_3 + k_3 u_2) \quad (3.6)$$

- Coordenada u_3

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_3} = m_3 \dot{u}_3 \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_3} = -(k_3 u_3 - k_3 u_2) \quad (3.8)$$

De posse das derivadas e utilizando-se da Equação de Lagrange, tem-se para cada grau de liberdade, as seguintes equações de movimento:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_1} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_1} &= 0 \\ m_1 \ddot{u}_1 + (k_1 + k_2) u_1 - k_2 u_2 &= 0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_2} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_2} &= 0 \\ m_2 \ddot{u}_2 - k_2 u_1 + (k_2 + k_3) u_2 - k_3 u_3 &= 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_3} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_3} &= 0 \\ m_3 \ddot{u}_3 - k_3 u_2 + k_3 u_3 &= 0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

Agrupando as Eqs. (3.9), (3.10) e (3.11) na forma matricial, tem-se:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.12)$$

A matriz de amortecimento adotada seguiu o modelo de Raleigh (amortecimento proporcional).

3.3.2 Configuração: Livre – Livre

Ao retirar os nódulos de fixação de m_1 , essa primeira massa que possui dois rolamentos lineares inseridos, se torna livre para percorrer os eixos, resultando em um novo grau de liberdade. Para esse sistema mecânico com 4 gdl, duas outras possibilidades de montagem são possíveis, e em ambas, há ainda a possibilidade de inserção de uma mola em m_2 de constante elástica K_x .

3.3.2.1 Configuração I: Livre – Livre

Esta configuração consiste em um sistema mecânico com 4 graus de liberdade (veja a Fig. 3.4).



Figura 3.4 – Bancada de testes. (configuração I: livre – livre).

Para desenvolver o equacionamento dessa montagem do sistema, utilizou-se da esquematização da Fig. 3.5.

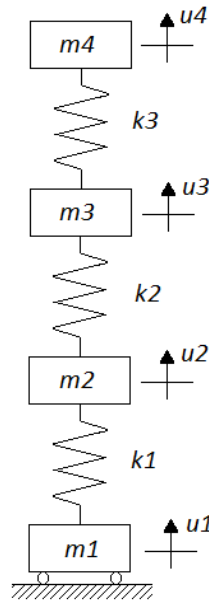


Figura 3.5 – Modelo Analítico da Bancada. (configuração I: livre – livre).

Segundo a Fig. 3.5, a formulação para as energia cinética e potencial em função do graus de liberdade u_1 , u_2 , u_3 e u_4 fica:

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{u}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{u}_2^2 + \frac{1}{2}m_3\dot{u}_3^2 + \frac{1}{2}m_4\dot{u}_4^2 \quad (3.13)$$

$$V = \frac{1}{2}k_1(u_2^2 + u_1^2 - 2u_2u_1) + \frac{1}{2}k_2(u_3 - u_2)^2 + \frac{1}{2}k_3(u_4 - u_3)^2 \quad (3.14)$$

As derivadas do Lagrangeano, em relação aos graus de liberdade são:

- Coordenada u_1

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_1} = m_1\ddot{u}_1 \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_1} = +k_1u_2 - k_1u_1 \quad (3.16)$$

- Coordenada u_2

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_2} = m_2 \dot{u}_2 \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_2} = -k_1 u_2 + k_2 u_3 - k_2 u_2 + k_1 u_1 \quad (3.18)$$

- Coordenada u_3

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_3} = m_3 \dot{u}_3 \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_3} = -k_2 u_3 + k_2 u_2 + k_3 u_4 - k_3 u_3 \quad (3.20)$$

- Coordenada u_4

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_4} = m_4 \dot{u}_4 \quad (3.21)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_4} = -k_3 u_4 + k_3 u_3 \quad (3.22)$$

De posse das derivadas e utilizando-se da equação de Lagrange tem-se para cada grau de liberdade as seguintes equações do movimento:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_1} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_1} &= 0 \\ m_1 \ddot{u}_1 - k_1 u_2 + k_1 u_1 &= 0 \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_2} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_2} &= 0 \\ m_2 \ddot{u}_2 + k_1 u_2 - k_2 u_3 + k_2 u_2 - k_1 u_1 &= 0 \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_3} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_3} &= 0 \\ m_3 \ddot{u}_3 + k_2 u_3 - k_2 u_2 - k_3 u_4 + k_3 u_3 &= 0 \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_4} \right) - \frac{\partial}{\partial u_4} = 0$$

$$m_4 \ddot{u}_4 + k_3 u_4 - k_3 u_3 = 0 \quad (3.26)$$

Agrupando as Eqs. (3.23), (3.24), (3.25) e (3.26) na forma matricial, tem-se:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \\ \ddot{u}_4 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.27)$$

Assim como foi exposto anteriormente, esta configuração ainda admite a inserção de uma mola de constante elástica K_x em m_2 (veja Fig.3.6).

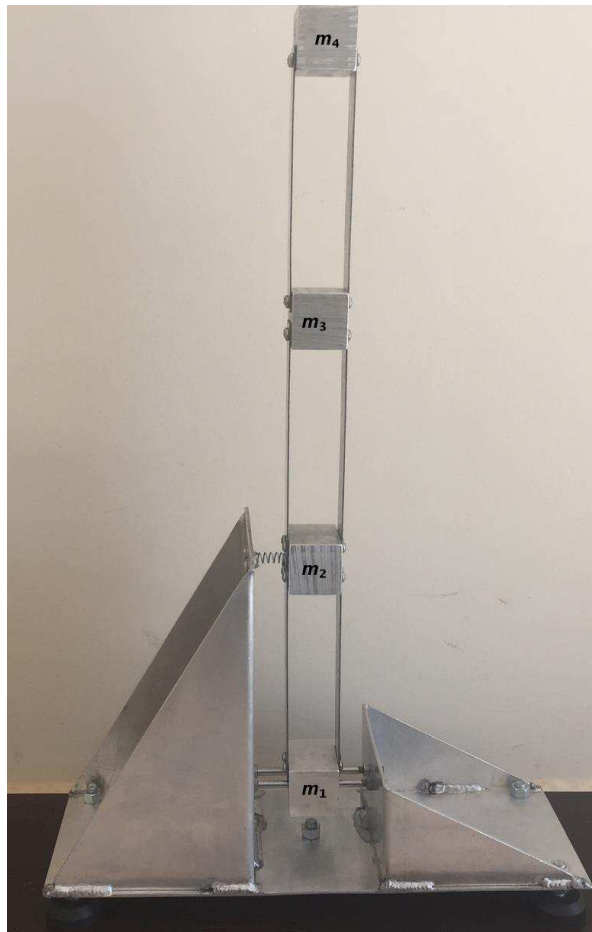


Figura 3.6 – Bancada de teste com adição de força elástica extra (configuração I: livre – livre).

Para desenvolver o equacionamento deste sistema mecânico, utilizou-se do modelo analítico dado pela Fig. 3.7.

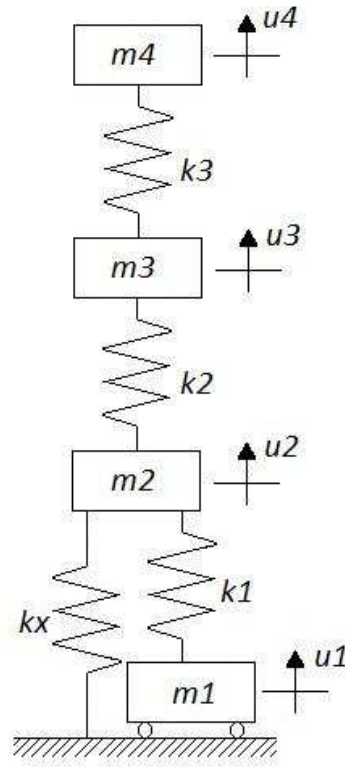


Figura 3.7 – Esquema da bancada de teste com adição de força elástica extra.

Utilizando-se de desenvolvimento análogo, a equação matricial que rege o sistema mecânico dado pela Fig. 3.6 é dada por:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \\ \ddot{u}_4 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_x + k_2 & -k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

(3.28)

3.3.2.2 Configuração II: Livre – Livre

Esta configuração também consiste em um sistema mecânico com 4 graus de liberdade (veja a Fig. 3.8).



Figura 3.8 - Bancada de testes (configuração II: livre – livre).

Para desenvolver o equacionamento desse sistema, utilizou-se do modelo analítico dado pela Fig. 3.9.

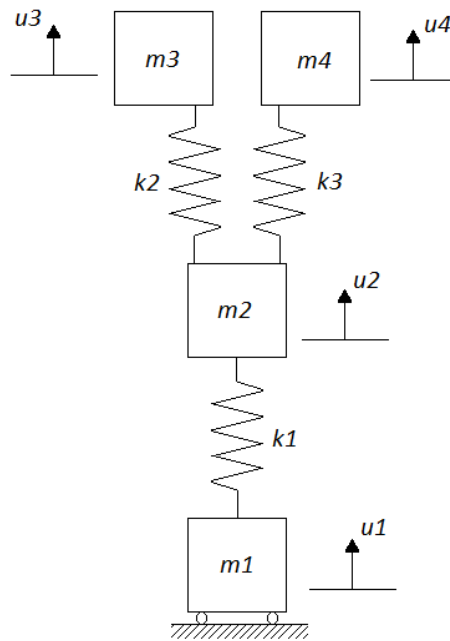


Figura 3.9 – Esquema da bancada (configuração II: livre - livre)

Segundo a Fig. 3.9, a formulação para as energias cinética e potencial em função do graus de liberdade u_1 , u_2 , u_3 e u_4 fica:

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{u}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{u}_2^2 + \frac{1}{2} m_3 \dot{u}_3^2 + \frac{1}{2} m_4 \dot{u}_4^2 \quad (3.29)$$

$$V = \frac{1}{2} k_1 (u_2^2 + u_1^2 - 2u_2 u_1) + \frac{1}{2} k_2 (u_2 - u_1)^2 + \frac{1}{2} k_3 (u_4 - u_2)^2 \quad (3.30)$$

As derivadas do Lagrangeano em relação aos graus de liberdade:

- Coordenada u_1

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_1} = m_1 \dot{u}_1 \quad (3.31)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_1} = +k_1 u_2 - k_1 u_1 \quad (3.32)$$

- Coordenada u_2

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_2} = m_2 \dot{u}_2 \quad (3.33)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_2} = -(k_1 u_2 - k_2 u_3 - k_3 u_4 + k_2 u_2 + k_3 u_2 - k_1 u_1) \quad (3.34)$$

- Coordenada u_3

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_3} = m_3 \dot{u}_3 \quad (3.35)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_3} = -k_2 u_3 + k_2 u_2 \quad (3.36)$$

- Coordenada u_4

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_4} = m_4 \dot{u}_4 \quad (3.37)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_4} = -k_3 u_4 + k_3 u_2 \quad (3.38)$$

Utilizando a equação de Lagrange , temos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_1} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_1} &= 0 \\ m_1 \ddot{u}_1 - k_1 u_2 + k_1 u_1 &= 0 \end{aligned} \quad (3.39)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_2} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_2} &= 0 \\ m_2 \ddot{u}_2 + k_1 u_2 - k_2 u_3 - k_3 u_4 + k_2 u_2 + k_3 u_2 - k_1 u_1 &= 0 \end{aligned} \quad (3.40)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_3} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_3} &= 0 \\ m_3 \ddot{u}_3 + k_2 u_3 - k_2 u_2 &= 0 \end{aligned} \quad (3.41)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_4} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_4} &= 0 \\ m_4 \ddot{u}_4 + k_3 u_4 - k_3 u_2 &= 0 \end{aligned} \quad (3.42)$$

Agrupando as Eqs. (3.39), (3.40), (3.41) e (3.42) na forma matricial, tem-se:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \\ \ddot{u}_4 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 + k_3 & -k_2 & -k_3 \\ 0 & -k_2 & k_2 & 0 \\ 0 & -k_3 & 0 & k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.43)$$

Assim como na montagem anterior, essa configuração admite a inserção de uma mola de constante elástica K_x em m_2 . (veja Fig. 3.10)

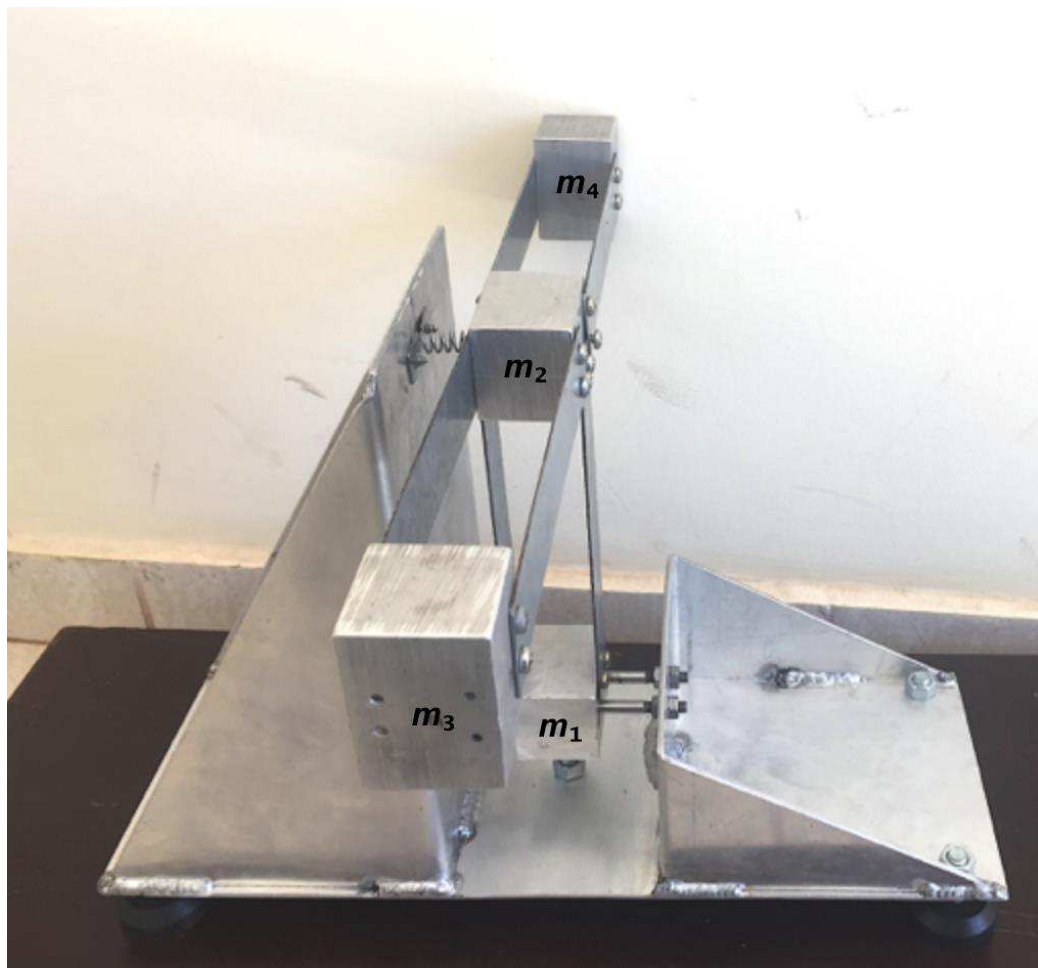


Figura 3.10 – Bancada de teste com adição de força elástica extra (configuração II: livre – livre).

Para desenvolver o equacionamento deste sistema, utilizou-se do modelo analítico dado pela Fig. 3.11.

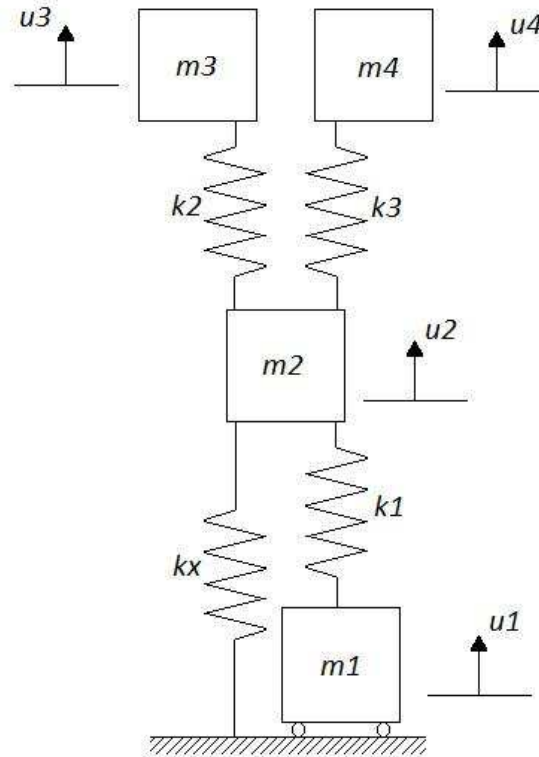


Figura 3.11- Esquema da bancada de teste com adição de força elástica extra.

Utilizando-se novamente de desenvolvimento análogo, a equação matricial que rege o sistema mecânico dado pela Fig. 3.10 é dada por:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \\ \ddot{u}_4 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_x + k_2 + k_3 & -k_2 & -k_3 \\ 0 & -k_2 & k_2 & 0 \\ 0 & -k_3 & 0 & k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.44)$$

4. RESULTADOS EXPERIMENTAIS

Para sistematizar os resultados experimentais e compará-los com os resultados teóricos, foi considerado o sistema mostrado nas Figs. 3.1 e 3.2. Para a análise experimental, fixou-se a massa m_1 na bancada com a ajuda de dois grampos de fixação nodular (veja a Fig. 4.1). Foram obtidas FRFs a partir de impactos aplicados separadamente em cada uma das massas do sistema. A posição do acelerômetro foi modificada, sendo que para cada posição de impacto o acelerômetro foi posicionado nas três massas do sistema considerado. Desta forma, 9 FRFs foram obtidas.

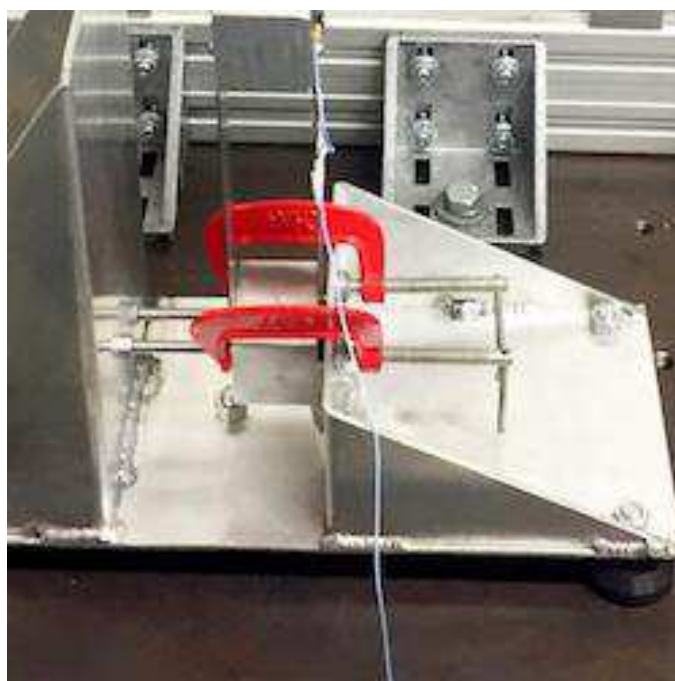


Figura 4.1 – Fixação da massa m_1 .

Um procedimento de otimização com os valores das constantes elásticas e dos coeficientes de amortecimento foi adotado para ajustar os picos de frequência das FRFs numéricas com as FRFs encontradas experimentalmente. Desta forma, os seguintes valores de rigidez e coeficientes de amortecimento proporcional foram determinados (veja as Figs. 3.1 e 3.2):

- $k_1 = 2929 \frac{N}{m}$;
- $k_2 = 4235 \frac{N}{m}$;
- $k_3 = 5212 \frac{N}{m}$;
- $a_0 = 0.00108$;
- $a_1 = 1e - 10$;

As Figs. 4.2, 4.3 e 4.4 mostram as FRFs experimentais e teóricas obtidas a partir do acelerômetro fixado na massa m_1 e impactos nas massas m_1 , m_2 e m_3 , respectivamente. Observe que os resultados são próximos nos 3 picos de frequência

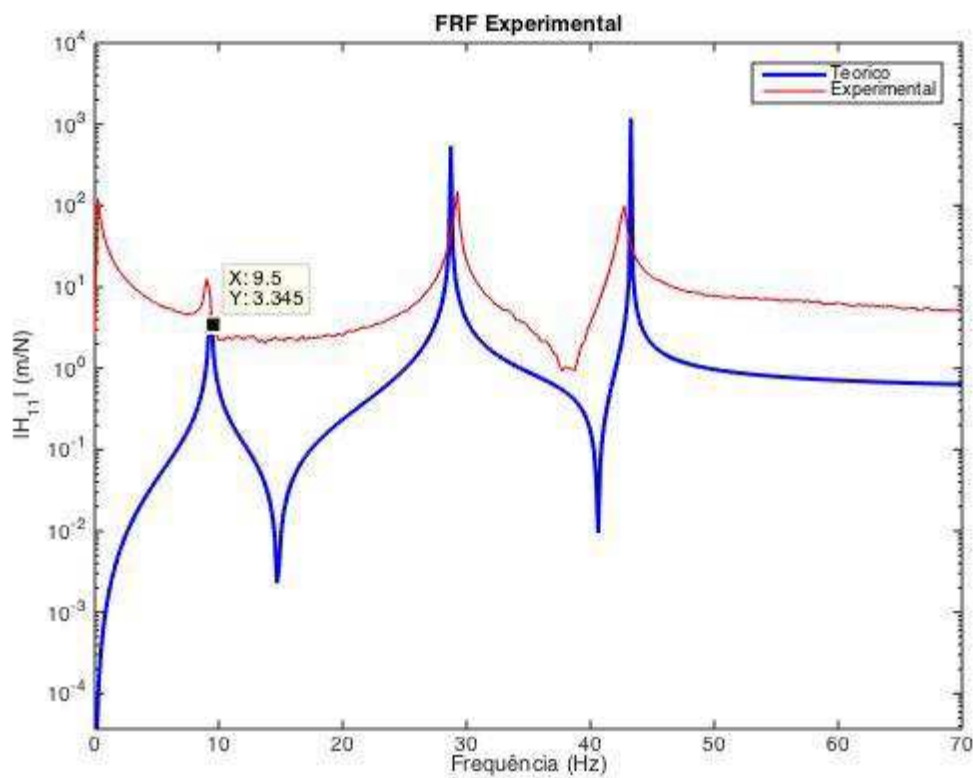


Figura 4.2 – Comparação das FRFs teórica e experimental (acelerômetro em m_1 e impacto em m_1).

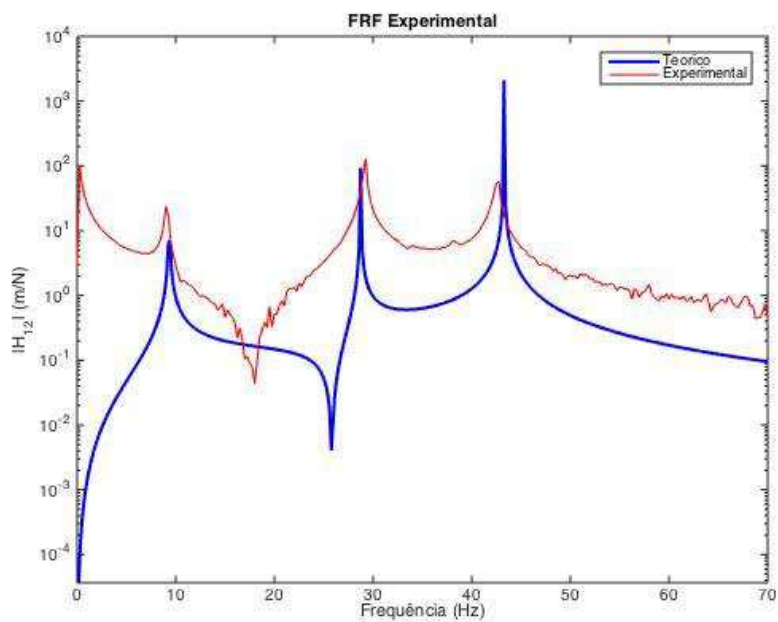


Figura 4.3 – Comparação das FRFs teórica e experimental (acelerômetro em m_1 e impacto em m_2).

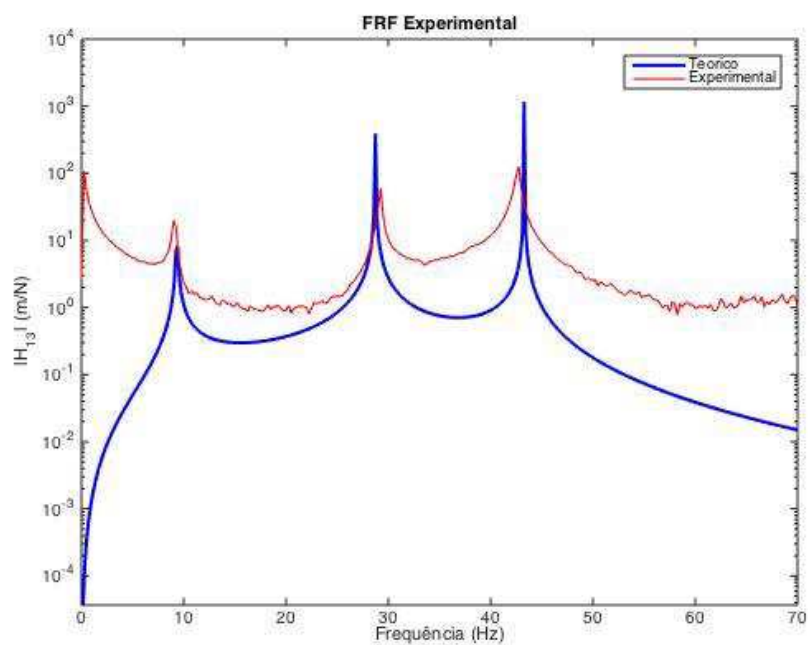


Figura 4.4 - Comparação das FRFs teórica e experimental (acelerômetro em m_1 e impacto em m_3).

As Figs. 4.5, 4.6 e 4.7 mostram as FRFs experimentais e teóricas obtidas a partir do acelerômetro fixado na massa m_2 e impactos nas massas m_1 , m_2 e m_3 , respectivamente. Novamente é possível observar que os resultados em frequência estão próximos.

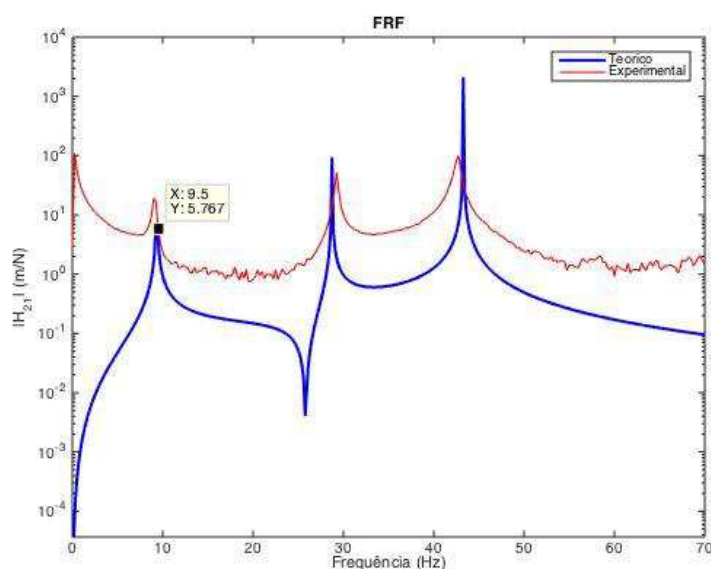


Figura 4.5 - Comparação das FRFs teórica e experimental (acelerômetro em m_2 e impacto em m_1).

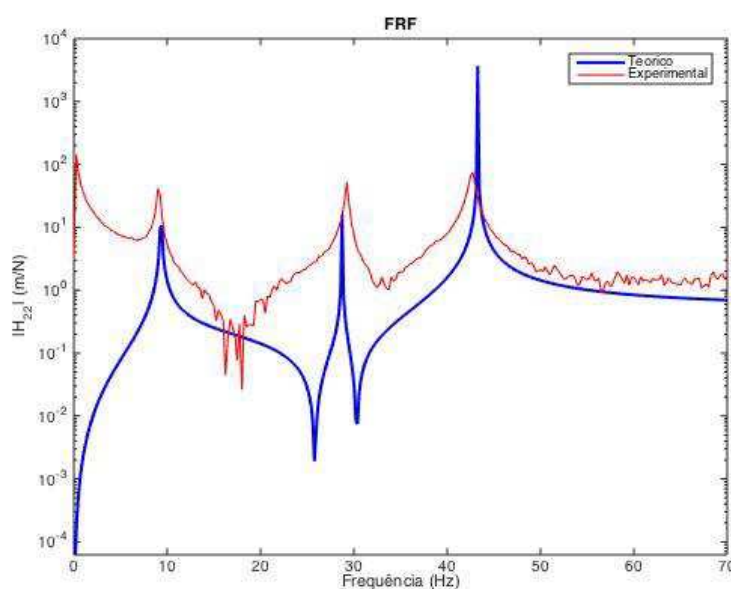


Figura 4.6 – Comparação das FRFs teórica e experimental (acelerômetro em m_2 e impacto em m_2).

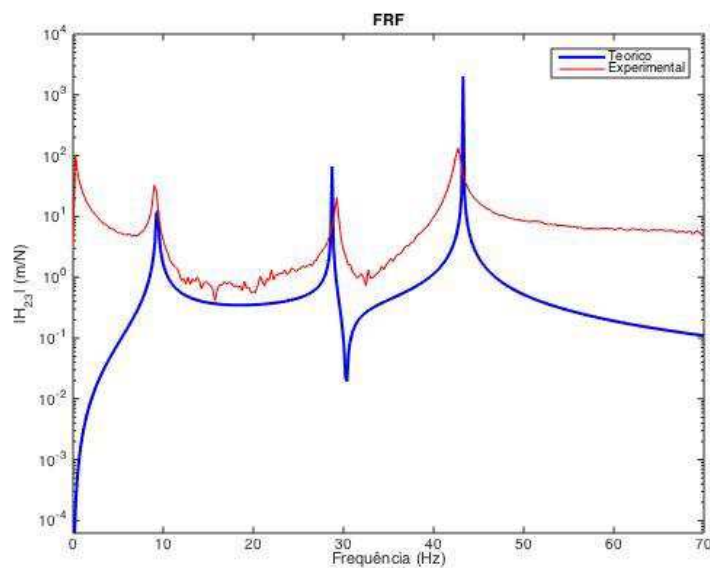


Figura 4.7 – Comparação das FRFs teórica e experimental (acelerômetro em m_2 e impacto em m_3).

As Figs. 4.8, 4.9 e 4.10 mostram as FRFs experimentais e teóricas obtidas a partir do acelerômetro fixado na massa m_3 e impactos nas massas m_1 , m_2 e m_3 , respectivamente. Note que os picos em frequência estão próximos.

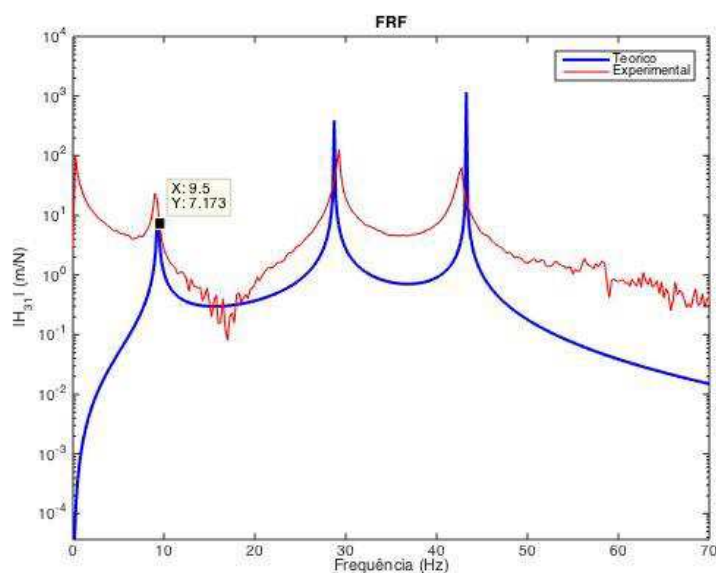


Figura 4.8 - Comparação das FRFs teórica e experimental (acelerômetro em m_3 e impacto em m_1).

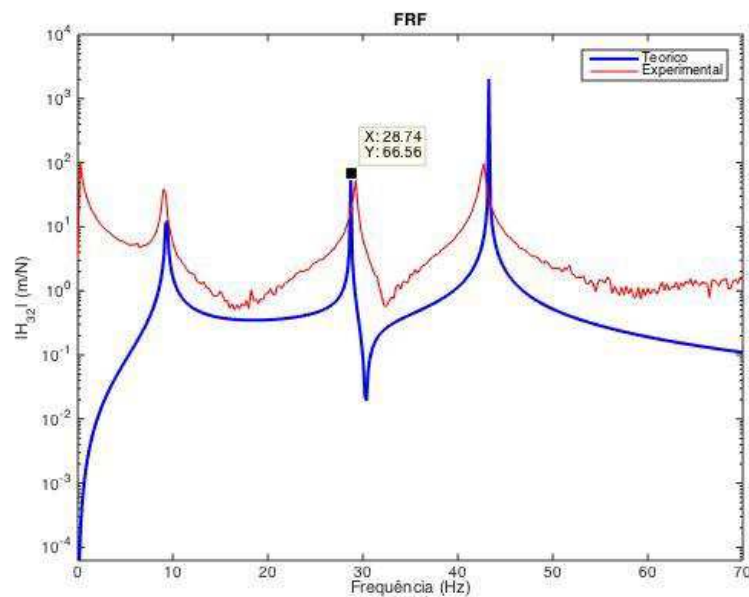


Figura 4.9 - Comparação das FRFs teórica e experimental (acelerômetro em m_3 e impacto em m_2).

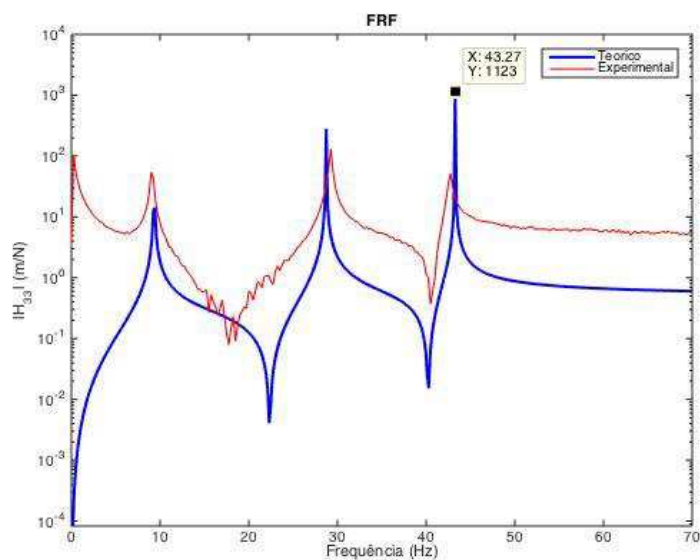


Figura 4.10 - Comparação das FRFs teórica e experimental (acelerômetro em m_3 e impacto em m_3).

De posse dos resultados obtidos, foi possível calcular o erro relativo referente os dados experimentais e teóricos em termos das frequências naturais do sistema. A Tab. 1 mostra as diferenças para cada uma das 3 frequências naturais. Note que o maior erro obtido foi de 4,35 %.

Tabela 1 – Comparação dos valores experimentais com os teóricos ajustados.

Frequências naturais (Hz)	Experimental	Teórico	Erro (%)
1	9.00	9.41	4.35
2	29.25	28.74	1.77
3	42.75	43.27	1.20

O código computacional utilizado para a determinação das FRFs teóricas é apresentado no ANEXO deste trabalho (ambiente MATLAB®)

5. CONCLUSÕES

Esse trabalho de conclusão de curso teve como objetivo propor, construir e analisar uma bancada didática que servisse como ferramenta de auxílio durante a aprendizagem no estudo de vibrações mecânicas, assim como expor conceitos que fundamentassem essa análise. Portanto, sua contribuição consiste basicamente em complementar o ensino de estudantes de engenharia comprovando e comparando resultados obtidos na prática com as teorias ministradas.

Após a construção do modelo, foram formuladas as equações matemáticas que regem o movimento dinâmico do sistema e ajustes foram feitos para aproximar os resultados numéricos e experimentais. Não foi possível obter, contudo, um ajuste totalmente fiel aos resultados, como se verifica nos erros calculados (principalmente para o primeiro modo de vibração). Apesar dos erros, que em geral foram pequenos (menores que 5%), o presente trabalho atingiu seu objetivo de validar as teorias associadas à análise de vibrações.

Para o aprimoramento desta bancada, propõe-se para trabalhos futuros analisar dinamicamente as outras configurações expostas no Capítulo 3. Para tanto, o modelo foi adaptado para que um *shaker* possa ser a fonte de excitação da estrutura, até mesmo para comparar resultados oriundos de excitações provocadas por um martelo de impacto e por um *shaker*. Por fim, vale ressaltar que embora atingida a meta de construir um modelo em que a análise da vibração simétrica e assimétrica das asas de uma aeronave pudesse ser avaliada, a análise propriamente dita constitui uma das outras propostas para trabalhos futuros.

BIBLIOGRAFIA

CAVALCANTE, P. F., JESUS, S. S., “Utilização De Bancadas De Ensaio Para Estudo Do Comportamento Dinâmico De Máquinas Rotativas - Vibrações Mecânicas” –. 2011. 23 f. Monografia (Especialização) - Curso de Engenharia Mecânica, Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2011.

BOLINA, C.C., “Vibrações: As Frequências Naturais Estimada e Experimental De Uma Estrutura”. In: Congresso Nacional de Matemática Aplicada a Industria, 2014, Caldas Novas.

CRAIG JUNIOR, Roy R.; KURDILA, Andrew J.. **Fundamentals of Structural Dynamics**. 2. ed. New Jersey: Wiley, 2006.

MAMEDE, A. L. **Simulações de modelos dinâmicos com amortecimento não-proporcional**. 2008. 132 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Engenharia Mecânica, Univeridade de São Paulo, São Carlos, 2008.

LEECH, J. W., **Mecânica Analítica**. Traduzido por OLIVEIRA, Carlos Campos de. Ed. Ao livro técnico S. A. e Editora da Universidade de São Paulo. Rio de Janeiro, 1971. 160p.

CAVALINI, A.A. **Dinâmica de Estruturas Aeronáuticas**. Apostila, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Uberlândia, 2004.

ANEXO

```
clc; clear; close all;
```

```
% Universidade Federal de Uberlândia  
% Graduação em Engenharia Aeronáutica
```

```
% -----  
% Prof. Dr. Aldemir Ap Cavalini Jr  
% -----  
% Ademir Nunes do Vale Junior (11121EAR001)  
% -----
```

```
% Parâmetros
```

```
m1=198.05/1000;      % massa 1 (kg)  
m2=199.78/1000;      % massa 2 (kg)  
m3=198.13/1000;      % massa 3 (kg)
```

```
k1=945.1*3.1;        % rigidez 1 (N/m)  
k2=945.1*4.5;        % rigidez 2 (N/m)  
k3=945.1*5.515;      % rigidez 3 (N/m)
```

```
a0=0.00108;          % amortecimento proporcional de M %VERIFICAR!!  
a1=1e-10;             % amortecimento proporcional de K
```

```
% -----  
% Matrizes globais de massa e rigidez  
M=[m1 0 0  
   0 m2 0  
   0 0 m3];
```

```
K=[k1+k2 -k2 0; -k2 k2+k3 -k3; 0 -k3 k3];
```

```
C=a0*M+a1*K;
```

```
% -----  
% Solução do problema de autovalor  
[PHI, lb]=eig(K,M);
```

```
% -----  
% Matrizes modais  
Mm=PHI'*M*PHI;  
Km=PHI'*K*PHI;  
Cm=PHI'*C*PHI;
```

```
% -----  
% Frequências naturais  
w1=sqrt(lb(1,1)); % rad/s
```

```
w2=sqrt(lb(2,2));
w3=sqrt(lb(3,3));
```

```
f1=w1/(2*pi);           % Hz
f2=w2/(2*pi);
f3=w3/(2*pi);
```

```
% -----
% Fatores de amortecimento
Qci1=Cm(1,1)/(2*Mm(1,1)*w1);
Qci2=Cm(2,2)/(2*Mm(2,2)*w2);
Qci3=Cm(3,3)/(2*Mm(3,3)*w3);
```

```
% -----
% Frequências naturais amortecidas
wd1=sqrt(1-Qci1^2)*w1;
wd2=sqrt(1-Qci2^2)*w2;
wd3=sqrt(1-Qci3^2)*w3;
```

```
% -----
% Funções de resposta em frequência
omega=0:0.165161:100.087742;      % Hz
OMEGA=omega*2*pi;
```

```
for k=1:length(OMEGA)
```

```
    Omega=OMEGA(k);
```

```
    Hb11_1(k)=PHI(1,1)*PHI(1,1)/(Km(1,1)*(1-
(Omega/w1)^2+1i*2*Qci1*Omega/w1));
    Hb11_2(k)=PHI(1,2)*PHI(1,2)/(Km(2,2)*(1-
(Omega/w2)^2+1i*2*Qci2*Omega/w2));
    Hb11_3(k)=PHI(1,3)*PHI(1,3)/(Km(3,3)*(1-
(Omega/w3)^2+1i*2*Qci3*Omega/w3));
```

```
    Hb11(k)=Hb11_1(k)+Hb11_2(k)+Hb11_3(k);
```

```
    Hb12_1(k)=PHI(1,1)*PHI(2,1)/(Km(1,1)*(1-
(Omega/w1)^2+1i*2*Qci1*Omega/w1));
    Hb12_2(k)=PHI(1,2)*PHI(2,2)/(Km(2,2)*(1-
(Omega/w2)^2+1i*2*Qci2*Omega/w2));
    Hb12_3(k)=PHI(1,3)*PHI(2,3)/(Km(3,3)*(1-
(Omega/w3)^2+1i*2*Qci3*Omega/w3));
```

```
    Hb12(k)=Hb12_1(k)+Hb12_2(k)+Hb12_3(k);
```

```
    Hb13_1(k)=PHI(1,1)*PHI(3,1)/(Km(1,1)*(1-
(Omega/w1)^2+1i*2*Qci1*Omega/w1));
    Hb13_2(k)=PHI(1,2)*PHI(3,2)/(Km(2,2)*(1-
(Omega/w2)^2+1i*2*Qci2*Omega/w2));
    Hb13_3(k)=PHI(1,3)*PHI(3,3)/(Km(3,3)*(1-
(Omega/w3)^2+1i*2*Qci3*Omega/w3));
```

```
    Hb13(k)=Hb13_1(k)+Hb13_2(k)+Hb13_3(k);
```

```
%%%%%%%%%
```

```

Hb21_1(k)=PHI(2,1)*PHI(1,1)/(Km(1,1)*(1-
(Omega/w1)^2+1i*2*Qci1*Omega/w1));
Hb21_2(k)=PHI(2,2)*PHI(1,2)/(Km(2,2)*(1-
(Omega/w2)^2+1i*2*Qci2*Omega/w2));
Hb21_3(k)=PHI(2,3)*PHI(1,3)/(Km(3,3)*(1-
(Omega/w3)^2+1i*2*Qci3*Omega/w3));

```

```

Hb21(k)=Hb21_1(k)+Hb21_2(k)+Hb21_3(k);

```

```

Hb22_1(k)=PHI(2,1)*PHI(2,1)/(Km(1,1)*(1-
(Omega/w1)^2+1i*2*Qci1*Omega/w1));
Hb22_2(k)=PHI(2,2)*PHI(2,2)/(Km(2,2)*(1-
(Omega/w2)^2+1i*2*Qci2*Omega/w2));
Hb22_3(k)=PHI(2,3)*PHI(2,3)/(Km(3,3)*(1-
(Omega/w3)^2+1i*2*Qci3*Omega/w3));

```

```

Hb22(k)=Hb22_1(k)+Hb22_2(k)+Hb22_3(k);

```

```

Hb23_1(k)=PHI(2,1)*PHI(3,1)/(Km(1,1)*(1-
(Omega/w1)^2+1i*2*Qci1*Omega/w1));
Hb23_2(k)=PHI(2,2)*PHI(3,2)/(Km(2,2)*(1-
(Omega/w2)^2+1i*2*Qci2*Omega/w2));
Hb23_3(k)=PHI(2,3)*PHI(3,3)/(Km(3,3)*(1-
(Omega/w3)^2+1i*2*Qci3*Omega/w3));

```

```

Hb23(k)=Hb23_1(k)+Hb23_2(k)+Hb23_3(k);

```

```

%%%%%%%%

```

```

Hb31_1(k)=PHI(3,1)*PHI(1,1)/(Km(1,1)*(1-
(Omega/w1)^2+1i*2*Qci1*Omega/w1));
Hb31_2(k)=PHI(3,2)*PHI(1,2)/(Km(2,2)*(1-
(Omega/w2)^2+1i*2*Qci2*Omega/w2));
Hb31_3(k)=PHI(3,3)*PHI(1,3)/(Km(3,3)*(1-
(Omega/w3)^2+1i*2*Qci3*Omega/w3));

```

```

Hb31(k)=Hb31_1(k)+Hb31_2(k)+Hb31_3(k);

```

```

Hb32_1(k)=PHI(3,1)*PHI(2,1)/(Km(1,1)*(1-
(Omega/w1)^2+1i*2*Qci1*Omega/w1));
Hb32_2(k)=PHI(3,2)*PHI(2,2)/(Km(2,2)*(1-
(Omega/w2)^2+1i*2*Qci2*Omega/w2));
Hb32_3(k)=PHI(3,3)*PHI(2,3)/(Km(3,3)*(1-
(Omega/w3)^2+1i*2*Qci3*Omega/w3));

```

```

Hb32(k)=Hb32_1(k)+Hb32_2(k)+Hb32_3(k);

```

```

Hb33_1(k)=PHI(3,1)*PHI(3,1)/(Km(1,1)*(1-
(Omega/w1)^2+1i*2*Qci1*Omega/w1));
Hb33_2(k)=PHI(3,2)*PHI(3,2)/(Km(2,2)*(1-
(Omega/w2)^2+1i*2*Qci2*Omega/w2));
Hb33_3(k)=PHI(3,3)*PHI(3,3)/(Km(3,3)*(1-

```

```

(Omega/w3)^2+1i*2*Qci3*Omega/w3));

Hb33(k)=Hb33_1(k)+Hb33_2(k)+Hb33_3(k);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

end

% -----
% Dados ensaiados

ref = 1e+1;

He11 = load('TRAC17.txt');
F_He11 = He11(1:513,1);           % frequências
A_He11R = (He11(1:513,2));         % amplitudes
A_He11I = (He11(1:513,3));
A_He11 = sqrt(A_He11R.^2 + A_He11I.^2);

He12 = load('TRAC15.txt');
F_He12 = He12(1:513,1);           % frequências
A_He12R = He12(1:513,2);          % amplitudes
A_He12I = He12(1:513,3);
A_He12 = sqrt(A_He12R.^2 + A_He12I.^2);

He13 = load('TRAC13.txt');
F_He13 = He13(1:513,1);           % frequências
A_He13R = (He13(1:513,2));         % amplitudes
A_He13I = (He13(1:513,3));
A_He13 = sqrt(A_He13R.^2 + A_He13I.^2);

He21 = load('TRAC11.txt');
F_He21 = He21(1:513,1);           % frequências
A_He21R = (He21(1:513,2));         % amplitudes
A_He21I = (He21(1:513,3));
A_He21 = sqrt(A_He21R.^2 + A_He21I.^2);

He22 = load('TRAC9.txt');
F_He22 = He22(1:513,1);           % frequências
A_He22R = (He22(1:513,2));         % amplitudes
A_He22I = (He22(1:513,3));
A_He22 = sqrt(A_He22R.^2 + A_He22I.^2);

He23 = load('TRAC7.txt');
F_He23 = He23(1:513,1);           % frequências
A_He23R = (He23(1:513,2));         % amplitudes
A_He23I = (He23(1:513,3));

```

```
A_He23 = sqrt(A_He23R.^2 + A_He23I.^2);
```

```
He31 = load('TRAC5.txt');
F_He31 = He31(1:513,1); % frequências
A_He31R = (He31(1:513,2)); % amplitudes
A_He31I = (He31(1:513,3));
A_He31 = sqrt(A_He31R.^2 + A_He31I.^2);
```

```
He32 = load('TRAC3.txt');
F_He32 = He32(1:513,1); % frequências
A_He32R = (He32(1:513,2)); % amplitudes
A_He32I = (He32(1:513,3));
A_He32 = sqrt(A_He32R.^2 + A_He32I.^2);
```

```
He33 = load('TRAC1.txt');
F_He33 = He33(1:513,1); % frequências
A_He33R = (He33(1:513,2)); % amplitudes
A_He33I = (He33(1:513,3));
A_He33 = sqrt(A_He33R.^2 + A_He33I.^2);
```

```
% -----
% Gráficos
```

```
%% Força na massa 1, análise da massa 1
```

```
%FRF
figure(1)
semilogy(omega,abs(Hb11/ref).*OMEGA.^2,'b','LineWidth',2)
hold on
plot(F_He11,A_He11,'r')
title('FRF Experimental')
xlabel('Frequência (Hz)')
ylabel('|H1_1| (m/N)')
legend('Teórico','Experimental')
```

```
%% Força na massa 2, análise da massa 1
```

```
%FRF
figure(2)
semilogy(omega,abs(Hb12/ref).*OMEGA.^2,'b','LineWidth',2)
hold on
plot(F_He12,A_He12,'r')
title('FRF Experimental')
xlabel('Frequência (Hz)')
ylabel('|H1_2| (m/N)')
legend('Teórico','Experimental')
```

```
%% Força na massa 3, análise da massa 1
```

```
%FRF
figure(3)
```

```

semilogy(omega,abs(Hb13/ref).*OMEGA.^2,'b','LineWidth',2)
hold on
plot(F_He13,A_He13,'r')
title('FRF Experimental')
xlabel('Frequência (Hz)')
ylabel('|H_1_3| (m/N)')
legend('Teórico','Experimental')

%% Força na massa 1, análise da massa 2

%FRF
figure(4)
semilogy(omega,abs(Hb21/ref).*OMEGA.^2,'b','LineWidth',2)
hold on
plot(F_He21,A_He21,'r')
title('FRF')
xlabel('Frequência (Hz)')
ylabel('|H_2_1| (m/N)')
legend('Teórico','Experimental')

%% Força na massa 2, análise da massa 2

%FRF
figure(5)
semilogy(omega,abs(Hb22/ref).*OMEGA.^2,'b','LineWidth',2)
hold on
plot(F_He22,A_He22,'r')
title('FRF')
xlabel('Frequência (Hz)')
ylabel('|H_2_2| (m/N)')
legend('Teórico','Experimental')

%% Força na massa 3, análise da massa 2

%FRF
figure(6)
semilogy(omega,abs(Hb23/ref).*OMEGA.^2,'b','LineWidth',2)
hold on
plot(F_He23,A_He23,'r')
title('FRF')
xlabel('Frequência (Hz)')
ylabel('|H_2_3| (m/N)')
legend('Teórico','Experimental')

%% Força na massa 1, análise da massa 3

%FRF
figure(7)
semilogy(omega,abs(Hb31/ref).*OMEGA.^2,'b','LineWidth',2)
hold on
plot(F_He31,A_He31,'r')
title('FRF')
xlabel('Frequência (Hz)')
ylabel('|H_3_1| (m/N)')
legend('Teórico','Experimental')

%% Força na massa 2, análise da massa 3

```

```

%FRF
figure(8)
semilogy(omega,abs(Hb32/ref).*OMEGA.^2,'b','LineWidth',2)
hold on
plot(F_He32,A_He32,'r')
title('FRF')
xlabel('Frequência (Hz)')
ylabel('|H_3_2| (m/N)')
legend('Teorico','Experimental')

%% Força na massa 3, análise da massa 3

%FRF
figure(9)
semilogy(omega,abs(Hb33/ref).*OMEGA.^2,'b','LineWidth',2)
hold on
semilogy(F_He33,A_He33,'r')
title('FRF')
xlabel('Frequência (Hz)')
ylabel('|H_3_3| (m/N)')
legend('Teorico','Experimental')

```

