



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE MATEMÁTICA
2010

LINEARIZAÇÃO DE APLICAÇÕES MULTILINEARES CONTÍNUAS ENTRE
ESPAÇOS DE BANACH E MULTI-IDEAIS DE COMPOSIÇÃO

ALESSANDRA RIBEIRO DA SILVA

ALESSANDRA RIBEIRO DA SILVA

Linearização de aplicações multilineares contínuas entre espaços de Banach e multi-ideais de composição.

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA**.

Área de Concentração: Matemática.
Linha de Pesquisa: Análise Funcional.

Orientador: Prof. Dr. Geraldo Márcio de Azevedo Botelho.

UBERLÂNDIA - MG
2010

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

- S586L Silva, Alessandra Ribeiro da, 1985-
Linearização de aplicações multilineares contínuas entre espaços de Banach e multi-ideais de composição [manuscrito] / Alessandra Ribeiro da Silva. - 2010.
89 f.
- Orientador: Geraldo Márcio de Azevedo Botelho.
- Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Uberlândia, Programa de Pós-Graduação em Matemática.
Inclui bibliografia.
1. Análise funcional - Teses. 2. Operadores lineares - Teses. I. Botelho, Geraldo Márcio de Azevedo. II. Universidade Federal de Uberlândia. Programa de Pós-Graduação em Matemática. III. Título.

CDU: 517.98

Elaborado pelo Sistema de Bibliotecas da UFU / Setor de Catalogação e Classificação



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Av. João Naves de Ávila, 2121, Bloco 1F, Sala 1F 152
Campus Santa Mônica, Uberlândia - MG, CEP 38400-902

ALUNA: Alessandra Ribeiro da Silva.

NÚMERO DE MATRÍCULA: 93802.

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: Matemática.

LINHA DE PESQUISA: Análise Funcional.

PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA: Nível Mestrado.

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: Linearização de aplicações multilineares contínuas entre espaços de Banach e multi-ideais de composição.

ORIENTADOR: Prof. Dr. Geraldo Márcio de Azevedo Botelho.

A dissertação foi **APROVADA**, em reunião pública, realizada na Sala Multiuso da Faculdade de Matemática, Bloco 1F, Campus Santa Mônica, em 23 de fevereiro de 2010, às 10 horas, com a seguinte Banca Examinadora:

NOME

ASSINATURA

Prof. Dr. Geraldo Márcio de Azevedo Botelho
UFU - Universidade Federal de Uberlândia

Prof. Dr. Daniel Marinho Pellegrino
UFPB - Universidade Federal da Paraíba

Prof. Dr. Vinícius Vieira Fávaro
UFU - Universidade Federal de Uberlândia

Uberlândia, 23 de fevereiro de 2010.

Dedicatória

À minha família, ao meu namorado Edson e a todos os meus amigos. Obrigada pela sabedoria, inspiração, companheirismo e amor sempre presentes.

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus por esta oportunidade.

Aos meus pais, Aildo e Maria, e aos meus irmãos, Aildo Junior e André, agradeço pela paciência, compreensão e amor.

Ao meu orientador Prof. Dr. Geraldo Márcio de Azevedo Botelho pela confiança, sabedoria, disponibilidade e ensinamentos.

Aos professores doutores Edson e Cícero pelo apoio e todos os esforços que muito contribuíram para a realização deste trabalho.

Ao meu namorado Edson pelo carinho e alegria que sempre me proporcionou.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes) pelo apoio financeiro concedido durante este período.

A todos os meus amigos que sempre estiveram presentes me aconselhando e incentivando com muita dedicação.

A todos que colaboraram, direta ou indiretamente, com este trabalho.

SILVA, A. R. *Linearização de aplicações multilineares contínuas entre espaços de Banach e multi-ideais de composição*. 2010. 89 p. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia-MG.

Resumo

O primeiro objetivo desta dissertação é construir o produto tensorial de um número finito de espaços vetoriais a partir dos tensores elementares e mostrar que é através desse espaço que aplicações multilineares podem ser linearizadas. Em seguida são estudadas as aplicações multilineares contínuas entre espaços de Banach. A norma projetiva é introduzida no produto tensorial para realizar a linearização das aplicações multilineares contínuas. No último capítulo os ideais de operadores lineares são estudados e generalizados para o contexto de ideais de aplicações multilineares. A conexão da teoria de multi-ideais com o produto tensorial projetivo é feita através dos multi-ideais de composição.

Palavras-chave: produto tensorial, norma projetiva, aplicações multilineares contínuas, ideais de operadores e multi-ideais de composição.

SILVA, A. R. *Linearization of continuous multilinear mappings between Banach spaces and composition multi-ideals*. 2010. 89 p. M. Sc. Dissertation, Federal University of Uberlândia, Uberlândia-MG.

Abstract

The first aim of this dissertation is to construct the tensor product of finitely many linear spaces from elementary tensors and to show that this is the space through which multilinear mappings can be linearized. Next continuous multilinear mappings between Banach spaces are studied. The projective norm is introduced in the tensor product in order to perform the linearization of continuous multilinear mappings. The last chapter is devoted to the study of operator ideals and their generalization to the multilinear setting. The interplay between the theory of multi-ideals and the projective tensor product is established by the theory of composition multi-ideals.

Keywords: tensor product, projective norm, continuous multilinear mappings, operator ideals and composition multi-ideals.

Lista de Símbolos

$\mathbb{K}$	$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
$X_1, \dots, X_n$ e Y	espaços vetoriais sobre o corpo $\mathbb{K}$
$E, E_1, \dots, E_n, F, G$ e H	espaços vetoriais normados sobre o corpo $\mathbb{K}$
X^*	dual algébrico do espaço vetorial X
E'	dual topológico do espaço vetorial normado E
B_E	bola unitária fechada do espaço E
$\overset{\circ}{B}_E$	bola unitária aberta do espaço E
I_E	operador identidade definido em E
φ, Ψ e θ	funcionais lineares
u, v, t, τ, Ψ e ψ	operadores lineares
$L(X_1, \dots, X_n; Y)$	espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ de todas as aplicações n -lineares de $X_1 \times \dots \times X_n$ em Y
$(\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F), \ \cdot\)$	espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ de todas as aplicações n -lineares contínuas de $E_1 \times \dots \times E_n$ em F com a norma do sup
$L(^n E; F), \mathcal{L}(^n E; F)$	$L(E, \dots, E; F), \mathcal{L}(E, \dots, E; F)$
$L_f(X_1, \dots, X_n; Y)$	subespaço vetorial de $L(X_1, \dots, X_n; Y)$ das aplicações n -lineares de tipo finito definidas no produto cartesiano $X_1 \times \dots \times X_n$ em Y
$\mathcal{L}_f(E_1, \dots, E_n; F)$	subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ das aplicações n -lineares contínuas de tipo finito de $E_1 \times \dots \times E_n$ em F
$Im(A)$	imagem da aplicação A
$\ker(u)$	núcleo do operador linear u
$span\{b_1, \dots, b_n\}$	espaço vetorial gerado pelos vetores $b_1, \dots, b_n$
$x_1 \otimes \dots \otimes x_n$	tensor elementar definido por $x_1 \otimes \dots \otimes x_n(A) = A(x_1, \dots, x_n)$ para toda aplicação $A \in L(X_1, \dots, X_n; \mathbb{K})$
$X_1 \otimes \dots \otimes X_n$	produto tensorial dos espaços vetoriais $X_1, \dots, X_n$, definido como o subespaço de $L(X_1, \dots, X_n; \mathbb{K})^*$ gerado pelos tensores elementares
σ_n	aplicação n -linear de $X_1 \times \dots \times X_n$ em $X_1 \otimes \dots \otimes X_n$ dada por $\sigma_n(x_1, \dots, x_n) = x_1 \otimes \dots \otimes x_n$
A_L	linearização da aplicação n -linear A
η	permutação do conjunto $\{1, \dots, n\}$
$u_1 \otimes \dots \otimes u_n$	produto tensorial dos operadores lineares $u_i: X_i \longrightarrow Y_i$ onde $u_1 \otimes \dots \otimes u_n: X_1 \otimes \dots \otimes X_n \longrightarrow Y_1 \otimes \dots \otimes Y_n$ é tal que $u_1 \otimes \dots \otimes u_n(x_1 \otimes \dots \otimes x_n) = u_1(x_1) \otimes \dots \otimes u_n(x_n)$
$\ \cdot\ _1, \ \cdot\ _2$ e $\ \cdot\ _\infty$	norma da soma, norma euclidiana e norma do máximo
$\varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_n \otimes b$	aplicação n -linear contínua de $E_1 \times \dots \times E_n$ em F dada por $(\varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_n \otimes b)(x_1, \dots, x_n) = \varphi_1(x_1) \dots \varphi_n(x_n)b$, onde $\varphi_j \in E'_j$, $j = 1, \dots, n$ e $b \in F$
$(\ell_p, \ \cdot\ _p)$	$\{(\lambda_n)_{n=1}^\infty : \lambda_n \in \mathbb{K} \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \text{ e } \sum_{n=1}^\infty \lambda_n ^p < \infty\}$ onde $\ (\lambda_j)_{j=1}^\infty\ _p = \left(\sum_{j=1}^\infty \lambda_j ^p\right)^{\frac{1}{p}}$

$(\ell_\infty, \ \cdot\ _\infty)$	$\{(\lambda_n)_{n=1}^\infty : \lambda_n \in \mathbb{K} \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \text{ e } (\lambda_n)_{n=1}^\infty \text{ é limitada}\}$ onde
$L_1[0, 1]$	$\ (\lambda_j)_{j=1}^\infty\ _\infty = \sup\{ \lambda_j : j \in \mathbb{N}\}$
c_0	$\{[f] : f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}, f \text{ é Lebesgue - integrável}\}$
$\pi(\cdot)$	$\{(\lambda_j)_{j=1}^\infty \in \ell_\infty : \lim_{j \rightarrow \infty} \lambda_j = 0\}$
$E_1 \otimes_\pi \cdots \otimes_\pi E_n$	norma projetiva definida em $E_1 \otimes \cdots \otimes E_n$
$E_1 \hat{\otimes}_\pi \cdots \hat{\otimes}_\pi E_n$	produto tensorial de $E_1, \dots, E_n$ munido com a norma π
	completamento do espaço normado $E_1 \otimes_\pi \cdots \otimes_\pi E_n$. Este espaço de Banach é chamado de produto tensorial projetivo
$A_1 \otimes \cdots \otimes A_n$	$\{x_1 \otimes \cdots \otimes x_n : x_j \in A_j \subseteq E_j, j = 1, \dots, n\}$
$co(S)$	envoltória convexa de S
$\bar{co}(S)$	fecho da envoltória convexa de S
$(\hat{E}, \xi)$	completamento do espaço normado E
$(\mathcal{I}, \ \cdot\ _{\mathcal{I}})$	ideal normado de operadores
$(\mathcal{F}, \ \cdot\)$	ideal normado dos operadores de posto finito
$(\mathcal{A}, \ \cdot\)$	ideal de Banach dos operadores aproximáveis
$(\mathcal{K}, \ \cdot\)$	ideal de Banach dos operadores compactos
$(\mathcal{W}, \ \cdot\)$	ideal de Banach dos operadores fracamente compactos
$(\Pi_p, \pi_p(\cdot))$	ideal de Banach dos operadores absolutamente p -somantes
$t \circ A \circ (u_1, \dots, u_n)$	aplicação n -linear contínua dada por $(t \circ A \circ (u_1, \dots, u_n))$
	$(x_1, \dots, x_n) = t(A(u_1(x_1), \dots, u_n(x_n)))$
A^n	aplicação n -linear contínua de $\mathbb{K} \times \cdots \times \mathbb{K}$ em $\mathbb{K}$ dada por
	$A^n(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \lambda_1 \cdots \lambda_n$
$(\mathcal{M}, \ \cdot\ _{\mathcal{M}})$	ideal normado de aplicações multilineares (ou multi-ideal normado)
$(\mathcal{L}_f, \ \cdot\)$	ideal normado das aplicações multilineares contínuas de tipo finito
	(ou multi-ideal de tipo finito)
$(\mathcal{L}_A, \ \cdot\)$	ideal de Banach das aplicações multilineares aproximáveis (ou multi-ideal de aplicações aproximáveis)
$(\mathcal{I} \circ \mathcal{L}, \ \cdot\ _{\mathcal{I} \circ \mathcal{L}})$	multi-ideal de composição

Sumário

Resumo	vii
Abstract	viii
Lista de Símbolos	ix
Introdução	1
1 Teoria algébrica do produto tensorial	3
1.1 Aplicações multilineares	3
1.2 O produto tensorial	6
1.3 Linearização de aplicações multilineares	7
1.4 Produto tensorial de operadores lineares	13
2 Aplicações multilineares contínuas	21
2.1 Normas no produto cartesiano	21
2.2 Caracterizações das aplicações multilineares contínuas	23
2.3 O espaço das aplicações multilineares contínuas	26
2.4 Exemplos	32
3 Norma projetiva e linearização das aplicações multilineares contínuas	35
3.1 A norma projetiva	35
3.2 Linearização de aplicações multilineares contínuas	43
3.3 π não respeita subespaços	46
3.4 π respeita quocientes	48
4 Ideais de composição para aplicações multilineares	53
4.1 Ideais de operadores	53
4.2 Ideais de aplicações multilineares	65
4.3 Multi-ideais de composição	70
4.4 $\Pi_p \circ \mathcal{L}$	76
Referências Bibliográficas	78

Introdução

A Análise Funcional, ou Análise Funcional Linear, trata dos operadores lineares contínuos entre espaços normados, normalmente entre espaços de Banach. Várias são as extensões dessa teoria matemática, e uma delas, muito natural, estuda operadores não-lineares. Um dos primeiros passos além da linearidade é a multilinearidade, isto é, o estudo de aplicações multilineares, aquelas definidas no produto cartesiano que são lineares em cada uma das variáveis, quando as demais são mantidas constantes. Além de ser um dos primeiros passos na Análise Funcional não-linear, o estudo das aplicações multilineares contínuas é também o caminho para o estudo de funções holomorfas entre espaços normados, teoria essa que é a generalização da teoria de funções de uma ou várias variáveis complexas. Esta dissertação trata, essencialmente, da teoria das aplicações multilineares contínuas entre espaços de Banach.

Uma vez esclarecido o assunto que será abordado, delimitemos o objeto de estudo. As aplicações multilineares entre espaços vetoriais pertencem ao campo da Álgebra, e - de forma até surpreendente - os estudos algébricos levaram à criação de uma ferramenta que, em um sentido que ficará claro no Capítulo 1, lineariza as aplicações multilineares. Essa ferramenta chama-se produto tensorial de espaços vetoriais.

A teoria algébrica do produto tensorial de um número finito de espaços vetoriais é o objeto do Capítulo 1. O produto tensorial foi usado pela primeira vez na Análise Funcional por Murray e von Neumann ainda na primeira metade do século 20. Na Seção 1.1 introduziremos o conceito de aplicações multilineares e estudaremos o caso particular das aplicações multilineares de tipo finito. Na Seção 1.2 construiremos o produto tensorial de espaços vetoriais a partir dos tensores elementares e mostraremos as propriedades mais importantes de tais tensores. Na Seção 1.3 apresentaremos o teorema central deste capítulo, no qual se esclarece em que sentido o produto tensorial é o espaço vetorial através do qual as aplicações multilineares são linearizadas. Vale ressaltar que a literatura sobre operadores lineares entre espaços normados é muito mais farta que sobre aplicações multilineares. Daí a utilidade da linearização de aplicações multilineares, pois uma vez linearizada uma aplicação multilinear, temos todos os resultados lineares à disposição. Na Seção 1.4 estudaremos as principais propriedades do produto tensorial de operadores lineares.

No Capítulo 2 a Análise entra em cena através do estudo das aplicações multilineares contínuas definidas no produto cartesiano de espaços vetoriais normados. Após considerar as normas usuais no produto cartesiano na Seção 2.1, na Seção 2.2 provaremos algumas caracterizações das aplicações multilineares contínuas. Já a Seção 2.3 é dedicada ao estudo dos espaços formados pelas aplicações multilineares contínuas. O capítulo termina com uma seção de exemplos de aplicações multilineares contínuas.

À luz do estudado nos dois primeiros capítulos, a pergunta natural que se apresenta é a seguinte: será que existe uma norma no produto tensorial de espaços normados que às aplicações multilineares no produto cartesiano correspondem exatamente os operadores lineares no produto tensorial que são contínuos em relação a essa norma? No capítulo 3 solucionaremos esse problema através da construção da norma projetiva, norma essa que goza exatamente da propriedade enunciada na pergunta. Na Seção 3.1 descreveremos a norma projetiva e provaremos algumas das suas propriedades básicas. Na Seção 3.2 provaremos como a linearização das

aplicações multilineares contínuas entre espaços de Banach pode ser feita a partir dessa norma no produto tensorial. Também descreveremos a bola unitária fechada do produto tensorial projetivo de espaços vetoriais normados em termos das bolas unitárias fechadas dos respectivos espaços. Nas Seções 3.3 e 3.4 apresentaremos duas propriedades centrais da norma projetiva, a saber: que ela não respeita subespaços e que respeita quocientes.

O objetivo do Capítulo 4 é evidenciar a relevância da norma projetiva na extensão da teoria de ideais de operadores lineares para ideais de aplicações multilineares. A relação dos produtos tensoriais com a teoria de ideais de operadores remonta aos trabalhos pioneiros de Schatten e Grothendieck. Apesar disso, quando criada na década de 1960 por Pietsch e seus estudantes e colaboradores, a teoria de ideais de operadores lineares não fazia uso dos produtos tensoriais. O produto tensorial voltou à cena de duas formas: (i) através do livro de Defant e Floret [3], no qual a teoria de ideais de operadores lineares é reescrita na linguagem dos produtos tensoriais, o que na verdade é um retorno às raízes da teoria; (ii) através da introdução, pelo próprio Pietsch, em 1983, da teoria de ideais de aplicações multilineares. Na Seção 4.1 daremos alguns exemplos ilustrativos de ideais de operadores lineares ao passo que na Seção 4.2 trabalharemos com a generalização deste conceito para o caso multilinear. Existem vários procedimentos para se gerar multi-ideais a partir de ideais de operadores lineares dados. Na Seção 4.3 estudaremos um desses procedimentos, chamado de multi-ideais de composição, no qual a norma projetiva desempenha papel central. Por fim, na Seção 4.4 estudaremos o caso particular do multi-ideal de composição gerado pelo ideal dos operadores absolutamente p -somantes.

Cada capítulo ou seção foi fortemente baseado em uma, ou em alguns casos, duas, referências bibliográficas. Para evitar que a redação ficasse muito truncada com os créditos às referências, informamos abaixo as principais referências de cada capítulo ou seção:

Capítulo 1: Ryan [16].

Capítulo 2: Mujica [11].

Seções 3.1. e 3.2: Ponnusamy [15] e Ryan [16].

Seção 3.3: Defant e Floret [3] e Diestel, Jarchow e Tonge [5].

Seção 3.4: Megginson [10] e Ryan [16].

Seção 4.1: Defant e Floret [3] e Pietsch [12].

Seções 4.2, 4.3 e 4.4: Botelho, Pellegrino e Rueda [1].

Para a teoria dos espaços métricos a referência principal é Lima [9], e para resultados da Análise Funcional Linear, os livros [2, 6, 8, 10, 14, 15, 17].

Um objetivo importante desta dissertação é o preenchimento dos detalhes das demonstrações dos principais resultados. Todos os resultados são conhecidos e muitos deles são considerados ‘folclore’. Isso significa que raramente suas demonstrações aparecem e, quando aparecem, muitos detalhes, alguns deles importantes, são omitidos. Procura-se nesta dissertação preencher esses detalhes para que fique claro, no mínimo, do que depende cada resultado.

A literatura sobre produtos tensoriais topológicos e sua relação com as aplicações multilineares contínuas é escassa. Mesmo os poucos textos que tratam disso se restringem ao caso do produto tensorial de dois espaços e, conseqüentemente, da relação com as aplicações bilineares contínuas. A passagem para o caso do produto tensorial de n espaços e da relação com as aplicações n -lineares contínuas, $n \in \mathbb{N}$, nunca é tratada com detalhes, sendo usualmente ‘deixada a cargo do leitor’. Na maioria das situações essa passagem é, de fato, uma simples repetição do caso de dois espaços; mas em alguns casos a situação não é tão simples assim. Algumas vezes a notação se complica muito e uma redação cuidadosa é necessária para a compreensão do que está se passando. Outras vezes a passagem é feita através de um argumento de indução, nem sempre trivial. Um último, mas não menos importante, objetivo desta dissertação, é apresentar, com todos os detalhes, o caso do produto tensorial de um número finito de espaços e sua relação com as aplicações multilineares contínuas; preenchendo assim uma lacuna na literatura sobre o tema.

Capítulo 1

Teoria algébrica do produto tensorial

Neste capítulo estudaremos o produto tensorial de um número finito de espaços vetoriais do ponto de vista algébrico. O enfoque escolhido para a teoria algébrica dos produtos tensoriais consiste em definir os tensores elementares como funcionais lineares e a partir daí o produto tensorial entre espaços vetoriais como o subespaço gerado por tais tensores elementares. Em seguida provaremos as propriedades principais do produto tensorial, com ênfase na propriedade universal do produto tensorial na linearização de aplicações multilineares. Mostraremos também que, a menos de isomorfismos, o produto tensorial é o único espaço vetorial através do qual aplicações multilineares podem ser linearizadas. Um ponto importante será a identificação de condições que garantem que dois tensores são iguais. Por último provaremos as principais propriedades do produto tensorial de operadores lineares.

Ao longo de toda a dissertação, $\mathbb{K}$ denotará, indistintamente, o corpo $\mathbb{R}$ dos números reais ou o corpo $\mathbb{C}$ dos números complexos.

1.1 Aplicações multilineares

Definição 1.1 Sejam $n \in \mathbb{N}$, $X_1, \dots, X_n$ e Y espaços vetoriais sobre o corpo $\mathbb{K}$. Dizemos que uma aplicação $A: X_1 \times \dots \times X_n \longrightarrow Y$ é *n-linear* (ou *multilinear*) se é linear em cada uma das suas variáveis, isto é,

$$A(x_1, \dots, \lambda x_i + x'_i, \dots, x_n) = \lambda A(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) + A(x_1, \dots, x'_i, \dots, x_n),$$

para quaisquer $x_i, x'_i \in X_i$ com $i = 1, \dots, n$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Se $Y = \mathbb{K}$ dizemos *forma n-linear*.

O conjunto de todas as aplicações *n-lineares* de $X_1 \times \dots \times X_n$ em Y será denotado por $L(X_1, \dots, X_n; Y)$. É fácil verificar que as operações usuais de funções, descritas a seguir, fazem de $L(X_1, \dots, X_n; Y)$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$:

1) A cada par de aplicações *n-lineares* $A, B \in L(X_1, \dots, X_n; Y)$ fazemos corresponder a aplicação *n-linear* $A + B \in L(X_1, \dots, X_n; Y)$ definida por

$$\begin{aligned} A + B: X_1 \times \dots \times X_n &\longrightarrow Y \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto (A + B)(x_1, \dots, x_n) = A(x_1, \dots, x_n) + B(x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

2) A cada escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ e cada aplicação *n-linear* $A \in L(X_1, \dots, X_n; Y)$ fazemos corresponder a aplicação *n-linear* $\lambda A \in L(X_1, \dots, X_n; Y)$ definida por

$$\begin{aligned} \lambda A: X_1 \times \dots \times X_n &\longrightarrow Y \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto (\lambda A)(x_1, \dots, x_n) = \lambda A(x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Dado um espaço vetorial X sobre $\mathbb{K}$, o dual algébrico de X , isto é, o espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ de todos os funcionais lineares $\varphi: X \longrightarrow \mathbb{K}$, será denotado por X^* . Observe que X^* é um caso particular de $L(X_1, \dots, X_n; Y)$: basta tomar $n = 1$, $X_1 = X$ e $Y = \mathbb{K}$.

Definição 1.2 Sejam $X_1, \dots, X_n$ e Y espaços vetoriais, $\varphi_1 \in X_1^*, \dots, \varphi_n \in X_n^*$ e $b \in Y$. A aplicação

$$\begin{aligned} A: X_1 \times \dots \times X_n &\longrightarrow Y \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto A(x_1, \dots, x_n) = \varphi_1(x_1) \cdots \varphi_n(x_n) b \end{aligned}$$

é claramente n -linear. Uma combinação linear finita de aplicações n -lineares deste tipo é chamada de *aplicação n -linear de tipo finito*. A forma geral de uma aplicação n -linear de tipo finito de $X_1 \times \dots \times X_n$ em Y é então

$$A(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^k \varphi_1^j(x_1) \cdots \varphi_n^j(x_n) b_j,$$

onde $\varphi_i^j \in X_i^*$ e $b_j \in Y$ para $j = 1, \dots, k$ e $i = 1, \dots, n$.

Denotaremos por $L_f(X_1, \dots, X_n; Y)$ o conjunto de todas as aplicações n -lineares de tipo finito de $X_1 \times \dots \times X_n$ em Y . Por sua própria definição, é claro que $L_f(X_1, \dots, X_n; Y)$ é subespaço vetorial de $L(X_1, \dots, X_n; Y)$.

Nosso primeiro exemplo mostra que em dimensão finita todas as aplicações multilineares são de tipo finito.

Exemplo 1.3 Sejam $X_1, \dots, X_n$ espaços vetoriais de dimensão finita e Y um espaço vetorial. Vejamos que

$$L(X_1, \dots, X_n; Y) = L_f(X_1, \dots, X_n; Y).$$

É claro que $L_f(X_1, \dots, X_n; Y) \subseteq L(X_1, \dots, X_n; Y)$, portanto basta mostrar que

$$L(X_1, \dots, X_n; Y) \subseteq L_f(X_1, \dots, X_n; Y).$$

Para isso, seja $A \in L(X_1, \dots, X_n; Y)$. Como $X_1, \dots, X_n$ têm dimensão finita, sejam $\beta_i = \{y_i^1, \dots, y_i^{k_i}\}$ bases para os espaços X_i , $i = 1, \dots, n$, onde $k_i \in \mathbb{N}$ é a dimensão de X_i . Assim, se $x_i \in X_i$, $i = 1, \dots, n$, existem escalares $\lambda_i^{j_i}$, $i = 1, \dots, n$, $j_i = 1, \dots, k_i$, tais que $x_i = \sum_{j_i=1}^{k_i} \lambda_i^{j_i} y_i^{j_i}$ para $i = 1, \dots, n$. Então

$$\begin{aligned} A(x_1, \dots, x_n) &= A\left(\sum_{j_1=1}^{k_1} \lambda_1^{j_1} y_1^{j_1}, \dots, \sum_{j_n=1}^{k_n} \lambda_n^{j_n} y_n^{j_n}\right) \\ &= \sum_{j_1=1}^{k_1} \cdots \sum_{j_n=1}^{k_n} \lambda_1^{j_1} \cdots \lambda_n^{j_n} A(y_1^{j_1}, \dots, y_n^{j_n}). \end{aligned}$$

Para $i = 1, \dots, n$ e $l_i = 1, \dots, k_i$, defina

$$\begin{aligned} \theta_i^{l_i}: X_i &\longrightarrow \mathbb{K} \\ x_i &\mapsto \theta_i^{l_i}(x_i) = \theta_i^{l_i}\left(\sum_{j_i=1}^{k_i} \lambda_i^{j_i} y_i^{j_i}\right) = \lambda_i^{l_i}. \end{aligned}$$

É claro que $\theta_i^{l_i} \in X_i^*$ para $i = 1, \dots, n$ e $l_i = 1, \dots, k_i$ e

$$\begin{aligned} A(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{j_1=1}^{k_1} \dots \sum_{j_n=1}^{k_n} \lambda_1^{j_1} \dots \lambda_n^{j_n} A(y_1^{j_1}, \dots, y_n^{j_n}) \\ &= \sum_{j_1=1}^{k_1} \dots \sum_{j_n=1}^{k_n} \theta_1^{j_1}(x_1) \dots \theta_n^{j_n}(x_n) A(y_1^{j_1}, \dots, y_n^{j_n}). \end{aligned}$$

Segue que $A \in L_f(X_1, \dots, X_n; Y)$, provando que $L(X_1, \dots, X_n; Y) = L_f(X_1, \dots, X_n; Y)$.

O objetivo do próximo exemplo é mostrar que em dimensão infinita existem aplicações multilineares que não são de tipo finito. O símbolo $Im(A)$ denotará a imagem da aplicação A .

Exemplo 1.4 Sejam $X_1, \dots, X_n$ espaços vetoriais e $\varphi_1 \in X_1^*, \dots, \varphi_{n-1} \in X_{n-1}^*$ funcionais lineares não-nulos. Defina

$$\begin{aligned} A: X_1 \times \dots \times X_n &\longrightarrow X_n \\ (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto A(x_1, \dots, x_n) = \varphi_1(x_1) \dots \varphi_{n-1}(x_{n-1})x_n. \end{aligned}$$

Vejamos que A é n -linear. Em relação às primeiras $(n-1)$ -coordenadas, temos que

$$\begin{aligned} A(x_1, \dots, \lambda x_i + x'_i, \dots, x_{n-1}, x_n) &= \varphi_1(x_1) \dots \varphi_i(\lambda x_i + x'_i) \dots \varphi_{n-1}(x_{n-1})x_n \\ &= \varphi_1(x_1) \dots [\lambda \varphi_i(x_i) + \varphi_i(x'_i)] \dots \varphi_{n-1}(x_{n-1})x_n \\ &= \lambda \varphi_1(x_1) \dots \varphi_i(x_i) \dots \varphi_{n-1}(x_{n-1})x_n \\ &\quad + \varphi_1(x_1) \dots \varphi_i(x'_i) \dots \varphi_{n-1}(x_{n-1})x_n \\ &= \lambda A(x_1, \dots, x_i, \dots, x_{n-1}, x_n) + A(x_1, \dots, x'_i, \dots, x_{n-1}, x_n), \end{aligned}$$

para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ e para quaisquer $x_n \in X_n$ e $x_i, x'_i \in X_i$ com $i = 1, \dots, n-1$. Em relação à última coordenada,

$$\begin{aligned} A(x_1, \dots, x_{n-1}, \lambda x_n + x'_n) &= \varphi_1(x_1) \dots \varphi_{n-1}(x_{n-1})[\lambda x_n + x'_n] \\ &= \lambda \varphi_1(x_1) \dots \varphi_{n-1}(x_{n-1})x_n + \varphi_1(x_1) \dots \varphi_{n-1}(x_{n-1})x'_n \\ &= \lambda A(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) + A(x_1, \dots, x_{n-1}, x'_n), \end{aligned}$$

para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ e para quaisquer $x'_n \in X_n$ e $x_l \in X_l$ com $l = 1, \dots, n$. Portanto A é n -linear.

Para completar o objetivo deste exemplo, provemos que se $\dim X_n = +\infty$ então A não é de tipo finito. Seja $y \in X_n$. Como $\varphi_i \neq 0$ para todo $i = 1, \dots, n-1$, podemos tomar $x_i \in X_i$ tais que $\varphi_i(x_i) \neq 0$ para $i = 1, \dots, n-1$. Considerando a n -upla ordenada

$$\left(\frac{x_1}{\varphi_1(x_1)}, \dots, \frac{x_{n-1}}{\varphi_{n-1}(x_{n-1})}, y \right) \in X_1 \times \dots \times X_n,$$

temos que

$$A\left(\frac{x_1}{\varphi_1(x_1)}, \dots, \frac{x_{n-1}}{\varphi_{n-1}(x_{n-1})}, y \right) = y.$$

Portanto A é sobrejetora, isto é, $Im(A) = X_n$. Por outro lado, suponha por absurdo que A seja de tipo finito. Nesse caso existem funcionais $\varphi_l^j \in X_l^*$ e vetores $b_j \in X_n$, $j = 1, \dots, k$, $l = 1, \dots, n$, tais que

$$A(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^k \varphi_1^j(x_1) \dots \varphi_n^j(x_n) b_j$$

para todos $x_l \in X_l$, $l = 1, \dots, n$. Então $A(x_1, \dots, x_n) \in span\{b_1, \dots, b_k\}$ para todos $x_l \in X_l$, $l = 1, \dots, n$. Isso quer dizer que $X_n = Im(A) \subseteq span\{b_1, \dots, b_k\}$. Isso contraria o fato de X_n ter dimensão infinita, e assim A não é de tipo finito.

1.2 O produto tensorial

Dados um número $n \in \mathbb{N}$ e espaços vetoriais $X_1, \dots, X_n$, podemos considerar o dual algébrico $L(X_1, \dots, X_n; \mathbb{K})^*$ do espaço $L(X_1, \dots, X_n; \mathbb{K})$, isto é,

$$L(X_1, \dots, X_n; \mathbb{K})^* = \{\varphi: L(X_1, \dots, X_n; \mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K} : \varphi \text{ é linear}\}.$$

Da seção anterior sabemos que $L(X_1, \dots, X_n; \mathbb{K})^*$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ com as operações usuais de funções, isto é:

$$(\varphi_1 + \varphi_2)(A) = \varphi_1(A) + \varphi_2(A) \text{ e } (\lambda\varphi_1)(A) = \lambda\varphi_1(A)$$

para todos funcionais lineares $\varphi_1, \varphi_2 \in L(X_1, \dots, X_n; \mathbb{K})^*$ e todo escalar $\lambda \in \mathbb{K}$.

O produto tensorial de $X_1, \dots, X_n$ será construído a partir de elementos específicos de $L(X_1, \dots, X_n; \mathbb{K})^*$. Dados $x_1 \in X_1, \dots, x_n \in X_n$, defina

$$\begin{aligned} x_1 \otimes \dots \otimes x_n: L(X_1, \dots, X_n; \mathbb{K}) &\longrightarrow \mathbb{K} \\ A &\mapsto (x_1 \otimes \dots \otimes x_n)(A) = A(x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Veamos que $x_1 \otimes \dots \otimes x_n$ é linear. De fato,

$$\begin{aligned} (x_1 \otimes \dots \otimes x_n)(\lambda A + B) &= (\lambda A + B)(x_1, \dots, x_n) = (\lambda A)(x_1, \dots, x_n) + B(x_1, \dots, x_n) \\ &= \lambda A(x_1, \dots, x_n) + B(x_1, \dots, x_n) \\ &= \lambda(x_1 \otimes \dots \otimes x_n)(A) + (x_1 \otimes \dots \otimes x_n)(B). \end{aligned}$$

para todo escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ e todas aplicações n -lineares $A, B \in L(X_1, \dots, X_n; \mathbb{K})$. Chamando de D o conjunto formado por todos esses funcionais,

$$D := \{x_1 \otimes \dots \otimes x_n : x_1 \in X_1, \dots, x_n \in X_n\} \subseteq L(X_1, \dots, X_n; \mathbb{K})^*.$$

Definição 1.5 O subespaço vetorial de $L(X_1, \dots, X_n; \mathbb{K})^*$ gerado por D será chamado de *produto tensorial de $X_1, \dots, X_n$* , e será denotado por $X_1 \otimes \dots \otimes X_n$. Em símbolos,

$$X_1 \otimes \dots \otimes X_n = \left\{ \sum_{j=1}^k \lambda_j (x_1^j \otimes \dots \otimes x_n^j) : k \in \mathbb{N}, \lambda_j \in \mathbb{K}, x_i^j \in X_i, i = 1, \dots, n \text{ e } j = 1, \dots, k \right\}.$$

Os elementos de $X_1 \otimes \dots \otimes X_n$ são chamados de *tensores*, e os tensores da forma $x_1 \otimes \dots \otimes x_n$ são chamados de *tensores elementares*. Um tensor então é uma combinação linear de tensores elementares.

O produto tensorial $X_1 \otimes \dots \otimes X_n$ é, por definição, um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Vejamos algumas propriedades algébricas elementares dos tensores elementares:

Proposição 1.6 *Sejam $X_1, \dots, X_n$ espaços vetoriais, $x_1, x'_1 \in X_1, \dots, x_n, x'_n \in X_n$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Então*

- (a) $x_1 \otimes \dots \otimes (x_i + x'_i) \otimes \dots \otimes x_n = x_1 \otimes \dots \otimes x_i \otimes \dots \otimes x_n + x_1 \otimes \dots \otimes x'_i \otimes \dots \otimes x_n$ para todo $i = 1, \dots, n$.
- (b) $\lambda (x_1 \otimes \dots \otimes x_i \otimes \dots \otimes x_n) = x_1 \otimes \dots \otimes (\lambda x_i) \otimes \dots \otimes x_n$ para todo $i = 1, \dots, n$.
- (c) Se $x_i = 0$ para algum $i \in \{1, \dots, n\}$, então $x_1 \otimes \dots \otimes x_n = 0$.

Demonstração: Dado $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$\begin{aligned} (x_1 \otimes \dots \otimes (x_i + x'_i) \otimes \dots \otimes x_n)(A) &= A(x_1, \dots, x_i + x'_i, \dots, x_n) \\ &= A(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) + A(x_1, \dots, x'_i, \dots, x_n) \\ &= (x_1 \otimes \dots \otimes x_i \otimes \dots \otimes x_n)(A) + (x_1 \otimes \dots \otimes x'_i \otimes \dots \otimes x_n)(A), \end{aligned}$$

para toda aplicação n -linear $A \in L(X_1, \dots, X_n; \mathbb{K})$, o que prova (a).

Além disso,

$$\begin{aligned} (\lambda(x_1 \otimes \dots \otimes x_i \otimes \dots \otimes x_n))(A) &= \lambda[(x_1 \otimes \dots \otimes x_i \otimes \dots \otimes x_n)(A)] \\ &= \lambda A(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \\ &= A(x_1, \dots, \lambda x_i, \dots, x_n) \\ &= (x_1 \otimes \dots \otimes (\lambda x_i) \otimes \dots \otimes x_n)(A), \end{aligned}$$

para toda aplicação n -linear $A \in L(X_1, \dots, X_n; \mathbb{K})$, o que prova (b).

(c) é consequência imediata de (b). □

Observação 1.7 Pela definição do produto tensorial, todo tensor $x \in X_1 \otimes \dots \otimes X_n$ tem uma representação da forma

$$x = \sum_{j=1}^k \lambda_j (x_1^j \otimes \dots \otimes x_n^j),$$

onde $k \in \mathbb{N}$, $\lambda_j \in \mathbb{K}$ e $x_i^j \in X_i$ para $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, k$. Porém, usando o item (b) da Proposição acima podemos reescrevê-la da seguinte forma:

$$x = \sum_{j=1}^k x_1^j \otimes \dots \otimes x_n^j,$$

onde $k \in \mathbb{N}$ e $x_i^j \in X_i$ para $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, k$.

Importante também é mencionar que as representações acima nem sempre são únicas. Essa não unicidade da representação de um tensor como combinação linear de tensores elementares é um fator complicador no estudo dos produtos tensoriais e também uma fonte de erros.

Não daremos exemplos particulares de produtos tensoriais neste momento pois muitos deles aparecerão ao longo da dissertação.

1.3 Linearização de aplicações multilineares

O objetivo desta seção é mostrar em que sentido o produto tensorial é o espaço vetorial através do qual aplicações multilineares podem ser linearizadas. Para alcançar esse objetivo precisamos introduzir uma aplicação multilinear que será muito útil:

Definição 1.8 Dados os espaços vetoriais $X_1, \dots, X_n$, considere a aplicação

$$\begin{aligned} \sigma_n: X_1 \times \dots \times X_n &\longrightarrow X_1 \otimes \dots \otimes X_n \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto \sigma_n(x_1, \dots, x_n) = x_1 \otimes \dots \otimes x_n. \end{aligned}$$

Proposição 1.9 A aplicação σ_n é n -linear, isto é, $\sigma_n \in L(X_1, \dots, X_n; X_1 \otimes \dots \otimes X_n)$.

Demonstração: Dados $x_1, x'_1 \in X_1, \dots, x_n, x'_n \in X_n$, $\lambda \in \mathbb{K}$ e $i \in \{1, \dots, n\}$, da Proposição 1.6 segue que

$$\begin{aligned}\sigma_n(x_1, \dots, \lambda x_i + x'_i, \dots, x_n) &= x_1 \otimes \dots \otimes (\lambda x_i + x'_i) \otimes \dots \otimes x_n \\ &= \lambda(x_1 \otimes \dots \otimes x_i \otimes \dots \otimes x_n) + x_1 \otimes \dots \otimes x'_i \otimes \dots \otimes x_n \\ &= \lambda \sigma_n(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) + \sigma_n(x_1, \dots, x'_i, \dots, x_n),\end{aligned}$$

provando que a aplicação σ_n é n -linear. $\square$

Teorema 1.10 *Sejam $X_1, \dots, X_n$ espaços vetoriais sobre o corpo $\mathbb{K}$. Para cada aplicação n -linear $A: X_1 \times \dots \times X_n \longrightarrow Y$ existe um único operador linear $A_L: X_1 \otimes \dots \otimes X_n \longrightarrow Y$, dado por $A_L\left(\sum_{j=1}^k x_1^j \otimes \dots \otimes x_n^j\right) = \sum_{j=1}^k A(x_1^j, \dots, x_n^j)$, tal que o diagrama*

$$\begin{array}{ccc} X_1 \times \dots \times X_n & \xrightarrow{A} & Y \\ & \searrow \sigma_n & \nearrow A_L \\ & X_1 \otimes \dots \otimes X_n & \end{array}$$

é comutativo, ou seja, $A = A_L \circ \sigma_n$. Mais ainda, a correspondência $A \longleftrightarrow A_L$ é um isomorfismo entre os espaços vetoriais $L(X_1, \dots, X_n; Y)$ e $L(X_1 \otimes \dots \otimes X_n; Y)$. O operador linear A_L é chamado de **linearização** da aplicação n -linear A .

Demonstração: Mostremos que A_L está bem definido no sentido de que independe da representação do tensor como combinação linear de tensores elementares. Devemos mostrar que se

$$\sum_{j=1}^k x_1^j \otimes \dots \otimes x_n^j = \sum_{j=1}^m y_1^j \otimes \dots \otimes y_n^j,$$

então

$$A_L\left(\sum_{j=1}^k x_1^j \otimes \dots \otimes x_n^j\right) = A_L\left(\sum_{j=1}^m y_1^j \otimes \dots \otimes y_n^j\right),$$

ou seja,

$$\sum_{j=1}^k A(x_1^j, \dots, x_n^j) = \sum_{j=1}^m A(y_1^j, \dots, y_n^j).$$

Para isso, suponha

$$\sum_{j=1}^k x_1^j \otimes \dots \otimes x_n^j = \sum_{j=1}^m y_1^j \otimes \dots \otimes y_n^j.$$

Assim, temos que

$$z = \sum_{j=1}^k x_1^j \otimes \dots \otimes x_n^j - \sum_{j=1}^m y_1^j \otimes \dots \otimes y_n^j = 0.$$

Definindo

$$\begin{cases} z_1^j = x_1^j, \dots, z_n^j = x_n^j, & 1 \leq j \leq k \\ z_1^j = -y_1^{j-k}, z_2^j = y_2^{j-k}, \dots, z_n^j = y_n^{j-k}, & k+1 \leq j \leq k+m \end{cases}$$

segue que

$$z = \sum_{j=1}^{k+m} z_1^j \otimes \cdots \otimes z_n^j = 0.$$

Seja $\varphi \in Y^*$ um funcional linear. Da linearidade de φ e da n -linearidade de A segue imediatamente que $(\varphi \circ A)$ é n -linear, ou seja, $(\varphi \circ A) \in L(X_1, \dots, X_n; \mathbb{K})$ para todo funcional linear $\varphi \in Y^*$. Observe que

$$\begin{aligned} \varphi \left(\sum_{j=1}^{k+m} A(z_1^j, \dots, z_n^j) \right) &= \sum_{j=1}^{k+m} (\varphi \circ A)(z_1^j, \dots, z_n^j) = \sum_{j=1}^{k+m} (z_1^j \otimes \cdots \otimes z_n^j) (\varphi \circ A) \\ &= \left[\sum_{j=1}^{k+m} (z_1^j \otimes \cdots \otimes z_n^j) \right] (\varphi \circ A) = z (\varphi \circ A) = 0, \end{aligned}$$

para todo funcional linear $\varphi \in Y^*$. Como o único vetor de um espaço vetorial que anula todos os funcionais lineares é o vetor nulo, temos que

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{j=1}^{k+m} A(z_1^j, \dots, z_n^j) = \sum_{j=1}^k A(z_1^j, \dots, z_n^j) + \sum_{j=k+1}^{k+m} A(z_1^j, \dots, z_n^j) \\ &= \sum_{j=1}^k A(x_1^j, \dots, x_n^j) + \sum_{j=1}^m A(-y_1^j, y_2^j, \dots, y_n^j) \\ &= \sum_{j=1}^k A(x_1^j, \dots, x_n^j) - \sum_{j=1}^m A(y_1^j, \dots, y_n^j). \end{aligned}$$

Logo

$$\sum_{j=1}^k A(x_1^j, \dots, x_n^j) = \sum_{j=1}^m A(y_1^j, \dots, y_n^j),$$

o que nos permite concluir que A_L está bem definida. Mostremos que A_L é linear. Com efeito,

$$\begin{aligned} A_L \left(\lambda \sum_{j=1}^k x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j + \sum_{j=1}^m y_1^j \otimes \cdots \otimes y_n^j \right) &= A_L \left(\sum_{j=1}^k (\lambda x_1^j) \otimes \cdots \otimes x_n^j + \sum_{j=1}^m y_1^j \otimes \cdots \otimes y_n^j \right) \\ &= \sum_{j=1}^k A(\lambda x_1^j, \dots, x_n^j) + \sum_{j=1}^m A(y_1^j, \dots, y_n^j) \\ &= \lambda \sum_{j=1}^k A(x_1^j, \dots, x_n^j) + \sum_{j=1}^m A(y_1^j, \dots, y_n^j) \\ &= \lambda A_L \left(\sum_{j=1}^k x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j \right) + A_L \left(\sum_{j=1}^m y_1^j \otimes \cdots \otimes y_n^j \right), \end{aligned}$$

para todo escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ e para quaisquer $x_i^j, y_i^l \in X_i$ com $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, k$ e $l = 1, \dots, m$.

Provemos agora que $A = A_L \circ \sigma_n$. De fato, dado $(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$,

$$\begin{aligned} (A_L \circ \sigma_n)(x_1, \dots, x_n) &= A_L(\sigma_n(x_1, \dots, x_n)) \\ &= A_L(x_1 \otimes \dots \otimes x_n) \\ &= A(x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Verifiquemos a unicidade do operador A_L . Suponha que $u \in L(X_1 \otimes \dots \otimes X_n; Y)$ seja um operador linear tal que $A = u \circ \sigma_n$. Logo $A_L \circ \sigma_n = A = u \circ \sigma_n$. Assim, para todo $x = \sum_{j=1}^k x_1^j \otimes \dots \otimes x_n^j \in X_1 \otimes \dots \otimes X_n$,

$$\begin{aligned} u(x) &= u\left(\sum_{j=1}^k x_1^j \otimes \dots \otimes x_n^j\right) = \sum_{j=1}^k u(x_1^j \otimes \dots \otimes x_n^j) \\ &= \sum_{j=1}^k u(\sigma_n(x_1^j, \dots, x_n^j)) = \sum_{j=1}^k (u \circ \sigma_n)(x_1^j, \dots, x_n^j) \\ &= \sum_{j=1}^k (A_L \circ \sigma_n)(x_1^j, \dots, x_n^j) = \sum_{j=1}^k A_L(x_1^j \otimes \dots \otimes x_n^j) \\ &= A_L\left(\sum_{j=1}^k x_1^j \otimes \dots \otimes x_n^j\right) = A_L(x), \end{aligned}$$

o que prova que $u = A_L$.

Por último, mostremos que o operador

$$\begin{aligned} \Phi: L(X_1, \dots, X_n; Y) &\longrightarrow L(X_1 \otimes \dots \otimes X_n; Y) \\ A &\longmapsto A_L \end{aligned}$$

é linear, injetor e sobrejetor. Primeiro provemos a linearidade de Φ . Para tanto devemos mostrar que $(A + \lambda B)_L = A_L + \lambda B_L$ para todas aplicações n -lineares $A, B \in L(X_1, \dots, X_n; Y)$ e todo escalar $\lambda \in \mathbb{K}$. Dado um tensor $\sum_{j=1}^k x_1^j \otimes \dots \otimes x_n^j \in X_1 \otimes \dots \otimes X_n$,

$$\begin{aligned} (A + \lambda B)_L\left(\sum_{j=1}^k x_1^j \otimes \dots \otimes x_n^j\right) &= \sum_{j=1}^k (A + \lambda B)(x_1^j, \dots, x_n^j) \\ &= \sum_{j=1}^k [A(x_1^j, \dots, x_n^j) + \lambda B(x_1^j, \dots, x_n^j)] \\ &= \sum_{j=1}^k A(x_1^j, \dots, x_n^j) + \lambda \left(\sum_{j=1}^k B(x_1^j, \dots, x_n^j)\right) \\ &= A_L\left(\sum_{j=1}^k x_1^j \otimes \dots \otimes x_n^j\right) + \lambda B_L\left(\sum_{j=1}^k x_1^j \otimes \dots \otimes x_n^j\right) \\ &= (A_L + \lambda B_L)\left(\sum_{j=1}^k x_1^j \otimes \dots \otimes x_n^j\right), \end{aligned}$$

e portanto $(A + \lambda B)_L = A_L + \lambda B_L$. Logo

$$\Phi(A + \lambda B) = (A + \lambda B)_L = A_L + \lambda B_L = \Phi(A) + \lambda \Phi(B),$$

o que comprova a linearidade de Φ .

Vejamos que o operador linear Φ é injetor. Com efeito, suponha que $A \in \ker \Phi$, isto é, $\Phi(A) = 0$. Nesse caso $A_L = \Phi(A) = 0$ e consequentemente

$$A_L \left(\sum_{j=1}^k x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j \right) = 0,$$

para todo $\sum_{j=1}^k x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j \in X_1 \otimes \cdots \otimes X_n$. Em particular,

$$0 = A_L(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = A(x_1, \dots, x_n),$$

para quaisquer $x_1 \in X_1, \dots, x_n \in X_n$. Segue que $A = 0$ e portanto o operador linear Φ é injetor.

Por fim, provemos que Φ é sobrejetor. Para isso seja $u \in L(X_1 \otimes \cdots \otimes X_n; Y)$. Defina

$$\begin{aligned} B: X_1 \times \cdots \times X_n &\longrightarrow Y \\ (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto B(x_1, \dots, x_n) = u(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n). \end{aligned}$$

Da Proposição 1.6 e da linearidade de u segue facilmente que B é n -linear, isto é, $B \in L(X_1, \dots, X_n; Y)$. Pelo que já provamos nesta demonstração, existe um único operador linear $B_L \in L(X_1 \otimes \cdots \otimes X_n; Y)$ tal que $B = B_L \circ \sigma_n$. Por outro lado, $B = u \circ \sigma_n$, pois dados $x_1 \in X_1, \dots, x_n \in X_n$,

$$(u \circ \sigma_n)(x_1, \dots, x_n) = u(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = B(x_1, \dots, x_n).$$

Dado que B_L é o único operador linear tal que $B = B_L \circ \sigma_n$, segue que $u = B_L$. Temos então que $\Phi(B) = B_L = u$. Portanto Φ é sobrejetor e consequentemente concluímos que Φ é um isomorfismo. $\square$

Observação 1.11 (a) A idéia por trás da linearização de aplicações multilineares é a possibilidade de se usar todo o arsenal da Álgebra Linear, construído no contexto de operadores lineares, para aplicações multilineares; ou seja, reduzir a Álgebra Multilinear à Álgebra Linear. Por outro lado, deve estar claro que ao mesmo tempo em que simplificamos a aplicação (passando de multilinear para linear), estamos passando de um espaço vetorial simples no domínio (o produto cartesiano) para um espaço vetorial mais complicado (o produto tensorial).

(b) Sejam $X_1, \dots, X_n, Y$ espaços vetoriais. A menos do isomorfismo descrito no Teorema 1.10, podemos escrever

$$L(X_1 \otimes \cdots \otimes X_n; Y) = L(X_1, \dots, X_n; Y),$$

e tomando $Y = \mathbb{K}$ obtemos a fórmula

$$(X_1 \otimes \cdots \otimes X_n)^* = L(X_1, \dots, X_n; \mathbb{K}).$$

A propriedade do produto tensorial descrita no Teorema 1.10 é chamada de *propriedade universal dos produtos tensoriais*. Além de gozar dessa propriedade, o produto tensorial é o único espaço vetorial com essa propriedade:

Teorema 1.12 (Unicidade do produto tensorial) *Sejam $X_1, \dots, X_n$ espaços vetoriais. Suponha que existam um espaço vetorial W e uma aplicação n -linear $B: X_1 \times \cdots \times X_n \longrightarrow W$ com a seguinte propriedade:*

- para todo espaço vetorial Y e toda aplicação n -linear $A: X_1 \times \cdots \times X_n \longrightarrow Y$ existe um único operador linear $u: W \longrightarrow Y$ tal que $A = u \circ B$.

Então existe um isomorfismo $\Phi: X_1 \otimes \cdots \otimes X_n \longrightarrow W$ tal que $\Phi(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = B(x_1, \dots, x_n)$ para todos $x_1 \in X_1, \dots, x_n \in X_n$.

Demonstração: A aplicação $B: X_1 \times \cdots \times X_n \longrightarrow W$ é n -linear por hipótese, logo o Teorema 1.10 garante que existe um único operador $B_L \in L(X_1 \otimes \cdots \otimes X_n; W)$ tal que $B = B_L \circ \sigma_n$, isto é,

$$B(x_1, \dots, x_n) = B_L(\sigma_n(x_1, \dots, x_n)) = B_L(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n)$$

para todos $x_1 \in X_1, \dots, x_n \in X_n$. Assim, dado um tensor $\sum_{j=1}^k x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j \in X_1 \otimes \cdots \otimes X_n$, da definição de B_L temos

$$B_L\left(\sum_{j=1}^k x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j\right) = \sum_{j=1}^k B(x_1^j, \dots, x_n^j). \quad (1.1)$$

Mostremos que o operador linear B_L é bijetor. Mostremos primeiro que é injetor. Aplicando a propriedade que B e W gozam por hipótese para o espaço vetorial $X_1 \otimes \cdots \otimes X_n$ e para a aplicação n -linear $\sigma_n: X_1 \times \cdots \times X_n \longrightarrow X_1 \otimes \cdots \otimes X_n$, concluímos que existe um único operador linear $u: W \longrightarrow X_1 \otimes \cdots \otimes X_n$ tal que $\sigma_n = u \circ B$. Então

$$u(B(x_1, \dots, x_n)) = \sigma_n(x_1, \dots, x_n) = x_1 \otimes \cdots \otimes x_n, \quad (1.2)$$

para todos $x_1 \in X_1, \dots, x_n \in X_n$. Suponha que $\sum_{j=1}^k x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j \in \ker B_L$, ou seja, $B_L\left(\sum_{j=1}^k x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j\right) = 0$. Das equações (1.1) e (1.2) obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j &= \sum_{j=1}^k u(B(x_1^j, \dots, x_n^j)) \\ &= u\left(\sum_{j=1}^k B(x_1^j, \dots, x_n^j)\right) \\ &= u\left(B_L\left(\sum_{j=1}^k x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j\right)\right) \\ &= u(0) = 0. \end{aligned}$$

Logo $\ker B_L = \{0\}$, e portanto B_L é injetor. Por fim mostremos que B_L é sobrejetor. Vejamos que $B(X_1 \times \cdots \times X_n)$ gera W , ou seja,

$$\text{span}\{B(X_1 \times \cdots \times X_n)\} = W.$$

Suponha, por absurdo, que exista $w \in W$, $w \notin \text{span}\{B(X_1 \times \cdots \times X_n)\}$. Nesse caso $w \neq 0 \in \text{span}\{B(X_1 \times \cdots \times X_n)\}$. Veja que o operador identidade em W , I_W , satisfaz a condição $B = I_W \circ B$. Por hipótese I_W é o único operador linear $v: W \longrightarrow W$ tal que $B = v \circ B$. Seja β uma base para $\text{span}\{B(X_1 \times \cdots \times X_n)\}$. Como $w \notin \text{span}\{B(X_1 \times \cdots \times X_n)\}$ temos que $\beta \cup \{w\}$ é um conjunto linearmente independente. Podemos então, com o auxílio do Lema de Zorn, considerar uma base γ de W contendo $\beta \cup \{w\}$. Definimos um operador linear $t: W \longrightarrow W$ definindo-o primeiramente nos vetores da base γ por

$$t(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \in \beta \\ 0, & \text{se } x \notin \beta, \end{cases}$$

e então estendendo-o por linearidade a todos os vetores de W . Em particular, $t(w) = 0$. Note que $t \neq I_W$ pois

$$t(w) = 0 \neq w = I_W(w).$$

Dados $x_1 \in X_1, \dots, x_n \in X_n$,

$$\begin{aligned}(t \circ B)(x_1, \dots, x_n) &= t(B(x_1, \dots, x_n)) = I_W(B(x_1, \dots, x_n)) \\ &= B(x_1, \dots, x_n),\end{aligned}$$

mostrando que $t \circ B = B$. Mas isso contraria a unicidade de I_W , e portanto $B(X_1 \times \dots \times X_n)$ gera W . Assim, para todo $w \in W$ existem um natural l , escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ e vetores $x_1^1, \dots, x_1^l \in X_1, \dots, x_n^1, \dots, x_n^l \in X_n$ tais que

$$w = \sum_{j=1}^l \lambda_j B(x_1^j, \dots, x_n^j) = \sum_{j=1}^l B(\lambda_j x_1^j, x_2^j, \dots, x_n^j).$$

Fazendo $z_1^j = \lambda_j x_1^j$ para $j = 1, \dots, l$, obtemos

$$w = \sum_{j=1}^l B(z_1^j, x_2^j, \dots, x_n^j) = B_L \left(\sum_{j=1}^l z_1^j \otimes x_2^j \otimes \dots \otimes x_n^j \right),$$

onde $\sum_{j=1}^l z_1^j \otimes \dots \otimes x_n^j \in X_1 \otimes \dots \otimes X_n$. Portanto B_L é sobrejetor e consequentemente B_L é um isomorfismo. Basta tomar $\Phi = B_L$ para obter Φ isomorfismo e

$$\Phi(x_1 \otimes \dots \otimes x_n) = B_L(x_1 \otimes \dots \otimes x_n) = B(x_1, \dots, x_n)$$

para todos $x_1 \in X_1, \dots, x_n \in X_n$. □

1.4 Produto tensorial de operadores lineares

Dados operadores lineares $u_1: X_1 \longrightarrow Y_1, \dots, u_n: X_n \longrightarrow Y_n$, será que existe um operador linear $u: X_1 \otimes \dots \otimes X_n \longrightarrow Y_1 \otimes \dots \otimes Y_n$ tal que

$$u(x_1 \otimes \dots \otimes x_n) = u_1(x_1) \otimes \dots \otimes u_n(x_n)$$

para todos $x_1 \in X_1, \dots, x_n \in X_n$? Tal operador linear é único? Para responder essas perguntas precisamos de um critério que na prática seja útil para identificar quando um tensor é o tensor nulo.

Definição 1.13 Um subconjunto S do dual algébrico X^* do espaço vetorial X *separa pontos de* X se para quaisquer $x, y \in X$, $x \neq y$, existe $\varphi \in S$ tal que $\varphi(x) \neq \varphi(y)$; ou, equivalentemente, se $\varphi(x) = 0$ para todo $\varphi \in S$ implica $x = 0$.

Lema 1.14 *Sejam $X_1, \dots, X_n$ espaços vetoriais. As afirmações seguintes são equivalentes considerando o tensor $x = \sum_{j=1}^k x_1^j \otimes \dots \otimes x_n^j \in X_1 \otimes \dots \otimes X_n$.*

- (i) $x = 0$.
- (ii) $\sum_{j=1}^k \varphi_1(x_1^j) \dots \varphi_n(x_n^j) = 0$ para todos funcionais lineares $\varphi_i \in S_i$, onde S_i é um subconjunto de X_i^* que separa pontos de X_i , $i = 1, \dots, n$.
- (iii) $\sum_{j=1}^k \varphi_1(x_1^j) \dots \varphi_n(x_n^j) = 0$ para todos funcionais lineares $\varphi_i \in X_i^*$, $i = 1, \dots, n$.

Demonstração: (i) $\implies$ (ii) Observe que se $x = 0$ então

$$0 = x(A) = \sum_{j=1}^k A(x_1^j, \dots, x_n^j) \tag{1.3}$$

para toda aplicação $A \in L(X_1, \dots, X_n; \mathbb{K})$. Sejam $S_1 \subseteq X_1^*, \dots, S_n \subseteq X_n^*$ subconjuntos que separam pontos de $X_1, \dots, X_n$, respectivamente. Dados $\varphi_1 \in S_1, \dots, \varphi_n \in S_n$, considere a forma n -linear de tipo finito dada por

$$\begin{aligned} A: X_1 \times \dots \times X_n &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto A(x_1, \dots, x_n) = \varphi_1(x_1) \cdots \varphi_n(x_n). \end{aligned}$$

De (1.3) segue que

$$0 = \sum_{j=1}^k A(x_1^j, \dots, x_n^j) = \sum_{j=1}^k \varphi_1(x_1^j) \cdots \varphi_n(x_n^j),$$

e portanto (ii) está verificado.

(ii) $\implies$ (iii) Sabemos que $S_1 \subseteq X_1^*, \dots, S_n \subseteq X_n^*$ são subconjuntos que separam pontos de $X_1, \dots, X_n$, respectivamente, e que $\sum_{j=1}^k \varphi_1(x_1^j) \cdots \varphi_n(x_n^j) = 0$ para todos $\varphi_1 \in S_1, \dots, \varphi_n \in S_n$. Então

$$\varphi_1 \left(\sum_{j=1}^k x_1^j \varphi_2(x_2^j) \cdots \varphi_n(x_n^j) \right) = 0$$

para todos funcionais $\varphi_1 \in S_1, \dots, \varphi_n \in S_n$. Como S_1 separa pontos de X_1 segue que $\sum_{j=1}^k x_1^j \varphi_2(x_2^j) \cdots \varphi_n(x_n^j) = 0$ para todos $\varphi_2 \in S_2, \dots, \varphi_n \in S_n$. Portanto

$$\sum_{j=1}^k \varphi_1(x_1^j) \varphi_2(x_2^j) \cdots \varphi_n(x_n^j) = \varphi_1 \left(\sum_{j=1}^k x_1^j \varphi_2(x_2^j) \cdots \varphi_n(x_n^j) \right) = 0$$

para todo $\varphi_1 \in X_1^*$ e todos $\varphi_2 \in S_2, \dots, \varphi_n \in S_n$. Então

$$\varphi_2 \left(\sum_{j=1}^k \varphi_1(x_1^j) x_2^j \varphi_3(x_3^j) \cdots \varphi_n(x_n^j) \right) = 0$$

para todo $\varphi_1 \in X_1^*$ e todos $\varphi_2 \in S_2, \dots, \varphi_n \in S_n$. Como S_2 separa pontos de X_2 segue que $\sum_{j=1}^k \varphi_1(x_1^j) x_2^j \varphi_3(x_3^j) \cdots \varphi_n(x_n^j) = 0$ para todo $\varphi_1 \in X_1^*$ e todos $\varphi_3 \in S_3, \dots, \varphi_n \in S_n$. Portanto

$$\sum_{j=1}^k \varphi_1(x_1^j) \varphi_2(x_2^j) \cdots \varphi_n(x_n^j) = \varphi_2 \left(\sum_{j=1}^k \varphi_1(x_1^j) x_2^j \varphi_3(x_3^j) \cdots \varphi_n(x_n^j) \right) = 0$$

para todos $\varphi_1 \in X_1^*, \varphi_2 \in X_2^*$ e todos $\varphi_3 \in S_3, \dots, \varphi_n \in S_n$. Repetindo esse processo um número finito de vezes obtemos (iii).

(iii) $\implies$ (i) Sabemos que $\sum_{j=1}^k \varphi_l(x_1^j) \cdots \varphi_n(x_n^j) = 0$ para todos funcionais lineares $\varphi_l \in X_l^*$ com $l = 1, \dots, n$. Para $j = 1, \dots, n$, chame $Z_j = \text{span} \{x_j^1, \dots, x_j^k\}$. Para $i = 1, \dots, n-1$, considere $\beta_i = \{y_i^1, \dots, y_i^{k_i}\}$ uma base para o espaço Z_i (observe que $k_i \leq k$). Dada $A \in L(X_1, \dots, X_n; \mathbb{K})$ defina B como sendo a restrição de A ao subespaço $Z_1 \times \dots \times Z_n$. Dado $(x_1, \dots, x_n) \in Z_1 \times \dots \times Z_n$ podemos escrever, de forma única, $x_i = \sum_{j=1}^{k_i} \lambda_i^{j_i} y_i^{j_i}$ para $i = 1, \dots, n-1$. Dessa forma,

$$\begin{aligned} B(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) &= B \left(\sum_{j_1=1}^{k_1} \lambda_1^{j_1} y_1^{j_1}, \sum_{j_2=1}^{k_2} \lambda_2^{j_2} y_2^{j_2}, \dots, \sum_{j_{n-1}=1}^{k_{n-1}} \lambda_{n-1}^{j_{n-1}} y_{n-1}^{j_{n-1}}, x_n \right) \\ &= \sum_{j_1=1}^{k_1} \sum_{j_2=1}^{k_2} \dots \sum_{j_{n-1}=1}^{k_{n-1}} \lambda_1^{j_1} \lambda_2^{j_2} \cdots \lambda_{n-1}^{j_{n-1}} B(y_1^{j_1}, y_2^{j_2}, \dots, y_{n-1}^{j_{n-1}}, x_n). \end{aligned}$$

Para $j_1 = 1, \dots, k_1, \dots, j_{n-1} = 1, \dots, k_{n-1}$, considere os funcionais lineares definidos por

$$\begin{aligned} \theta_n^{j_1, \dots, j_{n-1}}: Z_n &\longrightarrow \mathbb{K} \\ x_n &\longmapsto \theta_n^{j_1, \dots, j_{n-1}}(x_n) = B(y_1^{j_1}, y_2^{j_2}, \dots, y_{n-1}^{j_{n-1}}, x_n), \end{aligned}$$

e para $i = 1, \dots, n-1$ e $l_i = 1, \dots, k_i$, os funcionais lineares definidos por

$$\begin{aligned} \theta_i^{l_i}: Z_i &\longrightarrow \mathbb{K} \\ x_i &\longmapsto \theta_i^{l_i}(x_i) = \theta_i^{l_i} \left(\sum_{j_i=1}^{k_i} \lambda_i^{j_i} y_i^{j_i} \right) = \lambda_i^{l_i}. \end{aligned}$$

Segue então que

$$B(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) = \sum_{j_1=1}^{k_1} \sum_{j_2=1}^{k_2} \dots \sum_{j_{n-1}=1}^{k_{n-1}} \theta_1^{j_1}(x_1) \theta_2^{j_2}(x_2) \dots \theta_{n-1}^{j_{n-1}}(x_{n-1}) \theta_n^{j_1, \dots, j_{n-1}}(x_n).$$

Renomeando os funcionais deste último somatório obtemos uma representação para B da forma:

$$B(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) = \sum_{l=1}^m \Psi_1^l(x_1) \dots \Psi_n^l(x_n),$$

onde $m = k_1 k_2 \dots k_{n-1}$ e $\Psi_i^l \in Z_i^*$ para $i = 1, \dots, n$ e $l = 1, \dots, m$. Seja $i \in \{1, \dots, n-1\}$. Como o conjunto $\beta_i = \{y_i^1, \dots, y_i^{k_i}\}$ é linearmente independente, podemos tomar uma base para X_i que contém β_i . Chamando $Z_i^\perp$ o subespaço gerado pelos vetores desta base que não estão em β_i , podemos estender os funcionais Ψ_i^l para X_i da seguinte forma: para $i = 1, \dots, n-1$ e $l = 1, \dots, m$, como $X_i = Z_i \oplus Z_i^\perp$; se $z_i = z'_i + z''_i \in X_i$ com $z'_i \in Z_i$ e $z''_i \in Z_i^\perp$, definimos $\widetilde{\Psi}_i^l(z_i) = \Psi_i^l(z'_i)$. Obtemos então $\widetilde{\Psi}_i^l \in X_i^*$ extensão de Ψ_i^l para $i = 1, \dots, n-1$ e $l = 1, \dots, m$. Os funcionais Ψ_n^l podem ser estendidos a funcionais $\widetilde{\Psi}_n^l \in X_n^*$ da mesma forma, bastando para isso fixar uma base de Z_n . Como A e B coincidem em $Z_1 \times \dots \times Z_n$,

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=1}^k x_1^j \otimes \dots \otimes x_n^j \right) (A) &= \sum_{j=1}^k A(x_1^j, \dots, x_n^j) = \sum_{j=1}^k B(x_1^j, \dots, x_n^j) \\ &= \sum_{j=1}^k \sum_{l=1}^m \Psi_1^l(x_1^j) \dots \Psi_n^l(x_n^j) = \sum_{j=1}^k \sum_{l=1}^m \widetilde{\Psi}_1^l(x_1^j) \dots \widetilde{\Psi}_n^l(x_n^j) \\ &= \sum_{l=1}^m \sum_{j=1}^k \widetilde{\Psi}_1^l(x_1^j) \dots \widetilde{\Psi}_n^l(x_n^j) = \sum_{l=1}^m 0 = 0. \end{aligned}$$

Assim, $\left(\sum_{j=1}^k x_1^j \otimes \dots \otimes x_n^j \right) (A) = 0$ para toda aplicação $A \in L(X_1, \dots, X_n; \mathbb{K})$, ou seja, $\sum_{j=1}^k x_1^j \otimes \dots \otimes x_n^j = 0$. $\square$

Observação 1.15 Sejam $Y_1, \dots, Y_n$ subespaços dos espaços vetoriais $X_1, \dots, X_n$, respectivamente. Afirmamos que $Y_1 \otimes \dots \otimes Y_n$ é um subespaço do produto tensorial $X_1 \otimes \dots \otimes X_n$. Com efeito, como os Y_i são subespaços dos espaços vetoriais X_i , $i = 1, \dots, n$, temos que $0 \in Y_i$ para todo $i = 1, \dots, n$, e portanto $0 = \sum_{j=1}^k 0 \otimes \dots \otimes 0 \in Y_1 \otimes \dots \otimes Y_n$. Além disso, dados $y = \sum_{j=1}^k y_1^j \otimes \dots \otimes y_n^j$ e $w = \sum_{j=1}^m w_1^j \otimes \dots \otimes w_n^j$ em $Y_1 \otimes \dots \otimes Y_n$ considere

$$\begin{cases} x_1^j = y_1^j, \dots, x_n^j = y_n^j, & 1 \leq j \leq k, \\ x_1^j = w_1^{j-k}, \dots, x_n^j = w_n^{j-k}, & k+1 \leq j \leq k+m. \end{cases}$$

Desta forma, $y + w = \sum_{j=1}^{k+m} x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j \in Y_1 \otimes \cdots \otimes Y_n$. Por fim, dados $\lambda \in \mathbb{K}$ e $y = \sum_{j=1}^k y_1^j \otimes \cdots \otimes y_n^j \in Y_1 \otimes \cdots \otimes Y_n$, segue da Proposição 1.6 e do fato de que Y_1 é subespaço de X_1 que $\lambda y = \sum_{j=1}^k (\lambda y_1^j) \otimes \cdots \otimes y_n^j \in Y_1 \otimes \cdots \otimes Y_n$.

Antes de abordar o produto tensorial de operadores lineares, vamos usar o Teorema 1.10 e o Lema 1.14 para provar mais uma propriedade interessante dos produtos tensoriais, a saber, a comutatividade. Considere uma permutação $\eta: \{1, \dots, n\} \longrightarrow \{1, \dots, n\}$. Para cada tensor elementar $x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \in X_1 \otimes \cdots \otimes X_n$, é óbvio que $x_{\eta(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\eta(n)} \in X_{\eta(1)} \otimes \cdots \otimes X_{\eta(n)}$. Portanto para cada

$$x = \sum_{j=1}^k x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j \in X_1 \otimes \cdots \otimes X_n,$$

denotaremos

$$x^\eta = \sum_{j=1}^k x_{\eta(1)}^j \otimes \cdots \otimes x_{\eta(n)}^j \in X_{\eta(1)} \otimes \cdots \otimes X_{\eta(n)}.$$

Proposição 1.16 *Fixada uma permutação $\eta: \{1, \dots, n\} \longrightarrow \{1, \dots, n\}$, existe um isomorfismo entre os espaços vetoriais $X_1 \otimes \cdots \otimes X_n$ e $X_{\eta(1)} \otimes \cdots \otimes X_{\eta(n)}$ que ao tensor $\sum_{j=1}^k x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j$ pertencente a $X_1 \otimes \cdots \otimes X_n$ corresponde o tensor $\sum_{j=1}^k x_{\eta(1)}^j \otimes \cdots \otimes x_{\eta(n)}^j$ pertencente a $X_{\eta(1)} \otimes \cdots \otimes X_{\eta(n)}$.*

Demonstração: Fixada uma permutação $\eta: \{1, \dots, n\} \longrightarrow \{1, \dots, n\}$, considere a aplicação

$$\begin{aligned} A: X_1 \times \cdots \times X_n &\longrightarrow X_{\eta(1)} \otimes \cdots \otimes X_{\eta(n)} \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto A(x_1, \dots, x_n) = x_{\eta(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\eta(n)}. \end{aligned}$$

A Proposição 1.6, mais uma vez, garante que A é n -linear. Pelo Teorema 1.10 existe um único operador linear $A_L \in L(X_1 \otimes \cdots \otimes X_n; X_{\eta(1)} \otimes \cdots \otimes X_{\eta(n)})$ tal que $A = A_L \circ \sigma_n$. Dado $\sum_{j=1}^k x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j \in X_1 \otimes \cdots \otimes X_n$,

$$\begin{aligned} A_L \left(\sum_{j=1}^k x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j \right) &= \sum_{j=1}^k A(x_1^j, \dots, x_n^j) \\ &= \sum_{j=1}^k x_{\eta(1)}^j \otimes \cdots \otimes x_{\eta(n)}^j. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Verifiquemos que o operador linear A_L é injetor. Suponha que

$$\sum_{j=1}^k x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j \in \ker A_L, \text{ ou seja, } A_L \left(\sum_{j=1}^k x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j \right) = 0.$$

Por (1.4) segue que $\sum_{j=1}^k x_{\eta(1)}^j \otimes \cdots \otimes x_{\eta(n)}^j = 0$. Aplicando o Lema 1.14 temos que

$$\sum_{j=1}^k \varphi_{\eta(1)}(x_{\eta(1)}^j) \cdots \varphi_{\eta(n)}(x_{\eta(n)}^j) = 0,$$

para todos funcionais lineares $\varphi_{\eta(i)} \in X_{\eta(i)}^*$, $i = 1, \dots, n$. Reordenando os termos deste último somatório obtemos

$$\sum_{j=1}^k \varphi_1(x_1^j) \cdots \varphi_n(x_n^j) = 0,$$

para todos funcionais lineares $\varphi_i \in X_i^*$, $i = 1, \dots, n$. Aplicando novamente o Lema 1.14 obtemos $\sum_{j=1}^k x_1^j \otimes \dots \otimes x_n^j = 0$. Assim $\ker A_L = \{0\}$, e portanto A_L é injetor. Por fim, mostremos que A_L é sobrejetor. Dado $z = \sum_{j=1}^k x_{\eta(1)}^j \otimes \dots \otimes x_{\eta(n)}^j \in X_{\eta(1)} \otimes \dots \otimes X_{\eta(n)}$, tome $x = \sum_{j=1}^k x_1^j \otimes \dots \otimes x_n^j$ para obter

$$A_L(x) = A_L \left(\sum_{j=1}^k x_1^j \otimes \dots \otimes x_n^j \right) = \sum_{j=1}^k x_{\eta(1)}^j \otimes \dots \otimes x_{\eta(n)}^j = z.$$

Logo A_L é sobrejetor e conseqüentemente A_L é um isomorfismo com as propriedades desejadas. $\square$

Agora sim responderemos às perguntas sobre o produto tensorial de operadores lineares formuladas no início desta seção:

Proposição 1.17 *Dados os operadores lineares $u_1: X_1 \longrightarrow Y_1, \dots, u_n: X_n \longrightarrow Y_n$, existe um único operador linear $u_1 \otimes \dots \otimes u_n: X_1 \otimes \dots \otimes X_n \longrightarrow Y_1 \otimes \dots \otimes Y_n$ tal que*

$$(u_1 \otimes \dots \otimes u_n)(x_1 \otimes \dots \otimes x_n) = u_1(x_1) \otimes \dots \otimes u_n(x_n),$$

para todos $x_1 \in X_1, \dots, x_n \in X_n$. Mais ainda,

$u_1 \otimes \dots \otimes u_n$ é injetor se, e somente se, $u_1, \dots, u_n$ são injetores e $u_1 \otimes \dots \otimes u_n$ é sobrejetor se, e somente se, $u_1, \dots, u_n$ são sobrejetores.

Demonstração: Defina

$$\begin{aligned} A: X_1 \times \dots \times X_n &\longrightarrow Y_1 \otimes \dots \otimes Y_n \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto u_1(x_1) \otimes \dots \otimes u_n(x_n). \end{aligned}$$

Da linearidade dos operadores $u_1, \dots, u_n$ e da Proposição 1.6 segue imediatamente que A é n -linear. Pelo Teorema 1.10 existe um único operador $A_L \in L(X_1 \otimes \dots \otimes X_n; Y_1 \otimes \dots \otimes Y_n)$ tal que $A = A_L \circ \sigma_n$. Portanto

$$\begin{aligned} A_L \left(\sum_{j=1}^k x_1^j \otimes \dots \otimes x_n^j \right) &= \sum_{j=1}^k A(x_1^j, \dots, x_n^j) \\ &= \sum_{j=1}^k u_1(x_1^j) \otimes \dots \otimes u_n(x_n^j), \end{aligned}$$

para todos $x_i^j \in X_i$, $i = 1, \dots, n$, e $j = 1, \dots, k$. Tomando $u_1 \otimes \dots \otimes u_n = A_L$ temos que $u_1 \otimes \dots \otimes u_n$ é linear e

$$(u_1 \otimes \dots \otimes u_n) \left(\sum_{j=1}^k x_1^j \otimes \dots \otimes x_n^j \right) = \sum_{j=1}^k u_1(x_1^j) \otimes \dots \otimes u_n(x_n^j).$$

Para provar a unicidade deste operador linear, suponha $u \in L(X_1 \otimes \dots \otimes X_n; Y_1 \otimes \dots \otimes Y_n)$ tal que

$$u(x_1 \otimes \dots \otimes x_n) = u_1(x_1) \otimes \dots \otimes u_n(x_n)$$

para todos $x_1 \in X_1, \dots, x_n \in X_n$. Então u e A_L coincidem nos tensores elementares; mas como ambos são lineares, segue que $u = A_L = u_1 \otimes \dots \otimes u_n$.

Suponha $u_1 \otimes \dots \otimes u_n$ injetor, seja $i \in \{1, \dots, n\}$ e verifiquemos que u_i é injetor. Seja $x_i \in X_i$ tal que $u_i(x_i) = 0$. Escolha vetores não-nulos $x_j \in X_j$, $j = 1, \dots, n$ e $j \neq i$. Então

$$\begin{aligned} (u_1 \otimes \dots \otimes u_i \otimes \dots \otimes u_n)(x_1 \otimes \dots \otimes x_i \otimes \dots \otimes x_n) &= u_1(x_1) \otimes \dots \otimes u_i(x_i) \otimes \dots \otimes u_n(x_n) \\ &= u_1(x_1) \otimes \dots \otimes 0 \otimes \dots \otimes u_n(x_n) = 0. \end{aligned}$$

Como $u_1 \otimes \cdots \otimes u_n$ é injetor segue que $x_1 \otimes \cdots \otimes x_i \otimes \cdots \otimes x_n = 0$, e pelo Lema 1.14 temos

$$\varphi_1(x_1) \cdots \varphi_i(x_i) \cdots \varphi_n(x_n) = 0$$

para todos funcionais $\varphi_k \in X_k^*$, $k = 1, \dots, n$. Como os vetores $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$ são não-nulos, existem funcionais lineares $\Psi_j \in X_j^*$, $j = 1, \dots, n$ e $j \neq i$, tais que $\Psi_j(x_j) \neq 0$. Assim,

$$\Psi_1(x_1) \cdots \Psi_{i-1}(x_{i-1}) \varphi_i(x_i) \Psi_{i+1}(x_{i+1}) \cdots \Psi_n(x_n) = 0,$$

para todo $\varphi_i \in X_i^*$. Mas $\Psi_j(x_j) \neq 0$ para $j = 1, \dots, n$ e $j \neq i$, logo $\varphi_i(x_i) = 0$ para todo $\varphi_i \in X_i^*$. Segue que $x_i = 0$ e portanto u_i é injetor.

Reciprocamente, suponha que $u_1, \dots, u_n$ são injetores. Tomando

$$\sum_{j=1}^k x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j \in \ker(u_1 \otimes \cdots \otimes u_n)$$

temos que $(u_1 \otimes \cdots \otimes u_n) \left(\sum_{j=1}^k x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j \right) = 0$, ou seja, $\sum_{j=1}^k u_1(x_1^j) \otimes \cdots \otimes u_n(x_n^j) = 0$. Dados $\Psi_i \in Y_i^*$, $i = 2, \dots, n$, pelo Lema 1.14 sabemos que

$$\Psi_1 \left(\sum_{j=1}^k u_1(x_1^j) \Psi_2(u_2(x_2^j)) \cdots \Psi_n(u_n(x_n^j)) \right) = \sum_{j=1}^k \Psi_1(u_1(x_1^j)) \Psi_2(u_2(x_2^j)) \cdots \Psi_n(u_n(x_n^j)) = 0$$

para todo $\Psi_1 \in Y_1^*$. Disso e da linearidade de u_1 concluímos que

$$u_1 \left(\sum_{j=1}^k x_1^j \Psi_2(u_2(x_2^j)) \cdots \Psi_n(u_n(x_n^j)) \right) = \sum_{j=1}^k u_1(x_1^j) \Psi_2(u_2(x_2^j)) \cdots \Psi_n(u_n(x_n^j)) = 0$$

para todos $\Psi_i \in Y_i^*$, $i = 2, \dots, n$. Da injetividade de u_1 decorre que

$$\sum_{j=1}^k x_1^j \Psi_2(u_2(x_2^j)) \cdots \Psi_n(u_n(x_n^j)) = 0$$

para todos $\Psi_i \in Y_i^*$, $i = 2, \dots, n$. Então, para todo $\varphi_1 \in X_1^*$,

$$\sum_{j=1}^k \varphi_1(x_1^j) \Psi_2(u_2(x_2^j)) \cdots \Psi_n(u_n(x_n^j)) = 0.$$

Dados $\Psi_i \in Y_i^*$, $i = 3, \dots, n$, da linha acima decorre que

$$\Psi_2 \left[\sum_{j=1}^k \varphi_1(x_1^j) u_2(x_2^j) \Psi_3(u_3(x_3^j)) \cdots \Psi_n(u_n(x_n^j)) \right] = 0$$

para todo funcional $\Psi_2 \in Y_2^*$, e portanto

$$\sum_{j=1}^k \varphi_1(x_1^j) u_2(x_2^j) \Psi_3(u_3(x_3^j)) \cdots \Psi_n(u_n(x_n^j)) = 0$$

para todos $\Psi_i \in Y_i^*$, $i = 3, \dots, n$. Da linearidade e da injetividade de u_2 obtemos

$$\sum_{j=1}^k \varphi_1(x_1^j) x_2^j \Psi_3(u_3(x_3^j)) \cdots \Psi_n(u_n(x_n^j)) = 0.$$

Como antes, para todo funcional $\varphi_2 \in X_2^*$ vale que

$$\sum_{j=1}^k \varphi_1(x_1^j) \varphi_2(x_2^j) \Psi_3(u_3(x_3^j)) \cdots \Psi_n(u_n(x_n^j)) = 0.$$

Continuando com este raciocínio, após um número finito de passos obtemos que

$$\sum_{j=1}^k \varphi_1(x_1^j) \varphi_2(x_2^j) \cdots \varphi_n(x_n^j) = 0$$

para todos $\varphi_i \in X_i^*$, $i = 1, \dots, n$. Pelo Lema 1.14 concluímos que $\sum_{j=1}^k x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j = 0$, o que implica que $u_1 \otimes \cdots \otimes u_n$ é injetor.

Por último mostremos que $u_1 \otimes \cdots \otimes u_n$ é sobrejetor se, e somente se, $u_1, \dots, u_n$ são sobrejetores. Suponha $u_1 \otimes \cdots \otimes u_n$ sobrejetor, seja $i \in \{1, \dots, n\}$ e provemos que u_i é sobrejetor. Dado $y_i \in Y_i$, para $j = 1, \dots, n$, $j \neq i$, escolha $y_j \in Y_j$ não-nulos. Como

$$y_1 \otimes \cdots \otimes y_i \otimes \cdots \otimes y_n \in Y_1 \otimes \cdots \otimes Y_i \otimes \cdots \otimes Y_n,$$

da sobrejetividade de $u_1 \otimes \cdots \otimes u_n$ existe $\sum_{j=1}^k x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j \in X_1 \otimes \cdots \otimes X_n$ tal que

$$\begin{aligned} y_1 \otimes \cdots \otimes y_i \otimes \cdots \otimes y_n &= (u_1 \otimes \cdots \otimes u_n) \left(\sum_{j=1}^k x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j \right) \\ &= \sum_{j=1}^k u_1(x_1^j) \otimes \cdots \otimes u_i(x_i^j) \otimes \cdots \otimes u_n(x_n^j). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Para $j = 1, \dots, n$, $j \neq i$, podemos considerar funcionais lineares $\varphi_j \in Y_j^*$ tais que $\varphi_j(y_j) = 1$. Pelo Lema 1.14 e por (1.5) temos que, para todo $\Psi_i \in Y_i^*$,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k \varphi_1(u_1(x_1^j)) \cdots \Psi_i(u_i(x_i^j)) \cdots \varphi_n(u_n(x_n^j)) &= \varphi_1(y_1) \cdots \varphi_{i-1}(y_{i-1}) \Psi_i(y_i) \varphi_{i+1}(y_{i+1}) \cdots \varphi_n(y_n) \\ &= 1 \cdots 1 \cdot \Psi_i(y_i) \cdot 1 \cdots 1 \\ &= \Psi_i(y_i). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k \varphi_1(u_1(x_1^j)) \cdots \Psi_i(u_i(x_i^j)) \cdots \varphi_n(u_n(x_n^j)) &= \Psi_i \left[\sum_{j=1}^k \varphi_1(u_1(x_1^j)) \cdots u_i(x_i^j) \cdots \varphi_n(u_n(x_n^j)) \right] \\ &= \Psi_i \left[u_i \left(\sum_{j=1}^k \varphi_1(u_1(x_1^j)) \cdots x_i^j \cdots \varphi_n(u_n(x_n^j)) \right) \right]. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Das equações (1.6) e (1.7) segue que

$$\Psi_i \left[u_i \left(\sum_{j=1}^k \varphi_1(u_1(x_1^j)) \cdots x_i^j \cdots \varphi_n(u_n(x_n^j)) \right) \right] = \Psi_i(y_i),$$

para todo $\Psi_i \in Y_i^*$, e portanto

$$y_i = u_i \left(\sum_{j=1}^k \varphi_1(u_1(x_1^j)) \cdots x_i^j \cdots \varphi_n(u_n(x_n^j)) \right).$$

Provamos então que u_i é sobrejetor.

Reciprocamente, suponhamos $u_1, \dots, u_n$ sobrejetores. Seja $\sum_{j=1}^m y_1^j \otimes \dots \otimes y_n^j \in Y_1 \otimes \dots \otimes Y_n$. Como cada u_i é sobrejetor, existem $x_i^j \in X_i$, $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, m$, tais que $u_i(x_i^j) = y_i^j$. Então

$$\sum_{j=1}^m y_1^j \otimes \dots \otimes y_n^j = \sum_{j=1}^m u_1(x_1^j) \otimes \dots \otimes u_n(x_n^j) = (u_1 \otimes \dots \otimes u_n) \left(\sum_{j=1}^m x_1^j \otimes \dots \otimes x_n^j \right),$$

com $\sum_{j=1}^m x_1^j \otimes \dots \otimes x_n^j \in X_1 \otimes \dots \otimes X_n$, provando que $u_1 \otimes \dots \otimes u_n$ é sobrejetor. $\square$

Capítulo 2

Aplicações multilineares contínuas

No capítulo anterior estudamos as aplicações multilineares entre espaços vetoriais do ponto de vista algébrico. Quando os espaços envolvidos são espaços normados, faz sentido - e é necessário - distinguir, dentre todas as aplicações multilineares, aquelas que são contínuas. Em seguida, de forma natural, estuda-se o espaço de todas as aplicações multilineares contínuas. Este é o objetivo deste capítulo, estudar as aplicações multilineares contínuas entre espaços vetoriais normados e os respectivos espaços formados por essas aplicações multilineares contínuas.

2.1 Normas no produto cartesiano

Do capítulo anterior sabemos que aplicações multilineares são definidas em produtos cartesianos de espaços vetoriais. Então, para o estudo da continuidade das aplicações multilineares precisamos, em primeiro lugar, deixar claro qual é a topologia (norma) considerada no produto cartesiano. O objetivo desta seção é mostrar que podemos usar, de forma equivalente, qualquer uma das normas usuais do produto cartesiano.

Definição 2.1 Seja E um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Uma *norma* sobre E é uma aplicação

$$\begin{aligned} \|\cdot\|: E &\longrightarrow [0, \infty) \\ x &\longmapsto \|x\| \end{aligned}$$

que satisfaz as seguintes propriedades:

N1) $\|x\| \geq 0$ para todo $x \in E$ e $\|x\| = 0$ se, e somente se, $x = 0$;

N2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ e para todo $x \in E$;

N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para quaisquer $x, y \in E$.

Neste caso o par $(E, \|\cdot\|)$ é chamado de *espaço vetorial normado*, ou simplesmente *espaço normado*. Um espaço normado que é completo na métrica definida por $d(x, y) = \|x - y\|$ é chamado de *espaço de Banach*.

Denotaremos a bola unitária fechada de E por B_E , isto é, $B_E = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$.

Definição 2.2 Sejam $E_1, \dots, E_n$ espaços vetoriais normados sobre $\mathbb{K}$. Para $(x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \dots \times E_n$, definimos

$$\begin{aligned} \|(x_1, \dots, x_n)\|_1 &= \|x_1\| + \dots + \|x_n\|; \\ \|(x_1, \dots, x_n)\|_2 &= (\|x_1\|^2 + \dots + \|x_n\|^2)^{1/2}; \\ \|(x_1, \dots, x_n)\|_\infty &= \max\{\|x_1\|, \dots, \|x_n\|\}. \end{aligned}$$

Proposição 2.3 As aplicações $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ e $\|\cdot\|_\infty$ são normas em $E_1 \times \dots \times E_n$.

Demonstração: Os axiomas N1 e N2 são imediatos. Nos concentraremos nas demonstrações do axioma N3 (desigualdade triangular). Sejam $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in E_1 \times \dots \times E_n$. Para a aplicação $\|\cdot\|_1$,

$$\begin{aligned} \|(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n)\|_1 &= \|(x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)\|_1 = \|x_1 + y_1\| + \dots + \|x_n + y_n\| \\ &\leq \|x_1\| + \|y_1\| + \dots + \|x_n\| + \|y_n\| \\ &= \|x_1\| + \dots + \|x_n\| + \|y_1\| + \dots + \|y_n\| \\ &= \|(x_1, \dots, x_n)\|_1 + \|(y_1, \dots, y_n)\|_1. \end{aligned}$$

Para a aplicação $\|\cdot\|_2$, chamemos $z_1 = (\|x_1\|, \dots, \|x_n\|) \in \mathbb{R}^n$ e $z_2 = (\|y_1\|, \dots, \|y_n\|) \in \mathbb{R}^n$. Usando o fato de que $\|\cdot\|_2$ é uma norma em $\mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} \|(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n)\|_2 &= \|(x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)\|_2 \\ &= (\|x_1 + y_1\|^2 + \dots + \|x_n + y_n\|^2)^{1/2} \\ &\leq ((\|x_1\| + \|y_1\|)^2 + \dots + (\|x_n\| + \|y_n\|)^2)^{1/2} \\ &= \|z_1 + z_2\|_2 \leq \|z_1\|_2 + \|z_2\|_2 \\ &= (\|x_1\|^2 + \dots + \|x_n\|^2)^{1/2} + (\|y_1\|^2 + \dots + \|y_n\|^2)^{1/2} \\ &= \|(x_1, \dots, x_n)\|_2 + \|(y_1, \dots, y_n)\|_2. \end{aligned}$$

Por último, para a aplicação $\|\cdot\|_\infty$, escolhendo $j \in \{1, \dots, n\}$ tal que

$$\max \{\|x_1 + y_1\|, \dots, \|x_n + y_n\|\} = \|x_j + y_j\|,$$

segue que

$$\begin{aligned} \|(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n)\|_\infty &= \|(x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)\|_\infty \\ &= \max \{\|x_1 + y_1\|, \dots, \|x_n + y_n\|\} \\ &= \|x_j + y_j\| \leq \|x_j\| + \|y_j\| \\ &\leq \max \{\|x_1\| + \|y_1\|, \dots, \|x_n\| + \|y_n\|\} \\ &\leq \max \{\|x_1\|, \dots, \|x_n\|\} + \max \{\|y_1\|, \dots, \|y_n\|\} \\ &= \|(x_1, \dots, x_n)\|_\infty + \|(y_1, \dots, y_n)\|_\infty. \end{aligned}$$

□

Definição 2.4 Seja E um espaço vetorial. Duas normas em E são *equivalentes* se definem a mesma topologia em E .

Proposição 2.5 [9, Capítulo 2, Proposição 9] *Seja E um espaço vetorial. Duas normas $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|'$ em E são equivalentes se, e somente se, existem constantes $c_1, c_2 > 0$ tais que*

$$c_1\|x\| \leq \|x\|' \leq c_2\|x\| \text{ para todo } x \in E.$$

Proposição 2.6 *Sejam $E_1, \dots, E_n$ espaços vetoriais normados.*

(a) *As normas $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ e $\|\cdot\|_\infty$ são equivalentes em $E_1 \times \dots \times E_n$.*

(b) *Se $E_1, \dots, E_n$ são espaços de Banach, então $E_1 \times \dots \times E_n$ é um espaço de Banach com qualquer uma dessas três normas.*

Demonstração: (a) Observe que, dado $(x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \dots \times E_n$,

$$\begin{aligned} \|(x_1, \dots, x_n)\|_1 &= \|x_1\| + \dots + \|x_n\| \\ &\leq \|(x_1, \dots, x_n)\|_\infty + \dots + \|(x_1, \dots, x_n)\|_\infty \\ &= n \|(x_1, \dots, x_n)\|_\infty. \end{aligned}$$

Seja $j \in \{1, \dots, n\}$ tal que $\max \{\|x_1\|, \dots, \|x_n\|\} = \|x_j\|$. Podemos então escrever

$$\begin{aligned} \|(x_1, \dots, x_n)\|_\infty &= \max \{\|x_1\|, \dots, \|x_n\|\} = \|x_j\| = \sqrt{\|x_j\|^2} \\ &\leq \sqrt{\|x_1\|^2 + \dots + \|x_n\|^2} = \|(x_1, \dots, x_n)\|_2. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\|(x_1, \dots, x_n)\|_2^2 = \|x_1\|^2 + \dots + \|x_n\|^2 \leq (\|x_1\| + \dots + \|x_n\|)^2 = \|(x_1, \dots, x_n)\|_1^2.$$

Portanto $\|(x_1, \dots, x_n)\|_2 \leq \|(x_1, \dots, x_n)\|_1$. Diante destas observações, tem-se

$$\|(x_1, \dots, x_n)\|_\infty \leq \|(x_1, \dots, x_n)\|_2 \leq \|(x_1, \dots, x_n)\|_1 \leq n \|(x_1, \dots, x_n)\|_\infty.$$

Aplicando a Proposição 2.5 obtemos que $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ e $\|\cdot\|_\infty$ são normas equivalentes.

(b) Consideremos $E_1 \times \dots \times E_n$ munido com a norma do máximo. Sejam $\varepsilon > 0$ e (x_k) uma sequência de Cauchy em $E_1 \times \dots \times E_n$. Digamos $x_k = (x_{k1}, \dots, x_{kn})$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Existe então $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_k - x_s\|_\infty < \varepsilon$ sempre que $k, s > k_0$. Logo

$$\begin{aligned} \|x_k - x_s\|_\infty &= \|(x_{k1}, \dots, x_{kn}) - (x_{s1}, \dots, x_{sn})\|_\infty \\ &= \max \{\|x_{k1} - x_{s1}\|, \dots, \|x_{kn} - x_{sn}\|\} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto $\|x_{ki} - x_{si}\| < \varepsilon$ para todos $i = 1, \dots, n$ e $k, s > k_0$, ou seja, $(x_{ki})_{k \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy em E_i , para todo $i = 1, \dots, n$. Como os espaços $E_1, \dots, E_n$ são Banach, segue que existem $a_1 \in E_1, \dots, a_n \in E_n$ tais que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{ki} = a_i,$$

$i = 1, \dots, n$. Podemos tomar números naturais $k_1, \dots, k_n$ tais que $k > k_i$ implica $\|x_{ki} - a_i\| < \varepsilon$. Sejam $a = (a_1, \dots, a_n)$ e $k' = \max \{k_1, \dots, k_n\}$. Para $k > k'$,

$$\|x_k - a\| = \max \{\|x_{k1} - a_1\|, \dots, \|x_{kn} - a_n\|\} < \varepsilon.$$

Portanto

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a,$$

com $a = (a_1, \dots, a_n) \in E_1 \times \dots \times E_n$. Logo $E_1 \times \dots \times E_n$ é um espaço de Banach com a norma do máximo. Como $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ e $\|\cdot\|_\infty$ são normas equivalentes, segue que $E_1 \times \dots \times E_n$ é um espaço de Banach com qualquer uma dessas normas. $\square$

2.2 Caracterizações das aplicações multilineares contínuas

Dados espaços normados $E_1, \dots, E_n, F$, considerando em $E_1 \times \dots \times E_n$ qualquer uma das normas equivalentes da seção anterior, podemos considerar as aplicações n -lineares de $E_1 \times \dots \times E_n$ em F que são contínuas.

Proposição 2.7 *Sejam $E_1, \dots, E_n$ e F espaços vetoriais normados. Para cada aplicação $A \in L(E_1, \dots, E_n; F)$, as afirmativas seguintes são equivalentes:*

- (a) *A é contínua.*
- (b) *A é contínua na origem.*
- (c) *Existe uma constante $c \geq 0$ tal que $\|A(x_1, \dots, x_n)\| \leq c \|x_1\| \cdots \|x_n\|$ para quaisquer $x_j \in E_j$, $j = 1, \dots, n$.*
- (d) *$\|A\| := \sup \{\|A(x_1, \dots, x_n)\| : x_j \in E_j \text{ e } \|x_j\| \leq 1 \text{ para todo } j = 1, \dots, n\} < \infty$.*

Demonstração: É claro que (a) $\implies$ (b) e (c) $\implies$ (d).

(b) $\implies$ (c) Tome $\varepsilon = 1$. Como A é contínua na origem, existe $\delta > 0$ tal que se $\|x_j\| < \delta$, $j = 1, \dots, n$, então $\|A(x_1, \dots, x_n)\| < 1$ (basta considerar a norma do máximo no domínio). Dados vetores não-nulos $x_1 \in E_1, \dots, x_n \in E_n$ (o caso em que um desses vetores é nulo é trivial), os vetores $\frac{\delta x_j}{2\|x_j\|}$, $j = 1, \dots, n$, têm normas menores que δ . Logo

$$\left\| A \left(\frac{\delta x_1}{2\|x_1\|}, \dots, \frac{\delta x_n}{2\|x_n\|} \right) \right\| < 1,$$

e portanto

$$\|A(x_1, \dots, x_n)\| \leq \frac{2^n}{\delta^n} \|x_1\| \cdots \|x_n\|,$$

para quaisquer $x_j \in E_j$, $j = 1, \dots, n$. Agora, basta tomar $c = \frac{2^n}{\delta^n} > 0$.

(d) $\implies$ (a) Queremos mostrar que dados $a = (a_1, \dots, a_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$ e $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $x = (x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$ é tal que $\|(x_1, \dots, x_n) - (a_1, \dots, a_n)\| < \delta$, então $\|A(x_1, \dots, x_n) - A(a_1, \dots, a_n)\| < \varepsilon$. Observemos os seguintes casos:

1) $\|A\| = 0$. Nesse caso temos que $\|A(x_1, \dots, x_n)\| = 0$ para quaisquer $x_j \in E_j$, $j = 1, \dots, n$, ou seja, $A(x_1, \dots, x_n) = 0$, para todos $x_j \in E_j$, $j = 1, \dots, n$. Dados $x_1 \in E_1, \dots, x_n \in E_n$, todos não-nulos,

$$A(x_1, \dots, x_n) = A \left(\frac{\|x_1\| x_1}{\|x_1\|}, \dots, \frac{\|x_n\| x_n}{\|x_n\|} \right) = \|x_1\| \cdots \|x_n\| A \left(\frac{x_1}{\|x_1\|}, \dots, \frac{x_n}{\|x_n\|} \right) = 0,$$

e portanto A é a aplicação constante igual a zero. É claro que o mesmo vale se $x_j = 0$ para algum $j \in \{1, \dots, n\}$. Logo A é contínua.

2) $\|A\| \neq 0$. Seja $a = (a_1, \dots, a_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$. Se $\|a\|_\infty = 0$, tem-se $a = (0, \dots, 0)$. O caso em que $x_j = 0$ para algum $j \in \{1, \dots, n\}$ é trivial. Dado $\varepsilon > 0$ tome $0 < \delta < \left(\frac{\varepsilon}{\|A\|} \right)^{1/n}$. Dessa forma, se $x_1 \in E_1, \dots, x_n \in E_n$ são vetores não-nulos com $\|x\|_\infty < \delta$ então

$$\begin{aligned} \|A(x_1, \dots, x_n) - A(a_1, \dots, a_n)\| &= \|A(x_1, \dots, x_n) - A(0, \dots, 0)\| \\ &= \|A(x_1, \dots, x_n)\| = \|x_1\| \cdots \|x_n\| \left\| A \left(\frac{x_1}{\|x_1\|}, \dots, \frac{x_n}{\|x_n\|} \right) \right\| \\ &\leq \|x\|_\infty^n \|A\| < \delta^n \|A\| < \frac{\varepsilon}{\|A\|} \|A\| = \varepsilon, \end{aligned}$$

conforme queríamos. Se $\|a\|_\infty \neq 0$, dado $\varepsilon > 0$ chame

$$k = \max_{1 \leq j \leq n} \left\{ \|a\|_\infty^{j-1} \right\} \cdot \max_{1 \leq j \leq n} \left\{ (1 + \|a\|_\infty)^{n-j} \right\} > 0,$$

e tome $0 < \delta < \min \left\{ 1, \frac{\varepsilon}{\|A\|^k} \right\}$. Se $\|x - a\|_1 < \delta$, então

$$\|x - a\|_\infty \leq \|x - a\|_1 < \delta < 1$$

e

$$\|x\|_\infty = \|x - a + a\|_\infty \leq \|x - a\|_\infty + \|a\|_\infty < 1 + \|a\|_\infty.$$

Nesse caso,

$$\begin{aligned}
A(x_1, \dots, x_n) - A(a_1, \dots, a_n) &= A(x_1, \dots, x_n) - A(a_1, x_2, \dots, x_n) + A(a_1, x_2, \dots, x_n) \\
&\quad - A(a_1, a_2, x_3, \dots, x_n) + A(a_1, a_2, x_3, \dots, x_n) - \dots \\
&\quad + A(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, x_n) - A(a_1, \dots, a_n) \\
&= A(x_1 - a_1, x_2, \dots, x_n) + A(a_1, x_2 - a_2, x_3, \dots, x_n) \\
&\quad + \dots + A(a_1, a_2, \dots, a_{n-2}, x_{n-1} - a_{n-1}, x_n) \\
&\quad + A(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, x_n - a_n),
\end{aligned}$$

e portanto

$$\begin{aligned}
\|A(x_1, \dots, x_n) - A(a_1, \dots, a_n)\| &\leq \|A(x_1 - a_1, x_2, \dots, x_n)\| + \dots + \|A(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, x_n - a_n)\| \\
&= \sum_{j=1}^n \|A(a_1, \dots, a_{j-1}, x_j - a_j, x_{j+1}, \dots, x_n)\|. \tag{2.1}
\end{aligned}$$

Observe que se um dos vetores $x_1, \dots, x_n$ for nulo e um dos vetores $a_1, \dots, a_n$ também for nulo temos $\|A(x_1, \dots, x_n) - A(a_1, \dots, a_n)\| = 0 < \varepsilon$. Agora suponha $x_1, \dots, x_n$ são vetores não-nulos e um dos vetores $a_1, \dots, a_n$ seja nulo, digamos $a_j = 0$ para algum $j \in \{1, \dots, n\}$. Tome $\delta = \frac{\varepsilon}{\|x_1\| \dots \|x_{j-1}\| \|x_{j+1}\| \dots \|x_n\| \|A\|} > 0$. Se $\|(x_1, \dots, x_n) - (a_1, \dots, a_n)\|_\infty < \delta$ obtemos

$$\begin{aligned}
\|A(x_1, \dots, x_n) - A(a_1, \dots, a_n)\| &= \\
&= \|A(x_1, \dots, x_n)\| \\
&= \|x_1\| \dots \|x_n\| A\left(\frac{x_1}{\|x_1\|}, \dots, \frac{x_n}{\|x_n\|}\right) \\
&\leq \|x_1\| \dots \|x_{j-1}\| \|x_j\| \|x_{j+1}\| \dots \|x_n\| \|A\| \\
&\leq \|x_1\| \dots \|x_{j-1}\| \|(x_1 - a_1, \dots, x_j - a_j, \dots, x_n - a_n)\|_\infty \|x_{j+1}\| \|x_n\| \|A\| < \varepsilon
\end{aligned}$$

Analogamente para o caso em que um dos vetores $x_1, \dots, x_n$ seja nulo e $a_1, \dots, a_n$ vetores não-nulos. Em ambos os casos concluímos que A é contínua. Diante destas observações consideremos $x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_n$ vetores não-nulos. Logo

$$\begin{aligned}
\|A(a_1, \dots, a_{j-1}, x_j - a_j, x_{j+1}, \dots, x_n)\| &= \\
&= \left\| A\left(\frac{\|a_1\|}{\|a_1\|} a_1, \dots, \frac{\|a_{j-1}\|}{\|a_{j-1}\|} a_{j-1}, \frac{\|x_j - a_j\|}{\|x_j - a_j\|} (x_j - a_j), \frac{\|x_{j+1}\|}{\|x_{j+1}\|} x_{j+1}, \dots, \frac{\|x_n\|}{\|x_n\|} x_n\right) \right\| \\
&= \|a_1\| \dots \|x_j - a_j\| \dots \|x_n\| \left\| A\left(\frac{a_1}{\|a_1\|}, \dots, \frac{x_j - a_j}{\|x_j - a_j\|}, \dots, \frac{x_n}{\|x_n\|}\right) \right\| \\
&\leq \|a_1\| \dots \|a_{j-1}\| \|x_j - a_j\| \|x_{j+1}\| \dots \|x_n\| \|A\|. \tag{2.2}
\end{aligned}$$

De (2.1) e (2.2) concluímos que

$$\begin{aligned}
\|A(x_1, \dots, x_n) - A(a_1, \dots, a_n)\| &\leq \|A\| \sum_{j=1}^n \|a_1\| \cdots \|a_{j-1}\| \|x_j - a_j\| \|x_{j+1}\| \cdots \|x_n\| \\
&\leq \|A\| \sum_{j=1}^n \|a\|_\infty^{j-1} \|x_j - a_j\| \|x\|_\infty^{n-j} \\
&< \|A\| \sum_{j=1}^n \|a\|_\infty^{j-1} \|x_j - a_j\| (1 + \|a\|_\infty)^{n-j} \\
&\leq \|A\| \max_{1 \leq j \leq n} \left\{ \|a\|_\infty^{j-1} \right\} \cdot \max_{1 \leq j \leq n} \left\{ (1 + \|a\|_\infty)^{n-j} \right\} \sum_{j=1}^n \|x_j - a_j\| \\
&= \|A\| k \|x - a\|_1 < \|A\| k \delta < \|A\| k \frac{\varepsilon}{\|A\| k} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

completando a demonstração de que A é contínua. $\square$

2.3 O espaço das aplicações multilineares contínuas

Observe que a demonstração da Proposição 2.7 seria mais simples se soubéssemos que o conjunto das aplicações n -lineares contínuas é um espaço vetorial e que o funcional $A \rightarrow \|A\|$ é uma norma nesse espaço. Nosso próximo objetivo é provar exatamente isso.

Proposição 2.8 *Sejam $E_1, \dots, E_n$ e F espaços vetoriais normados. Considere a aplicação n -linear contínua $A: E_1 \times \cdots \times E_n \rightarrow F$. Então*

- (a) $\|A(x_1, \dots, x_n)\| \leq \|A\| \|x_1\| \cdots \|x_n\|$ para quaisquer $x_1 \in E_1, \dots, x_n \in E_n$.
- (b) $\|A\| = \inf \{c \geq 0 : \|A(x_1, \dots, x_n)\| \leq c \|x_1\| \cdots \|x_n\| \text{ para todos } x_j \in E_j, j = 1, \dots, n\}$.

Demonstração: (a) Consideremos vetores $x_j \in E_j, j = 1, \dots, n$, todos não-nulos, pois o caso contrário é trivial. Obtemos a desigualdade desejada da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\|A(x_1, \dots, x_n)\| &= \left\| A \left(\frac{\|x_1\| x_1}{\|x_1\|}, \dots, \frac{\|x_n\| x_n}{\|x_n\|} \right) \right\| \\
&= \|x_1\| \cdots \|x_n\| \left\| A \left(\frac{x_1}{\|x_1\|}, \dots, \frac{x_n}{\|x_n\|} \right) \right\| \\
&\leq \|x_1\| \cdots \|x_n\| \|A\|.
\end{aligned}$$

(b) Seja $\alpha = \inf \{c \geq 0 : \|A(x_1, \dots, x_n)\| \leq c \|x_1\| \cdots \|x_n\| \text{ para todos } x_j \in E_j, j = 1, \dots, n\}$. Pelo item (a) sabemos que

$$\|A\| \in \{c \geq 0 : \|A(x_1, \dots, x_n)\| \leq c \|x_1\| \cdots \|x_n\| \text{ para todos } x_j \in E_j, j = 1, \dots, n\},$$

e portanto $\alpha \leq \|A\|$. Por outro lado, seja $c \geq 0$ tal que $\|A(x_1, \dots, x_n)\| \leq c \|x_1\| \cdots \|x_n\|$ para todos $x_j \in E_j, j = 1, \dots, n$. Em particular,

$$\|A(x_1, \dots, x_n)\| \leq c \|x_1\| \cdots \|x_n\| \leq c,$$

para quaisquer $x_j \in B_{E_j}, j = 1, \dots, n$. Portanto $\|A\| \leq c$, e consequentemente $\|A\| \leq \alpha$. $\square$

Definição 2.9 Sejam $E, E_1, \dots, E_n$ e F espaços vetoriais normados. Denotaremos o conjunto de todas as aplicações n -lineares contínuas de $E_1 \times \dots \times E_n$ em F por $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$. Se $E_1 = \dots = E_n = E$ escrevemos $\mathcal{L}^n(E; F)$. No caso $n = 1$ e $F = \mathbb{K}$ escrevemos E' no lugar de $\mathcal{L}(E; \mathbb{K})$ e dizemos que E' é o *dual topológico* de E .

Proposição 2.10 Sejam $E_1, \dots, E_n$ e F espaços vetoriais normados. Então $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ é um espaço vetorial.

Demonstração: É claro que $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F) \subseteq L(E_1, \dots, E_n; F)$ e que a aplicação nula é n -linear e contínua. Já sabemos do Capítulo 1 que a soma de aplicações n -lineares é n -linear e que a multiplicação de uma aplicação n -linear por um escalar também é n -linear. Disso e do fato que a soma de funções contínuas definidas em um espaço métrico a valores em um espaço normado é contínua e que multiplicação de uma função contínua de um espaço métrico em um espaço normado por um escalar também é contínua, segue que $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ é um subespaço do espaço vetorial $L(E_1, \dots, E_n; F)$, e consequentemente é um espaço vetorial. $\square$

Proposição 2.11 Sejam $E_1, \dots, E_n$ e F espaços vetoriais normados.

(a) O funcional $A \rightarrow \|A\|$ é uma norma em $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$.

(b) Se F é um espaço de Banach, então $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$, com a norma do item (a), também é um espaço de Banach.

Demonstração: (a) Da definição de $\|A\|$ segue imediatamente que $\|A\| \geq 0$ para toda aplicação $A \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$. Suponhamos que $\|A\| = 0$. Pela Proposição 2.8,

$$0 \leq \|A(x_1, \dots, x_n)\| \leq \|A\| \|x_1\| \cdots \|x_n\| = 0,$$

ou seja, $\|A(x_1, \dots, x_n)\| = 0$ para todos $x_1 \in E_1, \dots, x_n \in E_n$. Logo $A = 0$. Se $A = 0$ segue imediatamente da definição que $\|A\| = 0$. Sejam $\lambda \in \mathbb{K}$ e $A \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$. Então

$$\begin{aligned} \|\lambda A\| &= \sup \{ \|(\lambda A)(x_1, \dots, x_n)\| : x_j \in E_j \text{ e } \|x_j\| \leq 1 \text{ para todo } j = 1, \dots, n \} \\ &= \sup \{ |\lambda| \|A(x_1, \dots, x_n)\| : x_j \in E_j \text{ e } \|x_j\| \leq 1 \text{ para todo } j = 1, \dots, n \} \\ &= |\lambda| \sup \{ \|A(x_1, \dots, x_n)\| : x_j \in E_j \text{ e } \|x_j\| \leq 1 \text{ para todo } j = 1, \dots, n \} \\ &= |\lambda| \|A\|. \end{aligned}$$

Sejam $A, B \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$. Para todos $x_j \in B_{E_j}$, $j = 1, \dots, n$, usando novamente a Proposição 2.8,

$$\begin{aligned} \|A(x_1, \dots, x_n) + B(x_1, \dots, x_n)\| &\leq \|A(x_1, \dots, x_n)\| + \|B(x_1, \dots, x_n)\| \\ &\leq \|A\| \|x_1\| \cdots \|x_n\| + \|B\| \|x_1\| \cdots \|x_n\| \\ &\leq \|A\| + \|B\| \end{aligned}$$

Tomando o supremo sobre todos os vetores $x_j \in B_{E_j}$, $j = 1, \dots, n$,

$$\begin{aligned} \|A + B\| &= \sup \{ \|(A + B)(x_1, \dots, x_n)\| : x_j \in B_{E_j}, j = 1, \dots, n \} \\ &= \sup \{ \|A(x_1, \dots, x_n) + B(x_1, \dots, x_n)\| : x_j \in B_{E_j}, j = 1, \dots, n \} \\ &\leq \|A\| + \|B\|. \end{aligned}$$

(b) Sejam (A_j) uma sequência de Cauchy em $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ e $x_1 \in E_1, \dots, x_n \in E_n$ vetores não-nulos. Dado $\varepsilon > 0$, temos que $\frac{\varepsilon}{\|x_1\| \cdots \|x_n\|} > 0$, e portanto existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|A_j - A_k\| < \frac{\varepsilon}{\|x_1\| \cdots \|x_n\|}$$

para todos índices $j, k \geq j_0$. Então

$$\begin{aligned} \|A_j(x_1, \dots, x_n) - A_k(x_1, \dots, x_n)\| &= \|(A_j - A_k)(x_1, \dots, x_n)\| \\ &\leq \|A_j - A_k\| \|x_1\| \cdots \|x_n\| \\ &< \frac{\varepsilon}{\|x_1\| \cdots \|x_n\|} \cdot \|x_1\| \cdots \|x_n\| = \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto a sequência $(A_j(x_1, \dots, x_n))$ é uma sequência de Cauchy em F . É claro que o mesmo vale se $x_j = 0$ para algum $j \in \{1, \dots, n\}$. Como F é Banach temos que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} A_j(x_1, \dots, x_n)$$

existe e pertence a F . Assim podemos definir

$$\begin{aligned} A: E_1 \times \cdots \times E_n &\longrightarrow F \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto A(x_1, \dots, x_n) = \lim_{j \rightarrow \infty} A_j(x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Mostremos que a aplicação A é n -linear. De fato, dados vetores $x_j, x'_j \in E_j$, $j = 1, \dots, n$, e um escalar λ ,

$$\begin{aligned} A(x_1, \dots, \lambda x_i + x'_i, \dots, x_n) &= \lim_{j \rightarrow \infty} A_j(x_1, \dots, \lambda x_i + x'_i, \dots, x_n) \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} [\lambda A_j(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) + A_j(x_1, \dots, x'_i, \dots, x_n)] \\ &= \lambda \lim_{j \rightarrow \infty} A_j(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) + \lim_{j \rightarrow \infty} A_j(x_1, \dots, x'_i, \dots, x_n) \\ &= \lambda A(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) + A(x_1, \dots, x'_i, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Além disso, como (A_j) é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ e toda sequência de Cauchy é limitada, existe uma constante $c > 0$ tal que $\|A_j\| \leq c$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Da definição de A , da continuidade da norma e da Proposição 2.8,

$$\begin{aligned} \|A(x_1, \dots, x_n)\| &= \left\| \lim_{j \rightarrow \infty} A_j(x_1, \dots, x_n) \right\| \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \|A_j(x_1, \dots, x_n)\| \\ &\leq \lim_{j \rightarrow \infty} \|A_j\| \|x_1\| \cdots \|x_n\| \\ &\leq c \|x_1\| \cdots \|x_n\| \end{aligned}$$

para quaisquer $x_j \in E_j$, $j = 1, \dots, n$. A Proposição 2.7 garante que A é contínua, isto é, $A \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$. Por outro lado, sejam $x_j \in E_j$, $j = 1, \dots, n$. Sabemos que para todos índices j, k ,

$$\|A_j(x_1, \dots, x_n) - A_k(x_1, \dots, x_n)\| \leq \|A_j - A_k\| \|x_1\| \cdots \|x_n\| \leq \|A_j - A_k\|.$$

Fixado $j \in \mathbb{N}$ e fazendo $k \rightarrow \infty$ obtemos

$$\begin{aligned} \|(A_j - A)(x_1, \dots, x_n)\| &= \|A_j(x_1, \dots, x_n) - A(x_1, \dots, x_n)\| \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \|A_j(x_1, \dots, x_n) - A_k(x_1, \dots, x_n)\| \\ &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \|A_j - A_k\|. \end{aligned}$$

Tomando o supremo sobre todos os vetores $x_j \in B_{E_j}$, $j = 1, \dots, n$,

$$0 \leq \sup_{x_j \in B_{E_j}} \|(A_j - A)(x_1, \dots, x_n)\| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \|A_j - A_k\|.$$

Portanto

$$0 \leq \|A_j - A\| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \|A_j - A_k\|.$$

Fazendo $j \rightarrow \infty$,

$$0 \leq \lim_{j \rightarrow \infty} \|A_j - A\| \leq \lim_{j, k \rightarrow \infty} \|A_j - A_k\| = 0.$$

Logo $\lim_{j \rightarrow \infty} \|A_j - A\| = 0$, ou seja, $A = \lim_{j \rightarrow \infty} A_j$ em $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$. $\square$

A partir de agora consideraremos $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ sempre munido da norma

$$\begin{aligned} \|A\| &= \sup \{ \|A(x_1, \dots, x_n)\| : x_j \in E_j \text{ e } \|x_j\| \leq 1 \text{ para todo } j = 1, \dots, n \} \\ &= \inf \{ c \geq 0 : \|A(x_1, \dots, x_n)\| \leq c \|x_1\| \cdots \|x_n\| \text{ para todos } x_j \in E_j, j = 1, \dots, n \}, \end{aligned}$$

que é chamada de *norma do sup* ou *norma usual* das aplicações multilineares.

Proposição 2.12 *Sejam $E_1, \dots, E_{m+n}$ espaços vetoriais com $m, n \in \mathbb{N}$.*

- (a) *Existe um isomorfismo canônico entre os espaços vetoriais $L(E_1, \dots, E_{m+n}; F)$ e $L(E_1, \dots, E_m; L(E_{m+1}, \dots, E_{m+n}; F))$.*
 (b) *Se $E_1, \dots, E_{m+n}$ são espaços normados, então o isomorfismo do item (a) induz um isomorfismo isométrico entre $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_{m+n}; F)$ e $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_m; \mathcal{L}(E_{m+1}, \dots, E_{m+n}; F))$.*

Demonstração: (a) Defina

$$\begin{aligned} \Phi: L(E_1, \dots, E_m, E_{m+1}, \dots, E_{m+n}; F) &\longrightarrow L(E_1, \dots, E_m; L(E_{m+1}, \dots, E_{m+n}; F)) \\ A &\mapsto \Phi(A) = \tilde{A} \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \tilde{A}: E_1 \times \cdots \times E_m &\longrightarrow L(E_{m+1}, \dots, E_{m+n}; F) \\ (x_1, \dots, x_m) &\mapsto \tilde{A}(x_1, \dots, x_m) \end{aligned}$$

em que

$$\begin{aligned} \tilde{A}(x_1, \dots, x_m): E_{m+1} \times \cdots \times E_{m+n} &\longrightarrow F \\ (x_{m+1}, \dots, x_{m+n}) &\mapsto A(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_{m+n}). \end{aligned}$$

O fato de que Φ está bem definida, ou seja, $\tilde{A}(x_1, \dots, x_m) \in L(E_{m+1}, \dots, E_{m+n}; F)$ para todos $x_j \in E_j$, $j = 1, \dots, m$, e $\tilde{A} \in L(E_1, \dots, E_m; L(E_{m+1}, \dots, E_{m+n}; F))$ para toda aplicação $A \in L(E_1, \dots, E_m, E_{m+1}, \dots, E_{m+n}; F)$, segue facilmente da $(m+n)$ -linearidade da aplicação A .

Mostremos que Φ é linear. Sejam $A, B \in L(E_1, \dots, E_m, E_{m+1}, \dots, E_{m+n}; F)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Vejamos que $\widetilde{(\lambda A + B)} = \lambda \tilde{A} + \tilde{B}$. Para isso sejam $x_1 \in E_1, \dots, x_m \in E_m$. Como para todos $x_{m+1} \in E_{m+1}, \dots, x_{m+n} \in E_{m+n}$ é verdade que

$$\begin{aligned} \widetilde{(\lambda A + B)}(x_1, \dots, x_m)(x_{m+1}, \dots, x_{m+n}) &= (\lambda A + B)(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_{m+n}) \\ &= \lambda A(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_{m+n}) \\ &\quad + B(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_{m+n}) \\ &= \lambda \tilde{A}(x_1, \dots, x_m)(x_{m+1}, \dots, x_{m+n}) \\ &\quad + \tilde{B}(x_1, \dots, x_m)(x_{m+1}, \dots, x_{m+n}) \\ &= (\lambda \tilde{A} + \tilde{B})(x_1, \dots, x_m)(x_{m+1}, \dots, x_{m+n}), \end{aligned}$$

segue que $(\widetilde{\lambda A + B})(x_1, \dots, x_m) = (\lambda \widetilde{A} + \widetilde{B})(x_1, \dots, x_m)$. Mas isso ocorre para todos $x_1 \in E_1, \dots, x_m \in E_m$, logo $(\lambda A + B) = \lambda \widetilde{A} + \widetilde{B}$. Consequentemente

$$\Phi(\lambda A + B) = (\widetilde{\lambda A + B}) = \lambda \widetilde{A} + \widetilde{B} = \lambda \Phi(A) + \Phi(B),$$

para quaisquer aplicações $A, B \in L(E_1, \dots, E_m, E_{m+1}, \dots, E_{m+n}; F)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$.

Verifiquemos que Φ é injetor. Seja $A \in L(E_1, \dots, E_m, E_{m+1}, \dots, E_{m+n}; F)$ tal que $A \in \ker \Phi$, ou seja, $\Phi(A) = 0$, e portanto $\widetilde{A} = 0$. Logo $\widetilde{A}(x_1, \dots, x_m) = 0$ para quaisquer $x_j \in E_j$, $j = 1, \dots, m$, ou seja, $\widetilde{A}(x_1, \dots, x_m)(x_{m+1}, \dots, x_{m+n}) = 0$ para quaisquer $x_j \in E_j$, $j = 1, \dots, m+n$. Assim, $A(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_{m+n}) = 0$ para quaisquer $x_j \in E_j$, $j = 1, \dots, m+n$. Dessa forma, $A = 0$ e segue que Φ é injetor.

Por fim, provemos que Φ é sobrejetor. Dada $B \in L(E_1, \dots, E_m; L(E_{m+1}, \dots, E_{m+n}; F))$, defina

$$\begin{aligned} A: E_1 \times \dots \times E_{m+n} &\longrightarrow F \\ (x_1, \dots, x_{m+n}) &\mapsto A(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_{m+n}) = B(x_1, \dots, x_m)(x_{m+1}, \dots, x_{m+n}). \end{aligned}$$

Afirmamos que A é $(m+n)$ -linear. Com efeito, este fato decorre imediatamente da m -linearidade da aplicação B e da n -linearidade da aplicação $B(x_1, \dots, x_m)$ para cada m -upla $(x_1, \dots, x_m) \in E_1 \times \dots \times E_m$. Observe que $\Phi(A) = B$ se, e somente se, $\widetilde{A} = B$, ou seja, $\widetilde{A}(x_1, \dots, x_m) = B(x_1, \dots, x_m)$, para quaisquer $x_j \in E_j$, $j = 1, \dots, m$, isto é,

$$\widetilde{A}(x_1, \dots, x_m)(x_{m+1}, \dots, x_{m+n}) = B(x_1, \dots, x_m)(x_{m+1}, \dots, x_{m+n}),$$

para quaisquer $x_j \in E_j$, $j = 1, \dots, m+n$. Logo $\Phi(A) = B$ se, e somente se,

$$A(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_{m+n}) = B(x_1, \dots, x_m)(x_{m+1}, \dots, x_{m+n}),$$

para quaisquer $x_j \in E_j$, $j = 1, \dots, m+n$. Mas A foi definida de forma a satisfazer exatamente isso, portanto Φ é sobrejetor, e consequentemente um isomorfismo.

(b) Defina $\phi := \Phi|_{\mathcal{L}(E_1, \dots, E_{m+n}; F)}$. Primeiro provemos que dada $A \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_{m+n}; F)$ e para quaisquer $x_j \in E_j$, $j = 1, \dots, m$, tem-se $\phi(A)(x_1, \dots, x_m) \in \mathcal{L}(E_{m+1}, \dots, E_{m+n}; F)$ e $\phi(A) \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_m; \mathcal{L}(E_{m+1}, \dots, E_{m+n}; F))$. De fato, dados $x_i \in E_i$, $i = m+1, \dots, m+n$, observe que

$$\begin{aligned} \|\phi(A)(x_1, \dots, x_m)(x_{m+1}, \dots, x_{m+n})\| &= \|\Phi(A)(x_1, \dots, x_m)(x_{m+1}, \dots, x_{m+n})\| \\ &= \|A(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_{m+n})\| \\ &\leq \|A\| \|x_1\| \cdots \|x_m\| \|x_{m+1}\| \cdots \|x_{m+n}\| \\ &= k \|x_{m+1}\| \cdots \|x_{m+n}\|, \end{aligned}$$

onde $k = \|A\| \|x_1\| \cdots \|x_m\| \geq 0$. Pela Proposição 2.7 segue que

$$\phi(A)(x_1, \dots, x_m) \in \mathcal{L}(E_{m+1}, \dots, E_{m+n}; F).$$

Por outro lado, note que

$$\begin{aligned}
\|\phi(A)(x_1, \dots, x_m)\| &= \sup_{\substack{x_i \in B_{E_i} \\ m+1 \leq i \leq m+n}} \|\phi(A)(x_1, \dots, x_m)(x_{m+1}, \dots, x_{m+n})\| \\
&= \sup_{\substack{x_i \in B_{E_i} \\ m+1 \leq i \leq m+n}} \|\Phi(A)(x_1, \dots, x_m)(x_{m+1}, \dots, x_{m+n})\| \\
&= \sup_{\substack{x_i \in B_{E_i} \\ m+1 \leq i \leq m+n}} \|A(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_{m+n})\| \\
&\leq \sup_{\substack{x_i \in B_{E_i} \\ m+1 \leq i \leq m+n}} \|A\| \|x_1\| \cdots \|x_m\| \|x_{m+1}\| \cdots \|x_{m+n}\| \\
&= \|A\| \|x_1\| \cdots \|x_m\| \sup_{\substack{x_i \in B_{E_i} \\ m+1 \leq i \leq m+n}} \|x_{m+1}\| \cdots \|x_{m+n}\| \\
&= \|A\| \|x_1\| \cdots \|x_m\|.
\end{aligned}$$

Pela Proposição 2.7 segue que $\phi(A) \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_m; \mathcal{L}(E_{m+1}, \dots, E_{m+n}; F))$. Assim,

$$\phi := \Phi|_{\mathcal{L}(E_1, \dots, E_{m+n}; F)} : \mathcal{L}(E_1, \dots, E_{m+n}; F) \longrightarrow \mathcal{L}(E_1, \dots, E_m; \mathcal{L}(E_{m+1}, \dots, E_{m+n}; F)).$$

Pelo item (a) sabemos que Φ é linear e injetor e consequentemente ϕ é linear e injetor como restrição de operador linear e injetor. Dada uma aplicação $(m+n)$ -linear $A \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_{m+n}; F)$, de

$$\begin{aligned}
\|\phi(A)\| &= \|\tilde{A}\| \\
&= \sup \left\{ \|\tilde{A}(x_1, \dots, x_m)\| : x_j \in B_{E_j}, j = 1, \dots, m \right\} \\
&= \sup_{\substack{x_j \in B_{E_j} \\ j=1, \dots, m}} \sup_{\substack{x_j \in B_{E_j} \\ j=m+1, \dots, m+n}} \|\tilde{A}(x_1, \dots, x_m)(x_{m+1}, \dots, x_{m+n})\| \\
&= \sup_{\substack{x_j \in B_{E_j} \\ j=1, \dots, m}} \sup_{\substack{x_j \in B_{E_j} \\ j=m+1, \dots, m+n}} \|A(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_{m+n})\| \\
&= \sup \left\{ \|A(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_{m+n})\| : x_j \in B_{E_j}, j = 1, \dots, m+n \right\} = \|A\|,
\end{aligned}$$

segue que ϕ é uma isometria. Seja

$$B \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_m; \mathcal{L}(E_{m+1}, \dots, E_{m+n}; F)) \subseteq L(E_1, \dots, E_m; L(E_{m+1}, \dots, E_{m+n}; F)).$$

Como Φ é sobrejetor, existe $A \in L(E_1, \dots, E_m, E_{m+1}, \dots, E_{m+n}; F)$ tal que $\Phi(A) = B$, ou seja,

$$A(x_1, \dots, x_{m+n}) = B(x_1, \dots, x_m)(x_{m+1}, \dots, x_{m+n})$$

para todos $x_j \in E_j$, $j = 1, \dots, m+n$. Disso e usando que $B(x_1, \dots, x_m)$ é n -linear e contínua e B é m -linear e contínua, segue da Proposição 2.8 que

$$\begin{aligned}
\|A(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_{m+n})\| &= \|B(x_1, \dots, x_m)(x_{m+1}, \dots, x_{m+n})\| \\
&\leq \|B(x_1, \dots, x_m)\| \|x_{m+1}\| \cdots \|x_{m+n}\| \\
&\leq \|B\| \|x_1\| \cdots \|x_m\| \|x_{m+1}\| \cdots \|x_{m+n}\|.
\end{aligned}$$

Usando a Proposição 2.7 concluímos que $A \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_m, E_{m+1}, \dots, E_{m+n}; F)$, e portanto $\phi(A) = \Phi(A) = B$, o que prova que ϕ é sobrejetor e completa a demonstração. $\square$

Como aplicação da Proposição 2.12 vejamos uma segunda demonstração da Proposição 2.11(b):

Corolário 2.13 Para todo $n \in \mathbb{N}$, todos espaços normados $E_1, \dots, E_n$ e todo espaço de Banach F temos que $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ é um espaço de Banach.

Demonstração: A demonstração será feita por indução sobre n . Da Análise Funcional Linear sabemos que se E é um espaço normado e F um espaço de Banach então $\mathcal{L}(E, F)$ é Banach. Isso resolve o caso $n = 1$. Suponha que o resultado seja válido para o número natural n , ou seja, para todos espaços normados $E_1, \dots, E_n$ e para todo espaço de Banach G , é verdade que $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; G)$ é Banach. Mostremos que o resultado vale para o natural $n + 1$. Sejam $E_1, \dots, E_n, E_{n+1}$ espaços normados e F Banach. Sabemos que $\mathcal{L}(E_{n+1}, F)$ é Banach. Pela hipótese de indução segue que $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; \mathcal{L}(E_{n+1}, F))$ é Banach. Mas $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_{n+1}, F)$ é isomorfo isometricamente a $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; \mathcal{L}(E_{n+1}, F))$ pela Proposição 2.12, logo $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_{n+1}, F)$ também é Banach. $\square$

2.4 Exemplos

Daremos nesta seção alguns exemplos ilustrativos de aplicações multilineares contínuas que serão úteis na sequência da dissertação. Não nos preocuparemos em comprovar a existência de aplicações multilineares descontínuas pois isso é bem conhecido mesmo no caso linear.

Exemplo 2.14 (Aplicações multilineares contínuas de tipo finito) Sejam $E_1, \dots, E_n$ e F espaços vetoriais normados. Considere $\varphi_1 \in E'_1, \dots, \varphi_n \in E'_n$ e $b \in F$. Defina

$$\begin{aligned} \varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_n \otimes b: E_1 \times \dots \times E_n &\longrightarrow F \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto (\varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_n \otimes b)(x_1, \dots, x_n) = \varphi_1(x_1) \dots \varphi_n(x_n)b. \end{aligned}$$

Pela Definição 1.2 sabemos que $\varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_n \otimes b$ é n -linear. Mostremos que esta aplicação é contínua. Usando a definição da norma de uma aplicação n -linear,

$$\begin{aligned} \|\varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_n \otimes b\| &= \sup \{ \|(\varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_n \otimes b)(x_1, \dots, x_n)\| : x_j \in B_{E_j}, j = 1, \dots, n \} \\ &= \sup \{ \|\varphi_1(x_1) \dots \varphi_n(x_n)b\| : x_j \in B_{E_j}, j = 1, \dots, n \} \\ &= \sup \{ |\varphi_1(x_1)| \dots |\varphi_n(x_n)| \|b\| : x_j \in B_{E_j}, j = 1, \dots, n \} \\ &= \|b\| \sup \{ |\varphi_1(x_1)| \dots |\varphi_n(x_n)| : x_j \in B_{E_j}, j = 1, \dots, n \} \\ &= \|b\| \sup_{x_1 \in B_{E_1}} |\varphi_1(x_1)| \dots \sup_{x_n \in B_{E_n}} |\varphi_n(x_n)| \\ &= \|b\| \|\varphi_1\| \dots \|\varphi_n\|. \end{aligned}$$

Portanto $\|\varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_n \otimes b\| < \infty$, e aplicando a Proposição 2.7 segue que $\varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_n \otimes b$ é contínua, isto é, $(\varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_n \otimes b) \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$.

Denotaremos por $\mathcal{L}_f(E_1, \dots, E_n; F)$ o subespaço de $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ gerado pelas aplicações do tipo que acabamos de estudar, ou seja

$$\mathcal{L}_f(E_1, \dots, E_n; F) = \text{span}\{\varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_n \otimes b : b \in F \text{ e } \varphi_j \in E'_j, j = 1, \dots, n\}.$$

Os elementos de $\mathcal{L}_f(E_1, \dots, E_n; F)$ são chamados de aplicações multilineares contínuas de tipo finito.

Observação 2.15 Usamos no Exemplo acima, e será utilizado outras vezes no decorrer desta dissertação, o seguinte resultado da Análise na Reta: Sejam A, B conjuntos de números reais positivos. Considere $A \cdot B = \{x \cdot y : x \in A \text{ e } y \in B\}$. Se A e B são limitados então $A \cdot B$ também é limitado e $\sup(A \cdot B) = \sup A \cdot \sup B$.

Exemplo 2.16 (Uma aplicação multilinear contínua que não é de tipo finito) Sejam $E_1, \dots, E_n$ espaços vetoriais normados. Considere $\varphi_1 \in E'_1, \dots, \varphi_{n-1} \in E'_{n-1}$ com $\varphi_j \neq 0, j = 1, \dots, n-1$. Defina

$$\begin{aligned} A: E_1 \times \dots \times E_{n-1} \times E_n &\longrightarrow E_n \\ (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) &\mapsto A(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = \varphi_1(x_1) \cdots \varphi_{n-1}(x_{n-1})x_n. \end{aligned}$$

Pelo Exemplo 1.4 já sabemos que A é n -linear. Provemos que A é contínua:

$$\begin{aligned} \|A\| &= \sup \{ \|A(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)\| : x_j \in E_j, \|x_j\| \leq 1, j = 1, \dots, n \} \\ &= \sup \{ \|\varphi_1(x_1) \cdots \varphi_{n-1}(x_{n-1})x_n\| : x_j \in E_j, \|x_j\| \leq 1, j = 1, \dots, n \} \\ &= \sup \{ |\varphi_1(x_1)| \cdots |\varphi_{n-1}(x_{n-1})| \|x_n\| : x_j \in E_j, \|x_j\| \leq 1, j = 1, \dots, n \} \\ &= \sup_{\substack{x_1 \in E_1 \\ \|x_1\| \leq 1}} |\varphi_1(x_1)| \cdots \sup_{\substack{x_{n-1} \in E_{n-1} \\ \|x_{n-1}\| \leq 1}} |\varphi_{n-1}(x_{n-1})| \sup_{\substack{x_n \in E_n \\ \|x_n\| \leq 1}} \|x_n\| \\ &= \|\varphi_1\| \cdots \|\varphi_{n-1}\|. \end{aligned}$$

Portanto $\|A\| < \infty$ e pela Proposição 2.7 segue que A é contínua. Logo $A \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; E_n)$. Observe que se $\dim(E_n) = +\infty$, então pelo Exemplo 1.4 temos $A \notin \mathcal{L}_f(E_1, \dots, E_n; E_n)$.

Consideremos o espaço de Banach ℓ_p das sequências $(\lambda_j)_{j=1}^\infty$ de escalares tais que $\sum_{j=1}^\infty |\lambda_j|^p < \infty$ com a norma $\|(\lambda_j)_{j=1}^\infty\|_p = \left(\sum_{j=1}^\infty |\lambda_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}$.

Exemplo 2.17 Sejam $p > 1$ e p' o seu conjugado, isto é, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Definimos

$$\begin{aligned} A: \ell_p \times \ell_{p'} &\longrightarrow \mathbb{K} \\ ((x_j), (y_j)) &\mapsto A((x_j), (y_j)) = \sum_{j=1}^\infty x_j y_j. \end{aligned}$$

Mostremos que A está bem definida, ou seja, $\sum_{j=1}^\infty x_j y_j < \infty$. De fato, dado $((x_j), (y_j)) \in \ell_p \times \ell_{p'}$ temos que $\sum_{j=1}^\infty |x_j|^p < \infty$ e $\sum_{j=1}^\infty |y_j|^{p'} < \infty$ o que implica

$$\left(\sum_{j=1}^\infty |x_j|^p \right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{j=1}^\infty |y_j|^{p'} \right)^{1/p'} < \infty.$$

Pela desigualdade de Hölder segue que

$$\sum_{j=1}^\infty |x_j y_j| \leq \left(\sum_{j=1}^\infty |x_j|^p \right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{j=1}^\infty |y_j|^{p'} \right)^{1/p'} < \infty.$$

Como a série $\sum_{j=1}^\infty |x_j y_j|$ é convergente, então $\sum_{j=1}^\infty x_j y_j < \infty$. Logo A está bem definida. Provemos que A é bilinear. Por um lado, vale que

$$\begin{aligned} A(\lambda(x_j) + (x'_j), (y_j)) &= A((\lambda x_j + x'_j), (y_j)) = \sum_{j=1}^\infty (\lambda x_j + x'_j) y_j \\ &= \sum_{j=1}^\infty (\lambda x_j y_j + x'_j y_j) = \lambda \sum_{j=1}^\infty x_j y_j + \sum_{j=1}^\infty x'_j y_j \\ &= \lambda A((x_j), (y_j)) + A((x'_j), (y_j)), \end{aligned}$$

e por outro lado,

$$\begin{aligned}
 A((x_j), \lambda(y_j) + (y'_j)) &= A((x_j), (\lambda y_j + y'_j)) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j(\lambda y_j + y'_j) \\
 &= \sum_{j=1}^{\infty} (\lambda x_j y_j + x_j y'_j) = \lambda \sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j + \sum_{j=1}^{\infty} x_j y'_j \\
 &= \lambda A((x_j), (y_j)) + A((x_j), (y'_j)),
 \end{aligned}$$

para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ e para todas seqüências $(y_j), (y'_j) \in \ell_{p'}$ e $(x_j), (x'_j) \in \ell_p$. Portanto A é bilinear. Mostremos que A é contínua. Dadas as seqüências $(x_j) \in \ell_p$ e $(y_j) \in \ell_{p'}$,

$$|A((x_j), (y_j))| = \left| \sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j \right| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |x_j y_j| \leq \|(x_j)\|_p \|(y_j)\|_{p'}.$$

Pela Proposição 2.7 segue que A é contínua e pela Proposição 2.8 temos que $\|A\| \leq 1$. Mais ainda, considere a seqüência $e_1 = (1, 0, 0, \dots)$. É claro que $e_1 \in (\ell_p \cap \ell_{p'})$ e $\|e_1\|_p = \|e_1\|_{p'} = 1$. Como $A(e_1, e_1) = 1$, segue da definição da norma que $\|A\| \geq 1$. Logo $\|A\| = 1$.

Consideremos o espaço de Banach ℓ_{∞} das seqüências limitadas de escalares com a norma do supremo.

Exemplo 2.18 Defina

$$\begin{aligned}
 B: \ell_1 \times \ell_{\infty} &\longrightarrow \mathbb{K} \\
 ((x_j), (y_j)) &\mapsto B((x_j), (y_j)) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j.
 \end{aligned}$$

Mostremos que B está bem definida. De fato, dado $((x_j), (y_j)) \in \ell_1 \times \ell_{\infty}$ temos que $\sum_{j=1}^{\infty} |x_j| < \infty$ e (y_j) é uma seqüência limitada, ou seja, existe $k > 0$ tal que $|y_j| \leq k$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Então

$$\sum_{j=1}^{\infty} |x_j y_j| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |x_j| k = k \sum_{j=1}^{\infty} |x_j| < \infty.$$

Logo B está bem definida. De maneira análoga à aplicação A do Exemplo 2.17 segue que B é bilinear. Vejamos que B é contínua. Dadas as seqüências $(x_j) \in \ell_1$ e $(y_j) \in \ell_{\infty}$,

$$\begin{aligned}
 |B((x_j), (y_j))| &= \left| \sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j \right| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |x_j y_j| \\
 &\leq \sum_{j=1}^{\infty} |x_j| \|(y_j)\|_{\infty} = \|(y_j)\|_{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |x_j| \\
 &= \|(y_j)\|_{\infty} \|(x_j)\|_1.
 \end{aligned}$$

Pela Proposição 2.7 segue que B é contínua e pela Proposição 2.8 temos que $\|B\| \leq 1$. Assim como no Exemplo 2.17, usando o vetor $e_1 = (1, 0, 0, \dots) \in (\ell_1 \cap \ell_{\infty})$ obtemos $\|B\| = 1$.

Capítulo 3

Norma projetiva e linearização das aplicações multilineares contínuas

No capítulo 1 vimos que o produto tensorial de espaços vetoriais tem um papel importante na linearização de aplicações multilineares. Agora, introduziremos a norma projetiva no produto tensorial e mostraremos que as aplicações multilineares contínuas entre espaços de Banach estão em correspondência biunívoca com os operadores lineares contínuos definidos no produto tensorial projetivo. Além disso, apresentaremos duas propriedades importantes da norma projetiva. Primeiro mostraremos que ela não respeita subespaços e segundo que respeita quocientes.

3.1 A norma projetiva

Sejam $E_1, \dots, E_n$ espaços vetoriais normados. O objetivo deste capítulo é introduzir uma norma em $E_1 \otimes \dots \otimes E_n$ que realize a linearização das aplicações multilineares contínuas definidas em $E_1 \times \dots \times E_n$. Mais precisamente, queremos uma norma em $E_1 \otimes \dots \otimes E_n$ tal que para todo espaço normado F , uma aplicação n -linear $A: E_1 \times \dots \times E_n \longrightarrow F$ é contínua se e somente se $A_L: E_1 \otimes \dots \otimes E_n \longrightarrow F$ é um operador linear contínuo em relação a essa norma. Como $A = A_L \circ \sigma_n$, sendo σ_n a aplicação canônica

$$\sigma_n: E_1 \times \dots \times E_n \longrightarrow E_1 \otimes \dots \otimes E_n, \quad \sigma_n(x_1, \dots, x_n) = x_1 \otimes \dots \otimes x_n,$$

nos interessa imensamente que σ_n seja contínua. Deve então existir uma constante c tal que

$$\|\sigma_n(x_1, \dots, x_n)\| = \|x_1 \otimes \dots \otimes x_n\| \leq c \|x_1\| \cdots \|x_n\|$$

para todos $x_1 \in E_1, \dots, x_n \in E_n$. Incorporando a constante $\frac{1}{c}$ na norma a ser definida no produto tensorial, deve então ser verdade que

$$\|x_1 \otimes \dots \otimes x_n\| \leq \|x_1\| \cdots \|x_n\|$$

para todo tensor elementar $x_1 \otimes \dots \otimes x_n$. Consideremos agora um tensor arbitrário $x \in E_1 \otimes \dots \otimes E_n$. Se $\sum_{j=1}^k x_1^j \otimes \dots \otimes x_n^j$ é uma representação de x , então pela desigualdade triangular a norma deve satisfazer:

$$\|x\| \leq \sum_{j=1}^k \|x_1^j\| \cdots \|x_n^j\|.$$

Tomando o ínfimo sobre todas as representações de x segue que

$$\|x\| \leq \inf \left\{ \sum_{j=1}^k \|x_1^j\| \cdots \|x_n^j\| : x = \sum_{j=1}^k x_1^j \otimes \dots \otimes x_n^j \right\}.$$

Temos assim um candidato para ser a norma do tensor x do espaço $E_1 \otimes \cdots \otimes E_n$, a saber, o número que aparece no lado direito desta última desigualdade.

Definição 3.1 Sejam $E_1, \dots, E_n$ espaços vetoriais normados sobre o corpo $\mathbb{K}$. Para cada tensor $x \in E_1 \otimes \cdots \otimes E_n$, define-se

$$\pi(x) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^k \|x_1^j\| \cdots \|x_n^j\| : x = \sum_{j=1}^k x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j \right\}.$$

Quando for necessário especificar os espaços envolvidos, escreveremos $\pi_{E_1, \dots, E_n}(x)$ ou $\pi(x; E_1 \otimes \cdots \otimes E_n)$.

Para provar que π é uma norma no produto tensorial, precisaremos do

Lema 3.2 *Seja E um espaço normado. Então o dual topológico E' é um subconjunto do dual algébrico E^* que separa pontos de E .*

Demonstração: Queremos mostrar que dado $x \in E$, se $\varphi(x) = 0$ para todo $\varphi \in E'$, então $x = 0$. Seja $x \in E$. Pelo Teorema de Hahn-Banach temos que

$$\|x\| = \sup_{\varphi \in B_{E'}} |\varphi(x)|.$$

Da hipótese segue que $\|x\| = 0$ e consequentemente temos que $x = 0$. Portanto E' separa pontos de E . $\square$

Proposição 3.3 *Sejam $E_1, \dots, E_n$ espaços vetoriais normados. Então π como definida em 3.1 é uma norma em $E_1 \otimes \cdots \otimes E_n$. Além disso,*

$$\pi(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = \|x_1\| \cdots \|x_n\|$$

para todos $x_1 \in E_1, \dots, x_n \in E_n$.

Demonstração: Dado $z \in E_1 \otimes \cdots \otimes E_n$, suponha que z tenha duas representações da forma

$$z = \sum_{j=1}^k x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j = \sum_{j=1}^m y_1^j \otimes \cdots \otimes y_n^j.$$

Para toda aplicação n -linear $A \in L(E_1, \dots, E_n; \mathbb{K})$,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k A(x_1^j, \dots, x_n^j) &= \sum_{j=1}^k (x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j)(A) \\ &= \left(\sum_{j=1}^k x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j \right) (A) \\ &= \left(\sum_{j=1}^m y_1^j \otimes \cdots \otimes y_n^j \right) (A) \\ &= \sum_{j=1}^m A(y_1^j, \dots, y_n^j). \end{aligned}$$

Em particular, dados funcionais lineares $\varphi_1 \in E'_1, \dots, \varphi_n \in E'_n$, e considerando a aplicação n -linear de tipo finito

$$\begin{aligned} A: E_1 \times \cdots \times E_n &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto A(x_1, \dots, x_n) = \varphi_1(x_1) \cdots \varphi_n(x_n), \end{aligned}$$

é verdade que

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^k \varphi_1(x_1^j) \cdots \varphi_n(x_n^j) &= \sum_{j=1}^k A(x_1^j, \dots, x_n^j) \\
 &= \sum_{j=1}^m A(y_1^j, \dots, y_n^j) \\
 &= \sum_{j=1}^m \varphi_1(y_1^j) \cdots \varphi_n(y_n^j).
 \end{aligned}$$

Acabamos então de provar que o valor do somatório $\sum_{j=1}^k \varphi_1(x_1^j) \cdots \varphi_n(x_n^j)$ independe da representação do tensor z .

É claro que $\pi(x) \geq 0$. Suponha que $\pi(x) = 0$. Neste caso, dado $\varepsilon > 0$, da definição de $\pi(x)$, existe uma representação $\sum_{j=1}^k x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j$ de x tal que

$$0 \leq \sum_{j=1}^k \|x_1^j\| \cdots \|x_n^j\| < \varepsilon.$$

Logo para quaisquer $\varphi_i \in E'_i$, $i = 1, \dots, n$,

$$\begin{aligned}
 \left| \sum_{j=1}^k \varphi_1(x_1^j) \cdots \varphi_n(x_n^j) \right| &\leq \sum_{j=1}^k |\varphi_1(x_1^j)| \cdots |\varphi_n(x_n^j)| \\
 &\leq \sum_{j=1}^k \|x_1^j\| \cdots \|x_n^j\| \|\varphi_1\| \cdots \|\varphi_n\| \\
 &< \|\varphi_1\| \cdots \|\varphi_n\| \varepsilon.
 \end{aligned}$$

Portanto

$$0 \leq \left| \sum_{j=1}^k \varphi_1(x_1^j) \cdots \varphi_n(x_n^j) \right| < \|\varphi_1\| \cdots \|\varphi_n\| \varepsilon. \quad (3.1)$$

Pelo que provamos no início da demonstração, o valor do somatório $\sum_{j=1}^k \varphi_1(x_1^j) \cdots \varphi_n(x_n^j)$ independe da representação do tensor x , e portanto fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$ em (3.1) obtemos $\sum_{j=1}^k \varphi_1(x_1^j) \cdots \varphi_n(x_n^j) = 0$. Pelo Lema 3.2 sabemos que E'_i é um subconjunto de E_i^* que separa pontos de E_i , $i = 1, \dots, n$, e portanto $\sum_{j=1}^k \varphi_1(x_1^j) \cdots \varphi_n(x_n^j) = 0$ para todos funcionais lineares φ_i pertencentes a um subconjunto de E_i^* que separa pontos de E_i , $i = 1, \dots, n$. Pelo Lema 1.14 segue que $x = 0$. Se $x = 0$ é óbvio que $\pi(x) = 0$.

Agora provemos que $\pi(\lambda x) = |\lambda| \pi(x)$. É claro que essa igualdade está satisfeita para $\lambda = 0$. Suponha $\lambda \neq 0$. Se $\sum_{j=1}^k x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j$ é uma representação para o tensor x , então $\lambda x = \sum_{j=1}^k (\lambda x_1^j) \otimes x_2^j \otimes \cdots \otimes x_n^j$, e daí

$$\pi(\lambda x) \leq \sum_{j=1}^k \|\lambda x_1^j\| \|x_2^j\| \cdots \|x_n^j\| = |\lambda| \sum_{j=1}^k \|x_1^j\| \cdots \|x_n^j\|.$$

Assim,

$$\frac{\pi(\lambda x)}{|\lambda|} \leq \sum_{j=1}^k \|x_1^j\| \cdots \|x_n^j\|.$$

Como esta última desigualdade é satisfeita para qualquer representação de x , tomando o ínfimo sobre estas representações segue que $\frac{\pi(\lambda x)}{|\lambda|} \leq \pi(x)$, ou seja, $\pi(\lambda x) \leq |\lambda| \pi(x)$. Por outro lado, usando essa última desigualdade para o escalar λ^{-1} ,

$$\pi(x) = \pi(\lambda^{-1} \lambda x) \leq |\lambda|^{-1} \pi(\lambda x) = \frac{1}{|\lambda|} \pi(\lambda x),$$

isto é, $|\lambda| \pi(x) \leq \pi(\lambda x)$. Concluimos que $\pi(\lambda x) = |\lambda| \pi(x)$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ e para todo $x \in E_1 \otimes \cdots \otimes E_n$.

Sejam $\varepsilon > 0$ e $x, y \in E_1 \otimes \cdots \otimes E_n$. Da definição de π existem representações $x = \sum_{j=1}^k x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j$ e $y = \sum_{i=1}^m y_1^i \otimes \cdots \otimes y_n^i$ tais que

$$\sum_{j=1}^k \|x_1^j\| \cdots \|x_n^j\| < \pi(x) + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e}$$

$$\sum_{i=1}^m \|y_1^i\| \cdots \|y_n^i\| < \pi(y) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Como $\sum_{j=1}^k x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j + \sum_{i=1}^m y_1^i \otimes \cdots \otimes y_n^i$ é uma representação para $x + y$,

$$\pi(x + y) \leq \sum_{j=1}^k \|x_1^j\| \cdots \|x_n^j\| + \sum_{i=1}^m \|y_1^i\| \cdots \|y_n^i\| < \pi(x) + \pi(y) + \varepsilon.$$

Fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$ obtemos $\pi(x + y) \leq \pi(x) + \pi(y)$ para quaisquer $x, y \in E_1 \otimes \cdots \otimes E_n$. Assim, concluímos que π é uma norma em $E_1 \otimes \cdots \otimes E_n$.

Por fim, mostremos que $\pi(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = \|x_1\| \cdots \|x_n\|$ para quaisquer $x_j \in E_j, j = 1, \dots, n$. Dados $x_j \in E_j, j = 1, \dots, n$, é claro que $\pi(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) \leq \|x_1\| \cdots \|x_n\|$. Por outro lado, pelo Teorema de Hahn-Banach existem funcionais lineares $\varphi_1 \in B_{E_1'}, \dots, \varphi_n \in B_{E_n'}$ tais que $\varphi_j(x_j) = \|x_j\|, j = 1, \dots, n$. Considere a forma n -linear de tipo finito

$$\begin{aligned} B: E_1 \times \cdots \times E_n &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto B(x_1, \dots, x_n) = \varphi_1(x_1) \cdots \varphi_n(x_n). \end{aligned}$$

Pelo Teorema 1.10 existe um único funcional $B_L \in L(E_1 \otimes \cdots \otimes E_n; \mathbb{K})$ tal que $B = B_L \circ \sigma_n$. Dado $x = \sum_{j=1}^k x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j \in E_1 \otimes \cdots \otimes E_n$,

$$\begin{aligned} |B_L(x)| &= \left| B_L \left(\sum_{j=1}^k x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j \right) \right| \leq \sum_{j=1}^k |B_L(x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j)| \\ &= \sum_{j=1}^k |B(x_1^j, \dots, x_n^j)| = \sum_{j=1}^k |\varphi_1(x_1^j)| \cdots |\varphi_n(x_n^j)| = \sum_{j=1}^k \|x_1^j\| \cdots \|x_n^j\|. \end{aligned}$$

Tomando o ínfimo sobre todas as representações de x concluímos que $|B_L(x)| \leq \pi(x)$ para todo tensor $x \in E_1 \otimes \cdots \otimes E_n$. Em particular, dado um tensor elementar $x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \in E_1 \otimes \cdots \otimes E_n$,

$$\begin{aligned} \|x_1\| \cdots \|x_n\| &= \|\|x_1\| \cdots \|x_n\|\| = |\varphi_1(x_1) \cdots \varphi_n(x_n)| = |B(x_1, \dots, x_n)| \\ &= |B_L(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n)| \leq \pi(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n). \end{aligned}$$

Segue que $\pi(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = \|x_1\| \cdots \|x_n\|$. □

Denota-se por $E_1 \otimes_\pi \cdots \otimes_\pi E_n$ o produto tensorial de $E_1, \dots, E_n$ dotado com a norma π . Esta norma é conhecida como *norma projetiva*. A justificativa para essa terminologia será dada na Seção 3.4.

Proposição 3.4 Se $E_1, \dots, E_n$ são espaços vetoriais de dimensão finita, então $E_1 \otimes \dots \otimes E_n$ é um espaço vetorial de dimensão finita. Além disso, se $E_1, \dots, E_n$ forem normados, então $E_1 \otimes_\pi \dots \otimes_\pi E_n$ é completo.

Demonstração: Digamos $\dim E_i = m_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, \dots, n$. Portanto $\dim L(E_1, \dots, E_n; \mathbb{K}) = m_1 \dots m_n$ e consequentemente $\dim L(E_1, \dots, E_n; \mathbb{K})^* = m_1 \dots m_n$. Como $E_1 \otimes \dots \otimes E_n \subseteq L(E_1, \dots, E_n; \mathbb{K})^*$ segue que $E_1 \otimes \dots \otimes E_n$ tem dimensão finita. Agora considerando que $E_1, \dots, E_n$ são normados, segue que $E_1 \otimes_\pi \dots \otimes_\pi E_n$ é normado e tem dimensão finita, e portanto $E_1 \otimes_\pi \dots \otimes_\pi E_n$ é completo. $\square$

O completamento do espaço $E_1 \otimes_\pi \dots \otimes_\pi E_n$ será denotado por $E_1 \widehat{\otimes}_\pi \dots \widehat{\otimes}_\pi E_n$. O espaço de Banach $E_1 \widehat{\otimes}_\pi \dots \widehat{\otimes}_\pi E_n$ será chamado de *produto tensorial projetivo* dos espaços vetoriais normados $E_1, \dots, E_n$.

Observação 3.5 Além do que foi provado na Proposição 3.4, é conhecido que se pelo menos dois dentre os espaços $E_1, \dots, E_n$ forem de dimensão infinita então $E_1 \otimes_\pi \dots \otimes_\pi E_n$ não é completo (veja, por exemplo, [16, Exercise 2.5]).

Nosso próximo objetivo é descrever a bola unitária fechada de $E_1 \widehat{\otimes}_\pi \dots \widehat{\otimes}_\pi E_n$ em termos das bolas unitárias fechadas dos espaços $E_1, \dots, E_n$. Para tanto precisamos de uma breve preparação. Começamos com a descrição da envoltória convexa de um subconjunto de um espaço vetorial.

Definição 3.6 Sejam X um espaço vetorial e S um subconjunto de X . A interseção de todos os subconjuntos convexos de X que contém S é chamada de *envoltória convexa de S* e denotada por $co(S)$. Quando X é um espaço vetorial normado podemos considerar o fecho da envoltória convexa de S que será denotado por $\overline{co}(S)$.

Observação 3.7 Como a interseção de uma família arbitrária de conjuntos convexos é um conjunto convexo, temos que $co(S)$ é um conjunto convexo.

Proposição 3.8 Sejam X um espaço vetorial e $S \subseteq X$. Então

$$co(S) = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i : x_1, \dots, x_n \in S, n \in \mathbb{N}, \lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0 \text{ e } \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \right\}.$$

Demonstração: Seja $D = \{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i : x_1, \dots, x_n \in S, n \in \mathbb{N}, \lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0 \text{ e } \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \}$. Primeiramente provemos que $co(S) \subseteq D$. Como $S \subseteq D$, basta mostrar que D é convexo para concluir que $co(S) \subseteq D$. Sejam $a, b \in D$, ou seja,

$$\begin{cases} a = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i \text{ e} \\ b = \sum_{j=1}^n \beta_j x'_j \end{cases}$$

com $x_i, x'_j \in S$ e $\lambda_i, \beta_j \geq 0$ para $i = 1, \dots, k$ e $j = 1, \dots, n$, e $\sum_{i=1}^k \lambda_i = \sum_{j=1}^n \beta_j = 1$. Observe que para $t \in [0, 1]$,

$$(1-t)a + tb = (1-t) \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i + t \sum_{j=1}^n \beta_j x'_j = \sum_{l=1}^{k+n} \alpha_l w_l,$$

onde

$$w_l = \begin{cases} x_l, & \text{se } l = 1, \dots, k. \\ x'_j, & \text{se } l = k+j, j = 1, \dots, n \end{cases}$$

e

$$\alpha_l = \begin{cases} (1-t)\lambda_l, & \text{se } l = 1, \dots, k. \\ t\beta_j, & \text{se } l = k+j, j = 1, \dots, n. \end{cases}$$

Portanto $w_l \in S$ e $\alpha_l \geq 0$ para todo $l = 1, \dots, k+n$. Como $\sum_{i=1}^k \lambda_i = \sum_{j=1}^n \beta_j = 1$ segue que $\sum_{l=1}^{k+n} \alpha_l = 1$. Logo $[(1-t)a + tb] \in D$ para todo $t \in [0, 1]$, e consequentemente D é convexo. Assim, $\text{co}(S) \subseteq D$. Por fim, provemos que $D \subseteq \text{co}(S)$. Temos que

$$\begin{aligned} D &= \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i : x_1, \dots, x_n \in S, n \in \mathbb{N}, \lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0 \text{ e } \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \right\} \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i : x_1, \dots, x_n \in S, \lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0 \text{ e } \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \right\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n, \end{aligned}$$

onde $D_n = \{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i : x_1, \dots, x_n \in S, \lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0 \text{ e } \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \}$. Provemos que

$$D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n \subseteq \text{co}(S).$$

Para isso basta mostrar que $D_n \subseteq \text{co}(S)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Façamos por indução sobre n . Para $n = 1$ temos que $D_1 = \{ \lambda_1 x_1 : x_1 \in S, \lambda_1 \geq 0 \text{ e } \lambda_1 = 1 \} = S \subseteq \text{co}(S)$. Suponha que $D_n \subseteq \text{co}(S)$ e mostremos que $D_{n+1} \subseteq \text{co}(S)$. Observe que

$$D_{n+1} = \left\{ \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i : x_1, \dots, x_{n+1} \in S, \lambda_1, \dots, \lambda_{n+1} \geq 0 \text{ e } \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1 \right\}.$$

Seja $b \in D_{n+1}$. Então $b = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i$ com $x_i \in S$, $\lambda_i \geq 0$ para $i = 1, \dots, n+1$ e $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$. Se $\lambda_{n+1} = 1$, então $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ e daí temos que $b = \lambda_{n+1} x_{n+1} \in D_1 \subseteq \text{co}(S)$. Para $\lambda_{n+1} \neq 1$ note que

$$b = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i = (1 - \lambda_{n+1}) \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{(1 - \lambda_{n+1})} x_i + \lambda_{n+1} x_{n+1},$$

com $\lambda_{n+1} \in [0, 1]$ e $x_{n+1} \in S \subseteq \text{co}(S)$. Observe que $\frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{n+1}} \geq 0$ e $x_i \in S$ para $i = 1, \dots, n$. Mais ainda,

$$\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{n+1}} = \frac{\lambda_1 + \dots + \lambda_n}{1 - \lambda_{n+1}} = 1.$$

Logo $\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{n+1}} x_i \in D_n$ e pela hipótese de indução segue que $\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{n+1}} x_i \in \text{co}(S)$. Como $\text{co}(S)$ é um conjunto convexo tem-se $b \in \text{co}(S)$. $\square$

Corolário 3.9 *Sejam X um espaço vetorial e $S \subseteq X$ com $0 \in S$. Então*

$$\text{co}(S) = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i : x_1, \dots, x_n \in S, n \in \mathbb{N}, \lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0 \text{ e } \sum_{i=1}^n \lambda_i \leq 1 \right\}.$$

Demonstração: Pela Proposição 3.8,

$$\text{co}(S) \subseteq \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i : x_1, \dots, x_n \in S, n \in \mathbb{N}, \lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0 \text{ e } \sum_{i=1}^n \lambda_i \leq 1 \right\}.$$

Por outro lado, também pela Proposição 3.8 basta provar que

$$D' = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i : x_1, \dots, x_n \in S, n \in \mathbb{N}, \lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0 \text{ e } \sum_{i=1}^n \lambda_i < 1 \right\} \subseteq co(S).$$

Seja $x \in D'$, então $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ com $x_i \in S$, $\lambda_i \geq 0$ para $i = 1, \dots, n$ e $\sum_{i=1}^n \lambda_i < 1$. Então $\lambda := 1 - \sum_{i=1}^n \lambda_i > 0$. Logo $\sum_{i=1}^n \lambda_i + \lambda = 1$. Portanto $x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n + \lambda \cdot 0 \in co(S)$. $\square$

Observação 3.10 Um completamento de um espaço vetorial normado E é um par $(\widehat{E}, \xi)$, onde $\widehat{E}$ é um espaço de Banach e $\xi: E \longrightarrow \widehat{E}$ é uma imersão isométrica cuja imagem $\xi(E)$ é densa em $\widehat{E}$ (ou seja, $\overline{\xi(E)} = \widehat{E}$).

Trataremos agora da bola fechada do completamento de um espaço normado.

Proposição 3.11 *Sejam E um espaço normado e $(\widehat{E}, \xi)$ o seu completamento. Então $B_{\widehat{E}} = \overline{B_{\xi(E)}}$.*

Demonstração: Primeiramente provemos que $B_{\widehat{E}} \subseteq \overline{B_{\xi(E)}}$. Seja $y \in B_{\widehat{E}}$. Como $B_{\widehat{E}} = \overline{\overset{\circ}{B}_{\widehat{E}}}$, existe uma sequência $(y_n) \subseteq \overset{\circ}{B}_{\widehat{E}}$ tal que

$$y_n \xrightarrow{n} y. \quad (3.2)$$

Então $\|y_n\| < 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Seja $n \in \mathbb{N}$ fixado. Como $y_n \in B_{\widehat{E}}$ e $\overline{\xi(E)} = \widehat{E}$, segue que existe uma sequência $(x_k) \subseteq E$ tal que

$$\xi(x_k) \xrightarrow{k} y_n. \quad (3.3)$$

Mas ξ é uma isometria de E sobre $\xi(E) \subseteq \widehat{E}$, logo

$$\begin{cases} \|x_k\| = \|\xi(x_k)\| \xrightarrow{k} \|y_n\| < 1 \text{ e} \\ \xi(B_E) = B_{\xi(E)} \end{cases}$$

Existe então $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_k\| < 1$ para todo $k \geq k_0$. Assim, $(x_k)_{k \geq k_0} \subseteq B_E$ o que implica $(\xi(x_k))_{k \geq k_0} \subseteq \xi(B_E) = B_{\xi(E)}$. De (3.3) temos $(\xi(x_k))_{k \geq k_0} \longrightarrow y_n$. Então $y_n \in \overline{B_{\xi(E)}}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e consequentemente $y \in \overline{B_{\xi(E)}} = \overline{B_{\xi(E)}}$. Desta forma concluímos que $B_{\widehat{E}} \subseteq \overline{B_{\xi(E)}}$. Provemos agora que $\overline{B_{\xi(E)}} \subseteq B_{\widehat{E}}$. Dado $w \in \overline{B_{\xi(E)}}$, existe uma sequência $(x_n) \subseteq E$ tal que $\xi(x_n) \longrightarrow w$ com $\|\xi(x_n)\| \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Então $\|\xi(x_n)\| \longrightarrow \|w\|$ e $\|\xi(x_n)\| \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo

$$\|w\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\xi(x_n)\| \leq 1.$$

Portanto $w \in B_{\widehat{E}}$ e consequentemente $\overline{B_{\xi(E)}} \subseteq B_{\widehat{E}}$. $\square$

Observação 3.12 Sejam E um espaço vetorial normado e $(\widehat{E}, \xi)$ o seu completamento. Podemos identificar E como um subespaço denso do seu completamento $\widehat{E}$ com a identificação

$$x \in E \longmapsto \xi(x) \in \widehat{E}.$$

A menos desta identificação podemos escrever $E = \xi(E)$. Nesse caso a Proposição 3.11 garante que $\overline{B_E}^{\widehat{E}} = B_{\widehat{E}}$.

Lema 3.13 *Sejam $(\hat{E}, \xi)$ o completamento do espaço normado E e $A \subseteq E$. Então $\overline{\xi(\overline{A}^E)}^{\hat{E}} = \overline{\xi(A)}^{\hat{E}}$.*

Demonstração: Provemos primeiramente que $\overline{\xi(A)}^{\hat{E}} \subseteq \overline{\xi(\overline{A}^E)}^{\hat{E}}$. Dado $y \in \overline{\xi(A)}^{\hat{E}}$, existe uma sequência $(y_n) \subseteq A$ tal que $\xi(y_n) \xrightarrow{n} y$. Como $A \subseteq \overline{A}^E$ temos que $(y_n) \subseteq \overline{A}^E$ e $\xi(y_n) \xrightarrow{n} y$. Portanto $y \in \overline{\xi(\overline{A}^E)}^{\hat{E}}$. Mostremos agora que $\overline{\xi(\overline{A}^E)}^{\hat{E}} \subseteq \overline{\xi(A)}^{\hat{E}}$. Com efeito, dado $z \in \overline{\xi(\overline{A}^E)}^{\hat{E}}$, podemos tomar uma sequência $(z_n) \subseteq \overline{A}^E$ tal que $\xi(z_n) \xrightarrow{n} z$. Seja $n \in \mathbb{N}$ fixado. Como $z_n \in \overline{A}^E$ segue que existe uma sequência $(x_k) \subseteq A$ tal que $x_k \xrightarrow{k} z_n$. Da continuidade de ξ temos $\xi(x_k) \xrightarrow{k} \xi(z_n)$. Assim, concluímos que $\xi(z_n) \in \overline{\xi(A)}^{\hat{E}}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e consequentemente $z \in \overline{\xi(A)}^{\hat{E}}$. $\square$

Observação 3.14 Usando a identificação da Observação 3.12, o Lema 3.13 pode ser reescrito da seguinte forma: se E é um espaço normado, $A \subseteq E$ e $(\hat{E}, \xi)$ é o seu completamento, então $\overline{(\overline{A}^E)}^{\hat{E}} = \overline{A}^{\hat{E}}$.

Agora sim estamos em condições de descrever a bola unitária fechada do produto tensorial projetivo em termos das bolas unitárias fechadas dos espaços envolvidos.

Se $A_1, \dots, A_n$ são subconjuntos de $E_1, \dots, E_n$, respectivamente, denota-se por $A_1 \otimes \dots \otimes A_n$ o subconjunto $\{x_1 \otimes \dots \otimes x_n : x_j \in A_j, j = 1, \dots, n\}$ de $E_1 \otimes \dots \otimes E_n$.

Proposição 3.15 *Sejam $E_1, \dots, E_n$, espaços normados sobre $\mathbb{K}$. A bola unitária fechada em $E_1 \hat{\otimes}_\pi \dots \hat{\otimes}_\pi E_n$ é a envoltória convexa fechada de $B_{E_1} \otimes \dots \otimes B_{E_n}$, ou seja,*

$$B_{E_1 \hat{\otimes}_\pi \dots \hat{\otimes}_\pi E_n} = \overline{co}^{E_1 \hat{\otimes}_\pi \dots \hat{\otimes}_\pi E_n}(B_{E_1} \otimes \dots \otimes B_{E_n}).$$

Demonstração: Como $B_{E_1 \hat{\otimes}_\pi \dots \hat{\otimes}_\pi E_n} = \overline{B_{E_1 \otimes \dots \otimes E_n}}^{E_1 \hat{\otimes}_\pi \dots \hat{\otimes}_\pi E_n}$, pela Observação 3.12, basta provar que $B_{E_1 \otimes \dots \otimes E_n} = \overline{co}^{E_1 \otimes \dots \otimes E_n}(B_{E_1} \otimes \dots \otimes B_{E_n})$, pois neste caso teremos

$$B_{E_1 \hat{\otimes}_\pi \dots \hat{\otimes}_\pi E_n} = \overline{B_{E_1 \otimes \dots \otimes E_n}}^{E_1 \hat{\otimes}_\pi \dots \hat{\otimes}_\pi E_n} = \overline{\overline{co}^{E_1 \otimes \dots \otimes E_n}(B_{E_1} \otimes \dots \otimes B_{E_n})}^{E_1 \hat{\otimes}_\pi \dots \hat{\otimes}_\pi E_n},$$

e usando a Observação 3.14 seguirá que

$$B_{E_1 \hat{\otimes}_\pi \dots \hat{\otimes}_\pi E_n} = \overline{\overline{co}^{E_1 \otimes \dots \otimes E_n}(B_{E_1} \otimes \dots \otimes B_{E_n})}^{E_1 \hat{\otimes}_\pi \dots \hat{\otimes}_\pi E_n} = \overline{co}^{E_1 \hat{\otimes}_\pi \dots \hat{\otimes}_\pi E_n}(B_{E_1} \otimes \dots \otimes B_{E_n}).$$

Primeiro mostremos que $B_{E_1 \otimes \dots \otimes E_n} \subseteq \overline{co}^{E_1 \otimes \dots \otimes E_n}(B_{E_1} \otimes \dots \otimes B_{E_n})$. Com efeito, suponha que $x \in B_{E_1 \otimes \dots \otimes E_n}$. Logo $0 \leq \pi(x) < 1$. Da definição de norma projetiva existe uma representação $x = \sum_{j=1}^k x_1^j \otimes \dots \otimes x_n^j$ com $x_i^j \neq 0$ (pois se $x = 0 = 0 \otimes \dots \otimes 0 \in B_{E_1} \otimes \dots \otimes B_{E_n} \subseteq co(B_{E_1} \otimes \dots \otimes B_{E_n})$) para todos $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, k$ e tal que $\sum_{j=1}^k \|x_1^j\| \dots \|x_n^j\| < 1$. Defina $w_i^j = \frac{x_i^j}{\|x_i^j\|}$ e $\lambda_j = \|x_1^j\| \dots \|x_n^j\|$ para $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, k$. Dessa forma,

$$\begin{aligned} x &= \sum_{j=1}^k \left(\frac{\|x_1^j\| x_1^j}{\|x_1^j\|} \right) \otimes \dots \otimes \left(\frac{\|x_n^j\| x_n^j}{\|x_n^j\|} \right) \\ &= \sum_{j=1}^k \|x_1^j\| \dots \|x_n^j\| \left(\frac{x_1^j}{\|x_1^j\|} \right) \otimes \dots \otimes \left(\frac{x_n^j}{\|x_n^j\|} \right) \\ &= \sum_{j=1}^k \lambda_j (w_1^j \otimes \dots \otimes w_n^j), \end{aligned}$$

onde $w_i^j \in B_{E_i}$, $\lambda_j \geq 0$ para $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, k$ e $\sum_{j=1}^k \lambda_j < 1$. Assim, pelo Corolário 3.9 segue que $x \in co(B_{E_1} \otimes \dots \otimes B_{E_n})$. Portanto $\overset{\circ}{B}_{E_1 \otimes \pi \dots \otimes \pi E_n} \subseteq co(B_{E_1} \otimes \dots \otimes B_{E_n})$ o que implica

$$B_{E_1 \otimes \pi \dots \otimes \pi E_n} = \overline{\overset{\circ}{B}_{E_1 \otimes \pi \dots \otimes \pi E_n}}^{E_1 \otimes \pi \dots \otimes \pi E_n} \subseteq \overline{co}^{E_1 \otimes \pi \dots \otimes \pi E_n}(B_{E_1} \otimes \dots \otimes B_{E_n}).$$

Mostremos finalmente que $\overline{co}^{E_1 \otimes \pi \dots \otimes \pi E_n}(B_{E_1} \otimes \dots \otimes B_{E_n}) \subseteq B_{E_1 \otimes \pi \dots \otimes \pi E_n}$. Observe que

$$B_{E_1} \otimes \dots \otimes B_{E_n} \subseteq B_{E_1 \otimes \pi \dots \otimes \pi E_n}.$$

De fato, dado $z \in B_{E_1} \otimes \dots \otimes B_{E_n}$, temos que $z = x_1 \otimes \dots \otimes x_n$ com $x_j \in B_{E_j}$ para $j = 1, \dots, n$. Daí, $\pi(z) = \|x_1\| \dots \|x_n\| \leq 1$. Portanto $z \in B_{E_1 \otimes \pi \dots \otimes \pi E_n}$ e daí $B_{E_1} \otimes \dots \otimes B_{E_n} \subseteq B_{E_1 \otimes \pi \dots \otimes \pi E_n}$. Segue que $co(B_{E_1} \otimes \dots \otimes B_{E_n}) \subseteq B_{E_1 \otimes \pi \dots \otimes \pi E_n}$, pois $B_{E_1 \otimes \pi \dots \otimes \pi E_n}$ é um conjunto convexo que contém $B_{E_1} \otimes \dots \otimes B_{E_n}$. Logo

$$\overline{co}^{E_1 \otimes \pi \dots \otimes \pi E_n}(B_{E_1} \otimes \dots \otimes B_{E_n}) \subseteq \overline{B_{E_1 \otimes \pi \dots \otimes \pi E_n}}^{E_1 \otimes \pi \dots \otimes \pi E_n} = B_{E_1 \otimes \pi \dots \otimes \pi E_n}.$$

□

3.2 Linearização de aplicações multilineares contínuas

Nesta seção apresentaremos o teorema central deste capítulo, no qual mostraremos como a linearização das aplicações multilineares contínuas entre espaços de Banach pode ser feita a partir da norma projetiva no produto tensorial. Iniciamos a seção mostrando que, com a norma projetiva, o produto tensorial de um número finito de operadores lineares contínuos é também contínuo.

Proposição 3.16 *Sejam $E_1, \dots, E_n$ e $F_1, \dots, F_n$ espaços vetoriais normados. Dados os operadores lineares contínuos $u_i: E_i \rightarrow F_i, i = 1, \dots, n$, existe um único operador linear contínuo $u_1 \otimes \pi \dots \otimes \pi u_n: E_1 \hat{\otimes}_\pi \dots \hat{\otimes}_\pi E_n \rightarrow F_1 \hat{\otimes}_\pi \dots \hat{\otimes}_\pi F_n$ tal que*

$$u_1 \otimes \pi \dots \otimes \pi u_n(x_1 \otimes \dots \otimes x_n) = u_1(x_1) \otimes \dots \otimes u_n(x_n),$$

para quaisquer $x_j \in E_j, j = 1, \dots, n$. Mais ainda,

$$\|u_1 \otimes \pi \dots \otimes \pi u_n\| = \|u_1\| \dots \|u_n\|.$$

Demonstração: Pela Proposição 1.17, existe um único operador linear $u_1 \otimes \dots \otimes u_n: E_1 \otimes \pi \dots \otimes \pi E_n \rightarrow F_1 \otimes \pi \dots \otimes \pi F_n$ tal que

$$u_1 \otimes \dots \otimes u_n(x_1 \otimes \dots \otimes x_n) = u_1(x_1) \otimes \dots \otimes u_n(x_n)$$

para todos $x_j \in E_j, j = 1, \dots, n$. Sejam $x \in E_1 \otimes \pi \dots \otimes \pi E_n$ e $\sum_{j=1}^k x_1^j \otimes \dots \otimes x_n^j$ uma representação para x . Então

$$\begin{aligned} \pi((u_1 \otimes \dots \otimes u_n)(x)) &= \pi\left(\sum_{j=1}^k u_1(x_1^j) \otimes \dots \otimes u_n(x_n^j)\right) \\ &\leq \sum_{j=1}^k \|u_1(x_1^j)\| \dots \|u_n(x_n^j)\| \\ &\leq \|u_1\| \dots \|u_n\| \left(\sum_{j=1}^k \|x_1^j\| \dots \|x_n^j\|\right). \end{aligned}$$

Tomando o ínfimo sobre todas as representações de x ,

$$\pi((u_1 \otimes \cdots \otimes u_n)(x)) \leq \|u_1\| \cdots \|u_n\| \pi(x).$$

Logo $u_1 \otimes \cdots \otimes u_n$ é um operador linear contínuo e $\|u_1 \otimes \cdots \otimes u_n\| \leq \|u_1\| \cdots \|u_n\|$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} \|u_1\| \cdots \|u_n\| &= \sup_{x_1 \in B_{E_1}} \|u_1(x_1)\| \cdots \sup_{x_n \in B_{E_n}} \|u_n(x_n)\| = \sup_{\substack{x_i \in B_{E_i} \\ i=1, \dots, n}} \|u_1(x_1)\| \cdots \|u_n(x_n)\| \\ &= \sup_{\substack{x_i \in B_{E_i} \\ i=1, \dots, n}} \pi(u_1(x_1) \otimes \cdots \otimes u_n(x_n)) = \sup_{\substack{x_i \in B_{E_i} \\ i=1, \dots, n}} \pi((u_1 \otimes \cdots \otimes u_n)(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n)) \\ &\leq \sup\{\pi((u_1 \otimes \cdots \otimes u_n)(x)) : x \in E_1 \otimes_\pi \cdots \otimes_\pi E_n \text{ com } \pi(x) \leq 1\} \\ &= \|u_1 \otimes \cdots \otimes u_n\|, \end{aligned}$$

o que nos permite concluir que $\|u_1 \otimes \cdots \otimes u_n\| = \|u_1\| \cdots \|u_n\|$. É claro que podemos considerar $u_1 \otimes \cdots \otimes u_n: E_1 \otimes_\pi \cdots \otimes_\pi E_n \longrightarrow F_1 \hat{\otimes}_\pi \cdots \hat{\otimes}_\pi F_n$. Fazendo a identificação do espaço normado $E_1 \otimes_\pi \cdots \otimes_\pi E_n$ como subespaço denso do seu completamento e tomando a única extensão linear contínua ao fecho, segue que existe um único operador linear contínuo $u_1 \otimes_\pi \cdots \otimes_\pi u_n: E_1 \hat{\otimes}_\pi \cdots \hat{\otimes}_\pi E_n \longrightarrow F_1 \hat{\otimes}_\pi \cdots \hat{\otimes}_\pi F_n$ que estende $u_1 \otimes \cdots \otimes u_n$. Então

$$u_1 \otimes_\pi \cdots \otimes_\pi u_n(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = u_1 \otimes \cdots \otimes u_n(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = u_1(x_1) \otimes \cdots \otimes u_n(x_n),$$

para todos $x_j \in E_j$, $j = 1, \dots, n$. Além disso,

$$\|u_1 \otimes_\pi \cdots \otimes_\pi u_n\| = \|u_1 \otimes \cdots \otimes u_n\| = \|u_1\| \cdots \|u_n\|.$$

□

O próximo resultado mostra em que sentido o produto tensorial projetivo realiza a linearização de aplicações multilineares contínuas.

Teorema 3.17 *Sejam $E_1, \dots, E_n$ espaços vetoriais normados e F um espaço de Banach. Se $B: E_1 \times \cdots \times E_n \longrightarrow F$ é uma aplicação n -linear contínua, então existe um único operador linear contínuo $B_L: E_1 \hat{\otimes}_\pi \cdots \hat{\otimes}_\pi E_n \longrightarrow F$ satisfazendo $B_L(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = B(x_1, \dots, x_n)$ para quaisquer $x_j \in E_j$, $j = 1, \dots, n$, ou seja, o diagrama abaixo é comutativo:*

$$\begin{array}{ccc} E_1 \times \cdots \times E_n & \xrightarrow{B} & F \\ & \searrow \sigma_n & \nearrow B_L \\ & E_1 \hat{\otimes}_\pi \cdots \hat{\otimes}_\pi E_n & \end{array}$$

Além disso, a correspondência $B \longleftrightarrow B_L$ é um isomorfismo isométrico entre os espaços de Banach $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ e $\mathcal{L}(E_1 \hat{\otimes}_\pi \cdots \hat{\otimes}_\pi E_n; F)$. O operador B_L é chamado de linearização de B .

Demonstração: Como $B \in L(E_1, \dots, E_n; F)$, segue pelo Teorema 1.10 que existe um único operador linear $B_L: E_1 \otimes \cdots \otimes E_n \longrightarrow F$ tal que

$$B(x_1, \dots, x_n) = B_L(\sigma_n(x_1, \dots, x_n)) = B_L(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n)$$

para todos $x_j \in E_j$, $j = 1, \dots, n$. Mostremos que B_L é um operador contínuo. Com efeito, dado $x = \sum_{j=1}^k x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j \in E_1 \otimes \cdots \otimes E_n$,

$$\begin{aligned} \|B_L(x)\| &= \left\| B_L \left(\sum_{j=1}^k x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j \right) \right\| \leq \sum_{j=1}^k \|B_L(x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j)\| \\ &= \sum_{j=1}^k \|B(x_1^j, \dots, x_n^j)\| \leq \|B\| \sum_{j=1}^k \|x_1^j\| \cdots \|x_n^j\|. \end{aligned}$$

Tomando o ínfimo sobre todas as representações de x segue que $\|B_L(x)\| \leq \|B\| \pi(x)$. Logo B_L é contínuo e $\|B_L\| \leq \|B\|$. Por outro lado,

$$\|B(x_1, \dots, x_n)\| = \|B_L(x_1 \otimes \dots \otimes x_n)\| \leq \|B_L\| \pi(x_1 \otimes \dots \otimes x_n) = \|B_L\| \|x_1\| \dots \|x_n\|$$

para todos $x_1 \in E_1, \dots, x_n \in E_n$, o que implica $\|B\| \leq \|B_L\|$. Assim, concluímos que $\|B\| = \|B_L\|$. Pelo Teorema 1.10 sabemos que o operador

$$\begin{aligned} \Phi: L(E_1, \dots, E_n; F) &\longrightarrow L(E_1 \otimes \dots \otimes E_n; F) \\ B &\mapsto \Phi(B) = B_L \end{aligned}$$

é um isomorfismo entre espaços vetoriais. Seja $\psi := \Phi|_{\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)}$. Acabamos de mostrar que se $B \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$, então $B_L \in \mathcal{L}(E_1 \otimes_\pi \dots \otimes_\pi E_n; F)$. Fazendo a identificação do espaço normado $E_1 \otimes_\pi \dots \otimes_\pi E_n$ como subespaço denso do seu completamento, segue que o operador linear contínuo $B_L: E_1 \otimes_\pi \dots \otimes_\pi E_n \longrightarrow F$ possui uma única extensão linear contínua, de mesma norma, a $E_1 \widehat{\otimes}_\pi \dots \widehat{\otimes}_\pi E_n$. Por simplicidade tal extensão também será denotada por B_L . Assim, o operador

$$\begin{aligned} \psi: \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F) &\longrightarrow \mathcal{L}(E_1 \widehat{\otimes}_\pi \dots \widehat{\otimes}_\pi E_n; F) \\ B &\mapsto \psi(B) = B_L \end{aligned}$$

é linear, injetor e imersão isométrica. Mostremos que ψ é sobrejetor. Para isso, dado o operador $u \in \mathcal{L}(E_1 \widehat{\otimes}_\pi \dots \widehat{\otimes}_\pi E_n; F)$, tome $v = u|_{E_1 \otimes \dots \otimes E_n} \in L(E_1 \otimes \dots \otimes E_n; F)$. Pelo Teorema 1.10 existe uma única aplicação $B \in L(E_1, \dots, E_n; F)$ tal que $B = v \circ \sigma_n$. Portanto B é n -linear. Por outro lado,

$$\|B(x_1, \dots, x_n)\| = \|u(x_1 \otimes \dots \otimes x_n)\| \leq \|u\| \pi(x_1 \otimes \dots \otimes x_n) = \|u\| \|x_1\| \dots \|x_n\|,$$

para todos $x_j \in E_j, j = 1, \dots, n$. Concluímos que $B \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$. Pela unicidade do operador B_L segue que $B_L = u$ e então $\psi(B) = B_L = u$ o que implica que ψ é sobrejetor. Consequentemente temos que ψ é um isomorfismo isométrico. $\square$

Observe que o Teorema 3.17 nos permite fazer a seguinte identificação:

$$\mathcal{L}(E_1 \widehat{\otimes}_\pi \dots \widehat{\otimes}_\pi E_n; F) = \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F).$$

Em particular, tomando $F = \mathbb{K}$ obtemos a seguinte identificação do dual do produto tensorial projetivo com o espaço das formas multilineares contínuas:

$$(E_1 \widehat{\otimes}_\pi \dots \widehat{\otimes}_\pi E_n)' = \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; \mathbb{K}).$$

Sob essa identificação, a ação da forma n -linear contínua B como um funcional linear contínuo em $E_1 \widehat{\otimes}_\pi \dots \widehat{\otimes}_\pi E_n$ é dada por

$$\sum_{j=1}^k x_1^j \otimes \dots \otimes x_n^j \longrightarrow \sum_{j=1}^k B(x_1^j, \dots, x_n^j).$$

Desta forma, para todo $z \in E_1 \widehat{\otimes}_\pi \dots \widehat{\otimes}_\pi E_n$,

$$\pi(z) = \sup\{|B_L(z)| : B \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; \mathbb{K}) \text{ e } \|B\| \leq 1\}.$$

3.3 π não respeita subespaços

O objetivo desta seção é mostrar que a norma projetiva π não satisfaz uma propriedade que seria muito natural esperar que ela satisfizesse. Além de descrever um aspecto relevante do comportamento da norma projetiva, essa falha é importante no sentido de evidenciar que há um preço a pagar na passagem das aplicações multilineares contínuas para as suas linearizações no produto tensorial projetivo. A propriedade não satisfeita é que a norma projetiva π não respeita subespaços, no sentido que passamos a explicar agora.

Seja $i \in \{1, \dots, n\}$. É claro que se $X_1, \dots, X_n$ são espaços vetoriais e W_i é subespaço vetorial de X_i , então $X_1 \otimes \dots \otimes W_i \otimes \dots \otimes X_n$ é um subespaço vetorial de $X_1 \otimes \dots \otimes X_n$. Agora, se $E_1, \dots, E_n$ são espaços vetoriais normados e W_i é subespaço vetorial de E_i , o natural seria que $E_1 \otimes_\pi \dots \otimes_\pi W_i \otimes_\pi \dots \otimes_\pi E_n$ fosse subespaço normado de $E_1 \otimes_\pi \dots \otimes_\pi E_n$, ou pelo menos isomorfo a um subespaço de $E_1 \otimes_\pi \dots \otimes_\pi E_n$. Veja que em $E_1 \otimes_\pi \dots \otimes_\pi W_i \otimes_\pi \dots \otimes_\pi E_n$ podemos considerar a norma herdada de $E_1 \otimes_\pi \dots \otimes_\pi E_n$, e também a norma projetiva enxergando esse espaço como produto tensorial de espaços normados. A questão é se essas duas normas coincidem ou não. Veja que, para $x \in E_1 \otimes \dots \otimes W_i \otimes \dots \otimes E_n$,

$$\left\{ \sum_{j=1}^k \|x_1^j\| \cdots \|x_n^j\| : x = \sum_{j=1}^k x_1^j \otimes \dots \otimes x_n^j \in E_1 \otimes \dots \otimes W_i \otimes \dots \otimes E_n \right\} \subseteq \left\{ \sum_{j=1}^k \|x_1^j\| \cdots \|x_n^j\| : x = \sum_{j=1}^k x_1^j \otimes \dots \otimes x_n^j \in E_1 \otimes \dots \otimes E_i \otimes \dots \otimes E_n \right\},$$

e portanto

$$\pi(x; E_1 \otimes \dots \otimes E_i \otimes \dots \otimes E_n) \leq \pi(x; E_1 \otimes \dots \otimes W_i \otimes \dots \otimes E_n). \quad (3.4)$$

A validade da igualdade seria o esperado, e nesse caso $E_1 \otimes_\pi \dots \otimes_\pi W_i \otimes_\pi \dots \otimes_\pi E_n$ seria subespaço normado de $E_1 \otimes_\pi \dots \otimes_\pi E_n$. Caso exista uma constante c tal que

$$\pi(x; E_1 \otimes \dots \otimes W_i \otimes \dots \otimes E_n) \leq c \cdot \pi(x; E_1 \otimes \dots \otimes E_i \otimes \dots \otimes E_n),$$

para todo $x \in E_1 \otimes \dots \otimes W_i \otimes \dots \otimes E_n$, então a norma induzida em $E_1 \otimes_\pi \dots \otimes_\pi W_i \otimes_\pi \dots \otimes_\pi E_n$ por $E_1 \otimes_\pi \dots \otimes_\pi E_n$ será equivalente à norma projetiva em $E_1 \otimes \dots \otimes W_i \otimes \dots \otimes E_n$. Nesse caso, $E_1 \otimes_\pi \dots \otimes_\pi W_i \otimes_\pi \dots \otimes_\pi E_n$ será isomorfo a um subespaço de $E_1 \otimes_\pi \dots \otimes_\pi E_n$.

Nosso objetivo é provar que nem sempre isso ocorre. Da Observação 3.12 podemos identificar o espaço normado E como um subespaço denso do seu completamento $\hat{E}$. Assim a correspondência $\varphi \in E' \longrightarrow \hat{\varphi} \in (\hat{E})'$, onde $\hat{\varphi}$ é a extensão de Hahn-Banach de φ , é um isomorfismo isométrico. Isto é, $E' = (\hat{E})'$. Em particular, $(E_1 \otimes_\pi \dots \otimes_\pi E_n)' = (E_1 \hat{\otimes}_\pi \dots \hat{\otimes}_\pi E_n)'$.

Proposição 3.18 *Sejam E e F espaços normados e $G \subseteq E$ um subespaço. Suponha que $G \otimes_\pi F$ seja um subespaço normado de $E \otimes_\pi F$, ou seja,*

$$\pi(z; G \otimes_\pi F) = \pi(z; E \otimes_\pi F)$$

para todo $z \in G \otimes_\pi F$. Então todo operador de $\mathcal{L}(G; F')$ se estende a um operador de $\mathcal{L}(E; F')$.

Demonstração: Como $G \otimes_\pi F$ é subespaço normado de $E \otimes_\pi F$, o Teorema de Hahn-Banach garante que todo elemento de $(G \otimes_\pi F)'$ se estende a um elemento de $(E \otimes_\pi F)'$. Seja $u \in \mathcal{L}(G; F')$. Definindo $A: G \times F \longrightarrow \mathbb{K}$ por $A(x, y) = u(x)(y)$, da Proposição 2.12 temos que $A \in \mathcal{L}(G, F; \mathbb{K})$. Do Teorema 3.17 segue que $A_L \in (G \hat{\otimes}_\pi F)' = (G \otimes_\pi F)'$, e portanto

existe $\varphi \in (E \otimes_\pi F)' = (E \widehat{\otimes}_\pi F)'$ tal que $\varphi|_{G \widehat{\otimes}_\pi F} = A_L$. Novamente pelo Teorema 3.17, existe $B \in \mathcal{L}(E, F; \mathbb{K})$ tal que $B_L = \varphi$. E mais uma vez pela Proposição 2.12, definindo

$$u_1: E \longrightarrow F', \quad u_1(x)(y) = B(x, y),$$

temos que $u_1 \in \mathcal{L}(E; F')$. Seja $x \in G$. Então

$$u(x)(y) = A(x, y) = A_L(x \otimes y) = \varphi(x \otimes y) = B_L(x \otimes y) = B(x, y) = u_1(x)(y),$$

para todo $y \in F$, o que prova que $u(x) = u_1(x)$ para todo $x \in G$. Logo u_1 é extensão de u a E . $\square$

Para completar o objetivo desta seção precisamos recordar duas definições:

Definição 3.19 Uma *projeção* no espaço de Banach E é um operador linear contínuo $P: E \longrightarrow E$ tal que $P^2 = P$.

Definição 3.20 Se E é um espaço de Banach e $W \subseteq E$ é um subespaço, dizemos que W é *complementado* em E se existe um subespaço fechado $F \subseteq E$ tal que $E = W \oplus F$ ou, equivalentemente, se existe uma projeção $P: E \longrightarrow E$ tal que $W = P(E)$.

Proposição 3.21 *Seja G um subespaço do espaço de Banach E . Se o operador identidade $I_G: G \longrightarrow G$ se estende linearmente e continuamente a E , então G é complementado em E .*

Demonstração: Por hipótese existe $u \in \mathcal{L}(E; G)$ tal que $u|_G = I_G$. Nesse caso, para todo $x \in E$, como $u(x) \in G$,

$$u^2(x) = u(u(x)) = I_G(u(x)) = u(x),$$

isto é, $u^2 = u$. É claro que u é sobrejetor, pois é extensão da identidade, e podemos considerar $u: E \longrightarrow E$. Logo u é uma projeção em E tal que $u(E) = G$. Isso prova que G é subespaço complementado de E . $\square$

Teorema 3.22 *Seja F um espaço normado tal que F' é um subespaço não complementado do espaço de Banach E . Então $F' \otimes_\pi F$ não é subespaço normado de $E \otimes_\pi F$.*

Demonstração: Suponha que $F' \otimes_\pi F$ seja subespaço normado de $E \otimes_\pi F$. Da Proposição 3.18 sabemos que todo operador de $\mathcal{L}(F'; F')$ se estende a um operador de $\mathcal{L}(E; F')$. Em particular o operador identidade $I_{F'}$ se estende a um operador de $\mathcal{L}(E; F')$. A Proposição 3.21 diz que nesse caso F' é complementado em E . Essa contradição completa a demonstração. $\square$

Vejamos uma situação concreta na qual a situação prevista no Teorema 3.22 ocorre:

Exemplo 3.23 É conhecido que $L_1[0, 1]$ possui um subespaço G não complementado em $L_1[0, 1]$ e isomorfo a ℓ_2 (veja, por exemplo, [5, Teorema 1.12]). Então G é um espaço de Hilbert, e portanto reflexivo. Tomando $F = G'$ temos que $F' = G'' = G$, que é um subespaço não complementado de $L_1[0, 1]$. Pelo Teorema 3.22 temos que $F' \otimes_\pi F$ não é subespaço normado de $L_1[0, 1] \otimes_\pi F$. A menos dos isomorfismos correspondentes, o que provamos é que mesmo ℓ_2 sendo subespaço de $L_1[0, 1]$, $\ell_2 \otimes_\pi \ell_2$ não é um subespaço de $L_1[0, 1] \otimes_\pi \ell_2$.

Observação 3.24 Apesar da norma projetiva não respeitar subespaços em geral, existe um caso especial, e muito importante, em que isso ocorre. Quando o espaço fixado é um espaço $L_1(\mu)$, a norma projetiva respeita subespaços. Mais precisamente: se G é subespaço de E então $G \otimes_\pi L_1(\mu)$ é subespaço normado de $E \otimes_\pi L_1(\mu)$ (veja, por exemplo, [7, Corollary 15.7.3]).

3.4 π respeita quocientes

Terminaremos este capítulo mostrando que π respeita quocientes, o que justifica o nome norma projetiva. Para tanto precisamos estabelecer alguns fatos sobre operadores quocientes.

Definição 3.25 Sejam E e F espaços vetoriais normados sobre $\mathbb{K}$. O operador linear contínuo $u: E \longrightarrow F$ é um *operador quociente* se u é sobrejetor e $\|y\| = \inf\{\|z\| : z \in E, u(z) = y\}$ para todo $y \in F$.

Proposição 3.26 Sejam E e F espaços vetoriais normados. O operador linear contínuo $u: E \longrightarrow F$ é um operador quociente se, e somente se, u aplica a bola unitária aberta de E sobre a bola unitária aberta de F .

Demonstração: Suponha que u é um operador quociente. Seja $x \in \overset{\circ}{B}_E$. Logo $\|x\| < 1$, e portanto

$$\|u(x)\| = \inf\{\|z\| : z \in E \text{ e } u(z) = u(x)\} \leq \|x\| < 1.$$

Assim, $\|u(x)\| < 1$ e daí $u(x) \in \overset{\circ}{B}_F$. Seja $y \in \overset{\circ}{B}_F$, ou seja, $y \in F$ e $\|y\| < 1$. Como u é um operador quociente temos que $\|y\| = \inf\{\|x\| : x \in E, u(x) = y\} < 1$. Portanto existe $z \in E$ com $u(z) = y$ e tal que $\|z\| < 1$. Logo u aplica a bola unitária aberta de E sobre a bola unitária aberta de F .

Reciprocamente, suponha que u aplica a bola unitária aberta de E sobre a bola unitária aberta de F . Dado $w \in F$, é claro que $\frac{w}{2\|w\|} \in \overset{\circ}{B}_F$. Por hipótese existe $z \in \overset{\circ}{B}_E$ tal que $u(z) = \frac{w}{2\|w\|}$. De

$$u(2\|w\|z) = 2\|w\|u(z) = 2\|w\| \cdot \frac{w}{2\|w\|} = w,$$

concluimos que u é sobrejetor. Assim, dado $y \in F$ podemos tomar $x \in E$ tal que $u(x) = y$. Como $\|u\| = \sup\{\|u(z)\| : z \in E, \|z\| < 1\}$, da hipótese segue que $\|u\| \leq 1$, e então

$$\|y\| = \|u(x)\| \leq \|u\| \|x\| \leq \|x\|.$$

Verificamos que $\|y\|$ é uma cota inferior para o conjunto $\{\|x\| : x \in E \text{ e } u(x) = y\}$. Seja $\varepsilon > 0$ e mostremos que existe $z \in E$ com $u(z) = y$ e tal que $\|z\| < (1 + \varepsilon)\|y\|$. De fato, como $\frac{y}{(1+\varepsilon)\|y\|} \in \overset{\circ}{B}_F$, da hipótese segue que existe $w \in \overset{\circ}{B}_E$ tal que $u(w) = \frac{y}{(1+\varepsilon)\|y\|}$. Portanto $u((1 + \varepsilon)\|y\|w) = y$. Tomando $z = (1 + \varepsilon)\|y\|w$ temos que $u(z) = y$ e

$$\|z\| = (1 + \varepsilon)\|y\|\|w\| < (1 + \varepsilon)\|y\|.$$

Assim, $\|y\| = \inf\{\|x\| : x \in E \text{ e } u(x) = y\}$ e consequentemente concluimos que u é um operador quociente. $\square$

Proposição 3.27 Sejam E e F espaços vetoriais normados. Se $u: E \longrightarrow F$ é um operador quociente, então F é isomorfo isometricamente a $E/\ker u$.

Demonstração: Se E é um espaço normado e W é um subespaço fechado de E , então é costume chamar a aplicação linear de E sobre E/W de projeção canônica. Como $\ker u$ é um subespaço fechado de E , consideremos a projeção canônica

$$\begin{aligned} \pi: E &\longrightarrow E/\ker u \\ z &\mapsto \pi(z) = \bar{z}, \end{aligned}$$

onde $\bar{z}$ a classe de equivalência de z , isto é, $\bar{z} = z + \ker u$. Defina

$$\begin{aligned} \bar{u}: E/\ker u &\longrightarrow F \\ \bar{w} &\mapsto \bar{u}(\bar{w}) = u(w). \end{aligned}$$

Primeiro mostremos que $\bar{u}$ está bem definida, ou seja, se $\bar{w}_1 = \bar{w}_2$ então $u(w_1) = u(w_2)$. De fato, como $\bar{w}_1 = \bar{w}_2$, então $w_1 - w_2 \in \ker u$, e daí

$$0 = u(w_1 - w_2) = u(w_1) - u(w_2),$$

e portanto $u(w_1) = u(w_2)$. Afirmamos que $\bar{u}$ é linear. Com efeito, dados $\bar{w}_1, \bar{w}_2 \in E/\ker u$ e $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\bar{u}(\bar{w}_1 + \lambda \bar{w}_2) = \bar{u}(\overline{w_1 + \lambda w_2}) = u(w_1 + \lambda w_2) = u(w_1) + \lambda u(w_2) = \bar{u}(\bar{w}_1) + \lambda \bar{u}(\bar{w}_2).$$

Agora provemos que $\bar{u}$ é sobrejetor. Seja $y \in F$. Como u é sobrejetor, existe $z \in E$ tal que $u(z) = y$. Por outro lado, para todo $w \in E$,

$$(\bar{u} \circ \pi)(w) = \bar{u}(\bar{w}) = u(w),$$

ou seja, $(\bar{u} \circ \pi) = u$. Portanto

$$y = u(z) = (\bar{u} \circ \pi)(z) = \bar{u}(\bar{z}),$$

provando que $\bar{u}$ é sobrejetor. Vejamos que $\|\bar{u}(\bar{w})\| = \|\bar{w}\|$ para todo $\bar{w} \in E/\ker u$. De fato,

$$\begin{aligned} \|\bar{w}\| &= \inf\{\|z\| : z \in E, z - w \in \ker u\} \\ &= \inf\{\|z\| : z \in E, u(z - w) = 0\} \\ &= \inf\{\|z\| : z \in E, u(z) = u(w)\} \\ &= \|u(w)\| = \|\bar{u}(\bar{w})\|. \end{aligned}$$

Como $\bar{u}$ é uma imersão isométrica linear segue que $\bar{u}$ é injetor. Desta forma, concluímos que F é isomorfo isometricamente a $E/\ker u$. □

Veja, por exemplo em [10, Proposition 1.7.12], que neste caso $\|u\| = 1$.

Um primeiro indício de que a norma projetiva se comporta bem em relação a quocientes é o fato de que, considerando a norma projetiva, o produto tensorial de operadores quocientes é também um operador quociente:

Proposição 3.28 *Sejam $E_1, \dots, E_n$ e $F_1, \dots, F_n$ espaços vetoriais normados e $u_i: E_i \longrightarrow F_i$ operadores quocientes para $i = 1, \dots, n$. Então*

$$u_1 \otimes \dots \otimes u_n: E_1 \otimes_\pi \dots \otimes_\pi E_n \longrightarrow F_1 \otimes_\pi \dots \otimes_\pi F_n$$

é também um operador quociente.

Demonstração: Da Proposição 3.16 (na verdade, por sua demonstração) temos $u_1 \otimes \dots \otimes u_n$, de $E_1 \otimes_\pi \dots \otimes_\pi E_n$ em $F_1 \otimes_\pi \dots \otimes_\pi F_n$, é o único operador linear contínuo satisfazendo

$$u_1 \otimes \dots \otimes u_n(x_1 \otimes \dots \otimes x_n) = u_1(x_1) \otimes \dots \otimes u_n(x_n)$$

para todos $x_j \in E_j, j = 1, \dots, n$. Mostremos que $u_1 \otimes \dots \otimes u_n$ é um operador quociente. Primeiramente provemos que $u_1 \otimes \dots \otimes u_n$ é sobrejetor. Para isso seja $\sum_{j=1}^k w_1^j \otimes \dots \otimes w_n^j \in$

$F_1 \otimes_\pi \cdots \otimes_\pi F_n$. Como cada u_i é sobrejetor e $w_i^j \in F_i$, existem $x_i^j \in E_i$ tais que $u_i(x_i^j) = w_i^j$ para todos $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, k$. Logo

$$\begin{aligned} u_1 \otimes \cdots \otimes u_n \left(\sum_{j=1}^k x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j \right) &= \sum_{j=1}^k (u_1 \otimes \cdots \otimes u_n)(x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j) \\ &= \sum_{j=1}^k u_1(x_1^j) \otimes \cdots \otimes u_n(x_n^j) \\ &= \sum_{j=1}^k w_1^j \otimes \cdots \otimes w_n^j, \end{aligned}$$

o que comprova que $u_1 \otimes \cdots \otimes u_n$ é sobrejetor. Agora, dado $z \in F_1 \otimes_\pi \cdots \otimes_\pi F_n$, queremos provar que

$$\pi(z) = \inf \{ \pi(x) : x \in E_1 \otimes_\pi \cdots \otimes_\pi E_n, (u_1 \otimes \cdots \otimes u_n)(x) = z \}.$$

Como $u_1 \otimes \cdots \otimes u_n$ é sobrejetor, existe $x \in E_1 \otimes_\pi \cdots \otimes_\pi E_n$ tal que $(u_1 \otimes \cdots \otimes u_n)(x) = z$. Para toda representação $\sum_{j=1}^k x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j$ de x ,

$$\begin{aligned} \pi(z) &= \pi((u_1 \otimes \cdots \otimes u_n)(x)) \\ &= \pi \left(\sum_{j=1}^k u_1(x_1^j) \otimes \cdots \otimes u_n(x_n^j) \right) \\ &\leq \sum_{j=1}^k \|u_1(x_1^j)\| \cdots \|u_n(x_n^j)\| \\ &\leq \|u_1\| \cdots \|u_n\| \sum_{j=1}^k \|x_1^j\| \cdots \|x_n^j\|. \end{aligned}$$

Tomando o ínfimo sobre todas as representações de x obtemos

$$\pi(z) \leq \|u_1\| \cdots \|u_n\| \pi(x) = \pi(x),$$

pois $\|u_j\| = 1$ para $j = 1, \dots, n$. Isso significa que $\pi(z)$ é uma cota inferior do conjunto

$$\{ \pi(x) : x \in E_1 \otimes_\pi \cdots \otimes_\pi E_n, (u_1 \otimes \cdots \otimes u_n)(x) = z \}.$$

Seja $\varepsilon > 0$. Mostremos que existe $w \in E_1 \otimes_\pi \cdots \otimes_\pi E_n$ tal que

$$(u_1 \otimes \cdots \otimes u_n)(w) = z \text{ e } \pi(w) < (1 + \varepsilon)^n (\pi(z) + \varepsilon).$$

Para isso considere uma representação $\sum_{j=1}^m y_1^j \otimes \cdots \otimes y_n^j$ de z tal que

$$\sum_{j=1}^m \|y_1^j\| \cdots \|y_n^j\| < \pi(z) + \varepsilon.$$

Observe que $\frac{y_i^j}{(1+\varepsilon)\|y_i^j\|} \in \overset{\circ}{B}_{F_i}$, e como cada u_i é um operador quociente, pela Proposição 3.26 podemos tomar $x_i^j \in \overset{\circ}{B}_{E_i}$ tal que $u_i(x_i^j) = \frac{y_i^j}{(1+\varepsilon)\|y_i^j\|}$. Chamando $z_i^j = (1 + \varepsilon)\|y_i^j\|x_i^j$, temos

$$u_i(z_i^j) = (1 + \varepsilon)\|y_i^j\|u_i(x_i^j) = y_i^j$$

para $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, m$. Daí,

$$\begin{aligned} (u_1 \otimes \dots \otimes u_n) \left(\sum_{j=1}^m z_1^j \otimes \dots \otimes z_n^j \right) &= \sum_{j=1}^m u_1(z_1^j) \otimes \dots \otimes u_n(z_n^j) \\ &= \sum_{j=1}^m y_1^j \otimes \dots \otimes y_n^j = z. \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \pi \left(\sum_{j=1}^m z_1^j \otimes \dots \otimes z_n^j \right) &\leq \sum_{j=1}^m \|z_1^j\| \cdots \|z_n^j\| \\ &= \sum_{j=1}^m (1 + \varepsilon) \|y_1^j\| \cdots \|x_1^j\| \cdots (1 + \varepsilon) \|y_n^j\| \cdots \|x_n^j\| \\ &< (1 + \varepsilon)^n \sum_{j=1}^m \|y_1^j\| \cdots \|y_n^j\| \\ &< (1 + \varepsilon)^n (\pi(z) + \varepsilon). \end{aligned}$$

Basta tomar $w = \sum_{j=1}^m z_1^j \otimes \dots \otimes z_n^j$ para obter $(u_1 \otimes \dots \otimes u_n)(w) = z$ e $\pi(w) < (1 + \varepsilon)^n (\pi(z) + \varepsilon)$. Portanto

$$\pi(z) = \inf \{ \pi(x) : x \in E_1 \otimes_\pi \dots \otimes_\pi E_n, (u_1 \otimes \dots \otimes u_n)(x) = z \},$$

e conseqüentemente $u_1 \otimes \dots \otimes u_n$ é um operador quociente. $\square$

Observação 3.29 Além do que foi provado na Proposição 3.28, é conhecido que se $E_1, \dots, E_n$ são espaços de Banach e $u_i: E_i \longrightarrow F_i$ são operadores quocientes para $i = 1, \dots, n$, então $u_1 \otimes_\pi \dots \otimes_\pi u_n: E_1 \hat{\otimes}_\pi \dots \hat{\otimes}_\pi E_n \longrightarrow F_1 \hat{\otimes}_\pi \dots \hat{\otimes}_\pi F_n$ é também um operador quociente (veja, por exemplo, [16, Proposition 2.5]).

Agora explicaremos em que sentido π respeita quocientes.

Definição 3.30 Sejam E e F espaços vetoriais normados. Dizemos que F é um *quociente de* E se existe um subespaço fechado $W \subseteq E$ tal que $F = E/W$.

Corolário 3.31 Sejam $E_1, \dots, E_n$ e $F_1, \dots, F_n$ espaços vetoriais normados. Se F_i é um quociente de E_i para todo $i = 1, \dots, n$, então $F_1 \otimes_\pi \dots \otimes_\pi F_n$ é um quociente de $E_1 \otimes_\pi \dots \otimes_\pi E_n$.

Demonstração: Por hipótese existem subespaços fechados $W_i \subseteq E_i$ tais que $F_i = E_i/W_i$, $i = 1, \dots, n$. Consideremos as projeções canônicas $\pi_i: E_i \longrightarrow E_i/W_i = F_i$, que são operadores quocientes. Pela Proposição 3.28 temos que $\pi_1 \otimes \dots \otimes \pi_n: E_1 \otimes_\pi \dots \otimes_\pi E_n \longrightarrow F_1 \otimes_\pi \dots \otimes_\pi F_n$ é um operador quociente. Portanto, da Proposição 3.27,

$$F_1 \otimes_\pi \dots \otimes_\pi F_n = E_1 \otimes_\pi \dots \otimes_\pi E_n / \ker(\pi_1 \otimes \dots \otimes \pi_n),$$

ou seja, $F_1 \otimes_\pi \dots \otimes_\pi F_n$ é um quociente de $E_1 \otimes_\pi \dots \otimes_\pi E_n$. $\square$

Observe que espaços quocientes estão associados a projeções. A razão pela qual chamamos a norma π de projetiva vem do fato que π tem a propriedade de respeitar quocientes. Esta propriedade é conhecida desde o Résumé de Grothendieck (veja, por exemplo, [4, Proposition 1.1.7]).

Observação 3.32 Quando se define um espaço de Banach como sendo o completamento de um determinado espaço normado, nem sempre se obtém uma fórmula para a norma de um elemento arbitrário do espaço completado. No caso do produto tensorial projetivo $E_1 \widehat{\otimes}_\pi \cdots \widehat{\otimes}_\pi E_n$ isso é possível. A partir de resultados encontrados em [16, Proposition 2.8] ou [3, Corollary 3], prova-se que para todo $x \in E_1 \widehat{\otimes}_\pi \cdots \widehat{\otimes}_\pi E_n$,

$$\pi(x) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \|x_1^j\| \cdots \|x_n^j\| : \sum_{j=1}^{\infty} \|x_1^j\| \cdots \|x_n^j\| < \infty \text{ e } x = \sum_{j=1}^{\infty} x_1^j \otimes \cdots \otimes x_n^j \right\}.$$

Capítulo 4

Ideais de composição para aplicações multilineares

Iniciaremos este capítulo abordando a teoria de ideais de operadores lineares entre espaços de Banach. Vale ressaltar que tal teoria foi introduzida por A. Pietsch por volta de 1969. Em seguida, veremos uma generalização deste conceito trabalhando com ideais de aplicações multilineares. Por último, introduziremos os ideais de composição e investigaremos um caso particular de tais ideais.

O objetivo é mostrar o papel desempenhado pela norma projetiva na criação de ideais de aplicações multilineares a partir de ideais de operadores lineares.

4.1 Ideais de operadores

Como dito acima, a teoria de ideais de operadores lineares foi criada por A. Pietsch, e seu intento era unificar o estudo de várias classes especiais de operadores lineares que vinham sendo estudadas separadamente.

Definição 4.1 Sejam E e F espaços de Banach.

(a) O *posto* de um operador linear $u: E \longrightarrow F$ é a dimensão da sua imagem, isto é: $\text{posto}(u) := \dim u(E)$.

(b) Um operador $u \in \mathcal{L}(E; F)$ é dito ser *de posto finito* se $\text{posto}(u) < \infty$. Denotaremos por $\mathcal{F}(E; F)$ o conjunto de todos os operadores de posto finito de E em F .

Definição 4.2 Um *ideal de operadores* $\mathcal{I}$ é uma subclasse da classe $\mathcal{L}$ de todos os operadores lineares contínuos entre espaços de Banach sobre $\mathbb{K}$ tal que, para todos espaços de Banach E e F , suas componentes $\mathcal{I}(E; F) := \mathcal{L}(E; F) \cap \mathcal{I}$ satisfazem:

- 1) $\mathcal{I}(E; F)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E; F)$ que contém os operadores de posto finito.
- 2) A propriedade de ideal: se $u_1 \in \mathcal{L}(F_0; F)$, $u_2 \in \mathcal{I}(E_0; F_0)$ e $u_3 \in \mathcal{L}(E; E_0)$, então a composição $u_1 \circ u_2 \circ u_3$ pertence a $\mathcal{I}(E; F)$.

Além disso, se existe uma função $\|\cdot\|_{\mathcal{I}}: \mathcal{I} \longrightarrow [0, \infty)$ tal que

a) A função $\|\cdot\|_{\mathcal{I}}$ restrita à componente $\mathcal{I}(E; F)$ é uma norma para todos espaços de Banach E e F ;

b) O funcional $I_{\mathbb{K}}: \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ dado por $I_{\mathbb{K}}(\lambda) = \lambda$ é tal que $\|I_{\mathbb{K}}\|_{\mathcal{I}} = 1$;

c) Se $u_1 \in \mathcal{L}(F_0; F)$, $u_2 \in \mathcal{I}(E_0; F_0)$ e $u_3 \in \mathcal{L}(E; E_0)$, então a composição satisfaz

$$\|u_1 \circ u_2 \circ u_3\|_{\mathcal{I}} \leq \|u_1\| \|u_2\|_{\mathcal{I}} \|u_3\|;$$

então $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ é um *ideal normado de operadores*. Mais ainda, se todas as componentes $\mathcal{I}(E; F)$ são subespaços completos relativamente à norma $\|\cdot\|_{\mathcal{I}}$, dizemos que $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ é um *ideal de Banach*.

Dizemos que um ideal de operadores $\mathcal{I}$ é um *ideal fechado* se todas as componentes $\mathcal{I}(E; F)$ são subespaços fechados em $\mathcal{L}(E; F)$ em relação à norma usual de operadores. Assim, se $\mathcal{I}$ é um ideal fechado, temos que cada componente $\mathcal{I}(E; F)$ é um subespaço completo relativamente à norma induzida, ou seja, todo ideal fechado com a norma usual de operadores é um ideal de Banach.

Note que $\mathcal{L}$ é o maior ideal de operadores.

Observação 4.3 Se considerarmos um ideal de operadores $\mathcal{I}$ com a norma usual de operadores, temos que $(\mathcal{I}, \|\cdot\|)$ é um ideal normado:

- a) A função $\|\cdot\|$ restrita à componente $\mathcal{I}(E; F)$ é uma norma para todos os espaços de Banach E e F por se tratar da norma induzida pela norma de operadores uma vez que $\mathcal{I}(E; F) \subseteq \mathcal{L}(E; F)$.
- b) $\|I_{\mathbb{K}}\| = \sup\{|I_{\mathbb{K}}(\lambda)| : \lambda \in \mathbb{K}, |\lambda| \leq 1\} = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \mathbb{K}, |\lambda| \leq 1\} = 1$.
- c) Sejam $u_1 \in \mathcal{L}(F_0; F)$, $u_2 \in \mathcal{I}(E_0; F_0) \subseteq \mathcal{L}(E_0; F_0)$, $u_3 \in \mathcal{L}(E; E_0)$ e $x \in E$. Então

$$\|u_1(u_2(u_3(x)))\| \leq \|u_1\| \|u_2\| \|u_3\| \|x\|.$$

Portanto, pela Proposição 2.8, $\|u_1 \circ u_2 \circ u_3\| \leq \|u_1\| \|u_2\| \|u_3\|$. Logo $(\mathcal{I}, \|\cdot\|)$ é um ideal normado.

Do Exemplo 2.14 sabemos que dados $\varphi \in E'$ e $y \in F$, o operador $\varphi \otimes y$ é linear e contínuo e $\|\varphi \otimes y\| = \|y\| \|\varphi\|$. E como $\text{posto}(\varphi \otimes y) = 1 < \infty$, tem-se $\varphi \otimes y \in \mathcal{I}(E; F)$ para todo ideal de operadores $\mathcal{I}$. Em particular, o operador

$$\begin{aligned} I_{\mathbb{K}} \otimes y: \mathbb{K} &\longrightarrow F \\ \lambda &\longmapsto (I_{\mathbb{K}} \otimes y)(\lambda) = \lambda y. \end{aligned}$$

pertence a todo ideal de operadores e $\|I_{\mathbb{K}} \otimes y\| = \|y\| \|I_{\mathbb{K}}\| = \|y\|$.

Proposição 4.4 Sejam E e F espaços de Banach e $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ um ideal normado. Então

- (a) $\|u\| \leq \|u\|_{\mathcal{I}}$ para todo $u \in \mathcal{I}(E; F)$.
- (b) $\|\varphi \otimes y\|_{\mathcal{I}} = \|\varphi\| \|y\|$ para todos $\varphi \in E'$ e $y \in F$.

Demonstração: (a) Sejam $u \in \mathcal{I}(E; F)$, $x \in B_E$ e $\varphi \in B_{F'}$. Primeiramente provemos que $\varphi(u(x))I_{\mathbb{K}} = \varphi \circ u \circ (I_{\mathbb{K}} \otimes x)$. Com efeito, dado $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} (\varphi(u(x))I_{\mathbb{K}})(\lambda) &= \varphi(u(x))I_{\mathbb{K}}(\lambda) = \varphi(u(x))\lambda = \varphi(u(\lambda x)) = \varphi(u(I_{\mathbb{K}}(\lambda)x)) \\ &= \varphi(u((I_{\mathbb{K}} \otimes x)(\lambda))) = (\varphi \circ u \circ (I_{\mathbb{K}} \otimes x))(\lambda). \end{aligned}$$

De

$$\begin{aligned} |\varphi(u(x))| &= |\varphi(u(x))| \|I_{\mathbb{K}}\|_{\mathcal{I}} = \|\varphi(u(x))I_{\mathbb{K}}\|_{\mathcal{I}} = \|\varphi \circ u \circ (I_{\mathbb{K}} \otimes x)\|_{\mathcal{I}} \leq \|\varphi\| \|u\|_{\mathcal{I}} \|I_{\mathbb{K}} \otimes x\| \\ &= \|\varphi\| \|u\|_{\mathcal{I}} \|x\| \leq 1 \cdot \|u\|_{\mathcal{I}} \cdot 1 = \|u\|_{\mathcal{I}}, \end{aligned}$$

segue que $|\varphi(u(x))| \leq \|u\|_{\mathcal{I}}$ para todos $x \in B_E$, $\varphi \in B_{F'}$ e $u \in \mathcal{I}(E; F)$. Daí e pelo Teorema de Hahn-Banach obtemos

$$\|u\| = \sup_{x \in B_E} \|u(x)\| = \sup_{x \in B_E} \sup_{\varphi \in B_{F'}} |\varphi(u(x))| \leq \|u\|_{\mathcal{I}}.$$

(b) Dados $\varphi \in E'$ e $y \in F$, vimos no parágrafo acima que $\varphi \otimes y \in \mathcal{I}(E; F)$. Pelo item (a) segue que $\|\varphi \otimes y\| \leq \|\varphi\|_{\mathcal{I}} \|y\|$. Por outro lado, para todo $w \in E$,

$$((I_{\mathbb{K}} \otimes y) \circ I_{\mathbb{K}} \circ \varphi)(w) = (I_{\mathbb{K}} \otimes y)(I_{\mathbb{K}}(\varphi(w))) = (I_{\mathbb{K}} \otimes y)(\varphi(w)) = I_{\mathbb{K}}(\varphi(w))y = \varphi(w)y = (\varphi \otimes y)(w),$$

mostrando que $\varphi \otimes y = (I_{\mathbb{K}} \otimes y) \circ I_{\mathbb{K}} \circ \varphi$. Assim,

$$\begin{aligned} \|\varphi\| \|y\| &= \|\varphi \otimes y\| \leq \|\varphi\|_{\mathcal{I}} \|y\| \\ &= \|(I_{\mathbb{K}} \otimes y) \circ I_{\mathbb{K}} \circ \varphi\|_{\mathcal{I}} \leq \|I_{\mathbb{K}} \otimes y\| \|I_{\mathbb{K}}\|_{\mathcal{I}} \|\varphi\| \\ &= \|y\| \cdot 1 \cdot \|\varphi\| = \|y\| \|\varphi\|, \end{aligned}$$

provando que $\|\varphi \otimes y\|_{\mathcal{I}} = \|\varphi\| \|y\|$. □

Exemplo 4.5 Ideal dos operadores de posto finito.

Seja $u \in \mathcal{L}(E; F)$. Provemos que $u \in \mathcal{F}(E; F)$ se, e somente se, existem $n \in \mathbb{N}, b_1, \dots, b_n \in F$ e $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in E'$ tais que $u = \sum_{i=1}^n \varphi_i \otimes b_i$. Suponha $u \in \mathcal{F}(E; F)$. Chame $n = \dim(u(E)) \in \mathbb{N}$ e escolha uma base $\{b_1, \dots, b_n\}$ para $u(E)$. Assim, para todo $x \in E$ existem únicos $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tais que $u(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i$. Para cada $i = 1, \dots, n$, defina

$$\begin{aligned} \varphi_i: E &\longrightarrow \mathbb{K} \\ x &\longmapsto \varphi_i(x) = \lambda_i. \end{aligned}$$

A linearidade de φ_i segue da unicidade da representação de cada elemento de $u(E)$ e da linearidade de u . Considere

$$\begin{aligned} \|\cdot\|': u(E) &\longrightarrow [0, \infty) \\ u(x) &\longmapsto \|u(x)\|' = \left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i \right\|' := |\lambda_1| + \dots + |\lambda_n|. \end{aligned}$$

É fácil ver que $\|\cdot\|'$ é uma norma em $u(E)$. Assim, consideremos em $u(E)$ duas normas, sendo a primeira $\|\cdot\|'$ e a segunda a norma induzida em $u(E)$ pela norma de F , a qual continuaremos a denotar por $\|\cdot\|$. Como $u(E)$ tem dimensão finita, existe $k > 0$ tal que $\|z\|' \leq k \|z\|$ para todo $z \in u(E)$. Assim, para cada $i = 1, \dots, n$,

$$|\varphi_i(x)| = |\lambda_i| \leq |\lambda_1| + \dots + |\lambda_n| = \|u(x)\|' \leq k \|u(x)\| \leq k \|u\| \|x\|,$$

para todo $x \in E$. Segue que os funcionais $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ são contínuos. Por outro lado,

$$u(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i = \sum_{i=1}^n \varphi_i(x) b_i = \sum_{i=1}^n (\varphi_i \otimes b_i)(x),$$

para todo $x \in E$; ou seja, $u = \sum_{i=1}^n \varphi_i \otimes b_i$ com $n \in \mathbb{N}, b_1, \dots, b_n \in F$ e $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in E'$.

Reciprocamente, seja $u = \sum_{i=1}^n \varphi_i \otimes b_i$, onde $n \in \mathbb{N}, b_1, \dots, b_n \in F$ e $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in E'$. De $u(x) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(x) b_i$ para todo $x \in E$ segue que $\{b_1, \dots, b_n\}$ gera $u(E)$, o que implica $\text{posto}(u) \leq n < \infty$. É óbvio que $u \in \mathcal{L}(E; F)$ pois tanto a linearidade como a continuidade vêm do fato de $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ serem funcionais lineares contínuos.

Verifiquemos que $\mathcal{F}$ é um ideal de operadores:

- 1) Pelo que acabamos de mostrar, $\mathcal{F}(E; F)$ é claramente um subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E; F)$; e contém os operadores de posto finito de E em F por definição.
- 2) Provemos a propriedade de ideal: sejam $u_1 \in \mathcal{L}(F_0; F)$, $u_2 \in \mathcal{F}(E_0; F_0)$ e $u_3 \in \mathcal{L}(E; E_0)$.

Dado $x \in E$, temos que $u_3(x) \in E_0$, e como $u_2 \in \mathcal{F}(E_0; F_0)$, existem $n \in \mathbb{N}$, $b_1, \dots, b_n \in F_0$, $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in E'_0$ tais que $u_2(u_3(x)) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(u_3(x))b_i$. Logo

$$u_1(u_2(u_3(x))) = u_1\left(\sum_{i=1}^n \varphi_i(u_3(x))b_i\right) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(u_3(x))u_1(b_i),$$

o que implica $\text{posto}(u_1 \circ u_2 \circ u_3) \leq n < \infty$. Portanto $u_1 \circ u_2 \circ u_3 \in \mathcal{F}(E; F)$.

Assim concluímos que $\mathcal{F}$ é um ideal de operadores e usando a Observação 4.3 segue que $(\mathcal{F}, \|\cdot\|)$ é um ideal normado. Obviamente $\mathcal{F}$ é o menor ideal de operadores.

Por último mostremos que $\mathcal{F}$ não é um ideal de Banach com a norma usual de operadores. Para isso considere os espaços de Banach c_0 das sequências de escalares convergentes para a zero com a norma do supremo e ℓ_1 das sequências de escalares absolutamente convergentes com a norma da soma. Seja $(e_n)_{n=1}^\infty$ a base canônica dos espaços de sequências, isto é: para todo $i \in \mathbb{N}$, $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ com 1 na i -ésima posição. Defina

$$\begin{aligned} u: c_0 &\longrightarrow \ell_1 \\ (\lambda_j)_{j=1}^\infty &\mapsto u((\lambda_j)_{j=1}^\infty) = \sum_{j=1}^\infty \frac{\lambda_j}{2^j} \cdot e_j. \end{aligned}$$

Mostremos que u está bem definido. De fato, observe que

$$\|u((\lambda_j)_{j=1}^\infty)\| = \left\| \sum_{j=1}^\infty \frac{\lambda_j}{2^j} \cdot e_j \right\| = \sum_{j=1}^\infty \frac{|\lambda_j|}{2^j} \leq \left(\sup_{j \in \mathbb{N}} |\lambda_j| \right) \sum_{j=1}^\infty \frac{1}{2^j} = \sup_{j \in \mathbb{N}} |\lambda_j| = \|(\lambda_j)_{j=1}^\infty\| < \infty.$$

É fácil ver que u é linear, então da desigualdade acima segue também que u é contínuo. Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina

$$\begin{aligned} u_n: c_0 &\longrightarrow \ell_1 \\ (\lambda_j)_{j=1}^\infty &\mapsto u_n((\lambda_j)_{j=1}^\infty) = \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_j}{2^j} \cdot e_j. \end{aligned}$$

Observe que $\text{Im}(u_n) \subseteq \text{span}\{e_1, \dots, e_n\}$, e portanto $u_n \in \mathcal{F}(c_0; \ell_1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned} \|u - u_n\| &= \sup_{(\lambda_j)_{j=1}^\infty \in B_{c_0}} \|(u - u_n)((\lambda_j)_{j=1}^\infty)\| = \sup_{(\lambda_j)_{j=1}^\infty \in B_{c_0}} \left\| \sum_{j=n+1}^\infty \frac{\lambda_j}{2^j} \cdot e_j \right\| \\ &= \sup_{(\lambda_j)_{j=1}^\infty \in B_{c_0}} \sum_{j=n+1}^\infty \frac{|\lambda_j|}{2^j} \leq \sum_{j=n+1}^\infty \frac{1}{2^j}. \end{aligned}$$

Portanto

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|u - u_n\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=n+1}^\infty \frac{1}{2^j} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0,$$

o que implica $u_n \longrightarrow u$. Por fim, note que $u(e_j) = \frac{1}{2^j} \cdot e_j$, ou seja, $u(2^j e_j) = e_j$. Logo $e_j \in \text{Im}(u)$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Assim a imagem de u contém uma infinidade de vetores linearmente independentes, o que nos permite concluir que $u \notin \mathcal{F}(c_0; \ell_1)$. Temos então que $\mathcal{F}(c_0; \ell_1)$ não é fechado em $\mathcal{L}(c_0; \ell_1)$, e portanto o ideal $\mathcal{F}$ não é Banach com a norma usual de operadores.

Exemplo 4.6 Ideal dos operadores aproximáveis.

Sejam E e F espaços de Banach. Dizemos que o operador $u \in \mathcal{L}(E; F)$ é um *operador aproximável* se existe uma sequência (u_n) de operadores lineares contínuos de posto finito tal que $u_n \rightarrow u$. Denotaremos por $\mathcal{A}(E; F)$ o espaço de todos os operadores aproximáveis de E em F . Assim, $\mathcal{A}(E; F) := \overline{\mathcal{F}(E; F)}$.

Mostremos que $\mathcal{A}$ é um ideal de operadores:

- 1) Sabemos que $\mathcal{F}(E; F)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E; F)$, e portanto $\mathcal{A}(E; F) := \overline{\mathcal{F}(E; F)}$ é também um subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E; F)$. E temos que $\mathcal{F}(E; F) \subseteq \overline{\mathcal{F}(E; F)} =: \mathcal{A}(E; F)$.
- 2) Propriedade de ideal: sejam $u_1 \in \mathcal{L}(F_0; F)$, $u_2 \in \mathcal{A}(E_0; F_0)$ e $u_3 \in \mathcal{L}(E; E_0)$. Logo existe uma sequência $(v_n) \subseteq \mathcal{F}(E_0; F_0)$ tal que $v_n \rightarrow u_2$. Considere a sequência $(u_1 \circ v_n \circ u_3) \subseteq \mathcal{F}(E; F)$. Para cada $x \in E$,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (u_1 \circ v_n \circ u_3)(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} u_1(v_n(u_3(x))) = u_1(\lim_{n \rightarrow \infty} v_n(u_3(x))) \\ &= u_1(u_2(u_3(x))) = (u_1 \circ u_2 \circ u_3)(x). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|(u_1 \circ v_n \circ u_3) - (u_1 \circ u_2 \circ u_3)\| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in B_E} \|((u_1 \circ v_n \circ u_3) - (u_1 \circ u_2 \circ u_3))(x)\| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in B_E} \|u_1(v_n(u_3(x))) - u_1(u_2(u_3(x)))\| \\ &= \sup_{x \in B_E} \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_1(v_n(u_3(x))) - u_1(u_2(u_3(x)))\| \\ &= \sup_{x \in B_E} \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} u_1(v_n(u_3(x))) - u_1(u_2(u_3(x))) \right\| \\ &= \sup_{x \in B_E} \|u_1(u_2(u_3(x))) - u_1(u_2(u_3(x)))\| = 0. \end{aligned}$$

Portanto $u_1 \circ v_n \circ u_3 \rightarrow u_1 \circ u_2 \circ u_3$ com $(u_1 \circ v_n \circ u_3) \subseteq \mathcal{F}(E; F)$. Então $u_1 \circ u_2 \circ u_3 \in \mathcal{A}$. Logo $\mathcal{A}$ é um ideal de operadores e por definição temos que $\mathcal{A}$ é um ideal fechado. Como cada componente deste ideal é um subespaço fechado de $\mathcal{L}(E; F)$ segue que $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ é um ideal de Banach.

Seja $\mathcal{I}$ um ideal fechado. Dados E e F espaços de Banach, sabemos que $\mathcal{F}(E; F) \subseteq \mathcal{I}(E; F)$, o que implica

$$\mathcal{A}(E; F) = \overline{\mathcal{F}(E; F)} \subseteq \overline{\mathcal{I}(E; F)} = \mathcal{I}(E; F).$$

Portanto $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{I}$, isto é, $\mathcal{A}$ é o menor ideal fechado.

Exemplo 4.7 Ideal dos operadores compactos.

Sejam E e F espaços de Banach. Diz-se que um operador linear contínuo $u: E \rightarrow F$ é *compacto* se $\overline{u(B_E)}$ é compacto em F . Denotaremos por $\mathcal{K}(E; F)$ o conjunto de todos os operadores compactos de E em F .

Usando o fato que um subconjunto K de um espaço métrico é compacto se, e somente se, K é sequencialmente compacto, prova-se que um operador linear contínuo $u: E \rightarrow F$ entre espaços de Banach é compacto se, e somente se, para toda sequência limitada $(x_n) \subseteq E$, a sequência $(u(x_n)) \subseteq F$ possui uma subsequência convergente. Para mais detalhes veja, por exemplo, [8, Theorem 8.1-3].

Mostremos que $\mathcal{K}$ é um ideal de operadores:

- 1) É claro que o operador identicamente nulo $0: E \rightarrow F$ é compacto. Sejam $u_1, u_2 \in \mathcal{K}(E; F)$ e $(x_n) \subseteq E$ uma sequência limitada. Como $u_1 \in \mathcal{K}(E; F)$, segue que $(u_1(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ possui uma subsequência convergente, ou seja, existem um subconjunto infinito $N_1 \subseteq \mathbb{N}$ e $z_1 \in F$ tais que

$\lim_{n \in N_1} u_1(x_n) = z_1$. Por sua vez, temos que a sequência $(x_n)_{n \in N_1} \subseteq E$ é limitada, e como $u_2 \in \mathcal{K}(E; F)$, a sequência $(u_2(x_n))_{n \in N_1}$ possui uma subsequência convergente, isto é, existem um subconjunto infinito $N_2 \subseteq N_1 \subseteq \mathbb{N}$ e $z_2 \in F$ tais que $\lim_{n \in N_2} u_2(x_n) = z_2$. Concluimos que

$$\lim_{n \in N_2} (u_1 + u_2)(x_n) = \lim_{n \in N_2} u_1(x_n) + \lim_{n \in N_2} u_2(x_n) = z_1 + z_2,$$

ou seja, a sequência $((u_1 + u_2)(x_n))$ possui a subsequência convergente $((u_1 + u_2)(x_n))_{n \in N_2}$. Portanto $u_1 + u_2 \in \mathcal{K}(E; F)$. É fácil ver que se $u \in \mathcal{K}(E; F)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, então $\lambda u \in \mathcal{K}(E; F)$. Concluimos que $\mathcal{K}(E; F)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E; F)$.

Provemos que $\mathcal{K}(E; F)$ contém os operadores lineares contínuos de posto finito, ou seja, que tais operadores são compactos. Com efeito, sejam $\varphi \in E'$ e $b \in F$. Logo $(\varphi \otimes b)(B_E) \subseteq \text{span}\{b\}$. Como $\varphi \otimes b$ é um operador contínuo segue que $(\varphi \otimes b)(B_E)$ é um conjunto limitado. Portanto $(\varphi \otimes b)(B_E)$ é um conjunto compacto, pois $(\varphi \otimes b)(B_E) \subseteq \text{span}\{b\}$ e $\dim(\text{span}\{b\}) = 1$. Logo $\varphi \otimes b$ é um operador compacto. Vimos no Exemplo 4.5 que todo operador de posto finito é uma soma finita de operadores desse tipo. Como $\mathcal{K}(E; F)$ é um subespaço vetorial, concluimos que $u \in \mathcal{K}(E; F)$. Assim, $\mathcal{K}(E; F)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E; F)$ que contém os operadores lineares contínuos de posto finito.

2) Provemos a propriedade de ideal: sejam $u_1 \in \mathcal{L}(F_0; F)$, $u_2 \in \mathcal{K}(E_0; F_0)$ e $u_3 \in \mathcal{L}(E; E_0)$ e $(x_n) \subseteq E$ uma sequência limitada. Como u_3 é um operador contínuo, a sequência $(u_3(x_n))$ é limitada em E_0 . Sabendo que $u_2 \in \mathcal{K}(E_0; F_0)$, tem-se que a sequência $(u_2(u_3(x_n)))$ possui uma subsequência convergente, isto é, existem $z \in F_0$ e uma subsequência $(u_2(u_3(x_{n_k})))$ tais que $\lim_{k \rightarrow \infty} u_2(u_3(x_{n_k})) = z$. Daí, como u_1 é operador contínuo, tem-se $u_1(u_2(u_3(x_{n_k}))) \rightarrow u_1(z)$, e portanto a sequência $(u_1(u_2(u_3(x_n)))) \subseteq F$ possui uma subsequência convergente, isto é, $u_1 \circ u_2 \circ u_3 \in \mathcal{K}(E; F)$.

Da Observação 4.3 concluimos que $(\mathcal{K}, \|\cdot\|)$ é um ideal normado. Vejamos que $\mathcal{K}$ é um ideal fechado, isto é, que $(\mathcal{K}, \|\cdot\|)$ é um ideal de Banach. Basta provarmos que cada $\mathcal{K}(E; F)$ é um subespaço fechado de $\mathcal{L}(E; F)$. Considere a sequência $(u_m) \subseteq \mathcal{K}(E; F)$ tal que $u_m \rightarrow u \in \mathcal{L}(E; F)$. Como u_1 é um operador compacto, dada a sequência limitada $(y_n) \subseteq E$ temos que $(u_1(y_n)) \subseteq F$ possui uma subsequência convergente, digamos $(u_1(y_{1,n}))_{n \in \mathbb{N}}$. Por sua vez, como u_2 é compacto e como a sequência $(y_{1,n})_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada, segue que $(u_2(y_{1,n}))_{n \in \mathbb{N}}$ tem uma subsequência $(u_2(y_{2,n}))_{n \in \mathbb{N}}$ que é convergente. Continuando com este raciocínio, podemos obter, para cada número fixo $m \in \mathbb{N}$, uma subsequência $(y_{m,n})_{n \in \mathbb{N}}$ de $(y_{m-1,n})_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $(u_m(y_{m,n}))_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente. Seja $(z_n) = (y_{n,n})_{n \in \mathbb{N}}$. Então, para cada número fixo $m \in \mathbb{N}$, $(z_n)_{n \geq m}$ é uma subsequência de $(y_{m,n})_{n \geq 1}$. Logo $(u_m(z_n))_{n \geq 1}$ é convergente para cada $m \in \mathbb{N}$. Como (y_n) é limitada, existe $c > 0$ tal que $\|y_n\| \leq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Daí, $\|z_n\| \leq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Seja $\varepsilon > 0$. Como $u_m \rightarrow u$ temos que existe um $p \in \mathbb{N}$ tal que $\|u_p - u\| < \frac{\varepsilon}{3c}$. Como $(u_p(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente, e portanto de Cauchy, existe N tal que para $j, k > N$,

$$\|u_p(z_j) - u_p(z_k)\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Daí, para $j, k > N$,

$$\begin{aligned} \|u(z_j) - u(z_k)\| &= \|u(z_j) - u_p(z_j) + u_p(z_j) - u_p(z_k) + u_p(z_k) - u(z_k)\| \\ &\leq \|u(z_j) - u_p(z_j)\| + \|u_p(z_j) - u_p(z_k)\| + \|u_p(z_k) - u(z_k)\| \\ &< \|u - u_p\| \|z_j\| + \frac{\varepsilon}{3} + \|u_p - u\| \|z_k\| < \frac{\varepsilon}{3c} \cdot c + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3c} \cdot c = \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto a sequência $(u(z_n))_{n \in \mathbb{N}} \subseteq F$ é de Cauchy, e portanto convergente pois F é completo, provando que u é compacto.

Exemplo 4.8 Ideal dos operadores fracamente compactos.

Sejam E e F espaços de Banach. Um operador linear contínuo $u: E \longrightarrow F$ é dito *fracamente compacto* se $u(B_E)$ é relativamente fracamente compacto em F , isto é, $\overline{u(B_E)}^w$ é fracamente compacto em F . Denotaremos por $\mathcal{W}(E; F)$ o espaço de todos os operadores fracamente compactos de E em F .

Para o estudo dos operadores fracamente compactos será importante o

Teorema 4.9 (Teorema de Eberlein-Smulian [17, Theorem II.C.3]) *Seja E um espaço de Banach. Um conjunto $A \subseteq E$ é relativamente fracamente compacto se, e somente se, toda sequência $(a_n) \subseteq A$ tem uma subsequência que converge fracamente.*

Portanto u é fracamente compacto se, e somente se, toda sequência $(x_n) \subseteq u(B_E)$ tem uma subsequência que converge fracamente se, e só se, para toda sequência limitada $(y_n) \subseteq E$ tem-se que $(u(y_n))$ possui uma subsequência que converge fracamente.

Seja $u: E \longrightarrow F$ um operador compacto. Por definição temos que $\overline{u(B_E)}$ é compacto em F . Usando o fato que a topologia fraca é menos fina do que a topologia determinada pela norma, temos que se um subconjunto de um espaço normado é compacto, então este subconjunto é fracamente compacto. Portanto, $\overline{u(B_E)}$ é fracamente compacto. Agora, sabendo que $\overline{u(B_E)} = \overline{u(B_E)}^w$ (veja, por exemplo, [2, Corollary 1.5]) segue que $\overline{u(B_E)}^w$ é fracamente compacto, ou seja, u é um operador fracamente compacto. Então $\mathcal{K}(E; F) \subseteq \mathcal{W}(E; F)$ para todos espaços de Banach E e F .

Mostremos que $\mathcal{W}$ é um ideal de operadores:

1) É claro que o operador identicamente nulo é fracamente compacto. Sejam $u_1, u_2 \in \mathcal{W}(E; F)$ e $(x_n) \subseteq E$ uma sequência limitada. Como $u_1 \in \mathcal{W}(E; F)$, segue que $(u_1(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ possui uma subsequência que converge fracamente, ou seja, existem um subconjunto infinito $N_1 \subseteq \mathbb{N}$ e $z_1 \in F$ tais que a sequência $(u_1(x_n))_{n \in N_1}$ converge fracamente para z_1 . Por sua vez, temos que a sequência $(x_n)_{n \in N_1} \subseteq E$ é limitada, e como $u_2 \in \mathcal{W}(E; F)$, $(u_2(x_n))_{n \in N_1}$ possui uma subsequência que converge fracamente, isto é, existem um subconjunto infinito $N_2 \subseteq N_1 \subseteq \mathbb{N}$ e $z_2 \in F$ tais que a sequência $(u_2(x_n))_{n \in N_2}$ converge fracamente para z_2 . Concluímos que a sequência $((u_1 + u_2)(x_n))_{n \in N_2}$ converge fracamente para $z_1 + z_2$, ou seja, $u_1 + u_2 \in \mathcal{W}(E; F)$. É fácil ver que se $u \in \mathcal{W}(E; F)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, então $\lambda u \in \mathcal{W}(E; F)$. Agora mostremos que $\mathcal{W}(E; F)$ contém os operadores lineares contínuos de posto finito. Já mostramos que $\mathcal{F}(E; F) \subseteq \mathcal{K}(E; F)$ e $\mathcal{K}(E; F) \subseteq \mathcal{W}(E; F)$ para todos espaços de Banach E e F . Portanto $\mathcal{W}(E; F)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E; F)$ que contém os operadores lineares contínuos de posto finito para todos espaços de Banach E e F .

2) Provemos a propriedade de ideal: sejam $u_1 \in \mathcal{L}(F_0; F)$, $u_2 \in \mathcal{W}(E_0; F_0)$ e $u_3 \in \mathcal{L}(E; E_0)$ e $(x_n) \subseteq E$ uma sequência limitada. Como u_3 é um operador contínuo, a sequência $(u_3(x_n))$ é limitada em E_0 . Sabendo que $u_2 \in \mathcal{W}(E_0; F_0)$, tem-se que a sequência $(u_2(u_3(x_n)))$ possui uma subsequência que converge fracamente, isto é, existem $z \in F_0$ e uma subsequência $(u_2(u_3(x_{n_k})))$ tais que $u_2(u_3(x_{n_k})) \xrightarrow{w} z$. Sendo u_1 um operador linear contínuo, u_1 também permanece contínuo quando F_0 e F estão munidos com a topologia fraca (veja, por exemplo, [14, Teorema 10.2]), e conseqüentemente $u_1(u_2(u_3(x_{n_k}))) \xrightarrow{w} u_1(z)$. Portanto a sequência $(u_1(u_2(u_3(x_n)))) \subseteq F$ possui uma subsequência que converge fracamente, isto é, $u_1 \circ u_2 \circ u_3 \in \mathcal{W}(E; F)$.

Da Observação 4.3 concluímos que $(\mathcal{W}, \|\cdot\|)$ é um ideal normado. Vejamos que é um ideal de Banach. Basta provarmos que cada $\mathcal{W}(E; F)$ é um subespaço fechado de $\mathcal{L}(E; F)$. Para tal usaremos o seguinte resultado:

Lema 4.10 [6, Lemma 11.26(Grothendieck)] *Sejam E um espaço de Banach e $A \subseteq E$. Se para todo $\varepsilon > 0$ existe um conjunto fracamente compacto $A_\varepsilon \subseteq E$ tal que $A \subseteq A_\varepsilon + \varepsilon B_E$, então A é relativamente fracamente compacto.*

Seja $(u_n) \subseteq \mathcal{W}(E; F)$ tal que $u_n \longrightarrow u \in \mathcal{L}(E; F)$. Dado $\varepsilon > 0$, existe n_0 tal que $n \geq n_0$ implica que $\|u_n - u\| < \varepsilon$. Afirmamos que

$$u(B_E) \subseteq u_{n_0}(B_E) + \varepsilon B_F.$$

Com efeito, dado $x \in u(B_E)$ existe $y \in B_E$ tal que $u(y) = x$. Observe que

$$x = u_{n_0}(y) + x - u_{n_0}(y) = u_{n_0}(y) + \varepsilon \left(\frac{x - u_{n_0}(y)}{\varepsilon} \right).$$

Como $\|u_{n_0} - u\| < \varepsilon$, segue que $\|u_{n_0}(y) - u(y)\| \leq \|u_{n_0} - u\| < \varepsilon$, e portanto

$$\left\| \frac{x - u_{n_0}(y)}{\varepsilon} \right\| = \frac{\|u_{n_0}(y) - u(y)\|}{\varepsilon} < \frac{\varepsilon}{\varepsilon} = 1.$$

Temos que $x \in u_{n_0}(B_E) + \varepsilon B_F$. Portanto

$$u(B_E) \subseteq u_{n_0}(B_E) + \varepsilon B_F \subseteq \overline{u_{n_0}(B_E)} + \varepsilon B_F.$$

Como $u_{n_0} \in \mathcal{W}(E; F)$, $\overline{u_{n_0}(B_E)}^w$ é fracamente compacto. Por convexidade segue que $\overline{u_{n_0}(B_E)}$ é fracamente compacto. Usando o Lema 4.10 segue que $u(B_E)$ é relativamente fracamente compacto, isto é, $u \in \mathcal{W}(E; F)$.

Exemplo 4.11 Ideal dos operadores absolutamente p -somantes.

Sejam E e F espaços de Banach e $1 \leq p < \infty$. O operador $u \in \mathcal{L}(E; F)$ é chamado *absolutamente p -somante* se existe uma constante $c \geq 0$ tal que

$$\sum_{j=1}^n \|u(x_j)\|^p \leq c^p \sup_{\varphi \in B_{E'}} \sum_{j=1}^n |\varphi(x_j)|^p,$$

para toda sequência finita $x_1, \dots, x_n$ em E . Denotaremos por $\Pi_p(E; F)$ o espaço de todos os operadores absolutamente p -somantes de E em F .

Defina $\pi_p: \Pi_p(E; F) \longrightarrow [0, \infty)$ por

$$\pi_p(u) = \inf \left\{ c \geq 0 : \sum_{j=1}^n \|u(x_j)\|^p \leq c^p \sup_{\varphi \in B_{E'}} \sum_{j=1}^n |\varphi(x_j)|^p \text{ para todos } x_1, \dots, x_n \in E \text{ e } n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Vejamos que o ínfimo acima é assumido. Seja $\varepsilon > 0$. Da definição de $\pi_p(u)$ segue que existe uma constante $c \geq 0$ tal que

$$\sum_{j=1}^n \|u(x_j)\|^p \leq c^p \sup_{\varphi \in B_{E'}} \sum_{j=1}^n |\varphi(x_j)|^p$$

e $\pi_p(u) \leq c < (1 + \varepsilon)\pi_p(u)$. Logo

$$\sum_{j=1}^n \|u(x_j)\|^p \leq c^p \sup_{\varphi \in B_{E'}} \sum_{j=1}^n |\varphi(x_j)|^p < (\pi_p(u))^p (1 + \varepsilon)^p \sup_{\varphi \in B_{E'}} \sum_{j=1}^n |\varphi(x_j)|^p,$$

para toda sequência finita $x_1, \dots, x_n$ em E . Fazendo $\varepsilon \longrightarrow 0$ obtemos

$$\sum_{j=1}^n \|u(x_j)\|^p \leq (\pi_p(u))^p \sup_{\varphi \in B_{E'}} \sum_{j=1}^n |\varphi(x_j)|^p,$$

para toda sequência finita $x_1, \dots, x_n$ em E , mostrando que o ínfimo é assumido.

Vejamos que Π_p é um ideal de operadores:

1) É claro que o operador identicamente nulo de E em F pertence a $\Pi_p(E; F)$. Sejam $u_1, u_2 \in \Pi_p(E; F)$. Pelo que acabamos de mostrar, para quaisquer $x_1, \dots, x_n \in E$,

$$\begin{cases} \left(\sum_{j=1}^n \|u_1(x_j)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \pi_p(u_1) \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^n |\varphi(x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ \left(\sum_{j=1}^n \|u_2(x_j)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \pi_p(u_2) \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^n |\varphi(x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \end{cases} e$$

Consideremos as seqüências

$$\begin{cases} a = (\|u_1(x_1)\|, \|u_1(x_2)\|, \dots, \|u_1(x_n)\|, 0, 0, \dots) \in \ell_p; \\ b = (\|u_2(x_1)\|, \|u_2(x_2)\|, \dots, \|u_2(x_n)\|, 0, 0, \dots) \in \ell_p. \end{cases}$$

Como $(\ell_p, \|\cdot\|_p)$ é um espaço normado, segue que $\|a + b\|_p \leq \|a\|_p + \|b\|_p$. Assim,

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=1}^n \|(u_1 + u_2)(x_j)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\sum_{j=1}^n \|u_1(x_j) + u_2(x_j)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\sum_{j=1}^n (\|u_1(x_j)\| + \|u_2(x_j)\|)^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|a + b\|_p \leq \|a\|_p + \|b\|_p \\ &= \left(\sum_{j=1}^n \|u_1(x_j)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^n \|u_2(x_j)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq (\pi_p(u_1) + \pi_p(u_2)) \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^n |\varphi(x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Logo $u_1 + u_2 \in \Pi_p(E; F)$ e

$$\pi_p(u_1 + u_2) \leq \pi_p(u_1) + \pi_p(u_2). \quad (4.1)$$

É fácil ver que se $u \in \Pi_p(E; F)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, então $\lambda u \in \Pi_p(E; F)$. Portanto $\Pi_p(E; F)$ é um subespaço de $\mathcal{L}(E; F)$. Sejam $b \in F$ e $\varphi \in E'$, $\varphi \neq 0$. Dados $x_1, \dots, x_k$ em E ,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k \|(\varphi \otimes b)(x_j)\|^p &= \sum_{j=1}^k \|\varphi(x_j)b\|^p = \|b\|^p \sum_{j=1}^k |\varphi(x_j)|^p = \|b\|^p \|\varphi\|^p \sum_{j=1}^k \left| \frac{\varphi}{\|\varphi\|}(x_j) \right|^p \\ &\leq (\|b\| \|\varphi\|)^p \sup_{\psi \in B_{E'}} \sum_{j=1}^k |\psi(x_j)|^p. \end{aligned}$$

Portanto $\varphi \otimes b \in \Pi_p(E; F)$ e $\pi_p(\varphi \otimes b) \leq \|\varphi\| \|b\|$ para todos $\varphi \in E'$ e $b \in F$. Dado um operador $u \subseteq \mathcal{F}(E; F)$, vimos no Exemplo 4.5 que $u = \sum_{i=1}^n \varphi_i \otimes b_i$ com $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in E'$ e $b_1, \dots, b_n \in F$. Como $\Pi_p(E; F)$ é um subespaço vetorial, concluímos que $u = \sum_{i=1}^n \varphi_i \otimes b_i \in \Pi_p(E; F)$. Assim, cada componente $\Pi_p(E; F)$ contém os operadores lineares contínuos de posto finito de E em F .

2) Propriedade de ideal: sejam $u_1 \in \mathcal{L}(F_0; F)$, $u_2 \in \Pi_p(E_0; F_0)$, $u_3 \in \mathcal{L}(E; E_0)$, $u_3 \neq 0$ (pois se $u_3 = 0$ temos que $u_1 \circ u_2 \circ u_3 = 0 \in \Pi_p(E; F)$ e $\pi_p(u_1 \circ u_2 \circ u_3) = 0 = \|u_1\| \pi_p(u_2) \|u_3\|$) e

$x_1, \dots, x_n \in E$ com $n \in \mathbb{N}$. De

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^n \|(u_1 \circ u_2 \circ u_3)(x_j)\|^p &= \sum_{j=1}^n \|u_1(u_2(u_3(x_j)))\|^p \leq \|u_1\|^p \sum_{j=1}^n \|u_2(u_3(x_j))\|^p \\
&\leq \|u_1\|^p (\pi_p(u_2))^p \sup_{\varphi \in B_{E'_0}} \sum_{j=1}^n |\varphi(u_3(x_j))|^p \\
&= (\|u_1\| \pi_p(u_2))^p \sup_{\varphi \in B_{E'_0}} \sum_{j=1}^n \left| \|u_3\| \varphi \left(u_3 \left(\frac{x_j}{\|u_3\|} \right) \right) \right|^p \\
&= (\|u_1\| \pi_p(u_2) \|u_3\|)^p \sup_{\varphi \in B_{E'_0}} \sum_{j=1}^n \left| \varphi \circ \frac{u_3}{\|u_3\|} (x_j) \right|^p \\
&\leq (\|u_1\| \pi_p(u_2) \|u_3\|)^p \sup_{\psi \in B_{E'}} \sum_{j=1}^n |\psi(x_j)|^p,
\end{aligned}$$

segue que $u_1 \circ u_2 \circ u_3 \in \Pi_p(E; F)$ e $\pi_p(u_1 \circ u_2 \circ u_3) \leq \|u_1\| \pi_p(u_2) \|u_3\|$.

Mostremos que π_p restrita a $\Pi_p(E; F)$ é uma norma. É claro que $\pi_p(u) \geq 0$ para todo $u \in \Pi_p(E; F)$. Observe que se $u = 0$ então $\pi_p(u) = 0$. Agora se $\pi_p(u) = 0$, então dado $x \in E$, como u é absolutamente p -somante, tem-se

$$0 \leq \|u(x)\|^p \leq (\pi_p(u))^p \sup_{\varphi \in B_{E'}} |\varphi(x)|^p = 0 \cdot \|x\|^p = 0.$$

Portanto $\|u(x)\| = 0$ para todo $x \in E$, o que implica $u = 0$. Por outro lado, sejam $\lambda \in \mathbb{K}$ e $u \in \Pi_p(E; F)$. Se $\lambda = 0$, é claro que $\pi_p(0 \cdot u) = 0 = 0 \cdot \pi_p(u)$, para todo $u \in \Pi_p(E; F)$. Se $\lambda \neq 0$,

$$\begin{aligned}
\pi_p(\lambda u) &= \inf \left\{ c \geq 0 : \sum_{j=1}^n \|\lambda u(x_j)\|^p \leq c^p \sup_{\varphi \in B_{E'}} \sum_{j=1}^n |\varphi(x_j)|^p, x_1, \dots, x_n \in E, n \in \mathbb{N} \right\} \\
&= \inf \left\{ c \geq 0 : |\lambda|^p \sum_{j=1}^n \|u(x_j)\|^p \leq c^p \sup_{\varphi \in B_{E'}} \sum_{j=1}^n |\varphi(x_j)|^p, x_1, \dots, x_n \in E, n \in \mathbb{N} \right\} \\
&= \inf \left\{ \frac{|\lambda|c}{|\lambda|} \geq 0 : \sum_{j=1}^n \|u(x_j)\|^p \leq \left(\frac{c}{|\lambda|} \right)^p \sup_{\varphi \in B_{E'}} \sum_{j=1}^n |\varphi(x_j)|^p, x_1, \dots, x_n \in E, n \in \mathbb{N} \right\} \\
&= |\lambda| \inf \left\{ d \geq 0 : \sum_{j=1}^n \|u(x_j)\|^p \leq d^p \sup_{\varphi \in B_{E'}} \sum_{j=1}^n |\varphi(x_j)|^p, x_1, \dots, x_n \in E, n \in \mathbb{N} \right\} \\
&= |\lambda| \pi_p(u).
\end{aligned}$$

A desigualdade triangular foi provada na equação (4.1).

Já mostramos que $\pi_p(\varphi \otimes b) \leq \|\varphi\| \|b\|$ para todos $\varphi \in E'$ e $b \in F$. Em particular, tome $\varphi = I_{\mathbb{K}}: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ e $b = 1$, o que implica $\varphi \otimes b = I_{\mathbb{K}}$. Logo

$$\pi_p(I_{\mathbb{K}}) = \pi_p(\varphi \otimes b) \leq \|\varphi\| \|b\| = \|I_{\mathbb{K}}\| = 1.$$

Por outro lado, dados $u \in \Pi_p(E; F)$ e $x \in E$,

$$\|u(x)\|^p \leq (\pi_p(u))^p \sup_{\varphi \in B_{E'}} |\varphi(x)|^p = (\pi_p(u))^p \|x\|^p,$$

o que implica $\|u(x)\| \leq \pi_p(u) \|x\|$ para todo $x \in E$. Sabendo que

$$\|u\| = \inf \{ c \geq 0 : \|u(x)\| \leq c \|x\| \text{ para todo } x \in E \},$$

concluimos que $\|u\| \leq \pi_p(u)$. Daí, $1 = \|I_{\mathbb{K}}\| \leq \pi_p(I_{\mathbb{K}})$. Segue que $\pi_p(I_{\mathbb{K}}) = 1$. Portanto (Π_p, π_p) é um ideal normado. Por último mostremos que (Π_p, π_p) é um ideal de Banach. Para isso, usaremos o seguinte resultado:

Proposição 4.12 *Sejam E e F espaços de Banach. Para todo $u \in \Pi_p(E; F)$,*

$$\pi_p(u) = \sup \left\{ \left(\sum_{j=1}^n \|u(x_j)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} : n \in \mathbb{N}, x_1, \dots, x_n \in E \text{ e } \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^n |\varphi(x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq 1 \right\}.$$

Demonstração: Sejam

$$\beta = \sup \left\{ \left(\sum_{j=1}^n \|u(x_j)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} : n \in \mathbb{N}, x_1, \dots, x_n \in E \text{ e } \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^n |\varphi(x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq 1 \right\}$$

e $c \geq 0$ tal que para toda sequência finita $x_1, \dots, x_n \in E$,

$$\left(\sum_{j=1}^n \|u(x_j)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq c \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^n |\varphi(x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (4.2)$$

Em particular, dada uma sequência finita $x_1, \dots, x_n \in E$ tal que

$$\sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^n |\varphi(x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq 1,$$

da equação (4.2) segue que $\left(\sum_{j=1}^n \|u(x_j)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq c$. Portanto $\beta \leq c$. Da definição de $\pi_p(u)$ segue que $\beta \leq \pi_p(u)$. Seja $x_1, \dots, x_n \in E$ uma sequência finita tal que

$$k := \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^n |\varphi(x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} > 0.$$

Então $\left(\sum_{j=1}^n \|u\left(\frac{x_j}{k}\right)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \beta$ pois

$$\sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^n \left| \varphi\left(\frac{x_j}{k}\right) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\frac{1}{k^p} \sum_{j=1}^n |\varphi(x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \frac{\sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^n |\varphi(x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}}}{k} = 1.$$

Da linearidade de u e como $\left(\sum_{j=1}^n \|u\left(\frac{x_j}{k}\right)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \beta$, podemos escrever

$$\left(\sum_{j=1}^n \|u(x_j)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \beta k = \beta \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^n |\varphi(x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (4.3)$$

É óbvio que a equação (4.3) também se verifica para todas sequências finitas $x_1, \dots, x_n \in E$ tais que $k = \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^n |\varphi(x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} = 0$. Então a equação (4.3) se verifica para todas sequências finitas $x_1, \dots, x_n \in E$. Assim, da definição de $\pi_p(u)$ e da equação (4.3) concluimos que $\pi_p(u) \leq \beta$. Daí, $\pi_p(u) = \beta$. $\square$

Provemos que $\Pi_p(E; F)$ é completo relativamente à norma π_p . Seja (u_j) uma sequência de Cauchy em $\Pi_p(E; F)$. Seja $x \in E$ com $x \neq 0$. Dado $\varepsilon > 0$, temos que $\frac{\varepsilon}{\|x\|} > 0$, e portanto existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\pi_p(u_j - u_k) < \frac{\varepsilon}{\|x\|}$ para $j, k \geq j_0$. Então

$$\|u_j(x) - u_k(x)\| = \|(u_j - u_k)(x)\| \leq \|u_j - u_k\| \|x\| \leq \pi_p(u_j - u_k) \|x\| < \frac{\varepsilon}{\|x\|} \cdot \|x\| = \varepsilon.$$

A sequência $(u_j(x))$ é então de Cauchy em F para todo $x \in E$, $x \neq 0$. É claro que o mesmo vale se $x = 0$. Como F é Banach temos que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} u_j(x)$$

existe e pertence a F . Defina

$$\begin{aligned} u: E &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto u(x) = \lim_{j \rightarrow \infty} u_j(x). \end{aligned}$$

É claro que u é linear, pois basta usar a linearidade de u_j para todo $j \in \mathbb{N}$ e as propriedades dos limites. Além disso, como (u_j) é uma sequência de Cauchy em $\Pi_p(E; F)$ e toda sequência de Cauchy é limitada, existe uma constante $c > 0$ tal que $\pi_p(u_j) \leq c$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Provemos que $u \in \Pi_p(E; F)$. Com efeito, considere uma sequência finita $x_1, \dots, x_n \in E$. De

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \|u(x_i)\|^p &= \sum_{i=1}^n \left\| \lim_{j \rightarrow \infty} u_j(x_i) \right\|^p \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \|u_j(x_i)\|^p \\ &\leq \lim_{j \rightarrow \infty} \left((\pi_p(u_j))^p \sup_{\varphi \in B_{E'}} \sum_{i=1}^n |\varphi(x_i)|^p \right) \\ &\leq \left(\lim_{j \rightarrow \infty} c^p \right) \sup_{\varphi \in B_{E'}} \sum_{i=1}^n |\varphi(x_i)|^p \\ &= c^p \sup_{\varphi \in B_{E'}} \sum_{i=1}^n |\varphi(x_i)|^p, \end{aligned}$$

temos que $u \in \Pi_p(E; F)$. Por outro lado, sejam $x_1, \dots, x_n \in E$ com $n \in \mathbb{N}$ tais que $\sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{i=1}^n |\varphi(x_i)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq 1$. Sabemos que para todos j, k ,

$$\left(\sum_{i=1}^n \|(u_j - u_k)(x_i)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \pi_p(u_j - u_k) \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{i=1}^n |\varphi(x_i)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \pi_p(u_j - u_k).$$

Daí, fixado $j \in \mathbb{N}$ e fazendo $k \rightarrow \infty$ obtemos

$$\begin{aligned}
 \left(\sum_{i=1}^n \|u_j(x_i) - u(x_i)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\sum_{i=1}^n \left\| u_j(x_i) - \lim_{k \rightarrow \infty} u_k(x_i) \right\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
 &= \left(\sum_{i=1}^n \left\| \lim_{k \rightarrow \infty} (u_j(x_i) - u_k(x_i)) \right\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
 &= \left(\sum_{i=1}^n \lim_{k \rightarrow \infty} \|u_j(x_i) - u_k(x_i)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^n \|u_j(x_i) - u_k(x_i)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
 &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \pi_p(u_j - u_k),
 \end{aligned}$$

pois $\sup_{\varphi \in B_{E'}} (\sum_{i=1}^n |\varphi(x_i)|^p)^{\frac{1}{p}} \leq 1$. Logo

$$\sup \left\{ \left(\sum_{i=1}^n \|(u_j - u)(x_i)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} : x_j \in E \text{ e } \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{i=1}^n |\varphi(x_i)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq 1 \right\} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \pi_p(u_j - u_k).$$

Portanto, da Proposição 4.12,

$$0 \leq \pi_p(u_j - u) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \pi_p(u_j - u_k).$$

Fazendo $j \rightarrow \infty$, obtemos

$$0 \leq \lim_{j \rightarrow \infty} \pi_p(u_j - u) \leq \lim_{j, k \rightarrow \infty} \pi_p(u_j - u_k) = 0.$$

Assim, $\lim_{j \rightarrow \infty} \pi_p(u_j - u) = 0$, o que implica $\lim_{j \rightarrow \infty} u_j = u$ com $u \in \Pi_p(E; F)$, ou seja, $\Pi_p(E; F)$ é completo para todos espaços de Banach E e F .

O próximo Teorema é um resultado central da teoria dos operadores absolutamente p -somantes:

Teorema 4.13 (Forma fraca do Teorema de Dvoretzky-Rogers [5, Theorem 2.18]) *Sejam E um espaço de Banach e $1 \leq p < \infty$. Então $I_E \in \Pi_p(E; E)$ se, e somente se, E tem dimensão finita.*

4.2 Ideais de aplicações multilineares

Nesta seção introduziremos a noção geral de ideais de aplicações multilineares, iniciada por Pietsch [13]. Veremos também algumas propriedades e alguns exemplos.

Definição 4.14 Sejam $E_1, \dots, E_n, F, G$ e H espaços de Banach, $A \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$, $t \in \mathcal{L}(F; H)$ e $u_j \in \mathcal{L}(G_j; E_j)$ para $j = 1, \dots, n$. Definimos a aplicação $t \circ A \circ (u_1, \dots, u_n): G_1 \times \dots \times G_n \rightarrow H$,

$$(t \circ A \circ (u_1, \dots, u_n))(x_1, \dots, x_n) = t(A(u_1(x_1), \dots, u_n(x_n))).$$

Proposição 4.15 *A aplicação $t \circ A \circ (u_1, \dots, u_n)$, como definida acima, é n -linear, contínua e $\|t \circ A \circ (u_1, \dots, u_n)\| \leq \|t\| \|A\| \|u_1\| \dots \|u_n\|$.*

Demonstração: Usando a linearidade dos operadores $t, u_1, \dots, u_n$ e o fato de A ser n -linear prova-se facilmente que a aplicação $t \circ A \circ (u_1, \dots, u_n)$ é n -linear. Mais ainda, para todos $x_1 \in G_1, \dots, x_n \in G_n$,

$$\begin{aligned} \|(t \circ A \circ (u_1, \dots, u_n))(x_1, \dots, x_n)\| &= \|t(A(u_1(x_1), \dots, u_n(x_n)))\| \\ &\leq \|t\| \|A(u_1(x_1), \dots, u_n(x_n))\| \\ &\leq \|t\| \|A\| \|u_1(x_1)\| \cdots \|u_n(x_n)\| \\ &\leq \|t\| \|A\| \|u_1\| \cdots \|u_n\| \|x_1\| \cdots \|x_n\|. \end{aligned}$$

Logo a aplicação $t \circ A \circ (u_1, \dots, u_n)$ é contínua. Além disso, da Proposição 2.8 temos que $\|t \circ A \circ (u_1, \dots, u_n)\| \leq \|t\| \|A\| \|u_1\| \cdots \|u_n\|$. $\square$

Definição 4.16 Um *ideal de aplicações multilineares* (ou *multi-ideal*) é uma subclasse $\mathcal{M}$ da classe de todas as aplicações multilineares contínuas entre espaços de Banach sobre $\mathbb{K}$ tal que para todos $n \in \mathbb{N}$ e espaços de Banach $E_1, \dots, E_n$ e F , suas componentes $\mathcal{M}(E_1, \dots, E_n; F) := \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F) \cap \mathcal{M}$ satisfazem:

1) $\mathcal{M}(E_1, \dots, E_n; F)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ que contém as aplicações n -lineares contínuas de tipo finito.

2) A propriedade de ideal: se $A \in \mathcal{M}(E_1, \dots, E_n; F)$, $u_j \in \mathcal{L}(G_j; E_j)$, $j = 1, \dots, n$, e $t \in \mathcal{L}(F; H)$, então $t \circ A \circ (u_1, \dots, u_n) \in \mathcal{M}(G_1, \dots, G_n; H)$.

Além disso, se existe uma função $\|\cdot\|_{\mathcal{M}}: \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty)$ tal que

a) $\|\cdot\|_{\mathcal{M}}$ restrita à componente $\mathcal{M}(E_1, \dots, E_n; F)$ é uma norma para todos espaços de Banach $E_1, \dots, E_n$ e F e para todo $n \in \mathbb{N}$;

b) A forma n -linear $A^n: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$ dada por $A^n(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \lambda_1 \cdots \lambda_n$, é tal que $\|A^n\|_{\mathcal{M}} = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$;

c) Se $A \in \mathcal{M}(E_1, \dots, E_n; F)$, $u_j \in \mathcal{L}(G_j; E_j)$, $j = 1, \dots, n$, e $t \in \mathcal{L}(F; H)$, então

$$\|t \circ A \circ (u_1, \dots, u_n)\|_{\mathcal{M}} \leq \|t\| \|A\|_{\mathcal{M}} \|u_1\| \cdots \|u_n\|;$$

dizemos que $(\mathcal{M}, \|\cdot\|_{\mathcal{M}})$ é um *multi-ideal normado*. Mais ainda, se cada componente $\mathcal{M}(E_1, \dots, E_n; F)$ é um subespaço completo relativamente à norma $\|\cdot\|_{\mathcal{M}}$, dizemos que $(\mathcal{M}, \|\cdot\|_{\mathcal{M}})$ é um *multi-ideal de Banach*.

Um multi-ideal $\mathcal{M}$ é um *multi-ideal fechado* se cada componente $\mathcal{M}(E_1, \dots, E_n; F)$ é um subespaço fechado de $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ em relação à norma do sup.

Denotaremos também por $\mathcal{L}$ a classe de todas as aplicações multilineares contínuas entre espaços de Banach. Note que $\mathcal{L}$ é o maior multi-ideal.

Observação 4.17 Se considerarmos um multi-ideal $\mathcal{M}$ com a norma do sup, temos que $(\mathcal{M}, \|\cdot\|)$ é um multi-ideal normado, pois

a) A função $\|\cdot\|$ restrita à componente $\mathcal{M}(E_1, \dots, E_n; F)$ é uma norma para todo $n \in \mathbb{N}$ e para todos espaços de Banach $E_1, \dots, E_n$ e F por se tratar da norma induzida pela norma sup, uma vez que $\mathcal{M}(E_1, \dots, E_n; F) \subseteq \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$.

b) Seja $A^n: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$ dada por $A^n(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \lambda_1 \cdots \lambda_n$. Logo

$$\|A^n\| = \sup_{\substack{\lambda_j \in B_{\mathbb{K}} \\ 1 \leq j \leq n}} |A^n(\lambda_1, \dots, \lambda_n)| = \sup_{\substack{\lambda_j \in B_{\mathbb{K}} \\ 1 \leq j \leq n}} |\lambda_1 \cdots \lambda_n| = \sup_{\substack{\lambda_j \in B_{\mathbb{K}} \\ 1 \leq j \leq n}} |\lambda_1| \cdots |\lambda_n| = 1.$$

c) Vimos na Proposição 4.15 que se $A \in \mathcal{M}(E_1, \dots, E_n; F) \subseteq \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$, $u_j \in \mathcal{L}(G_j; E_j)$, $j = 1, \dots, n$ e $t \in \mathcal{L}(F; H)$ então

$$\|t \circ A \circ (u_1, \dots, u_n)\| \leq \|t\| \|A\| \|u_1\| \cdots \|u_n\|;$$

Logo $(\mathcal{M}, \|\cdot\|)$ é um multi-ideal normado.

Sejam $E_1, \dots, E_n$ e F espaços de Banach, $\varphi_1 \in E'_1, \dots, \varphi_n \in E'_n$ e $y \in F$. Pelo Exemplo 2.14, $\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n \otimes y \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ e $\|\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n \otimes y\| = \|y\| \|\varphi_1\| \cdots \|\varphi_n\|$. E como $\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n \otimes y$ é uma aplicação n -linear de tipo finito tem-se

$$\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n \otimes y \in \mathcal{M}(E_1, \dots, E_n; F)$$

para todo multi-ideal $\mathcal{M}$.

Proposição 4.18 *Sejam $E_1, \dots, E_n$ e F espaços de Banach e $(\mathcal{M}, \|\cdot\|_{\mathcal{M}})$ um multi-ideal normado. Então*

- (a) $\|A\| \leq \|A\|_{\mathcal{M}}$ para toda aplicação $A \in \mathcal{M}(E_1, \dots, E_n; F)$.
- (b) $\|\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n \otimes y\|_{\mathcal{M}} = \|\varphi_1\| \cdots \|\varphi_n\| \|y\|$ para todos $\varphi_1 \in E'_1, \dots, \varphi_n \in E'_n$ e $y \in F$.

Demonstração: (a) Sejam $A \in \mathcal{M}(E_1, \dots, E_n; F)$, $x_1 \in B_{E_1}, \dots, x_n \in B_{E_n}$ e $\varphi \in B_{F'}$. Consideremos as aplicações $A^n: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$ dada por $A^n(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \lambda_1 \cdots \lambda_n$ e $\varphi \circ A \circ (I_{\mathbb{K}} \otimes x_1, \dots, I_{\mathbb{K}} \otimes x_n): \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$ dada por

$$(\varphi \circ A \circ (I_{\mathbb{K}} \otimes x_1, \dots, I_{\mathbb{K}} \otimes x_n))(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \varphi(A(\lambda_1 x_1, \dots, \lambda_n x_n)).$$

Provemos que

$$\varphi \circ A \circ (I_{\mathbb{K}} \otimes x_1, \dots, I_{\mathbb{K}} \otimes x_n) = \varphi(A(x_1, \dots, x_n))A^n.$$

Com efeito, dados $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} (\varphi(A(x_1, \dots, x_n))A^n)(\lambda_1, \dots, \lambda_n) &= \varphi(A(x_1, \dots, x_n))A^n(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \\ &= \varphi(A(x_1, \dots, x_n))\lambda_1 \cdots \lambda_n \\ &= \varphi(A(\lambda_1 x_1, \dots, \lambda_n x_n)) \\ &= (\varphi \circ A \circ (I_{\mathbb{K}} \otimes x_1, \dots, I_{\mathbb{K}} \otimes x_n))(\lambda_1, \dots, \lambda_n). \end{aligned}$$

Agora, observe que

$$\begin{aligned} |\varphi(A(x_1, \dots, x_n))| &= |\varphi(A(x_1, \dots, x_n))| \|A^n\|_{\mathcal{M}} \\ &= \|\varphi(A(x_1, \dots, x_n))A^n\|_{\mathcal{M}} \\ &= \|\varphi \circ A \circ (I_{\mathbb{K}} \otimes x_1, \dots, I_{\mathbb{K}} \otimes x_n)\|_{\mathcal{M}} \\ &\leq \|\varphi\| \|A\|_{\mathcal{M}} \|I_{\mathbb{K}} \otimes x_1\| \cdots \|I_{\mathbb{K}} \otimes x_n\| \\ &= \|\varphi\| \|A\|_{\mathcal{M}} \|x_1\| \cdots \|x_n\| \leq \|A\|_{\mathcal{M}}. \end{aligned}$$

Segue que $|\varphi(A(x_1, \dots, x_n))| \leq \|A\|_{\mathcal{M}}$ para quaisquer $x_1 \in B_{E_1}, \dots, x_n \in B_{E_n}$, $\varphi \in B_{F'}$ e $A \in \mathcal{M}(E_1, \dots, E_n; F)$. Daí e pelo Teorema de Hahn-Banach,

$$\|A\| = \sup_{\substack{x_j \in B_{E_j} \\ 1 \leq j \leq n}} \|A(x_1, \dots, x_n)\| = \sup_{\substack{x_j \in B_{E_j} \\ 1 \leq j \leq n}} \sup_{\varphi \in B_{F'}} |\varphi(A(x_1, \dots, x_n))| \leq \|A\|_{\mathcal{M}},$$

para toda aplicação $A \in \mathcal{M}(E_1, \dots, E_n; F)$ e para todos espaços de Banach $E_1, \dots, E_n$ e F .

(b) Dados $\varphi_1 \in E'_1, \dots, \varphi_n \in E'_n$ e $y \in F$, considere a aplicação n -linear contínua de tipo finito $\varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_n \otimes y: E_1 \times \dots \times E_n \longrightarrow F$ dada por

$$(\varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_n \otimes y)(x_1, \dots, x_n) = \varphi_1(x_1) \dots \varphi_n(x_n)y.$$

Como $\varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_n \otimes y \in \mathcal{M}(E_1, \dots, E_n; F)$, usando o item (a) temos que

$$\|\varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_n \otimes y\| \leq \|\varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_n \otimes y\|_{\mathcal{M}}.$$

Por outro lado, $\varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_n \otimes y = (I_{\mathbb{K}} \otimes y) \circ A^n \circ (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$. De fato, dados $x_1 \in E_1, \dots, x_n \in E_n$,

$$\begin{aligned} ((I_{\mathbb{K}} \otimes y) \circ A^n \circ (\varphi_1, \dots, \varphi_n))(x_1, \dots, x_n) &= (I_{\mathbb{K}} \otimes y)(A^n(\varphi_1(x_1), \dots, \varphi_n(x_n))) \\ &= (I_{\mathbb{K}} \otimes y)(\varphi_1(x_1) \dots \varphi_n(x_n)) \\ &= I_{\mathbb{K}}(\varphi_1(x_1) \dots \varphi_n(x_n))y \\ &= \varphi_1(x_1) \dots \varphi_n(x_n)y \\ &= (\varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_n \otimes y)(x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \|\varphi_1\| \dots \|\varphi_n\| \|y\| &= \|\varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_n \otimes y\| \\ &\leq \|\varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_n \otimes y\|_{\mathcal{M}} \\ &= \|(I_{\mathbb{K}} \otimes y) \circ A^n \circ (\varphi_1, \dots, \varphi_n)\|_{\mathcal{M}} \\ &\leq \|I_{\mathbb{K}} \otimes y\| \|A^n\|_{\mathcal{M}} \|\varphi_1\| \dots \|\varphi_n\| \\ &= \|y\| \|\varphi_1\| \dots \|\varphi_n\|, \end{aligned}$$

o que prova (b). □

Exemplo 4.19 Ideal das aplicações multilineares contínuas de tipo finito (ou multi-ideal de tipo finito).

Provemos que $\mathcal{L}_f$ é um multi-ideal. Sabemos que $A \in \mathcal{L}_f(E_1, \dots, E_n; F)$ se, e somente se, existem $k \in \mathbb{N}$, $\varphi_i^j \in E'_i$ e $b_j \in F$ para $j = 1, \dots, k$ e $i = 1, \dots, n$, tais que

$$A(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^k \varphi_1^j(x_1) \dots \varphi_n^j(x_n) b_j$$

para quaisquer $x_1 \in E_1, \dots, x_n \in E_n$. Dessa representação fica claro que $\mathcal{L}_f(E_1, \dots, E_n; F)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$; que, por definição, contém as aplicações n -lineares contínuas de tipo finito.

Propriedade de ideal: Sejam $A \in \mathcal{L}_f(E_1, \dots, E_n; F)$, $u_j \in \mathcal{L}(G_j; E_j)$, $j = 1, \dots, n$ e $t \in \mathcal{L}(F; H)$. Existem $m \in \mathbb{N}$, $\varphi_i^j \in E'_j$ e $b_i \in F$, $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$, tais que para $x_1 \in E_1, \dots, x_n \in E_n$,

$$A(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^m \varphi_1^i(x_1) \dots \varphi_n^i(x_n) b_i.$$

Dados $y_1 \in G_1, \dots, y_n \in G_n$,

$$\begin{aligned} (t \circ A \circ (u_1, \dots, u_n))(y_1, \dots, y_n) &= t(A(u_1(y_1), \dots, u_n(y_n))) \\ &= t\left(\sum_{i=1}^m \varphi_1^i(u_1(y_1)) \dots \varphi_n^i(u_n(y_n)) b_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^m (\varphi_1^i \circ u_1)(y_1) \dots (\varphi_n^i \circ u_n)(y_n) t(b_i). \end{aligned}$$

Como $\varphi_j^i \circ u_j \in G_j'$ e $t(b_i) \in H$, $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$, concluímos que $t \circ A \circ (u_1, \dots, u_n) \in \mathcal{L}_f(G_1, \dots, G_n; H)$. Logo $\mathcal{L}_f$ é um multi-ideal e usando a Observação 4.17 temos que $(\mathcal{L}_f, \|\cdot\|)$ é um multi-ideal normado. Obviamente $\mathcal{L}_f$ é o menor multi-ideal.

Antes de dar o próximo exemplo, vejamos que o fecho de um multi-ideal é um multi-ideal fechado:

Lema 4.20 *Sejam $E_1, \dots, E_n$ e F espaços de Banach e $\mathcal{M}$ um multi-ideal. Definindo $\overline{\mathcal{M}}(E_1, \dots, E_n; F) = \overline{\mathcal{M}(E_1, \dots, E_n; F)}$, temos que $\overline{\mathcal{M}}$ é um multi-ideal fechado.*

Demonstração: Basta provar que $\overline{\mathcal{M}}$ é um multi-ideal:

1) Por hipótese $\mathcal{M}$ é um multi-ideal, logo $\mathcal{M}(E_1, \dots, E_n; F)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$, e portanto $\overline{\mathcal{M}}(E_1, \dots, E_n; F) := \overline{\mathcal{M}(E_1, \dots, E_n; F)}$ é também um subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$. Mais ainda,

$$\mathcal{L}_f(E_1, \dots, E_n; F) \subseteq \mathcal{M}(E_1, \dots, E_n; F) \subseteq \overline{\mathcal{M}(E_1, \dots, E_n; F)} =: \overline{\mathcal{M}}(E_1, \dots, E_n; F).$$

2) Propriedade de ideal: sejam $A \in \overline{\mathcal{M}}(E_1, \dots, E_n; F)$, $u_j \in \mathcal{L}(G_j; E_j)$, $j = 1, \dots, n$ e $t \in \mathcal{L}(F; H)$. Existe uma sequência $(A_j) \subseteq \mathcal{M}(E_1, \dots, E_n; F)$ tal que $A_j \rightarrow A$. Considerando a sequência $(t \circ A_j \circ (u_1, \dots, u_n)) \subseteq \mathcal{M}(G_1, \dots, G_n; H)$, para todos vetores $x_1 \in G_1, \dots, x_n \in G_n$,

$$\begin{aligned} \|t(A_j(u_1(x_1), \dots, u_n(x_n))) - t(A(u_1(x_1), \dots, u_n(x_n)))\| \\ = \|t((A_j - A)(u_1(x_1), \dots, u_n(x_n)))\| \\ \leq \|t\| \|(A_j - A)(u_1(x_1), \dots, u_n(x_n))\| \\ \leq \|t\| \|A_j - A\| \|u_1(x_1)\| \cdots \|u_n(x_n)\| \\ \leq \|t\| \|A_j - A\| \|u_1\| \|x_1\| \cdots \|u_n\| \|x_n\|. \end{aligned}$$

Tomando o supremo sobre todos os vetores $x_j \in B_{E_j}$, $j = 1, \dots, n$,

$$0 \leq \|t \circ A_j \circ (u_1, \dots, u_n) - t \circ A \circ (u_1, \dots, u_n)\| \leq \|t\| \|u_1\| \cdots \|u_n\| \|A_j - A\|.$$

Como $A_j \rightarrow A$, segue que $\|A_j - A\| \rightarrow 0$, e portanto

$$0 \leq \lim_{j \rightarrow \infty} \|t \circ A_j \circ (u_1, \dots, u_n) - t \circ A \circ (u_1, \dots, u_n)\| \leq \|t\| \|u_1\| \cdots \|u_n\| \lim_{j \rightarrow \infty} \|A_j - A\| = 0,$$

provando que $\|t \circ A_j \circ (u_1, \dots, u_n) - t \circ A \circ (u_1, \dots, u_n)\| \rightarrow 0$, ou seja,

$$t \circ A_j \circ (u_1, \dots, u_n) \rightarrow t \circ A \circ (u_1, \dots, u_n).$$

Como $(t \circ A_j \circ (u_1, \dots, u_n)) \subseteq \mathcal{M}(G_1, \dots, G_n; H)$, isso implica que $t \circ A \circ (u_1, \dots, u_n) \in \overline{\mathcal{M}}(G_1, \dots, G_n; H)$. $\square$

Exemplo 4.21 Ideal das aplicações multilineares aproximáveis (ou multi-ideal das aplicações aproximáveis).

Sejam $E_1, \dots, E_n$ e F espaços de Banach. Dizemos que uma aplicação $A \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ é *aproximável* se existe uma sequência $(A_j) \subseteq \mathcal{L}_f(E_1, \dots, E_n; F)$ tal que $A_j \rightarrow A$. Denotaremos por $\mathcal{L}_A(E_1, \dots, E_n; F)$ o espaço de todas as aplicações n -lineares aproximáveis de $E_1 \times \cdots \times E_n$ em F . Assim, $\mathcal{L}_A(E_1, \dots, E_n; F) := \overline{\mathcal{L}_f(E_1, \dots, E_n; F)}$.

Pelo Lema 4.20 segue que $\mathcal{L}_A$ é um multi-ideal fechado, uma vez que pelo Exemplo 4.19 temos que $\mathcal{L}_f$ é um multi-ideal.

Seja $\mathcal{M}$ um multi-ideal fechado. Dados $E_1, \dots, E_n$ e F espaços de Banach, sabemos que $\mathcal{L}_f(E_1, \dots, E_n; F) \subseteq \mathcal{M}(E_1, \dots, E_n; F)$, o que implica

$$\mathcal{L}_A(E_1, \dots, E_n; F) := \overline{\mathcal{L}_f(E_1, \dots, E_n; F)} \subseteq \overline{\mathcal{M}(E_1, \dots, E_n; F)} = \mathcal{M}(E_1, \dots, E_n; F).$$

Portanto $\mathcal{L}_A \subseteq \mathcal{M}$, isto é, $\mathcal{L}_A$ é o menor multi-ideal fechado. Em particular, $(\mathcal{L}_A, \|\cdot\|)$ é um multi-ideal de Banach.

Mais exemplos serão vistos na próxima seção.

4.3 Multi-ideais de composição

Nesta seção apresentaremos um procedimento para gerar multi-ideais a partir de ideais de operadores lineares. Nosso interesse nesse procedimento é o papel central desempenhado pela norma projetiva.

Definição 4.22 Seja $\mathcal{I}$ um ideal de operadores. Uma aplicação n -linear contínua $A \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ pertence a $\mathcal{I} \circ \mathcal{L}$, neste caso escrevemos $A \in \mathcal{I} \circ \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$, se existem um espaço de Banach G , uma aplicação n -linear contínua $B \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; G)$ e um operador linear $u \in \mathcal{I}(G; F)$ tais que $A = u \circ B$.

Observação 4.23 Dada a forma $A \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; \mathbb{K})$, considere sua linearização dada pelo Teorema 3.17, $A_L: E_1 \hat{\otimes}_\pi \dots \hat{\otimes}_\pi E_n \longrightarrow \mathbb{K}$ onde $A_L(x_1 \otimes \dots \otimes x_n) = A(x_1, \dots, x_n)$. Como $A = A_L \circ \sigma_n$ e A_L pertence a $\mathcal{I}$ por ser um operador de posto finito, $A \in \mathcal{I} \circ \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; \mathbb{K})$. Em outras palavras, as formas multilineares contínuas pertencem a $\mathcal{I} \circ \mathcal{L}$.

Proposição 4.24 Se $\mathcal{I}$ é um ideal de operadores, então $\mathcal{I} \circ \mathcal{L}$ é um multi-ideal.

Demonstração: Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $E_1, \dots, E_n$ e F espaços de Banach.

1) Mostremos que $\mathcal{I} \circ \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$. É claro que $0 \in \mathcal{I} \circ \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$. Sejam $A_1, A_2 \in \mathcal{I} \circ \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$. Existem espaços de Banach G_1 e G_2 , aplicações $B_1 \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; G_1)$ e $B_2 \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; G_2)$ e operadores $u_1 \in \mathcal{I}(G_1; F)$ e $u_2 \in \mathcal{I}(G_2; F)$ tais que $A_1 = u_1 \circ B_1$ e $A_2 = u_2 \circ B_2$. Defina as seguintes aplicações:

$$\begin{aligned} B: E_1 \times \dots \times E_n &\longrightarrow G_1 \times G_2 \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto B(x_1, \dots, x_n) = (B_1(x_1, \dots, x_n), B_2(x_1, \dots, x_n)) \text{ e} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u: G_1 \times G_2 &\longrightarrow F \\ (y_1, y_2) &\mapsto u(y_1, y_2) = u_1(y_1) + u_2(y_2). \end{aligned}$$

Provemos que B é uma aplicação n -linear contínua. Por um lado, dados $x_i, x'_i \in E_i$ com $i = 1, \dots, n$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ tem-se

$$\begin{aligned} B(x_1, \dots, \lambda x_i + x'_i, \dots, x_n) &= (B_1(x_1, \dots, \lambda x_i + x'_i, \dots, x_n), B_2(x_1, \dots, \lambda x_i + x'_i, \dots, x_n)) \\ &= (\lambda B_1(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) + B_1(x_1, \dots, x'_i, \dots, x_n), \\ &\quad \lambda B_2(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) + B_2(x_1, \dots, x'_i, \dots, x_n)) \\ &= (\lambda(B_1(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n), B_2(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)) \\ &\quad + (B_1(x_1, \dots, x'_i, \dots, x_n), B_2(x_1, \dots, x'_i, \dots, x_n))) \\ &= \lambda B(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) + B(x_1, \dots, x'_i, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Por outro lado, dados $x_1 \in E_1, \dots, x_n \in E_n$, considerando a norma do máximo no produto cartesiano,

$$\begin{aligned} \|B(x_1, \dots, x_n)\| &= \|(B_1(x_1, \dots, x_n), B_2(x_1, \dots, x_n))\| \\ &= \max\{\|B_1(x_1, \dots, x_n)\|, \|B_2(x_1, \dots, x_n)\|\} \\ &\leq (\|B_1\| + \|B_2\|)\|x_1\| \cdots \|x_n\|. \end{aligned}$$

Logo $B \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; G_1 \times G_2)$. Afirmamos que $u \in \mathcal{I}(G_1 \times G_2; F)$. Com efeito, considerando as projeções

$$\begin{aligned} \pi_1: G_1 \times G_2 &\longrightarrow G_1 \\ (y_1, y_2) &\mapsto \pi_1(y_1, y_2) = y_1 \text{ e} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\pi_2: G_1 \times G_2 &\longrightarrow G_2 \\ (y_1, y_2) &\mapsto \pi_2(y_1, y_2) = y_2,\end{aligned}$$

para todos $y_1 \in G_1$ e $y_2 \in G_2$,

$$\begin{aligned}u(y_1, y_2) &= u_1(y_1) + u_2(y_2) = u_1(\pi_1(y_1, y_2)) + u_2(\pi_2(y_1, y_2)) \\ &= (u_1 \circ \pi_1)(y_1, y_2) + (u_2 \circ \pi_2)(y_1, y_2) = (u_1 \circ \pi_1 + u_2 \circ \pi_2)(y_1, y_2),\end{aligned}$$

provando que $u = u_1 \circ \pi_1 + u_2 \circ \pi_2$. Como $\pi_1 \in \mathcal{L}(G_1 \times G_2; G_1)$, $\pi_2 \in \mathcal{L}(G_1 \times G_2; G_2)$, $u_1 \in \mathcal{I}(G_1; F)$ e $u_2 \in \mathcal{I}(G_2; F)$, segue da propriedade de ideal que $u_1 \circ \pi_1 \in \mathcal{I}(G_1 \times G_2; F)$ e $u_2 \circ \pi_2 \in \mathcal{I}(G_1 \times G_2; F)$. Como $\mathcal{I}(G_1 \times G_2; F)$ é subespaço vetorial, segue que $u \in \mathcal{I}(G_1 \times G_2; F)$. Além disso, dados $x_1 \in E_1, \dots, x_n \in E_n$,

$$\begin{aligned}(u \circ B)(x_1, \dots, x_n) &= u(B(x_1, \dots, x_n)) \\ &= u(B_1(x_1, \dots, x_n), B_2(x_1, \dots, x_n)) \\ &= u_1(B_1(x_1, \dots, x_n)) + u_2(B_2(x_1, \dots, x_n)) \\ &= A_1(x_1, \dots, x_n) + A_2(x_1, \dots, x_n) \\ &= (A_1 + A_2)(x_1, \dots, x_n).\end{aligned}$$

Assim, $A_1 + A_2 = u \circ B$ com $G_1 \times G_2$ espaço de Banach, $u \in \mathcal{I}(G_1 \times G_2; F)$ e $B \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; G_1 \times G_2)$. Conclui-se que $A_1 + A_2 \in \mathcal{I} \circ \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$. Sejam $A \in \mathcal{I} \circ \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Existem um espaço de Banach G , uma aplicação n -linear contínua $B \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; G)$ e um operador $u \in \mathcal{I}(G; F)$ tais que $A = u \circ B$. Isso implica $\lambda A = (\lambda u) \circ B$ com $B \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; G)$ e $\lambda u \in \mathcal{I}(G; F)$, uma vez que $\mathcal{I}(G; F)$ é um subespaço vetorial. Portanto $\lambda A \in \mathcal{I} \circ \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ e consequentemente $\mathcal{I} \circ \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ para todos espaços de Banach $E_1, \dots, E_n$ e F .

Provemos que $\mathcal{I} \circ \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ contém as aplicações n -lineares contínuas de tipo finito. Sejam $\varphi_1 \in E'_1, \dots, \varphi_n \in E'_n$ e $b \in F$. Considere a aplicação $A: E_1 \times \dots \times E_n \longrightarrow F$ dada por $A(x_1, \dots, x_n) = \varphi_1(x_1) \cdots \varphi_n(x_n)b$. Defina

$$\begin{aligned}B: E_1 \times \dots \times E_n &\longrightarrow E_n \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto B(x_1, \dots, x_n) = \varphi_1(x_1) \cdots \varphi_{n-1}(x_{n-1})x_n.\end{aligned}$$

Já vimos que o operador $\varphi_n \otimes b: E_n \longrightarrow F$ dado por $(\varphi_n \otimes b)(y) = \varphi_n(y)b$ pertence a $\mathcal{I}(E_n; F)$. Dados $x_1 \in E_1, \dots, x_n \in E_n$,

$$\begin{aligned}((\varphi_n \otimes b) \circ B)(x_1, \dots, x_n) &= (\varphi_n \otimes b)(B(x_1, \dots, x_n)) \\ &= (\varphi_n \otimes b)(\varphi_1(x_1) \cdots \varphi_{n-1}(x_{n-1})x_n) \\ &= \varphi_1(x_1) \cdots \varphi_{n-1}(x_{n-1})(\varphi_n \otimes b)(x_n) \\ &= \varphi_1(x_1) \cdots \varphi_{n-1}(x_{n-1})\varphi_n(x_n)b \\ &= A(x_1, \dots, x_n).\end{aligned}$$

Portanto $A = (\varphi_n \otimes b) \circ B$ com $(\varphi_n \otimes b) \in \mathcal{I}(E_n; F)$ e $B \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; E_n)$, ou seja, $A \in \mathcal{I} \circ \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$. Como toda n -linear contínua de tipo finito é uma combinação linear de n -lineares contínuas dessa forma e como $\mathcal{I} \circ \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ é subespaço vetorial, concluímos que $\mathcal{L}_f(E_1, \dots, E_n; F) \subseteq \mathcal{I} \circ \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$.

2) Propriedade de ideal: sejam $A \in \mathcal{I} \circ \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$, $u_j \in \mathcal{L}(G_j; E_j)$, $j = 1, \dots, n$, e $t \in \mathcal{L}(F; H)$. Queremos mostrar que $t \circ A \circ (u_1, \dots, u_n) \in \mathcal{I} \circ \mathcal{L}(G_1, \dots, G_n; H)$. Sabemos que existem um espaço de Banach W , uma aplicação $B \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; W)$ e um operador

$u \in \mathcal{I}(W; F)$ tais que $A = u \circ B$. Como $t \in \mathcal{L}(F; H)$ e $u \in \mathcal{I}(W; F)$, segue da propriedade de ideal que $t \circ u \in \mathcal{I}(W; H)$. Defina $C: G_1 \times \cdots \times G_n \longrightarrow W$ por

$$C(x_1, \dots, x_n) = (B \circ (u_1, \dots, u_n))(x_1, \dots, x_n) = B(u_1(x_1), \dots, u_n(x_n)).$$

É claro que $C \in \mathcal{L}(G_1, \dots, G_n; W)$. Para todos $x_1 \in G_1, \dots, x_n \in G_n$,

$$\begin{aligned} ((t \circ u) \circ C)(x_1, \dots, x_n) &= t(u(C(x_1, \dots, x_n))) \\ &= t(u(B(u_1(x_1), \dots, u_n(x_n)))) \\ &= t((u \circ B)(u_1(x_1), \dots, u_n(x_n))) \\ &= t(A(u_1(x_1), \dots, u_n(x_n))) \\ &= (t \circ A \circ (u_1, \dots, u_n))(x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Concluimos que $t \circ A \circ (u_1, \dots, u_n) = (t \circ u) \circ C$ com $(t \circ u) \in \mathcal{I}(W; H)$ e $C \in \mathcal{L}(G_1, \dots, G_n; W)$, ou seja, $t \circ A \circ (u_1, \dots, u_n) \in \mathcal{I} \circ \mathcal{L}(G_1, \dots, G_n; H)$. Portanto $\mathcal{I} \circ \mathcal{L}$ é um multi-ideal. $\square$

Para verificar que uma aplicação n -linear contínua A pertence ou não a $\mathcal{I} \circ \mathcal{L}$, pela definição é necessário investigar a existência de uma fatoração da forma $A = u \circ B$ com $u \in \mathcal{I}$. Como isso nem sempre é fácil (principalmente para provar que não existe tal fatoração), bem vindo será um critério que permita verificar se A pertence ou não a $\mathcal{I} \circ \mathcal{L}$ diretamente. É exatamente nesse ponto que o produto tensorial projetivo mostra sua importância:

Proposição 4.25 *Seja $\mathcal{I}$ um ideal de operadores. As afirmações seguintes são equivalentes para a aplicação n -linear contínua $A \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$:*

- (a) $A \in \mathcal{I} \circ \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$.
- (b) $A_L \in \mathcal{I}(E_1 \hat{\otimes}_\pi \cdots \hat{\otimes}_\pi E_n; F)$, onde A_L é a linearização de A dada pelo Teorema 3.17.

Demonstração: (a) $\implies$ (b) Suponha $A \in \mathcal{I} \circ \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$. Existem um espaço de Banach G , uma aplicação $B \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; G)$ e um operador $u \in \mathcal{I}(G; F)$ tais que $A = u \circ B$. Considerando a linearização de B , denotada por B_L , observe que para todos $x_1 \in E_1, \dots, x_n \in E_n$,

$$\begin{aligned} (u \circ B_L)(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) &= u(B_L(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n)) \\ &= u(B(x_1, \dots, x_n)) \\ &= A(x_1, \dots, x_n) \\ &= A_L(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n). \end{aligned}$$

Como $(u \circ B_L)$ e A_L são lineares, então $(u \circ B_L)(z) = A_L(z)$ para todo $z \in E_1 \otimes_\pi \cdots \otimes_\pi E_n$. Sendo $(u \circ B_L)$ e A_L operadores lineares contínuos, da unicidade da extensão ao fecho segue que estes operadores coincidem também em $E_1 \hat{\otimes}_\pi \cdots \hat{\otimes}_\pi E_n$, ou seja, $A_L = u \circ B_L$. Como u pertence a $\mathcal{I}$, a propriedade de ideal garante que $A_L \in \mathcal{I}(E_1 \hat{\otimes}_\pi \cdots \hat{\otimes}_\pi E_n; F)$.

(b) $\implies$ (a) Seja $\sigma_n: E_1 \times \cdots \times E_n \longrightarrow E_1 \hat{\otimes}_\pi \cdots \hat{\otimes}_\pi E_n$ a aplicação n -linear contínua dada por $\sigma_n(x_1, \dots, x_n) = x_1 \otimes \cdots \otimes x_n$. Temos que $A_L \in \mathcal{I}(E_1 \hat{\otimes}_\pi \cdots \hat{\otimes}_\pi E_n; F)$ por hipótese e que $A = A_L \circ \sigma_n$ pelo Teorema 3.17. Isso nos permite concluir que $A \in \mathcal{I} \circ \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$. $\square$

Decorre da Proposição 4.25 que para verificar se uma aplicação n -linear contínua A pertence ou não a $\mathcal{I} \circ \mathcal{L}$ basta checarmos a fatoração $A = A_L \circ \sigma_n$, pois se A_L não pertence a $\mathcal{I}$ necessariamente A não pertencerá a $\mathcal{I} \circ \mathcal{L}$, e consequentemente não perderemos tempo investigando a existência de outra fatoração.

Corolário 4.26 *Se $\mathcal{I}$ é um ideal fechado, então $\mathcal{I} \circ \mathcal{L}$ é multi-ideal fechado.*

Demonstração: Pela Proposição 4.24 basta mostrar que $\mathcal{I} \circ \mathcal{L}$ é fechado. Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $E_1, \dots, E_n$ e F espaços de Banach. Considere ainda uma sequência $(A_j) \subseteq \mathcal{I} \circ \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ tal que $A_j \rightarrow A \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$. Consideremos as linearizações $(A_j)_L$ de A_j dadas pelo Teorema 3.17 e recordemos que $\|B\| = \|B_L\|$ para toda aplicação $B \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$, e também que a correspondência $B \longleftrightarrow B_L$ é um isomorfismo isométrico entre os espaços de Banach $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ e $\mathcal{L}(E_1 \hat{\otimes}_\pi \dots \hat{\otimes}_\pi E_n; F)$. De tudo isso,

$$\|(A_j)_L - A_L\| = \|(A_j - A)_L\| = \|A_j - A\|,$$

logo

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|(A_j)_L - A_L\| = \lim_{j \rightarrow \infty} \|A_j - A\| = 0.$$

Concluimos que $(A_j)_L \rightarrow A_L$. Como $(A_j) \subseteq \mathcal{I} \circ \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$, segue da Proposição 4.25 que $((A_j)_L) \subseteq \mathcal{I}(E_1 \hat{\otimes}_\pi \dots \hat{\otimes}_\pi E_n; F)$. Por hipótese, $\mathcal{I}$ é um ideal fechado, e como $(A_j)_L \rightarrow A_L$ com $((A_j)_L) \subseteq \mathcal{I}(E_1 \hat{\otimes}_\pi \dots \hat{\otimes}_\pi E_n; F)$, tem-se $A_L \in \mathcal{I}(E_1 \hat{\otimes}_\pi \dots \hat{\otimes}_\pi E_n; F)$. Novamente pela Proposição 4.25, $A \in \mathcal{I} \circ \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$, e portanto $\mathcal{I} \circ \mathcal{L}$ é um multi-ideal fechado. $\square$

Se $\mathcal{I}$ é um ideal fechado, pelo Corolário 4.26 temos que $\mathcal{I} \circ \mathcal{L}$ é um multi-ideal fechado, e consequentemente $\mathcal{I} \circ \mathcal{L}$ é um multi-ideal de Banach relativamente à norma do sup. Para ideais arbitrários, não necessariamente fechados, procederemos como se segue.

Definição 4.27 Sejam $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ um ideal normado de operadores e $E_1, \dots, E_n$ e F espaços de Banach. Dada a aplicação $A \in \mathcal{I} \circ \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$, definimos

$$\|A\|_{\mathcal{I} \circ \mathcal{L}} = \inf\{\|u\|_{\mathcal{I}} \|B\| : A = u \circ B, B \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; G) \text{ e } u \in \mathcal{I}(G; F)\}.$$

Para provar que $\|\cdot\|_{\mathcal{I} \circ \mathcal{L}}$ é uma norma em $\mathcal{I} \circ \mathcal{L}$ precisamos do seguinte resultado, que mais uma vez mostra como a norma projetiva simplifica o estudo desses multi-ideais:

Lema 4.28 Sejam $E_1, \dots, E_n$ e F espaços de Banach e $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ um ideal normado de operadores. Se $A \in \mathcal{I} \circ \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$, então $\|A\|_{\mathcal{I} \circ \mathcal{L}} = \|A_L\|_{\mathcal{I}}$.

Demonstração: Dada uma aplicação n -linear $A \in \mathcal{I} \circ \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$, existem um espaço de Banach G , uma aplicação $B \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; G)$ e um operador $u \in \mathcal{I}(G; F)$ tais que $A = u \circ B$. Na demonstração da Proposição 4.25 mostramos que se A_L e B_L são as linearizações de A e B , respectivamente, então $A_L = u \circ B_L \in \mathcal{I}(E_1 \hat{\otimes}_\pi \dots \hat{\otimes}_\pi E_n; F)$. Daí,

$$\|A_L\|_{\mathcal{I}} = \|u \circ B_L\|_{\mathcal{I}} \leq \|u\|_{\mathcal{I}} \|B_L\| = \|u\|_{\mathcal{I}} \|B\|.$$

Tomando o ínfimo sobre todas as fatorações de A obtemos $\|A_L\|_{\mathcal{I}} \leq \|A\|_{\mathcal{I} \circ \mathcal{L}}$. Por outro lado, pelo Teorema 3.17 temos que $A = A_L \circ \sigma_n$. Como $A \in \mathcal{I} \circ \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$, pela Proposição 4.25 temos que $A_L \in \mathcal{I}(E_1 \hat{\otimes}_\pi \dots \hat{\otimes}_\pi E_n; F)$. Sabendo que $\|\sigma_n\| = 1$,

$$\|A\|_{\mathcal{I} \circ \mathcal{L}} \leq \|A_L\|_{\mathcal{I}} \|\sigma_n\| = \|A_L\|_{\mathcal{I}}.$$

Assim, $\|A\|_{\mathcal{I} \circ \mathcal{L}} = \|A_L\|_{\mathcal{I}}$ para toda aplicação $A \in \mathcal{I} \circ \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$. $\square$

Proposição 4.29 Se $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ é um ideal normado de operadores, então $(\mathcal{I} \circ \mathcal{L}, \|\cdot\|_{\mathcal{I} \circ \mathcal{L}})$ é um multi-ideal normado.

Demonstração: Como $\mathcal{I}$ é um ideal, temos pela Proposição 4.24 que $\mathcal{I} \circ \mathcal{L}$ é um multi-ideal. Provemos que $\mathcal{I} \circ \mathcal{L}$ é um multi-ideal normado relativamente a $\|\cdot\|_{\mathcal{I} \circ \mathcal{L}}$. É claro que para toda aplicação $A \in \mathcal{I} \circ \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ temos que $\|A\|_{\mathcal{I} \circ \mathcal{L}} \geq 0$. Suponha que $A \in \mathcal{I} \circ \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ é tal que $\|A\|_{\mathcal{I} \circ \mathcal{L}} = 0$. Nesse caso, dado $\varepsilon > 0$ existem um espaço de

Banach G , $B \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; G)$ e $u \in \mathcal{I}(G; F)$ tais que $A = u \circ B$ e $0 \leq \|u\|_{\mathcal{I}} \|B\| < \varepsilon$. Daí e da Proposição 4.4,

$$0 \leq \|A\| = \|u \circ B\| \leq \|u\| \|B\| \leq \|u\|_{\mathcal{I}} \|B\| < \varepsilon.$$

Como $0 \leq \|A\| < \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$, segue que $\|A\| = 0$, o que implica $A = 0$. É evidente que se $A = 0$, então $\|A\|_{\mathcal{I} \circ \mathcal{L}} = 0$.

Dados $A \in \mathcal{I} \circ \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, podemos tomar um espaço de Banach G , uma aplicação $B \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; G)$ e um operador $u \in \mathcal{I}(G; F)$ tais que $A = u \circ B$. Portanto $\lambda A = (\lambda u) \circ B$, com $\lambda u \in \mathcal{I}(G; F)$ e $B \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; G)$. Disso,

$$\|\lambda A\|_{\mathcal{I} \circ \mathcal{L}} \leq \|\lambda u\|_{\mathcal{I}} \|B\| = |\lambda| \|u\|_{\mathcal{I}} \|B\|.$$

Tomando o ínfimo sobre todas as fatorações de A segue que $\|\lambda A\|_{\mathcal{I} \circ \mathcal{L}} \leq |\lambda| \|A\|_{\mathcal{I} \circ \mathcal{L}}$. Por outro lado, dados $A \in \mathcal{I} \circ \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, já sabemos que $\lambda A \in \mathcal{I} \circ \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$. Então existem um espaço de Banach W , uma aplicação $C \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; W)$ e um operador $v \in \mathcal{I}(W; F)$ tais que $\lambda A = v \circ C$. Supondo que $\lambda \neq 0$ (o caso $\lambda = 0$ é trivial) segue que $A = (\frac{1}{\lambda} v) \circ C$ e então

$$\|A\|_{\mathcal{I} \circ \mathcal{L}} \leq \left\| \frac{1}{\lambda} v \right\|_{\mathcal{I}} \|C\|,$$

ou seja,

$$|\lambda| \|A\|_{\mathcal{I} \circ \mathcal{L}} \leq \|v\|_{\mathcal{I}} \|C\|.$$

Tomando o ínfimo sobre todas as fatorações de λA obtemos $|\lambda| \|A\|_{\mathcal{I} \circ \mathcal{L}} \leq \|\lambda A\|_{\mathcal{I} \circ \mathcal{L}}$. Concluimos que $\|\lambda A\|_{\mathcal{I} \circ \mathcal{L}} = |\lambda| \|A\|_{\mathcal{I} \circ \mathcal{L}}$.

Sejam $A_1, A_2 \in \mathcal{I} \circ \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$. Já sabemos que $A_1 + A_2 \in \mathcal{I} \circ \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$. Pelo Lema 4.28 e usando mais uma vez que a correspondência $A \longleftrightarrow A_L$ é um isomorfismo isométrico entre $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ e $\mathcal{L}(E_1 \hat{\otimes}_{\pi} \dots \hat{\otimes}_{\pi} E_n; F)$, segue que

$$\begin{aligned} \|A_1 + A_2\|_{\mathcal{I} \circ \mathcal{L}} &= \|(A_1 + A_2)_L\|_{\mathcal{I}} \\ &= \|(A_1)_L + (A_2)_L\|_{\mathcal{I}} \\ &\leq \|(A_1)_L\|_{\mathcal{I}} + \|(A_2)_L\|_{\mathcal{I}} \\ &= \|A_1\|_{\mathcal{I} \circ \mathcal{L}} + \|A_2\|_{\mathcal{I} \circ \mathcal{L}}. \end{aligned}$$

Provemos que a forma $A^n: \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ dada por $A^n(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \lambda_1 \cdots \lambda_n$ é tal que $\|A^n\|_{\mathcal{I} \circ \mathcal{L}} = 1$. Da Observação 4.23 sabemos que $A^n \in \mathcal{I} \circ \mathcal{L}(^n \mathbb{K}; \mathbb{K})$. Como $A^n = I_{\mathbb{K}} \circ A^n$, onde $I_{\mathbb{K}} \in \mathcal{I}(\mathbb{K}; \mathbb{K})$,

$$\|A^n\|_{\mathcal{I} \circ \mathcal{L}} \leq \|I_{\mathbb{K}}\|_{\mathcal{I}} \|A^n\| = 1.$$

Por outro lado, dada uma fatoração $A^n = u \circ B$, onde G é um espaço de Banach, $B \in \mathcal{L}(^n \mathbb{K}; G)$ e $u \in \mathcal{I}(G; \mathbb{K})$,

$$1 = \|A^n\| = \|u \circ B\| \leq \|u\| \|B\| \leq \|u\|_{\mathcal{I}} \|B\|.$$

Tomando o ínfimo sobre todas as representações de A^n segue que $1 \leq \|A^n\|_{\mathcal{I} \circ \mathcal{L}}$. Concluimos que $\|A^n\|_{\mathcal{I} \circ \mathcal{L}} = 1$.

Sejam $A \in \mathcal{I} \circ \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$, $u_j \in \mathcal{L}(G_j; E_j)$ para $j = 1, \dots, n$, e $t \in \mathcal{L}(F; H)$. Já mostramos que $t \circ A \circ (u_1, \dots, u_n) \in \mathcal{I} \circ \mathcal{L}(G_1, \dots, G_n; H)$ (demonstração da Proposição 4.24). Para todos $x_1 \in G_1, \dots, x_n \in G_n$,

$$\begin{aligned} (t \circ A \circ (u_1, \dots, u_n))_L(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) &= (t \circ A \circ (u_1, \dots, u_n))(x_1, \dots, x_n) \\ &= t(A(u_1(x_1), \dots, u_n(x_n))) \\ &= t(A_L(u_1(x_1) \otimes \cdots \otimes u_n(x_n))) \\ &= t(A_L((u_1 \otimes_{\pi} \cdots \otimes_{\pi} u_n)(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n))) \\ &= (t \circ A_L \circ (u_1 \otimes_{\pi} \cdots \otimes_{\pi} u_n))(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n). \end{aligned}$$

Como $(t \circ A \circ (u_1, \dots, u_n))_L$ e $t \circ A_L \circ (u_1 \otimes_\pi \dots \otimes_\pi u_n)$ são lineares,

$$(t \circ A \circ (u_1, \dots, u_n))_L(z) = (t \circ A_L \circ (u_1 \otimes_\pi \dots \otimes_\pi u_n))(z)$$

para todo $z \in G_1 \otimes_\pi \dots \otimes_\pi G_n$. Além da linearidade, sabemos que $(t \circ A \circ (u_1, \dots, u_n))_L$ e $t \circ A_L \circ (u_1 \otimes_\pi \dots \otimes_\pi u_n)$ são operadores contínuos, logo da unicidade da extensão ao fecho temos que estes operadores coincidem também em $G_1 \hat{\otimes}_\pi \dots \hat{\otimes}_\pi G_n$. Disso e do Lema 4.28 segue que

$$\begin{aligned} \|t \circ A \circ (u_1, \dots, u_n)\|_{\mathcal{I} \circ \mathcal{L}} &= \|(t \circ A \circ (u_1, \dots, u_n))_L\|_{\mathcal{I}} \\ &= \|t \circ A_L \circ (u_1 \otimes_\pi \dots \otimes_\pi u_n)\|_{\mathcal{I}} \\ &\leq \|t\| \|A_L\|_{\mathcal{I}} \|u_1 \otimes_\pi \dots \otimes_\pi u_n\| \\ &= \|t\| \|A\|_{\mathcal{I} \circ \mathcal{L}} \|u_1\| \dots \|u_n\|, \end{aligned}$$

o que completa a demonstração de que $(\mathcal{I} \circ \mathcal{L}, \|\cdot\|_{\mathcal{I} \circ \mathcal{L}})$ é um multi-ideal normado. $\square$

Proposição 4.30 *Sejam $E_1, \dots, E_n$ e F espaços de Banach. Então $(\mathcal{I} \circ \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F), \|\cdot\|_{\mathcal{I} \circ \mathcal{L}})$ é isomorfo isometricamente a $(\mathcal{I}(E_1 \hat{\otimes}_\pi \dots \hat{\otimes}_\pi E_n; F), \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$.*

Demonstração: Considere o isomorfismo

$$\begin{aligned} \psi: \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F) &\longrightarrow \mathcal{L}(E_1 \hat{\otimes}_\pi \dots \hat{\otimes}_\pi E_n; F) \\ B &\mapsto \psi(B) = B_L \end{aligned}$$

dado pelo Teorema 3.17. Defina $\tau := \psi|_{\mathcal{I} \circ \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)}$. Dada a aplicação $A \in \mathcal{I} \circ \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$, vimos pela Proposição 4.25 que $A_L \in \mathcal{I}(E_1 \hat{\otimes}_\pi \dots \hat{\otimes}_\pi E_n; F)$. Portanto

$$\begin{aligned} \tau = \psi|_{\mathcal{I} \circ \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)}: \mathcal{I} \circ \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F) &\longrightarrow \mathcal{I}(E_1 \hat{\otimes}_\pi \dots \hat{\otimes}_\pi E_n; F) \\ A &\mapsto \tau(A) = A_L. \end{aligned}$$

Usando novamente a Proposição 4.25 concluímos que τ é sobrejetor. Como τ é restrição de ψ , segue que τ é linear e injetor. Munindo $\mathcal{I} \circ \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ com a norma $\|\cdot\|_{\mathcal{I} \circ \mathcal{L}}$ e $\mathcal{I}(E_1 \hat{\otimes}_\pi \dots \hat{\otimes}_\pi E_n; F)$ com a norma $\|\cdot\|_{\mathcal{I}}$, o Lema 4.28 garante que τ é um isomorfismo isométrico. $\square$

Mais uma vez o produto tensorial projetivo simplifica a obtenção de informações sobre os multi-ideais de composição:

Corolário 4.31 *Se $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ é um ideal de Banach, então $(\mathcal{I} \circ \mathcal{L}, \|\cdot\|_{\mathcal{I} \circ \mathcal{L}})$ é um multi-ideal de Banach.*

Demonstração: Pela Proposição 4.30 sabemos que $(\mathcal{I} \circ \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F), \|\cdot\|_{\mathcal{I} \circ \mathcal{L}})$ é isomorfo isometricamente a $(\mathcal{I}(E_1 \hat{\otimes}_\pi \dots \hat{\otimes}_\pi E_n; F), \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$. Por hipótese $(\mathcal{I}(E_1 \hat{\otimes}_\pi \dots \hat{\otimes}_\pi E_n; F), \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ é um espaço de Banach, portanto cada componente $(\mathcal{I} \circ \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F), \|\cdot\|_{\mathcal{I} \circ \mathcal{L}})$ é também um espaço de Banach. Logo $\mathcal{I} \circ \mathcal{L}$ é um multi-ideal de Banach. $\square$

Proposição 4.32 *Sejam $E_1, \dots, E_n$ e F espaços de Banach. Se*

(a) *$\mathcal{I}$ é um ideal de operadores com a norma do sup e $A \in \mathcal{I} \circ \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$,*

ou

(b) *$(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ é um ideal normado e $A \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; \mathbb{K})$,*

então $\|A\|_{\mathcal{I} \circ \mathcal{L}} = \|A\|$.

Demonstração: (a) Considere a norma do sup no ideal de operadores $\mathcal{I}$. Do Lema 4.28 concluímos que

$$\|A\|_{\mathcal{I} \circ \mathcal{L}} = \|A_L\|_{\mathcal{I}} = \|A_L\| = \|A\|$$

para toda aplicação $A \in \mathcal{I} \circ \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$.

(b) Para toda forma n -linear $A \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; \mathbb{K})$ da Observação 4.23 temos que $A \in \mathcal{I} \circ \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; \mathbb{K})$. Do Lema 4.28 temos que $\|A\|_{\mathcal{I} \circ \mathcal{L}} = \|A_L\|_{\mathcal{I}}$ e da Proposição 4.4 que $\|A_L\| \leq \|A_L\|_{\mathcal{I}}$. Por outro lado,

$$\|A_L\|_{\mathcal{I}} = \|I_{\mathbb{K}} \circ A_L\|_{\mathcal{I}} \leq \|I_{\mathbb{K}}\|_{\mathcal{I}} \|A_L\| = \|A_L\|,$$

e assim

$$\|A\|_{\mathcal{I} \circ \mathcal{L}} = \|A_L\|_{\mathcal{I}} = \|A_L\| = \|A\|.$$

□

4.4 $\Pi_p \circ \mathcal{L}$

Na seção anterior estudamos propriedades gerais do multi-ideal de composição $\mathcal{I} \circ \mathcal{L}$ para um ideal de operadores $\mathcal{I}$ arbitrário. Nesta seção estudaremos o caso particular em que $\mathcal{I} = \Pi_p$, o ideal dos operadores absolutamente p -somantes estudado no Exemplo 4.11.

O objetivo é mostrar que para o multi-ideal de composição $\Pi_p \circ \mathcal{L}$ vale um resultado análogo ao Teorema fraco de Dvoretzky-Rogers (Teorema 4.13). Para tanto precisaremos da seguinte propriedade dos multi-ideais de composição:

Lema 4.33 *Sejam $\mathcal{I}, \mathcal{I}_1$ e $\mathcal{I}_2$ ideais de operadores, $n \in \mathbb{N}$ e $E, E_1, \dots, E_n$ e F espaços de Banach. Se $\mathcal{I}_1 \circ \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F) \subseteq \mathcal{I}_2 \circ \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$, então $\mathcal{I}_1(E_j; F) \subseteq \mathcal{I}_2(E_j; F)$ para todo $j = 1, \dots, n$. Em particular, se $\mathcal{I} \circ \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F) = \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$, então $\mathcal{I}(E_j; F) = \mathcal{L}(E_j; F)$ para todo $j = 1, \dots, n$.*

Demonstração: Seja $j \in \{1, \dots, n\}$ e tome $u \in \mathcal{I}_1(E_j; F)$. Para $i \neq j$, escolhamos $0 \neq a_i \in E_i$. Pelo Teorema de Hahn-Banach existem funcionais lineares $\varphi_i \in E'_i$ tais que $\varphi_i(a_i) = 1$, $i = 1, \dots, n, i \neq j$. Defina $A: E_1 \times \dots \times E_n \longrightarrow F$ por

$$A(x_1, \dots, x_n) = \varphi_1(x_1) \cdots \varphi_{j-1}(x_{j-1}) \varphi_{j+1}(x_{j+1}) \cdots \varphi_n(x_n) u(x_j).$$

É claro que $A \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$. Considere $C: E_1 \times \dots \times E_n \longrightarrow E_j$ dada por

$$C(x_1, \dots, x_n) = \varphi_1(x_1) \cdots \varphi_{j-1}(x_{j-1}) \varphi_{j+1}(x_{j+1}) \cdots \varphi_n(x_n) x_j$$

e observe que $C \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; E_j)$. Afirmamos que $A = u \circ C$. De fato, para todos $x_j \in E_j$, $j = 1, \dots, n$,

$$\begin{aligned} (u \circ C)(x_1, \dots, x_n) &= u(C(x_1, \dots, x_n)) \\ &= u(\varphi_1(x_1) \cdots \varphi_{j-1}(x_{j-1}) \varphi_{j+1}(x_{j+1}) \cdots \varphi_n(x_n) x_j) \\ &= \varphi_1(x_1) \cdots \varphi_{j-1}(x_{j-1}) \varphi_{j+1}(x_{j+1}) \cdots \varphi_n(x_n) u(x_j) \\ &= A(x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Então $A \in \mathcal{I}_1 \circ \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$, e da hipótese concluímos que $A \in \mathcal{I}_2 \circ \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$. Existem então um espaço de Banach G , uma aplicação $B \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; G)$ e um operador $v \in \mathcal{I}_2(G; F)$ tais que $A = v \circ B$. Defina a aplicação $B(a_1, \dots, a_{j-1}, \cdot, a_{j+1}, \dots, a_n): E_j \longrightarrow G$ por

$$B(a_1, \dots, a_{j-1}, \cdot, a_{j+1}, \dots, a_n)(x) = B(a_1, \dots, a_{j-1}, x, a_{j+1}, \dots, a_n).$$

É claro que $B(a_1, \dots, a_{j-1}, \cdot, a_{j+1}, \dots, a_n) \in \mathcal{L}(E_j; G)$. Para todo $x \in E_j$,

$$\begin{aligned}
 u(x) &= \varphi_1(a_1) \cdots \varphi_{j-1}(a_{j-1}) \varphi_{j+1}(a_{j+1}) \cdots \varphi_n(a_n) u(x) \\
 &= A(a_1, \dots, a_{j-1}, x, a_{j+1}, \dots, a_n) \\
 &= (v \circ B)(a_1, \dots, a_{j-1}, x, a_{j+1}, \dots, a_n) \\
 &= v(B(a_1, \dots, a_{j-1}, x, a_{j+1}, \dots, a_n)) \\
 &= v(B(a_1, \dots, a_{j-1}, \cdot, a_{j+1}, \dots, a_n)(x)) \\
 &= (v \circ B(a_1, \dots, a_{j-1}, \cdot, a_{j+1}, \dots, a_n))(x).
 \end{aligned}$$

Portanto $u = v \circ B(a_1, \dots, a_{j-1}, \cdot, a_{j+1}, \dots, a_n)$. Pela propriedade de ideal concluímos que $u \in \mathcal{I}_2(E_j; F)$.

Suponha que $\mathcal{I} \circ \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F) = \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$. Como

$$\mathcal{L} \circ \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F) = \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F) \subseteq \mathcal{I} \circ \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F),$$

do que acabamos de provar segue que $\mathcal{I}(E_j; F) = \mathcal{L}(E_j; F)$ para todo $j = 1, \dots, n$. $\square$

Teorema 4.34 (Teorema tipo Dvoretzky-Rogers) *Seja $1 \leq p < \infty$. As afirmações seguintes são equivalentes para todo espaço de Banach E :*

- (a) $\Pi_p \circ \mathcal{L}({}^n E; E) = \mathcal{L}({}^n E; E)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- (b) $\Pi_p \circ \mathcal{L}({}^n E; E) = \mathcal{L}({}^n E; E)$ para algum $n \in \mathbb{N}$.
- (c) E tem dimensão finita.

Demonstração: A implicação (a) $\implies$ (b) é óbvia.

(b) $\implies$ (c) Por hipótese $\Pi_p \circ \mathcal{L}({}^n E; E) = \mathcal{L}({}^n E; E)$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Usando o Lema 4.33 temos que $\Pi_p(E; E) = \mathcal{L}(E; E)$. Em particular, $I_E \in \mathcal{L}(E; E) = \Pi_p(E; E)$. Pelo Teorema 4.13 segue que E tem dimensão finita.

(c) $\implies$ (a) Por definição tem-se $\Pi_p \circ \mathcal{L}({}^n E; E) \subseteq \mathcal{L}({}^n E; E)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Basta mostrar que $\mathcal{L}({}^n E; E) \subseteq \Pi_p \circ \mathcal{L}({}^n E; E)$. Seja $A \in \mathcal{L}({}^n E; E)$ e considere o operador identidade $I_E: E \longrightarrow E$. O espaço E tem dimensão finita por hipótese, logo

$$\dim I_E(E) = \dim E < \infty.$$

Concluímos que I_E é um operador linear contínuo de posto finito, e portanto $I_E \in \Pi_p(E; E)$. A fatoração $A = I_E \circ A$ garante que $A \in \Pi_p \circ \mathcal{L}({}^n E; E)$. $\square$

Referências Bibliográficas

- [1] G. BOTELHO, D. PELLEGRINO, P. RUEDA, *On composition ideals of multilinear mappings and homogeneous polynomials*, Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences **43** (2007), 1139-1155.
- [2] J. B. CONWAY, *A Course in Functional Analysis*, Springer, 1990.
- [3] A. DEFANT, K. FLORET, *Tensor Norms and Operator Ideals*, North-Holland, 1993.
- [4] J. DIESTEL, J. H. FOURIE, J. SWART, *The Metric Theory of Tensor Products: Grothendieck's Résumé Revisited*, American Mathematical Society, 2008.
- [5] J. DIESTEL, H. JARCHOW, A. TONGE, *Absolutely Summing Operators*, Cambridge University Press, 1995.
- [6] M. FABIAN, P. HABALA, P. HÁJEK, V. M. SANTALUCÍA, J. PELANT, V. ZIZLER, *Functional Analysis and Infinite-Dimensional Geometry*, Springer-Verlag, 2001.
- [7] H. JARCHOW, *Locally Convex Spaces*, Teubner, Stuttgart, 1981.
- [8] E. KREYSZIG, *Introductory Functional Analysis with Applications*, Wiley, 1989.
- [9] E. L. LIMA, *Espaços Métricos*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada-CNPq, Rio de Janeiro, 1977 (Projeto Euclides).
- [10] R. E. MEGGINSON, *An Introduction to Banach Space Theory*, Springer-Verlag, 1998.
- [11] J. MUJICA, *Complex Analysis in Banach Spaces*, North-Holland, Amsterdam, 1986.
- [12] A. PIETSCH, *Operator Ideals*, North-Holland, 1980.
- [13] A. PIETSCH, *Ideals of multilinear functionals*, Proceedings of the Second International Conference on Operator Algebras, Ideals and Their Applications in Theoretical Physics, 185-199, Teubner-Texte, Leipzig, 1983.
- [14] D. P. POMBO JÚNIOR, *Introdução à Análise Funcional*, Niterói, EdUFF, 1999.
- [15] S. PONNUSAMY, *Foundations of Functional Analysis*, Alpha Science International, 2002.
- [16] R. A. RYAN, *Introduction to Tensor Products of Banach Spaces*, Springer-Verlag, 2002.
- [17] P. WOJTASZCZYK, *Banach Spaces for Analysts*, Cambridge University Press, 1996.