

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE FÍSICA - LICENCIATURA

ROGÉRIO NICODEMIO

**MHS em vídeo análise através do Tracker:
sistema massa mola vertical sob ação da força gravitacional**

Uberlândia
2021

ROGÉRIO NICODEMIO

**MHS em vídeo análise através do Tracker:
sistema massa mola vertical sob ação da gravidade**

Trabalho de conclusão de curso
apresentado ao curso de Física -
Licenciatura da Universidade Federal de
Uberlândia, como requisito parcial para
conclusão do curso.

Universidade Federal de Uberlândia – UFU
Instituto de Física

Orientador: Prof. Dr. Adevailton Bernardo dos Santos

Uberlândia
2021

ROGÉRIO NICODEMIO

**MHS em vídeo análise através do Tracker:
sistema massa mola vertical sob ação da gravidade**

Trabalho de conclusão de curso
apresentado ao curso de Física -
Licenciatura da Universidade Federal de
Uberlândia, como requisito parcial para
conclusão do curso.

Uberlândia, 16 de junho de 2021

Prof. Dr. Adevailton Bernardo dos Santos

Orientador

Prof. Dr. Marcos Daniel Longhini

FACED - UFU)

Prof. Dr. Wellington Akira Iwamoto

INFIS - UFU

Uberlândia

2021

AGRADECIMENTOS

A Deus pela saúde e capacidade de raciocínio.

A minha esposa, Karyne pela parceria e presença ao meu lado no transcorrer desta jornada.

A minha mãe, Neusa e minha querida avó Laura, pelo incentivo, sem o qual, não chegaria até aqui.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Adevailton Bernardo dos Santos pela oportunidade concedida e por todos os ensinamentos e recomendações durante o PIBID e ao longo de inúmeras outras etapas desta caminhada, em especial por sua colaboração sempre pronta e decisiva na escrita deste trabalho.

Agradeço aos membros da banca examinadora, Prof. Dr. Marcos Daniel Longhini e Prof. Dr. Wellington Akira Iwamoto, pela disponibilidade de participar e pelas suas contribuições

Àqueles que me deram oportunidade de participar do programa Residência Pedagógica, em especial a Prof. Dra Alessandra Riposati Arantes, pela convivência produtiva e estimulante.

Aos professores das faculdades de Física, Matemática e da FAGED pela dedicação e presteza ao longo destes anos.

A Universidade Federal de Uberlândia, e a seus valorosos funcionários públicos, pela estrutura colocada a meu dispor.

“A projeção do movimento circular uniforme sobre uma reta, é um movimento harmônico simples. A frequência e o período do movimento circular, são os mesmos que a frequência e o período do movimento harmônico simples projetado.” (TIPLER, 1984)

RESUMO

Não se faz necessário dizer, tão pouco é novidade a ideia de que os alunos do ensino médio, em sua maioria, apresentam grandes dificuldades em aprender os conceitos de física. Estas dificuldades, porém, podem ser minimizadas com a utilização de Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC). Dentro desta perspectiva, encontramos inúmeros softwares de simulação e/ou análise dedicados a facilitarem o ensino da física, e por ter acesso livre, traduzido para o português, altamente difundido por todo o mundo, de fácil entendimento, rico em recursos entre outros atrativos, o software de análise e modelagem Tracker foi escolhido para ancorar nosso estudo. Assim, este trabalho dedica-se a explorar a nível de ensino médio, aspectos do movimento harmônico simples, em especial do sistema massa mola vertical sob ação da gravidade em vídeo análise através do Tracker, afim de determinar a constante elástica de molas, bem como o comportamento das mesmas quando associadas em série e paralelo, trazendo de forma detalhada desde a gravação do vídeo objeto do estudo, adentrando pelos passos requeridos para a sua correta análise, apresentação de suas equações horárias, balanço de energia, gráficos traçados pelo Tracker, e por fim, detalhando a analogia entre o MHS e o movimento circular uniforme bem como a equivalência do sistema massa mola horizontal e vertical.

Palavras-chave: MHS; sistema massa mola; Tracker; vídeo análise.

ABSTRACT

It goes without saying, nor is the idea that most high school students have great difficulties in learning physics concepts is new. These difficulties, however, can be minimized with the use of Information and Communication Technologies (ICT). Within this perspective, we find numerous simulation and/or analysis software dedicated to facilitating the teaching of physics, and for having free access, translated into Portuguese, widely spread throughout the world, easy to understand, rich in resources and other attractions, Tracker analysis and modeling software was chosen to anchor our study. Thus, this work is dedicated to exploring, at high school level, aspects of simple harmonic movement, especially the vertical spring mass system under gravity in video analysis through the Tracker, in order to determine the elastic constant of springs, as well as their behavior when associated in series and parallel, bringing in detail from the recording of the video object of the study, entering the steps required for its correct analysis, presentation of its hourly equations, energy balance, graphs drawn by the Tracker, and finally, detailing the analogy between the MHS and the uniform circular movement as well as the equivalence of the horizontal and vertical spring mass system.

Keywords: MHS; spring mass system; Tracker; video analyze

SUMÁRIO

1.	INTRODUÇÃO	10
2.	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	16
2.1	Movimento harmônico simples (MHS)	16
2.1.1	Sistema massa mola	17
2.1.1.1	Grandezas importantes do sistema massa mola	18
2.1.1.2	O sistema massa mola como projeção do movimento circular uniforme ..	19
2.1.1.3	Equações horárias, período e frequência do sistema massa mola	22
2.1.1.4	Sistema massa mola vertical	28
2.1.1.5	Energia do sistema massa mola	30
2.1.1.6	Fase inicial do sistema massa mola	33
2.1.1.7	Associação de molas: série e paralelo	35
2.2	Mini tutorial Tracker	38
2.2.1	Delimitando o vídeo ao trecho de interesse para análise	38
2.2.2	Calibração do vídeo à vista do Tracker	40
2.2.3	Inserindo eixos	42
2.2.4	Inserindo ponto de massa	43
2.2.4.1	Marcação manual da trajetória	44
2.2.4.2	Marcação automática da trajetória	45
2.2.5	Gráficos e tabelas	48
2.2.5.1	Janela de gráficos	48
2.2.5.2	Janela de tabelas	49
2.2.6	Ajustes de curvas	49
2.2.7	Introduzindo função para análise gráfica	53
2.2.8	Criando função para ajuste de curvas	55
2.2.9	Gravação de vídeo para análise com o Tracker: erros e acertos	57
3.	PERCURSO METODOLÓGICO	59
3.1	Gravação do vídeo do MHS do sistema massa mola vertical	60
3.2	Versões experimentais	60
3.2.1	Massa de 1,6 kg – arranjo simples	60

4.	RESULTADOS E ANÁLISES	64
4.1	Massa 1,6 kg – arranjo simples	64
4.1.1	Análise superficial das curvas experimentais	64
4.1.2	Coletando dados através do ajuste de curvas	67
4.2	Massa 0,8 kg – arranjo simples	70
4.3	Massa 1,6 kg – molas em paralelo	72
4.4	Massa 0,8 kg – molas em série	73
4.4.1	Constante elástica equivalente – molas em série	74
4.4.2	Amplitude do movimento e o cálculo do período	75
5	CONCLUSÕES	79
6	REFERÊNCIAS	81
	APÊNDICE A - EQUIVALÊNCIA ENTRE O MHS DO SISTEMA MASSA MOLA HORIZONTAL E VERTICAL SOB AÇÃO DA FORÇA GRAVITACIONAL	83

1. INTRODUÇÃO

O uso de Tecnologias da Informação e Comunicação (TICs) na educação brasileira, se faz cada vez mais presente e necessária. Ainda que, com as disparidades econômicas das diversas regiões do país e a lentidão por parte dos governos na disponibilização de laboratórios de informática nas escolas públicas, não é invisível a dedicação de muitos professores no sentido de trazer para a sala de aula, metodologias de ensino baseada nas TICs. Assim, a utilização de computadores como facilitador do sistema de ensino/aprendizagem se torna imperiosa.

O ensino assistido ou auxiliado por computador parte do pressuposto de que a informação é a unidade fundamental no ensino e, portanto, preocupa-se com os processos de como adquirir, armazenar, representar e principalmente transmitir informação. Nesse sentido, o computador é visto como uma ferramenta poderosa de armazenamento, representação e transmissão da informação. (BARANAUSKAS et al., 1999)

Em um mundo de economia globalizada, a educação também caminha para sê-lo, sendo esta a política mais eficaz de inclusão social, cultural e econômica de uma nação no contexto mundial, visando a conquista de avanços no que se refere ao bem estar de seu povo.

A promoção do desenvolvimento humano passa, obrigatoriamente, pela oferta de uma educação de qualidade, acessível a todos e comprometida com as exigências do mundo atual. O desenvolvimento socioeconômico sustentável de uma nação está diretamente relacionado a uma educação que acompanha e impulsiona as mudanças e, ao mesmo tempo, se apropria das tecnologias disponíveis, isto é, uma educação capaz de contribuir para a inclusão social e para a construção de um saber que suporte a tarefa de imprimir as transformações necessárias para a inserção do país, de forma competitiva, no mercado mundial. (ALBINO; SOUZA, 2016)

Especificamente, tratando da disciplina física, é notório o desinteresse de boa parte dos alunos do ensino médio com relação a mesma. A dificuldade intrínseca da matéria, bem como métodos de ensino monótonos e antiquados, contribui para este quadro.

Não raro, encontramos professores desmotivados e muitas vezes despreparados para ministrar suas aulas, quer seja pela sua formação, ou pela falta de um processo continuado de capacitação dos mesmos, o que acaba, em muitos casos, levando os alunos ao desinteresse, sobretudo em matérias como a Física.

Como forma de atrair o interesse dos alunos e amenizar o efeito negativo da

falta de preparo dos professores Linden et al. (2003) citado por Albino e Souza (2016, p. 104) ressaltam a importância da informática pontuando que “Integrar informática ao processo de aprendizado tradicional em um país emergente compensaria, de certa forma, o baixo preparo dos professores e tornaria a escola mais atrativa aos alunos.”

O professor, ainda que muitas vezes sem incentivo, deve, pois, procurar na utilização das TICs, atualização dos seus métodos de ensino, uma vez que “A educação necessita estar atenta às suas propostas e não se marginalizar, tornando-se obsoleta e sem flexibilidade”. (TAIRA, 2012, p. 19 apud PEREIRA; BEZERRA; FIGUEIREDO, 2016, p. 354)

Assim, o processo de inserção das TICs no ensino, torna-se absolutamente necessário e irreversível. De acordo com Cox (2008, p. 35 apud PEREIRA; BEZERRA; FIGUEIREDO, 2016, p. 354) “são diversas as formas de utilização das TICs no processo de ensino-aprendizagem, entre elas estão as simulações, jogos digitais, programas educacionais e comunicação”. Aqui, de forma mais específica, podemos acrescentar os softwares de análises.

Neste trabalho, optamos por utilizar o software de vídeo análises Tracker.

O Tracker, software de vídeo análises, trabalha com vídeos de fenômenos que envolvam movimentos bidimensionais as quais podem ser utilizadas em atividades experimentais visando facilitar o ensino/aprendizagem de Física (BARBETA e YAMAMOTO, 2002; BROWN e COX, 2009; BRYAN, 2010; CATELLI et al., 2010; CORVELONI et al., 2009 apud SAAVEDRA FILHO et al., 2017, p. 233).

O processo de aquisição e/ou gravação de vídeos não se coloca como um dificultador neste sistema de ensino, uma vez que nos dias atuais, o acesso a câmeras digitais ou telefones celulares é deveras facilitado.

Sobre o Tracker, Saavedra et al. (2017) pontua que:

O programa permite realizar análise de vídeos quadro a quadro, com o que é possível o estudo de diversos tipos de movimento a partir de filmes feitos com câmeras digitais ou webcams de computadores comuns e telefones celulares. É um software livre ligado ao projeto Open Source Physics (OSP), este relacionado ao desenvolvimento de programas com códigos abertos para o ensino de Física. O software fornece, automaticamente, os valores de distância a partir de um padrão (que pode ser uma escala graduada colocada no pano de fundo da filmagem) e também identifica automaticamente a quantidade de quadros por segundo empregadas pela câmera digital usada.

Estes dados de posição e tempo são apresentados em uma tela que possibilita a análise e manipulação dos dados de forma simples e rápida. Por este motivo, a proposta do Tracker é adequada ao tempo e espaço de uma aula de laboratório de Física, ou mesmo como apoio a uma aula expositiva. Neste sentido, o uso do Tracker se mostra compatível com o desenvolvimento de atividades centradas no processo de modelagem científica. (SAAVEDRA FILHO et al., 2017)

Como complemento Oliveira et al. (2011) citado por Saavedra et al. (2017, p. 234), nos diz sobre outras vantagens do uso do Tracker:

Aqui se destaca outra característica fundamental do Tracker: por ser um software livre, permite uma série de iniciativas relacionadas à sua apropriação pelos usuários como, por exemplo, a distribuição gratuita de cópias do programa, a tradução para idiomas de interesse e a elaboração de manuais de utilização, acarretando vantagens óbvias para seu uso e divulgação no ambiente escolar (OLIVEIRA et al., 2011).

Além disso, Saavedra et al. (2017, p. 234) assertivamente pontua que “O Tracker pode ser instalado livremente e, além disso, é um software de fácil aprendizagem, o que torna relativamente simples seu uso na obtenção de informações relevantes em experimentos didáticos de Física Básica.”

Com todo o exposto, encontramos o Tracker como ferramenta deveras adequada ao estudo do Movimento Harmônico Simples (MHS) o qual nos propomos a estudar neste trabalho, mais especificamente o sistema massa mola vertical sob ação da força gravitacional.

Quando partimos para verificar o potencial de uso de softwares de vídeo análise Cordeiro e Rodrigues (2019, p.3) nos diz que:

Essas tecnologias digitais também têm se apresentado como ferramentas altamente úteis para a aquisição de dados nos laboratórios didáticos de Física. Dentro desta perspectiva, a análise de vídeo, é uma tecnologia que apresenta grande potencial, visto que a cada dia é mais comum o acesso a tecnologias digitais que dispõem de recurso de vídeo como câmeras fotográficas e telefones celulares. Estes recursos possibilitam fazer registros de fenômenos físicos através de filmagens, que poderão servir para a realização de práticas experimentais nos laboratórios didáticos de Física.

Por ser um software livre, o Tracker permite que o aprendizado se dê de maneira mais diligente e crítica, possibilitando àqueles que estão diretamente envolvidos (professores e alunos), terem um papel ativo no processo de aprendizagem, como bem nos diz Celaya (2007) sendo citada por Cordeiro e Rodrigues (2019, p. 2).

Alves Filho (2004), citado por Cordeiro e Rodrigues (2019, p. 3). acrescenta

que “[...] entende-se que o uso do Tracker esteja em sintonia com a modernização do saber escolar, em um contexto em que as atividades experimentais teriam função mediadora no ensino dos conteúdos.”

Ainda dando destaque as potencialidades do Tracker, Bordin (2020, p. 13) nos traz que:

A videoanálise constitui ferramenta que permite ao professor a elaboração de atividades experimentais compatíveis com o tempo didático da sala de aula e afins às diretrizes curriculares de aulas de Ciências e de Física, abarcando os anos finais do Ensino Fundamental, o Ensino Médio e mesmo o Superior. Por meio da videoanálise, pode-se estudar, com viés experimental, os mais diversos assuntos envolvendo o movimento, desde o campo da Mecânica (movimento parabólico, leis de Newton, conservação do momento e da energia, etc.) até aspectos referentes à Ótica e à Física Moderna (difração da luz, difração de elétrons, lâmpadas espectrais, etc.).

Nunes e Silva (2020, p. 45) destacam que o Tracker permite aos alunos analisarem fenômenos reais do dia a dia de forma rápida e exata, sem a necessidade de sensores ou equipamentos de alto custo.

A vídeo análise pode ser usada como um fator que desperte interesse dos alunos em relação ao estudo da Física como pontua Issa (2019, p. 5):

[...] uma sequência de atividades didáticas de investigação promove a interação dos estudantes com seus pares, trazendo discussão de forma interativa e tornando- o mais ativo, facilitando o aprendizado efetivo dos fenômenos envolvidos, no estudo da mecânica e em outros conceitos diversos da física. Entretanto, no ensino médio, por força do formato dos exames seletivos para entradas nas universidades, o ensino ainda permanece, em sua maioria, tradicionalista e conteudista. A escola atualmente ainda lida com a falta de interesse dos aprendizes pelas informações transmitidas unicamente através de aulas expositivas que não despertam nos alunos a vontade de aprender. Então é necessário utilizar- se de outros instrumentos pedagógicos. Assim, aliado as atividades experimentais, associamos a vídeo análise e o uso dos dispositivos móveis para filmagens e posterior análise e interpretação no laboratório de informática para resgatar o interesse e construir conhecimentos.

Bezerra Jr et al. (2012, p. 469) nos dizem sobre a importância da utilização de um software livre e de baixo custo:

[...] destacamos a importância da realização de atividades experimentais significativas em aulas de física mediadas por tecnologias educacionais livres que apresentam, ao mesmo tempo, qualidade, flexibilidade de uso e baixo custo, de modo que sejam compatíveis com a realidade educacional brasileira.

Em relação ao uso de TICs, Bezerra Jr et al. (2012, p. 473), colocam algumas desvantagens no que diz respeito ao uso de softwares fechados de experimentos

didáticos quando comparado com softwares livres:

Outra solução poderia ser a aquisição de pacotes fechados de experimentos didáticos a empresas do ramo, o que, além dos altos custos envolvidos, torna a escola ou a universidade reféns de pacotes tecnológicos fechados por uma série de protocolos e interfaces proprietárias que não permitem maiores alterações em seu uso, nem inovações significativas nos experimentos propostos. Tais dificuldades podem ser superadas, ao se fazer a opção por um software livre, no caso, o Tracker.

Quanto ao professor, este tem por certo, um papel fundamental na utilização das TICs. Segundo Luiz e Orkiel (2017, p. 1433) o mesmo deve mudar sua postura, organizando atividades utilizando o arsenal tecnológico de que dispõe, de modo a potencializar as contribuições do uso das TICs afim de contribuir para uma aprendizagem mais efetiva.

Como colaboração e incentivo à prática do uso de TICs mais especificamente do Tracker por parte dos professores do ensino médio, este trabalho em seu decorrer, além do desenvolvimento da base teórica para o estudo do comportamento do sistema massa mola vertical sob a ação da força gravitacional, também discorrerá sobre como utilizar o Tracker, trazendo problemas e soluções, desde a gravação do vídeo até análise propriamente dita, mantendo-se porém, dentro do escopo do assunto em baila (sistema massa mola).

O objetivo deste trabalho é realizar um estudo sobre o MHS, especificamente do sistema massa mola vertical sob ação da gravidade utilizando o software de vídeo análise Tracker, iniciando pelo preparo do experimento, gravação do vídeo e sua adequada análise através do referido software, com o intuito de apresentar uma alternativa a professores do ensino médio à forma tradicional de estudo deste importante capítulo da Física (MHS).

Mais especificamente, objetivamos determinar a constante elástica de molas, bem como o comportamento das mesmas quando associadas em série e paralelo, trazendo de forma detalhada desde a gravação do vídeo objeto do estudo, adentrando pelos passos requeridos para a sua correta vídeo análise, apresentação de suas equações horárias, balanço de energia e seus respectivos gráficos traçados pelo Tracker, e por fim, detalhando a analogia entre o MHS e o movimento circular uniforme bem como a equivalência do sistema massa mola horizontal e vertical.

Esperamos, então, que ao fim deste trabalho possamos ter uma resposta sobre a seguinte questão: como proceder para realizar uma análise através de vídeo do movimento harmônico simples realizado por um sistema massa mola vertical com o auxílio do software livre Tracker e que potencial essa atividade relava para ser explorada por professores de Ensino Médio em aulas de Física?

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICO-METADOLÓGICA

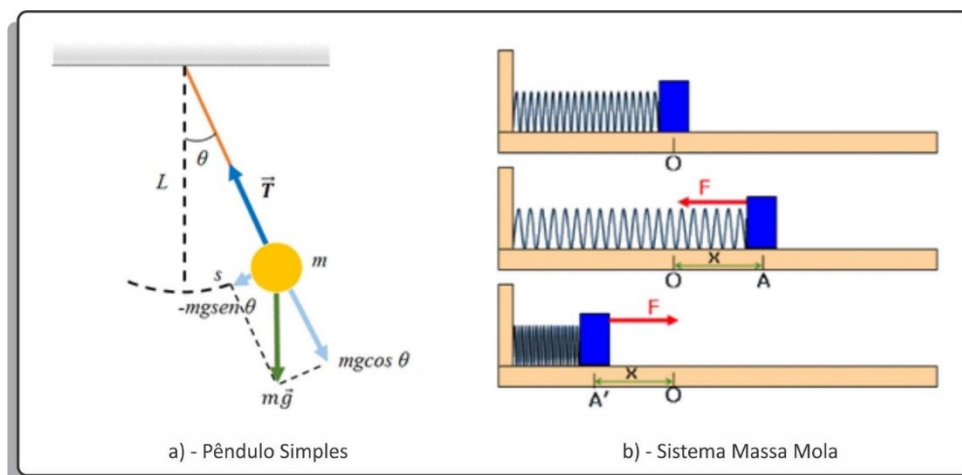
2.1 - Movimento harmônico simples

O software livre Tracker é utilizado para realizar análise em vídeos de movimentos no plano. O tipo de movimento que nos propomos a estudar neste trabalho é o chamado movimento harmônico simples (MHS). Segundo Tipler (p. 306, 1984), o MHS “é o movimento que ocorre sempre que a força restauradora que atua sobre uma partícula deslocada da sua posição de equilíbrio é proporcional ao deslocamento”.

Hallyday e Resnick (1991) com outras palavras, traz sua definição de MHS: "O movimento harmônico simples é um movimento executado por uma partícula de massa m submetida a uma força proporcional ao deslocamento da partícula mas possuindo um sentido contrário ao do deslocamento desta partícula."

Comumente, são dois os tipos de MHS mais estudados segundo Hallyday e Resnick (1991): sistema massa mola e o pêndulo simples (para pequenos deslocamentos em relação ao ponto de equilíbrio). A Figura 1 ilustra estes sistemas.

Figura 1 - Exemplos de MHS: a) pêndulo simples – b) sistema massa mola



Fonte: 1 – a) Site Lab Virtual de Ensino de Física¹ | b) Site Stoodi²

¹ Disponível em <<https://labanimation.wordpress.com/sistema-pendulo-simples/>> acessado em 05/mar/2021>

² Disponível em <<https://www.stoodi.com.br/resumos/fisica/MHS/>> acessado em 05/mar/2021

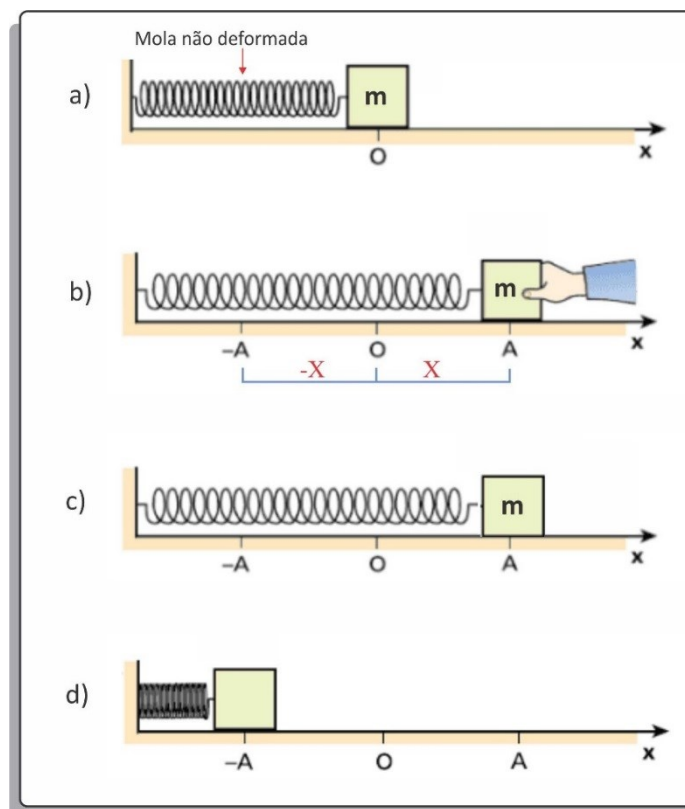
Ao longo deste trabalho, nos ateremos ao estudo do sistema massa mola, em especial, da sua versão vertical, onde o mesmo sofre a influência da força gravitacional, o que não ocorre em sua versão horizontal, uma vez que, a força normal de contato anula a ação da força peso.

2.1.1 - Sistema massa mola

O sistema massa mola é composto em sua forma mais simples, por uma massa m acoplada a extremidade de uma mola de massa desprezível e constante elástica k , enquanto a outra extremidade da mola está ligada a um ponto fixo. O sistema descrito dessa forma, realiza um MHS linear, devido ao fato de sua oscilação se dar em uma dimensão, conforme se observa na Figura 1 b).

Iniciaremos nosso estudo com o sistema na posição horizontal e a razão para isso, é que, a princípio, se torna de mais fácil compreensão. Na Figura 2 alguns pontos devem ser destacados:

Figura 2 – Sistema massa mola horizontal



Fonte: O autor

- **Mola não alongada:** na Figura 2 a) diz-se que a mola não está alongada, quando a mesma se encontra em seu estado natural, nem comprimida, nem esticada.
- **Posição de equilíbrio:** na Figura 2 a), o ponto **O** indica a posição de equilíbrio, ponto este, onde a massa **m** está em repouso (**antes** de iniciado o movimento) e para o sistema massa mola horizontal, a mola possui alongação zero.
- **Elongação:** qualquer ponto **x** entre os pontos **-A** e **A** na Figura 2b) em que a massa **m** esteja, indica a alongação da mola (o quanto está esticada ou comprimida em um determinado momento).
- **Pontos de máximo e mínimo deslocamento:** os pontos **-A** e **A** na Figura 2 b), indicam o mínimo e o máximo deslocamento da massa **m** em relação ao ponto **O**.

Uma vez solta a massa **m**, esta estará oscilará indefinidamente entre os pontos **A** e **-A** (Figura 2 c) e d) respectivamente) desde que não consideradas forças dissipativas.

2.1.1.1 - Grandezas importantes do sistema massa mola

O sistema massa mola realiza um movimento retilíneo, periódico (repetitivo), oscilatório e suas funções horárias são caracterizadas por funções harmônicas (como seno e cosseno). As funções horárias nada mais são que equações que dependem do tempo como variável.

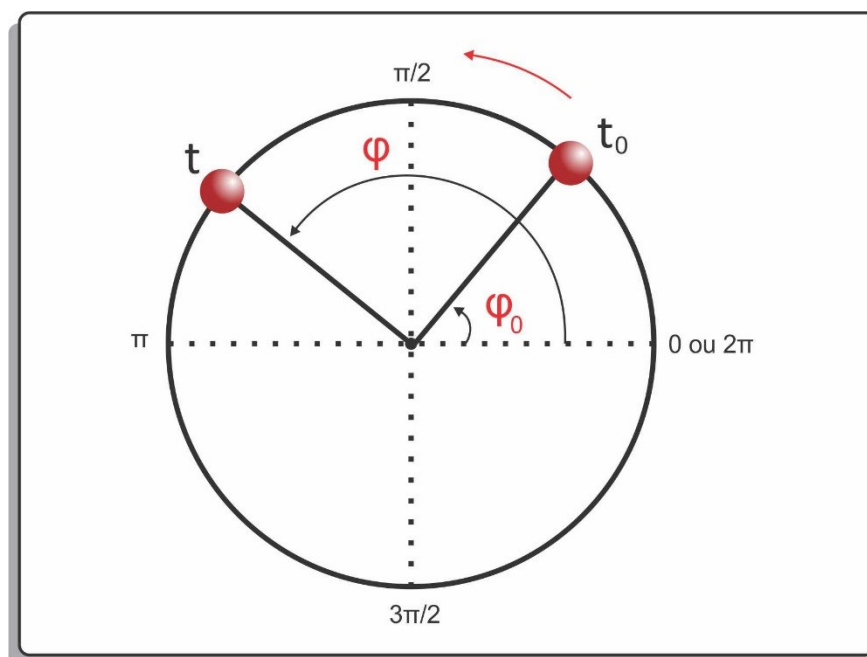
As grandezas mais importantes do sistema massa mola, são aquelas utilizadas para escrever as funções horárias do movimento:

- **Amplitude (A):** mede a maior distância que o corpo que oscila pode alcançar em relação à posição de equilíbrio. Sua unidade de medida no Sistema Internacional (SI) é o metro (m).
- **Frequência (f):** nos dá a quantidade de oscilações que a massa **m** realiza a cada segundo. A unidade de medida da frequência no SI é o hertz (Hz) ou ciclos por segundo.
- **Período (T):** é o tempo necessário para que a massa **m** realize uma oscilação completa, ou seja, percorre 4 vezes a amplitude do movimento. A unidade de medida do período no SI é o segundo (s);
- **Velocidade angular (ω):** também chamada de frequência angular ou

pulsção mede a velocidade angular de deslocamento de um corpo em uma trajetória circular e sua unidade no SI é o radiano por segundo (rd/s). Ao final de uma oscilação completa, o corpo terá varrido um ângulo de 360° ou 2π radianos.

- **Ângulo de Fase (ϕ):** em um movimento circular de um corpo qualquer, mede a sua posição (localização) angular, ou seja, localiza angularmente o corpo em movimento circular em um dado instante t (Figura 3). Sua unidade no SI é o radianos (rad).
- **Fase Inicial (ϕ_0):** indica, no instante $t=0$, o ângulo de fase inicial do movimento circular, ou seja, o ângulo no qual o corpo inicia o seu movimento (Figura 3). Sua unidade no SI é o radianos (rad)

Figura 3: Ângulo de fase e fase inicial



Fonte: O autor

Neste momento, surge uma pergunta inevitável: o que tem a ver o movimento circular com o MHS de um sistema massa mola que se desloca de forma retilínea? E mais: onde está o ângulo variável com o tempo no sistema massa mola retilíneo? O próximo tópico nos elucida estes questionamentos

2.1.1.2 - O sistema massa mola como projeção do movimento circular uniforme

Como bem nos mostra Gomes (2019), todo movimento oscilatório, periódico e retilíneo pode ser estudado como se fosse a sombra um movimento circular uniforme (MCU) periódico.

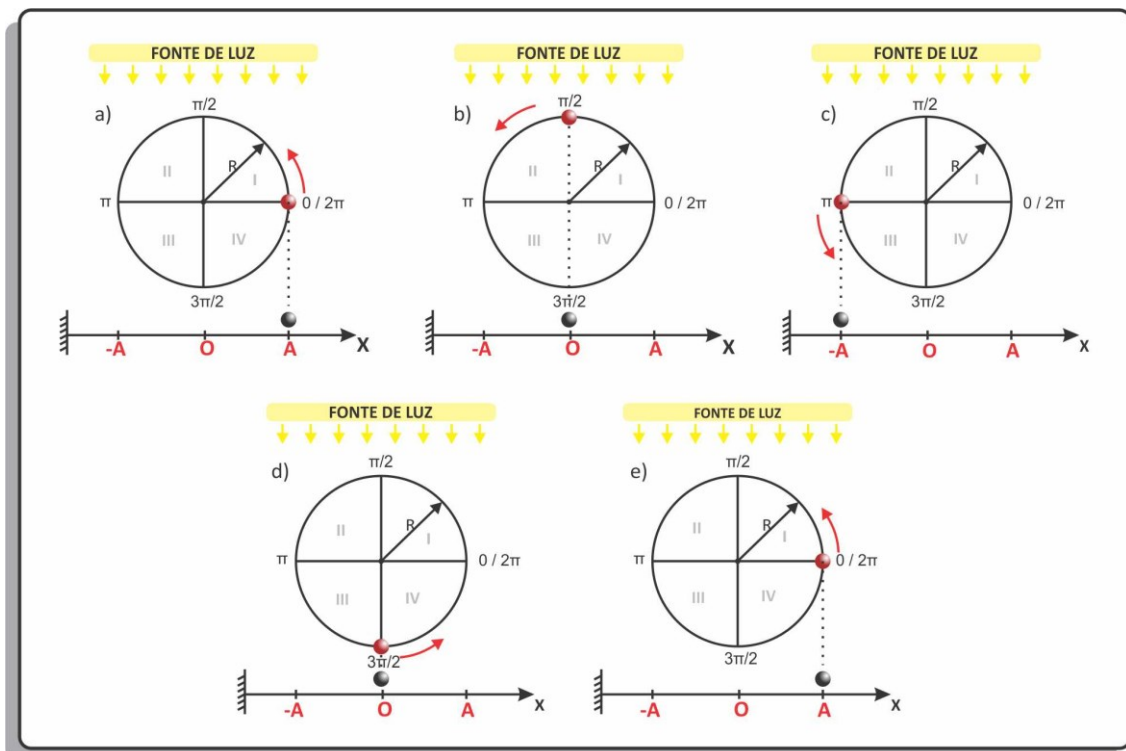
Através de tal associação, poderemos, não só conseguir respostas para aos questionamentos anteriores, como também compreender a origem das equações horárias do MHS.

Partamos então ao estudo do sistema massa mola associado ao MCU:

Na Figura 4 a), um corpo de massa m (vermelho) realiza um MCU no sentido anti-horário. Uma fonte de luz projeta a sombra desta massa no eixo das abscissas x .

À medida que a massa se desloca em MCU da sua posição inicial na Figura 4 a), observamos também o deslocamento de sua sombra no sentido negativo do eixo x (Figuras 4 b) e c)). Nas Figuras 4 d) e e), enquanto a massa retorna a sua posição inicial, sua sombra desloca-se positivamente ao longo do eixo x , retornando então ao ponto de partida.

Figura 4 – O sistema massa mola como projeção do MCU



Fonte: O autor

Notamos, por mera observação, que o movimento da sombra projetada, nos remete exatamente a um MHS. Assim, podemos então associar esta sombra a uma massa presa a uma mola em um sistema massa mola horizontal. Isso significa que podemos sim, associar o MCU ao sistema massa mola que hora estudamos. Faremos isso então.

Da Figura 4, observamos que enquanto a massa m varre os quadrantes I e II, sua projeção desloca-se no sentido negativo do eixo ordenado x e quando a massa varre os quadrantes III e IV, sua projeção desloca-se no sentido positivo do eixo ordenado, de forma que após a massa varrer um ângulo de 2π radianos, sua projeção completa um ciclo.

Uma simples observação, nos mostra que o raio do MCU corresponde em módulo ao valor da amplitude do MHS realizado pelo sistema massa mola.

Temos também, que a cada quadrante varrido pela massa em MCU, uma amplitude é percorrida pela sua sombra projetada. Assim, ao final de 4 quadrantes varridos, temos 4 amplitudes percorridas pela sombra da massa m projetada no eixo ordenado x .

Tendo em mente que o período T do sistema massa mola, corresponde ao tempo transcorrido para que um ciclo completo seja realizado, logo concluímos que o período corresponde ao tempo necessário para que 4 amplitudes sejam percorridas e este tempo é o mesmo que a massa m leva para varrer um ângulo de 2π . (observe a Figura 4).

Tendo como sendo de validade absoluta a possibilidade do estudo do MHS do sistema massa mola através do MCU, respondendo à pergunta da sessão anterior, concluímos que as grandezas angulares como ângulo de fase (φ) e fase inicial (φ_0) que aparecem no sistema massa mola, advém exatamente dessa equivalência que existe entre o estudo dos dois sistemas.

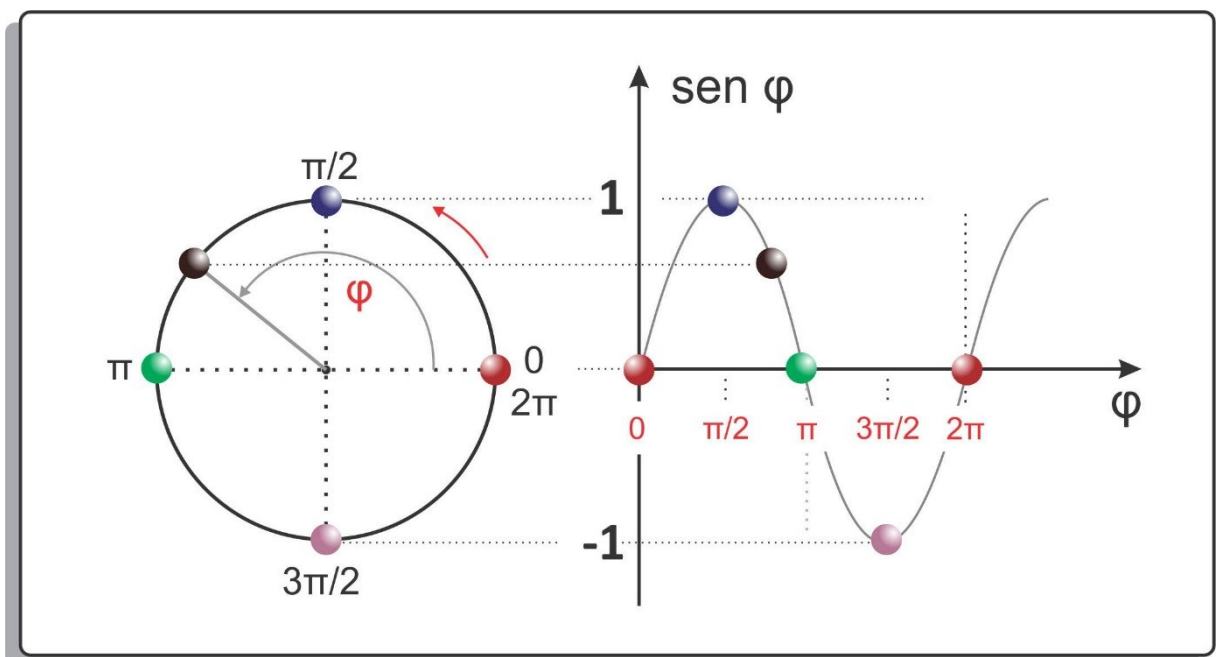
Da Figura 4, observamos que para cada ângulo φ varrido pela massa m em MCU, temos como correspondente, uma única posição x da sua sombra projetada sobre o eixo das abscissas. Isso nos mostra mais uma vez, de forma inequívoca a correspondência existente entre o MCU e o MHS do sistema massa mola.

2.1.1.3 - Equações horárias, período e frequência do sistema massa mola

Como já dito anteriormente, as equações horárias ou funções horárias, são equações que variam em função do tempo e descrevem o movimento.

A Figura 5, nos mostra a função que descreve a posição angular de uma partícula em MCU, e conseqüentemente a posição x correspondente em um MHS de um sistema massa mola.

Figura 5 – função representativa da posição angular no MCU



Fonte: O autor

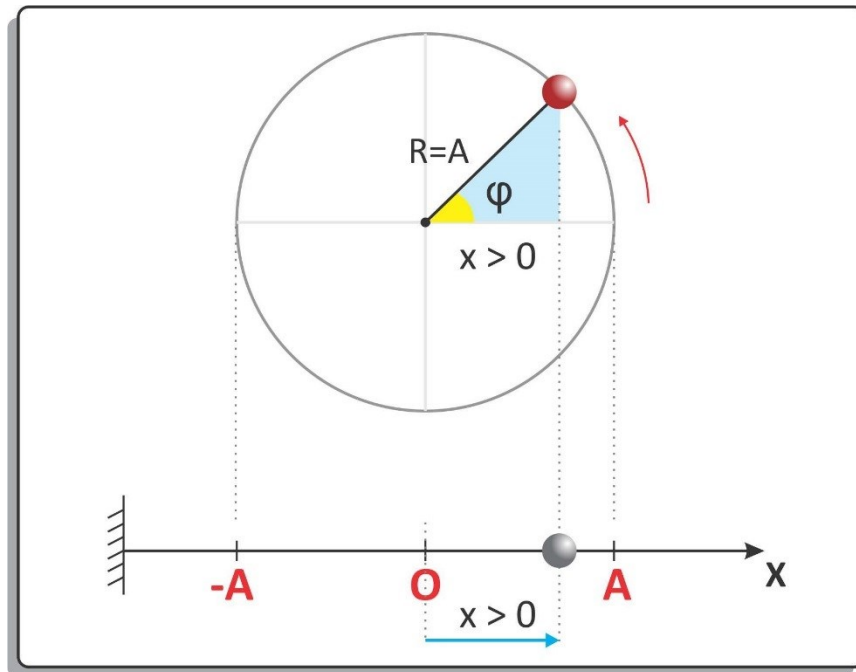
Na Figura 5, notamos que a função que representa a posição do movimento, é uma função seno. Obviamente, poderia ser uma função cosseno, e ambas são funções harmônicas. Daí, o porquê do movimento representado por estas funções serem chamados de movimento harmônico.

Vamos agora determinar, com o auxílio do MCU, as equações horárias do MHS do sistema massa mola.

Temos na Figura 6 o MCU projetado. Queremos inicialmente descobrir a posição x (da sombra da massa projetada).

Analisando a figura, notamos que esta posição é a projeção do raio $R=A$ sobre o eixo das abscissas x . Da trigonometria, concluímos que:

Figura 6 – Projeção da posição do MCU sobre o eixo x .



Fonte: O autor

$$x = A \cos(\varphi) \quad (2.1)$$

Podemos agora, com o auxílio da Figura 7, e mais uma vez do MCU, determinar a velocidade linear v da sombra da massa m projetada.

Sabemos que o vetor velocidade do MCU é tangente a trajetória. O mesmo está ilustrado na Figura 7. Este vetor, tem módulo constante e variação na direção e sentido.

Pela geometria do problema, podemos observar que o vetor que indica a velocidade da sombra projetada, é a projeção do vetor v_c no eixo x .

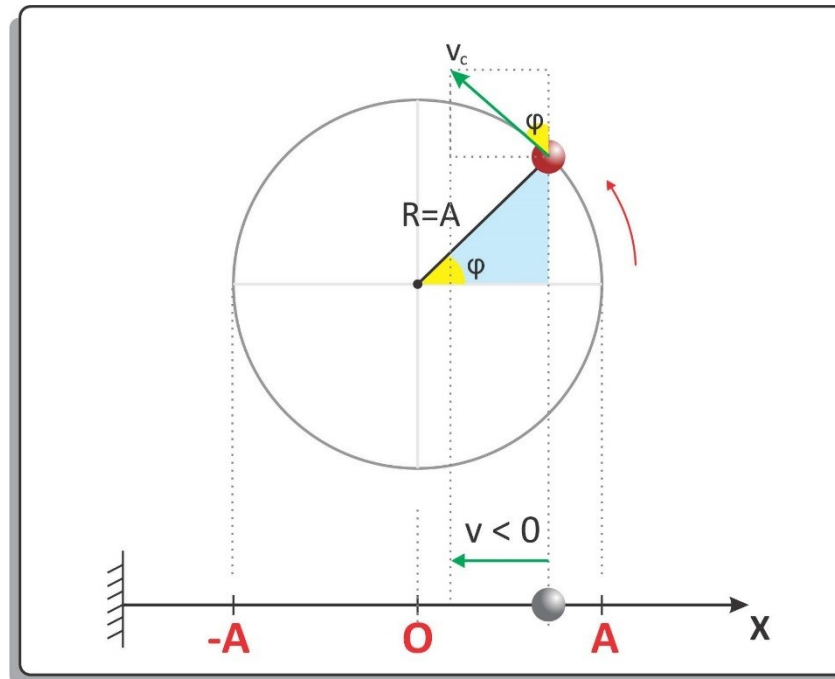
Assim sendo, o módulo da velocidade linear na posição em que se encontra a massa m é:

$$v = -v_c \sin(\varphi) \quad (2.2)$$

onde o sinal negativo de v_c indica que o sentido da velocidade neste momento, é

contrário a orientação positiva da trajetória.

Figura 7 – Projeção da velocidade do MCU sobre o eixo x.



Fonte: O autor

Por fim, agora com o auxílio da Figura 8, e do MCU, podemos determinar a aceleração linear a da sombra da massa m projetada.

No MCU a aceleração é chamada aceleração centrípeta a_c e aponta para o centro da trajetória, conforme podemos observar na Figura 8. O vetor aceleração centrípeta varia em módulo, enquanto mantém sua direção e sentido apontando sempre para o centro da trajetória.

Analisando geometricamente a Figura 8, podemos observar que o vetor que indica a aceleração linear da sombra projetada, é a projeção do vetor a_c no eixo x .

Dessa forma, o módulo da aceleração linear na posição em que se encontra a massa m é:

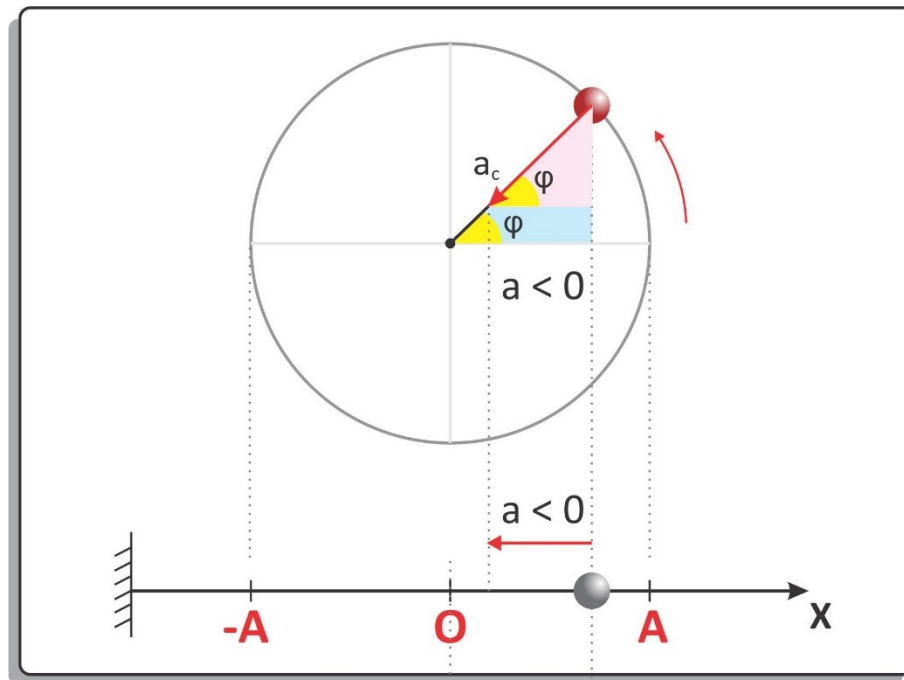
$$a = -a_c \cos(\varphi) \quad (2.3)$$

Mais uma vez, o sinal negativo da aceleração linear a , indica que o vetor que a representa tem sentido contrário ao eixo ordenado x .

Vamos relembrar o valor da velocidade e da aceleração do MCU, bem como

da posição angular ou ângulo de fase.

Figura 8 – Projeção da aceleração do MCU sobre o eixo x.



Fonte: O autor

A velocidade linear do MCU, é dada por:

$$v_c = \omega R = \omega A \quad (2.4)$$

uma vez que $R = A$. Em (2.4), ω é a velocidade angular.

A aceleração do MCU é a aceleração centrípeta dada por:

$$a_c = \frac{v^2}{R} \quad (2.5)$$

Combinando (2.4) e (2.5) Chegamos a:

$$a_c = \omega^2 R = \omega^2 A \quad (2.6)$$

Do movimento uniforme, temos que:

$$s = s_0 + vt \quad (2.7)$$

Quando tratamos de ângulo vamos ter então:

$$\varphi = \omega t + \varphi_0 \quad (2.8)$$

onde φ é o ângulo de fase ou posição angular e φ_0 é a fase inicial ou posição angular inicial, ambos em radianos (rad).

Finalmente, podemos agora, de posse das equações anteriores, escrever as 3 equações horárias do movimento.

Substituindo (2.8) em (1) encontraremos a equação horária da posição do MHS do sistema massa mola:

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (2.9)$$

onde x é dado em metros (m) no SI.

Substituindo (2.4) e (2.8) em (2.2) encontramos a equação horária da velocidade do MHS do sistema massa mola:

$$v = -\omega A \sin(\omega t + \varphi_0) \quad (2.10)$$

onde v é dado em metros por segundo (m/s) no SI.

Substituindo (2.6) e (2.8) em (2.3) encontramos a equação horária da aceleração do MHS do sistema massa mola:

$$a = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (2.11)$$

onde a é dado em metros por segundo ao quadrado (m/s²) no SI.

Dessa forma, encontramos as 3 equações horárias do MHS do sistema massa mola, e delas podemos deduzir a força resultante que atua no sistema. Vejamos:

Substituindo (2.9) em (2.11) chegamos a uma expressão para a aceleração, bastante utilizada:

$$a = -\omega^2 x \quad (2.12)$$

Pela segunda lei de Newton ($F_r = ma$), isolando o a e substituindo em (2.12) teremos então:

$$\frac{F}{m} = -\omega^2 x \Rightarrow F = -m\omega^2 x \quad (2.13)$$

Podemos notar que a quantidade $m\omega^2$ não varia caso do MCU, portanto podemos substituí-la em (2.13) por uma constante que chamaremos de **k** denominada constante elástica da mola. Ficaremos então, com a seguinte equação:

$$F = -kx \quad (2.14)$$

A Equação (2.14) nos dá a força resultante sobre o sistema, é a chamada Lei de Hooke. O sinal negativo significa que a força restauradora devido a mola é no sentido oposto ao sentido da força que causou a deformação. Puxando uma mola para a direita, teremos uma extensão da mola **para a direita**, que por sua vez resultará em uma força **para a esquerda** devido à mola.

Com isso, podemos encontrar uma expressão para a frequência e o período do MHS do sistema massa mola, partindo das seguintes igualdades:

$$k = m\omega^2 \quad \text{e} \quad \omega = 2\pi f$$

Podemos então, afirmar que:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.15)$$

$$2\pi f = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.16)$$

Através de (2.16), chegamos na frequência do MHS do sistema massa mola:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.17)$$

Como sabemos que a frequência é o inverso do período, logo, temos o período do MHS do sistema massa mola dado por:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad (2.18)$$

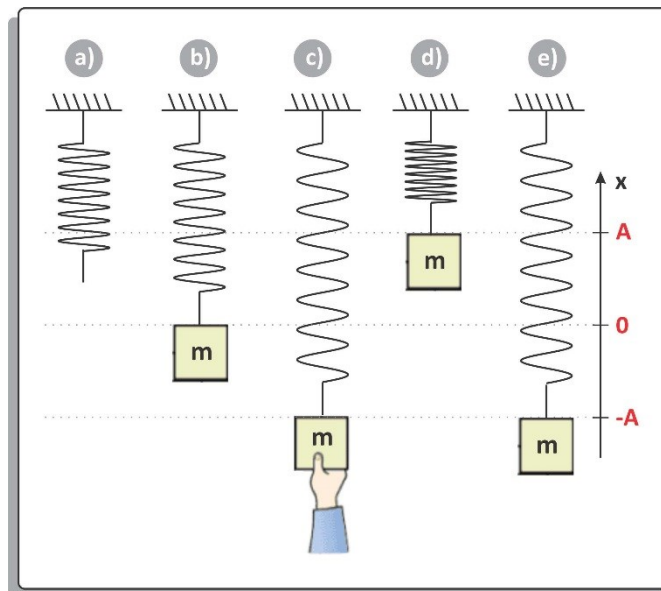
De acordo com (2.18), observamos que o período do MHS do sistema massa mola, depende exclusivamente da massa **m** e da constante elástica **k** da mola. A medida que aumentamos a massa, o período também aumenta, e vice versa. Já com a constante elástica ocorre o inverso: quando aumentamos a constante elástica da mola, o período diminui e vice versa.

Uma observação importante, é que por mais que possa parecer estranho, por (2.18), o período não depende da amplitude do movimento, bem como não depende da gravidade **g**, da aceleração **a** ou da velocidade **v**.

2.1.1.4 - Sistema massa mola vertical

O objeto do nosso estudo, é o MHS do sistema mola vertical sob ação da força gravitacional. A Figura 9 ilustra este sistema:

Figura 9 – Sistema massa mola vertical sob ação da força gravitacional



Fonte: O autor

O sistema massa mola vertical é análogo ao horizontal, porém o conjunto massa mola está preso a uma determinada altura e sua oscilação se dá no sentido vertical.

Na Figura 9 a), observamos a mola em seu estado natural (nem esticada, nem comprimida).

Na Figura 9 b), uma massa m é acoplada à mola, provocando na mesma uma deformação, ou elongação.

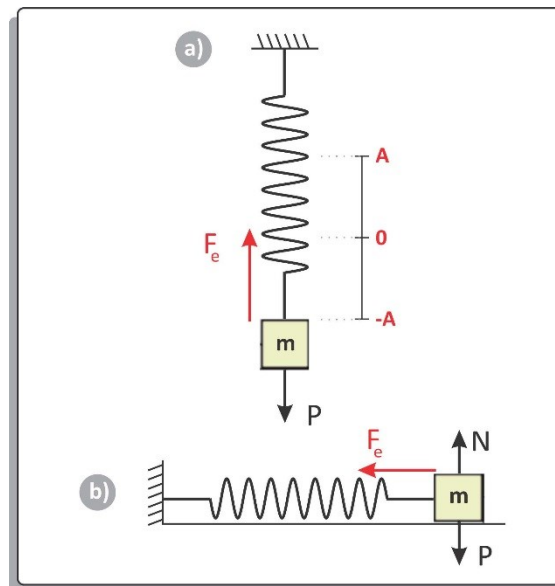
A Figura 9 c) ilustra o início do processo de oscilação do sistema. Aplica-se uma força vertical para baixo, que provoca uma elongação maior à mola. Em seguida a massa é solta e o processo de oscilação se inicia.

Nas Figuras 9 d) e e), observamos que a massa m passa a oscilar entre os pontos $-A$ e A

, marcado no eixo ordenado que chamamos de x , e assim permanecerá indefinidamente, desde que, desprezemos forças dissipativas como o atrito com o ar.

A Figura 10, traz as forças atuantes sobre a massa que oscila. No estágio em que nos encontramos, surge um problema.

Figura 10 – Forças atuantes sobre os sistemas massa mola vertical e horizontal



Fonte: O autor

Observamos que no sistema massa mola horizontal, a força peso P é compensada pela força normal N , de forma que uma anula a outra e a resultante vertical é zero, conforme Figura 10 b). Neste caso, temos que a força resultante sobre

a massa m , é simplesmente a força elástica F_e .

Pela Figura 10 a), no sistema massa mola vertical, temos a ação da força gravitacional P que não se anula com a força elástica F_e durante todo o movimento, uma vez que esta é variável e depende da elongação da mola, conforme vinhos pela lei de Hooke (Equação (2.14)). Então, na versão vertical, temos que considerar a força P quando da solução de problemas envolvendo o sistema massa mola, o que não ocorria quando estudamos o sistema horizontal

Surge então, uma questão:

Todo desenvolvimento que fizemos até agora para encontrarmos as equações horárias do MHS do sistema massa mola, foi efetivado em cima do sistema na horizontal, sem considerar, portanto, a ação da força peso. Teremos então, que refazer nossas análises, para considerar a nova força que surge na versão vertical do sistema?

A resposta é não. As equações que definem o movimento, são exatamente as mesmas para o sistema vertical e horizontal. No Apêndice A deste trabalho são feitas as deduções matemáticas que provam esta afirmação.

2.1.1.5 - Energia do sistema massa mola

Começemos por relembrar as equações relativas as energias presentes no sistema massa mola. A energia cinética E_c é dada por:

$$E_c = \frac{m}{2} v^2 \quad (2.19)$$

A energia potencial elástica E_{pe} é dada por:

$$E_{pe} = \frac{kx^2}{2} \quad (2.20)$$

onde x é a elongação da mola.

A energia potencial gravitacional E_p é:

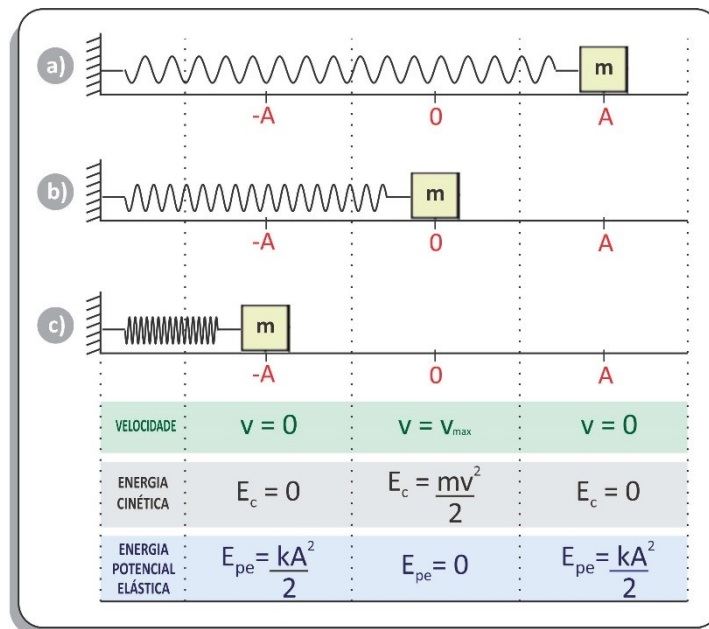
$$E_p = mgh \quad (2.21)$$

A energia mecânica no sistema E_m é portanto, a soma das anteriores.

Iniciemos pelo sistema massa mola horizontal. A energia mecânica desse sistema é a soma das energias cinética e potencial elástica. A Figura 11 traz os pontos de interesse:

Na Figura 11 a), a velocidade é nula no ponto **A** onde o movimento inverte seu sentido (amplitude **A**), logo a energia cinética é zero e a energia mecânica é dada somente pela energia potencial elástica indicada na figura. Assim no ponto **A** temos:

Figura 11 – Energias sistema massa mola horizontal



Fonte: O autor

$$E_m = E_{pe} = \frac{kA^2}{2} \quad (2.22)$$

Na Figura 11 b), a velocidade é máxima no ponto **0** de equilíbrio, onde a mola se encontra relaxada, logo a energia potencial elástica é nula, e a energia mecânica é dada somente pela energia cinética indicada na figura. Portanto temos no ponto **0**:

$$E_m = E_c = \frac{mv^2}{2} \quad (2.23)$$

Na Figura 11 c), a velocidade é nula no ponto **-A** onde o movimento inverte seu sentido (amplitude **-A**), logo a energia cinética é zero e a energia mecânica é dada

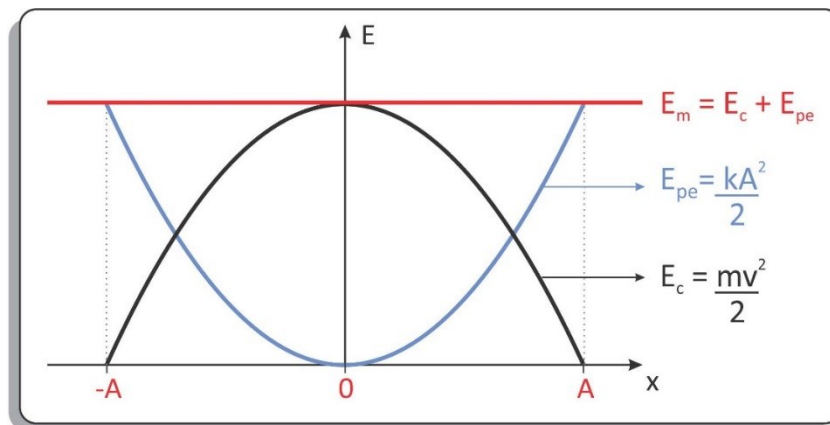
somente pela energia potencial elástica indicada na figura. Assim no ponto **-A** temos a energia mecânica dada pela Equação (1).

É importante destacar que a energia mecânica do sistema, se conserva em todo e qualquer ponto da trajetória entre A e -A. Logo:

$$E_m = \frac{kA^2}{2} = \frac{mv^2}{2} \quad (2.24)$$

Portanto temos pela Equação (2.24) a energia total do sistema (mecânica) dada em função da amplitude **A** e em função da velocidade **v**. A Figura 12 nos traz o gráfico representativo das energias do sistema:

Figura 12 – Representação gráfica das energias sistema massa mola horizontal



Fonte: O autor

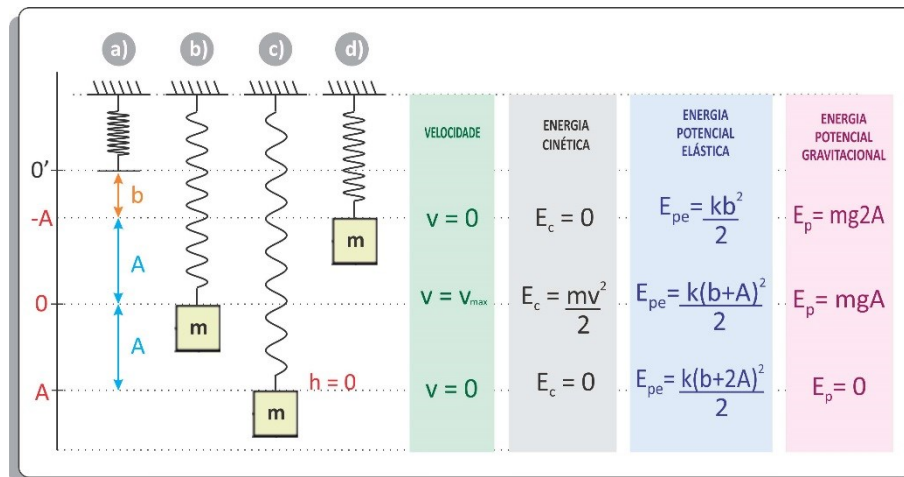
No sistema vertical, além da energia cinética e potencial elástica, teremos a energia potencial gravitacional. Nesse caso, tudo parece mais complicado. A Figura 13 ilustra os pontos de interesse. As quantidades de energia potencial, dependem da altura e conseqüentemente do referencial adotado. Para o sistema de referências da Figura 13 as energias em cada estágio são mostradas.

Note que na altura **A**, temos apenas energia potencial elástica, na altura **0** temos as 3 formas de energia presentes, enquanto na altura **-A**, temos apenas as energias potenciais elástica e gravitacional.

Apesar da aparente complicação do problema, quando consideramos a nova posição de equilíbrio **0**, chegamos matematicamente, conforme demonstrado no Apêndice A, a conclusão que as variações e transformações de energias do sistema

vertical, são semelhantes a do horizontal em qualquer posição de análise, ou seja, na posição **A** e **-A** a energia potencial é máxima, com valores de referências equivalentes aquela da Equação (1), na posição **0** a energia cinética é máxima, e equivalente a aquela da Equação (2.23). Assim, a representação gráfica é similar Figura 12.

Figura 13 –Energias sistema massa mola vertical

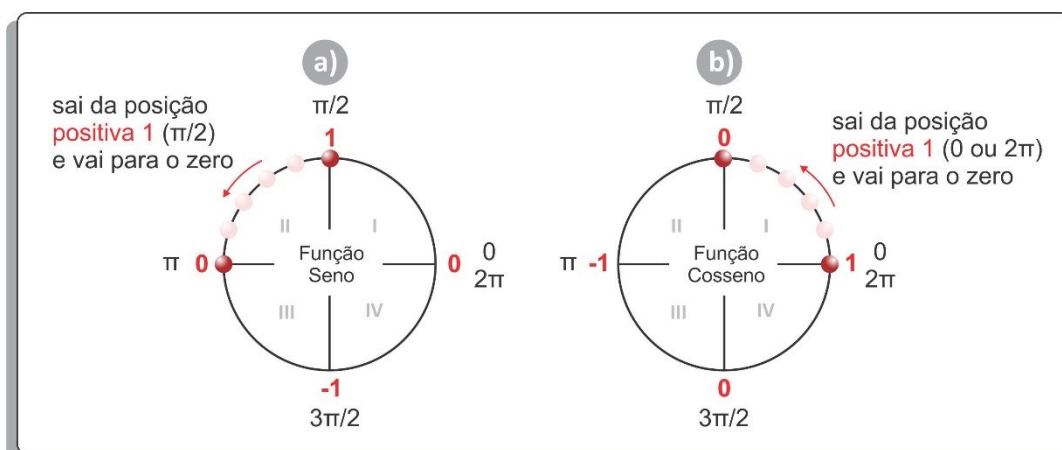


Fonte: O autor

2.1.1.6 - Fase inicial do sistema massa mola

Boa parte dos estudantes costumam ter dificuldades quando da determinação da fase inicial ϕ_0 do MHS do sistema massa mola. Vamos então, ver como isso é feito. A Figura 14 nos traz respectivamente, os valores das funções seno e cosseno nos ângulos correspondentes. Logo adiante ela nos auxiliará em nossa tarefa.

Figura 14 – Figura auxiliar na determinação da fase inicial do MHS do sistema massa mola

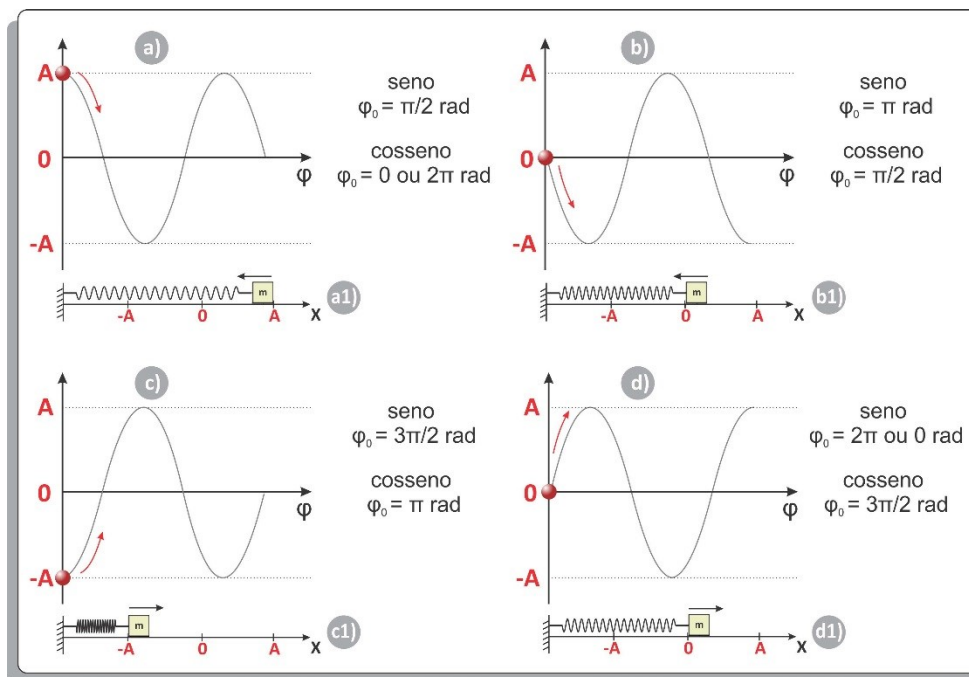


Fonte: O autor

A Figura 15, nos traz alguns ângulos notáveis possíveis de representarem a fase inicial

A Figura 15 a) representa uma função que pode ser um seno ou cosseno. E a Figura 15 a1) nos mostra o sistema massa mola correspondente. Analogamente ocorre para as demais variações contidas na Figura 15.

Figura 15 – Ângulos de fase inicial



Fonte: O autor

Vejamos os passos para determinação da fase inicial no caso das Figuras 15 a) e a1). Lembrando que os movimentos da Figura 14 serão **sempre** no sentido anti-horário.

- 1) Definimos a função que a Figura 15 a) representa: digamos que seja um **seno**. Nos auxiliaremos assim da Figura 14 a) (função **seno**).
- 2) Observamos onde se encontra a massa m na Figura 15 a1) e para onde ela se move: no caso, sai da posição **positiva A** e vai em direção a posição **zero**.
- 3) Verifica-se na Figura 14 a) (relativa ao **seno**) onde ocorre o movimento detectado no item anterior: Observamos que o arco do segundo quadrante corresponde ao movimento descrito no item anterior, ou seja, sai da posição **positiva 1** e vai em

direção a posição **zero**. Assim, como saímos do ponto **1**, que corresponde ao ângulo $\pi/2$ este será o ângulo de fase procurado.

Agora vejamos o que ocorre se a função escolhida fosse o cosseno:

1) Definimos a função que a Figura 15 a) representa: digamos que seja um **cosseno**. Nos auxiliaremos assim da Figura 14 b) (função cosseno).

2) Observamos onde se encontra a massa **m** na Figura 15 a1) e para onde ela se move: no caso, sai da posição positiva **A** e vai em direção a posição zero

3) Verifica-se na Figura 14 b) (relativa ao **cosseno**) onde ocorre o movimento detectado o item anterior: observamos que o arco do primeiro quadrante corresponde ao movimento descrito no item anterior, ou seja, sai da posição positiva 1 e vai em direção ao zero. Assim, como saímos do ponto 1, que corresponde ao ângulo 0 ou 2π qualquer um destes dois será o ângulo de fase procurado.

Observe com atenção a Figura 15 e note que de forma análoga fazemos para as demais configurações.

Uma constatação importante quando se observa as variações da Figura 15 é que o **seno** está sempre **adiantado** de $\pi/2$ em relação ao **cosseno**.

2.1.1.7 - Associação de molas – Série / Paralelo

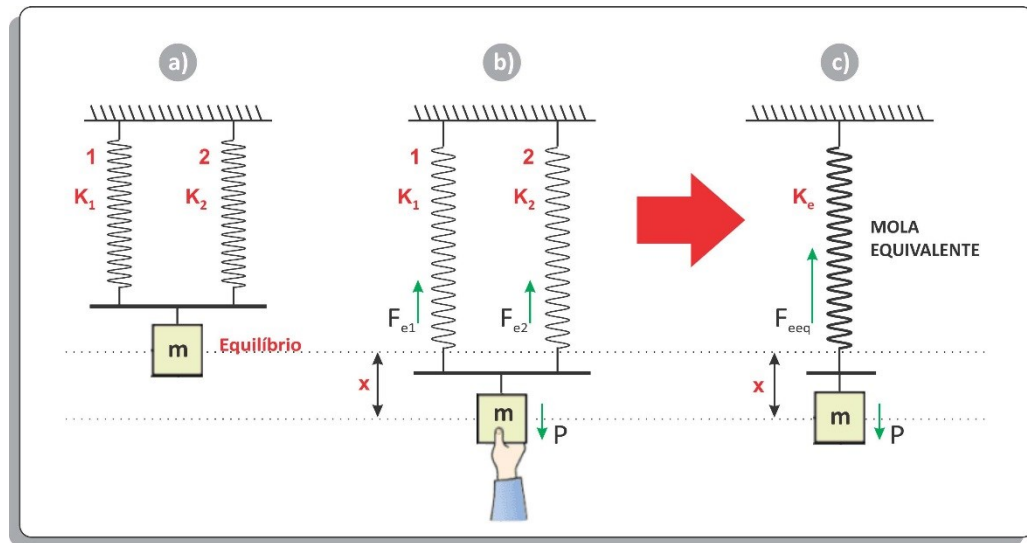
Considerando que tenhamos duas molas 1 e 2 de constantes elástica **k₁** e **k₂** respectivamente, podemos associá-las em série ou paralelo. Em qualquer dessas associações, as duas molas poderão ser substituídas por apenas uma de constante elástica equivalente **K_e** de forma que o efeito produzido, seja exatamente o mesmo. Isso pode ser feito para **n** molas. A Figura 16 traz a associação em paralelo.

Na Figura 16 temos duas molas de constantes elástica **k₁** e **k₂** em paralelo que são afastadas de sua posição e equilíbrio de uma distância **x**. As forças atuantes são mostradas na Figura 16 b).

Podemos então substituir o conjunto de molas por uma única mola equivalente de constante elástica **k_e** e o efeito no movimento será exatamente o mesmo. Temos

então, que encontrar o valor da constante elástica equivalente (k_e).

Figura 16 – Associação de molas em paralelo



Fonte: O autor

$$F_{e1} = k_1 x \quad \text{e} \quad F_{e2} = k_2 x \quad (2.25)$$

$$F_{eeq} = F_{e1} + F_{e2} = k_e x \quad (2.26)$$

onde F_{eeq} é a força elástica equivalente, F_{e1} é a força elástica da mola 1 e F_{e2} a força elástica da mola 2. Combinando (2.25) e (2.26) temos:

$$k_e x = k_1 x + k_2 x \quad (2.27)$$

$$k_e = k_1 + k_2 \quad (2.28)$$

A constante elástica da mola equivalente ao conjunto de molas em paralelo deverá então ser simplesmente a soma das constantes elásticas das molas do conjunto. No caso de mais de duas molas, basta soma-las analogamente.

Com relação a associação em série podemos também determinar a constante elástica da mola equivalente que poderá substituir o conjunto apresentando exatamente os mesmos efeitos. A Figura 17 ilustra tal arranjo.

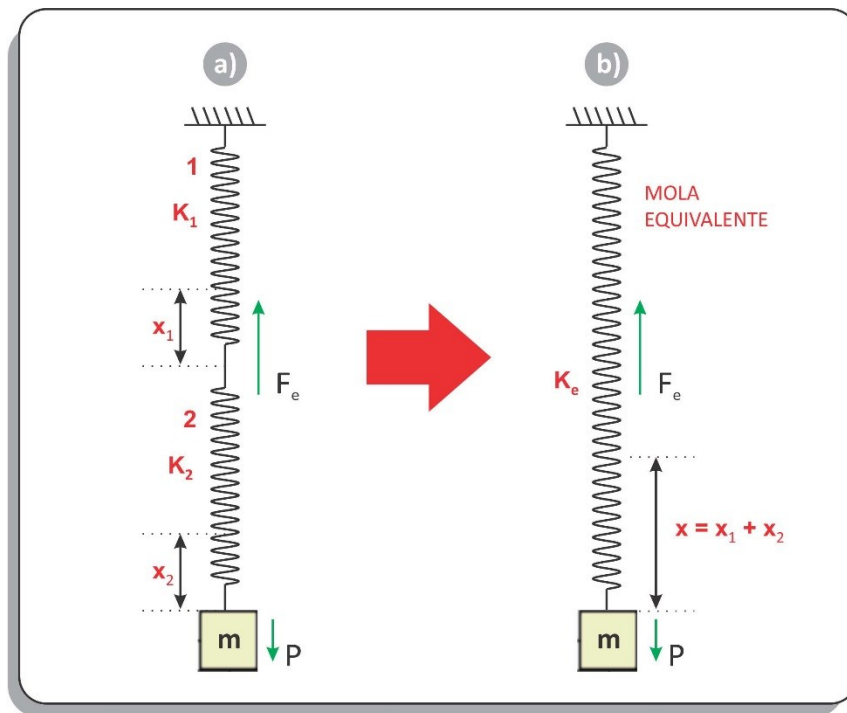
Nesse caso, as deformações sofridas (x_1 e x_2) a depender das constantes elásticas, podem ser diferentes, porém a força elástica F_e que age sobre as molas, é igual.

Com relação a mola **1** teremos então:

$$F_e = k_1 x_1 \quad \text{portanto,} \quad x_1 = \frac{F_e}{k_1} \quad (2.29)$$

Com relação a mola **2** teremos:

Figura 17 – Associação de molas em série



Fonte: O autor

$$F_e = k_2 x_2 \quad \text{portanto,} \quad x_2 = \frac{F_e}{k_2} \quad (2.30)$$

Com relação a mola equivalente:

$$F_e = k_e x \quad \text{portanto,} \quad x = \frac{F_e}{k_e} \quad (2.31)$$

Mas, como $x = x_1 + x_2$, juntando (2.29), (2.30) e (2.31) temos:

$$\frac{F_e}{k_1} + \frac{F_e}{k_2} = \frac{F_e}{k_e} \quad (2.32)$$

$$\frac{1}{k_e} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \quad (2.33)$$

Dessa forma encontramos então a constante elástica da mola equivalente que poderá substituir as molas associadas em série. Para mais molas em série, soma-se de maneira análoga.

2.2 - Mini tutorial Tracker

O software de vídeo análise Tracker é livre e pode ser baixado gratuitamente no site <https://physlets.org/tracker/>. Sua instalação é simples e possui opção em língua portuguesa. Em qualquer site de busca existem vários tutoriais ensinando como baixar e instalar o software.

Como já mencionado no início deste trabalho, o Tracker possui inúmeros recursos, mas vamos nos ater aqui, àqueles relevantes para a análise do MHS do sistema massa mola vertical.

2.2.1 - Delimitando o vídeo ao trecho de interesse para análise

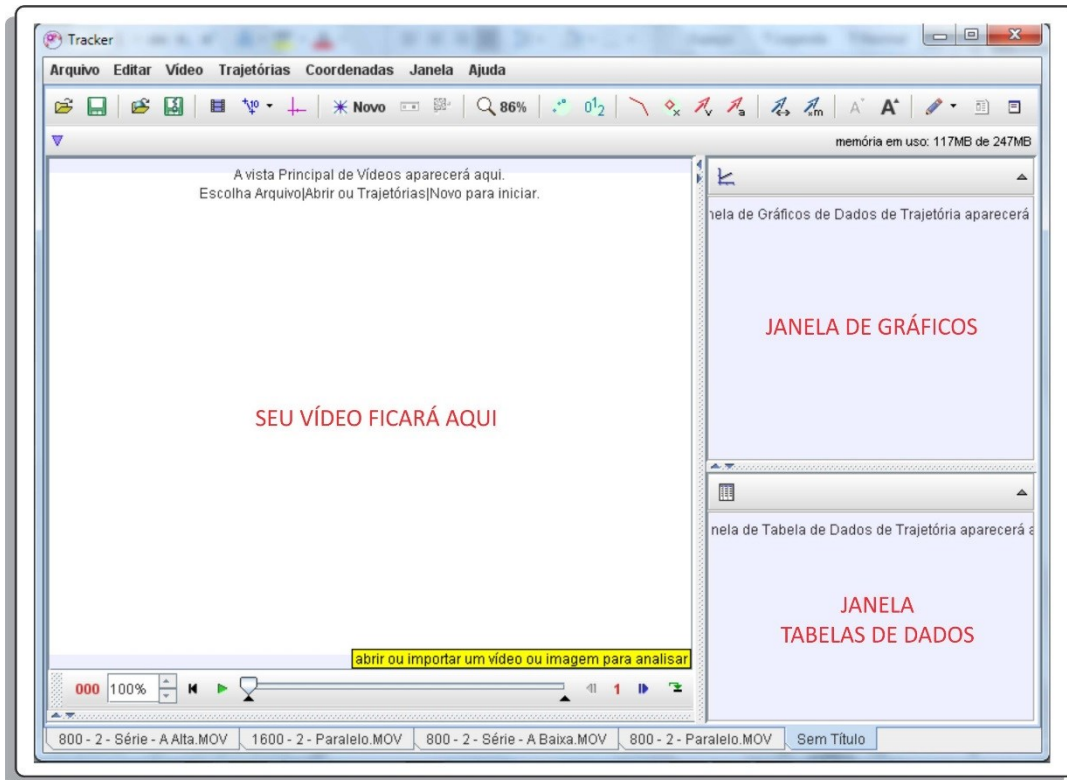
Tendo instalado o programa, ao abrirmos o mesmo, nos deparamos com uma janela semelhante a mostrada na Figura 18

Uma vez aberto o Tracker podemos utilizar o menu **Arquivo** ou os atalhos logo abaixo da barra de menus para abrir o arquivo de vídeo a ser analisado. O Tracker aceita vários formatos de vídeos, entre os quais .mov e .mp4. Depois do vídeo aberto, podemos utilizar a “**Barra de Controle de Vídeo**” abaixo da janela principal, (Figura 19), para fazermos a delimitação do vídeo que iremos analisar. A Figura 20 ilustra este procedimento.

Ocorre que na maioria das vezes, apenas parte do vídeo gravado, de fato nos interessa, então, podemos eliminar (cortar) o restante, deixando apenas aquilo que

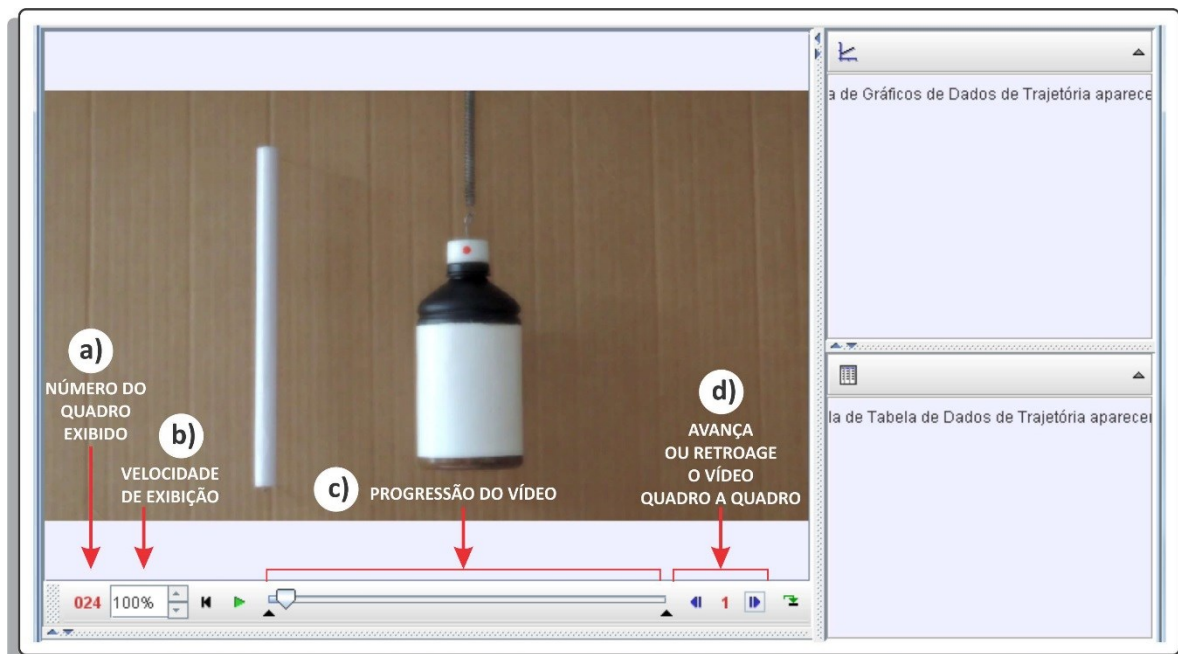
realmente será relevante para a análise.

Figura 18 – Janela de abertura do Tracker



Fonte: O autor

Figura 19 – Barra de controle de vídeo

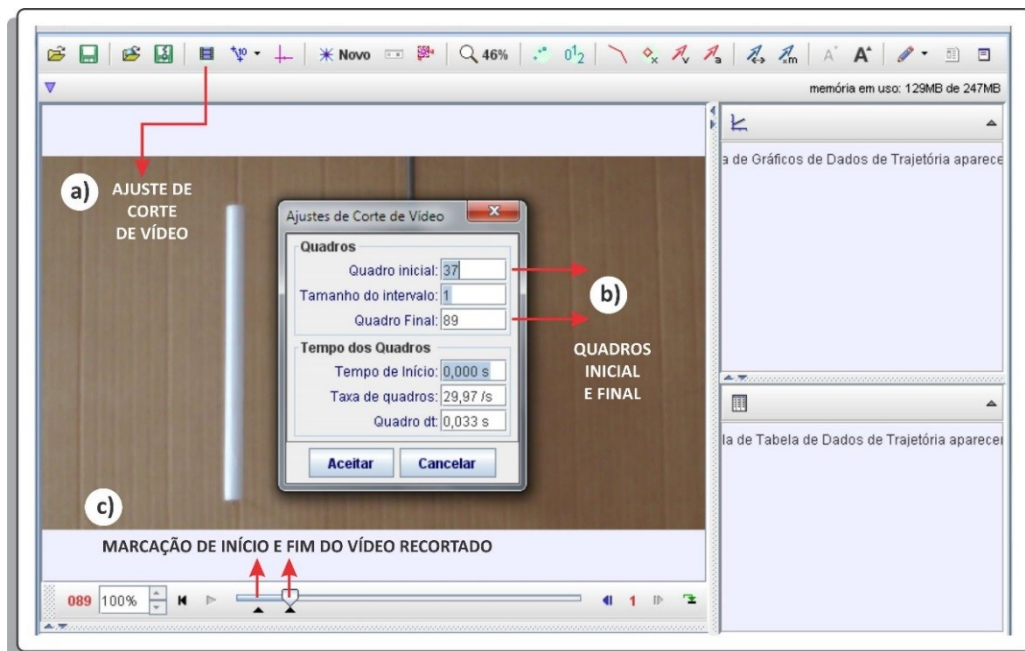


Fonte: O autor

Com auxílio da Barra de Controle de Vídeo mostrada na Figura 19, analisamos o vídeo e delimitamos a parte de interesse, digamos que seja do quadro 37 ao quadro 89.

Na Figura 20 a), clicamos no botão “**Ajuste de Corte de Vídeo**” e a janela da Figura 20 b) se abre. Nela colocamos então os números dos quadros inicial e final (no nosso caso, 37 e 89 respectivamente), conforme ilustrado. Clicamos em “**Aceitar**” e pronto. O vídeo estará delimitado como mostra a Figura 20 c) e apenas uma pequena parte do mesmo será de fato analisada.

Figura 20 – Delimitando a parte de interesse no vídeo

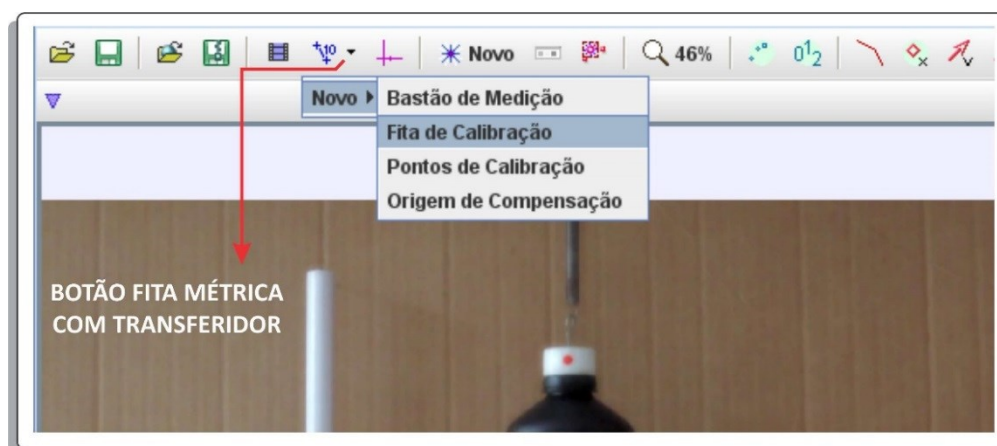


Fonte: O autor

2.2.2 - Calibração do vídeo à vista do Tracker

Para fazer a correta análise do vídeo o Tracker necessita ter uma referência de medida na cena gravada. Na Figura 20, note que introduzimos um bastão branco ao lado da massa. Esse bastão tem uma medida conhecida e funcionará como referência, devendo esta, portanto, ser qualquer objeto de medida conhecida que faça parte da cena a ser analisada. Mas, não basta sabermos a medida do bastão, temos que mostrar isso ao Tracker. Veja a Figura 21.

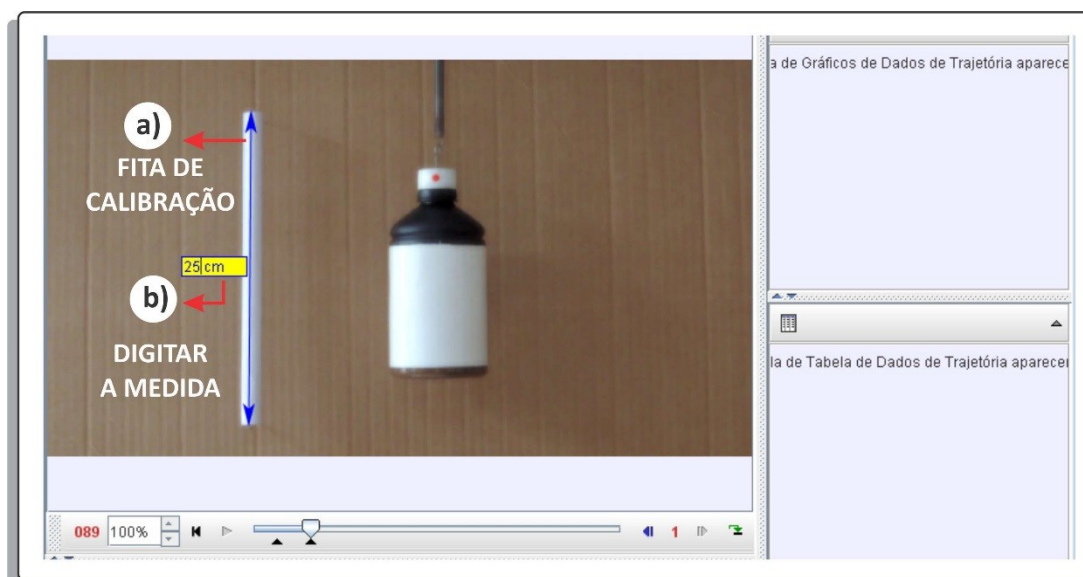
Figura 21 – Botão de calibração do vídeo



Fonte: O autor

Para tanto, basta clicarmos em Fita Métrica com Transferidor > Novo > Fita de Calibração. Feito isso, apertando a tecla Shift, o cursor do mouse toma uma forma quadrada. Basta clicar na parte superior do bastão com o Shift apertado e depois, ainda apertando o Shift clicar na parte inferior e uma linha azul indicará ao Tracker que aquele bastão é a referência de tamanho a seguir. Veja a Figura 22 a)

Figura 22 – Fita de Calibração



Fonte: O autor

As pontas das setas devem ficar exatamente nas extremidades da nossa referência. Caso isso não ocorra, basta clicar com o mouse nas pontas das setas e deslocá-las até a posição correta, podendo inclusive usar o botão de rolagem do

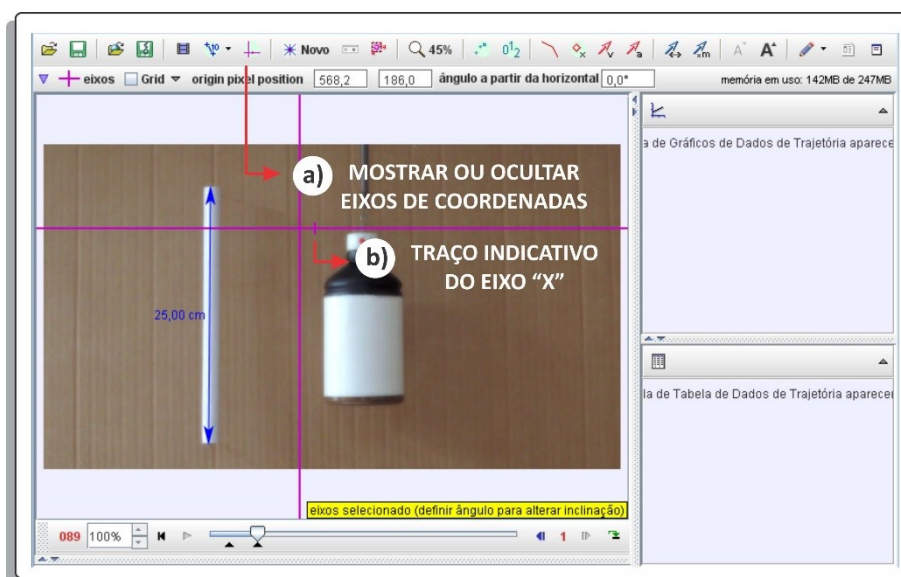
mouse para dar zoom no vídeo (ou usar o botão de atalho logo abaixo do menu) afim de facilitar a correta localização das setas.

Na Figura 22 b), um retângulo aparece ao lado da fita de calibração esperando que seja digitado o valor da medida (25 cm no nosso caso). O Tracker aceita medidas em metros e centímetros. No caso da Figura 22 b), optamos pela medida em centímetros. Uma vez feito isso, seu vídeo está calibrado e **o Tracker usará esta medição como base para sua análise**. Daí o porquê este passo ser muito importante devendo ser feito de maneira cuidadosa, afim de obter resultados mais precisos.

2.2.3 - Inserindo eixos

Outra etapa antes de iniciar a análise é a inserção de eixos (Figura 23).

Figura 23 – Inserção de Eixos



Fonte: O autor

Para inserir eixos, basta clicar no botão “**Mostrar ou Ocultar Eixos de Coordenadas**” (Figura 23 a)) e um eixo magenta aparece na tela. Clicando e mantendo pressionado o botão esquerdo do mouse no centro do eixo, podemos deslocá-lo para onde melhor nos convier. Podemos inclusive girá-lo da forma que melhor se ajuste, clicando sobre o eixo **x** que é marcado por um traço, conforme Figura 23 b)

Tanto o eixo, quanto a fita de calibração podem ter suas propriedades modificadas clicando com o botão direito do mouse sobre os mesmos e escolhendo as configurações mais convenientes de forma e cor, por exemplo.

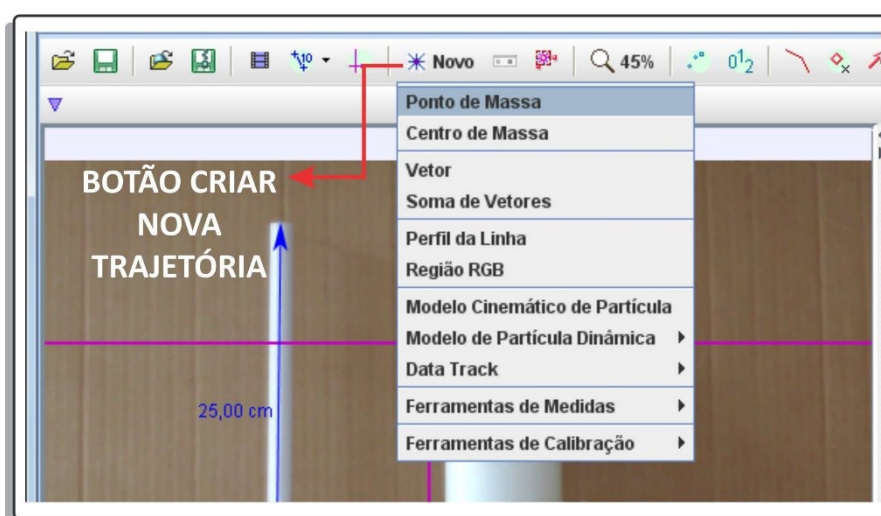
É importante observar que os eixos podem ser modificados a qualquer tempo, inclusive depois da análise já feita pelo Tracker. Uma vez modificado os eixos, toda a análise é refeita levando em consideração a nova posição dos mesmos.

2.2.4 - Inserindo ponto de massa

Esta é a última etapa antes que o Tracker possa iniciar a análise do vídeo em questão. O ponto de massa, nada mais é que um ponto no corpo que se move. Este ponto servirá de referência para a análise do vídeo e é definido pelo usuário.

A Figura 24 ilustra como isso é feito.

Figura 24 – Inserindo o ponto de massa



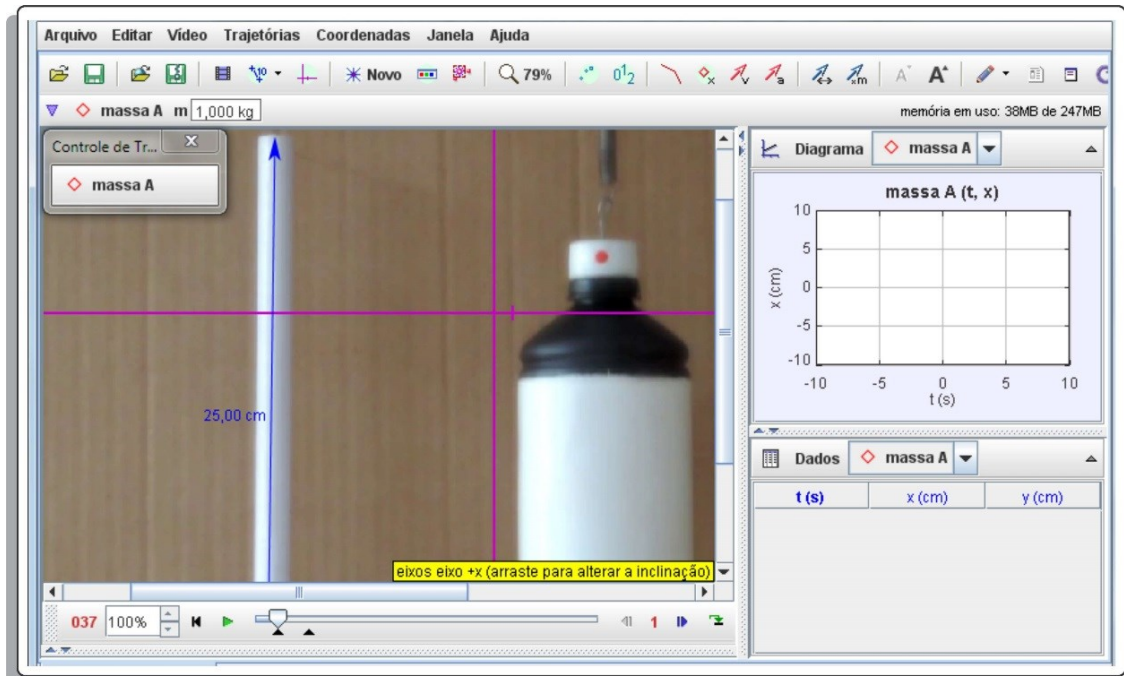
Fonte: O autor

Clicamos no botão Criar Nova Trajetória .> Ponto de Massa e uma pequena janela surge no canto esquerdo alto da tela, uma janela de gráfico surge no canto direito alto e uma tabela pronta para receber dados surge no canto direito baixo, como na Figura 25, indicando que o Tracker está pronto para iniciar a análise.

A partir deste ponto, temos 2 caminhos a seguir: ou fazemos a marcação manual em cada quadro, ou delegamos essa missão ao Tracker, que a faz de forma

automática. O valor da massa utilizada deve ser colocado no canto esquerdo alto da Figura 25.

Figura 25 – Janela ponto de massa



Fonte: O autor

2.2.4.1 - Marcação manual da trajetória

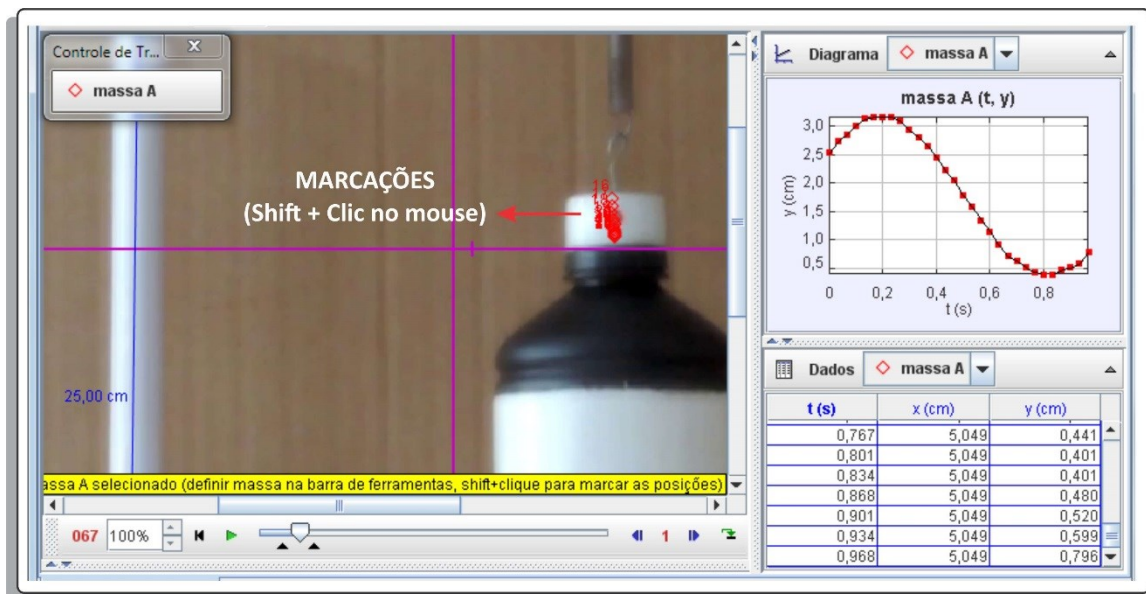
Inserido o ponto de massa, apertando e mantendo apertada a tecla Shift, o cursor toma a forma de um quadrado. Basta então clicar em uma parte do móvel, e um primeiro ponto é colocado no gráfico e na tabela, enquanto ocorre o avanço de um quadro no vídeo. Repete-se o processo, clicando **sempre no mesmo ponto** do móvel e mais um ponto é colocado no gráfico e na tabela o avanço de mais um quadro é observado. E vai se repetindo o processo até que todos os quadros delimitados tenham sido transcorridos. Como exemplo, a Figura 26 mostra o resultado após 30 quadros terem sido marcados.

Note que o eixo vertical do gráfico está marcado como y, diferentemente da Figura 25. Isso, será assunto mais adiante.

Esse tipo de marcação manual, é aceita tranquilamente pelo Tracker, mas neste trabalho optaremos por fazer a marcação automática por algumas razões.

Imagine que queiramos analisar um vídeo de 180 quadros por exemplo. Seria dispendioso termos que clicar 180 vezes até percorrer todos os quadros, além de levar bastante tempo. No processo automático o Tracker faz tudo, enquanto o usuário apenas assiste. É, portanto, mais rápido e menos trabalhoso.

Figura 26 – Marcação manual da trajetória



Fonte: O autor

Soma-se a isso, o fato de que, a depender dos cuidados com a gravação do vídeo, a marcação automática é mais precisa, propiciando resultados mais fiéis ao movimento estudado.

Assim, optamos neste trabalho, pela marcação automática da trajetória.

2.2.4.2 - Marcação automática da trajetória

Para que o Tracker possa fazer a marcação automática dos quadros, é necessário que haja um padrão de cor que ele possa distinguir em cada quadro. Isso, a depender o movimento de estudo, nem sempre é possível. Mas, no nosso caso, é.

Observando a massa utilizada no nosso experimento, notamos uma circunferência vermelha sobre um fundo branco (na tampa do frasco). Essa, será a referência que o Tracker vai seguir. Evidentemente que esta marca, poderia ser feita em qualquer ponto do corpo que oscila, desde que haja contraste entre a cor da marca

e a cor de fundo ao redor.

A Figura 27 ilustra como é feito. Clicando na pequena janela na parte esquerda alta em “**massa A**”, e depois em “**Trajectoria Automática**” deixamos o Tracker pronto para iniciar o processo automático de coleta de dados da trajetória.

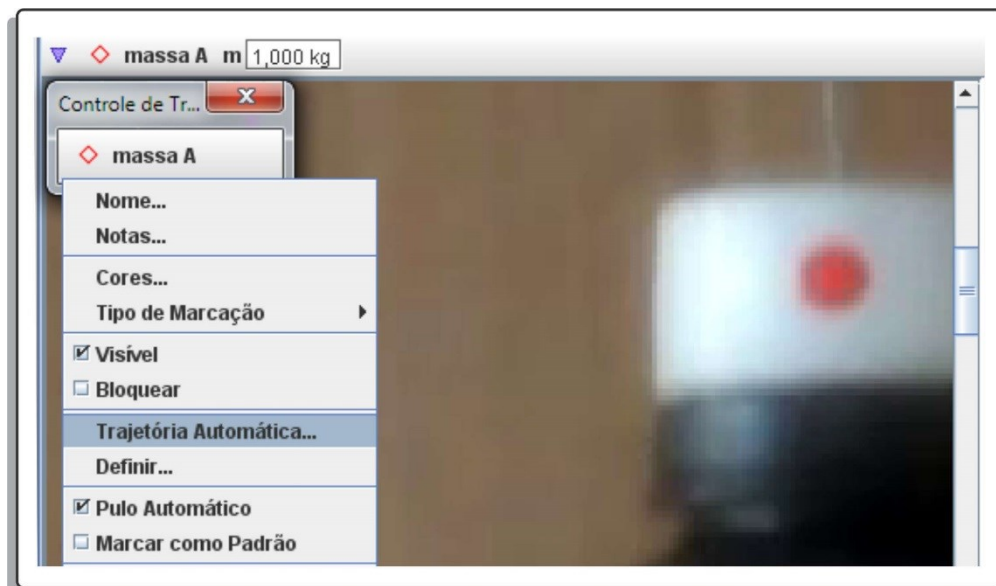
A tela mostrada na Figura 28, então surge.

Observe que na Figura 27 ampliamos a imagem do vídeo afim de destacar o ponto referencial (circunferência vermelha).

Uma vez feito isso, resta-nos iniciar o processo. Apertando e mantendo as teclas Shift e Control, notamos que o cursor toma a forma circular. Clicamos (ainda mantendo Shift e Control apertados) no centro da nossa referência (circunferência vermelha).

Nesse estágio, basta, na Figura 28 clicar em “**Pesquisar**” e o Tracker fará todo o trabalho de coleta de dados (gráficos e tabelas) desde o quadro inicial 37 até o final 89, (conforme escolhemos previamente).

Figura 27 – Marcação automática da trajetória



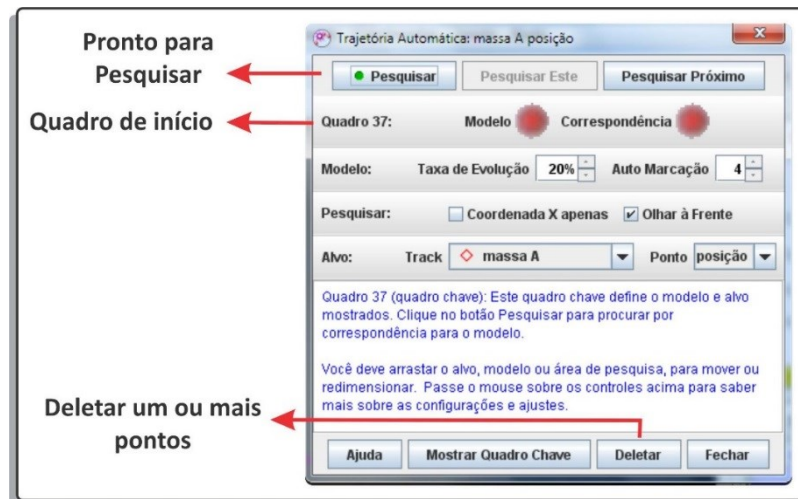
Fonte: O autor

Caso deseje parar a pesquisa, clique botão “**Parar**” que aparecerá no canto esquerdo alto da Figura 28 (no lugar de “Pesquisar”)

Caso deseje apagar algum ponto marcado, ou apagar todos para começar novamente, clique em “**Deletar**” no canto esquerdo baixo da Figura 28.

Na Figura 29, podemos observar o resultado da coleta automática de dados.

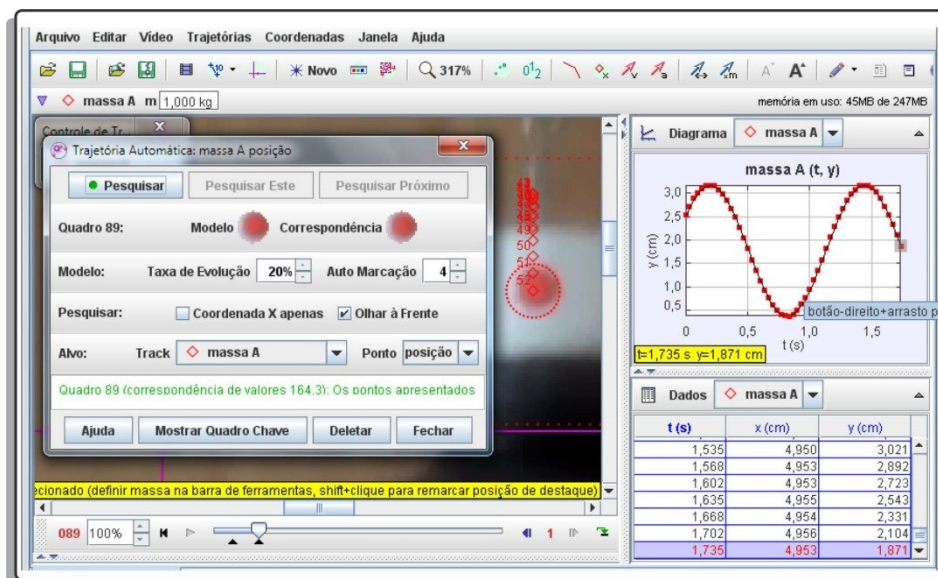
Figura 28 – Tela Trajetória Automática massa A posição



Fonte: O autor

De acordo com essa figura, observamos uma curva experimental quase que perfeita traçada automaticamente pelo Tracker que representa muito bem o movimento oscilatório que hora estudamos.

Figura 29 – Resultado da marcação automática da trajetória realizada pelo Tracker



Fonte: O autor

2.2.5 - Gráficos e tabelas

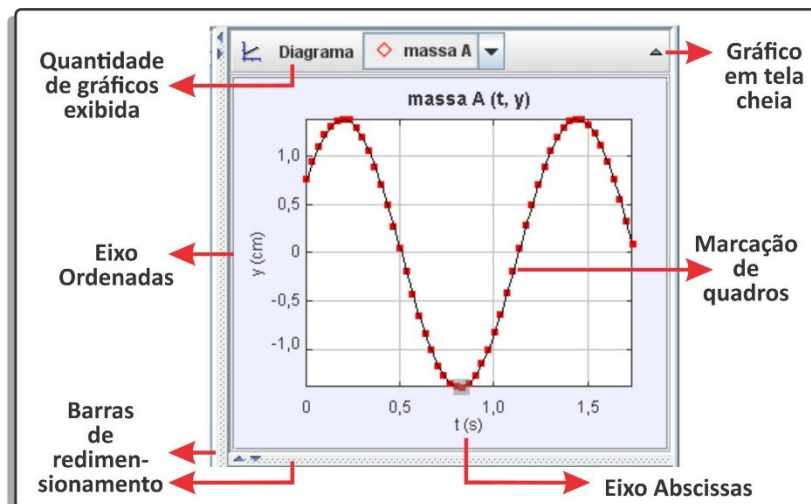
Depois de feita a marcação de trajetória, quer seja manual ou automática, os gráficos e tabelas são inseridos automaticamente do lado direito da janela principal do Tracker

2.2.5.1 - Janela de gráficos

A Figura 30 mostra uma típica janela de gráficos do Tracker onde podemos destacar alguns pontos:

- 1) O Tracker pode exibir até 3 gráficos simultâneos. Clique em **“Diagrama”** para escolher a quantidade de gráficos a ser exibida.
- 2) As grandezas mostradas nos eixos de ordenadas e abscissas podem ser modificadas. Clicando com o botão direito do mouse sobre o título do eixo, podemos escolher aquelas que desejamos exibir.

Figura 30 – Janela de gráficos



Fonte: O autor

- 3) – Clicando sobre as barras de redimensionamento, podemos definir o tamanho vertical e horizontal da janela gráfica.
- 4) – Cada ponto vermelho mostrado no gráfico indica a marcação de trajetória

de um quadro. Assim, vídeos gravados com maior quantidade de quadros por segundo, apresentará mais pontos vermelhos na linha que representa a trajetória.

5) Caso queira, o gráfico pode ser exibido em tela cheia (canto direito alto da janela gráfica).

2.2.5.2 - Janela de tabelas

Da mesma forma que a janela de gráficos, a de tabelas também pode ser redimensionada como melhor nos convir. A Figura 31 mostra uma típica janela de tabelas do Tracker, onde cada linha é relativa a um ponto vermelho (um quadro) marcado na Figura 30. Observe que, clicando sobre um destes pontos (Figura 30), a linha correspondente é destacada na tabela (Figura 31).

As colunas que serão exibidas nesta janela, podem ser definidas clicando em “**Dados**” na parte esquerda alta da janela.

Figura 31 – Janela de tabelas



t (s)	x (cm)	y (cm)
0,000	2,981	0,764
0,033	2,981	0,943
0,067	2,981	1,110
0,100	2,977	1,225
0,133	2,977	1,312
0,167	2,976	1,378
0,200	2,978	1,388
0,234	2,980	1,380
0,267	2,984	1,301
0,300	2,986	1,205
0,334	2,991	1,062
0,367	2,996	0,899
0,400	2,999	0,704

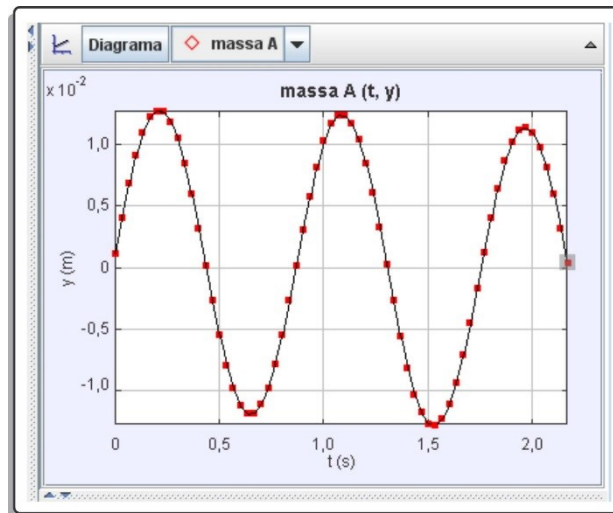
Fonte: O autor

2.2.6 - Ajustes de curvas

Por vezes, a curva obtida experimentalmente não é bem delineada, trazendo imprecisão na coleta de dados. O Tracker nos traz a opção de ajuste, traçando uma curva média que melhor representa o movimento a ser estudado. Note na Figura 32

que a amplitude máxima/mínima do movimento, varia. Podemos então traçar uma curva média que nos permita coletar dados de forma mais precisa. Para tanto, devemos seguir alguns passos.

Figura 32 – Curva a ser ajustada



Fonte: O autor

1) Damos um duplo click na janela do gráfico que queremos ajustar (Figura 32). A Janela “**Ferramenta de Dados**” é aberta. Clicamos então em Analisar > Ajuste de Curvas. Teremos então a janela da Figura 33.

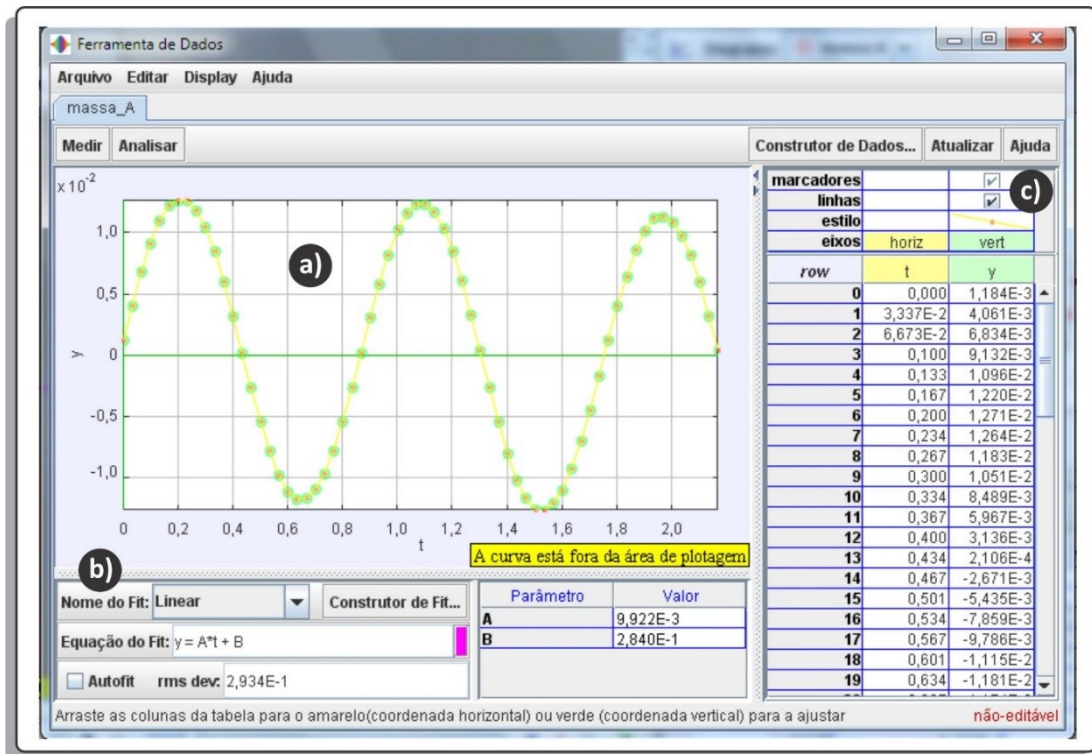
Na Figura 33 a) temos a curva a ser ajustada, em b) escolhemos a equação que melhor represente a curva que queremos ajustar (no nosso caso, uma senoide) e em c), podemos definir a aparência da curva que queremos ajustar (cor, pontos, etc).

2) Clicamos em “**Nome do Fit**” (Figura 33 b) e escolhemos “Senoide”. O resultado é mostrado na Figura 34. A Figura 34 a) mostra a curva de ajuste (magenta). A Figura 34 b), traz a equação da curva de ajuste que guarda semelhança com a Equação (2.9).

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

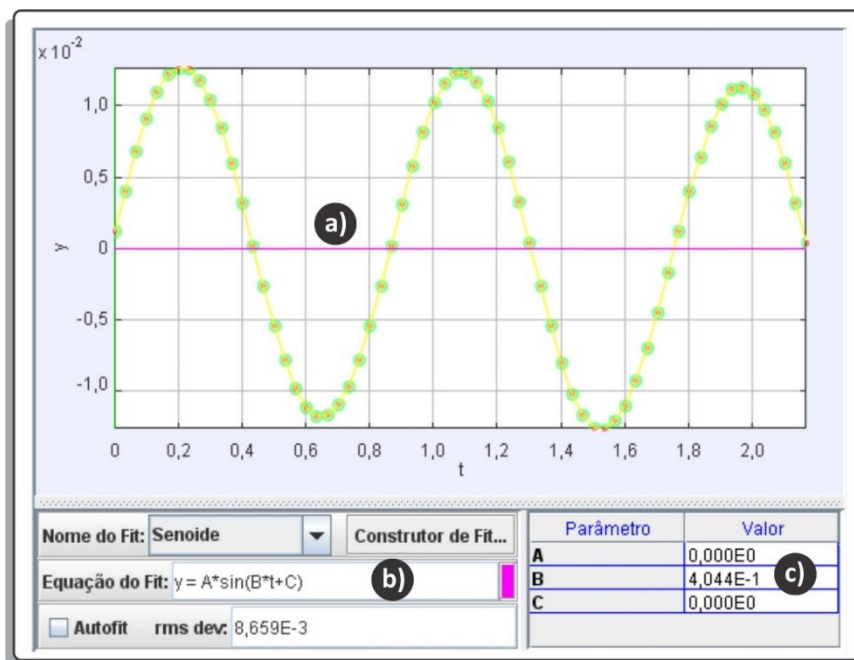
Então, na Figura 34 c), relacionando a Equação (2.9) com a equação da Figura 34 b), o parâmetro **A** corresponde a amplitude, o parâmetro **B** corresponde a frequência angular e o parâmetro **C** ao ângulo de fase inicial.

Figura 33 – Janela ferramenta de dados



Fonte: O autor

Figura 34 – Ajuste de curva utilizando a curva senoide

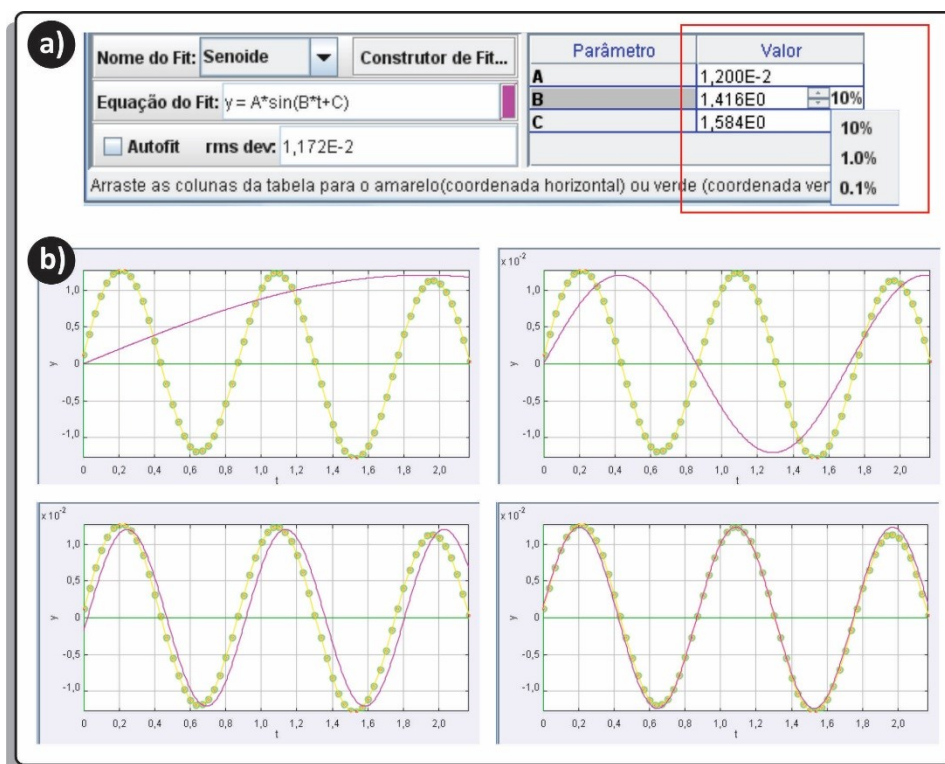


Fonte: O autor

3) Na Figura 34 c), devemos auxiliar o Tracker colocando um valor de amplitude aproximado, que pode ser obtido por inspeção na Figura 33. Este valor é cerca de $1,2 \cdot 10^{-2}$.

4) Por fim, vamos ajustando o valor dos parâmetros **B**, depois o **C**, na Figura 34 c) até que cheguemos à curva média desejada. A Figura 35 a) mostra o ajuste do parâmetro **B**. Podemos digitar um valor e/ou ir clicando nas setas acima e abaixo (no destaque em vermelho) até encontrarmos o valor do melhor ajuste.

Figura 35 – Evolução do ajuste de curva



Fonte: O autor

A Figura 35 b) mostra uma sequência da curva magenta se ajustando à curva experimental.

Quando **estivermos próximos da curva ideal**, podemos, alternativamente, clicar em “**Autofit**” no canto esquerdo baixo da Figura 34, e o Tracker será capaz de desenhar automaticamente a melhor curva de ajuste.

Uma vez encontrada a curva de ajuste, poderemos colher então (Figura 35 a)) a amplitude (parâmetro **A**), a frequência angular (parâmetro **B**) e o ângulo de fase

inicial (parâmetro **C**). É claro que o ângulo de fase inicial deve ser ajustado, pois na Equação (2.9), trabalhamos com cosseno e não seno.

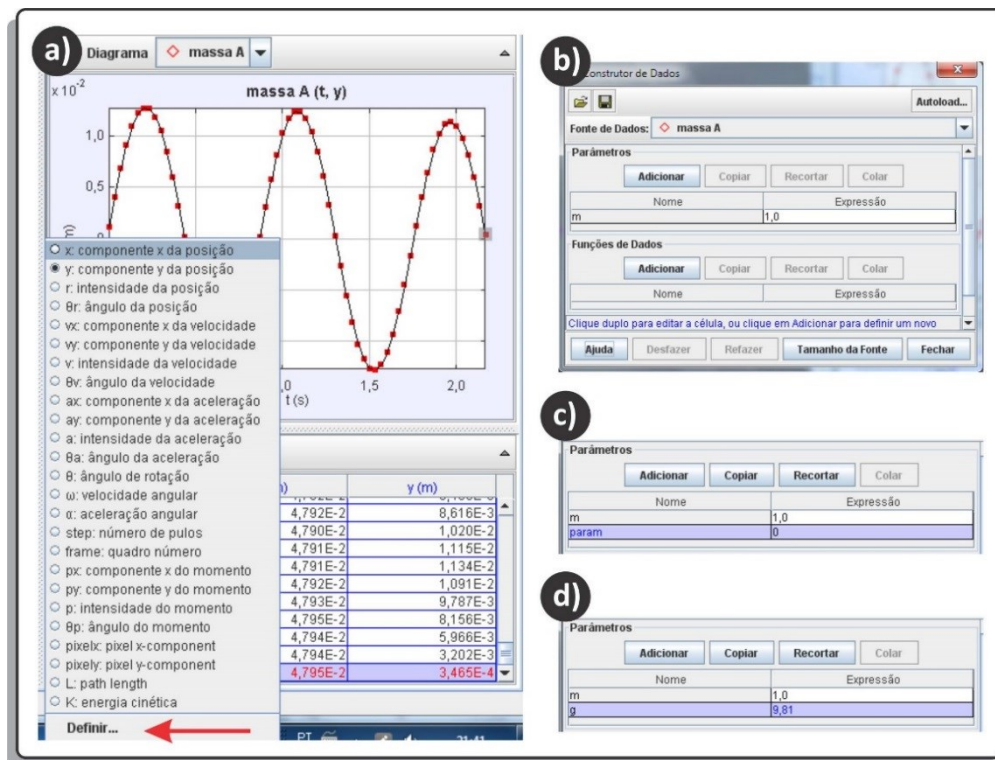
2.2.7 - Introduzindo função para análise gráfica

O Tracker oferece várias funções pré-definidas que podem ser plotadas nos gráficos.

Suponha que no nosso estudo, queiramos traçar o gráfico da energia potencial gravitacional e da energia potencial elástica. Ambas não estão previamente definidas pelo Tracker. Podemos então adicionar estas funções, ou outras quaisquer do nosso interesse. Inicialmente vamos definir a função energia potencial gravitacional dada pela Equação (2.21) (mgh). Para tanto, seguimos os passos abaixo.

- 1) Na janela de gráficos, clicamos com o botão direito do mouse sobre o nome de um dos eixos e clicamos em “**Definir**” (Figura 36 a)) A janela “**Construtor de Dados**” aparece (Figura 36 b)).

Figura 36 – Definindo novas funções no Tracker



Fonte: O autor

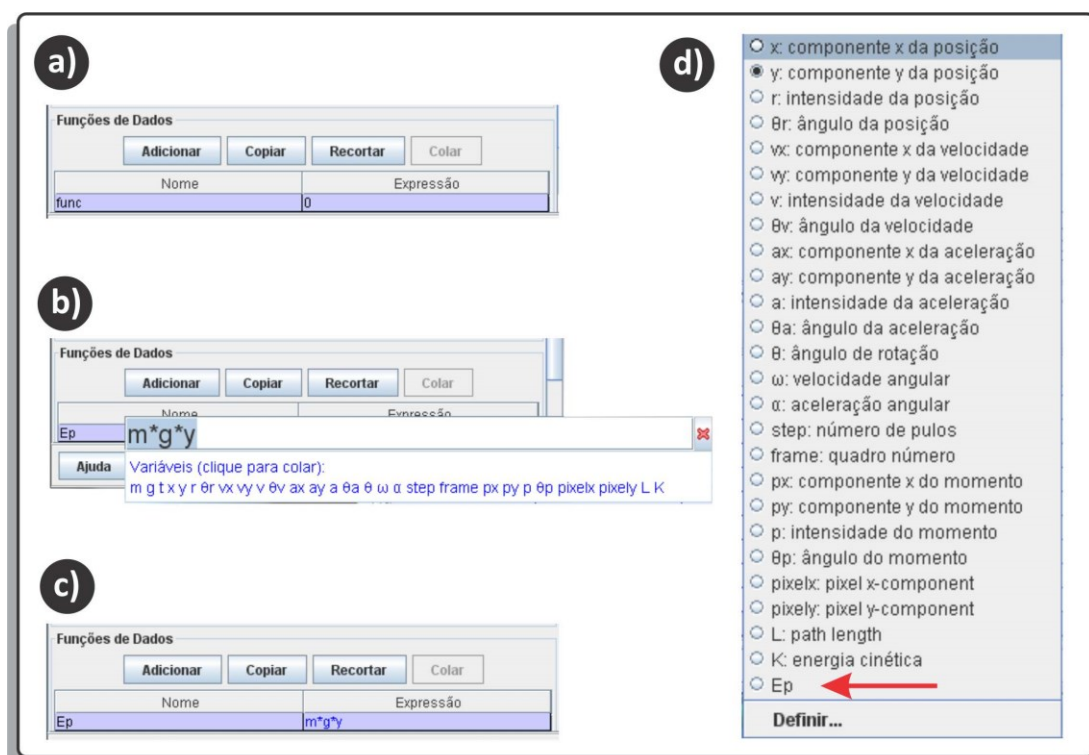
2) Na subjanela “**Parâmetros**” clicamos em “**Adicionar**” e a linha azul destacada aparece (Figura 36 c)).

3) Um duplo clique em “**param**” e digitamos o nome do parâmetro. No nosso caso **g**. Clicamos em Enter e o nome do parâmetro é introduzido

4) Com o mesmo procedimento do passo 3), clicamos sobre o número zero e introduzimos o valor (9,81). O resultado da definição do parâmetro **g** é mostrado na Figura 36 d).

5) Na subjanela “**Funções**” clicamos em adicionar e a linha azul destacada na Figura 37 a) aparece.

Figura 37 – Escrevendo uma nova função



Fonte: O autor

6) Um duplo clique em “**func**” e colocamos o nome da função (E_p no caso). A seguir, em “**Expressão**” podemos escolher com um clique aqueles parâmetros da lista de parâmetros para escrever nossa função (mgy).

7) Terminado, tecle Enter. O resultado é mostrado na Figura 37 c). Clique em “**Fechar**”. A nova função já estará disponível (no final da lista) para ser plotada em

gráficos como mostra a Figura 37 d).

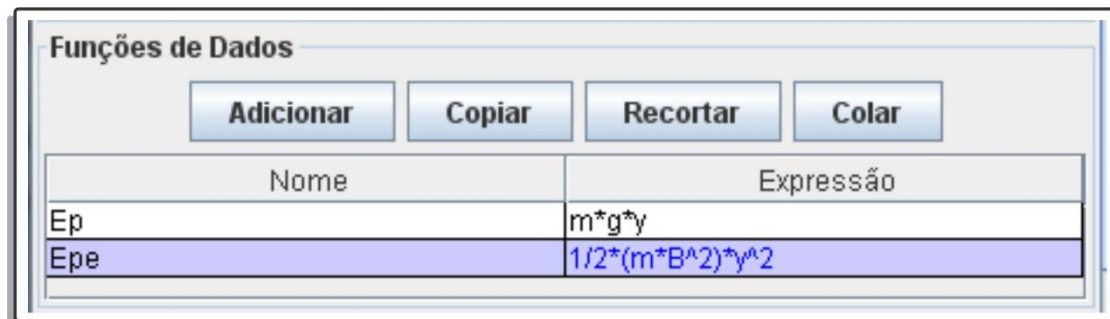
Quanto a função representativa da energia potencial elástica (Equação(2.20)), caso saibamos o valor da constante elástica **k**, esta não necessita de novos parâmetros. Seguimos então os passos de 5) a 7).

Caso não tenhamos o valor da constante **k**, podemos, alternativamente, usar $k=m\omega^2$ (da definição da Equação (2.14)) onde ω (frequência angular), como já dito, é justamente o parâmetro **B** obtido no ajuste de curva que fizemos na sessão anterior.

Antes da introdução da expressão, o valor deste parâmetro (**B**) **deve** ser definido no Tracker conforme os passos 3) e 4).

Uma vez feito isso, basta seguir os passos de 5) a 7), introduzindo em “**Expressão**” a Equação (2.20) ($1/2(ky^2)$), onde $k=m\omega^2$ e $\omega=B$. A Figura 38 mostra o resultado da função já digitada.

Figura 38 – Acrescentando a função da energia potencial elástica



Fonte: O autor

A unidades usadas pelo Tracker são do Sistema Internacional (SI), substituindo o metro por centímetros se assim for definido quando calibramos a medida padrão a ser seguida pelo Tracker (sessão 2.2.2)

2.2.8 - Criando função para ajuste de curvas

Na sessão 2.2.6, aprendemos a fazer o ajuste de curvas (no caso, a curva da posição), utilizando uma senoide para isso. Ocorre que a função horária da posição, relaciona-se com um cosseno, e não seno (Equação (2.9))

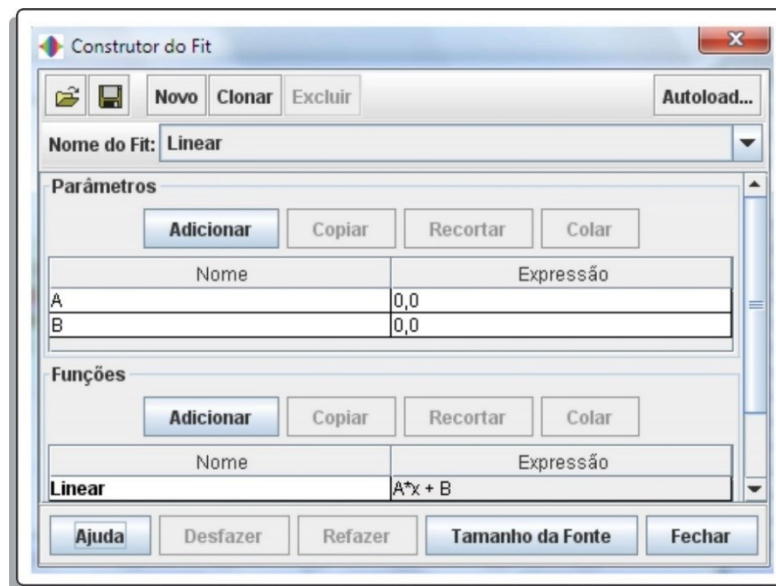
Sabemos que a função seno é adiantada de $\pi/2$ radianos em relação ao cosseno. Portanto, na hora de colher o ângulo de fase inicial calculado pelo Tracker, usando a senoide, devemos subtrair $\pi/2$ radianos do resultado obtido.

O Tracker não oferece a função cosseno para o ajuste de curvas. Porém, podemos criar uma nova função (cossenoide) para este ajuste (nova fit).

Vamos então criar uma função cosseno, que usaremos na sessão de Resultados e Análises. O procedimento é semelhante ao que foi feito na sessão 2.2.7.

1) Damos um duplo click na janela do gráfico que queremos ajustar com a nova função que criaremos. A Janela “**Ferramenta de Dados**” é aberta (Figura 33). Clicamos em Analisar > Ajuste de Curvas > Construtor de Fit (na parte baixa da janela). Teremos então, a janela da Figura 39.

Figura 39 – Janela construtor de função para ajuste de curvas



Fonte: O autor

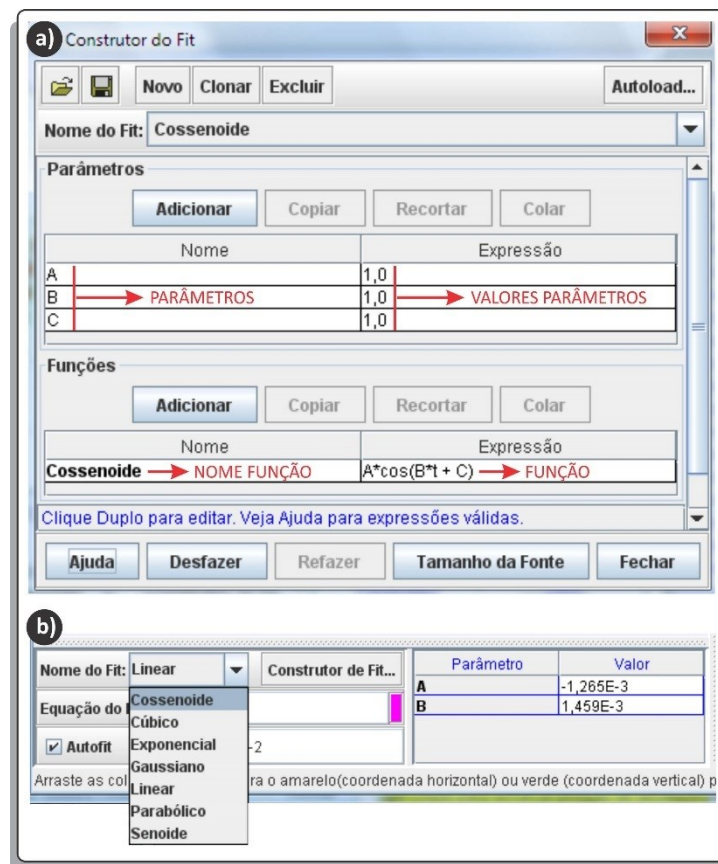
2) Inicialmente clicamos em “Novo” no alto da tela. Na subjanela “**Parâmetros**” clicamos em “**Adicionar**” e adicionamos um a um os parâmetros **A**, **B**, **C**, juntamente com seus valores em “**Expressão**”. Esses valores são aleatórios, pois são variáveis e mudarão conforme o uso da função que hora criamos.

3) Na subjanela “**Funções**”, desça até “**Fit1**”, digite o nome da função (Cossenoide) e a função em “**Expressão**”. Clique em “**Fechar**” e a nova função

estará disponível para uso, juntamente com as pré existentes quando for realizar o ajuste de curva. A Figura 40 a), mostra como ficam as subjanelas “**Parâmetros**” e “**Funções**” quando nossa nova função está prestes a ser criada, e a Figura 40 b) mostra a função cossenoide já disponível,

O uso desta função é interessante, pois não mais precisaremos fazer o ajuste do ângulo de fase inicial quando formos ajustar a curva representativa da posição da massa no MHS do nosso sistema massa mola.

Figura 40 – Criando a função cossenoide



Fonte: O autor

2.2.9 - Gravação de vídeo para análise com o Tracker: erros e acertos

Para a realização de uma vídeo análise, a primeira coisa que temos que fazer é disponibilizar um vídeo para ser analisado. O Tracker possui vários vídeos prontos para análise, mas queremos analisar um vídeo próprio. Na gravação do vídeo algumas considerações são importantes:

1) É necessária uma iluminação adequada, afim de não comprometer a qualidade do vídeo.

2) Os vídeos podem ser gravados com celulares, câmeras fotográficas ou filmadoras. A qualidade do equipamento, influenciará nas análises. O Tracker realiza análise quadro a quadro, portanto é recomendável aparelhos que realizem a filmagem com ao menos 30 quadros por segundo. Quanto maior a quantidade de quadros, mais precisa será as medições.

3) O movimento a ser gravado, deve ocorrer em um plano, uma vez que o Tracker realiza a sua coleta de dados em movimentos bidimensionais. Movimentos realizados no espaço (3D), prejudicam a análise dos dados.

4) O equipamento utilizado para gravação, deve estar imóvel. Assim, recomenda-se um tripé ou outro suporte qualquer afim de evitar segurar o equipamento com as mãos.

5) O equipamento de filmagem deve estar alinhando com o ponto onde se pretende definir o ponto de massa do sistema a ser analisado.

6) É recomendável, sempre que possível, marcar o ponto onde será inserido o ponto de massa. Essa marcação deve oferecer um contraste com a vizinhança. No nosso caso fizemos uma marca vermelha sobre uma superfície branca.

7) Deve-se guardar uma distância dentro da razoabilidade entre o equipamento filmador e o fenômeno a ser filmado. Não muito longe, nem tão próximo que possa comprometer a qualidade ou enquadramento do vídeo.

8) Quando da calibração do vídeo, a medida padrão (no nosso caso o bastão branco) deve estar, de preferência, no **mesmo plano** onde se realiza o movimento. Isso potencializa a precisão na coleta dos dados.

3. - PERCURSO METODOLÓGICO

Este trabalho tem como proposta, estudar o MHS do sistema massa mola vertical sob ação da gravidade através de análise de vídeo realizada pelo Tracker.

Para leitura desta e das sessões posteriores, é altamente recomendável que se tenha lido a sessão 2.2 (Mini tutorial Tracker) ou que se tenha conhecimento prévio do funcionamento do software.

O material utilizado no experimento é apresentado na Figura 41.

Figura 41 – Material utilizado nos experimentos do MHS do sistema massa mola vertical



Fonte: O autor

As molas utilizadas são semelhantes, portanto, devem ter constantes elásticas de valor próximos.

Por conta de as constantes elásticas das molas serem altas (molas mais duras), as massas devem, também, terem um valor relativamente elevado (0,8 e 1,6 kg neste caso). Utilizando-se molas de constante elástica menor, pode-se usar massas de algumas gramas apenas, de forma a garantir o movimento, sem, contudo, deformar a mola definitivamente, inutilizando-a.

O bastão de calibração, neste caso mede 0,25 m. Lembrando que este comprimento será a referência do Tracker com relação a medidas e fica a critério do experimentador definir tal referência como explicado anteriormente.

O conector de molas, será usado na associação em paralelo das molas.

Todo o conjunto, como deveria ser, foi afixado em um ponto imóvel.

3.1 - Gravação do vídeo do MHS do sistema massa mola vertical

Para gravação de todas as versões do experimento, foram observadas as recomendações da sessão 2.2.9. e utilizada uma câmera capaz de gravar 60 quadros por segundo.

Um equipamento que grave 30 quadros por segundo é o suficiente para ter uma análise satisfatória.

3.2 - Versões experimentais

Neste trabalho, realizamos várias versões do experimento em questão, afim de estudar de forma mais ampla o MHS do sistema massa mola vertical.

Em todas as versões, a metodologia experimental, é mesma, ou seja, seguimos os seguintes passos (não necessariamente nesta ordem):

- 1) Gravamos o vídeo;
- 2) Delimitamos o vídeo apenas aos quadros de interesse;
- 3) Calibramos o vídeo;
- 4) Inserimos os eixos;
- 5) Inserimos o ponto de massa;
- 6) Realizamos a marcação automática da trajetória.

Vejamos então, como isso foi feito para a primeira versão que estudaremos.

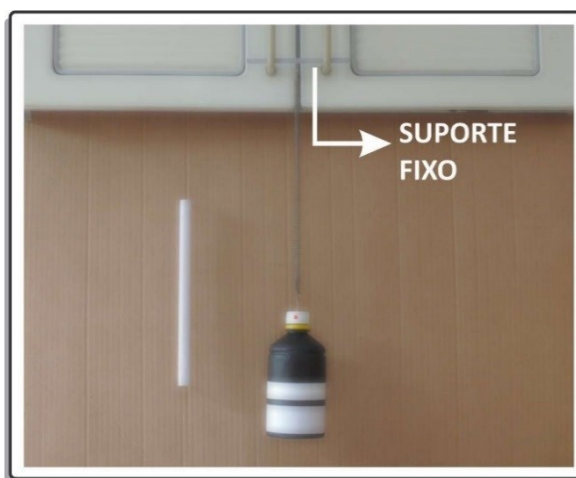
3.2.1 - Massa de 1,6 kg – arranjo simples

Para realização do experimento foi utilizado o arranjo mostrado na Figura 42, onde temos a massa de 1,6 kg colocada para oscilar acoplada a apenas uma mola.

Cumprida a etapa 1) de gravação do vídeo, utilizamos a barra de controle de vídeo da Figura 19, para delimitarmos (cortarmos) o vídeo deixando apenas o trecho que nos interessa (sessão 2.2.1) descartando o restante, cumprindo assim a etapa 2).

Esta delimitação de vídeo pode ser refeita a qualquer tempo. Sempre que isso ocorre, o Tracker automaticamente ajusta sua análise ao novo conjunto de quadros definido.

Figura 42 – Arranjo para o experimento massa de 1,6 kg - simples



Fonte: O autor

Na etapa 3), fizemos a calibração do vídeo, ou seja, mostramos ao Tracker uma medida padrão que ele deve seguir.

Na Figura 42, nota-se um bastão branco de medida conhecida que foi inserido na cena do movimento, justamente para este fim.

Os procedimentos para a realização desta etapa estão na sessão 2.2.2.

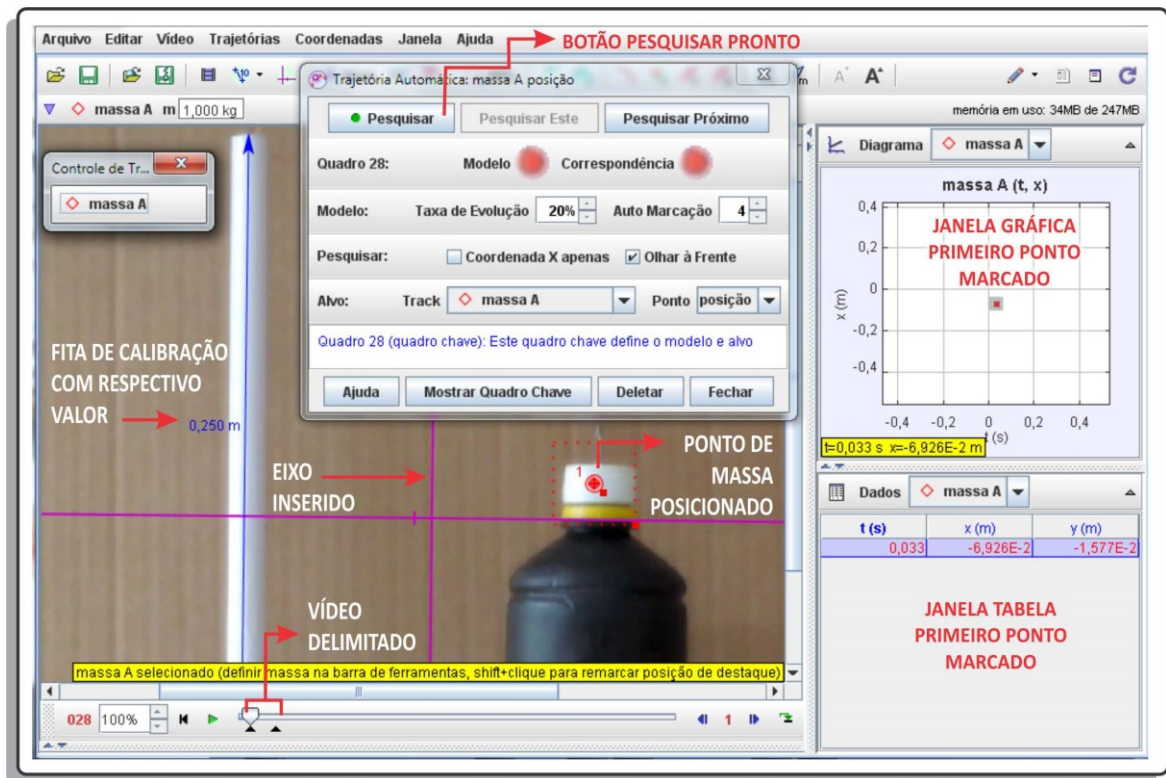
Na etapa 4) inserimos eixos, conforme sessão 2.2.3. Para todas as versões do nosso experimento, colocamos o eixo **y** na vertical (direção onde ocorre o movimento de estudo). Esta opção é livre, nada impedindo, portando, que caso lhe seja mais confortável, coloque o eixo **x** na vertical.

Por ocasião da análise propriamente dita do vídeo, deslocaremos o eixo verticalmente de forma a nos facilitar a leitura e interpretação dos dados.

Lembramos que a mudança de eixo pode ser feita a qualquer tempo.

Por fim, fizemos a inserção do ponto de massa (etapa 5), seguindo os procedimentos da sessão 2.2.4.2 (análise automática). Assim, o Tracker está pronto para realizar a análise automática da trajetória e nos apresentar os gráficos/tabelas a serem estudados. A Figura 43 traz a ilustração da tela pronta para iniciar a análise.

Figura 43 – Tracker configurado para início da análise do movimento



Fonte: O autor

Na Figura 43, observamos que todos os passos para o início da análise de vídeo, estão concluídos e o botão “Pesquisar” (no alto ao centro), está pronto para iniciar a pesquisa (etapa 6).

Uma vez que, como já foi dito, os procedimentos são os mesmos para todas as versões que analisaremos, não vamos repeti-los. No entanto, apresentamos na Figura 44 todos os arranjos experimentais os quais estudaremos durante a próxima sessão

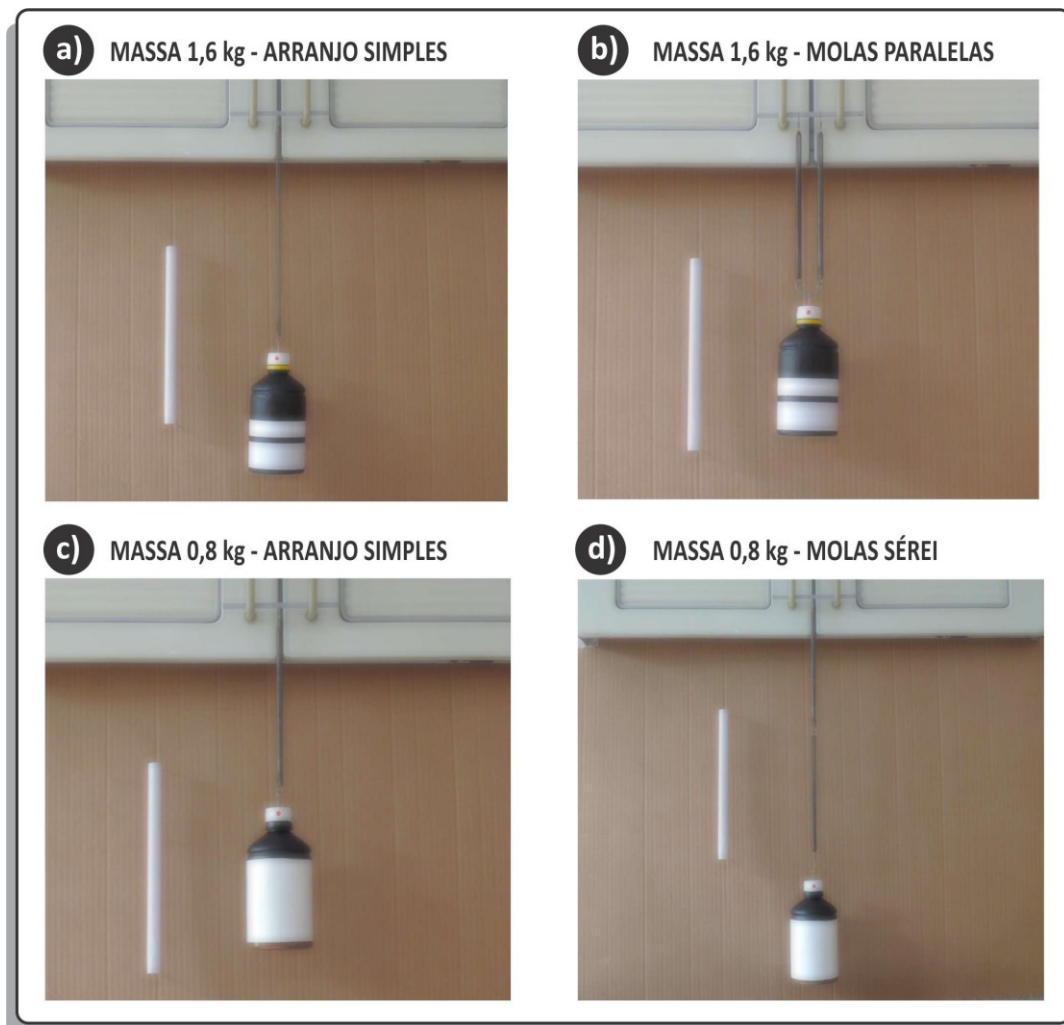
Na Figura 44 a) e c), o experimento foi realizado utilizando apenas uma mola e diferentes massas (1,6 e 0,8 kg respectivamente).

Na Figura 44 b), utilizamos a massa de 1,6 kg e desta feita, acoplada a duas

molasses associadas em paralelo.

Na Figura 44 d), utilizamos a massa de 0,8 kg, agora com duas molasses associadas em série.

Figura 44 – Arranjos experimentais explorados neste trabalho



Fonte: O autor

4. - RESULTADOS E ANÁLISES

Nesta etapa, vamos estudar caso a caso os arranjos experimentais mostrados na Figura 44.

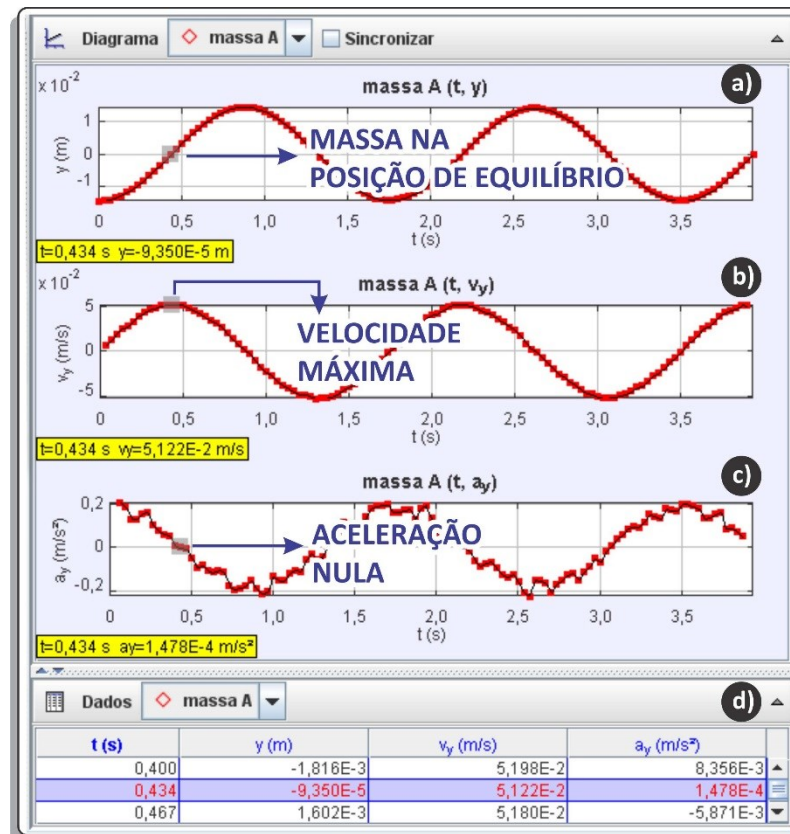
4.1 - Massa 1,6 kg – arranjo simples

Seguindo os passos da sessão 3.2.1 habilitamos o vídeo para análise do Tracker. Então clicamos em “Pesquisar” (Figura 43)). A pesquisa então foi feita e dados como posição, velocidade, aceleração, energias, etc, já estão todos calculados, bastando apenas clicarmos nos locais adequados para acessá-los.

4.1.1 - Análise superficial das curvas experimentais

Plotamos os gráficos e tabela conforme sessão 2.2.5. Veja a Figura 45.

Figura 45 – Gráficos e tabela – massa 1,6 kg – versão 1



Fonte: O autor

O quadradinho cinza marcado nos gráficos o usuário coloca onde desejar (clikando com o botão esquerdo do mouse) podendo mudar sua posição conforme a parte do gráfico a estudar.

Colocando também na tela a janela **“Trajetória Automática: massa A posição”** da Figura 43, o usuário pode percorrer quadro a quadro a trajetória clicando no botão **“Pesquisar Próximo”** no alto dessa janela. Isso é útil para fazer um estudo quadro a quadro do movimento e observar o comportamento das grandezas mostradas nos gráficos e tabela (nesse caso, posição, velocidade e aceleração).

Na Figura 45 a), a massa encontra-se na posição de equilíbrio (quadradinho cinza em $y = 0$).

Ao mesmo tempo, na Figura 45 b), a velocidade é máxima (quadradinho cinza no topo do eixo da velocidade). Por inspeção do gráfico, podemos observar que seu valor é aproximadamente 5×10^{-2} m/s. Além disso, notamos que neste ponto, o valor é positivo, exatamente como deveria ser.

Enquanto isso, na Figura 45 c), observamos que a aceleração é nula (quadradinho cinza no centro do eixo da aceleração). Mais uma vez, tudo conforme a teoria. Concluimos também, por mera observação que o valor máximo em módulo da aceleração é de aproximadamente $1,8 \text{ m/s}^2$.

Na Figura 45 d), temos a tabela de dados. Note na linha destacada em azul, que são mostrados os valores do tempo transcorrido, posição, velocidade e aceleração no quadro do vídeo onde encontra-se o quadradinho cinza. Cada vez que mudamos esse quadradinho de lugar, o valor se atualiza na tabela. Os quadros amarelos ao lado de cada gráfico, também mostram esses valores.

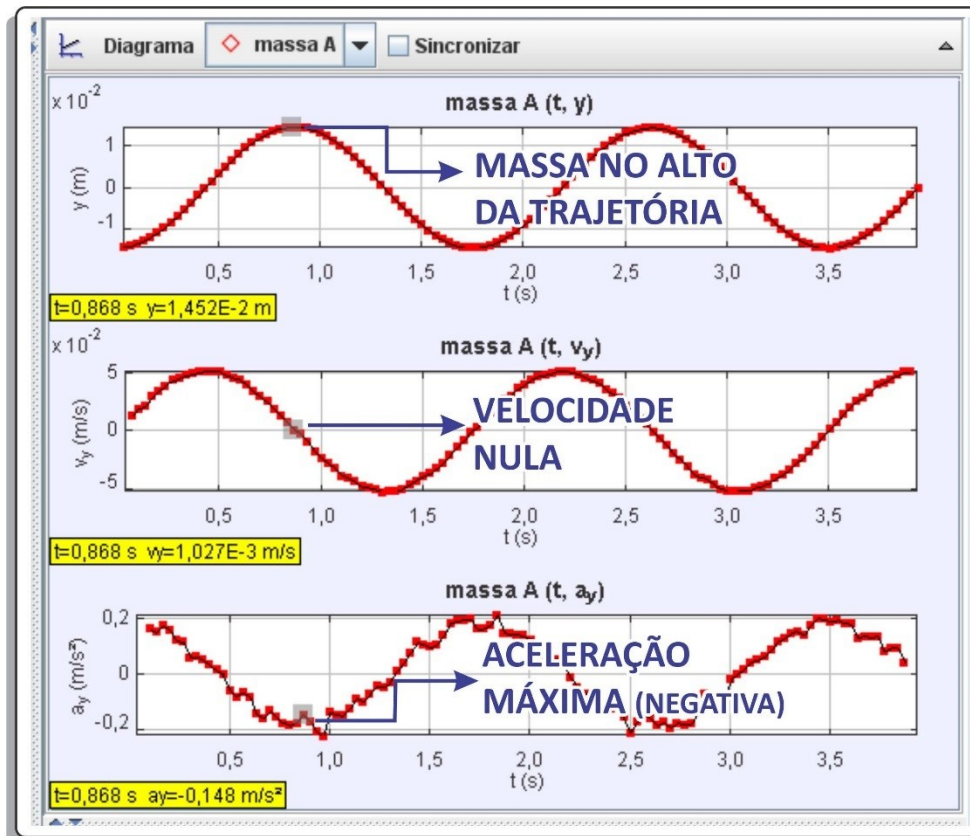
Observe, para fixar a ideia, a Figura 46, que traz o quadradinho cinza em uma posição diferente.

Note que através da prática, podemos extrair a teoria.

Apenas inspecionando os gráficos, podemos também, marcando o tempo entre dois picos ou dois vales (Figura 45 a)), determinar o período do movimento. De posse do período, podemos determinar a frequência, a frequência angular (ou

velocidade angular) e a constante elástica da mola. Também é possível, determinar o ângulo de fase inicial, que de acordo com a sessão 2.1.1.6, Figura 15 c), quando analisamos a Figura 45 a) notamos que será π (se considerarmos que o gráfico é de uma função cosseno ou $3\pi/2$ se considerarmos a curva como sendo uma senoide).

Figura 46 – Gráficos e tabela – massa 1,6 kg – versão 2



Fonte: O autor

Ainda na análise superficial das curvas experimentais, podemos criar no Tracker a função energia potencial elástica E_{pe} como vimos na sessão 2.2.7 (a energia cinética já é definida no Tracker). Uma vez criada essa função, traçamos os gráficos das energias conforme Figura 47.

Mais uma vez, podemos analisar quadro a quadro o comportamento dessas energias durante o movimento.

Na Figura 47 a), a massa está em baixo (parada). A energia cinética é nula e a potencial elástica é máxima.

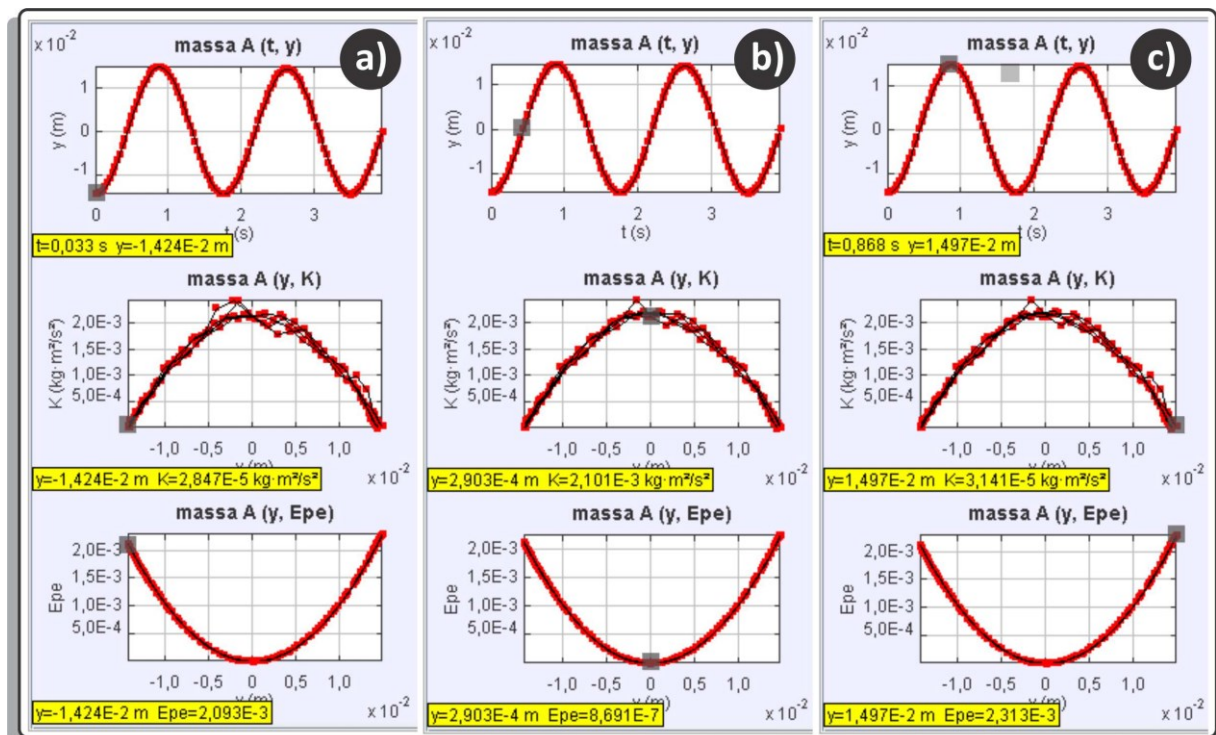
Na Figura 47 b) a massa está na posição de equilíbrio. A energia cinética é

máxima e a potencial elástica é nula.

Na Figura 47 c) a massa está no alto(parada). Mais uma vez a energia cinética é nula e a potencial elástica é máxima.

Note, que o valor máximo das energias, são iguais e podem ser determinados por simples inspeção nos gráficos ou calculados com os dados já coletados da Figura 45 utilizando as equações da sessão 2.1.1.5. Quando a cinética é máxima, a potencial elástica é nula e vice versa, comportamento este, exatamente igual àquele que nos traz a teoria.

Figura 47 – Gráficos energias



Fonte: O autor

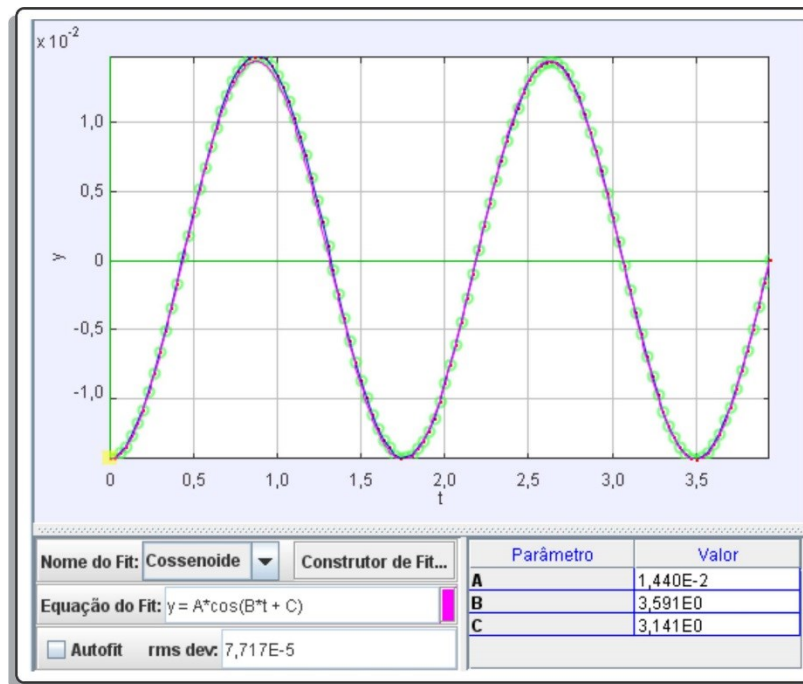
Com todos esses dados em mãos, retirados das **curvas experimentais**, podemos inclusive resolver as 3 equações de movimento ou equações horárias da sessão 2.1.1.3. Mas, não faremos dessa forma. Faremos sim, o ajuste de curva que facilitará os cálculos, propiciando mais precisão e menos trabalho.

4.1.2 Coletando dados através do ajuste de curvas.

Conforme visto na sessão 2.2.8, criamos uma função cosseno para fazer o ajuste de curva, pois o Tracker oferece apenas a senoide e a função horária da posição relaciona-se com o cosseno, e não com o seno.

Função criada, fizemos o ajuste e o resultado, temos na Figura 48.

Figura 48 – Gráfico ajuste de curva – posição da massa 1,6 kg – arranjo simples



Fonte: O autor

Observe no canto esquerdo baixo, que utilizamos a função cosseno que criamos. Pode não parecer, mas temos duas linhas (pode ser observado com zoom) nesta curva. A linha azul, é a curva experimental e a linha magenta é a curva de ajuste (um cosseno perfeito). O fato de terem ficado praticamente sobrepostas, indica que o experimento e a filmagem foram bem feitos, propiciando ao Tracker, uma análise mais fiel do movimento.

Quando isso ocorre, pode parecer não ter sentido fazer o ajuste de curva, porém, veja no canto direito baixo da Figura 48. Temos informações importantes obtidas de forma automática sem nenhum trabalho:

- 1) A = amplitude do movimento $A = 1,44 \cdot 10^{-2} \text{ m}$
- 2) B = frequência angular $\omega = 3,591 \text{ rad/s}$

3) $C = \text{ângulo de fase inicial } \varphi_0 = 3,141 \text{ rad}$

De posse desses dados, temos como fazer a descrição completa do movimento. Alguns dados importantes são mostrados na Quadro 1.

Quadro 1 – Dados ajuste de curva – posição da massa 1,6 kg – arranjo simples

ÍTEM	GRANDEZA	TEMPO	EQUAÇÃO	VALOR
a)	Amplitude	/	Retirado do Ajuste de Curva	1,44E-2 m
b)	Freq. Ang.	/	Retirado do Ajuste de Curva	3,591 rad/s
c)	Fase Inicial	/	Retirado do Ajuste de Curva	3,141 rad
d)	Âng. Fase	0 s	$\varphi = \omega t + \varphi_0$	3,141 rad
e)	Const. Elást.	/	$k = m\omega^2$	2,06E1 (kg)/(rad ² /s ²)
f)	Frequência	/	$f = \frac{1}{2\pi} \omega$	5,72E-1 ciclos/s
g)	Período	/	$T = 2\pi/\omega$	1,75 s
h)	Posição	0 s	$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$	-1,44E-2 m
i)	Velocidade	0 s	$v = -\omega A\sin(\omega t + \varphi_0)$	-4,96E-4 m/s
j)	Aceleração	0 s	$a = -\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi_0)$	1,86E-1 m/s ²
k)	E. Cinética	0 s	$E_c = \frac{mv^2}{2}$	1,97E-7 J
l)	E. Pot. Elást.	0 s	$E_{pe} = \frac{kA^2}{2}$	2,14E-3 J

Fonte: O autor

Os Itens a) b) e c) do Quadro 1 foram retirados do ajuste de curva e servem de base para o restante dos cálculos, daí a importância de um bom ajuste, afim de conseguir resultados mais fiéis. Lembrando que a massa **m** utilizada neste caso, foi de 1,6 kg

Os itens d), e), f) e g), são simples substituições nas fórmulas, enquanto h), i) e j), são as equações horárias. Note que seus valores correspondem aos dos gráficos

da Figura 45 quando fazemos $t = 0$.

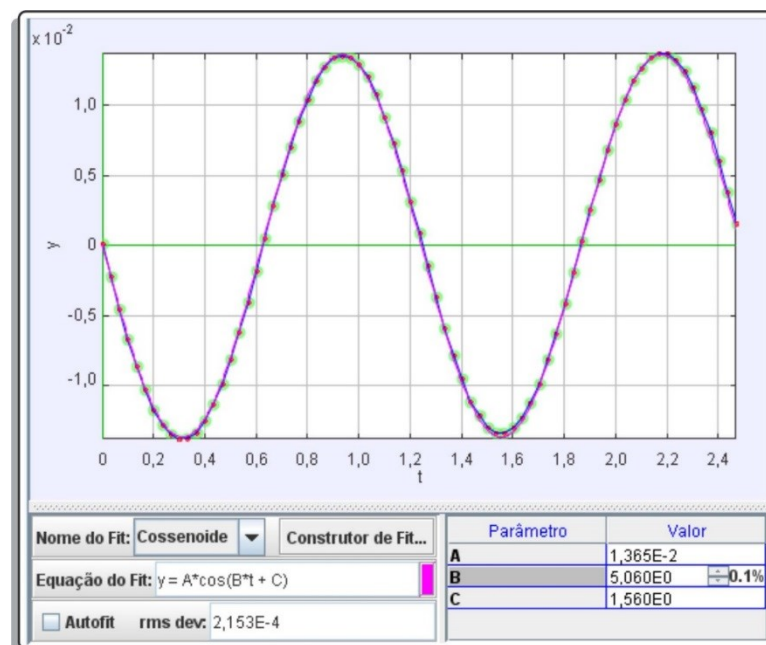
Quanto as energias, notamos que a energia potencial elástica máxima do sistema ocorre justamente quando a massa se encontra nos extremos ($t = 0$ por exemplo), e seu valor é dado no Quadro 1 i) (conforme observamos na Figura 47 a)). No Quadro 1 k) temos que a energia cinética é nula (nesse caso, praticamente nula), conforme deveria de fato ser (massa parada em baixo).

4.2 - Massa 0,8 kg – arranjo simples

Neste caso nós utilizamos o arranjo da Figura 44 c), onde substituímos a massa de 1,6 kg por outra cujo valor é a metade deste. (0,8 kg).

O mesmo procedimento experimental foi realizado. Poderíamos plotar e analisar gráficos e tabelas como feito no procedimento anterior, porém, para não tornar o trabalho repetitivo, vamos ao que, de fato nos levou a fazer esta versão do experimento. A Figura 49 já nos traz a curva com seu devido ajuste.

Figura 49 – Gráfico ajuste de curva – posição da massa 0,8 kg – arranjo simples



Fonte: O autor

Lembrando que o ajuste foi feito com uma função cosseno exatamente como descrito na sessão 4.1.2.

Mais uma vez, temos um experimento e filmagem bem feitos e a curva de ajuste (magenta) em muito se parece com a curva experimental azul. De posse disso, vejamos alguns dados interessantes que foram coletados (Quadro 2), dando especial importância a constante elástica da mola (**k**).

Será que essa constante elástica é de fato constante em todo o tempo, independente da massa que colocamos para oscilar?

A equação colocada no Quadro 1 e) ($k = m\omega^2$) nos mostra que a constante elástica é proporcional a massa **m** e uma olhada superficial nesta equação pode nos levar a pensar que quando a massa **m** diminui (pela metade no nosso caso), a constante **k**, também deveria diminuir, deixando pois de ser uma constante invariável a qualquer tempo.

Ocorre que, quando mudamos o valor da massa, o valor da frequência angular ω , tb muda de forma que a constante **k**, de fato seja constante a qualquer tempo e situação (a menos que a mola seja deformada de forma definitiva.).

Quadro 2 – Dados ajuste de curva – posição da massa 0,8 kg – arranjo simples

ÍTEM	GRANDEZA	TEMPO	EQUAÇÃO	VALOR
a)	Amplitude	/	Retirado do Ajuste de	1,365E-2 m
b)	Freq. Ang.	/	Retirado do Ajuste de	5,060 rad/s
c)	Fase Inicial	/	Retirado do Ajuste de	1,560 rad
d)	Const. Elást.	/	$k = m\omega^2$	2,05E1(kg)/(rad ² /s ²)

Fonte: O autor

No Quadro 2 d) temos o valor da constante elástica da mola. Note que este valor é praticamente o mesmo do Quadro 1 e), mostrando que a mola tem a mesma constante elástica independente de massa usada, como de fato deveria ser. Vimos, no entanto, que para isso ocorrer, a frequência angular deviria mudar seu valor (no caso aumentar). Veja os Quadros 1 b) e 2 b). De fato, no Quadro 2 b) o valor da frequência angular é **maior**, para compensar a massa **menor**, de modo a manter constante o valor da constante elástica **k**.

Outro ponto a se destacar é a fase inicial ϕ_0 . Note no Quadro 2 c) que seu valor é aproximadamente $\pi/2$ (calculado pelo ajuste do Tracker) para a função cosseno que utilizamos no ajuste, exatamente como nos mostra a Figura 15 b). Caso tivéssemos usado uma senoide para o ajuste, o valor de ϕ_0 seria de π .

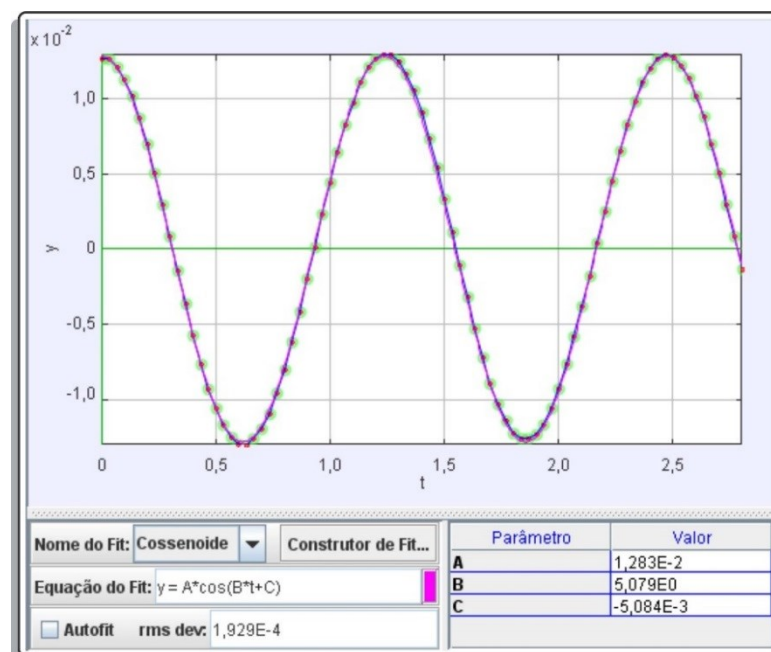
Outros valores, como energias e equações horárias, etc, são todos encontrados com os mesmos procedimentos usados para o preenchimento do Quadro 1. Não vamos repetir esses procedimentos e sim analisar outro caso.

4.3 - Massa 1,6 kg – molas em paralelo

Nesse caso, utilizamos o arranjo da Figura 44 b) com a massa acoplada a 2 molas de constantes k_1 e k_2 . (no nosso caso, são molas semelhantes, mas poderiam ser diferentes) em paralelo e nosso objetivo, é fazer a comprovação da equação (2.28) que nos diz que as duas molas utilizadas poderiam ser substituídas por uma única, cuja constante elástica k_e é a soma das constantes k_1 e k_2 .

A Figura 50 nos mostra a curva já ajustada para esse arranjo.

Figura 50 – Gráfico ajuste de curva – posição da massa 1,6 kg – molas paralelas



Fonte: O autor

Os resultados que nos interessam, estão no Quadro 3. Podemos observar que

o valor da constante elástica (Quadro 3 d)) devidamente calculado com a massa de 1,6 kg é praticamente o dobro daquele valor encontrado no Quadro 1 e), justamente como a Equação (2.28) nos indica, ou seja, a mola equivalente, deveria ter uma constante elástica cujo valor é a soma das constantes elásticas das molas que compõe o sistema paralelo de molas.

$$k_e = 20,6 + 20,6 = 41,2$$

Como no nosso caso, as molas são semelhantes, basta dobrar o valor da constante de uma mola e teremos o valor da constante elástica da mola equivalente.

Evidentemente que todos os cálculos mostrados no Quadro 1, podem ser realizados para este arranjo paralelo, considerando os dados do Quadro 3.

Quadro 3 – Dados ajuste de curva – posição da massa 1,6 kg – molas em paralelas

ÍTEM	GRANDEZA	TEMPO	EQUAÇÃO	VALOR
a)	Amplitude	/	Retirado do Ajuste de Curva	1,28E-2 m
b)	Freq. Ang.	/	Retirado do Ajuste de Curva	5,079 rad/s
c)	Fase Inicial	/	Retirado do Ajuste de Curva	5,084E-3 rad
d)	Const. Elást.	/	$k_e = m\omega^2$	4,13E1 (kg)/(rad ² /s ²)

Fonte: O autor

Na Figura 50, mais uma vez, mudamos o ponto de início do movimento, o que vai nos dar uma nova fase inicial. Seu valor é dado no Quadro 3 c) e vale praticamente 0 rad. Exatamente como prevê a Figura 15 a) para uma função cosseno como utilizamos no ajuste.

4.4 - Massa 0,8 kg – molas em série

Um dos objetivos da realização deste experimento é a confirmação do disposto na sessão 2.1.1.7 em especial da Equação (2.33) que nos traz o valor da constante elástica equivalente k_e de uma mola que substituiria o arranjo de molas em série da Figura 44 d) que usamos nesta etapa da experimentação.

$$\frac{1}{k_e} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

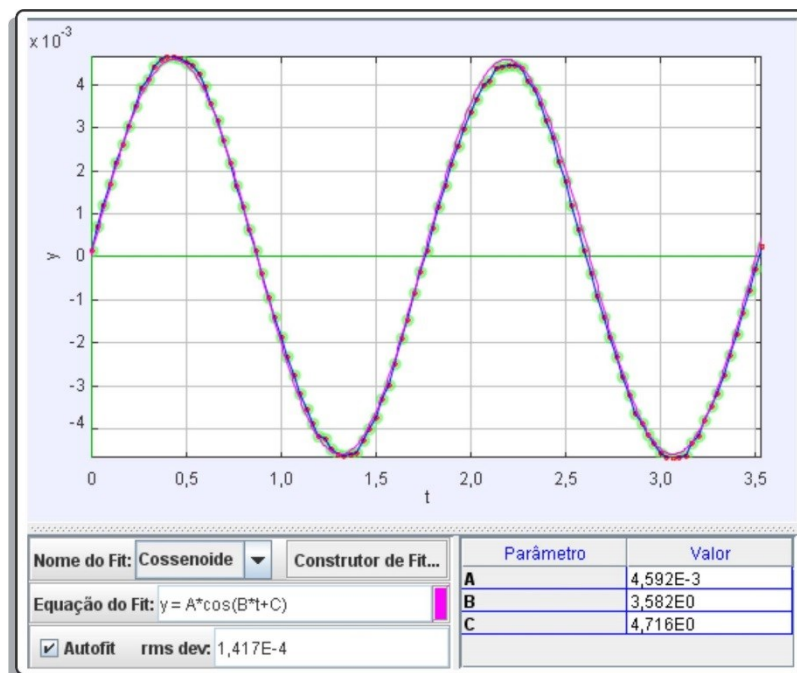
O segundo objetivo, é constatar a independência do período do movimento em relação a amplitude do mesmo.

Nos ateremos aos objetivos do estudo, sem, portanto, realizar cálculos extras que descreveriam o movimento por completo.

4.4 1– Constante elástica equivalente – molas em série

Fizemos a coleta de dados e o ajuste de curvas da mesma forma que feito nas sessões anteriores e o resultado é dado na Figura 51.

Figura 51 – Gráfico ajuste de curva – posição da massa 0,8 kg – molas em série – amplitude baixa



Fonte: O autor

Mais uma vez a curva magenta nos indica o ajuste. O parâmetro **C**, nos dá a fase inicial ($3\pi/2$) conforme Figura 15 d).

De posse do parâmetro **B** (frequência angular), calculamos a constante elástica **k_e** e seu resultado é mostrado no Quadro 4 d). Para efeito de constatação, podemos resolver a equação (2.33).

$$\frac{1}{k_e} = \frac{1}{20,6} + \frac{1}{20,6}$$

$$k_e = 10,3$$

valor este, exatamente igual àquele que calculamos através do ajuste de curva do Tracker (Quadro 4 d)), comprovando a teoria da sessão 2.1.1.7.

Quadro 4 – Dados ajuste de curva – posição da massa 0,8 kg – molas em série

ÍTEM	GRANDEZA	TEMPO	EQUAÇÃO	VALOR
a)	Amplitude	/	Retirado do Ajuste de Curva	4,592E-3 m
b)	Freq. Ang.	/	Retirado do Ajuste de Curva	3,582 rad/s
c)	Fase Inicial	/	Retirado do Ajuste de Curva	4,716 rad
d)	Const. Elást.	/	$k_e = m\omega^2$	1,03E1 (kg)/(rad ² /s ²)
e)	Período	/	$T = 2\pi/\omega$	1,75 s

Fonte: O autor

4.4.2– A amplitude do movimento e o cálculo do período

Por mais que a equação de cálculo do período não leve em consideração a amplitude do movimento, para muitos estudantes, não é razoável que um MHS do sistema massa mola, tenha exatamente o mesmo período quando temos uma baixa e uma alta amplitude. É comum se pensar que quanto maior a amplitude, mais tempo a massa leva para realizar um ciclo completo.

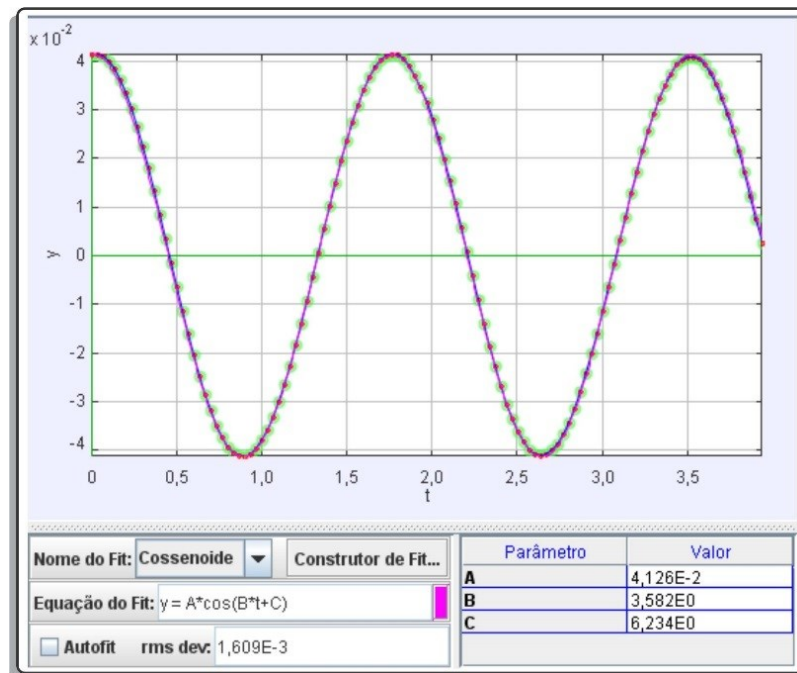
Então, com o mesmo arranjo da sessão anterior (Figura 44 d)), aumentamos de forma considerável a amplitude (em relação à Figura 51) e vamos ver o que ocorre com o período do Quadro 4 e).

O resultado do ajuste de curva é mostrado na Figura 52.

Observamos uma amplitude quase que 10 vezes maior. (parâmetro **A**).

Apesar disso, a frequência, ou velocidade angular (parâmetro **B**), é a mesma. Isso nos indica que o período que é função desta frequência angular, será também o mesmo (Quadro 5 e)), confirmando a teoria estudada.

Figura 52 – Gráfico ajuste de curva – posição da massa 0,8 kg – molas em série – alta amplitude



Fonte: O autor

Os resultados obtidos, estão no Quadro 5. Note que a fase inicial (parâmetro **C**) é 2π rad, exatamente de acordo com a Figura 15 a).

Quadro 5 – Dados ajuste de curva – posição da massa 0,8 kg – molas em série – alta amplitude

ÍTEM	GRANDEZA	TEMPO	EQUAÇÃO	VALOR
a)	Amplitude	/	Retirado do Ajuste de Curva	4,126E-2 m
b)	Freq. Ang.	/	Retirado do Ajuste de Curva	3,582 rad/s
c)	Fase Inicial	/	Retirado do Ajuste de Curva	6,234 rad
d)	Const. Elást.	/	$k_e = m\omega^2$	1,03E1 (kg)/(rad ² /s ²)
e)	Período	/	$T = 2\pi/\omega$	1,75 s

Fonte: O autor

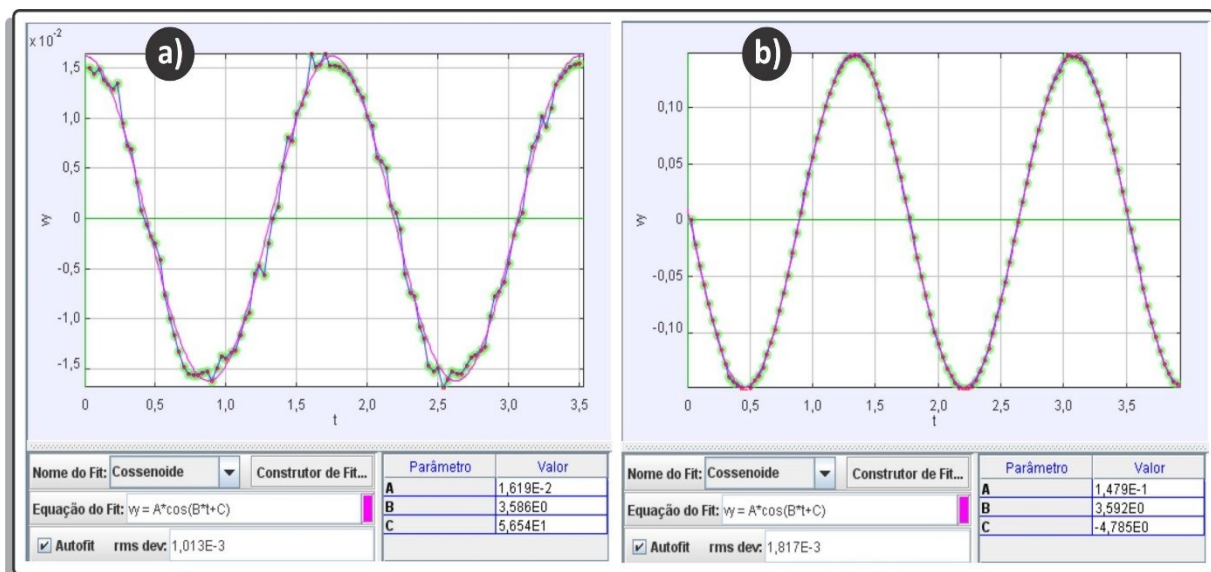
É fato que quando temos uma amplitude **maior**, a massa se desloca por um percurso **maior**. Uma vez que esse deslocamento ocorre no mesmo tempo (mesmo período), obviamente que a velocidade linear (não confundir com velocidade angular ou frequência angular) deve ser **maior** nesse caso.

Mais uma vez, o Tracker pode nos mostrar isso.

Podemos analisar os gráficos já ajustados para os dois casos que foram estudados anteriormente (baixa e alta amplitude).

Conforme já descrito em sessões anteriores, plotamos para cada caso o gráfico da **velocidade** linear e fizemos o devido ajuste. O resultado é mostrado na Figura 53.

Figura 53 – Gráficos com ajuste para velocidades lineares – baixa e alta amplitude



Fonte: O Autor

Nesta figura, nos interessa o parâmetro **A**, que nesse caso nos indica o valor em módulo da velocidade linear.

Na Figura 53 a), temos a velocidade para a **baixa** amplitude e na Figura 53 b) a velocidade para a **alta** amplitude. O que observamos é que na Figura 53 b) (amplitude **maior**) a velocidade é cerca de dez vezes **maior** que na Figura 53 a). Isso explica o fato de que, em ambos os casos, temos o **mesmo** período. Na Figura 53 b), temos um percurso (amplitude) **maior**, porém, a velocidade em que esse percurso

é percorrido, é bem **maior**. Assim, o período é o **mesmo** em ambos os casos. (Quadros 4 e) e 5 e))

Além destas configurações estudadas, pode-se fazer outras, afim de se aprofundar o estudo do movimento.

5. – CONCLUSÕES

Neste trabalho, utilizamos o software de vídeo análises Tracker para o estudo do sistema massa mola vertical sob ação da força gravitacional.

Estudamos alguns princípios básicos do Tracker, além de algumas das inúmeras de suas potencialidades, sempre direcionando o estudo ao experimento que nos propusemos a analisar.

Porém, cabe ressaltar, que aquilo que aqui foi visto, serve de base para análise de inúmeros outros experimentos com o Tracker.

O que, a princípio, em uma primeira leitura pode parecer complicado, com a prática e repetição, torna-se extremamente simples. Daí, um dos motivos pelo qual o Tracker, que é bastante utilizado em cursos de Física no ensino superior, poder, sem grande dificuldade, ser utilizado por professores e alunos do ensino médio.

É claro que os alunos devem ter uma determinada compreensão sobre a interpretação de gráficos e a análise dos mesmos, bem como noções sobre o ajuste de curvas e as grandezas que podem ser extraídas nesse processo. É importante ressaltar que qualquer software de análise de vídeos, necessita por parte do usuário tais conhecimentos, sem prejuízo, é claro, da necessidade de conhecimentos prévios sobre a teoria envolvida no fenômeno a ser analisado, de tal sorte que o Tracker não traz dificuldades extras, ao contrário, facilita de forma concreta a compreensão ampla de inúmeros fenômenos de interesse quando do estudo da Física.

Alunos quando devidamente orientados sobre a utilização do Tracker, podem perceber o seu papel de protagonista no aprendizado, se distanciando, pois, da ideia de que o professor deva lhes trazer todos os conceitos já formatados e pré concebidos.

Dentro da realidade das escolas de ensino médio no Brasil, sobretudo as públicas, onde, com raras exceções, temos laboratórios prontos para a realização de experimentos auxiliares no estudo e aprendizado da Física, o Tracker surge como alternativa à inexistência de tais estruturas. E mais, para além disso, podemos analisar com o Tracker situações cotidianas impossíveis de reproduzir em um pequeno

laboratório. Podemos analisar sim, por exemplo, a decolagem de um avião, o movimento de uma bola chutada do meio de campo em direção ao gol, ou o salto de um gato que pulou do quinto andar de um prédio em chamas (esse é um fato real ocorrido na China em maio de 2021 e o gato sobreviveu sem ferimentos).

Pode ser que nada disso interesse. O que interessa é descobrir a velocidade com a qual um cartucho se desloca dentro de uma impressora. Pois bem. Filme o movimento, coloque no Tracker e ele lhe responde. As possibilidades, são infinitas, podendo o Tracker, ser utilizado inclusive, em aulas remotas.

É notório que todas essas janelas que se abrem, poderiam não trazer a luz esperada se o Tracker fosse um software não disponível em português, de difícil entendimento e pago. Mas, não. Possui versão em português, funcionalidades relativamente intuitivas, inúmeros tutoriais e exemplos de aplicação disponíveis na internet, inclusive em português. E algo fundamental para sua difusão e utilização no ensino médio: absolutamente grátis.

Não seria necessário dizer que este humilde trabalho não se encerra em si. Procuramos abrir uma janela, através da qual, infinitas outras vão se expor a luz, e para adquirir e difundir o conhecimento, basta que as abramos.

Deixamos então, como sugestão, que outros trabalhos surjam. Que outros experimentos importantes para o desenvolvimento e compreensão de conceitos físicos possam ser analisados pelo Tracker e trazidos a conhecimento de todos por outros colegas amantes da Física.

6. – REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALBINO, R.; SOUZA, C. A. DE. Avaliação do Nível de Uso das Tics em Escolas Brasileiras: uma exploração dos dados da pesquisa “Tic Educação”. **Revista Economia & Gestão**, v. 16, n. 43, p. 101, 2016.

BARANAUSKAS, M. C. et al. Uma Taxonomia para ambientes de aprendizado baseados no computador. In: **Computador na Sociedade do Conhecimento**. Campinas: NIED-UNICAMP, 1999. p. 49–68.

BEZERRA JR, A. G. et al. Videoanálise com o software livre Tracker no laboratório didático de Física: movimento parabólico e segunda lei de Newton. **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**, v. 29, n. 0, p. 469–490, 2012.

BORDIN, G. D. **Potencialidades de uso do software de videoanálise Tracker no ensino de Física**. 2014. 113 f. Dissertação (Mestrado em Educação): Universidade Federal do Paraná - UFPR, Curitiba, 2020.

CORDEIRO, A. L.; RODRIGUES, F. L. O. O Software Tracker: uma ferramenta educacional para potencializa o ensino de física. **Essentia - Revista de Cultura Ciências e Tecnologia**, v. 20, n. 2, p. 2–8, 2019.

FANCHINI, F. **Física com Precisão**. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=IrAfBJLyVFg&t=48s&ab_channel=FísicacomPrecisão-Prof.FelipeFanchini>. Acesso em: 18 mar. 2021.

GOMES, D. **Física todo dia - Movimento Harmônico Simples**. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=SmzaYP1qahs&t=987s&ab_channel=FísicacomDouglasGomes>. Acesso em: 13 mar. 2021.

HALLIDAY, D.; RESNICK, R. **Gravitação, Ondas e Termodinâmica**. 3ª ed. Rio de Janeiro: LTC Livros Técnicos e Científicos Editora LTDA, 280 p. Traduzido de *Fundamentals of Physics* por Adir Moysés Luiz et al., 1991.

ISSA, J. Uma abordagem no ensino de mecânica utilizando o Tracker. **Permenkes Nomor 7 Tahun 2019 Tentang Kesehatan Lingkungan Rumah Sakit**, v. 8, n. 5, p. 55, 2019.

LUIZ, S.; ORKIEL, E. Recursos tecnológicos e ensino de física: estudo do movimento bidimensional com o auxílio do programa Tracker. **Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas**, n. Extra, p. 1429–1433, 2017.

NUNES, E. T.; SILVA, I. P. Orientações para professores de física que se aventuram na realização de videoanálises utilizando o software Tracker. **Revista Paidéi@ - Revista Científica de Educação a Distância**, v. 12, n. 21, 2020.

PEREIRA, R. D. N.; BEZERRA, J. D. S.; FIGUEIREDO, G. D. A. Novas tecnologias da informação e comunicação no ensino de física: aprendendo a aprender com a prática no estágio supervisionado. **Revista de Pesquisa Interdisciplinar**, v. 1, n. Esp, set. 2016.

SAAVEDRA FILHO, N. C. et al. A videoanálise como mediadora da modelagem científica no ensino de mecânica. **Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia**, v. 10, n. 3, p. 231–246, 2017.

TIPLER, P. A. **Física 1/b**. 2ª ed. Rio de Janeiro: Guanabara Dois. 280 p. Traduzido de Physics por Horário Macedo, 1984.

APÊNDICE A – EQUIVALÊNCIA ENTRE O MHS DO SISTEMA MASSA MOLA HORIZONTAL E VERTICAL SOB AÇÃO DA FORÇA GRAVITACIONAL

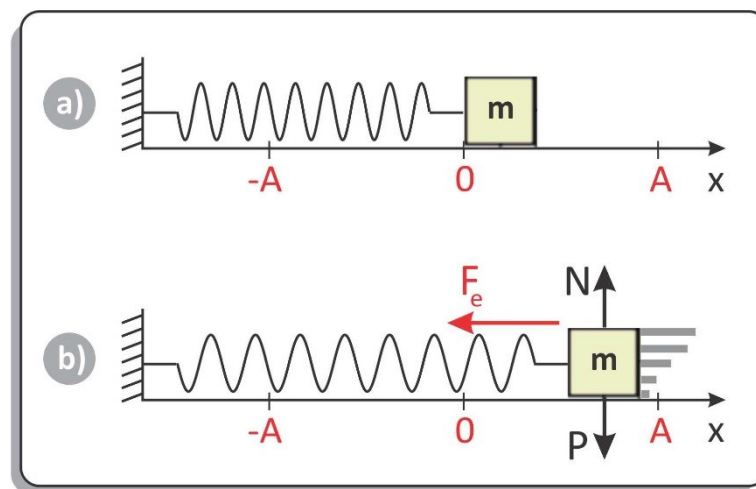
O MHS do sistema massa mola vertical, difere do horizontal, basicamente pela existência da força peso **P** agindo sobre a massa **m** acoplada a mola.

Faremos então, um breve estudo sobre o MHS do sistema massa mola vertical afim de inferir sua equivalência com o sistema horizontal, ou seja, as equações encontradas quando do estudo do sistema na horizontal serão as mesmas utilizadas para estudar o sistema na vertical.

1. Equivalência quanto a força resultante e aceleração

Iniciemos pelo estudo da força resultante e aceleração. A Figura 1 traz as forças que atuam sobre o sistema na horizontal.

Figura 1 – Sistema massa mola horizontal: forças



Fonte: O autor

Conforme observamos, na Figura 1 a) a massa **m** encontra-se na sua posição relaxada (nem comprimida, nem esticada). Neste ponto a força resultante é zero. Na Figura 1 b) a massa depois de esticada até a posição **A**, foi liberada e a força elástica **F_e** a puxa para a esquerda, sendo esta, a força resultante do sistema, uma vez que as forças normal **N** e peso **P**, se anulam. O resultado é a lei de Hooke:

$$F_r = -kx \quad (1)$$

Da segunda lei de Newton temos simplesmente:

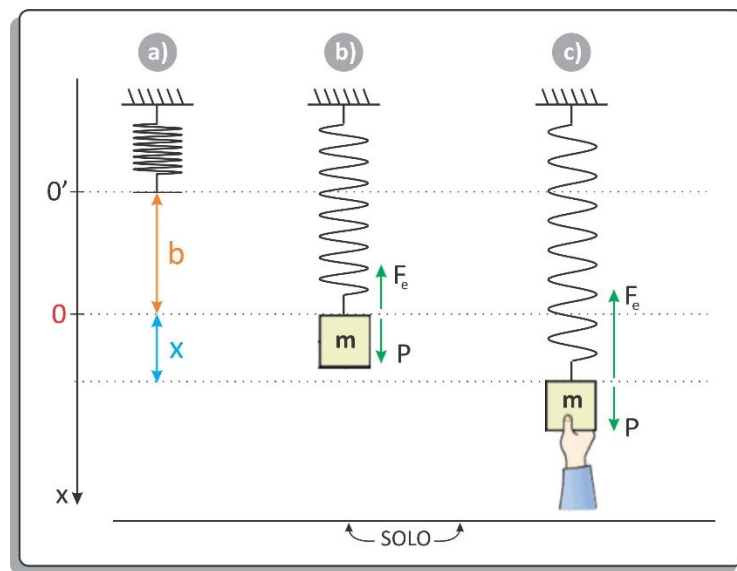
$$ma = -kx \quad (2)$$

Concluimos então que a aceleração do movimento no caso horizontal é:

$$a = -\frac{k}{m}x \quad (3)$$

Vejamos o que ocorre com o caso do movimento na vertical (Figura 2):

Figura 2 – Sistema massa mola vertical: forças



Fonte: O autor

Na Figura 2 a), a mola se encontra relaxada e na posição de equilíbrio **0'**. Na Figura 2 b), uma massa **m** foi cuidadosamente acoplada a mola, fazendo com que esta, alcance uma nova posição de equilíbrio **0**, que dista da posição original por **b** (deformação da mola). Neste ponto, com a massa em repouso, as forças peso **P** e elástica **F_e** se equivalem, e a força resultante é nula. Teremos então:

$$F_r = -kb + mg = 0 \quad (4)$$

$$b = \frac{mg}{k} \quad (5)$$

onde **b** é a deformação da mola.

Na Figura 2 c) a mola foi esticada, sofrendo uma deformação **x** em relação a posição na Figura 2 b), e a força elástica **F_e** é maior que a força peso, puxando a

massa para cima. A deformação total então, é $b + x$, e a força resultante será:

$$F_r = -k(b + x) + mg \quad (6)$$

Substituindo o valor de b da Equação (5) teremos:

$$F_r = -k\left(\left(\frac{mg}{k}\right) + x\right) + mg \quad (7)$$

$$F_r = -mg - kx + mg \quad (8)$$

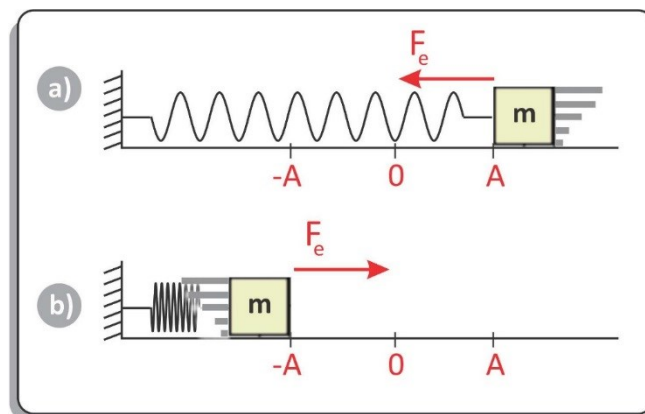
$$F_r = -kx \quad (9)$$

Comparando a Equação (9) com a (1), vemos que a força resultante do sistema vertical, é exatamente a mesma do sistema horizontal, e por consequência, a aceleração, também o é. Portanto, em relação a força resultante e a aceleração, os dois sistemas (horizontal e vertical) se equivalem, com equações idênticas.

2. Equivalência quanto a posição em torno do equilíbrio

A Figura 3 nos traz o sistema massa mola horizontal.

Figura 3 – Sistema massa mola horizontal: posição



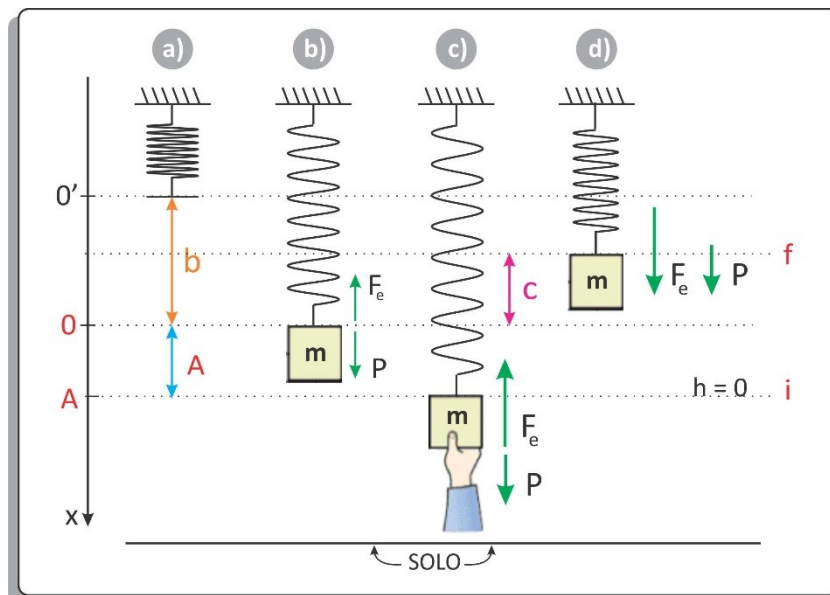
Fonte: O autor

Quando deslocamos a massa m para a direita de uma distância A da posição de equilíbrio (Figura 3 a)) e liberamos a mola, esta, por ação da força elástica F_e se deslocará para a esquerda, passando pela posição de equilíbrio até atingir a distância $-A$ (lembrando que consideramos a não existência de forças dissipativas) em relação

a este e retornando em movimento oscilatório (Figura 3 b), ou seja, **a mesma distância que deslocamos a mola a direita do ponto de equilíbrio, ela atingirá a esquerda do mesmo.**

A pergunta é: no sistema vertical (Figura 4), pelo fato de existir a força peso **P**, quando puxamos a massa para baixo de uma distância **A** em relação a posição de equilíbrio e a soltarmos (Figura 4 c)), a mesma subirá até atingir igual distância **A** acima da posição de equilíbrio, semelhantemente ao que ocorre no sistema horizontal?

Figura 4 – Sistema massa mola vertical: posição



Fonte: O autor

Na Figura 4 a), a mola se encontra relaxada e em equilíbrio. Na Figura 4 b), com a massa **m** acoplada, se encontra na **nova posição de equilíbrio** e as forças peso e força elástica são iguais em módulo:

$$kb = mg \quad (10)$$

$$b = \frac{mg}{k} \quad (11)$$

onde **b** é a elongação da mola desde a posição **0'** até a nova posição de equilíbrio **0**.

Por se tratar de um sistema não dissipativo, a energia é conservada. Teremos então, que a energia inicial na altura **i** deve ser igual a energia final na altura **f** indicadas na Figura 4.

$$\frac{1}{2}k(b + A)^2 = \frac{1}{2}k(b - c)^2 + mg(A + c) \quad (12)$$

onde o primeiro termo refere-se a energia inicial (energia potencial elástica, uma vez que a massa parada possui energia cinética igual a zero) e o segundo a energia final (energia potencial elástica mais a energia potencial gravitacional e energia cinética novamente igual a zero pois a massa também está parada) como se observa nas Figuras 4 c) e d). As distâncias foram colocadas por **cuidadosa** análise da Figura 4.

Então, pela Equação 12, se conseguirmos provar que **c** é igual a **A**., teremos que, a mesma distância que deslocamos a massa **m** abaixo do ponto de equilíbrio, foi atingida acima do mesmo pela massa **m**.

Vamos substituir o valor de **b** da Equação 11 na Equação 12:

$$\frac{1}{2}k\left(\frac{mg}{k} + A\right)^2 = \frac{1}{2}k\left(\frac{mg}{k} - c\right)^2 + mg(A + c) \quad (13)$$

Basta agora desenvolver a Equação 13 em busca da comprovação de que **A** = **c**.

$$\frac{1}{2}k\left(\frac{(mg)^2}{k^2} + 2\frac{mg}{k}A + A^2\right) = \frac{1}{2}k\left(\frac{(mg)^2}{k^2} - 2\frac{mg}{k}c + c^2\right) + mg(A + c)$$

$$\frac{1}{2}\frac{(mg)^2}{k} + mgA + \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}\frac{(mg)^2}{k} - mgc + \frac{1}{2}kc^2 + mg(A + c)$$

Cortando termos iguais dos dois lados ficaremos com:

$$mg(A + c) + \frac{1}{2}k(A^2 - c^2) = mg(A + c)$$

$$\frac{1}{2}k(A^2 - c^2) = 0$$

$$A = c \quad (14)$$

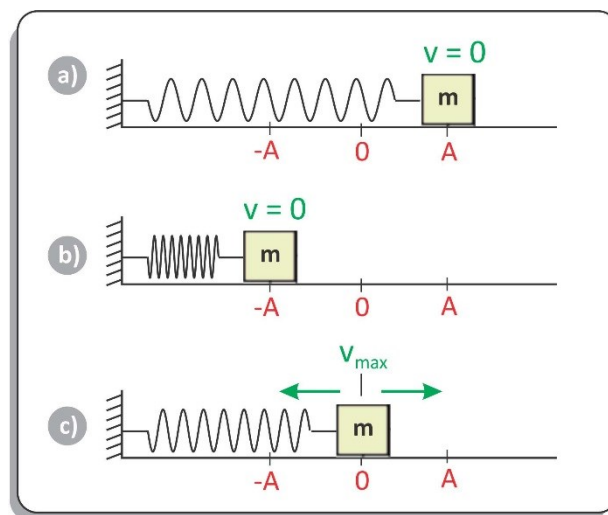
Com a igualdade satisfeita, como indica a Equação (14), concluímos que o comportamento do sistema massa mola vertical em relação a amplitude **A**, é o mesmo do sistema na horizontal, o que implica que podemos usar a mesma equação horária da posição em ambos os sistemas.

3. Equivalência quanto velocidade

Com relação a velocidade da massa **m**, façamos o cálculo da mesma em função da posição. Iniciemos pelo caso horizontal mostrado na Figura 5.

Como já visto, a velocidade nos pontos de amplitudes máxima e mínima é nula (Figuras 5 a) e b)) e será máxima no ponto de equilíbrio **0** (Figura 5 c). Calculemos então este valor através do balanço de energia.

Figura 5 – Sistema massa mola horizontal: velocidade



Fonte: O autor

A energia total do sistema é a mesma em qualquer ponto da trajetória entre **A** e **-A**. Nas extremidades, temos apenas energia potencial elástica **E_{pel}** enquanto no ponto de equilíbrio **0** temos apenas energia cinética **E_c**, uma vez que a mola está relaxada neste ponto e a força elástica sobre ela é nula.

$$\frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}mv^2 \quad (15)$$

Isolando a velocidade na Equação (15)

$$v = A \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (16)$$

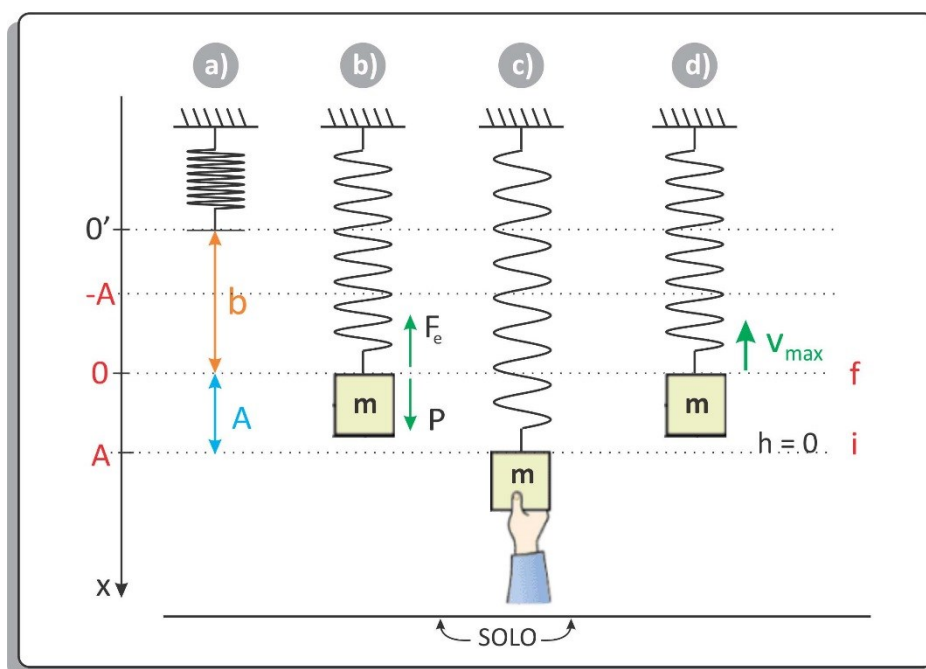
Vejamos então, o que ocorre em relação ao caso vertical, onde além das energias potencial elástica e cinética, temos também a ação da energia potencial gravitacional E_p . A Figura 6 ilustra esta situação.

Na Figura 6 b) as forças elástica e peso, se igualam (posição de equilíbrio).

$$kb = mg \quad (17)$$

As energias das alturas final **f** e inicial **i** indicados Figura 6, são iguais (sistema conservativo). No ponto inicial, admitindo a altura $h = 0$, teremos apenas energia potencial elástica, enquanto no ponto final teremos a soma das energias potencial elástica, potencial gravitacional e cinética.

Figura 6 – Sistema massa mola vertical: velocidade



Fonte: O autor

$$\frac{1}{2}k(b + A)^2 = \frac{1}{2}kb^2 + mgA + \frac{1}{2}mv^2$$

$$\frac{1}{2}k(b^2 + 2bA + A^2) = \frac{1}{2}kb^2 + mgA + \frac{1}{2}mv^2$$

$$\frac{1}{2}kb^2 + kbA + \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}kb^2 + mgA + \frac{1}{2}mv^2$$

$$kbA + \frac{1}{2}kA^2 = mgA + \frac{1}{2}mv^2$$

Substituindo o valor da Equação (17):

$$mgA + \frac{1}{2}kA^2 = mgA + \frac{1}{2}mv^2$$

$$\frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}mv^2 \quad (18)$$

$$v = A \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (19)$$

Observamos então, das equações (16) e (19), mais uma vez a equivalência entre os dois sistemas.

4 – Equivalência quanto as energias do sistema,

Há uma equivalência na análise das energias cinética e potencial, incluindo o modo como elas variam no MHS do sistema massa mola vertical e horizontal. Quanto a energia mecânica, no sistema vertical temos que incluir a presença da energia potencial gravitacional. Os valores para a energia mecânica do sistema vertical podem ser consultados na Figura 13.

5 - Equivalência quanto ao período e frequência

Nas sessões 2.1.1.2 e 2.1.1.3, utilizamos o MCU para estudo do sistema massa mola horizontal. Analogamente o mesmo MCU pode ser usado para o estudo

do sistema na vertical. Desse estudo, já vimos na sessão 2.1.1.3 que:

$$v = \omega A$$

$$\omega = \frac{v}{A} \quad (21)$$

Também do MCU, vimos que:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (22)$$

Substituindo o valor da velocidade (Equação (19) encontrada para o sistema **vertical** na Equação (21) e combinando com a Equação (22) teremos

$$\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{2\pi}{T}$$

Logo:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (23)$$

A Equação (23) (período do sistema vertical) é exatamente a mesma que a Equação (2.18) (período do sistema horizontal). Evidentemente que as frequências também são as mesmas. Assim, mostramos a equivalência dos dois sistemas também com relação ao período e frequência, concluindo, portanto, pela total equivalência entre os dois sistemas quando consideramos a nova posição de equilíbrio conquistada pelo sistema vertical já com a massa **m** nele acoplada.