

Universidade Federal de Uberlândia

Instituto de Ciências Exatas e Naturais do Pontal

Curso de Matemática

Trabalho de Conclusão de Curso

**Homotopias definidas por continuidade
generalizada**

por

Matheus Silveira Campos 

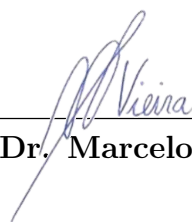
Bacharelado em Matemática - Ituiutaba - MG

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Gonçalves Oliveira Vieira

Homotopias definidas por continuidade generalizada

Este exemplar corresponde à redação final da Monografia devidamente corrigida e defendida por **Matheus Silveira Campos** e aprovada pela comissão julgadora.

Ituiutaba, 05 de novembro de 2021.



Prof. Dr. Marcelo G. O. Vieira

Banca examinadora:

Prof. Dr. Marcelo G. O. Vieira (*orientador*)

Prof. Dra. Evaneide Alves Carneiro

Prof. Dr. Wallisom da Silva Rosa

Monografia apresentada ao Instituto de Ciências Exatas e Naturais do Pontal (ICENP) da Universidade Federal de Uberlândia (UFU) como requisito parcial para obtenção do título de **Bacharel em Matemática**.

Ao meu orientador

Marcelo

AGRADECIMENTOS

Agradeço em primeiro lugar à Deus por ter me permitido chegar até onde estou, por ter me guiado em todas as etapas e pela saúde e força durante esse trajeto. A minha família que me apoiou e incentivou em todos os momentos, principalmente minha mãe **Silvania Donizete Silveira de Campos** que sempre me impulsionou a buscar meus sonhos e um futuro melhor. Ao meu pai **Liomar André de Campos** e meu irmão **Silas Silveira Campos** pelo companheirismo, a ajuda e a motivação durante todas as etapas da minha vida. As minhas irmãs **Amanda Silveira Campos** e **Lays Maria Silveira Campos** por todo o apoio, ajuda e incentivo.

Em memória de minha avó paterna agradeço a ela, **Angelina Arantes Rodrigues** pelos ensinamentos, carinho e amor que me ofereceu durante toda minha infância. Aos meus avós maternos **Aparecida das Graças Ribeiro Silveira** e **Valdevino Antônio da Silveira** por todo o carinho dedicado aos netos e pela inspiração de um homem trabalhador, honesto, humilde, gentil e carinhoso.

A minha companheira **Milena Martins de Oliveira** que me ajudou, apoiou e incentivou em todos os momentos.

A todos os meus professores, em especial **Evaneide Alves Carneiro**, **Wallisom da Silva Rosa**, **Milena Almeida Leite Brandão**, **Cristiane Coppe de Oliveira** e **Alisson Rafael Aguiar Barbosa** por todo o conhecimento que ofereceram, por todas as aulas ministradas e principalmente pela ajuda nos atendimentos, na organização do cronograma de avaliações e por todo o apoio prestado. E aos colegas de curso por todo apoio e pelas amizades.

Ao meu orientador, tutor, professor e amigo **Marcelo Gonçalves Oliveira Vieira** que ofereceu total apoio em todas as etapas do meu trabalho e me ajudou crescer como graduando e pessoa diante de todas as formas de conhecimentos trocadas durante minha graduação, agradeço pela riquíssima experiência trocada que levarei por toda minha vida. Ao Programa de Educação Tutorial que me auxiliou nas disciplinas de graduação e proporcionou-me convívio em grupo que resultou em uma excelente experiência, principalmente em relação a minha formação social. A Universidade Federal de Uberlândia e ao Instituto de Ciências Exatas e Naturais do Pontal por toda a assistência que ofereceram e a rica experiência a qual me proporcionou.

RESUMO

A presente monografia foi fruto de uma pesquisa de iniciação científica realizada no âmbito do Programa de Educação Tutorial, a qual teve como objetivo propor novas noções de homotopias baseadas no conceito de continuidade generalizada introduzido por Vieira em [4]. O estudo da continuidade generalizada de funções, por sua vez, é uma evolução das ideias de limites generalizados de funções introduzidas por Vieira e Braz em [1]. Esta monografia constitui-se como um texto acadêmico com os seguintes propósitos: ser uma opção bibliográfica complementar para alguns conteúdos matemáticos básicos relacionados à área de Topologia; ser uma opção bibliográfica em língua portuguesa para divulgação de alguns resultados científicos especializados sobre continuidade generalizada; e contribuir com resultados originais sobre homotopias e funções com continuidade generalizada obtidos pelo autor da monografia em parceria com os matemáticos Vieira e Braz supracitados. O título do trabalho é denominado *Homotopias definidas por continuidade generalizada*, pois os conceitos aqui introduzidos estão vinculados a funções que possuem continuidade no sentido generalizado. Além disso, o trabalho traz algumas considerações adicionais e alguns resultados originais a respeito de continuidade generalizada, visando auxiliar no desenvolvimento do arcabouço técnico necessário ao entendimento e a consistência das noções propostas de homotopias generalizadas.

CONTEÚDO

Agradecimentos	i
Resumo	iii
Lista de Símbolos	v
Introdução	1
Objetivo	2
Estrutura dos Tópicos Apresentados	2
1 Noções básicas de topologia	4
1.1 Espaços topológicos	4
1.2 Vizinhanças, bases e sub-bases topológicas	10
1.3 Conexidade e Compacidade	18
1.4 Topologia produto	22
1.5 Topologia compacto-aberta	24
2 Continuidade generalizada	26
2.1 Propriedades de funções	26
2.2 Funções com continuidade usual	29
2.3 Funções com continuidade generalizada	33
2.4 Considerações adicionais sobre continuidade generalizada	42

3 Homotopia generalizada	51
3.1 Funções homotópicas no sentido usual	51
3.2 Funções homotópicas no sentido generalizado	58
3.3 Propriedades de homotopia generalizada	61
3.4 Homotopia generalizada descrita como caminho	63
3.5 Espaços com contratibilidade generalizada	72
Considerações	74
Bibliografia	75
Índice Remissivo	77

Lista de Símbolos

Notações Gerais

$\emptyset$	Conjunto vazio.
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais.
I	Intervalo $[0, 1]$.
$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais.
$\mathcal{P}(X)$	Conjunto de partes de X .
$\mathcal{F}(X, Y)$	Conjuntos de todas as funções de X em Y .
$f(A)$	Imagem direta de A pela função f .
$f^{-1}(B)$	Imagem inversa de B pela função f .

$g \circ f$	g composta com f .
$f \times g$	Função cartesiana entre f e g .
π_n	Função projeção na n -ésima coordenada.
$f * g$	Função colagem entre f e g .
ε	Função avaliação.
(M, d)	Espaço métrico M munido com métrica d .
$B(a; r)$	Bola centra em a de raio r .
$(X, \mathcal{T}^X)$	Espaço topológico X munido com a topologia $\mathcal{T}^X$.
$\mathcal{T}_A$	Abertos em torno do subconjunto A .
$\mathcal{T}_{\widehat{A}}$	Abertos contidos no subconjunto A .
$\mathcal{T} ^A$	Abertos induzidos a um subconjunto A .
$A^{\complement}$	Complementar do conjunto A .
$F^{\mathcal{T}}$	Família de fechados com respeito a topologia $\mathcal{T}$.

$\mathcal{F}_A^{\mathcal{T}}$	Família de fechados em torno do subconjunto A com respeito a topologia $\mathcal{T}$.
$\overline{A}$	Fecho do subconjunto A .
$\text{int}(A)$	Conjunto dos pontos interiores do subconjunto A .
A°	Interior de um subconjunto A .
$\mathcal{V}_a^Z$	Sistemas de vizinhanças de um ponto a com respeito a topologia do espaço topológico Z .
$\mathcal{B}_a^Z$	Sistemas de base de vizinhanças de um ponto a com respeito a topologia do espaço topológico Z .
$\langle \mathcal{C} \rangle$	Topologia gerada pela base topológica $\mathcal{C}$.
$[S]$	Base topológica gerada pela sub-base S .
$\langle\!\langle S \rangle\!\rangle$	Topologia gerada pela sub-base S .
$\mathcal{T}^X \otimes \mathcal{T}^Y$	Topologia produto em $X \times Y$.
$\mathcal{S}_{co}$	Sub-base compacto aberta.
$\mathcal{T}_{co}$	Topologia compacto aberta.

$\mathbf{C}(X, Y)$ ou $\mathbf{C}_{id}(X, Y)$	Conjunto das funções do espaço topológico $(X, \mathcal{T}^X)$ no espaço topológico $(Y, \mathcal{T}^Y)$ que são contínuas.
$\mathbf{C}_n(X, Y)$	Conjunto das funções de X no espaço topológico $(Y, \mathcal{T}^Y)$ que são n -contínuas.
$\mathbf{W}_n(X, Y)$	Conjunto das funções de X no espaço topológico $(Y, \mathcal{T}^Y)$ que são amplamente n -contínuas.
$\mathbf{S}_n(X, Y)$	Conjunto das funções de X no espaço topológico $(Y, \mathcal{T}^Y)$ que são estritamente n -contínuas.
$\mathbf{C}^f(X, Z)$	Conjunto das funções de X no espaço topológico $(Z, \mathcal{T}^Z)$ que tornam f n -contínua.
$\mathbf{W}^f(X, Z)$	Conjunto das funções de X no espaço topológico $(Z, \mathcal{T}^Z)$ que tornam f amplamente n -contínua.
$\mathbf{S}^f(X, Z)$	Conjunto das funções de X no espaço topológico $(Z, \mathcal{T}^Z)$ que tornam f estritamente n -contínua.
$\mathcal{S}_{n\text{-co}}$	Sub-base n -compacto aberta.
$\mathcal{T}_{n\text{-co}}$	Topologia n -compacto aberta.
$f \simeq g$	f é homotópica a g .

$$H: f \simeq g$$

H é uma homotopia entre f e g .

$$f \stackrel{n}{\not\simeq} g$$

f é n -homotópica g .

$$f \stackrel{n|}{\not\simeq} g$$

f é estritamente n -homotópica a g .

$$\{\vec{f}\}_n$$

Conjunto das funções que estão n -conectadas com f .

Introdução

Em [1] os autores Braz e Vieira introduziram o conceito limite generalizado de uma função com respeito a outra função. Uma das motivações para a introdução do conceito de limite generalizado de uma função com respeito a outra função é que uma Integral de Riemann de uma função f em um intervalo $[a, b]$ fica definida apropriadamente como um limite generalizado da função soma de Riemann de f com respeito a função norma da partição de $[a, b]$. Além disso, o conceito de limite generalizado de fato generaliza o conceito de limite usual de uma função, pois um limite usual de uma função f com domínio X é nada mais do que um limite generalizado da função f com respeito a função identidade definida sobre X . Uma questão que surge após a introdução do conceito de limite generalizado é se este conceito induz a algum tipo de continuidade, da mesma forma que a continuidade clássica pode ser caracterizada por meio de limites usuais de funções. A partir deste questionamento, Vieira introduziu em [4] o conceito de continuidade generalizada.

Ao analisar o conceito de continuidade generalizada, o autor da presente monografia e seu orientador perguntaram se faria sentido falar sobre homotopias em sentido generalizado relacionadas a continuidade generalizada, ou seja, faria sentido definir algum tipo de homotopia para a qual as funções candidatas a serem homotópicas tenham continuidade generalizada e a própria função homotopia possua alguma continuidade generalizada apropriada? Após pensar nessa problemática, se conseguiu introduzir noções de homotopias generalizadas, porém conforme foi se desenvolvendo a pesquisa se percebeu a necessidade de mostrar resultados adicionais a respeito de continuidade generalizada, sobretudo para

viabilizar a adequada formulação de definições sobre homotopias generalizadas e viabilizar as demonstrações de propriedades esperadas relacionadas a tais definições.

Considerado o breve contexto histórico inicialmente mencionado ao longo do presente trabalho pretende-se apresentar alguns resultados adicionais a respeito de continuidade generalizada, muito destes similares a resultados conhecidos no contexto de continuidade usual, e como objetivo central pretende-se introduzir definições de homotopias generalizadas. e mostrar propriedades e resultados associados a tais definições.

Objetivo

O objetivo central deste trabalho é propor definições apropriadas de homotopias generalizadas. Além disso, como objetivos secundários, serão apresentadas considerações adicionais sobre continuidade generalizada e apresentar de forma resumida e acessível conceitos básicos de Topologia para alunos de graduação.

Estrutura dos Tópicos Apresentados

O presente trabalho está dividido da seguinte maneira:

- No capítulo 1 (Noções básicas de topologia) serão apresentados definições e resultados sobre Topologia considerados pré-requisitos para a compreensão de objetos e resultados abordados nos capítulos posteriores. Leitores já familiarizados com Topologia podem, caso desejem, dispensar a leitura de tal capítulo ou podem utilizá-lo como um espécie de material de consulta rápida para ajudar a dirimir dúvidas conceituais que eventualmente surjam nos outros capítulos desta monografia.
- No capítulo 2 (Continuidade generalizada) serão apresentadas a definição de continuidade usual, algumas caracterizações e propriedades. Após continuidade usual, será introduzido o conceito de continuidade generalizada contendo exemplos e proposições. E para finalizar este capítulo serão feitas algumas considerações adicionais sobre alguns resultados originais envolvendo continuidade generalizada.
- No capítulo 3 (Homotopia generalizada) será primeiramente contextualizado o comportamento das homotopias usuais e propriedades deste conceito. No restante deste

capítulo serão apresentadas definições de homotopias relacionadas a continuidade, bem como exemplos, restrições, proposições e teoremas associados a tais definições.

CAPÍTULO 1

Noções básicas de topologia

Nesse capítulo abordaremos conceitos introdutórios da Topologia Geral, com o intuito de auxiliar o entendimento e desenvolvimento de resultados abordados nos outros capítulos desta monografia.

1.1 Espaços topológicos

Definição 1.1. *Seja M um conjunto não vazio. Dizemos que uma função $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma métrica em M se, e somente se, satisfaz as seguintes condições:*

- (a) $d(x, y) \geq 0$, para todo $x, y \in M$;
- (b) $d(x, y) = 0$ é equivalente a $x = y$;
- (c) $d(x, y) = d(y, x)$, para todo $x, y \in M$;
- (d) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, para todo $x, y, z \in M$.

Definição 1.2. *Dados um conjunto M não-vazio e uma métrica d em M , o par (M, d) é denominado espaço métrico.*

Exemplo 1.3. *Dado um conjunto M , a função $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{se } x = y \\ 1, & \text{se } x \neq y \end{cases} \quad (1.1)$$

é uma métrica em M , a qual denominamos de métrica zero-um em M ou métrica discreta em M .

Exemplo 1.4. A função $d_1: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$d_1(x, y) = |x_1 - y_1| + \dots + |x_n - y_n| = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| \quad (1.2)$$

é uma métrica em $\mathbb{R}^n$, a qual denominamos métrica da soma em $\mathbb{R}^n$.

Definição 1.5. Sejam (M, d) um espaço métrico, $a \in M$ e r um número real positivo. O conjunto

$$B(a; r) = \{x \in M : d(x, a) < r\} \quad (1.3)$$

é denominado bola aberta de centro a e raio r em M com respeito a métrica d .

Definição 1.6. Sejam M um espaço métrico, $U \subset M$ e $a \in U$. Dizemos que a é um ponto interior de U com respeito a métrica de M se, e somente se, existe $r > 0$ tal que $B(a; r) \subset U$.

Sejam M um espaço métrico e $U \subset M$. Denotamos o conjunto de todos os pontos interiores de U (com respeito a métrica de M) por $\text{int}(U)$.

Da definição, tem-se que todo ponto interior a U também pertence a U , ou seja, $\text{int}(U) \subset U$.

Definição 1.7. Sejam (M, d) um espaço métrico e $U \subset M$. Um conjunto U é aberto em M (com respeito a métrica d) se, e somente se, $U = \text{int}(U)$.

Definição 1.8. Sejam X um conjunto e $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$. Dizemos que a coleção $\mathcal{T}$ é uma topologia em X se, e somente se, as seguintes condições são satisfeitas:

- (a) $\emptyset \in \mathcal{T}$ e $X \in \mathcal{T}$;
- (b) Se $n \in \mathbb{N}$ e $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{T}$, então $U_1 \cap \dots \cap U_n \in \mathcal{T}$;
- (c) Se I é um conjunto qualquer de índices e $U_i \in \mathcal{T}$, para todo $i \in I$, então $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$.

Definição 1.9. Dados um conjunto X e uma topologia $\mathcal{T}$ em X , dizemos que o par $(X, \mathcal{T})$ é um espaço topológico.

Neste trabalho quando estivermos trabalhando com mais de um espaço topológico, os espaços topológicos serão denotados por $(X, \mathcal{T}^X)$, $(Y, \mathcal{T}^Y)$, $(Z, \mathcal{T}^Z)$ assim sucessivamente, as topologias serão denotadas por $\mathcal{T}^X$, $\mathcal{T}^Y$ e $\mathcal{T}^Z$ para fazer menção ao espaço que estão associadas.

Exemplo 1.10. *Seja X um conjunto qualquer. A coleção $\mathcal{P}(X)$ é uma topologia em X denominada topologia discreta. Um conjunto munido com a topologia discreta é denominado espaço topológico discreto.*

Exemplo 1.11. *Seja X um conjunto qualquer. A coleção $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$ é uma topologia em X denominada topologia trivial. Um conjunto munido com a topologia trivial é denominado espaço topológico trivial.*

Exemplo 1.12. *Seja (M, d) um espaço métrico. Os conjuntos abertos de (M, d) induzem uma topologia $\mathcal{T}_d$ em M dada por*

$$\mathcal{T}_d = \{U \in \mathcal{P}(M) : U \text{ é aberto em } M\}. \quad (1.4)$$

A topologia $\mathcal{T}_d$ dada em (1.4) é denominada topologia induzida pela métrica d ou topologia proveniente da métrica d .

Exemplo 1.13. *Seja $X = \{a, b\}$ tal que $a \neq b$. A coleção $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{b\}, X\}$ é uma topologia em X denominada topologia de Sierpinski. O conjunto $X = \{a, b\}$ munido com a topologia de Sierpinski é denominado espaço de Sierpinski.*

Dado um espaço topológico $(X, \mathcal{T})$ e um subconjunto A de X . A coleção dada por

$$\mathcal{T}_A = \{U \in \mathcal{T} : A \subset U\} \quad (1.5)$$

denotará os abertos do espaço topológico $(X, \mathcal{T})$ que contém o subconjunto A . No caso em que $A = \{a\}$ a coleção $\mathcal{T}_A$ será denotada simplesmente por $\mathcal{T}_a$. Já a coleção

$$\mathcal{T}_{\underline{A}} = \{U \in \mathcal{T} : U \subset A\} \quad (1.6)$$

denotará os abertos do espaço topológico $(X, \mathcal{T})$ contidos no subconjunto A . Podemos equipar A com a topologia

$$\mathcal{T}^A = \{U \cap A : U \in \mathcal{T}\}. \quad (1.7)$$

O par $(A, \mathcal{T}^A)$ é chamado *subespaço topológico* de $(X, \mathcal{T})$ e a topologia $\mathcal{T}^A$ é chamada de *topologia induzida* por $\mathcal{T}$.

Definição 1.14. *Sejam $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$ topologias equipando um conjunto X . A topologia $\mathcal{S}$ é mais fraca (mais grossa ou menor) do que a topologia $\mathcal{T}$ se, e somente se, $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$.*

Note que para qualquer topologia $\mathcal{T}$ equipando um conjunto X tem-se

$$\{\emptyset, X\} \subset \mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X), \quad (1.8)$$

ou seja, qualquer topologia $\mathcal{T}$ é mais forte que a topologia trivial e mais fraca que a topologia discreta.

Definição 1.15. *Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico. Dizemos que U é um aberto com respeito a $\mathcal{T}$ se, e somente se, $U \in \mathcal{T}$.*

Sendo X um conjunto e $F \subset X$. O conjunto $X - F$ é o complementar de F com respeito a X e é denotado por F^c .

Definição 1.16. *Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico. Um subconjunto F de X é fechado em X com respeito a topologia $\mathcal{T}$ se, e somente se, $F^c \in \mathcal{T}$.*

Dado um espaço topológico $(X, \mathcal{T})$, denotamos a coleção de todos subconjuntos fechados de X com respeito a topologia $\mathcal{T}$ por $F^{\mathcal{T}}$. Ou seja

$$F^{\mathcal{T}} = \{F \in \mathcal{P}(X) : F^c \in \mathcal{T}\}. \quad (1.9)$$

Já a próxima coleção, são todos os fechados que contém um subconjunto $A \subset X$.

$$\mathcal{F}_A^{\mathcal{T}} = \{F \in \mathcal{P}(X) : (X - F) \in \mathcal{T} \text{ e } A \subset F\}. \quad (1.10)$$

Proposição 1.17. *Sejam $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico e $F^{\mathcal{T}}$ a coleção de fechados em X com respeito a $\mathcal{T}$. As seguintes afirmações são verdadeiras:*

- (i) $\emptyset \in F^{\mathcal{T}}$ e $X \in F^{\mathcal{T}}$.
- (ii) Se I é um conjunto qualquer de índices e $F_i \in F^{\mathcal{T}}$, para todo $i \in I$, então $\bigcap_{i \in I} F_i \in F^{\mathcal{T}}$.
- (iii) Se $n \in \mathbb{N}$ e $U_1, \dots, U_n \in F^{\mathcal{T}}$, então $U_1 \cup \dots \cup U_n \in F^{\mathcal{T}}$.

Demonstração. A demonstração segue da definição de topologia e das leis de Morgan

que são $\left(\bigcap_{i \in I} F_i\right)^c = \bigcup_{i \in I} F_i^c$, $\left(\bigcup_{j=1}^n F_j\right)^c = \bigcap_{j=1}^n F_j^c$. □

Definição 1.18. *Sejam $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico e $A \subset X$. O conjunto,*

$$\overline{A} = \bigcap_{F \in \mathcal{F}_A^{\mathcal{T}}} F, \quad (1.11)$$

é denominado a aderência ou o fecho de A com respeito a topologia $\mathcal{T}$.

Em outras palavras, a Definição 1.18 diz que o fecho de um subconjunto A de um espaço topológico X é a interseção de todos fechados em X (com respeito a topologia de X) que contêm A .

Equivalentemente, o fecho de um subconjunto A de um espaço topológico X é o menor fechado em X (com respeito a topologia de X) que contém A .

Da definição acima temos que $A \subset \overline{A}$.

Proposição 1.19. *Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico e $A, B \subset X$. Se B é fechado em X com respeito a topologia $\mathcal{T}$ e $A \subset B$, então $\overline{A} \subset B$.*

Demonstração. Como B é fechado em X e $A \subset B$, então $B \in \mathcal{F}_A$. Logo, pela Definição 1.18 tem-se que $\overline{A} = \left(\bigcap_{F \in \mathcal{F}_A^{\mathcal{T}}} F \right) \subset B$. Portanto, $\overline{A} \subset B$. $\square$

Proposição 1.20. *Sejam $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico e $A \subset X$. Tem-se que $A \in \mathcal{F}_T$ se, e somente se, $A = \overline{A}$.*

Demonstração. Temos que $A \subset \overline{A}$, pela definição de fecho. Por outro lado, tomando $U = A$ e $V = A$, temos que V é fechado em X por hipótese e $U \subset V$. Assim, segue da Proposição 1.19 que $\overline{U} \subset V$, ou seja, $\overline{A} \subset A$. Portanto, $A = \overline{A}$. $\square$

Definição 1.21. *Sejam $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico e $A \subset X$. Dizemos que um ponto $a \in A$ é ponto interior de A com respeito a topologia $\mathcal{T}$ se, e somente se, existe $U \in \mathcal{T}$ tal que $a \in U$ e $U \subset A$.*

Denotamos por $\text{int}(A)$ o conjunto dos pontos interiores de um subconjunto A de um espaço topológico X .

Proposição 1.22. *Se $(X, \mathcal{T})$ é um espaço topológico e $A \subset X$, então o conjunto $\text{int}(A)$ é aberto em X com respeito a topologia $\mathcal{T}$, isto é, $\text{int}(A) \in \mathcal{T}$.*

Demonstração. Decorre da definição de ponto interior de A , com respeito a topologia $\mathcal{T}$, que para cada $x \in \text{int}(A)$, existe $U_x \in \mathcal{T}$ tal que $x \in U_x \subset A$. Considere a união destes abertos U_x , isto é, $\bigcup_{x \in \text{int}(A)} U_x$.

Seja $y \in \bigcup_{x \in \text{int}(A)} U_x$. Segue que $y \in U_{x_0}$, para algum $x_0 \in \text{int}(A)$. Visto que $U_{x_0} \in \mathcal{T}$ e $U_{x_0} \subset A$, segue por definição que y é um ponto interior de A com respeito a $\mathcal{T}$, isto é, $y \in \text{int}(A)$. Logo, $\bigcup_{x \in \text{int}(A)} U_x \subset \text{int}(A)$. A inclusão $\text{int}(A) \subset \bigcup_{x \in \text{int}(A)} U_x$ é clara. $\square$

Definição 1.23. *Sejam $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico e $A \subset X$. O conjunto*

$$A^\circ = \bigcup_{U \in \mathcal{T}_A} U, \quad (1.12)$$

é denominado o interior de A com respeito a topologia $\mathcal{T}$.

Em outras palavras, a Definição 1.23 diz que o interior de um subconjunto A de um espaço topológico X é a união de todos abertos em X (com respeito a topologia de X) que estão contidos em A .

Equivalentemente, o interior de um subconjunto A de um espaço topológico X é o maior aberto em X (com respeito a topologia de X) que está contido em A .

Da definição acima temos que $A^\circ \subset A$.

Proposição 1.24. *Se $(X, \mathcal{T})$ é um espaço topológico e $A \subset X$, então $A^\circ = \text{int}(A)$.*

Demonstração. Dado $x \in A^\circ = \bigcup_{U \in \mathcal{T}_A} U$, tem-se que $x \in U_0$, para algum $U_0 \in \mathcal{T}_A$. Desta forma, temos que $U_0 \in \mathcal{T}$ e $x \in U_0 \subset A$, o que implica por definição que x é ponto interior de A , ou seja, $x \in \text{int}(A)$. Logo, $A^\circ \subset \text{int}(A)$.

Por outro lado, dado $x \in \text{int}(A)$, segue que existe $U_0 \in \mathcal{T}$ tal que $x \in U_0 \subset A$. Assim, $U_0 \in \mathcal{T}_A$ e $x \in U_0 \subset (\bigcup_{U \in \mathcal{T}_A} U) = A^\circ$. Logo, $\text{int}(A) \subset A^\circ$.

Portanto, $A^\circ = \text{int}(A)$. $\square$

Proposição 1.25. *Sejam $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico e $A, B \subset X$. Se B é aberto em X com respeito a topologia $\mathcal{T}$ e $B \subset A$, então $B \subset A^\circ$.*

Demonstração. Como B é aberto em X e $B \subset A$, então $B \in \mathcal{T}_A$. Logo, pela Definição 1.23 tem-se que $B \subset (\bigcup_{U \in \mathcal{T}_A} U) = A^\circ$. Portanto, $B \subset A^\circ$. $\square$

Proposição 1.26. *Sejam $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico e $A, B \subset X$. As seguintes afirmações são verdadeiras:*

- (i) $(A^\circ)^\circ = A^\circ$.

$$(ii) \overline{\overline{A}} = \overline{A}.$$

Demonstração. (i) Como $A^\circ \subset A$ segue que $(A^\circ)^\circ \subset A^\circ$. Por outro lado, tomando $U = A^\circ$ e $V = A^\circ$, temos que U é aberto em X e $U \subset V$. Assim, segue da Proposição 1.25 que $U \subset V^\circ$, ou seja, $A^\circ \subset (A^\circ)^\circ$. Portanto, $(A^\circ)^\circ = A^\circ$.

(ii) Como $A \subset \overline{A}$ segue que $\overline{A} \subset \overline{\overline{A}}$. Por outro lado, tomando $U = \overline{A}$ e $V = \overline{A}$, temos que V é fechado em X e $U \subset V$. Assim, segue da Proposição 1.19 que $\overline{U} \subset V$, ou seja, $\overline{\overline{A}} \subset \overline{A}$. Portanto, $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$. $\square$

1.2 Vizinhanças, bases e sub-bases topológicas

Definição 1.27. Sejam $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico não vazio, $x \in X$ e $U \subset X$. O conjunto U é uma vizinhança de x com respeito a topologia $\mathcal{T}$ se, e somente se, $x \in U^\circ$.

Dado $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico não vazio, a coleção (ou família) de todas as vizinhanças de $x \in X$ com respeito a topologia $\mathcal{T}$ é denotada por $\mathcal{V}_x^\mathcal{T}$ e é denominada por $\mathcal{V}_x^\mathcal{T}$ por sistema de vizinhança do ponto $x \in X$ com respeito a topologia $\mathcal{T}$. Já a coleção ou família.

$$\mathcal{V}^\mathcal{T} = \{\mathcal{V}_x^\mathcal{T} : x \in X\} \quad (1.13)$$

é denominada sistema de vizinhanças do espaço topológico $(X, \mathcal{T})$.

Nas situações em que a topologia de um conjunto Z esteja denotada na forma $\mathcal{T}^Z$, o sistema de vizinhanças de um ponto a com respeito a $\mathcal{T}^Z$ ao invés de ser denotado por $\mathcal{V}_a^{\mathcal{T}^Z}$ será denotado simplesmente por $\mathcal{V}_a^Z$ a fim de simplificar as notações.

Proposição 1.28. Sejam $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico não vazio. Para cada $x \in X$, a coleção $\mathcal{V}_x^\mathcal{T}$ das vizinhanças de x tem as seguintes propriedades:

- (i) Se $U \in \mathcal{V}_x^\mathcal{T}$, então $x \in U$.
- (ii) Se $U, V \in \mathcal{V}_x^\mathcal{T}$, então $U \cap V \in \mathcal{V}_x^\mathcal{T}$.
- (iii) Dado $U \in \mathcal{V}_x^\mathcal{T}$, existe $V \in \mathcal{V}_x^\mathcal{T}$ tal que $U \in \mathcal{V}_y^\mathcal{T}$, para todo $y \in V$.
- (iv) Se $U \in \mathcal{V}_x^\mathcal{T}$ e $U \subset V \subset X$, então $V \in \mathcal{V}_x^\mathcal{T}$.

Demonstração. (i) Dado $U \in \mathcal{V}_x^T$, temos que $x \in U^\circ$. Como $U^\circ \subset U$, segue que $x \in U$. Portanto, $x \in U$, para todo $U \in \mathcal{V}_x^T$.

(ii) Dados $U, V \in \mathcal{V}_x^T$, temos que $x \in U^\circ$ e $x \in V^\circ$, o que implica que $x \in U^\circ \cap V^\circ$. Como $U^\circ \cap V^\circ = (U \cap V)^\circ$, segue que $x \in (U \cap V)^\circ$ e portanto temos que $U \cap V \in \mathcal{V}_x^T$.

(iii) Seja $U \in \mathcal{V}_x^T$. Como $U \in \mathcal{V}_x^T$, segue que $x \in U^\circ$. Tome $V = U^\circ$ e seja $y \in V$. Como $U^\circ = (U^\circ)^\circ$, então $x \in V = V^\circ$ donde segue que $V \in \mathcal{V}_x^T$. Além disso, como $y \in V = U^\circ$ resulta que $U \in \mathcal{V}_y^T$. Portanto, dado $U \in \mathcal{V}_x^T$, existe $V \in \mathcal{V}_x^T$ tal que $U \in \mathcal{V}_y^T$, para todo $y \in V$.

(iv) Sejam $U \in \mathcal{V}_x^T$ e $U \subset V \subset X$. Como $U \in \mathcal{V}_x^T$, segue que $x \in U^\circ$. Como $U \subset V$, segue que $U^\circ \subset V^\circ$. Logo, temos que $x \in V^\circ$ e portanto temos que $V \in \mathcal{V}_x^T$. $\square$

Proposição 1.29. *Sejam $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico não vazio e $U \subset X$. Tem-se que $U \in \mathcal{T}$ se, e somente se, $U \in \mathcal{V}_x^T$, para todo $x \in U$.*

Demonstração. Suponha que $U \in \mathcal{T}$. Assim, $U = U^\circ$. Dado $x \in U$, então $x \in U^\circ$, o que implica que $U \in \mathcal{V}_x^T$. Portanto, $U \in \mathcal{V}_x^T$, para todo $x \in U$.

Reciprocamente, suponha que $U \in \mathcal{V}_x^T$, para todo $x \in U$. Segue que dado $x \in U$, então $x \in U^\circ$. Logo, $U \subset U^\circ$. Como $U^\circ \subset U$, então $U = U^\circ$. Portanto, $U \in \mathcal{T}$. $\square$

Definição 1.30. *Sejam $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico não vazio, $x \in X$ e $\mathcal{B}_x \subset \mathcal{V}_x^T$. A família $\mathcal{B}_x$ é uma base de vizinhanças de x com respeito a topologia $\mathcal{T}$ se, e somente se, dado $U \in \mathcal{V}_x^T$, existe $W \in \mathcal{B}_x$ tal que $W \subset U$.*

Quando um espaço topológico Z estiver munido com uma topologia $\mathcal{T}^Z$ o sistema de base de vizinhanças de um ponto a , que é denotado por $\mathcal{B}_a^{\mathcal{T}^Z}$, será denotado de forma simplificada $\mathcal{B}_a^Z$.

A seguir apresentaremos exemplos de família de subconjuntos de um espaço topológico que são de bases de vizinhanças para pontos deste espaço.

Exemplo 1.31. *Sejam $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico, $x \in X$ e $\mathcal{B}_x$ um família de subconjuntos de X dada por*

$$\mathcal{B}_x = \{U \in \mathcal{V}_x^T : U \in \mathcal{T}\}.$$

Então $\mathcal{B}_x$ é uma base de vizinhança com respeito a topologia $\mathcal{T}$.

Exemplo 1.32. *Sejam (M, d) um espaço métrico, $x \in M$ e $\mathcal{B}_x$ um família de subconjuntos de M dada por*

$$\mathcal{B}_x = \{B(x; r) : r > 0\}. \quad (1.14)$$

Então $\mathcal{B}_x$ é uma base com respeito a topologia $\mathcal{T}_d$ em M induzida pela métrica d .

Proposição 1.33. *Sejam $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico não vazio e $\mathcal{B}_x$ uma base de vizinhanças de x , para cada $x \in X$. As seguintes afirmações são verdadeiras:*

- (i) $x \in U$, para todo $U \in \mathcal{B}_x$.
- (ii) Dados $U, V \in \mathcal{B}_x$, existe $W \in \mathcal{B}_x$ tal que $W \subset U \cap V$.
- (iii) Dado $U \in \mathcal{B}_x$, existe $V \in \mathcal{B}_x$ tal que $V \subset U$ e para cada $y \in V$ existe $W_y \in \mathcal{B}_y$ tal que $W_y \subset U$.

Demonstração. (i) Como $\mathcal{B}_x \subset \mathcal{V}_x^{\mathcal{T}}$, segue pelo item (i) da Proposição 1.28 que $x \in U$, para todo $U \in \mathcal{B}_x$.

(ii) Como $\mathcal{B}_x \subset \mathcal{V}_x^{\mathcal{T}}$ e por hipótese temos que $U, V \in \mathcal{B}_x$, então $U, V \in \mathcal{V}_x^{\mathcal{T}}$. Daí, pelo item (ii) da Proposição 1.28, resulta que $U \cap V \in \mathcal{V}_x^{\mathcal{T}}$ e como $\mathcal{B}_x$ é uma base de vizinhanças de x com respeito a topologia $\mathcal{T}$ segue por definição que existe $W \in \mathcal{B}_x$ tal que $W \subset U \cap V$.

(iii) Dado $U \in \mathcal{B}_x$, como $\mathcal{B}_x \subset \mathcal{V}_x^{\mathcal{T}}$ segue que $U \in \mathcal{V}_x^{\mathcal{T}}$. Daí, pelo item (iii) da Proposição 1.28, existe $V' \in \mathcal{V}_x^{\mathcal{T}}$ tal que $U \in \mathcal{V}_y^{\mathcal{T}}$, para todo $y \in V'$. Sendo $\mathcal{B}_x$ é uma base de vizinhanças de x com respeito a topologia $\mathcal{T}$, segue por definição que existe $V \in \mathcal{B}_x$ tal que $V \subset V'$. Logo, existe $V \in \mathcal{B}_x$ tal que $U \in \mathcal{V}_y^{\mathcal{T}}$, para todo $y \in V$. Assim, se $U \in \mathcal{V}_y^{\mathcal{T}}$, para todo $y \in V$, resulta do item (i) da Proposição 1.28 que $y \in U$, para todo $y \in V$, o que implica que $V \subset U$. Além disso, para cada $y \in V$ temos que $U \in \mathcal{V}_y^{\mathcal{T}}$ e sendo $\mathcal{B}_y$ base de vizinhanças de y , resulta da definição de base de vizinhanças que para cada $y \in V$ existe $W_y \in \mathcal{B}_y$ tal que $W_y \subset U$. Portanto, dado $U \in \mathcal{B}_x$, existe $V \in \mathcal{B}_x$ tal que $V \subset U$ e para cada $y \in V$ existe $W_y \in \mathcal{B}_y$ tal que $W_y \subset U$. $\square$

Proposição 1.34. *Sejam $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico não vazio e $\mathcal{B}_x$ uma base de vizinhanças de x , para cada $x \in X$. Tem-se que $U \in \mathcal{T}$ se, e somente se, para cada $x \in U$ existe $V_x \in \mathcal{B}_x$ tal que $V_x \subset U$.*

Demonstração. Sejam $U \in \mathcal{T}$ e $x \in U$. Note que $U \in \mathcal{V}_x^{\mathcal{T}}$, pois $x \in U = U^\circ$. Como $\mathcal{B}_x$ é uma base de vizinhança de x , segue por definição que para $U \in \mathcal{V}_x^{\mathcal{T}}$, existe $V_x \in \mathcal{B}_x$ tal que $V_x \subset U$. Portanto, para cada $x \in U$ existe $V_x \in \mathcal{B}_x$ tal que $V_x \subset U$.

Reciprocamente, seja $U \subset X$ satisfazendo que para cada $x \in U$ existe $V_x \in \mathcal{B}_x$ tal que $V_x \subset U$. Sendo $\mathcal{B}_x$ base de vizinhança de x , segue que $\mathcal{B}_x \subset \mathcal{V}_x^\mathcal{T}$, para todo $x \in U$. Assim, decorre do item (i) da Proposição 1.28 que $x \in V_x$, para todo $x \in U$. Como $V_x \in \mathcal{V}_x^\mathcal{T}$, para todo $x \in U$, então $x \in (V_x)^\circ$, para todo $x \in U$. Assim, para cada $x \in U$ tem-se que $(V_x)^\circ \in \mathcal{T}$ e $x \in (V_x)^\circ \subset V_x \subset U$, donde resulta que $U = \bigcup_{x \in U} (V_x)^\circ$ e portanto $U \in \mathcal{T}$. $\square$

Definição 1.35. *Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico. Uma subfamília $\mathcal{B}$ de $\mathcal{T}$ é uma base para a topologia $\mathcal{T}$ se, e somente se, dado $U \in \mathcal{T}$, existe algum $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$ tal que*

$$U = \bigcup_{V \in \mathcal{C}} V. \quad (1.15)$$

Exemplo 1.36. *Os intervalos (a, b) , com $a < b$ em $\mathbb{R}$, formam uma base para a topologia usual em $\mathbb{R}$.*

Exemplo 1.37. *Se (M, d) é um espaço métrico, então as bolas abertas $B(a; r)$, com $a \in M$ e $r > 0$, formam uma base para a topologia induzida $\mathcal{T}_d$ em M .*

Proposição 1.38. *Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico. Uma família $\mathcal{B}$ é uma base para a topologia $\mathcal{T}$ se, e somente se, dados $U \in \mathcal{T}$ e $x \in U$, existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $x \in V$ e $V \subset U$.*

Demonstração. Dado $U \in \mathcal{T}$ com $U \neq \emptyset$. Por hipótese $\mathcal{B}$ é uma base para a topologia $\mathcal{T}$, então $U = \bigcup_{V \in \mathcal{C}} V$ para algum $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$. Portanto se $x \in U$ existe $V \in \mathcal{C}$ tal que $x \in V$ e tem-se que $V \subset U$.

Reciprocamente, seja $\mathcal{B}$ uma coleção de subconjuntos de X satisfazendo que para cada $U \in \mathcal{T}$ e $x \in U$, existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $x \in V$ e $V \subset U$. Então para cada $x_0 \in U$ também existe $V_{x_0} \in \mathcal{B}$ tal que $x_0 \in V_{x_0}$ e $V_{x_0} \subset U$. Portanto $U = \bigcup_{V_{x_0} \in \mathcal{C}} V_{x_0}$ para algum $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$. Como U é qualquer aberto de $\mathcal{T}$ segue que $\mathcal{B}$ é uma base topológica para $\mathcal{T}$. $\square$

Proposição 1.39. *Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico. Se $\mathcal{B}$ é uma base para a topologia $\mathcal{T}$, então para cada $x \in X$, tem-se que a família*

$$\mathcal{B}_x = \{V \in \mathcal{B} : x \in V\} \quad (1.16)$$

é uma base de vizinhança de x com respeito a topologia $\mathcal{T}$.

Demonstração. Seja $x \in X$ e $U \in \mathcal{V}_x^\mathcal{T}$ uma vizinhança do ponto x . Como $U \in \mathcal{V}_x^\mathcal{T}$ segue por definição que $x \in U^\circ$. Sendo $\mathcal{B}$ uma base para a topologia $\mathcal{T}$ e $U^\circ \in \mathcal{T}$ decorre

da Proposição 1.38 que existe $B \in \mathcal{V}$ tal que $x \in B$ e $B \subset U^\circ$. Logo, dado $U \in \mathcal{V}_x^\mathcal{T}$, existe $V \in \mathcal{B}_x$ tal que $V \subset U$. Portanto, $\mathcal{B}_x$ é uma base de vizinhança de x com respeito a $\mathcal{T}$. $\square$

Proposição 1.40. *Sejam $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico e $\mathcal{B}$ uma base para a topologia $\mathcal{T}$. As seguintes afirmações são verdadeiras.*

$$(i) \quad X = \bigcup_{V \in \mathcal{B}} V.$$

(ii) *Dados $x \in X$ e $U, V \in \mathcal{B}$ tais que $x \in U \cap V$, existe $W \in \mathcal{B}$ tal que $x \in W$ e $W \subset U \cap V$.*

Demonstração. (i) Como $X \in \mathcal{T}$ e $\mathcal{B}$ é uma base para a topologia $\mathcal{T}$ segue por definição que existe $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$ tal que $X = \bigcup_{V \in \mathcal{C}} V \subset \bigcup_{V \in \mathcal{B}} V$. Como $V \subset X$, para todo $V \in \mathcal{B}$, então $X = \bigcup_{V \in \mathcal{B}} V$.

(ii) Sejam $x \in X$ e $U, V \in \mathcal{B}$ tais que $x \in U \cap V$. Segue da Proposição 1.39 que a família $\mathcal{B}_x = \{V \in \mathcal{B} : x \in V\}$ é uma base de vizinhanças de x com respeito a $\mathcal{T}$. Sendo $\mathcal{B}_x = \{V \in \mathcal{B} : x \in V\}$ uma base de vizinhanças de x com respeito a $\mathcal{T}$ e $U, V \in \mathcal{B}_x$, segue pelo item (ii) Proposição 1.33 que existe $W \in \mathcal{B}_x$ tal que $W \subset U \cap V$. Portanto, dados $x \in X$ e $U, V \in \mathcal{B}$ tais que $x \in U \cap V$, existe $W \in \mathcal{B}$ tal que $x \in W$ e $W \subset U \cap V$. $\square$

Proposição 1.41. *Sejam X um conjunto não vazio e $\mathcal{C}$ uma família de subconjuntos de X com as seguintes propriedades:*

$$(i) \quad X = \bigcup_{V \in \mathcal{C}} V.$$

(ii) *Dados $x \in X$ e $U, V \in \mathcal{C}$ tais que $x \in U \cap V$, existe $W \in \mathcal{C}$ tal que $x \in W$ e $W \subset U \cap V$.*

A coleção de subconjuntos de X dada por

$$\langle \mathcal{C} \rangle = \{U \in \mathcal{P}(X) : U = \bigcup_{V \in \mathcal{D}} V, \text{ para algum } \mathcal{D} \subset \mathcal{C}\}, \quad (1.17)$$

é uma topologia em X denominada topologia gerada por $\mathcal{C}$ e, mais ainda, $\mathcal{C}$ é uma base para a topologia $\langle \mathcal{C} \rangle$.

Demonstração. Temos que $\emptyset \subset \mathcal{C}$, logo $\emptyset = \bigcup_{V \in \emptyset} V$ e conseqüentemente $\emptyset \in \mathcal{T}$. Além disso, segue da propriedade i) da família $\mathcal{C}$ que $X = \bigcup_{V \in \mathcal{C}} V$, o que implica que $X \in \mathcal{T}$.

Sejam $U_i \in \mathcal{T}$, com $i \in I$. Pela definição da família $\mathcal{T}$, temos que cada $U_i = \bigcup_{V \in \mathcal{D}_i} V$, com $\mathcal{D}_i \subset \mathcal{C}$. Então

$$\bigcup_{i \in I} U_i = \bigcup_{i \in I} \left(\bigcup_{V \in \mathcal{D}_i} V \right) = \bigcup_{V \in \bigcup_{i \in I} \mathcal{D}_i} V,$$

e como $\left(\bigcup_{i \in I} \mathcal{D}_i \right) \subset \mathcal{C}$ segue que $\left(\bigcup_{i \in I} U_i \right) \in \mathcal{T}$.

Agora, considere $U_1 \in \mathcal{T}$ e $U_2 \in \mathcal{T}$. Pela definição da família $\mathcal{T}$, temos que cada $U_1 = \bigcup_{V \in \mathcal{D}_1} V$ e $U_2 = \bigcup_{V \in \mathcal{D}_2} V$, com $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2 \subset \mathcal{C}$. Então

$$U_1 \cap U_2 = \bigcup_{V \in \mathcal{D}} V,$$

onde $\mathcal{D} = \{V \in \mathcal{B} : V \subset V_1 \cap V_2, \text{ para algum } V_1 \in \mathcal{D}_1 \text{ e para algum } V_2 \in \mathcal{D}_2\}$. De fato, se $x \in U_1 \cap U_2$, então $x \in V_1$ para algum $V_1 \in \mathcal{D}_1$ e $x \in V_2$ para algum $V_2 \in \mathcal{D}_1$, conseqüentemente $x \in V_1 \cap V_2$, para algum $V_1 \in \mathcal{D}_1$ e para algum $V_2 \in \mathcal{D}_1$. Daí, pela propriedade ii) da família $\mathcal{C}$, tem-se que existe $W \in \mathcal{C}$ tal que $x \in W$ e $W \subset V_1 \cap V_2$, o que implica que $x \in \bigcup_{V \in \mathcal{D}} V$. Por outro lado se $x \in \bigcup_{V \in \mathcal{D}} V$, então $x \in W$, para algum $W \in \mathcal{D}$. Assim, $x \in V_1 \cap V_2$, para algum $V_1 \in \mathcal{D}_1$ e para algum $V_2 \in \mathcal{D}_1$, o que implica que $x \in \bigcup_{V \in \mathcal{D}_1} V$ e $x \in \bigcup_{V \in \mathcal{D}_2} V$, donde resulta que $x \in U_1 \cap U_2$. Portanto,

$$U_1 \cap U_2 = \left(\bigcup_{V \in \mathcal{D}} V \right) \in \mathcal{T}.$$

Por fim, segue imediatamente da definição da família $\mathcal{T}$ que $\mathcal{C}$ é uma base para $\mathcal{T}$. $\square$

Uma família $\mathcal{C}$ de subconjuntos de X satisfazendo as propriedades descritas na hipótese da Proposição 1.41 é denominada uma *base geradora* para topologia em X .

Proposição 1.42. *Sejam $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico e $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ bases geradoras para topologias em X . As seguintes afirmações são verdadeiras:*

- (i) *Se $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$, então $\langle \mathcal{B} \rangle \subset \mathcal{T}$.*
- (ii) *Se $\mathcal{B}$ é base topológica para $\mathcal{T}$, então $\mathcal{T} = \langle \mathcal{B} \rangle$.*
- (iii) *Se $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}$, então $\langle \mathcal{B} \rangle \subset \langle \mathcal{C} \rangle$.*

Demonstração. (i) seja $U \in \langle \mathcal{B} \rangle$, então $U = \bigcup_{V \in \mathcal{D}} V$, para algum $\mathcal{D} \subset \mathcal{B}$ como $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ segue que $\bigcup_{V \in \mathcal{D}} V \in \mathcal{T}$, ou seja, $U \in \mathcal{T}$.

(ii) se $U \in \langle \mathcal{B} \rangle$ tem-se do item (i) que $U \in \mathcal{T}$. Agora se $U \in \mathcal{T}$, então como $\mathcal{B}$ é base topológica para $\mathcal{T}$ segue que $U = \bigcup_{V \in \mathcal{D}} V$ para algum $\mathcal{D} \subset \mathcal{B}$, logo $U \in \langle \mathcal{B} \rangle$.

(iii) Como $\mathcal{C} \subset \langle \mathcal{C} \rangle$, então $\mathcal{B} \subset \mathcal{C} \subset \langle \mathcal{C} \rangle$, então do item (i) tem-se que $\langle \mathcal{B} \rangle \subset \langle \mathcal{C} \rangle$. $\square$

Definição 1.43. Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico. Uma sub-família $\mathcal{R}$ de $\mathcal{T}$ é uma sub-base para a topologia $\mathcal{T}$ se, e somente se, dado $U \in \mathcal{T}$, existe algum indexador Λ e existem $\mathcal{C}_\lambda \subset \mathcal{R}$ finitos, para todo $\lambda \in \Lambda$, tais que

$$U = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \left(\bigcap_{V \in \mathcal{C}_\lambda} V \right). \quad (1.18)$$

Em outras palavras, a Definição 1.43 diz que $\mathcal{R}$ é uma sub-base para topologia $\mathcal{T}$ se, e somente se, dado um aberto $U \in \mathcal{T}$, ele se escreve como uma união qualquer de intersecções finitas de membros de $\mathcal{R}$.

Proposição 1.44. Sejam X um conjunto não vazio e $\mathcal{S}$ uma família de subconjuntos de X tal que $X = \bigcup_{V \in \mathcal{S}} V$. A coleção de subconjuntos de X dada por

$$[\mathcal{S}] = \{U \in \mathcal{P}(X) : U = \bigcap_{i=1}^n V_i, \text{ com cada } V_i \in \mathcal{S}\}, \quad (1.19)$$

é uma base geradora para uma topologia em X denominada base topológica gerada por $\mathcal{S}$ e a coleção

$$\langle \mathcal{S} \rangle = \{U \in \mathcal{P}(X) : U = \bigcup_{V \in \mathcal{D}} V, \text{ para algum } \mathcal{D} \subset [\mathcal{S}]\}, \quad (1.20)$$

é uma topologia em X , denominada topologia gerada por $\mathcal{S}$ e, mais ainda, $\mathcal{S}$ é uma sub-base para a topologia $\langle \mathcal{S} \rangle$.

Demonstração. Para provar que $[\mathcal{S}]$ é uma base topológica usaremos a Proposição 1.41. Primeiro verificamos que $X = \bigcup_{V \in [\mathcal{S}]} V$. Observe que se $V \in \mathcal{S}$, então $V \in [\mathcal{S}]$, pois basta tomar a intersecção unitária, e com isso conclui-se que $X = \bigcup_{V \in \mathcal{S}} V \subset \bigcup_{V \in [\mathcal{S}]} V$. Já a inclusão $\bigcup_{V \in [\mathcal{S}]} V \subset X$ também é válida, logo $X = \bigcup_{V \in [\mathcal{S}]} V$.

Para verificar o item (ii) da Proposição 1.41, seja $x \in X$ e $U_1, U_2 \in [\mathcal{S}]$ com $U_1 = V_1 \cap \dots \cap V_m$ e $U_2 = V'_1 \cap \dots \cap V'_n$. Se $x \in (U_1 \cap U_2) = (V_1 \cap \dots \cap V_m) \cap (V'_1 \cap \dots \cap V'_n)$,

então tomando $W = U_1 \cap U_2$ tem-se que $W \in [\mathcal{S}]$, pois ainda é uma interseção finita de elementos de $\mathcal{S}$ e $x \in W \subset U_1 \cap U_2$. Portanto $[\mathcal{S}]$ é uma base topológica.

Segue imediatamente da Proposição 1.41 que $\langle\langle\mathcal{S}\rangle\rangle$ é uma topologia, e que $[\mathcal{S}]$ é uma base para a topologia $\langle\langle\mathcal{S}\rangle\rangle$.

□

A família $\mathcal{S}$ de subconjuntos de X tal que $X = \bigcup_{V \in \mathcal{S}} V$ é denominada *sub-base geradora para topologia em X* . Em outras palavras, a topologia gerada pela sub-base geradora $\mathcal{S}$ para topologia em X é definida como a coleção $\langle\langle\mathcal{S}\rangle\rangle$ formada por todas as uniões de interseções finitas de elementos de $\mathcal{S}$.

Uma importante observação da Proposição 1.44 é que dado um $U \in \mathcal{S}$, sendo $\mathcal{S}$ uma sub-base geradora para topologia em X , então $U \in \langle\langle\mathcal{S}\rangle\rangle$, pois basta tomar a interseção unitária de U e fazer a união unitária dessa interseção unitária. Em outras palavras, todo elemento da sub-base é aberto na topologia gerada por essa sub-base, isto é, $\mathcal{S} \subset \langle\langle\mathcal{S}\rangle\rangle$.

Exemplo 1.45. *Toda base de uma topologia é em particular uma sub-base.*

Exemplo 1.46. $\{(a, a+1) : a \in \mathbb{R}\}$ é uma sub-base da topologia euclidiana em $\mathbb{R}$, mas não é uma base.

Proposição 1.47. *Sejam $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico e $\mathcal{S}$ e $\mathcal{R}$ sub-bases geradoras para topologias em X . As seguintes afirmações são verdadeiras:*

- (i) Se $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$, então $\langle\langle\mathcal{S}\rangle\rangle \subset \mathcal{T}$.
- (ii) Se $\mathcal{S} \subset \mathcal{R}$, então $\langle\langle\mathcal{S}\rangle\rangle \subset \langle\langle\mathcal{R}\rangle\rangle$.

Demonstração. (i) Seja $U \in \langle\langle\mathcal{S}\rangle\rangle$, então U é uma união de interseções finitas de elementos de $\mathcal{S}$, como cada elemento elemento de $\mathcal{S}$ pertence a $\mathcal{T}$, segue que uma união de interseções finitas de elementos de $\mathcal{S}$ está em $\mathcal{T}$, pois $\mathcal{T}$ é topologia, isto é, $U \in \mathcal{T}$. Portanto $\langle\langle\mathcal{S}\rangle\rangle \subset \mathcal{T}$.

(ii) Como $\mathcal{R} \subset \langle\langle\mathcal{R}\rangle\rangle$, então $\mathcal{S} \subset \mathcal{R} \subset \langle\langle\mathcal{R}\rangle\rangle$, e do item i), segue que $\langle\langle\mathcal{S}\rangle\rangle \subset \langle\langle\mathcal{R}\rangle\rangle$.

□

Definição 1.48. *Um espaço topológico $(X, \mathcal{T})$ denomina-se espaço de Hausdorff ou espaço separado se, e somente se, para cada par de pontos distintos $x, y \in X$, existem abertos U, V tais que $x \in U$, $y \in V$ e $U \cap V = \emptyset$.*

Exemplo 1.49. *Todo espaço métrico é de Hausdorff. Como (M, d) é espaço métrico e $a \neq b$ segue $d(a, b) > 0$.*

Tome $r = \frac{d(a, b)}{4}$ e $s = \frac{d(a, b)}{4}$.

Suponha que exista $x \in B_M(a; r) \cap B_M(b; s)$.

Assim, $d(x, a) < r$ e $d(x, b) < s$ e usando as condições de desigualdade triangular e simetria da métrica de M , tem-se que

$$d(a, b) \leq d(a, x) + d(x, b) < r + s = \frac{d(a, b)}{2},$$

o que resulta em um absurdo.

Portanto $B_M(a; r) \cap B_M(b; s) = \emptyset$.

Exemplo 1.50. *O espaço topológico de Sierpinski não é Hausdorff, pois não existe um aberto V em torno de $\{a\}$ tal que $\{b\}$ não pertence a esse aberto.*

Proposição 1.51. *Se $(X, \mathcal{T})$ é um espaço topológico de Hausdorff, então todo subsespaço de X é Hausdorff, ou seja, todo subsespaço de Hausdorff é Hausdorff.*

Demonstração. Sejam $S \subset X$ um espaço topológico munido com a topologia induzida de $\mathcal{T}$. Sejam $x, y \in S$, com $x \neq y$. Como X é Hausdorff, existem abertos U e V em X tais que $x \in U$, $y \in V$ e $U \cap V = \emptyset$. Tome $U' = S \cap U$ e $V' = S \cap V$. Temos que U' e V' são abertos em S , $x \in U'$, $y \in V'$ e

$$U' \cap V' = (S \cap U) \cap (S \cap V) = S \cap (U \cap V) = S \cap \emptyset = \emptyset.$$

Portanto, S é um espaço de Hausdorff. □

1.3 Conexidade e Compacidade

Definição 1.52. *Um espaço topológico $(X, \mathcal{T})$ é dito desconexo se, e somente se, existem $A, B \in \mathcal{T}$ tais que A e B são não vazios, disjuntos e $X = A \cup B$. Caso contrário, $(X, \mathcal{T})$ é dito conexo.*

Definição 1.53. *Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico. Um subconjunto Y de X não vazio é dito ser desconexo com respeito a topologia $\mathcal{T}$ se, e somente se, $(X, \mathcal{T}|^Y)$ é um espaço topológico desconexo. Caso contrário, Y é conexo com respeito a $\mathcal{T}$.*

Exemplo 1.54. *Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico discreto com dois ou mais elementos. Tem-se que X é desconexo. De fato, como X tem dois ou mais elementos, tome A como o conjunto unitário formado por um dos elementos, daí claramente A e A^c são não vazios, disjuntos, $X = A \cup A^c$ e A e A^c são abertos visto que ambos são membros de $\mathcal{P}(X)$ e $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$.*

Exemplo 1.55. *Um subconjunto da reta é conexo se, e somente se, é um intervalo. [Ver [7] pág 96]*

Proposição 1.56. *Seja $(X, \mathcal{T})$ espaço topológico. Tem-se que $(X, \mathcal{T})$ é conexo se, e somente se, X e $\emptyset$ são os únicos subconjuntos de X simultaneamente abertos e fechados.*

Demonstração. Suponha que A subconjunto de X tal que $A \neq \emptyset$ e $A \neq X$ aberto e fechado. Tome $B = A^c$ claro que $B \neq \emptyset$ e $B \neq X$ e também B é aberto e fechado, segue que A e B são abertos disjuntos não vazios e $X = A \cup A^c$, o que é um absurdo pois por hipótese X é conexo.

Por outro lado, suponha que X é desconexo, ou seja, $X = A \cup B$ com A e B abertos, disjuntos e não vazios. Note que $A, B \neq X$ pois são disjuntos e não vazios. Temos que $B = A^c$ logo B é fechado, portanto B é aberto e fechado com $B \neq \emptyset$ e $B \neq X$, o que contraria a hipótese. $\square$

No restante desta seção o intervalo $[0, 1]$ será denotado por I e estará munido com a topologia induzida pela topologia usual de $\mathbb{R}$, a qual é denotada aqui por $\mathcal{T}^I$.

Definição 1.57. *Um espaço topológico $(X, \mathcal{T})$ é dito conexo por caminhos se, e somente se, dados $a, b \in X$ existir uma função contínua $f: (I, \mathcal{T}^I) \rightarrow (X, \mathcal{T})$ tal que $f(0) = a$ e $f(1) = b$.*

Caso a função f acima exista, será denominada um caminho entre a e b .

Definição 1.58. *Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico. Um subconjunto Y de X não vazio é dito conexo por caminhos com respeito a topologia $\mathcal{T}$ se, e somente se, $(Y, \mathcal{T}^Y)$ é um espaço topológico conexo por caminhos.*

Exemplo 1.59. $\mathbb{R}^n$ munido com a topologia usual denotada por $\mathcal{T}^{\mathbb{R}^n}$ é conexo por caminhos. De fato, dados $a, b \in \mathbb{R}^n$, seja $f: (I, \mathcal{T}^I) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathcal{T}^{\mathbb{R}^n})$ dada por $f(t) = (1-t)a + tb$ é um caminho de a até b .

Proposição 1.60. *Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico. Se $(X, \mathcal{T})$ é conexo por caminhos, então $(X, \mathcal{T})$ é conexo.*

Demonstração. Suponha que $(X, \mathcal{T})$ é desconexo, então existem $A, B \in \mathcal{T}$, disjuntos e não vazios tais que $X = A \cup B$. Sejam $a \in A$, $b \in B$ e $f: (I, \mathcal{T}^I) \rightarrow (X, \mathcal{T})$ um caminho entre a e b . Note que $I = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) = f^{-1}(X)$. Como f contínua, então $f^{-1}(A)$ e $f^{-1}(B)$ são abertos em I , disjuntos e não vazios, concluindo que I é desconexo, o que é um absurdo. Portanto $(X, \mathcal{T})$ é conexo. $\square$

Considerando $f: (I, \mathcal{T}^I) \rightarrow (X, \mathcal{T})$ um caminho entre a e b e $g: (I, \mathcal{T}^I) \rightarrow (X, \mathcal{T})$ um caminho entre b e c , então a função $(f * g): (I, \mathcal{T}^I) \rightarrow (X, \mathcal{T})$ dada por

$$(f * g)(t) = \begin{cases} f(2t), & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g(2t - 1), & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (1.21)$$

é um caminho entre a e c denominado *concatenação* entre f e g . Adicionalmente, a função $\overleftarrow{f}: (I, \mathcal{T}^I) \rightarrow (X, \mathcal{T})$ dada por

$$\overleftarrow{f}(t) = f(1 - t) \quad (1.22)$$

é um caminho entre b e a denominado *caminho reverso* de f .

Proposição 1.61. *Sejam $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico e $p \in X$ um ponto. Se cada $x \in X$ liga-se por um caminho a p , então $(X, \mathcal{T})$ é conexo por caminhos.*

Demonstração. Sejam $x, y \in X$. Por hipótese, existe um caminho $f: (I, \mathcal{T}^I) \rightarrow (X, \mathcal{T})$ ligando x a p e existe um caminho $g: (I, \mathcal{T}^I) \rightarrow (X, \mathcal{T})$ ligando y a p . A concatenação $f * \overleftarrow{g}$ é um caminho ligando x a y . Portanto, $(X, \mathcal{T}^X)$ é conexo por caminhos. $\square$

Seja X um conjunto. Uma coleção $\mathcal{C}$ é denominada uma cobertura do conjunto X se, e somente se,

$$X \subset \bigcup_{U \in \mathcal{C}} U.$$

Uma coleção $\mathcal{D}$ é denominada uma subcobertura de uma cobertura $\mathcal{C}$ de X se $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ for uma cobertura de X .

Definição 1.62. *Sejam $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico e K um subconjunto de X . Uma coleção é denominada uma cobertura aberta do conjunto K em relação a $\mathcal{T}^X$ se $\mathcal{C}$ for uma cobertura de K e $\mathcal{C} \subset \mathcal{T}^X$.*

Definição 1.63. *Sejam $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico e K um subconjunto de X . O conjunto K é denominado compacto com respeito a $\mathcal{T}$ se, e somente se, toda cobertura aberta de K possui subcobertura finita. Se X for compacto, então dizemos que X é um espaço topológico compacto.*

Em outras palavras, um subconjunto K de um espaço topológico $(X, \mathcal{T})$ é denominado compacto se, e somente se, para toda cobertura aberta $\mathcal{C}$ de K em relação a $\mathcal{T}$, existe um subconjunto finito $\mathcal{F}$ de $\mathcal{C}$, de modo que

$$K \subset \bigcup_{\mathcal{F} \in \mathcal{C}} U.$$

Exemplo 1.64. *Seja X um conjunto finito. Então um subconjunto K de X é compacto com respeito a qualquer topologia munindo X . Ora, como X é finito, então todas as coberturas de K são finitas, em particular as coberturas abertas, ou seja, cada cobertura aberta de K admite subcobertura aberta de X finita. Em particular o conjunto vazio é compacto, pois qualquer cobertura aberta para o conjunto vazio admite uma sub-cobertura unitária, já que o vazio está contido em qualquer conjunto.*

Proposição 1.65. *Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço de Hausdorff. Todo subconjunto compacto K em X com respeito a $\mathcal{T}$ é fechado em X com respeito a $\mathcal{T}$.*

Demonstração. Provaremos que $K^c \in \mathcal{T}$. Seja $x \in X - K$. Pela definição de espaço de Hausdorff, para cada ponto $y \in K$ existem $A_y \in \mathcal{T}$ contendo x e $B_y \in \mathcal{T}$ contendo y tal que $A_y \cap B_y = \emptyset$. Portanto, obtemos uma cobertura aberta $\{B_y\}_{y \in K}$ de K da qual podemos extrair uma subcobertura finita, pois K é compacto; ou seja, $K \subset B_{y_1} \cup \dots \cup B_{y_n}$. Seja $A = A_{y_1} \cup \dots \cup A_{y_n}$. Então A é um aberto que contém x e nenhum ponto de A pertence a K , isto é, $A \subset X - K$. Logo, K é fechado em X com respeito a $\mathcal{T}$. $\square$

Proposição 1.66. *Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico. Se X é compacto com respeito a $\mathcal{T}$, então todo subconjunto fechado F de X é compacto com respeito a $\mathcal{T}$.*

Demonstração. Seja F um subconjunto fechado de um espaço topológico compacto X . Seja $\{U_\lambda\}_{\lambda \in L}$ uma cobertura aberta de F . A família dos $\{U_\lambda\}$, $\lambda \in L$ juntamente com o conjunto $U = X - F$ é cobertura aberta de X . Como X é um espaço topológico compacto, então existe uma subcobertura finita tal que $X \subset U_{\lambda_1} \cup \dots \cup U_{\lambda_n} \cup U$. Como nenhum ponto de F pode pertencer a U , tem-se $F \subset U_{\lambda_1} \cup \dots \cup U_{\lambda_n}$, ou seja U_{λ_i} , para $1 \leq i \leq n$ é subcobertura aberta de F . Portanto F é compacto. $\square$

Definição 1.67. Um espaço topológico $(X, \mathcal{T})$ é dito *localmente compacto* se, e somente se, todo ponto $x \in X$ possui uma vizinhança compacta com respeito $\mathcal{T}$.

Proposição 1.68. Seja X um espaço Hausdorff. Então X é localmente compacto se e somente se dado $x \in X$, e dada uma vizinhança U de x , existe uma vizinhança V de x tal que V é compacto e V está contido em U .

Demonstração. Ver [5], pág. 185. □

1.4 Topologia produto

Considere $\{(X_i, \mathcal{T}^i) : i \in I\}$ uma família de espaços topológicos é possível definir uma topologia no produto cartesiano $\prod_{i \in I} X_i$ a partir das topologias de cada componente X_i do produto cartesiano? As proposições a seguir nos mostram que é possível definir uma base geradora para uma topologia no produto cartesiano de espaços topológicos a partir das topologias de cada cada componente X_i .

Proposição 1.69. Se $\{(X_i, \mathcal{T}^i) : i \in I\}$ é uma família não vazia de espaços topológicos não vazios, então a coleção

$$\mathcal{B} = \left\{ \prod_{i \in I} U_i \mid U_i \in \mathcal{T}^i, \forall i \in I \right\} \quad (1.23)$$

é uma base geradora para uma topologia no produto cartesiano $\prod_{i \in I} X_i$.

Demonstração. Para verificar que de fato $\mathcal{B}$ é uma base geradora para uma topologia, verifica-se se os itens da Proposição 1.41 são atendidas. A condição (i) é fácil de ser verificada, pois $\prod_{i \in I} X_i = \prod_{i \in I} U_i$ quando $U_i = X_i$ para todo $i \in I$. Logo,

$$\prod_{i \in I} X_i = \bigcup_{(\prod_{i \in I} U_i) \in \mathcal{B}} \prod_{i \in I} U_i.$$

Já para a condição (ii), considera-se dois elementos de $\mathcal{B}$, $U = \prod_{i \in I} U_i$ e $V = \prod_{i \in I} V_i$ tais que $U_i, V_i \in \mathcal{T}^i, \forall i \in I$, tem-se que $U \cap V = (\prod_{i \in I} U_i) \cap (\prod_{i \in I} V_i) = \prod_{i \in I} U_i \cap V_i$. Tomando $W = U \cap V$, tem-se que $W \in \mathcal{B}$ pois $U_i \cap V_i \in \mathcal{T}^i$ para cada $i \in I$ e claro que $W \subset U \cap V$. □

A topologia $\langle \mathcal{B} \rangle$ gerada pela base geradora $\mathcal{B}$ dada em (1.23) é denominada *topologia das caixas*.

Proposição 1.70. *Se $\{(X_i, \mathcal{T}^i) : i \in I\}$ é uma família não vazia de espaços topológicos não vazios, então a coleção*

$$\mathcal{P} = \left\{ \prod_{i \in I} U_i \mid U_i \in \mathcal{T}^i, \forall i \in I, \text{ e } U_i = X_i, \forall i \in I \setminus J, \text{ para algum } J \subset I \text{ e finito} \right\} \quad (1.24)$$

é uma base topológica para uma topologia no produto cartesiano $\prod_{i \in I} X_i$.

Demonstração. Para verificar que $\mathcal{P}$ é uma base geradora, o procedimento é similar a demonstração da Proposição 1.69. $\square$

A topologia $\langle \mathcal{P} \rangle$ gerada pela base geradora $\mathcal{P}$ dada em (1.24) é denominada *topologia produto*.

Nos casos em que o produto cartesiano é finito a topologia das caixas e a topologia produto coincidem, pois

$$\mathcal{B} = \left\{ \prod_{i=1}^n U_i \mid U_i \in \mathcal{T}^i, \text{ com } 1 \leq i \leq n \right\} = \mathcal{P}.$$

A seguir será enunciada uma versão particular das Proposições 1.69 e 1.70 para o caso em que $n=2$, pois neste trabalho os produtos cartesianos usados possuem 2 componentes.

Proposição 1.71. *Sejam $(X, \mathcal{T}^X)$ e $(Y, \mathcal{T}^Y)$ espaços topológicos. A topologia produto (das caixas) em $X \times Y$ é a topologia que tem como base uma coleção $\mathcal{B}$ dada por*

$$\mathcal{B} = \{U \times V : U \in \mathcal{T}^X \text{ e } V \in \mathcal{T}^Y\}. \quad (1.25)$$

Demonstração. Bastar fazer as adaptações da Proposição 1.69 para o caso em que o produto cartesiano tem 2 fatores. $\square$

Ou seja, uma base da topologia produto são todos os conjuntos da forma $U \times V$, onde U é um conjunto aberto de X e V é um conjunto aberto de Y . A topologia $\langle \mathcal{B} \rangle$ gerada pela base geradora $\mathcal{B}$ dada em (1.25) será denotada por $\mathcal{T}^X \otimes \mathcal{T}^Y$. Mostremos algumas propriedades desta topologia.

Proposição 1.72. *Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ bases dos espaços topológicos $(X, \mathcal{T}^X)$ e $(Y, \mathcal{T}^Y)$ respectivamente. Então $\hat{\mathcal{B}} = \{B \times C : B \in \mathcal{C}, C \in \mathcal{D}\}$ é uma base topológica da topologia produto.*

Demonstração. Ver [5], pág. 86. □

Proposição 1.73. A coleção $\mathcal{S} = \{\pi_1^{-1}(U) : U \text{ é aberto em } X\} \cup \{\pi_2^{-1}(V) : V \text{ é aberto em } Y\}$ é uma sub-base da topologia $(\mathcal{T}^X \otimes \mathcal{T}^Y)$.

Demonstração. Claro que $\mathcal{S}$ de fato é uma sub-base, pois

$$X \times Y = \{\pi_1^{-1}(X) : X \text{ é aberto em } X\} \cup \{\pi_2^{-1}(Y) : Y \text{ é aberto em } Y\}$$

logo a união dos elementos de $\mathcal{S}$ é $X \times Y$. Mostremos agora que a topologia gerada por $\mathcal{S}$ que é denotada por $\langle \mathcal{S} \rangle$ coincide com a topologia $(\mathcal{T}^X \otimes \mathcal{T}^Y)$, ou seja, $\langle \mathcal{S} \rangle = (\mathcal{T}^X \otimes \mathcal{T}^Y)$. Seja $A \in \langle \mathcal{S} \rangle$, então A é uma união de interseções finitas de elementos de $\mathcal{S}$. Como $S \subset (\mathcal{T}^X \otimes \mathcal{T}^Y)$, segue que $A \subset (\mathcal{T}^X \otimes \mathcal{T}^Y)$.

Agora seja $A \in (\mathcal{T}^X \otimes \mathcal{T}^Y)$, então existe U aberto em X e V aberto em Y tal que $A = U \times V$. Repare que

$$U \times V = (U \times V) \cap (X \times Y).$$

Assim $U \times V = \pi_1^{-1}(U) \cap \pi_2^{-1}(V)$ que é a interseção de dois elementos de $\mathcal{S}$. Como um aberto de $X \times Y$ é uma união de abertos básicos, concluímos que um aberto qualquer de $X \times Y$ pertence à $\langle \mathcal{S} \rangle$. □

Proposição 1.74. Sejam $(X, \mathcal{T}^X)$ e $(Y, \mathcal{T}^Y)$ espaços topológicos. O produto cartesiano $(X \times Y, \mathcal{T}^X \otimes \mathcal{T}^Y)$ é compacto se, e somente se, X e Y são espaços topológicos compactos.

Demonstração. ver ref [3], pág. 43. □

Para os próximos capítulos, vamos considerar todos os produtos cartesianos de espaços topológicos equipados com a topologia produto.

1.5 Topologia compacto-aberta

Sejam $(X, \mathcal{T}^X)$ e $(Y, \mathcal{T}^Y)$ espaços topológicos. Nesta monografia $\mathcal{F}(X, Y)$ denota o conjunto de todas as funções $f: (X, \mathcal{T}^X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}^Y)$. Existem várias maneiras de equipar $\mathcal{F}(X, Y)$ com uma topologia. Neste trabalho será apresentada uma das maneiras de se definir uma topologia em $\mathcal{F}(X, Y)$, a qual é a denominada *topologia compacto-aberto* e será apresentada a seguir.

Sejam $(X, \mathcal{T}^X)$ e $(Y, \mathcal{T}^Y)$ espaços topológicos. Dados $K \subset X$ e $U \subset Y$, considere (K, U) o subconjunto de $\mathcal{F}(X, Y)$ definido por

$$(K, U) = \{f \in \mathcal{F}(X, Y) : f(K) \subset U\}. \quad (1.26)$$

Considere a família de subconjuntos de X

$$\mathcal{K} = \{K \in \mathcal{P}(X): K \text{ compacto com respeito a topologia } \mathcal{T}^X\}. \quad (1.27)$$

E também a família de subconjuntos de $\mathcal{F}(X, Y)$ dada por

$$\mathcal{S}_{co} = \{(K, U) \in \mathcal{P}(\mathcal{F}(X, Y)): K \in \mathcal{K} \text{ e } U \in \mathcal{T}^Y\}. \quad (1.28)$$

Proposição 1.75. *A família $\mathcal{S}_{co}$ é uma sub-base geradora para uma topologia em $\mathcal{F}(X, Y)$.*

Demonstração. Para verificar que a família $\mathcal{S}_{co}$ forma uma sub-base geradora para uma topologia em $\mathcal{F}(X, Y)$, ou seja, verificar que $\mathcal{F}(X, Y) = \bigcup_{(K, U) \in \mathcal{S}_{co}} (K, U)$, basta notar que $\mathcal{F}(X, Y) = K(\emptyset, Y)$. Claro que $K(\emptyset, Y) \subset \bigcup_{(K, U) \in \mathcal{S}_{co}} (K, U)$, pois $\emptyset$ é compacto em X e $Y \in \mathcal{T}^Y$. $\square$

Cada elemento (K, U) da família $\mathcal{S}_{co}$ é chamado de um *aberto sub-básico* em $\mathcal{F}(X, Y)$. A topologia $\langle\langle \mathcal{S}_{co} \rangle\rangle$ gerada pela sub-base geradora $\mathcal{S}_{co}$ é denominada *topologia compacto-aberta* de $\mathcal{F}(X, Y)$ e será denotada por $\mathcal{T}_{co}$.

Uma observação importante a se fazer é que de acordo com a definição de uma sub-base geradora para uma topologia, todo aberto sub-básico $(K, U) \in \mathcal{S}_{co}$ é de fato um aberto de $\mathcal{T}_{co}$ e todo aberto de $\mathcal{T}_{co}$ é uma união de uma coleção de interseções finitas de conjuntos sub-básicos.

Para os próximos capítulos, vamos considerar o subconjunto de $\mathcal{F}(X, Y)$ constituído por funções contínuas, equipado com a topologia compacto-aberto.

CAPÍTULO 2

Continuidade generalizada

Algumas propriedades de funções serão usadas neste trabalho, muitas delas envolvendo imagem direta e imagem inversa. Em determinadas proposições exigimos injetividade ou sobrejetividade devido às propriedades que serão apresentadas abaixo.

2.1 Propriedades de funções

Proposição 2.1. *Sejam X e Y conjuntos e $f: X \rightarrow Y$ uma função. As seguintes afirmações são verdadeiras:*

- (i) $f(A) = \emptyset$ se, e somente se, $A = \emptyset$.
- (ii) Se $A_1 \subset A_2 \subset X$, então $f(A_1) \subset f(A_2)$.
- (iii) Se $A_1, A_2 \subset X$, então $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.
- (iv) Se $A_1, A_2 \subset X$, então $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$.

Demonstração. (i) Se $A \neq \emptyset$, então existe $x \in A$, consequentemente $f(x) \in f(A)$ e portanto $f(A) \neq \emptyset$. Por outro lado, se $f(A) \neq \emptyset$, então existe $y \in f(A)$ e existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$, isto é, $A \neq \emptyset$.

(ii) Seja $y \in f(A_1)$. Então, existe $x \in A_1$ tal que $f(x) = y$. Como $A_1 \subset A_2$, então $x \in A_2$ e, portanto $y = f(x) \in f(A_2)$. Logo, $f(A_1) \subset f(A_2)$.

(iii) Se $y \in f(A_1 \cup A_2)$, então existe $x \in A_1 \cup A_2$ tal que $f(x) = y$. Portanto, $x \in A_1$ ou $x \in A_2$, que implica $y \in f(A_1)$ ou $y \in f(A_2)$, isto é, $y \in f(A_1) \cup f(A_2)$. Assim, $f(A_1 \cup A_2) \subset f(A_1) \cup f(A_2)$. Por outro lado, como $A_1 \subset A_1 \cup A_2$, segue do item (ii) que $f(A_1) \subset f(A_1 \cup A_2)$. De forma similar, $f(A_2) \subset f(A_1 \cup A_2)$. Assim, $f(A_1) \cup f(A_2) \subset f(A_1 \cup A_2)$. Portanto, $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.

(iv) Como $A_1 \cap A_2 \subset A_1$, decorre do item (ii) que $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1)$. De forma similar, $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_2)$. Portanto, $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$. $\square$

Proposição 2.2. *Sejam X e Y conjuntos e seja $f: X \rightarrow Y$ uma função. As seguintes afirmações são verdadeiras:*

- (i) *Se $B_1 \subset B_2 \subset Y$, então $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$.*
- (ii) *Se $B_1, B_2 \subset Y$, então $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.*
- (iii) *Se $B_1, B_2 \subset Y$, então $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.*

Demonstração. (i) Seja $x \in f^{-1}(B_1)$. Então $f(x) \in B_1$ e como $B_1 \subset B_2$, segue que $f(x) \in B_2$ e consequentemente $x \in f^{-1}(B_2)$. Portanto, $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$.

(ii) Se $x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2)$, então $f(x) \in B_1 \cup B_2$. Portanto, $f(x) \in B_1$ ou $f(x) \in B_2$, que implica $x \in f^{-1}(B_1)$ ou $x \in f^{-1}(B_2)$, isto é, $x \in f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$. Portanto, $f^{-1}(B_1 \cup B_2) \subset f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$. Por outro lado, como $B_1 \subset B_1 \cup B_2$, segue do item (i) que $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_1 \cup B_2)$. De forma similar, $f^{-1}(B_2) \subset f^{-1}(B_1 \cup B_2)$. Assim, $f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2) \subset f^{-1}(B_1 \cup B_2)$. Portanto, $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.

(iii) Como $B_1 \cap B_2 \subset B_1$, segue do item (i) que $f^{-1}(B_1 \cap B_2) \subset f^{-1}(B_1)$. De forma similar, $f^{-1}(B_1 \cap B_2) \subset f^{-1}(B_2)$. Assim, $f^{-1}(B_1 \cap B_2) \subset f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$. Por outro lado, se $x \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$, então $x \in f^{-1}(B_1)$ e $x \in f^{-1}(B_2)$. Portanto, $f(x) \in B_1$ e $f(x) \in B_2$, que implica $f(x) \in B_1 \cap B_2$ e consequentemente $x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2)$. Assim, $f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) \subset f^{-1}(B_1 \cap B_2)$. Portanto, $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$. $\square$

Também é importante destacar os resultados que mesclam a imagem e a imagem de uma função.

Proposição 2.3. *Sejam X e Y conjuntos e seja $f: X \rightarrow Y$ uma função. As seguintes afirmações são verdadeiras:*

- (i) *Se $A \subset X$, então $A \subset f^{-1}(f(A))$.*

(ii) Se $A \subset X$ e f é injetora, então $A = f^{-1}(f(A))$.

(iii) $f^{-1}(f(X)) = X$.

(iv) Se $B \subset Y$, então $f(f^{-1}(B)) \subset B$.

(v) Se $B \subset Y$ e f é sobrejetora, então $f(f^{-1}(B)) = B$.

Demonstração. (i) Seja $x \in A$. Tome $y = f(x) \in f(A)$ e note que $x \in X$ é tal que $f(x) = y$, isto é, $x \in f^{-1}(f(A))$. Portanto, $A \subset f^{-1}(f(A))$.

(ii) Do item (i) tem-se que $A \subset f^{-1}(f(A))$. Seja $x \in f^{-1}(f(A))$. Então, $f(x) \in f(A)$ e existe $a \in A$ tal que $f(a) = f(x)$. Como f é injetora, então $a = x$ logo, $x = a \in A$. Assim, $f^{-1}(f(A)) \subset A$. Portanto, $A = f^{-1}(f(A))$.

(iii) Do item (i) tem-se que $X \subset f^{-1}(f(X))$. Note que $f^{-1}(f(X)) \subset X$. Portanto, $f^{-1}(f(X)) = X$.

(iv) Seja $y \in f(f^{-1}(B))$. Então existe $x \in f^{-1}(B)$ tal que $f(x) = y$. Se $x \in f^{-1}(B)$, então $f(x) \in B$ e conseqüentemente $y = f(x) \in B$. Portanto, $f(f^{-1}(B)) \subset B$.

(v) Do item (iv) tem-se que $f(f^{-1}(B)) \subset B$. Seja $y \in B$. Como f é sobrejetiva, então existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$, isso é, $x \in f^{-1}(B)$. Se $x \in f^{-1}(B)$, então $y = f(x) \in f(f^{-1}(B))$. Assim, $B \subset f(f^{-1}(B))$. Portanto, $f(f^{-1}(B)) = B$. $\square$

O fato da tese da Proposição 2.3 item (ii) não ser garantida para quaisquer funções, é o fator sensível que leva posteriormente a se ter duas formas, nem sempre coincidentes, de se formular noções de continuidade generalizada.

Proposição 2.4. *Sejam X e Y conjuntos e seja $f: X \rightarrow Y$ uma função. As seguintes afirmações são verdadeiras:*

(i) Se $A \subset X$ e $B \subset Y$, então $B \cap f(A) = f(f^{-1}(B) \cap A)$.

(ii) Se $B \subset f(A)$, então existe $C \subset A$ tal que $f(C) = B$.

(iii) $f(A) \subset B$ se, e somente se, $A \subset f^{-1}(B)$.

Demonstração. (i) Seja $y \in B \cap f(A)$. Então, $y \in B$ e $y \in f(A)$, o que implica que existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$ e $x \in f^{-1}(B)$. Daí, $x \in f^{-1}(B) \cap A$ e $y = f(x) \in f(f^{-1}(B) \cap A)$. Assim, $B \cap f(A) \subset f(f^{-1}(B) \cap A)$. Por outro lado, usando o item (iv) da Proposição 2.1 e

o item (iv) da Proposição 2.3, tem-se que $f(f^{-1}(B) \cap A) \subset f(f^{-1}(B)) \cap f(A) \subset B \cap f(A)$. Portanto, $B \cap f(A) = f(f^{-1}(B) \cap A)$.

(ii) Tome $C = f^{-1}(B) \cap A$. Claramente, $C \subset A$ e como $B \subset f(A)$, segue do item (i) que $f(C) = f(f^{-1}(B) \cap A) = B \cap f(A) = B$. Portanto, existe $C \subset A$ tal que $f(C) = B$.

(iii) Seja $x \in A$. Então $f(x) \in f(A)$ e como $f(A) \subset B$, segue que $f(x) \in B$ e consequentemente $x \in f^{-1}(B)$. Portanto, $A \subset f^{-1}(B)$. Por outro lado, usando o item (ii) da Proposição 2.1 e o item (iv) da Proposição 2.3 com a hipótese $A \subset f^{-1}(B)$, tem-se que $f(A) \subset f(f^{-1}(B)) \subset B$. Portanto, $f(A) \subset B$. $\square$

2.2 Funções com continuidade usual

Nesta seção apresentaremos o conceito de continuidade usual a nível topológico e algumas propriedades das funções contínuas.

Definição 2.5. *Sejam $(X, \mathcal{T}^X)$ e $(Y, \mathcal{T}^Y)$ espaços topológicos. Uma função $f: (X, \mathcal{T}^X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}^Y)$ é contínua no ponto $a \in X$ se, e somente se, para todo $V \in \mathcal{T}_{f(a)}^Y$, existe $U \in \mathcal{T}_a^X$ tal que $f(U) \subset V$.*

Definição 2.6. *Sejam $(X, \mathcal{T}^X)$ e $(Y, \mathcal{T}^Y)$ espaços topológicos. Uma função $f: (X, \mathcal{T}^X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}^Y)$ é contínua se, e somente se, $f: (X, \mathcal{T}^X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}^Y)$ é contínua em todo ponto $a \in X$.*

A próxima proposição é uma caracterização de continuidade via vizinhanças e bases de vizinhanças, lembrando que se um espaço topológico Z munido com uma topologia $\mathcal{T}^Z$ o sistema de vizinhanças de um ponto a , que é denotado por $\mathcal{V}_a^{\mathcal{T}^Z}$, será denotado de forma simplificada por $\mathcal{V}_a^Z$ e as bases de vizinhanças do ponto a que são denotadas por $\mathcal{B}_a^{\mathcal{T}^Z}$, serão denotadas de forma simplificada $\mathcal{B}_a^Z$.

Proposição 2.7. *Sejam $(X, \mathcal{T}^X)$ e $(Y, \mathcal{T}^Y)$ espaços topológicos, $a \in X$ e $f: (X, \mathcal{T}^X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}^Y)$ uma função. As seguintes condições são equivalentes:*

- (i) f é contínua no ponto $a \in X$.
- (ii) para todo $V \in \mathcal{V}_{f(a)}^Y$, existe $U \in \mathcal{V}_a^X$ tal que $f(U) \subset V$.
- (iii) para todo $V \in \mathcal{B}_{f(a)}^Y$, existe $U \in \mathcal{B}_a^X$ tal que $f(U) \subset V$.

Demonstração. (i) $\Rightarrow$ (ii) Seja $V \in \mathcal{V}_{f(a)}^Y$. Temos que $f(a) \in V^\circ$ e $V^\circ \in \mathcal{T}^Y$. Sendo f contínua, por hipótese, então existe $U \in \mathcal{T}_a^X$ tal que $f(U) \subset V^\circ$. Tem-se que $U \in \mathcal{V}_a^X$, pois $a \in U = U^\circ$, uma vez que $U \in \mathcal{T}^X$. Além disso, $f(U) \subset V^\circ \subset V$. Portanto, dado $V \in \mathcal{V}_{f(a)}^Y$, existe $U \in \mathcal{V}_a^X$ tal que $f(U) \subset V$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Seja $V \in \mathcal{B}_{f(a)}^Y$. Logo $V \in \mathcal{V}_{f(a)}^Y$, pois $\mathcal{B}_{f(a)}^Y \subset \mathcal{V}_{f(a)}^Y$. Daí, usando a hipótese dada pela condição (ii), existe $W \in \mathcal{V}_a^X$ tal que $f(W) \subset V$. Como $\mathcal{B}_a^X$ é uma base de vizinhanças de a , segue da definição de base de vizinhanças que existe $U \in \mathcal{B}_a^X$ tal que $U \subset W$. Temos que $f(U) \subset f(W) \subset V$. Portanto, dado $\mathcal{B}_{f(a)}^Y$, existe $U \in \mathcal{B}_a^X$ tal que $f(U) \subset V$.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Seja $V \in \mathcal{T}_{f(a)}^Y$. Como $V \in \mathcal{T}^Y$, então $V = V^\circ$ e, consequentemente, $f(a) \in V^\circ$. Logo, $V \in \mathcal{V}_{f(a)}^Y$. Como $\mathcal{B}_{f(a)}^Y$ é uma base de vizinhanças de $f(a)$, segue da definição de base de vizinhanças que existe $Z \in \mathcal{B}_{f(a)}^Y$ tal que $Z \subset V$. Daí, usando a hipótese dada pela condição (iii), existe $W \in \mathcal{B}_a^X$ tal que $f(W) \subset Z$. Mas $W \in \mathcal{B}_a^X \subset \mathcal{V}_a^X$, logo $a \in W^\circ$. Tomando $U = W^\circ$, segue que $U \in \mathcal{T}_a^X$, e $f(U) \subset f(W) \subset Z \subset V$. Portanto, dado $V \in \mathcal{T}_{f(a)}^Y$, existe $U \in \mathcal{T}_a^X$ tal que $f(U) \subset V$, ou seja, f é contínua em $a \in X$. $\square$

Proposição 2.8. *Sejam $(X, \mathcal{T}^X)$ e $(Y, \mathcal{T}^Y)$ espaços topológicos. Uma função $f: (X, \mathcal{T}^X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}^Y)$ é contínua se, e somente se, $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}^X$, para todo $V \in \mathcal{T}^Y$.*

Demonstração. Seja $U \in \mathcal{T}^Y$. Mostraremos que $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}^X$. Seja $x \in f^{-1}(U)$. Então $f(x) \in U$, e como $U \in \mathcal{T}^Y$ e f é contínua por hipótese, existe $V \in \mathcal{T}_x^X$ tal que $f(V) \subset U$. E observe que

$$V \subset f^{-1}(f(V)) \subset f^{-1}(U),$$

ou seja, x é ponto interior de $f^{-1}(U)$. Como x foi escolhido de forma arbitrária, segue que todos os pontos de $f^{-1}(U)$ são interiores, ou seja, $\text{int}(f^{-1}(U)) = f^{-1}(U)$, e portanto $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}^X$. Reciprocamente, seja $U \in \mathcal{T}_{f(a)}^Y$. Por hipótese $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}^X$ e como $f(a) \in U$ então $a \in f^{-1}(U)$. Como $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}^X$, então a é ponto interior de $f^{-1}(U)$, isto é, existe $V \in \mathcal{T}_a^X$ tal que $V \subset f^{-1}(U)$ e observe que

$$f(V) \subset f(f^{-1}(U)) \subset U.$$

Como a foi escolhido de forma arbitrária segue que f é contínua. $\square$

Proposição 2.9. *Sejam $(X, \mathcal{T}^X)$ e $(Y, \mathcal{T}^Y)$ espaços topológicos e $\mathcal{S}$ uma sub-base de $\mathcal{T}^Y$. Então uma função $f: (X, \mathcal{T}^X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}^Y)$ é contínua se, e somente se, $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}^X$, para todo $U \in \mathcal{S}$.*

Demonstração. Se $U \in S$, então $U \in \mathcal{T}^Y$. Como f é contínua por hipótese, segue da Proposição 2.8 que $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}^X$.

Reciprocamente, seja $U \in \mathcal{T}^Y$. Como S é uma sub-base de $\mathcal{T}^Y$, segue que $U = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \left(\bigcap_{i=1}^{m_\lambda} S_{\lambda i} \right)$, onde $S_{\lambda i} \in S$ e $m_\lambda \in \mathbb{N}$, para cada $\lambda \in \Lambda$. Observe que

$$f^{-1}(U) = f^{-1} \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \left(\bigcap_{i=1}^{m_\lambda} S_{\lambda i} \right) \right) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f^{-1} \left(\bigcap_{i=1}^{m_\lambda} S_{\lambda i} \right) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \left(\bigcap_{i=1}^{m_\lambda} f^{-1}(S_{\lambda i}) \right).$$

E por hipótese, cada $f^{-1}(S_{\lambda i}) \in \mathcal{T}^X$ e pela definição de topologia, segue que $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \left(\bigcap_{i=1}^{m_\lambda} f^{-1}(S_{\lambda i}) \right) \in \mathcal{T}^X$. $\square$

Definição 2.10. Sejam $(X, \mathcal{T}^X)$ e $(Y, \mathcal{T}^Y)$ espaços topológicos não vazios. As funções $\pi_1: (X \times Y, \mathcal{T}^X \otimes \mathcal{T}^Y) \rightarrow (X, \mathcal{T}^X)$ e $\pi_2: (X \times Y, \mathcal{T}^X \otimes \mathcal{T}^Y) \rightarrow (Y, \mathcal{T}^Y)$ dadas por

$$\pi_1(x, y) = x \text{ e } \pi_2(x, y) = y$$

são chamadas de projeções na primeira e segunda coordenada, respectivamente.

Proposição 2.11. Sejam $(X, \mathcal{T}^X)$ e $(Y, \mathcal{T}^Y)$ espaços topológicos não vazios. As projeções π_1 e π_2 são contínuas.

Demonstração. Se $U \in \mathcal{T}^X$, então $\pi_1^{-1}(U) \in (\mathcal{T}^X \otimes \mathcal{T}^Y)$, pois $\pi_1^{-1}(U) = U \times Y$ com $U \in \mathcal{T}^X$ e $Y \in \mathcal{T}^Y$, o que prova que π_1 é contínua. Agora seja $V \in \mathcal{T}^Y$. Então $\pi_2^{-1}(V) \in (\mathcal{T}^X \otimes \mathcal{T}^Y)$, pois $\pi_2^{-1}(V) = X \times V$ com $X \in \mathcal{T}^X$ e $V \in \mathcal{T}^Y$, o que prova que π_2 é contínua. $\square$

Proposição 2.12. Sejam $(X, \mathcal{T}^X)$, $(Y, \mathcal{T}^Y)$ e $(Z, \mathcal{T}^Z)$ espaços topológicos, $f: (X, \mathcal{T}^X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}^Y)$ e $g: (Y, \mathcal{T}^Y) \rightarrow (Z, \mathcal{T}^Z)$ funções. Se f é contínua num ponto $a \in X$ e g é contínua no ponto $f(a) \in Y$ então $g \circ f$ é contínua em $a \in X$.

Demonstração. Seja $W \in \mathcal{V}_{(g \circ f)(a)}^{\mathcal{T}^Z}$. Usando a hipótese que g é contínua em $f(a)$ e a Proposição 2.7, segue que existe $V \in \mathcal{V}_{f(a)}^{\mathcal{T}^Y}$ tal que $g(V) \subset W$. Usando a hipótese de que f é contínua em a e a Proposição 2.7, segue que existe $U \in \mathcal{V}_a^{\mathcal{T}^X}$ tal que $f(U) \subset V$. Assim, dado $W \in \mathcal{V}_{(g \circ f)(a)}^{\mathcal{T}^Z}$, existe $U \in \mathcal{V}_a^{\mathcal{T}^X}$ tal que $(g \circ f)(U) = g(f(U)) \subset g(V) \subset W$ e usando novamente a Proposição 2.7, isto implica que $g \circ f$ é contínua em a . $\square$

Corolário 2.13. Sejam $(X, \mathcal{T}^X)$, $(Y, \mathcal{T}^Y)$ e $(Z, \mathcal{T}^Z)$ espaços topológicos, $f: (X, \mathcal{T}^X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}^Y)$ e $g: (Y, \mathcal{T}^Y) \rightarrow (Z, \mathcal{T}^Z)$ funções. Se f é contínua e g é contínua então $g \circ f$ é contínua.

Demonstração. Segue imediatamente da Proposição anterior. $\square$

Sejam $(X, \mathcal{T}^X)$ um espaço topológico e A um subconjunto de X . O subespaço topológico $(A, \mathcal{T}^{X|A})$ onde o conjunto A está equipado com topologia $\mathcal{T}^{X|A}$ induzida de X , essa topologia será simplificada para $\mathcal{T}^A$, ou seja, o subespaço topológico $(A, \mathcal{T}^{X|A})$ será simplificado para $(A, \mathcal{T}^A)$.

Proposição 2.14. *Sejam $(X, \mathcal{T}^X)$ e $(Y, \mathcal{T}^Y)$ espaços topológicos e A um subconjunto de X . Se $f: (X, \mathcal{T}^X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}^Y)$ é contínua, então a restrição $f|_A: (A, \mathcal{T}^A) \rightarrow (Y, \mathcal{T}^Y)$ é contínua.*

Demonstração. Seja $V \in \mathcal{T}^Y$. Como f é contínua, pela Proposição 2.8, segue que $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}^X$. Contudo, $(f|_A)^{-1}(V) = A \cap f^{-1}(V)$ e como $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}^X$, isto implica que $(f|_A)^{-1}(V) \in \mathcal{T}^A$, isto é, $(f|_A)^{-1}(V)$ é aberto em A . Portanto, decorre da Proposição 2.8 que $f|_A: (A, \mathcal{T}^A) \rightarrow (Y, \mathcal{T}^Y)$ é contínua. $\square$

Proposição 2.15. *Sejam $(X, \mathcal{T}^X)$ e $(Y, \mathcal{T}^Y)$ espaços topológicos. Se $X = S_1 \cup S_2$, com $S_1, S_2 \in \mathcal{T}^X$ (ou $S_1, S_2 \in \mathcal{F}_\mathcal{T}$), e as restrições $f|_{S_1}: (S_1, \mathcal{T}^{S_1}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}^Y)$ e $f|_{S_2}: (S_2, \mathcal{T}^{S_2}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}^Y)$ são contínuas, então a função $f: (X, \mathcal{T}^X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}^Y)$ é contínua.*

Demonstração. Suponhamos que $S_1, S_2 \in \mathcal{T}^X$. Seja $V \in \mathcal{T}^Y$. Como $f|_{S_1}$ é contínua, pela Proposição 2.8, segue que $S_1 \cap f^{-1}(V) = (f|_{S_1})^{-1}(V) \in \mathcal{T}^{S_1}$, ou seja, $S_1 \cap f^{-1}(V)$ é um aberto em S_1 . Da mesma forma, $S_2 \cap f^{-1}(V)$ é um aberto em S_2 . Por definição de abertos em subespaços topológicos, para $i = 1$ e $i = 2$, tem-se que $S_i \cap f^{-1}(V) = S_i \cap U_i$, com $U_i \in \mathcal{T}$. Como $X = S_1 \cup S_2$, segue que

$$f^{-1}(V) = (S_1 \cap f^{-1}(V)) \cup (S_2 \cap f^{-1}(V)) = (S_1 \cap U_1) \cup (S_2 \cap U_2) \in \mathcal{T}^X.$$

Portando, dado $V \in \mathcal{T}^Y$, tem-se que $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}^X$, isto é, f é contínua. $\square$

Definição 2.16. *Sejam $(X, \mathcal{T}^X)$ e $(Y, \mathcal{T}^Y)$ espaços topológicos. Uma função $f: (X, \mathcal{T}^X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}^Y)$ é um homeomorfismo entre X e Y (com respeito a $\mathcal{T}^X$ e $\mathcal{T}^Y$) se, e somente se, f é contínua (com respeito a $\mathcal{T}^X$ e $\mathcal{T}^Y$), bijetora e sua inversa f^{-1} é contínua (com respeito a $\mathcal{T}^X$ e $\mathcal{T}^Y$).*

Definição 2.17. *Sejam $(X, \mathcal{T}^X)$ e $(Y, \mathcal{T}^Y)$ espaços topológicos. Uma função $f: (X, \mathcal{T}^X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}^Y)$ é denominada aberta se, e somente se, $f(U) \in \mathcal{T}^Y$, para todo $U \in \mathcal{T}^X$.*

2.3 Funções com continuidade generalizada

Nesta seção, num primeiro momento apresentaremos o conceito de continuidade generalizada a nível métrico e posteriormente a nível topológico.

Definição 2.18. *Sejam X um conjunto não vazio, (Y, d_Y) e (Z, d_Z) espaços métricos, $f: X \rightarrow (Y, d_Y)$ e $n: X \rightarrow (Z, d_Z)$ funções e $a \in X$. A função f é denominada contínua em relação a n ou n -contínua em a se, e somente se, para cada $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que*

$$x \in X \text{ e } d_Z(n(x), n(a)) < \delta \text{ implica } d_Y(f(x), f(a)) < \epsilon. \quad (2.1)$$

Nesta monografia um subconjunto aberto de um espaço métrico será mencionado por meio da expressão "aberto métrico".

Teorema 2.19. *Sejam X um conjunto não vazio, (Y, d_Y) e (Z, d_Z) espaços métricos, $f: X \rightarrow (Y, d_Y)$ e $n: X \rightarrow (Z, d_Z)$ funções e $a \in X$. A função f é n -contínua em a se, e somente se, para cada aberto métrico U em Y contendo $f(a)$, existe um aberto métrico V em Z contendo $n(a)$ tal que*

$$f(n^{-1}(V)) \subset U. \quad (2.2)$$

Demonstração. ver [4], pág. 84. □

Teorema 2.20. *Sejam X um conjunto não vazio, (Y, d_Y) e (Z, d_Z) espaços métricos, $f: X \rightarrow (Y, d_Y)$ e $n: X \rightarrow (Z, d_Z)$ funções e $a \in X$. As seguintes afirmações são verdadeiras:*

- (i) *Se f é n -contínua em a , então para cada aberto métrico U em Y contendo $f(a)$, existe um aberto métrico V em Z contendo $n(a)$ de modo que*

$$V \cap n(X) \subset n(f^{-1}(U)).$$

- (ii) *Se n é injetora e para cada aberto métrico U em Y contendo $f(a)$, existe um aberto métrico V em Z contendo $n(a)$ tal que*

$$V \cap n(X) \subset n(f^{-1}(U)),$$

então f é n -continua em a .

Demonstração. ver [4], pág. 86. □

A partir dos teoremas [2.19] e [2.20] surge a motivação para definir continuidade generalizada a nível topológico, que será tratada a seguir.

Definição 2.21. *Sejam X um conjunto não vazio, $(Y, \mathcal{T}^Y)$ e $(Z, \mathcal{T}^Z)$ espaços topológicos, $f: X \rightarrow (Y, \mathcal{T}^Y)$ e $n: X \rightarrow (Z, \mathcal{T}^Z)$ funções e $a \in X$. A função f é denominada contínua em a com respeito a função n ou n -contínua em a se, e somente se, para todo $U \in \mathcal{T}_{f(a)}^Y$, existir um $V \in \mathcal{T}_{n(a)}^Z$ tal que*

$$f(n^{-1}(V)) \subset U. \quad (2.3)$$

Neste texto $F(A, B, \mathcal{T})$ denota o conjunto de todas as funções com domínio sendo um conjunto A e contradomínio sendo um espaço topológico $(B, \mathcal{T})$. Fixada uma função $n: X \rightarrow (Z, \mathcal{T}^Z)$, que a partir de agora será apenas denominada por *continuador*, e fixado um espaço topológico $(Y, \mathcal{T}^Y)$, então o conjunto de todas as funções de X a $(Y, \mathcal{T}^Y)$ que são n -contínuas em $a \in X$ será denotado por $C_n(a, X, Y)$, isto é,

$$C_n(a, X, Y) = \{f \in F(X, Y, \mathcal{T}^Y) : f \text{ é } n\text{-contínua em } a\}. \quad (2.4)$$

Por outro lado, fixada uma função $f: X \rightarrow (Y, \mathcal{T}^Y)$, que a partir de agora será denominada apenas por *continuante*, e fixado um espaço topológico $(Z, \mathcal{T}^Z)$, pode-se considerar também o conjunto das funções de X em $(Z, \mathcal{T}^Z)$ que tornam f contínua em sentido generalizado no ponto a , ou o conjunto dos continuadores de f em a , o qual é definido da seguinte forma:

$$C^f(a, X, Z) = \{n \in F(X, Z, \mathcal{T}^Z) : f \in C_n(a, X, Y)\}. \quad (2.5)$$

Em outras palavras, [2.4] indica o conjunto dos continuantes de um continuador n fixado e [2.5] indica o conjunto dos continuadores de um continuante f fixado. Deve-se notar que em ([2.4]) e ([2.5]) as topologias nos contradomínios das funções são omitidas nas notações usadas para se referir aos conjuntos de continuantes e de continuadores supracitados, uma vez que esta informação fica subentendida no contexto.

Exemplo 2.22. *Sejam X um conjunto não vazio, $(Y, \mathcal{T}^Y)$ um espaço topológico e $a \in X$. Toda função $f: X \rightarrow (Y, \mathcal{T}^Y)$ é f -contínua em a . De fato, dado $U \in \mathcal{T}_{f(a)}^Y$, então tome $V = U$ e segue da Proposição [2.3] (iv) que*

$$f(f^{-1}(V)) = f(f^{-1}(U)) \subset U.$$

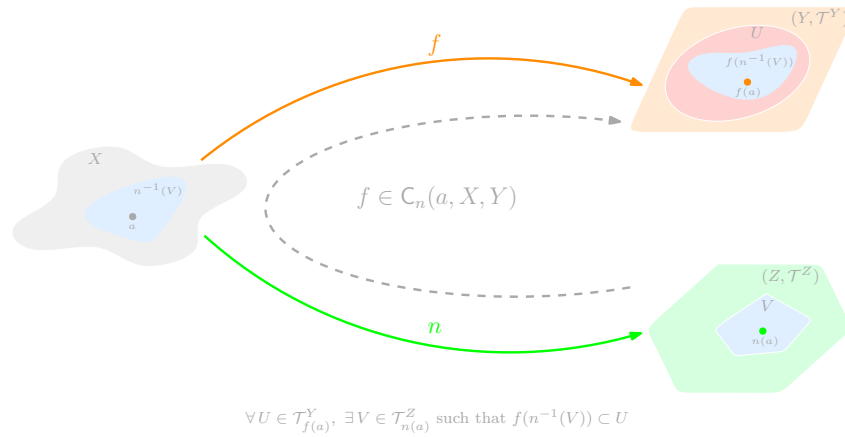


Figura 2.1: Continuidade generalizada 2.21

Fonte: VIEIRA, 2020, p. 87

Portanto, f é f -contínua em a , ou seja, $f \in C_f(a, X, Y)$ e $f \in C^f(a, X, Y)$.

Exemplo 2.23. Sejam $(X, \mathcal{T}^X)$ e $(Y, \mathcal{T}^Y)$ espaços topológicos, $f: (X, \mathcal{T}^X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}^Y)$ uma função, $id: (X, \mathcal{T}^X) \rightarrow (X, \mathcal{T}^X)$ a função identidade e $a \in X$. Tem-se que f é contínua em a se, e somente se, f é id -contínua em a . De fato, tomando $V \in \mathcal{T}_a^X$, note que $f(id^{-1}(V)) = f(V)$. Logo a condição exigida na definição (2.5) e a condição (2.3) são equivalentes.

Exemplo 2.24. Sejam $\mathbb{R}$ equipado com a topologia usual, $a > 0$ um número real, $id: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função de identidade e $m: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função dada por $m(x) = |x|$. Para cada subconjunto aberto V de $\mathbb{R}$ contendo $m(a) = a$, considere $V^+ = V \cap [0, \infty)$ e $V^- = \{x \in \mathbb{R} : -x \in V^+\}$. Observe que $m^{-1}(V) = V^+ \cup V^-$. Assim, dado o subconjunto aberto $U = (0, \infty)$ de $\mathbb{R}$ contendo $id(a) = a$, resulta que para cada subconjunto aberto V de $\mathbb{R}$ contendo $m(a) = a$ é válido que

$$id(m^{-1}(V)) = id(V^+ \cup V^-) = V^+ \cup V^- \not\subset (0, \infty) = U.$$

Portanto, id não é m -contínua em a , ou seja, $id \notin C_m(a, \mathbb{R}, \mathbb{R})$ e $m \notin C^{id}(a, \mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Proposição 2.25. Sejam X um conjunto não vazio, $(Y, \mathcal{T}^Y)$ e $(Z, \mathcal{T}^Z)$ espaços topológicos, $f: X \rightarrow (Y, \mathcal{T}^Y)$, $n: X \rightarrow (Z, \mathcal{T}^Z)$ funções e $a \in X$. As seguintes afirmações são verdadeiras:

- (i) Se f é uma função constante, então $f \in C_n(a, X, Y)$.

- (ii) Se n é uma função constante e $f \in C_n(a, X, Y)$, então $f(X) \subset U$, para todo $U \in \mathcal{T}_{f(a)}^Y$.

Demonstração. Ver [4], pág. 88. □

Definição 2.26. Sejam X um conjunto não vazio, $(Y, \mathcal{T}^Y)$ e $(Z, \mathcal{T}^Z)$ espaços topológicos, $f: X \rightarrow (Y, \mathcal{T}^Y)$, $n: X \rightarrow (Z, \mathcal{T}^Z)$ funções e $a \in X$. A função f é denominada amplamente n -contínua em a se, e somente se, para cada $U \in \mathcal{T}_{f(a)}^Y$, existe um $V \in \mathcal{T}_{n(a)}^Z$ tal que

$$V \cap n(X) \subset n(f^{-1}(U)). \quad (2.6)$$

O conjunto de todas as funções de X em $(Y, \mathcal{T}^Y)$ que são amplamente n -contínuas em a é denotado por $W_n(a, X, Y)$, ou seja,

$$W_n(a, X, Y) = \{f \in F(X, Y, \mathcal{T}^Y) : f \text{ é amplamente } n\text{-contínua em } a\}.$$

Fixado o continuante $f: X \rightarrow (Y, \mathcal{T}^Y)$ e fixado um espaço topológico $(Z, \mathcal{T}^Z)$, pode-se considerar o conjunto das funções de X em $(Z, \mathcal{T}^Z)$ que tornam f amplamente contínua em sentido generalizado no ponto a , ou o conjunto amplo dos continuadores de f em a , o qual é definido da seguinte forma:

$$W^f(a, X, Z) = \{n \in F(X, Z, \mathcal{T}^Z) : f \in W_n(a, X, Y)\}.$$

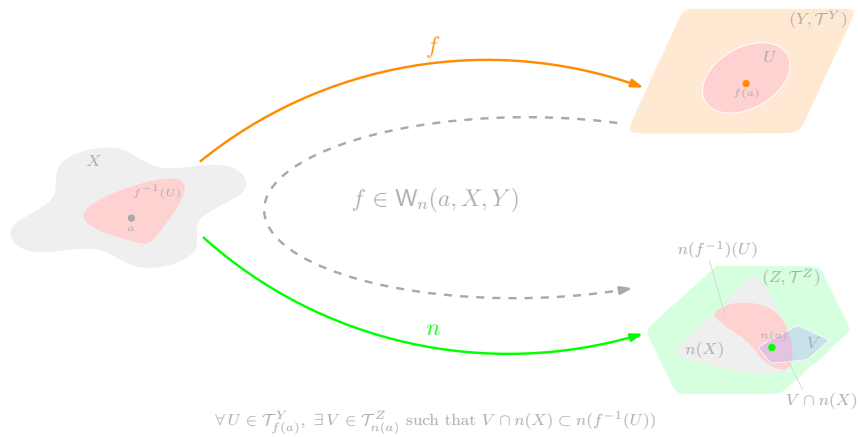


Figura 2.2: f ser amplamente n -contínua em a

Fonte: VIEIRA, 2020, p. 89

Exemplo 2.27. Sejam X um conjunto não vazio, $(Y, \mathcal{T}^Y)$ um espaço topológico e $a \in X$. Qualquer $f: X \rightarrow (Y, \mathcal{T}^Y)$ é amplamente f -contínua em a . De fato, dado $U \in \mathcal{T}_{f(a)}^Y$, então tome $V = U$ e segue da proposição 2.4(i) que

$$V \cap f(X) = U \cap f(X) = f(f^{-1}(U) \cap X) = f(f^{-1}(U)).$$

Portanto, f é amplamente f -contínua em a , ou seja, $f \in \mathbf{W}_f(a, X, Y)$ e $f \in \mathbf{W}^f(a, X, Y)$.

Exemplo 2.28. Sejam $\mathbb{R}$ equipado com a topologia usual, $a > 0$ um número real, $id: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função identidade e $m: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função dada por $m(x) = |x|$. Dado U um subconjunto aberto de $\mathbb{R}$ contendo $id(a) = a$, então $V = U \cap (0, \infty)$ é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}$ contendo $m(a) = a$ e $V \subset m(U)$. Assim, é válido que

$$V \cap m(\mathbb{R}) = V \cap [0, \infty) = V \subset m(U) = m(id^{-1}(U)).$$

Portanto, id é amplamente m -contínua em a , ou seja, $id \in \mathbf{W}_m(a, \mathbb{R}, \mathbb{R})$ e $m \in \mathbf{W}^{id}(a, \mathbb{R}, \mathbb{R})$.

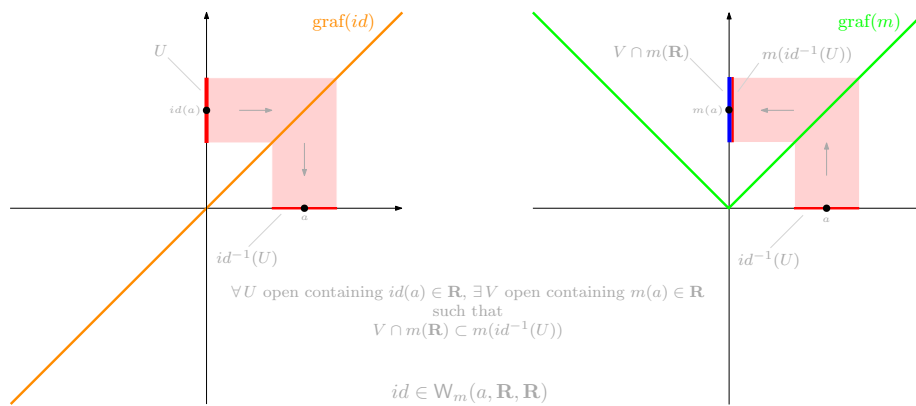


Figura 2.3: Figura do exemplo 2.28

Fonte: VIEIRA, 2020, p. 88

Proposição 2.29. Sejam X um conjunto não vazio, $(Y, \mathcal{T}^Y)$ e $(Z, \mathcal{T}^Z)$ espaços topológicos, $f: X \rightarrow (Y, \mathcal{T}^Y)$, $n: X \rightarrow (Z, \mathcal{T}^Z)$ funções e $a \in X$. Se n é uma função constante, então $f \in \mathbf{W}_n(a, X, Y)$.

Demonstração. Ver [4], pág. 90. □

Definição 2.30. *Sejam X um conjunto não vazio, $(Y, \mathcal{T}^Y)$ e $(Z, \mathcal{T}^Z)$ espaços topológicos, $f: X \rightarrow (Y, \mathcal{T}^Y)$ e $n: X \rightarrow (Z, \mathcal{T}^Z)$ funções e $a \in X$. A função f é denominada estritamente n -contínua em a se n for injetora e para cada $U \in \mathcal{T}_{f(a)}^Y$, existe $V \in \mathcal{T}_{n(a)}^Z$ de tal modo que*

$$V \cap n(X) \subset n(f^{-1}(U)). \quad (2.7)$$

O conjunto de todas as funções de X em $(Y, \mathcal{T}^Y)$ que são estritamente n -contínuas em a , se n for injetora, é denotado por $S_n(a, X, Y)$, ou seja,

$$S_n(a, X, Y) = \{f \in F(X, Y, \mathcal{T}^Y) : f \text{ é estritamente } n\text{-contínua em } a\}.$$

Fixado um continuante $f: X \rightarrow (Y, \mathcal{T}^Y)$ e fixado um espaço topológico $(Z, \mathcal{T}^Z)$, pode-se considerar também o conjunto das funções de X em $(Z, \mathcal{T}^Z)$ que tornam f estritamente contínua no sentido generalizado no ponto a , ou o conjunto estrito dos continuadores de f em a , o qual é definido da seguinte forma:

$$S^f(a, X, Z) = \{n \in F(X, Z, \mathcal{T}^Z) : n \text{ é injetora e } f \in W_n(a, X, Y)\}.$$

Teorema 2.31. *Sejam X um conjunto não vazio, $(Y, \mathcal{T}^Y)$ e $(Z, \mathcal{T}^Z)$ espaços topológicos, $f: X \rightarrow (Y, \mathcal{T}^Y)$, $n: X \rightarrow (Z, \mathcal{T}^Z)$ funções e $a \in X$. As seguintes afirmações são verdadeiras:*

- (i) *Se f é n -contínua em a , então f é amplamente n -contínua em a .*
- (ii) *Se f é estritamente n -contínua em a , então f é n -contínua em a .*

Demonstração. Ver [4], pág. 91. □

Corolário 2.32. *Sejam X um conjunto não vazio, $(Y, \mathcal{T}^Y)$ e $(Z, \mathcal{T}^Z)$ espaços topológicos, $f: X \rightarrow (Y, \mathcal{T}^Y)$ e $n: X \rightarrow (Z, \mathcal{T}^Z)$ funções e $a \in X$. Se f for uma função constante, então $f \in W_n(a, X, Y)$.*

Demonstração. Segue da Proposição 2.25 (i) e do Teorema 2.31 (i). □

Segue do Teorema 2.31 que $C_n(a, X, Y) \subset W_n(a, X, Y)$ e se n é injetora também temos que $S_n(a, X, Y) \subset C_n(a, X, Y)$. Por outro lado, no caso em que n é injetora, por definição tem-se que $S_n(a, X, Y) = W_n(a, X, Y)$. Em resumo, para cada continuador n tem-se que

$$C_n(a, X, Y) \subset W_n(a, X, Y) \quad (2.8)$$

e se n é um continuador injetivo, então

$$\mathbf{S}_n(a, X, Y) = \mathbf{C}_n(a, X, Y) = \mathbf{W}_n(a, X, Y).$$

Isto é, para continuadores injetivos os conceitos de continuidade generalizada e continuidade amplamente generalizada são coincidentes.

Também segue do Teorema 2.31 que para qualquer continuante f fixo tem-se que

$$\mathbf{S}^f(a, X, Z) \subset \mathbf{C}^f(a, X, Z) \subset \mathbf{W}^f(a, X, Z). \quad (2.9)$$

Exemplo 2.33. Já sabemos que qualquer função contínua em um ponto a é *id*-contínua em a e, portanto, do Teorema 2.31, também é amplamente *id*-contínua em a e, consequentemente, estritamente *id*-contínua em a , já que *id* é injetora.

Exemplo 2.34. Considere o conjunto $X = \{a, b\}$, com $a \neq b$, equipado com a topologia de Sierpinski $\mathcal{S} = \{\emptyset, \{a\}, X\}$. Considere também a função identidade $id: X \rightarrow (X, \mathcal{S})$ dada por $id(a) = a$ e $id(b) = b$ e considere a função permutação $p: X \rightarrow (X, \mathcal{S})$ dada por $p(a) = b$ e $p(b) = a$. Observe que $\mathcal{S}_{p(b)} = \mathcal{S}_{id(a)} = \mathcal{S}_a = \{\{a\}, X\}$ e $\mathcal{S}_{p(a)} = \mathcal{S}_{id(b)} = \mathcal{S}_b = \{X\}$. Como $U = X$ é único em $\mathcal{S}_{id(b)}$, tome $V = \{a\} \in \mathcal{S}_{p(b)}$ e, portanto

$$id(p^{-1}(V)) = id(p^{-1}(\{a\})) = \{b\} \subset X = U.$$

Portanto, *id* é *p*-contínua em b e, consequentemente, *id* é amplamente *p*-contínua em b . Além disso, tomando $U = \{a\} \in \mathcal{S}_{id(a)}$, então existem apenas $V = X \in \mathcal{S}_{p(a)}$ e

$$V \cap p(X) = X \not\subset \{b\} = p(\{a\}) = p(id^{-1}(U)).$$

Portanto, *id* não é amplamente *p*-contínua em a e, consequentemente, *id* não é *p*-contínua em a . Observe que se $p \notin \mathbf{W}^{id}(a, X, X)$, então $p \notin \mathbf{S}^{id}(a, X, X)$, embora p seja injetora.

Agora, vamos apresentar exemplos para os quais as inclusões dadas em (2.8) e (2.9) são inclusões próprias.

Exemplo 2.35. Sejam $\mathbb{R}$ equipado com a topologia usual, $a \in \mathbb{R}_+$, $id: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função identidade e $m: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função dada por $m(x) = |x|$. Como visto nos Exemplos 2.28 e 2.24, temos que *id* é amplamente *m*-contínua em a , mas *id* não é *m*-contínua em a . Em resumo, $\mathbf{C}_m(a, \mathbb{R}, \mathbb{R}) \subsetneq \mathbf{W}_m(a, \mathbb{R}, \mathbb{R})$ e $\mathbf{C}^{id}(a, \mathbb{R}, \mathbb{R}) \subsetneq \mathbf{W}^{id}(a, \mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exemplo 2.36. Sejam $\mathbb{R}$ equipado com a topologia usual, $a \in \mathbb{R}_+$ e $m: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função dada por $m(x) = |x|$. Observe que m é amplamente m -contínua em a e m é m -contínua em a , mas m não é estritamente m -contínua em a , porque m não é injetora. Desse modo, $m \notin \mathbf{S}^m(a, \mathbb{R}, \mathbb{R})$, mas $m \in \mathbf{C}^m(a, \mathbb{R}, \mathbb{R})$. Portanto, $\mathbf{S}^m(a, \mathbb{R}, \mathbb{R}) \subsetneq \mathbf{C}^m(a, \mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Definição 2.37. Sejam X um conjunto não vazio, $(Y, \mathcal{T}^Y)$ e $(Z, \mathcal{T}^Z)$ espaços topológicos e $f: X \rightarrow (Y, \mathcal{T}^Y)$ e $n: X \rightarrow (Z, \mathcal{T}^Z)$ funções. A função f é n -contínua (amplamente n -contínua ou estritamente n -contínua) se f é n -contínua em a (amplamente n -contínua em a ou estritamente n -contínua em a , respectivamente), para todo $a \in X$.

O conjunto de todas as funções de X a $(Y, \mathcal{T}^Y)$ que são n -contínuas (amplamente n -contínuas ou estritamente n -contínuas) é denotado por $\mathbf{C}_n(X, Y)$ ($\mathbf{W}_n(X, Y)$ ou $\mathbf{S}_n(X, Y)$, respectivamente).

Fixado um continuante $f: X \rightarrow (Y, \mathcal{T}^Y)$ e fixado um espaço topológico $(Z, \mathcal{T}^Z)$, podemos considerar os seguintes conjuntos:

$$\mathbf{C}^f(X, Z) = \{n \in \mathbf{F}(X, Z, \mathcal{T}^Z) : f \in \mathbf{C}_n(X, Y)\} = \bigcap_{a \in X} \mathbf{C}^f(a, X, Z),$$

$$\mathbf{W}^f(X, Z) = \{n \in \mathbf{F}(X, Z, \mathcal{T}^Z) : f \in \mathbf{W}_n(X, Y)\} = \bigcap_{a \in X} \mathbf{W}^f(a, X, Z)$$

e

$$\mathbf{S}^f(X, Z) = \{n \in \mathbf{W}^f(X, Z) : n \text{ é injetora}\} = \bigcap_{a \in X} \mathbf{S}^f(a, X, Z).$$

Considerando X um conjunto não vazio, $(Y, \mathcal{T}^Y)$ um espaço topológico e $n: X \rightarrow (Z, \mathcal{T}^Z)$ uma função, então $\mathcal{T}^{Z|n(X)}$ é a topologia $\mathcal{T}^Z$ induzida em $n(X)$, a qual será denotada de forma simplificada por $\mathcal{T}^{n(X)}$.

Teorema 2.38. Sejam X um conjunto não vazio, $(Y, \mathcal{T}^Y)$ e $(Z, \mathcal{T}^Z)$ espaços topológicos e $f: X \rightarrow (Y, \mathcal{T}^Y)$ e $n: X \rightarrow (Z, \mathcal{T}^Z)$ funções. A função f é amplamente n -contínua se, e somente se, $n(f^{-1}(U)) \in \mathcal{T}^{n(X)}$, para todo $U \in \mathcal{T}^Y$.

Demonstração. Ver [4], pág. 94. □

Teorema 2.39. Sejam X um conjunto não vazio, $(Y, \mathcal{T}^Y)$, $(Z, \mathcal{T}^Z)$ e $(R, \mathcal{T}^R)$ espaços topológicos, $a \in X$, $f: X \rightarrow (Y, \mathcal{T}^Y)$, $m: X \rightarrow (Z, \mathcal{T}^Z)$ e $n: X \rightarrow (R, \mathcal{T}^R)$ funções. As seguintes afirmações são verdadeiras:

- (i) Se $f \in \mathbf{C}_m(a, X, Y)$ e $m \in \mathbf{C}_n(a, X, Z)$, então $f \in \mathbf{C}_n(a, X, Y)$.

(ii) Se $f \in C_m(a, X, Y)$ e $m \in S_n(a, X, Z)$, então $f \in S_n(a, X, Y)$.

(iii) Se $f \in C_m(a, X, Y)$ e $m \in W_n(a, X, Z)$, então $f \in W_n(a, X, Y)$.

Demonstração. Ver [4], pág. 96. □

Corolário 2.40. *Sejam X um conjunto não vazio, $(Y, \mathcal{T}^Y)$, $(Z, \mathcal{T}^Z)$, $(R, \mathcal{T}^R)$ espaços topológicos, $a \in X$, $f: X \rightarrow (Y, \mathcal{T}^Y)$, $m: X \rightarrow (Z, \mathcal{T}^Z)$ e $n: X \rightarrow (R, \mathcal{T}^R)$ funções. As seguintes afirmações são verdadeiras:*

(i) Se $f \in S_m(a, X, Y)$ e $m \in S_n(a, X, Z)$, então $f \in S_n(a, X, Y)$.

(ii) Se $f \in S_m(a, X, Y)$ e $m \in C_n(a, X, Z)$, então $f \in C_n(a, X, Y)$.

(iii) Se $f \in S_m(a, X, Y)$ e $m \in W_n(a, X, Z)$, então $f \in W_n(a, X, Y)$.

Demonstração. Ver [4], pág. 97. □

Exemplo 2.41. *Considere um conjunto $X = \{a, b\}$, com $a \neq b$, equipado com a topologia Sierpinski $\mathcal{S} = \{\emptyset, \{a\}, X\}$. Considere também a função identidade $id: X \rightarrow (X, \mathcal{S})$, a função permutação $p: X \rightarrow (X, \mathcal{S})$ e a função $c: X \rightarrow (X, \mathcal{S})$ dado por $c(a) = c(b) = a$. Observe que $\mathcal{S}_a = \{\{a\}, X\}$. Da Proposição 2.29, temos que $id \in W_c(a, X, X)$. Além disso, temos $\{a\} \in \mathcal{S}_a$, mas $id(X) = X \not\subset \{a\}$. Portanto, usando a contra positiva do item (ii) da Proposição 2.25, segue-se que $id \notin C_c(a, X, X)$. Além disso, usando proposição 2.25 (i), segue que $c \in C_p(a, X, X)$ e, consequentemente, $c \in S_p(a, X, X)$, visto que p é injetora. Sabemos do exemplo 2.34 que $id \notin W_p(a, X, X)$. Portanto $id \in W_c(a, X, X) \setminus C_c(a, X, X)$ e $c \in S_p(a, X, X)$, mas $id \notin W_p(a, X, X)$.*

O próximo resultado relaciona a continuidade generalizada no sentido amplo e estrito com funções abertas e continuidade usual, respectivamente. Para isso, note que, dados X um conjunto não vazio, $(W, \mathcal{T}^W)$ um espaço topológico e $h: X \rightarrow (W, \mathcal{T}^W)$ uma função, então a família de subconjuntos de X dada por

$$\mathcal{T}^h = \{h^{-1}(U) \in \mathcal{P}(X) : U \in \mathcal{T}^W\}$$

é uma topologia em X , chamada *topologia induzida pela função h* .

Teorema 2.42. *Sejam $(X, \mathcal{T}^X)$, $(Y, \mathcal{T}^Y)$ e $(Z, \mathcal{T}^Z)$ espaços topológicos, $f: (X, \mathcal{T}^X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}^Y)$ e $n: (X, \mathcal{T}^X) \rightarrow (Z, \mathcal{T}^Z)$ funções. As seguintes afirmações são verdadeiras:*

(i) Se $f \in W_n(X, Y)$ e $\mathcal{T}^X \subset \mathcal{T}^f$, então $n: (X, \mathcal{T}^X) \rightarrow (n(X), \mathcal{T}^{n(X)})$ é aberta.

(ii) Se $f \in S_n(X, Y)$ e $\mathcal{T}^n \subset \mathcal{T}^X$, então $f: (X, \mathcal{T}^X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}^Y)$ é contínua.

Demonstração. Ver [4], pág. 98. □

2.4 Considerações adicionais sobre continuidade generalizada

Esta é uma seção de contribuições ao conceito de continuidade generalizada contendo definições e resultados originais.

Sejam X um conjunto não vazio, $(Y, \mathcal{T}^Y)$, $(Z, \mathcal{T}^Z)$ espaços topológicos e considere $n: X \rightarrow (Z, \mathcal{T}^Z)$ um continuador. A intenção inicial nesta seção é construir uma topologia para equipar o conjunto $C_n(X, Y)$ das funções n -contínuas de X em $(Y, \mathcal{T}^Y)$. Para isto, seja K subconjunto de $n(X)$, U subconjunto de Y e considere

$$(K, U)_n^Y = \{f \in C_n(X, Y) : f(n^{-1}(K)) \subset U\} \quad (2.10)$$

o qual denotaremos simplesmente por $(K, U)_n$, desde que esteja subentendido no contexto que U é subconjunto de Y . Considere a família de subconjuntos de $n(X)$ dada por

$$\mathcal{K}_n = \{K \in \mathcal{P}(n(X)) : K \text{ é compacto com respeito à topologia } \mathcal{T}^{n(X)} \text{ induzida por } \mathcal{T}^Z\}.$$

Considere também a família de subconjuntos de $C_n(X, Y)$ dada por

$$\mathcal{S}_{n\text{-co}} = \{(K, U)_n \in \mathcal{P}(C_n(X, Y)) : K \in \mathcal{K}_n \text{ e } U \in \mathcal{T}^Y\}.$$

Proposição 2.43. A família $\mathcal{S}_{n\text{-co}}$ é uma sub-base geradora para uma topologia em $C_n(X, Y)$.

Demonstração. Note que

$$C_n(X, Y) = (\emptyset, Y)_n$$

e $(\emptyset, Y)_n \in \mathcal{S}_{n\text{-co}}$, pois $\emptyset$ é compacto em $n(X)$ e $Y \in \mathcal{T}^Y$. A inclusão $(K, U)_n \subset C_n(X, Y)$ segue diretamente da equação (2.10), para todo $(K, U)_n \in \mathcal{S}_{n\text{-co}}$. Por outro lado, $(\emptyset, Y)_n \subset \bigcup_{(K, U)_n \in \mathcal{S}_{n\text{-co}}} (K, U)_n$. Logo,

$$C_n(X, Y) = \bigcup_{(K, U)_n \in \mathcal{S}_{n\text{-co}}} (K, U)_n.$$

Portanto, a família $\mathcal{S}_{n\text{-co}}$ é sub-base geradora para uma topologia em $C_n(X, Y)$. □

A topologia $\langle \mathcal{S}_{n\text{-co}} \rangle$ gerada pela sub-base geradora $\mathcal{S}_{n\text{-co}}$ será denominada topologia n -compacto aberta e denotada por $\mathcal{T}_{n\text{-co}}$.

A proposição a seguir é uma proposição original deste trabalho e versa a respeito de funções n -contínuas, sendo baseada na Proposição 2.7.

Proposição 2.44. *Sejam X um conjunto não vazio, $(Y, \mathcal{T}^Y)$ e $(Z, \mathcal{T}^Z)$ espaços topológicos, $n: X \rightarrow (Z, \mathcal{T}^Z)$ um continuador e $a \in X$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) $f \in \mathbf{C}_n(a, X, Y)$.
- (ii) Para todo $U \in \mathcal{V}_{f(a)}^Y$, existe $V \in \mathcal{V}_{n(a)}^Z$ tal que $f(n^{-1}(V)) \subset U$.
- (iii) Para todo $U \in \mathcal{B}_{f(a)}^Y$, existe $V \in \mathcal{B}_{n(a)}^Z$ tal que $f(n^{-1}(V)) \subset U$.

Demonstração. (i) $\Rightarrow$ (ii) Se $U \in \mathcal{V}_{f(a)}^Y$, então $f(a) \in U^\circ$. Para $U^\circ \in \mathcal{T}_{f(a)}^Y$ existe $V_1 \in \mathcal{T}_{n(a)}^Z$ tal que $f(n^{-1}(V_1)) \subset U^\circ$. Tome $V = V_1$, o que implica que $V \in \mathcal{V}_{n(a)}^Z$ e tem-se que

$$f(n^{-1}(V)) \subset U^\circ \subset U.$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Seja $U \in \mathcal{B}_{f(a)}^Y$. Como $U \in \mathcal{V}_{f(a)}^Y$, por hipótese existe $V_1 \in \mathcal{V}_{n(a)}^Z$ tal que $f(n^{-1}(V_1)) \subset U$. Como $V_1 \in \mathcal{V}_{n(a)}^Z$, então por definição de base de vizinhança do ponto $n(a)$, existe $V \in \mathcal{B}_{n(a)}^Z$ tal que $V \subset V_1$. Logo,

$$f(n^{-1}(V)) \subset f(n^{-1}(V_1)) \subset U.$$

(iii) $\Rightarrow$ (i) Se $U \in \mathcal{T}_{f(a)}^Y$, então $U \in \mathcal{V}_{f(a)}^Y$, logo existe $W \in \mathcal{B}_{f(a)}^Y$ tal que $W \subset U$. Por hipótese existe $V_1 \in \mathcal{B}_{n(a)}^Z$ tal que $f(n^{-1}(V_1)) \subset W \subset U$. Tome $V = V_1 \in \mathcal{T}_{n(a)}^Z$. Como $V \subset V_1$ tem-se que:

$$f(n^{-1}(V)) \subset f(n^{-1}(V_1)) \subset W \subset U.$$

□

A próxima proposição é original do trabalho e é uma caracterização de n -continuidade via abertos sub-básicos, que teve como motivação a Proposição 2.9.

Proposição 2.45. *Sejam X um conjunto não vazio, $(Y, \mathcal{T}^Y)$ e $(Z, \mathcal{T}^Z)$ espaços topológicos, $n: X \rightarrow (Z, \mathcal{T}^Z)$ um continuador, $\mathcal{S}$ uma sub-base para a topologia $\mathcal{T}^Y$ e $\mathcal{R}$ uma sub-base para $\mathcal{T}^Z$. Tem-se que $f \in \mathbf{C}_n(a, X, Y)$ se, e somente se, dado um aberto sub-básico $U \in \mathcal{S}$ em torno de $f(a)$, existe um aberto básico V em torno de $n(a)$ tal que $f(n^{-1}(V)) \subset U$.*

Demonstração. Dado $U \in \mathcal{S}$ em torno de $f(a)$, então $U \in \langle \mathcal{S} \rangle$. Como, por hipótese, f é n -contínua, então existe $W \in \mathcal{T}_{n(a)}^Z$ tal que

$$f(n^{-1}(W)) \subset U.$$

Como $W \in \mathcal{T}_{n(a)}^Z$ e $\mathcal{R}$ é uma sub-base para $\mathcal{T}^Z$, então

$$W = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \left(\bigcap_{i=1}^{m_\lambda} W_{\lambda i} \right),$$

sendo que cada $W_{\lambda i} \in \mathcal{R}$. Como $n(a) \in W$, então $n(a) \in \bigcap_{i=1}^{m_{\lambda_0}} W_{\lambda_0 i}$ para algum $\lambda_0 \in \Lambda$.

Tome $V = \bigcap_{i=1}^{m_{\lambda_0}} W_{\lambda_0 i}$. Esse V é um aberto básico em $\mathcal{T}^Z$

$$f(n^{-1}(V)) \subset f(n^{-1}(W)) \subset U.$$

Reciprocamente, dado $U \in \mathcal{T}_{f(a)}^Y$, como U é aberto, $U = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \left(\bigcap_{i=1}^{m_\lambda} S_{\lambda i} \right)$, sendo cada $S_{\lambda i} \in \mathcal{S}$.

Como $f(a) \in U$, então $f(a) \in \bigcap_{i=1}^{m_{\lambda_0}} S_{\lambda_0 i}$ para algum $\lambda_0 \in \Lambda$, e ainda, $f(a) \in S_{\lambda_0 i}$, para todo $i = 1, \dots, m_{\lambda_0}$. Por hipótese, existe $W_{\lambda_0 i}$ aberto básico em torno de $n(a)$ tal que

$$f(n^{-1}(W_{\lambda_0 i})) \subset S_{\lambda_0 i}, \quad \forall i = 1, \dots, m_{\lambda_0}.$$

Tome $W = \bigcap_{i=1}^{m_{\lambda_0}} W_{\lambda_0 i}$, logo

$$f(n^{-1}(W)) \subset \bigcap_{i=1}^{m_{\lambda_0}} f(n^{-1}(W_{\lambda_0 i})) \subset \bigcap_{i=1}^{m_{\lambda_0}} S_{\lambda_0 i} \subset U.$$

□

A proposição a seguir é uma Proposição original deste trabalho e versa a respeito de funções amplamente n -contínuas, sendo baseada na Proposição [2.7](#)

Proposição 2.46. *Sejam X um conjunto não vazio, $(Y, \mathcal{T}^Y)$, $(Z, \mathcal{T}^Z)$ espaços topológicos, $n: X \rightarrow (Z, \mathcal{T}^Z)$ um continuador e $a \in X$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) $f \in \mathcal{W}_n(a, X, Y)$.
- (ii) Para todo $U \in \mathcal{V}_{f(a)}^Y$, existe $V \in \mathcal{V}_{n(a)}^Z$ tal que $V \cap n(X) \subset n(f^{-1}(U))$.
- (iii) Para todo $U \in \mathcal{B}_{f(a)}^Y$, existe $V \in \mathcal{B}_{n(a)}^Z$ tal que $V \cap n(X) \subset n(f^{-1}(U))$.

Demonstração. (i) $\Rightarrow$ (ii) Se $U \in \mathcal{V}_{f(a)}^Y$, então $f(a) \in U^\circ$, donde resulta $U^\circ \in \mathcal{T}_{f(a)}^Y$. Por hipótese, para esse U° existe $W \in \mathcal{T}_{n(a)}^Z$ tal que

$$W \cap n(X) \subset n(f^{-1}(U)).$$

Como $n(a) \in W = W^\circ$, então $W \in \mathcal{V}_{n(a)}^Z$. Tome $V = W$ e então

$$V \cap n(X) \subset n(f^{-1}(U)).$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Se $U \in \mathcal{B}_{f(a)}^Y$, então $U \in \mathcal{V}_{f(a)}^Y$. Por hipótese para esse U , existe $W \in \mathcal{V}_{n(a)}^Z$ tal que $W \cap n(X) \subset n(f^{-1}(U))$. Como $W \in \mathcal{V}_{n(a)}^Z$, existe $V \in \mathcal{B}_{n(a)}^Z$ tal que $V \subset W$. Daí,

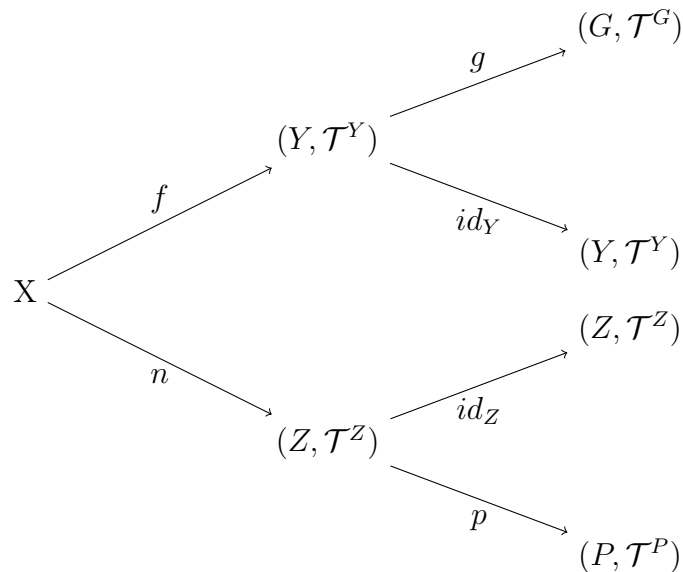
$$V \cap n(X) \subset W \cap n(X) \subset n(f^{-1}(U)).$$

(iii) $\Rightarrow$ (i) Se $U \in \mathcal{T}_{f(a)}^Y$, então $U \in \mathcal{V}_{f(a)}^Y$. Logo, existe $W_1 \in \mathcal{B}_{f(a)}^Y$ tal que $W_1 \subset U$. Por hipótese, existe $W_2 \in \mathcal{B}_{n(a)}^Z$ tal que $W_2 \cap n(X) \subset n(f^{-1}(W_1))$. Tome $V = W_2^\circ \in \mathcal{T}_{n(a)}^Z$. Segue que

$$V \cap n(X) = W_2^\circ \cap n(X) \subset W_2 \cap n(X) \subset n(f^{-1}(W_1)) \subset n(f^{-1}(U)).$$

□

Agora apresentaremos resultados sobre como composições de funções com continuidade generalizada se comportam. Para facilitar o entendimento do Teorema 2.47 considere o seguinte diagrama



Teorema 2.47. *Sejam X um conjunto não vazio, $(Y, \mathcal{T}^Y)$ e $(Z, \mathcal{T}^Z)$ espaços topológicos e $f: X \rightarrow (Y, \mathcal{T}^Y)$, $g: (Y, \mathcal{T}^Y) \rightarrow (G, \mathcal{T}^G)$, $n: X \rightarrow (Z, \mathcal{T}^Z)$ e $p: (Z, \mathcal{T}^Z) \rightarrow (P, \mathcal{T}^P)$ funções. As seguintes afirmações são verdadeiras:*

- (i) *Se $f \in \mathcal{F}(X, Y)$ e $g \in \mathcal{C}_{id}(Y, G)$, então $g \circ f \in \mathcal{C}_f(X, G)$*
- (ii) *Se $f \in \mathcal{C}_n(X, Y)$ e $g \in \mathcal{C}_{id}(Y, G)$, então $g \circ f \in \mathcal{C}_n(X, G)$.*
- (iii) *Se $n \in \mathcal{F}(X, Z)$ e $id \in \mathcal{C}_p(Z, Z)$, então $n \in \mathcal{C}_{pon}(X, Z)$*
- (iv) *Se $f \in \mathcal{C}_n(X, Y)$ e $id \in \mathcal{C}_p(Z, Z)$, então $f \in \mathcal{C}_{pon}(X, Y)$*
- (v) *Se $f \in \mathcal{C}_n(X, Y)$, $g \in \mathcal{C}_{id}(Y, G)$ e $id \in \mathcal{C}_p(Z, Z)$, então $g \circ f \in \mathcal{C}_{pon}(X, G)$*

Demonstração. (i) Sejam $x_0 \in X$ e $U \in \mathcal{T}_{(g \circ f)(x_0)}^G$. Como $U \in \mathcal{T}_{(g \circ f)(x_0)}^G = \mathcal{T}_{(g(f(x_0)))}^G$ e por hipótese $g \in \mathcal{C}_{id}(Y, G)$, então existe $V \in \mathcal{T}_{f(x_0)}^Y$ tal que $g(V) \subset U$. Segue que

$$f(f^{-1}(V)) \subset V \Rightarrow g(f(f^{-1}(V))) \subset g(V) \Rightarrow (g \circ f)(f^{-1}(V)) \subset U.$$

Portanto, $g \circ f$ é f -contínua em x_0 e como $x_0 \in X$ é um ponto genérico, conclui-se que $g \circ f \in \mathcal{C}_f(X, G)$.

(ii) Se $g \in \mathcal{C}_{id}(Y, G)$ do item (i) anterior, tem-se $g \circ f \in \mathcal{C}_f(X, G)$. Como $g \circ f \in \mathcal{C}_f(X, G)$ e por hipótese $f \in \mathcal{C}_n(X, Y)$, segue do item (i) da Teorema 2.39 que $g \circ f \in \mathcal{C}_n(X, G)$.

(iii) Sejam $x_0 \in X$ e $V \in \mathcal{T}_{n(x_0)}^Z$. Como $id \in \mathcal{C}_p(Z, Z)$, então id é p -contínua em $n(x_0) \in Z$. Como $V \in \mathcal{T}_{n(x_0)}^Z$ e id é p -contínua em $n(x_0)$, então existe $W \in \mathcal{T}_{p(n(x_0))}^P = \mathcal{T}_{(pon)(x_0)}^P$ tal que $id(p^{-1}(W)) \subset V$, ou seja, $p^{-1}(W) \subset V$. Segue que

$$n((p \circ n)^{-1}(W)) = n(n^{-1}(p^{-1}(W))) \subset n(n^{-1}(V)) \subset V.$$

Portanto, n é $(p \circ n)$ -contínua em x_0 e como $x_0 \in X$ é um ponto genérico, conclui-se que $n \in \mathcal{C}_{pon}(X, Z)$.

(iv) Pelo item (iii) anterior, se $id \in \mathcal{C}_p(Z, Z)$, então $n \in \mathcal{C}_{pon}(X, Z)$. Como $f \in \mathcal{C}_n(X, Y)$ e $n \in \mathcal{C}_{pon}(X, Z)$, então pelo item (i) do Teorema 2.39, tem-se que $f \in \mathcal{C}_{pon}(X, Y)$.

(v) Como $f \in \mathcal{C}_n(X, Y)$ e $g \in \mathcal{C}_{id}(Y, G)$, segue do item (ii) anterior que $g \circ f \in \mathcal{C}_n(X, G)$. Como $id \in \mathcal{C}_p(Z, Z)$, decorre do item (iii) acima que $n \in \mathcal{C}_{pon}(X, Z)$. Se $g \circ f \in \mathcal{C}_n(X, G)$ e $n \in \mathcal{C}_{pon}(X, Z)$, segue do item (i) do Teorema 2.39 que $g \circ f \in \mathcal{C}_{pon}(X, G)$. $\square$

Sejam duas funções $f: A \rightarrow (Y, \mathcal{T}^Y)$ e $g: B \rightarrow (Y, \mathcal{T}^Y)$, tais que $A \cup B = X$, com X não vazio, $(Y, \mathcal{T}^Y)$ espaço topológico e $f(x) = g(x)$, para todo $x \in A \cap B$. Considere a função $(f * g): X \rightarrow (Y, \mathcal{T}^Y)$

$$(f * g)(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \in A \\ g(x), & \text{se } x \in B \end{cases}$$

A função $(f * g)$ é chamada de função colagem de f com g .

Proposição 2.48. *Sejam X um conjunto não vazio tal que $X = A \cup B$, com $A, B \subseteq X$ e $(Y, \mathcal{T}^Y)$, $(Z, \mathcal{T}^Z)$ espaços topológicos. Se $f \in \mathcal{W}_p(A, Y)$, $g \in \mathcal{W}_q(B, Y)$, $f(x) = g(x)$ e $p(x) = q(x)$, para todo $x \in A \cap B$, então $(f * g) \in \mathcal{W}_{p*q}(X, Y)$.*

Demonstração. Seja $V \in \mathcal{T}^Y$. Como $f \in \mathcal{W}_p(A, Y)$ e $g \in \mathcal{W}_q(B, Y)$, então

$$p(f^{-1}(V)) \in \mathcal{T}^{p(A)} \quad \text{e} \quad q(g^{-1}(V)) \in \mathcal{T}^{q(B)} \quad (2.11)$$

Tem-se que $(f * g)^{-1}(V) = f^{-1}(V) \cup g^{-1}(V)$. De fato, se $x \in (f * g)^{-1}(V)$, isso significa que $(f * g)(x) \in V$. Da definição de $(f * g)$, tem-se que $f(x) \in V$ ou $g(x) \in V$, consequentemente $x \in f^{-1}(V)$ ou $x \in g^{-1}(V)$. Logo, $x \in f^{-1}(V) \cup g^{-1}(V)$. Por outro lado, se $x \in f^{-1}(V) \cup g^{-1}(V)$, então $x \in f^{-1}(V)$ ou $x \in g^{-1}(V)$, isso significa que $f(x) \in V$ ou $g(x) \in V$, pela definição da função colagem tem-se que $(f * g)(x) \in V$, logo $x \in (f * g)^{-1}(V)$.

Agora, note que

$$\begin{aligned} (p * q)((f * g)^{-1}(V)) &= (p * q)(f^{-1}(V) \cup g^{-1}(V)) \\ &= (p * q)(f^{-1}(V)) \cup (p * q)(g^{-1}(V)) \\ &= p(f^{-1}(V)) \cup q(g^{-1}(V)). \end{aligned}$$

Como $(p * q)(X) = p(A) \cup q(B)$, $p(f^{-1}(V)) \in \mathcal{T}^{p(A)}$ e $q(g^{-1}(V)) \in \mathcal{T}^{q(B)}$, segue que $(p * q)((f * g)^{-1}(V)) \in \mathcal{T}^{(p*q)(X)}$. Portanto, $(f * g) \in \mathcal{W}_{p*q}(X, Y)$. $\square$

Vimos que a colagem entre funções amplamente n -contínuas funciona bem, mas vejamos agora com um exemplo que no contexto das funções n -contínuas isto em geral não é verdade.

Considere $f, p: (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = x$ e $p(x) = -x$. Considere também $g, q: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por $g(x) = x$ e $q(x) = x$. Note que $f \in \mathcal{C}_p((-\infty, 0], \mathbb{R})$. Seja $x_0 \in (-\infty, 0]$ e dado $\epsilon > 0$ e note que

$$|p(x) - p(x_0)| = |-x - (-x_0)| = |x - x_0|.$$

Tome $\delta = \epsilon$. Temos

$$|p(x) - p(x_0)| = |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| = |x - x_0| < \delta = \epsilon.$$

Portanto, $f \in C_p([-\infty, 0], \mathbb{R})$. Como $g = q$, tem-se que $g \in C_q((0, \infty], \mathbb{R})$. Note que $f * g = id$ e $p * q = m$, sendo m a função módulo. Vimos em (2.24) que a identidade não é m -contínua, ou seja, $(f * g) \notin C_{(p*q)}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Sejam A, B, C, D conjuntos não vazios e $f: A \rightarrow C$ e $g: B \rightarrow D$ funções. A *função cartesiana* entre f e g é a função $f \times g: A \times B \rightarrow C \times D$ dada por

$$(f \times g)(x, t) = (f(x), g(t)). \quad (2.12)$$

Proposição 2.49. *Sejam X_1, X_2 conjuntos não vazios, $(Y_1, \mathcal{T}^{Y_1}), (Y_2, \mathcal{T}^{Y_2}), (Z_1, \mathcal{T}^{Z_1}), (Z_2, \mathcal{T}^{Z_2})$ espaços topológicos e considere $n: X_1 \rightarrow (Z_1, \mathcal{T}^{Z_1})$ e $m: X_2 \rightarrow (Z_2, \mathcal{T}^{Z_2})$ continuadores. Se $f \in C_n(X_1, Y_1)$ e $g \in C_m(X_2, Y_2)$, então $f \times g \in C_{n \times m}(X_1 \times X_2, Y_1 \times Y_2)$.*

Demonstração. Seja $a = (a_1, a_2) \in X_1 \times X_2$. Considere $U \in \mathcal{B}_{(f \times g)(a)}^{Y_1 \times Y_2}$. Segue que $U = U_1 \times U_2$, com $U_1 \in \mathcal{T}_{f(a_1)}^{Y_1}$ e $U_2 \in \mathcal{T}_{g(a_2)}^{Y_2}$. Como f é n -contínua em a_1 , para esse $U_1 \in \mathcal{T}_{f(a_1)}^{Y_1}$ existe $V_1 \in \mathcal{T}_{n(a_1)}^{Z_1}$ tal que

$$f(n^{-1}(V_1)) \subset U_1. \quad (2.13)$$

Como g é m -contínua em a_2 , para $U_2 \in \mathcal{T}_{g(a_2)}^{Y_2}$ existe $V_2 \in \mathcal{T}_{m(a_2)}^{Z_2}$ tal que

$$g(m^{-1}(V_2)) \subset U_2. \quad (2.14)$$

Tome $V = V_1 \times V_2 \in \mathcal{B}_{(n \times m)(a)}^{Z_1 \times Z_2}$. Tem-se que

$$(n \times m)^{-1}(V) = (n \times m)^{-1}(V_1 \times V_2) = n^{-1}(V_1) \times m^{-1}(V_2)$$

e isto implica que

$$\begin{aligned} (f \times g)((n \times m)^{-1}(V_1 \times V_2)) &= (f \times g)(n^{-1}(V_1) \times m^{-1}(V_2)) \\ &= f(n^{-1}(V_1)) \times g(m^{-1}(V_2)) \subset U_1 \times U_2 = U \end{aligned}$$

Portanto, $f \times g \in C_{n \times m}(X_1 \times X_2, Y_1 \times Y_2)$. □

Sejam X um conjunto não vazio, $(Y, \mathcal{T}^Y)$ e $(Z, \mathcal{T}^Z)$ espaços topológicos. Considere a função projeção $\pi_1: X \times I \rightarrow X$, a identidade $id: (I, \mathcal{T}^I) \rightarrow (I, \mathcal{T}^I)$ e um continuador $n: X \rightarrow (Z, \mathcal{T}^Z)$. Então a função $n \circ \pi_1: X \times I \rightarrow (Z, \mathcal{T}^Z)$ é dada por $n(\pi_1(x, t)) = n(x)$ e a função $(n \times id): X \times I \rightarrow (Z \times I, \mathcal{T}^Z \otimes \mathcal{T}^I)$ é dada por $(n \times id)(x, t) = (n(x), t)$.

Proposição 2.50. *Sejam X um conjunto não vazio, $(Y, \mathcal{T}^Y)$ e $(Z, \mathcal{T}^Z)$ espaços topológicos, considere as funções $H: X \times I \rightarrow (Y, \mathcal{T}^Y)$ e $id: I \rightarrow I$, sendo id a identidade em I , e $n: X \rightarrow (Z, \mathcal{T}^Z)$ um continuador. Se $H \in \mathbf{C}_{n \circ \pi_1}(X \times I, Y)$, então $H \in \mathbf{C}_{n \times id}(X \times I, Y)$.*

Demonstração. Seja $U \in \mathcal{T}_{H(x_0, t_0)}^Y$. Como H é $(n \circ \pi_1)$ -contínua, então existe $V \in \mathcal{T}_{(n \circ \pi_1)(x_0, t_0)}^Z$ tal que

$$H((n \circ \pi_1)^{-1}(V)) \subset U. \quad (2.15)$$

Note que $(n \circ \pi_1)^{-1}(V) = \{(x, t) \in X \times I : n(x) \in V\} = n^{-1}(V) \times I$. Substituindo em [2.15](#), obtemos $H(n^{-1}(V) \times I) \subset U$. Tome $W = V \times I$. Segue que

$$\begin{aligned} (n \times id)^{-1}(W) &= \{(x, t) \in X \times I; (n(x), t) \in W = V \times I\} \\ &= \{(x, t) \in X \times I : n(x) \in V \text{ e } t \in I\} \\ &= \{(x, t) \in X \times I : x \in n^{-1}(V) \text{ e } t \in I\} \\ &= n^{-1}(V) \times I = (n \circ \pi_1)^{-1}(V) \end{aligned}$$

Portanto, $H((n \times id)^{-1}(W)) = H((n \circ \pi_1)^{-1}(V)) \subset U$, ou seja, $H \in \mathbf{C}_{n \times id}(X \times I, Y)$ $\square$

A função $\varepsilon_n: (X \times \mathbf{C}_n(X, Y), \mathcal{T}^X \otimes T_{n\text{-co}}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}^Y)$ dada por

$$\varepsilon_n(x, f) = f(x)$$

é denominada função avaliação.

Proposição 2.51. *Sejam $(X, \mathcal{T}^X)$, $(Y, \mathcal{T}^Y)$ e $(Z, \mathcal{T}^Z)$ espaços topológicos e considere $n: (X, \mathcal{T}^X) \rightarrow (Z, \mathcal{T}^Z)$ um continuador e $\varepsilon_n: (X \times \mathbf{C}_n(X, Y), \mathcal{T}^X \otimes T_{n\text{-co}}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}^Y)$ a função avaliação. Se n é injetora e $n(X)$ é Hausdorff localmente compacto, então $\varepsilon_n \in \mathbf{C}_{id}(X \times \mathbf{C}_n(X, Y), Y)$.*

Demonstração. Para mostrar esta proposição será utilizado o item (ii) da Proposição [2.44](#). Sejam $a \in X$, $f \in \mathbf{C}_n(X, Y)$ e $W \in \mathcal{V}_{f(a)}^Y$. Segue que $f(a) \in W^\circ \in \mathcal{T}_{f(a)}^Y$. Como $f \in \mathbf{C}_n(X, Y)$, então $f \in \mathbf{W}_n(X, Y)$. Logo, para $W^\circ \in \mathcal{T}_{f(a)}^Y$, tem-se

$$n(f^{-1}(W^\circ)) \in \mathcal{T}_{n(a)}^{n(X)}.$$

Como $n(X)$ é Hausdorff localmente compacto, segue que (ver [\[5\]](#), pág 211) existe uma vizinhança V de $n(a)$ de tal modo que $\bar{V}$ é compacto e

$$n(a) \in V \subset \bar{V} \subset n(f^{-1}(W^\circ)).$$

Como n injetora, o aberto sub-básico $U = M_n(\bar{V}, W^\circ)$ contém f , pois $f(n^{-1}(\bar{V})) \subset W^\circ$.
E como $n^{-1}(V)$ é vizinhança de a , temos

$$\varepsilon_n(n^{-1}(V) \times M_n(\bar{V}, W^\circ)) \subset W. \quad (2.16)$$

Repare que a equação (2.16) acima é válida, pois considere $(a, f) \in (n^{-1}(V) \times M_n(\bar{V}, W^\circ))$ e temos que

$$\varepsilon_n(a, f) = f(a) \in f(n^{-1}(V)) \subset f(n^{-1}(\bar{V})) \subset W^\circ \subset W$$

Portanto $\varepsilon_n \in \mathbf{C}_{id}(X \times \mathbf{C}_n(X, Y), Y)$. □

Proposição 2.52. *Sejam $(X, \mathcal{T}^X)$, $(Y, \mathcal{T}^Y)$ e $(Z, \mathcal{T}^Z)$ espaços topológicos e considere um continuador $n: (X, \mathcal{T}^X) \rightarrow (Z, \mathcal{T}^Z)$ e a identidade $id_X: (X, \mathcal{T}^X) \rightarrow (X, \mathcal{T}^X)$. Se n é uma função aberta e injetora, então $id_X \in \mathbf{C}_n(X, X)$.*

Demonstração. Seja $a \in X$ e $U \in \mathcal{T}_a^X$. Tome $V = n(U)$. Como n é função aberta, então $n(U) \in \mathcal{T}_{n(a)}^Z$ e temos que

$$id(n^{-1}(V)) = id(n^{-1}(n(U))) = id(U) = U \subset U.$$

Portanto, $id_X \in \mathbf{C}_n(X, X)$. □

CAPÍTULO 3

Homotopia generalizada

3.1 Funções homotópicas no sentido usual

Neste capítulo I indicará o intervalo compacto $[0, 1]$, o qual será munido com a topologia $\mathcal{T}^I$ induzida pela topologia usual de $\mathbb{R}$.

Definição 3.1. *Sejam $(X, \mathcal{T}^X)$ e $(Y, \mathcal{T}^Y)$ espaços topológicos. Duas funções contínuas $f, g: (X, \mathcal{T}^X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}^Y)$ são homotópicas se, e somente se, existe uma função contínua $H: (X \times I, \mathcal{T}^X \otimes \mathcal{T}^I) \rightarrow (Y, \mathcal{T}^Y)$ tal que*

$$H(x, 0) = f(x) \quad e \quad H(x, 1) = g(x) \quad (3.1)$$

para todo $x \in X$.

Denota-se que f é homotópica a g por $f \simeq g$ e caso seja necessário evidenciar a homotopia H entre f e g , então usa-se a notação $H: f \simeq g$.

Exemplo 3.2. *Sejam $\mathbb{R}$ munido com a topologia usual, $f, g: (X, \mathcal{T}^X) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T}^{\mathbb{R}})$ funções tais que $f(x) = -1$, para todo $x \in X$ e $g(x) = 1$, para todo $x \in X$. Considere a função $H: (X \times I, \mathcal{T}^X \otimes \mathcal{T}^I) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T}^{\mathbb{R}})$ dada por $H(x, t) = (1 - t) \cdot f(x) + t \cdot g(x) = -1 + 2t$. Tem-se que H é uma homotopia entre f e g , pois ela é contínua e satisfaz*

$$H(x, 0) = (1 - 0) \cdot f(x) + 0 \cdot g(x) = f(x) = -1$$

e

$$H(x, 1) = (1 - 1) \cdot f(x) + 1 \cdot g(x) = g(x) = 1,$$

para todo $x \in X$.

Proposição 3.3. *Sejam $f, g: (X, \mathcal{T}^X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}^Y)$ funções constantes dadas por $f(x) = p$, para todo $x \in X$ e $g(x) = q$, para todo $x \in X$. Tem-se que $f \simeq g$ se, e somente se, p e q pertencem à mesma componente conexa por caminhos de $(Y, \mathcal{T}^Y)$.*

Demonstração. Se c é um caminho em $(Y, \mathcal{T}^Y)$ ligando p a q , considere a função $H: (X \times I, \mathcal{T}^X \otimes \mathcal{T}^I) \rightarrow (Y, \mathcal{T}^Y)$ dada por $H(x, t) = c(t)$. A função H é contínua, pois dado $U \in \mathcal{T}^Y$ tem-se que $H^{-1}(U) = X \times c^{-1}(U)$, o qual é um aberto básico na topologia produto, uma vez que $c^{-1}(U)$ é aberto devido a continuidade de c . Note que H satisfaz

$$H(x, 0) = c(0) = p = f(x) \quad \text{e} \quad H(x, 1) = c(1) = q = g(x)$$

para todo $x \in X$. Portanto, $H: f \simeq g$.

Reciprocamente, seja H é uma homotopia entre as funções f e g . Então

$$H(x, 0) = f(x) = p \quad \text{e} \quad H(x, 1) = g(x) = q,$$

para todo $x \in X$. Defina $c: (I, \mathcal{T}^I) \rightarrow (Y, \mathcal{T}^Y)$ por $c(t) = H(a, t)$, com $a \in X$ sendo um ponto fixado. Note que a função c coincide com a composição do homeomorfismo padrão entre I e $\{a\} \times I$ (que leva t em (a, t)) e a restrição $H|_{\{a\} \times I}$, logo c é contínuo. Temos que $c(0) = H(a, 0) = f(a) = p$ e $c(1) = H(a, 1) = g(a) = q$. Portanto c é um caminho ligando p a q , ou seja, p e q pertencem à mesma componente conexa por caminhos de $(Y, \mathcal{T}^Y)$. $\square$

Se $(E, \|\cdot\|)$ é um espaço vetorial normado e $x, y \in E$, denotamos por $[x, y]$ o segmento ligando os vetores x e y .

Proposição 3.4. *Sejam $(E, \|\cdot\|)$ um espaço vetorial normado, $Y \subset E$ e $f, g: (X, \mathcal{T}^X) \rightarrow (Y, \|\cdot\|)$ funções contínuas. Se $[f(x), g(x)] \subset Y$, para todo $x \in X$, então $f \simeq g$.*

Demonstração. Defina $H: (X \times I, \mathcal{T}^X \otimes \mathcal{T}^I) \rightarrow (Y, \|\cdot\|)$ por $H(x, t) = (1 - t) \cdot f(x) + t \cdot g(x)$. H é contínua e satisfaz

$$H(x, 0) = (1 - 0) \cdot f(x) + 0 \cdot g(x) = f(x),$$

$$H(x, 1) = (1 - 1) \cdot f(x) + 1 \cdot g(x) = g(x),$$

para todo $x \in X$. Além disso, $H(X \times I) \subset Y$, pois o segmento $[f(x), g(x)] \subset Y$, para todo $x \in X$. Portanto $H: f \simeq g$. $\square$

Exemplo 3.5. Seja $(E, \|\cdot\|)$ um espaço vetorial normado. Duas funções contínuas $f, g: (X, \mathcal{T}^X) \rightarrow (E, \|\cdot\|)$, são sempre homotópicas, mas o mesmo não ocorre com duas funções contínuas $p, q: (X, \mathcal{T}^X) \rightarrow (E - \{0\}, \|\cdot\|)$. Basta tomar $p, q: (\mathbb{R}, |\cdot|) \rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$ constantes, com $p(x) = 1$ e $q(x) = -1$, para todo x . Como 1 e -1 pertencem a componentes conexas distintas de $\mathbb{R} - \{0\}$, segue-se que p e q não são homotópicas.

Proposição 3.6. Sejam $(X, \mathcal{T}^X), (Y, \mathcal{T}^Y)$ espaços topológicos. A relação de "ser homotópico a", é uma relação de equivalência no conjunto $C(X, Y)$ das funções contínuas de X em Y .

Demonstração. Verifiquemos que a relação "ser homotópico a" é reflexiva, simétrica e transitiva.

Seja $f: (X, \mathcal{T}^X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}^Y)$ uma função contínua. A função $H: (X \times I, \mathcal{T}^X \otimes \mathcal{T}^I) \rightarrow (Y, \mathcal{T}^Y)$ dada por $H(x, t) = f(x)$ é uma homotopia entre f e f . Portanto a relação "ser homotópico a" é reflexiva.

Sejam $f, g: (X, \mathcal{T}^X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}^Y)$ funções contínuas e $H: (X \times I, \mathcal{T}^X \otimes \mathcal{T}^I) \rightarrow (Y, \mathcal{T}^Y)$ uma homotopia entre f e g . A função $K: (X \times I, \mathcal{T}^X \otimes \mathcal{T}^I) \rightarrow (Y, \mathcal{T}^Y)$ dada por $K(x, t) = H(x, 1 - t)$ é uma homotopia entre g e f , pois ela é contínua devido a continuidade de H e satisfaz

$$K(x, 0) = H(x, 1 - 0) = H(x, 1) = g(x)$$

e

$$K(x, 1) = H(x, 1 - 1) = H(x, 0) = f(x),$$

para todo $x \in X$. Portanto, a relação "ser homotópico a" é simétrica.

Sejam $f, g: (X, \mathcal{T}^X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}^Y)$ funções contínuas e $H: f \simeq g$ e $K: g \simeq h$ homotopias. A função $L: (X \times I, \mathcal{T}^X \otimes \mathcal{T}^I) \rightarrow (Y, \mathcal{T}^Y)$ dada por

$$L(t) = \begin{cases} H(x, 2t), & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ K(x, 2t - 1), & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

é uma homotopia entre f e h , pois ela é contínua devido as continuidades das funções H e K e por satisfazer

$$L(x, 0) = H(x, 2 \cdot 0) = H(x, 0) = f(x)$$

e

$$L(x, 1) = K(x, 2 \cdot 1 - 1) = K(x, 1) = h(x),$$

para todo $x \in X$. Portanto, a relação "ser homotópico a" é transitiva. $\square$

As classes de equivalência segundo a relação de "ser homotópico a" são chamadas de *classes de homotopia*. A classe de homotopia representada pela função contínua $f: (X, \mathcal{T}^X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}^Y)$ é indicada pelo símbolo $[f]$, ou seja,

$$[f] = \{g \in \mathcal{C}(X, Y) : f \simeq g\}.$$

O conjunto das classes de homotopia das funções contínuas de X em Y é representado pelo símbolo $[X, Y]$, ou seja $[X, Y] = \mathcal{C}(X, Y) / \simeq$.

A próxima proposição, mostra que composição de funções preserva homotopias.

Proposição 3.7. Sejam $f, \dot{f}: (X, \mathcal{T}^X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}^Y)$ e $g, \dot{g}: (Y, \mathcal{T}^Y) \rightarrow (Z, \mathcal{T}^Z)$ funções contínuas. Se $f \simeq \dot{f}$ e $g \simeq \dot{g}$, então $g \circ f \simeq \dot{g} \circ \dot{f}$.

Demonstração. Sejam $H: (X \times I, \mathcal{T}^X \otimes \mathcal{T}^I) \rightarrow (Y, \mathcal{T}^Y)$ uma homotopia entre f e $\dot{f}$ e $K: (Y \times I, \mathcal{T}^Y \otimes \mathcal{T}^I) \rightarrow (Z, \mathcal{T}^Z)$ uma homotopia entre g e $\dot{g}$. Temos que a função $L: (X \times I, \mathcal{T}^X \otimes \mathcal{T}^I) \rightarrow (Z, \mathcal{T}^Z)$ dada por $L(x, t) = K(H(x, t), t)$ é uma homotopia entre $g \circ f$ e $\dot{g} \circ \dot{f}$. Com efeito, $L = K \circ (H \times id_t)$ é uma composição de funções contínuas, logo L é contínua. Uma vez que H é uma homotopia entre f e $\dot{f}$, então a função L satisfaz $L(x, 0) = K(H(x, 0), 0) = K(f(x), 0) = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$ para todo $x \in X$. Da mesma forma, como K é uma homotopia entre g e $\dot{g}$, então a função L satisfaz $L(x, 1) = K(H(x, 1), 1) = K(\dot{f}(x), 1) = \dot{g}(\dot{f}(x)) = (\dot{g} \circ \dot{f})(x)$, para todo $x \in X$. $\square$

Considere os espaços topológicos $(X, \mathcal{T}^X)$ e $(Y, \mathcal{T}^Y)$ e o conjunto $\mathcal{C}(X, Y)$ das funções contínuas de $(X, \mathcal{T}^X)$ em $(Y, \mathcal{T}^Y)$ munido com a topologia $\mathcal{T}_{co}$ compacto-aberta. No caso de Y ser metrizável essa é a topologia da convergência uniforme nas partes compactas de X (ver [8], pág. 159.). Cada função contínua $H: (X \times I, \mathcal{T}^X \otimes \mathcal{T}^I) \rightarrow (Y, \mathcal{T}^Y)$ corresponde a um caminho em $(\mathcal{C}(X, Y), \mathcal{T}_{co})$, onde $\mathcal{T}_{co}$ é a topologia compacto-aberta (relativa às topologias $\mathcal{T}^X$ e $\mathcal{T}^Y$), isto é, uma homotopia H corresponde a um caminho $c_H: I \rightarrow (\mathcal{C}(X, Y), \mathcal{T}_{co})$ dado por

$$c_H(t) = H_t$$

sendo que cada função $H_t \in \mathcal{C}(X, Y)$ é dada por

$$H_t(x) = H(x, t).$$

No caso em que $(X, \mathcal{T}^X)$ é um espaço Hausdorff localmente compacto ou no caso em que $(X, \mathcal{T}^X)$ é metrizável, tem-se que cada caminho em $\mathcal{C}(X, Y)$ corresponde a uma

homotopia em $\mathcal{C}(X \times I, Y)$. Portanto, nestes casos existe uma bijeção entre as homotopias $H: (X \times I, \mathcal{T}^X \otimes \mathcal{T}^I) \rightarrow (Y, \mathcal{T}^Y)$ e os caminhos $c_H: I \rightarrow (\mathcal{C}(X, Y), \mathcal{T}_{co})$, ou seja,

$$H \in \mathcal{C}(X \times I, Y) \Leftrightarrow c_H \in \mathcal{C}(I, \mathcal{C}(X, Y)).$$

Se H é uma homotopia entre f e g , então o caminho c_H começa em f e termina em g , ou seja, $c_H(0) = f$ e $c_H(1) = g$. Logo, duas funções contínuas $f, g: (X, \mathcal{T}^X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}^Y)$, com $(X, \mathcal{T}^X)$ Hausdorff localmente compacto ou metrizável, são homotópicas se, e somente se, f e g pertencem à mesma componente conexa por caminhos em $(\mathcal{C}(X, Y), \mathcal{T}_{co})$.

Nesta seção apresentaremos as linhas gerais para se mostrar a equivalência citada acima. Para isso, considere a função $\varepsilon: (X \times \mathcal{C}(X, Y), \mathcal{T}^X \otimes \mathcal{T}_{co}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}^Y)$ dada por

$$\varepsilon(x, f) = f(x). \quad (3.2)$$

A função ε é denominada *função avaliação* com respeito ao espaço $\mathcal{C}(X, Y)$.

Proposição 3.8. *Sejam $(X, \mathcal{T}^X)$ e $(Y, \mathcal{T}^Y)$ espaços topológicos. Se $(X, \mathcal{T}^X)$ é um espaço Hausdorff localmente compacto, então a função $\varepsilon: (\mathcal{C}(X, Y), \times X, \mathcal{T}_{co} \otimes \mathcal{T}^X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}^Y)$ é contínua, ou seja, $\varepsilon \in \mathcal{C}(X \times \mathcal{C}(X, Y), Y)$.*

Demonstração. Ver [2], pág. 41. □

Proposição 3.9. *Sejam $(X, \mathcal{T}^X)$, $(Y, \mathcal{T}^Y)$ e $(T, \mathcal{T}^T)$ espaços topológicos. Dada uma função contínua $\phi: (X \times T, \mathcal{T}^X \otimes \mathcal{T}^T) \rightarrow (Y, \mathcal{T}^Y)$, as seguintes afirmações são verdadeiras:*

- (i) *Se para cada $t \in T$ a função $\phi_t: (X, \mathcal{T}^X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}^Y)$ é dada por $\phi_t(x) = \phi(x, t)$, então $\phi_t \in \mathcal{C}(X, Y)$, para todo $t \in T$.*
- (ii) *Se a função $\Phi: (T, \mathcal{T}^T) \rightarrow (\mathcal{C}(X, Y), \mathcal{T}_{co})$ é dada por $\Phi(t) = \phi_t$, então $\Phi \in \mathcal{C}(T, \mathcal{C}(X, Y))$.*

Demonstração. Ver [2], pág. 41. □

Note que na proposição acima no caso em que $(T, \mathcal{T}^T)$ é substituído por $(I, \mathcal{T}^I)$, então a função ϕ passa a ser uma homotopia e a função Φ passa a ser um caminho ligando duas funções homotópicas em $\mathcal{C}(X, Y)$. Para a recíproca da proposição acima, considere X Hausdorff localmente compacto e $\Phi: (T, \mathcal{T}^T) \rightarrow (\mathcal{C}(X, Y), \mathcal{T}_{co})$ contínua, então

$$\phi = \varepsilon \circ (id_X \times \Phi), \quad (3.3)$$

sendo $\varepsilon: (X \times C(X, Y), \mathcal{T}^X \otimes \mathcal{T}_{co}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}^Y)$ a avaliação com respeito ao espaço de funções $C(X, Y)$ e $id_X: (X, \mathcal{T}^X) \rightarrow (X, \mathcal{T}^X)$ a identidade em X . Se X é Hausdorff localmente compacto, então ε é contínua por [3.8], consequentemente ϕ é contínua por ser uma composição de funções contínuas (Corolário [2.13]).

Definição 3.10. *Uma função contínua $f: (X, \mathcal{T}^X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}^Y)$ é uma equivalência homotópica se, e somente se, satisfaz as seguintes condições:*

- (a) *existe $g: (Y, \mathcal{T}^Y) \rightarrow (X, \mathcal{T}^X)$.*
- (b) *$g \circ f \simeq id_X$, sendo id_X a função identidade com respeito a $(X, \mathcal{T}^X)$.*
- (c) *$f \circ g \simeq id_Y$, sendo id_Y a função identidade com respeito a $(Y, \mathcal{T}^Y)$.*

A função g é denominada *inverso homotópico* de f e os espaços topológicos $(X, \mathcal{T}^X)$ e $(Y, \mathcal{T}^Y)$ têm o mesmo tipo de homotopia, o que denota-se por $(X, \mathcal{T}^X) \equiv (Y, \mathcal{T}^Y)$.

Um espaço topológico unitário é formado por um conjunto unitário munido com a topologia trivial, a qual neste caso específico coincide com a topologia discreta.

Definição 3.11. *Um espaço topológico $(X, \mathcal{T}^X)$ é contrátil se, e somente se, $(X, \mathcal{T}^X)$ tem o mesmo tipo de homotopia que um espaço topológico unitário.*

Proposição 3.12. *Seja $(X, \mathcal{T}^X)$ um espaço topológico. Temos que $(X, \mathcal{T}^X)$ é contrátil se, e somente se, a função identidade $id_X: (X, \mathcal{T}^X) \rightarrow (X, \mathcal{T}^X)$ é homotópica a uma função constante $c: (X, \mathcal{T}^X) \rightarrow (X, \mathcal{T}^X)$.*

Demonstração. Se $(X, \mathcal{T}^X)$ é contrátil, então segue por definição que existem funções contínuas $f: (X, \mathcal{T}^X) \rightarrow (\{p\}, \mathcal{T}^{\{p\}})$, com $p \in X$, e $g: (\{p\}, \mathcal{T}^{\{p\}}) \rightarrow (X, \mathcal{T}^X)$, tais que $g \circ f \simeq id_X$. Note que $g \circ f$ é uma função constante homotópica à identidade id_X .

Reciprocamente, se $id_X \simeq c$ para alguma função constante $c: (X, \mathcal{T}^X) \rightarrow (X, \mathcal{T}^X)$ dada por $c(x) = p$, então

$$i \circ c = c \simeq id_X \quad \text{e} \quad c \circ i = id_{\{p\}} \simeq id_{\{p\}},$$

sendo $i: (\{p\}, \mathcal{T}^{\{p\}}) \rightarrow (X, \mathcal{T}^X)$ a função inclusão. Portanto, $(X, \mathcal{T}^X) \equiv (\{p\}, \mathcal{T}^{\{p\}})$ e $(X, \mathcal{T}^X)$ é contrátil. $\square$

Proposição 3.13. *Um espaço topológico $(Y, \mathcal{T}^Y)$ é contrátil se, e somente se, para cada espaço topológico $(X, \mathcal{T}^X)$, tem-se que quaisquer $f, g \in C(X; Y)$ são homotópicas.*

Demonstração. Sejam $f, g \in \mathcal{C}(X; Y)$. Se $(Y, \mathcal{T}^Y)$ é contrátil, então $id_Y \simeq c$ para alguma função constante $c: (Y, \mathcal{T}^Y) \rightarrow (Y, \mathcal{T}^Y)$ dada por $c(y) = p$. Como $id_Y \simeq c$, $f \simeq f \circ id_Y \simeq f \circ c$ e $g \simeq g$, segue da proposição 3.7 que

$$f = id_Y \circ f \simeq c \circ f = c \circ g \simeq id_Y \circ g = g.$$

Reciprocamente, tomando $(X, \mathcal{T}^X) = (Y, \mathcal{T}^Y)$, segue por hipótese que quaisquer $f, g \in \mathcal{C}(Y; Y)$ são homotópicas. Em particular, $id_Y: (Y, \mathcal{T}^Y) \rightarrow (Y, \mathcal{T}^Y)$ é homotópica a qualquer função constante $c: (Y, \mathcal{T}^Y) \rightarrow (Y, \mathcal{T}^Y)$. Portanto, decorre da Proposição 3.12 que $(Y, \mathcal{T}^Y)$ é contrátil. $\square$

Proposição 3.14. Todo espaço contrátil é conexo por caminhos.

Demonstração. Seja $(X, \mathcal{T}^X)$ um espaço contrátil. Segue da Proposição 3.12 que existe uma homotopia $H: id_X \simeq c$, para alguma função constante $c: (X, \mathcal{T}^X) \rightarrow (X, \mathcal{T}^X)$ dada por $c(x) = p$. Para cada $x \in X$, defina a função $\alpha^x: (I, \mathcal{T}^I) \rightarrow (X, \mathcal{T}^X)$ dada por $\alpha^x(t) = H(x, t)$. Cada função α^x coincide com a composição do homeomorfismo padrão entre I e $\{x\} \times I$ (que leva t em (x, t)) e a restrição $H|_{\{x\} \times I}$. Assim, segue da Corolário 2.13 que cada α^x é contínua. Além disso, $\alpha^x(0) = H(x, 0) = x$ e $\alpha^x(1) = H(x, 1) = p$. Portanto, cada α^x é um caminho ligando os pontos x e p em $(X, \mathcal{T}^X)$ e decorre da Proposição 1.61 que $(X, \mathcal{T}^X)$ é conexo por caminhos. $\square$

Definição 3.15. Um subconjunto X de um espaço vetorial normado $(E, \|\cdot\|)$ é uma estrela de vértice p se, e somente se, para todo $x \in X$ tem-se que o segmento de reta $[p, x]$ está contido em X .

Definição 3.16. Um subconjunto Y de um espaço vetorial normado $(E, \|\cdot\|)$ é convexo se, e somente se, para todo par de pontos $x, y \in Y$ tem-se que o segmento de reta $[x, y]$ está contido em Y .

Proposição 3.17. Todo subconjunto estrela de um espaço vetorial é contrátil.

Demonstração. Seja $(X, \|\cdot\|)$ um subconjunto de um espaço vetorial. Se X é uma estrela de vértice p , então $H: (X \times I, \mathcal{T}^{\|\cdot\|} \otimes \mathcal{T}^I) \rightarrow (X, \|\cdot\|)$ dada por $H(x, t) = (1 - t)x + tp$ é uma homotopia entre id_X e a função constante $c: (X, \|\cdot\|) \rightarrow (X, \|\cdot\|)$ dada por $c(x) = p$. Portanto, decorre da Proposição 3.12 que $(X, \|\cdot\|)$ é contrátil. $\square$

Exemplo 3.18. *Um conjunto convexo pode ser considerado um conjunto estrela, com vértice em qualquer um dos seus pontos.*

Corolário 3.19. Todo subconjunto convexo de um espaço vetorial normado é contrátil.

Exemplo 3.20. *Todo espaço vetorial normado $(E, \|\cdot\|)$ é convexo e, portanto, contrátil.*

3.2 Funções homotópicas no sentido generalizado

Na seção anterior foram apresentadas homotopias no sentido usual, para as quais as funções homotópicas eram contínuas e a homotopia também. Nesta seção será apresentado uma ideia original do autor e do seu orientador sobre um tipo de homotopia, batizado de *homotopia generalizada*, na qual as funções associadas apresentam continuidade generalizada. Indicaremos por id a função $id: (I, \mathcal{T}^I) \rightarrow (I, \mathcal{T}^I)$ dada por $id(t) = t$. Dado um continuador $n: X \rightarrow (Z, \mathcal{Z})$, relembremos que $n \times id$ indica a função cartesiana $n \times id: X \times I \rightarrow (Z \times I, \mathcal{T}^Z \otimes \mathcal{T}^I)$ dada por

$$(n \times id)(x, t) = (n(x), t). \quad (3.4)$$

Definição 3.21. *Sejam X um conjunto não vazio, $(Y, \mathcal{T}^Y)$ e $(Z, \mathcal{T}^Z)$ espaços topológicos, $n: X \rightarrow (Z, \mathcal{T}^Z)$ um continuador e $f, g \in C_n(X, Y)$. As funções f e g são n -homotópicas se, e somente se, existe uma função $H: X \times I \rightarrow (Y, \mathcal{T}^Y)$ satisfazendo as seguintes condições:*

- (a) $H(x, 0) = f(x), \forall x \in X;$
- (b) $H(x, 1) = g(x), \forall x \in X;$
- (c) H é $(n \times id)$ -contínua, isto é, $H \in C_{n \times id}(X \times I, Y)$.

Denota-se que f é n -homotópica a g por $f \stackrel{n}{\simeq} g$. Caso a H seja uma função que cumpra as condições da Definição 3.21 acima, então ela é denominada uma n -homotopia entre f e g e a notação $H: f \stackrel{n}{\simeq} g$ será usada para indicar que f é n -homotópica a g por meio da n -homotopia H . O conjunto das funções que são n -homotópicas a f será denotado por $[f]_n$, isto é,

$$[f]_n = \{g \in C_n(X, Y): f \stackrel{n}{\simeq} g\}.$$

Essa definição é uma boa generalização do conceito de homotopia usual, pois ao tomar nesta definição o continuador n como a função $id_X: (X, \mathcal{T}^X) \rightarrow (X, \mathcal{T}^X)$, verifica-se que f e g ficam contínuas no sentido usual e que a condição (c) equivale a verificar se H é contínua no sentido usual. De fato, se $n = id_X$, então $id_X \times id: (X \times I, \mathcal{T}^X \otimes \mathcal{T}^I) \rightarrow (X \times I, \mathcal{T}^X \otimes \mathcal{T}^I)$ dada por $(id_X \times id)(x, t) = (x, t)$ e sendo que H é $(id_X \times id)$ -contínua, segue que dado $V \in \mathcal{T}^Y$ em torno $H(x_0, t_0)$, existe $U \in \mathcal{T}^X \otimes \mathcal{T}^I$ em torno de $(id_X \times id)(x_0, t_0)$ tal que

$$H(U) = H((id_X \times id)^{-1}(U)) \subset V,$$

o que equivale a dizer que H é contínua em todo (x_0, t_0) pela Definição 2.5. Assim, no caso em que se considera o continuador n como $id_X: (X, \mathcal{T}^X) \rightarrow (X, \mathcal{T}^X)$ a Definição 3.21 coincide com a Definição 3.1 e, portanto, 3.21 generaliza 3.1 de modo apropriado.

Exemplo 3.22. *Sejam $\mathbb{R}$ munido com a métrica usual e $f, g, n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funções constantes dadas por, $f(x) = -1$, $g(x) = 1$ e $n(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Tem-se que $f \stackrel{n}{\simeq} g$. Tome $H: \mathbb{R} \times I \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $H(x, t) = 2t - 1$. Note que $H(x, 0) = -1 = f(x)$ e $H(x, 1) = 1 = g(x)$. Observe que ao se considerar qualquer uma das três métricas mais usadas em $\mathbb{R}^2$ (métrica da soma, métrica euclidiana ou métrica do máximo) induzidas sobre $\mathbb{R} \times I$, tem-se que H é $(n \times id)$ -contínua em todo $(x_0, t_0) \in X \times I$. De fato, dado $\epsilon > 0$, tome $\delta = \frac{\epsilon}{2}$, donde resulta o cumprimento da regra 2.1 de continuidade generalizada no contexto métrico, a saber,*

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{R} \times I}((n \times id)(x, t), (n \times id)(x_0, t_0)) &= d_{\mathbb{R} \times I}((n(x), t), (n(x_0), t_0)) \\ &= d_{\mathbb{R} \times I}((0, t), (0, t_0)) \\ &= |t - t_0| < \delta \Rightarrow \\ d_{\mathbb{R}}(H(x, t), H(x_0, t_0)) &= d_{\mathbb{R}}(2t - 1, 2t_0 - 1) \\ &= |(2t - 1) - (2t_0 - 1)| \\ &= |2(t - t_0)| \\ &= 2|t - t_0| < 2\delta = 2 \cdot \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Seja $\pi_1: X \times I \rightarrow X$ a função projeção na primeira coordenada. Dado um continuador $n: X \rightarrow (Z, \mathcal{T}^Z)$, então a composição $n \circ \pi_1$ indica a função $n \circ \pi_1: X \times I \rightarrow (Z, \mathcal{T}^Z)$ dada por

$$n(\pi_1(x, t)) = n(x). \quad (3.5)$$

Definição 3.23. *Sejam X um conjunto não vazio, $(Y, \mathcal{T}^Y)$ e $(Z, \mathcal{T}^Z)$ espaços topológicos, $n: X \rightarrow (Z, \mathcal{T}^Z)$ um continuador e $f, g \in \mathcal{C}_n(X, Y)$. As funções f e g são estritamente n -homotópicas se, e somente se, existe uma função $H: X \times I \rightarrow (Y, \mathcal{T}^Y)$ satisfazendo as seguintes condições:*

- (a) $H(x, 0) = f(x), \forall x \in X;$
- (b) $H(x, 1) = g(x), \forall x \in X;$
- (c) H é $(n \circ \pi_1)$ -contínua, isto é, $H \in \mathcal{C}_{n \circ \pi_1}(X \times I, Y)$.

Denota-se que f é estritamente n -homotópica a g por $f \stackrel{n|}{\simeq} g$. Caso H seja uma função que cumpra as condições da Definição 3.23 acima para que f e g sejam estritamente n -homotópicas, então ela é denominada uma n -homotopia estrita entre f e g e a notação $H|: f \stackrel{n|}{\simeq} g$ será usada para indicar que f é estritamente n -homotópica a g por meio da n -homotopia estrita $H|$. O conjunto das funções que são estritamente n -homotópicas a f será denotado por $[f]_{n|}$, isto é,

$$[f]_{n|} = \{g \in \mathcal{C}_n(X, Y) : f \stackrel{n|}{\simeq} g\}.$$

Exemplo 3.24. *Sejam $\mathbb{R}$ munido com a métrica usual e $f, g, n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funções, dadas por $f(x) = x$, $g(x) = x + 1$ e $n(x) = x$. Tem-se que f e g são n -contínuas, pois são contínuas. Tome $H: \mathbb{R} \times I \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $H(x, t) = x + t$. Note que $H(x, 0) = x = f(x)$ e $H(x, 1) = x + 1 = g(x)$. Observe que ao se considerar a métrica da soma em $\mathbb{R}^2$ induzida sobre $\mathbb{R} \times I$, tem-se que H é $(n \times id)$ -contínua em todo $(x_0, t_0) \in X \times I$. De fato, dado $\epsilon > 0$, tome $\delta = \epsilon$, donde resulta o cumprimento da regra 2.1 de continuidade generalizada no contexto métrico, a saber,*

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{R} \times I}((n \times id)(x, t), (n \times id)(x_0, t_0)) &= d_{\mathbb{R} \times I}((n(x), t), (n(x_0), t_0)) = \\ d_{\mathbb{R} \times I}((x, t), (x_0, t_0)) &= |x - x_0| + |t - t_0| < \delta \Rightarrow \\ d_{\mathbb{R}}(H(x, t), H(x_0, t_0)) &= d_{\mathbb{R}}((x + t), (x_0 + t_0)) = \\ &= |x - x_0 + t - t_0| \\ &\leq |x - x_0| + |t - t_0| < \delta = \epsilon. \end{aligned}$$

Portanto, f e g são n -homotópicas, isto é, $f \stackrel{n}{\simeq} g$.

Contudo, H não é $(n \circ \pi_1)$ -contínua em $(x_0, 1)$, pois para $\epsilon = \frac{1}{2}$ e para um ponto da forma $(x_0, 0) \in X \times I$, verifica-se para todo $\delta > 0$ que

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{R}}((n \circ \pi_1)(x_0, 0), (n \circ \pi_1)(x_0, 1)) &= d_{\mathbb{R}}(n(x_0), n(x_0)) = 0 < \delta \Rightarrow \\ d_{\mathbb{R}}(H(x_0, 0), H(x_0, 1)) &= d_{\mathbb{R}}(x_0, x_0 + 1) = 1 > \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

o que contraria a regra [2.1](#) de continuidade generalizada no contexto métrico. Portanto, f não é estritamente n -homotópica a g , isto é, $f \not\stackrel{n}{\simeq} g$.

A próxima proposição relaciona o conceito de n -homotopia com o conceito de n -homotopia estrita.

Teorema 3.25. *Sejam X um conjunto não vazio, $(Y, \mathcal{T}^Y)$ e $(Z, \mathcal{T}^Z)$ espaços topológicos, $n: X \rightarrow (Z, \mathcal{T}^Z)$ um continuador e $f, g \in C_n(X, Y)$. Se $f \stackrel{n}{\simeq} g$, então $f \simeq g$.*

Demonstração. Seja $H: X \times I \rightarrow (Y, \mathcal{T}^Y)$ uma n -homotopia estrita entre f e g . Então $H(x, 0) = f(x)$ e $H(x, 1) = g(x)$, para todo $x \in X$. Assim, H satisfaz as condições (a) e (b) da Definição [3.21](#). Decorre da Proposição [2.50](#) que $H \in C_{n \times id}(X \times I, Y)$, visto que $H \in C_{n \circ \pi_1}(X \times I, Y)$ por hipótese. Como H satisfaz as três condições da Definição [3.21](#), segue que H é uma n -homotopia entre f e g , isto é, $f \stackrel{n}{\simeq} g$. $\square$

Observe que pelo Exemplo [3.24](#) a recíproca do teorema anterior é falsa.

3.3 Propriedades de homotopia generalizada

Proposição 3.26. *Sejam $(E, \|\cdot\|)$ um espaço vetorial e X um subconjunto não-vazio de E . Se $f, g: X \rightarrow (E, \|\cdot\|)$ são funções constantes e $n: X \rightarrow (E, \|\cdot\|)$ dada por $n(x) = ax + y$, com y fixado em E , então f e g são n -homotópicas.*

Demonstração. Como f, g são constantes, então existem $p, q \in E$ tais que $f(x) = p$ e $g(x) = q$, para todo $x \in X$. Considere a função $H: X \times I \rightarrow (E, \|\cdot\|)$ dada por $H(x, t) = t \cdot q + (1 - t) \cdot p$. Tem-se que

- (a) $H(x, 0) = p$, para todo $x \in X$;
- (b) $H(x, 1) = q$, para todo $x \in X$;
- (c) H é $(n \times id)$ -contínua em (x_0, t_0) .

Considerando $E \times I$ munido com a métrica da soma, segue a verificação da regra 2.1 de continuidade generalizada para H com respeito a $n \times id$. Note que

$$\begin{aligned} d_{E \times I}((n \times id)(x, t), (n \times id)(x_0, t_0)) &= d_{E \times I}((n(x), t), (n(x_0), t_0)) \\ &= \|n(x) - n(x_0)\|_E + |t - t_0| = \|ax + y - (ax_0 - y)\|_E + |t - t_0| \\ \|ax - ax_0\|_E + |t - t_0| &= |a| \cdot \|x - x_0\|_E + |t - t_0| \end{aligned}$$

e que

$$\begin{aligned} d_E(H(x, t), H(x_0, t_0)) &= \|(t \cdot q + (1 - t) \cdot p) - (t_0 \cdot q + (1 - t_0) \cdot p)\| \\ &= \|(t - t_0) \cdot q - (t - t_0) \cdot p\|_E = |t - t_0| \cdot \|p - q\|_E. \end{aligned}$$

Se $\|p - q\|_E = 0$, tomando qualquer $\delta > 0$, tem-se que

$$d_{E \times I}((n \times id)(x, t), (n \times id)(x_0, t_0)) < \delta \Rightarrow d_E(H(x, t), H(x_0, t_0)) = |t - t_0| \cdot \|p - q\|_E = 0 < \epsilon.$$

Caso contrário, tomando $\delta = \frac{\epsilon}{\|p - q\|_E}$, tem-se que

$$\begin{aligned} d_{E \times I}((n \times id)(x, t), (n \times id)(x_0, t_0)) &= |a| \cdot \|x - x_0\|_E + |t - t_0| < \delta \\ \Rightarrow |t - t_0| < \delta &= \frac{\epsilon}{\|p - q\|_E} \\ \Rightarrow |t - t_0| \cdot \|p - q\|_E &= d_E(H(x, t), H(x_0, t_0)) < \epsilon. \end{aligned}$$

□

Proposição 3.27. *Sejam X um conjunto não vazio, $(Y, \mathcal{T}^Y)$ e $(Z, \mathcal{T}^Z)$ espaços topológicos e $n: X \rightarrow (Z, \mathcal{T}^Z)$ um continuador. Se $f \in \mathcal{C}_n(X, Y)$, então f é estritamente n -homotópica a f .*

Demonstração. A função $H: X \times I \rightarrow (Y, \mathcal{T}^Y)$ dada por $H(x, t) = f(x)$ é tal que $H(x, 0) = f(x)$ e $H(x, 1) = f(x)$, para todo $x \in X$. Sejam $(a, s) \in X \times I$ e $U \in \mathcal{T}_{H(a, s)}^Y = \mathcal{T}_{f(a)}^Y$. Como f é n -contínua, então para este $U \in \mathcal{T}_{f(a)}^Y$, existe $V \in \mathcal{T}_{n(a)}^Z$ tal que

$$f(n^{-1}(V)) \subset U.$$

Como $V \in \mathcal{T}_{n(a)}^Z = \mathcal{T}_{(n \circ \pi_1)(a, s)}^Z$, segue que

$$H((n \circ \pi_1)^{-1}(V)) = H(\pi_1^{-1}(n^{-1}(V))) = H(n^{-1}(V) \times I) = f(n^{-1}(V)) \subset U.$$

Portanto H é $(n \circ \pi_1)$ -contínua e f é estritamente n -homotópica a f .

□

Corolário 3.28. *Sejam X um conjunto não vazio, $(Y, \mathcal{T}^Y)$ e $(Z, \mathcal{T}^Z)$ espaços topológicos e $n: X \rightarrow (Z, \mathcal{T}^Z)$ um continuador. Se $f \in \mathcal{C}_n(X, Y)$, então f é n -homotópica a f .*

Demonstração. Segue da Proposição 3.27 e do Teorema 3.25. $\square$

Proposição 3.29. *Sejam X um conjunto não vazio, $(Y, \mathcal{T}^Y)$, $(Z, \mathcal{T}^Z)$ e $(W, \mathcal{T}^W)$ espaços topológicos e $n: X \rightarrow (Z, \mathcal{T}^Z)$ um continuador. Se $f \in \mathcal{C}_n(X, Y)$, $g, h \in \mathcal{C}_{id_Y}(Y, W)$ e $g \simeq h$, então $g \circ f \stackrel{n}{\simeq} h \circ f$.*

Demonstração. Como f é n -homotópica a f , conforme o Corolário 3.28, então existe uma função $H: X \times I \rightarrow (Y, \mathcal{T}^Y)$ dada por $H(x, t) = f(x)$ tal que $(n \times id)$ -contínua, $H(x, 0) = f(x)$ e $H(x, 1) = f(x)$, para todo $x \in X$. Por hipótese g e h são homotópicas, então existe $K: (Y \times I, \mathcal{T}^Y \otimes \mathcal{T}^I) \rightarrow (W, \mathcal{T}^W)$ tal que K é $(id_Y \times id)$ -contínua, $K(x, 0) = g(x)$ e $K(x, 1) = h(x)$. Considerando $L: X \times I \rightarrow (W, \mathcal{T}^W)$ dada por

$$L(x, t) = K(H(x, t), t),$$

tem-se que L é uma n -homotopia entre $g \circ f$ e $h \circ f$. De fato,

- (a) $L(x, 0) = K(H(x, 0), 0) = K(f(x), 0) = g(f(x))$, para todo $x \in X$;
- (b) $L(x, 1) = K(H(x, 1), 1) = K(f(x), 1) = h(f(x))$, para todo $x \in X$;
- (c) L é $(n \times id)$ -contínua em todo $(x_0, t_0) \in X \times I$.

Para a verificação da continuidade generalizada de L com respeito a $n \times id$, tem-se que

$$L(x, t) = K(H(x, t), t) = K(f(x), t) = K \circ (f \times id).$$

Como K é $(id_Y \times id)$ -contínua e $(id_Y \times id)$ coincide com a função $id_{Y \times I}$, então K é contínua. Assim, decorre do item (i) do Teorema 2.47 que $K \circ (f \times id)$ é $(f \times id)$ -contínua. Segue da Proposição 2.49 que $(f \times id)$ é $(n \times id)$ -contínua, visto que f é n -contínua e id é id -contínua. Decorre do item (i) da Proposição 2.39 que $K \circ (f \times id)$ é $(n \times id)$ -contínua. Logo, L é $(n \times id)$ -contínua e, portanto, L uma n -homotopia entre $g \circ f$ e $h \circ f$. $\square$

3.4 Homotopia generalizada descrita como caminho

Definição 3.30. *Sejam X um conjunto não vazio, $(Y, \mathcal{T}^Y)$ e $(Z, \mathcal{T}^Z)$ espaços topológicos, $n: X \rightarrow (Z, \mathcal{T}^Z)$ um continuador e $f, g \in \mathcal{C}_n(X, Y)$. As funções f e g são n -conectadas se, e somente se, existe uma função contínua $c: (I, \mathcal{T}^I) \rightarrow (\mathcal{C}_n(X, Y), \mathcal{T}_{n-co})$ tal que $c(0) = f$ e $c(1) = g$.*

O conjunto das funções que estão n -conectadas com f será denotado por $\{\vec{f}\}_n$, isto é

$$\{\vec{f}\}_n = \{g \in C_n(X, Y) : f \text{ é } n\text{-conectada a } g\}. \quad (3.6)$$

Intuitivamente dizer que f e g são n -conectadas é conseguir pelo menos um caminho (curva contínua) em $(C_n(X, Y), \mathcal{T}_{n\text{-co}})$ ligando f a g .

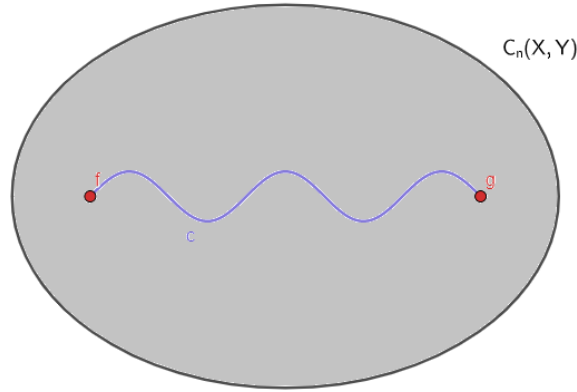


Figura 3.1: f n -conectada com g

Fonte: Arquivo pessoal do autor.

Lema 3.31. *Sejam A um conjunto e $\{B_i : i \in L\}$ uma família de conjuntos. Se $A \subset \bigcup_{i \in L} B_i$, então $A \subset \bigcup_{i \in J} B_i$, com $J = \{i \in L : A \cap B_i \neq \emptyset\}$.*

Demonstração. Como $A \subset \bigcup_{i \in L} B_i$ então,

$$\begin{aligned} A &= A \cap A \subset A \cap \left(\bigcup_{i \in L} B_i \right) = \bigcup_{i \in L} (A \cap B_i) = \bigcup_{i \in J \cup (L-J)} (A \cap B_i) = \\ &= \left(\bigcup_{i \in J} (A \cap B_i) \right) \cup \left(\bigcup_{i \in L-J} (A \cap B_i) \right) = \left(\bigcup_{i \in J} (A \cap B_i) \right) \cup \emptyset = \bigcup_{i \in J} (A \cap B_i) = \\ &= A \cap \left(\bigcup_{i \in J} B_i \right) \subset \bigcup_{i \in J} B_i. \end{aligned}$$

□

Lema 3.32. *Se $(K \times \{t_0\}) \cap (G_i \times H_i) \neq \emptyset, \forall i = 1, \dots, k$, então $\{t_0\} \cap H_i \neq \emptyset, \forall i = 1, \dots, k$.*

Demonstração. Note que

$$(K \cap G_i) \times (\{t_0\} \cap H_i) = (K \times \{t_0\}) \cap (G_i \times H_i) \neq \emptyset.$$

Como $(K \cap G_i) \times (\{t_0\} \cap H_i) \neq \emptyset$, então $(K \cap G_i) \neq \emptyset$ e $(\{t_0\} \cap H_i) \neq \emptyset, \forall i = 1, \dots, k$. □

Teorema 3.33. *Sejam X um conjunto não vazio, $(Y, \mathcal{T}^Y)$ e $(Z, \mathcal{T}^Z)$ espaços topológicos, $n: X \rightarrow (Z, \mathcal{T}^Z)$ um continuador e $f, g \in \mathcal{C}_n(X, Y)$. Se f e g são n -homotópicas e n é injetiva, então f e g são n -conectadas.*

Demonstração. Seja $H: X \times I \rightarrow (Y, \mathcal{T}^Y)$ a n -homotopia entre f e g . Por definição de n -homotopia tem-se que $H \in \mathcal{C}_{n \times id}(X \times I, Y)$. Para cada $t \in I$, considere a função $H^t: X \rightarrow (Y, \mathcal{T}^Y)$ dada por

$$H^t(x) = H(x, t).$$

Mostremos que:

1) $H^t \in \mathcal{C}_n(X, Y)$, para todo $t \in I$.

Sejam $s \in I$, $a \in X$ e U uma vizinhança básica do ponto $H^s(a)$ com respeito a $\mathcal{T}^Y$, isto é, $U \in \mathcal{B}_{H^s(a)}^Y$. Como $H^s(a) = H(a, s)$ e H é n -contínua em (a, s) , segue que para o $U \in \mathcal{B}_{H^s(a)}^Y$, existe $W \times J \in \mathcal{B}_{(n \times id)(a, s)}^{Z \times I}$ tal que:

$$H((n \times id)^{-1}(W \times J)) = H(n^{-1}(W) \times id^{-1}(J)) \subset U.$$

Como W é aberto em $\mathcal{T}_{n(a)}^Z$, então $W = \bigcup_{V_i \in \mathcal{C}} V_i$, com $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}_{n(a)}^Z$. Como $n(a) \in W$, existe $V_{i_0} \in \mathcal{C}$ tal que $n(a) \in V_{i_0}$ para algum $V_{i_0} \in \mathcal{C}$. Tome $V = V_{i_0}$. Temos que

$$H^s(n^{-1}(V)) = H(n^{-1}(V) \times \{s\}) \subset H(n^{-1}(V) \times id^{-1}(J)) \subset U.$$

Portanto, $H^s \in \mathcal{C}_n(X, Y)$.

2) Se $H \in \mathcal{C}_{n \times id}(X \times I, Y)$, então a função $c: (I, \mathcal{T}^I) \rightarrow (\mathcal{C}_n(X, Y), \mathcal{T}_{n\text{-co}})$ dada por

$$c(t) = H^t$$

com $H^t(x) = H(x, t)$, é contínua.

Sejam $s \in I$ e $M_n(K, U)$ um aberto sub-básico em torno de $c(t_0)$. Devemos encontrar $L \in \mathcal{T}_s^I$ tal que $c(L) \subset M_n(K, U)$, pois deste modo a função c é contínua pela Proposição 2.45. Note que

$$\begin{aligned} c(s) \in M_n(K, U) &\Rightarrow c(s)(n^{-1}(k)) \subset U \Rightarrow H^s(n^{-1}(K)) \subset U \Rightarrow H(n^{-1}(K) \times \{s\}) \subset U \\ &\Rightarrow H(n^{-1}(K) \times id^{-1}(\{s\})) \subset U \Rightarrow H((n \times id)^{-1}(K \times \{s\})) \subset U \\ &\Rightarrow (n \times id)^{-1}(K \times \{s\}) \subset H^{-1}(U) \Rightarrow K \times \{s\} \subset (n \times id)(H^{-1}(U)). \end{aligned}$$

sendo que esta última implicação é válida, visto que K está contido na imagem de n e por sua vez $K \times \{s\}$ está contido na imagem da função $(n \times id)$. Como $H \in \mathcal{C}_{n \times id}(X \times I, Y)$

segue que $H \in W_{n \times id}(X \times I, Y)$, e uma vez que U é aberto em Y , segue do Teorema 2.38 que $(n \times id)(H^{-1}(U))$ é aberto em $n(X) \times I$. Logo

$$(n \times id)(H^{-1}(U)) = \bigcup_{i \in L} (G_i \times L_i),$$

sendo que para cada $i \in L$, tem-se que $G_i \times L_i$ é um aberto básico na base topológica da topologia produto em $n(X) \times I$, ou seja, G_i é aberto em $n(X)$ e L_i aberto em I . Daí temos que $K \times \{s\} \subset \bigcup_{i \in L} (G_i \times L_i)$ que é uma cobertura aberta para $K \times \{s\}$. Pelo Lema 3.31 é possível considerar $J \subset I$ tal que $(K \times \{s\}) \cap (G_i \times L_i) \neq \emptyset$, para todo $i \in J$, e que $K \times \{s\} \subset \bigcup_{i \in J} (G_i \times L_i)$. Como K é compacto em $n(X)$ e $\{s\}$ é compacto, segue que $K \times \{s\}$ admite subcobertura finita, ou seja, existem $(G_1 \times L_1), \dots, (G_k \times L_k)$, com $i = 1, \dots, k \in J$ tais que:

$$K \times \{s\} \subset \bigcup_{i=1}^k (G_i \times L_i).$$

Como $(K \times \{s\}) \cap (G_i \times L_i) \neq \emptyset$, para todo $i = 1, \dots, k$, decorre do Lema 3.32 que $\{s\} \cap L_i \neq \emptyset$, para todo $i = 1, \dots, k$, isto é, $s \in L_1 \cap \dots \cap L_k$. Tome $L = \bigcap_{i=1}^k (L_i)$. Claramente L é aberto em I . Por fim, tem-se que $c(L) \subset M_n(K, U)$. Verificar isto equivale a mostrar que dado $c(t) \in c(L)$, com $t \in L$, tem-se que $c(t) \in M_n(K, U)$ ou, mais precisamente, que $H^t(n^{-1}(K)) \subset U$. Seja $w \in H^t(n^{-1}(K))$. Assim, existe um $x \in n^{-1}(K)$ tal que $H^t(x) = w$. Como $x \in n^{-1}(K)$, então $n(x) \in K$. Como $t \in L$, então $t \in L_i$, para todo $i = 1, \dots, k$. Como $K \times \{s\} \subset \bigcup_{i=1}^k (G_i \times L_i)$ e $n(x) \in K$, então existe $j \in \{1, \dots, k\}$ tal que $n(x) \in G_j$. Assim, $(n(x), t) \in G_j \times L_j$ e isto implica que $(n(x), t) \in \bigcup_{i=1}^k (G_i \times L_i) \subset \bigcup_{i \in L} (G_i \times L_i) = (n \times id)(H^{-1}(U))$. Se $(n(x), t) \in (n \times id)(H^{-1}(U))$, então existe $(x_0, t_0) \in H^{-1}(U)$ tal que $(n(x_0), t_0) = (n \times id)(x_0, t_0) = (n(x), t)$ ou, mais precisamente, $n(x_0) = n(x)$ e $t_0 = t$. Como, por hipótese, n é injetora, então $x = x_0$. Desta forma, $(x, t) \in H^{-1}(U)$ e isto implica que $w = H^t(x) = H(x, t) \in U$. Portanto, $H^t(n^{-1}(K)) \subset U$ e, consequentemente, $c(t) \in M_n(K, U)$ e $c(L) \subset M_n(K, U)$. $\square$

A recíproca da parte 2) da demonstração do Teorema 3.33 é válida com hipóteses adicionais, a saber, $n(X)$ seja localmente compacto, Hausdorff e n seja uma função aberta e injetora.

O leitor pode verificar que dadas funções $H: X \times I \rightarrow Y$ e $c: I \rightarrow C_n(X, Y)$ a seguinte equivalência é válida:

$$H = \varepsilon_n \circ (id_X \times c) \Leftrightarrow c(t) = H^t, \quad \forall t \in I, \quad (3.7)$$

sendo $H^t: X \rightarrow Y$ dada por $H^t(x) = H(x, t)$.

Teorema 3.34. *Sejam $(X, \mathcal{T}^X)$, $(Y, \mathcal{T}^Y)$ e $(Z, \mathcal{T}^Z)$ espaços topológicos e considere uma função $H: X \times I \rightarrow (Y, \mathcal{T}^Y)$ e um continuador $n: (X, \mathcal{T}^X) \rightarrow (Z, \mathcal{T}^Z)$. Se n é uma função injetora e aberta, o conjunto $n(X)$ é Hausdorff localmente compacto e a função $c: (I, \mathcal{T}^I) \rightarrow (\mathbf{C}_n(X, Y), \mathcal{T}_{n\text{-co}})$ dada por*

$$c(t) = H^t,$$

com

$$H^t(x) = H(x, t),$$

é contínua, então $H \in \mathbf{C}_{n \times id}(X \times I, Y)$.

Demonstração. Segue da equivalência (3.7) que $H: X \times I \rightarrow (Y, \mathcal{T}^Y)$ pode ser expressa por

$$H = \varepsilon_n \circ (id_X \times c),$$

sendo $\varepsilon_n: (X \times \mathbf{C}_n(X, Y), \mathcal{T}^X \otimes \mathcal{T}_{n\text{-co}}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}^Y)$ a função avaliação, id_X a identidade em $(X, \mathcal{T}^X)$ e $c: (I, \mathcal{T}^I) \rightarrow (\mathbf{C}_n(X, Y), \mathcal{T}_{n\text{-co}})$ a função considerada na hipótese desse teorema. Segue da Proposição 2.51 que $\varepsilon_n \in \mathbf{C}_{id}(X \times \mathbf{C}_n(X, Y), Y)$, pois n é injetora e $n(X)$ é Hausdorff localmente compacto. Decorre da Proposição 2.52 que id_X é n -contínua, uma vez que n injetora e aberta. Como c é contínua e id_X é n -contínua, segue da Proposição 2.49 que $(id_X \times c) \in \mathbf{C}_{n \times id}(X \times I, Y)$. Se $(id_X \times c) \in \mathbf{C}_{n \times id}(X \times I, Y)$ e $\varepsilon_n \in \mathbf{C}_{id}(X \times \mathbf{C}_n(X, Y), Y)$, segue do item (ii) do Teorema 2.47 que $\varepsilon_n \circ (id_X \times c) \in \mathbf{C}_{n \times id}(X \times I, Y)$. Portanto, $H \in \mathbf{C}_{n \times id}(X \times I, Y)$. $\square$

Corolário 3.35. *Sejam $(X, \mathcal{T}^X)$, $(Y, \mathcal{T}^Y)$ e $(Z, \mathcal{T}^Z)$ espaços topológicos, $f, g \in \mathbf{C}_n(X, Y)$ e $n: (X, \mathcal{T}^X) \rightarrow (Z, \mathcal{T}^Z)$ um continuador. Se n é uma função injetora e aberta, $n(X)$ é Hausdorff localmente compacto e f é n -conectada com g , então f é n -homotópica a g .*

Demonstração. Se f é n -conectada com g , então existe $c: (I, \mathcal{T}^I) \rightarrow (\mathbf{C}_n(X, Y), \mathcal{T}_{n\text{-co}})$ uma função contínua tal que $c(0) = f$ e $c(1) = g$. Defina $H: X \times I \rightarrow (Y, \mathcal{T}^Y)$ dada por

$$H(x, t) = (\varepsilon_n \circ (id_X \times c))(x, t).$$

Decorre das hipóteses, da equivalência (3.7) e do Teorema 3.34 que $H \in C_{n \times id}(X \times I, Y)$. Além disso, $H(x, 0) = H^0(x) = c(0)(x) = f(x)$ e $H(x, 1) = H^1(x) = c(1)(x) = g(x)$. Portanto, $H: f \stackrel{n}{\simeq} g$. $\square$

Proposição 3.36. *Sejam X um conjunto não vazio, $(Y, \mathcal{T}^Y)$ e $(Z, \mathcal{T}^Z)$ espaços topológicos e $n: X \rightarrow (Z, \mathcal{T}^Z)$ um continuador. A relação “ser n -conectada a” é uma relação de equivalência no conjunto $C_n(X, Y)$.*

Demonstração. Seja $f \in C_n(X, Y)$ e considere $c: (I, \mathcal{T}^I) \rightarrow (C_n(X, Y), \mathcal{T}_{n-co})$ dada por $c(t) = f$, para todo $t \in I$. Note que c é uma função contínua, pois ela é uma função constante e, além disso, $c(0) = f$ e $c(1) = f$. Portanto, f é n -conectada a f e, conseqüentemente, a relação “ser n -conectada a” é reflexiva.

Sejam $f, g \in C_n(X, Y)$ funções n -conectadas por uma função $c: (I, \mathcal{T}^I) \rightarrow (C_n(X, Y), \mathcal{T}_{n-co})$ contínua. A função $\overleftarrow{c}: I \rightarrow C_n(X, Y)$ dada por $\overleftarrow{c}(t) = c(t - 1)$ é uma função contínua ligando g a f . Portanto, g e f são n -conectadas e, conseqüentemente, a relação “ser n -conectada a” é simétrica.

Sejam $f, g, h \in C_n(X, Y)$ e $c, d: (I, \mathcal{T}^I) \rightarrow (C_n(X, Y), \mathcal{T}_{n-co})$ funções contínuas que n -conectam f a g e g a h , respectivamente. A função $(c * d): (I, \mathcal{T}^I) \rightarrow (C_n(X, Y), \mathcal{T}_{n-co})$ dada por

$$(c * d)(t) = \begin{cases} c(2t), & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ d(2t - 1), & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

é uma função contínua ligando f a h , pois $(c * d)(0) = c(0) = f$ e $(c * d)(1) = d(1) = h$. Portanto, f e h estão n -conectadas e, conseqüentemente, a relação “ser n -conectada a” é transitiva. $\square$

Corolário 3.37. *Sejam $(X, \mathcal{T}^X)$, $(Y, \mathcal{T}^Y)$ e $(Z, \mathcal{T}^Z)$ espaços topológicos e considere um continuador $n: (X, \mathcal{T}^X) \rightarrow (Z, \mathcal{T}^Z)$. Se n é uma função injetiva e aberta, $n(X)$ é Hausdorff localmente compacto, então a relação de “ser n -homotópico a” é uma relação de equivalência no conjunto $C_n(X, Y)$.*

Demonstração. Segue da Proposição 3.28 que a relação “ser n -homotópico a” é reflexiva, para qualquer continuador n .

Sejam $f, g \in C_n(X, Y)$ funções n -homotópicas. Como f e g são n -homotópicas e n é injetiva, segue do Teorema 3.33 que f é n -conectada com g . Segue pela simetria descrita na Proposição 3.36 que g é n -conectada a f . Como n é uma função injetora e aberta,

$n(X)$ é Hausdorff localmente compacto e g é n -conectada com f , segue do Corolário 3.35 que g é n -homotópica a f . Portanto, nestas condições a relação “ser n -homotópica a” é simétrica.

Sejam $f, g, h \in C_n(X, Y)$. Como f é n -homotópica a g , g é n -homotópica a h e n é um continuador injetivo, segue do Teorema 3.33 que f é n -conectada a g e g é n -conectada a h . Segue pela transitividade descrita na Proposição 3.36 que f é n -conectada a h . Como n é uma função injetora e aberta, $n(X)$ é Hausdorff localmente compacto e f é n -conectada a h , segue do Corolário 3.35 que f é n -homotópica a h . Portanto, nestas condições a relação “ser n -homotópica a” é transitiva. $\square$

Uma pergunta que podemos nos fazer é: se $H: f \xrightarrow{n} g$ e $K: g \xrightarrow{n} h$ e definirmos

$$L(x, t) = \begin{cases} H(x, 2t), & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ K(x, 2t - 1), & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases},$$

será que $L \in C_{n \times id}(X \times I, Y)$?

Visto que $f \xrightarrow{n} g$ e $g \xrightarrow{n} h$, então existem funções $\alpha, \beta: (I, \mathcal{T}^I) \rightarrow (C_n(X, Y), \mathcal{T}_{n\text{-co}})$ dadas por $\alpha(t) = H^t(x)$, com $H^t(x) = H(x, t)$, e $\beta(t) = K^t(x)$, com $K^t(x) = K(x, t)$, tais que $\alpha(0) = f$, $\alpha(1) = g$, $\beta(0) = g$, $\beta(1) = h$. Considere $\gamma: (I, \mathcal{T}^I) \rightarrow (C_n(X, Y), \mathcal{T}_{n\text{-co}})$ dada por $\gamma = \alpha * \beta$. Para se ter γ contínua é suficiente que n seja injetora, pois pelo Teorema 3.33, se n é injetora, então α e β são contínuas e, conseqüentemente, γ é contínua. Note que

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= \begin{cases} \alpha(2t), & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2t - 1), & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} = \begin{cases} H^{2t}(x), & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ K^{2t-1}(x), & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} = \\ &= \begin{cases} H(x, 2t), & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ K(x, 2t - 1), & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} = L(x, t). \end{aligned}$$

Para se ter $L \in C_{n \times id}(X \times I, Y)$, é suficiente que γ seja contínua, n seja injetora e aberta e $n(X)$ seja Hausdorff localmente compacto para que se possa fazer o uso do Teorema 3.34. Portanto, a resposta a pergunta acima é afirmativa no caso em que o continuador n seja injetor, aberto e sua imagem $n(X)$ seja Hausdorff localmente compacto.

Antes de apresentar o próximo teorema será destacada uma consequência importante do item (i) do Teorema 2.39, a qual está relacionada a inclusões envolvendo espaços de funções com continuidade generalizada.

Proposição 3.38. *Sejam X um conjunto não vazio, $(Z, \mathcal{T}^Z)$ e $(W, \mathcal{T}^W)$ espaços topológicos e $p: X \rightarrow (Z, \mathcal{T}^Z)$ e $q: X \rightarrow (W, \mathcal{T}^W)$ dois continuadores. Se $p \in \mathcal{C}_q(X, Z)$, então*

$$\mathcal{C}_p(X, Y) \subset \mathcal{C}_q(X, Y), \text{ para qualquer contradomínio } (Y, \mathcal{T}^Y). \quad (3.8)$$

Demonstração. Sejam $(Y, \mathcal{T}^Y)$ um espaço topológico e $f \in \mathcal{C}_p(X, Y)$. Se $p \in \mathcal{C}_q(X, Z)$, segue do item (i) do Teorema 2.39 que $f \in \mathcal{C}_q(X, Y)$. Portanto, $\mathcal{C}_p(X, Y) \subset \mathcal{C}_q(X, Y)$. $\square$

No caso em que $p \in \mathcal{C}_q(X, Z)$, devido a expressão (3.8), pode-se equipar o conjunto $\mathcal{C}_p(X, Y)$ com topologia induzida pela topologia $\mathcal{T}_{q\text{-co}}$ que equipa $\mathcal{C}_q(X, Y)$. Por outro lado, o conjunto $\mathcal{C}_p(X, Y)$ também pode ser munido com a topologia $\mathcal{T}_{p\text{-co}}$. Questionamentos naturais que surgem disso são: A topologia induzida por $\mathcal{T}_{q\text{-co}}$ e a topologia $\mathcal{T}_{p\text{-co}}$ são comparáveis em $\mathcal{C}_p(X, Y)$? Caso sejam comparáveis, qual seria a mais fraca? Em certas condições, o teorema a seguir traz respostas a estes questionamentos.

Teorema 3.39. *Sejam $(X, \mathcal{T}^X)$, $(Y, \mathcal{T}^Y)$ e $(Z, \mathcal{T}^Z)$ e $(W, \mathcal{T}^W)$ espaços topológicos, $f, g: (X, \mathcal{T}^X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}^Y)$ funções e $p: (X, \mathcal{T}^X) \rightarrow (Z, \mathcal{T}^Z)$ e $q: (X, \mathcal{T}^X) \rightarrow (W, \mathcal{T}^W)$ continuadores, com $p \in \mathcal{C}_q(X, Z)$. As seguintes afirmações são válidas:*

- (i) *Se p é injetor e q é homeomorfismo, então a topologia $\mathcal{T}_{q\text{-co}}$ induzida a $\mathcal{C}_p(X, Y)$ é mais fraca que a topologia $\mathcal{T}_{p\text{-co}}$ em $\mathcal{C}_p(X, Y)$.*
- (ii) *Se p é injetor, q é um homeomorfismo, $q(X)$ Hausdorff localmente compacto e $f \stackrel{p}{\simeq} g$, então $f \stackrel{q}{\simeq} g$.*

Demonstração. (i) A topologia $\mathcal{T}_{q\text{-co}}$ induzida a $\mathcal{C}_p(X, Y)$ é a topologia que tem os abertos sub-básicos da forma

$$(K, U)_q \cap \mathcal{C}_p(X, Y) = \{f \in \mathcal{C}_p(X, Y): f(q^{-1}(K)) \subset U, K \in \mathcal{K}_q \text{ e } U \in \mathcal{T}^Y\}.$$

Tem-se que cada $(K_1, U_1)_q \cap \mathcal{C}_p(X, Y) = (p(q^{-1}(K_1)), U_1)_p$, sendo $(p(q^{-1}(K_1)), U_1)_p$ um aberto sub-básico de $\mathcal{T}_{p\text{-co}}$, pois

$$\begin{aligned} (K_1, U_1)_q \cap \mathcal{C}_p(X, Y) &= \\ \{f \in \mathcal{C}_p(X, Y): f(q^{-1}(K_1)) \subset U_1, K_1 \in \mathcal{K}_q \text{ e } U_1 \in \mathcal{T}^Y\} &= \\ \{f \in \mathcal{C}_p(X, Y): f(p^{-1}(p(q^{-1}(K_1)))) \subset U_1, p(q^{-1}(K_1)) \in \mathcal{K}_p \text{ e } U_1 \in \mathcal{T}^Y\} &= \\ (p(q^{-1}(K_1)), U_1)_p. \end{aligned}$$

Observe que na sequência anterior de igualdades de conjuntos a segunda igualdade é válida, pois o continuador p é injetivo e $p(q^{-1}(K_1)) \in \mathcal{K}_p$.

A seguir consta a verificação que $p(q^{-1}(K_1)) \in \mathcal{K}_p$. Usando a hipótese que q é um homeomorfismo (bijetora, contínua e com inversa contínua) e K_1 é um compacto em $q(X)$, tem-se que $q^{-1}(K_1)$ é compacto em X . Como $p \in \mathcal{C}_q(X, Z)$ e $q \in \mathcal{C}_{id}(X, W)$, decorre do item (i) do Teorema 2.39 que $p \in \mathcal{C}_{id}(X, Z)$, ou seja, p é contínua. Assim, se p é contínua e $q^{-1}(K_1)$ é compacto em X , então $p(q^{-1}(K_1))$ é compacto em $p(X)$.

Uma vez que $(K_1, U_1)_q \cap \mathcal{C}_p(X, Y) = (p(q^{-1}(K_1)), U_1)_p$, conclui-se que a sub-base da topologia $\mathcal{T}_{q\text{-co}}$ induzida a $\mathcal{C}_p(X, Y)$ está contida na sub-base da $\mathcal{T}_{p\text{-co}}$ em $\mathcal{C}_p(X, Y)$, isto é, $\mathcal{S}_{q\text{-co}}^{\mathcal{C}_p} \subset \mathcal{S}_{p\text{-co}}$. Desta forma, decorre do item (ii) da Proposição 1.47 que $\mathcal{T}_{q\text{-co}}^{\mathcal{C}_p} \subset \mathcal{T}_{p\text{-co}}$, ou seja, a topologia $\mathcal{T}_{q\text{-co}}$ induzida a $\mathcal{C}_p(X, Y)$ é mais fraca que a topologia $\mathcal{T}_{p\text{-co}}$ em $\mathcal{C}_p(X, Y)$.

(ii) Como f é p -homotópica a g e p é injetora, então pelo Teorema 3.33 f e g estão p -conectadas por uma função contínua $c: (I, \mathcal{T}^I) \rightarrow (\mathcal{C}_p(X, Y), \mathcal{T}_{p\text{-co}})$. Segue do item (i) acima que $c: (I, \mathcal{T}^I) \rightarrow (\mathcal{C}_p(X, Y), \mathcal{T}_{q\text{-co}}^{\mathcal{C}_p})$ também é contínua, pois $\mathcal{T}_{q\text{-co}}^{\mathcal{C}_p} \subset \mathcal{T}_{p\text{-co}}$. Como as funções $f, g \in \mathcal{C}_p(X, Y)$ e $p \in \mathcal{C}_q(X, Y)$, segue do item (i) do Teorema 2.39 que $f, g \in \mathcal{C}_q(X, Y)$. Observe que a função $d: (I, \mathcal{T}^I) \rightarrow (\mathcal{C}_q(X, Y), \mathcal{T}_{q\text{-co}})$ dada por $d(t) = c(t)$ também é contínua, pois dado um aberto sub-básico $(K, U)_q$ em torno de $d(t_0) = c(t_0)$, existe $L \in \mathcal{T}_{t_0}^I$ tal que

$$d(L) \subset (K, U)_q$$

visto que

$$d(L) = c(L) \subset (K, U)_q \cap \mathcal{C}_p(X, Y) \subset (K, U)_q,$$

já que $c: (I, \mathcal{T}^I) \rightarrow (\mathcal{C}_p(X, Y), \mathcal{T}_{q\text{-co}}^{\mathcal{C}_p})$ é contínua. Portanto, f, g são q -conectadas e como q é homeomorfismo (injetora e aberta) e $q(X)$ é Hausdorff localmente compacto, segue do Corolário 3.35 que f e g são q -homotópicas. $\square$

Corolário 3.40. *Sejam $(X, \mathcal{T}^X)$, $(Y, \mathcal{T}^Y)$ e $(Z, \mathcal{T}^Z)$ espaços topológicos e considere as funções $f, g: (X, \mathcal{T}^X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}^Y)$ e $n: (X, \mathcal{T}^X) \rightarrow (Z, \mathcal{T}^Z)$ um continuador contínuo e injetivo. As seguintes afirmações são válidas:*

i) *A topologia $\mathcal{T}_{co}$ induzida a $\mathcal{C}_n(X, Y)$ é mais fraca que a topologia $\mathcal{T}_{n\text{-co}}$ em $\mathcal{C}_n(X, Y)$.*

ii) *Se X é Hausdorff localmente compacto e $f \stackrel{n}{\simeq} g$, então $f \simeq g$.*

Demonstração. Segue diretamente do Teorema 3.39, considerando $q = id_X$ e $p = n$. $\square$

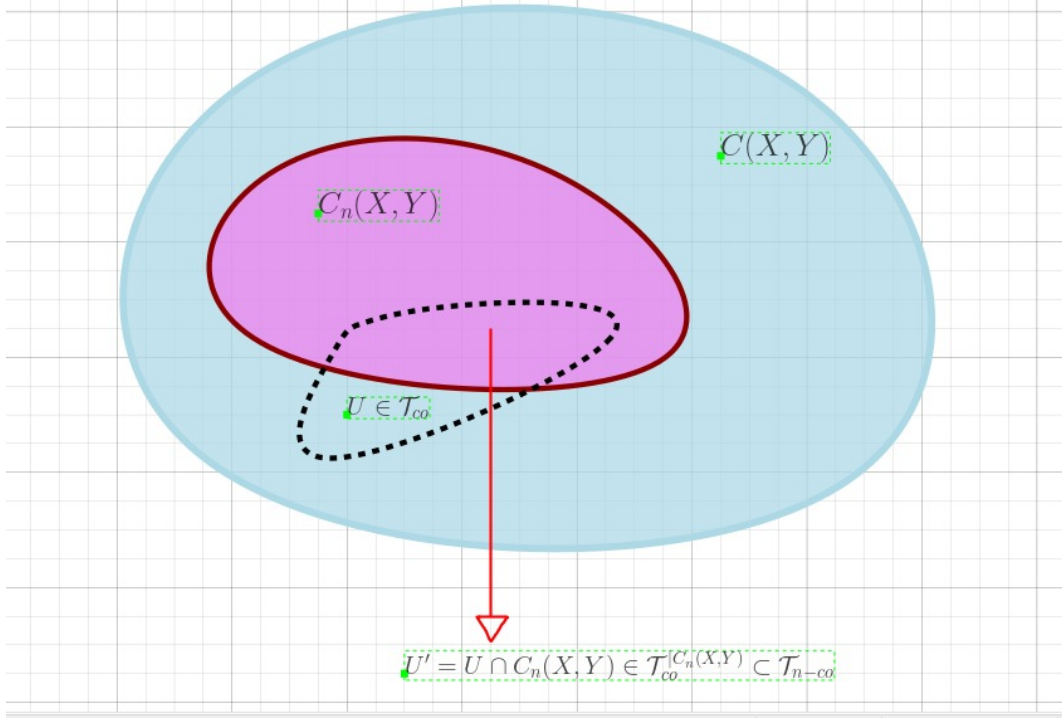


Figura 3.2: figura ilustrativa a respeito do item (i) do Corolário 3.40

Fonte: Arquivo pessoal do autor.

3.5 Espaços com contratibilidade generalizada

Definição 3.41. Sejam $(X, \mathcal{T}^X)$, $(Y, \mathcal{T}^Y)$ e $(Z, \mathcal{T}^Z)$ espaços topológicos e os continuadores $p: (X, \mathcal{T}^X) \rightarrow (Z, \mathcal{T}^Z)$ e $q: (X, \mathcal{T}^X) \rightarrow (W, \mathcal{T}^W)$. A função $f: (X, \mathcal{T}^X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}^Y)$ é uma equivalência (p, q) -homotópica se, e somente se, existe $g: (Y, \mathcal{T}^Y) \rightarrow (X, \mathcal{T}^X)$ tal que $g \circ f \stackrel{p}{\simeq} id_X$ e $f \circ g \stackrel{q}{\simeq} id_Y$. Neste caso, dizemos que g é inverso (p, q) -homotópico de f e que os espaços topológicos $(X, \mathcal{T}^X)$ e $(Y, \mathcal{T}^Y)$ têm o mesmo (p, q) -tipo de homotopia, que denotamos por $(X, \mathcal{T}^X) \stackrel{(p, q)}{\equiv} (Y, \mathcal{T}^Y)$.

Definição 3.42. Sejam $(X, \mathcal{T}^X)$, $(Z, \mathcal{T}^Z)$ e $(W, \mathcal{T}^W)$ espaços topológicos e considere os continuadores $p: (X, \mathcal{T}^X) \rightarrow (Z, \mathcal{T}^Z)$ e $q: (X, \mathcal{T}^X) \rightarrow (W, \mathcal{T}^W)$. Dizemos que um espaço $(X, \mathcal{T}^X)$ é (p, q) -contrátil se, e somente se, Y é um conjunto unitário e $(X, \mathcal{T}^X) \stackrel{(p, q)}{\equiv} (Y, \mathcal{T}^Y)$.

Proposição 3.43. *Sejam $(X, \mathcal{T}^X)$, $(Y, \mathcal{T}^Y)$, $(Z, \mathcal{T}^Z)$ espaços topológicos e considere os continuadores $p: (X, \mathcal{T}^X) \rightarrow (Z, \mathcal{T}^Z)$ e $q: (X, \mathcal{T}^X) \rightarrow (W, \mathcal{T}^W)$. Temos que $(X, \mathcal{T}^X)$ é (p, q) -contrátil se, e somente se, a função $id: (X, \mathcal{T}^X) \rightarrow (X, \mathcal{T}^X)$ é p -homotópica a uma função constante.*

Demonstração. Se o espaço topológico $(X, \mathcal{T}^X)$ é (p, q) -contrátil, por definição existe um conjunto $Y = \{a\}$ e existem $f: (X, \mathcal{T}^X) \rightarrow (\{a\}, \mathcal{T}^{\{a\}})$ e $g: (\{a\}, \mathcal{T}^{\{a\}}) \rightarrow (X, \mathcal{T}^X)$ tais que $g \circ f \stackrel{p}{\simeq} id_X$. Note que $g \circ f$ é uma função constante.

Reciprocamente, considere $id_X \stackrel{p}{\simeq} c$, sendo $c: (X, \mathcal{T}^X) \rightarrow (X, \mathcal{T}^X)$ uma função constante dada por $c(x) = a$. Tome $k: (X, \mathcal{T}^X) \rightarrow (\{a\}, \mathcal{T}^{\{a\}})$ dada por $k(x) = c(x)$. Observe que $i \circ k = c \stackrel{p}{\simeq} id_X$ e $k \circ i = id_a \stackrel{q}{\simeq} id_a$ (pelo Corolário 3.28), sendo $i: (\{a\}, \mathcal{T}^{\{a\}}) \rightarrow (X, \mathcal{T}^X)$ a função inclusão. Portanto, $(X, \mathcal{T}^X) \stackrel{(p,q)}{\equiv} (\{a\}, \mathcal{T}^{\{a\}})$. $\square$

Considerações

Através das considerações adicionais feitas para continuidade generalizada é possível notar que as caracterizações e proposições sobre continuidade generalizada se comportam de modo muito similar à continuidade usual. A homotopia generalizada apresentada no trabalho e denominada de n -homotopia é uma generalização apropriada da homotopia usual pois o conceito de homotopias é um caso particular de homotopia generalizada, pois como visto na seção 3.2, basta considerar n como sendo a função onde $id_X : (X, \mathcal{T}^X) \rightarrow (X, \mathcal{T}^X)$ identidade. Com este trabalho conclui-se que é possível estabelecer uma definição para homotopia generalizada através de continuidade generalizada. Algumas proposições associadas as homotopias generalizadas (n -homotopia estrita, n -homotopia e n -conectividade de funções n -contínuas) abordadas nesta monografia têm similaridade com as associadas à homotopia usual, porém para algumas proposições deve-se ter algumas condições sobre o continuador n , um exemplo disso é que para n -homotopia seja uma relação de equivalência o continuador deve ter algumas condições para que a homotopia generalizada seja simétrica e transitiva.

Uma importante consideração a se fazer é que para continuidade usual e homotopias usuais, exige-se que domínios e contradomínios das funções consideradas estejam equipados com topologias. Já para os resultados envolvendo continuidade generalizada ou homotopias generalizadas não se exige que o domínio tenha estrutura topológica.

BIBLIOGRAFIA

- [1] BRAZ, J. H. S.; VIEIRA, M. G. O. **Limites generalizados de funções.** Anais da V Semana de Matemática do Pontal. Ituiutaba, 2014. Disponível em:<<http://www.semap.facip.ufu.br/node/30>>. Acesso em: 31 ago. 2020.
- [2] BONONI, R. S. **Tipos de homotopia das componentes conexas por caminho do espaço das funções contínuas: $\mathcal{G}(X, S^n)$, onde $X = S^{n+k}$, $n > 1$ e $k = 0, 1$.** Dissertação (Mestrado em Matemática) - Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, São José do Rio Preto.
- [3] LUZ, S. M. **Conjuntos Compactos.** Trabalho de conclusão de curso (Graduação em Matemática). Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Universidade Federal De Santa Catarina, Florianópolis. Disponível em:<https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/97155/Simone_Milioli_da_Luz.PDF?sequence=1>. Acesso em: 20 ago. 2021.
- [4] VIEIRA, M. G. O. **Topological aspects of continuity via generalized limit.** Revista Brazilian Electronic, Journal of Mathematics, Ituiutaba, v.2, n.3, jan/jun, 2021. Disponível em:<<http://www.seer.ufu.br/index.php/BEJOM/article/view/55291/30682>>. Acesso em: 20 ago. 2021.
- [5] JAMES, R. **Topology.** 2.ed. Saddle River: Prentice Hall, 2000.

- [6] LIMA, E. L. **Grupo fundamental e espaços de recobrimento**. 5.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2018.
- [7] LIMA, E. L. **Espaços métricos**. 3 Ed. Rio de Janeiro: Projeto Euclides, 1993.
- [8] E. L. C; SEBASTIAO, A. I. **Topologia geral**. São José do Rio Preto, 2020.

ÍNDICE REMISSIVO

Aberto

métrico, [5](#)
topológico, [7](#)

Bases

de vizinhanças, [11](#)
topológicas, [13](#)

Bola aberta, [5](#)

Cobertura, [20](#)

Conjunto

compacto, [21](#)
conexo, [18](#)
conexo por caminhos, [19](#)
convexo, [57](#)
estrela, [57](#)
localmente compacto, [22](#)

Equivalência

(p, q) -homotópica, [72](#)
homotópica, [56](#)

Espaço

(p, q) -contrátil, [72](#)
contrátil, [56](#)
de Hausdorff, [17](#)

métrico, [4](#)
topológicos, [5](#)

Fechado topológico, [7](#)

Fecho de um conjunto, [8](#)

Função

cartesiana, [48](#)
continuador, [34](#)
continuante, [34](#)
avaliação, [55](#)

Funções

n -conectadas, [63](#)
 n -contínuas, [34](#)
 n -homotópicas, [58](#)
abertas, [32](#)
amplamente n -contínuas, [36](#)
contínuas, [29](#)
estritamente n -contínuas, [38](#)
estritamente n -homotópicas, [60](#)
homotópicas, [51](#)

Homeomorfismo, [32](#)

Interior topológico, [9](#)

Ponto interior

métrico, [5](#)

topológico, [8](#)

Sub-base topológica, [16](#)

n -compacto aberta, [42](#)

compacto aberta, [24](#)

Topologia mais fraca, [7](#)

Vizinhanças, [10](#)