



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA

FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

CURSO DE PÓS GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

**ANÁLISE DOS EFEITOS RAZÃO DE ASPECTO E INCLINAÇÃO NA
CONVECÇÃO NATURAL EM CAVIDADES VIA TRANSFORMAÇÃO
INTEGRAL**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Uberlândia por:

MARCOS DE SOUSA E SILVA

*a ser apresentada à Universidade Federal de Uberlândia como parte dos requisitos para
obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica*

Aprovada por:

Prof. Dr. Ricardo Fortes de Miranda - Orientador (UFU)
Prof. Dr. Humberto Araújo Machado (Univap) - Co-orientador
Prof. Dr. Milton Biage (UFU)
Prof. Dr. Maurício Zanardi (FEG - Guaratinguetá)
(11) de *(março)* de (2002).

FICHA CATALOGRÁFICA

Elaborado pelo Sistema de Bibliotecas da UFU / Setor de Catalogação e Classificação

S586a Silva, Marcos de Sousa e, 1970-
Análise dos efeitos razão de aspecto e inclinação na convecção natural em cavidades via transformação integral. - Uberlândia, 2002.
145f. : il.
Orientador: Ricardo Fortes de Miranda.
Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Uberlândia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.
Inclui bibliografia.
1. Mecânica dos fluidos - Teses. 2. Calor - Convecção natural - Teses. 3. Engenharia mecânica - Teses. I. Miranda, Ricardo Fortes. II. Universidade Federal de Uberlândia. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. III. Título.

532 (043.3)

A minha esposa *Luciana*, meus filhos *Ana* e *Frederico* e a meus pais *Evandro* e *Alcione*.

Agradecimentos

Agradeço ao Prof. *Ricardo Fortes de Miranda* pelo conhecimento a mim proporcionado durante esta jornada.

Ao Prof. *Humberto Araújo Machado* pela ajuda, paciência e dedicação.

Ao Prof. *Paulo Antônio de Lima* pelo incentivo e confiança.

Agradeço também às pessoas que direta ou indiretamente contribuíram para este resultado.

Silva, M. S., 2002, "Análise dos Efeitos Razão de Aspecto e Inclinação na Convecção Natural em Cavidades Via Transformação Integral", Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG.

Resumo

Neste trabalho, serão analisados os efeitos da razão de aspecto e ângulo de inclinação na transferência de calor por convecção via transformação integral, através de simulações em uma cavidade quadrada e plana com um fluido de propriedades constantes e variáveis, identificando a influência às variações de temperatura, bem como as combinações geométricas que otimizam a troca de calor por convecção. A Técnica da Transformada Integral Generalizada (Generalized Integral Transform Technique - *GITT*) foi capaz de obter sucesso na simulação do fenômeno físico, sendo capaz de capturar recirculações em casos convectivos críticos do ponto de vista numérico. Foram estabelecidas correlações entre a taxa de transferência de calor por convecção e a razão de aspecto e o ângulo de inclinação da cavidade.

Palavras Chave: Cavidade Retangular; Razão de Aspecto; Ângulo de Inclinação; Técnica da Transformada Integral Generalizada.

Silva, M. S., 2002, "Analysis of Aspect Ratio and Inclination Effects in the Natural Convection in Cavities through Integral Transformation", M. Sc. Dissertation, Federal University of Uberlândia, Uberlândia, MG.

Abstract

In this work, the effects of the aspect ratio and inclination angle in the convection heat transfer inside a square cavity are analyzed through integral transformation. The numerical simulations were made in square and plane cavity in a fluid with constant and variable properties and identifying the effect of the temperature variations. Varying the geometry of the cavity and its inclination it was identified the most sensitive properties at the temperature variations, as well as the geometric combinations which optimize the convection heat transfer. The Generalized Integral Transform Technique (*GITT*) was capable to simulate the physical phenomenon successfully, capturing recirculations in critical convective cases numerically. The correlations were established between the rate of convection heat transfer and the aspect ratio and the inclination angle of the cavity.

Keywords: Rectangular Cavity, Aspect Ratio, Inclination Angle; Generalized Integral Transform Technique.

Índice Remissivo

1	Introdução	1
1.1	Revisão Bibliográfica	2
1.2	A Modelagem Física do Fenômeno de Convecção	4
2	Descrição do Problema Físico	7
2.1	Definição do Problema	7
2.1.1	Formulação em Variáveis Primitivas	8
2.1.2	Formulação em Função Corrente	9
3	Solução Numérica via Técnica da Transformação Integral Generalizada	13
3.1	A Técnica da Transformada Integral Generalizada	13
3.2	Homogeneização das Condições de Contorno	14
3.3	Definição dos Problemas Auxiliares	14
3.3.1	Problema Auxiliar da Temperatura na direção x	15
3.3.2	Problema Auxiliar da Temperatura na direção y	16
3.4	Pares Transformada-Inversa	17
3.5	Transformação Integral do Sistema de Equações	17
3.6	Algoritmo Computacional Desenvolvido	19
3.7	Ordenação dos Termos nas Expansões	19
3.8	Integração dos Coeficientes $F_{ij}(t)$ e $G_{ij}(t)$ via Quadratura Gaussiana	20
4	Análise de Convergência dos Resultados	21
4.1	Validação do Código Computacional	21
4.2	Análise de Convergência para uma Propriedade Variável	22
4.3	Análise de Convergência para todas as Propriedades Variáveis	25
4.4	Análise de Convergência para Diferentes Ângulos de Inclinação	25

4.5	Análise de Convergência para Diferentes Razões de Aspecto	29
4.6	Análise de Convergência para Razão de Aspecto de 10 e Ângulo de Inclinação de 45 graus	31
5	Resultados e Análise	33
5.1	Análise dos Resultados para uma Propriedade Variável	33
5.2	Análise dos Resultados para uma Cavidade Quadrada e Plana	37
5.3	Análise dos Resultados para Variação da Razão de Aspecto	38
5.3.1	Razão de Aspecto 0.2	39
5.3.2	Razão de Aspecto 1.0	39
5.3.3	Razão de Aspecto 2.0	39
5.3.4	Razão de Aspecto 10	40
5.3.5	Análise dos Resultados para Variação do Ângulo de Inclinação	41
5.3.6	Variação do Ângulo de Inclinação e Razão de Aspecto	41
5.3.7	Variação Percentual das propriedades variando em função da temperatura	42
5.3.8	Variação do Nusselt Médio em Função do Ângulo de Inclinação	42
5.3.9	Variação do Nusselt Médio em Função da Razão de Aspecto	43
6	Conclusões e Sugestões	141
	Bibliografia	143

Capítulo 1

Introdução

O estudo das *Ciências Térmicas* tem gerado uma gama de conhecimentos que impactam diretamente nas modernas necessidades da engenharia, aplicadas às novas necessidades tecnológicas provenientes dos campos aeroespaciais, aeronáuticos, energia solar, geotérmicos, bélico, nucleares e nas indústrias eletrônica e siderúrgica.

Dentre os fenômenos térmicos, contemplados pela ciência, destaca-se a transferência de calor por convecção livre, tornando seu estudo extremamente importante e único, devido não só a sua frequência de ocorrência natural mas também às suas aplicabilidades na tecnologia moderna.

Seu estudo possibilita o entendimento de fenômenos como a circulação natural na atmosfera, na hidrosfera e até mesmo no interior da Terra, além de aplicações em coletores solares, isolamentos térmicos, circulação de ar no interior de edifícios, máquinas térmicas, operações com bombas, etc.

A mais de um século a convecção livre tem sido alvo de trabalhos, que geraram uma grande quantidade de informações a seu respeito. A evolução do conhecimento nesta área particular das *Ciências Térmicas* foi implementada a partir da introdução da tecnologia digital.

Os primeiros estudos sobre o fenômeno utilizavam modelos analíticos para solução de problemas básicos; uma série de simplificações e a introdução de métodos numéricos discretos foram capazes de proporcionar aproximações estreitas com a realidade na solução de uma gama limitada de problemas práticos.

Com a evolução tecnológica dos computadores, modelos cada vez mais complexos foram necessários para simular processos em condições extremas, e as aproximações até então usadas não podiam ser aplicadas, pois atingiam seus limites. Além disso, surgiram diversos métodos numéricos analíticos para a resolução de problemas convectivos, os quais apresentam certas vantagens sobre os métodos numéricos discretos.

Dentre os métodos de simulação hoje utilizados, destaca-se como alternativa a *Técnica da Transformada Integral Generalizada* (Generalized Integral Transform Technique - *GITT*), um método híbrido numérico analítico, que apresenta uma série de vantagens em relação a outros métodos puramente numéricos ou analíticos.

O escopo deste trabalho é uma aplicação específica da *GITT* à solução de processos de convecção térmica bidimensionais em geometrias retangulares fora do limite de aplicação da

hipótese de Boussinesq, a qual consiste em uma simplificação na modelagem teórica no que diz respeito ao tratamento de variações de densidade e das propriedades termofísicas do fluido com a temperatura.

São estudadas a convecção natural em escoamentos bidimensionais em coordenadas retangulares, com variação da razão de aspecto e ângulo de inclinação da cavidade, considerando-se a hipótese não Boussinesq e variando-se as propriedades termofísicas dependentes da temperatura (inclusive a densidade). Os problemas são resolvidos na formulação da função corrente e temperatura.

O problema foi escolhido devido ao sucesso de implantação desta técnica para cavidades quadradas, com ausência de inclinação e com propriedades termofísicas dependentes da temperatura (condutividade, calor específico e viscosidade) e constantes (Machado, 1998).

O estudo tem como objetivo analisar a variação das propriedades termofísicas e sua relação com o fenômeno convectivo, avaliar a capacidade da *GITT* em capturar características mais complexas do fenômeno como as recirculações e levantar uma correlação para a capacidade de troca de calor do processo em função do ângulo de inclinação e da razão de aspecto da cavidade retangular.

1.1 Revisão Bibliográfica

A solução das equações de Navier-Stokes e energia bidimensionais, é objeto de estudo em muitos trabalhos, nos quais são aplicados métodos numéricos, analíticos e híbridos em sua resolução. Para o problema clássico da cavidade retangular com formulações compressíveis e incompressíveis, propriedades constantes ou variáveis, diferentes velocidades, diferentes condições geométricas e diferentes métodos de resolução, a literatura fornece uma série de estudos, que contemplam os efeitos de tais variáveis separadamente.

Estudos sobre escoamentos compressíveis onde os efeitos de tal compressibilidade sobre o escoamento são o objetivo principal, foram realizados por Spradley e Churchill (1975) que resolvem o problema da cavidade com paredes isoladas lateralmente e diferencialmente aquecidas, em formulação transiente via diferenças finitas. Em uma tentativa de determinar o limite de Rayleigh crítico, foram analisados os efeitos da densidade nas isolinhas da função corrente.

Em um problema semelhante que estudou a influência da razão de aspecto Chenoweth e Paolucci (1986), apresentaram correlações para os regimes de

condução e de camada limite, com o fluxo de calor bem próximo da hipótese de Boussinesq.

Utilizando o método das diferenças finitas a baixas velocidades em escoamentos compressíveis, Yu et al. (1996) testaram a solução para cavidades (escoamento bidimensional) considerando propriedades constantes, os resultados foram comparados com correlações do número de Nusselt e Rayleigh exibindo uma boa concordância.

Estes trabalhos desconsideraram a variação das propriedades para realizar uma aproximação com o comportamento físico real. Outros autores utilizam métodos híbridos de solução ou consideram a formulação em variáveis primitivas em contrapartida à formulação em função corrente.

Estudos experimentais e numéricos utilizando diferenças finitas foram realizados por Showole e Tarasuk (1993), para convecção em cavidades abertas e inclinadas onde são apresentadas correlações entre Nusselt e Rayleigh em função do ângulo de inclinação para $10^4 \leq Ra \leq 10^5$ além de apresentar resultados para as taxas de transferência de calor.

A convecção natural em cavidades inclinadas também foi fonte de estudo em outros trabalhos como por exemplo no trabalho de Zhang (1992), que encontra correlações entre Ra e o ângulo de inclinação em uma cavidade porosa com água saturada.

O efeito das propriedades termofísicas variáveis do ar restringindo-se a cavidades internas foi estudado por Zamora e Hernández (1997) que pesquisaram um canal vertical com aquecimento assimétrico onde o objetivo do trabalho foi a localização do ponto de escoamento reverso. Grandes diferenças nas linhas de recirculação e um grande incremento no fluxo mássico foram observados nos resultados quando comparados com modelos que utilizam propriedades constantes e assumem a hipótese de Boussinesq.

Leonardi e Reizes (1979 e 1981) realizaram uma série de trabalhos solucionando as equações convectivas com propriedades variáveis e comparando-se os resultados com a hipótese de Boussinesq, utilizaram a formulação função-corrente-vorticidade nas equações de Navier Stokes e variaram a geometria (razão de aspecto igual a 2) e a pressão na cavidade. Em um aperfeiçoamento do método (Leonardi e Reizes, 1981), variaram-se as propriedades termofísicas e a densidade procurando-se estabelecer uma relação com a razão de aspecto, diferenças de temperatura e adimensionalização utilizada nas variáveis.

Os estudos de Spradley e Churchill (1975) foram revisados por Zhong et al. (1985), variando as propriedades para Ra igual a 10^6 , considerando a hipótese de Boussinesq e utilizando diferenças finitas, são apresentadas correlações entre o número de Nusselt e Rayleigh e uma correlação entre Ra e a temperatura limite que convalida os limites da aproximação de

Boussinesq.

Leal e Guerrero (2000) solucionam as equações da convecção natural bidimensional via transformada integral, para cavidades inclinadas com ângulos variando de 40° à 140° e Ra igual a 10^4 e 10^5 , em seu trabalho a *GITT* é aplicada com sucesso e fornece resultados benchmark para convecção em cavidades inclinadas.

A solução para as equações de Navier Stokes e energia com propriedades variáveis é apresentada por Machado (1998). Tal solução é obtida via *GITT* para uma cavidade quadrada com as propriedades termofísicas variando em função da temperatura.

A técnica da transformação integral clássica [Mikhailov (1972); Mikhailov e Özisik (1980); Mikhailov e Özisik (1984); Özisik (1968); Özisik (1980) Sneddon (1972); Ölçer (1964); e Tranter (1962)] requer a obtenção de uma transformação integral exata para converter um sistema de equações diferenciais parciais em um sistema de equações diferenciais ordinárias desacopladas [Özisik (1980) e Luikov (1973)]. Mikhailov e Özisik (1984) compilaram vários trabalhos sobre o uso da transformada integral aplicados à análise de difusão de calor e massa.

Após o trabalho desenvolvido por Özisik e Murray (1974), o conceito de transformação integral foi estendido para problemas onde não é possível obter tal transformação (Cotta, 1994). A partir daí um novo tratamento à técnica da transformação integral foi gerado resultando na chamada: *Técnica da Transformada Integral Generalizada* ou *GITT*. Machado (1998) aplicou esta técnica na solução de escoamentos bidimensionais em uma cavidade quadrada fora da região de validade da hipótese de Boussinesq utilizando propriedades físicas do fluido variantes com a temperatura. Estes resultados serviram de base para este trabalho.

1.2 A Modelagem Física do Fenômeno de Convecção

Podemos dividir o modo convectivo de transferência de calor em dois processos básicos, a convecção forçada e a convecção natural. A principal diferença entre a convecção forçada e livre encontra-se na natureza da geração do escoamento do fluido. Na convecção forçada o fluxo imposto externamente geralmente é conhecido. A convecção natural é basicamente definida quando ocorre o movimento de um fluido entre regiões cujas temperaturas diferem significativamente entre si e resulta de uma interação entre a densidade e o campo gravitacional acoplada com a temperatura e/ou campos de concentração.

A solução de problemas de convecção natural torna-se por este motivo mais complexos que os que envolvem a convecção forçada (Kakaç, 1987) e a transferência de calor através de tal

fenômeno é uma interface entre os campos de mecânica dos fluidos e transferência de calor (Bejan, 1984).

Com isso, na convecção livre os perfis de velocidade e temperatura são sempre dependentes (o campo de escoamento resulta das forças de empuxo produzidas por diferenças de densidade causadas pelo aquecimento diferenciado do fluido), ou seja as equações de energia e movimento devem ser resolvidas simultaneamente (Sissom e Pitts, 1979).

O escoamento resultante do movimento do fluido pode ser classificado em três regimes distintos, laminar, turbulento ou transicional (misto). Geralmente a transição entre os tipos de escoamento é dependente da velocidade do fluido (Sissom e Pitts, 1979). Diversos estudos foram realizados no sentido de definir os limites entre a aplicabilidade dos regimes de escoamento, gerando mapas e correlações de referência. Metais e Eckert (1964) apresentam mapas para tubos verticais e horizontais explicitando os limites entre regimes laminar e turbulento e para convecção forçada, natural e mista. Segundo Kakaç (1987), estes resultados dentro de certos limites podem ser utilizados como referência para a maioria dos escoamentos internos.

As equações governantes para a convecção natural formam um sistema de equações diferenciais parciais elípticas nas coordenadas espaciais e portanto são de considerável complexidade em sua resolução. O maior problema em obter uma solução destas equações encontra-se na inevitável variação da densidade com a temperatura. Muitas aproximações são geralmente feitas para simplificar consideravelmente estas equações.

Entre tais aproximações destaca-se a aproximação de Boussinesq, 1903 que envolve as seguintes aproximações: continuidade é desprezada; segundo, a diferença de densidade, a qual causa o escoamento, é aproximada com um efeito linear na variação da temperatura dentro da equação da quantidade de movimento:

$$\rho_{\infty} - \rho = \rho \beta (T - T_{\infty}) \quad (1.1)$$

Uma importante condição para a validação de tal aproximação é dada por:

$$\beta (T - T_0) \ll 1 \quad (1.2)$$

Portanto as aproximações são válidas para uma pequena diferença de temperatura.

A aproximação de Boussinesq, segundo Machado (1998), assume que todas as propriedades do fluido são constantes; o procedimento adotado muitas das vezes é considerar as propriedades dependentes da temperatura do filme definida na (1.3). Os erros devidos a este procedimento

podem ser apreciáveis.

$$T_{filme} = \frac{(T_w + T_{\infty})}{2} \quad (1.3)$$

Um modelo completo deve realizar a análise da variação das propriedades do fluido (viscosidade, calor específico e condutividade) em função da temperatura, separado da variação da densidade. Experimentalmente é impossível realizar tal procedimento, já que os dois efeitos não podem ser desacoplados no processo físico real.

Um modelo não Boussinesq que considere a variação das propriedades em conjunto e separadas individualmente e ainda introduza variáveis estruturais como geometrias irregulares e variações angulares nos tradicionais problemas de cavidade quadrada, permite estimar melhor os limites dessas aproximações.

Capítulo 2

Descrição do Problema Físico

2.1 Definição do Problema

O escoamento que será estudado consiste no problema bidimensional de uma cavidade retangular e inclinada com paredes verticais diferencialmente aquecidas e horizontais isoladas (em relação ao sistema de coordenadas usado). Particularmente o problema da cavidade quadrada foi intensamente estudado para o caso de propriedades termofísicas constantes com resultados *benchmark* facilmente encontrados na literatura (Leal, 1996). Aqui a cavidade é considerada tendo todas as suas propriedades termofísicas como função da temperatura assim como seu ângulo de inclinação e razão de aspecto variáveis.

O problema a ser analisado consiste numa cavidade retangular, de lados a e b e ângulo de inclinação θ em relação à horizontal cujas paredes paralelas ao eixo x se encontram isoladas termicamente e as paredes paralelas ao eixo y estão a temperaturas constantes e uniformes, como mostra a Figura 2.1.

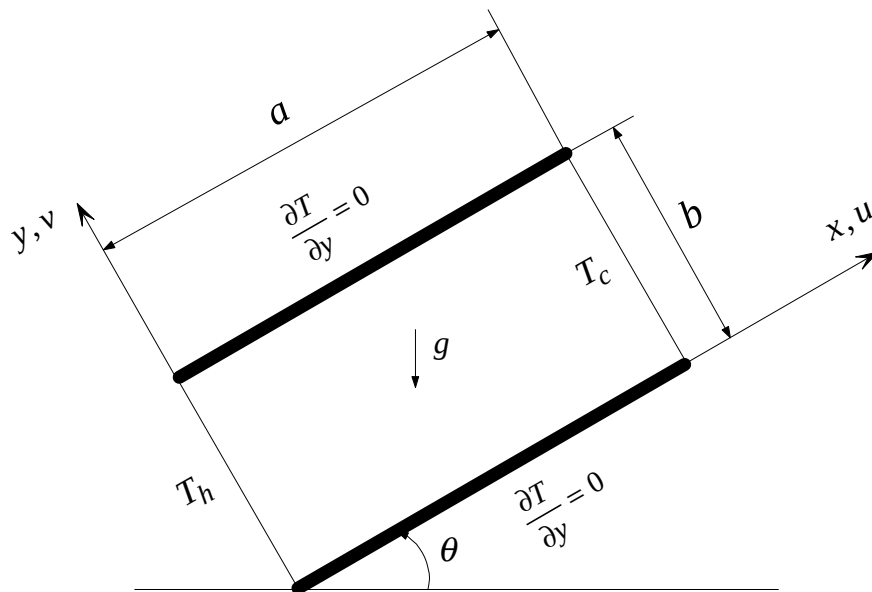


Figura 2.1- Geometria da cavidade quadrada com ângulo de inclinação α e dimensões a e b variáveis.

As hipóteses simplificadoras admitidas para o problema em questão são:

- ↪ Meio contínuo;
- ↪ Escoamento bidimensional em regime laminar;
- ↪ Densidade constante (exceto no termo de empuxo);
- ↪ Impermeabilidade e não deslizamento no contorno;
- ↪ Fluido Newtoniano.

2.1.1 Formulação em Variáveis Primitivas

As equações adimensionais na formulação de variáveis primitivas para um problema bidimensional obedecendo as hipóteses simplificadoras definidas anteriormente são (Bird et al., 1960):

Continuidade:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.1)$$

Conservação do Momentum na direção x:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} + Pr_0 \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \right\} \quad (2.2)$$

Conservação do Momentum na direção y:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial y} + Pr_0 \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(2 \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \right\} \quad (2.3)$$

$$+ Ra_0 Pr_0 T$$

Conservação da Energia:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{C_p} \left(k \nabla^2 T + \frac{\partial k}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial k}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} \right) \quad (2.4)$$

As condições de contorno e iniciais para o problema são definidas na Tabela 2.1:

A razão de aspecto para o problema ilustrado na Figura 2.1 é dada por:

$$r = \frac{a}{b} \quad (2.5)$$

Tabela 2.1- Condições de contorno e iniciais para o problema.

Posição x	Velocidade u	Velocidade v	Temperatura T
$x = 0$	$u = 0$	$v = 0$	$T = 1$
$x = 1$	$u = 0$	$v = 0$	$T = 0$
Posição y	Velocidade u	Velocidade v	Gradiente $\frac{\partial T}{\partial y}$
$y = 0$	$u = 0$	$v = 0$	$\frac{\partial T}{\partial y} = 0$
$y = 1$	$u = 0$	$v = 0$	$\frac{\partial T}{\partial y} = 0$
Tempo	Velocidade u	Velocidade v	Temperatura T
$t = 0$	$u = 0$	$v = 0$	$T = 0$

Utilizando a equação (2.5), as variáveis são adimensionalizadas da seguinte forma:

Posição:

$$x = \frac{x^{**}}{a} \text{ e } y = \frac{ry^{**}}{b} \quad (2.6)$$

Velocidade:

$$u = a \frac{u^{**}}{\alpha_0} \text{ e } v = ra \frac{v^{**}}{\alpha_0} \quad (2.7)$$

Pressão:

$$P = a^2 \frac{P^{**}}{\rho_0 \alpha_0^2} \quad (2.8)$$

Temperatura:

$$T = \frac{T^* - T_c}{\Delta T}, \text{ onde: } \Delta T = T_h - T_c \quad (2.9)$$

Propriedades Físicas:

$$\mu = \frac{\mu^{**}}{\mu_0}, k = \frac{k^{**}}{k_0} \text{ e } C_p = \frac{C_p^{**}}{C_{p_0}} \quad (2.10)$$

onde o asterístico (**) indica variáveis e propriedades dimensionais.

2.1.2 Formulação em Função Corrente

A função corrente para um escoamento incompressível é descrita, na forma adimensional, como:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -v \quad (2.11a)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = u \quad (2.11b)$$

Aplicando as equações para a função corrente acima descritas nas equações (2.2) e (2.3), diferenciando-se a equação (2.2) em relação à y e a equação (2.3) em relação à x , e subtraindo-se os resultados, obtém-se a *Equação do Transporte da Vorticidade* dada por:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right) + \frac{\partial \psi}{\partial y} \nabla^2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - \frac{\partial \psi}{\partial x} \nabla^2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \frac{\partial \psi}{\partial y} = Pr_0 \left[\mu \nabla^4 \psi + 2 \frac{\partial \mu}{\partial y} \nabla^2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \right. \\ \left. + 2 \frac{\partial \mu}{\partial x} \nabla^2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + 4 \frac{\partial^2 \mu}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial^2 \mu}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) - Ra_0 Pr_0 \frac{\partial T}{\partial x} \right] \end{aligned} \quad (2.12)$$

onde os operadores ∇^2 e ∇^4 são chamados de operadores *harmônico* e *bi-harmônico*, respectivamente, e são definidos como:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (2.13)$$

$$\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \quad (2.14)$$

As condições de contorno e iniciais para o problema formulado segundo a equação (2.12) são definidas na Tabela 2.2:

Tabela 2.2- Condições de contorno e iniciais para o problema.

Posição x	Função Corrente ψ	Velocidade $\frac{\partial \psi}{\partial y}$
$x = 0$	$\psi = 0$	$\frac{\partial \psi}{\partial y} = 0$
$x = 1$	$\psi = 0$	$\frac{\partial \psi}{\partial y} = 0$
Posição y	Função Corrente ψ	Velocidade $\frac{\partial \psi}{\partial y}$
$y = 0$	$\psi = 0$	$\frac{\partial \psi}{\partial y} = 0$
$y = 1$	$\psi = 0$	$\frac{\partial \psi}{\partial y} = 0$
Tempo	Função Corrente ψ	
$t = 0$	$\psi = 0$	

A equação (2.4) torna-se:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{\rho_0 C_{p_0}} \left(k \nabla^2 T + \frac{\partial k}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial k}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} \right) \quad (2.15)$$

Para o problema ilustrado na Figura 2.1, a função corrente adimensionalizada é dada por:

$$\Psi = \frac{r}{\alpha} \psi \quad (2.16)$$

Substituindo as equações (2.6)-(2.10) e (2.16) na equação (2.12) resulta em:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t} \right) + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \nabla^2 \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \nabla^2 \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) \frac{\partial \Psi}{\partial y} = r Pr_0 \left[\frac{\mu}{r} \nabla^4 \Psi + 2r \frac{\partial \mu}{\partial y} \nabla^2 \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) \right. \\ \left. + \frac{2}{r} \frac{\partial \mu}{\partial x} \nabla^2 \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) + 4r \frac{\partial^2 \mu}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} + \left(r^2 \frac{\partial^2 \mu}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2} \right) \left(r \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \right) \right] \\ \left. - Ra_0 Pr_0 \frac{\partial T}{\partial x} \cos \theta + r Ra_0 Pr_0 \frac{\partial T}{\partial y} \sin \theta \right] \end{aligned} \quad (2.17)$$

As condições de contorno e iniciais para a função corrente são definidas na Tabela 2.3:

Tabela 2.3- Condições de contorno e iniciais para o problema.

Posição x	Função Corrente Ψ	Velocidade $\frac{\partial \Psi}{\partial y}$
$x = 0$	$\Psi = 0$	$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0$
$x = 1$	$\Psi = 0$	$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0$
Posição y	Função Corrente Ψ	Velocidade $\frac{\partial \Psi}{\partial y}$
$y = 0$	$\Psi = 0$	$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0$
$y = 1$	$\Psi = 0$	$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0$
Tempo	Função Corrente Ψ	
$t = 0$	$\Psi = 0$	

A equação (2.15), após as devidas substituições, torna-se:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{\rho_0 C_{p_0}} \left(k \nabla^2 T + \frac{\partial k}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + r^2 \frac{\partial k}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} \right) \quad (2.18)$$

Capítulo 3

Solução Numérica via Técnica da Transformação Integral Generalizada

3.1 A Técnica da Transformada Integral Generalizada

A *GITT* é uma alternativa que apresenta certas vantagens em relação aos métodos numéricos atualmente usados na solução de problemas de engenharia. É uma técnica de transformação integral onde se alivia a necessidade de se encontrar uma transformação integral exata para o problema, ou seja, escolhe-se um problema de autovalor auxiliar o mais representativo possível do problema original e ao aplicar a transformação nas equações governantes, determina-se um sistema diferencial ordinário acoplado infinito que poderá ser truncado numa ordem N de termos.

O truncamento é feito até uma ordem N suficientemente grande para a obtenção da solução dentro da precisão desejada. A solução do sistema diferencial ordinário, por sua vez, é feita através de algoritmos disponíveis em bibliotecas de rotinas científicas (IMSL Library, 1989) e que incorporam em sua estrutura computacional o controle automático de erro que leva a uma excelente capacidade e estimativa de erro.

A *GITT* pode ser aplicada em diversas classes de problemas não-lineares tais como: (a) problemas de difusão; (b) problemas de convecção-difusão; (c) problemas de autovalor; (d) equações de camada limite e principalmente (e) equações de Navier-Stokes. A aplicação desta técnica segue os seguintes passos:

- 1^o Definir um problema auxiliar;
- 2^o Solução do problema auxiliar e obtenção das autofunções, autovalores e normas;
- 3^o Desenvolver o par transformada-inversa;
- 4^o Transformação Integral do problema diferencial parcial em um sistema diferencial ordinário e acoplado e
- 5^o Obtenção do potencial original através da fórmula de inversão.

As vantagens desta técnica residem na sua característica híbrida numérico-analítica, uma vez que o potencial é representado pela combinação de autofunções e potenciais transformados e as autofunções são conhecidas analiticamente. Deste modo, a tarefa numérica é reduzida à

integração de um sistema diferencial ordinário em apenas uma coordenada, enquanto nas demais variáveis independentes a solução é puramente analítica.

3.2 Homogeneização das Condições de Contorno

Para a escolha do problema auxiliar adequado a servir de base para a equação do *Transporte da Vorticidade* (2.17), é necessário homogeneizar as condições de contorno. No problema em questão, a única condição de contorno não homogênea é a temperatura em $x = 0$. Para isto, foi selecionada como filtro a solução do problema de condução permanente para a mesma geometria que é função somente de x :

$$T(x, y, t) = T^*(x, y, t) + T_h(x) \quad (3.1)$$

$$T_h(x) = 1 - x \quad (3.2)$$

3.3 Definição dos Problemas Auxiliares

Devido à semelhança da formulação do problema com as equações de escoamento incompressível, os problemas de autovalor adotados para a função corrente e temperatura serão idênticos àqueles empregados para o modelo incompressível (Figueira da Silva, 1994).

Para a função corrente, temos:

$$\frac{d^4 Y_i(z)}{dz^4} = \varphi_i^4 Y_i(z) \quad (3.3)$$

onde $0 < z < 1$ e $i = 1, 2, 3, \dots$

As condições de contorno para o problema auxiliar definido pela equação (3.3):

$$\begin{aligned} Y_i(0) = 0 \quad ; \quad \frac{dY_i}{dy}(0) = 0 \\ Y_i(1) = 0 \quad ; \quad \frac{dY_i}{dy}(1) = 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

A solução analítica deste problema fornece as autofunções definidas a seguir:

$$Y_i(y) = \begin{cases} \frac{\cos[\varphi_i(z-\frac{1}{2})]}{\cos(\frac{\varphi_i}{2})} - \frac{\cosh[\varphi_i(z-\frac{1}{2})]}{\cosh(\frac{\varphi_i}{2})}, & \text{para } i = 1, 3, 5, \dots \\ \frac{\sin[\varphi_i(z-\frac{1}{2})]}{\sin(\frac{\varphi_i}{2})} - \frac{\sinh[\varphi_i(z-\frac{1}{2})]}{\sinh(\frac{\varphi_i}{2})}, & \text{para } i = 2, 4, 6, \dots \end{cases} \quad (3.5)$$

onde os autovalores φ_i são dados pela seguinte equação transcendental:

$$\tanh\left(\frac{\varphi_i}{2}\right) = \begin{cases} -\tan\left(\frac{\varphi_i}{2}\right), & \text{para } i = 1, 3, 5, \dots \\ +\tan\left(\frac{\varphi_i}{2}\right), & \text{para } i = 2, 4, 6, \dots \end{cases} \quad (3.6)$$

Como as condições de contorno nas direções x e y são idênticas, a variável z pode corresponder a cada uma destas direções.

As autofunções Y_i gozam da propriedade de ortogonalidade e ortonormalidade (Mikhailov e Özisik, 1984) definida a seguir:

$$\int_0^1 Y_i(y)Y_j(y)dy = \delta_{ij} \quad (3.7)$$

3.3.1 Problema Auxiliar da Temperatura na direção x

Definindo o problema auxiliar para a temperatura na direção x , como:

$$\frac{d^2\phi_i(x)}{dx^2} + \beta_i^2\phi_i(x) = 0 \quad (3.8)$$

onde $i = 1, 2, 3, \dots$

As condições de contorno para a equação (3.8) são definidas como:

$$\phi_i(0) \quad ; \quad \phi_i(1) = 0 \quad (3.9)$$

A solução deste problema de Sturm-Liouville (Özisik e Murray, 1974) é dado pelas relações listadas abaixo:

$$\phi_i(x) = \sin(\beta_i x) \quad (3.10)$$

$$\beta_i = \pi i \quad (3.11)$$

$$M_i = \frac{1}{2} \quad (3.12)$$

$$\bar{\phi}_i(x) = \frac{\phi_i(x)}{M_i^{\frac{1}{2}}} \quad (3.13)$$

onde $i = 1, 2, 3, \dots$

O problema de autovalor em questão também possui a propriedade de ortogonalidade, descrita na equação (3.7).

3.3.2 Problema Auxiliar da Temperatura na direção y

Na direção y , o problema auxiliar é definido como:

$$\frac{d^2 \Gamma_i(y)}{dy^2} + \lambda_i^2 \Gamma_i(y) = 0 \quad (3.14)$$

onde $i = 1, 2, 3, \dots$

As condições de contorno para a equação (3.14) são definidas como:

$$\frac{d\Gamma_i}{dy} \big|_{y=0} = 0 \quad ; \quad \frac{d\Gamma_i}{dy} \big|_{y=1} = 0 \quad (3.15)$$

A solução deste problema de Sturm-Liouville (Özisik e Murray, 1974) é dada pelas relações listadas abaixo:

$$\Gamma_i(y) = \cos(\lambda_i y) \quad (3.16)$$

$$\lambda_i = \pi(i - 1) \quad (3.17)$$

onde $i = 1, 2, 3, \dots$

$$M_i = 1, \text{ para } i = 1$$

$$M_i = \frac{1}{2}, \text{ para } i = 2, 3, 4, \dots$$
(3.18)

$$\bar{\Gamma}_i(y) = \frac{\Gamma_i(y)}{M_i^{\frac{1}{2}}}$$
(3.19)

O problema de autovalor em questão também possui a propriedade de ortogonalidade, descrita na equação (3.7).

3.4 Pares Transformada-Inversa

Para a função corrente e temperatura, a definição para as transformadas integrais e as fórmulas de inversão, no caso de duas dimensões, são dadas por (Machado, 1998):

Transformadas:

$$\Psi_{i,j}(t) = \int_0^1 \int_0^1 Y_i(x) Y_j(y) \psi(x, y, t) dy dx$$
(3.20)

$$\Theta_{i,j}(t) = \int_0^1 \int_0^1 \bar{\phi}_i(x) \bar{\Gamma}_j(y) T^*(x, y, t) dy dx$$
(3.21)

Inversas:

$$\psi(x, y, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} Y_i(x) Y_j(y) \Psi_{i,j}(t)$$
(3.22)

$$T^*(x, y, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \bar{\phi}_i(x) \bar{\Gamma}_j(y) \Theta_{i,j}(t)$$
(3.23)

3.5 Transformação Integral do Sistema de Equações

O sistema de equações diferenciais ordinárias é obtido a partir da transformação integral das equações da vorticidade (2.17) e energia (2.18).

O primeiro passo é aplicar os operadores $\int_0^1 \int_0^1 Y_i(x) Y_j(y) dy dx$ e $\int_0^1 \int_0^1 \bar{\phi}_i(x) \bar{\Gamma}_j(y) dy dx$

nas equações (2.17) e (2.18), respectivamente e em seguida substituir as fórmulas de inversão (3.22) e (3.23) nos termos diferenciados em relação a t , resultando em:

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \left[\int_0^1 Y_i(x) Y_k''(x) dx \int_0^1 Y_j(y) Y_l(y) dy + \int_0^1 Y_i(x) Y_k(x) dx \int_0^1 Y_j(y) Y_l''(y) dy \right] \frac{d\Psi_{kl}(t)}{dt} \\
& + \int_0^1 \int_0^1 Y_i(x) Y_j(x) \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial y} \nabla^2 \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \nabla^2 \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) \frac{\partial \Psi}{\partial y} - rPr_0 \left[\frac{\mu}{r} \nabla^4 \Psi + 2r \frac{\partial \mu}{\partial y} \nabla^2 \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) \right] \right. \\
& \left. - rPr_0 \left[\frac{2}{r} \frac{\partial \mu}{\partial x} \nabla^2 \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) + 4r \frac{\partial^2 \mu}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} + \left(r^2 \frac{\partial^2 \mu}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2} \right) \left(r \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \right) \right] \right\} \\
& - rPr_0 \left[-Ra_0Pr_0 \frac{\partial T}{\partial x} \cos \theta + rRa_0Pr_0 \frac{\partial T}{\partial y} \sin \theta \right] dy dx
\end{aligned} \tag{3.24}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{d\Theta_{i,j}(t)}{dt} = & \int_0^1 \int_0^1 \bar{\phi}_i(x) \bar{\Gamma}_j(y) \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} \right. \\
& \left. - \frac{1}{\rho_0 C_{p_0}} \left(k \nabla^2 T + \frac{\partial k}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + r^2 \frac{\partial k}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{dT_h}{dt} \right\} dy dx
\end{aligned} \tag{3.25}$$

As equações (3.24) e (3.25) podem ser reescritas numa forma compacta como:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} E_{ijkl} \frac{d\Psi_{kl}(t)}{dt} = F_{ij}(t) \tag{3.26}$$

$$\frac{d\Theta_{i,j}(t)}{dt} = G_{ij}(t) \tag{3.27}$$

As condições iniciais dos potenciais transformados são obtidos mediante aplicação dos operadores integrais $\int_0^1 \int_0^1 Y_i(x) Y_j(y) dy dx$ e $\int_0^1 \int_0^1 \bar{\phi}_i(x) \bar{\Gamma}_j(y)$ nos campos originais, resultando em:

$$\Psi_{ij}(t=0) = 0 \tag{3.28}$$

para a função corrente e

$$\Theta_{i,j}(t=0) = \int_0^1 \int_0^1 \bar{\phi}_i(x) \bar{\Gamma}_j(y) (x-1) dx dy \tag{3.29}$$

para a temperatura.

As equações (3.26) e (3.27) constituem um sistema diferencial ordinário do tipo *stiff* (Machado, 1998), onde os potenciais transformados tem taxas de decaimento bem distintas entre si. Para a resolução numérica deste sistema, foi empregada a subrotina *DVIPAG* em ambiente *FORTRAN* (IMSL Library, 1989) que faz o controle automático de erro local, mantendo-o dentro da tolerância desejada.

3.6 Algoritmo Computacional Desenvolvido

O próximo passo para a resolução do problema bidimensional é a implementação numérica das equações (3.26) e (3.27). Para isto, cada expansão será truncada em um número finito de termos resultando num sistema de equações diferenciais ordinárias acopladas, como descrito anteriormente. Desta maneira, o número de equações obtidas, após transformar nas duas direções (x e y) as equações originais, é de $NC^2 + NT^2$ descrito pelas equações (3.26) e (3.27). Cada um dos coeficientes F_{ij} e G_{ij} deve ser calculado a cada passo da solução do problema via integração numérica.

3.7 Ordenação dos Termos nas Expansões

Com o objetivo de diminuir a ordem dos vetores E_{ijkl} e G_{ij} envolvidos, é feita uma redução de índices que consiste em reagrupá-los em pares para formar um único índice da seguinte forma (Machado, 1998):

$$i = i(n) \quad ; \quad j = j(n) \quad (3.30)$$

$$k = k(m) \quad ; \quad l = l(m) \quad (3.31)$$

Desta maneira, as equações (3.26) e (3.27) serão reescritas na forma matricial, respectivamente, como:

$$\sum_{m=1}^{NC} \bar{E}_{nm} \frac{d\bar{\Psi}_m}{dt} = \bar{F}_n(t) \quad (3.32)$$

e

$$\frac{d\bar{\Theta}_m(t)}{dt} = \bar{G}_m(t) \quad (3.33)$$

onde para cada índice n ou m estão relacionados dois índices, i e j , relativos às transformações nas coordenadas x e y .

Foi observado em Machado (1998) que certos pares de autovalores terão uma influência maior que outros na descrição dos campos de função corrente e temperatura nos termos difusivos $F_{ij}(t)$ e $G_{ij}(t)$. Machado (1998) propôs as seguintes relações que combinam estes pares para a função corrente e temperatura, respectivamente:

$$\alpha_n^4 = \varphi_{i(n)}^4 + \varphi_{j(n)}^4 \quad (3.34)$$

$$\gamma_n^2 = \beta_{i(n)}^2 + \lambda_{j(n)}^2 \quad (3.35)$$

Nesta configuração, é possível ordenar os pares de autovalores em ordem crescente, onde o de menor valor terá maior influência, permitindo, com isso, uma pré-seleção para o truncamento das séries de potenciais (Leal, 1996).

3.8 Integração dos Coeficientes $F_{ij}(t)$ e $G_{ij}(t)$ via Quadratura Gaussiana

O fator mais importante no aumento de custo computacional do código numérico em relação ao problema de propriedades constantes (Leal, 1996) é a integração contínua dos coeficientes $F_{ij}(t)$ e $G_{ij}(t)$. Para reduzir este custo Machado (1998) utilizou o sistema de integração numérica aberta via quadratura por pontos de Gauss (Conte e de Boor, 1981) que oferece integração mais simples e direta, calculando os valores dos potenciais originais e suas derivadas somente nos pontos de Gauss usados o que reduz o cálculo de N^2 para N vezes, proporcionando uma grande economia de tempo computacional.

Capítulo 4

Análise de Convergência dos Resultados

Neste capítulo é apresentado, num primeiro momento, a validação do código computacional desenvolvido, comparando-se os resultados com os resultados *benchmark* para propriedades constantes dados por Leal (1996) e por último a análise de convergência para a função corrente e temperatura em relação aos seguintes casos de simulação efetuados: *a)* simulação para cada propriedade variável; *b)* todas as propriedades variáveis; *c)* ângulos de inclinação de 15, 45 e 75 graus, considerando todas as propriedades variáveis; *d)* razão de aspecto de 0.2, 2.0, 5.0 e 10.0 e *e)* razão de aspecto de 10 e ângulo de inclinação de 45 graus.

4.1 Validação do Código Computacional

O programa desenvolvido para a solução do problema, descrito no Capítulo 2, foi construído seguindo os passos apresentados na seção 3.6. A integração numérica dos coeficientes $F_{ij}(t)$ e $G_{ij}(t)$ foi realizada utilizando-se o processo de quadratura por pontos de Gauss aplicado nas duas direções de transformação (x e y).

Nos casos de simulação considerados, a integração por quadratura foi testada selecionando o número de pontos da quadratura através de uma análise de convergência dos resultados da integral e a precisão utilizada na integração do sistema e na resolução do sistema de equações diferenciais ordinárias foi de 10^{-4} . Na validação do código utilizou-se um mesmo número de termos para a função corrente NFC e temperatura NT de 120 termos.

Tabela 4.1- Convergência da integração da expansão da função corrente em função do número de pontos NF , para o caso $Ra = 10^3$, $\theta_o = 0.5$, em $t = 0.01$, com 120 termos usados em cada expansão.

x	y	10	20	30	40	Leal (1996)
0.1	0.1	-0.0449	-0.0393	-0.0393	-0.0393	-0.0393
0.1	0.5	-0.0774	-0.0966	-0.0967	-0.0967	-0.0966
0.1	0.9	-0.0449	-0.0396	-0.0395	-0.0395	-0.0395
0.5	0.1	-0.0011	-0.0153	-0.0153	-0.0153	-0.0153
0.5	0.5	-0.0117	-0.0755	-0.0755	-0.0755	-0.0757
0.5	0.9	-0.0017	-0.0154	-0.0154	-0.0154	-0.0155
0.9	0.1	-0.0000	-0.0011	-0.0011	-0.0011	-0.0011
0.9	0.5	0.0066	-0.0062	-0.0062	-0.0062	-0.0062
0.9	0.9	-0.0001	-0.0011	-0.0011	-0.0011	-0.0011

Num primeiro teste, a convergência dos campos de função corrente e temperatura foi

assegurada para o problema com propriedades constantes e para validar o código, os resultados obtidos para as expansões da função corrente e temperatura foram comparados com os resultados *benchmark* dados por Leal (1996) no tempo $t = 0.01$, como pode ser observado nas Tabelas 4.1 e 4.2 que apresentam os valores para as expansões da função corrente e temperatura em diferentes posições da cavidade quadrada.

Os resultados apresentam uma boa concordância com aqueles obtidos por Leal (1996) como pode ser observado nas Tabelas 4.1 e 4.2.

Tabela 4.2- Convergência da integração da expansão da temperatura em função do número de pontos NF , para o caso $Ra = 10^3$, $\theta_o = 0.5$, em $t = 0.01$, com 120 termos usados em cada expansão.

x	y	10	20	30	40	Leal (1996)
0.1	0.1	0.4760	0.4767	0.4765	0.4765	0.4783
0.1	0.5	0.4124	0.4821	0.4819	0.4819	0.4837
0.1	0.9	0.4900	0.4875	0.4874	0.4874	0.4891
0.5	0.1	0.0203	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004
0.5	0.5	-0.0046	0.0005	0.0005	0.0005	0.0005
0.5	0.9	0.0208	0.0005	0.0005	0.0005	0.0005
0.9	0.1	-0.0042	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.9	0.5	0.0261	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.9	0.9	-0.0044	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

O procedimento de integração do sistema via quadratura de Gauss mostrou-se adequado para a obtenção dos resultados neste problema, embora não se possa contar com controle automático de erro nas integrais dos coeficientes. Este procedimento foi utilizado nas demais simulações para os casos considerados.

4.2 Análise de Convergência para uma Propriedade Variável

Nesta seção, os resultados da formulação, dada no Capítulo 3, são apresentados considerando o caso de uma propriedade variável (condutividade, calor específico e viscosidade) nas equações de Navier Stokes. O fluido empregado foi o *ar*, com um número de Prandtl de referência de 0.71. As funções usadas para representar as propriedades físicas do fluido, na forma adimensional, foram (Zhong et al., 1985):

Condutividade Térmica

$$k = \frac{2,6482 \cdot 10^{-3} T^{\frac{3}{2}}}{T + 245,4 \cdot 10^{-\frac{12}{T}}} \quad (4.1)$$

Calor Específico

$$C_p = 9898.24 - 0.3316T + 0.2025 \cdot 10^{-3} T^2 \quad (4.2)$$

Viscosidade Dinâmica

$$\mu = \frac{14,58 \cdot 10^{-7} T^{\frac{3}{2}}}{110,4 + T} \quad (4.3)$$

A análise de convergência das expansões da função corrente e temperatura é feita para o caso não Boussinesq ($\theta_0 = 0,5$). A precisão usada foi de 10^{-4} na integração do sistema e na resolução do sistema de equações diferenciais ordinárias dado pelas equações (3.26) e (3.27) empregando-se um mesmo número de termos para a função corrente NFC e temperatura NT de 120 termos. Esta análise foi realizada com base na variação do número de pontos NF na integração numérica dos coeficientes por quadratura de Gauss para as três propriedades consideradas (veja Tabelas 4.3, 4.4 e 4.5) no tempo $t = 0.01$.

Através da equação (4.1) o programa foi executado para três valores de NF quais sejam: 10, 20 e 30. Os resultados para as expansões da função corrente e temperatura são mostrados na Tabela 4.3.

Tabela 4.3- Convergência das expansões para a condutividade variável em função do número de pontos de integração NF para o caso não-Boussinesq ($Ra = 10^3$, $\theta_o = 0.5$), em $t = 0.01$, com tolerância de 10^{-4} na integração do sistema e na resolução do sistema de equações diferenciais ordinárias.

			<i>Função Corrente</i>						<i>Temperatura</i>		
x	y		10	20	30	x	y		10	20	30
0.1	0.1		-0.04629	-0.04197	-0.04197	0.1	0.1		0.55871	0.54635	0.54659
0.1	0.5		-0.08379	-0.10612	-0.10614	0.1	0.5		0.47772	0.55199	0.55222
0.1	0.9		-0.04633	-0.04214	-0.04214	0.1	0.9		0.57295	0.55764	0.55787
0.5	0.1		-0.00930	-0.01808	-0.01814	0.5	0.1		0.01673	0.00050	0.00055
0.5	0.5		-0.03865	-0.08884	-0.08901	0.5	0.5		-0.01131	0.00055	0.00060
0.5	0.9		-0.00984	-0.01830	-0.01836	0.5	0.9		0.01777	0.00061	0.00066
0.9	0.1		-0.00036	-0.00132	-0.00132	0.9	0.1		-0.00738	0.00007	0.00007

Como pode ser observado na Tabela 4.3, a convergência das expansões da função corrente e temperatura alcançada até o quarto dígito significativo dos campos originais para o caso da condutividade térmica variável com a temperatura utilizando-se $NF = 30$ pontos na integração numérica dos coeficientes.

Através da equação (4.2) o programa foi executado para três valores de NF quais sejam: 10,

20 e 30. Os resultados para as expansões da função corrente e temperatura são mostrados na Tabela 4.4. A Tabela 4.4 mostra que as expansões da função corrente e temperatura convergiram até a quarta casa decimal para o caso do calor específico variável utilizando-se $NF = 30$ pontos na integração numérica dos coeficientes.

Tabela 4.4- Convergência das expansões para o calor específico variável em função do número de pontos de integração NF para o caso não-Boussinesq ($Ra = 10^3$, $\theta_o = 0.5$), em $t = 0.01$, com tolerância de 10^{-4} na integração do sistema e na resolução do sistema de equações diferenciais ordinárias.

<i>Função Corrente</i>					<i>Temperatura</i>				
x	y	10	20	30	x	y	10	20	30
0.1	0.1	−0.04487	−0.03935	−0.03933	0.1	0.1	0.47497	0.47581	0.47565
0.1	0.5	−0.07737	−0.09657	−0.09658	0.1	0.5	0.41166	0.48123	0.48107
0.1	0.9	−0.04496	−0.03957	−0.03955	0.1	0.9	0.48897	0.48667	0.48652
0.5	0.1	−0.00109	−0.01527	−0.01529	0.5	0.1	0.02043	0.00047	0.00047
0.5	0.5	−0.01146	−0.07541	−0.07544	0.5	0.5	−0.00454	0.00051	0.00051
0.5	0.9	−0.00162	−0.01543	−0.01545	0.5	0.9	0.02089	0.00056	0.00055
0.9	0.1	−0.00008	−0.00112	−0.00112	0.9	0.1	−0.00420	0.00000	0.00000

Tabela 4.5- Convergência das expansões para a viscosidade variável em função do número de pontos de integração NF para o caso não-Boussinesq ($Ra = 10^3$, $\theta_o = 0.5$), em $t = 0.01$, com tolerância de 10^{-4} na integração do sistema e na resolução do sistema de equações diferenciais ordinárias.

<i>Função Corrente</i>					<i>Temperatura</i>				
x	y	10	20	30	x	y	10	20	30
0.1	0.1	−0.03763	−0.03423	−0.03421	0.1	0.1	0.47685	0.47731	0.47715
0.1	0.5	−0.06569	−0.08481	−0.08480	0.1	0.5	0.41224	0.48215	0.48200
0.1	0.9	−0.03769	−0.03434	−0.03432	0.1	0.9	0.48882	0.48702	0.48686
0.5	0.1	−0.00648	−0.01455	−0.01456	0.5	0.1	0.02042	0.00047	0.00047
0.5	0.5	−0.02705	−0.07162	−0.07159	0.5	0.5	−0.00459	0.00051	0.00051
0.5	0.9	−0.00682	−0.01469	−0.01470	0.5	0.9	0.02086	0.00055	0.00054
0.9	0.1	−0.00096	−0.00106	−0.00106	0.9	0.1	−0.00428	0.00000	0.00000

Implementando-se a equação (4.3) no programa de simulação e mantendo as demais propriedades físicas constantes utilizando-se três valores de NF iguais a 10, 20 e 30, os resultados para as expansões da função corrente e temperatura foram obtidos e são mostrados na Tabela 4.5.

Segundo a Tabela 4.5, a convergência das expansões da função corrente e temperatura foi atingida até a quarta casa decimal para o caso da viscosidade variável utilizando-se $NF = 30$ pontos na integração numérica dos coeficientes.

4.3 Análise de Convergência para todas as Propriedades Variáveis

Nesta etapa, a análise de convergência foi realizada para o caso de todas as propriedades físicas variáveis utilizando-se as equações (4.1), (4.2) e (4.3) para o cálculo da condutividade térmica, calor específico e viscosidade dinâmica, respectivamente. Os principais parâmetros utilizados na simulação foram os mesmos utilizados para o caso de uma propriedade variável (seção 4.2), quais sejam: *a)* $\theta_0 = 0,5$ (caso não Boussinesq); *b)* precisão de 10^{-4} na integração do sistema e na resolução do sistema de equações diferenciais ordinárias e *c)* 120 termos usados tanto para a expansão da função corrente (NFC) quanto da temperatura (NT).

A análise foi feita com base na variação do número de pontos NF na integração numérica dos coeficientes por quadratura de Gauss para as três propriedades variáveis no tempo $t = 0.01$. Os resultados para as expansões da função corrente e temperatura são mostrados na Tabela 4.6.

Tabela 4.6- Convergência das expansões para todas as propriedades variáveis em função do número de pontos de integração NF para o caso não-Boussinesq ($Ra = 10^3$, $\theta_o = 0.5$), em $t = 0.01$, com tolerância de 10^{-4} na integração do sistema e na resolução do sistema de equações diferenciais ordinárias.

<i>Função Corrente</i>					<i>Temperatura</i>				
x	y	20	30	40	x	y	20	30	40
0.1	0.1	-0.03621	-0.03621	-0.03621	0.1	0.1	0.54595	0.54618	0.54618
0.1	0.5	-0.09279	-0.09280	-0.09280	0.1	0.5	0.55099	0.55123	0.55123
0.1	0.9	-0.03628	-0.03628	-0.03628	0.1	0.9	0.55605	0.55628	0.55629
0.5	0.1	-0.01718	-0.01723	-0.01723	0.5	0.1	0.00051	0.00056	0.00056
0.5	0.5	-0.08417	-0.08429	-0.08429	0.5	0.5	0.00055	0.00061	0.00061
0.5	0.9	-0.01737	-0.01742	-0.01742	0.5	0.9	0.00060	0.00066	0.00066
0.9	0.1	-0.00125	-0.00125	-0.00125	0.9	0.1	0.00007	0.00007	0.00007

A Tabela 4.6 mostra que as expansões da função corrente e temperatura convergiram até a quarta casa decimal para o caso do calor específico variável utilizando-se $NF = 30$ pontos na integração numérica dos coeficientes.

4.4 Análise de Convergência para Diferentes Ângulos de Inclinação

Nesta seção são apresentados os resultados de simulação para análise da convergência das expansões da função corrente e temperatura para o problema da cavidade inclinada com diferentes ângulos de inclinação, quais sejam: 15, 45 e 75 graus em função do número de termos nas expansões (NFC e NT) para dois valores de NF iguais a 30 e 40. Os parâmetros utilizados nas simulações efetuadas foram os mesmos utilizados para a análise de convergência no caso

de todas as propriedades variáveis (seção 4.3).

A primeira análise de convergência das expansões é feita com um ângulo de inclinação de 15 graus, conforme mostra a Tabela 4.7 utilizando-se um número de pontos NF na integração numérica dos coeficientes igual a 30.

Utilizando-se um número de pontos NF na integração numérica dos coeficientes igual a 40, os resultados são mostrados na Tabela 4.8. Nota-se pelas Tabelas 4.7 e 4.8, os resultados obtidos convergiram até o terceiro dígito significativo dos campos originais usando 100 termos em cada campo.

Tabela 4.7- Convergência das expansões para um ângulo de inclinação de 15^0 em função do número de termos ($NFCINT$) para o caso não-Boussinesq em $t = 0.01$ com 30 pontos de integração.

		<i>Função Corrente</i>			
x	y	60/60	80/80	100/100	120/120
0.1	0.1	-0.03324	-0.03465	-0.03481	-0.03500
0.1	0.5	-0.08873	-0.09009	-0.09004	-0.08968
0.1	0.9	-0.03336	-0.03472	-0.03488	-0.03507
0.5	0.1	-0.01627	-0.01677	-0.01682	-0.01665
0.5	0.5	-0.08106	-0.08167	-0.08133	-0.08146
0.5	0.9	-0.01647	-0.01694	-0.01699	-0.01683
0.9	0.1	-0.00112	-0.00131	-0.00115	-0.00121

		<i>Temperatura</i>			
x	y	60/60	80/80	100/100	120/120
0.1	0.1	0.54358	0.54647	0.54630	0.54635
0.1	0.5	0.54817	0.55121	0.55112	0.55123
0.1	0.9	0.55278	0.55596	0.55594	0.55611
0.5	0.1	-0.00013	0.00091	0.00052	0.00056
0.5	0.5	-0.00003	0.00089	0.00059	0.00061
0.5	0.9	0.00007	0.00088	0.00066	0.00066
0.9	0.1	-0.00026	0.00006	-0.00005	0.00007

Tabela 4.8- Convergência das expansões para um ângulo de inclinação de 15^0 em função do número de termos ($NFCINT$) para o caso não-Boussinesq em $t = 0.01$ com 40 pontos de integração.

		<i>Função Corrente</i>			
x	y	60/60	80/80	100/100	120/120
0.1	0.1	-0.03324	-0.03465	-0.03481	-0.03500
0.1	0.5	-0.08873	-0.09009	-0.09004	-0.08968
0.1	0.9	-0.03336	-0.03472	-0.03488	-0.03507
0.5	0.1	-0.01627	-0.01677	-0.01682	-0.01665
0.5	0.5	-0.08106	-0.08167	-0.08133	-0.08146
0.5	0.9	-0.01647	-0.01694	-0.01699	-0.01683
0.9	0.1	-0.00112	-0.00131	-0.00115	-0.00121

		<i>Temperatura</i>			
x	y	60/60	80/80	100/100	120/120
0.1	0.1	0.54358	0.54647	0.54630	0.54636
0.1	0.5	0.54817	0.55121	0.55112	0.55123
0.1	0.9	0.55278	0.55596	0.55594	0.55612
0.5	0.1	-0.00013	0.00091	0.00052	0.00056
0.5	0.5	-0.00003	0.00089	0.00059	0.00061
0.5	0.9	0.00007	0.00088	0.00066	0.00066
0.9	0.1	-0.00026	0.00006	-0.00005	0.00007

Uma segunda análise de convergência das expansões é feita com um ângulo de inclinação de 45 graus, conforme mostra a Tabela 4.9 utilizando-se um número de pontos NF na integração numérica dos coeficientes igual a 30.

Tabela 4.9- Convergência das expansões para um ângulo de inclinação de 45^0 em função do número de termos ($NFCINT$) para o caso não-Boussinesq em $t = 0.01$ com 30 pontos de integração.

		<i>Função Corrente</i>			
x	y	60/60	80/80	100/100	120/120
0.1	0.1	-0.02437	-0.02540	-0.02552	-0.02566
0.1	0.5	-0.06500	-0.06600	-0.06596	-0.06570
0.1	0.9	-0.02444	-0.02544	-0.02556	-0.02569
0.5	0.1	-0.01195	-0.01231	-0.01235	-0.01222
0.5	0.5	-0.05939	-0.05984	-0.05960	-0.05969
0.5	0.9	-0.01205	-0.01240	-0.01244	-0.01232
0.9	0.1	-0.00082	-0.00096	-0.00084	-0.00088

		<i>Temperatura</i>			
x	y	60/60	80/80	100/100	120/120
0.1	0.1	0.54481	0.54774	0.54760	0.54766
0.1	0.5	0.54817	0.55121	0.55113	0.55124
0.1	0.9	0.55155	0.55470	0.55466	0.55481
0.5	0.1	-0.00010	0.00091	0.00054	0.00057
0.5	0.5	-0.00003	0.00089	0.00059	0.00061
0.5	0.9	0.00005	0.00088	0.00064	0.00064
0.9	0.1	-0.00026	0.00005	-0.00005	0.00007

Os resultados para o mesmo ângulo de inclinação de 45 graus e NF igual a 40 são mostrados a seguir (Tabela 4.10).

Tabela 4.10- Convergência das expansões para um ângulo de inclinação de 45^0 em função do número de termos (NFC/NT) para o caso não-Boussinesq em $t = 0.01$ com 40 pontos de integração.

		<i>Função Corrente</i>			
x	y	60/60	80/80	100/100	120/120
0.1	0.1	-0.02437	-0.02540	-0.02552	-0.02566
0.1	0.5	-0.06500	-0.06600	-0.06596	-0.06570
0.1	0.9	-0.02444	-0.02544	-0.02556	-0.02569
0.5	0.1	-0.01195	-0.01231	-0.01235	-0.01222
0.5	0.5	-0.05939	-0.05984	-0.05960	-0.05969
0.5	0.9	-0.01205	-0.01240	-0.01244	-0.01232
0.9	0.1	-0.00082	-0.00096	-0.00084	-0.00088

		<i>Temperatura</i>			
x	y	60/60	80/80	100/100	120/120
0.1	0.1	0.54481	0.54774	0.54760	0.54767
0.1	0.5	0.54817	0.55122	0.55113	0.55124
0.1	0.9	0.55155	0.55470	0.55466	0.55482
0.5	0.1	-0.00010	0.00091	0.00054	0.00057
0.5	0.5	-0.00003	0.00089	0.00059	0.00061
0.5	0.9	0.00005	0.00088	0.00064	0.00064
0.9	0.1	-0.00026	0.00005	-0.00005	0.00007

Observa-se pelas Tabelas 4.9 e 4.10, os resultados obtidos convergiram até o terceiro dígito significativo dos campos originais usando 120 termos em cada campo.

Uma última análise de convergência das expansões é efetuada com um ângulo de inclinação de 75 graus, conforme mostra a Tabela 4.11 utilizando-se um número de pontos NF na integração numérica dos coeficientes igual a 30.

Tabela 4.11- Convergência das expansões para um ângulo de inclinação de 75^0 em função do número de termos (NFC/NT) para o caso não-Boussinesq em $t = 0.01$ com 30 pontos de integração.

		<i>Função Corrente</i>			
x	y	60/60	80/80	100/100	120/120
0.1	0.1	-0.00893	-0.00931	-0.00935	-0.00940
0.1	0.5	-0.02380	-0.02417	-0.02415	-0.02406
0.1	0.9	-0.00894	-0.00931	-0.00936	-0.00941
0.5	0.1	-0.00439	-0.00452	-0.00453	-0.00449
0.5	0.5	-0.02175	-0.02192	-0.02183	-0.02186
0.5	0.9	-0.00440	-0.00453	-0.00455	-0.00450
0.9	0.1	-0.00030	-0.00035	-0.00031	-0.00032

		<i>Temperatura</i>			
x	y	60/60	80/80	100/100	120/120
0.1	0.1	0.54695	0.54995	0.54984	0.54993
0.1	0.5	0.54818	0.55122	0.55113	0.55124
0.1	0.9	0.54942	0.55250	0.55243	0.55255
0.5	0.1	-0.00005	0.00090	0.00057	0.00059
0.5	0.5	-0.00003	0.00089	0.00059	0.00061
0.5	0.9	0.00000	0.00089	0.00061	0.00062
0.9	0.1	-0.00024	0.00004	-0.00006	0.00007

Utilizando-se $NF = 40$, para um ângulo de inclinação de 75 graus, os resultados são apresentados na Tabela 4.12.

Tabela 4.12- Convergência das expansões para um ângulo de inclinação de 75° em função do número de termos (NFC/INT) para o caso não-Boussinesq em $t = 0.01$ com 40 pontos de integração.

		<i>Função Corrente</i>			
x	y	60/60	80/80	100/100	120/120
0.1	0.1	-0.00893	-0.00931	-0.00935	-0.00940
0.1	0.5	-0.02380	-0.02417	-0.02415	-0.02406
0.1	0.9	-0.00894	-0.00931	-0.00936	-0.00941
0.5	0.1	-0.00439	-0.00452	-0.00453	-0.00449
0.5	0.5	-0.02175	-0.02192	-0.02183	-0.02186
0.5	0.9	-0.00440	-0.00453	-0.00455	-0.00450
0.9	0.1	-0.00030	-0.00035	-0.00031	-0.00032

		<i>Temperatura</i>			
x	y	60/60	80/80	100/100	120/120
0.1	0.1	0.54695	0.54995	0.54984	0.54994
0.1	0.5	0.54818	0.55122	0.55113	0.55125
0.1	0.9	0.54942	0.55250	0.55243	0.55256
0.5	0.1	-0.00005	0.00090	0.00057	0.00059
0.5	0.5	-0.00003	0.00089	0.00059	0.00061
0.5	0.9	0.00000	0.00089	0.00061	0.00062
0.9	0.1	-0.00024	0.00004	-0.00006	0.00007

Observa-se pelas Tabelas 4.11 e 4.12, os resultados obtidos convergiram até o terceiro dígito significativo dos campos originais usando 120 termos em cada campo.

4.5 Análise de Convergência para Diferentes Razões de Aspecto

Nesta seção são apresentados os resultados obtidos para as expansões da função corrente e temperatura em diferentes posições da cavidade retangular e para as seguintes razões de aspecto, equação (2.5): 0.2, 2.0, 5.0 e 10.0. A análise de convergência é feita em função do

número de pontos utilizados na quadratura ($NF = 10, 20$ e 30) e em todas as tabelas utilizou-se um mesmo número de termos para a função corrente NFC e temperatura NT de 120 termos. Os parâmetros utilizados nas simulações efetuadas foram os mesmos utilizados para a análise de convergência no caso de todas as propriedades variáveis (seção 4.3).

Num primeiro momento é feita a análise de convergência das expansões para a razão de aspecto de 0.2. Os resultados obtidos são mostrados na Tabela 4.13.

Tabela 4.13- Convergência das expansões para razão de aspecto de 0.2 em função do número de pontos de integração NF para o caso não-Boussinesq ($Ra = 10^3$, $\theta_o = 0.5$), em $t = 0.01$, com tolerância de 10^{-4} na integração do sistema e na resolução do sistema de equações diferenciais ordinárias.

<i>Função Corrente</i>					<i>Temperatura</i>				
x	y	10	20	30	x	y	10	20	30
0.1	0.5	−0.00410	−0.00377	−0.00377	0.1	0.5	0.56360	0.55057	0.55081
0.1	2.5	−0.00904	−0.00847	−0.00847	0.1	2.5	0.48156	0.55101	0.55124
0.1	4.5	−0.00410	−0.00377	−0.00377	0.1	4.5	0.56488	0.55145	0.55168
0.5	0.5	0.00000	−0.00001	−0.00002	0.5	0.5	0.03178	0.00055	0.00060
0.5	2.5	−0.00022	−0.00009	−0.00010	0.5	2.5	−0.01589	0.00055	0.00061
0.5	4.5	0.00000	−0.00001	−0.00002	0.5	4.5	0.03186	0.00056	0.00061
0.9	0.5	0.00004	0.00000	0.00000	0.9	0.5	−0.01249	0.00007	0.00007

Segundo a Tabela 4.13, os resultados convergiram para 30 pontos utilizados na quadratura.

Os resultados obtidos para as expansões em diferentes posições da cavidade utilizando-se uma razão de aspecto de 2.0 são mostrados na Tabela 4.14. Os resultados obtidos para as expansões em diferentes posições da cavidade utilizando-se uma razão de aspecto de 5.0 são mostrados na Tabela 4.15.

Tabela 4.14- Convergência das expansões para razão de aspecto de 2.0 em função do número de pontos de integração NF para o caso não-Boussinesq ($Ra = 10^3$, $\theta_o = 0.5$), em $t = 0.01$, com tolerância de 10^{-4} na integração do sistema e na resolução do sistema de equações diferenciais ordinárias.

<i>Função Corrente</i>					<i>Temperatura</i>				
x	y	10	20	30	x	y	10	20	30
0.2	0.1	−0.02721	−0.02715	−0.02716	0.2	0.1	0.56290	0.54566	0.54590
0.2	0.5	−0.05307	−0.14532	−0.14534	0.2	0.5	0.46635	0.55095	0.55118
0.2	0.9	−0.02709	−0.02719	−0.02719	0.2	0.9	0.57192	0.55634	0.55657
1.0	0.1	−0.00146	−0.00903	−0.00907	1.0	0.1	0.01443	0.00051	0.00056
1.0	0.5	−0.01878	−0.07737	−0.07757	1.0	0.5	−0.01456	0.00055	0.00061
1.0	0.9	−0.00147	−0.00905	−0.00908	1.0	0.9	0.01536	0.00060	0.00065
1.8	0.1	0.00047	−0.00033	−0.00033	1.8	0.1	−0.00699	0.00008	0.00008

Os resultados obtidos para as expansões em diferentes posições da cavidade utilizando-se uma razão de aspecto de 10.0 são mostrados na Tabela 4.16.

Tabela 4.15- Convergência das expansões para razão de aspecto de 5.0 em função do número de pontos de integração NF para o caso não-Boussinesq ($Ra = 10^3$, $\theta_o = 0.5$), em $t = 0.01$, com tolerância de 10^{-4} na integração do sistema e na resolução do sistema de equações diferenciais ordinárias.

<i>Função Corrente</i>					<i>Temperatura</i>				
x	y	10	20	30	x	y	10	20	30
0.5	0.1	-0.00178	-0.00711	-0.00711	0.5	0.1	0.52490	0.55008	0.55016
0.5	0.5	0.01238	-0.05027	-0.05025	0.5	0.5	0.43477	0.55120	0.55129
0.5	0.9	-0.00178	-0.00710	-0.00710	0.5	0.9	0.52484	0.55233	0.55242
2.5	0.1	0.00403	-0.00005	-0.00006	2.5	0.1	-0.00137	0.00056	0.00060
2.5	0.5	0.02859	-0.00064	-0.00072	2.5	0.5	-0.02344	0.00057	0.00061
2.5	0.9	0.00403	-0.00005	-0.00006	2.5	0.9	-0.00138	0.00057	0.00062
4.5	0.1	0.00044	-0.00001	-0.00001	4.5	0.1	0.01897	0.00007	0.00007

Tabela 4.16- Convergência das expansões para razão de aspecto de 10.0 em função do número de pontos de integração NF para o caso não-Boussinesq ($Ra = 10^3$, $\theta_o = 0.5$), em $t = 0.01$, com tolerância de 10^{-4} na integração do sistema e na resolução do sistema de equações diferenciais ordinárias.

<i>Função Corrente</i>					<i>Temperatura</i>				
x	y	10	20	30	x	y	10	20	30
1.0	0.1	0.00145	-0.00129	-0.00128	1.0	0.1	0.44102	0.55088	0.55089
1.0	0.5	0.01092	-0.00966	-0.00965	1.0	0.5	0.38697	0.55095	0.55096
1.0	0.9	0.00145	-0.00129	-0.00128	1.0	0.9	0.44089	0.55102	0.55103
5.0	0.1	0.00548	0.00002	0.00002	5.0	0.1	-0.02575	0.00057	0.00061
5.0	0.5	0.03407	0.00015	0.00012	5.0	0.5	-0.03445	0.00057	0.00061
5.0	0.9	0.00548	0.00002	0.00002	5.0	0.9	-0.02577	0.00057	0.00061
9.0	0.1	0.00014	0.00000	0.00000	9.0	0.1	0.07972	0.00007	0.00007

4.6 Análise de Convergência para Razão de Aspecto de 10 e Ângulo de Inclinação de 45 graus

Nesta seção é feita a análise de convergência para o caso mais crítico da cavidade retangular, com ângulo de inclinação de 45 graus e razão de aspecto de 10.0 em função do número de pontos utilizados na quadratura ($NF = 10, 20$ e 30) em $t = 0.005$. Utilizou-se o número de termos para as expansões da função corrente NFC e temperatura NT de 120 termos. Neste caso de simulação considerado, a integração por quadratura foi testada selecionando o número de pontos da quadratura através de uma análise de convergência dos resultados da integral e a precisão utilizada na integração do sistema e na resolução do sistema de equações diferenciais ordinárias foi de 10^{-4} . Na validação do código utilizou-se um mesmo número de termos para a função corrente NFC e temperatura NT de 120 termos. Os resultados são mostrados na Tabela 4.17.

Como pode ser observado na Tabela 4.17, os valores para função corrente e temperatura convergiram em $NF = 30$ pontos na quadratura gaussiana com $NFC = NT = 120$ termos.

Tabela 4.17- Convergência das expansões para razão de aspecto de 10.0 e ângulo de 45° em função do número de pontos de integração NF para o caso não-Boussinesq ($Ra = 10^3$, $\theta_o = 0.5$), em $t = 0.005$, com tolerância de 10^{-4} na integração do sistema e na resolução do sistema de equações diferenciais ordinárias.

<i>Função Corrente</i>						<i>Temperatura</i>					
x	y	10	20	30		x	y	10	20	30	
1.0	0.1	0.00051	-0.00116	-0.00116		1.0	0.1	0.33058	0.38636	0.38619	
1.0	0.5	0.00498	-0.00868	-0.00866		1.0	0.5	0.28667	0.38643	0.38627	
1.0	0.9	0.00046	-0.00116	-0.00116		1.0	0.9	0.33052	0.38651	0.38634	
5.0	0.1	0.00228	0.00003	0.00003		5.0	0.1	-0.01376	-0.00042	-0.00038	
5.0	0.5	0.01403	0.00021	0.00018		5.0	0.5	-0.02056	-0.00042	-0.00038	
5.0	0.9	0.00226	0.00003	0.00003		5.0	0.9	-0.01376	-0.00042	-0.00038	
9.0	0.1	0.00018	0.00000	0.00000		9.0	0.1	0.02588	0.00018	0.00026	

Partindo da análise de convergência realizada e tendo em vista, a elaboração de um conjunto de simulações numéricas que visam, à princípio, às investigações do comportamento de algumas variáveis em torno do fenômeno descrito pelo problema em questão, o presente trabalho conduz aos testes numéricos, utilizando a ferramenta *GITT*, para a análise dos resultados que serão mostrados no capítulo seguinte.

Capítulo 5

Resultados e Análise

Neste capítulo são apresentados os resultados com relação as isolinhas da função corrente e isotermas obtidas a partir das simulações numéricas efetuadas para os seguintes casos:

- propriedades constantes;
- variação simultânea de todas as propriedades;
- variação de propriedade individual;
- variação da razão de aspecto;
- variação do ângulo de inclinação;
- variação da razão de aspecto e ângulo de inclinação para um caso crítico.

Finalizando esta seção, é realizada uma série de análises para o comportamento de variáveis importantes no fenômeno:

- Nusselt médio na parede quente para propriedades constantes, variáveis e uma propriedade variando em função do tempo;
- Nusselt local para propriedades constantes e variáveis em função da posição em y ;
- variação percentual das propriedades em função da temperatura;
- variação do Nusselt médio em função do ângulo de inclinação;
- variação do Nusselt médio em função da razão de aspecto.

5.1 Análise dos Resultados para uma Propriedade Variável

Nesta seção são apresentados os resultados para a variação das propriedades físicas do fluido em função da temperatura, a partir das equações (4.1), (4.3) e (4.2), podemos determinar os valores da Condutividade Térmica, da Viscosidade Dinâmica e do Calor Específico para

temperaturas entre 300 e 500 K, sendo esta a faixa de temperaturas de validação das relações propostas por Zhong et al. (1985).

Para o caso da Condutividade Térmica, entre as temperaturas analisadas ocorreu um acréscimo da ordem de aproximadamente 50%, isto é mostrado pela Figura 5.1, derivando-se a função $\frac{dk}{dT}$ e plotando seus valores para a mesma faixa de temperatura (Figura 5.2), notamos um decréscimo nos resultados de 15% aproximadamente. Isto indica que a Condutividade Térmica possui uma tendência de crescimento embora esta tendência diminua com o aumento da temperatura.

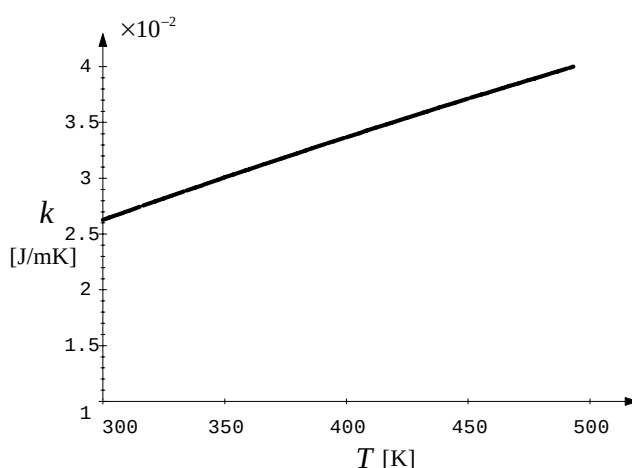


Figura 5.1- Comportamento da Condutividade Térmica em função da temperatura.

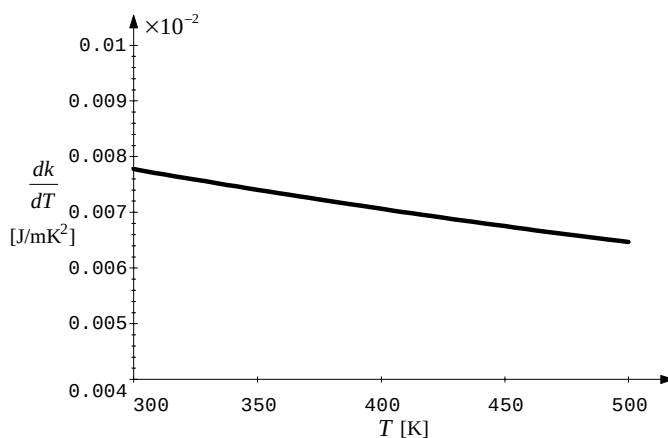


Figura 5.2- Variação da Condutividade em função da temperatura.

A Viscosidade de acordo com as Figuras 5.3 e 5.4 apresentou um acréscimo da ordem de

40% e sua derivada $\frac{d\mu}{dT}$ um decréscimo de aproximadamente 20% entre as temperaturas de 300 a 500 K, fenômeno semelhante ao que ocorre para a Condutividade Variável.

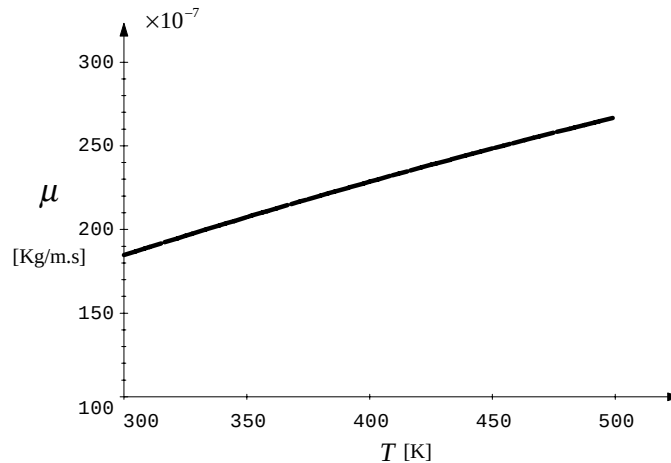


Figura 5.3- Comportamento da Viscosidade em função da temperatura.

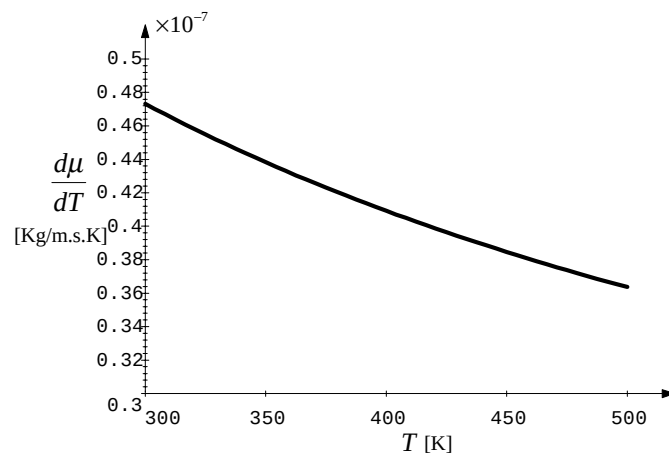


Figura 5.4- Variação da Viscosidade em função da temperatura.

As Figuras 5.5 e 5.6 exibem os resultados na mesma faixa de temperatura para o Calor Específico e sua derivada $\frac{dc_p}{dT}$ respectivamente, sendo que neste caso ocorre um pequeno decréscimo de 4% para C_p e um incremento de 40% para os valores de sua derivada, isto indica que o Calor específico é pouco sensível às variações de temperatura entre 300 e 500 K, porém possui uma certa tendência de se tornar mais sensível com o aumento da mesma.

Foram também analisados os resultados para o número Prandtl entre a faixa de temperatura proposta, e são exibidos nas Figuras 5.7 e 5.8, tais resultados mostram uma pequena variação

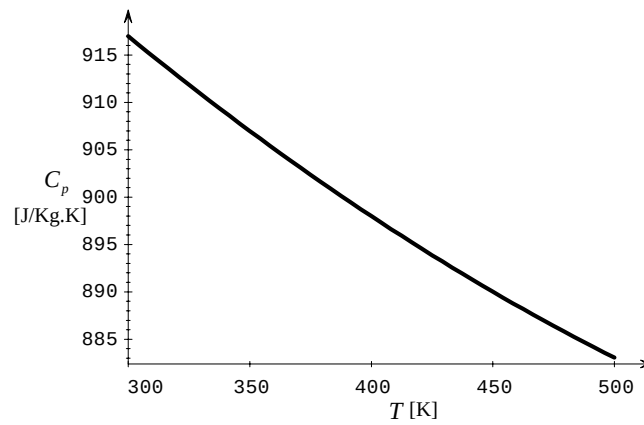


Figura 5.5- Comportamento do Calor Específico em função da temperatura.

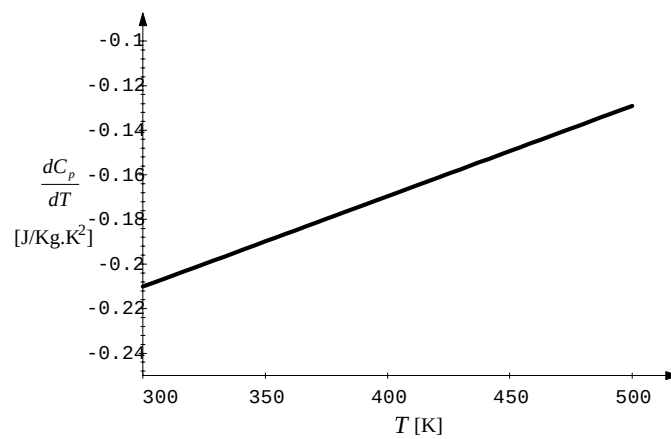


Figura 5.6- Variação do Calor Específico em função da temperatura.

negativa de Pr porém seus valores para a derivada $\frac{dPr}{dT}$ apresentam um incremento relativamente grande, fato semelhante ao que ocorre para o Calor Específico.

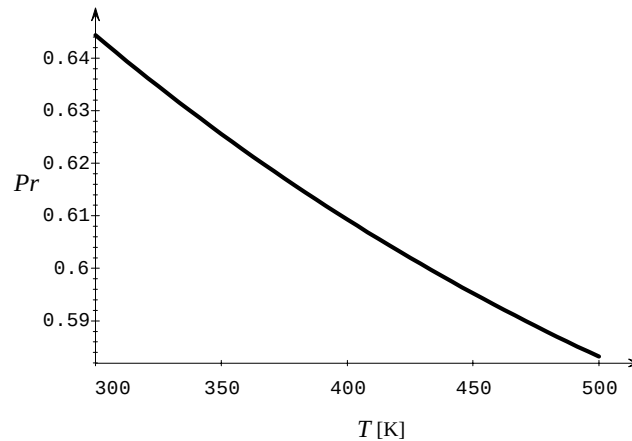


Figura 5.7- Comportamento do Número de Prandtl em função da temperatura.

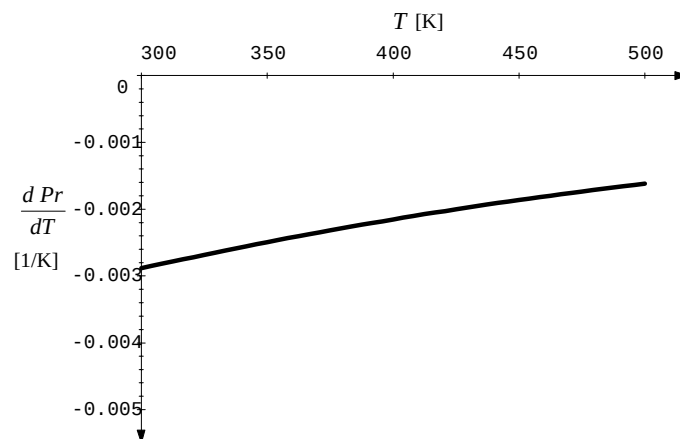


Figura 5.8- Variação do Número de Prandtl em função da temperatura.

5.2 Análise dos Resultados para uma Cavidade Quadrada e Plana

Nesta seção é realizada a análise dos resultados via *GITT* para uma cavidade com razão de aspecto 1.0 e ângulo de inclinação 0° , considerando todas as propriedades constantes, todas as propriedades variáveis e considerando as propriedades constantes e variando-se individualmente a Condutividade Térmica, o Calor específico e a Viscosidade.

Foram mostrados resultados para função corrente e perfil de temperatura para tempos 0.01; 0.02; 0.1; 0.5 e 1.0.

As Figuras 5.9, 5.10, 5.11, 5.12 e 5.13 exibem simultaneamente para título de comparação os resultados para função corrente. Pode-se notar que para tempos menores (0.01 e 0.02) é evidente

uma discrepância entre os valores encontrados para as cinco opções de variações propostas, pois em tempos maiores o modelo tende a estabilização diminuindo os incrementos ou gradientes de temperatura.

Tendo como referência as equações propostas por Zhong et al. (1985) e analisadas na Seção 5.1 que as maiores variações que ocorrem em comparação com as propriedades constantes são relativas à Condutividade e a Viscosidade, ambas crescem em função do aumento da temperatura, sendo que as mesmas possuem efeitos contrários em relação ao fluxo.

Com o aumento da Condutividade em função da temperatura o fluido torna-se mais sensível a sua variação, e com isso o maior gradiente de temperatura provoca uma expansão nas linhas de corrente por sua influência no termo de empuxo. A variação da viscosidade em função da temperatura provoca um efeito contrário, pois aumenta o atrito provocando um efeito de retardamento do empuxo e conseqüentemente diminuindo a intensidade da função corrente.

A análise das figuras também demonstra que para todas as propriedades variáveis os efeitos da Condutividade e Viscosidade se interpõem e a variação do Calor Específico com a temperatura é mínima, portanto para este caso estudado verificamos que Pr é próximo de 0.6 e com variação com a temperatura muito pequena. Podemos concluir que a difusão térmica será um pouco maior que a difusão viscosa, e que a linha de corrente terá uma posição intermediária. A curva para C_p é praticamente coincidente com a curva para propriedades constantes, devido a pequena variação desta propriedade em relação ao seu valor original.

As Figuras 5.14, 5.15, 5.16, 5.17 e 5.18 representam os perfis de temperatura para os mesmos casos da função corrente, os efeitos das variações das propriedades são semelhantes, nota-se uma inversão em relação a tais efeitos relacionados aos tempos, ou seja, agora para tempos maiores, as discrepâncias são mais evidentes. Devido aos perfis da função corrente, ocorre uma inversão em determinada posição em y para os perfis de temperatura nos casos de condutividade variável e viscosidade variável. Esta inversão ocorre devido ao decréscimo da difusividade térmica em relação à difusividade viscosa no percurso da linha de corrente.

5.3 Análise dos Resultados para Variação da Razão de Aspecto

Nesta seção serão analisados os efeitos da variação da razão de aspecto, para todas as propriedades variáveis, na função corrente e perfis de temperatura. Foram simulados casos para a razão de aspecto 0.2; 1.0; 2.0 e 10.0 e são apresentados para os tempos 0.01; 0.02; 0.1; 0.5 e 1.0.

5.3.1 Razão de Aspecto 0.2

Considerando uma cavidade retangular e de acordo com a Figura 2.1 a relação entre as medidas $\frac{a}{b}$ é de 0.2. Neste caso são demonstradas pelas Figuras 5.19, 5.20, 5.21, 5.22 e 5.23 os perfis para a função corrente nos tempos 0.01; 0.02; 0.1; 0.5 e 1.0, respectivamente.

Para tempos menores, o alto gradiente de temperatura próximo à parede quente provoca o surgimento de linhas de corrente com baixa intensidade e com o centro de rotação na cota $y = 0.5$ e $x < 0.5$. Com a evolução dos tempos, a intensidade da função corrente aumenta e seu centro de rotação se desloca para a cota $y = 0.5$ e $x = 0.5$, ou seja, para a parte central da cavidade. Este efeito já conhecido para o fenômeno é reproduzido via *GITT* e fisicamente é criado pela diminuição do gradiente de temperatura em função de x , o que amortece os efeitos no termo de empuxo e mantém os efeitos no termo de inércia.

Os perfis de temperatura são apresentados pelas Figuras 5.24, 5.25, 5.26, 5.27 e 5.28 em tempos menores em função das cotas em x o gradiente de temperatura é maior sendo que com a estabilização do sistema tende a uma diminuição, os perfis de temperatura são praticamente lineares mostrando que o termo gravitacional pouco influencia na transferência de calor para esta razão de aspecto.

5.3.2 Razão de Aspecto 1.0

Neste caso a razão $\frac{a}{b}$ é igual a 1.0, os resultados agora são apresentados separadamente apenas para todas as propriedades variáveis, as Figuras 5.29 a 5.38 mostram a variação da função corrente e perfil de temperatura para os tempos 0.01; 0.02; 0.1; 0.5 e 1.0.

Nos tempos menores para a função corrente surge um efeito semelhante ao que ocorre na razão de aspecto 0.2, ou seja, a maior intensidade das linhas de corrente tem seu centro de rotação em $y = 0.5$ e $x < 0.5$, sendo que com o aumento dos tempos provoca um deslocamento para $y = 0.5$ e $x = 0.5$. Os perfis de temperatura neste caso já apresentam um efeito mais evidente do termo gravitacional, tornando-os não lineares com a evolução dos tempos.

5.3.3 Razão de Aspecto 2.0

Nas Figuras 5.39 a 5.48 são apresentados os resultados para a razão $\frac{a}{b}$ de 2.0, para a função corrente e perfil de temperatura nos tempos 0.01; 0.02; 0.1; 0.5 e 1.0, para tal razão de aspecto,

como era esperado, a intensidade da função corrente diminui e seu centro de rotação nos tempos maiores se desloca para as cotas $y = 0.5$ e $x > 0.5$. Tal efeito ocorre devido a diminuição relativa da cota y máxima que amortece o efeito de empuxo provocado pelo gradiente de temperatura próximo à parede quente e pelo efeito de inércia que se torna mais evidente com o aumento da razão de aspecto.

Os perfis de temperatura nos tempos maiores ainda apresentam uma certa não linearidade principalmente próximo a cota $x = 0.5$, tal efeito decresce em relação a razão de aspecto 1.0 em função da diminuição da cota relativa em y que reduz a influência dos termos gravitacional e de empuxo.

5.3.4 Razão de Aspecto 10

No caso razão de aspecto $\frac{a}{b}$ de 10, são apresentados os resultados para função corrente e perfil de temperatura, nos tempos 0.005; 0.01; 0.02; 0.1; 0.5 e 1.0, tais resultados são mostrados nas Figuras 5.49 a 5.60.

A simulação numérica para esta razão de aspecto crítica mostrou alguns resultados importantes para tempos pequenos onde, devido ao alto gradiente de temperatura próximo a parede quente, ocorre a formação de linhas de corrente que se desprendem rapidamente da parede e se deslocam para uma posição $x > 0.5$. Estas linhas de corrente possuem uma componente de velocidade em $x(u)$ muito maior que a componente em $y(v)$. Esse efeito é provocado pelas forças de empuxo que atuam sobre uma cota relativamente pequena em y . As velocidades de deslocamento dos centros de rotação das linhas de função corrente na direção x são evidentemente maiores que para o caso de razão de aspecto 2.0, porém a intensidade destas linhas de corrente são menores demonstrando uma tendência de queda da influência convectiva na transferência de calor.

Nos tempos intermediários ocorre a absorção destas linhas, que apresentam recirculações, por novos centros de rotação que surgem próximos à parede quente. Para tempos maiores, o centro de rotação das linhas de função corrente com maior intensidade se desloca para posição em $x \gg 0.5$, devido a uma associação entre efeitos de inércia e empuxo.

Os perfis de temperatura são extremamente lineares o que denota um maior domínio do fenômeno condutivo no processo de transferência de calor. O que ocorre contudo é que tais perfis são semelhantes aos perfis para razão de aspecto 2.0 mesmo sendo a cota x máxima relativamente muito maior.

5.3.5 Análise dos Resultados para Variação do Ângulo de Inclinação

Nesta seção são apresentados os resultados para os ângulos de inclinação da cavidade nos valores de 15° , 45° e 75° para todas as propriedades do ar variando a razão de aspecto 1.0. As Figuras de 5.61 a 5.90 mostram as variações para função corrente e temperatura para os tempos 0.01, 0.02, 0.1, 0.5 e 1.0.

Analizando tais resultados notamos configurações semelhantes às apresentadas para razão de aspecto 1.0 e ângulo de inclinação 0° em relação ao surgimento das linhas de corrente e o deslocamento de seu centro de rotação. Contudo para o ângulo de 15° , a intensidade destas linhas de corrente é maior, diminuindo com o aumento do mesmo para 45° e 75° . Os perfis de temperatura se mostram não lineares para o menor ângulo e se linearizam com o incremento de tal variável.

Estes fenômenos se justificam pela menor influência do termo gravitacional, causada pela tendência de se tornar a cavidade com ângulo zero e aquecimento inferior, devido ao aumento do ângulo de inclinação. Neste ponto não surgem outros centros de rotação convectivos pela baixa razão de aspecto, sendo que a troca de calor na parte fria não possibilita a expansão das linhas de corrente. A linearização dos perfis de temperatura mostra uma maior influência do fenômeno condutivo na troca de calor.

5.3.6 Variação do Ângulo de Inclinação e Razão de Aspecto

As Figuras 5.91 a 5.100 mostram os resultados para o caso mais crítico, com ângulo de inclinação 45° e razão de aspecto 10 nos tempos 0.01, 0.02, 0.1, 0.5 e 1.0, para a função corrente e perfil de temperatura, respectivamente.

Os resultados são semelhantes aos apresentados para razão de aspecto 10. Nos tempos menores o método capturou as recirculações, o surgimento de linhas de corrente que se deslocam na direção x com velocidades $u \gg v$, a absorção de linhas de corrente de menor intensidade, o deslocamento do centro de rotação das linhas de corrente mais intensas para uma posição $x \gg 0.5$ e perfis de temperatura lineares.

O acréscimo do ângulo de inclinação de 0° para 75° mostra uma menor intensidade para as linhas de corrente, fenômeno semelhante ao que ocorreu para razão de aspecto 1.0, diminuindo a transferência de calor convectiva.

5.3.7 Variação Percentual das propriedades variando em função da temperatura

Nesta seção são apresentados, nas Figuras 5.101 e 5.102, os resultados percentuais para a variação individual da Condutividade, Viscosidade e Calor Específico e do Numero de Prandtl e suas respectivas derivadas em relação a temperatura. Os gráficos mostram uma maior variação para Condutividade e Viscosidade, sendo ambas positivas, o Prandtl e o Calor Específico variam de forma bem menos intensa. Os efeitos físicos na Condutividade e Viscosidade definidos na Seção 5.2 são aqui comprovados pela pequena variação do Número de Prandtl.

As derivadas contudo apresentam valores que mostram uma tendência de diminuição da intensidade de variação para Condutividade e Viscosidade, e uma tendência inversa, de incremento na intensidade ou sensibilidade do Calor Específico e do Prandtl em função do aumento da temperatura.

5.3.8 Variação do Nusselt Médio em Função do Ângulo de Inclinação

A Figura 5.103 mostra os resultados para o Nusselt Médio em função da variação do ângulo de inclinação. Foram plotados os resultados para ângulos de 0°, 15°, 30°, 45°, 60° e 75° segundo a Tabela 5.1.

Tabela 5.1- Nusselt Médio em função da variação do ângulo de inclinação.

Ângulo	Nusselt Médio
0°	0.91549
15°	0.91886
30°	0.91477
45°	0.90278
60°	0.88513
75°	0.86809

A partir de tais valores interpolados, encontrou-se uma relação polinomial entre os valores de Nu e ângulo de inclinação:

$$\overline{Nu}_x = 0.9165 + 0.000263\theta - 1.24 \times 10^{-5}\theta^2 \quad (5.1)$$

Os valores para Nu médio comprovam os fenômenos demonstrados na Seção 5.4, onde tivemos uma maior troca de calor convectiva para ângulos entre 0° e 30°, com aumento da influência condutiva com o aumento do ângulo de inclinação.

5.3.9 Variação do Nusselt Médio em Função da Razão de Aspecto

Nesta seção apresentamos os resultados na Figura 5.104 para os valores de Nu médio e razão de aspecto 1.0, 1.5, 2.0, 3.0, 5.0 e 10.0 (veja Tabela 5.2). O valor de Nu médio é não linear sendo que possui um máximo para razão 1.0 com decréscimo brusco até razão 3.0 a partir de onde permanece praticamente constante.

Tabela 5.2- Nusselt Médio em função da variação da razão de aspecto.

Razão de Aspecto	Nusselt Médio
1.0	0.91549
1.5	0.87115
2.0	0.86261
3.0	0.86089
5.0	0.86078
10.0	0.86078

De acordo com a análise física realizada na Seção 5.3, os resultados tornam-se consistentes e com o aumento da razão de aspecto a troca de calor por convecção começa a influenciar o fenômeno com menor intensidade.

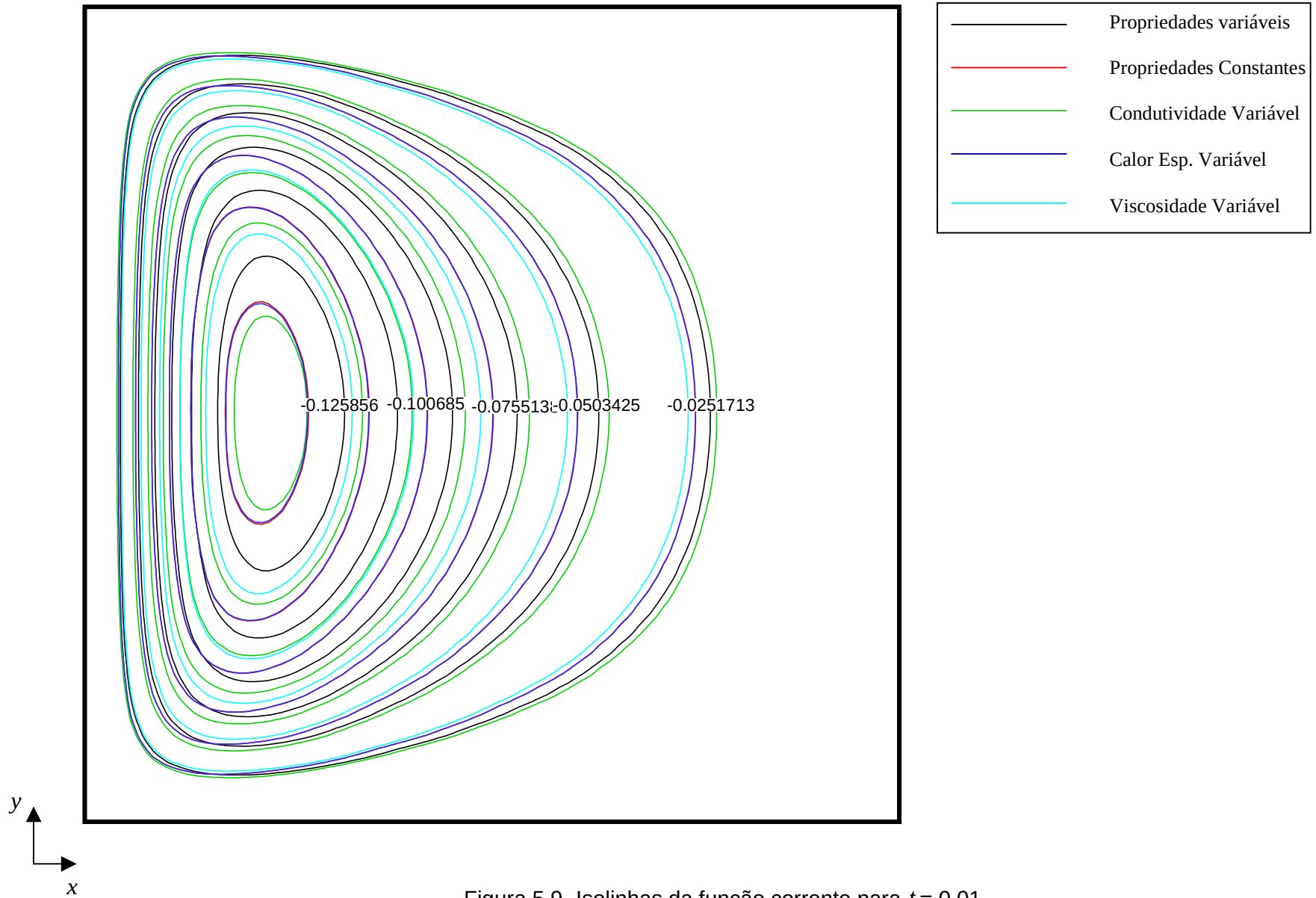


Figura 5.9- Isolinhas da função corrente para $t = 0.01$.

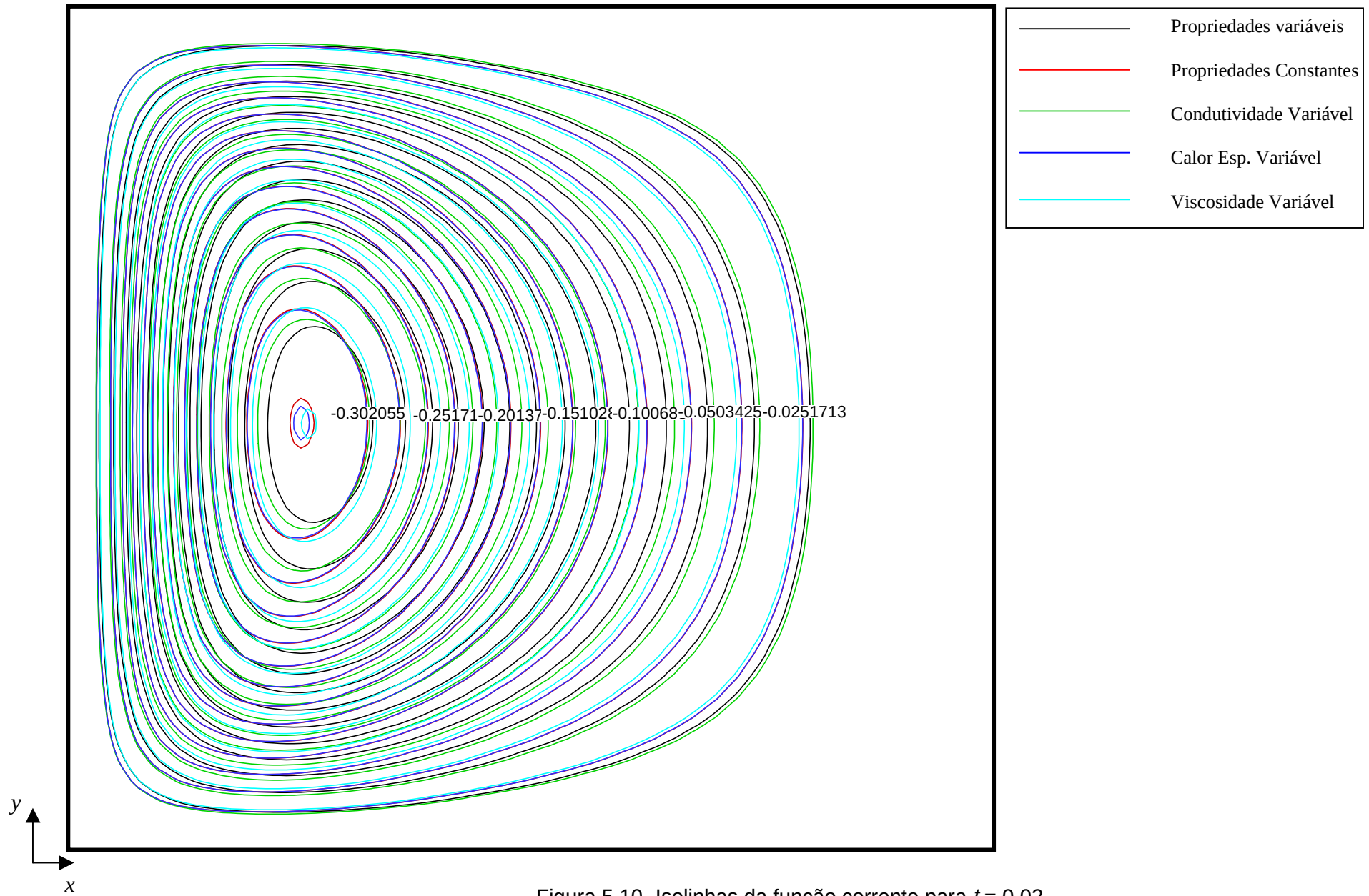
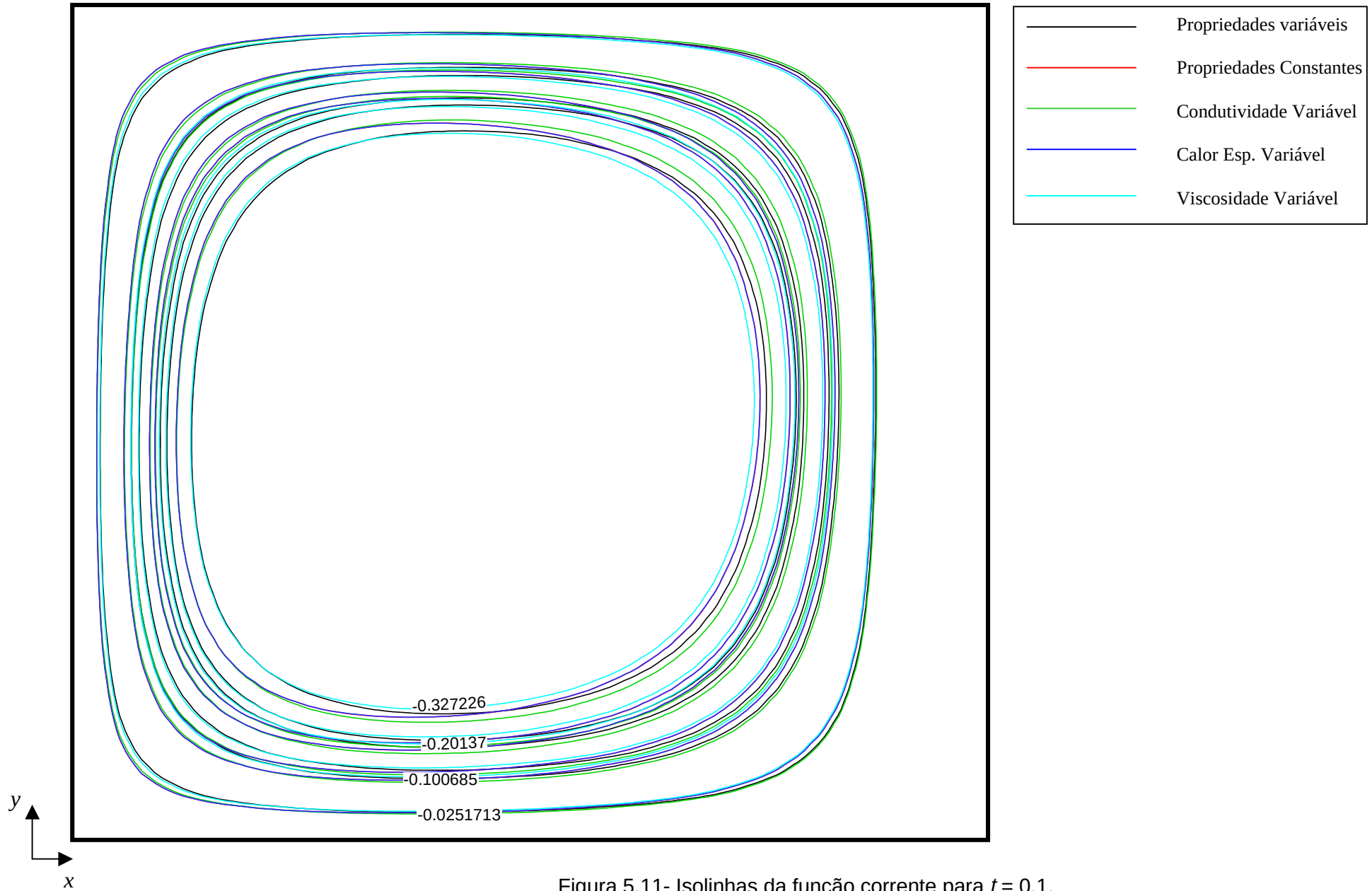


Figura 5.10- Isolinhas da função corrente para $t = 0.02$.

Figura 5.11- Isolinhas da função corrente para $t = 0.1$.

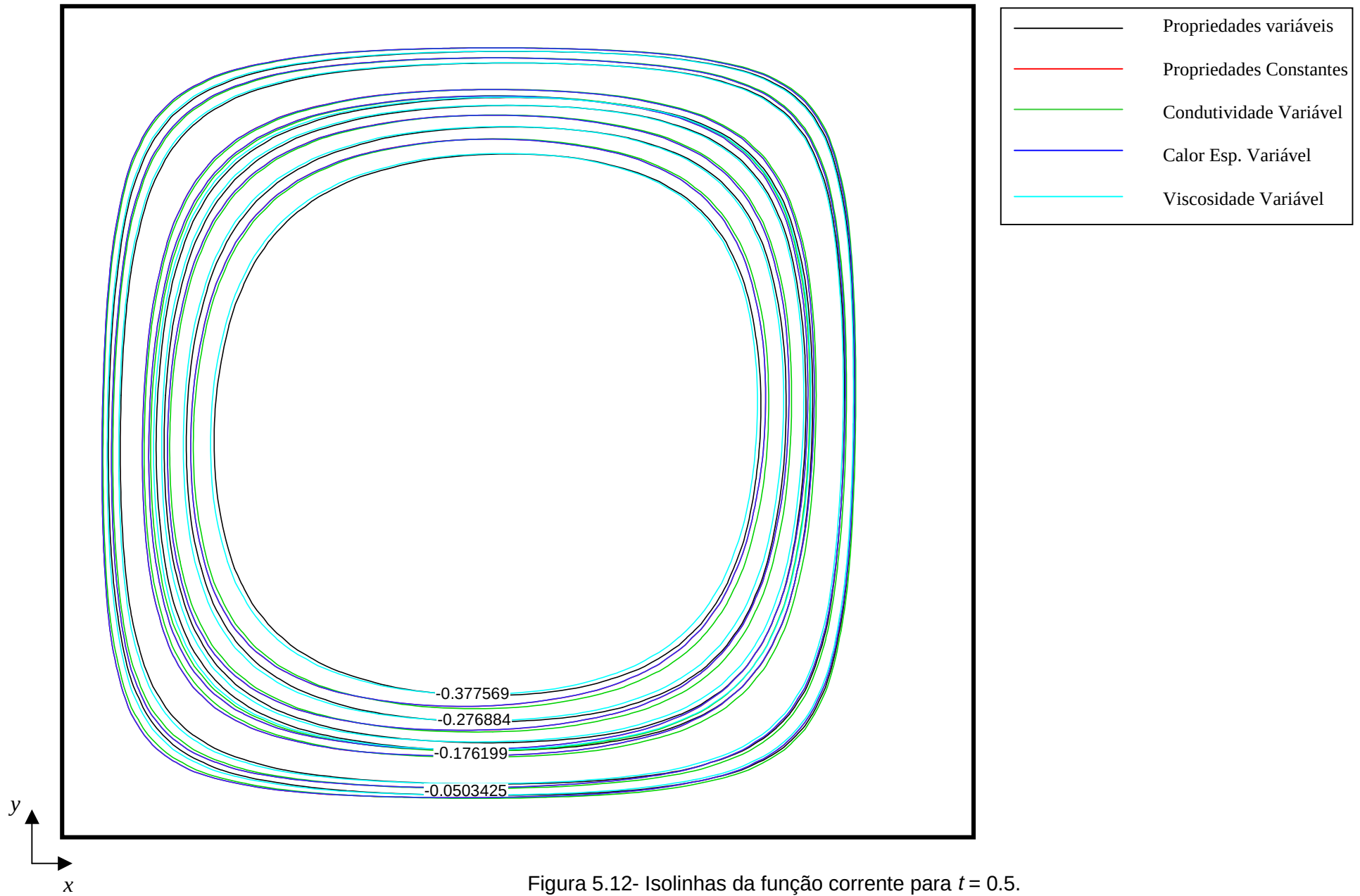


Figura 5.12- Isolinhas da função corrente para $t = 0.5$.

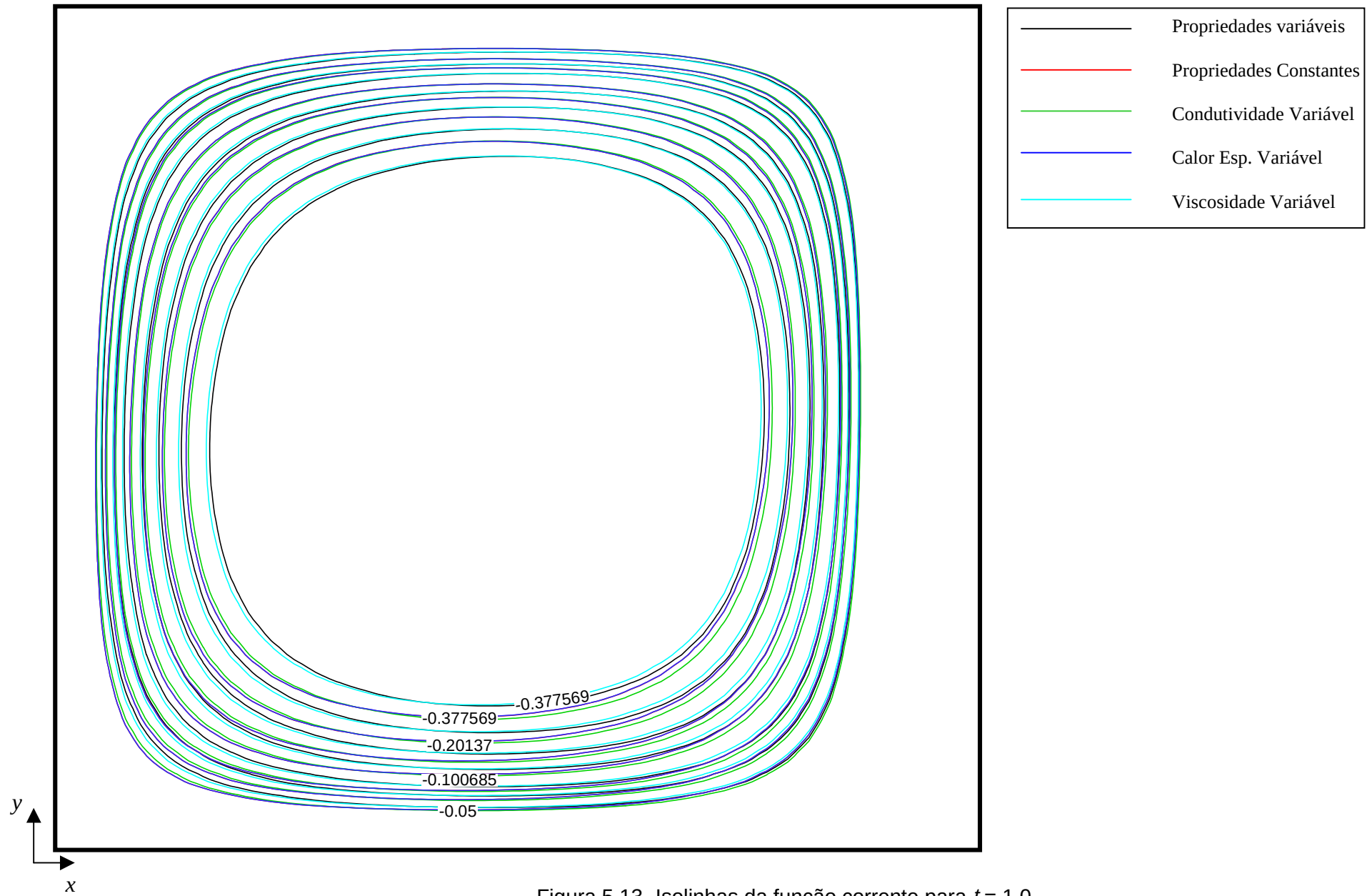
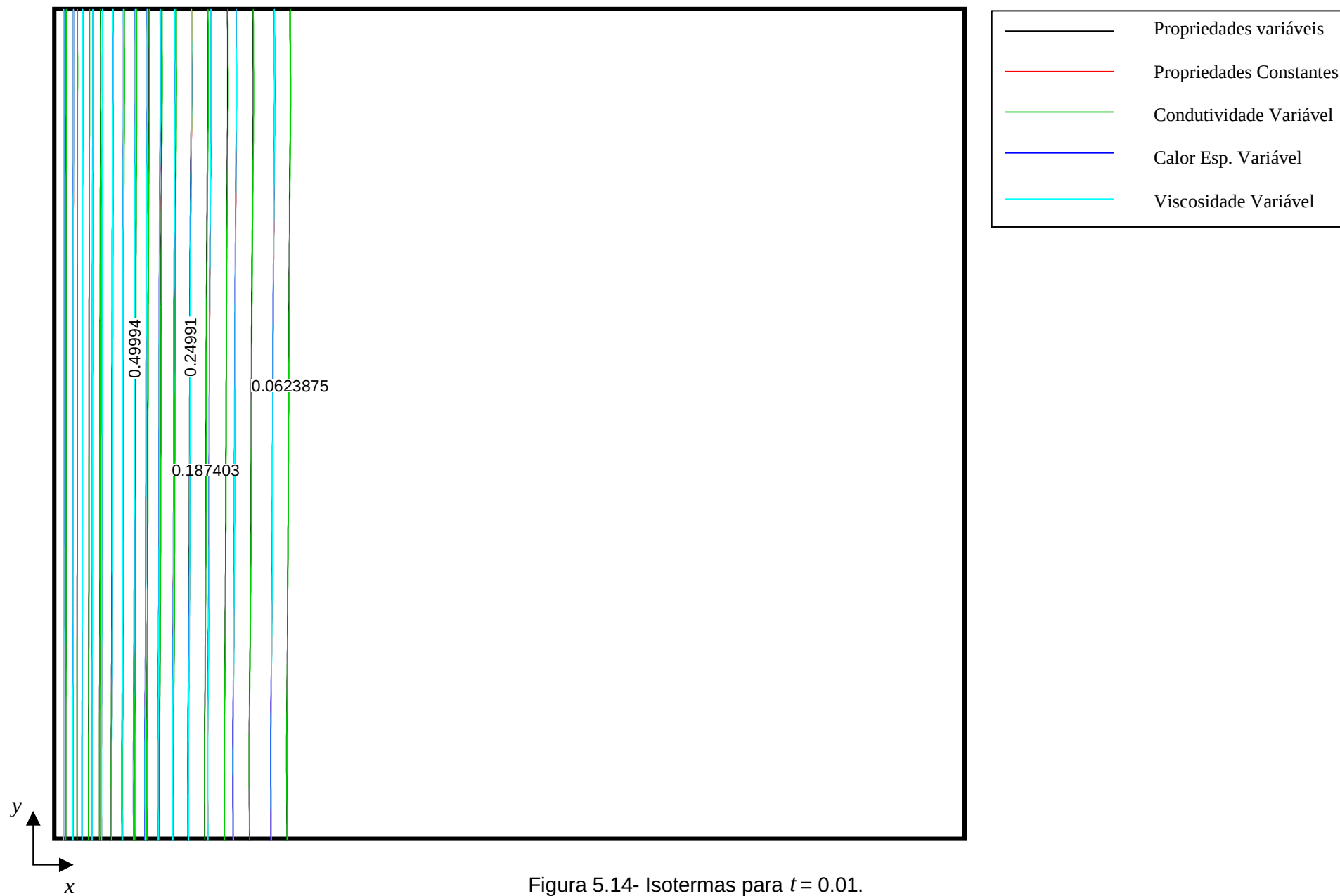
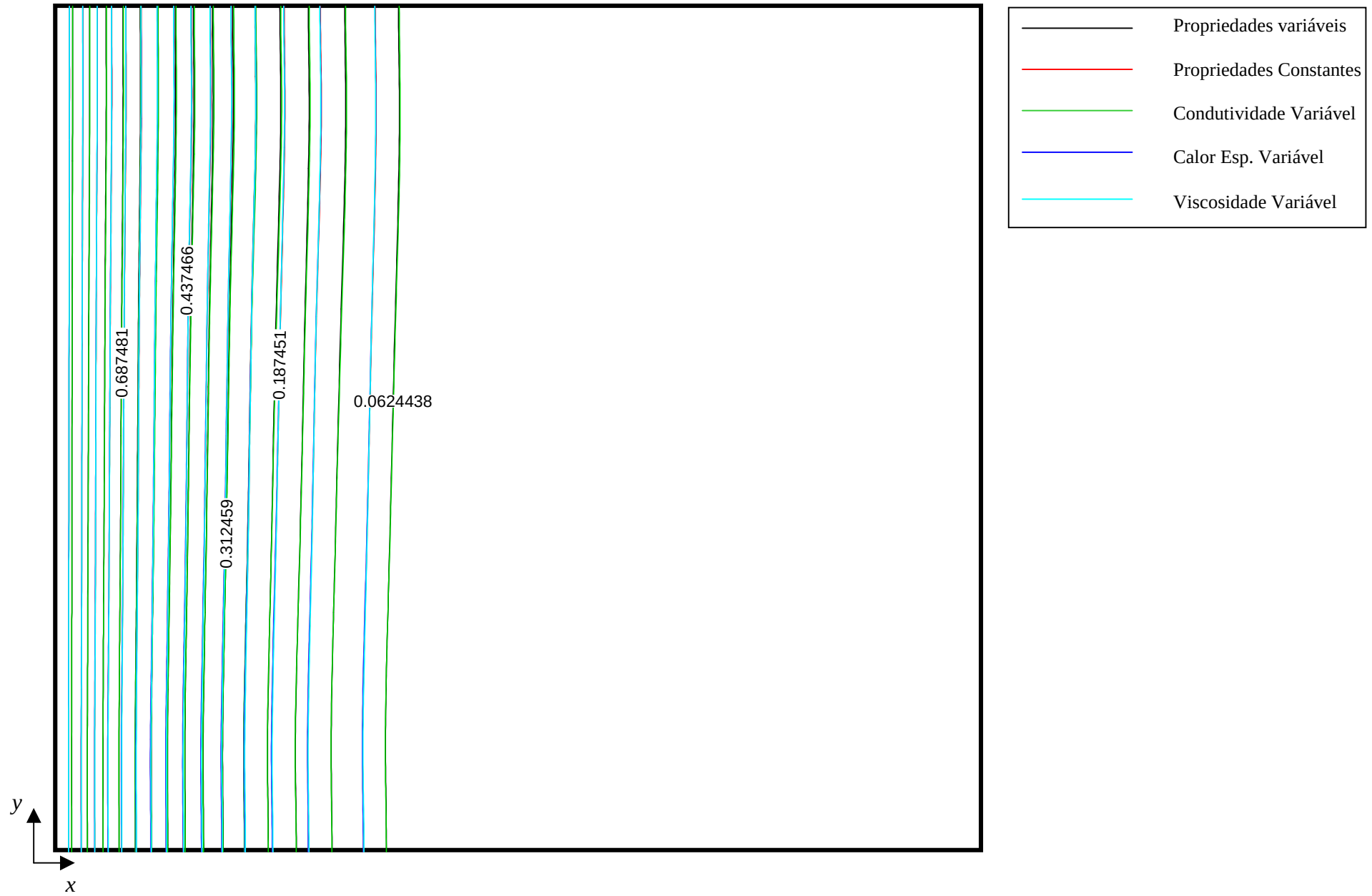
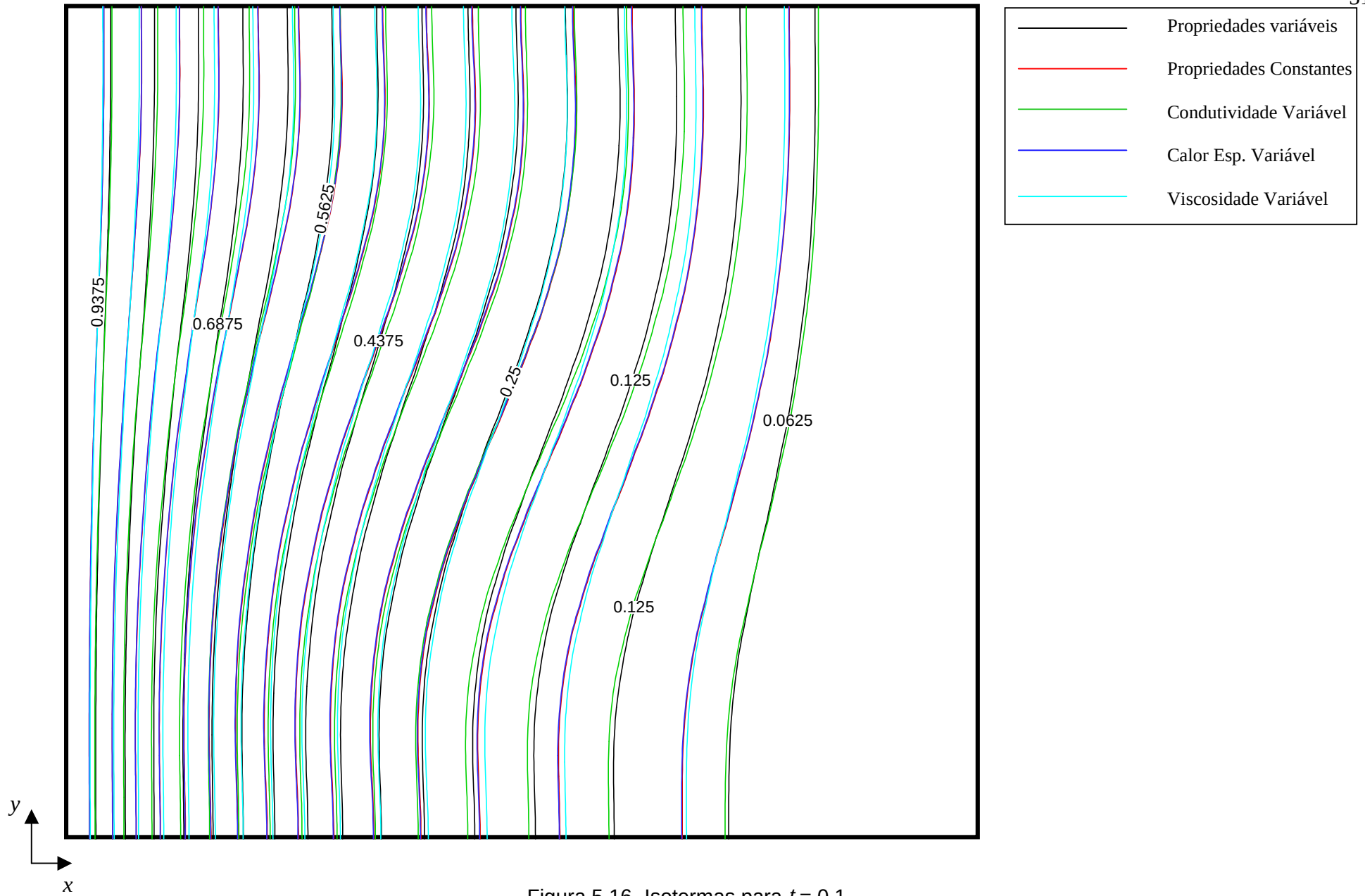
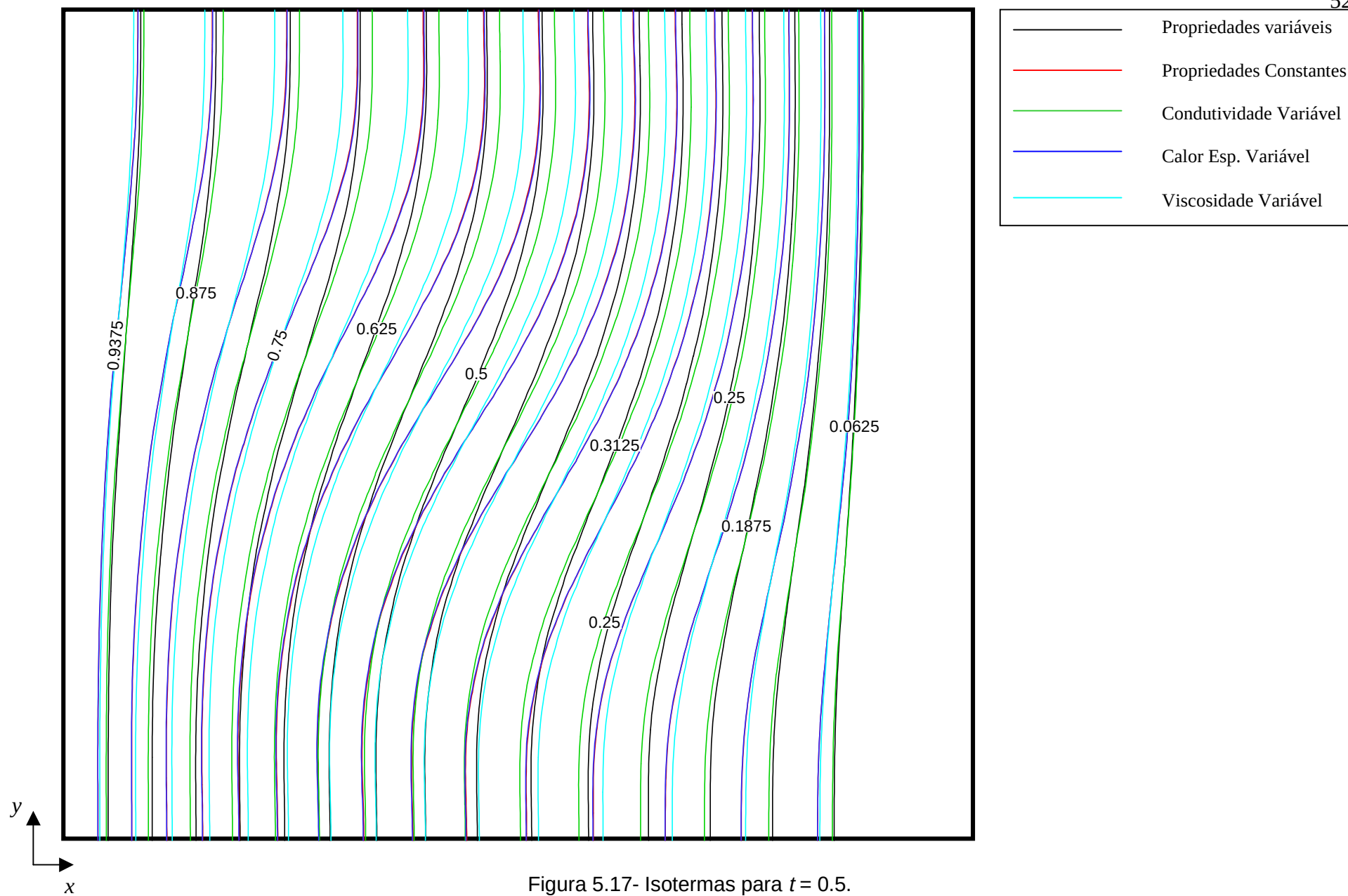


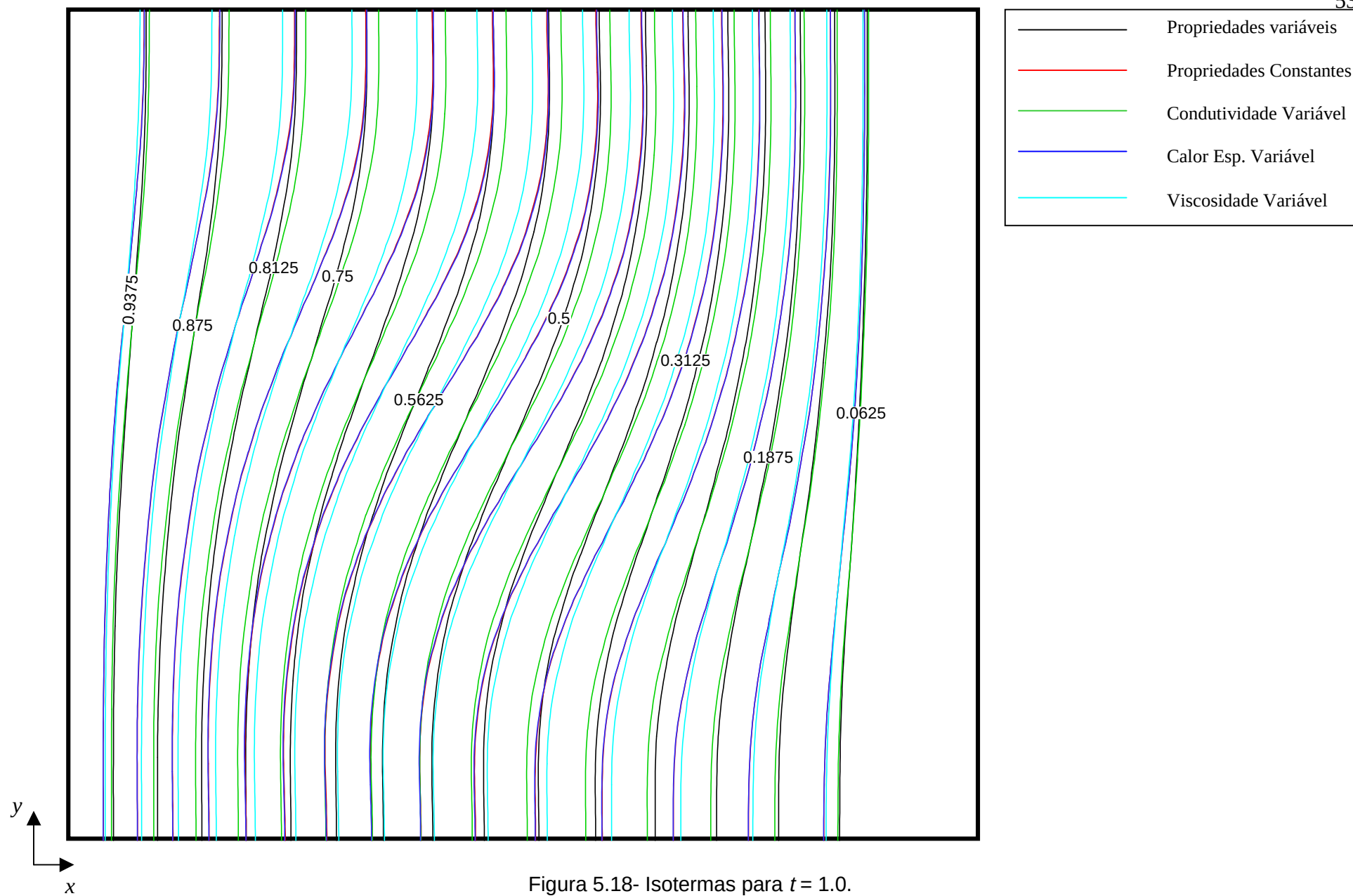
Figura 5.13- Isolinhas da função corrente para $t = 1.0$.

Figura 5.14- Isothermas para $t = 0.01$.

Figura 5.15- Isotermas para $t = 0.02$.

Figura 5.16- Isothermas para $t = 0.1$.

Figura 5.17- Isotermas para $t = 0.5$.

Figura 5.18- Isothermas para $t = 1.0$.

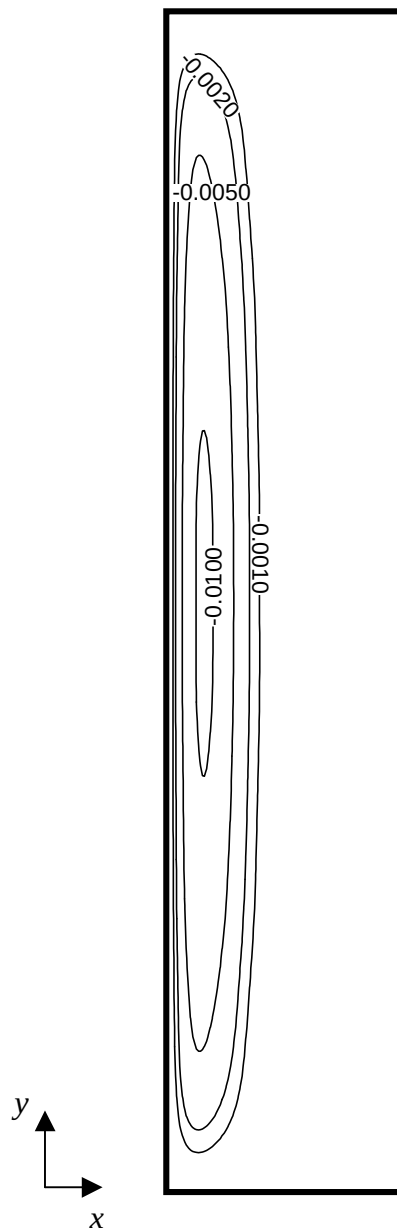


Figura 5.19- Isolinhas da função corrente para razão de aspecto de 0.2 e $t = 0.01$.

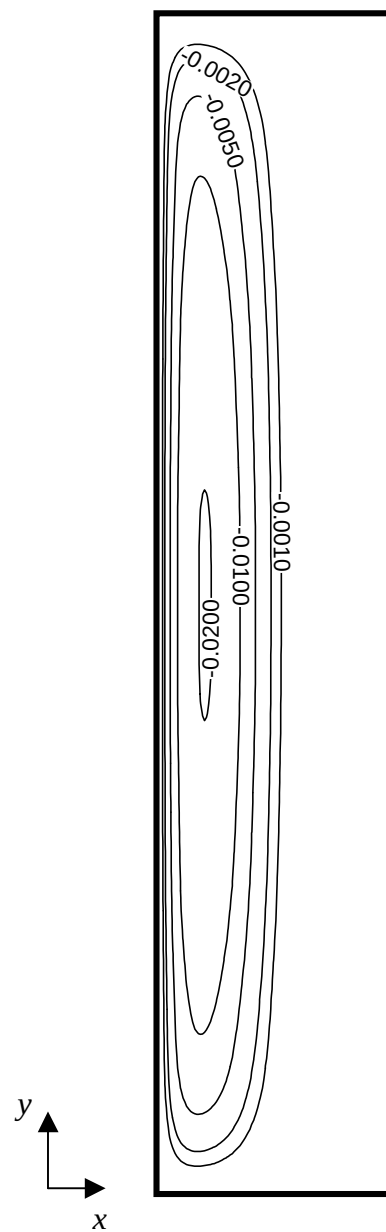


Figura 5.20- Isolinhas da função corrente para razão de aspecto de 0.2 e $t = 0.02$.

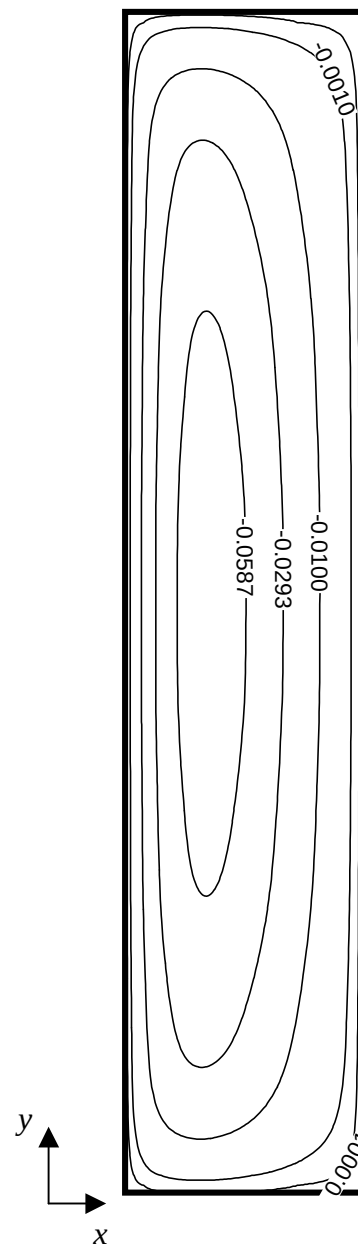


Figura 5.21- Isolinhas da função corrente para razão de aspecto de 0.2 e $t = 0.1$.

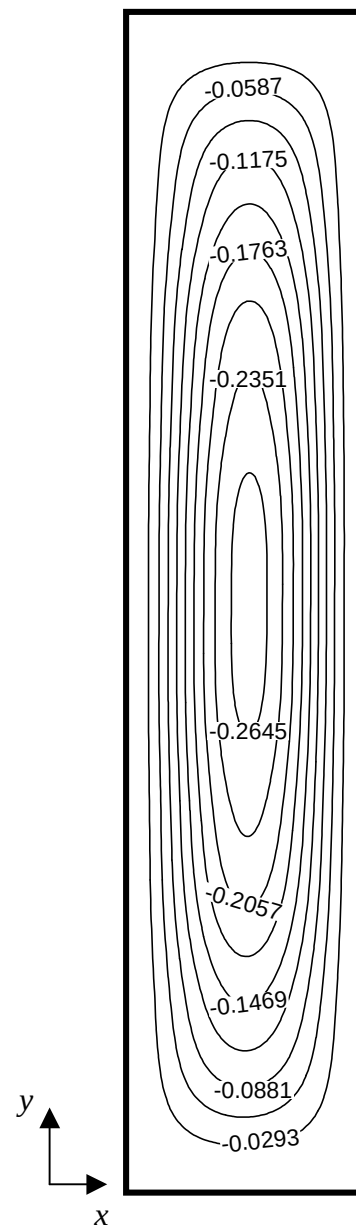


Figura 5.22- Isolinhas da função corrente para razão de aspecto de 0.2 e $t = 0.5$.

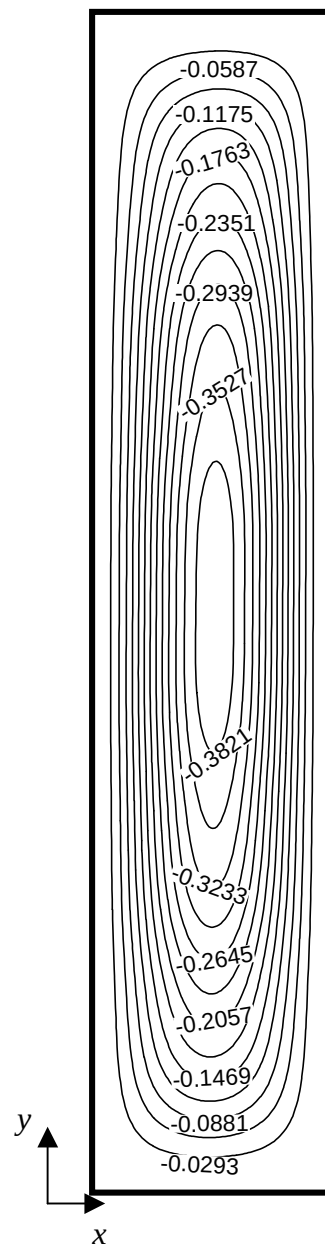


Figura 5.23- Isolinhas da função corrente para razão de aspecto de 0.2 e $t = 1.0$.

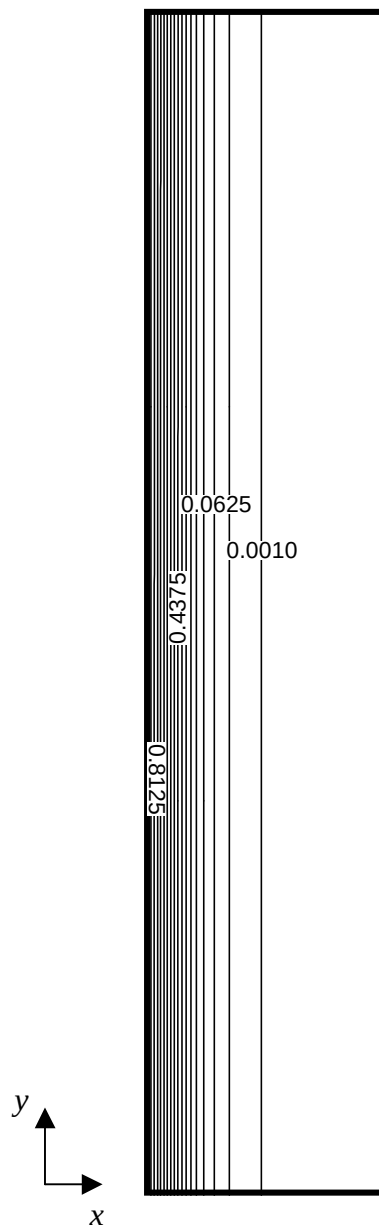


Figura 5.24- Isotermas para razão de aspecto de 0.2 e $t = 0.01$.

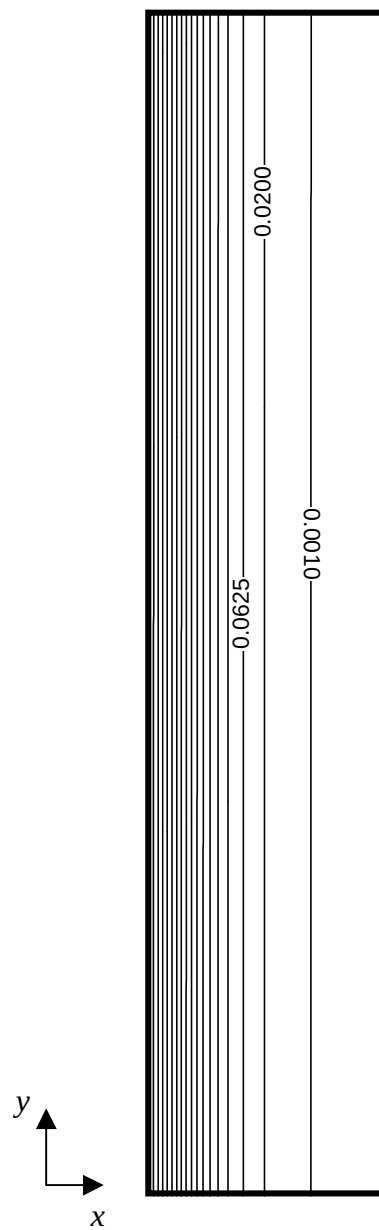


Figura 5.25- Isotermas para razão de aspecto de 0.2 e $t = 0.02$.

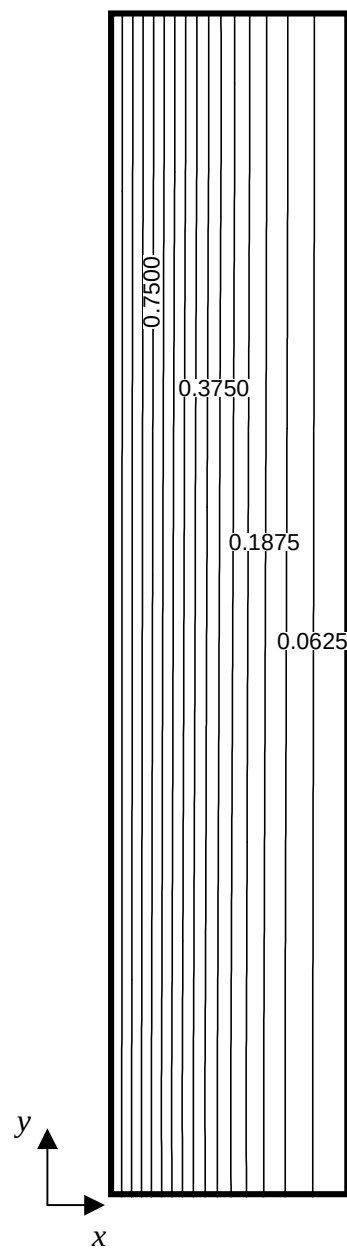


Figura 5.26- Isotermas para razão de aspecto de 0.2 e $t = 0.1$.

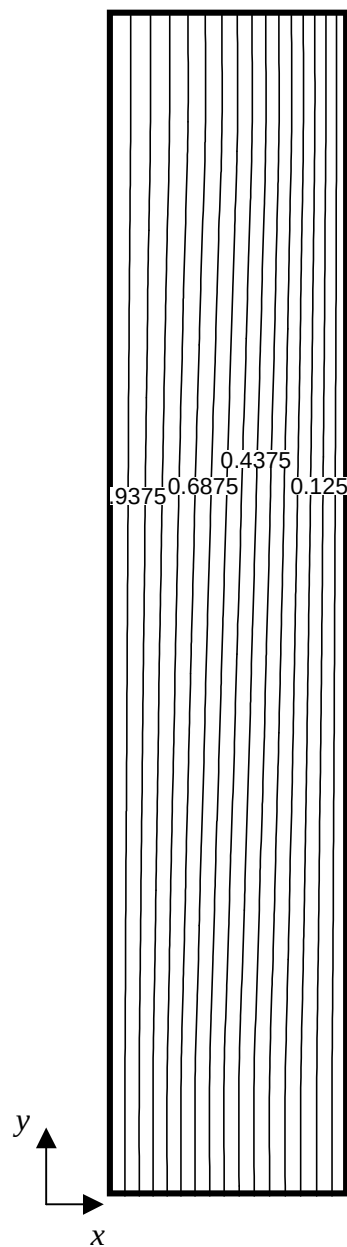


Figura 5.27- Isotermas para razão de aspecto de 0.2 e $t = 0.5$.

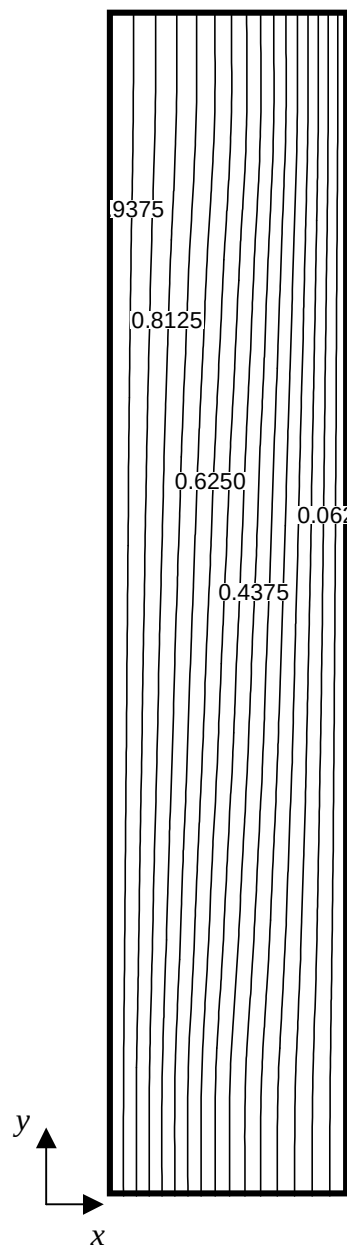


Figura 5.28- Isotermas para razão de aspecto de 0.2 e $t = 1.0$.

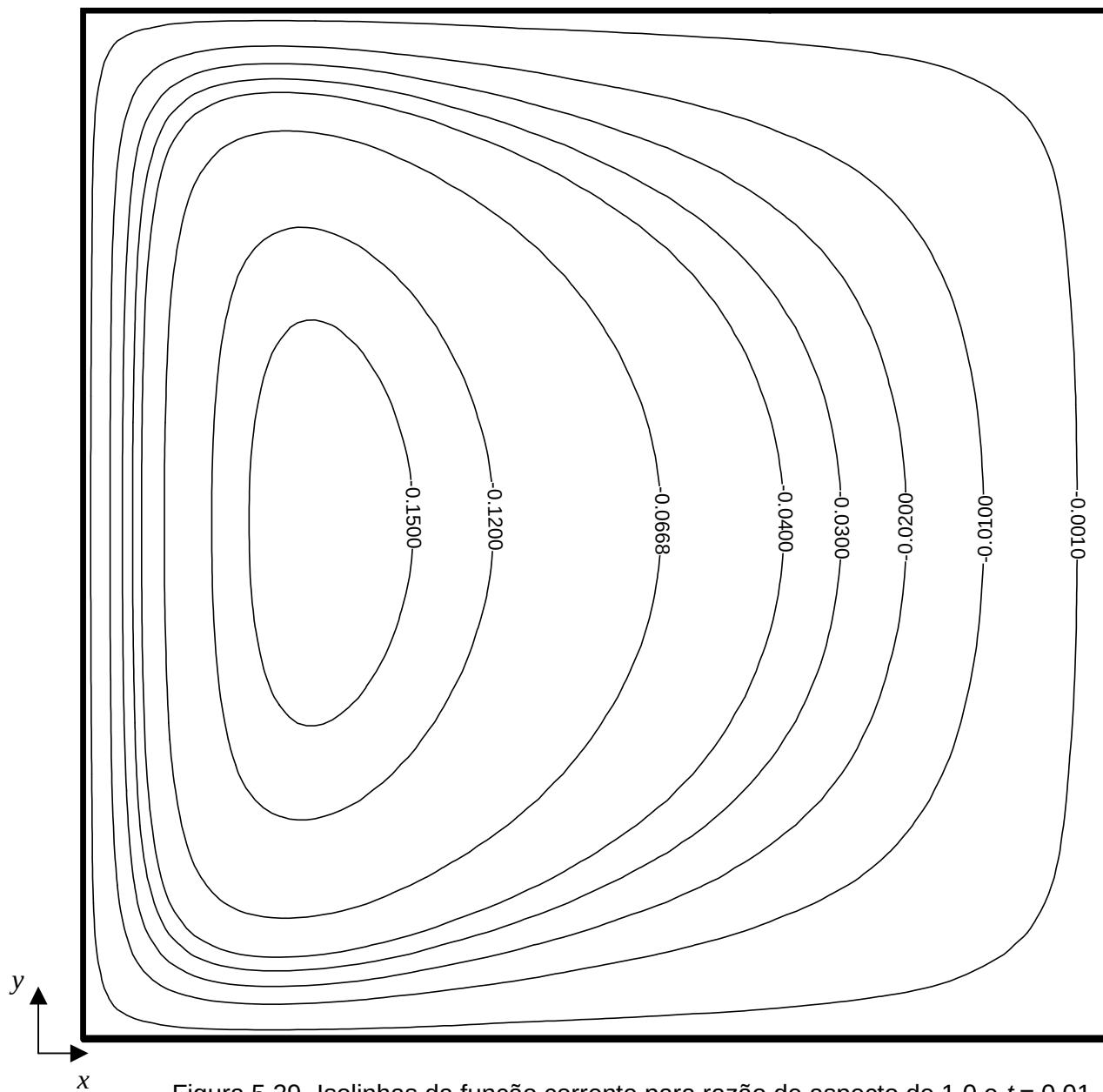


Figura 5.29- Isolinhas da função corrente para razão de aspecto de 1.0 e $t = 0.01$.

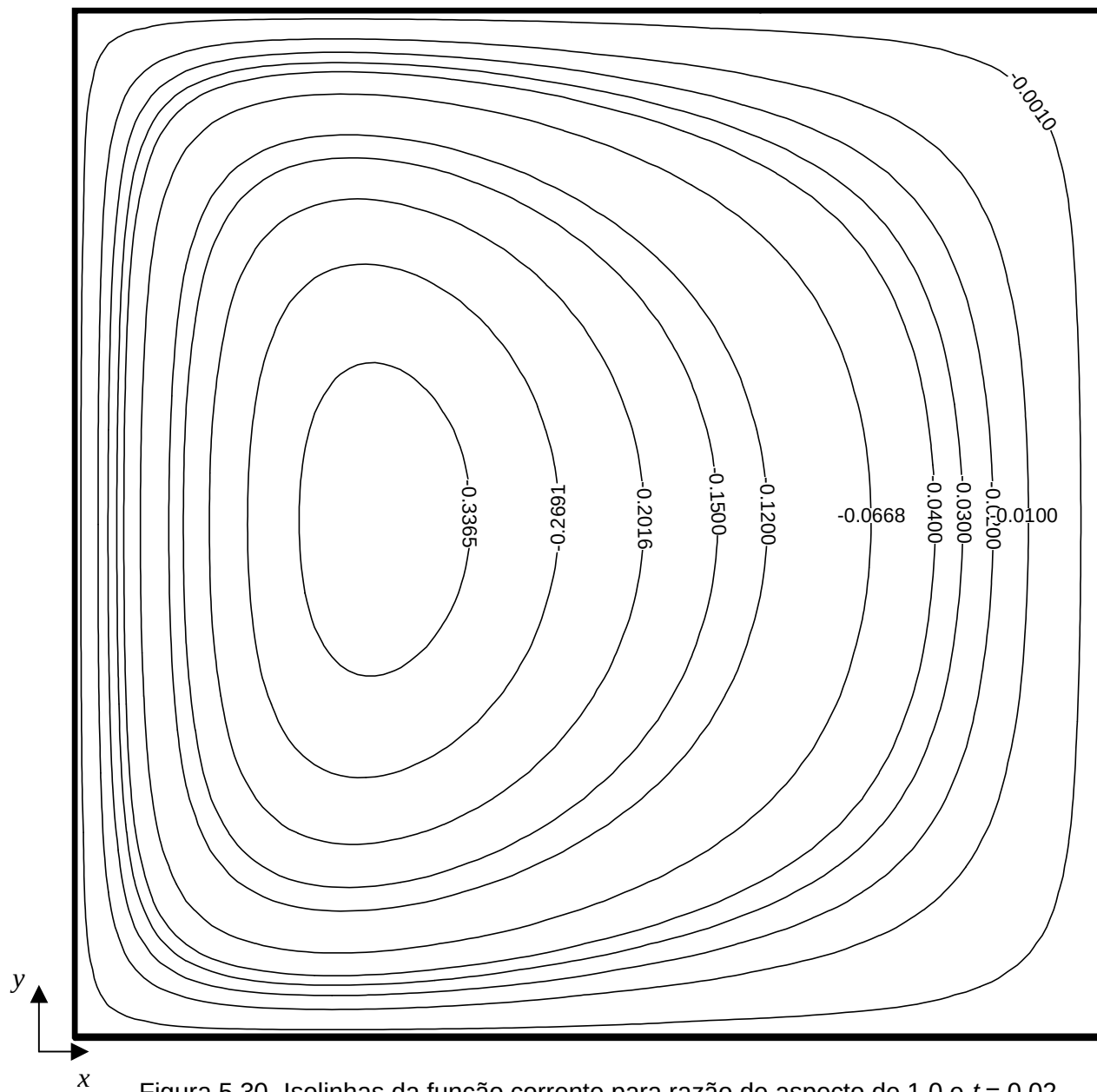


Figura 5.30- Isolinhas da função corrente para razão de aspecto de 1.0 e $t = 0.02$.

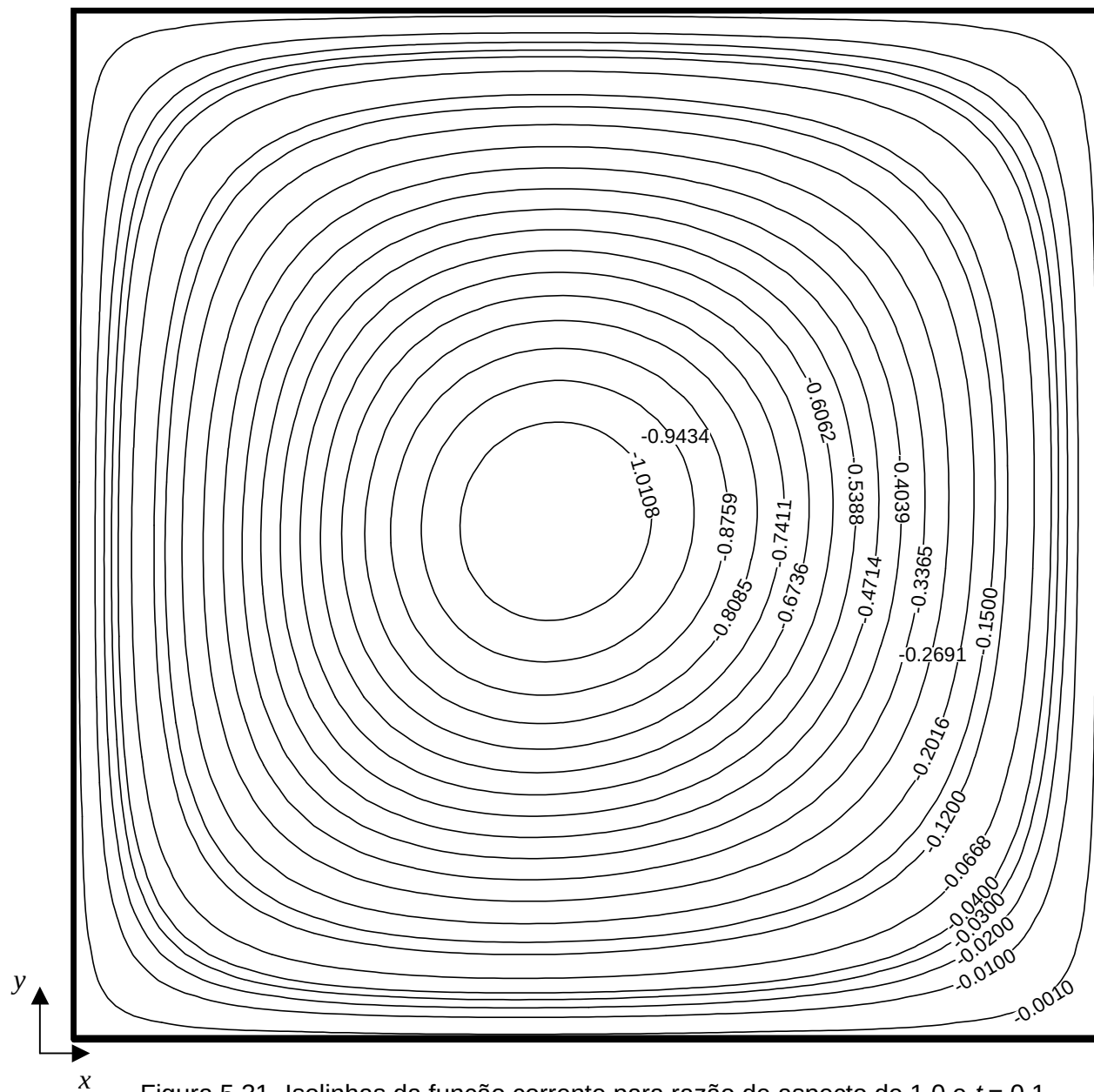


Figura 5.31- Isolinhas da função corrente para razão de aspecto de 1.0 e $t = 0.1$.

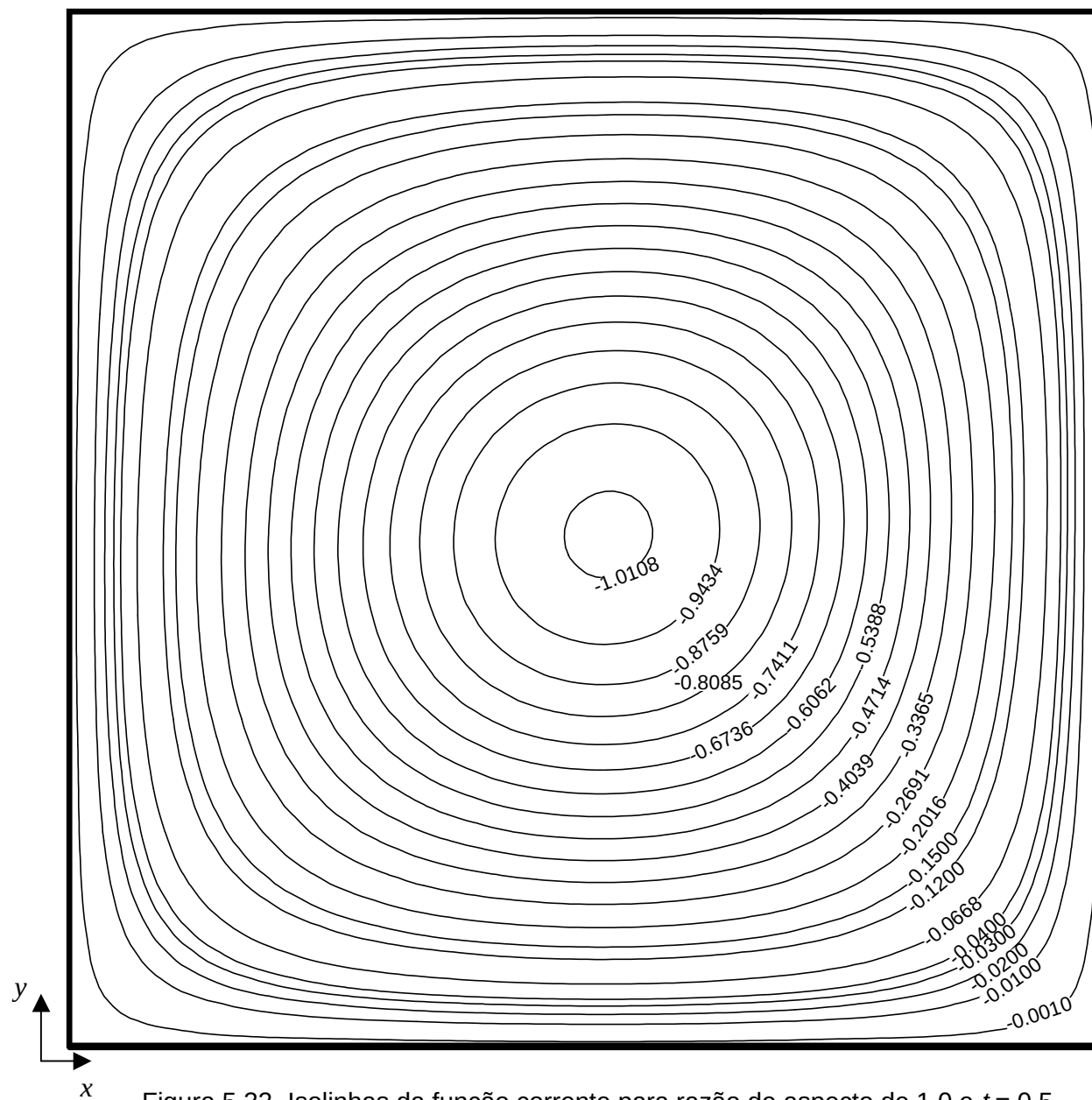


Figura 5.32- Isolinhas da função corrente para razão de aspecto de 1.0 e $t = 0.5$.

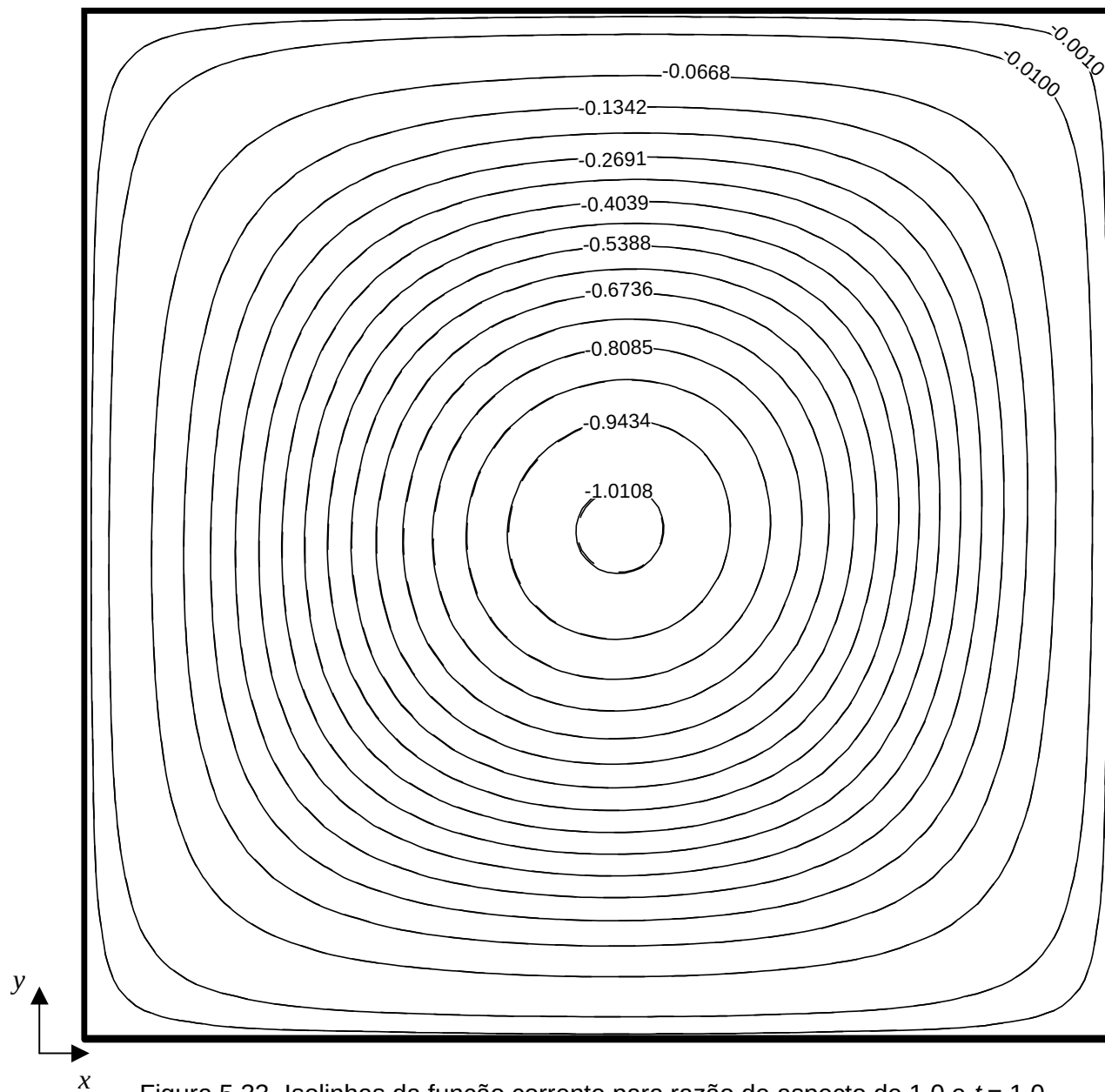


Figura 5.33- Isolinhas da função corrente para razão de aspecto de 1.0 e $t = 1.0$.

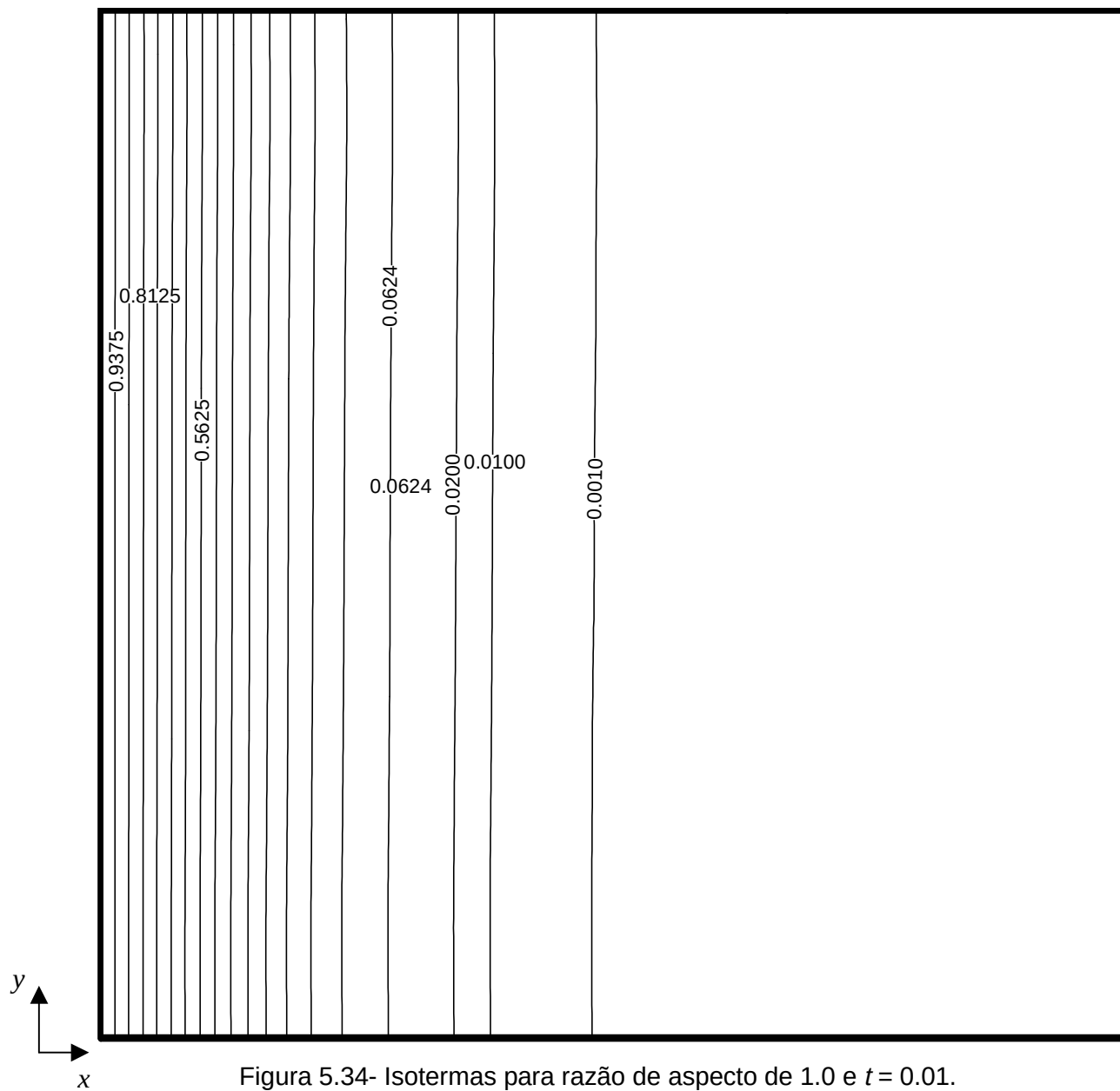


Figura 5.34- Isotermas para razão de aspecto de 1.0 e $t = 0.01$.

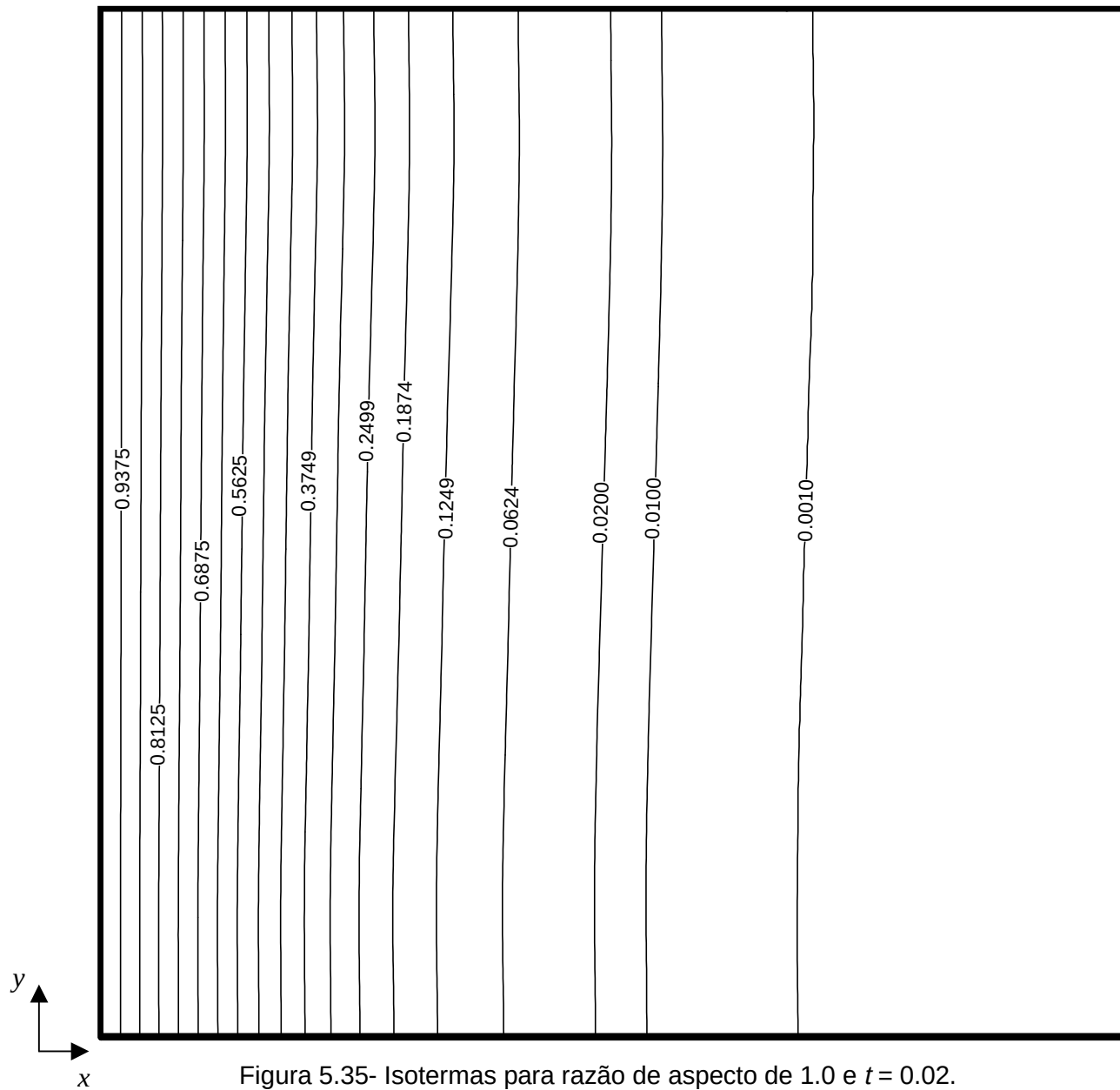


Figura 5.35- Isotermas para razão de aspecto de 1.0 e $t = 0.02$.

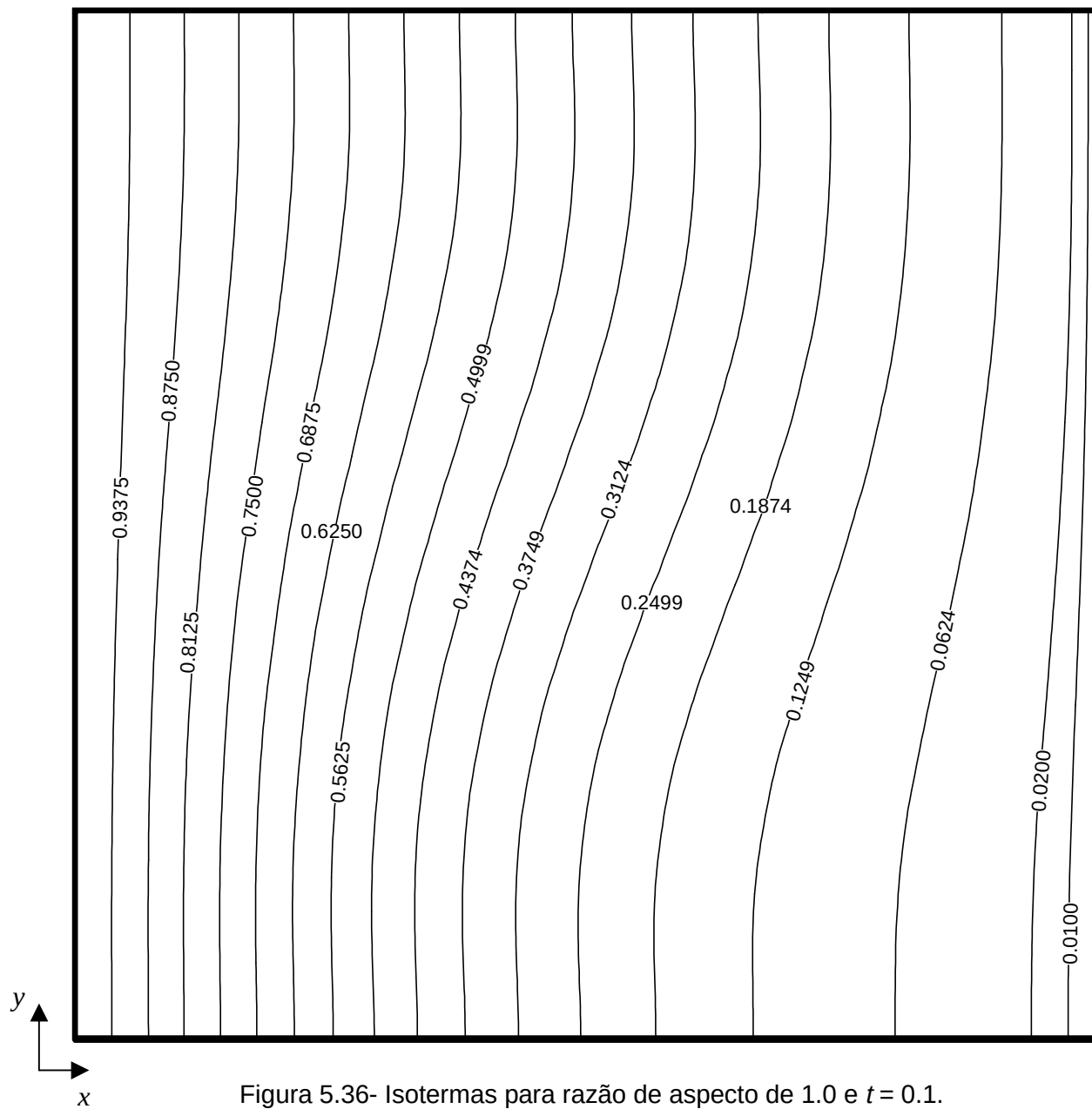


Figura 5.36- Isotermas para razão de aspecto de 1.0 e $t = 0.1$.

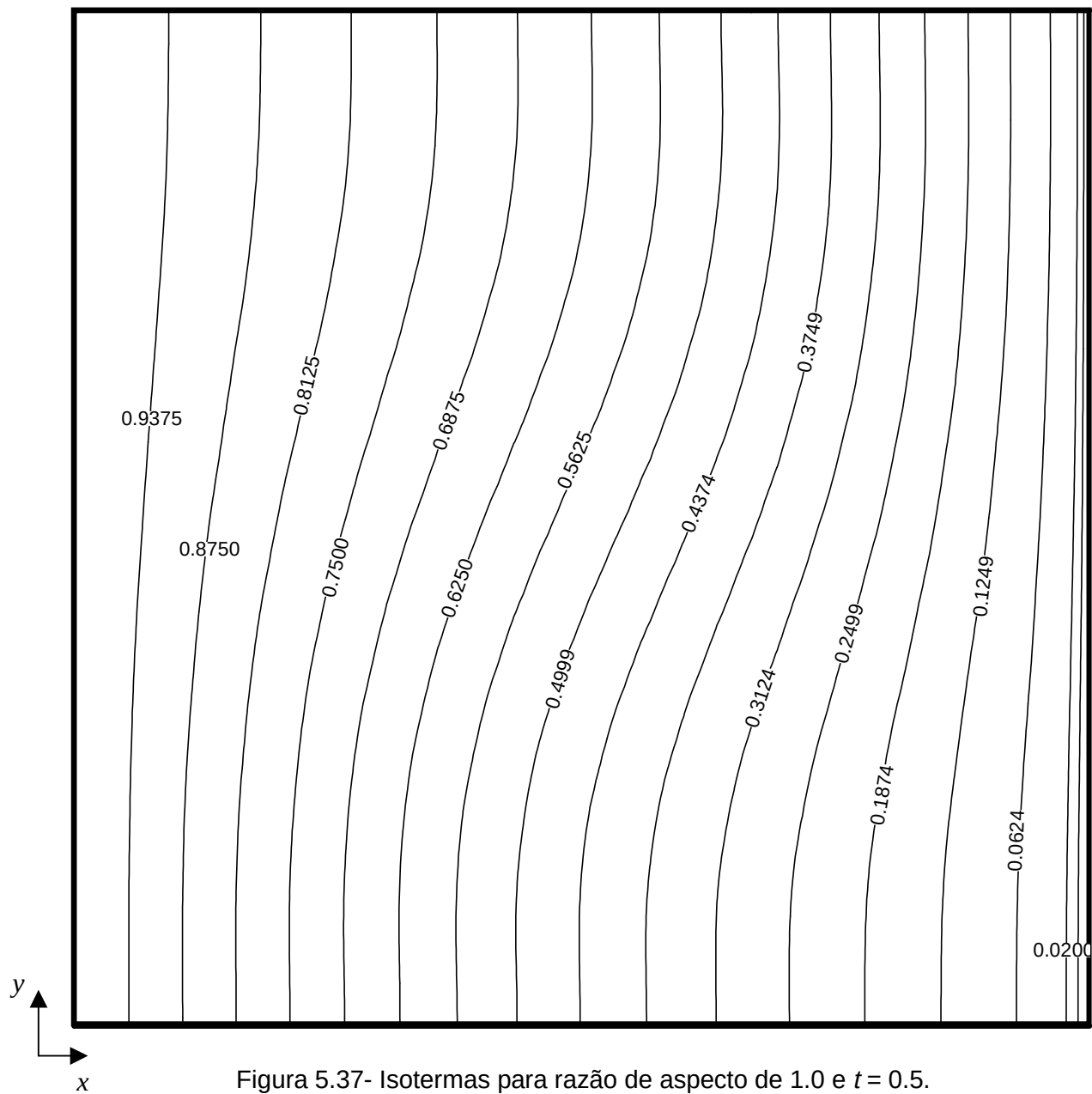


Figura 5.37- Isotermas para razão de aspecto de 1.0 e $t = 0.5$.

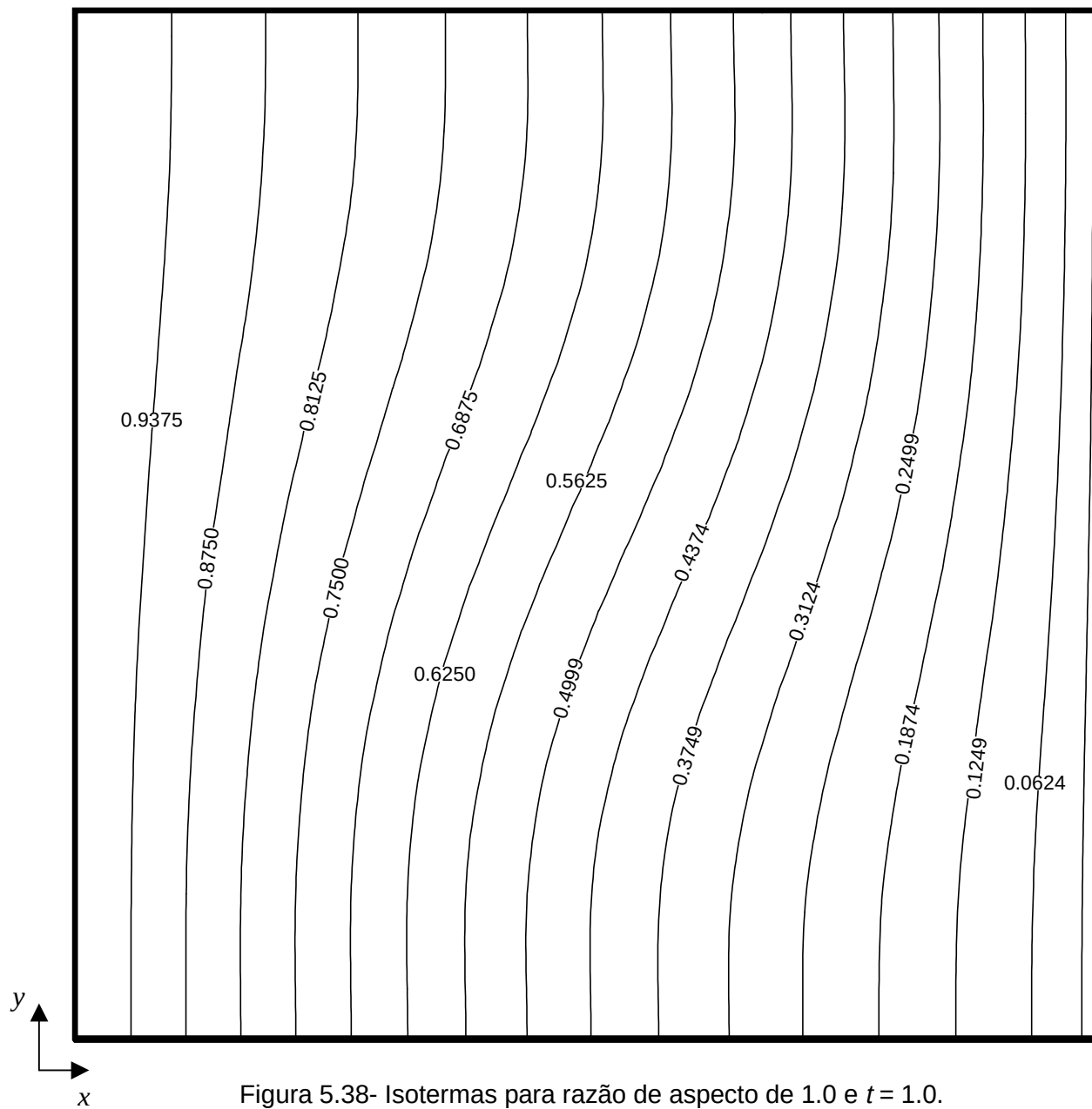


Figura 5.38- Isotermas para razão de aspecto de 1.0 e $t = 1.0$.

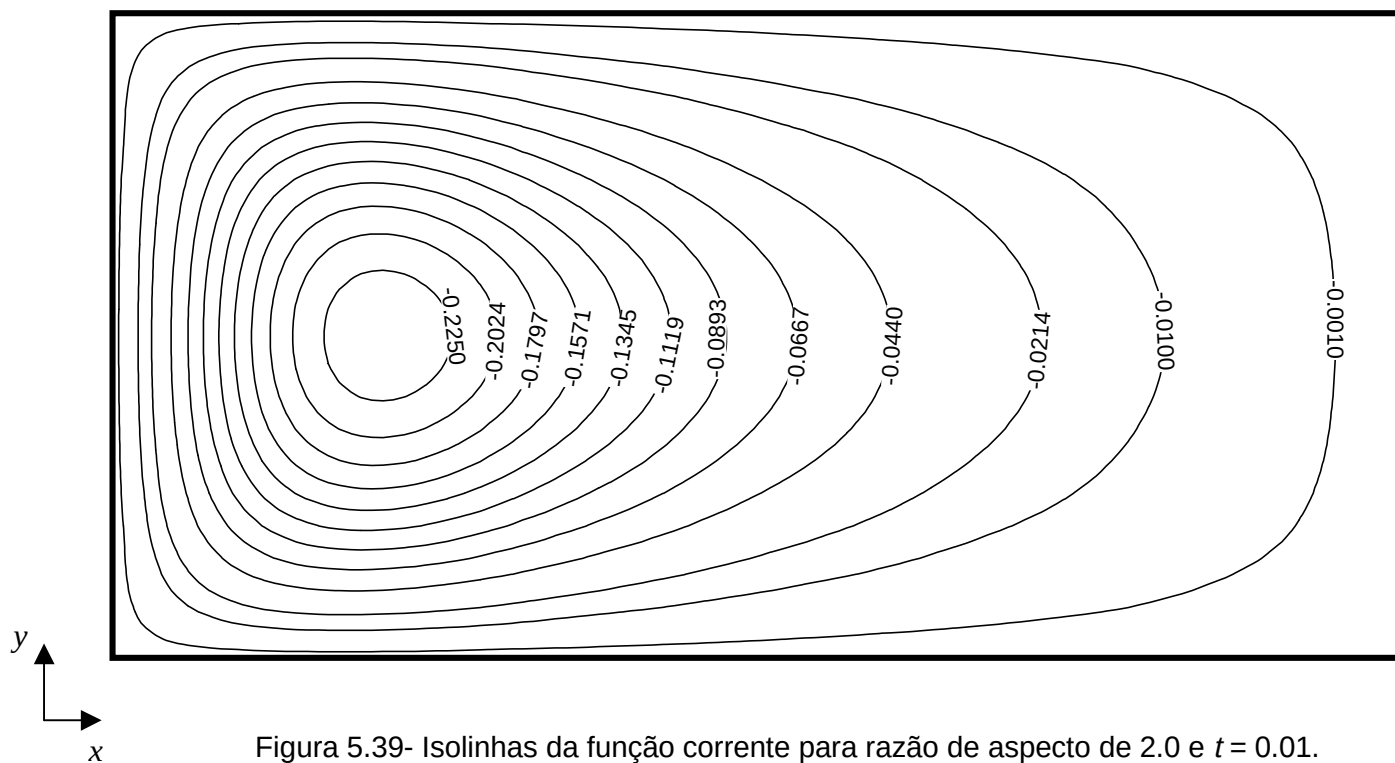


Figura 5.39- Isolinhas da função corrente para razão de aspecto de 2.0 e $t = 0.01$.

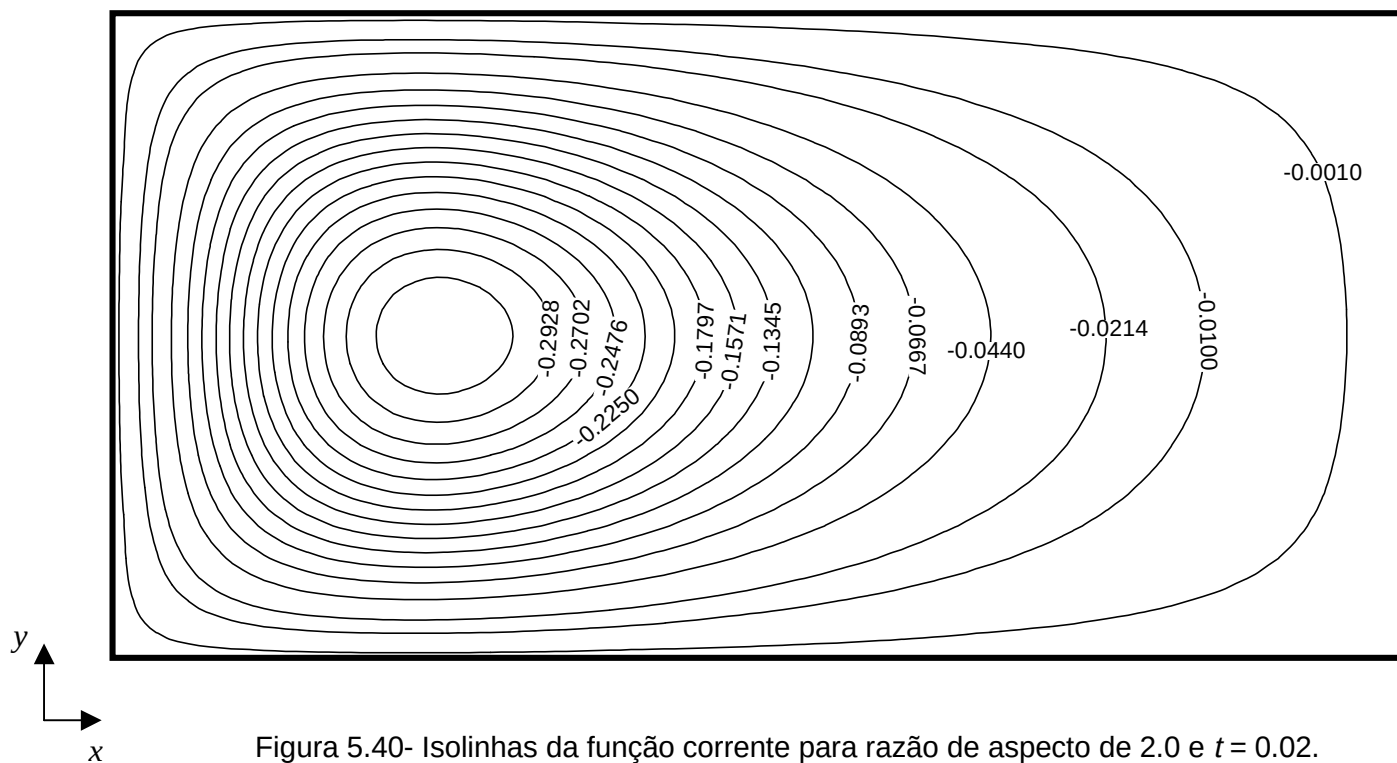


Figura 5.40- Isolinhas da função corrente para razão de aspecto de 2.0 e $t = 0.02$.

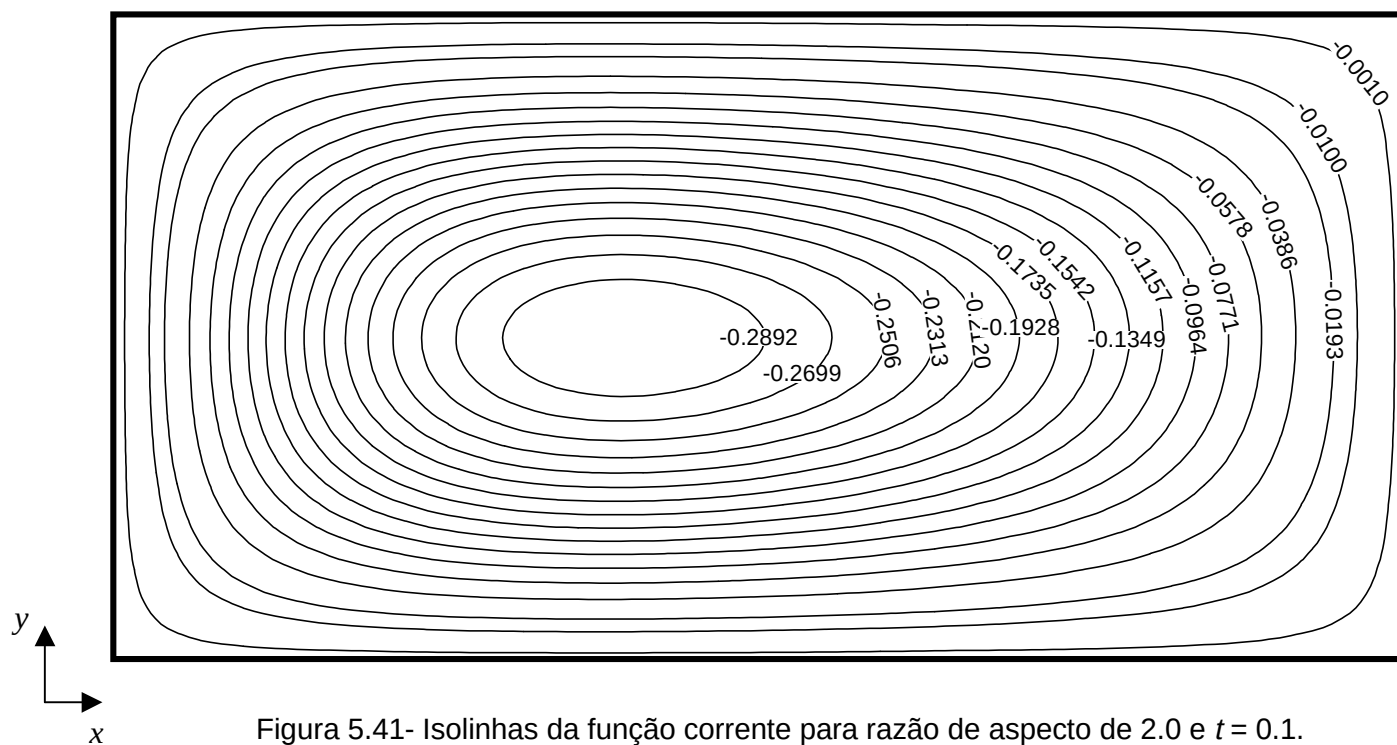


Figura 5.41- Isolinhas da função corrente para razão de aspecto de 2.0 e $t = 0.1$.

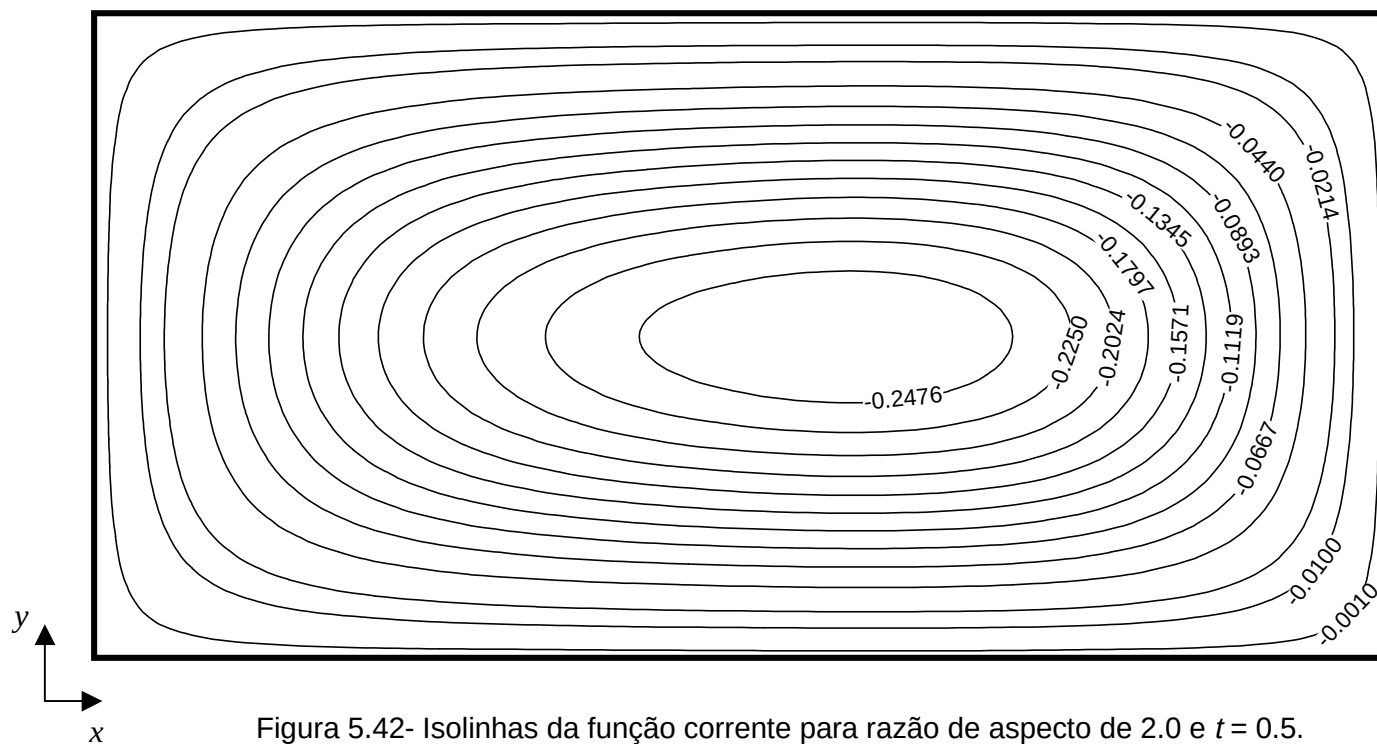


Figura 5.42- Isolinhas da função corrente para razão de aspecto de 2.0 e $t = 0.5$.

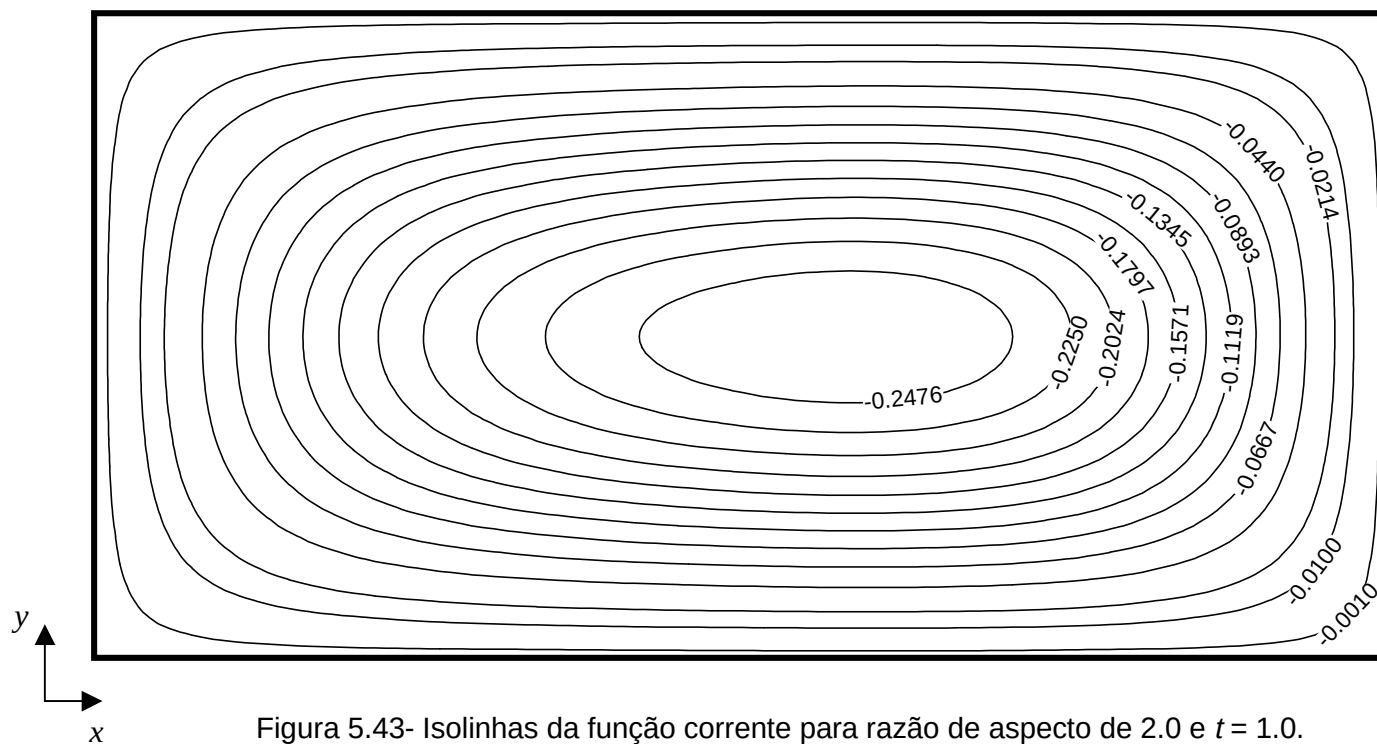
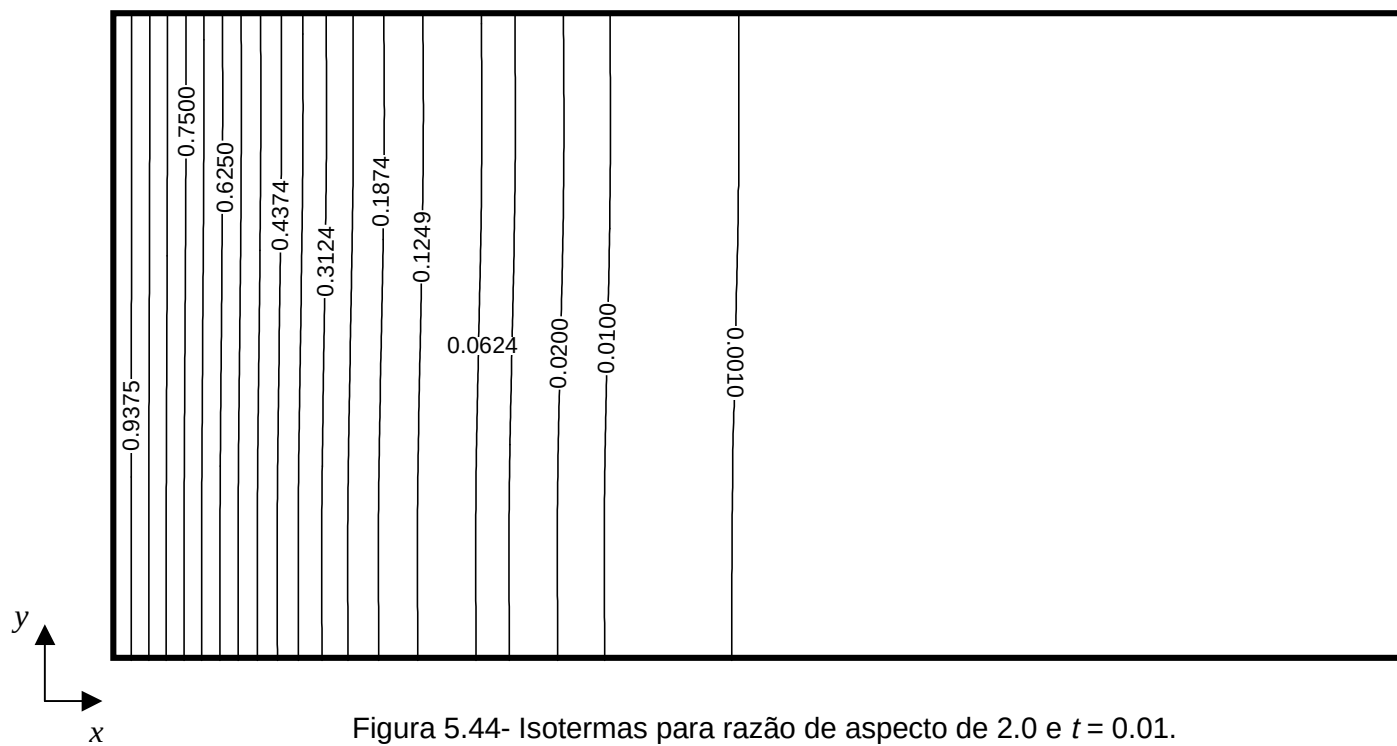


Figura 5.43- Isolinhas da função corrente para razão de aspecto de 2.0 e $t = 1.0$.



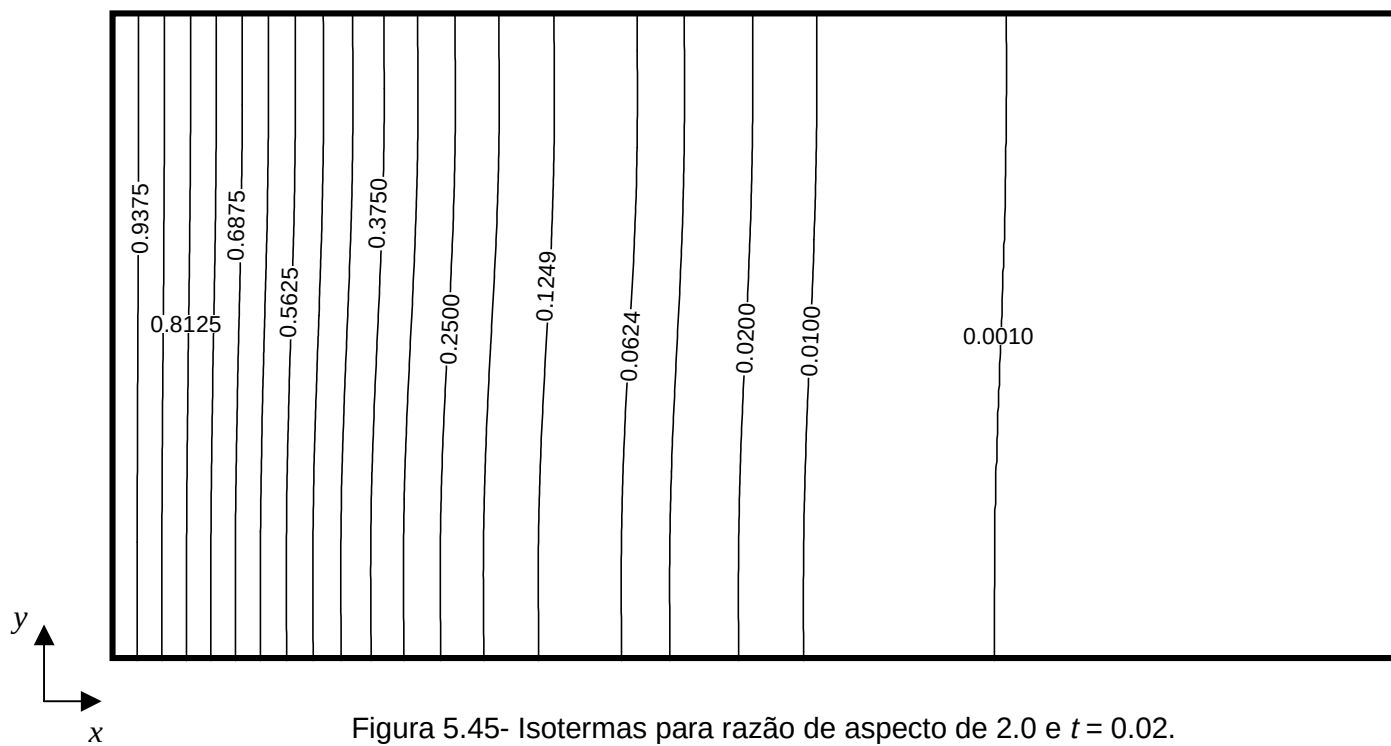


Figura 5.45- Isotermas para razão de aspecto de 2.0 e $t = 0.02$.

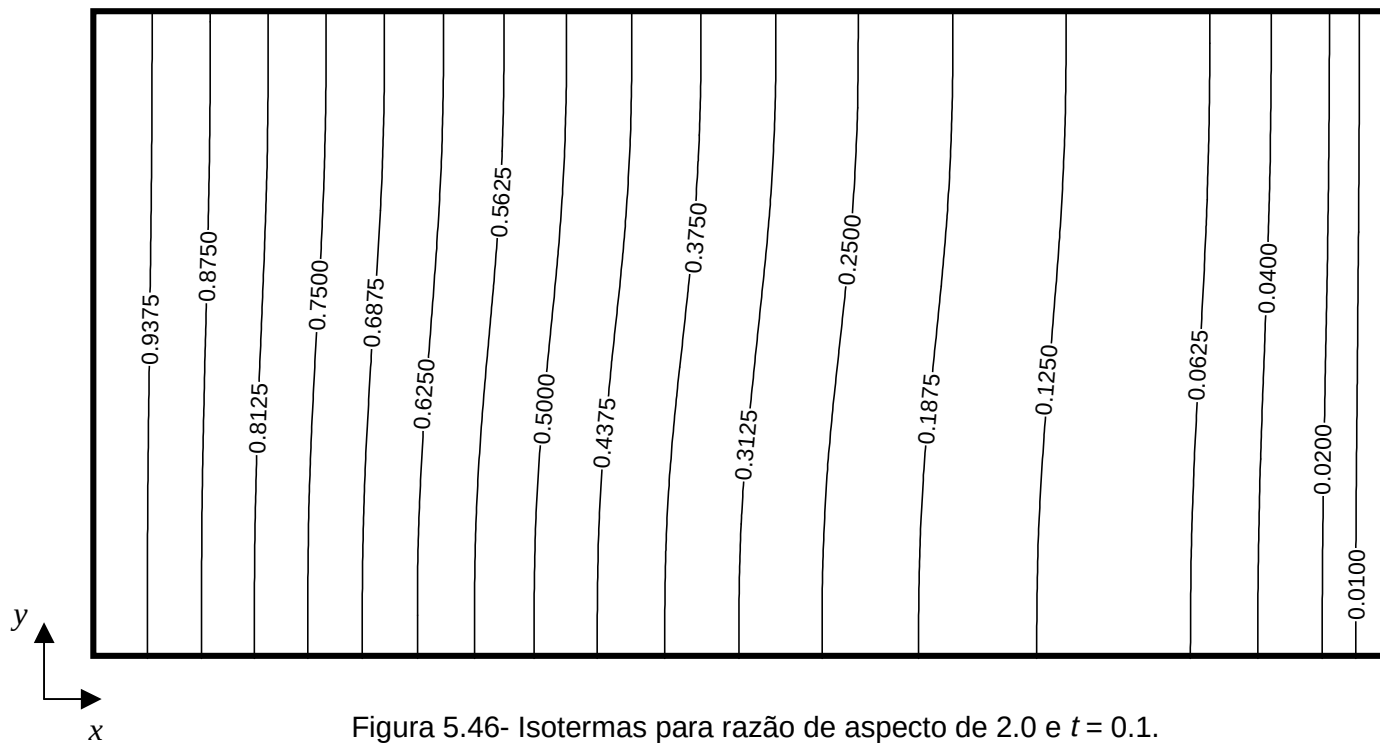


Figura 5.46- Isotermas para razão de aspecto de 2.0 e $t = 0.1$.

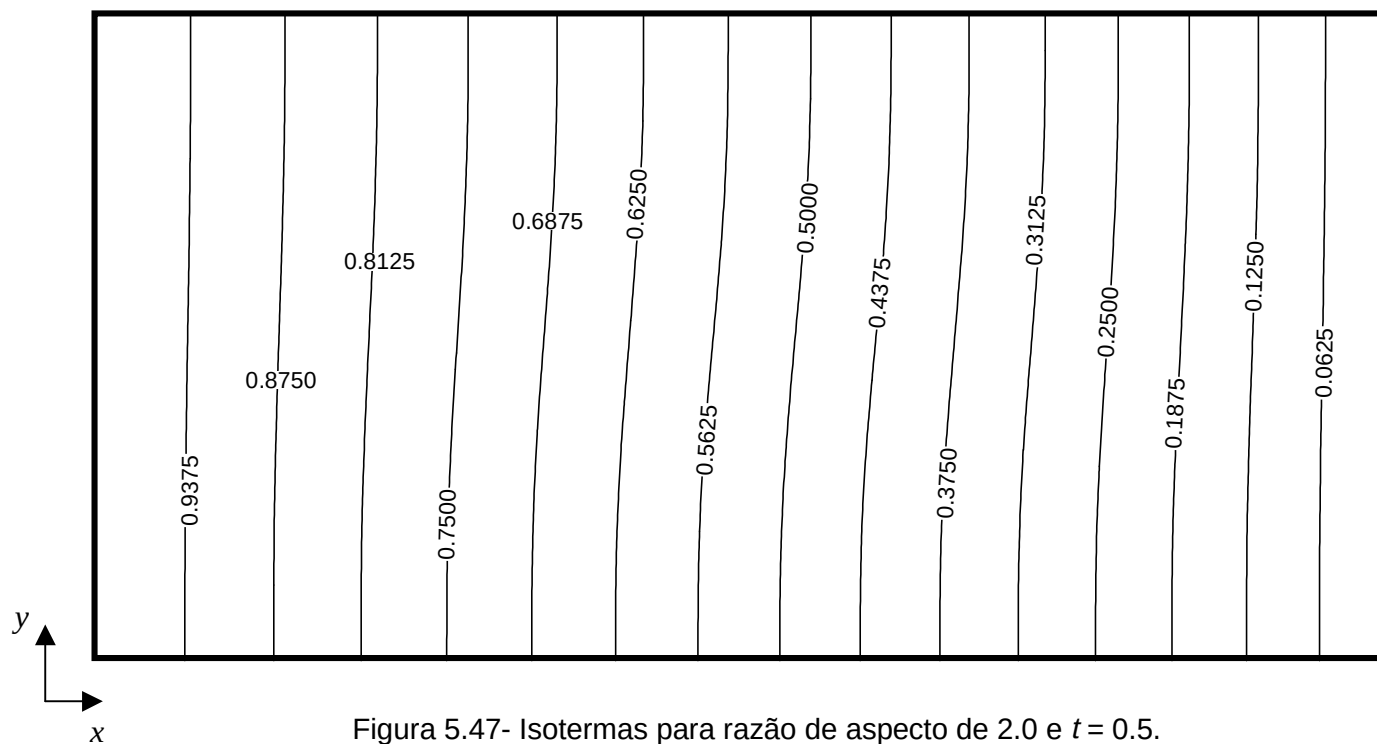


Figura 5.47- Isotermas para razão de aspecto de 2.0 e $t = 0.5$.

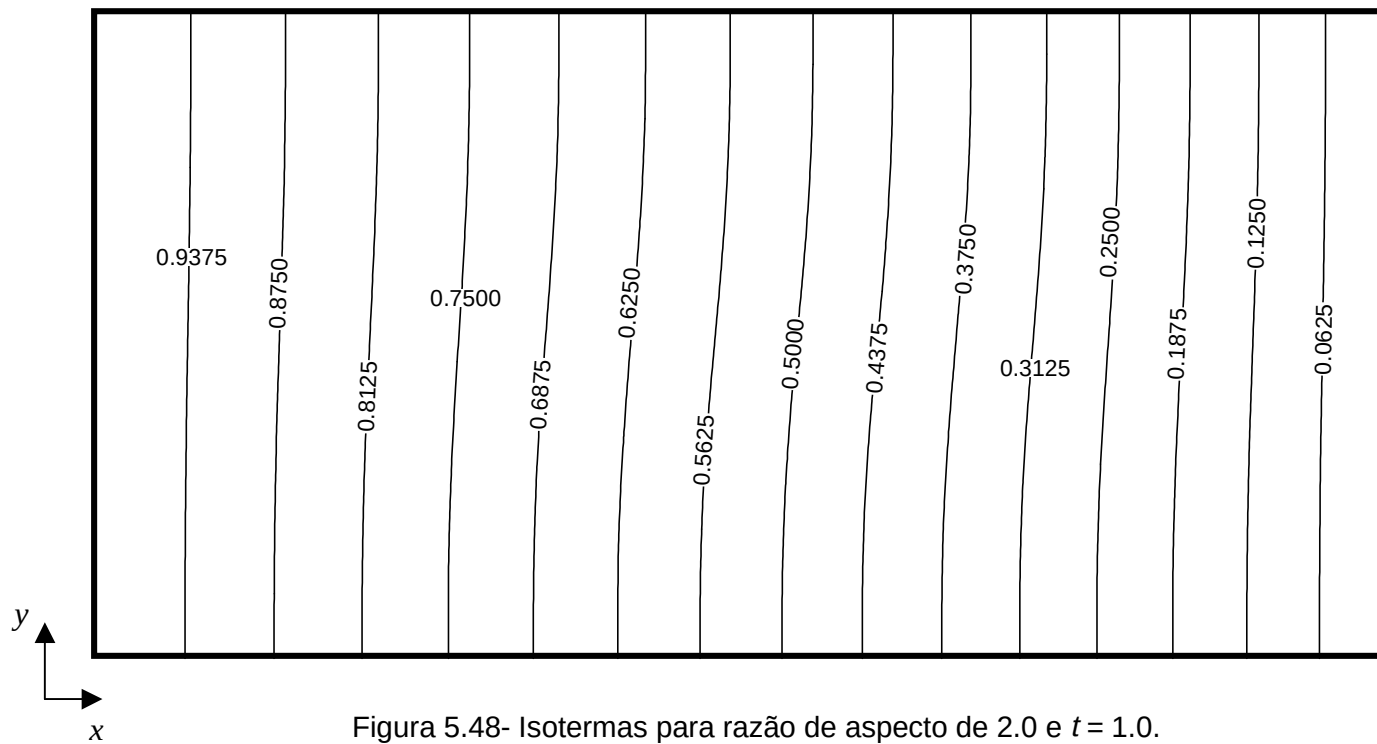


Figura 5.48- Isotermas para razão de aspecto de 2.0 e $t = 1.0$.

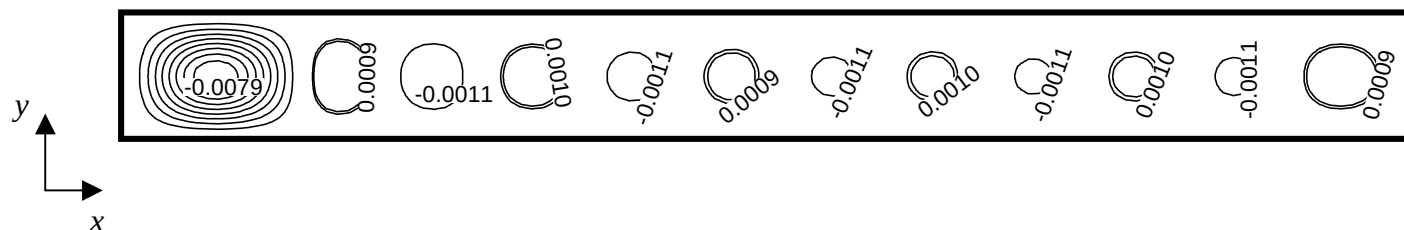


Figura 5.49- Isolinhas da função corrente para razão de aspecto de 10.0 e $t = 0.005$.

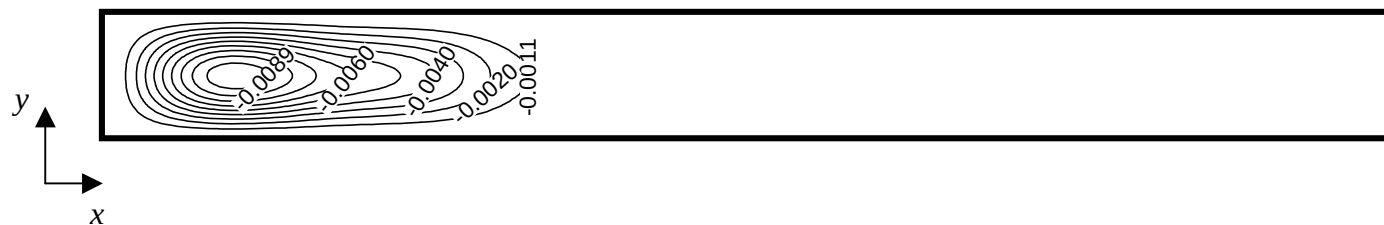


Figura 5.50- Isolinhas da função corrente para razão de aspecto de 10.0 e $t = 0.01$.

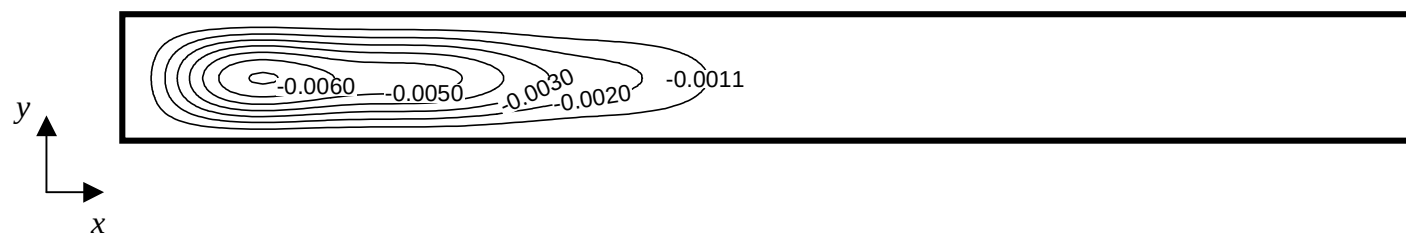


Figura 5.51- Isolinhas da função corrente para razão de aspecto de 10.0 e $t = 0.02$.

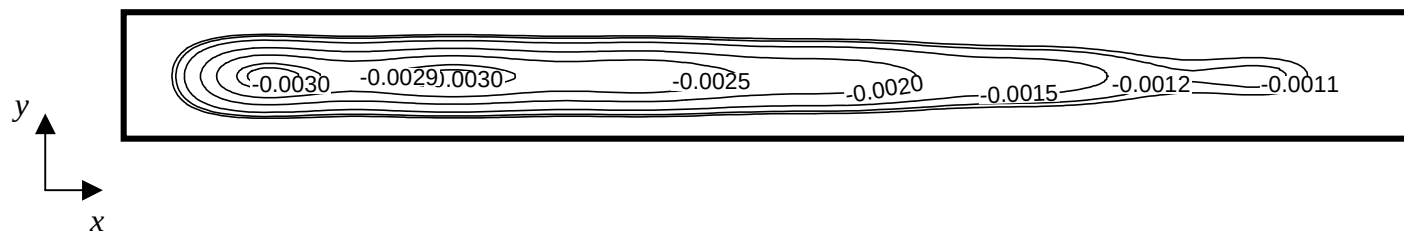


Figura 5.52- Isolinhas da função corrente para razão de aspecto de 10.0 e $t = 0.1$.

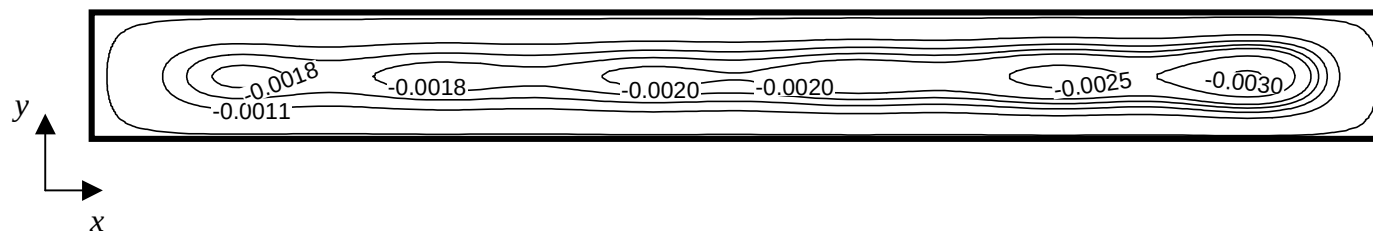


Figura 5.53- Isolinhas da função corrente para razão de aspecto de 10.0 e $t = 0.5$.

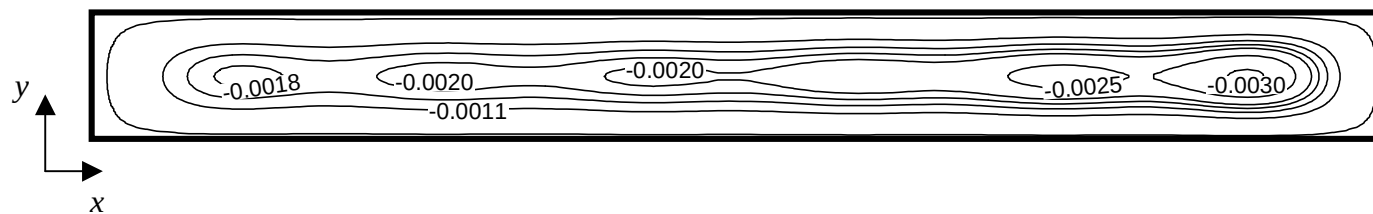


Figura 5.54- Isolinhas da função corrente para razão de aspecto de 10.0 e $t = 1.0$.

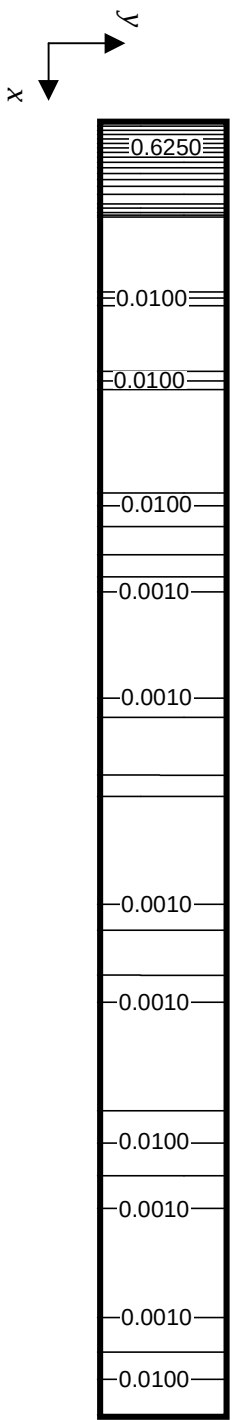


Figura 5.55- Isotermas para razão de aspecto de 10.0 e $t = 0.005$.

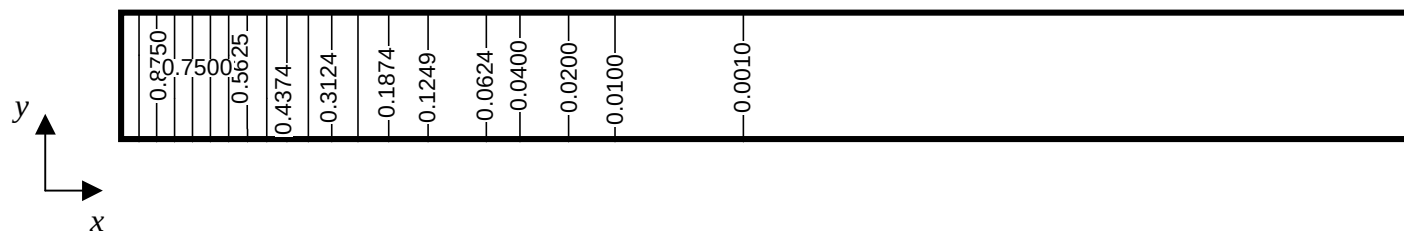


Figura 5.56- Isotermas para razão de aspecto de 10.0 e $t = 0.01$.

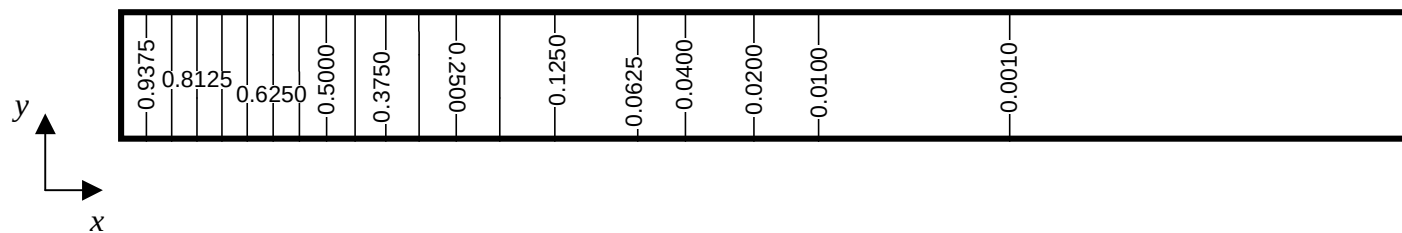


Figura 5.57- Isotermas para razão de aspecto de 10.0 e $t = 0.02$.

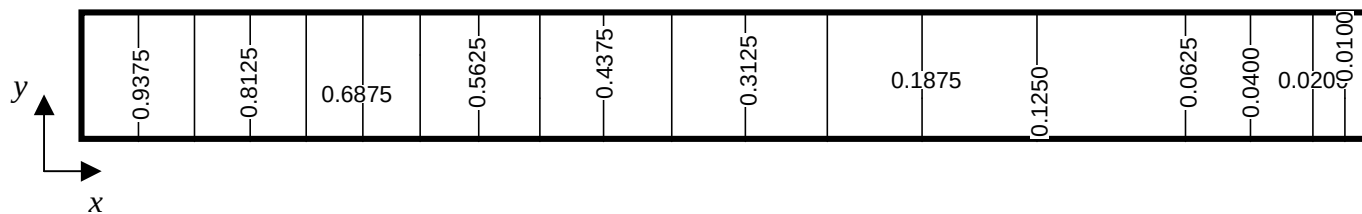


Figura 5.58- Isotermas para razão de aspecto de 10.0 e $t = 0.1$.

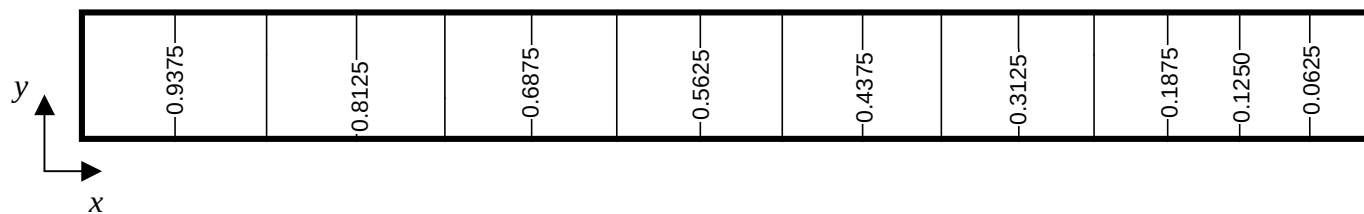


Figura 5.59- Isotermas para razão de aspecto de 10.0 e $t = 0.5$.

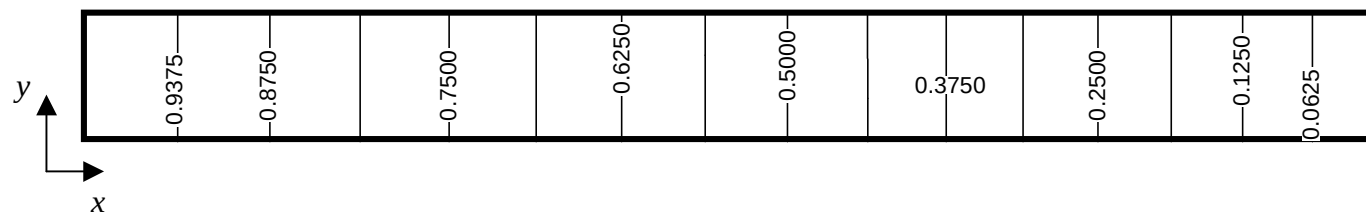


Figura 5.60- Isothermas para razão de aspecto de 10.0 e $t = 1.0$.

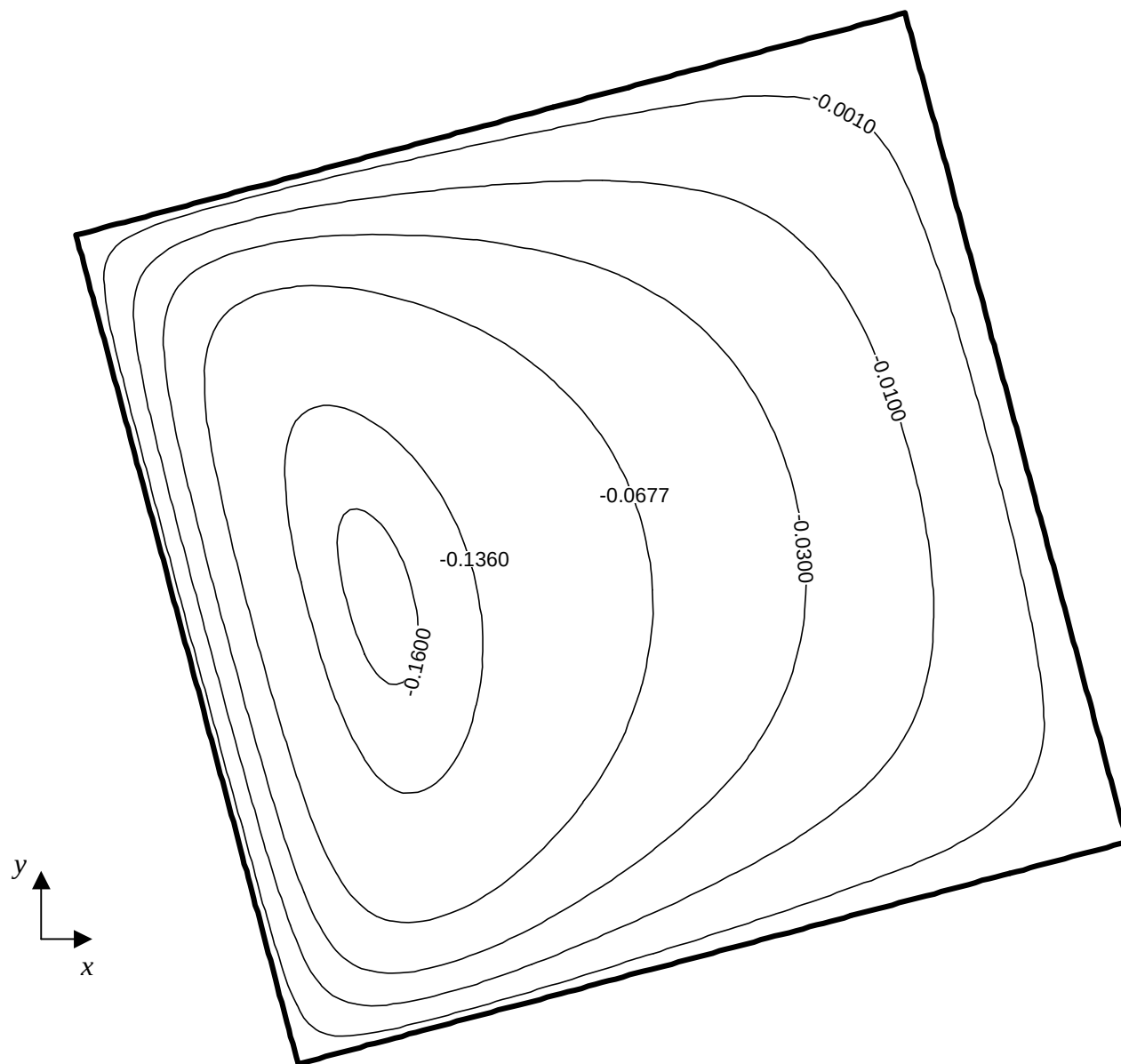


Figura 5.61- Isolinhas da função corrente para ângulo de inclinação de 15° e $t = 0.01$.

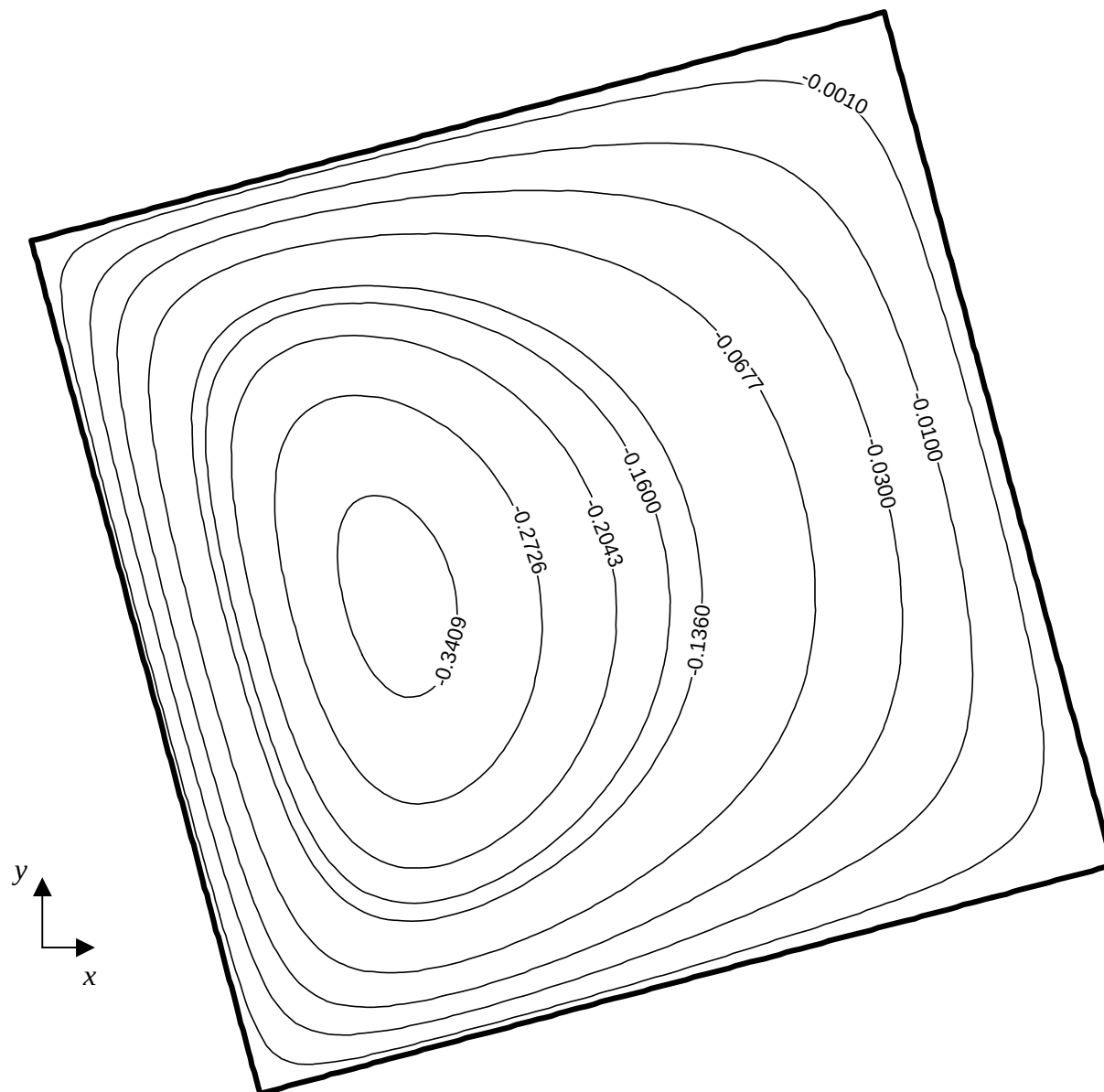


Figura 5.62- Isolinhas da função corrente para ângulo de inclinação de 15° e $t = 0.02$.

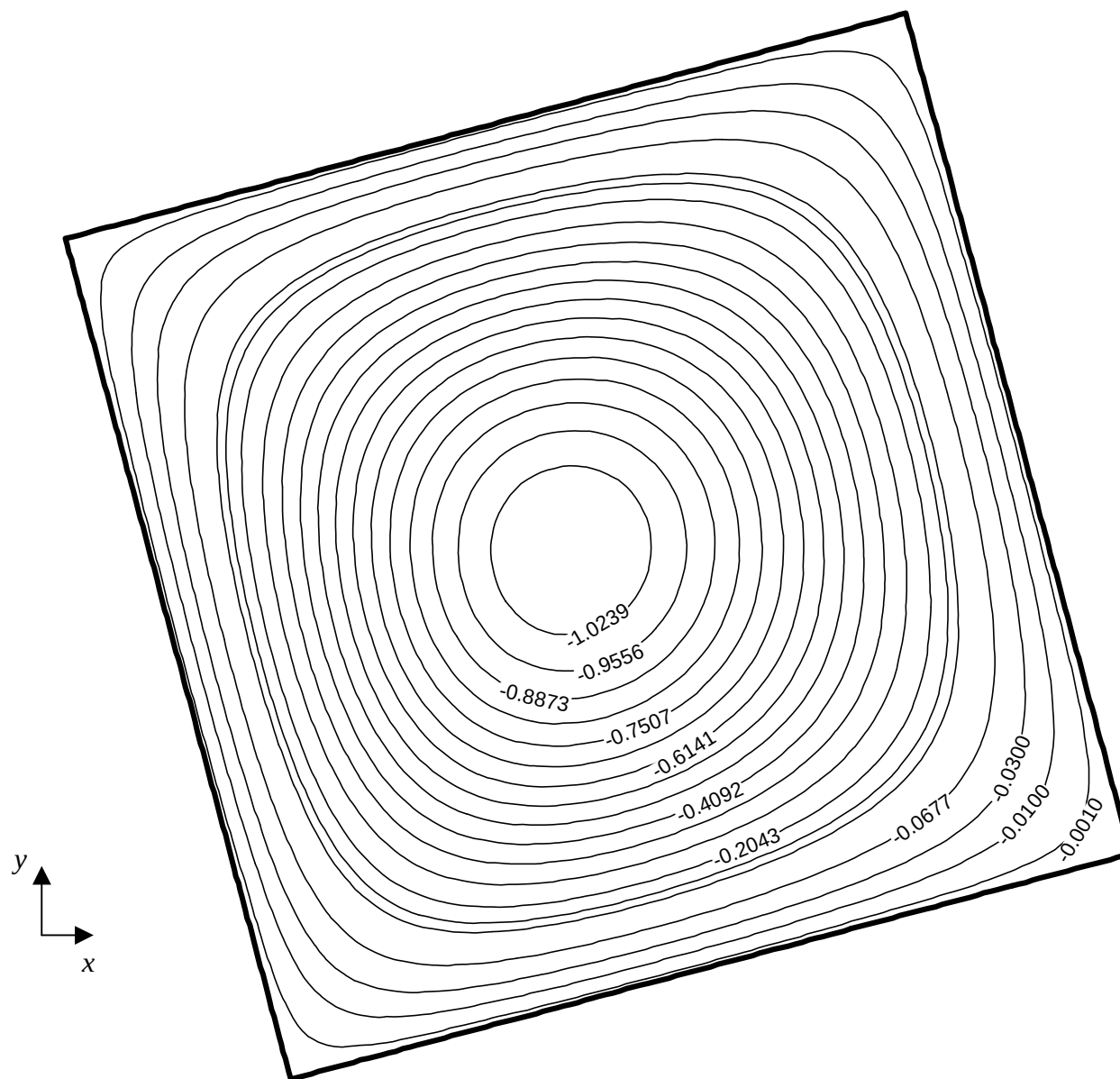


Figura 5.63- Isolinhas da função corrente para ângulo de inclinação de 15° e $t = 0.1$.

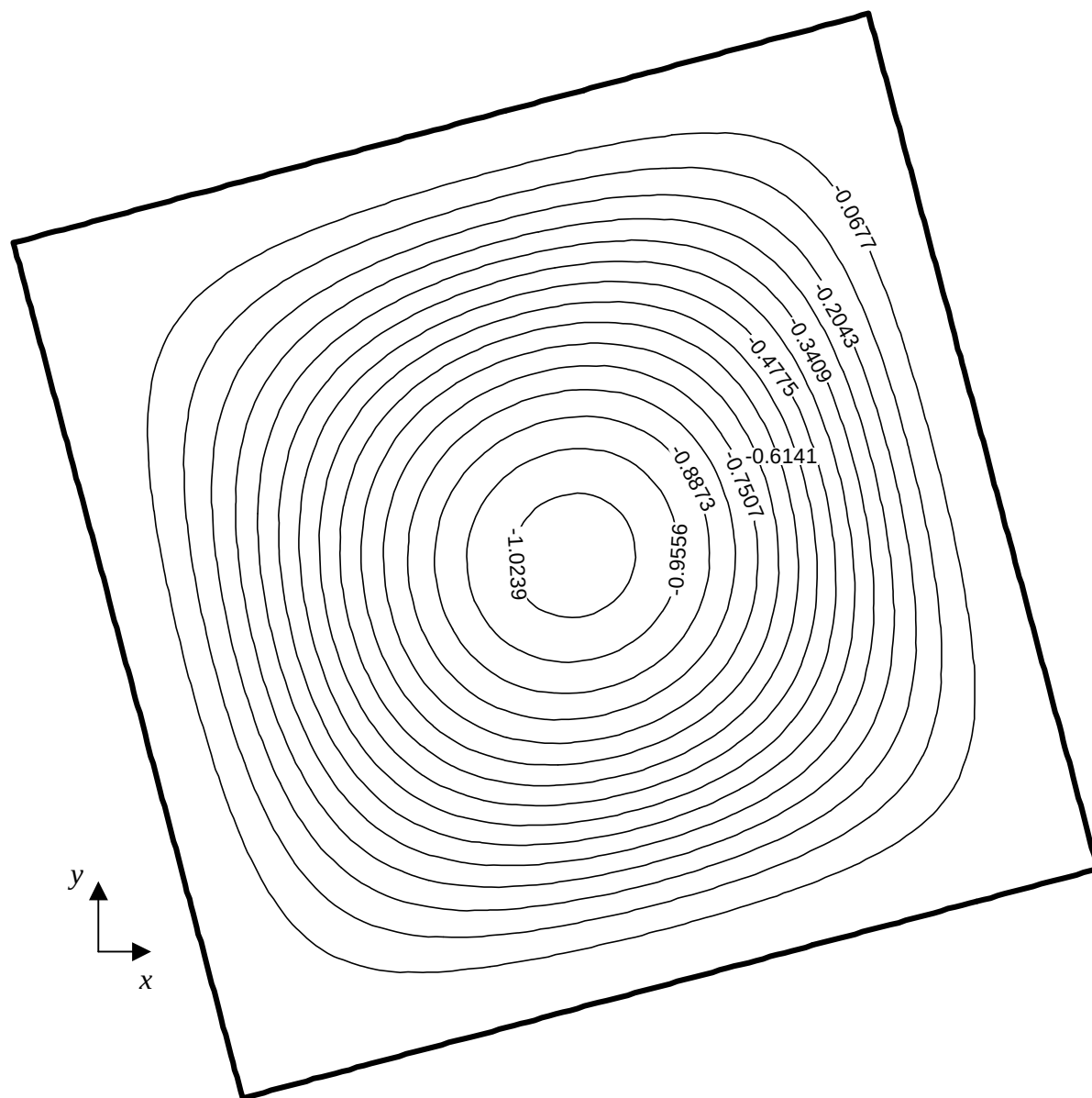


Figura 5.64- Isolinhas da função corrente para ângulo de inclinação de 15° e $t = 0.5$.

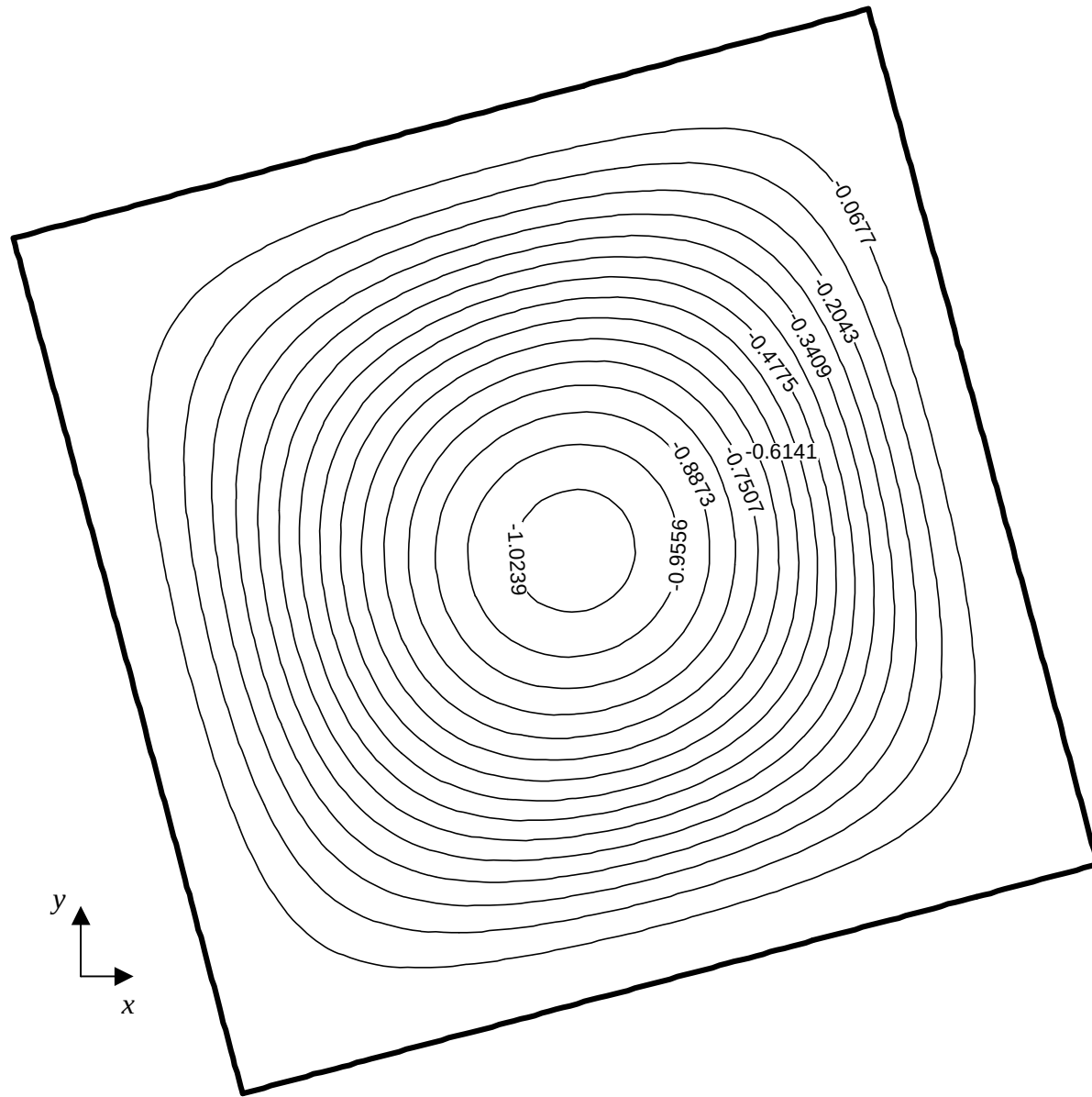


Figura 5.65- Isolinhas da função corrente para ângulo de inclinação de 15° e $t = 1.0$.

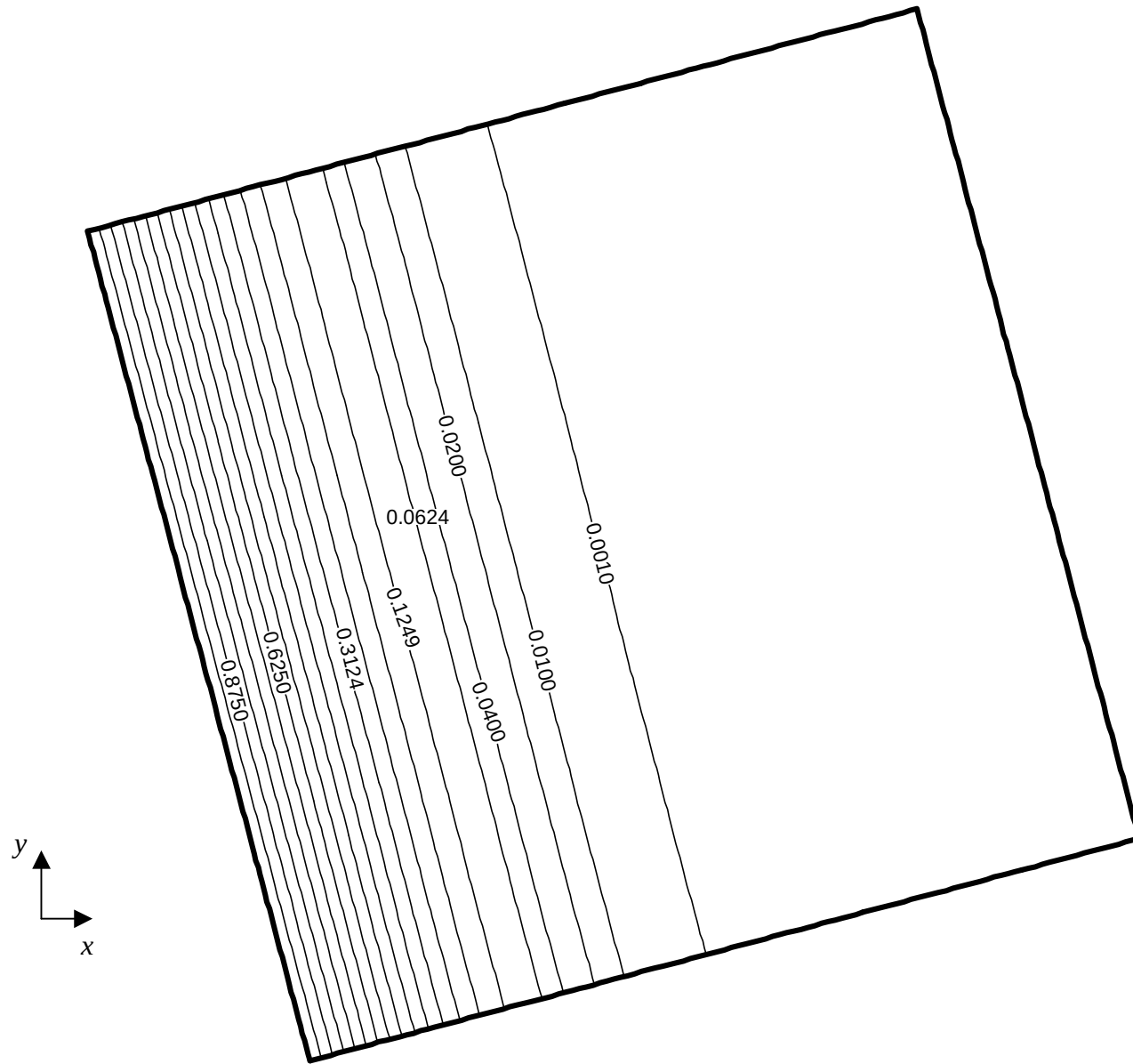


Figura 5.66- Isothermas para ângulo de inclinação de 15° e $t = 0.01$.

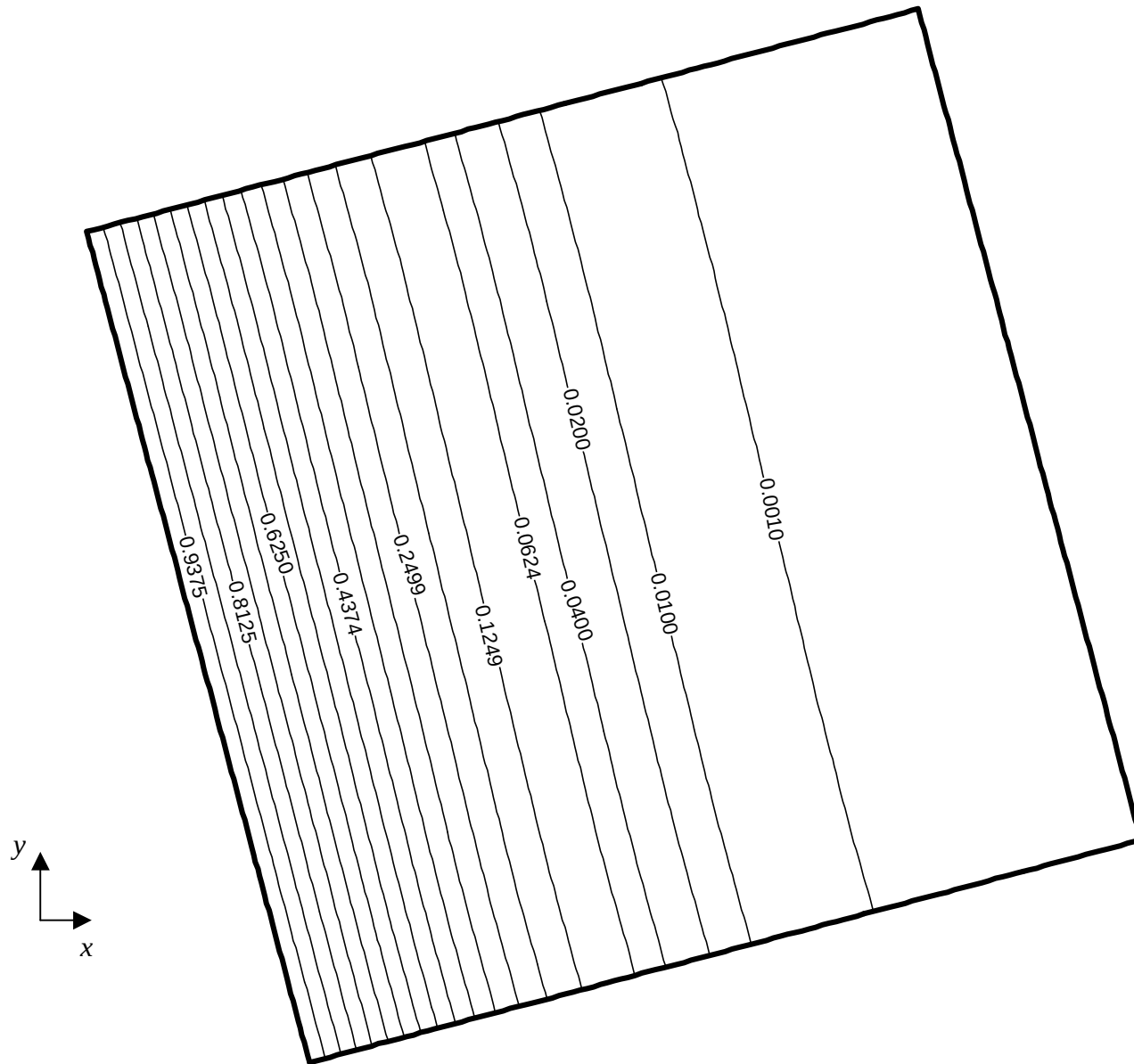


Figura 5.67- Isotermas para ângulo de inclinação de 15° e $t = 0.02$.

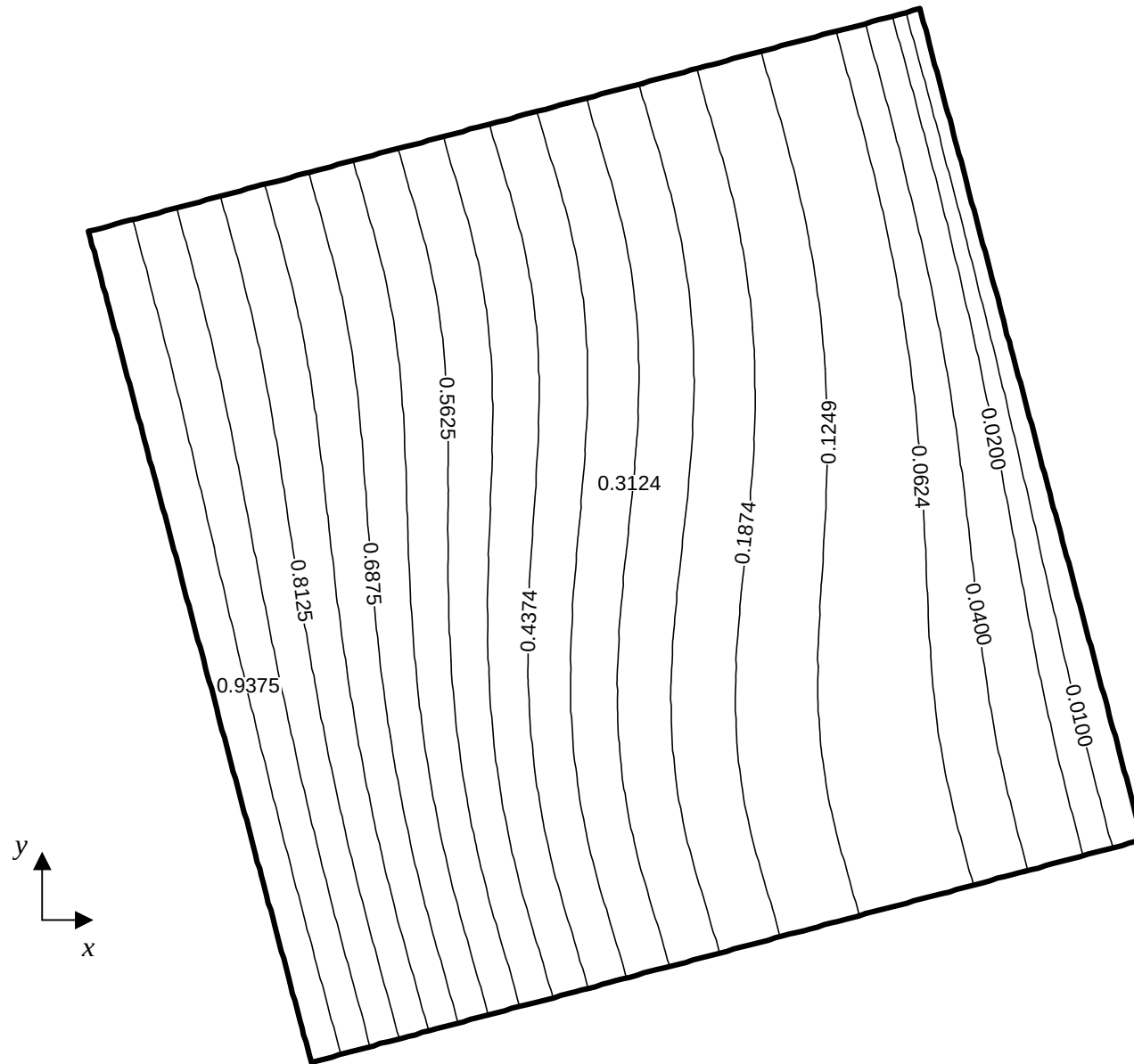


Figura 5.68- Isotermas para ângulo de inclinação de 15° e $t = 0.1$.

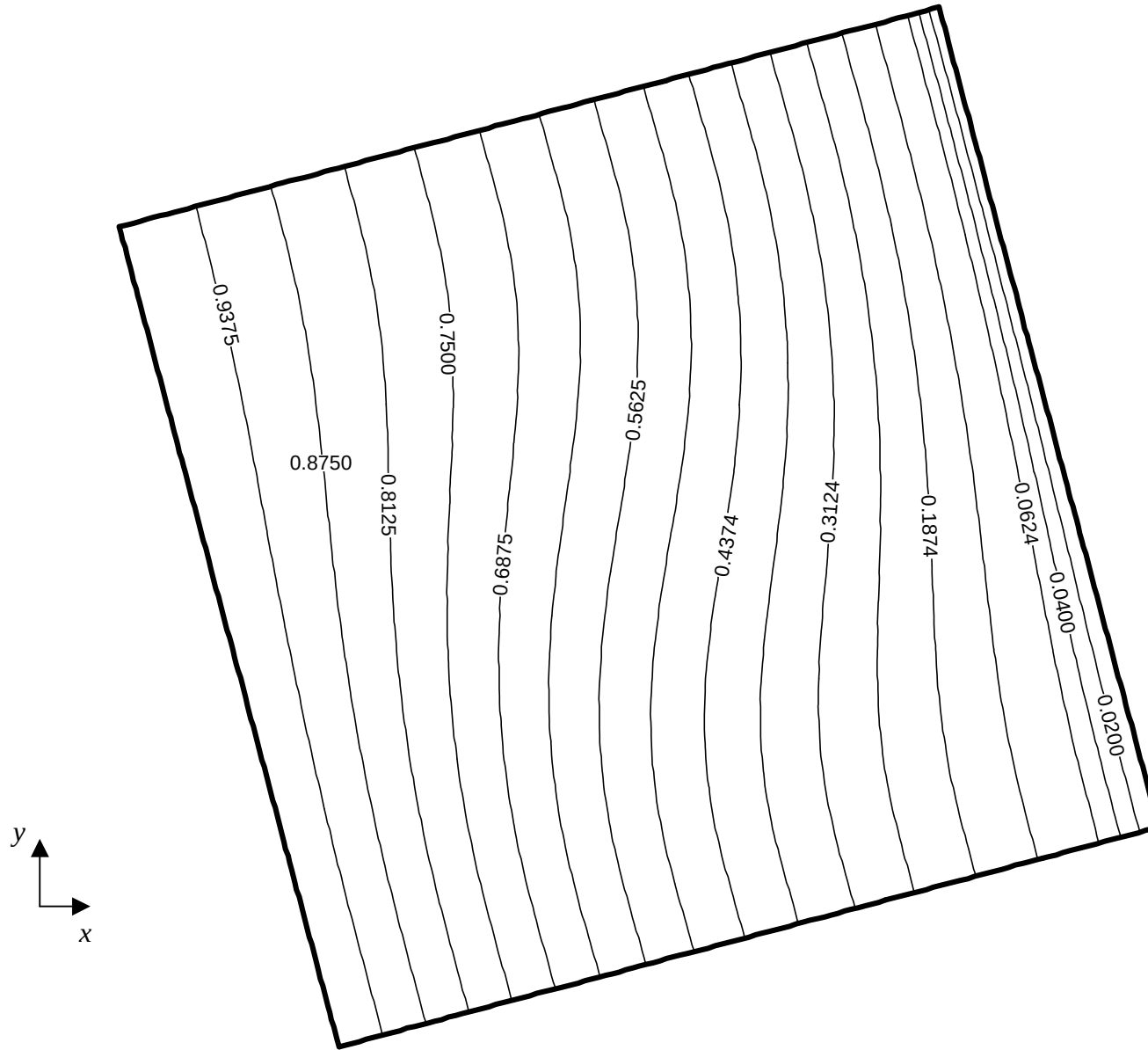


Figura 5.69- Isotermas para ângulo de inclinação de 15° e $t = 0.5$.

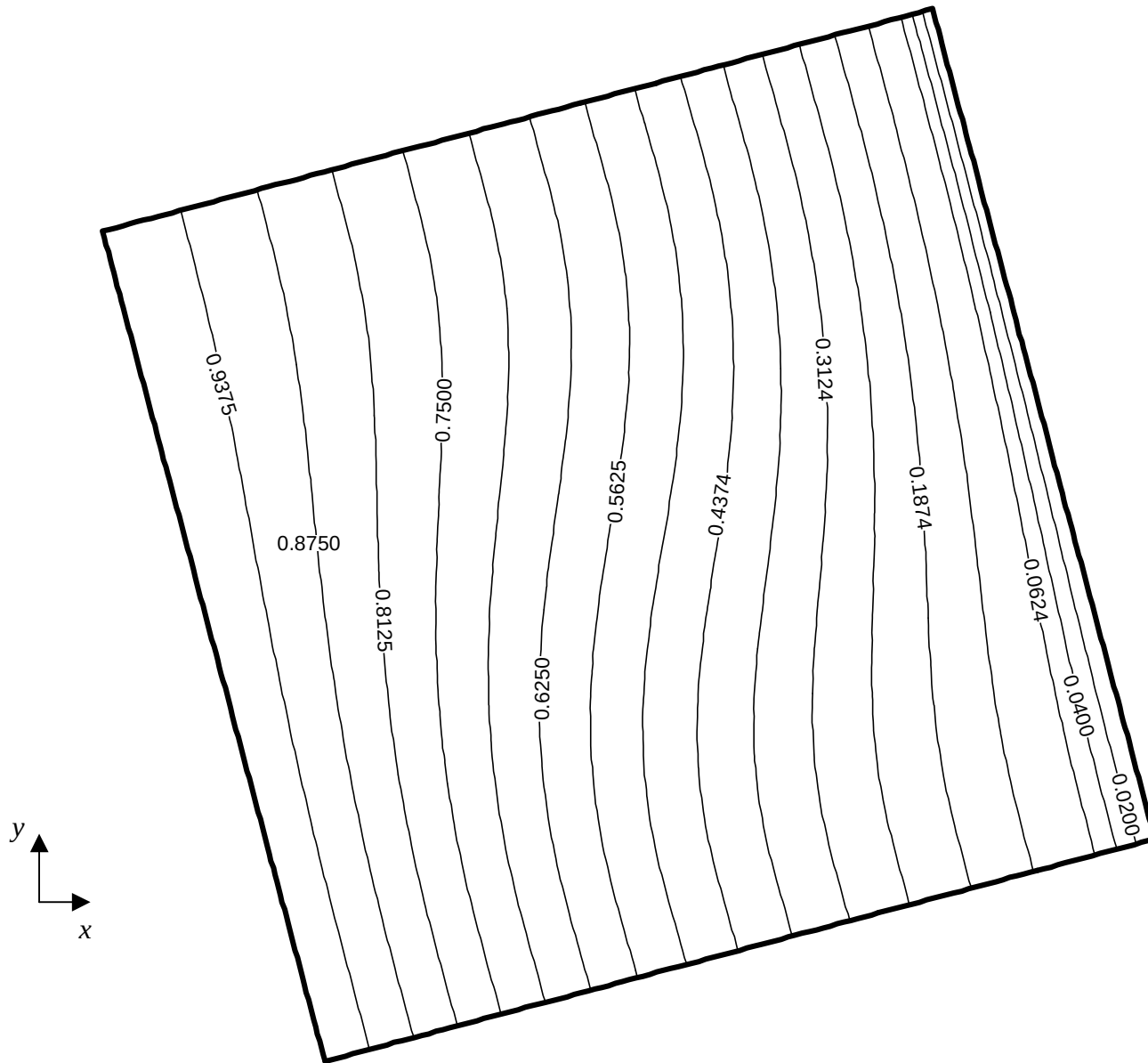


Figura 5.70- Isotermas para ângulo de inclinação de 15° e $t = 1.0$.

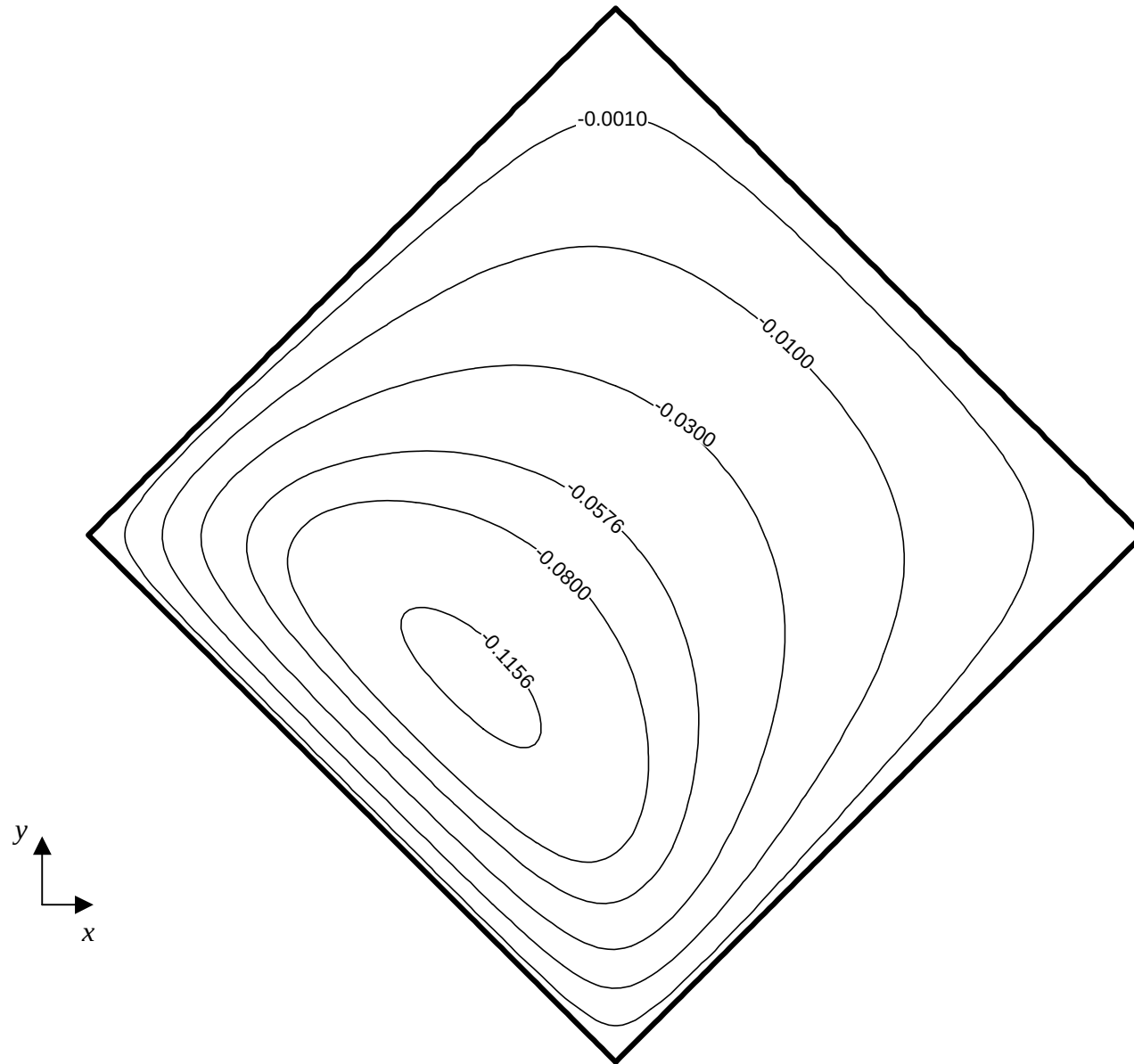


Figura 5.71- Isolinhas da função corrente para ângulo de inclinação de 45° e $t = 0.01$.

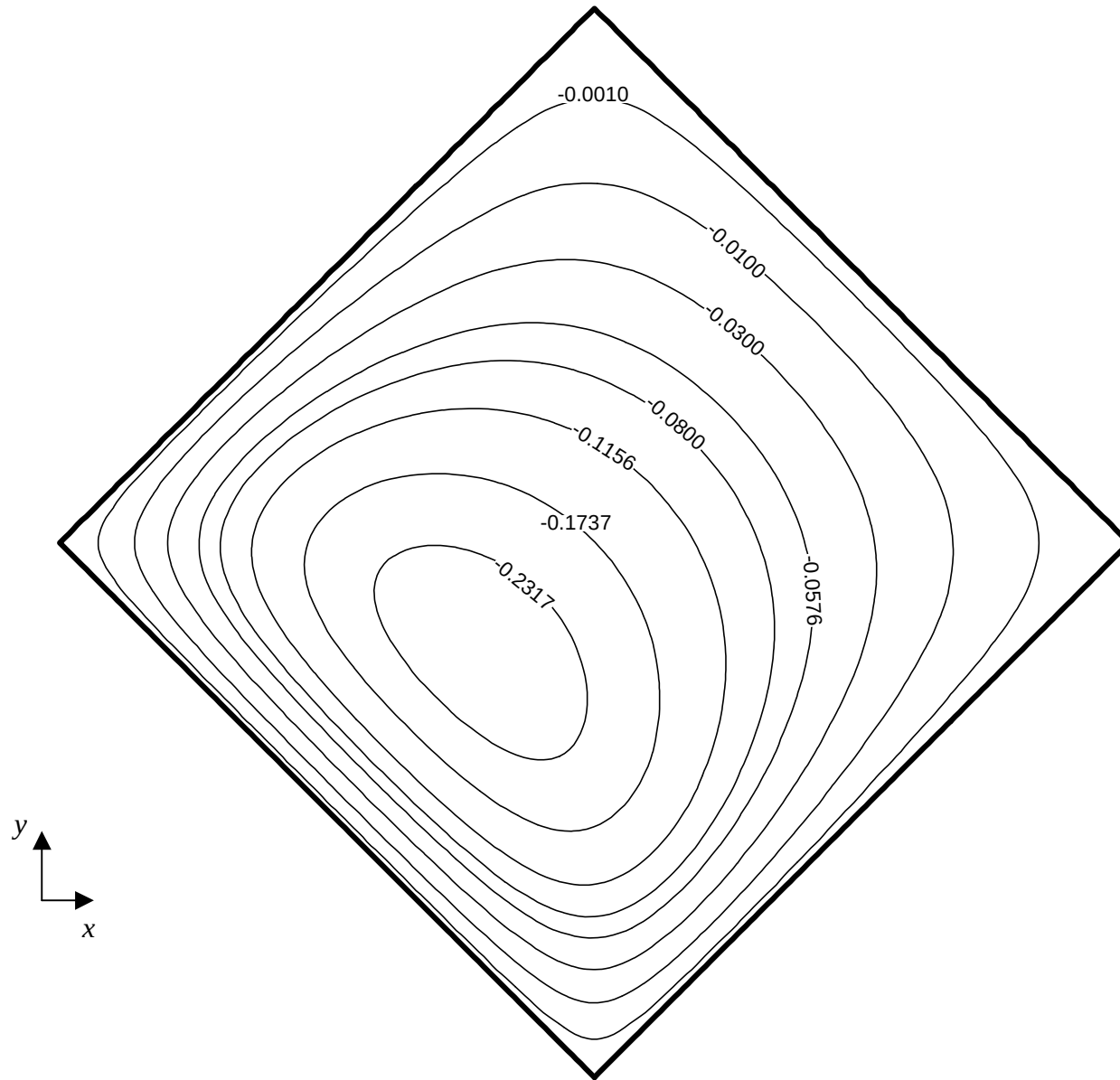


Figura 5.72- Isolinhas da função corrente para ângulo de inclinação de 45° e $t = 0.02$.

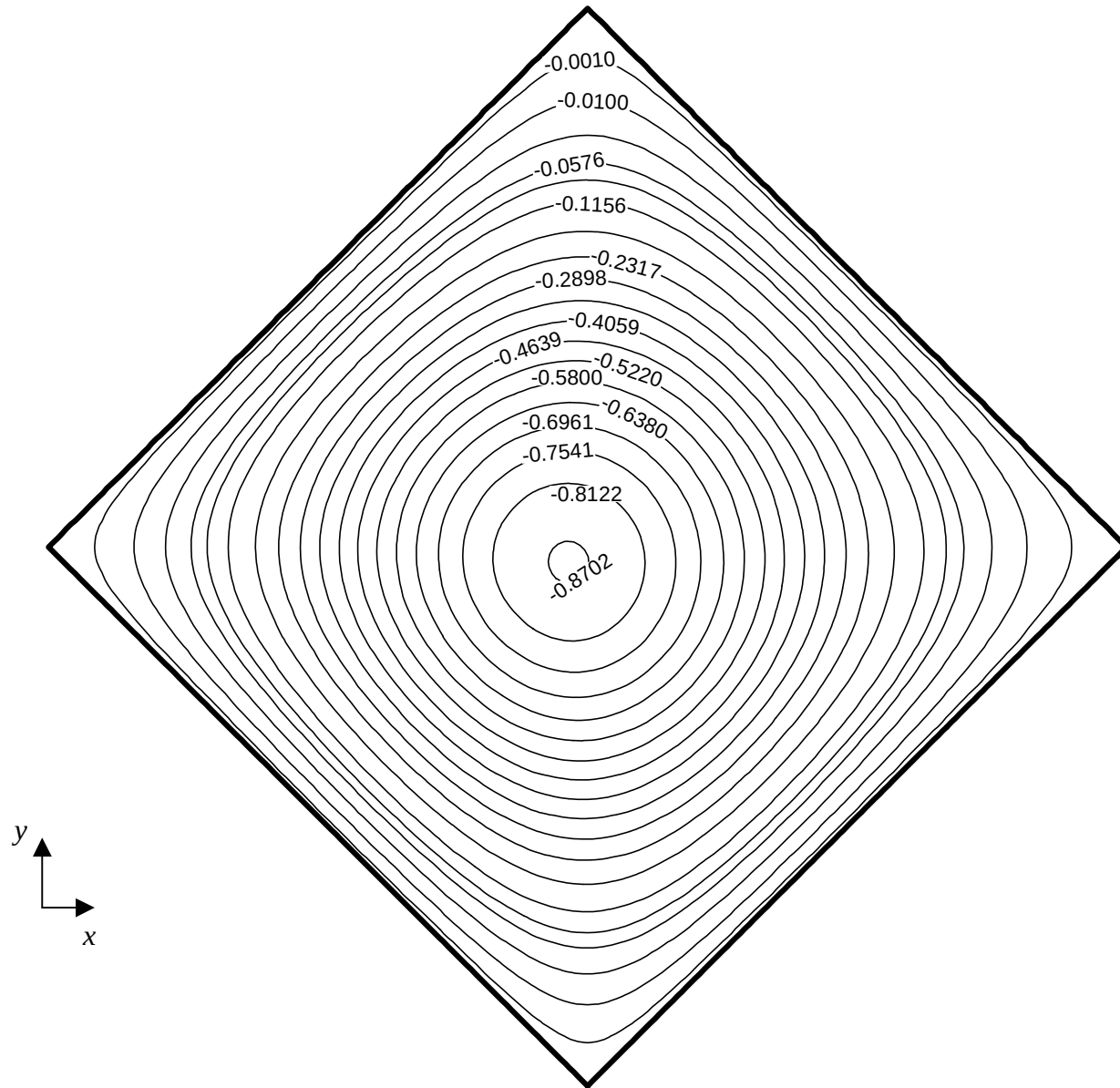


Figura 5.73- Isolinhas da função corrente para ângulo de inclinação de 45° e $t = 0.1$.

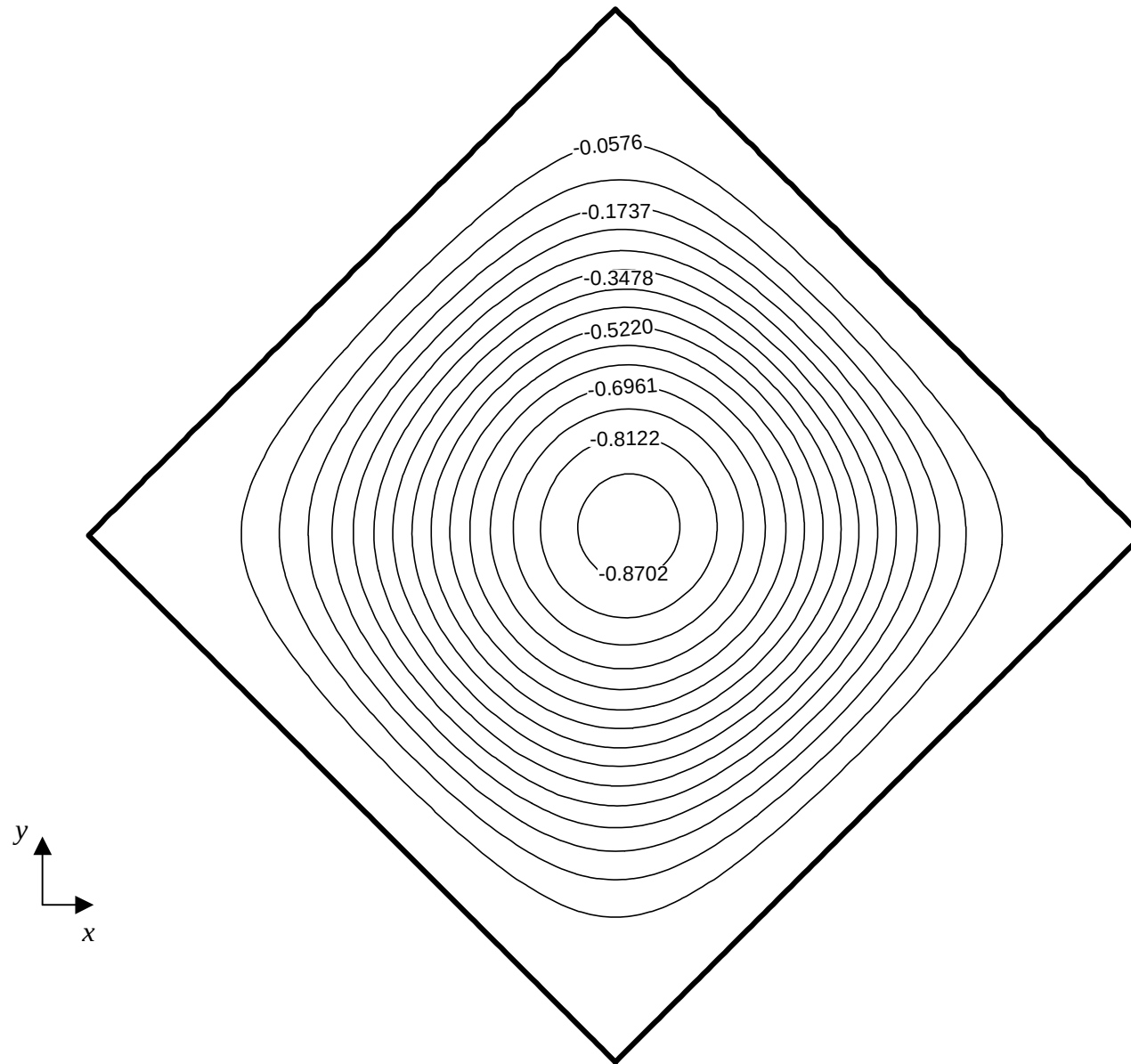


Figura 5.74- Isolinhas da função corrente para ângulo de inclinação de 45° e $t = 0.5$.

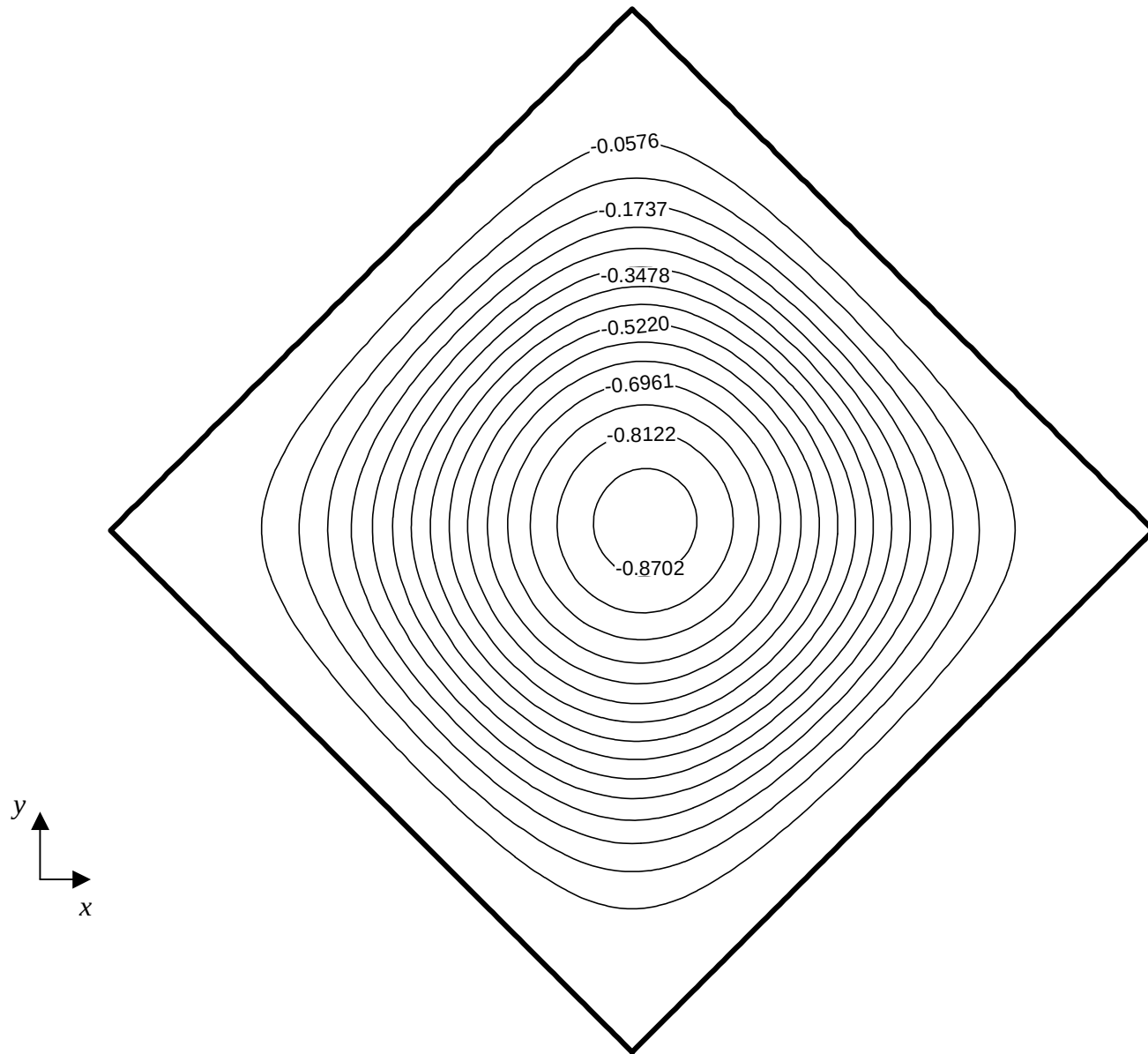


Figura 5.75- Isolinhas da função corrente para ângulo de inclinação de 45° e $t = 1.0$.

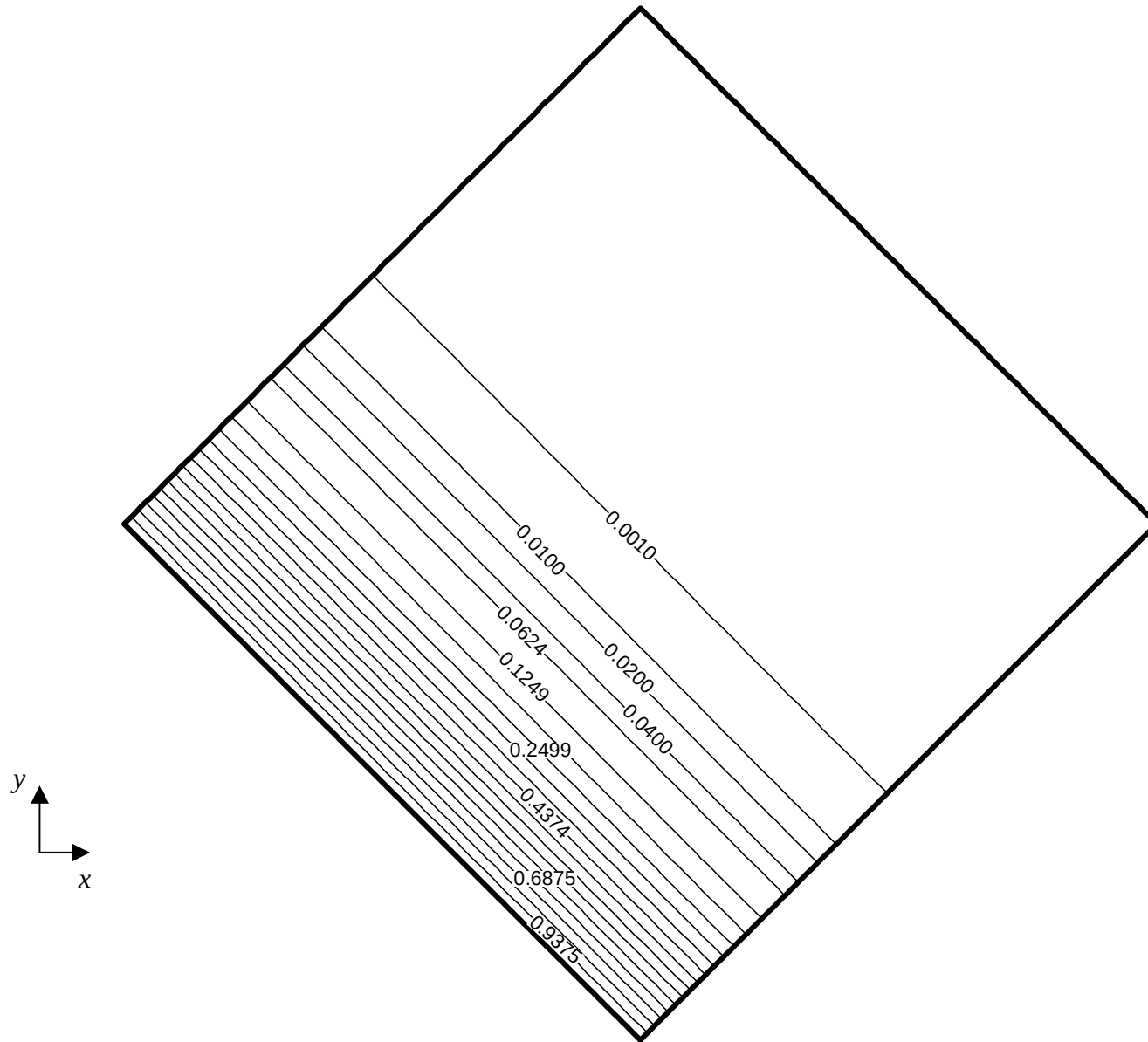


Figura 5.76- Isotermas para ângulo de inclinação de 45° e $t = 0.01$.

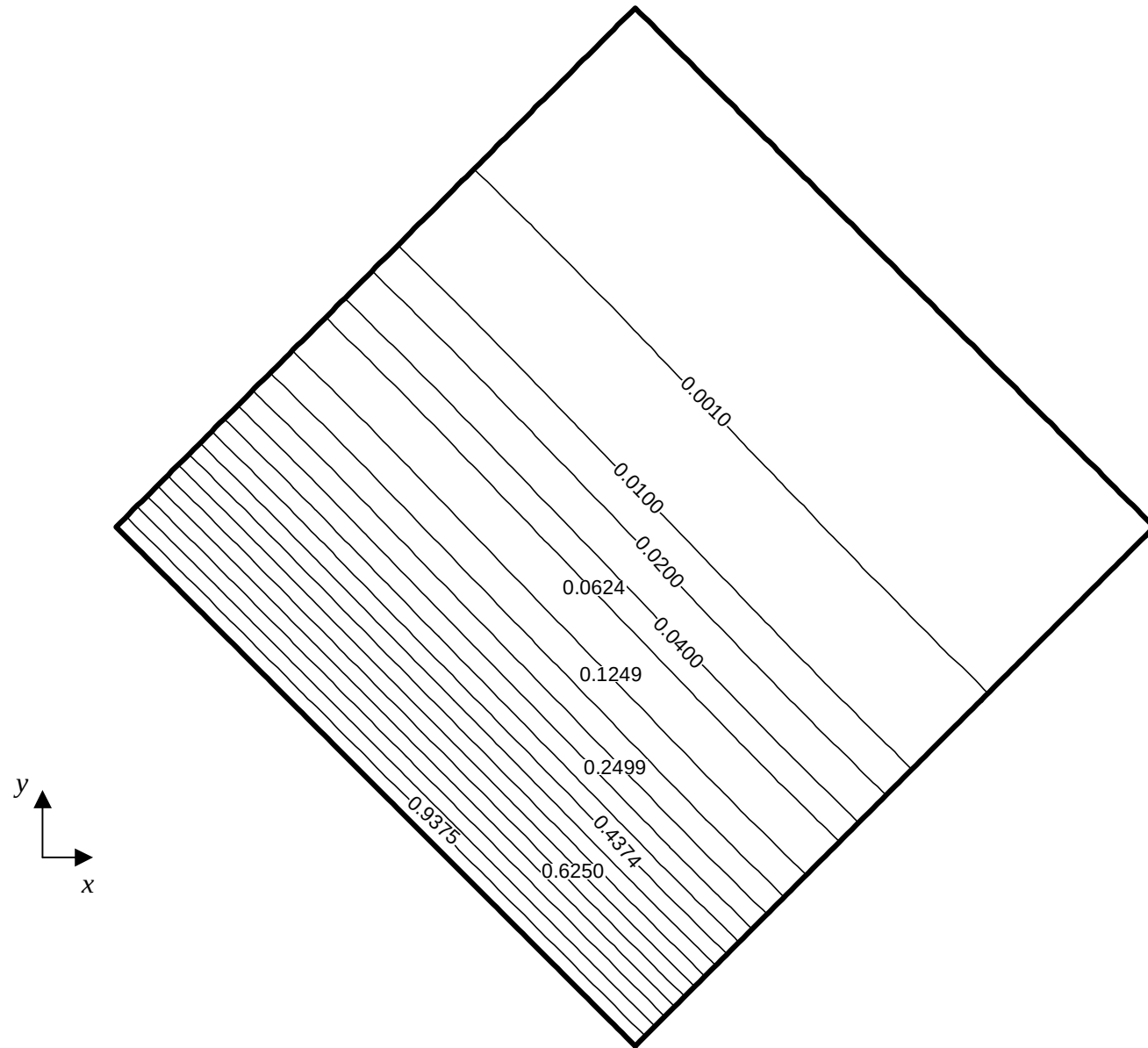


Figura 5.77- Isotermas para ângulo de inclinação de 45° e $t = 0.02$.

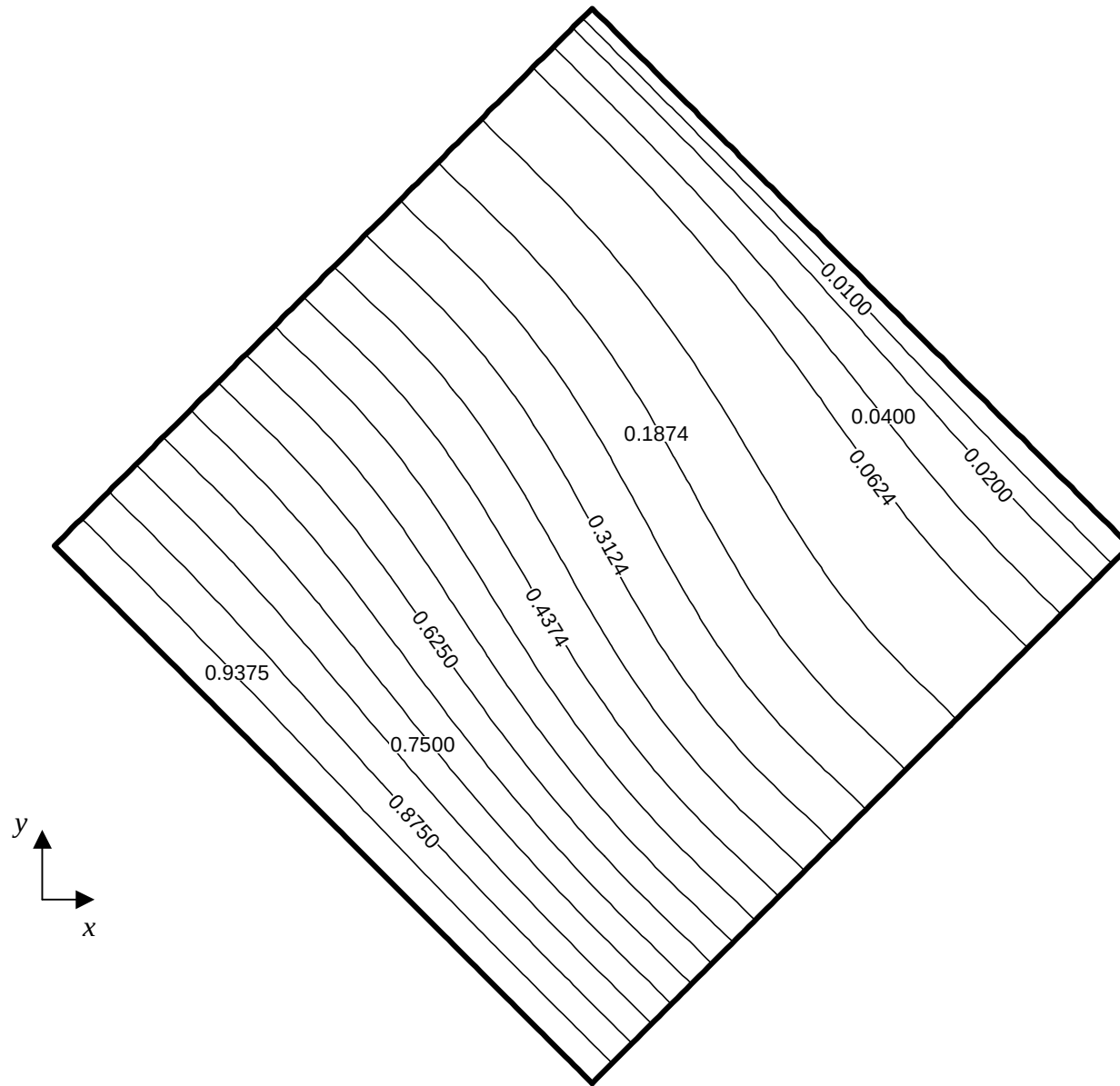


Figura 5.78- Isotermas para ângulo de inclinação de 45° e $t = 0.1$.

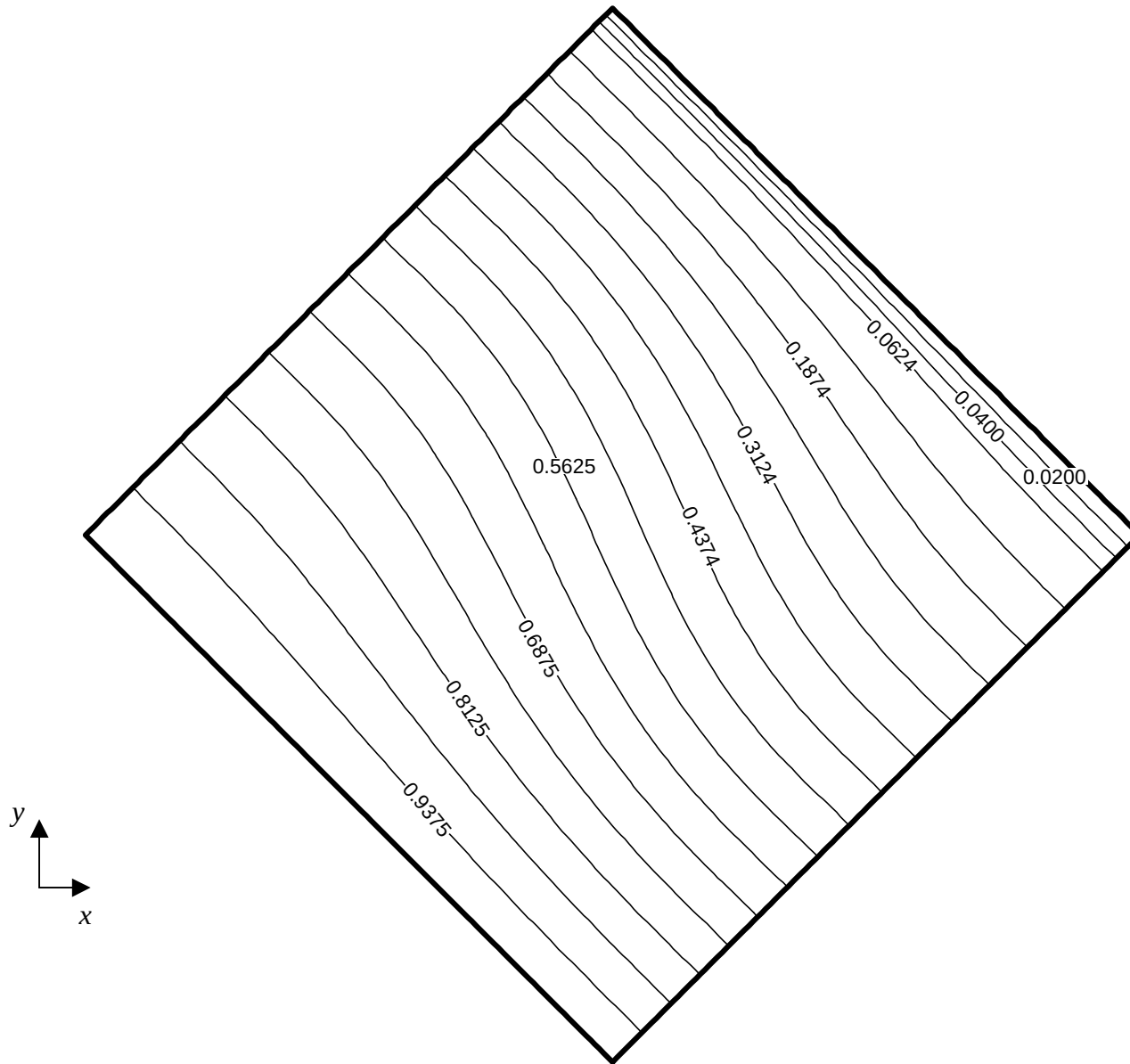


Figura 5.79- Isotermas para ângulo de inclinação de 45° e $t = 0.5$.

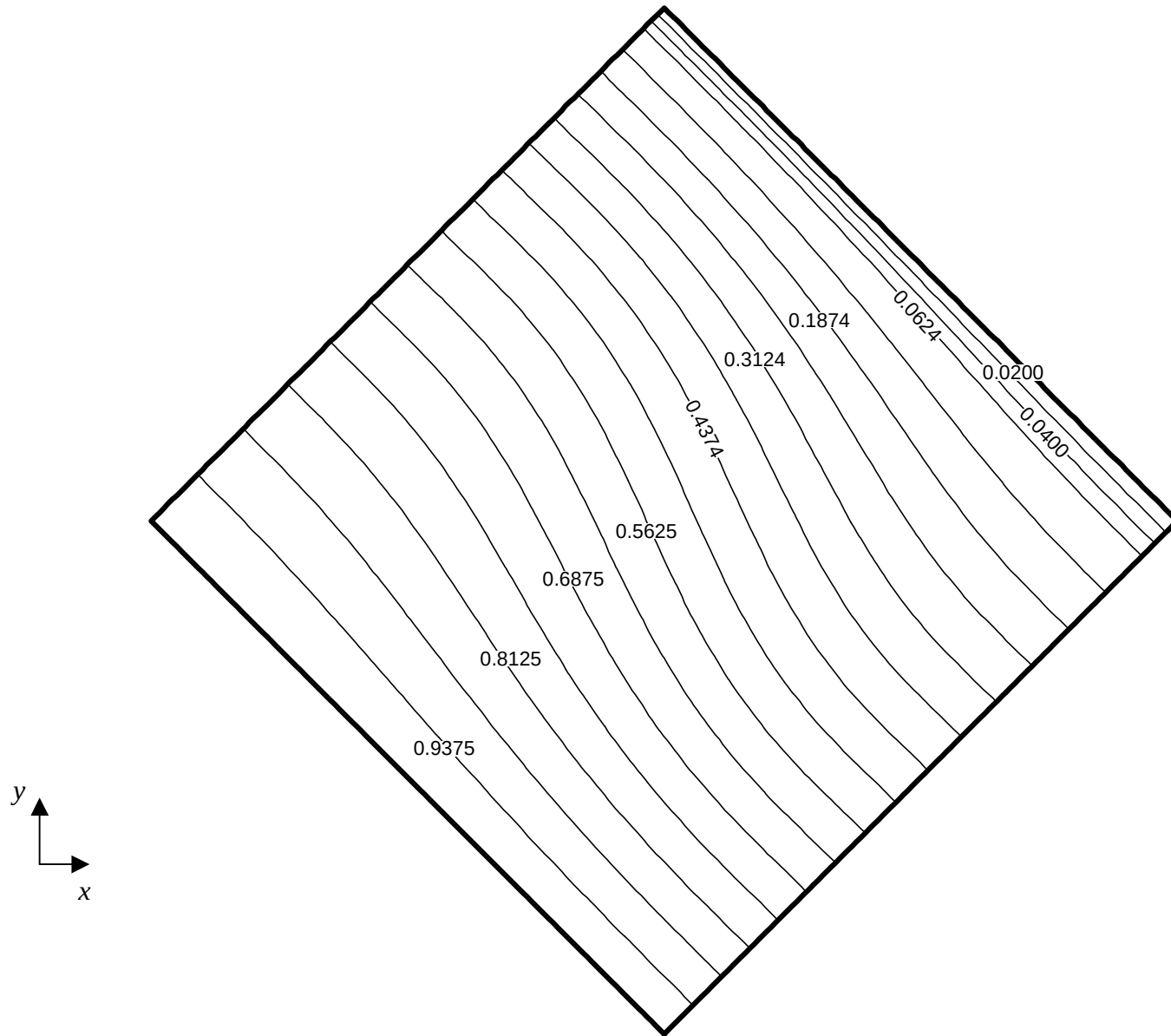


Figura 5.80- Isotermas para ângulo de inclinação de 45° e $t = 1.0$.

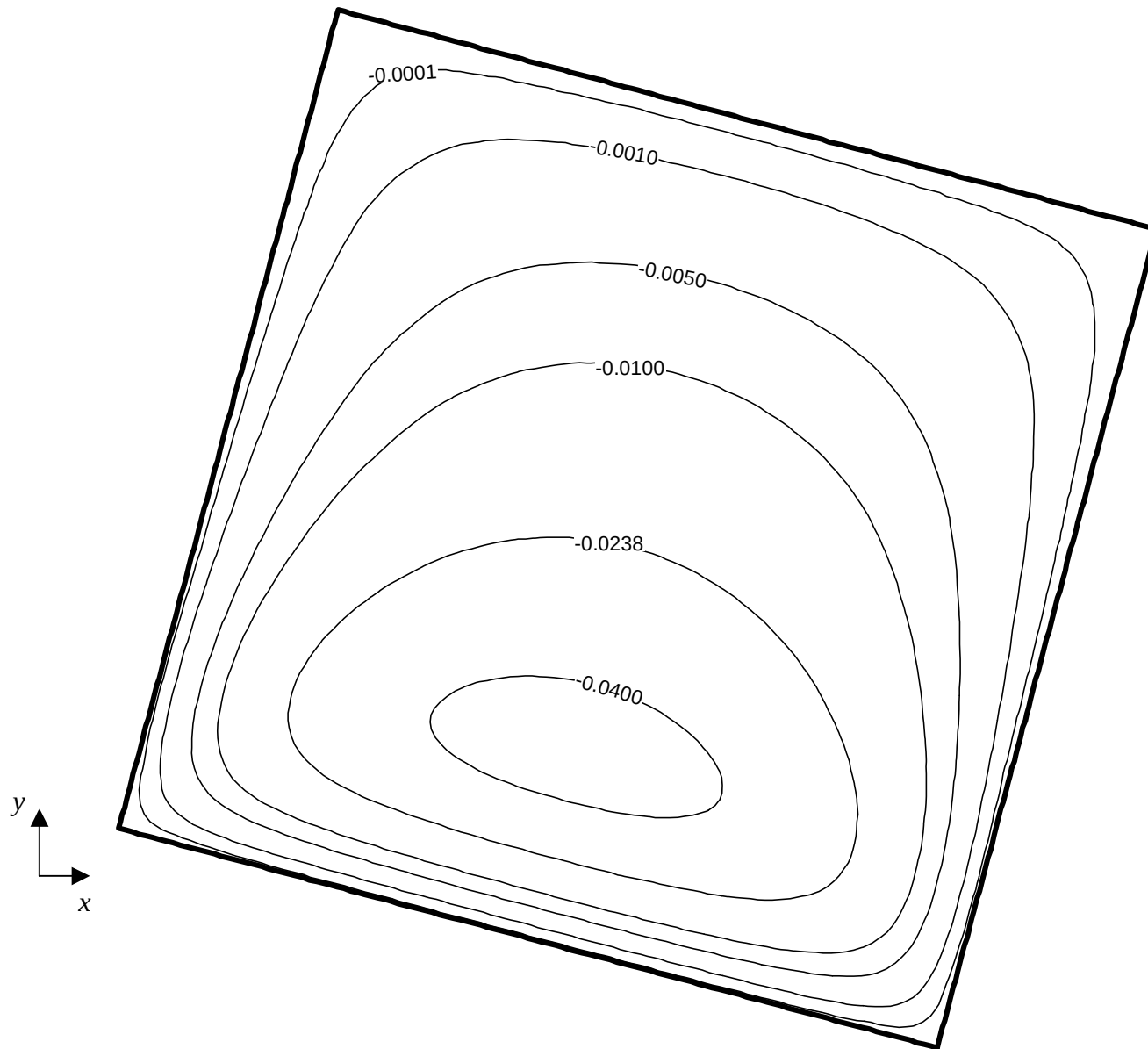


Figura 5.81- Isolinhas da função corrente para ângulo de inclinação de 75° e $t = 0.01$.

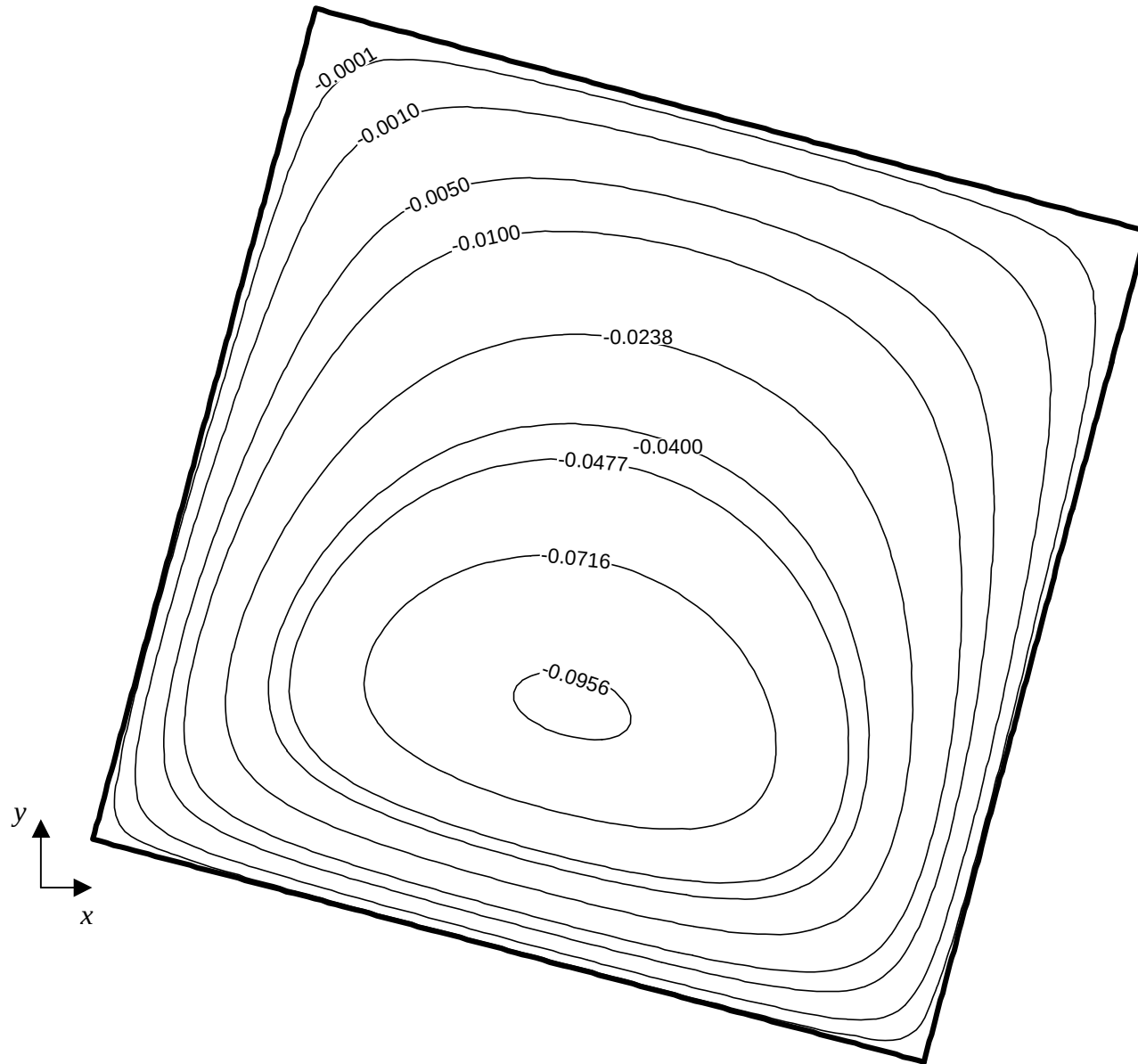


Figura 5.82- Isolinhas da função corrente para ângulo de inclinação de 75° e $t = 0.02$.

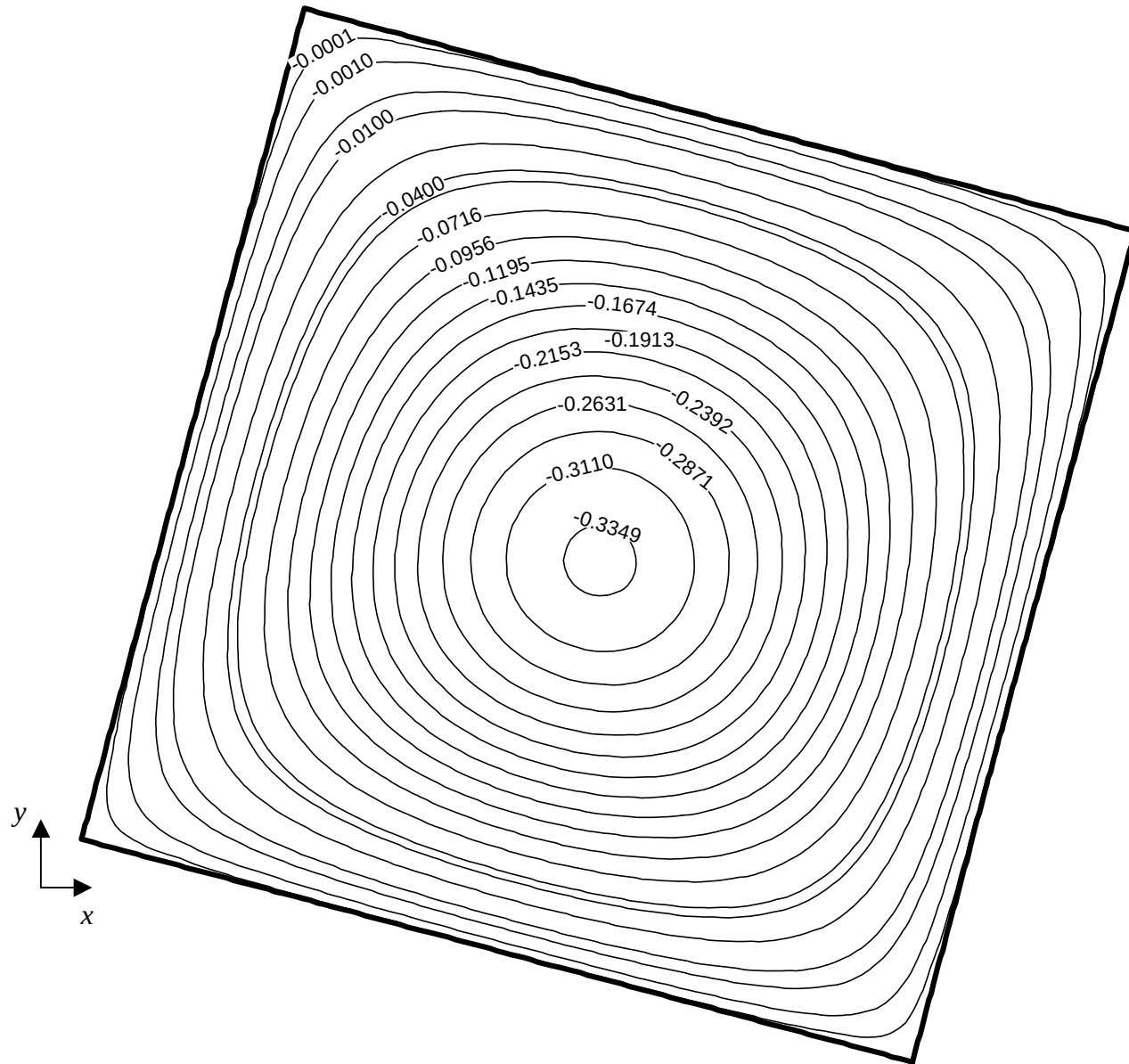


Figura 5.83- Isolinhas da função corrente para ângulo de inclinação de 75° e $t = 0.1$.

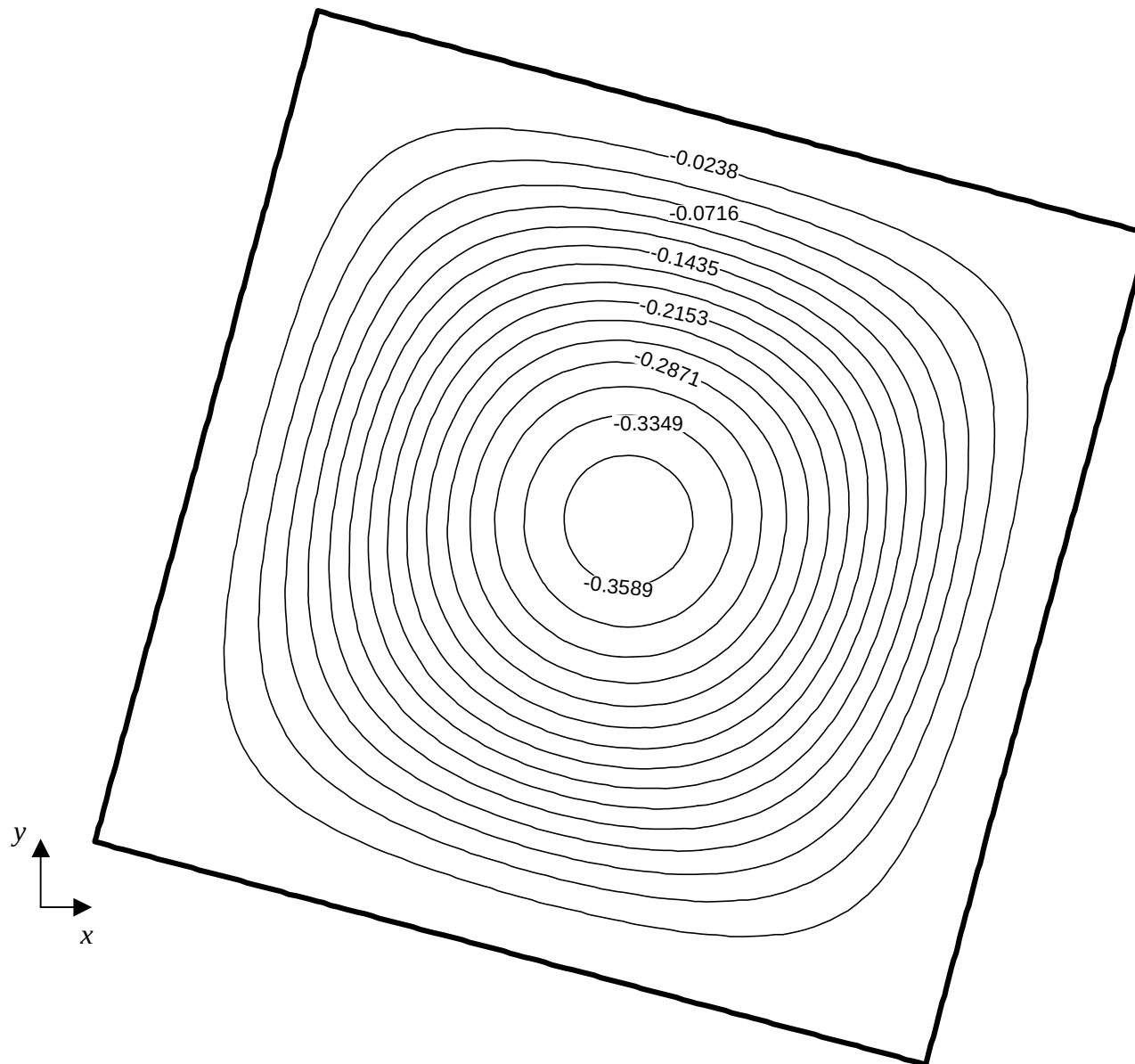


Figura 5.84- Isolinhas da função corrente para ângulo de inclinação de 75° e $t = 0.5$.

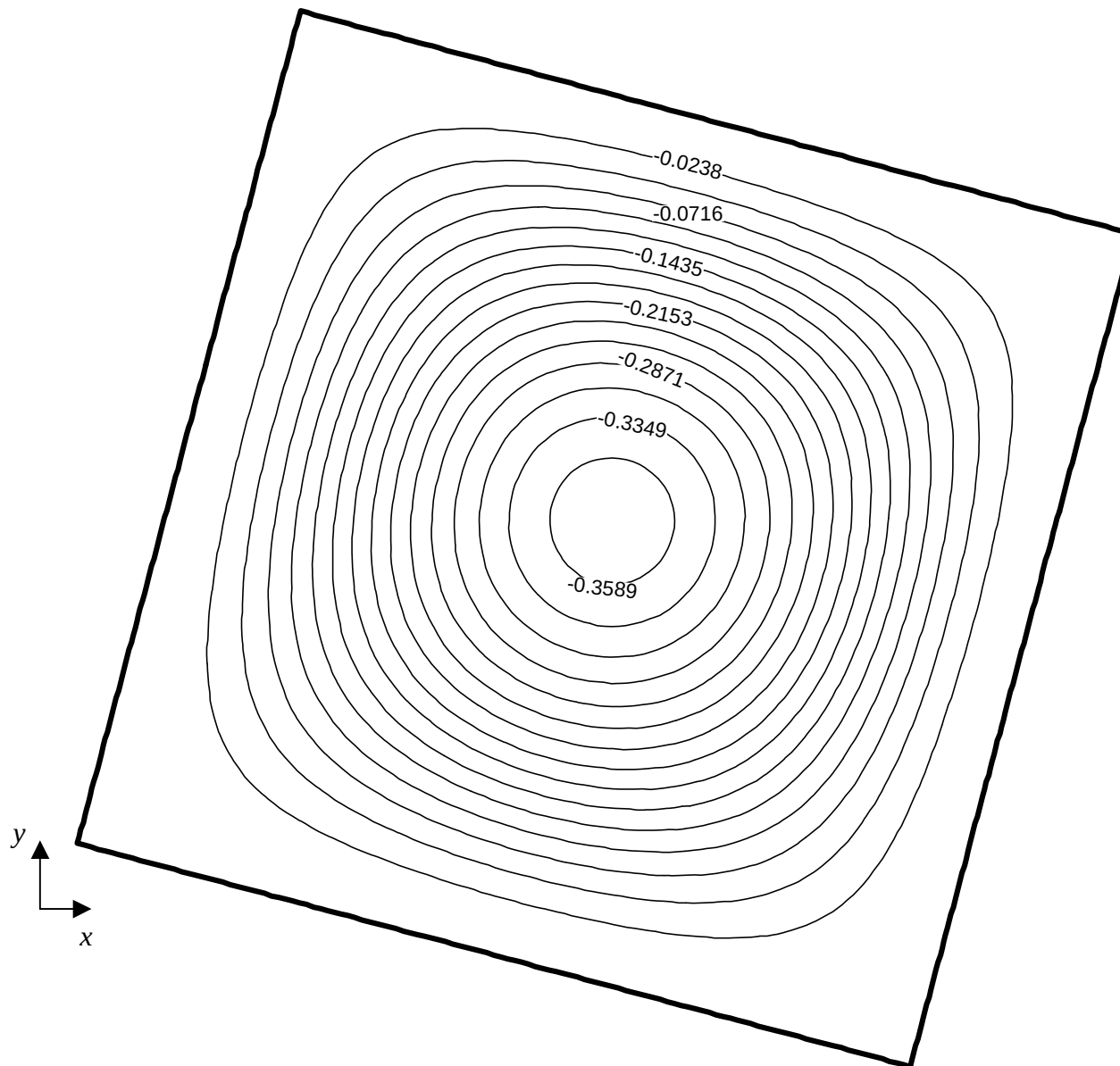


Figura 5.85- Isolinhas da função corrente para ângulo de inclinação de 75° e $t = 1.0$.

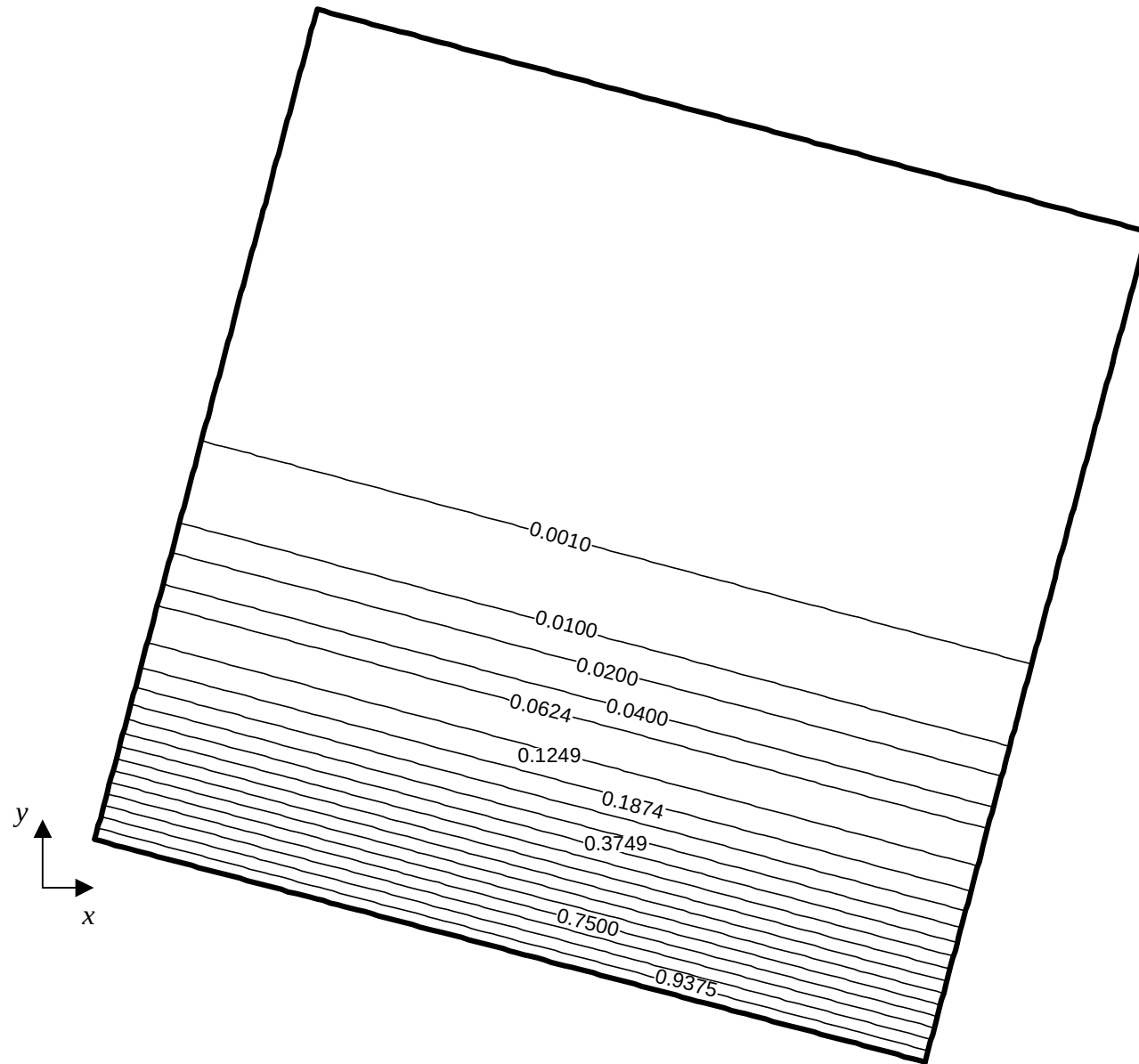


Figura 5.86- Isotermas para ângulo de inclinação de 75° e $t = 0.01$.

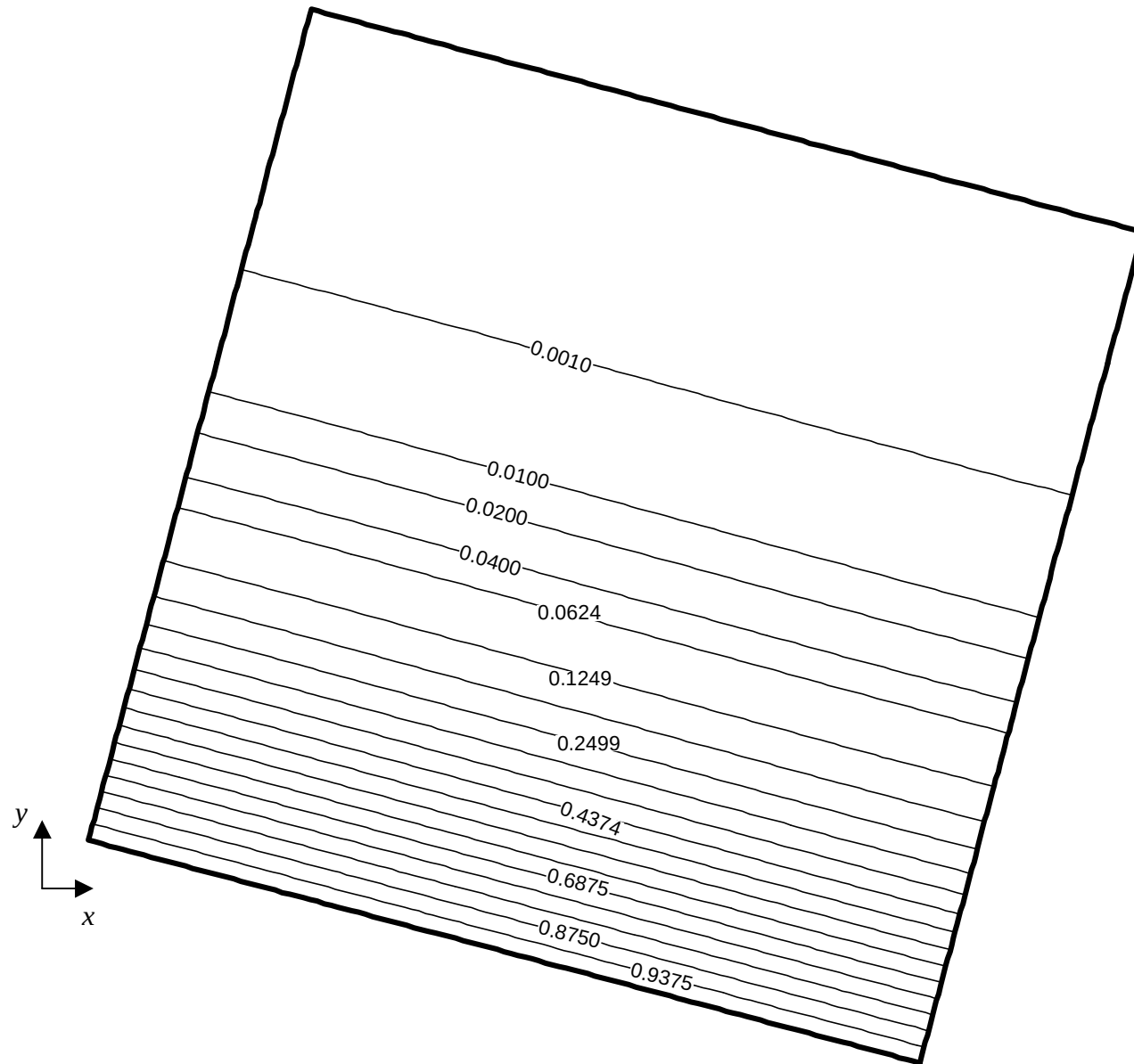


Figura 5.87- Isotermas para ângulo de inclinação de 75° e $t = 0.02$.

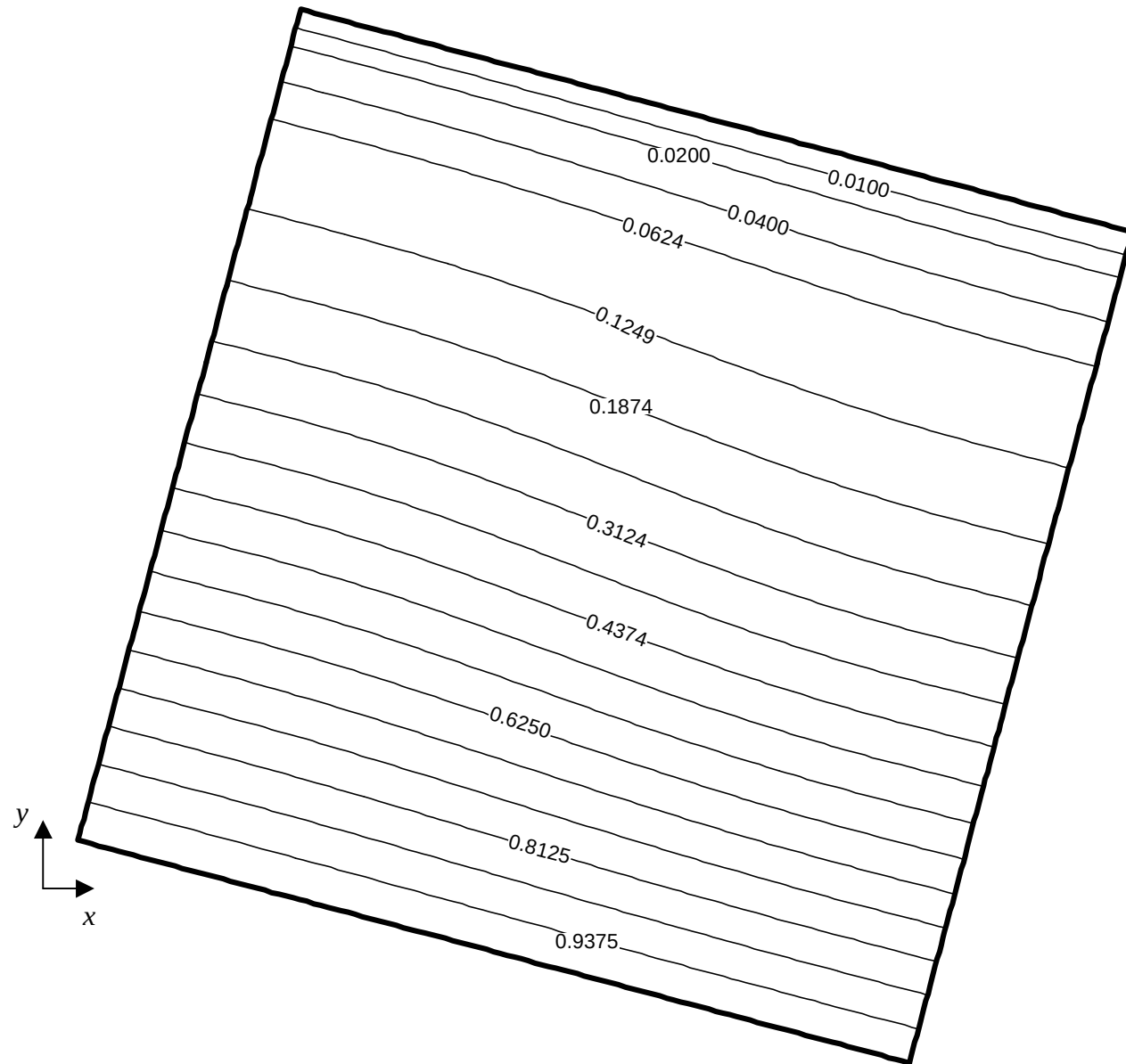


Figura 5.88- Isotermas para ângulo de inclinação de 75° e $t = 0.1$.

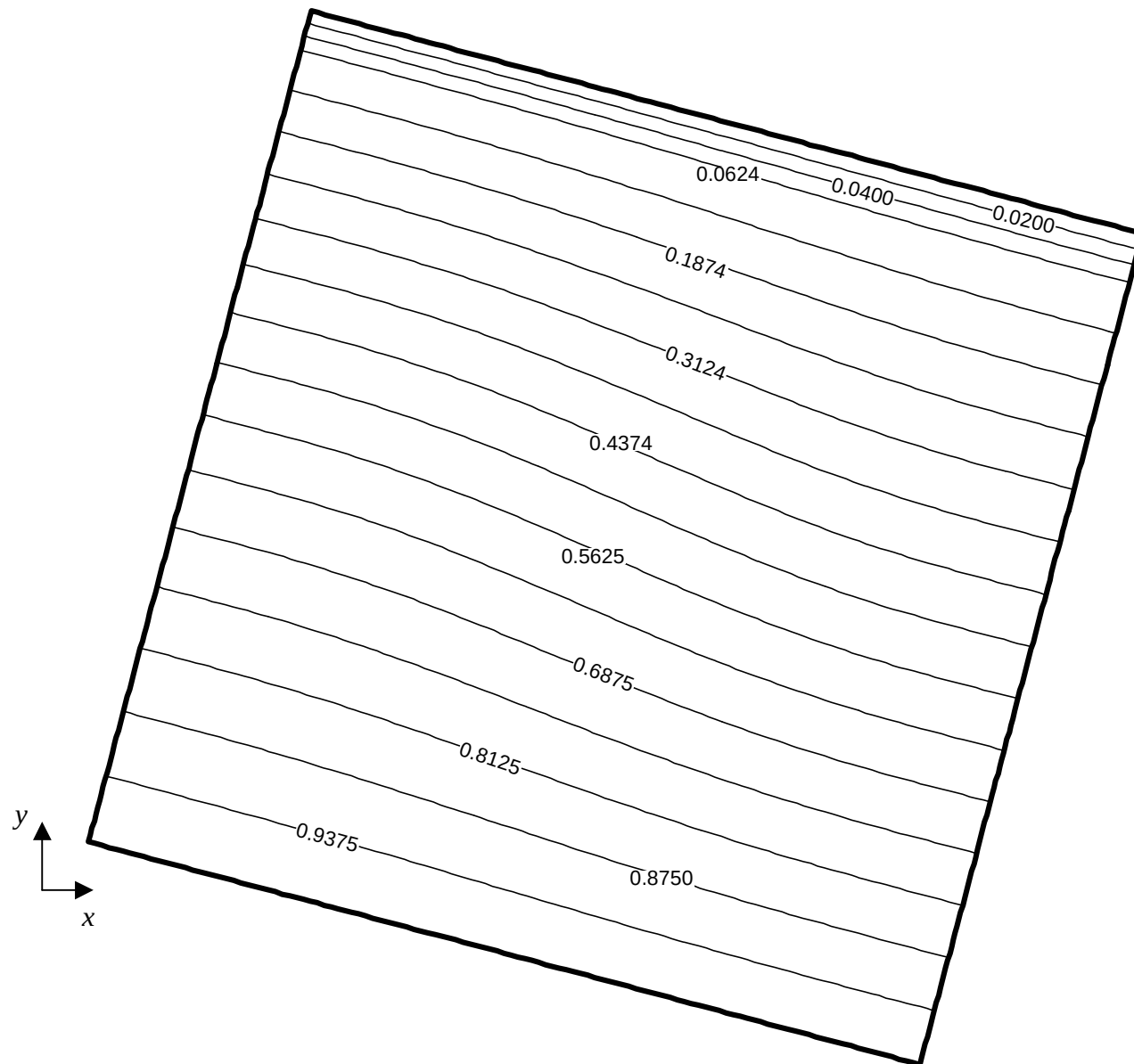


Figura 5.89- Isotermas para ângulo de inclinação de 75° e $t = 0.5$.

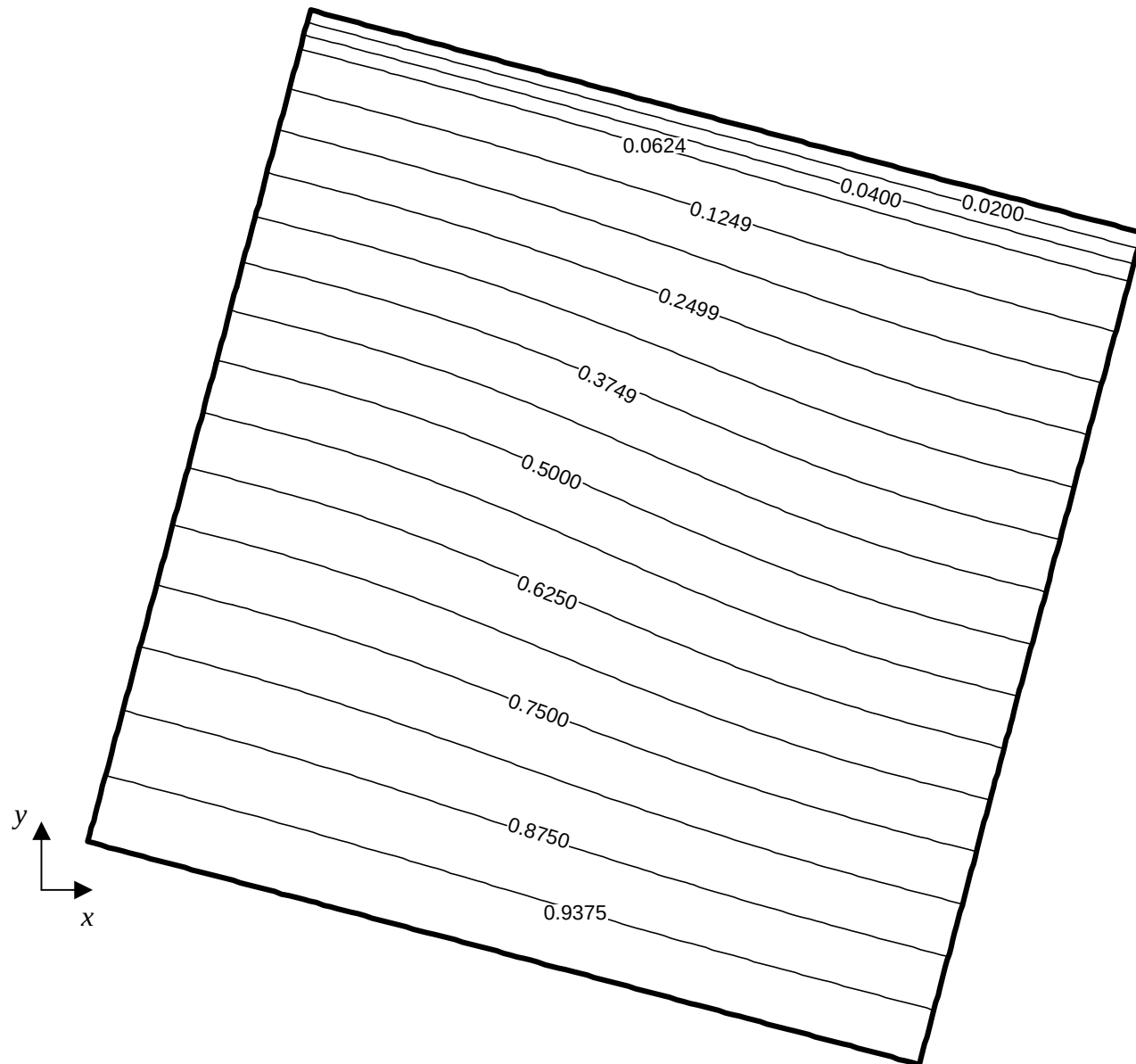


Figura 5.90- Isotermas para ângulo de inclinação de 75° e $t = 1.0$.

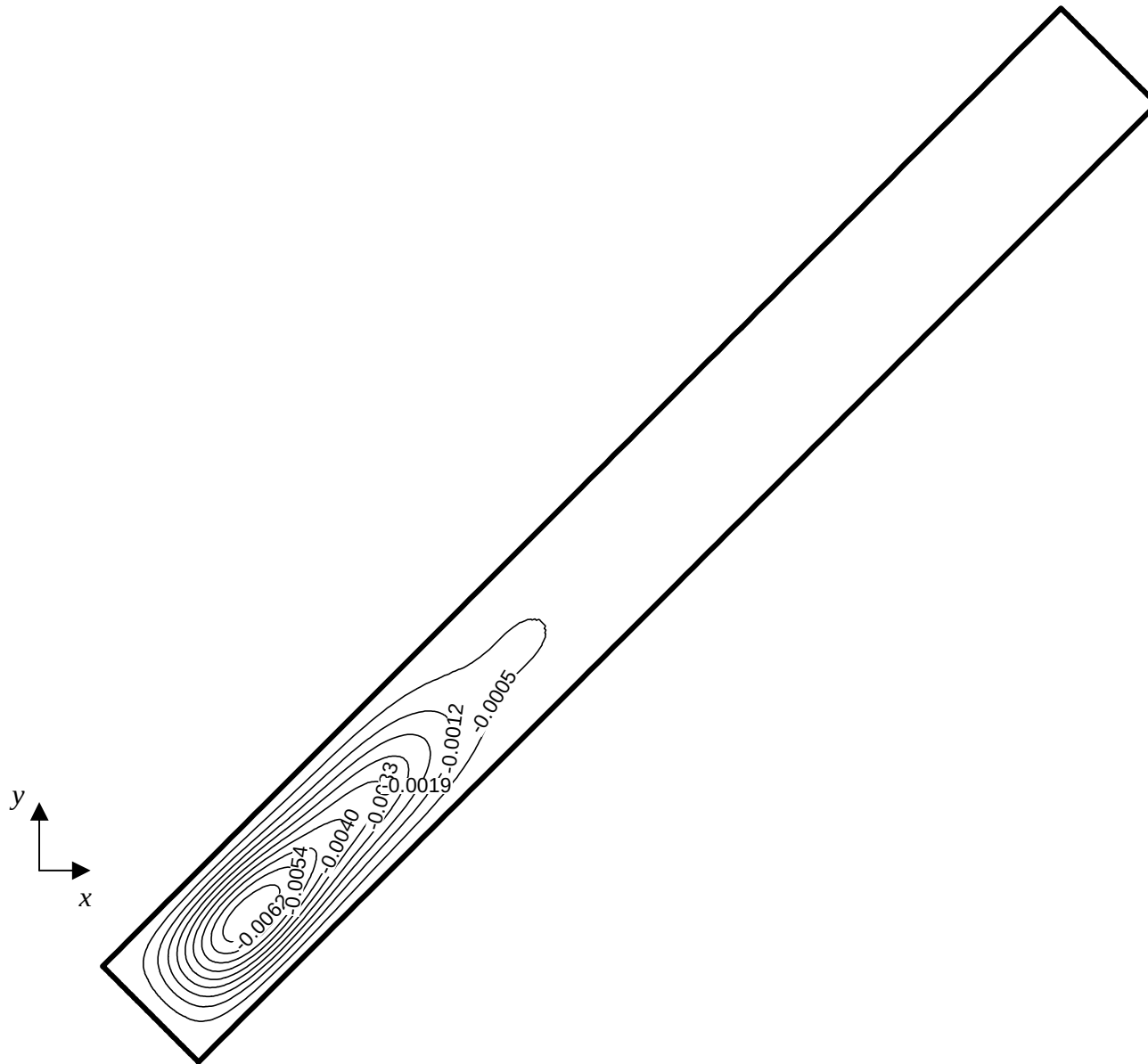


Figura 5.91- Isolinhas da função corrente para ângulo de inclinação de 45° , razão de aspecto 10 e $t = 0.01$.

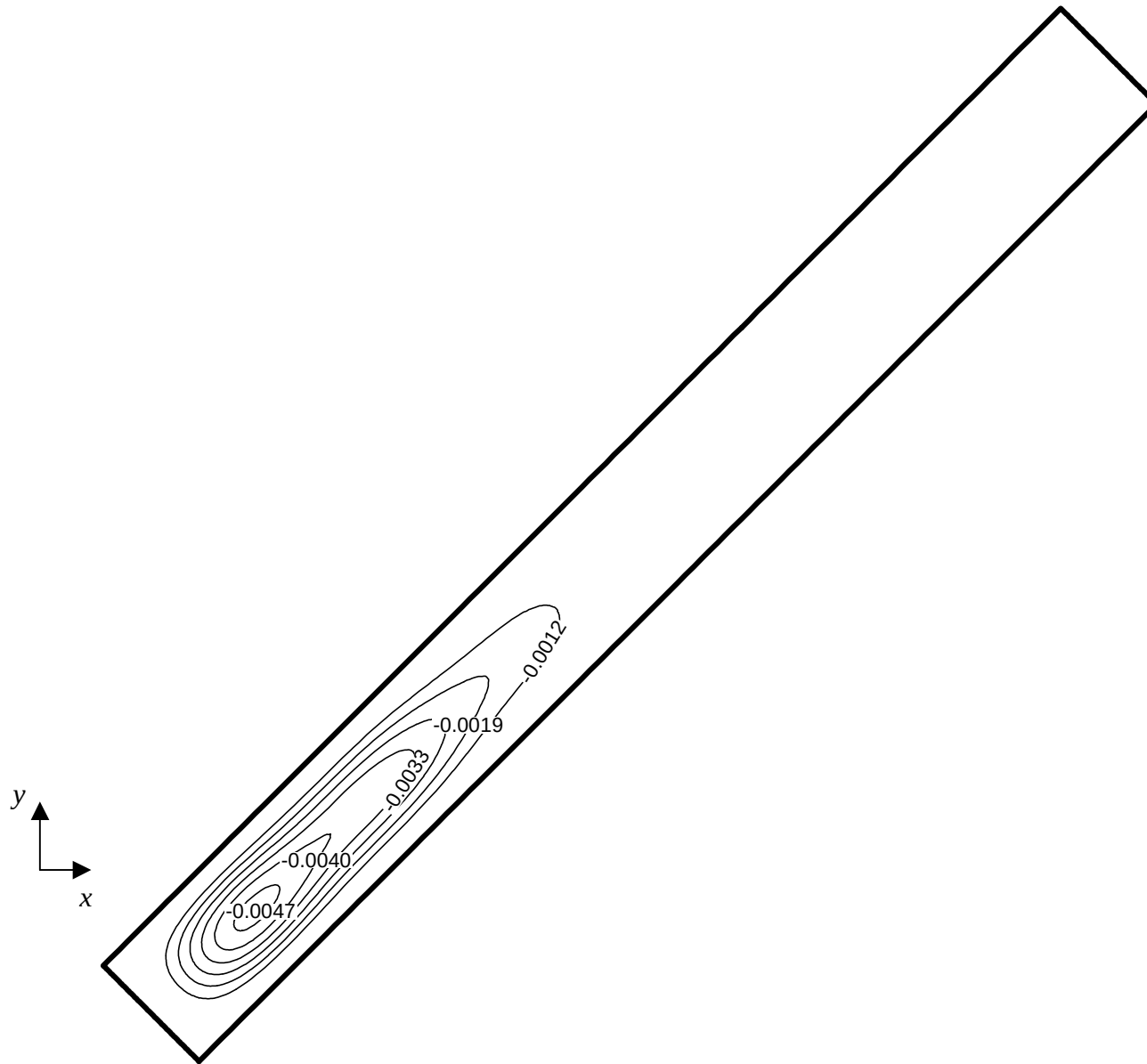


Figura 5.92- Isolinhas da função corrente para ângulo de inclinação de 45° , razão de aspecto 10 e $t = 0.02$.

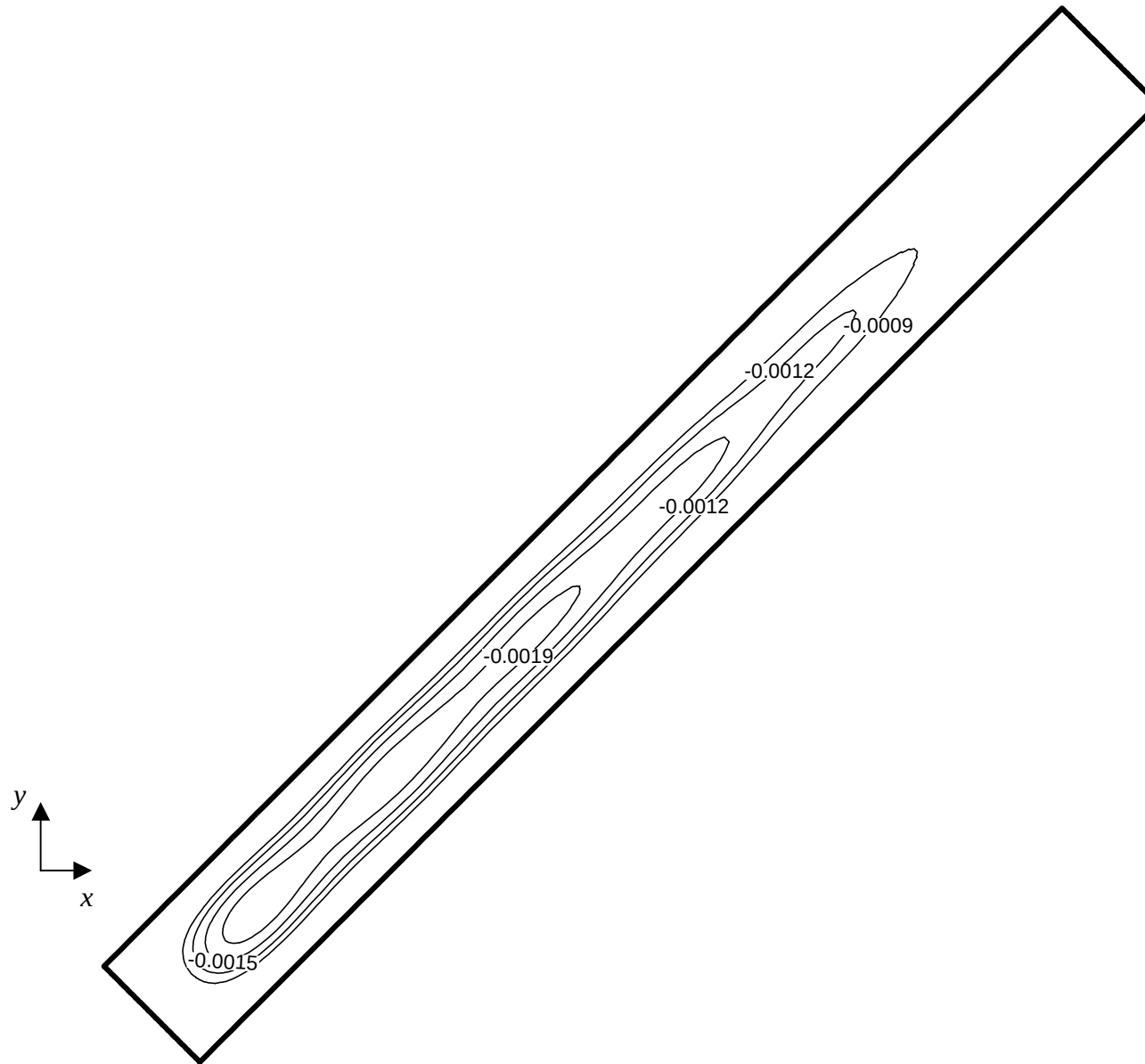


Figura 5.93- Isolinhas da função corrente para ângulo de inclinação de 45° , razão de aspecto 10 e $t = 0.1$.

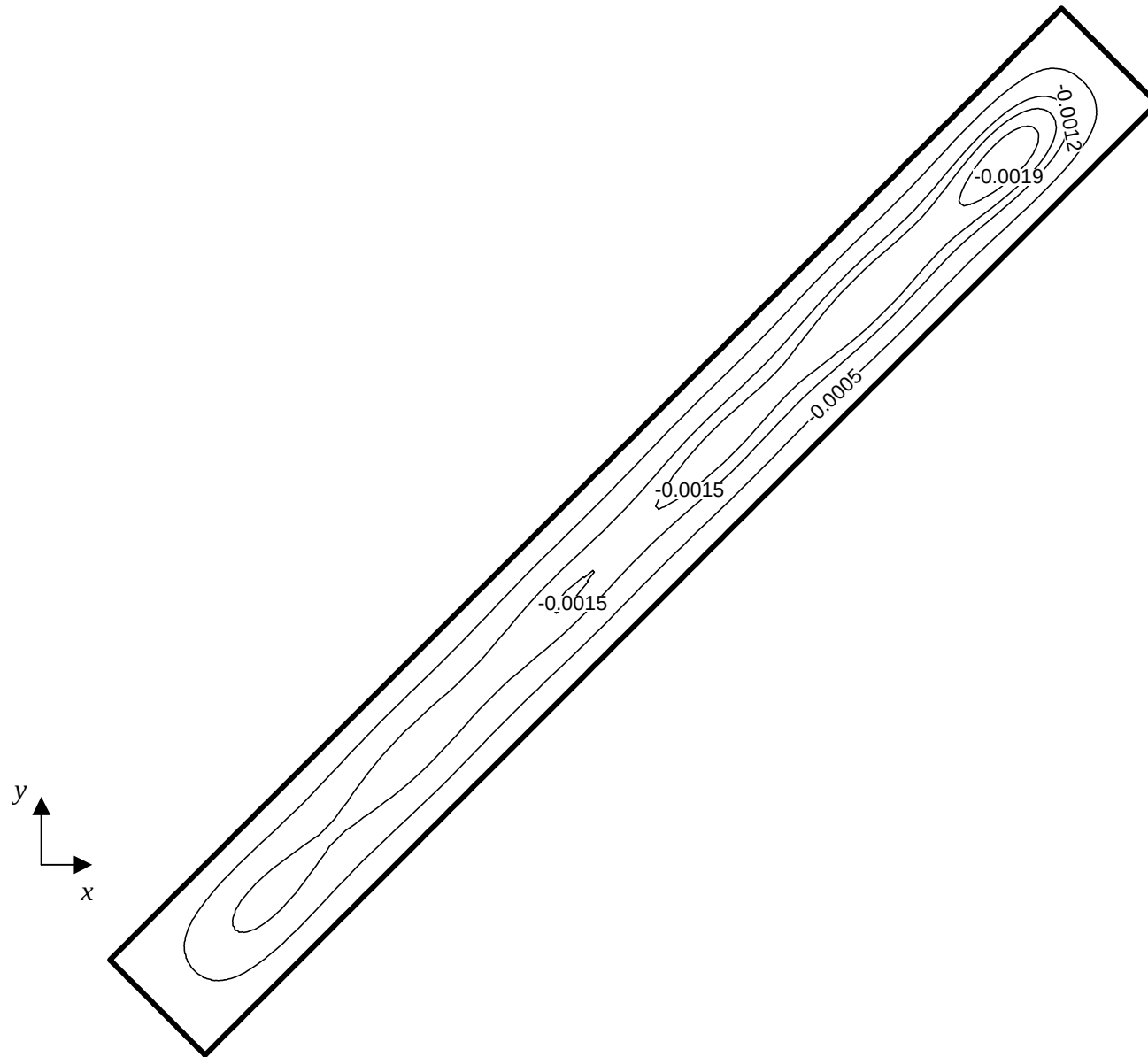


Figura 5.94- Isolinhas da função corrente para ângulo de inclinação de 45° , razão de aspecto 10 e $t = 0.5$.

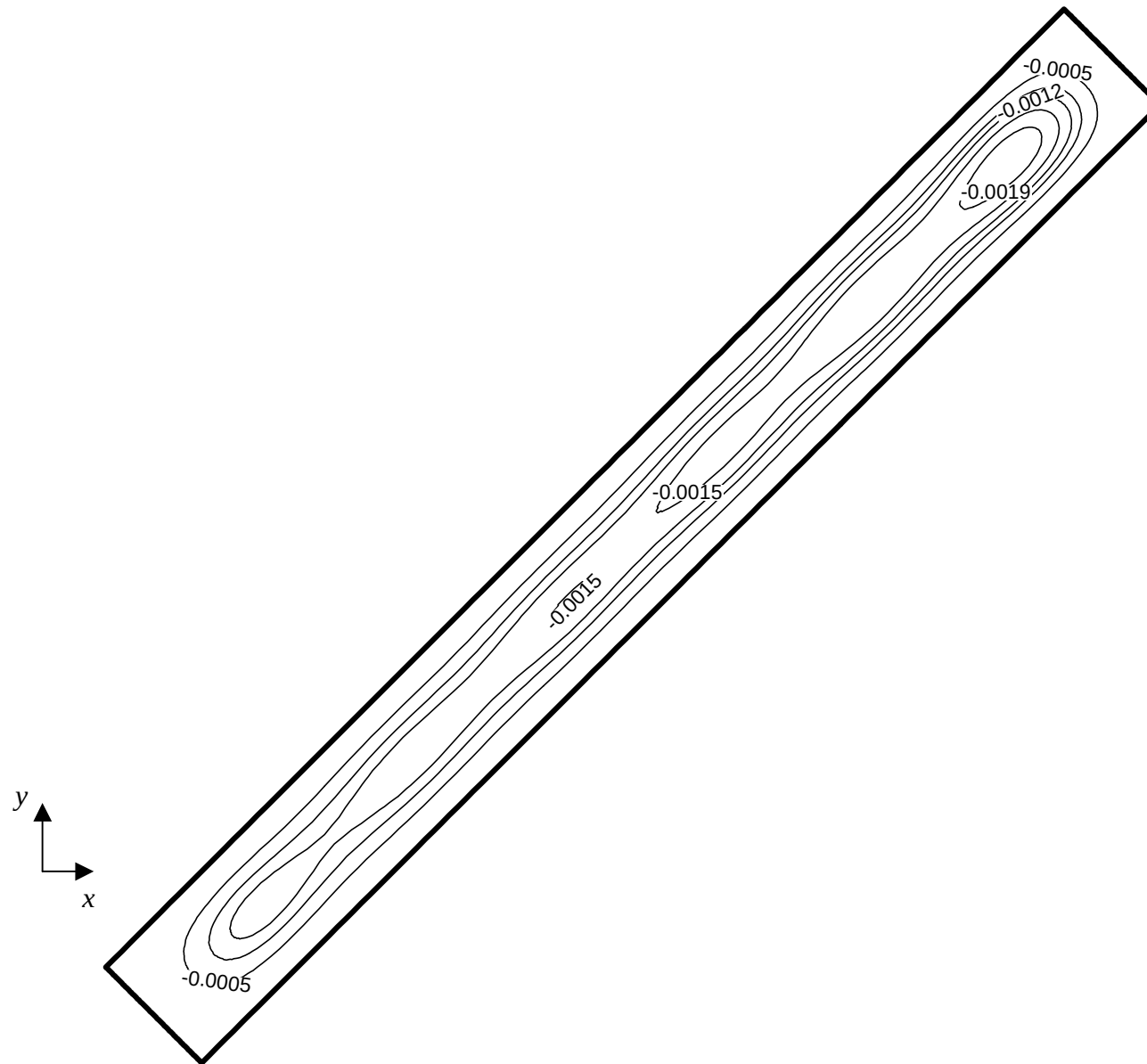


Figura 5.95- Isolinhas da função corrente para ângulo de inclinação de 45° , razão de aspecto 10 e $t = 1.0$.

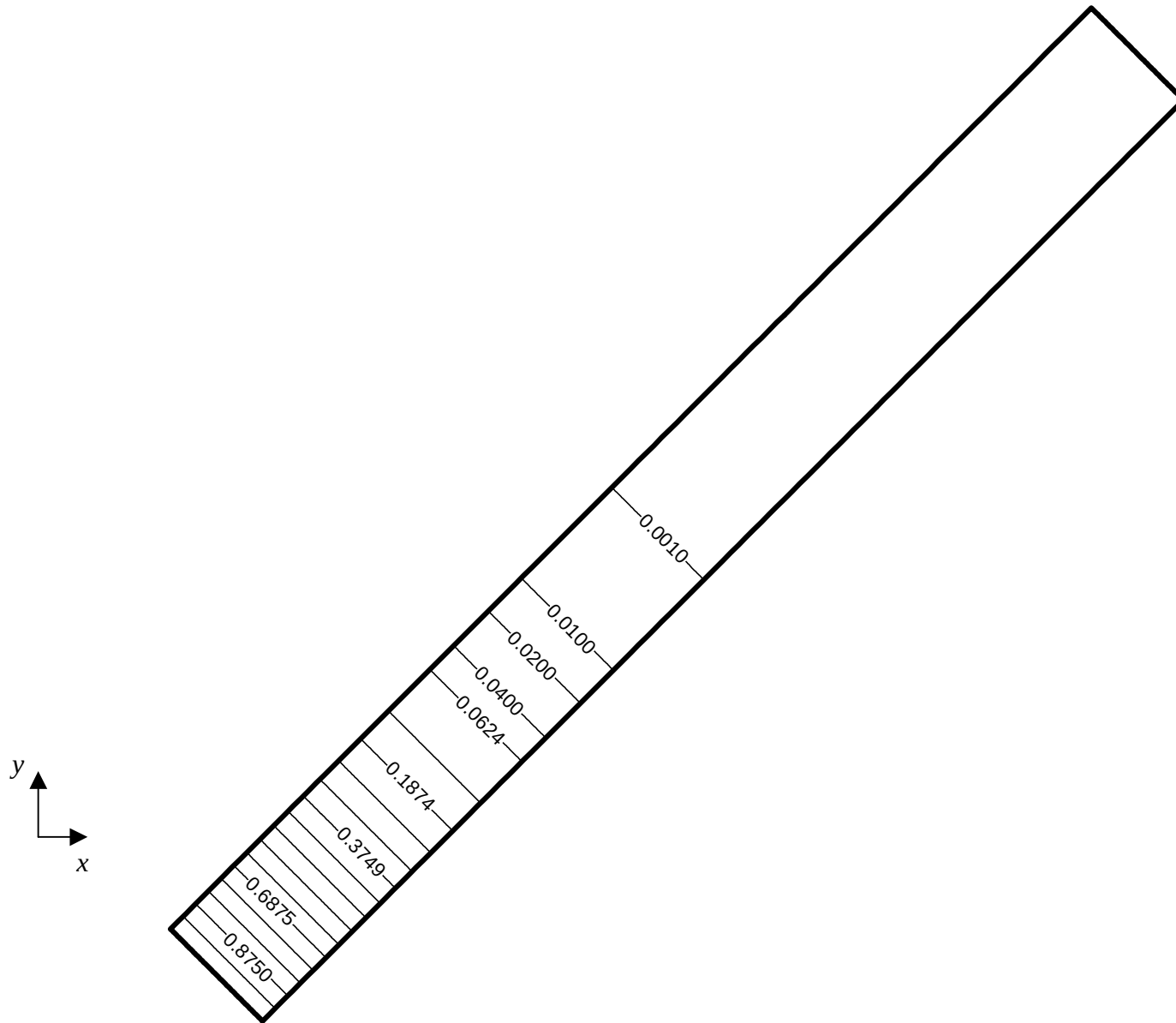


Figura 5.96- Isotermas para ângulo de inclinação de 45° , razão de aspecto 10 e $t = 0.01$.

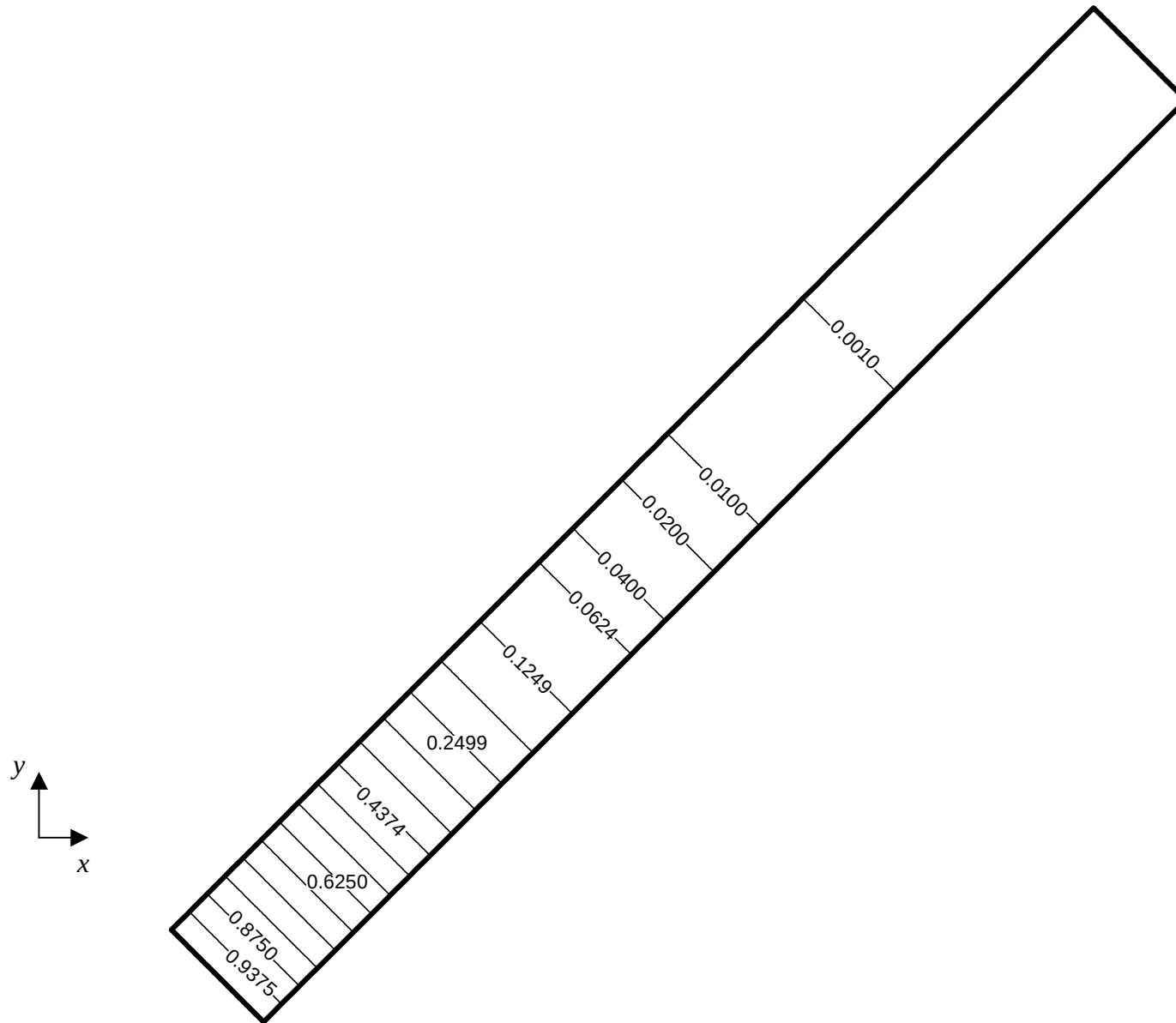


Figura 5.97- Isotermas para ângulo de inclinação de 45° , razão de aspecto 10 e $t = 0.02$.

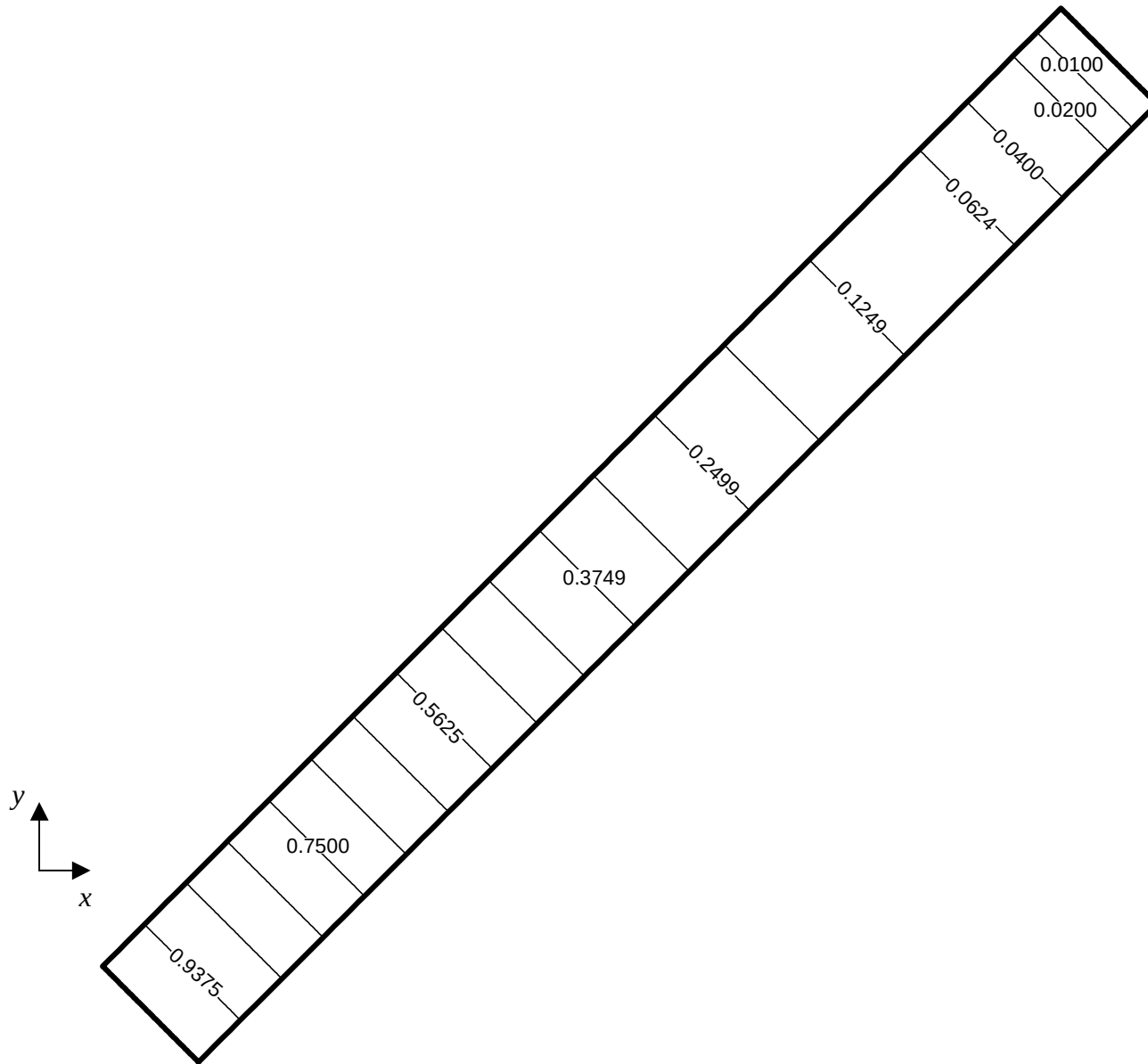


Figura 5.98- Isotermas para ângulo de inclinação de 45° , razão de aspecto 10 e $t = 0.1$.

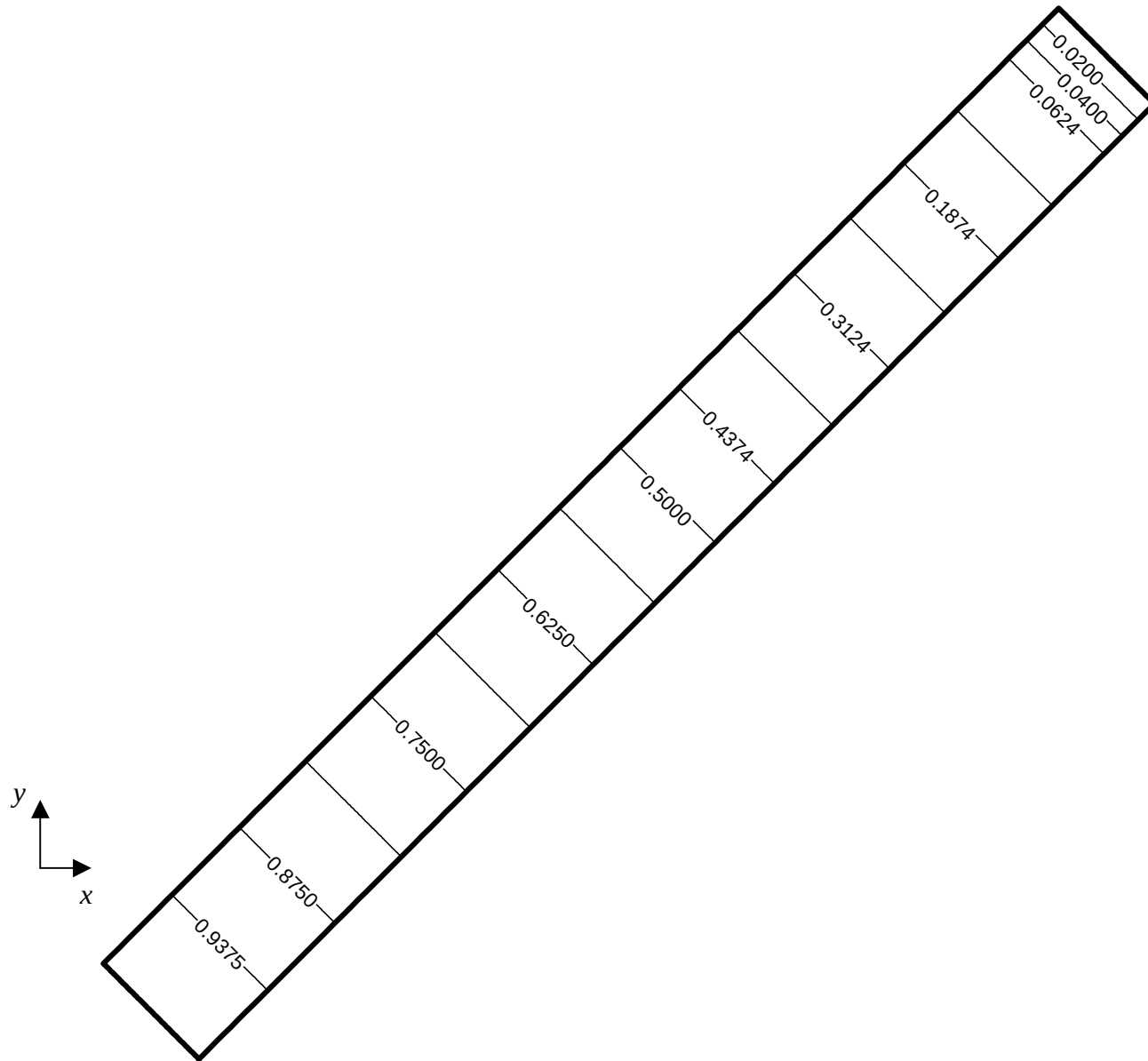


Figura 5.99- Isotermas para ângulo de inclinação de 45° , razão de aspecto 10 e $t = 0.5$.

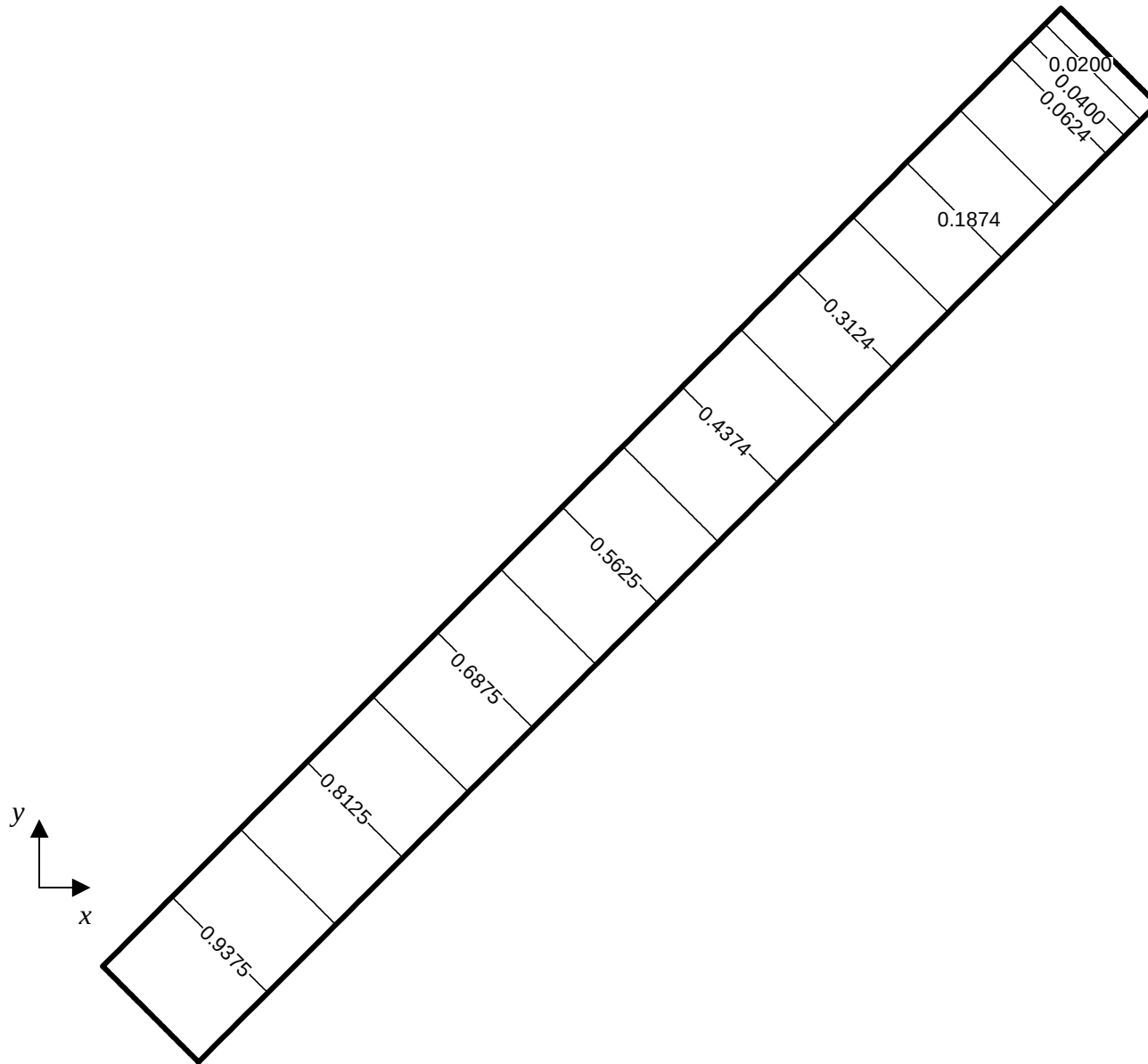


Figura 5.100- Isotermas para ângulo de inclinação de 45° , razão de aspecto 10 e $t = 1.0$.

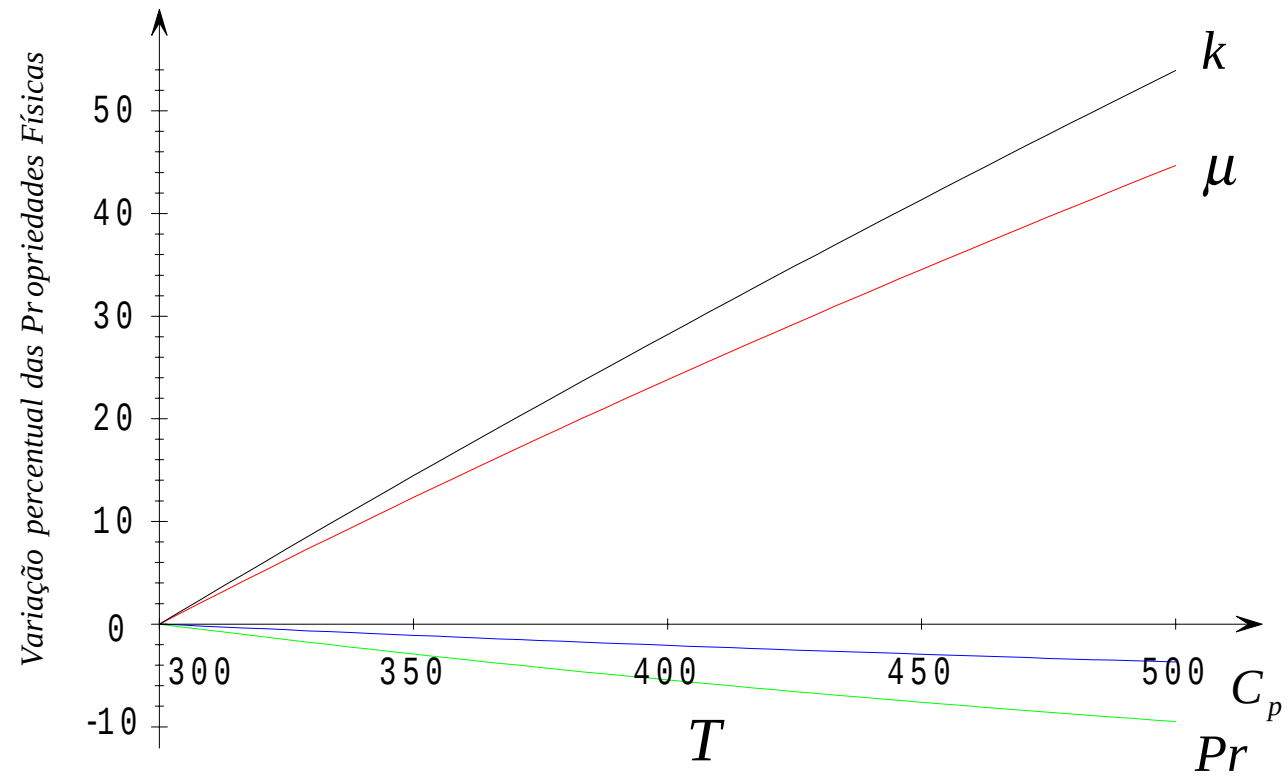


Figura 5.101- Variação percentual das propriedades físicas em função da temperatura.

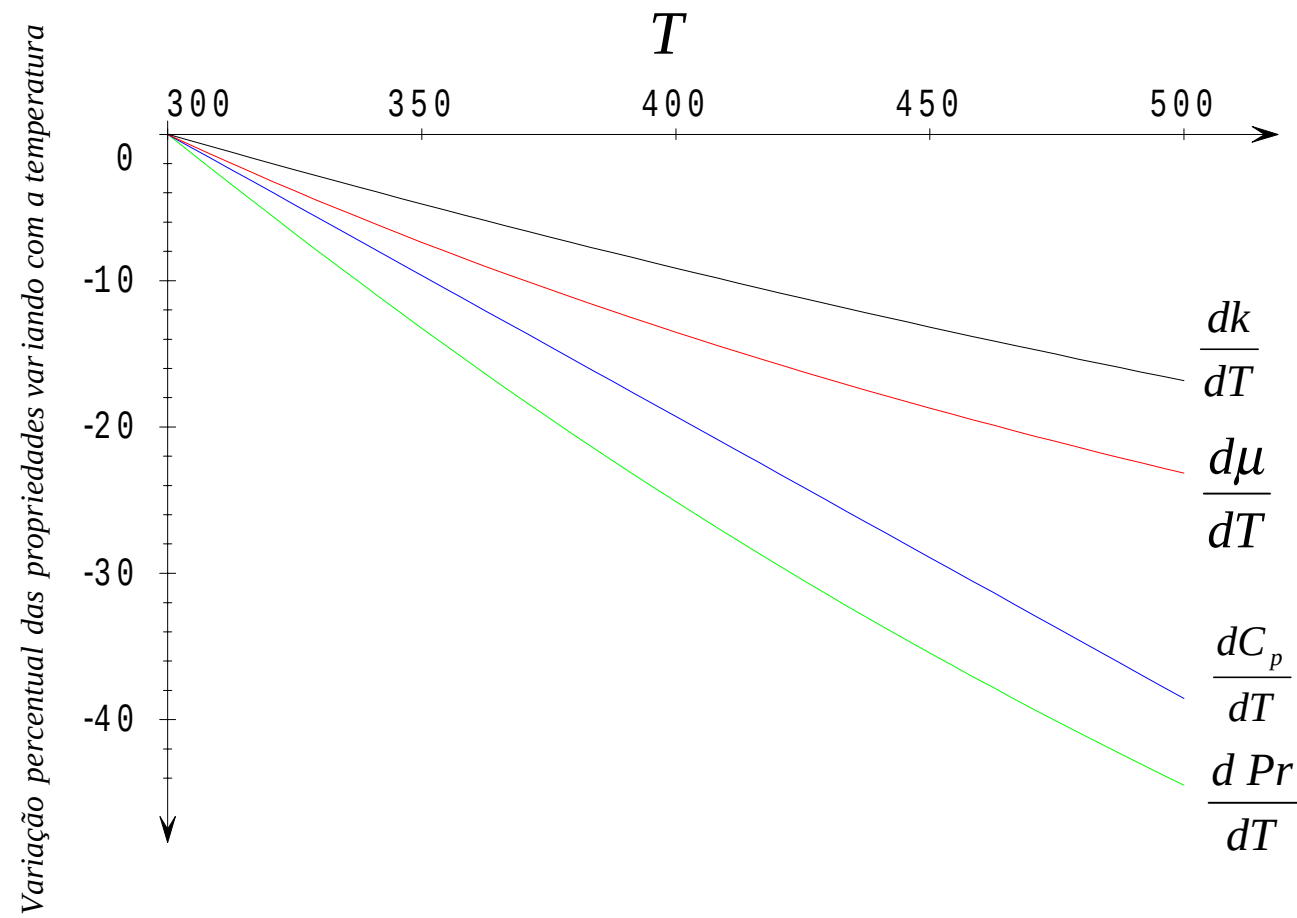


Figura 5.102- Variação percentual das propriedades físicas variando em função da temperatura.

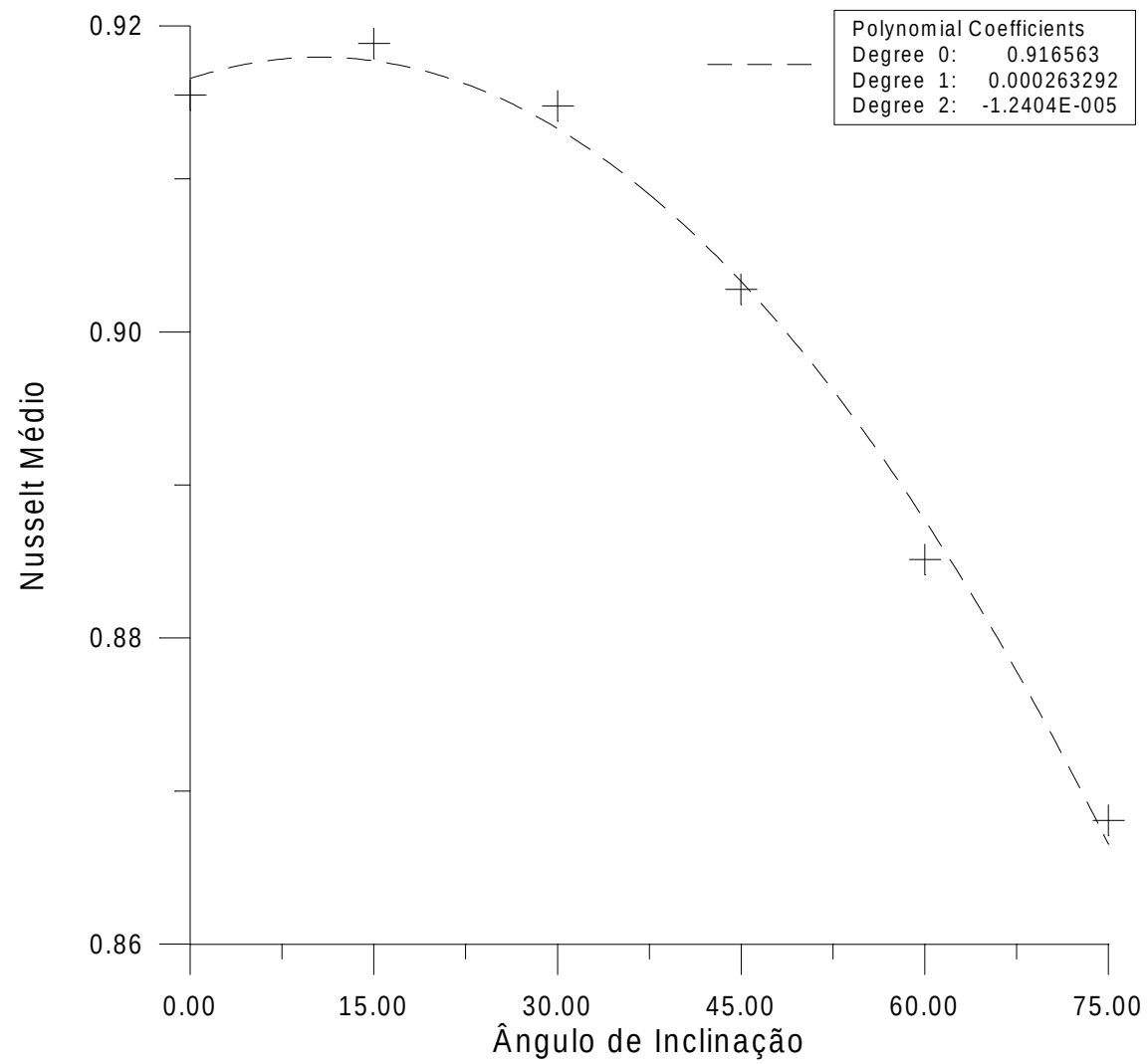


Figura 5.103- Nusselt Médio em função da variação do ângulo de inclinação.

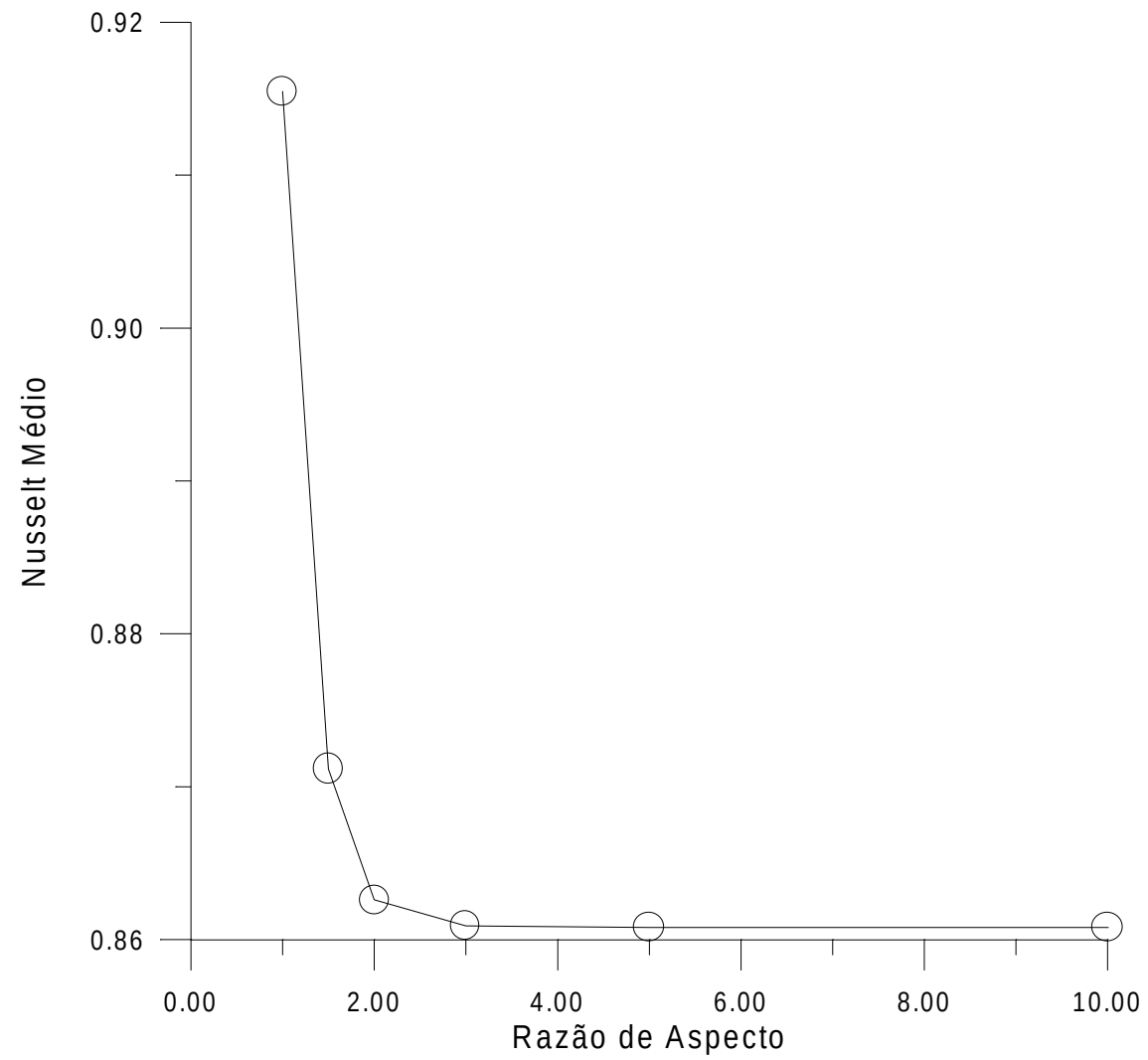


Figura 5.104- Nusselt Médio em função da variação da razão de aspecto.

Capítulo 6

Conclusões e Sugestões

Neste trabalho analisamos os efeitos da razão de aspecto e ângulo de inclinação na transferência de calor por convecção utilizando a Técnica da Transformada Integral Generalizada (*GITT*).

Foram estudados uma série de diferentes aspectos, realizaram-se simulações em cavidade quadrada e plana com as propriedades termofísicas do ar constantes, todas as propriedades variáveis e as propriedades variando individualmente, os resultados foram comparados em termos de função corrente e perfil de temperatura. Em um segundo momento, a partir de correlações conhecidas entre as propriedades e a temperatura, foi feito um estudo para determinação das propriedades mais sensíveis a variações de temperatura, e com isso, a validação do método numérico.

A seguir, foram variados a geometria da cavidade e sua inclinação realizando análises individuais para diferentes razões de aspecto e ângulos de inclinação, levantando perfis de temperatura e perfis de função corrente em tempos diferentes. Finalmente o ângulo de inclinação e a razão de aspecto foram acoplados para o caso mais crítico onde também se analisou a função corrente e a temperatura.

A partir dos resultados obtidos foi possível analisar a taxa de transferência de calor por convecção para propriedades constantes, variáveis e uma propriedade variando, tanto para valores médios como locais. Analisou-se percentualmente qual propriedade é mais sensível à variação de temperatura em determinadas faixas. Concluímos o trabalho com o levantamento de um perfil da intensidade de troca de calor convectivo em função do ângulo de inclinação e em função da razão de aspecto. Sumarizando os resultados obtidos neste estudo podemos concluir:

- A Condutividade Térmica e a Viscosidade Dinâmica são as propriedades mais sensíveis à variações da temperatura e influenciam tanto no fluxo de calor quanto nas temperaturas locais.
- Com o aumento da razão de aspecto, a taxa de transferência de calor por convecção diminui e a partir de um determinado valor torna-se constante.
- Com a variação do ângulo de inclinação é possível determinar um ângulo ótimo para a transferência de calor convectiva em cavidades.
- A Técnica da Transformada Integral Generalizada (*GITT*) foi capaz de obter sucesso do

ponto de vista físico do fenômeno, capturando recirculações em casos convectivos críticos do ponto de vista numérico.

- Foram estabelecidas correlações entre a taxa de transferência de calor por convecção, razão de aspecto e ângulo de inclinação da cavidade para propriedades variáveis.

Dando continuidade ao estudo, propõe-se as seguintes sugestões:

- Utilização da *GITT* para reproduzir o mesmo fenômeno em ambientes convectivos mais acentuados com maiores números de Rayleigh 10^4 e 10^5 .
- Realizar uma maior quantidade de simulações, acoplado a razão de aspecto e o ângulo de inclinação com o objetivo de se levantar uma correlação para a taxa de transferência de calor em função destas duas variáveis.

Bibliografia

Bejan, A., 1984, "Convection Heat Transfer", John Wiley & Sons, NY.

Bird, R. B.; Stewart, W. E. e Lightfoot, E. M., 1960, "Transport Phenomena", John Wiley & Sons, NY.

Boussinesq, J., "Theorie Analytique de la Chaleur", Gauthier-Villars, Paris, vol.2.

Chenoweth, D. R. e Paolucci, S., 1996, "Natural Convection in a Enclosed Vertical Air Layer with Large Horizontal Temperature Differences", Journal Fluid Mechanics, vol. 169, pp. 173-210.

Conte, S. D. e de Boor, C., 1981, "Elementary Numerical Analysis", MacGraw-Hill.

Cotta, R. M., 1994, "A Review of the Integral Transform Method in Nonlinear Heat and Fluid Flow Problems", Proceedings of the First Iberoamerican Congress of Mechanical Engineering, Madrid, Spain, vol. 1, pp. 35-64.

Figueira da Silva, E., 1994, "Transformação Integral das Equações de Camada Limite em Convecção Interna nas Formulações Função Corrente e Variáveis Primitivas", Dissertação de Mestrado, PEM/COPPE/UFRJ.

IMSL Library, 1989, "Math/Lib.", Houston, Texas.

Kakaç, S., Shah, R. K. e Aung, W., 1987, "Handbook of Single Phase Convective Transfer", John Wiley & Sons, NY.

Leal, M. A., 1996, "Convecção Natural em Cavidades para Regimes Permanente e Transiente - O Método de Transformação Integral", Tese de Doutorado, PEM/COPPE/UFRJ.

Leal, M. A. e Guerrero, J. S. P., "Benchmark Solutions to Steady Natural Convection in an Inclined Enclosure through Integral Transform Method".

Leonardi, E. e Reizes, J. A., 1979, "Natural Convection in Compressible Fluids with Variable Properties", Numerical Methods in Thermal Problems", vol. 1, pp. 1153-1162, Pineridge Press,

Swansea.

Leonardi, E. e Reizes, J. A., 1981, "Convective Flows in Closed Cavities with Variable Fluid Properties", Numerical Methods in Heat Transfer, John Wiley & Sons.

Leonardi, E. e Reizes, J. A., "Natural Convection Heat Transfer for Variable Properties Fluids using the Boussinesq Aproximation", Numerical Methods in Thermal Problems, vol. 2, pp. 978-989, Pineridge Press, Swansea.

Luikov, A. V., 1973, "Heat and Mass Transfer", Mir Publishers, Moscow.

Machado, H. A., 1998, "Técnica da Transformação Integral Generalizada".

Metais, B., Eckert, E. R. G., 1964, "Forced, Mixed and Free Convection Regimes", Journal of Heat Transfer - Trans. ASME, v. 36, pp. 295-296, Maio.

Mikhailov, M. D., 1972, "General Solutions of the Heat Equation in Finite Regions", International Journal Engineering Science, vol. 7, pp. 577-591.

Mikhailov, M. D. e Özisik, M. N., 1980, "An Alternative General Solution of the Steady-State Heat Diffusion Equation, International Journal Heat & Mass Transfer, vol. 23, pp. 609-612.

Mikhailov, M. D. e Özisik, M. N., 1984, "Unified Analysis and Solutions of Heat and Mass Diffusion", John Wiley, NY.

Ölçer, N. Y., 1964, "On the Theory of Conductive Heat Transfer in Finite Regions", International Journal of Heat & Mass Transfer, vol. 7, pp. 307-314.

Özisik, M. N., 1968, "Boundary Value Problems of Heat Conduction", International Textbook, Scranton, PA.

Özisik, M. N. e Murray, R. L., 1974, "On the Solution of Linear Diffusion Problems with Variable Boundary Condition Parameters", International Journal of Heat Transfer, 96C, pp. 48-51.

Özisik, M. N., 1980, "Heat Conduction", John Wiley, NY.

Showole, R. A. e Tarasuk, J. D., 1993, "Experimental and Numerical Studies of Natural Convection with Flow Separation in Upward-Facing Inclined Open Cavities", Transactions of the ASME, vol.

115, pp. 592-605.

Sissom, L. E. e Pitts, D. R., 1979, "Fenômenos de Transporte", Ed. Guanabara, RJ, pp 765.

Sneddon, I. N., 1972, "The Use of Integral Transforms", McGraw-Hill, NY.

Spradley, L. W. e Churchill, S. W., 1975, "Pressure and Buoyancy Driven Thermal Convection in a Rectangular Enclosure", Journal Fluid Mechanics, vol. 70, pp. 705-720.

Tranter, C. J., 1962, "Integral Transform in Mathematical Physics", John Wiley, NY.

Yu, S. T., Jiang, B. N., Wu, J. e Liu, N. S., 1996, "A div-curl-grad Formulation for Compressible Buoyancy Flows Solved by the Least Squares Finite Elements Methods", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 137, pp. 59-88.

Zamora, B. e Hernandez, J., 1997, "Influence of Variable Property Effects on Natural Convection Flows in Asymmetrically-Heated Vertical Channels", Int. Comm. Heat Mass Transfer", vol. 24, n. 8, pp. 1153-1162.

Zhang, X., 1992, "Natural Convection in an Inclined Water-Saturated Porous Cavity: The Duality of Solutions", Heat and Mass Transfer in Porous Media", vol. 216, pp. 47-54.

Zhong, Z. Y.; Yang, K. T. e Lloyd, J. R., 1985, "Variable Property Effects in Laminar Natural Convection in a Square Enclosure", Journal of Heat Transfer, vol. 107, pp. 103-138.