

Universidade Federal de Uberlândia

Instituto de Ciências Exatas e Naturais do Pontal

Curso de Matemática

Trabalho de Conclusão de Curso

**Análise de Sensibilidade Aplicada em
um Problema da Dieta**

por

Beatriz Akiria de Assis Quaresma [†]

Licenciatura em Matemática - Ituiutaba - MG

Orientadora: Profa. Dra. Milena Almeida Leite Brandão

Análise de Sensibilidade Aplicada em um Problema da Dieta

Este exemplar corresponde à redação final da Monografia devidamente corrigida e defendida por **Beatriz Akiria de Assis Quaresma** e aprovada pela comissão julgadora.

Ituiutaba, 03 de Novembro de 2021.



Profa. Dra. Milena Almeida Leite Brandão

Banca examinadora:

Profa. Dra. Milena Almeida
Leite Brandão (Orientadora).

Prof. Dr. José Laércio Dorício.

Prof. Dr. Moisés Rodrigues Cirilo
do Monte.

Monografia apresentada ao Instituto de Ciências Exatas e Naturais, UFU, como requisito parcial para obtenção do título de **Licenciatura em Matemática**.

A minha Orientadora

Profa. Dra. Milena Almeida

Leite Brandão

AGRADECIMENTOS

A **Deus** por ter me dado tudo.

À memória de meu pai, **Afonso Caetano Quaresma**, que foi o melhor pai que alguém poderia ter e por sorte eu fui escolhida para ser sua filha.

À minha mãe, **Sandra de Assis**, por todo amor, incentivo e por ser a minha base, juntamente com o meu pai.

Agradeço a meus irmãos **Patricia Aparecida, Helbert Patric, Nilson Henrique, Wezil Endil e Weuller Eric** por estarem comigo em todos os momentos da minha vida.

Obrigada as minhas **sobrinhas, cunhados, primas, tias e avós** por entenderem a minha ausência e sempre me apoiarem.

Agradeço a meus **amigos**, especialmente a **Brunna Gonçalves, Edeli Barbosa, Jordi Faria, Pedro Rangel, Rayla Cristina, Thaisa Victória**, e os integrantes do grupo “**Sem rumo**” no *WhatsApp* por sempre estarem ao meu lado, seja nos momentos difíceis ou alegres. Aos meus **colegas** de curso, graduação e cidade que fizeram cada momento leve e inesquecível durante toda minha trajetória.

À minha orientadora, **Profa. Dra. Milena Almeida Leite Brandão**, por todos ensinamentos, paciência, dedicação e incentivos.

Ao **Prof. Dr. José Laércio Dorício** e **Prof. Dr. Moisés Rodrigues Cirilo do Monte** por comporem minha banca avaliadora e enriquecer o meu trabalho, e a **todos os professores** do curso de Matemática do Instituto de Ciências Exatas e Naturais do Pontal (ICENP) da Universidade Federal de Uberlândia (UFU) por compartilharem comigo conhecimentos tão importantes, não apenas de cunho acadêmico, mas para minha

formação pessoal, cidadã e profissional. Em especial agradeço a **Profa. Dra. Evaneide Alves Carneiro** e **Prof. Dr. Moisés Rodrigues Cirilo do Monte** por terem me orientado em um projetos de pesquisas que contribuíram imensamente na minha formação matemática.

Aos integrantes do **Programa de Educação Tutorial (PET) Matemática Pontal** por todos os aprendizados e vivências, que contribuíram para meu crescimento pessoal, acadêmico e profissional. Agradeço especialmente ao **Prof. Dr. Marcelo Gonçalves Oliveira Vieira**, não somente pela tutoria do PET Matemática Pontal, mas por todos os ensinamentos que perpassaram o ambiente universitário.

À **Universidade Federal de Uberlândia**, seu corpo docente, direção e administração, que propiciaram meios de tornar o meu sonho possível.

A todos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação, o meu muito obrigada.

RESUMO

Após encontrar a solução ótima de um problema de programação linear a Análise de Sensibilidade permite estudar os impactos causados na solução ótima por modificações realizadas nos parâmetros iniciais. Por exemplo, se um parâmetro for alterado, a Análise de Sensibilidade permite determinar a nova solução ótima sem resolver o problema novamente e permite determinar quais as mudanças nos coeficientes não alterarão a solução ótima. Devido a especificidade dos problemas de formulação de dieta, que é organizar uma nutrição saudável e pagar o menor custo por ela, eles se tornam bons candidatos para estudar o impacto das mudanças sobre o valor ótimo da função objetivo. Por exemplo, se o preço de algum alimento aumentar ou diminuir o que acontece com o custo da dieta? Quanto o preço de cada alimento pode ser alterado sem que o custo da dieta se altere? Essas perguntas serão respondidas nesta pesquisa. Por isso, o objetivo deste trabalho é realizar a Análise de Sensibilidade em um problema da dieta analisando os valores dos coeficientes das variáveis e propor novos modelos de dieta com custo mínimo. As análises são realizadas com o auxílio do software Solver da Microsoft Excel. A metodologia utilizada ao longo do trabalho é a abordagem qualitativa com base na pesquisa bibliográfica, com isso foi realizado um estudo de pesquisas anteriores, por meio de livros, artigos, teses, entre outros. A pesquisa contribuirá para a formação acadêmica da graduanda, leitores e futuros pesquisadores em Matemática.

Palavras-chave: Análise de Sensibilidade; Otimização; Programação Linear; Simplex; Solver Microsoft Excel.

LISTA DE FIGURAS

1.1	Região viável das variáveis de não negatividade.	12
1.2	Região viável.	13
1.3	Solução ótima em um problema de minimização.	13
1.4	Solução ótima em um problema de maximização.	14
1.5	Região viável limitada e com infinitas soluções ótimas.	15
1.6	Região viável ilimitada e sem solução ótima.	15
1.7	Região viável ilimitada e com solução ótima única.	16
1.8	Região viável ilimitada e com infinitas soluções ótimas.	16
1.9	Problema inviável.	17
1.10	Primeiro Quadro Simplex.	23
1.11	Primeira Iteração no Quadro Simplex.	24
2.1	Dados fornecidos para a determinação do mix de produção.	32
2.2	Primeiro quadro do Simplex - Primeira fase.	33
2.3	1ª Iteração no Quadro Simplex - Primeira fase.	33
2.4	2ª Iteração no Quadro Simplex.	33
2.5	3ª Iteração no Quadro Simplex.	34
2.6	Quadro ótimo do Simplex.	34
2.7	Solução gráfica do Exemplo (2.1) obtida no GeoGebra.	35
2.8	Soluções do Exemplo 2.1 obtidas no Matlab.	35
2.9	Dados fornecidos.	36
2.10	Quadro Simplex do Exemplo 2.2.	36

2.11	Quadro Simplex Ótimo do Exemplo 2.2.	37
2.12	Resolução gráfica do Exemplo 2.2.	37
2.13	Resumo dos dados fornecidos do Exemplo 2.3.	40
2.14	Primeiro quadro Simplex do problema primal do Exemplo 2.3.	40
2.15	Quadro Simplex Ótimo do problema do Exemplo 2.3.	41
2.16	Solução gráfica do Exemplo 2.3.	41
2.17	Solução obtida no Matlab para o Exemplo 2.3 após sofrer alteração.	42
2.18	Dados fornecidos pela metalúrgica para o Exemplo 2.4.	44
2.19	Primeiro quadro Simplex do Exemplo 2.4.	44
2.20	Quadro Simplex Ótimo do Exemplo 2.4.	44
2.21	Solução gráfica do Exemplo 2.4.	45
2.22	Quadro Simplex do Exemplo 2.4 após alteração.	46
2.23	Quadro Simplex Ótimo do Exemplo 2.4 após alteração.	46
2.24	Novo Quadro Simplex para o Exemplo 2.5.	47
2.25	Quadro Simplex Ótimo para o Exemplo 2.5.	47
2.26	Quadro Simplex Ótimo do Exemplo 2.6.	49
2.27	Solução Gráfica do Exemplo 2.6.	49
2.28	Quadro Simplex Ótimo do Exemplo (2.6).	51
2.29	Quadro Simplex Final do Exemplo (2.6).	51
2.30	Solução gráfica do Exemplo (2.6).	51
2.31	Solução Gráfica do PPL.	52
2.32	Solução Gráfica do Novo PPL - Caso <i>i</i>	53
2.33	Solução Gráfica do Novo PPL - Caso <i>ii</i>	54
2.34	Solução Gráfica do Novo PPL - Caso <i>iii</i>	54
2.35	Solução Gráfica do Novo PPL - Caso <i>iv</i>	55
2.36	Dados fornecidos pela empresa para o Exemplo 2.8.	55
2.37	Quadro Simplex Ótimo do Exemplo 2.8.	56
2.38	Solução Gráfica do Exemplo 2.8.	56
2.39	Novo Quadro Simplex do Exemplo 2.8.	57
2.40	Quadro Simplex do Exemplo 2.8 após alteração.	57
2.41	Quadro Simplex Ótimo do Exemplo 2.8 após alteração.	57
2.42	Solução Gráfica do Exemplo 2.8 após alteração.	58
2.43	Quadro Simplex Ótimo do Exemplo 2.9.	58

2.44	Solução Gráfica do Exemplo 2.9.	59
2.45	Primeiro quadro de resumo das alterações no PPL.	60
2.46	Segundo quadro de resumo das alterações no PPL.	60
3.1	Passo 1 para ativar o Solver.	62
3.2	Passo 2 para ativar o Solver.	63
3.3	Passo 3 para ativar o Solver.	63
3.4	Passo 4 - Localização do Solver na barra de ferramentas do Excel.	64
3.5	Inserindo o PPL 3.1 na planilha no Excel.	64
3.6	Inserindo a equação da função objetivo do PPL (3.1) na planilha no Excel.	65
3.7	Inserindo o lado esquerdo das restrições do PPL (3.1) na planilha no Excel.	65
3.8	Planilha com a inserção de todos dados do PPL (3.1) na planilha no Excel.	65
3.9	Entrada de dados do PPL (3.1) no Solver - Parte 1.	66
3.10	Entrada de dados do PPL (3.1) no Solver - Parte 2.	67
3.11	Entrada de dados do PPL (3.1) no Solver - Parte 3.	67
3.12	Resultados do Solver para o PPL (3.1).	68
3.13	Relatório de respostas do PPL (3.1).	69
3.14	Relatório de limites do PPL (3.1).	70
3.15	Relatório de sensibilidade para o PPL (3.1).	71
3.16	Valor Nutricional e Preço.	74
3.17	Solução ótima do problema da dieta.	76
3.18	Relatório de sensibilidade referente aos coeficientes das variáveis do problema da dieta original.	77
3.19	Solução do problema da dieta com redução dos custos de alguns alimentos.	79
3.20	Solução do problema da dieta com redução dos custos e inclusão de uma restrição.	80
3.21	Solução do problema da dieta com redução dos custos e inclusão de duas restrições.	80

SUMÁRIO

Agradecimentos	i
Resumo	iii
Objetivo	4
Estrutura dos Tópicos Apresentados	5
1 Definições e Resultados Preliminares	6
1.1 Programação Linear	6
1.1.1 Problemas de Programação Linear	6
1.1.2 Escrevendo os problemas na forma padrão	9
1.1.3 Solução Gráfica	11
1.1.4 Solução Básica e PPL na Forma Básica	16
1.1.5 Método Simplex	19
1.1.6 Método das Duas Fases	24
1.1.7 Dualidade	25
2 Análise de Sensibilidade	28
2.1 Compreensão das notações	28
2.2 Alteração no coeficiente da função objetivo	31
2.3 Alteração dos termos independentes das restrições	38
2.4 Alteração dos coeficientes da matriz das restrições	42
2.5 Alteração em variável	48
2.5.1 Inclusão de variável	48

2.5.2	Eliminação de variável	50
2.6	Alteração na restrição	52
2.6.1	Inclusão de restrição	52
2.6.2	Eliminação de restrição	57
2.7	Resumo de alterações no PPL	59
3	Aplicação em um Problema da Dieta	61
3.1	Solver	61
3.1.1	Ativação do Solver	62
3.1.2	Inserção de um PPL no Solver	64
3.1.3	Utilização do Solver	65
3.1.4	Interpretação dos Relatórios	68
3.2	Problema da Dieta	71
3.2.1	Abordagem histórica do problema	72
3.2.2	O problema da dieta	72
4	Considerações Finais	81
	Referências	83

INTRODUÇÃO

A Análise de Sensibilidade, ou análise de pós-otimização, está preocupada com a forma como as mudanças nos parâmetros de um Problema de Programação Linear (PPL) afetam a solução ótima. Ou seja, procuramos a resposta para perguntas como: Qual o efeito de uma mudança num coeficiente da função objetivo, numa constante de uma restrição e/ou num coeficiente de uma restrição? Porém surge outra pergunta: por que conhecer como a solução de um PPL pode ser afetada ao modificar algum parâmetro é importante? A resposta dessa pergunta pode ser dada agora. Visto que os insumos de uma empresa ou os parâmetros de um problema de modelagem não são muitas vezes valores permanentes, ou seja, podem sofrer alterações ao longo do processo, precisamos compreender como a solução de um PPL é afetada quando algum dado é alterado.

Por exemplo, pense no caso de uma empresa que após encontrar uma solução ótima para o seu problema tenha alguns recursos alterados, seja por insumos, mão de obra, defeitos de equipamentos, dentre outros acontecimentos imprevisíveis. Nesse caso, essa empresa teria que realizar toda uma nova pesquisa para encontrar a solução ótima desse problema atual, contudo, bastaria que fizesse uma Análise de Sensibilidade e verificasse como essa situação afetou sua solução anterior. Dessa forma, na Análise de Sensibilidade conseguimos calcular o quanto o valor da função objetivo na solução ótima é alterado quando um dos parâmetros é modificado. Além disso, se um parâmetro de um PPL for alterado, a análise de pós-otimização nos permite, em alguns casos, determinar a nova solução ótima sem a necessidade de resolver o problema novamente.

Mas qual o problema de resolver o problema novamente com os novos parâmetros?

Não é só “dar o play” no software? Em muitos casos sim. Hoje possuímos excelentes softwares e computadores que são capazes de resolver um PPL em frações de segundos, porém, também existem muitos PPL's cuja solução é demorada de se obter e nesses casos é melhor utilizar a análise pós-otimização pois, caso contrário, o custo computacional pode ser muito alto.

Há ainda outra vantagem do uso da Análise de Sensibilidade. Estudar as características e os valores dos parâmetros na solução ótima pode nos ajudar a determinar quais as mudanças de valores nos coeficientes do PPL não alteram o valor da solução. Assim, estudar e entender essa teoria permite que um analista determine o impacto das mudanças sobre o valor ótimo da função objetivo. Compreender o que é uma Análise de Sensibilidade e saber usá-la a favor do proponente aumenta a capacidade de gestão, dando mais segurança e percepção nos momentos de decisão quanto ao futuro.

O estudo em análise de pós-otimização tem sido utilizado em diferentes setores da sociedade. Os autores Pereira, Paula Júnior e Ladeira publicaram, em [14] o trabalho sobre análise de pós-otimização que mostrou a quantidade ótima de carvão vegetal que poderia ser transportado no estado de Minas Gerais. Em [18], Takechi e Sugai utilizaram a Análise de Sensibilidade em microcomputador em um problema de mistura de ração para gado de corte.

Já os pesquisadores Vanni, Luz, Ribeiro, Novaes e Polanczyem, em [20], apresentam a possibilidade de aplicar a teoria na área da saúde, realizando uma avaliação econômica com enfoque em doenças infecciosas. Ainda, os autores Moretti, Alves, Rocha e Riani em [10] empregaram a análise de pós-otimização em uma organização do setor varejista, mais especificamente para maximizar os lucros de uma loja de rações para animais. Os trabalhos acima citados recorreram à Análise de Sensibilidade para resolver problemas práticos e favoreceram a comunidade envolvida.

Para desenvolver um pouco da teoria relacionada a Análise de Sensibilidade, apresentaremos, neste trabalho, as definições e técnicas utilizadas para calcular o impacto causado no modelo original de um PPL quando algumas alterações são executadas. Sendo elas: alteração no coeficiente da função objetivo, alteração dos termos independentes das restrições, alteração dos coeficientes da matriz das restrições, alteração em variáveis (inclusão e eliminação de variável) e alteração na restrição (inclusão e eliminação de restrição). Ainda, será realizada a análise de pós-otimização em um problema da dieta, utilizando a ferramenta Solver da Microsoft Excel como apoio do estudo.

A metodologia utilizada ao longo do trabalho foi a abordagem qualitativa com base na pesquisa bibliográfica, ou seja, estudo de pesquisas anteriores, podendo ser: livros, artigos, teses, entre outros. A principal característica da pesquisa bibliográfica é o pesquisador desenvolver seu estudo a partir das contribuições de outros autores [17]. No processo de seleção dos materiais que seriam utilizados nessa pesquisa, foram realizadas várias leituras e resoluções de exemplo, para verificar se o material se adequava com o objetivo da proposta.

Neste trabalho estudamos alguns conceitos e resultados de Programação Linear, dando ênfase na Análise de Sensibilidade, exibindo o efeito de algumas perturbações nos parâmetros do modelo inicial. Dessa forma, com esta pesquisa foi possível aprofundar os estudos e, ainda, utilizá-los na resolução de problemas e algumas aplicações.

Vale destacar a importância da Programação Linear ao longo da história, de acordo com [9] (2001, p. 24):

O desenvolvimento da programação linear foi considerado como um dos mais importantes avanços científicos, dos meados, do século XX, e temos que concordar com essa avaliação. Seu impacto, desde 1950, tem sido extraordinário. Hoje é a ferramenta padrão que tem economizado milhares ou milhões de dólares para muitas companhias ou negócios mesmo de tamanho moderado nas diversas nações industrializadas do mundo, e o seu uso em outros setores da sociedade tem se espalhado rapidamente. Uma grande proporção de toda computação científica, processada nos computadores, é destinada para o uso da programação linear.

É de conhecimento que esse desenvolvimento aconteceu especialmente durante a Segunda Guerra Mundial, onde o matemático Dantzig² trabalhou na Força Aérea Americana ocupando o cargo de chefe da subdivisão civil de combate, no Centro de Controle Estatístico. Com as complicações nas operações militares e nos planejamentos de guerra, o matemático tornou-se um especialista em métodos de programação e planejamento, contando com o auxílio de computadores. Após a guerra, a Força Aérea Americana investiu fundos con-

²George Bernard Dantzig (Oregon, EUA, 8 de novembro de 1914 - 13 de maio de 2005) foi um matemático americano, pioneiro nos estudos de programação matemática. Uma das principais contribuições do cientista, pela qual é mundialmente conhecido, é o desenvolvimento do algoritmo Simplex. Recebeu diversos prêmios pela importância de seus trabalhos. Dantzig era Professor de Pesquisa Operacional e Ciência da Computação na Universidade de Stanford, local que permaneceu até sua morte.

sideráveis para o desenvolvimento dos computadores, uma vez que eles se mostraram importantes para resolver diversos problemas de planejamento [4].

Os caminhos que levaram ao tema da pesquisa “Análise de Sensibilidade Aplicada em um Problema da Dieta” pela graduanda começa com a necessidade de se fazer uma iniciação científica dentro do Programa de Educação Tutorial (PET) em 2018, a pesquisa “Condições de Otimalidade em Otimização Não Linear: Uma abordagem Geométrica”, orientada pelo Prof. Dr. Moisés Rodrigues Cirilo do Monte, despertou o interesse da discente. Com esse projeto de pesquisa a graduanda pode apresentar o trabalho “Aplicação do Lema de Farkas na Obtenção de Condições Necessárias de Otimalidade para Problemas de Otimização Não Linear” no XXXIX Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional 2019, onde conheceu mais sobre a Matemática Aplicada e aumentou o entusiasmo com o tema.

No final da pesquisa, em 2019, a graduanda cursou a disciplina optativa para a Licenciatura em Matemática “Introdução à Programação Linear”, com a professora e orientadora deste trabalho, o que a aproximou ainda mais com o assunto. Assim, em 2020, a estudante conversou com a professora sobre a possibilidade de desenvolverem uma iniciação científica, com foco no trabalho de conclusão de curso, com o assunto de Análise de Sensibilidade, e assim, realizamos o estudo sobre o tema.

Pensando ainda que os conceitos abordados nesta pesquisa geralmente não estão presentes nas ementas das disciplinas dos cursos de graduação, pretendemos, com esta proposta, dar a bolsista de graduação, e possivelmente na formação de futuros pesquisadores em Matemática, a oportunidade de familiarizar-se com a modelagem matemática de PPL's e com o uso de métodos computacionais de otimização linear ainda durante a sua graduação, contribuindo para uma formação ampla e diversificada.

Objetivo

O principal objetivo deste trabalho é estudar os conceitos da Análise de Sensibilidade aplicados à problemas de programação linear. Problemas práticos de programação linear serão resolvidos com o método Simplex e com o auxílio de softwares e em seguida, será feito uma análise pós-otimização de cada PPL.

Como objetivos específicos podemos citar:

- resolver alguns problemas de programação linear práticos e/ou teóricos;

- investigar os resultados das simulações numéricas por meio da Análise de Sensibilidade;
- desenvolver uma Análise de Sensibilidade detalhada sobre um problema da dieta por meio do software Solver do Excel.

Estrutura dos Tópicos Apresentados

O presente trabalho está dividido da seguinte maneira:

- No capítulo 1 (Definições e Resultados Preliminares), apresentamos definições e resultados preliminares que foram utilizados durante nossa pesquisa. Neste capítulo contamos com os referenciais teóricos [1], [2], [3], [7], [9] e [16].
- No capítulo 2 (Análise de Sensibilidade), realizamos o estudo de análise de pós-otimização, apresentando a parte teórica e alguns exemplos para contribuir com a compreensão do tema. As modificações no PPL original, bem como os seus efeitos, apresentados no capítulo são: no coeficiente da função objetivo, dos termos independentes das restrições, dos coeficientes da matriz das restrições, em variável (inclusão e eliminação), e em restrição (inclusão e eliminação). Neste capítulo também utilizamos como referenciais teóricos [1], [2], [7] e [13].
- No capítulo 3 (Aplicação em um problema da dieta), estudamos a aplicação da teoria de Análise de Sensibilidade em um problema da dieta, com o auxílio da ferramenta Solver do Excel. O problema escolhido foi apresentado em um trabalho de conclusão de curso, onde a autora sugere a continuação do estudo. Neste capítulo, a pesquisadora utilizou [5], [6], [7], [8], [11], [12], [15] e [19].

CAPÍTULO 1

DEFINIÇÕES E RESULTADOS PRELIMINARES

Antes de começarmos a trabalhar com Análise de Sensibilidade é necessário apresentarmos algumas definições e resultados de programação linear, indispensáveis para compreensão deste trabalho, assim, este capítulo foi construído tomando por base nas referências [1], [2], [3], [7], [9] e [16].

1.1 Programação Linear

Em otimização, chamamos o modelo de Programação Linear (PL) de uma representação simplificada da realidade. Para construirmos esse modelo, precisamos identificar em um problema qual é a função objetivo linear, as restrições em relação a função e o tipo de otimização que desejamos, minimizar ou maximizar a função objetivo.

1.1.1 Problemas de Programação Linear

Definição 1.1 (PPL). *Um problema de programação linear (PPL) consiste de uma função objetivo, linear em n variáveis, e um conjunto de restrições, representadas por m inequações (ou equações) lineares.*

As restrições de um PPL podem ser apresentadas de diversas formas, entretanto conseguimos ajustá-las para a forma apresentada abaixo, conhecida como forma padrão.

Definição 1.2 (Forma Padrão). *A seguinte forma do PPL é chamada de forma padrão:*

$$\textbf{Minimizar } f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

$$\textbf{Sujeito a } a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0.$$

A função linear f é contínua e deve ser minimizada, chamamos essa aplicação linear de função objetivo. O sistema de equações lineares caracteriza as restrições do problema, juntamente com as condições de não negatividade das variáveis. Os vetores b e c , juntamente com os coeficientes dados por a_{ij} , onde $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$, são compostos por constantes reais fixas. Já o vetor $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ é formado por números reais que ainda serão determinados.

A forma padrão do PPL pode ainda ser escrito de forma mais sucinta, utilizando a notação matricial:

$$\textbf{Minimizar } f(x) = c^T x \tag{1.1}$$

$$\textbf{Sujeito a } Ax = b \tag{1.2}$$

$$x \geq 0, \tag{1.3}$$

em que

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$ é uma matriz $m \times n$, chamada matriz dos coeficientes (tecnológicos);

$c^T = (c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n)$ é o vetor de custos;

$x^T = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)$ é o vetor das variáveis de decisão ou incógnitas;

$b^T = (b_1 \ b_2 \ \dots \ b_n)$ é o vetor dos termos independentes (recursos);

$0^T = (0 \ 0 \ \cdots \ 0)$ é o vetor formado apenas por elementos iguais a 0.

Ainda, uma outra forma de representar um PPL na forma padrão é:

$$\textbf{Minimizar } f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (1.4)$$

$$\textbf{Sujeito a } \sum_{j=1}^n a_j x_j = b \quad (1.5)$$

$$x_j \geq 0, \ j = 1, \dots, n, \quad (1.6)$$

onde: $a_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$ é a j-ésima coluna da matriz A , que são os coeficientes que multiplicam x_j .

Em resumo, na forma padrão temos uma função objetivo que deve ser minimizada com base em um sistema de equações lineares e condições de não negatividade para as incógnitas, ou seja, as variáveis assumem valores não negativos. Vale destacar que todo PPL pode ser escrito na forma padrão.

Definição 1.3 (Solução viável e região viável). *Uma solução x é viável se satisfizer (1.2) e as condições de não negatividade (1.3). O conjunto de todas as soluções viáveis é chamado região viável.*

Definição 1.4 (Solução ótima). *Uma solução viável que fornece o menor valor à função objetivo f é chamada solução ótima, denotamos por x^* . Uma solução viável é ótima se:*

$$f(x^*) \leq f(x)$$

para qualquer solução viável x .

Dessa forma, resolver um PPL consiste em determinar uma solução ótima, isto é, encontrar uma solução que satisfaz todas as restrições do problema e que ainda atribua o menor valor à função objetivo.

Analogamente, podemos apresentar as definições e propriedades para um PPL de maximização.

1.1.2 Escrevendo os problemas na forma padrão

Nem todos os PPL's são dados na forma padrão. Pensando que um modelo de PL representa um problema da realidade, podemos ter um PPL que queira maximizar um lucro, as restrições serem de desigualdades, ou ainda, possuir variáveis que não atendam as condições de não negatividade. Sendo assim, utilizamos algumas propriedades para transformar o modelo na sua forma padrão. A seguir, apresentaremos as técnicas utilizadas para modificar esses problemas afim de escrevê-los na forma padrão.

- Problemas de maximização

Quando temos um problema em que a função objetivo deve ser maximizada, procuramos uma solução viável x^* , tal que:

$$f(x^*) \geq f(x) \text{ para qualquer solução viável } x.$$

Como essa forma não é a padrão, multiplicamos a desigualdade por -1 e ficamos com:

$$-f(x^*) \leq -f(x) \text{ para qualquer solução viável } x.$$

Dessa forma, quando queremos encontrar uma solução viável x^* que maximize $f(x)$ é equivalente a encontrar uma solução viável x^* que minimize $-f(x)$, seguindo a Definição (1.4). De forma resumida, caso o problema seja de maximizar $f(x)$, podemos considerar equivalente a minimizar $-f(x)$.

- Restrições de desigualdade

Se o problema possui as restrições em forma de inequações, novas variáveis devem ser inseridas. Supondo que a restrição i seja dada por:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i.$$

Essa desigualdade pode ser transformada em:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n + x_k = b_i, \quad x_k \geq 0.$$

Ou seja, somamos uma nova variável não negativa no lado esquerdo da restrição, essa variável adicional x_k é chamada variável de folga. Analogamente, se a restrição i é dada por:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geq b_i.$$

Fazemos,

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n - x_k = b_i, \quad x_k \geq 0.$$

Portanto, subtraímos uma nova variável não negativa no lado esquerdo da restrição, essa variável adicional $-x_k$ é chamada variável de folga.

- Variáveis com valores negativos

Em problemas que as variáveis podem assumir valores negativos, chamadas de variáveis livres (irrestrita de sinal), utilizamos duas variáveis positivas, não nulas, para representá-las. Podemos fazer isso pois qualquer número (seja positivo, negativo ou nulo) pode ser escrito como a diferença de dois outros não negativos. Assim, escrevemos a variável livre x_i como:

$$x_i = x'_i - x''_i, \quad \text{com } x'_i \geq 0, \quad x''_i \geq 0.$$

Realizando a substituição dessa nova variável livre em todas as equações do problema, a linearidade das restrições é preservada e o PPL ficará na forma padrão, sendo necessariamente todas as variáveis não negativas.

O exemplo seguinte aborda todas essas situações mencionadas e mostra como transformar um PPL na forma padrão.

Exemplo 1.5. *Consideremos o PPL abaixo em que a função objetivo deve ser maximizada, possui restrições de desigualdade e a restrição $x_p \geq 0$ não está presente, isto é, é uma variável livre.*

$$\textbf{Maximizar } f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_px_p + \cdots + c_nx_n$$

$$\textbf{Sujeito a } a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ip}x_p + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i$$

$$\vdots$$

$$a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \cdots + a_{jp}x_p + \cdots + a_{jn}x_n \geq b_j$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mp}x_p + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad \cdots, \quad x_n \geq 0, \quad x_p \in \mathbb{R}.$$

Primeiramente iremos substituir a variável x_p , que é livre para assumir valores positivos ou negativos. Assim, temos:

$$x_p = x'_p - x''_p, \text{ com } x'_p \geq 0, x''_p \geq 0.$$

Além disso, adicionamos uma variável de folga na restrição i e uma variável de excesso na restrição j . Obtemos:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ip}x'_p - a_{ip}x''_p + \cdots + a_{in}x_n + x_k = b_i, \quad x_k \geq 0,$$

$$a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \cdots + a_{jp}x'_p - a_{jp}x''_p + \cdots + a_{jn}x_n - x_l = b_j, \quad x_l \geq 0.$$

Em relação a maximizar o problema, é equivalente escrever:

$$\textbf{Minimizar} \quad -f(x_1, x_2, \dots, x_n) = -c_1x_1 - c_2x_2 - \cdots - c_px'_p + c_px''_p - \cdots - c_nx_n.$$

Por fim, a forma padrão do problema é escrita por:

$$\textbf{Minimizar} \quad -f(x_1, x_2, \dots, x_n) = -c_1x_1 - c_2x_2 - \cdots - c_px'_p + c_px''_p - \cdots - c_nx_n$$

$$\textbf{Sujeito a} \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ip}x'_p - a_{ip}x''_p + \cdots + a_{in}x_n + x_k = b_i$$

$$\vdots$$

$$a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \cdots + a_{jp}x'_p - a_{jp}x''_p + \cdots + a_{jn}x_n - x_l = b_j$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mp}x_p + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x'_p \geq 0, x''_p \geq 0, \dots, x_n \geq 0, x_k \geq 0, \dots, x_l \geq 0.$$

1.1.3 Solução Gráfica

A resolução gráfica de modelos de PL é aplicável para problemas de duas ou três variáveis, é uma forma bastante útil para encontrar a solução ótima e ilustrar alguns conceitos básicos utilizados na resolução de modelos e ainda na compreensão dos conceitos do método Simplex, que será visto posteriormente.

Iremos considerar apenas problemas com duas variáveis, de modo a ilustrar a representação das soluções viáveis e da solução ótima no plano cartesiano. É importante saber que em resolução gráfica, as restrições dos problemas de programação linear costumam ser utilizadas na forma de desigualdades.

Para solucionar um problema com a resolução gráfica seguimos duas etapas, a saber:

1º Passo: identificar a região viável do modelo, isto é, quais os pares (x_1, x_2) que satisfazem a todas as restrições;

2º Passo: encontrar a solução ótima, denotada por (x_1^*, x_2^*) que leva ao valor ótimo da função objetivo $f(x_1^*, x_2^*)$.

Inicialmente traçamos os eixos cartesianos, associados as variáveis. É claro que a região viável ocupará sempre o primeiro quadrante, devido às restrições de não negatividade das variáveis em questão, vejamos a figura que representa a região viável considerando apenas essas restrições.

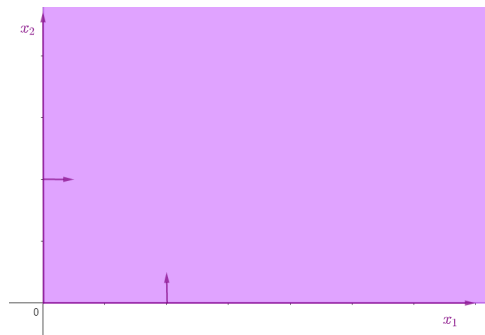


Figura 1.1: Região viável das variáveis de não negatividade.

Fonte: Arquivo pessoal do autor.

Como as soluções viáveis devem satisfazer todas as restrições do problema, simultaneamente, elas são definidas pela intersecção de todas as regiões delimitadas por cada uma das restrições do PPL. Suponhamos então que o problema estudado tenha 3 restrições (R1, R2 e R3) todas de “menor ou igual”, considerando ainda as de não negatividade, como na Fig. (1.2).

Uma vez identificada a região viável do problema, passamos à busca da solução ótima. Dentro da região viável, o conjunto de pontos que atribui o mesmo valor à f é chamado curva de nível, denotada por f' . Um problema pode ter várias curvas de nível, definidas por f' , f'' , f''' , e assim por diante. Ressaltamos que essa notação não deve ser confundida com as derivadas de f , pois ela representa as curvas de nível da função. A curva de nível

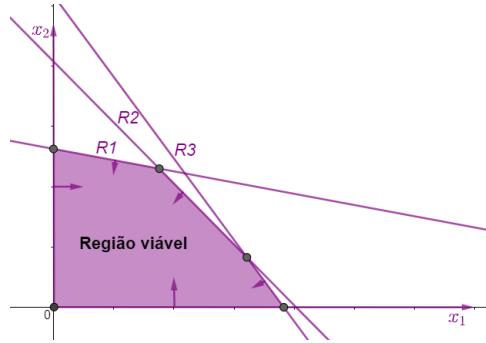


Figura 1.2: Região viável.

Fonte: Arquivo pessoal do autor.

que contém a solução ótima x^* é denotada por f^* , já que todos os pontos desse conjunto resultará o mesmo valor à função objetivo que a solução ótima.

Além disso, o vetor perpendicular à curva de nível e que aponta no sentido em que a função objetivo cresce a partir de um determinado ponto é chamado de vetor gradiente de f e denotamos por $\nabla f(x)$. Já que em um PPL a função objetivo é sempre uma função linear, o vetor gradiente será composto pelos coeficientes da função objetivo f .

Dessa forma, para obtermos uma solução ótima x^* de problemas em que a função objetivo deva ser minimizada, precisamos acompanhar o sentido contrário ao gradiente de f até encontrar um vértice extremo, este ponto fornecerá o menor valor possível para a função objetivo dentre as soluções viáveis, como podemos acompanhar na Fig. (1.3) para a região viável anterior. O gradiente é denotado por $\vec{c}$.

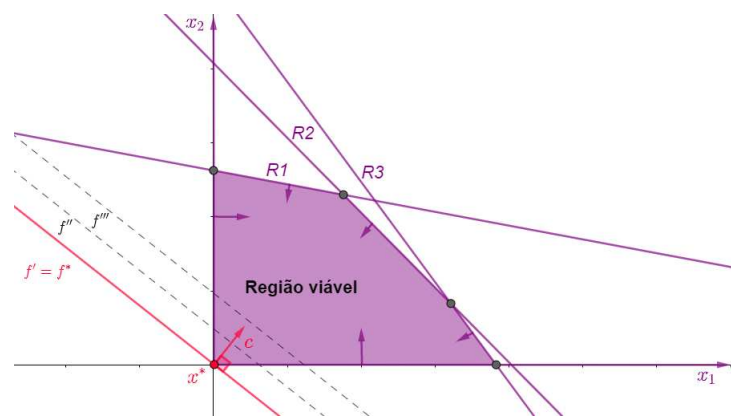


Figura 1.3: Solução ótima em um problema de minimização.

Fonte: Arquivo pessoal do autor.

Ainda, podemos encontrar a solução ótima quando a função objetivo do problema deve

ser maximizada. Para isso, precisamos acompanhar o sentido do gradiente até encontrar um vértice extremo, este ponto proporcionará o maior valor possível para a função objetivo dentre as soluções viáveis, como visto na Fig. (1.4), para a mesma região viável anterior.

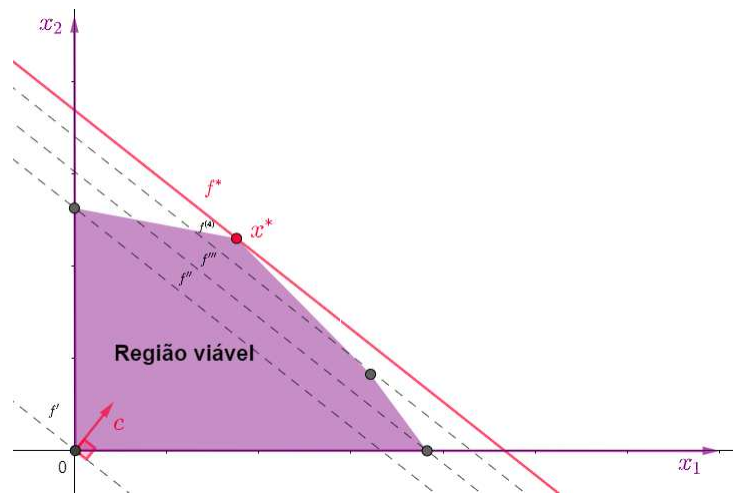


Figura 1.4: Solução ótima em um problema de maximização.

Fonte: Arquivo pessoal do autor.

A solução ótima é denominada vértice ou ponto extremo, sendo que cada vértice é determinado pela intersecção de pelo menos duas equações de retas que fazem parte do conjunto de restrições do PPL, que definem a fronteira da região viável. Com isso, os vértices são soluções básicas de sistemas de equações lineares e correspondem às soluções viáveis.

Até o momento, apresentamos apenas o caso em que a região viável do PPL era limitada e com uma única solução ótima. Entretanto, existem outras possibilidades, que serão abordadas a seguir. Primeiro, suponhamos uma região viável limitada, como representada na Fig. (1.5). Considerando que seja um problema de maximização, a solução ótima deverá ser procurada no sentido do gradiente $\vec{c}$. Observe que este problema permite infinitas soluções ótimas, pois a reta que representa a função objetivo é paralela à uma das restrições. As infinitas soluções são representadas pelos pontos sobre o segmento de reta indicado por S .

Há ainda casos em que a região viável é ilimitada, como representado na Fig. (1.6). Nesse caso, suponha que o problema seja de maximizar a função objetivo, note que o problema não possui solução ótima, mesmo possuindo soluções viáveis, já que o valor da

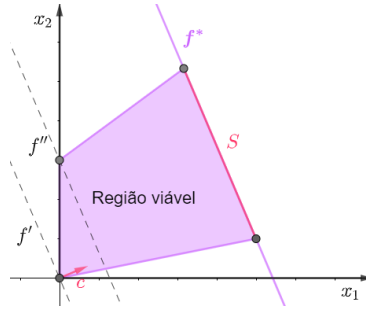


Figura 1.5: Região viável limitada e com infinitas soluções ótimas.

Fonte: Arquivo pessoal do autor.

função objetivo cresce infinitamente.

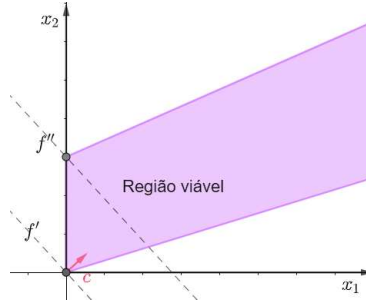


Figura 1.6: Região viável ilimitada e sem solução ótima.

Fonte: Arquivo pessoal do autor.

Entretanto, caso o problema fosse minimizar a função objetivo, mesmo com uma região viável ilimitada a solução ótima para esse problema é única, como mostra a Fig. (1.7).

Podemos ter ainda, um conjunto ilimitado de soluções ótimas, S , quando a reta que representa a função objetivo é paralela a uma semirreta que é fronteira de uma região viável ilimitada, como indicado na Fig. (1.8).

Por fim, temos o caso quando as restrições do problema não são compatíveis a ponto de não existir uma região viável, ou seja, a região viável é vazia. Com isso, a solução ótima não existe devido à inexistência de solução viável, como podemos ver na Fig. (1.9).

Observação 1.6. Em geral, quando o espaço é o $\mathbb{R}^n$, a equação $a^T x = b$ define um conjunto chamado hiperplano e o vetor a é perpendicular ao hiperplano. A demonstração desse resultado pode ser consultado em [2].

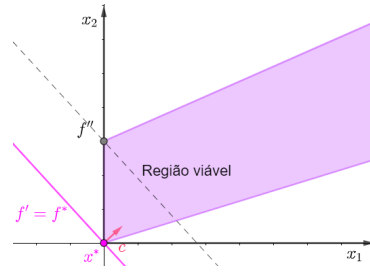


Figura 1.7: Região viável ilimitada e com solução ótima única.

Fonte: Arquivo pessoal do autor.

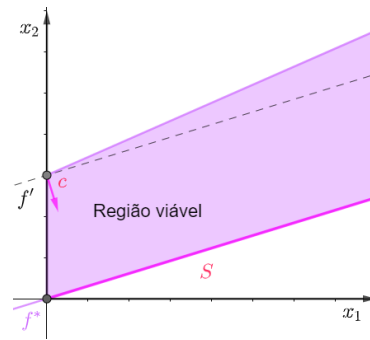


Figura 1.8: Região viável ilimitada e com infinitas soluções ótimas.

Fonte: Arquivo pessoal do autor.

Com base no estudo desenvolvido nessa Seção (1.1.3), apresentaremos, em seguida, algumas propriedades cujas demonstrações podem ser consultados em [2].

Propriedade 1. *Se uma região viável, que satisfaz um problema na forma padrão, é não vazia, então ela possui pelo menos um vértice.*

Propriedade 2. *Se houver uma solução ótima para um PPL, então há uma solução ótima que é um vértice da região viável que satisfaz este problema.*

Propriedade 3. *Uma região viável possui, no máximo, um número finito de vértices.*

1.1.4 Solução Básica e PPL na Forma Básica

Para resolver um problema de programação linear podemos ainda fixar variáveis independentes, para quais conseguimos considerar quaisquer valores, e resolver o sistema de equações lineares $m \times n$ dado por qualquer $Ax = b$, tal que x é um vetor de dimensão n , b é um vetor de dimensão m e A é uma matriz $m \times n$.

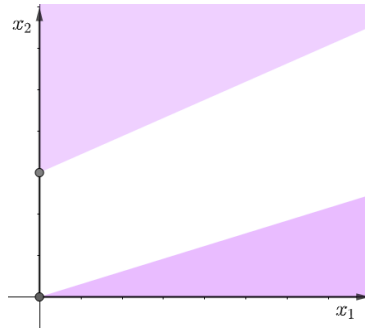


Figura 1.9: Problema inviável.

Fonte: Arquivo pessoal do autor.

Para simplificar a escrita, inicialmente fixamos $n - m$ variáveis independentes e as m variáveis restantes com m equações. Dessa forma, se a matriz desse sistema restante for invertível, a solução é bem determinada [1]. Podemos pensar ainda de modo inverso, ou seja, escolhemos m colunas da matriz A que formem uma matriz invertível e fixamos as demais variáveis. Considerando que a matriz A tem posto completo por linhas, isto é, $\text{posto}(A) = m$, sempre é possível selecionar m colunas da matriz A que formem uma matriz invertível. A hipótese da matriz A ter posto completo por linhas implica que $m \leq n$, ou seja, a quantidade de equações é menor ou igual a quantidade de variáveis. Se tivermos $m = n$, o sistema tem solução única. Porém, os problemas de programação linear na forma padrão têm infinitas soluções para situações em que $m < n$. Assim, o grau de liberdade é $n - m$ (o sistema tem $n - m$ variáveis “sobrando”), que ao serem fixadas estas variáveis, o sistema passa a ter solução única.

Definição 1.7 (Partição básica). *Considere uma reorganização nas colunas da matriz da seguinte forma:*

$$A = [B \ N]$$

onde:

- $B_{m \times m}$, chamada matriz básica, é formada por m colunas da matriz A e é invertível, dada por $B = [a_{B_1} \ a_{B_2} \ \dots \ a_{B_m}]$, com $B_1, B_2, \dots, B_m$ índices das colunas da matriz A que pertencem a B , chamados índices básicos;
- $N_{m \times (n-m)}$, chamada matriz não básica, é formada pelas $n - m$ colunas restantes de A , ou seja, colunas de A que não estão em B . A matriz N é dada por

$N = [a_{N_1} \ a_{N_2} \ \dots \ a_{N_{n-m}}]$, com $N_1, N_2, \dots, N_{n-m}$ índices das colunas da matriz A que pertencem a N .

Essa partição nas colunas da matriz A é chamada partição básica e introduz uma partição no vetor x :

$$x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix}$$

tal que:

$$\begin{aligned} \bullet \ x_B &= \begin{bmatrix} x_{B_1} \\ x_{B_2} \\ \vdots \\ x_{B_m} \end{bmatrix}, \text{ chamado vetor das variáveis básicas (VB);} \\ \bullet \ x_N &= \begin{bmatrix} x_{N_1} \\ x_{N_2} \\ \vdots \\ x_{N_{n-m}} \end{bmatrix}, \text{ chamado vetor das variáveis não básicas (VNB).} \end{aligned}$$

Tomando uma partição básica $A = [B \ N]$, o sistema $Ax = b$ pode ser reescrito como:

$$Ax = b \Leftrightarrow [B \ N] \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = b,$$

ou ainda,

$$Bx_B + Nx_N = b.$$

Portanto, a solução geral do sistema pode ser escrita por:

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N. \tag{1.7}$$

Definição 1.8 (Solução básica). *Considere uma partição básica $A = [B \ N]$ e a seguinte solução obtida ao se fixar as $n - m$ variáveis de x_N em zero, isto é:*

$$\hat{x} = \begin{cases} \hat{x}_B = B^{-1}b \\ \hat{x}_N = 0. \end{cases} \tag{1.8}$$

A solução $\hat{x}$ assim obtida é chamada solução básica.

Definição 1.9. *Se todas as variáveis básicas são não negativas, ou seja, $\hat{x}_B = B^{-1}b \geq 0$, dizemos que $\hat{x}$ é uma solução básica viável.*

Definição 1.10. *Uma solução básica viável, onde existe ao menos uma variável básica nula, denomina-se solução básica degenerada. Caso contrário, chamamos de solução básica não degenerada.*

Em alguns casos o sistema de equações lineares $Ax = b$ não possui uma solução básica. Contudo, uma forma de garanti-la é supondo que na matriz $A_{m \times n}$ temos $n > m$, isto é, o número de variáveis é maior que o número de equações de restrições. Além disso, as linhas da matriz A devem ser linearmente independentes, correspondendo à independência linear das m equações. A importância das soluções básicas viáveis na resolução de problemas lineares pode ser entendida com o Teorema Fundamental da Programação Linear. Este resultado mostra que em um PPL é necessário considerar apenas as soluções básicas viáveis quando se procura pela solução ótima, pois o valor ótimo é sempre encontrado entre tais soluções.

Teorema 1.11 (Teorema fundamental da programação linear). *Dado um problema de programação linear na forma padrão (1.2) onde A é a matriz $m \times n$ de posto m :*

- a) se existe uma solução viável, existe uma solução básica viável;*
- b) se existe uma solução básica ótima, existe uma solução básica viável ótima.*

A prova do teorema acima pode ser encontrada com detalhes em [16].

1.1.5 Método Simplex

Apesar de sabermos que alguma solução ótima será encontrada em um ponto extremo do conjunto viável, esse processo pode ser enorme. O número de vértices da região viável pode ser muito grande, em número exponencial, em relação às variáveis.

O método Simplex possibilita que os computadores resolvam de forma simplificada problemas com um número relativamente grande de variáveis e restrições. A ideia principal do algoritmo é buscar um vértice ótimo entre os vértices presentes na região viável, sendo estes vértices soluções básicas viáveis. Dessa forma, ao encontrar uma solução básica viável, o método identifica se esta é uma solução ótima ou não. Caso seja, o problema está resolvido, caso contrário, ele busca a solução ótima através das soluções básicas viáveis.

Portanto, podemos resumir o método na aplicação sucessiva de duas etapas, sendo elas: identificação de uma solução ótima e melhoria de uma solução básica viável.

Inicialmente, escrevendo a função objetivo $f(x)$ em termos da partição básica, temos:

$$f(x) = c^T x = \begin{bmatrix} c_B^T & c_N^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = c_B^T x_B + c_N^T x_N, \quad (1.9)$$

onde c_B^T são os coeficientes das variáveis básicas na função objetivo e c_N^T são os coeficientes das variáveis não básicas na função objetivo.

Agora, escrevendo a Eq. (1.9) considerando a solução geral do sistema dado na Eq. (1.7), temos:

$$\begin{aligned} f(x) = c_B^T x_B + c_N^T x_N &= c_B^T (B^{-1}b - B^{-1}N x_N) + c_N^T x_N \\ &= c_B^T B^{-1}b - c_B^T B^{-1}N x_N + c_N^T x_N. \end{aligned}$$

O primeiro termo da equação acima corresponde ao valor da função objetivo na solução básica viável, ou seja,

$$f(\hat{x}) = c_B^T \hat{x}_B + c_N^T \hat{x}_N = c_B^T (B^{-1}b) + c_N^T (0) = c_B^T B^{-1}b.$$

Por simplificação, escrevemos $\lambda^T = c_B^T B^{-1}$, esse vetor λ , $m \times 1$, é chamado de vetor multiplicador Simplex e pode ser obtido na resolução do sistema de equações lineares $B^T \lambda = c_B$.

Assim, utilizando o vetor multiplicador reescrevemos $f(x)$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned} f(x) = f(\hat{x}) - c_B^T B^{-1}N x_N + c_N^T x_N &= f(\hat{x}) - \lambda^T N x_N + c_N^T x_N \\ &= f(\hat{x}) + (c_N^T - \lambda^T N) x_N \end{aligned}$$

Se considerarmos que:

$$\begin{aligned} c_N^T - \lambda^T N &= (c_{N_1}, c_{N_2}, \dots, c_{N_{n-m}}) - \lambda^T (a_{N_1}, a_{N_2}, \dots, a_{N_{n-m}}) \\ &= (c_{N_1}, c_{N_2}, \dots, c_{N_{n-m}}) - (\lambda^T a_{N_1}, \lambda^T a_{N_2}, \dots, \lambda^T a_{N_{n-m}}) \\ &= (c_{N_1} - \lambda^T a_{N_1}, c_{N_2} - \lambda^T a_{N_2}, \dots, c_{N_{n-m}} - \lambda^T a_{N_{n-m}}) \end{aligned}$$

e

$$x_N = (x_{N_1}, x_{N_2}, \dots, x_{N_{n-m}})$$

obtemos:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(\hat{x}) + ((c_{N_1} - \lambda^T a_{N_1}, c_{N_2} - \lambda^T a_{N_2}, \dots, c_{N_{n-m}} - \lambda^T a_{N_{n-m}})(x_{N_1}, x_{N_2}, \dots, x_{N_{n-m}})) \\ &= f(\hat{x}) + ((c_{N_1} - \lambda^T a_{N_1})x_{N_1}, (c_{N_2} - \lambda^T a_{N_2})x_{N_2}, \dots, (c_{N_{n-m}} - \lambda^T a_{N_{n-m}})x_{N_{n-m}}). \end{aligned}$$

Definição 1.12 (Custos relativos). *Os coeficientes $\hat{c}_{N_j} = (c_{N_j} - \lambda^T a_{N_j})$ das VNB na função objetivo são chamados custos relativos ou custos reduzidos.*

Portanto, a função objetivo é reescrita por:

$$f(x) = f(\hat{x}) + (\hat{c}_{N_1}x_{N_1}, \hat{c}_{N_2}x_{N_2}, \dots, \hat{c}_{N_{n-m}}x_{N_{n-m}}). \quad (1.10)$$

Sabemos que na expressão (1.10) todas as variáveis do problema são não negativas, $x_{N_j} \geq 0$, então se todos os custos relativos são não negativos, $\hat{c}_{N_j} = (c_{N_j} - \lambda^T a_{N_j}) \geq 0$ com $j = 1, 2, \dots, n - m$, segue que $f(x) \geq f(\hat{x})$ para todos os $x_N \geq 0$. Esse fato resulta no Teorema da Condição de Otimalidade, sua prova pode ser consultada com detalhe em [9].

Teorema 1.13 (Teorema da Condição de Otimalidade). *Se uma solução básica viável, $\hat{x}_B = B^{-1}b \geq 0$, possui $\hat{c}_j \geq 0$ para todo $j = 1, 2, \dots, n - m$, então esta solução é ótima.*

O Teorema (1.13) possibilita afirmar a otimalidade de uma solução básica viável, pois se a condição de otimalidade for verificada, então a solução básica viável é ótima. Ainda, se a solução básica viável for não degenerada, a recíproca do teorema é verdadeira.

Corolário 1.14. *Se uma solução básica viável não degenerada, $\hat{x}_B = B^{-1}b > 0$, é uma solução ótima, então $\hat{c}_j \geq 0$ para todo $j = 1, 2, \dots, n - m$.*

Algoritmo Simplex

O método Simplex pode ser escrito por meio de um algoritmo, que consiste em trocar uma VNB de posição com uma VB. Considere um PPL que esteja na forma padrão básica e uma solução básica viável inicial.

Inicialmente determinamos a VNB que deve entrar na base, para isso observamos os coeficientes da função objetivo, a variável não básica que possuir o menor custo relativo negativo será a escolhida, pois assim a função objetivo tenderá a decrescer mais rapidamente ao perturbar esta variável. Essa escolha é conhecida como Regra de Entrada de Dantzig [1].

Em seguida precisamos definir qual variável deixará a base. Considere que a VNB x_q deva entrar na base de modo a manter a viabilidade da solução. Devemos calcular a razão:

$$\theta = \min \left(\frac{b_k}{a_{kq}} \right), \quad a_{kq} > 0,$$

com $k = 1, 2, \dots, m$. Escolhemos a menor razão não negativa, o elemento pivô será a_{kq} , que ocupa a posição de encontro da coluna com a linha que gerou θ e, portanto, será a variável a deixar a base. Caso todos os elementos da coluna q sejam negativos o problema é dito ilimitado.

Dando continuidade ao método, é necessário “pivotar” a matriz para que os coeficientes das VB forneçam a matriz identidade, e a função objetivo esteja em termos das novas VNB. O pivoteamento consiste em realizar operações do tipo: multiplicar uma equação por uma constante e adicionar o resultado a outra, esta ação também é chamada de *Eliminação de Gauss* (veja [1]), ela não altera a solução do sistema.

Em resumo, devemos primeiro calcular a nova linha pivô. Para isso, dividimos os elementos da linha k pelo elemento pivô, a_{kq} , pois assim teremos o valor unitário 1. Após isso, subtraímos de cada linha, a nova linha pivô multiplicada pelo elemento que está no encontro entre a coluna q e a linha em que está sendo realizada a subtração, de modo que cada um dos elementos das novas linhas calculadas possam ser determinados por:

$$L'_p = L_p - \frac{a_{kp}}{a_{kq}} a_{pq}, \quad 1 \leq p \leq m.$$

Com isso, encontramos uma nova matriz, em que a variável x_q passou a ser básica e a variável x_{n+k} passou a ser não básica. Agora, para saber se o problema está resolvido, devemos observar se a condição de otimalidade é satisfeita, isto é, se todos os custos relativos da função objetivo são não negativos. Se for, a solução básica calculada é dita solução básica ótima, se não, repetimos todo o processo anterior até que seja satisfeita a condição de otimalidade.

Vale destacar que caso algum coeficiente das VNB, custo relativo, seja igual a zero a solução encontrada não é única. Fica caracterizada assim a existência de múltiplas soluções ótimas no algoritmo. Resumidamente, o algoritmo pode ser descrito em duas etapas.

- 1ª Etapa: Identificação de uma solução ótima.
 - Verificar se a condição de otimalidade é satisfeita, ou seja, se todos os $\hat{c}_j \geq 0$.

- Se sim, termina a aplicação do método e temos dois possíveis casos:
 - * Se todos os coeficientes das $VNB > 0$, então a solução é ótima e única;
 - * Se existe coeficiente da $VNB = 0$, então existem infinitas soluções ótimas.
- Caso contrário vamos para a 2ª Etapa.
- 2ª Etapa: Melhoria de uma solução básica viável.
 - Buscar uma solução básica viável melhor que a atual, quando existe algum $\hat{c}_j < 0$.
 - Se existe pelo menos um custo relativo negativo, precisamos:
 - * Determinar a VNB que entrará na base;
 - * Determinar a VB que será substituída;
 - * Obter uma nova solução básica viável, utilizando as operações de pivoteamento;
 - * Voltar na 1ª etapa.
 - Caso $a_{kj} \leq 0, i = 1, \dots, m$, o problema é ilimitado (chamamos de solução ótima ilimitada [1]).

Quadro Simplex

Para problemas de pequeno porte, a solução pode ser obtida utilizando o Quadro ou Tableau Simplex. Considere um PPL na sua forma padrão e básica, inserimos os dados do PPL no primeiro quadro Simplex, como na Fig. (1.10).

	VNB						VB						
VB	x_1	x_2	...	x_q	...	x_n	x_{n+1}	x_{n+2}	...	x_{k-m}	...	x_{n+m}	b
x_{n+1}	a_{11}	a_{12}	...	a_{1q}	...	a_{1n}	1	0	...	0	...	0	b_1
x_{n+2}	a_{21}	a_{22}	...	a_{2q}	...	a_{2n}	0	1	...	0	...	0	b_2
$\vdots$				$\vdots$						$\vdots$			$\vdots$
x_{n+k}	a_{k1}	a_{k2}	...	a_{kq}	...	a_{kn}	0	0	...	1	...	0	b_k
$\vdots$				$\vdots$						$\vdots$			$\vdots$
x_{n+m}	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mq}	...	a_{mn}	0	0	...	0	...	1	b_m
	c_1	c_2	...	c_q	...	c_n	0	0	...	0	...	0	$F(x)$
	Custos relativos												Função objetivo

Recursos

Figura 1.10: Primeiro Quadro Simplex.

Fonte: Arquivo pessoal do autor.

Agora, considere que a variável x_q deva entrar na base (pelo menos o custo relativo dessa variável é negativo) e a variável x_{n+k} deva sair da base, e o elemento pivô seja a_{kq} , assim, realizamos o pivoteamento, e consequentemente a 1ª iteração. Observe a Fig. (1.11).

VB	x_1	x_2	...	x_q	...	x_n	x_{n+1}	x_{n+2}	...	x_{k-m}	...	x_{n+m}	B
x_{n+1}	$a_{11} - \frac{a_{k1}}{a_{kq}}, a_{1q}$	$a_{12} - \frac{a_{k2}}{a_{kq}}, a_{1q}$	...	0	...	$a_{1n} - \frac{a_{kn}}{a_{kq}}, a_{1q}$	1	0	...	$-\frac{1}{a_{kq}}, a_{1q}$	...	0	$b_1 - \frac{b_k}{a_{kq}}, a_{1q}$
x_{n+2}	$a_{21} - \frac{a_{k1}}{a_{kq}}, a_{2q}$	$a_{22} - \frac{a_{k2}}{a_{kq}}, a_{2q}$	...	0	...	$a_{2n} - \frac{a_{kn}}{a_{kq}}, a_{2q}$	0	1	...	$-\frac{1}{a_{kq}}, a_{2q}$	...	0	$b_2 - \frac{b_k}{a_{kq}}, a_{2q}$
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
x_{n+k}	a_{k1}/a_{kq}	a_{k2}/a_{kq}	...	1	...	a_{kn}/a_{kq}	0	0	...	$1/a_{kq}$	...	0	b_k/a_{kq}
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
x_{n+m}	$a_{m1} - \frac{a_{k1}}{a_{kq}}, a_{mq}$	$a_{m2} - \frac{a_{k2}}{a_{kq}}, a_{mq}$	...	0	...	$a_{mn} - \frac{a_{kn}}{a_{kq}}, a_{mq}$	0	0	...	$-\frac{1}{a_{kq}}, a_{mq}$	...	1	$b_m - \frac{b_k}{a_{kq}}, a_{mq}$
	$c_1 - \frac{a_{k1}}{a_{kq}}, c_q$	$c_2 - \frac{a_{k2}}{a_{kq}}, c_q$	...	0	...	$c_n - \frac{a_{kn}}{a_{kq}}, c_q$	0	0	...	$-\frac{1}{a_{kq}}, c_q$	...	0	$f(x) - \frac{b_k}{a_{kq}}, c_q$

Figura 1.11: Primeira Iteração no Quadro Simplex.

Fonte: Arquivo pessoal do autor.

Com isso, verificamos se as condições de otimalidade são satisfeitas, se sim finalizamos o quadro Simplex e o quadro ótimo é dado na Fig. (1.11). Caso contrário, realizamos uma 2ª iteração como a primeira. A solução ótima do problema e o valor ótimo da função objetivo pode ser visto no quadro Simplex, representados, respectivamente, pela coluna dos recursos e o valor na função objetivo, fazendo $f(x^*) - \lambda = 0 \Rightarrow f(x^*) = \lambda$ com λ igual ao valor encontrado após a condição de otimalidade satisfeita.

1.1.6 Método das Duas Fases

Nem todos problemas de programação linear apresentam de início uma solução básica inicial que possibilite o uso do método Simplex apenas introduzindo variáveis de folga. Os casos em que as restrições de desigualdades e os recursos são, simultaneamente, menores ou iguais a zero ($\leq$) e maiores ou iguais a zero ($\geq$), inserem variáveis de folga negativas. Há ainda o caso em que as restrições são de igualdade e nesse caso não existem variáveis de folga.

Contudo, há maneiras de encontrar a solução viável básica. Uma delas é através de uma função objetivo auxiliar que possui variáveis artificiais, não de folga, sem qualquer

significado próprio, servindo apenas para encontrarmos a solução comentada. Essa ação é dita como método das duas fases, que consiste em:

- **1ª Fase:** minimizar $Q^a(x) = \sum x_i^a$

Considere o PPL na forma padrão que não apresenta uma solução básica viável inicial, admita o caso que temos uma igualdade:

$$Ax = b$$

$$x \geq 0,$$

com $b \geq 0$. Como não conseguimos inserir variáveis de folga não negativas, precisamos minimizar um problema artificial da seguinte forma:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & Q^a(x) = \sum_{i=1}^m x_i^a \\ \text{Sujeito a} & Ax + x^a = b \\ & x \geq 0, x^a \geq 0, \end{array} \quad (1.11)$$

onde $x^a = (x_1^a, x_2^a, \dots, x_m^a)$ é o vetor das variáveis artificiais. Se o PPL inicial tiver uma solução viável o problema artificial (1.11) possui um valor mínimo tal que o vetor x^a vale 0 ($x^a = 0$), caso contrário o PPL não possui uma solução viável. Sendo assim, o método Simplex pode ser aplicado e ao final as variáveis artificiais, que inicialmente estarão na base, se tornarão VNB, e assim poderão ser desconsideradas e a solução básica será dada pelo vetor x .

- **2ª Fase:** minimizar a função objetivo inicial

Nessa fase é resolvido o modelo original utilizando como solução inicial a solução ótima do modelo artificial.

1.1.7 Dualidade

Todo PPL de minimização, dito primal, pode ser associado a um problema de maximização, dito dual. O estudo desses problemas proporcionam várias características e propriedades, tais com o método Simplex e na solução de problemas. Em muitos casos é mais fácil resolver um problema pela forma dual do que pela forma primal e vice-versa, dessa forma, esse método pode representar uma vantagem computacional em relação a outros.

O problema dual é construído a partir de um problema primal, sendo que é possível escrever o primal na busca do dual, pois o processo para encontrar uma ou outra forma é a mesma. Para definir um problema na forma dual, devemos partir de um PPL na forma padrão e transformá-lo na forma primal como a seguir:

$$\begin{array}{ll}\text{Minimizar} & c^T x \\ \text{Sujeito a} & Ax \geq b \\ & x \geq 0.\end{array}$$

A sua forma dual é dada por:

$$\begin{array}{ll}\text{Maximizar} & b^T y \\ \text{Sujeito a} & A^T y \leq c \\ & y \geq 0.\end{array}$$

onde c^T é um vetor de dimensão n , x é um vetor de dimensão n e é a variável do problema primal, A é uma matriz $m \times n$, b é um vetor de dimensão m e y é um vetor de dimensão m e é a variável do problema dual.

Vale destacar que caso um problema na forma primal altere algumas das suas inequações para equações, as variáveis correspondentes no problema dual serão variáveis livres.

Como mencionado o estudo da dualidade permite vários resultados, alguns deles serão expostos a seguir, as demonstrações podem ser consultadas em [1] e [16].

Lema 1.15 (Lema da dualidade fraca). *Se x for viável para o problema primal e y for viável para o problema dual correspondente, então $c^T x \geq b^T y$.*

Esse resultado garante que a solução viável do primal (ou dual), provoca um limite no valor da função objetivo do dual (ou primal). Ou seja, todos os valores associados ao problema primal são maiores do que os valores associados ao problema dual. Porém, como o problema primal procura por um valor mínimo para a função objetivo e o problema dual procura pelo máximo, assim os dois problemas procuram atingir o valor do outro. Essa conclusão é exposta no corolário a seguir.

Corolário 1.16. *Seja x_0 um vetor que satisfaz o problema primal e y_0 um vetor que satisfaz o problema dual. Se x_0 e y_0 são viáveis para os problemas primal e dual, respectivamente, e se $c^T x_0 = b^T y_0$, então x_0 e y_0 são soluções ótimas para seus correspondentes problemas.*

A recíproca desse resultado também é válida e chamamos de Teorema da Dualidade da Programação Linear.

Teorema 1.17 (Teorema da Dualidade da Programação Linear). *Se um dos problemas, primal ou dual, tem uma solução finita ótima, então o outro também terá, de forma que o valor da função objetivo correspondente a ambos serão iguais. Se algum dos problemas, primal ou dual, tiver uma solução ilimitada, o outro problema não possuirá solução viável.*

Consequentemente, segue o resultado que diz:

Teorema 1.18. *Se um PPL tem uma solução básica viável ótima correspondente à base B , então o vetor y que satisfaz $y^T = c_B^T B^{-1}$ é uma solução ótima do dual. Assim, o valor ótimo de ambos problemas são iguais.*

Portanto, se encontrarmos a solução ótima de um dos problemas podemos encontrar a solução ótima do outro, nos casos em que ambos possuem soluções ótimas, o valor ótimo da função objetivo será o mesmo. Dessa forma, ao resolver o PPL do primal pelo uso do quadro Simplex, a solução do seu dual pode ser obtida diretamente.

É importante mencionar que a análise de um PPL não termina quando se encontra a solução ótima. Após obtida a solução ótima de um PPL, quando isso é possível, é importante examinar os valores que os parâmetros assumem no ótimo para poder sugerir, se necessário, modificações no modelo inicial e descobrir quais parâmetros são mais sensíveis, isto é, quais parâmetros, se alterados, irão afetar de forma significativa o valor ótimo do problema original. O próximo capítulo tratará desse assunto.

CAPÍTULO 2

ANÁLISE DE SENSIBILIDADE

Neste capítulo apresentaremos o efeito causado num problema de programação linear quando os parâmetros iniciais são modificados após encontrada a solução ótima. A Análise de Sensibilidade, ou pós-otimização, é um conceito muito útil quando queremos estudar essas alterações. Podemos definir a Análise de Sensibilidade como uma técnica utilizada para examinar os impactos que o programa passa quando existem alterações nas condições de modelagem, ou ainda, o estudo de um modelo de programação linear submetido a mudanças em suas condições iniciais [7].

Para desenvolver esse estudo, serão apresentadas sete tipo de alterações que podem ocorrer no modelo inicial de um PPL e as suas consequências, a saber: alteração no coeficiente da função objetivo, alteração dos termos independentes das restrições, alteração dos coeficientes da matriz das restrições, inclusão de variável, eliminação de variável, inclusão de restrição e eliminação de restrição. Os conceitos tratados neste capítulo tiveram como base os referenciais teóricos [1], [2], [7] e [13].

2.1 Compreensão das notações

Antes de desenvolvermos a teoria da Análise de Sensibilidade, discorreremos sobre alguns apontamentos do método Simplex. O objetivo é proporcionar uma leitura mais dinâmica e compreensiva em relação as notações utilizadas posteriormente.

Inicialmente consideremos o problema primal em sua forma padrão:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } z &= c^T x \\ \text{Sujeito a } Ax &= b \\ x &\geq 0, \end{aligned}$$

onde A é uma matriz $m \times n$ com posto m . Assumindo que o problema possua uma solução básica viável $\begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix}$ com valor da função objetivo z_0 dado por:

$$z_0 = c^T \begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix} = (c_B^T, c_N^T) \begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix} = c_B^T B^{-1}b. \quad (2.1)$$

onde B e N são índices que representam, respectivamente, os vetores custos referentes às variáveis básicas e naturais do PPL.

Ainda, sejam x_B e x_N conjuntos que representam, respectivamente, as variáveis básicas e não básicas de uma base. Como o problema possui uma solução viável, temos que ter $x_B \geq 0$, $x_N \geq 0$ e $b = Ax = Bx_B + Nx_N$. Agora, reorganizando a última equação temos:

$$\begin{aligned} b = Bx_B + Nx_N &\Rightarrow Bx_B = b - Nx_N \\ B^{-1}(Bx_B) = B^{-1}(b - Nx_N) &\Rightarrow x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N \\ &\Rightarrow x_B = B^{-1}b - \sum_{j \in J} B^{-1}a_j x_j \\ &= \bar{b} - \sum_{j \in J} y_j x_j, \end{aligned} \quad (2.2)$$

onde J é o conjunto relativo aos índices das variáveis não básicas e $y_j = B^{-1}a_j$. Manipu-

lando a Eq. (2.1) com a Eq. (2.2), podemos encontrar:

$$\begin{aligned}
z &= c^T x \\
&= [c_B^T \ c_N^T] \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} \\
&= c_B^T x^B + c_N^T x_N \\
&= c_B^T \left(B^{-1}b - \sum_{j \in J} B^{-1}a_j x_j \right) + \sum_{j \in J} c_j x_j \\
&= c_B^T B^{-1}b - c_B^T \sum_{j \in J} B^{-1}a_j x_j + \sum_{j \in J} c_j x_j \\
&= z_0 + [-c_B^T (B^{-1}a_1 x_1 + \cdots + B^{-1}a_j x_j) + (c_1 x_1 + \cdots + c_j x_j)] \\
&= z_0 + [-c_B^T B^{-1}a_1 x_1 - \cdots - c_B^T B^{-1}a_j x_j + c_1 x_1 + \cdots + c_j x_j] \\
&= z_0 + [x_1 (c_1 - c_B^T B^{-1}a_1) + \cdots + x_j (c_j - c_B^T B^{-1}a_j)] \\
&= z_0 + [x_1 (c_1 - z_1) + \cdots + x_j (c_j - z_j)] \\
&= z_0 + \sum_{j \in J} (c_j - z_j) x_j \\
&= z_0 - \sum_{j \in J} (z_j - c_j) x_j,
\end{aligned} \tag{2.3}$$

onde $z_j = c_B^T B^{-1}a_j$ em cada variável não básica.

Utilizando as manipulações algébricas realizadas anteriormente, podemos reescrever o problema inicial da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\textbf{Minimizar } z &= z_0 + \sum_{j \in J} (c_j - z_j) x_j \\
\textbf{Sujeito a } \sum_{j \in J} y_j x_j + x_B &= \bar{b} \\
x_j &\geq 0, \quad j \in J, \quad \text{e} \quad x_B \geq 0.
\end{aligned}$$

Além disso, podemos supor que nenhuma linha na equação acima é toda zero nas colunas das variáveis não básicas $x_j \geq 0$, $j \in J$. Caso contrário, a variável básica na linha considerada tem o valor conhecido, assim podemos excluí-la do problema. Observe que as variáveis x_B na equação acima são de folga, logo, conseguimos reescrever o problema de modo equivalente, em termos de variáveis não básicas, sendo:

$$\begin{aligned}
\textbf{Minimizar } z &= z_0 + \sum_{j \in J} (c_j - z_j) x_j \\
\textbf{Sujeito a } \sum_{j \in J} (y_j) x_j &\leq \bar{b} \\
x_j &\geq 0, \quad j \in J.
\end{aligned}$$

Definimos os valores $(c_j - z_j)$, ou $\hat{c}_j$, como os coeficientes de custo reduzido, pois são os coeficientes das variáveis não básicas. Temos também que a representação do problema com as variáveis básicas, x_B , em que a função objetivo, z , e as variáveis básicas foram resolvidas em termos de variáveis não básicas, é definida como uma representação da solução básica em forma canônica.

Vale destacar ainda que, se $(c_j - z_j) \geq 0$ para todo $j \in J$ então a atual solução básica viável é ótima. Basta observar que se $(c_j - z_j) \geq 0$ para todo $j \in J$, temos $z \geq z_0$ para qualquer solução viável. Agora, para a solução viável básica temos $z = z_0$, uma vez que $x_j = 0$ para todo $j \in J$.

Compreendendo esse processo, verifiquemos agora o que acontece caso ocorra perturbação no modelo inicial do problema.

2.2 Alteração no coeficiente da função objetivo

Suponha que o coeficiente da variável x_i seja alterado de c_i para $c'_i = c_i + \theta$ e todos os demais parâmetros sejam mantidos. Observando que a solução básica é dada por $\hat{x}_B = B^{-1}b$ e escrevendo $z_i = \lambda^T a_i$, podemos perceber que alterações no coeficiente da função objetivo não torna inviável a solução ótima já obtida, uma vez que o vetor multiplicador associado se relaciona apenas com as variáveis básicas, contudo, a nova solução pode deixar de ser ótima. Neste caso é necessário avaliar duas situações, sendo o caso quando x_i é uma variável básica e quando x_i é não básica. Observemos o que acontece em cada um deles.

a) x_i é variável não básica

Nesse caso, como os coeficientes das variáveis básicas (c_B^T) não são alterados, basta calcular o novo custo relativo à x_i ,

$$\hat{c}'_i = c'_i - z_i = c_i + \theta - z_i = \hat{c}_i + \theta.$$

Com isso, podemos concluir que a mesma quantidade θ que faz variar o coeficiente da variável é a quantidade que varia o custo relativo. Além disso, observe que $\hat{c}_i \geq 0$, uma vez que consideramos o PPL inicial como solução ótima, então se $\theta \geq 0$ automaticamente $\hat{c}'_i \geq 0$ e a solução ótima não se altera. Porém, se $\hat{c}_i + \theta < 0 \Rightarrow \theta < -\hat{c}_i$ a solução pode mudar.

A seguir será apresentado um exemplo para elucidar como uma alteração no coeficiente de uma variável não básica afeta a solução do PPL original.

Exemplo 2.1. [*Determinação do mix de produção (adaptado pelo autor)*]

Uma companhia deseja programar a produção de um utensílio de cozinha que requer o uso de dois tipos de recursos: mão de obra e material. A companhia está considerando a fabricação de dois modelos e o seu departamento de engenharia forneceu os dados referente aos recursos disponíveis que estão resumidos na Fig. (2.1).

	Modelo	
	A	B
Mão de obra (horas por unidade)	1	4
Material (kg por unidade)	3	1
Lucro (R\$ por unidade)	1	1

Figura 2.1: Dados fornecidos para a determinação do mix de produção.

Fonte: Arquivo pessoal do autor.

O suprimento de material é igual a 1kg por dia. A disponibilidade diária de mão de obra é acima de 4 horas. Devemos maximizar o lucro total da companhia, buscando determinar a produção diária de cada um dos modelos.

O problema pode ser resumido de forma algébrica do seguinte modo:

$$\max f(x) = x_1 + x_2$$

$$\text{s.a } x_1 + 4x_2 \geq 4$$

$$3x_1 + x_2 = 1$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

A forma padrão e básica do problema é dada por:

$$\min F(x) = -x_1 - x_2$$

$$\text{s.a } x_1 + 4x_2 - x_3 + x_1^a = 4$$

$$3x_1 + x_2 + x_2^a = 1$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_1^a \geq 0 \text{ e } x_2^a \geq 0.$$

$$\min Q^a(x) = x_1^a + x_2^a$$

Para solucionar o problema, utilizaremos o Método das Duas Fases. Na primeira fase minimizamos a função artificial $Q^a(x)$. Veja o primeiro quadro na Fig. (2.2).

VB	x_1	x_2	x_3	x_1^a	x_2^a	b
x_1^a	1	4	-1	1	0	4
x_2^a	3	1	0	0	1	1
	0	0	0	1	1	$Q^a(x)$
	-1	-1	0	0	0	$F(x)$

Figura 2.2: Primeiro quadro do Simplex - Primeira fase.

Fonte: Arquivo pessoal do autor.

Como $c_1^a = 1$ e $c_2^a = 1$, precisamos zerar os coeficientes. Assim, fazemos $L'_3 = L_3 - (L_1 + L_2)$ e obtemos o quadro da Fig. (2.3).

VB	x_1	x_2	x_3	x_1^a	x_2^a	b
x_1^a	1	4	-1	1	0	4
x_2^a	3	1	0	0	1	1
	-4	-5	1	0	0	$Q^a(x) - 5$
	-1	-1	0	0	0	$F(x)$

Figura 2.3: 1ª Iteração no Quadro Simplex - Primeira fase.

Fonte: Arquivo pessoal do autor.

A solução não é ótima, pois existem coeficientes de variáveis não básicas negativos. Dessa forma, como $c_2 = -5$ é o menor valor, x_2 entra na base. Consequentemente, fazendo $\theta = \min\left\{\frac{4}{4}, \frac{1}{1}\right\} = 1$, podemos escolher tanto x_1^a , quanto x_2^a para sair da base. Optando por x_2^a , obtemos o seguinte quadro da Fig. (2.4).

VB	x_1	x_2	x_3	x_1^a	x_2^a	b
x_1^a	11	0	-1	1	-4	0
x_2	3	1	0	0	1	1
	11	0	1	0	5	$Q^a(x) + 0$
	2	0	0	0	1	$F(x) + 1$

Figura 2.4: 2ª Iteração no Quadro Simplex.

Fonte: Arquivo pessoal do autor.

Para $Q^a(x)$ temos que os $c_i - z_i > 0$ para toda VNB, então a solução é ótima e única. Eliminamos x_2^a , mas x_1^a pertence a base e não podemos desconsiderá-la diretamente. Como $b_1 = 0$, conseguimos multiplicar a L'_1 por qualquer valor que não altera b, daí multiplicando por -1, colocamos x_3 na base e eliminamos x_1^a , como pode ser visto no quadro da Fig. (2.5):

VB	x_1	x_2	x_3	x_1^a	b
x_3	11	0	1	-1	0
x_2	3	1	0	0	1
	2	0	0	0	$F(x) + 1$

Figura 2.5: 3ª Iteração no Quadro Simplex.

Fonte: Arquivo pessoal do autor.

Dessa forma, como $c_i - z_i > 0$ para todo VNB de $F(x)$, segue que o primeiro quadro da segunda fase, dado na Fig. (2.6), já expressa a solução ótima, que também é única.

VB	x_1	x_2	x_3	b
x_3	11	0	1	0
x_2	3	1	0	1
	2	0	0	$F(x) + 1$

Figura 2.6: Quadro ótimo do Simplex.

Fonte: Arquivo pessoal do autor.

Portanto, a solução ótima é: $(x_1^* \ x_2^*)^T = (0 \ 1)^T$ e $F(x^*) = -1$. Logo, $f(x^*) = 1$. A solução gráfica do Exemplo (2.1) é dada na Fig. (2.7).

Suponha que $c_1 = -1$ seja substituído por $c'_1 = -2$. Uma vez que x_1 não é básico, então $c'_1 = c_1 + \theta \Rightarrow -2 = -1 + \theta \Rightarrow \theta = -1$, sendo assim, $\hat{c}'_1 = \hat{c}_1 + \theta = 2 - 1 = 1 \geq 0$, e a solução não se altera.

Ainda, se substituirmos c_1 por $c'_1 = -4$ temos que $c'_1 = c_1 + \theta \Rightarrow -4 = -1 + \theta \Rightarrow \theta = -3$, com isso, $\hat{c}'_2 = \hat{c}_2 + \theta = 2 - 3 = -1 < 0$, porém a solução do problema permanece, observe a Fig. (2.8).

b) x_i é variável básica

O caso em que o coeficiente da variável básica é alterado após obter a solução ótima afeta de maneira significativa o PPL uma vez que essa alteração perturba diretamente a solução.

Suponha que $x_i = x_{B_r}$ é uma r -ésima variável básica, o novo custo relativo será

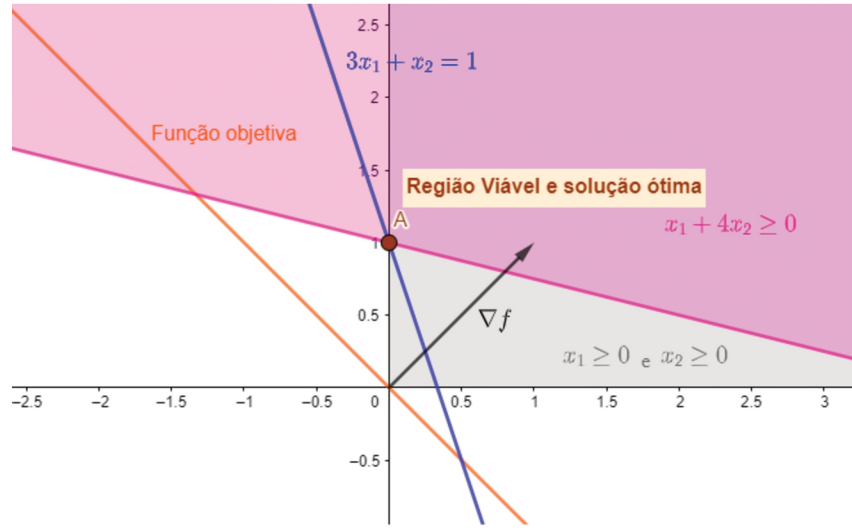


Figura 2.7: Solução gráfica do Exemplo (2.1) obtida no GeoGebra.
Fonte: Arquivo pessoal do autor.

Name ▲	Value	Name ▲	Value
A	[-1,-4]	A	[-1,-4]
Aeq	[3,1]	Aeq	[3,1]
b	-4	b	-4
beq	1	beq	1
exitflag	1	EXITFLAG	1
f	[-2,-1]	f	[-4;-1]
fval	-1	FVAL	-1
lb	[0;0]	lb	[0,0]
x	[0;1]	X	[0;1]

Figura 2.8: Soluções do Exemplo 2.1 obtidas no Matlab.
Fonte: Arquivo pessoal do autor.

dado por:

$$\begin{aligned}
 \hat{c}'_i &= c_i - \lambda'^T a_i = c_i - (c'_b{}^T B^{-1}) a_i = c_i - (c_b^T B^{-1} + \theta e_r^T B^{-1}) a_i \\
 &= c_i - (\lambda^T + \theta e_r^T B^{-1}) a_i = (c_i - \lambda^T a_i) - (\theta e_r^T B^{-1}) a_i = \hat{c}_i - \theta e_r^T y_i.
 \end{aligned}$$

Observe que e_r é a r -ésima coluna da matriz identidade, assim $e_r^T y_i = y_{ri}$, ou seja, o r -ésimo elemento do vetor y_i . Logo, o novo custo relativo fica:

$$\hat{c}'_i = \hat{c}_i - \theta y_{ri} = \hat{c}_i - \theta \bar{A}_r$$

Nesse caso, se $\hat{c}'_i \geq 0$, o i -ésimo custo relativo, a solução e a base ótima do problema não muda, mas o valor da função objetivo deverá ser recalculado. Caso contrário, ou seja, $\hat{c}'_i < 0$ o problema deverá ser refeito.

Observe o exemplo a seguir:

Exemplo 2.2. *Um fabricante de cadeiras e mesas necessita de três materiais para confeccionar os móveis: tábua de madeira, parafuso e cola. Sabe-se que o lucro de cada mesa e cadeira é, respectivamente, 5 reais e 1 real. Além disso, a quantidade de cada material necessária para a fabricação dos móveis está relacionada na tabela abaixo, descrita pela Fig. (2.9).*

	Mesa	Cadeira	Estoque (por unidade)
Cola de madeira (quantidade necessária por unidade)	2	1	8
Pacote de parafusos (quantidade necessária por unidade)	2	3	10
Tábua de madeira (quantidade necessária por unidade)	4	6	24

Figura 2.9: Dados fornecidos.

Fonte: Arquivo pessoal do autor.

Buscando maximizar o lucro, a forma padrão e básica do modelo pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
 \min F(x) &= -5x_1 - x_2 \\
 \text{sujeito a } 2x_1 + x_2 + x_3 &= 8 \\
 2x_1 + 3x_2 + x_4 &= 10 \\
 4x_1 + 6x_2 + x_5 &= 24 \\
 x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \text{ e } x_5 \geq 0.
 \end{aligned}$$

Dessa forma, o primeiro quadro Simplex do problema fica como na Fig (2.10).

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_3	2	1	1	0	0	8
x_4	2	3	0	1	0	10
x_5	4	6	0	0	1	24
	-5	-1	0	0	0	F(x)

Figura 2.10: Quadro Simplex do Exemplo 2.2.

Fonte: Arquivo pessoal do autor.

Já o quadro ótimo é dado na Fig. (2.11) e a resolução gráfica é apresentada na Fig. (2.12).

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_1	1	1/2	1/2	0	0	4
x_4	0	2	-1	1	0	2
x_5	0	4	-2	0	1	8
	0	3/2	5/2	0	0	$F(x) + 20$

Figura 2.11: Quadro Simplex Ótimo do Exemplo 2.2.

Fonte: Arquivo pessoal do autor.

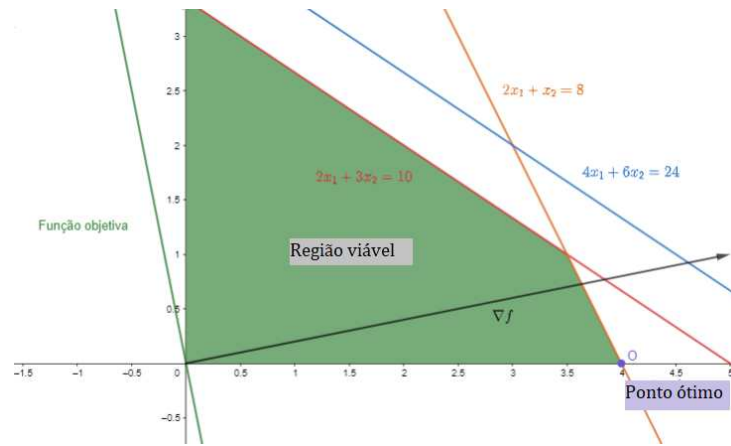


Figura 2.12: Resolução gráfica do Exemplo 2.2.

Fonte: Arquivo pessoal do autor.

Agora, se o valor de $F(x) = -5x_1 - x_2$ for alterado para $F(x)' = -3x_1 - x_2$, então $\theta = [2 \ 0]$. Calculando os novos custos relativos das variáveis não básicas e da função objetivo, temos:

$$\begin{aligned}\hat{c}_2' &= \hat{c}_2 - \theta y_{r2} = \frac{3}{2} - [2 \ 0] \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}; \\ \hat{c}_3' &= \hat{c}_3 - \theta y_{r3} = \frac{5}{2} - [2 \ 0] \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{5}{2} - 1 = \frac{3}{2}; \\ F(x^*)' &= f(x^*) - \theta b_r = 20 - [2 \ 0] \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} = 20 - 8 = 12.\end{aligned}$$

Como $\hat{c}_i' \geq 0$, a solução e a base ótima do problema não mudam, já o valor da função objetivo é dada por: $F(x^*)' = 12$. Ainda, podemos observar que o parâmetro

para manter a solução ótima inalterada é escrito como:

$$\begin{aligned}\hat{c}_2 &= \hat{c}_2 - \theta y_{r2} \geq 0 \Rightarrow \frac{3}{2} - \theta \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \geq 0 \Rightarrow \theta \leq 3; \\ \hat{c}_3 &= \hat{c}_3 - \theta y_{r3} \geq 0 \Rightarrow \frac{5}{2} - \theta \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \geq 0 \Rightarrow \theta \leq 5.\end{aligned}$$

Assim, devemos ter $\theta \leq 3$ para a solução se manter, conseqüentemente a variável básica c_1 fica limitada a esse mesmo parâmetro. Como $c_1 = -5$ devemos ter $c'_1 \leq -5 + 3 = -2$ para a solução permanecer a mesma.

2.3 Alteração dos termos independentes das restrições

Neste caso teremos uma mudança no vetor b , o que alterará os valores das variáveis básicas. Observe que qualquer variação em b não afeta a linha $\hat{c}_i$ no quadro Simplex ótimo, dessa forma, a solução do problema se manterá viável. Vamos supor que a i -ésima componente do vetor b seja modificada, teremos:

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_i \\ b_{i+1} \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \Rightarrow b' = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_i + \theta \\ b_{i+1} \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Calculando o novo valor das variáveis básicas obteremos:

$$\begin{aligned}
 x'_B &= B^{-1} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_i + \theta \\ b_{i+1} \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = B^{-1} \left(\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_i \\ b_{i+1} \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \theta \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \right) \\
 &= B^{-1} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_i \\ b_{i+1} \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} + B^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \theta \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \hat{x}_B + B^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \theta \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Se $x'_B \geq 0$ a solução do PPL permanece viável e a base ótima não muda, porém, é necessário recalcular o valor da função objetivo. Além disso, temos:

$$\begin{aligned}
 f(x'_B) &= c_B^T x'_B = c_B^T (\hat{x}_B + B^{-1} [0 \dots \theta 0 \dots 0]^T) \\
 &= c_B^T \hat{x}_B + c_B^T B^{-1} [0 \dots \theta 0 \dots 0]^T = f(\hat{x}_B) + c_B^T B^{-1} [0 \dots \theta 0 \dots 0]^T
 \end{aligned}$$

Caso a solução não seja mais admissível, devemos calcular novamente o algoritmo Simplex. Vejamos o exemplo:

Exemplo 2.3. [Problema da Fábrica (Adaptado)]

Uma empresa pode fabricar dois produtos (1 e 2). Na fabricação do 1, a empresa gasta 9 horas-homem e 3 horas-máquina. Na fabricação do produto 2, a empresa gasta 1 hora-homem e 1 hora-máquina. Sabe-se que a empresa dispõe de 18 horas-homem e 12 horas-máquina e ainda, que os lucros dos produtos 1 e 2 são de R\$ 4,00 e R\$ 1,00, respectivamente. Quanto deve a empresa fabricar de cada produto para obter o máximo de lucro possível? Observe a tabela dada na Fig. (2.13) com um resumo dos dados do problema.

	Produto		Total Disponível
	1	2	
Tempo			
Horas-homem	9	1	18
Horas-máquina	3	1	12
Lucro (por unidade)	4	1	

Figura 2.13: Resumo dos dados fornecidos do Exemplo 2.3.

Fonte: Arquivo pessoal do autor.

A forma padrão e básica do problema é dada por:

$$\begin{aligned}
 \min F(x) &= -4x_1 - 1x_2 \\
 \text{s.a } 9x_1 + x_2 + x_3 &= 18 \\
 3x_1 + x_2 + x_4 &= 12 \\
 x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0, \ x_3 \geq 0, \ x_4 &\geq 0.
 \end{aligned}$$

Dessa forma, utilizando a ferramenta online e gratuita PHPSimplex o primeiro quadro Simplex do Exemplo (2.3) fica como na Fig. (2.14).

			4	1	0	0
Base	C_b	P₀	P₁	P₂	P₃	P₄
P ₃	0	18	9	1	1	0
P ₄	0	12	3	1	0	1
Z		0	-4	-1	0	0

Figura 2.14: Primeiro quadro Simplex do problema primal do Exemplo 2.3.

Fonte: Arquivo pessoal do autor.

As colunas P₁, P₂, P₃, P₄ representam, respectivamente, as colunas das variáveis x_1 , x_2 , x_3 , x_4 . A coluna P₀ representa a coluna de recursos b , e a coluna C_B representa os coeficientes das variáveis básicas. Ainda, a linha Z apresenta o valor ótimo da função objetivo e o valor dos custos relativos das variáveis. O quadro ótimo é dado na Fig. (2.15).

			4	1	0	0
Base	C_b	P₀	P₁	P₂	P₃	P₄
P ₁	4	1	1	0	1/6	-1/6
P ₂	1	9	0	1	-1/2	3/2
Z		13	0	0	1/6	5/6

Figura 2.15: Quadro Simplex Ótimo do problema do Exemplo 2.3.

Fonte: Arquivo pessoal do autor.

Por fim, podemos verificar a solução do Exemplo (2.3) por meio da análise gráfica apresentada na Fig. (2.16).

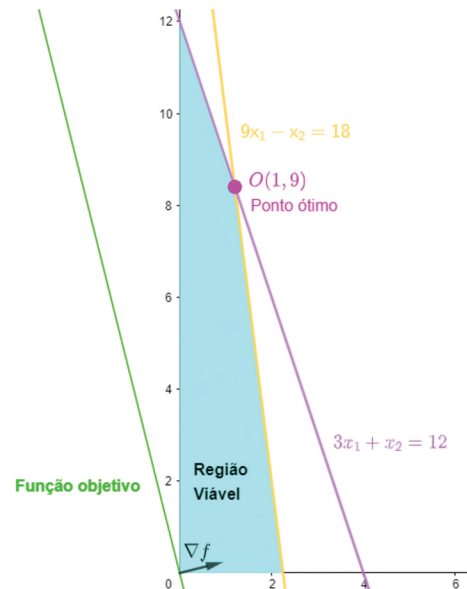


Figura 2.16: Solução gráfica do Exemplo 2.3.

Fonte: Arquivo pessoal do autor.

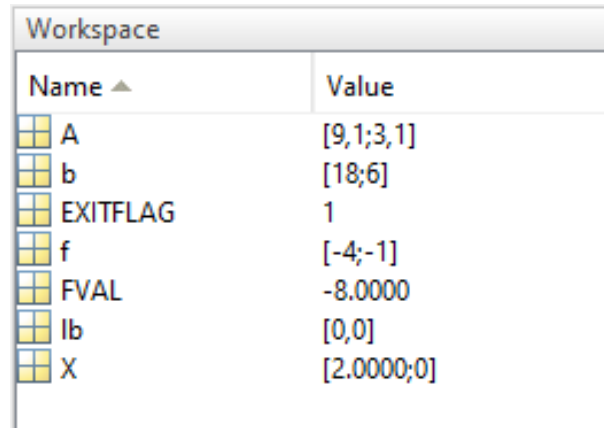
Suponhamos agora que a empresa sofra um problema técnico com a máquina e que de 12 horas ela passe a dispor de apenas 6 horas. Vejamos como ficaria o resultado:

$$x'_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/6 & -1/6 \\ -1/2 & 3/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Como $x'_B \geq 0$, a solução é viável e o valor da função objetivo é dado por:

$$F([2 \ 0]^T) = 13 + [4 \ 1][1 \ -9]^T = 13 - 5 = 8.$$

Esse resultado também pode ser verificado por meio da solução dada pelo Matlab, apresentada na Fig. (2.17).



Name ▲	Value
A	[9,1;3,1]
b	[18;6]
EXITFLAG	1
f	[-4;-1]
FVAL	-8.0000
lb	[0,0]
X	[2.0000;0]

Figura 2.17: Solução obtida no Matlab para o Exemplo 2.3 após sofrer alteração.

Fonte: Arquivo pessoal do autor.

2.4 Alteração dos coeficientes da matriz das restrições

Considere a matriz de restrições $A = [a_{mn}]$, suponha que ocorra uma variação θ no coeficiente a_{kt} , de modo que os demais parâmetros se mantenham inalterados. Isto é:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1t} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2t} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kt} & \dots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mt} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \Rightarrow A_t = \begin{bmatrix} a_{1t} \\ a_{2t} \\ \vdots \\ a_{kt} \\ \vdots \\ a_{mt} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A'_t = \begin{bmatrix} a_{1t} \\ a_{2t} \\ \vdots \\ a_{kt} + \theta \\ \vdots \\ a_{mt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1t} \\ a_{2t} \\ \vdots \\ a_{kt} \\ \vdots \\ a_{mt} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \theta \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = A_t + \theta.$$

Assim, a coluna da base ótima $\bar{A}_t$ e $\hat{c}_t$ podem ser dados por:

$$\begin{aligned} \bar{A}'_t &= B^{-1}A'_t = B^{-1}(A_t + \theta) = B^{-1}A_t + B^{-1}\theta = \bar{A}_t + B^{-1}\theta; \\ \hat{c}'_t &= c_t - c_B\bar{A}'_t = c_t - c_B(\bar{A}_t + B^{-1}\theta) = c_t - c_B\bar{A}_t - c_BB^{-1}\theta \\ &= \hat{c}_t - c_BB^{-1}\theta. \end{aligned}$$

Como a alteração de um coeficiente pertencente a um vetor da base ótima é muito diferente da alteração de um coeficiente de um que não pertence, vamos analisar as duas situações:

i) a_{kt} pertence à matriz associada às variáveis não básicas:

Uma vez que a_{kt} é coeficiente de um vetor que não pertence à base, então, basta analisar se é válido a condição de otimalidade, ou seja, $\hat{c}'_t \geq 0$ para a solução permanecer ótima. Caso contrário, devemos aplicar o algoritmo Simplex, pois a solução não é mais ótima.

Exemplo 2.4. [O Problema das Ligas Metálicas (Adaptado)]

Uma metalúrgica deseja maximizar sua receita bruta na fabricação de ligas metálicas. A tabela descrita na Fig. (2.18) apresenta as quantidades de cada material necessárias na mistura para a obtenção das ligas e o preço de venda de cada tipo de liga.

A forma padrão e básica do primal do modelo pode ser escrita por:

$$\begin{aligned} \min F(x) &= -6x_1 - 10x_2 \\ \text{s.a } 3x_1 + 5x_2 + x_3 &= 15 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_4 &= 10 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \text{ e } x_4 &\geq 0. \end{aligned}$$

	Liga Especial de Baixa Resistência*	Liga Especial de Alta Resistência*	Disponibilidade de Matéria-prima (Em gramas)
Cobre (quantidade (g) necessária por unidade)	3	5	15
Zinco (quantidade (g) necessária por unidade)	5	2	10
Preço de venda (R\$ por grama)	6	10	* $\frac{\text{g de minério}}{\text{g de liga}}$

Figura 2.18: Dados fornecidos pela metalúrgica para o Exemplo 2.4.

Fonte: Arquivo pessoal do autor.

Sendo assim, o primeiro quadro do problema no algoritmo Simplex fica como na Fig. (2.19).

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	b
x_3	3	5	1	0	15
x_4	5	2	0	1	10
	-6	-10	0	0	F(x)

Figura 2.19: Primeiro quadro Simplex do Exemplo 2.4.

Fonte: Arquivo pessoal do autor.

O quadro Simplex ótimo é dado na Fig. (2.20) e sua resolução gráfica na Fig. (2.21).

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	b
x_2	3/5	1	1/5	0	3
x_4	19/5	0	-2/5	1	4
	0	0	2	0	F(x) +30

Figura 2.20: Quadro Simplex Ótimo do Exemplo 2.4.

Fonte: Arquivo pessoal do autor.

Observe na análise gráfica, dada na Fig. (2.21), que o problema apresentado no Exemplo (2.4) tem infinitas soluções ótimas já que as curvas de nível da função objetivo são paralelas à restrição $3x_1 + 5x_2 \leq 15$. Portanto, uma das soluções ótima para o primal é $x^* = [0 \ 3]$ e o valor da função objetivo é $f(x^*) = 30$. Entretanto, suponhamos que a empresa descobriu uma nova forma de fazer a liga especial de baixa resistência, sendo necessário 1g de cobre por unidade e 7g de zinco por unidade.

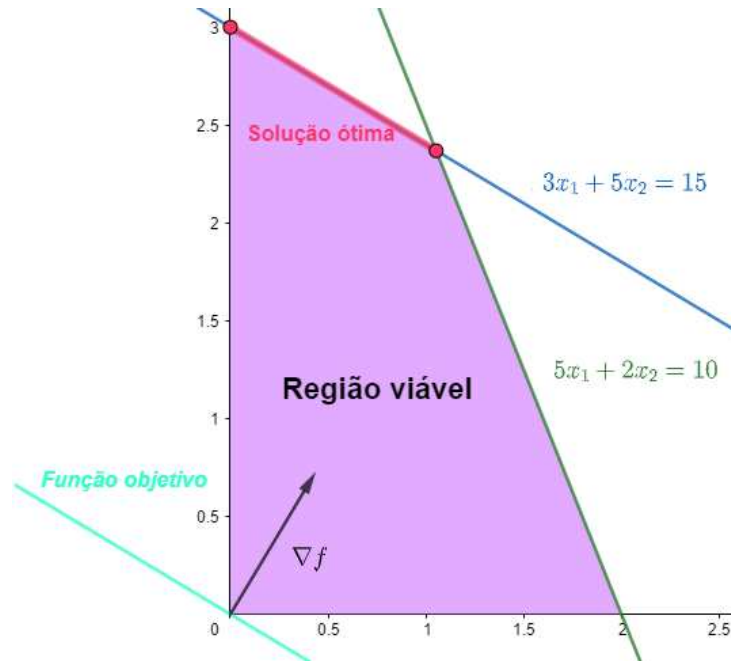


Figura 2.21: Solução gráfica do Exemplo 2.4.

Fonte: Arquivo pessoal do autor.

Verifiquemos se esse novo modelo vale a pena para a empresa. Antes, vamos observar que essa mudança ocorre na coluna da matriz onde a variável é não básica, com variação de $\theta = [-2 \ 2]^T$. Sendo assim, para a solução permanecer ótima precisamos de $\hat{c}_t \geq 0$, calculemos os novos valores para a coluna $\bar{A}_1$ e $\hat{c}_1$.

$$\begin{aligned}\bar{A}'_1 &= \bar{A}_1 + B^{-1}\theta = \begin{bmatrix} 3/5 \\ 19/5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/5 & 0 \\ -2/5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/5 \\ 19/5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2/5 \\ 14/5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1/5 \\ 33/5 \end{bmatrix};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{c}'_1 &= \hat{c}_1 - c_B B^{-1}\theta = 0 - [-10 \ 0] \begin{bmatrix} 1/5 & 0 \\ -2/5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} = -[-2 \ 0] \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} \\ &= -4.\end{aligned}$$

O novo quadro Simplex é dado como na Fig. (2.22).

Observando que $\hat{c}'_1 < 0$ sabemos que a solução não é mais ótima, então, precisamos colocar a variável x_1 na base e o novo quadro ótimo fica:

Como a receita bruta será de aproximadamente R\$32,4 podemos concluir que é vantajoso a nova forma de fabricar a liga especial de baixa resistência.

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	b
x_2	1/5	1	1/5	0	3
x_4	33/5	0	-2/5	1	4
	-4	0	2	0	F(x) +30

Figura 2.22: Quadro Simplex do Exemplo 2.4 após alteração.

Fonte: Arquivo pessoal do autor.

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	b
x_2	0	1	35/165	-1/33	95/33
x_1	1	0	-2/33	5/33	20/33
	0	0	58/33	20/33	F(x) + 1070/33

Figura 2.23: Quadro Simplex Ótimo do Exemplo 2.4 após alteração.

Fonte: Arquivo pessoal do autor.

ii) a_{kt} pertence à matriz associada às variáveis básicas:

Neste caso, uma alteração em alguma coluna da matriz A , que também pertence à matriz da base ótima B , implica em uma nova B^{-1} e novas colunas, com isso, a um novo quadro Simplex. Dessa forma, devemos incluir o novo vetor $\bar{A}_t$ encontrado, como no caso anterior e, após isso, transformá-lo em um vetor da I_m . Uma vez que, $\bar{A}_t$ pertence a B , podemos observar a ocorrência de uma das seguintes situações:

- É Solução Básica Admissível (SBA) do primal, ou seja, $\bar{b}_i \geq 0$ e do dual, $\hat{c}_j \geq 0$, consequentemente é ótima;
- É SBA apenas do primal, devemos recorrer ao algoritmo primal Simplex para obtermos a nova solução ótima;
- É Solução Básica Não Admissível (SBNA) do primal, mas admissível do dual, temos que aplicar o algoritmo dual Simplex;
- É SBNA para o primal e dual, precisamos resolver desde o início o novo problema. Existe também a possibilidade de associar uma variável artificial ao vetor original e inserir no problema a coluna modificada como se tratasse de uma nova variável, assim, para retirar da base o vetor original basta recorrer à primeira iteração do método Simplex.

Exemplo 2.5. Analisando o Exemplo (2.4), suponhamos que a metalúrgica agora faça uma alteração apenas no modo de fabricar a liga especial de alta resistência. Nesse caso, considerando que a quantidade necessária por unidade de cobre seja 7g

e 1g para zinco, ou seja, a variação de $\theta = [2 \ -1]^T$. Calculando os novos valores para a coluna $\overline{A}_2$ e $\hat{c}_2$, temos:

$$\begin{aligned}\overline{A}_2' &= \overline{A}_2 + B^{-1}\theta = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/5 & 0 \\ -2/5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2/5 \\ -9/5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 7/5 \\ -9/5 \end{bmatrix}; \\ \hat{c}_2' &= \hat{c}_2 - c_B B^{-1}\theta = 0 - [-10 \ 0] \begin{bmatrix} 1/5 & 0 \\ -2/5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = -[-2 \ 0] \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \\ &= 4.\end{aligned}$$

Dessa forma, após incluir a coluna $\overline{A}_2$ e fazer o pivoteamento da matriz, de modo a transformar a coluna em um vetor I_m , encontramos o seguinte quadro Simplex:

VB	x_1	x_2	x_2'	x_3	x_4	b
x_2	3/7	5/7	1	1/7	0	15/7
x_4	32/7	8/7	0	-1/7	1	55/7
	-12/7	-20/7	0	10/7	0	F(x) + 150/7

Figura 2.24: Novo Quadro Simplex para o Exemplo 2.5.

Fonte: Arquivo pessoal do autor.

Agora podemos excluir a coluna A_2 , observe que estamos no caso SBA apenas do primal, com isso devemos aplicar o método primal Simplex e obtemos a solução ótima como pode ser visto na Fig. (2.25).

VB	x_1	x_2'	x_3	x_4	b
x_2	0	1	5/32	-3/32	45/32
x_1	1	0	-1/32	7/32	55/32
	0	0	11/8	11/8	F(x) + 195/8

Figura 2.25: Quadro Simplex Ótimo para o Exemplo 2.5.

Fonte: Arquivo pessoal do autor.

Assim a nova receita bruta será de aproximadamente R\$24,4 mostrando que não é rentável para a empresa fazer essa mudança na liga especial de alta resistência.

2.5 Alteração em variável

2.5.1 Inclusão de variável

Consideremos a inclusão de uma nova variável no problema primal em sua forma padrão, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } f(x) &= \sum_{t=1}^n c_t^T x_t + c_{n+1} x_{n+1} \\ \text{s.a. } \sum_{t=1}^n A_{kt} x_t + a_{k(n+1)} x_{n+1} &= b_k \\ x_t, x_{n+1} &\geq 0 \end{aligned}$$

com $k = 1, \dots, m$. Sendo assim, os parâmetros para a nova variável x_{n+1} são: o custo por unidade c_{n+1} e o consumo dado pela coluna a_{n+1} . Com isso, inicialmente calculamos $\hat{c}_{n+1}$ e assim como as análises anteriores, seguindo a condição de otimalidade, se $\hat{c}_{n+1} \geq 0$, então $x_{n+1}^* = 0$ é a solução atual e ótima. Porém, se $\hat{c}_{n+1} < 0$, então devemos introduzir x_{n+1} à base e utilizamos o método Simplex para determinar a nova solução ótima.

Vejamos um exemplo para compreender melhor.

Exemplo 2.6. *Uma lanchonete lucra 10 reais na confecção de um pacote biscoitos de coco e 12 reais com um pacote de biscoitos de chocolate. Sabe-se que tem no estoque 50kg de farinha e 100l de leite, além disso, o confeitiro garante que para fazer os biscoitos de coco precisa de 10 kg de farinha e 50l de leite, já para os biscoitos de chocolate precisa de 20kg de farinha e 10l de leite.*

Para maximizar o lucro primeiramente modelamos o problema, dessa forma ficamos com o formato padrão e básico do primal da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) = -10x_1 - 12x_2 \\ \text{s.a.} \quad & 10x_1 + 20x_2 + x_3 = 50 \\ & 50x_1 + 10x_2 + x_4 = 100 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

A solução do primal pode ser vista no quadro Simplex ótimo dado na Fig. (2.26) e a solução gráfica na Fig. (2.27).

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	b
x_2	0	1	$1/18$	$-1/90$	$5/3$
x_1	1	0	$-1/90$	$1/45$	$5/3$
	0	0	$5/9$	$4/45$	$F(x) + 110/3$

Figura 2.26: Quadro Simplex Ótimo do Exemplo 2.6.

Fonte: Arquivo pessoal do autor.

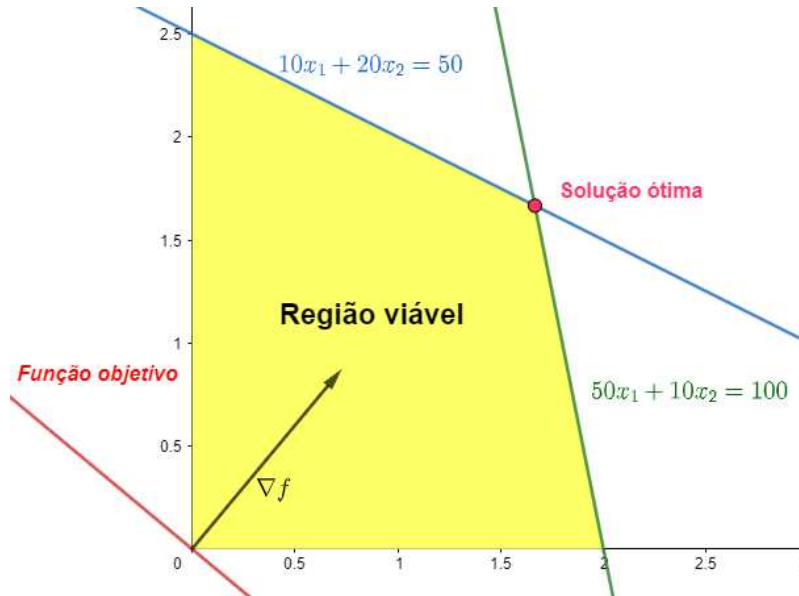


Figura 2.27: Solução Gráfica do Exemplo 2.6.

Fonte: Arquivo pessoal do autor.

Com isso, o lucro dessa empresa é de aproximadamente R\$36,7 de forma que $x^* = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}^T$. Contudo, após encontrado o valor ótimo do problema, a lanchonete decidiu incluir no seu cardápio biscoitos de nata, de forma que gastará 20kg de farinha e 30l de leite, ainda, pretendem vender o pacote também por R\$10,00. Suponhamos acrescentada uma nova variável x_n com coeficiente 10, logo, o PPL fica:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & f(x) = -10x_1 - 12x_2 - 10x_3 \\
 \text{s.a} \quad & 10x_1 + 20x_2 + 20x_3 + x_4 = 50 \\
 & 50x_1 + 10x_2 + 30x_3 + x_5 = 100 \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0
 \end{aligned}$$

Buscando encontrar a nova solução ótima desse novo modelo, sabendo que $c_3 = -10$

e $A_3 = \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \end{pmatrix}$ devemos primeiro verificar se $\hat{c}_3 \geq 0$, assim:

$$\begin{aligned}\hat{c}_3 &= c_3 - c_B B^{-1} a_3 = -10 - (-10 \quad -12) \begin{bmatrix} -1/90 & 1/45 \\ 1/18 & -1/90 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \end{pmatrix} \\ &= -10 - (-5/9 \quad -4/45) \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \end{pmatrix} = -10 - \left(\frac{-124}{9} \right) = \frac{34}{9}\end{aligned}$$

Portanto, a solução do problema permanece a mesma. Além disso, o vetor A_3 é dado por:

$$A_3 = \begin{bmatrix} -1/90 & 1/45 \\ 1/18 & -1/90 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/9 \\ 7/9 \end{pmatrix}$$

2.5.2 Eliminação de variável

Suponhamos que aconteça uma eliminação de variável, nesse caso temos que dividir em duas possibilidades. A primeira é se a variável eliminada for não básica, nesse caso não acontece nenhuma alteração na solução, pois as variáveis não básicas são nulas.

Agora, se a variável eliminada é básica não conseguimos apenas excluí-la, uma vez que a inversa da base foi calculada a partir dessa variável. Uma solução para esse problema é utilizar uma base diferente que não tenha essa variável e, assim, eliminá-la.

Para realizar essa mudança deveremos “forçar” um pivoteamento. Imagine que você queira eliminar a variável x_t do problema, sabendo que essa variável está na base, a partir do quadro ótimo devemos observar qual variável possui um custo menos desfavorecido. Para isso, basta observar qual $\hat{c}_n$ do quadro Simplex ótimo está mais próximo do 0, e assim, substituir essa variável por x_t .

Vale destacar que, existem situações em que as variáveis não básicas do quadro ótimo ou possuem custos reduzidos nulos ou positivos. Nesses casos, substituir uma variável básica por uma não básica poderá piorar o valor da solução representada no quadro. Vejamos um exemplo dessa mudança no modelo.

Exemplo 2.7. Considere o Exemplo (2.6), porém, ao invés de inserirmos um novo tipo de biscoito, suponha que a lanchonete decida não confeccionar mais biscoitos de coco. Inicialmente, observe como é o quadro ótimo do problema.

A variável x_1 , que deverá ser eliminada do problema, está na base. Assim, iremos substituí-la na base por x_4 que, dentre as variáveis não básicas, possui o menor custo

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	b
x_2	0	1	$1/18$	$-1/90$	$5/3$
x_1	1	0	$-1/90$	$1/45$	$5/3$
	0	0	$5/9$	$4/45$	$F(x) + 110/3$

Figura 2.28: Quadro Simplex Ótimo do Exemplo (2.6).

Fonte: Arquivo pessoal do autor.

reduzido. Com isso, deveremos fazer o pivoteamento e encontraremos o quadro Simplex dado na Fig. (2.29). Além disso, a solução gráfica pode ser vista na Fig. (2.30):

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	b
x_2	$1/2$	1	$1/20$	0	$5/2$
x_4	45	0	$-1/2$	1	75
	-4	0	$3/5$	0	$F(x) + 30$

Figura 2.29: Quadro Simplex Final do Exemplo (2.6).

Fonte: Arquivo pessoal do autor.

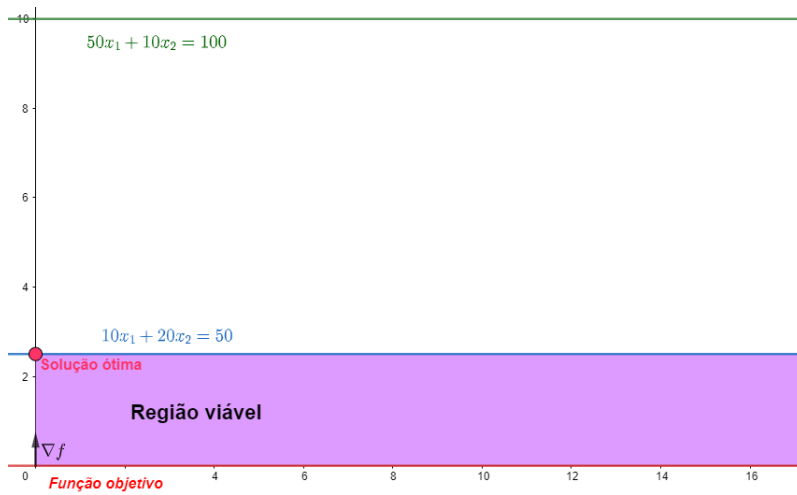


Figura 2.30: Solução gráfica do Exemplo (2.6).

Fonte: Arquivo pessoal do autor.

O novo lucro da lanchonete é de R\$30 de forma que $x^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 5/2 \end{bmatrix}^T$.

2.6 Alteração na restrição

2.6.1 Inclusão de restrição

Quando queremos incluir uma nova restrição ao problema, podemos cair em alguns casos. Para entender melhor utilizaremos a noção de resolução gráfica. Considere a resolução gráfica do seguinte problema apresentado na Fig. (2.31):

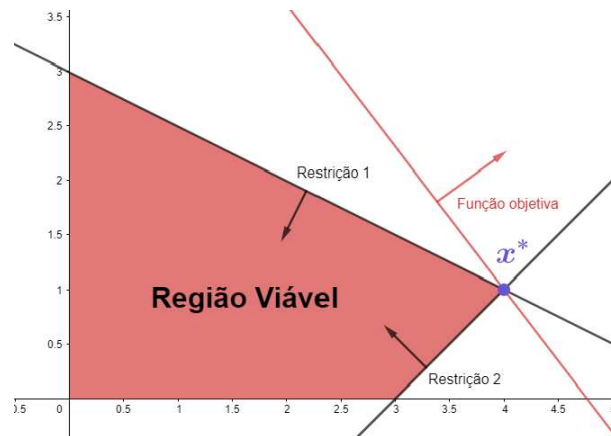


Figura 2.31: Solução Gráfica do PPL.

Fonte: Arquivo pessoal do autor.

Suponha então, que agora inserimos uma nova restrição ao problema. Os possíveis casos que teremos são:

- i. A solução do problema não é alterada, mas temos uma redução na região viável, como na Fig. (2.32).
- ii. A solução do problema continua sem ser alterada e a região viável também permanece a mesma, observe na Fig. (2.33).
- iii. O conjunto viável é vazio, as restrições são incompatíveis. Logo, o problema é inviável, veja na Fig. (2.34).
- iv. A solução do problema é alterada, pois acontece uma redução na região viável, como apresentado na Fig. (2.35).

Com isso, podemos perceber que o acréscimo de uma nova restrição ao problema implica em uma redução na região viável, o que, ou aumenta (se for uma minimização)

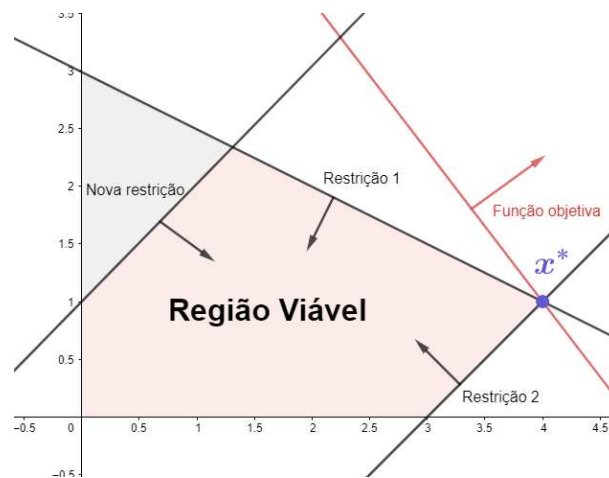


Figura 2.32: Solução Gráfica do Novo PPL - Caso *i*.

Fonte: Arquivo pessoal do autor.

ou reduz (em caso de maximização) o valor da função objetivo, ou não altera a solução encontrada. A inclusão de uma nova restrição não aumenta a região viável, ou seja, não é possível melhorar a solução numérica da função objetivo.

Sabendo que uma introdução de restrição ou não altera a solução do problema ou restringe o conjunto viável, podendo inclusive torná-lo vazio, a análise nesse caso inicia com a verificação se o acréscimo da restrição altera a solução ou não. Para isso, devemos observar se a solução do problema original satisfaz a restrição, em caso afirmativo a solução permanece inalterada.

Porém, se tivermos uma alteração na solução, devemos retornar ao método Simplex com algumas precauções. Observando que a nova linha (restrição) está sendo inserida na matriz de restrições, devemos ter o cuidado de introduzir a respectiva variável de folga para manter uma base viável inicial.

Vale destacar que caso seja feita uma alteração de coeficientes em uma restrição já existente, não será mais necessária a introdução da variável de folga para completar a base. Analise o exemplo a seguir.

Exemplo 2.8. *Uma empresa que produz automóveis e motocicletas tem a sua fábrica dividida em duas seções: a seção A, onde se efetua o trabalho de montagem, e a seção B, onde se realizam as operações de acabamento. O quadro da Fig. (2.36) mostra o número de horas gastas em cada seção na produção de um automóvel e uma motocicleta, os recursos diários da empresa (em número de horas de trabalho) e o lucro obtido com a*

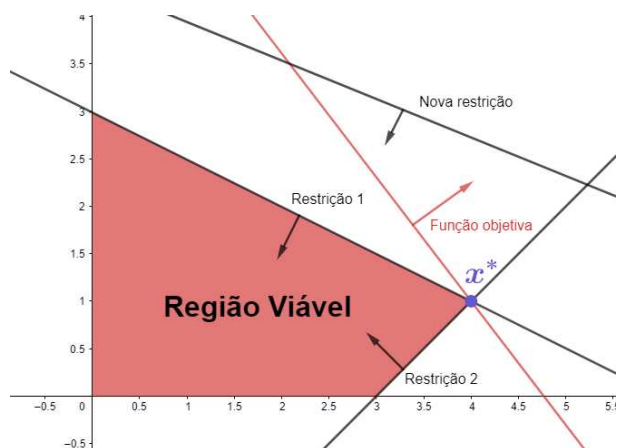


Figura 2.33: Solução Gráfica do Novo PPL - Caso *ii*.

Fonte: Arquivo pessoal do autor.

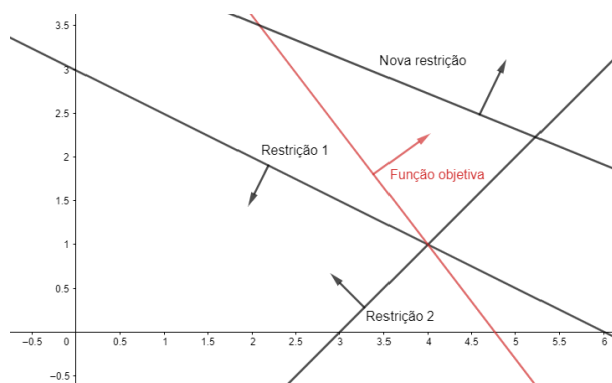


Figura 2.34: Solução Gráfica do Novo PPL - Caso *iii*.

Fonte: Arquivo pessoal do autor.

produção de cada veículo (em centenas de reais).

Supondo que por razões de mercado a produção de motocicleta não deve ultrapassar as 75 unidades diárias, pretendemos determinar quantos veículos de cada tipo devem ser produzidos por dia de forma a maximizar o lucro da empresa. A formulação do problema

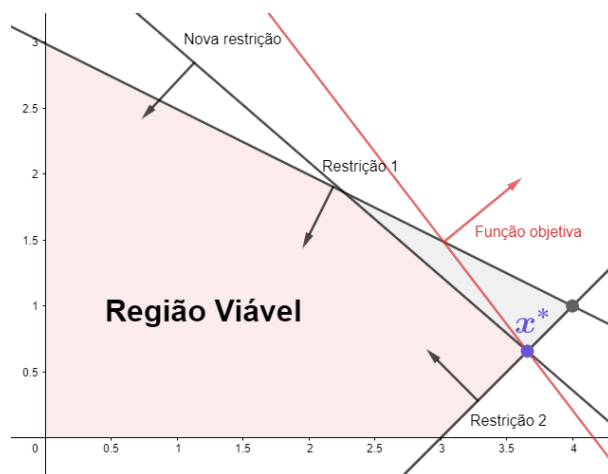


Figura 2.35: Solução Gráfica do Novo PPL - Caso *iv*.

Fonte: Arquivo pessoal do autor.

	Veículos		Recursos Disponíveis
	Automóveis	Motocicleta	
Seção A (por hora)	4	2	240
Seção B (por hora)	3	1	135
Lucro (centenas de reais)	8	5	

Figura 2.36: Dados fornecidos pela empresa para o Exemplo 2.8.

Fonte: Arquivo pessoal do autor.

pode ser escrita por:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & f(x) = -8x_1 - 5x_2 \\
 \text{s.a} \quad & 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 240 \\
 & 3x_1 + x_2 + x_4 = 135 \\
 & x_2 + x_5 = 75 \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0
 \end{aligned}$$

Com isso, o quadro ótimo do problema é dado na Fig. (2.37) e sua solução gráfica pode ser vista na Fig. (2.38).

O lucro máximo da empresa será de 535 centenas de reais, correspondendo a produção diária de 20 automóveis e 75 motocicletas. Suponhamos agora que a empresa necessite criar mais uma seção, C, na fabricação, sendo de controle de estoque dos veículos. Nesse

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_3	0	0	1	-4/3	-2/3	10
x_1	1	0	0	1/3	-1/3	20
x_2	0	1	0	0	1	75
	0	0	0	8/3	7/3	$F(x) + 535$

Figura 2.37: Quadro Simplex Ótimo do Exemplo 2.8.

Fonte: Arquivo pessoal do autor.

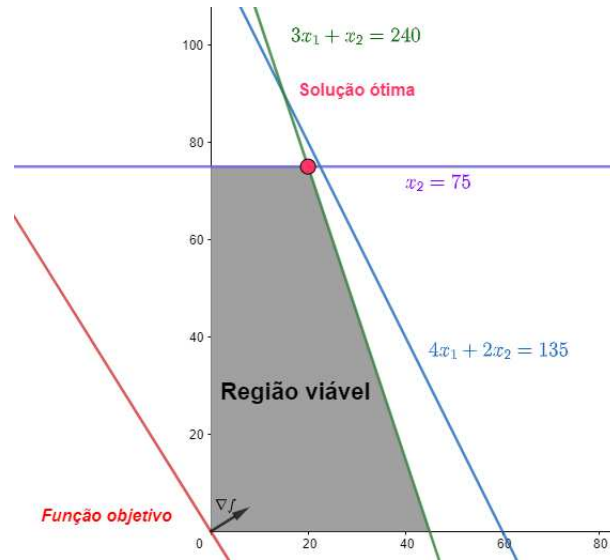


Figura 2.38: Solução Gráfica do Exemplo 2.8.

Fonte: Arquivo pessoal do autor.

caso, desejamos acrescentar ao programa a seguinte restrição:

$$x_1 + x_2 \leq 85$$

Primeiramente devemos verificar se houve alteração na solução ótima calculada anteriormente. Para isso, basta substituir os valores encontrados na restrição, o que resulta em: $20 + 75 \geq 85$, mostrando que haverá alteração na solução, uma vez que a solução encontrada no quadro ótimo não satisfaz a nova restrição.

A consequência de inserir essa nova restrição ao problema é que ela reduzirá a região viável e, conseqüentemente, diminuirá o valor no ótimo encontrado. De qualquer forma, ao acrescentar a restrição ao quadro inicial, como uma nova linha na matriz de restrições, devemos introduzir variável de folga correspondente para manter uma base viável inicial. Nesse caso, a variável de folga será x_6 . Assim teremos o quadro dado na Fig. (2.39):

As colunas de x_1 e x_2 , variáveis básicas, não são mais canônicas, pois existe o valor

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
x_3	0	0	1	-4/3	-2/3	0	10
x_1	1	0	0	1/3	-1/3	0	20
x_2	0	1	0	0	1	0	75
x_6	1	1	0	0	0	1	85
	0	0	0	8/3	7/3	0	F(x) + 535

Figura 2.39: Novo Quadro Simplex do Exemplo 2.8.

Fonte: Arquivo pessoal do autor.

1 na última linha de ambas. Fazendo $L'_4 = L_4 - (L_3 + L_2)$ temos o quadro da Fig. (2.40):

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
x_3	0	0	1	-4/3	-2/3	0	10
x_1	1	0	0	1/3	-1/3	0	20
x_2	0	1	0	0	1	0	75
x_6	0	0	0	-1/3	-2/3	1	-10
	0	0	0	8/3	7/3	0	F(x) + 535

Figura 2.40: Quadro Simplex do Exemplo 2.8 após alteração.

Fonte: Arquivo pessoal do autor.

Apesar de todos os $\hat{c}_n \geq 0$, note que existe um valor no vetor $\bar{b}$ negativo. Assim, utilizaremos o Algoritmo Dual Simplex e encontraremos o quadro ótimo da Fig. (2.41) acompanhado da nova solução gráfica dada na Fig. (2.42).

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
x_3	0	0	1	-1	0	-1	20
x_1	1	0	0	1/2	0	-1/2	25
x_2	0	1	0	-1/2	0	3/2	60
x_5	0	0	0	1/2	1	-3/2	15
	0	0	0	3/2	0	7/2	F(x) + 500

Figura 2.41: Quadro Simplex Ótimo do Exemplo 2.8 após alteração.

Fonte: Arquivo pessoal do autor.

Nesse caso o lucro máximo da empresa será de 500 centenas de reais, correspondendo a produção diária de 25 automóveis e 60 motocicletas.

2.6.2 Eliminação de restrição

Se quisermos eliminar uma restrição caímos em dois casos, sendo eles:

- A restrição eliminada é de desigualdade.

Caso a variável básica relacionada a essa restrição seja uma variável de folga, a sua eliminação não causará qualquer alteração para a solução ótima do problema.

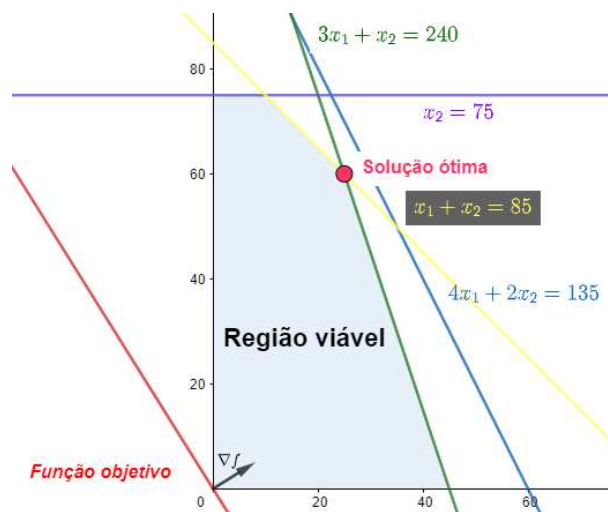


Figura 2.42: Solução Gráfica do Exemplo 2.8 após alteração.

Fonte: Arquivo pessoal do autor.

Agora, caso a variável básica não seja de folga, nada pode ser concluído e devemos resolver o novo problema desde o início.

ii. A restrição eliminada é de igualdade.

Nesse caso, precisamos recomençar a solução do quadro Simplex a partir da eliminação da restrição.

Exemplo 2.9. *Suponha que no Exemplo (2.8) a empresa flexibilize a produção de motocicleta e agora não possua mais a restrição de “não deve ultrapassar as 75 unidades diárias”. Nesse caso a restrição eliminada é de desigualdade e a variável correspondente não é de folga. Sendo assim, é necessário resolver o problema novamente. A solução encontrada nesse caso é dada no quadro ótimo na Fig. (2.43), e pela solução gráfica na Fig. (2.44).*

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	b
x_2	2	1	$1/2$	0	120
x_4	1	0	$-1/2$	1	15
	2	0	$5/2$	0	$F(x) + 600$

Figura 2.43: Quadro Simplex Ótimo do Exemplo 2.9.

Fonte: Arquivo pessoal do autor.

O lucro máximo da empresa será de 600 centenas de reais, correspondendo a produção diária de 120 motocicletas.

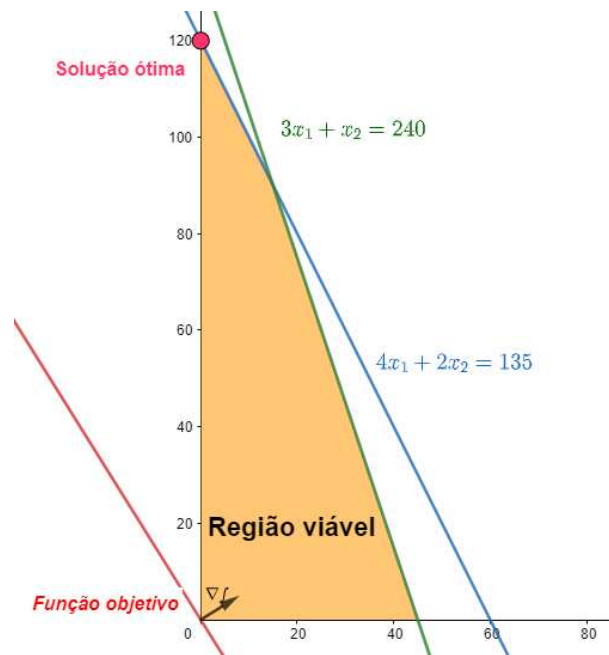


Figura 2.44: Solução Gráfica do Exemplo 2.9.

Fonte: Arquivo pessoal do autor.

2.7 Resumo de alterações no PPL

Para sintetizar os principais resultados deste capítulo relacionados às alterações de pós-otimização em um PPL e seus impactos na solução ótima foram construídos dois quadros, apresentados nas Figs. (2.45) e (2.46) que resumem as análises, resultado e interpretação para cada caso.

	Alterações no PPL				
	Coeficiente da função objetivo		Termo independente das restrições	Coeficiente da matriz de restrições	
Variável	VNB (x_i)	VB (x_i)	VB (x_B)	VNB	VB
Alteração	$c_i \Rightarrow c'_i = c_i + \theta$		$b_i \Rightarrow b'_i = b_i + \theta$	$A_t \Rightarrow A'_t = A_t + \theta$	
Cálculos	$\hat{c}'_i = \hat{c}_i + \theta$	$\hat{c}'_i = \hat{c}_i - \theta y_{ri}$ $f(x^*)' = f(x^*) - \theta b_r$	$x'_B = \hat{x}_B + B^{-1}\theta$ $f(x'_B) = f(\hat{x}) + c_B^T B^{-1}\theta$	$\hat{c}'_t = \hat{c}_t - c_B B^{-1}\theta$	$\hat{c}'_t = \hat{c}_t - c_B B^{-1}\theta$
Análise	Se $\hat{c}'_i \geq 0$	Se $\hat{c}'_i \geq 0$	Se $x'_B \geq 0$	Se $\hat{c}'_t \geq 0$	Inserir a coluna $\bar{A}_t$ no quadro simplex ótimo e transformá-la no vetor I_m .
Resultado	Em caso afirmativo a solução ótima permanece. Caso contrário, a solução pode mudar.	Em caso afirmativo a solução ótima permanece e só calculamos o valor da função objetivo. Caso contrário, o PPL deve ser refeito.	Em caso afirmativo a solução do PPL permanece viável e a base ótima não muda, mas calculamos o novo valor da função objetivo. Caso contrário, o PPL deve ser refeito.	Em caso afirmativo a solução ótima permanece. Caso contrário, aplicamos o método Simplex.	O último quadro Simplex pode fornecer: SBA do primal e dual, SBA apenas do primal, SBNA apenas do primal, e SBNA do primal e dual.
Interpretação	A quantidade que varia no coeficiente da função objetivo é a mesma que varia o custo relativo.	Essa mudança afeta diretamente a solução do PPL.	Qualquer variação no recurso não afeta o custo relativo, logo a solução se manterá viável.	Como o coeficiente é associado a VNB não ocorre mudança na base ótima.	Essa alteração implica em uma nova base ótima, consequentemente em um novo quadro Simplex.

Figura 2.45: Primeiro quadro de resumo das alterações no PPL.

Fonte: Arquivo pessoal do autor.

	Alterações no PPL					
	Inclusão de variável	Eliminação de variável		Inclusão de Restrição	Eliminação de restrição	
Variável	VB e VNB (x_{n+1})	VNB (x_r)	VB (x_r)	-	-	
Restrição	-	-	-	Qualquer	Igualdade	Desigualdade
Cálculos	$\hat{c}_{n+1}$	-	-	-	-	-
Análise	Se $\hat{c}'_i \geq 0$	-	-	Se a solução ótima atende a nova restrição.	-	Se a VB do problema é de folga.
Resultado	Em caso afirmativo a solução ótima permanece e $x_{n+1}^* = 0$. Caso contrário, devemos colocar a variável na base, utilizando o algoritmo Simplex.	Não altera a solução.	Devemos “forçar” um pivoteamento, de modo a retirar a variável da base.	Pode acontecer: de não alterar a solução, nem a região viável (no caso que a solução ótima atende a nova restrição); não alterar a solução, mas reduzir a região viável; alterar a solução e reduzir a região viável; a região viável ser vazia.	Devemos resolver o método simplex a partir da eliminação da restrição.	Em caso afirmativo a solução ótima permanece inalterada. Caso contrário devemos resolver o novo PPL.
Interpretação	Incluir uma nova variável ao problema pode ser tanto vantajoso, quanto desvantajoso.	As variáveis não básicas são nulas.	A variável está na base ótima, devemos retirá-la, para escolha da nova variável que entrará na base observamos a que proporciona um custo menos desfavorável. Consequentemente essa ação pode piorar o valor solução ótima.	A inclusão de uma nova restrição nunca melhora o valor ótimo.	Eliminar uma restrição do problema pode ser tanto vantajoso, quanto desvantajoso.	

Figura 2.46: Segundo quadro de resumo das alterações no PPL.

Fonte: Arquivo pessoal do autor.

CAPÍTULO 3

APLICAÇÃO EM UM PROBLEMA DA DIETA

Neste capítulo apresentaremos uma aplicação da Análise de Sensibilidade em um problema da dieta, uma vez que a formulação do problema de dieta, que é organizar uma nutrição saudável e pagar o menor custo por ela, é bem singular e se torna um bom candidato para estudar o impacto das mudanças sobre o valor ótimo da função objetivo. As análises são realizadas com o auxílio do software Solver da Microsoft Excel, por isso explicaremos como utilizar a ferramenta. As principais referências deste capítulo são: [5], [6], [7], [8], [11], [12], [15] e [19].

3.1 Solver

O Solver é um suplemento do Microsoft Excel que faz parte de um conjunto de programas utilizados para teste de hipóteses, inclusive em resolução de problemas de programação linear. Com a ferramenta é possível encontrar um valor ideal (máximo ou mínimo) para uma fórmula em uma célula, chamada célula do objetivo, considerando as restrições, ou limites, sobre os valores de outras células de fórmula em uma planilha. Em resumo, o Solver determina o valor máximo ou mínimo de uma célula alterando alguns parâmetros [8].

Para isso, o software trabalha com um grupo de células utilizadas no cálculo das fórmulas nas células de objetivo e de restrição, essas células são nomeadas de células variáveis. O Solver ajusta os valores nas células variáveis de decisão, para satisfazer as restrições e produzir o resultado que você deseja para a célula do objetivo. Portanto, o Solver funciona com base em três elementos de um PPL: a função objetivo, as restrições e as variáveis de decisão. Com essa ferramenta é possível realizar diversas simulações, o que torna o suplemento muito vantajoso na Análise de Sensibilidade com problemas com mais de uma variável e com restrições de parâmetros [15].

3.1.1 Ativação do Solver

Nem todo Excel possui o suplemento Solver ativado, por isso, essa deve ser a primeira ação de uma pessoa que queira utilizar a ferramenta. Para saber se o seu suplemento está ativado vá no Guia “Dados” do Excel, caso apareça o ícone “Solver” no lado direito da Faixa de Opções a sua ferramenta está ativada, caso contrário siga os passos a seguir.

Passo 1 - Primeiro clique em “Arquivos”, seguido das opções “Mais...” e “Opções”, como na Fig. (3.1).

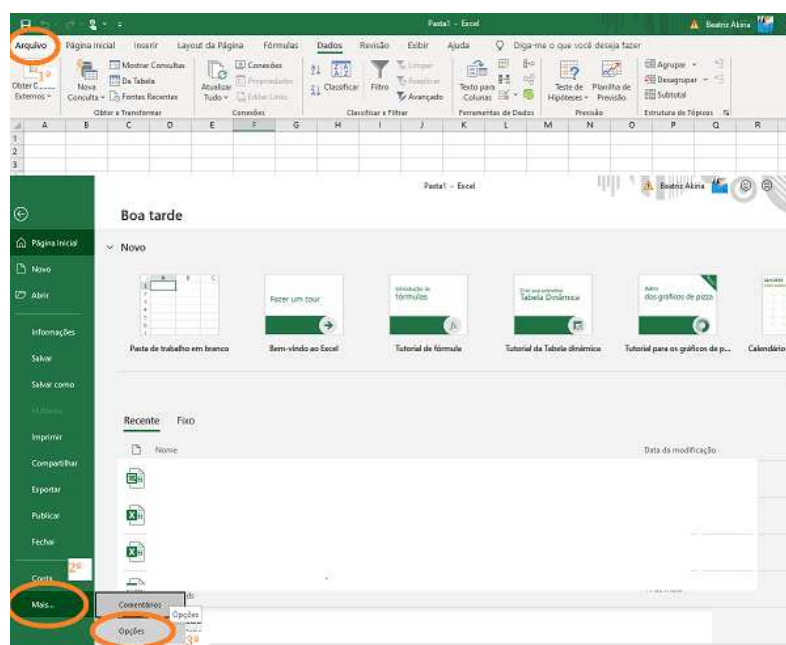


Figura 3.1: Passo 1 para ativar o Solver.

Fonte: Arquivo pessoal do autor.

Passo 2 - Posteriormente vá em “Suplementos” e clique em “Ir”, observe a Fig. (3.2).

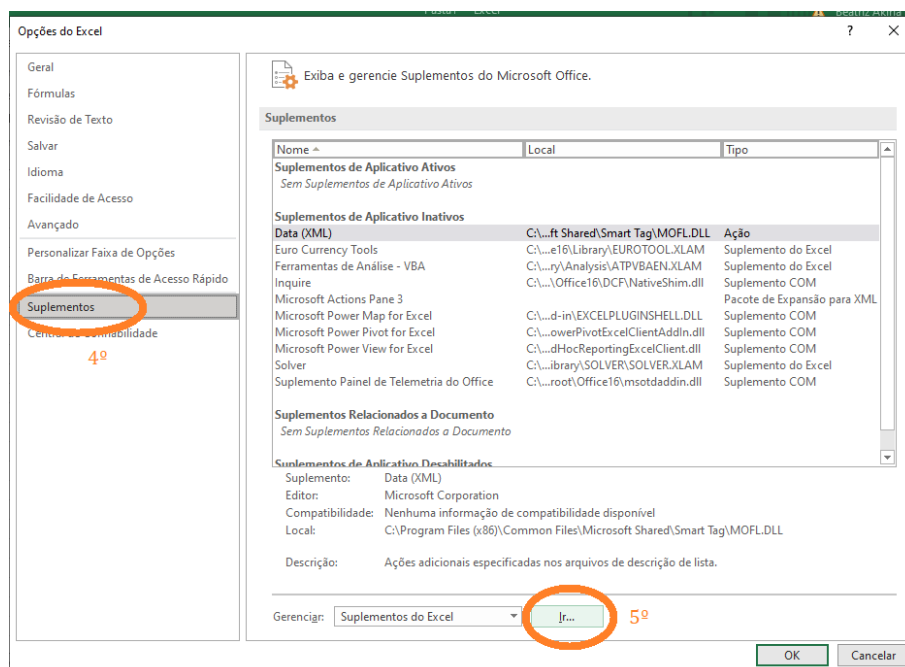


Figura 3.2: Passo 2 para ativar o Solver.

Fonte: Arquivo pessoal do autor.

Passo 3 - Em seguida basta marcar o suplemento “Solver” e clicar em “OK”, assim como mostra a Fig. (3.3).

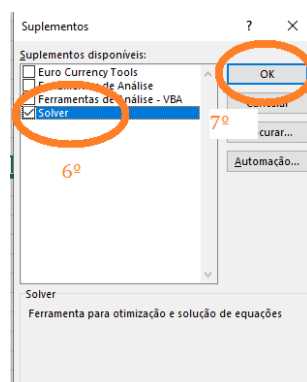


Figura 3.3: Passo 3 para ativar o Solver.

Fonte: Arquivo pessoal do autor.

Passo 4 - Agora o solver está ativado, você pode encontrá-lo no “Guia” de “Dados”,

conforme a Fig. (3.4).

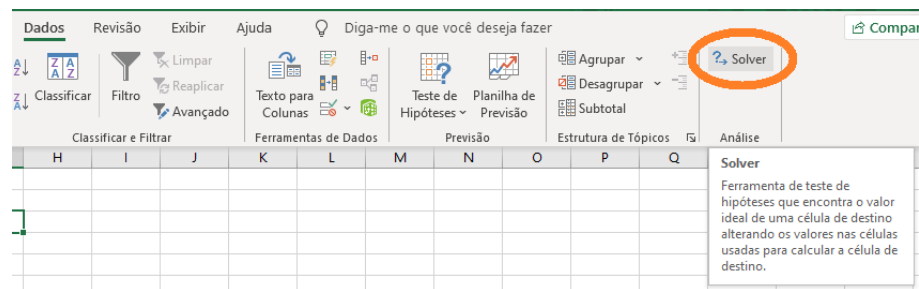


Figura 3.4: Passo 4 - Localização do Solver na barra de ferramentas do Excel.

Fonte: Arquivo pessoal do autor.

3.1.2 Inserção de um PPL no Solver

Utilizaremos um exemplo para explicar como deve ser inserido os parâmetros de um PPL no Solver do Excel.

Considere o seguinte problema:

$$\begin{aligned}
 \max \quad & f(x) = 6x_1 + 4x_2 \\
 \text{s. a} \quad & x_1 + 2x_2 \leq 3 \\
 & 3x_1 - x_2 \leq 2 \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

O problema deve ser escrito como apresentado na Fig. (3.5), onde as células amarelas representam as variáveis que devem ser encontradas, a célula verde o valor ótimo da função objetivo e as células azuis o lado esquerdo das restrições do PPL, sendo que o lado direito representa o vetor de recursos.

	X1	X2		
Coefficientes da função objetivo:	6	4		
Variáveis:				
F(X):				
Restrições	X1	X2	Lado Esquerdo (LE):	Lado Direito (LD):
Coefficientes da matriz das restrições:	1	2		3
	3	-1		2

Figura 3.5: Inserindo o PPL 3.1 na planilha no Excel.

Fonte: Arquivo pessoal do autor.

Sabemos que a função objetivo é dada por $6x_1 + 4x_2$, sendo que seu valor ótimo é calculado com as variáveis que serão encontradas. Dessa forma, para fazer esse cálculo

escrevemos na célula verde, que terá o valor ótimo, a equação que representa a função objetivo, como apresentado na Fig. (3.6). Se tivéssemos mais variáveis continuaríamos a inserção como nas duas variáveis. Para finalizar a equação é só apertar “Enter”.

	X1	X2		
Coefficientes da função objetivo:	6	4		
Variáveis:				
F(X)	=B2*B3+C2*C3			
Restrições	X1	X2	Lado Esquerdo (LE):	Lado Direito (LD):
Coefficientes da matriz das restrições:	1	2		3
	3	-1		2

Figura 3.6: Inserindo a equação da função objetivo do PPL (3.1) na planilha no Excel.

Fonte: Arquivo pessoal do autor.

Em seguida inserimos o lado esquerdo das restrições, considerando assim como na função objetivo as variáveis que estarão nas células amarelas, finalize com “Enter”. Observe a Fig. (3.7)

	X1	X2		
Coefficientes da função objetivo:	6	4		
Variáveis:				
F(X):	0			
Restrições	X1	X2	Lado Esquerdo (LE):	Lado Direito (LD):
Coefficientes da matriz das restrições:	1	2	0	3
	3	-1	=D7*B3+C7*C3	2

Figura 3.7: Inserindo o lado esquerdo das restrições do PPL (3.1) na planilha no Excel.

Fonte: Arquivo pessoal do autor.

A Fig. (3.8) mostra como ficará a planilha quando o processo for finalizado.

	X1	X2		
Coefficientes da função objetivo:	6	4		
Variáveis:				
F(X):	0			
Restrições	X1	X2	Lado Esquerdo (LE):	Lado Direito (LD):
Coefficientes da matriz das restrições:	1	2	0	3
	3	-1	0	2

Figura 3.8: Planilha com a inserção de todos dados do PPL (3.1) na planilha no Excel.

Fonte: Arquivo pessoal do autor.

3.1.3 Utilização do Solver

Agora que todos os parâmetros foram inseridos na planilha do Excel podemos utilizar o Solver. Para isso, devemos ir até o suplemento e selecioná-lo, com isso será aberta

uma caixa de diálogo “Parâmetros do Solver”, como mostra a Fig. (3.9). No campo “Definir Objetivo” devemos escolher a célula que corresponde à função objetivo, no caso a que está verde. Ainda, podemos definir se a função deve ser minimizada ou maximizada, como nosso exemplo é de maximizar foi selecionada essa opção. Ainda devemos marcar quais são as células das variáveis, no campo “Alterando Células Variáveis”, pelo exemplo marcamos as células em amarelo. Em seguida, iremos inserir as restrições do PPL, no campo “Sujeito às Restrições”, para tal clicamos em “Adicionar”.

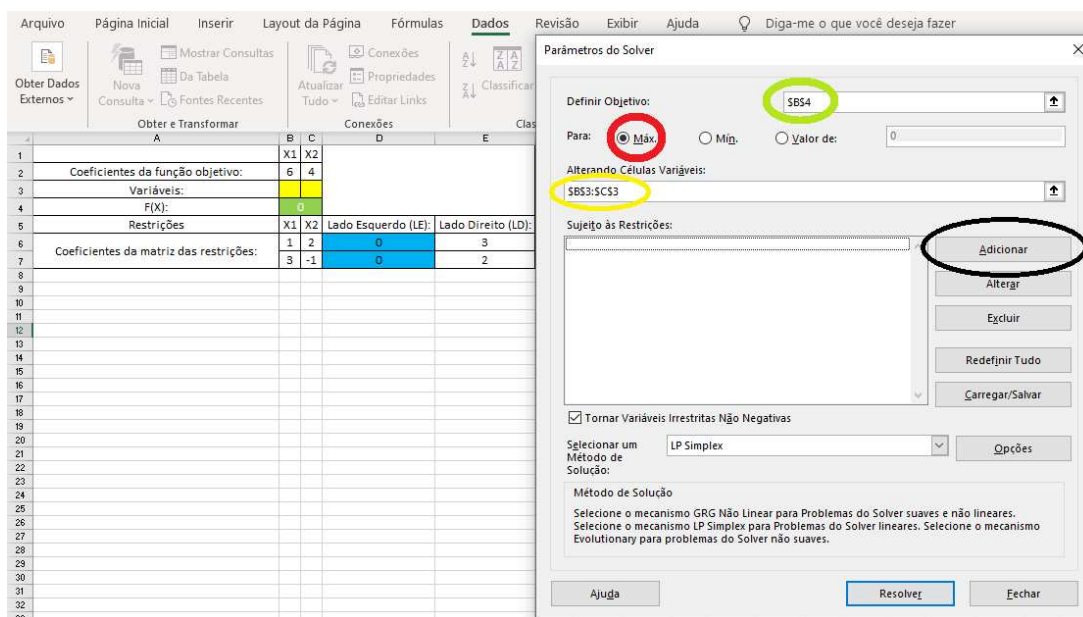


Figura 3.9: Entrada de dados do PPL (3.1) no Solver - Parte 1.

Fonte: Arquivo pessoal do autor.

Após isso será aberta uma nova caixa de diálogo, “Adicionar Restrições”. No campo “Referência de Célula” inserimos a célula correspondente ao lado esquerdo da restrição (no nosso caso as células azuis) e no campo “Restrição” colocamos a célula do lado direito, em relação a mesma restrição. Podemos escolher se a restrição é de igualdade ou desigualdade ($\leq$ ou $\geq$), após isso é só clicarmos em “Adicionar”, caso tenhamos mais restrições, ou em “OK” para finalizar a inserção de restrições. Podemos visualizar essa ação no nosso exemplo, como na Fig. (3.10).

Por fim escolhemos o método de solução, que para o estudo que estamos propondo é “LP Simplex”. Antes de resolver o problema observe que estamos considerando apenas variáveis não negativas, como podemos ver na Fig. (3.11). Assim, basta clicar em

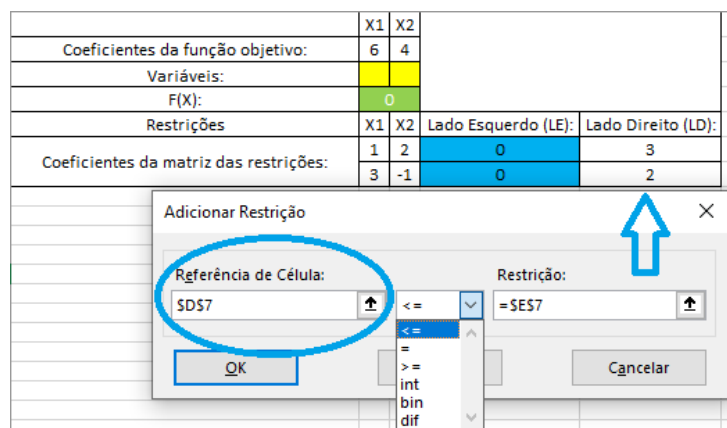


Figura 3.10: Entrada de dados do PPL (3.1) no Solver - Parte 2.

Fonte: Arquivo pessoal do autor.

“Resolver” para termos a solução do PPL.

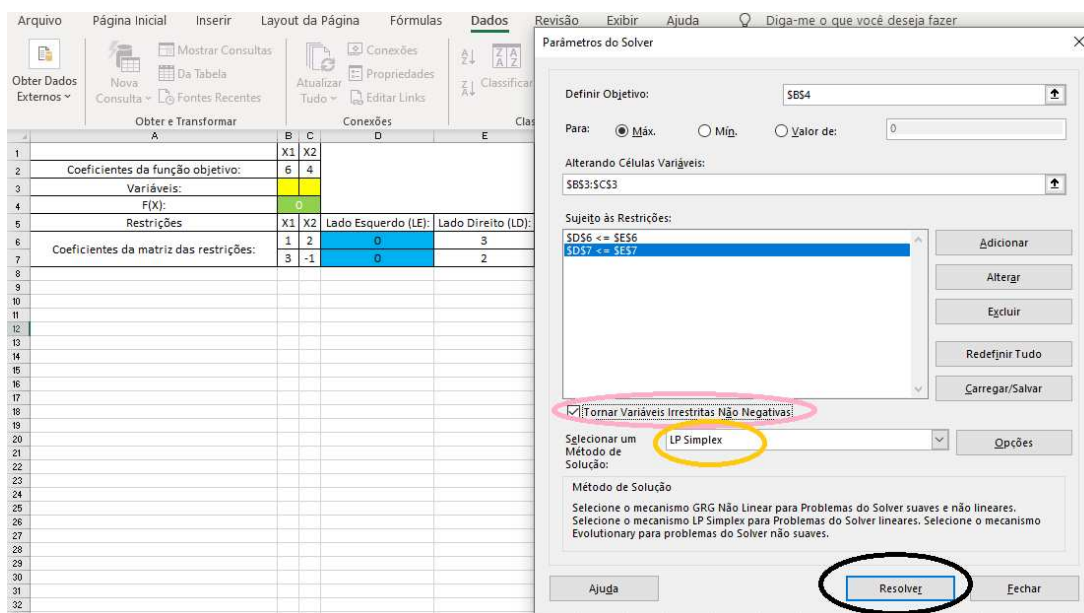


Figura 3.11: Entrada de dados do PPL (3.1) no Solver - Parte 3.

Fonte: Arquivo pessoal do autor.

Isto posto, podemos observar na Fig. (3.12), que o Solver encontrou uma solução e que “todas as restrições e condições de adequação foram satisfeitas”. No nosso exemplo a solução ótima é $x^* = (1, 1)$ e o valor ótimo da função objetivo é $f(x^*) = 10$. Para manter a solução encontrada pelo Solver é só clicarmos em “OK”, porém, existe a possibilidade de gerarmos relatórios, sendo eles: resposta, sensibilidade e limites.

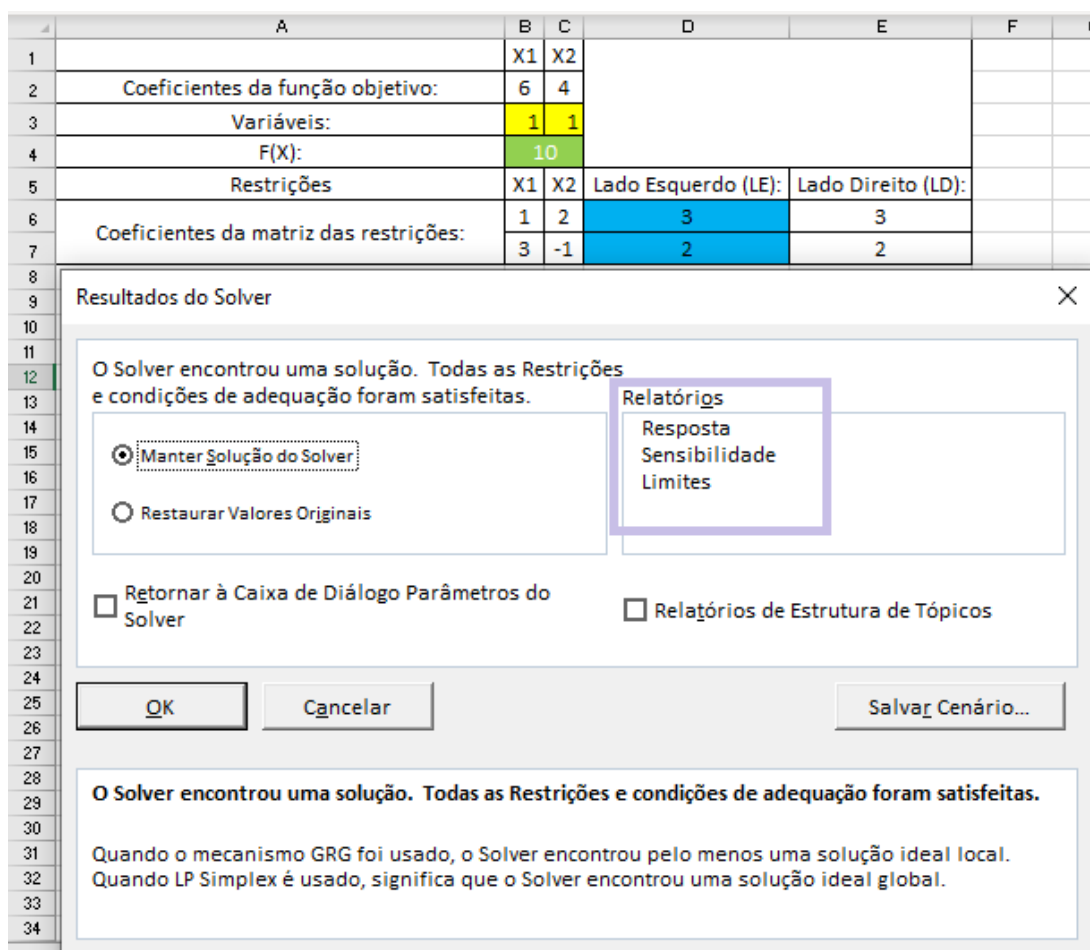


Figura 3.12: Resultados do Solver para o PPL (3.1).

Fonte: Arquivo pessoal do autor.

3.1.4 Interpretação dos Relatórios

Como mencionado, o Solver gera três relatórios para programas lineares: Relatório de Resposta, Relatório de Sensibilidade e Relatório de Limites. Para o estudo desses relatórios foi consultado [5]. Para termos acesso a esses relatórios devemos deixar a opção “Manter solução do Solver”, como na Fig. (3.12) e dessa forma selecionar os relatórios e clicar em “OK”. Com isso, três novas abas serão criadas no Excel, cada uma com um relatório. Observe na Fig. (3.13) como fica o relatório de respostas para o PPL (3.1).

O Relatório de Resposta fornece os valores original e final da célula do objetivo, sendo que o primeiro diz respeito aos valores que essas células foram preenchidas inicialmente, no exemplo tínhamos zeros, já o segundo valor mostra a solução ótima encontrada pela

	A	B	C	D	E	F	G																		
1	Microsoft Excel 16.0 Relatório de Respostas																								
2	Planilha: [Pasta1]Planilha1																								
3	Relatório Criado: 04/10/2021 18:31:10																								
4	Resultado: O Solver encontrou uma solução. Todas as Restrições e condições de adequação foram satisfeitas.																								
5	Mecanismo do Solver																								
6	Mecanismo: LP Simplex																								
7	Tempo da Solução: 0,031 Segundos.																								
8	Iterações: 2 Subproblemas: 0																								
9	Opções do Solver																								
10	Tempo Máx. Ilimitado, Iterações Ilimitado, Precisão 0,000001																								
11	Subproblemas Máx. Ilimitado, Soluç. Máx. Núm. Inteiro Ilimitado, Tolerância de Número Inteiro 1%, Assumir Não Negativo																								
12																									
13																									
14	Célula do Objetivo (Máx.)																								
15	<table><tr><th>Célula</th><th>Nome</th><th>Valor Original</th><th>Valor Final</th></tr><tr><td>\$B\$4</td><td>F(X): X1</td><td>10</td><td>10</td></tr></table>							Célula	Nome	Valor Original	Valor Final	\$B\$4	F(X): X1	10	10										
Célula	Nome	Valor Original	Valor Final																						
\$B\$4	F(X): X1	10	10																						
16																									
17																									
18																									
19	Células Variáveis																								
20	<table><tr><th>Célula</th><th>Nome</th><th>Valor Original</th><th>Valor Final</th><th>Número Inteiro</th></tr><tr><td>\$B\$3</td><td>Variáveis: X1</td><td>1</td><td>1</td><td>Conting.</td></tr><tr><td>\$C\$3</td><td>Variáveis: X2</td><td>1</td><td>1</td><td>Conting.</td></tr></table>							Célula	Nome	Valor Original	Valor Final	Número Inteiro	\$B\$3	Variáveis: X1	1	1	Conting.	\$C\$3	Variáveis: X2	1	1	Conting.			
Célula	Nome	Valor Original	Valor Final	Número Inteiro																					
\$B\$3	Variáveis: X1	1	1	Conting.																					
\$C\$3	Variáveis: X2	1	1	Conting.																					
21																									
22																									
23																									
24																									
25	Restrições																								
26	<table><tr><th>Célula</th><th>Nome</th><th>Valor da Célula</th><th>Fórmula</th><th>Status</th><th>Margem de Atraso</th></tr><tr><td>\$D\$6</td><td>Coefficientes da matriz das restrições: Lado Esquerdo</td><td>3</td><td>\$D\$6<=\$E\$6 Associação</td><td></td><td>0</td></tr><tr><td>\$D\$7</td><td>Lado Esquerdo (LE):</td><td>2</td><td>\$D\$7<=\$E\$7 Associação</td><td></td><td>0</td></tr></table>							Célula	Nome	Valor da Célula	Fórmula	Status	Margem de Atraso	\$D\$6	Coefficientes da matriz das restrições: Lado Esquerdo	3	\$D\$6<=\$E\$6 Associação		0	\$D\$7	Lado Esquerdo (LE):	2	\$D\$7<=\$E\$7 Associação		0
Célula	Nome	Valor da Célula	Fórmula	Status	Margem de Atraso																				
\$D\$6	Coefficientes da matriz das restrições: Lado Esquerdo	3	\$D\$6<=\$E\$6 Associação		0																				
\$D\$7	Lado Esquerdo (LE):	2	\$D\$7<=\$E\$7 Associação		0																				
27																									
28																									
29																									
30																									
31																									

Relatório de Respostas 1

Relatório de Sensibilidade 1

Relatório de Limites 1

Planilha1

Figura 3.13: Relatório de respostas do PPL (3.1).

Fonte: Arquivo pessoal do autor.

ferramenta, apresenta também os valores de todas as células variáveis (no caso $X1$ e $X2$). Em relação a tabela de restrição, o resultado mostra o valor da célula inserida no problema, seguida da fórmula utilizada para colocar a restrição. O campo status pode mostrar duas mensagens, no nosso exemplo o status é “Associação” o que significa que os recursos correspondentes estão escassos, se tivéssemos com o status de “Não-associação” representaria os recursos não escassos, isto é, na determinada restrição que ainda possui recursos, é possível a redução destes, sem que ocorra um impacto negativo no lucro final, desde que não ultrapasse o valor mostrado na “Margem de atraso”, que apresenta a quantidade de sobra dos recursos de cada restrição.

Já o Relatório de Limites produz o valor ótimo da função objetivo e os limites inferior e superior de cada célula de variável. Os campos “Limite Inferior” e “Resultado de destino” devem ser analisados em conjunto, por exemplo, observe na Fig. (3.14) que quando o limite inferior da variável $X1$ é zero a função objetivo vai para 4. De forma análoga

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	Microsoft Excel 16.0 Relatório de Limites													
2	Planilha: [Pasta1]Planilha1													
3	Relatório Criado: 04/10/2021 18:31:11													
4														
5														
6	Objetivo													
7	Célula Nome Valor													
8	\$B\$4 F(X): X1 10													
9														
10														
11	Variável			Inferior		Objetivo		Superior		Objetivo				
12	Célula Nome Valor			Limite		Resultado		Limite		Resultado				
13	\$B\$3 Variáveis 1			0		4		1		10				
14	\$C\$3 Variáveis 1			1		10		1		10				
15														
16														
17														
18														
19														
20														
21														
22														
23														
24														
25														
Relatório de Respostas 1 Relatório de Sensibilidade 1 Relatório de Limites 1 Planilha1														
Pronto Scroll Lock														

Figura 3.14: Relatório de limites do PPL (3.1).

Fonte: Arquivo pessoal do autor.

podemos estudar cada variável e o “Limite Superior”.

Por fim, o relatório que mais nos interessa, o Relatório de Sensibilidade. Esse relatório emite duas tabelas, sendo o de variáveis e das restrições. A tabela de células variáveis mostra o “Valor Final” das variáveis obtido após encontrada a solução. Em seguida é apresentado o “Custo Reduzido”, que indica qual o reflexo provocado no “Coeficiente Objetivo”, ou seja, mostra o valor que o coeficiente da função deveria ser modificado para que o valor da variável seja diferente de zero, caso esta seja zero. O custo reduzido é zero para todas as variáveis que fazem parte da solução ótima. Observe, na Fig. (3.15), que para o nosso exemplo, o PPL (3.1), as duas variáveis fazem parte da solução, logo o custo reduzido é zero.

As colunas “Permitido Aumentar” e “Permitido Reduzir” dizem quanto se pode aumentar ou reduzir nos coeficientes da função, sem que a solução ótima seja alterada.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Microsoft Excel 16.0 Relatório de Sensibilidade							
2	Planilha: [Pasta1]Planilha1							
3	Relatório Criado: 04/10/2021 18:31:11							
4								
5								
6	Células Variáveis							
7				Final	Reduzido	Objetivo	Permitido	Permitido
8	Célula	Nome	Valor	Custo	Coefficiente	Aumentar	Reduzir	
9	\$B\$3	Variáveis: X1	1	0	6	1E+30	4	
10	\$C\$3	Variáveis: X2	1	0	4	8	6	
11								
12	Restrições							
13				Final	Sombra	Restrição	Permitido	Permitido
14	Célula	Nome	Valor	Preço	Lateral R.H.	Aumentar	Reduzir	
15	\$D\$6	Coefficientes da matriz das restrições: Lado Esquerdo (LE):	3	2,571428571	3	1E+30	2,333333333	
16	\$D\$7	Lado Esquerdo (LE):	2	1,142857143	2	7	3,5	
17								
18								
19								
20								
21								
22								
23								
24								
25								

Figura 3.15: Relatório de sensibilidade para o PPL (3.1).

Fonte: Arquivo pessoal do autor.

Quando o resultado é $1E + 30$, como mostra a Fig. (3.15), significa que essa variável pode ser aumentada infinitamente, ou seja, é permitido aumentar o valor da variável X_1 infinitamente que mesmo assim o valor ótimo não se altera.

Agora, analisando as células das restrições, ainda na Fig. (3.15), vemos o valor final da restrição (ou lado esquerdo (LE)). Em seguida, vemos o “Preço Sombra“, que mostra quanto a função objetivo varia se aumentarmos (ou diminuirmos) 1 unidade no lado direito da restrição, que é a coluna da “Restrição Lateral R.H.”. Por último, as colunas “Permitido Aumentar” e “Permitido Reduzir” dizem o quanto o lado direito das restrições podem ser alterados sem que altere o preço sombra.

3.2 Problema da Dieta

Essa seção é uma adaptação do trabalho “Análise de Sensibilidade em um Problema da Dieta” submetido no Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional - ERMAC RJ 2021 pela graduanda e orientadora.

3.2.1 Abordagem histórica do problema

O problema da dieta é um clássico da otimização linear. Proposto por George Stigler, em 1945, a ideia era encontrar as necessidades mínimas de nutrientes diários, em 77 diferentes alimentos de acordo com as recomendações do Conselho Nacional de Pesquisa Norte-americano, para um homem mediano de aproximadamente 70kg, de forma a obter o menor custo possível. Como o algoritmo Simplex ainda não existia, Stigler resolveu o problema utilizando uma heurística inteligente e encontrou como resultado, um custo de 39,93 dólares anuais para a dieta [11], o equivalente a 588,67 dólares nos dias atuais. Isto é, o custo diário da alimentação seria inferior a 2 dólares considerando a inflação atual.

Passados dois anos, de acordo com [11], George Dantzig apresentou o método Simplex à comunidade acadêmica. Um dos problemas escolhidos para testar o novo método foi o proposto por Stigler. Dantzig encontrou, como custo final da dieta, 39,69 dólares anuais, ou seja, apenas 24 centavos de dólares a menos que o encontrado por Stigler. Assim, é provável que os valores encontrados inicialmente por Stigler estavam muito próximos do custo mínimo exato do problema da dieta [12].

Mais recentemente, em 1990, Dantzig conta que decidiu utilizar o problema da dieta para perder peso. Ele construiu o modelo e realizou diversas simulações pelo computador. Contudo, em vários momentos ele encontrou resultados absurdos, que mostravam uma falha na modelagem algébrica do problema. Por exemplo, em uma das soluções encontradas havia a recomendação de consumir 500 galões de vinagre em uma refeição diária [6].

3.2.2 O problema da dieta

Sabendo do impasse encontrado por Dantzig, em 1990, surge a seguinte pergunta: se a solução encontrada por Dantzig é ótima, qual a origem do problema? O problema estava no modelo. De acordo com [7] os modelos são representações simplificadas da realidade, mas precisam ser suficientemente similares para que as conclusões obtidas possam ser estendidas à realidade. Contudo, devemos tomar cuidado com as simplificações, porque um bom modelo deve ser capaz de representar, mesmo que resumidamente, a realidade. O que fazer então? Uma técnica é aperfeiçoar de forma interativa a representatividade do modelo. Uma das maneiras de avaliar o quão próximo um modelo de programação linear está da realidade é por meio da Análise de Sensibilidade.

Por exemplo, será que no problema proposto por Dantzig poderíamos alterar o valor da restrição ou acrescentar uma restrição para a quantidade de vinagre a ser consumida em um dia? Feita a alteração, como o valor da função objetivo e da solução ótima seriam afetados por essa mudança? Seria possível alterar a disponibilidade diária de vinagre sem que o solução ótima se alterasse? Se sim, quanto essa restrição poderia ser alterada? Se acrescentarmos mais variáveis, ainda seria possível encontrar uma solução com baixo custo e com menor ingestão de vinagre? Será que manter o vinagre no modelo é imprescindível ou o modelo poderia ser simplificado omitindo essa variável? Será que outras variáveis modeladas no problema também sofrem do mesmo problema da variável que modela a quantidade de vinagre?

Essas são apenas algumas perguntas que podem ser respondidas com a Análise de Sensibilidade. Nesse sentido, esse recurso se torna importante no processo de construção do modelo de um problema de minimizar custos em uma dieta.

Ainda, observando que o problema da dieta tem muitos vieses, já que é necessário respeitar as particularidades de cada pessoa, esse perfil de problema é um bom candidato a uma Análise de Sensibilidade. Perguntas do tipo: se retiramos esse alimento e colocarmos aquele, se aumentarmos ou diminuirmos a disponibilidade de algum alimento, se o custo de algum alimento for alterado, em ambos os casos, o que acontece com a solução ótima? podem ser respondidas usando a Análise de Sensibilidade.

Para vermos na prática como a análise de pós-otimização pode ser empregada em um problema de dieta, será exibida a dieta proposta em [19]. Em seu trabalho de conclusão de curso são apresentados e resolvidos alguns problemas de dieta e em muitas soluções encontradas há variáveis com valores incoerentes, cuja solução ótima não é muito conveniente, difíceis de serem aplicadas numa dieta. Por exemplo, uma das soluções tem como sugestão consumir 248 gramas de nozes! Existe algum problema nutricional nisso? Não. Mas pode ser difícil para algumas pessoas ingerir quase 250 gramas de nozes em um único dia.

Assim, seguindo a sugestão da autora, [19], será realizada uma Análise de Sensibilidade em um dos problemas da dieta apresentados por ela a fim de propor algumas modificações no modelo para obter uma solução mais coerente na alimentação diária de uma pessoa adulta. Devido a grande quantidade de variáveis e ao grande volume de contas, todas as simulações numéricas serão feitas no Solver da Microsoft Excel.

Considere o seguinte problema (apresentado por [19] (p. 60)):

Maria fez uma visita à sua nutricionista, pois estava preocupada com sua saúde, ela tem 1,60m de altura e 90kg. Sua nutricionista recomendou que ela fizesse uma dieta de forma a obter os nutrientes necessários para o dia-a-dia de uma pessoa.

O plano alimentar que sua nutricionista lhe passou, recomenda que Maria consuma diariamente no mínimo 1870 kcal de energia, 46g de proteína, 1g de cálcio, 1,5g de sódio, 0,018g de ferro e 0,775g de vitaminas. O plano alimentar foi elaborado com base nos grupos alimentares e nas porções diárias necessárias que Maria deve consumir. O valor nutritivo (em gramas) e o preço em reais (por porção) de cada alimento que ela está considerando comprar são, respectivamente, as restrições e os coeficientes da função objetivo. Observe a Fig. (3.16).

	Pão Integral	Queijo Cottage	Mamão	Nozes	Salada Crua	Feijão	Arroz Integral	Frango Grelhado	Maçã	Tapioca	Ovo	Atum Ralado	Iogurte
Energia (kcal)	136	85	45	100	25	132	25	165	72	68	77	17	99
Proteína (g)	4,6	17,2	0,8	2,3	1,5	8,8	0,5	31	0,3	0	6,2	3	3,9
Cálcio (g)	0,06	0,03	0,02	0	0,02	0,03	0	0,02	0,01	0	0,03	0	0,14
Sódio (g)	0,276	0,013	0,005	0	0,08	0,001	0	0,074	0,001	0,037	0,139	0,069	0,053
Ferro (g)	0,1	0,01	0,01	0	0,03	0,12	0	0,06	0,01	0,02	0,03	0	0
Vitaminas (g)	0	0,01	0,77	0	0,93	0	0	0	0,12	0	0,06	0	0,02
Tamanho da Porção	52g	100g	100g	15g	100g	100g	20g	100g	140g	20g	50g	20g	100g
Preço (por porção)	0,93	5,24	1,29	3,05	0,5	0,63	0,09	0,89	1,95	0,21	0,99	0,61	1,69

Figura 3.16: Valor Nutricional e Preço.

Fonte: (TIRONE, 2019, p. 58).

Assim, o intuito do problema é que Maria consiga uma dieta com menor custo possível e uma quantidade mínima de nutrientes, restringindo as variáveis à quantidade máxima de porções diária. Sejam as variáveis definidas por, x_i , $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12$ e 13 , que representam, respectivamente, uma porção de: pão integral, queijo cottage, mamão, nozes, salada crua, feijão, arroz integral, frango grelhado, maçã, tapioca, ovo, atum ralado e iogurte. Além disso, para atingir as recomendações nutricionais para a quantidade de porções diárias, temos mais 5 restrições, sendo elas:

- Frutas: No máximo 1 porção $\Rightarrow x_3 + x_9 \leq 1$
- Leite e Derivados: No máximo 1 porção $\Rightarrow x_2 + x_{13} \leq 1$

- Proteínas (Carne, PVT, Ovo): No máximo 1 porção $\Rightarrow x_8 + x_{11} + x_{13} \leq 1$
- Cereais: No máximo 1 porção $\Rightarrow x_1 + x_7 \leq 1$
- Leguminosas; Sementes e Oleaginosas; Raízes e Tubérculos: No máximo 1 porção $\Rightarrow x_4 + x_6 + x_{10} \leq 1$
- Vegetais: Livre $\Rightarrow x_5 \geq 0$

O modelo algébrico que representa o problema da dieta é dado pela Eq. (3.2) e é composto pela função objetivo e 11 restrições relacionadas às calorias, proteínas, cálcio, sódio, ferro, vitaminas, quantidade de porções diárias e não negatividade das variáveis. Para uma consulta mais detalhada do problema consulte [19].

$$\begin{aligned}
\min C(x) = & 0,93x_1 + 5,24x_2 + 1,29x_3 + 3,05x_4 + 0,5x_5 + 0,63x_6 + 0,09x_7 + 0,89x_8 \\
& + 1,95x_9 + 0,21x_{10} + 0,99x_{11} + 0,61x_{12} + 1,69x_{13} \\
s.a. & \\
& [1] 136x_1 + 85x_2 + 45x_3 + 100x_4 + 25x_5 + 132x_6 + 25x_7 + 165x_8 + 72x_9 \\
& + 68x_{10} + 77x_{11} + 17x_{12} + 99x_{13} \geq 1870 \quad \textbf{Calorias} \\
& [2] 4,6x_1 + 17,2x_2 + 0,8x_3 + 2,3x_4 + 1,5x_5 + 8,8x_6 + 0,5x_7 + 31x_8 \\
& + 0,3x_9 + 6,2x_{11} + 3x_{12} + 3,9x_{13} \geq 46 \quad \textbf{Proteínas} \\
& [3] 0,06x_1 + 0,03x_2 + 0,02x_3 + 0,02x_5 + 0,03x_6 + 0,02x_8 + 0,01x_9 \\
& + 0,03x_{11} + 0,14x_{13} \geq 1 \quad \textbf{Cálcio} \\
& [4] 0,276x_1 + 0,013x_2 + 0,0055x_3 + 0,08x_5 + 0,001x_6 + 0,074x_8 \\
& + 0,001x_9 + 0,037x_{10} + 0,139x_{11} + 0,069x_{12} + 0,053x_{13} \geq 1,5 \quad \textbf{Sódio} \\
& [5] 0,1x_1 + 0,01x_2 + 0,01x_3 + 0,03x_5 + 0,12x_6 + 0,06x_8 + 0,01x_9 \\
& + 0,02x_{10} + 0,03x_{11} \geq 0,018 \quad \textbf{Ferro} \\
& [6] 0,01x_2 + 0,77x_3 + 0,93x_5 + 0,12x_9 + 0,06x_{11} + 0,02x_{13} \geq 0,775 \quad \textbf{Vit.} \\
& [7] -x_3 - x_9 \geq -1 \\
& [8] -x_2 - x_{13} \geq -1 \\
& [9] -x_8 - x_{11} - x_{13} \geq -1 \\
& [10] -x_1 - x_7 \geq -1 \\
& [11] -x_4 - x_6 - x_{10} \geq -1 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{13} \geq 0 \quad \textbf{Não Negatividade}
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Utilizando a ferramenta Solver da Microsoft Excel encontramos a solução ótima que pode ser vista na Fig. (3.17). Rescrevendo a solução do PPL temos: 1 porção de pão integral, 57,48 porção de salada crua, 1 porção de feijão e 1 porção de frango grelhado, ou seja, 52g de pão integral, 5.748g de salada crua, 100g de feijão e 100g de frango grelhado, com um custo diário de R\$ 31,19.

Alimentos	Pão	Queijo cottage	Mamão	Nozes	Salada crua	Feijão	Arroz Integral	Frango grelhado	Maçã	Tapioca	Ovo	Atum ralado	logurte	
Coefficientes	0,93	5,24	1,29	3,05	0,5	0,63	0,09	0,89	1,95	0,21	0,99	0,61	1,69	
$F(x^*)=$	31,19													
Variáveis	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_10	x_11	x_12	x_13	
x^*	1	0	0	0	57,48	1	0	1	0	0	0	0	0	
Restrições														LE LD
	136	85	45	100	25	132	25	165	72	68	77	17	99	1870 1870
	4,6	17,2	0,8	2,3	1,5	8,8	0,5	31	0,3	0	6,2	3	3,9	130,6 46
	0,06	0,03	0,02	0	0,02	0,03	0	0,02	0,01	0	0,03	0	0,14	1,26 1
	0,276	0,013	0,0055	0	0,08	0,001	0	0,074	0,001	0,037	0,14	0,069	0,053	4,949 1,5
	0,1	0,01	0,01	0	0,03	0,12	0	0,06	0,01	0,02	0,03	0	0	2,004 0,018
	0	0,01	0,77	0	0,93	0	0	0	0,12	0	0,06	0	0,02	53,46 0,775
	0	0	-1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0 -1
	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0 -1
	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	-1	0	-1	-1 -1
	-1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	-1 -1
	0	0	0	-1	0	-1	0	0	0	-1	0	0	0	-1 -1

Figura 3.17: Solução ótima do problema da dieta.

Fonte: Arquivo pessoal do autor.

A solução obtida proporciona um equilíbrio alimentar com um custo diário aceitável e respeitando as quantidades mínimas de nutrientes. No entanto, há vários problemas. Que adulto comeria mais de 5kg de salada crua diariamente? E o arroz, o mamão, o queijo, as nozes, a maçã, a tapioca, o ovo e o atum? Serão eliminados da dieta? Assim, embora a solução seja ótima, é provável que a dieta se torne inviável por não satisfazer algumas individualidades do paciente.

Mas se começarmos a criticar o modelo fazendo perguntas do tipo: e se o paciente pudesse consumir até duas porções, ao invés de uma, de frutas? E se restringir a quantidade de vegetais? Como essas mudanças alteraria o resultado? É claro que se o problema estiver pronto e implementado em algum algoritmo podemos simplesmente alterar o parâmetro e rodar novamente e comparar os resultados. Essa é uma alternativa interessante para problemas pequenos, de rápida solução e que não demandam muito tempo computacional. Mas, em condições contrárias a essa, podemos utilizar a Análise de Sensibilidade.

Assim, no problema da dieta, o que pode ser feito para melhorar a solução sem que

o valor ótimo do custo se altere? O Solver gera dois relatórios de sensibilidade, um para as restrições e outro para as variáveis. Examinando os relatórios podemos verificar se e como o valor ótimo muda de acordo com modificações relativamente pequenas nos dados de entrada.

Visto que as restrições do problema da dieta são dados fornecidos por um nutricionista, para fazermos modificações nas restrições precisamos de uma consultoria nutricional. Por exemplo, não podemos aumentar ou diminuir a quantidade de porções de frutas ou proteínas sem a anuência de um profissional. Por isso, nesta pesquisa faremos um estudo do relatório de sensibilidade para as variáveis que está apresentado na Fig. (3.18).

Células Variáveis

Célula	Nome	Final Valor	Reduzido Custo	Objetivo Coeficiente	Permitido Aumentar	Permitido Reduzir
\$C\$4	Variaveis x_1	1	0	0,93	1,38	1E+30
\$D\$4	Variaveis x_2	0	3,54	5,24	1E+30	3,54
\$E\$4	Variaveis x_3	0	0,39	1,29	1E+30	0,39
\$F\$4	Variaveis x_4	0	3,06	3,05	1E+30	3,06
\$G\$4	Variaveis x_5	57,48	0		0,177083333	0,310810811
\$H\$4	Variaveis x_6	1	0	0,63	0,86	1E+30
\$I\$4	Variaveis x_7	0	1,38	0,09	1E+30	1,38
\$J\$4	Variaveis x_8	1	0	0,89	1,86	1E+30
\$K\$4	Variaveis x_9	0	0,51	1,95	1E+30	0,51
\$L\$4	Variaveis x_10	0	0,86	0,21	1E+30	0,86
\$M\$4	Variaveis x_11	0	1,86	0,99	1E+30	1,86
\$N\$4	Variaveis x_12	0	0,27	0,61	1E+30	0,27
\$O\$4	Variaveis x_13	0	2,12	1,69	1E+30	2,12

Figura 3.18: Relatório de sensibilidade referente aos coeficientes das variáveis do problema da dieta original.

Fonte: Arquivo pessoal do autor.

A coluna **Final Valor** mostra o valor de cada variável na solução ótima, por exemplo, $x_5^* = 57,48$, ou seja, como já foi visto, na solução ótima deve-se comer 57,48 porção de salada crua. A coluna **Reduzido Custo** apresenta os valores do custo relativo de cada variável na iteração ótima, e só se aplica às variáveis que assumem valor zero na solução ótima. O custo reduzido indica o total que o coeficiente de cada variável na função objetivo deve melhorar para que ela deixe de ser zero na solução ótima, ou seja, se torne básica; além disso, significa o quanto a função objetivo irá melhorar ou piorar para cada

unidade que a variável aumentar ou diminuir. Observe que o custo reduzido só se aplica nas variáveis que são nulas na solução ótima.

Por último há as colunas **“Permitido Reduzir”** e **“Permitido Aumentar”** que mostram o quanto podemos reduzir ou aumentar, respectivamente, no valor dos coeficientes das variáveis sem que valor ótimo da função objetivo se altere. O símbolo $1E + 30$ é o infinito do Excel e quando ele aparece nas colunas Permitido Aumentar e Permitido Reduzir significa que se pode aumentar e diminuir, respectivamente, o quanto se queira que o valor ótimo da função objetivo não será alterado.

Note que o problema da dieta é de minimizar custos, mas na coluna Permitido Aumentar aparecem algumas variáveis cujos valores dos coeficientes podem ser aumentados infinitamente e mesmo assim o valor da solução ótima não altera. Como isso é possível? Isso acontece por que essas variáveis não são básicas na solução ótima, então podemos aumentar o valor dos coeficientes delas o quanto quisermos pois não influenciarão na solução ótima. Por outro lado, se reduzimos o valor dos coeficientes dessas variáveis que não estão na base ótima elas se tornam candidatas para entrar na base e manter ou melhorar a solução ótima. Visto que os coeficientes das variáveis representam os preços dos produtos, suponha que consigamos uma promoção em um supermercado onde o preço de alguns alimentos estão mais baratos que os cotados anteriormente.

Assim, considere que Maria encontrou um local onde os preços do mamão, da maçã, do ovo e do atum estão mais baratos que no mercado que ela está acostumada a realizar suas compras. O preço do mamão passou de R\$ 1,29 para R\$ 0,9, a maçã que custava R\$ 1,95 no primeiro mercado custa agora R\$ 1,55, já o ovo deixou de ser R\$ 0,99 para ter o custo de R\$ 0,6, e, por fim, o preço do atum ralado passou de R\$ 0,61 para R\$ 0,34. Observe que as reduções dos preços estão dentro da faixa do “Permitido Reduzir” do relatório de sensibilidade e portanto essas modificações não alterarão o valor da solução ótima. Mas será que com essas mudanças de preços conseguiremos aumentar a variedade de alimentos na dieta? Resolvendo no Solver o problema modificado encontramos o resultado indicado na Fig. (3.19).

Observe que o mamão e o atum ralado passaram a fazer parte da dieta, o que proporciona uma maior variedade alimentícia. Porém, a quantidade de salada crua, 4.350g, ainda está muito acima do desejável.

A Maria poderia continuar procurando por novas promoções para tentarmos incluir novos alimentos na dieta sem alterar o gasto. Mas, vamos agora resolver o problema da

Alimentos	Pão	Queijo cottage	Mamão	Nozes	Salada crua	Feijão	Arroz Integral	Frango grelhado	Maçã	Tapioca	Ovo	Atum ralado	Iogurte	
Coeficientes	0,93	5,24	0,9	3,05	0,5	0,63	0,09	0,89	1,55	0,21	0,6	0,34	1,69	
$F(\mathcal{X}^*) =$	31,19													
Variáveis	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	
$\mathcal{X}^*$	1	0	1	0	43,5	1	0	1	0	0	0	17,91	0	
Restrições														LE LD
	136	85	45	100	25	132	25	165	72	68	77	17	99	1870 1870
	4,6	17,2	0,8	2,3	1,5	8,8	0,5	31	0,3	0	6,2	3	3,9	164,2 46
	0,06	0,03	0,02	0	0,02	0,03	0	0,02	0,01	0	0,03	0	0,14	1 1
	0,276	0,013	0,0055	0	0,08	0,001	0	0,074	0,001	0,037	0,14	0,069	0,053	5,072 1,5
	0,1	0,01	0,01	0	0,03	0,12	0	0,06	0,01	0,02	0,03	0	0	1,595 0,018
	0	0,01	0,77	0	0,93	0	0	0	0,12	0	0,06	0	0,02	41,22 0,775
	0	0	-1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	-1 -1
	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0 -1
	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	-1	0	-1	-1 -1
	-1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	-1 -1
	0	0	0	-1	0	-1	0	0	0	-1	0	0	0	-1 -1

Figura 3.19: Solução do problema da dieta com redução dos custos de alguns alimentos.

Fonte: Arquivo pessoal do autor.

salada crua. Um modo de corrigirmos isso é acrescentar uma nova restrição ao problema inicial restringindo a quantidade de salada na dieta. Adotaremos $x_5 \leq 20$, isto é, a Maria comerá no máximo 2 quilos de salada crua por dia, essa restrição tornará a quantidade de salada mais possível na alimentação diária. Essa fragilidade do modelo pode ser observada ao analisar os resultados porém, ao acrescentarmos uma restrição não há como prevermos o que acontecerá com a solução ótima e será preciso resolver o problema novamente.

A solução encontrada após acrescentarmos uma restrição relacionada à quantidade de salada crua é apresentada na Fig. (3.20). Apesar da quantidade de salada crua agora ser mais viável, e termos o mamão, o iogurte e o atum ralado na dieta, observe que a quantidade de atum ralado subiu consideravelmente, sendo 56,35 de porção, ou seja, 1.127g. Além disso, o custo da dieta que era de R\$ 31,19 passou a ser R\$ 48,9, um aumento significativo.

Então, sugerimos aqui mais uma modificação no modelo da dieta proposta por [19], que é acrescentar uma restrição quanto à quantidade de porções de atum ralado. Se restringirmos a variável $x_{12} \leq 20$, isto é, se restringirmos à 20 porções (400g) encontramos a solução indicada no quadro ótimo da Fig. (3.21).

A solução do problema é dada por: 1 porção de pão integral, 1 porção de queijo cottage, 20 porções de salada crua, 1 porção de feijão, 1 porção de frango grelhado, 1 maçã e 20 porções de atum ralado, ou seja, 52g de pão integral, 100g de queijo cottage,

Alimentos	Pão	Queijo cottage	Mamão	Nozes	Salada crua	Feijão	Arroz Integral	Frango grelhado	Maçã	Tapioca	Ovo	Atum ralado	logurte	
Coefficientes	0,93	5,24	1,29	3,05	0,5	0,63	0,09	0,89	1,95	0,21	0,99	0,61	1,69	
$F(\mathcal{X}^*)=$	48,915													
Variáveis	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_10	x_11	x_12	x_13	
$\mathcal{X}^*$	1	0	1	0	20	1	0	0	0	0	0	56,35	1	
Restrições														
	136	85	45	100	25	132	25	165	72	68	77	17	99	LE
	4,6	17,2	0,8	2,3	1,5	8,8	0,5	31	0,3	0	6,2	3	3,9	LD
	0,06	0,03	0,02	0	0,02	0,03	0	0,02	0,01	0	0,03	0	0,14	0,65
	0,276	0,013	0,0055	0	0,08	0,001	0	0,074	0,001	0,037	0,14	0,069	0,053	5,824
	0,1	0,01	0,01	0	0,03	0,12	0	0,06	0,01	0,02	0,03	0	0	0,83
	0	0,01	0,77	0	0,93	0	0	0	0,12	0	0,06	0	0,02	19,39
	0	0	-1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	-1
	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1
	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	-1	0	-1	-1
	-1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	-1
	0	0	0	-1	0	-1	0	0	0	-1	0	0	0	-1
	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	20

Figura 3.20: Solução do problema da dieta com redução dos custos e inclusão de uma restrição.

Fonte: Arquivo pessoal do autor.

Alimentos	Pão	Queijo cottage	Mamão	Nozes	Salada crua	Feijão	Arroz Integral	Frango grelhado	Maçã	Tapioca	Ovo	Atum ralado	logurte	
Coefficientes	0,93	5,24	1,29	3,05	0,5	0,63	0,09	0,89	1,95	0,21	0,99	0,61	1,69	
$F(\mathcal{X}^*)=$	31,84													
Variáveis	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_10	x_11	x_12	x_13	
$\mathcal{X}^*$	1	1	0	0	20	1	0	1	1	0	0	20	0	
Restrições														
	136	85	45	100	25	132	25	165	72	68	77	17	99	1430
	4,6	17,2	0,8	2,3	1,5	8,8	0,5	31	0,3	0	6,2	3	3,9	151,9
	0,06	0,03	0,02	0	0,02	0,03	0	0,02	0,01	0	0,03	0	0,14	0,55
	0,276	0,013	0,0055	0	0,08	0,001	0	0,074	0,001	0,037	0,14	0,069	0,053	3,345
	0,1	0,01	0,01	0	0,03	0,12	0	0,06	0,01	0,02	0,03	0	0	0,9
	0	0,01	0,77	0	0,93	0	0	0	0,12	0	0,06	0	0,02	18,73
	0	0	-1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	-1
	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1
	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	-1	0	-1	-1
	-1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	-1
	0	0	0	-1	0	-1	0	0	0	-1	0	0	0	-1
	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	20
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	20

Figura 3.21: Solução do problema da dieta com redução dos custos e inclusão de duas restrições.

Fonte: Arquivo pessoal do autor.

2.000g de salada crua, 100g de feijão, 100g de frango grelhado, 140g de maçã e 400g de atum ralado, com um custo de R\$ 31,84, bem próximo ao valor inicial encontrado.

CAPÍTULO 4

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A Análise de Sensibilidade se mostra uma ferramenta vantajosa no estudo da solução de problemas de programação linear. Com essa ferramenta é possível encontrar as variáveis e as restrições que se alteradas podem melhorar, piorar ou não mudar a solução ótima, ou seja, podemos medir o grau de sensibilidade do modelo mediante uma alteração, tudo isso sem a necessidade de resolver o problema novamente. Esta análise também permite a verificação se a modelagem do problema corresponde minimamente à realidade. Outra vantagem é que se pode aperfeiçoar um modelo por observar o que está acontecendo com os parâmetros, sendo assim, podemos testar diversas variáveis para entender o efeito que cada uma produz no final do processo e assim aprimorar o modelo por aumentar ou reduzir os valores dos parâmetros.

Esta pesquisa contribuiu, principalmente, para que a graduanda tivesse acesso à outras áreas do conhecimento matemático, e que por sua vez, a possibilitou pesquisar, desenvolver, resolver e analisar soluções de problemas de programação linear. Dessa forma, podemos concluir que o principal impacto deste trabalho é na formação acadêmica da discente, já que a pesquisa extracurricular realizada contribuiu para o amadurecimento do pensamento científico e crítico da graduanda.

Ainda, esta monografia apresenta alguns resultados importantes sobre Análise de Sensibilidade encontrados na literatura, porém, buscamos escrevê-los de forma mais clara e didática. Para isso resolvemos diversos exemplos aplicando a teoria e desenvolvendo ilustrações quando possível. Também, o trabalho apresentou, por meio do software Solver da

Microsoft Excel, a solução ótima de um problema da dieta e foram propostas alterações no modelo inicial de modo a adaptar a solução com a realidade de uma dieta alimentar. O resultado encontrado foi melhor e mais adequado à realidade. O modelo final, bem como sua solução ótima, além de serem aceitos do ponto de vista matemático, também proporcionam um equilíbrio alimentar, com um custo diário aceitável, respeitando as quantidades mínimas de nutrientes, e ainda, viável do ponto de vista nutricional.

Com as simulações realizadas fica evidente que ainda há muito a ser feito, como por exemplo, o estudo de outras alterações nos valores dos coeficientes das variáveis, a inclusão de novas restrições limitando a quantidade de porções de alguns alimentos, inclusão de novas restrições relacionadas às quantidades máximas de calorias, de proteínas, de cálcio, de sódio, de ferro e de vitaminas. No entanto, algumas dessas alterações só podem ser testadas com a anuência de um profissional qualificado da área da nutrição. Como em muitos problemas práticos de otimização, o problema da dieta deve ser modelado por uma equipe multidisciplinar.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] ARENALES, M.; ARMENTANO, V. A.; MORABITO, R.; YANASSE, H. H. **Pesquisa operacional**. Rio de Janeiro, Elsevier: ABEPRO, 2011
- [2] BAZARAA, M. S.; JARVIS, J. J.; SHERALI, H. D. **Linear programming and network flows**, 4.ed. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, 2010.
- [3] BRANDÃO, M. A. L. **Introdução à Programação Linear**, 2019. 198 f. Notas de Aula.
- [4] CHAVES, V. H. C. **Perspectivas históricas da pesquisa operacional**. 2011. 117 f. Dissertação - (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2011. Disponível em: <http://hdl.handle.net/11449/91049>.
- [5] CORRAR, L. J.; THEÓPHILO, C. R., BERGMANN, D. R. Programação linear. *In*: CORRAR, L. J.; THEÓPHILO, C. R. **Pesquisa operacional para decisão em contabilidade e administração: contabilometria**. São Paulo: Atlas, 2004.
- [6] DANTZIG, G.B. The diet problem, **Interfaces** **20**, 43-47, 1990.
- [7] GOLDBARG, M. C.; LUNA, H. P. L. **Otimização combinatória e programação linear: modelos e algoritmos**, 2. ed. Elsevier, Rio de Janeiro, 2005.

- [8] GOMES JÚNIOR, A. de C.; SOUZA, M. J. F. **SOLVER (EXCEL)**: Manual de referência. Ouro Preto: Universidade Federal de Ouro Preto, 2004, 22 p.
- [9] HILLIER, F. S.; LIEBERMAN, G. J. 2001. **Introduction to Operations Research**, 7. ed. McGraw-Hill, New York.
- [10] MORETTI, V.; et al. Aplicação da Programação Linear para maximização de lucros numa organização do setor varejista. In: X CONGRESSO BRASILEIRO DE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO, 10., 2020. Anais eletrônicos ... ConBRepro, 2020. p. 1 - 12. Disponível em: https://aprepro.org.br/conbrepro/2020/anais/arquivos/09272020_200907_5f711c8348ea9.pdf. Acesso em: 12 set. 2021. ISSN: 2237-6143
- [11] NAMEN, A. A.; BORNSTEIN, C. T. Uma ferramenta para avaliação de resultados de diversos modelos de otimização de dietas. **Pesquisa Operacional** [online], v. 24, n. 3, p. 445-465, 2004. DOI: 10.1590/S0101-74382004000300007.
- [12] O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. **Biographies George Bernard Dantzig**. School of Mathematics and Statistics University of St Andrews, Scotland, 2003. Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Dantzig-George/>. Acesso em: 12 set. 2021.
- [13] PEREIRA, A.; LUZ, C. **Programação Linear**: Apontamentos para a disciplina de Investigação Operacional, 2003/2004. 98 f. Notas de Aula. Disponível em: <http://ltodi.est.ips.pt/invop/Seb/Proglinear/PLUV.pdf>. Acesso em: 10 ago. 2021.
- [14] PEREIRA, A. R.; PAULA JÚNIOR, G. G. de., LADEIRA, H. P. Uma análise de pós-otimização do transporte de carvão vegetal no estado de Minas Gerais. **Revista Árvore**. Viçosa, 1981, v. 5, n. 2, p. 135-147. Disponível em: https://books.google.com.br/books?hl=pt-BR&lr=&id=tIqaAAAAIAAJ&oi=fnd&pg=PA135&dq=an%C3%A1lise+de+p%C3%B3s-otimiza%C3%A7%C3%A3o&ots=6D1Plhxrym&sig=jp7u61ehLIhS65cnhuyaevXffUs&redir_esc=y#v=onepage&q=an%C3%A1lise%20de%20p%C3%B3s-otimiza%C3%A7%C3%A3o&f=false. Acesso em: 12 set. 2021. ISSN 0100-6762.
- [15] RODRIGUES, L. O que é Solver? Aprenda como usar essa função do Excel!. **Voitto**, 2020. Disponível em: <https://www.voitto.com.br/blog/artigo/solver>. Acesso em: 04 out. de 2021.

- [16] SANTIAGO, Y. V. **Aplicação de Pesquisa Operacional para Análise Econômica de Investimentos**, Trabalho de Conclusão de Curso, Universidade Federal de São Carlos, 2017.
- [17] SEVERINO, A. J. **Metodologia do trabalho científico**, 23a edição. Cortez, São Paulo, 2007.
- [18] TAKECHI, J.; SUGAI, Y. Análise de Sensibilidade através de pós-otimização para microcomputador: aplicação na mistura de ração. **Revista de Economia e Sociologia Rural**. Brasília, 1987, v. 25, n. 1, p. 99-117. Disponível em: <https://www.revistasober.org/journal/resr/article/5d8a5b7d0e88255f22c51225#nav0>. Acesso em: 12 set. 2021.
- [19] TIRONE, G. S. P. de C. **Programação Linear: uma aplicação ao problema da dieta**, Trabalho de Conclusão de Curso, Universidade Federal do Rio Grande, 2019.
- [20] VANNI, T.; et al. Avaliação econômica em saúde: aplicações em doenças infecciosas. **Cadernos de Saúde Pública** [online]. 2009, v. 25, n. 12, p. 2543-2552. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/csp/a/NDGvLh9Yw7nGBxwFqnWYTkK/?lang=pt>. Acesso em: 12 set. 2021. ISSN 1678-4464.