

CHAPITRE 3

Modélisation des Éléments de Plaques Multicouches

Dans ce chapitre la théorie générale de plaques multicouches est développée, basée sur les développements faits par Kathua et Cheung (1973). Pour le modèle composé par trois couches, après avoir mis en évidence les matrices de masse et raideur de chaque couche, on montre qu'on peut utiliser le *Principe de l'Equivalence Elastique-Viscoélastique* (PEEV) pour les couches viscoélastiques. Par la suite, on propose un modèle paramétré en mettant en évidence les variables de conception qui caractérisent la structure et en particulier l'amortissement viscoélastique. Le modèle paramétré a l'avantage de conduire à un assemblage systématique et moins coûteux des matrices dépendant de la fréquence et de la température et permet également des calculs très rapides de sensibilités paramétriques, condensation robuste, etc. dans la procédure d'optimisation.

3.1. Relations cinématiques

Dans ce paragraphe, on présente la théorie du modèle aux éléments finis de plaques multicouches en admettant des propriétés isotropiques pour les couches. Couramment appelée plaque sandwich, le modèle élément fini est composé de n couches élastiques alternées avec $n - 1$ couches viscoélastiques intermédiaires.

La Figure 3.1 illustre un modèle de plaque sandwich composé par trois couches : une couche viscoélastique (couche centrale) située entre deux autres couches élastiques adjacentes. Dans les développements qui suivent on considère seulement les déformations d'extension et de flexion pour les couches élastiques, en négligeant les déformations associées au cisaillement transverse. Pour les couches viscoélastiques, on considère les déformations d'extension et de flexion augmentées par les déformations dues au cisaillement transverse.

On suppose également que le déplacement transverse et les rotations sont communs à toutes les couches élastiques du modèle sandwich.

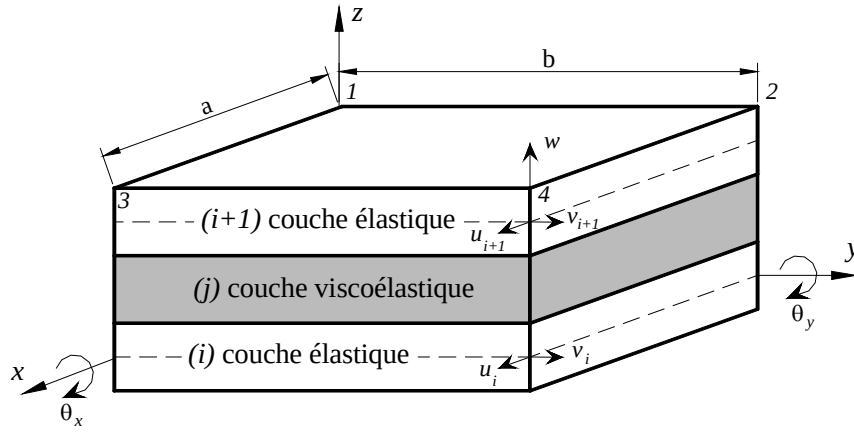


Figure 3.1 – Élément fini de plaque sandwich.

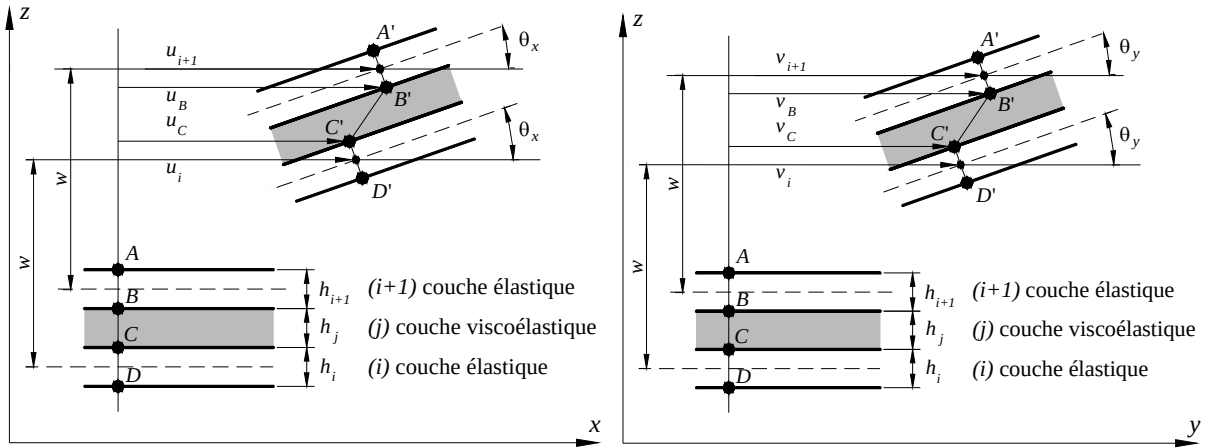


Figure 3.2 – Cinématique de la déformation.

Si on considère qu'après déformation les sections droites transversales restent planes, comme le montre la Figure 3.2, pour chaque couche viscoélastique on peut écrire la relation suivante :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_j = \frac{u_B - u_C}{h_j} \quad (3.1)$$

où :

$$u_B = u_{i+1} + \frac{h_{i+1}}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \quad (3.2)$$

$$u_C = u_i + \frac{h_i}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \quad (3.3)$$

et u_i et u_{i+1} , sont les déplacements longitudinaux moyens des couches élastiques inférieure et supérieure, respectivement, dans la direction x .

Par substitution des expressions (3.2) et (3.3) dans (3.1), on obtient :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_j = \frac{1}{h_j} \left[(u_{i+1} - u_i) + \left(\frac{h_{i+1} + h_i}{2}\right) \frac{\partial w}{\partial x} \right] \quad (3.4)$$

ou la forme équivalente :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_j = \frac{d_j}{h_j} \left[\frac{(u_{i+1} - u_i)}{d_j} + \frac{\partial w}{\partial x} \right] \quad (3.5)$$

où $d_j = (h_{i+1} + h_i)/2$.

De la même façon, pour la direction y , on obtient la relation suivante :

$$\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_j = \frac{d_j}{h_j} \left[\frac{(v_{i+1} - v_i)}{d_j} + \frac{\partial w}{\partial y} \right] \quad (3.6)$$

où v_i et v_{i+1} , sont les déplacements longitudinaux moyens des couches élastiques inférieure et supérieure, respectivement, dans la direction y .

Les déplacements longitudinaux moyens des couches viscoélastiques dans la direction x sont donnés par :

$$u_j = \frac{u_B + u_C}{2} = \frac{1}{2} \left[(u_i + u_{i+1}) + \left(\frac{h_{i+1} - h_i}{2}\right) \frac{\partial w}{\partial x} \right] \quad (3.7)$$

De la même façon, pour la direction y :

$$v_j = \frac{1}{2} \left[(v_i + v_{i+1}) + \left(\frac{h_{i+1} - h_i}{2}\right) \frac{\partial w}{\partial y} \right] \quad (3.8)$$

3.2. Relations contraintes-déformations

Pour les couches élastiques seulement les déformations d'extension et de flexion sont introduites, tandis que pour les couches viscoélastiques les déformations par cisaillement sont aussi prises en compte. Les relations contraintes-déformations peuvent être données par les expressions suivantes :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad (3.9)$$

Dans ce qui suit, on présente le développement des relations contraintes-déformations pour chaque couche faisant partie du modèle de plaque sandwich. L'indice (i) fait référence à la i -ième couche élastique, et z_i est la distance selon la direction z , mesurée à partir du plan

moyen. De la même façon, l'indice (j) est associé à la j -ième couche viscoélastique. Pour simplifier les notations, les matériaux composants les couches élastiques et couches viscoélastiques sont considérés isotropes. Néanmoins, on peut introduire les caractéristiques d'orthotropie avec une relative facilité.

Les déplacements longitudinaux d'un point quelconque dans les directions x et y de la i -ème couche élastique, peuvent être exprimées, respectivement, par les relations suivantes :

$$u^{(i)} = u_i - z_i \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_i \quad (3.10)$$

$$v^{(i)} = v_i - z_i \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_i \quad (3.11)$$

En combinant les relations (3.9) à (3.11), on peut exprimer les déformations par les relations suivantes :

$$\varepsilon_x^{(i)} = \frac{\partial u_i}{\partial x} - z_i \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (3.12)$$

$$\varepsilon_y^{(i)} = \frac{\partial v_i}{\partial y} - z_i \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (3.13)$$

$$\gamma_{xy}^{(i)} = \frac{\partial u_i}{\partial y} + \frac{\partial v_i}{\partial x} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (3.14)$$

ce qui permet d'écrire les relations contraintes-déformations sous la forma matricielle :

$$\boldsymbol{\sigma}^{(i)} = \mathbf{E}^{(i)} \boldsymbol{\varepsilon}^{(i)} \quad (3.15)$$

où le vecteur de contraintes $\boldsymbol{\sigma}^{(i)}$, le vecteur de déformations $\boldsymbol{\varepsilon}^{(i)}$ et la matrice de élasticité $\mathbf{E}^{(i)}$ pour la i -ième couche élastique, sont données par :

$$\boldsymbol{\sigma}^{(i)} = \begin{Bmatrix} \sigma_x^{(i)} \\ \sigma_y^{(i)} \\ \tau_{xy}^{(i)} \end{Bmatrix} ; \boldsymbol{\varepsilon}^{(i)} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{(i)} \\ \varepsilon_y^{(i)} \\ \gamma_{xy}^{(i)} \end{Bmatrix} ; \mathbf{E}^{(i)} = \begin{bmatrix} \frac{E^{(i)}}{1-\nu^{(i)2}} & \frac{E^{(i)}\nu^{(i)}}{1-\nu^{(i)2}} & 0 \\ \frac{E^{(i)}\nu^{(i)}}{1-\nu^{(i)2}} & \frac{E^{(i)}}{1-\nu^{(i)2}} & 0 \\ 0 & 0 & G^{(i)} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Pour la j -ième couche viscoélastique, le déplacement longitudinal d'un point quelconque dans la direction x est donné par :

$$u^{(j)} = u_j + z_j \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_j \quad (3.17)$$

et par la combinaison des expressions (3.4) et (3.17), on obtient l'expression suivante :

$$u^{(j)} = u_j + z_j \left[\frac{u_{i+1} - u_i}{h_j} + \left(\frac{h_{i+1} + h_i}{2h_j} \right) \frac{\partial w}{\partial x} \right] \quad (3.18)$$

De la même façon, pour la direction y , on obtient :

$$v^{(j)} = v_j + z_j \left[\frac{v_{i+1} - v_i}{h_j} + \left(\frac{h_{i+1} + h_i}{2h_j} \right) \frac{\partial w}{\partial y} \right] \quad (3.19)$$

Si on considère les expressions (3.9), les déformations normales et les déformations de cisaillement pour les couches viscoélastiques peuvent être écrites comme suit :

$$\varepsilon_x^{(j)} = \frac{\partial u^{(j)}}{\partial x} = \frac{\partial u_j}{\partial x} + \frac{z_j}{h_j} \left[\left(\frac{\partial u_{i+1}}{\partial x} - \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) + \left(\frac{h_{i+1} + h_i}{2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \quad (3.20)$$

$$\varepsilon_y^{(j)} = \frac{\partial v^{(j)}}{\partial y} = \frac{\partial v_j}{\partial y} + \frac{z_j}{h_j} \left[\left(\frac{\partial v_{i+1}}{\partial y} - \frac{\partial v_i}{\partial y} \right) + \left(\frac{h_{i+1} + h_i}{2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \quad (3.21)$$

$$\gamma_{xy}^{(j)} = \frac{\partial u^{(j)}}{\partial y} + \frac{\partial v^{(j)}}{\partial x} = \frac{\partial u_j}{\partial y} + \frac{\partial v_j}{\partial x} + \frac{z_j}{h_j} \left[\left(\frac{\partial u_{i+1}}{\partial y} + \frac{\partial v_{i+1}}{\partial x} - \frac{\partial u_i}{\partial y} - \frac{\partial v_i}{\partial x} \right) + (h_{i+1} + h_i) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \quad (3.22)$$

$$\gamma_{xz}^{(j)} = \frac{\partial u^{(j)}}{\partial z_j} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{h_j} \left[u_{i+1} - u_i + \left(\frac{h_{i+1} + h_i}{2} \right) \frac{\partial w}{\partial x} \right] \quad (3.23)$$

$$\gamma_{yz}^{(j)} = \frac{\partial v^{(j)}}{\partial z_j} + \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{1}{h_j} \left[v_{i+1} - v_i + \left(\frac{h_{i+1} + h_i}{2} + h_j \right) \frac{\partial w}{\partial y} \right] \quad (3.24)$$

Ainsi, on obtient l'expression matricielle suivante pour les relations contraintes-déformations pour les couches viscoélastiques :

$$\boldsymbol{\sigma}^{(j)} = \mathbf{E}^{(j)} \boldsymbol{\varepsilon}^{(j)} \quad (3.25)$$

où le vecteur de contraintes $\boldsymbol{\sigma}^{(j)}$, le vecteur de déformations $\boldsymbol{\varepsilon}^{(j)}$ et la matrice de élasticité $\mathbf{E}^{(j)}$ pour la j -ième couche viscoélastique, sont donnés par :

$$\boldsymbol{\sigma}^{(j)} = \begin{Bmatrix} \sigma_x^{(j)} \\ \sigma_y^{(j)} \\ \tau_{xy}^{(j)} \\ \tau_{xz}^{(j)} \\ \tau_{yz}^{(j)} \end{Bmatrix}; \boldsymbol{\varepsilon}^{(j)} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{(j)} \\ \varepsilon_y^{(j)} \\ \gamma_{xy}^{(j)} \\ \gamma_{xz}^{(j)} \\ \gamma_{yz}^{(j)} \end{Bmatrix}; \mathbf{E}^{(j)} = \begin{bmatrix} \frac{E^{(j)}}{1-\nu^{(j)^2}} & \frac{E^{(j)}\nu^{(j)}}{1-\nu^{(j)^2}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{E^{(j)}\nu^{(j)}}{1-\nu^{(j)^2}} & \frac{E^{(j)}}{1-\nu^{(j)^2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G^{(j)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G^{(j)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G^{(j)} \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

sym.

On rappelle que les modules $E^{(j)}$ et $G^{(j)}$ sont dépendants de la fréquence et de la température pour les matériaux viscoélastiques. Cette dépendance est prise en compte en faisant appel au principe d'équivalence élastique-viscoélastique (PEEV) (Cf. Section 2.2, Chapitre 2).

3.3. Discrétisation par éléments finis

La discrétisation par éléments finis du modèle de plaque sandwich, est basée sur la proposition de Khatua et Cheung (1973), qui utilise un élément de plaque rectangulaire avec quatre nœuds, composé par n couches comme illustré en Figure 3.1. La déflexion transversal w est interpolée par un polynôme cubique à douze termes, et les déplacements u et v , dans le plan de la plaque, sont approchés par des fonctions bilinéaires en x et y . Les rotations autour des axes x et y sont dénotées, respectivement, par $\theta_x = \partial w / \partial x$ et $\theta_y = \partial w / \partial y$, et a et b , sont, respectivement, les dimensions de l'élément de plaque, dans les directions x et y . Le vecteur des déplacements nodaux au niveau élémentaire est donné par :

$$\boldsymbol{\delta} = [\delta_1 \quad \delta_2 \quad \delta_3 \quad \delta_4]^T \quad (3.27)$$

où :

$$\boldsymbol{\delta}_j = [u_{1j} \quad v_{1j} \quad u_{2j} \quad v_{2j} \quad \dots \quad u_{nj} \quad v_{nj} \quad w_j \quad \theta_{xj} \quad \theta_{yj}]^T; \quad j = 1, \dots, 4 \quad (3.28)$$

Le champ des déplacements longitudinaux et transversaux à l'intérieur de l'élément est interpolé selon les expressions suivantes :

$$\Delta(x, y) = \mathbf{N}(x, y) \boldsymbol{\delta} \quad 0 \leq x \leq a; \quad 0 \leq y \leq b \quad (3.29)$$

où $\Delta(x, y) = [u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad \dots \quad u_n \quad v_n \quad w \quad \theta_x \quad \theta_y]^T$;

$\mathbf{N}(x, y) = [N_{u_1} \quad N_{v_1} \quad N_{u_2} \quad N_{v_2} \quad \dots \quad N_{u_n} \quad N_{v_n} \quad N_w \quad N_{\theta_x} \quad N_{\theta_y}]^T$: est la matrice des fonctions d'interpolation.

En combinant les relations contraintes-déformations (3.9) et l'expression des champs de déplacements donnée par la relation (3.29), on exprime le vecteur de déformations sous la forme suivant :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x,y) = \mathbf{D}(x,y)\boldsymbol{\delta} \quad (3.30)$$

où $\mathbf{D}(x,y)$ est la matrice obtenue en appliquant les opérateurs différentiels indiqués dans les équations (3.9) à la matrice de fonctions de forme $\mathbf{N}(x,y)$.

3.4. Matrices élémentaires de raideur et de masse d'un élément de plaque multicouche

Les équations du mouvement de l'élément de plaque multicouche peuvent être obtenues à travers les équations de Lagrange. Pour cela, il faut formuler les énergies de déformation et cinétique de l'élément.

L'énergie de déformation totale de la plaque sandwich peut être obtenue par l'addition des énergies de déformation de chaque couche :

$$U = \sum_{k=1}^{2n-1} U^{(k)} \quad (3.31)$$

où $2n-1$ est le nombre totale de couches, et l'indice k représente une couche quelconque. On rappelle que n est le nombre de couches élastiques.

L'énergie de déformation de la k -ième couche est donnée par la relation suivante :

$$U^{(k)} = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^{(k)T} \mathbf{E}^{(k)} \boldsymbol{\varepsilon}^{(k)} dV \quad (3.32)$$

L'introduction de l'expression (3.30) dans l'expression (3.32), donne :

$$U^{(k)} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\delta}^T \left(\int_V \mathbf{D}^{(k)T} \mathbf{E}^{(k)} \mathbf{D}^{(k)} dV \right) \boldsymbol{\delta} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\delta}^T \mathbf{K}^{(k)} \boldsymbol{\delta} \quad (3.33)$$

où $\mathbf{K}^{(k)} = \int_V \mathbf{D}^{(k)T} \mathbf{E}^{(k)} \mathbf{D}^{(k)} dV$ est la contribution de la k -ième couche à la rigidité de l'élément de plaque.

Après quelques développements, on montre (Annexe A.1) que la matrice de raideur élémentaire pour les couches élastiques, s'écrit sous la forme :

$$\mathbf{K}^{(i)} = \mathbf{K}_{mm}^{(i)} + \mathbf{K}_{ff}^{(i)} + 2\mathbf{K}_{mf}^{(i)} \quad (3.34)$$

où :

$$\mathbf{K}_{mm}^{(i)} = \int_V \mathbf{D}_m^{(i)T} \mathbf{E}^{(i)} \mathbf{D}_m^{(i)} dV, \quad \mathbf{K}_{ff}^{(i)} = \int_V \mathbf{D}_f^{(i)T} \mathbf{E}^{(i)} \mathbf{D}_f^{(i)} dV, \quad \mathbf{K}_{mf}^{(i)} = \int_V \mathbf{D}_m^{(i)T} \mathbf{E}^{(i)} \mathbf{D}_f^{(i)} dV.$$

De la même façon, pour les couches viscoélastiques, la matrice de raideur élémentaire prend la forme suivante :

$$\mathbf{K}^{(j)} = \mathbf{K}_{mm}^{(j)} + \mathbf{K}_{ff}^{(j)} + \mathbf{K}_{cc}^{(j)} + 2\mathbf{K}_{mf}^{(j)} + 2\mathbf{K}_{mc}^{(j)} + 2\mathbf{K}_{fc}^{(j)} \quad (3.35)$$

où :

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{mm}^{(j)} &= \int_V \mathbf{D}_m^{(j)T} \mathbf{E}^{(j)} \mathbf{D}_m^{(j)} dV, \quad \mathbf{K}_{ff}^{(j)} = \int_V \mathbf{D}_f^{(j)T} \mathbf{E}^{(j)} \mathbf{D}_f^{(j)} dV, \quad \mathbf{K}_{cc}^{(j)} = \int_V \mathbf{D}_c^{(j)T} \mathbf{E}^{(j)} \mathbf{D}_c^{(j)} dV, \\ \mathbf{K}_{mf}^{(j)} &= \int_V \mathbf{D}_m^{(j)T} \mathbf{E}^{(j)} \mathbf{D}_f^{(j)} dV, \quad \mathbf{K}_{mc}^{(j)} = \int_V \mathbf{D}_m^{(j)T} \mathbf{E}^{(j)} \mathbf{D}_c^{(j)} dV, \quad \mathbf{K}_{fc}^{(j)} = \int_V \mathbf{D}_f^{(j)T} \mathbf{E}^{(j)} \mathbf{D}_c^{(j)} dV. \end{aligned}$$

Les indices m , f , et mf sont, respectivement, relatifs aux phénomènes de membrane, flexion et le couplage des phénomènes membrane-flexion.

Par conséquent, la matrice de raideur de l'élément fini de plaque sandwich est donnée par la somme des matrices de raideur associées à chaque couche :

$$\mathbf{K} = \sum_{k=1}^{2n-1} \mathbf{K}^{(k)} \quad (3.36)$$

De la même façon que pour l'énergie de déformation, l'énergie cinétique totale de l'élément fini de plaque sandwich est donnée par la somme des énergies cinétiques des couches :

$$\mathbf{T} = \sum_{k=1}^{2n-1} \mathbf{T}^{(k)} \quad (3.37)$$

où :

$$\mathbf{T}^{(k)} = \frac{1}{2} \int_V \left(\dot{\mathbf{u}}^{(k)T} \dot{\mathbf{u}}^{(k)} + \dot{\mathbf{v}}^{(k)T} \dot{\mathbf{v}}^{(k)} + \dot{\mathbf{w}}^{(k)T} \dot{\mathbf{w}}^{(k)} \right) dV \quad (3.38)$$

où encore sous la forme suivante :

$$\mathbf{T}^{(k)} = \frac{\rho_k h_k}{2} \left(\int_A \dot{\mathbf{u}}^{(k)T} \dot{\mathbf{u}}^{(k)} dA + \int_A \dot{\mathbf{v}}^{(k)T} \dot{\mathbf{v}}^{(k)} dA + \int_A \dot{\mathbf{w}}^{(k)T} \dot{\mathbf{w}}^{(k)} dA \right) \quad (3.39)$$

Tenant compte de l'expression (3.29), on peut réécrire l'expression (3.30) sous la forme suivante :

$$T^{(k)} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \delta^T \left(\rho_k h_k \int_A (N_w^T N_w + N_{u_k}^T N_{u_k} + N_{v_k}^T N_{v_k}) dA \right) \delta \quad (3.40)$$

$$T^{(k)} = \frac{1}{2} \delta^T M^{(k)} \delta \quad (3.41)$$

où $M^{(k)} = \rho_k h_k \int_A (N_w^T N_w + N_{u_k}^T N_{u_k} + N_{v_k}^T N_{v_k}) dA$ est la contribution de la k -ième couche à la masse de l'élément, N_w , N_{u_k} et N_{v_k} sont les matrices contenant les fonctions d'interpolation.

La matrice de masse élémentaire peut donc être déterminée comme suit :

$$M = \sum_{k=1}^{2n-1} M^{(k)} \quad (3.42)$$

Cette formulation est valable pour un élément de plaque sandwich à $2n-1$ couches. Pour ne pas alourdir le mémoire nous présentons dans le paragraphe suivant l'élément de plaque à 3 couches (l'élément de plaque à 5 couches est proposé en Annexe A.2).

3.5. Plaque sandwich à trois couches

On considère un élément à trois couches, composé par une plaque base superposée par une couche viscoélastique et une couche élastique (couche contrainte), constituant ainsi le système illustré en Figure 3.3.

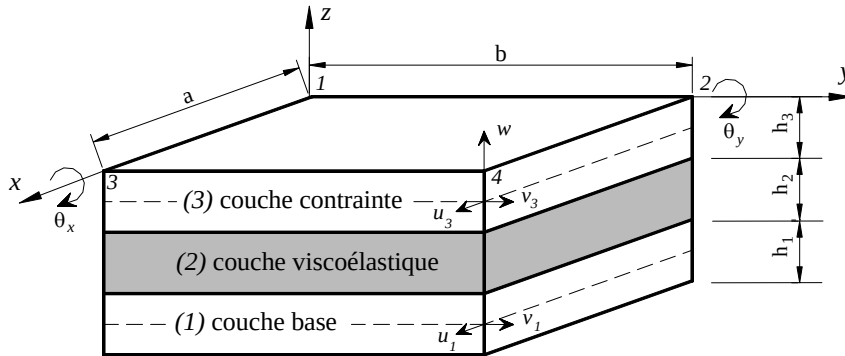


Figure 3.3 – Élément fini de plaque sandwich à trois couches.

Pour cette configuration, les équations (3.1) à (3.9) permettent d'écrire les déformations dues au cisaillement de la couche viscoélastique, sous les formes suivantes :

$$\gamma_{xz}^{(2)} = \frac{d_2}{h_2} \left[\frac{u_1 - u_3}{d_2} + \frac{\partial w}{\partial x} \right] \quad (3.43)$$

$$\gamma_{yz}^{(2)} = \frac{d_2}{h_2} \left[\frac{v_1 - v_3}{d_2} + \frac{\partial w}{\partial y} \right] \quad (3.44)$$

$$\text{où } d_2 = \frac{1}{2}(h_1 + 2h_2 + h_3).$$

Selon les relations (3.7) et (3.8), les déplacements longitudinaux moyens dans les directions x et y pour les couches viscoélastiques sont donnés par :

$$u_2 = \frac{1}{2} \left[u_1 + u_3 + \frac{h_1 - h_3}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \right] \quad (3.45)$$

$$v_2 = \frac{1}{2} \left[v_1 + v_3 + \frac{h_1 - h_3}{2} \frac{\partial w}{\partial y} \right] \quad (3.46)$$

Les éléments de plaque sandwich à trois couches sont à quatre nœuds, où chaque nœud possède 7 degrés de libertés, à savoir : les déplacements longitudinaux u_1 et v_1 de la couche contrainte supérieure ; les déplacements u_3 et v_3 de la couche base ; la déflexion transversale w ; et les rotations $\theta_x = \partial w / \partial x$ et $\theta_y = \partial w / \partial y$. Ainsi, les degrés de liberté nodaux sont regroupés dans le vecteur suivant :

$$\delta_j = [u_{1j} \quad v_{1j} \quad u_{3j} \quad v_{3j} \quad w_j \quad \theta_{xj} \quad \theta_{yj}]^T \quad j = 1, \dots, 4 \quad (3.47)$$

et le vecteur de degrés de liberté au niveau élémentaire est donné par :

$$\delta = [\delta_1 \quad \delta_2 \quad \delta_3 \quad \delta_4]^T \quad (3.48)$$

Les déplacements longitudinaux dans les directions x et y sont interpolés par des fonctions bilinéaires et le déplacement transversal w est interpolé par un polynôme de troisième ordre, qu'on peut représenter par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} u_1 &= a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 xy \\ v_1 &= a_5 + a_6 x + a_7 y + a_8 xy \\ u_3 &= a_9 + a_{10} x + a_{11} y + a_{12} xy \\ v_3 &= a_{13} + a_{14} x + a_{15} y + a_{16} xy \\ w &= b_1 + b_2 x + b_3 y + b_4 x^2 + b_5 xy + b_6 y^2 + b_7 x^3 + b_8 x^2 y + b_9 xy^2 + b_{10} y^3 + b_{11} x^3 y + b_{12} xy^3 \end{aligned} \quad (3.49)$$

Selon l'expression (3.29), l'interpolation des champs des déplacements est donnée par les expressions suivantes :

$$A(x, y) = N(x, y) \delta \quad (3.50)$$

$$\mathbf{A}(x, y) = [u_1 \quad v_1 \quad u_3 \quad v_3 \quad w \quad \theta_x \quad \theta_y]^T, \text{ et} \quad (3.51)$$

$$\mathbf{N}(x, y) = [N_{u_1} \quad N_{v_1} \quad N_{u_3} \quad N_{v_3} \quad N_w \quad N_{\theta_x} \quad N_{\theta_y}]^T \quad (3.52)$$

où :

$$N_{u_1} = [N_{11} \quad \theta_6 \quad N_{12} \quad \theta_6 \quad N_{13} \quad \theta_6 \quad N_{14} \quad \theta_6],$$

$$N_{v_1} = [\theta_1 \quad N_{11} \quad \theta_6 \quad N_{12} \quad \theta_6 \quad N_{13} \quad \theta_6 \quad N_{14} \quad \theta_5],$$

$$N_{u_3} = [\theta_2 \quad N_{11} \quad \theta_6 \quad N_{12} \quad \theta_6 \quad N_{13} \quad \theta_6 \quad N_{14} \quad \theta_4],$$

$$N_{v_3} = [\theta_3 \quad N_{11} \quad \theta_6 \quad N_{12} \quad \theta_6 \quad N_{13} \quad \theta_6 \quad N_{14} \quad \theta_3],$$

$$N_w = [\theta_4 \quad N_{1w} \quad N_{1\theta_x} \quad N_{1\theta_y} \quad \theta_4 \quad N_{2w} \quad N_{2\theta_x} \quad N_{2\theta_y} \quad \theta_4 \quad N_{3w} \quad N_{3\theta_x} \quad N_{3\theta_y} \quad \theta_4 \quad N_{4w} \quad N_{4\theta_x} \quad N_{4\theta_y}]$$

$$N_{\theta_x} = [\theta_4 \quad N_{1w}^x \quad N_{1\theta_x}^x \quad N_{1\theta_y}^x \quad \theta_4 \quad N_{2w}^x \quad N_{2\theta_x}^x \quad N_{2\theta_y}^x \quad \theta_4 \quad N_{3w}^x \quad N_{3\theta_x}^x \quad N_{3\theta_y}^x \quad \theta_4 \quad N_{4w}^x \quad N_{4\theta_x}^x \quad N_{4\theta_y}^x]$$

$$N_{\theta_y} = [\theta_4 \quad N_{1w}^y \quad N_{1\theta_x}^y \quad N_{1\theta_y}^y \quad \theta_4 \quad N_{2w}^y \quad N_{2\theta_x}^y \quad N_{2\theta_y}^y \quad \theta_4 \quad N_{3w}^y \quad N_{3\theta_x}^y \quad N_{3\theta_y}^y \quad \theta_4 \quad N_{4w}^y \quad N_{4\theta_x}^y \quad N_{4\theta_y}^y]$$

$$\boldsymbol{\delta} = \{u_1^1 \quad v_1^1 \quad u_3^1 \quad v_3^1 \quad w^1 \quad \theta_x^1 \quad \theta_y^1 \quad u_1^2 \quad v_1^2 \quad u_3^2 \quad v_3^2 \quad w^2 \quad \theta_x^2 \quad \theta_y^2 \quad \dots \quad u_1^3 \quad v_1^3 \quad u_3^3 \quad v_3^3 \quad w^3 \quad \theta_x^3 \quad \theta_y^3 \quad u_1^4 \quad v_1^4 \quad u_3^4 \quad v_3^4 \quad w^4 \quad \theta_x^4 \quad \theta_y^4\}^T, \text{ et les termes}$$

N_{1i} , N_{1w} , $N_{1\theta_x}$, $N_{1\theta_y}$, N_{2w} , $N_{2\theta_x}$, $N_{2\theta_y}$, N_{3w} , $N_{3\theta_x}$, $N_{3\theta_y}$ et N_{4w} pour $i = 1, \dots, 4$, sont donnés en

Annexe A.1.

A travers les expressions (3.15) et (3.25), les relations contraintes-déformations pour les trois couches peuvent être obtenues, et les matrices de raideur et de masse peuvent être calculées comme suit (voir Annexe A.1) :

$$\mathbf{K}^{(1)} = \int_V \left(\mathbf{D}_m^{(1)T} \mathbf{E}^{(1)} \mathbf{D}_m^{(1)} + \mathbf{D}_f^{(1)T} \mathbf{E}^{(1)} \mathbf{D}_f^{(1)} + \mathbf{D}_m^{(1)T} \mathbf{E}^{(1)} \mathbf{D}_f^{(1)} + \mathbf{D}_f^{(1)T} \mathbf{E}^{(1)} \mathbf{D}_m^{(1)} \right) dV \quad (3.53)$$

$$\mathbf{K}^{(2)} = \int_V \left(\mathbf{D}_m^{(2)T} \mathbf{E}^{(2)} \mathbf{D}_m^{(2)} + \mathbf{D}_f^{(2)T} \mathbf{E}^{(2)} \mathbf{D}_f^{(2)} + \mathbf{D}_c^{(2)T} \mathbf{E}^{(2)} \mathbf{D}_c^{(2)} \right) dV \quad (3.54)$$

$$\mathbf{K}^{(3)} = \int_V \left(\mathbf{D}_m^{(3)T} \mathbf{E}^{(3)} \mathbf{D}_m^{(3)} + \mathbf{D}_f^{(3)T} \mathbf{E}^{(3)} \mathbf{D}_f^{(3)} + \mathbf{D}_m^{(3)T} \mathbf{E}^{(3)} \mathbf{D}_f^{(3)} + \mathbf{D}_f^{(3)T} \mathbf{E}^{(3)} \mathbf{D}_m^{(3)} \right) dV \quad (3.55)$$

$$\mathbf{M}^{(1)} = \rho_1 h_1 \int_A \left(\mathbf{N}_w^T \mathbf{N}_w + \mathbf{N}_{u_1}^T \mathbf{N}_{u_1} + \mathbf{N}_{v_1}^T \mathbf{N}_{v_1} \right) dA \quad (3.56)$$

$$\mathbf{M}^{(2)} = \rho_2 h_2 \int_A \left(\mathbf{N}_w^T \mathbf{N}_w + \mathbf{N}_{u_2}^T \mathbf{N}_{u_2} + \mathbf{N}_{v_2}^T \mathbf{N}_{v_2} \right) dA \quad (3.57)$$

$$\mathbf{M}^{(3)} = \rho_3 h_3 \int_A \left(\mathbf{N}_w^T \mathbf{N}_w + \mathbf{N}_{u_3}^T \mathbf{N}_{u_3} + \mathbf{N}_{v_3}^T \mathbf{N}_{v_3} \right) dA \quad (3.58)$$

Finalement, les matrices de raideur et de masse élémentaires de l'élément fini de plaque à trois couches peuvent être écrites, respectivement, comme suit :

$$\mathbf{K} = \sum_{k=1}^3 \mathbf{K}^{(k)}; \quad \mathbf{M} = \sum_{k=1}^3 \mathbf{M}^{(k)} \quad (3.59)$$

3.5.1 Introduction de l'amortissement viscoélastique

Selon l'expression (2.24) et à travers de la relation $\mathbf{K}_v(\omega, T) = G(\omega, T) \bar{\mathbf{K}}_v$, après avoir obtenu les matrices de raideur élémentaires de plaque sandwich, la dépendance du comportement des matériaux viscoélastiques par rapport à la température et fréquence, peut être introduite dans le modèle :

$$\text{Couches élastiques : } \mathbf{K}_e = \mathbf{K}^{(1)} + \mathbf{K}^{(3)} \quad (3.60)$$

$$\text{Couches viscoélastiques : } \mathbf{K}_v(\omega, T) = \mathbf{K}^{(2)} = G(\omega, T) \bar{\mathbf{K}}^{(2)} \quad (3.61)$$

où les matrices $\mathbf{K}_1$ et $\mathbf{K}_3$ sont les matrices de raideur associées à la plaque base et à la couche contrainte ; $\mathbf{K}^{(2)}$ est la matrice de raideur associée à la couche viscoélastique.

Après la obtention des matrices élémentaires, les matrices globales correspondantes sont assemblées tenant compte de la connectivité, en utilisant les procédures standard d'assemblage des matrices élémentaires.

3.5.2 Paramétrisation du modèle EF de plaque sandwich

Les modèles aux éléments finis obtenus par la formulation présentée dans les sections précédentes seront utilisés dans des procédures d'optimisation, où les fonctions objectif (ou fonctions coût) basées sur des réponses dynamiques doivent être exprimées explicitement ou implicitement en fonction d'un ensemble de paramètres physiques et/ou géométriques appelés paramètres de conception. Dans notre cas, ces paramètres caractérisent l'amortissement viscoélastique et interviennent de façon non-linéaire dans les modèles aux éléments finis. Ils contrôlent son comportement dynamique et gouvernent les valeurs des solutions (ses réponses).

Dans ce mémoire, on distingue deux ensembles de paramètres : les paramètres k_i et m_i agissant respectivement sur les matrices de raideur et de masse qu'on peut factoriser en dehors des matrices élémentaires. On parle alors de la paramétrisation des modèles aux éléments finis. Il s'agit donc de définir l'ensemble des matrices possédant des propriétés matérielles et/ou géométriques communes.

La paramétrisation des modèles est une étape très importante qui doit être réalisée dans un processus itératif telle que l'optimisation, qui peut engendrer des gains importants des coûts de calcul. Dans le cas des systèmes amortis par matériaux viscoélastiques, elle devient particulièrement importante, pour une résolution numérique efficace de problèmes complexes, en mettant en évidence tous les paramètres d'intérêt en dehors des matrices pour faciliter l'introduction des modifications structurales et/ou des incertitudes et l'évaluation de la sensibilité paramétrique dans le cadre d'une procédure d'optimisation paramétrique.

Pour les matrices de masse et raideur d'un modèle aux éléments finis quelconque, les paramètres de masse et de raideur, m_i et k_i , respectivement, interviennent de façon non linéaire dans les matrices de masse et de raideur et on peut donc factoriser ces paramètres symboliquement sur les formes suivantes :

$$\mathbf{K}(\omega, T) = \bigcup_{i=1}^{n_{\text{zon}_k}} \mathbf{K}_i(\omega, T), \quad \mathbf{M} = \bigcup_{i=1}^{n_{\text{zon}_m}} \mathbf{M}_i \quad (3.62)$$

$$\mathbf{K}_i(\omega, T) = \sum_{\alpha=0}^{p_k} (k_i)^\alpha {}_\alpha \mathbf{K}_i(\omega, T), \quad \mathbf{M}_i = \sum_{\beta=0}^{p_m} (m_i)^\beta {}_\beta \mathbf{M}_i \quad (3.63)$$

où le symbole $\bigcup$ indique l'assemblage de matrices ; l'indice i indiquent les zones du modèle EF dans lesquelles les paramètres k_i ou m_i interviennent ; $\mathbf{K}_i(\omega, T)$ et $\mathbf{M}_i$ sont les matrices de raideur et de masse correspondantes à ces zones ; et ${}_\alpha \mathbf{K}_i(\omega, T)$ et ${}_\beta \mathbf{M}_i$ sont les matrices factorisées.

Pour un modèle de plaque ou coque simple, par exemple, le paramétrage de la masse et la raideur par rapport à l'épaisseur est réalisé en découplant la raideur par rapport les effets de membrane et de flexion, ce qui traduit, ce qui traduit par les expressions suivantes :

$$\mathbf{K}(E, h) = Eh \mathbf{K}_m + Eh^3 \mathbf{K}_f ; \quad \mathbf{M}(\rho, h) = \rho h (\mathbf{M}_m + \mathbf{M}_f) \quad (3.64)$$

Selon la théorie des élément finis de plaque multicouches présenté dans les sections précédentes, les paramètres de conception qui caractérisent la masse et la rigidité, correspondants à chaque couche, peuvent être factorisés en dehors des matrices élémentaires, en découplant les effets de membrane, flexion et cisaillement, comme montré dans les équations suivantes :

$$\mathbf{M}_1 = \rho_1 h_1 ({}_1 \mathbf{M}_1^{(m)} + {}_1 \mathbf{M}_1^{(f)}) \quad (3.65)$$

$$\mathbf{M}_2 = \rho_2 h_2 ({}_0 \mathbf{M}_2^{(m)} + d_{1 \ 1} \mathbf{M}_2^{(m)} + d_{1 \ 2}^2 \mathbf{M}_2^{(m)} + {}_0 \mathbf{M}_2^{(f)}) \quad (3.66)$$

$$\mathbf{M}_3 = \rho_3 h_3 ({}_1 \mathbf{M}_3^{(m)} + {}_1 \mathbf{M}_3^{(f)}) \quad (3.67)$$

$$\mathbf{K}_1 = E_1 h_1 ({}_1 \mathbf{K}_1^{(m)} + h_{1 \ 3}^2 \mathbf{K}_1^{(f)}) \quad (3.68)$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{K}}_2 = & h_2 \left({}_0 \bar{\mathbf{K}}_2^{(m)} + d_{1\ 1} \bar{\mathbf{K}}_2^{(m)} + d_{1\ 2}^2 \bar{\mathbf{K}}_2^{(m)} \right) + h_2 \left({}_0 \bar{\mathbf{K}}_2^{(f)} + d_{2\ 1} \bar{\mathbf{K}}_2^{(f)} + d_{2\ 2}^2 \bar{\mathbf{K}}_2^{(f)} \right) + \dots \\ & \frac{1}{h_2} \left({}_0 \bar{\mathbf{K}}_2^{(c)} + d_{3\ 1} \bar{\mathbf{K}}_2^{(c)} + d_{3\ 2}^2 \bar{\mathbf{K}}_2^{(c)} \right) \end{aligned} \quad (3.69)$$

$$\mathbf{K}_3 = E_3 h_3 \left({}_1 \mathbf{K}_3^{(m)} + h_3^2 {}_3 \mathbf{K}_3^{(f)} \right) \quad (3.70)$$

où $d_1 = (h_1 - h_3)$, $d_2 = (h_1 + h_3)$ et $d_3 = (h_1 + 2h_2 + h_3)$; les indices (m) , (f) et (c) sont associés aux effets de membrane, flexion et cisaillement, respectivement ; ρ_k ($k = 1, 2, 3$) est la densité de la k -ième couche.

Dans les expressions (3.65) à (3.70), on peut remarquer que les matrices qui apparaissent dans les membres à droite sont des matrices constantes, indépendantes des paramètres de conception qui sont alors factorisés en dehors des matrices. On aboutit donc à des expressions qui facilitent et diminuent les calculs liés aux réanalyses et à la sensibilité des réponses par rapport à ces paramètres.

Le modèle aux éléments finis de plaque sandwich à trois couches a été validé dans la référence (Lima et al, 2003a), qui fournit une comparaison entre les fonctions numériques et expérimentales de réponses en fréquence (FRFs) d'une plaque rectangulaire en aluminium sur des conditions libre partiellement traité par couche contrainte.

3.6 Conclusions

Dans cet chapitre on a montré les développements par éléments finis du type de traitement viscoélastique adopté qu'on va utiliser tout au long de ce mémoire pour introduire l'amortissement viscoélastique dans des structures mécaniques. Ce traitement est composé par des éléments finis de plaque sandwichs. Comme il a été remarqué, la théorie des éléments multicouches proposée dans ce mémoire peut être étendue au cas d'un nombre quelconque de couches. Néanmoins, on reste dans le cadre des éléments de plaque à trois couches et on détaille en Annexe A.1, un élément à cinq couches. Puisqu'on est particulièrement intéressé aux applications industrielles avec ce type de traitement viscoélastique, en Annexe C.1 on montre un schéma représentant la stratégie proposée dans ce mémoire pour coupler les éléments finis de plaque sandwich paramétrisés avec des modèles aux éléments finis de structures de géométrie complexes modélisés par le code ANSYS.

CHAPITRE 4

Condensation Robuste et Métamodélisation Adaptées aux Systèmes Viscoélastiques Complexes

Lors de l'évaluation des réponses d'une structure de grande taille amortie par matériaux viscoélastiques dont les paramètres de conception varient au cours de l'optimisation ou recalage de modèles, le coût de calcul est primordial. Les réanalyses exactes sont alors exclues, en raison de leur coût élevé et obligent à l'utilisation des techniques d'approximation des réponses ou de réanalyse approchée. Il existe plusieurs méthodes de réanalyse approchée, telles que les analyses par méthodes de perturbations, de sensibilité, les formulations basées sur la réduction de modèles ou encore les métamodèles, qui peuvent être construits soit à partir de réseaux de neurones, soit à partir des méthodologies de surface de réponses. Dans cette partie du mémoire, trois méthodologies d'approximation de fonctions sont abordées, à savoir : les bases de réduction adaptées aux structures viscoélastiques et robustes vis-à-vis de perturbations paramétriques ; les métamodèles basés sur les surfaces de réponses classiques et adaptatives ; et les réseaux de neurones artificielles. Ces méthodes seront, par la suite, associées aux techniques d'optimisation adaptées aux structures contenant des traitements viscoélastiques.

4.1. Méthode de condensation robuste de modèles viscoélastiques

L'objectif de la condensation de modèles est toujours de construire une base de réduction capable de bien représenter les mêmes réponses physiques que le modèle nominal modifié globalement ou localement. En effet, disposer d'une base de réduction capable de représenter le mouvement d'un modèle perturbé est primordial dans des procédures itératives de recalage ou d'optimisation, puisqu'une telle base, permet des réanalyses approchées rapides et économiques en terme de calculs (Masson et al, 2003). La notion de robustesse des bases face aux perturbations paramétriques est primordial, et conditionne la précision du calcul des réponses approchées.

A partir de l'expression (2.28), on peut imaginer que pour des modèles industriels de grande taille amortis par matériaux viscoélastiques, il n'est pas envisageable (d'un point de vue du coût numérique) d'utiliser directement le modèle complet, car cela conduit à des temps de calcul prohibitifs à cause de l'inversion de la matrice de raideur dynamique complexe, pour chaque pas de fréquence. On utilise alors des approximations de réponses en cherchant la solution dans un sous-espace : c'est-à-dire, l'approche modale, que consiste à projeter les équations du mouvement du système amorti sur une base de réduction $\mathbf{T}$, afin de diminuer le nombre de degrés de liberté du système et donc accélérer la résolution numérique du

problème, avec l'hypothèse que les réponses exactes, représentées par l'expression (2.26), peuvent être approchées par des solutions dans un sous-espace réduit de la forme suivante :

$$\mathbf{Q} = \mathbf{T}\mathbf{Q}_r \quad (4.1)$$

où la matrice $\mathbf{T} \in \mathbb{C}^{N \times NR}$ est la base de réduction, ou base de Ritz, et $\mathbf{Q}_r \in \mathbb{C}^{NR}$ avec $NR \ll N$ (NR étant les modes retenus dans la base).

En considérant les expressions (2.26) et (4.1), la fonction de transfert (2.28) peut être donc approchée par :

$$\mathbf{H}_r(\omega, T) = \mathbf{c}\mathbf{Z}_r(\omega, T)^{-1}\mathbf{b} \quad (4.2)$$

où $\mathbf{Z}_r(\omega, T) = \mathbf{T}^T \mathbf{K}_e \mathbf{T} + G(\omega, T) \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{K}}_v \mathbf{T} - \omega^2 \mathbf{T}^T \mathbf{M} \mathbf{T}$ est la matrice de rigidité réduite.

La matrice de rigidité dynamique réduite peut être calculée et inversée pour chaque fréquence d'une manière directe en utilisant des algorithmes numériques efficaces. Cependant, pour les systèmes amortis par matériaux viscoélastiques, le choix de la base de réduction n'est pas simple ni systématique en raison de la dépendance de la matrice de rigidité par rapport à la fréquence d'excitation et à la température. Il faut alors considérer que la base de réduction doit également prendre en compte les variations de la fréquence et de la température.

Pour résoudre ce problème, trois solutions sont envisageables, à savoir : a) on peut négliger cette dépendance en considérant la matrice de rigidité comme indépendante de la fréquence et de la température. Pour cela, il faut bien choisir « un modèle de départ » pour calculer cette base de réduction indépendante de la fréquence et de la température, qui doit être enrichie par des vecteurs résiduels statiques pour les effets viscoélastiques (Balmès et al, 2002a ; 2002b) ; b) on peut utiliser une base de réduction composée par des modes propres complexes, obtenues par la résolution du problème aux valeurs propres non-linéaire (Daya et Poitier-Ferry, 2001 ; Daya et al, 2002). Cependant, plusieurs auteurs montrent que l'obtention numérique de ces derniers peut conduire à des temps de calcul prohibitifs pour des systèmes de grand taille (Plouin et Balmès, 1998 ; 1999) ; c) on peut également utiliser une méthode itérative, qui permet la réactualisation de la base de réduction en fonction de la fréquence, lorsque cela est nécessaire (Kergourlay et al, 2000).

Dans ce mémoire, on propose de fixer la base de réduction et de déterminer la réponse du système amorti en utilisant l'approximation standard de Ritz-Galerkin (Masson et al, 2003). Pour cela, il faut adopter un point de départ pour déterminer la base de réduction qui sera toujours constante. Balmès et Germès (2002b) a montré que la raideur tangente est un point de départ convenable, ayant l'avantage d'être réel et facile d'être inversé. Il s'agit donc de tenir compte du comportement conservatif associé (CCA) du matériau viscoélastique, pour lequel $\mathbf{K}_v(0) = G_0 \bar{\mathbf{K}}_v$. On parlera alors du Système Conservatif Associé (SCA) dans lequel l'amortissement viscoélastique est éliminé. Le CCA peut être obtenu à travers les propriétés

asymptotiques du lissage des courbes maîtresses pour chaque matériau viscoélastique, comme montré dans le Chapitre 2, Section 2.5.1. D'une manière générale, la mesure des caractéristiques viscoélastiques à une température fixée donne le module de stockage et le facteur de perte dont la variation en fréquence ressemble généralement à celle montrée en Figure 2.11 pour le matériau viscoélastique 3M ISD112™. Dans les zones haute et basse fréquence non mesurées, on prolonge par des asymptotes. Par l'extrapolation en basse fréquence on peut obtenir une asymptote réelle G_0 et $\eta_0 = 0$ et pour les hautes fréquences, on obtient une asymptote complexe G_∞ et η_∞ (Crandall, 1970). La matrice de raideur élastique tangente peut donc être exprimée comme suit :

$$\mathbf{K}_0 = \mathbf{K}_e + G_0 \bar{\mathbf{K}}_v \quad (4.3)$$

La base de réduction nominale contenant les premiers modes maintenus du système amorti par matériaux viscoélastiques peut être obtenue par la résolution du problème aux valeurs propres suivant :

$$\begin{aligned} (\mathbf{K}_0 - \lambda_i \mathbf{M}) \phi_i &= 0 \quad i = 1, \dots, N \\ \phi_0 &= [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \dots \quad \phi_{NR}], \quad \Lambda_0 = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_{NR}) \end{aligned} \quad (4.4)$$

La base de réduction ϕ_0 ne contient que des modes propres du système traité en prenant en compte la matrice élastique tangente (SCA). Pour enrichir cette base, Balmès et Germès (2002) ont proposé d'utiliser des résidus statiques basés sur les déplacements liés aux chargements imposés, qu'on peut obtenir à travers de l'expression suivante :

$$\mathbf{R} = \mathbf{K}_0^{-1} \mathbf{b} \quad (4.5)$$

Cette procédure est appelée correction statique du premier ordre, qui est complétée par le calcul de la réponse statique aux chargements produits par la partie imaginaire de la matrice de rigidité dynamique complexe, qu'on peut obtenir à travers l'expression (2.26.a) :

$$\mathbf{R}_\Delta^0 = \mathbf{K}_0^{-1} \bar{\mathbf{K}}_v \phi_0 \quad (4.6)$$

Ces résidus sont associés aux effets viscoélastiques du système nominal amorti, afin de tenir compte des forces viscoélastiques (amortissement). Ainsi, la base de réduction nominale enrichie, peut être exprimée comme suit :

$$\mathbf{T}_0 = [\phi_0 \quad \mathbf{R} \quad \mathbf{R}_\Delta^0] \quad (4.7)$$

La base de réduction (4.7) est utilisée pour réduire les modèles amortis par matériaux viscoélastiques, avec une raisonnable exactitude, mais elle n'est pas forcément assez « robuste » pour tenir compte des modifications paramétriques, ce qu'on cherche à obtenir lorsqu'on utilise des procédures de condensation de modèles pendant les processus itératifs d'optimisation et/ou de recalage de modèles. Ceci signifie que la base de réduction donnée par

l'expression (4.7) devrait, en principe, être adaptative vis-à-vis des modifications paramétriques au cours des itérations, pour garantir une exactitude satisfaisante de la réduction. Dans l'optique de diminuer les coûts de calcul d'une nouvelle base de réduction T_θ , lors d'une modification paramétrique, la stratégie suggérée consiste en employer une base de réduction fixe évaluée à partir du modèle nominal (ou modèle initial), donné par la relation (4.7), qu'on doit ensuite enrichir par un ensemble de vecteurs de réponses résiduelles statiques issues des modifications paramétriques (Masson et al, 2003) induites par le traitement viscoélastique (en admettant que les variables de conception sont liées aux caractéristiques du traitement viscoélastique).

Dans la plupart des applications pratiques, les traitements viscoélastiques ne sont pas appliqués à la totalité de la structure, mais seulement dans des zones spécifiques. Ainsi, en exploitant les expressions (2.26) et (2.27), on peut écrire le système dynamique modifié sous la forme suivante :

$$(\Delta Z(\omega, T) + Z(\omega, T))Q = F \quad (4.8)$$

où $\Delta Z(\omega, T) = \Delta K_v(\omega, T) - \omega^2 \Delta M_v$ est la variation de la matrice de rigidité dynamique associée aux modifications paramétriques dues au traitement viscoélastique.

En introduisant le concept des forces associées aux modifications, l'expression (4.8) peut être interprété comme l'équation d'équilibre dynamique du modèle nominal, soumis aux forces de modifications paramétriques $F_\Delta(\omega, T)$, comme suit :

$$Z(\omega, T)Q = F + F_\Delta(\omega, T) \quad (4.9.a)$$

où :

$$F_\Delta(\omega, T) = -\Delta Z(\omega, T)Q \quad (4.9.b)$$

Les matrices perturbées associées à une zone viscoélastique modifiable, peuvent être exprimées sous les formes suivantes :

$$\Delta M_v = \sum_{i=1}^{n_{mp}} \Delta m_i M_{v_i} \quad , \quad \Delta \bar{K}_v = \sum_{i=1}^{n_{mp}} \Delta k_i \bar{K}_{v_i} \quad (4.10)$$

où Δm_i et Δk_i sont les variations de la masse et de la rigidité, respectivement. Les matrices

$M_v = \bigcup_i M_{v_i}$ et $\bar{K}_v = \bigcup_i \bar{K}_{v_i}$ sont les matrices de masse et de rigidité associées aux zones

viscoélastiques, respectivement, et M_{v_i} et $\bar{K}_{v_i}$ sont les matrices élémentaires de masse et de rigidité d'un élément viscoélastique i . Les matrices ΔM_v et $\Delta \bar{K}_v$ sont les matrices des modifications paramétriques, qui sont en général des matrices creuses et fonctions nonlinéaires des paramètres de conception (Cf. Chapitre 3, paragraphe 3.9).

4.1.1 Base des forces associées aux modifications paramétriques

L'expression (4.9.b) montre que le vecteur des forces dues aux modifications structurales, représentés par des variations sur les paramètres de conception du traitement viscoélastique, dépend de la réponse du système modifié $\mathbf{Q}$. Puisque cette réponse est a priori inconnue les forces dues aux modifications ne peuvent pas être calculées exactement. Le concept essentiel de la condensation robuste est exprimé dans les étapes suivantes (Masson et al, 2003) : d'abord, on utilise l'expression (4.9.b) pour générer un vecteur des forces qui même s'il ne contient pas les forces exactes associées aux modifications, représentera au moins un sous-espace contenant ces vecteurs. Ceci est réalisé en injectant la réponse du système nominal connue dans l'expression (4.9.b) ; ensuite, le vecteur des forces résultant est employé pour générer des réponses statiques, à nouveau sur la base du modèle nominal ; les deux premières étapes sont répétées pour chaque paramètre de conception soumis à des modifications.

Différents types de réponses peuvent être injectées dans l'expression (2.9.b), comme des *modes normaux* et des *vecteurs de sensibilité*. Si le vecteur injecté est composé par une base tronquée de modes normaux, on peut réécrire (4.9.b) sous la forme suivante :

$$\mathbf{f}_\Delta(\omega, T) \approx -\Delta \mathbf{Z}(\omega, T) \boldsymbol{\phi}_0 \mathbf{Q}_r \quad (4.11)$$

Pour générer la base de forces $\mathbf{F}_\Delta(\omega, T)$ représentative de l'ensemble des modifications potentielles, à partir de l'expression (4.11), pour chaque paramètre, on doit calculer une sous base de forces associée $\mathbf{f}_\Delta(\omega, T)$. Par exemple, pour un paramètre p intervenant linéairement dans les matrices de masse et de raideur d'une zone viscoélastique, la base de forces peut être déterminée par l'expression suivante :

$$\mathbf{F}_{\Delta p} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{\Delta p}^{M_v} & \mathbf{f}_{\Delta p}^{K_v} \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

où $\mathbf{f}_{\Delta p}^{M_v} = \mathbf{M}_v(\Delta p) \boldsymbol{\phi}_0 \mathbf{A}_0$ et $\mathbf{f}_{\Delta p}^{K_v} = G_0 \bar{\mathbf{K}}_v(\Delta p) \boldsymbol{\phi}_0$ sont les bases des forces associées aux modifications sur la masse et sur la rigidité, respectivement, et les matrices $\mathbf{M}_v(\Delta p)$ et $\bar{\mathbf{K}}_v(\Delta p)$ sont les matrices de masse et de rigidité associées à une zone viscoélastique modifiable, pour lesquelles on factorise les paramètres de masse et de rigidité, selon les expressions (3.65) à (3.70), respectivement.

4.1.2 Base des déplacements associés aux modifications paramétriques

Une fois la base de forces construite, on peut calculer une série de vecteurs de réponses statiques basés sur la raideur dynamique tangente, utilisés pour enrichir convenablement la base de réduction nominale $\mathbf{T}_0$, en utilisant l'expression suivante :

$$\mathbf{R}_{\Delta p} = \mathbf{K}_\theta^{-1} \mathbf{F}_{\Delta p} \quad (4.13)$$

et la base de réduction finale peut être exprimée comme suit :

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_\theta & \mathbf{R}_\Delta \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

La matrice des résidus $\mathbf{R}_\Delta$, formée par des vecteurs $\mathbf{R}_{\Delta p}$, n'est pas forcément de rang maximal. Ainsi, pour obtenir un nombre limité de résidus, il est approprié de choisir les directions prépondérantes de cette sous-base. Il s'agit donc d'effectuer une décomposition en valeurs singulières (SVD) de la matrice $\mathbf{R}_\Delta$ pour identifier ses plus grandes valeurs singulières. La décomposition est faite selon l'expression suivante :

$$\mathbf{R}_\Delta = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^T \quad (4.15)$$

où $\mathbf{U}$ et $\mathbf{V}$ sont deux matrices réelles orthogonales, et $\mathbf{\Sigma} = \text{diag}\{\sigma_i\}$ est une matrice diagonale composée par les valeurs singulières. A partir d'un découpage matriciel, selon les valeurs singulières plus grandes et plus petites, indiquées par les indices inférieurs 1 et 2, respectivement, l'expression (4.15) devient :

$$\mathbf{R}_\Delta = \mathbf{U}_1 \mathbf{\Sigma}_1 \mathbf{V}_1^T + \mathbf{U}_2 \mathbf{\Sigma}_2 \mathbf{V}_2^T \quad (4.16)$$

Si on néglige la contribution des plus petites valeurs singulières, la base reste exprimée sous la forme suivante :

$$\mathbf{R}_\Delta = \mathbf{U}_1 \mathbf{\Sigma}_1 \quad (4.17)$$

Le nombre de valeurs singulières et le nombre de colonnes à retenir sont choisis arbitrairement en définissant un rapport entre deux valeurs singulières successives. Les résidus obtenus sont normalisés par rapport à la masse du système nominal. La base de réduction représentée par l'expression (4.14) sera donc de rang maximal.

Dans le cas des paramètres non-linéaires, on peut découpler chaque effet lié à une puissance α à laquelle un paramètre donné est élevé dans l'expression des vecteurs et construire autant de bases $\mathbf{f}_\Delta^\alpha(\omega, T)$ selon les besoins. Pour le modèle de plaque sandwich, on peut découpler les effets de membrane, de flexion, et de cisaillement, comme représenté par les équations (3.65) à (3.70). En conséquence, la base des forces $\mathbf{F}_\Delta$ est calculée à partir des matrices de rigidité associées à chaque effet et pour chaque paramètre p soumis à des modifications, comme suit :

$$\mathbf{F}_{\Delta p} = \left[\overbrace{\mathbf{f}_{\Delta 1}^{M_v} \mathbf{f}_{\Delta 1}^{K_v} \dots \mathbf{f}_{\Delta p}^{M_v} \mathbf{f}_{\Delta p}^{K_v}}^{\text{membrane}} \quad \overbrace{\mathbf{f}_{\Delta 1}^{M_v} \mathbf{f}_{\Delta 1}^{K_v} \dots \mathbf{f}_{\Delta p}^{M_v} \mathbf{f}_{\Delta p}^{K_v}}^{\text{flexion}} \quad \overbrace{\mathbf{f}_{\Delta 1}^{M_v} \mathbf{f}_{\Delta 1}^{K_v} \dots \mathbf{f}_{\Delta p}^{M_v} \mathbf{f}_{\Delta p}^{K_v}}^{\text{cisaillement}} \right] \quad (4.18)$$

La base de condensation robuste avec les effets découplés, est exprimée comme suit :

$$T = \begin{bmatrix} T_0 & R_\Delta^m & R_\Delta^f & R_\Delta^c \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

Les résidus traités précédemment sont les résidus du premier ordre. Dans certains cas, on envisage d'améliorer la précision du modèle réduit en ajoutant des résidus d'ordre supérieur. Dans ce sens, les résidus à l'ordre deux sont obtenus en calculant une nouvelle base de forces du système modifié à partir des déplacements résiduels calculés à travers l'expression (4.12), selon :

$$f_{\Delta p}^{M_v} = M_v(\Delta p)R_\Delta^2, \quad f_{\Delta p}^{M_v} = G_0 \bar{K}_v(\Delta p)R_\Delta^2 \quad (4.20)$$

Le résidu à l'ordre deux est calculé sous la forme suivante :

$$R_\Delta^2 = K_\theta^{-1} F_\Delta \quad (4.21)$$

et par conséquent la nouvelle base de condensation est exprimée comme suit :

$$T = \begin{bmatrix} T_0 & R_\Delta & R_\Delta^2 \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

Les résidus à l'ordre deux peuvent être utiles lorsque les résidus à l'ordre un sont insuffisants pour assurer la précision requise. Leur utilisation améliore les résultats mais augmente la taille de la base de réduction, ce qui peut être préjudiciable en termes de coût de calcul dans le cas de systèmes de grande taille.

La Figure 4.1 illustre un cycle de réanalyse approchée par utilisation d'une base de condensation robuste, augmentée par des résidus statiques associés aux modifications paramétriques, capable de bien représenter le comportement de la structure complète perturbée globale ou localement, sans réactualisation de la base de réduction, associée au système nominal.

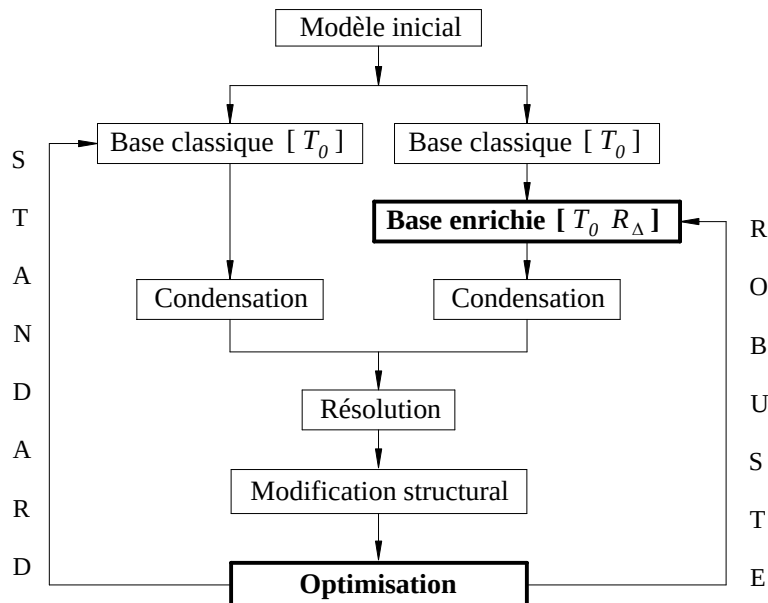
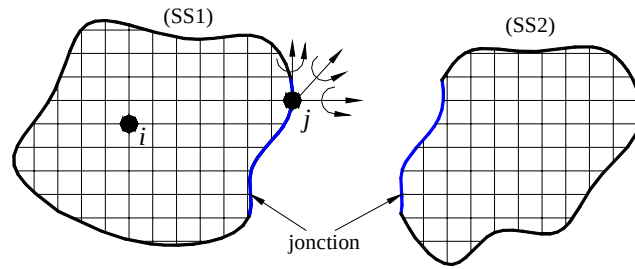


Figure 4.1 – Cycle de réanalyse approchée par condensation robuste

4.1.3 Condensation par sous-structuration dynamique (synthèse modale)

L'objectif des méthodes de sous-structuration est de permettre de représenter le comportement dynamique d'une structure S , à partir de la connaissance du comportement dynamique de ses sous-structures, et de l'utilisation de modèles numériques de taille réduite. Les méthodes de sous-structuration diffèrent entre eux essentiellement par le choix de la base de réduction T de chaque sous-structure, et la technique d'assemblage entre elles. De cette façon, les principales sources d'erreur proviennent de l'utilisation des bases de réduction incomplètes, et de la discrétisation du contour de raccordement sur lequel on impose l'égalité des déplacements et l'équilibre des forces.

La Figure 4.2 illustre une maillage aux éléments finis de deux sous-structures $SS1$ et $SS2$ respectivement, dont les degrés de liberté peuvent être divisés en deux sous-ensembles : un domaine interne composé par tous les nœuds i qui appartiennent au maillage, et la frontière ou jonction, composée par tous les nœuds de jonction j .


 Figure 4.2 – Définition des sous-structures : d.d.l. internes i et d.d.l. de jonction j .

Ainsi, les degrés de liberté (d.d.l) du vecteur déplacement $\mathbf{Q}$ d'une sous-structure SS sont divisés en deux sous-ensembles : les d.d.l de jonction $\mathbf{Q}_j$ et les d.d.l internes $\mathbf{Q}_i$:

$$\mathbf{Q} = \begin{Bmatrix} \mathbf{Q}_j \\ \mathbf{Q}_i \end{Bmatrix} \quad (4.23)$$

et donc l'équation d'équilibre dynamique d'une sous-structure SS (éventuellement le SCA d'une sous-structure viscoélastique), peut être écrite tenant compte de la partition (4.23) :

$$\left(\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{0jj} & \mathbf{K}_{0ji} \\ \mathbf{K}_{0ij} & \mathbf{K}_{0ii} \end{bmatrix} - \mathbf{A} \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{jj} & \mathbf{M}_{ji} \\ \mathbf{M}_{ij} & \mathbf{M}_{ii} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \mathbf{Q}_j \\ \mathbf{Q}_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_j \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (4.24)$$

où $\mathbf{A} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_{NR})$.

Les propriétés de couplage des matrices de masse et de raideur réduites dépendent du type de modes et du procédé d'assemblage choisis. Dans ce mémoire, au niveau d'assemblage de matrices réduites de plusieurs sous-structures, on utilise la méthode de sous-structuration

proposée par Craig et Bampton (1968), qui impose la continuité de déplacements à l'interface entre les sous-structures sous la forme suivante :

$$\mathbf{Q}_j^{(1)} = \mathbf{Q}_j^{(2)} = \dots = \mathbf{Q}_j^{(ss)} \quad (4.25)$$

La méthode de Craig-Bampton est la méthode de sous-structuration la plus connue et la plus employée pour sa simplicité de mise en œuvre numérique et pour ses performances. La base de condensation dite classique de Craig-Bampton est composée par de vecteurs de *modes contraintes* enrichie par des *modes normaux* de la sous-structure à jonction bloquée.

Les modes contraints correspondent à la réponse statique de la sous-structure lorsqu'un déplacement unitaire est imposé sur l'un des degrés de liberté du contour, et que les autres degrés de liberté du contour sont bloqués. Ils forment la matrice $\boldsymbol{\Theta}_j$ qu'on peut obtenir par la résolution de l'équation suivante :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{0jj} & \mathbf{K}_{0ji} \\ \mathbf{K}_{0ij} & \mathbf{K}_{0ii} \end{bmatrix} \boldsymbol{\Theta}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_j \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

$$\text{où : } \boldsymbol{\Theta}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{jj} \\ \boldsymbol{\Theta}_{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{jj} \\ -\mathbf{K}_{0ii}^{-1} \mathbf{K}_{0ij} \end{bmatrix}.$$

Remarque : La résolution de (4.26) exige que la matrice $\mathbf{K}_{0ii}$ soit non singulière. Lorsque $\mathbf{K}_{0ii}$ est singulière, on peut utiliser des procédures numériques pour filtrer les modes de corps rigide (Masson et al, 2003).

Les modes normaux sont les solutions propres d'une sous-structure. Il y a trois types de modes normaux suivant le type de conditions aux limites à l'interface (Masson et al, 2003). Dans ce rapport, on utilise les modes à l'interface bloquée $\boldsymbol{\psi}_i$, obtenus par la résolution du problème homogène associé à l'ensemble de d.d.l i et à l'ensemble de d.d.l j soumis à des conditions d'encastrement. Les coordonnées généralisées $\mathbf{c}$ sont alors composées de coordonnées physiques $\mathbf{Q}_j$ et de coordonnées modales $\mathbf{Q}_m$ associées aux modes bloqués $\boldsymbol{\psi}_i$:

$$\mathbf{c} = \begin{Bmatrix} \mathbf{Q}_j \\ \mathbf{Q}_m \end{Bmatrix} \quad (4.27)$$

La transformation classique $\mathbf{T}_{cb}$ de type Craig-Bampton est alors la suivante :

$$\mathbf{T}_{cb} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{jj} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\Theta}_{ij} & \boldsymbol{\psi}_i \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

Cette base de réduction est bien adaptée au cas de systèmes non amortis, et lors qu'on utilise cette procédure de condensation pour des systèmes viscoélastiques, la base T_{cb} liée à la sous-structure traitée par matériaux viscoélastiques, doit être enrichie par des résidus associés aux forces extérieures et aux efforts des modifications viscoélastiques suivant le même principe décrit précédemment. Les modes propres du modèle nominal choisis pour construire les résidus sont les modes normaux à l'interface bloquée, et les vecteurs de résidus qui représentent les déplacements statiques dues aux efforts extérieurs R_i , et aux modifications viscoélastiques à la jonction bloquée, $R_{\Delta i}^0$ et $R_{\Delta pi}$, sont calculés suivant les expressions (4.6) et (4.13). Les transformations de Craig-Bampton enrichies T_{cbe}^0 et T_{cbe} pour une sous-structure traitée peuvent être exprimées par les relations suivantes :

$$T_{cbe}^0 = \begin{bmatrix} I_{jj} & 0 & 0 & 0 \\ \Theta_{ij} & \psi_i & R_i & R_{\Delta i}^0 \end{bmatrix}; \quad T_{cbe} = \begin{bmatrix} T_{cbe}^0 & 0 \\ & R_{\Delta pi} \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

4.2 Approximation des réponses par des métamodèles

4.2.1 Principe général

Supposons qu'on veut étudier un phénomène physique qui lie une entrée à une sortie comme illustré en Figure 4.3. L'état de ce phénomène peut être représenté par une série de grandeurs, qu'on peut regrouper dans un vecteur appelé vecteur de sortie ou réponse, noté y , qui dépend de plusieurs paramètres regroupés dans un autre vecteur, appelé vecteur d'entrée x . Si on suppose que le phénomène n'a pas de mémoire, c'est-à-dire que sa sortie y à un instant donné ne dépend que de son entrée x à ce même instant, et non pas des entrées précédentes, on peut représenter le phénomène comme une fonction $y = f(x)$.



Figure 4.3 – Schéma bloc représentant un phénomène physique quelconque.

Si on n'est pas capable de modéliser précisément le phénomène physique mais qu'on aimerait disposer d'une simulation, on peut recourir à aux techniques d'approximation de fonctions (Ait Brik, 2005). Le but est de créer une nouvelle fonction $g(x)$, qu'on connaît parfaitement et qui représentera le mieux possible la fonction $f(x)$. On définit alors une mesure de l'écart entre les deux fonctions, qu'on appelle *performance*. La performance la plus utilisée est l'*erreur quadratique* e_q :

$$e_q = \|f(x) - g(x)\|^2 \quad (4.30)$$

Comme on n'a pas accès à la fonction $f(\mathbf{x})$, cette performance ne peut pas être calculée à priori. Par contre, on dispose d'un jeu de mesures du phénomène physique qu'on peut représenter par une série de couples $(x_k, y_k = f(x_k))$, et dans ce cas, il est possible de calculer une performance approchée. Pour l'erreur quadratique, il s'agit de l'erreur quadratique moyenne :

$$\varepsilon = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \|y_k - g(\mathbf{x})\|^2 \quad (4.31)$$

L'approximation de la fonction est faite à l'aide de ce jeu de mesures, et on cherche la fonction $g(\mathbf{x})$ qui minimise la fonction performance ε . Généralement la construction de la fonction $g(\mathbf{x})$ passe par deux étapes essentielles : *l'apprentissage* et *la validation*. L'apprentissage est le choix du jeu de données qui servira à réaliser l'approximation. Celui-ci doit être représentatif des évolutions de la fonction $f(\mathbf{x})$, et pour cela, il faut bien choisir ce jeu de données, parce qu'il peut arriver que l'erreur quadratique moyenne soit nulle, alors que la fonction $g(\mathbf{x})$ ne soit pas une bonne approximation de $f(\mathbf{x})$. Pour détecter ces anomalies, il faut définir un autre jeu de valeurs de $f(\mathbf{x})$ pour valider l'approximation. Le premier, appelé *base d'apprentissage*, contient les données qui serviront à déterminer la fonction $g(\mathbf{x})$. Le second, appelé *base de validation*, est distinct du premier, et servira simplement à vérifier que l'approximation se déroule correctement. Deux performances sont alors calculées, ε_a pour la base d'apprentissage, et ε_v pour la base de validation. On cherche à minimiser ε_a et on surveille l'évolution de ε_v . Si un écart assez important est constaté entre les deux performances, ceci veut dire que l'approximation n'est pas bonne, et une cause possible est un mauvais choix de la base d'apprentissage (Ait Brik, 2005).

Il existe de nombreuses méthodes d'approximation pour déterminer une fonction $g(\mathbf{x})$ qui approxime dans certaines conditions la fonction $f(\mathbf{x})$. Par exemple on peut envisager d'utiliser la famille des fonctions polynomiales de degré trois. On peut représenter cette famille par $g(\mathbf{p}, \mathbf{x})$ où $\mathbf{x}$ est toujours la variable de la fonction, et $\mathbf{p}$ est un vecteur de paramètres, qui caractérise la fonction choisie dans la famille. Dans l'exemple de la famille des fonctions polynomiales de degré 3, le vecteur $\mathbf{p}$ est l'ensemble des coefficients du polynôme.

Finalement, une fois la famille choisie, le problème de l'approximation devient un problème d'optimisation numérique. En effet, il se réduit à trouver le vecteur de paramètres $\mathbf{p}$ qui minimise la fonction suivante :

$$\varepsilon_a = \frac{1}{n_a} \sum_{k=1}^{n_a} \|y_k - g(\mathbf{p}, x_k)\|^2 \quad (4.32)$$

où n_a est le nombre d'éléments dans la base d'apprentissage (x_k, y_k) , et le nombre de paramètres (dimension de $\mathbf{p}$) est associé aux degrés de liberté de l'algorithme utilisé pour

l'approximation. Plus ce nombre est grand, plus il est possible d'approcher la fonction $f(x)$. Avec un nombre de degrés de liberté plus faible, la recherche de l'approximation demande moins de calcul. Si le nombre de degrés de liberté est trop élevé, un autre problème survient, celui du *surapprentissage*, ou *apprentissage par cœur*. La fonction $g(x)$ obtenue est plus complexe que la fonction d'origine, et est parfaitement égale à celle-ci seulement pour les points utilisés dans l'apprentissage. Mais il peut arriver que $g(x)$ ne généralise pas correctement. Pour éviter ce problème il faut limiter le nombre de degrés de liberté, tout en garantissant que les fonctions $g(x)$ pourront être assez complexes pour approximer correctement.

4.2.2 Réseaux de neurones artificiels (ANNs)

Les réseaux de neurones ont comme leur nom l'indique, comme source d'inspiration les neurones biologiques. Toutefois, ils font maintenant partie des outils dont on dispose pour traiter des données et approximer des fonctions ou des réponses des systèmes complexes. D'abord, la tâche à effectuer par le réseau est décomposée en tâches élémentaires, réalisées par des neurones. Chaque neurone possède des entrées et une sortie, comme illustré en Figure 4.4.a, et ils peuvent être organisés en plusieurs couches, qui sont reliées entre eux (Figure 4.4.b).

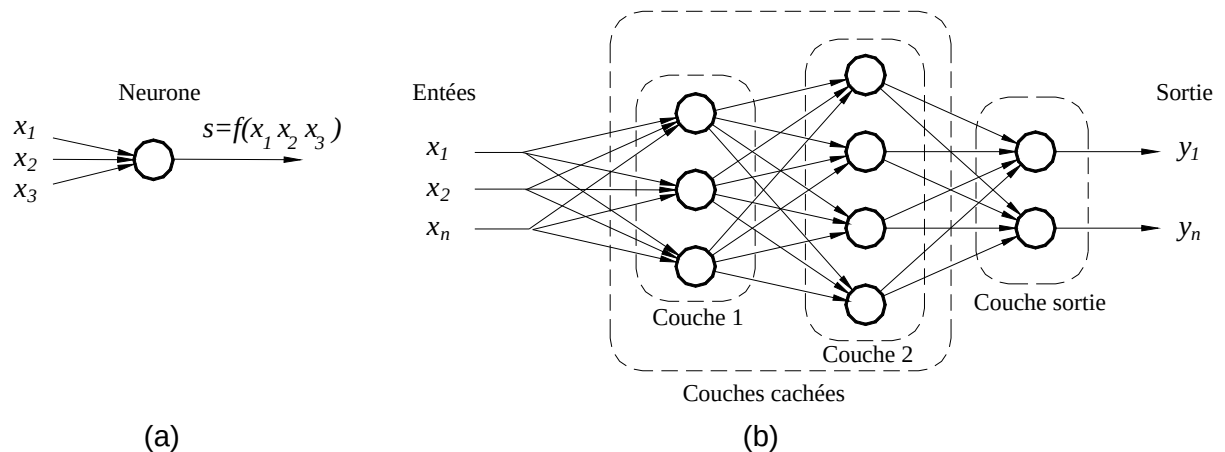


Figure 4.4 – Illustration d'un neurone (a) et d'un réseau de neurones (b) (figure empruntée à la référence (Tertois, 2003)).

Une autre caractéristique d'un réseau est qu'il est adaptatif. Dans chaque neurone, les paramètres peuvent être modifiés, et servent à adapter le réseau à une tâche particulière. Ces modifications sont faites lors de la phase *d'apprentissage du réseau*. Les ANNs sont utilisés dans des domaines très variés tels que la reconnaissance d'écriture manuscrite, le traitement d'images, les télécommunications (Tertois, 2003), et très récemment en dynamique des structures (Soteris, 2004 ; Ait Brik, 2005).

4.2.2.1 Le perceptron multicouche (PMC)

Un perceptron est un type de réseau organisé en plusieurs couches. La première couche est reliée aux entrées, puis ensuite chaque couche est reliée à la couche précédente. C'est la dernière couche qui produit les sorties du PMC. Les sorties des autres couches ne sont pas visibles à l'extérieur du réseau, et elles sont appelées pour cette raison de couches cachées (Figure 4.4.b). Un neurone perceptron i réalise un produit scalaire entre son vecteur d'entrées $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_N\}$ avec N le nombre d'entrées, et un vecteur de paramètres $\mathbf{w} = \{w_1, \dots, w_N\}$ appelé vecteur de poids, et on ajoute un biais $\mathbf{b} = \{b_1, \dots, b_N\}$, en utilisant une fonction d'activation f_a pour déterminer sa sortie (Tertois, 2003) :

$$a_{l,i} = \sum_{j=1}^N f_{a_l}(w_{l,j}x_j + b_j) \quad (4.33)$$

où f_{a_l} est la fonction d'activation de la couche l ; $a_{l,i}$ est la sortie du neurone i de la couche l ; $w_{l,j}$ désigne le poids de l'entrée j de la couche l .

Les fonctions f_a doivent être de préférence strictement croissantes et bornées. Les fonctions classiquement utilisées sont la tangente hyperbolique $f_a^1(x)$ et la sigmoïde standard $f_a^2(x)$, exprimées, respectivement, sous les formes suivantes :

$$f_a^1(x) = \tanh(x) = (e^x - e^{-x}) / (e^x + e^{-x}); \quad f_a^2(x) = (\tanh(x) + 1) / 2 \quad (4.34)$$

La Figure 4.5 ci-dessous illustre les notations classiques souvent utilisées pour désigner les réseaux de neurones. On observe que $\mathbf{a}_l \in R^{1 \times n}$ est le vecteur regroupant les sorties des neurones de la couche l , et $\mathbf{w}_{l,i} \in R^{1 \times N}$ désigne le vecteur de poids du neurone i de la couche l . Tous les vecteurs de poids d'une couche sont regroupés dans la matrice $\mathbf{W}_l \in R^{n \times N}$.

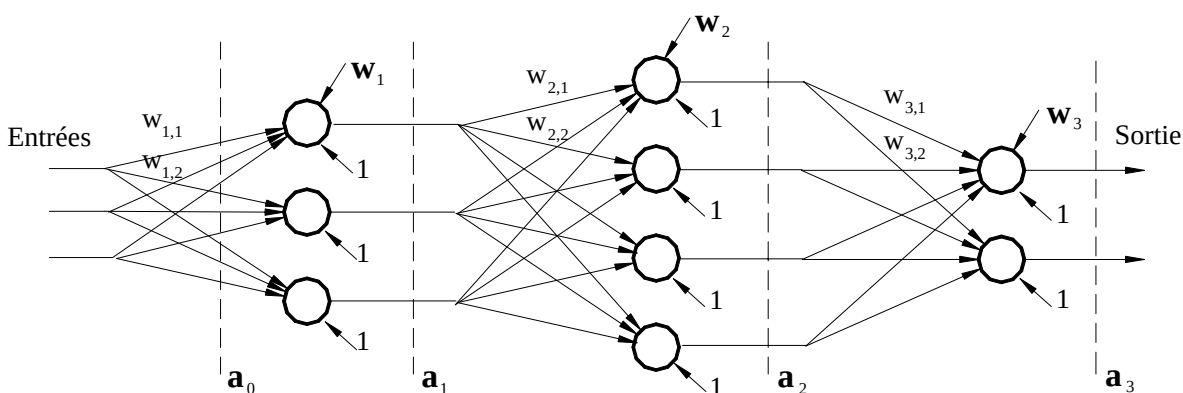


Figure 4.5 – Notation des poids et des sorties des couches pour les réseaux de neurones.
(figure empruntée à la référence (Tertois, 2003)).

En ce qui concerne la fonction d'activation d'un neurone, elle peut être exprimée sous la forme suivante :

$$f_{a_l}(\mathbf{a}_1) = (f_{a_l}(a_{1,1}), f_{a_l}(a_{1,2}), \dots, f_{a_l}(a_{1,n})) \quad (4.35)$$

et n est le nombre de neurones dans la couche. Comme chaque couche est reliée à la précédente, $\mathbf{a}_l$ est également l'entrée de la couche $l + 1$. En considérant $\mathbf{a}_0$ comme l'entrée du réseau, et en ajoutant le biais (souvent considéré comme un poids supplémentaire associé à une entrée qui est toujours égale à 1), on utilise la relation suivante pour exprimer la sortie d'une couche en fonction de ses entrées :

$$\mathbf{a}_l = f_{a_l}(\mathbf{a}_{l-1} \mathbf{W}_l) \quad (4.36)$$

De manière plus analytique on peut considérer la sortie d'une couche (expression (4.36)) comme une fonction vectorielle, dont les éléments constituent une base de fonctions. En ajoutant une seconde couche, les sorties sont des combinaisons linéaires des différents éléments de cette base, qui peuvent servir à une nouvelle base pour une autre couche.

On peut rencontrer plus d'informations sur les développements et les applications des ANNs dans les travaux proposés par Tertois (2003), Ait Brik (2005), Ling (2005), Gallagher (2000), et Soteris (2004). On précise que dans ce mémoire l'intérêt est d'utiliser les ANNs déjà développés et testés disponibles dans des codes commerciaux, tels que MATLAB®. Ces outils seront couplés avec les algorithmes génétiques multiobjectif dans le but de rapprocher les réponses dynamiques des systèmes complexes amortis par matériaux viscoélastiques, comme on détaille au Chapitre 6. Pour cela, la Figure 4.6 illustre les étapes essentielles pour la construction du métamodèle (réseau de neurones), à savoir :

- Choix de l'architecture de l'ANN, le nombre de couches cachées et le nombre de neurones par couche. Dans la boîte à outils appelée « *Neural Network Toolbox* » de MATLAB®, sont disponibles plusieurs fonctions représentant un très grand nombre de configurations de réseaux de neurones. Parmi celles qui sont disponibles, on s'intéresse à la fonction « *newff* ».
- Pour augmenter l'efficacité de construction des ANNs, on normalise les entrées $\mathbf{x}$ et les cibles $\mathbf{y}$ pour avoir la moyenne $\mu = 0$ et l'écart type $\sigma = 1$. Pour cela, on utilise la fonction « *prestd* » disponible dans MATLAB®.
- Parmi les entrées $\bar{\mathbf{x}}$ et les cibles $\bar{\mathbf{y}}$ normalisées, il faut choisir celles qui seront utilisées pour l'entraînement (apprentissage), $\bar{\mathbf{x}}_{en}$ et $\bar{\mathbf{y}}_{en}$, pour l'évaluation, $\bar{\mathbf{x}}_{ev}$ et $\bar{\mathbf{y}}_{ev}$, et pour le test, $\bar{\mathbf{x}}_{te}$ et $\bar{\mathbf{y}}_{te}$, de l'ANN. Pour cela, on utilise les fonctions « *train* » et « *sim* », respectivement, disponibles dans MATLAB®.
- Comme le métamodèle est construit à travers les données normalisées par la fonction « *prestd* », on utilise la fonction « *poststd* » pour sa dénormalisation.

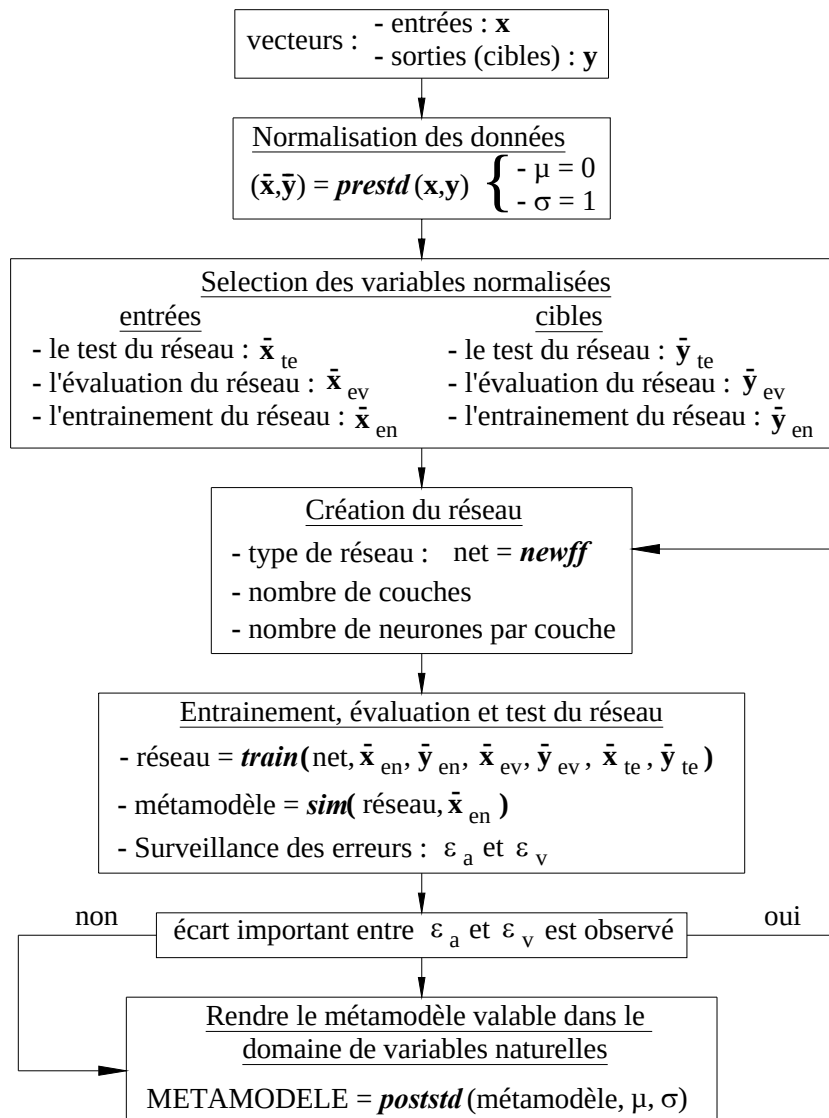


Figure 4.6 – Stratégie de construction des réseaux de neurones.

Pour la construction des réseaux de neurones, si un écart assez important est observé entre les performances ε_a et ε_v , on doit augmenter soit le nombre de neurones par couche, soit le nombre de couches cachées.

4.2.3 Méthodologies de surface de réponses

La méthodologie de surface de réponses (*Response Surface Methodology – RSM*) est une technique statistique dans laquelle les réponses (sorties) des processus sont approchées par des polynômes généralement plus simples à employer que le système physique réel (Myers et Montgomery, 2002). Leur construction, basées sur l'emploi des plans d'expériences à plusieurs paramètres d'entrée (Droesbeke et al, 1997), exige l'affranchissement de deux difficultés : les configurations élevées qui résultent des plans d'expériences ; et le nombre des coefficients du polynôme. Pour s'affranchir du premier problème, Masson (2004) a utilisé la moyenne des différentes configurations des variables dans le polynôme. Pour le second

problème, plusieurs auteurs (Batmaz et Tunali, 2003 ; Battaglia et Maynard, 1996) ont employé des métamodèles tronqués *a priori* au niveau des interactions entre les paramètres, ce qui peut engendrer des erreurs supplémentaires sur la surface de réponse (Ghanmi et al, 2005).

4.2.3.1 Plans d'expériences factoriels complets (PFC)

Le PFC est le plan d'expériences dans lequel on a une matrice des essais qui représente toutes les combinaisons possibles entre les niveaux des variables. Comme exemple, le Tableau 4.1 montre le PFC pour trois variables x_1 , x_2 et x_3 , à deux niveaux $[-1 +1]$ chacune. Le tableau montre que les variables qui varient toute au long des expériences sont les variables qui influent beaucoup dans la réponse exacte qu'on souhaite approximer par des polynômes, dans l'exemple, la variable x_1 . Au contraire, les variables qui varient peu sont les variables qui n'ont pas une influence significative sur la réponse exacte, c'est le cas de la variable x_3 .

Tableau 4.1 – Matrice des effets pour trois paramètres à deux niveaux

N° de l'essai	1	2	3	4	5	6	7	8
x_1	-1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	+1
x_2	-1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	+1
x_3	-1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	+1

Le nombre d'expériences (nombre des essais) n_{exp} réalisées par un PFC à k variables, à n_{niv} niveaux pour chacune, est exprimé par la relation suivante :

$$n_{exp} = n_{niv}^k \quad (4.37)$$

Le grand avantage du PFC est qu'il permet d'estimer toutes les interactions entre les variables, deux à deux, trois à trois, etc., jusqu'à l'interaction qui fait intervenir les k variables. Néanmoins, comme on peut remarquer, lorsque le nombre de facteurs augmente, son utilisation conduit rapidement à un nombre prohibitif d'expériences.

Une importante remarque, c'est que les variables considérées lors de l'élaboration d'un PFC sont des variables sans dimension appelées *variables codées*. Cette opération permet de rendre comparables les effets des variables naturelles, qui ne sont pas forcément exprimées dans les mêmes unités, permettant une comparaison directe entre leurs différents effets sans tenir compte de leurs unités. Pour cela, il faut passer les variables naturelles aux variables codées, et la transformation la plus utilisée est la transformation suivante (Myers et Montgomery, 2002) :

$$X_i = (x_i - \bar{x}_i) / \Delta x_i \quad (4.38)$$

où X_i est la valeur de la variable codée i ; x_i est la valeur de la variable naturelle i ; $\bar{x}_i$ est la valeur de la variable naturelle i au centre du domaine d'étude (valeur moyenne), et $\Delta x_i = (x_i^{max} - x_i^{min})/2$ représente la variation de la variable naturelle i associée à une variation d'une unité de la variable codée, appelée *pas de variation*.

4.2.3.2 Les surfaces de réponse classiques (RSM).

Si on considère le système physique montré en Figure 4.3, il est possible d'employer la méthodologie de surfaces de réponses pour rapprocher les solutions exactes y du système physique par la relation $\hat{y} = g(x)$. Les modèles les plus utilisés pour générer les surfaces de réponses sont ceux du premier ordre (linéaires) et les modèles du second ordre. Les premiers sont normalement divisés en trois groupes, à savoir : les modèles sans interactions, les modèles contenant toutes les interactions, et les modèles contenant seulement les interactions d'ordre 1, représentés, respectivement, comme suit :

$$\hat{y} = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \varepsilon \quad (4.39.a)$$

$$\hat{y} = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_{12} x_1 x_2 + \beta_{13} x_1 x_3 + \beta_{23} x_2 x_3 + \beta_{123} x_1 x_2 x_3 + \varepsilon \quad (4.39.b)$$

$$\hat{y} = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_{12} x_1 x_2 + \beta_{13} x_1 x_3 + \beta_{23} x_2 x_3 + \varepsilon \quad (4.39.c)$$

Les modèles représentés par les expressions (4.32.a) à (4.32.b) nécessitent au moins $(k+1)$, 2^k et $(k^2 + k + 2)/2$ simulations, respectivement, pour être complètement définis, ce qui représente le nombre de coefficients n_{coef} du polynôme à déterminer.

Le modèle du second ordre, ayant les termes quadratiques, est exprimé comme suit :

$$\hat{y} = \beta_0 + \sum \beta_i x_i + \sum \beta_{ij} x_i x_j + \sum \beta_{ii} x_i^2 + \dots + \varepsilon \quad (4.40)$$

Ce modèle nécessite au moins $(k^2 + 3k + 2)/2$ simulations pour être complètement défini.

Les expressions (4.39) et (4.40) peuvent être exprimées en notation matricielle comme suit :

$$\hat{Y} = X\hat{\beta} + \varepsilon \quad (4.41)$$

où $X \in R^{n_{exp} \times n_{coef}}$ est la matrice des effets (expériences) définie comme suit :

$$X = \begin{bmatrix} 1 & x_{1,1} & \cdots & x_{1,n_{coef}-1} \\ 1 & x_{2,1} & \cdots & x_{2,n_{coef}-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n_{exp},1} & \cdots & x_{n_{exp},n_{coef}-1} \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

où $x_{i,j}$ représente les variables et leurs interactions ; $\beta \in R^{n_{coef}}$ et $\varepsilon \in R^{n_{coef}}$, sont deux vecteurs colonnes qui représentent, respectivement, les coefficients à estimer et les erreurs expérimentales. Si $n_{exp} > n_{coef}$, la méthode des moindres carrés régressive (MCR) (Ghanmi et al, 2005) permet de estimer le vecteur de coefficients β . Si $X^T X$ est non singulière, le vecteur des estimateurs $\hat{\beta}$ peut être exprimé sous la forme suivante :

$$\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T Y \quad (4.43)$$

et, par conséquent, la réponse estimée est exprimée comme suit :

$$\hat{Y} = X(X^T X)^{-1} X^T Y + \varepsilon \quad (4.44)$$

- **Stratégie de prédiction des RSM**

L'emploi d'une seule configuration (métamodèle) pour estimer la réponse réelle d'un système physique paraît insuffisant du fait qu'elle peut être statistiquement loin du polynôme le plus précis qui représente la réalité. Pour remédier à cet inconvénient, on utilise la méthode proposée dans les travaux de Masson (2004) pour obtenir le métamodèle (polynôme) le plus proche de la référence. Il s'agit donc de construire plusieurs métamodèles qui estiment la réponse du système physique suivant un jeu de paramètres donné, et d'en déduire le meilleur polynôme. Pour construire les métamodèles, trois étapes sont indispensables, comme illustré en Figure 4.7 :

- 1^a) la première étape consiste à choisir l'ordre du polynôme qui représente au mieux la relation entrée-sortie entre les paramètres de conception et la réponse désirée du système physique. Plus l'ordre est élevé, meilleure sera la prédiction, mais plus nombreux seront les coefficients à déterminer ;
- 2^a) deuxième étape consiste à faire l'entraînement (apprentissage) du polynôme. Il s'agit donc de sélectionner les meilleurs polynômes par une procédure aléatoire suivant des critères statistiques bien déterminés. Le polynôme obtenu avant la validation représente la moyenne de tous les polynômes obtenus ;
- 3^a) la troisième étape consiste à faire la validation finale du polynôme moyen obtenu suite à l'apprentissage par la méthode d'Hyper Cube Latin (HCL).

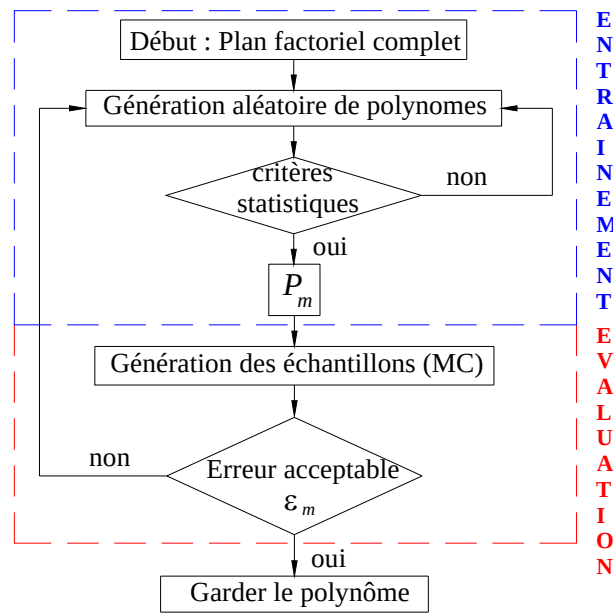


Figure 4.7 – Entraînement et validation de RSM.

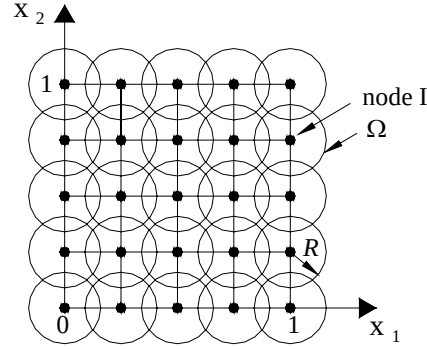
Dans la Figure 4.7 ci-dessus, $P_m = \left(\sum_{i=1}^{n_{rest}} P_{rest} \right) / n_{rest}$; P_{rest} représente les polynômes restants; P_m est le polynôme moyen à tester ; n_{rest} est le nombre de polynômes restants.

Une fois l'entraînement (apprentissage) du polynôme est achevé, on a le polynôme moyen. Mais un autre test qu'on doit être effectué dans le but de vérifier si le polynôme moyen obtenu est ou non de bonne qualité, sans refaire les simulations exactes. Il s'agit de prendre aléatoirement, par la méthode d'Hyper Cube Latin (HCL), plusieurs échantillons de points et de calculer la réponse à travers le polynôme obtenu. Si l'erreur moyenne de prédiction calculée sous la forme (4.45) est satisfaisante, on a alors un bon estimateur de la réponse exacte. Sinon, on est obligé de refaire la simulation exacte pour obtenir un nouveau polynôme moyen (voir Figure (4.7)).

$$\varepsilon_m = \frac{\sum_{i=1}^{n_{exp}} (y_i - \hat{y}_i) / y_i}{n_{exp}} \quad (4.45)$$

4.2.3.3 Les surfaces de réponse adaptatives (ARSM)

Les surfaces de réponse adaptatives font partie d'une famille de méthodes numériques appelée *Meshless Methods*, dont le but est de créer une approximation discrétisée des grandeurs continues dans un domaine d'étude noté Ω . Cette approximation est obtenue à partir d'une discrétisation de ce domaine (Carpinteri et al, 2001 ; Gu et Liu, 2003), reposant sur un nuage de points appelés nœuds, sur lesquels on calcule les valeurs des variables d'état dénommées *valeurs nodales*. Chaque nœud représente le centre d'un « élément » dont la forme est normalement donnée par une sphère de rayon R représentant sa zone d'influence, comme illustré en Figure 4.8 ci-dessous.


 Figure 4.8 – Le domaine Ω discrétisé.

La méthode ARSM consiste à faire l'approximation de la réponse exacte dans un domaine discrétisé Ω définie par la relation suivante sous une forme matricielle (Carpinteri et al, 2001) :

$$\hat{\mathbf{Y}} = \mathbf{P}\mathbf{a} \quad (4.46)$$

où $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n_{exp} \times n_{coef}}$ est la matrice des effets contenant la base polynomiale sur laquelle l'approximation est projetée, représentant les nœuds dans le domaine discrétisé Ω ; $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{n_{coef}}$ contient les coefficients du polynôme à être déterminer.

L'erreur quadratique pondérée commise dans l'approximation peut être exprimée sous la forme suivante (Carpinteri et al, 2001) :

$$J(\mathbf{a}) = \frac{1}{2}(\mathbf{P}\mathbf{a} - \mathbf{Y})^T \mathbf{W}(\mathbf{P}\mathbf{a} - \mathbf{Y}) = \frac{1}{2}(\hat{\mathbf{Y}} - \mathbf{Y})^T \mathbf{W}(\hat{\mathbf{Y}} - \mathbf{Y}) \quad (4.47)$$

où $\mathbf{Y} = \{y_1, y_2, \dots, y_{n_{exp}}\}^T$ est le vecteur formé par les valeurs de la fonction réelle évaluée aux nœuds (expériences) ; $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{n_{exp} \times n_{exp}}$ est la matrice de pondération exprimée sous la forme suivante :

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} w_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & w_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & w_{n_{exp}} \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

où w_i est la valeur de la fonction de pondération pour le nœud i .

Le vecteur de coefficients $\mathbf{a}$ peut être calculé à travers la minimisation de l'erreur quadratique pondérée (4.47) comme suit :

$$\frac{\partial J(\mathbf{a})}{\partial \mathbf{a}} = \mathbf{A}\mathbf{a} - \mathbf{B}\mathbf{Y} = \mathbf{0} \quad (4.49)$$

où $A \in R^{n_{coef} \times n_{coef}}$ et $B \in R^{n_{coef} \times n_{exp}}$, sont exprimées, respectivement, par les formes suivantes :

$$A = P^T W P; \quad B = P^T W \quad (4.50)$$

ce qui conduit au vecteur des coefficients de l'approximation comme suit :

$$a = A^{-1} B Y \quad (4.51)$$

Par conséquent, la réponse estimée peut être exprimée par l'expression (4.46).

Il est important de noter que l'approximation représentée par l'expression (4.51) est bien définie seulement quand la matrice A est non singulière (Carpinteri et al, 2001).

- **Création du domaine discrétisé adaptatif**

Les étapes suivantes décrivent la stratégie de création du domaine discrétisé :

Etape 1 : cette étape consiste à définir le domaine d'étude de dimension égale au nombre de paramètres de conception qui interviennent dans la fonction exacte à approcher. Puisque ce domaine est composé par les variables de projet, il est limité par les bornes de variations de chaque variable. Par la suite, on doit faire une transformation des variables par au domaine $[0;1]$ (procédure de codification), de façon à obtenir un domaine d'étude normalisé, comme illustré en Figure 4.9, où on représente un exemple d'un domaine défini par une fonction à deux paramètres.

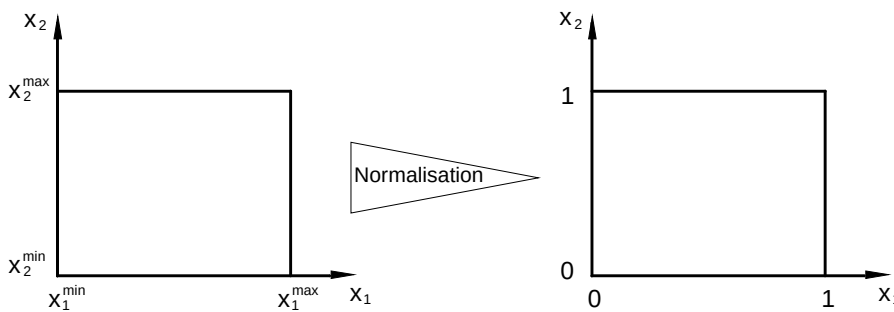


Figure 4.9 – Normalisation du domaine d'étude de la fonction à approcher.

Etape 2 : après la définition du domaine d'étude, la discrétisation initiale est faite en prenant des intervalles réguliers définis par le nombre de points d'approximation souhaités pour chacune de ses directions. Les intersections entre ces intervalles représentent les points sur lesquels les nœuds et les sous-régions sont créés pour l'approximation (voir Figure 4.10.a). On fait l'évaluation de la fonction exacte aux nœuds, et on estime la première fonction d'approximation (expression (4.46)). Par la suite, on enlève le point central, comme illustré en Figure 4.10.b, et on estime la seconde fonction d'approximation. Si l'erreur commise entre les deux approximations et la fonction exacte est satisfaisante par rapport à un critère choisi, on arrête le processus, et la première fonction d'approximation est la bonne surface de réponse. Sinon, on passe à l'étape suivante du processus.

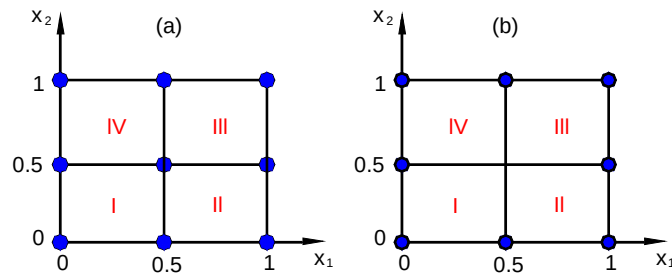


Figure 4.10 – Domaine discrétisé initial avec enlèvement du point central.

Etape 3 : on doit enrichir les sous-domaines autour du point central rajoutant quatre nœuds, comme illustré en Figure 4.11.a. On estime la première fonction d'approximation, on enlève le point central de I et on estime la seconde fonction. Si l'erreur de prédiction est satisfaisante, on arrête le processus. Sinon, on continue le processus.

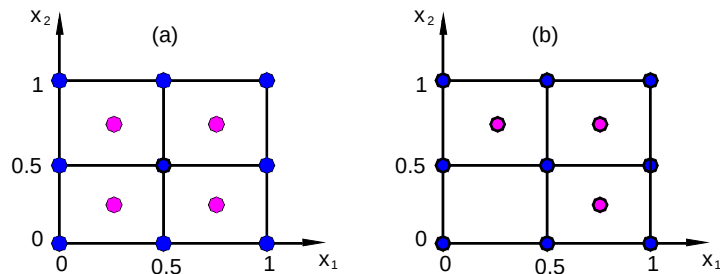


Figure 4.11 – Premier processus d'enrichissement du domaine discrétisé.

Etape 4 : on doit enrichir le sous-domaine I par quatre nœuds autour du point enlevé et on estime les fonctions d'approximation. Si la erreur de prédiction est satisfaisante, on a le métamodèle. Sinon, on doit répéter le processus d'enrichissement et d'enlèvement de points pour tous les sous-domaines jusqu'à l'obtention d'une erreur qui soit satisfaisante.

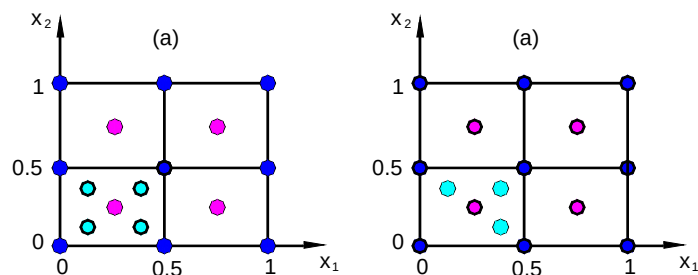


Figure 4.12 – Deuxième processus d'enrichissement du domaine discrétisé.

D'une manière générale, le processus adaptatif d'enrichissement de domaines par l'identification des points (nœuds) plus influents sur la réponse présente une excellente qualité d'approximation pour des problèmes non-linéaires ayant plusieurs modalités (Ghanmi et al, 2005). Cette méthodologie présente les avantages suivantes : 1) on augmente la précision de création de la surface, puisqu'on raffine seulement les régions qui sont plus importantes dans le domaine discrétisé ; 2) on gagne du temps pour la création de la surface, puisqu'on diminue les points dans le domaine à être évalués par le problème exacte.

La base polynomiale pour cette méthodologie dépend du nombre de variables et de l'ordre du polynôme choisi. On peut utiliser par exemple les modèles linéaires (4.39) ou le modèle du second ordre (4.40). Il est important de préciser que dans ce mémoire on fait l'extension de cette méthodologie adaptative, initialement proposée pour les problèmes à deux variables, au cas de systèmes à plusieurs paramètres d'entrée.

- **Choix de la fonction de pondération**

La zone d'influence d'un nœud I sur la région du domaine Ω_I (voir Figure 4.8), intervient directement dans l'approximation de la fonction à estimer, comme on peut remarquer à travers l'expression (4.50). Cette zone d'influence est définie par la fonction de pondération w_I associée au nœud I . Normalement, la fonction de pondération doit être différente de zéro seulement dans le domaine d'influence des nœuds, et égale à zéro en dehors de cette région. Le choix est fait de façon que sa valeur est égale à 1 au centre du domaine et égale à 0 à l'extérieur du domaine. De cette façon, l'envergure de la fonction de pondération est limitée, ce qui donne l'aspect local à l'approximation. Parmi les différentes possibilités qu'on a dans la littérature pour définir la fonction de pondération (Ghanmi et al, 2005), dans ce mémoire, on utilise la pondération proposée par Hérault, représentée par l'expression (4.52), illustrée en Figure 4.13.

$$w_I = \begin{cases} \left(1 - \left(\|x - x_I\|/R_I\right)^2\right)^2 & \text{if } \|x - x_I\| \leq R_I \\ 0 & \text{if } \|x - x_I\| > R_I \end{cases} \quad (4.52)$$

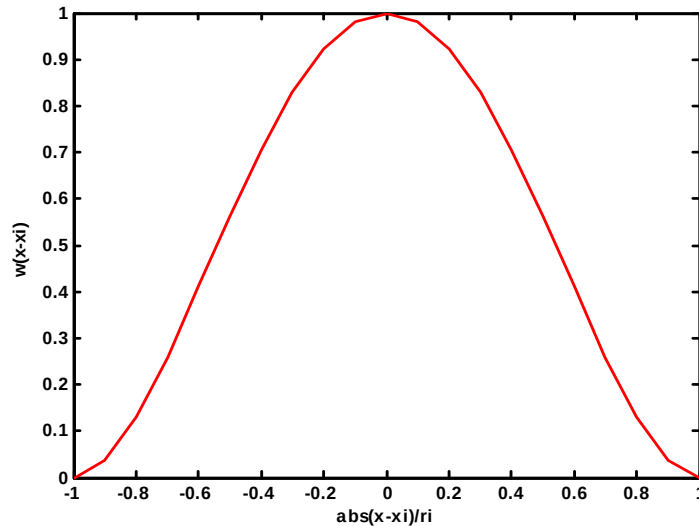


Figure 4.13 – Fonction de pondération de Hérault.

où $\|x - x_I\|$ sont les distances mesurées à partir d'une coordonnée x autour de la région d'influence du nœud I de coordonnée x_I ; R_I est la zone d'influence du nœud I .

4.3 Exemples numériques

4.3.1 Condensation robuste de systèmes viscoélastiques.

Le premier test consiste à évaluer la base de réduction nominale pour les systèmes viscoélastiques, selon l'expression (4.7). Les calculs consistent à obtenir les réponses forcées (FRFs) du système amorti représenté en Figure 4.14, associées au point P. Le modèle EF ANSYS du système sans traitement est composé par 928 éléments finis de plaque simple SHELL63 ayant 6840 d.d.l, et le traitement viscoélastique, dont la position est choisie *a priori* selon la quantité d'énergie de déformation modale MSE (*Modal Strain Energy*) (Rogers et al, 1981) observée pour les modes de la bande fréquentielle d'analyse, est composé par 10 patchs viscoélastiques, où chaque patch contient 16 EF de plaque sandwich à trois couches développés au Chapitre 3.

On précise que pour introduire le traitement viscoélastique dans le modèle EF ANSYS de la plaque renforcée illustrée en Figure 4.7, on a mis en œuvre la méthodologie d'interfaçage MATLAB®/ANSYS® développé dans ce mémoire (voir Annexe C) qui permet de faire le couplage/remplacement entre les éléments finis de plaque sandwich développés en plateforme MATLAB® et les éléments finis de plaque simples modélisés par le code ANSYS.

Les conditions aux limites lui imposées sont « libres », et les caractéristiques géométriques en millimètres sont : rayon interne : 938; longueur : 720; longueur d'arc : 680 ; les épaisseurs de la plaque base et des raidisseurs : 1,5 et 0,75, respectivement ; et l'hauteur des raidisseurs : 30. Les épaisseurs des couches, en millimètres, sont : 0,0254 (couche viscoélastique) et 0,5 (couche contrainte). Les propriétés physiques de la plaque base sont : module d'Young, $E=2,1 \times 10^{11}$ N/m², densité $\rho=7800$ Kg/m³ et coefficient de Poisson $\nu=0,3$; qui sont les même adoptées pour la couche contrainte. Pour la couche viscoélastique on utilise la fonction module complexe du matériau 3M ISD112 (expressions (2.11) et (2.12), comme illustré en Figure 2.12.

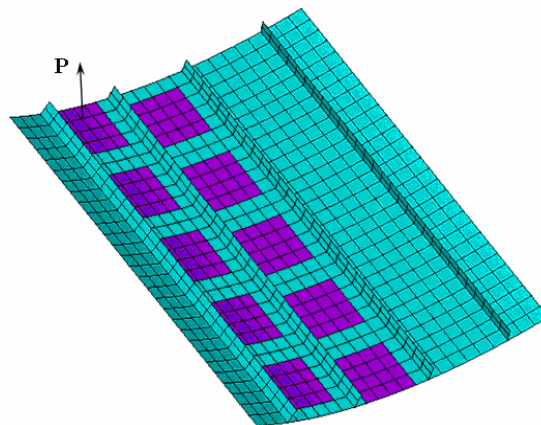


Figure 4.14 – Modèle EF ANSYS de la plaque renforcée traitée par couche contrainte.

Pour vérifier l'efficacité de la condensation dans la bande fréquentielle d'intérêt [135-210 Hertz], on fixe la température du matériau viscoélastique à 25°C, et dans ce cas, on considère trois bases de réduction, comme suit :

- $T_{\theta_1} = [\phi_0^{(60)}]$ (60 vecteurs propres); $T_{\theta_2} = [\phi_0^{(60)} \quad R^{(1)}]$ (60 vecteurs propres, 1 vecteur résidu vecteur obtenu par l'emploi de l'expression (4.5)); et $T_{\theta_3} = [\phi_0^{(60)} \quad R^{(1)} \quad R_{\Delta}^{o(54)}]$ (60 vecteurs propres, 1 vecteur résidu obtenu par l'emploi de l'expression (4.5), 54 vecteurs résidus obtenus par l'emploi de l'expression (4.6)). Les résidus $R_{\Delta}^{o(54)}$ sont associés aux plus grandes valeurs singulières, pour lesquels $\sigma_1/\sigma_i \leq 1 \times 10^5 \quad i = 1 \text{ to } 60$.

La Figure 4.15 montre les amplitudes des FRFs calculées en utilisant les trois bases de réduction, T_{θ_1} , T_{θ_2} et T_{θ_3} , confrontées avec les FRFs de référence, pour lesquelles on utilise une base de réduction constituée par un nombre élevé des vecteurs propres (600) et des vecteurs résiduels (600). A travers les figures, on montre que la précision de la réduction est sans doute améliorée par l'enrichissement successif de la base de réduction par l'inclusion des vecteurs résiduels statiques pour prendre en compte les efforts extérieurs, et les forces viscoélastiques. Ceci est confirmé par l'analyse des erreurs relatives entre la référence et les approximations pour les trois bases de réduction, comme montré en Figure 4.16.a. La Figure 4.16.b confirme que l'utilisation des résidus de premier ordre associés aux forces externes et les efforts viscoélastiques sont suffisantes pour représenter avec une précision acceptable le comportement dynamique du système amorti, avec une erreur relative maximale de 3,8% pour la première anti-résonance.

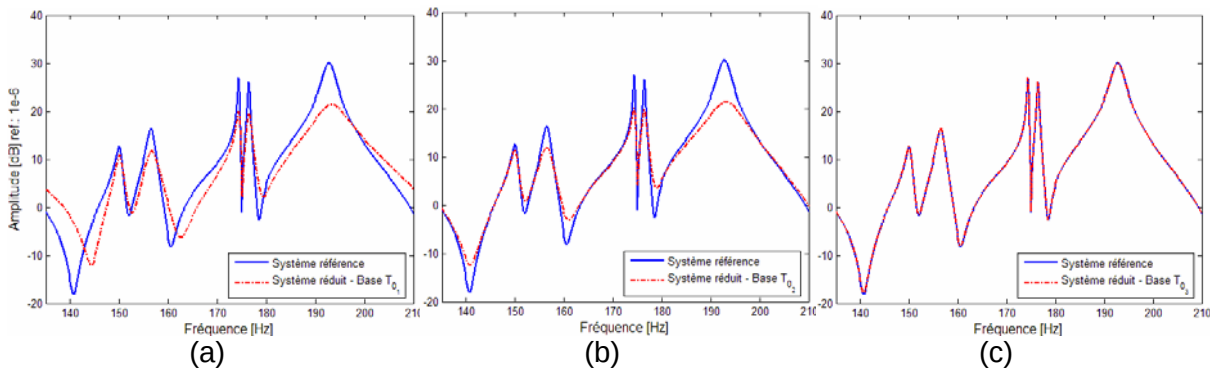


Figure 4.15 – FRFs des systèmes de référence et réduits – bases T_{θ_1} (a), T_{θ_2} (b) et T_{θ_3} (c).

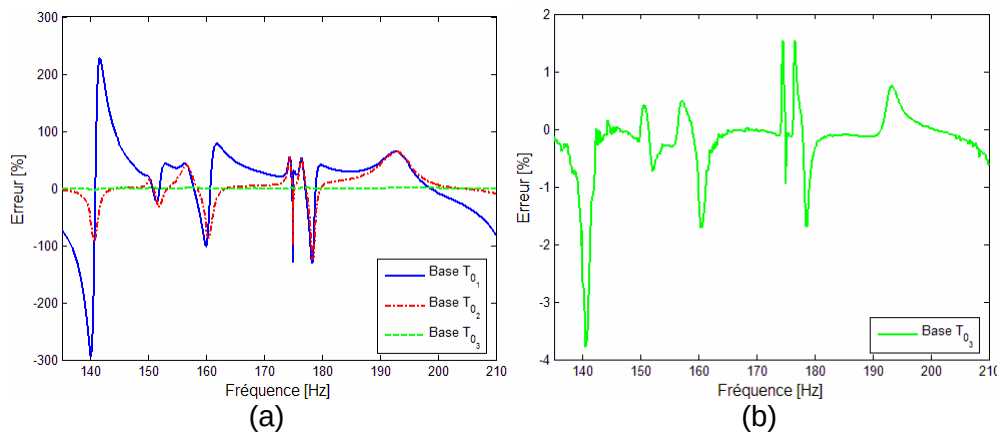


Figure 4.16 – Erreur relative entre les réponses réduites et les réponses exactes.

L'intérêt maintenant est d'évaluer la robustesse de la base de réduction enrichie, adaptée aux cas de systèmes viscoélastiques selon l'expression (4.22). Ces modifications peuvent être, par exemple, des perturbations dans les paramètres physiques et/ou géométriques des éléments finis contenus dans les zones traitées par matériaux viscoélastiques. Le but est de rapprocher le comportement du système modifié sans l'exécution de réanalyse exacte du système nominal de départ. La modification imposée consiste à augmenter l'épaisseur de la couche contrainte du système nominal en 15%. Dans une première étape, on considère le système conservatif associé (SCA), pour lequel on ne prends en compte que le comportement purement élastique du matériau viscoélastique, caractérisé par les propriétés G_0 et $\eta_0 = 0$. A travers la Figure 4.17.a, on compare les amplitudes des FRFs pour les systèmes SCAs nominal et perturbé, où les deux modèles sont calculés en utilisant la même base de réduction de référence composée par un nombre élevé de vecteurs. La Figure 4.17.b permet une comparaison semblable des amplitudes des FRFs pour les modèles amortis nominal et perturbés calculés en utilisant la même base de réduction de référence. A travers cette figure, on peut également percevoir l'influence de la variation structurale sur l'atténuation des amplitudes de vibration (niveaux d'amortissement viscoélastique).

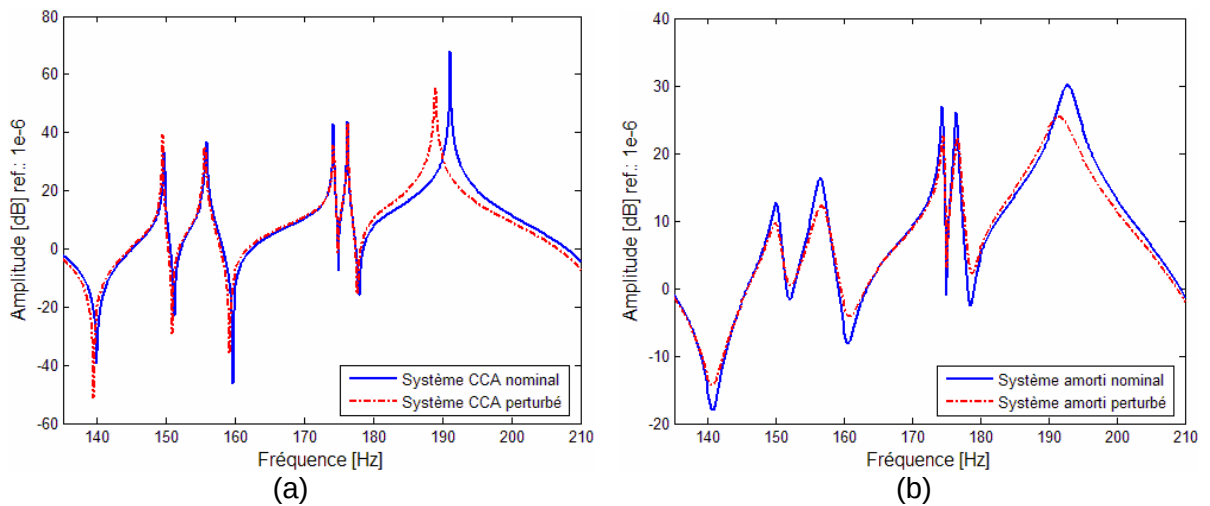


Figure 4.17 – FRFs pour les systèmes nominaux et perturbés : (a) SCAs ; (b) amorti.

La Figure 4.18 montre la distance en forme (MAC) entre les modes propres des systèmes SCAs nominal et perturbé, qu'on peut aussi comparer à travers le Tableau 4.2, où on constate l'écart fréquentiel maximal de 1,1% dans la bande fréquentielle d'analyse. La matrice de MAC montre que les modes propres du système nominal de départ ne sont pas très différents des modes propres du système perturbé, ce qui montre que le système modifié garde la forme vibratoire du système nominal de départ, et qu'on peut approcher le comportement du système perturbé par le comportement du système nominal, au moins pour des petites perturbations. Le MAC est défini comme suit :

$$MAC = \left(\phi_n^T \phi_p \right)^2 / \left(\|\phi_n\|^2 \|\phi_p\|^2 \right) \quad (4.53)$$

où ϕ_n et ϕ_p sont les modes propres du système et ceux du système perturbé.

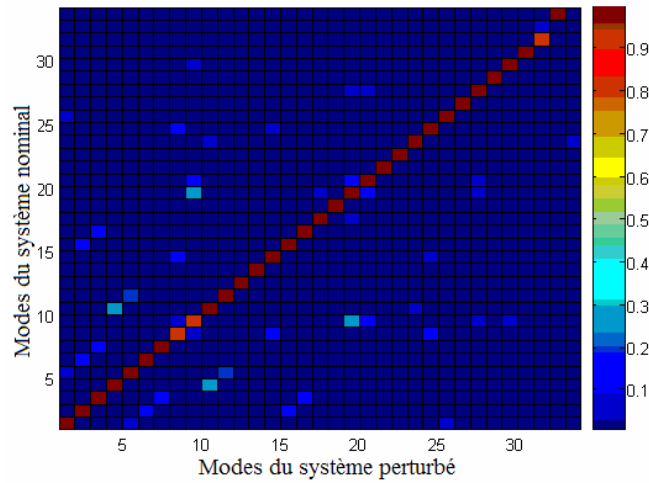


Figure 4.18 – Matrice des MAC entre les vecteurs propres des systèmes nominal et perturbé

Tableau 4.2–Comparaison entre les valeurs/vecteurs propres (systèmes nominal et perturbé)

Fréquences [Hz]		Ecart en Fréq. [%]	MAC
Nominal	Modifié		
149,31	149,59	0,1839	99,027
155,59	155,81	0,1382	98,906
174,14	174,12	0,0150	99,960
176,27	176,23	0,0186	99,911
189,07	191,14	1,0838	99,886

La réduction du système amorti modifié est faite en utilisant le concept de condensation robuste pour lequel la base de réduction nominale T_{θ_3} est enrichie par les résidus statiques R_{Δ} évalués à partir des matrices viscoélastiques modifiées ΔM_v et $\Delta \bar{K}_v$ (expressions (4.14) ou (4.19)) pour tenir compte des forces associées aux modifications dues à la perturbation sur l'épaisseur de la couche contrainte. La base de réduction robuste, est alors exprimée sur la forme $T_3 = [T_{\theta_3}(115) \ R_{\Delta}(31)]$.

A travers la Figure 4.19.a, on compare les FRFs amorties du système perturbé calculées pour la référence (voir Figure 4.17.b) et pour le système condensé. On peut observer une bonne approximation entre les amplitudes des FRFs entre les deux modèles, avec une erreur maximale de 2% pour la première anti-résonance, comme montré en Figure 4.19.b. Ceci mène à conclure que la base de réduction enrichie par des vecteurs résiduels est assez robuste pour représenter la réponse dynamique du système perturbé dans la bande de fréquence d'intérêt.

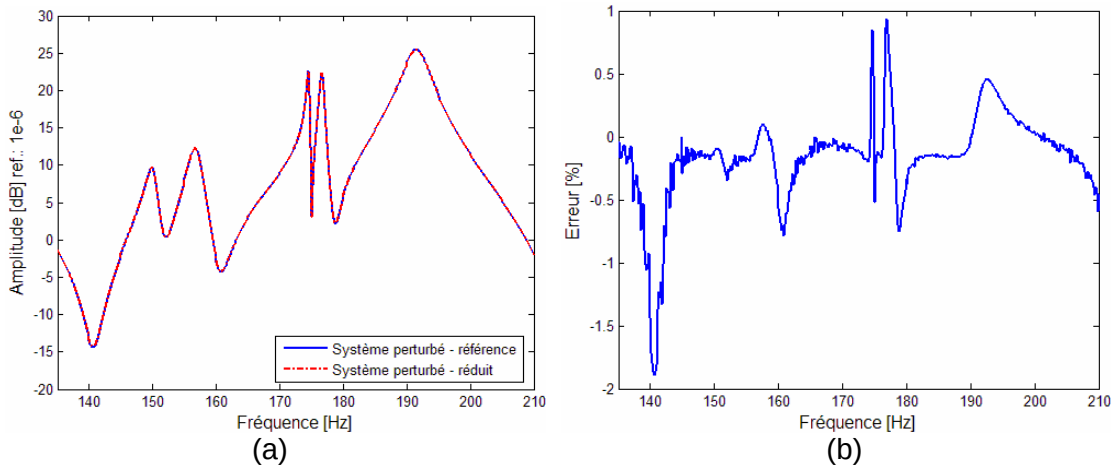


Figure 4.19 – FRFs (a) et l'erreur relative pour les modèles perturbés nominal et réduit.

• Synthèse modale

Pour vérifier la stratégie de condensation par sous-structuration dynamique, on utilise la plaque renforcée représentée par la Figure 4.14, divisée en deux sous-structures SS1 et SS2, comme illustré en Figure 4.20. La sous-structure SS1 contient 551 EF de plaque simple, 4350 d.d.l (180 d.d.l de jonction), dont 160 EF sont traités par matériau viscoélastique (ISD112 à la température de 25°C, Cf. Section 2.3.3, Chapitre 2), et le modèle de la sous-structure SS2 contient 377 EF, 2520 d.d.l, sans traitement viscoélastique.

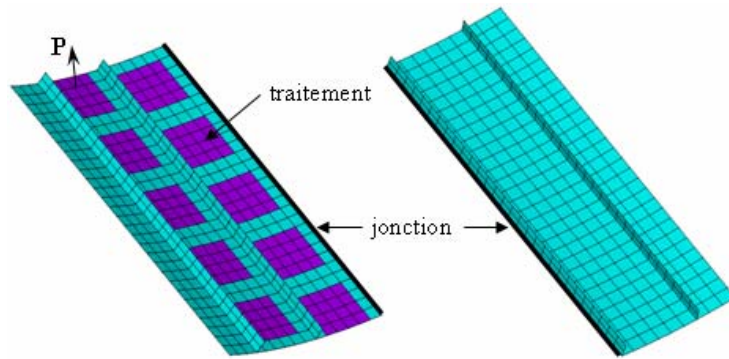


Figure 4.20 – Modèle EF de la plaque renforcée – définition des sous-structures.

Par la méthode de Craig et Bampton enrichie (CBE) (Cf. Section 4.4.4, Chapitre 4), le modèle initial de la sous-structure SS1 est ramené à un modèle condensé à 221 d.d.l. Donc la base de réduction de CBE est composée par les vecteurs suivants :

$$\mathbf{T}_{cbe}^0 = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{180 \times 180} & \mathbf{0}_{180 \times 20} & \mathbf{0}_{180 \times 1} & \mathbf{0}_{180 \times 20} \\ \mathbf{\Theta}_{4170 \times 180} & \mathbf{\Psi}_{4170 \times 20} & \mathbf{R}_{4170 \times 1} & \mathbf{R}_{4170 \times 20}^0 \end{bmatrix} \quad (221 \text{ vecteurs})$$

où $\Theta_{4170 \times 180}$ représente les modes contraints du système SCA ; $\psi_{4170 \times 20}$ sont les modes normaux à l'interface bloquée ; $R_{4170 \times 1}$ est le vecteur de résidus statiques dus à la force extérieure P , et $R_{4170 \times 20}^0$ est formé par les résidus associés aux efforts viscoélastiques.

De même, le modèle condensé de la sous-structure SS2 est composé par 190 d.d.l dont la base de réduction de CB, est composée par les vecteurs suivants :

$$T_{cb} = \begin{bmatrix} I_{180 \times 180} & \theta_{180 \times 10} \\ \Theta_{2340 \times 180} & \psi_{2340 \times 10} \end{bmatrix} \quad (190 \text{ vecteurs})$$

La Figure 4.21.a montre les FRFs de référence et celles obtenues pour le modèle réduit en utilisant la méthode de CBE. On montre que l'enrichissement de la base de réduction associée aux efforts viscoélastiques pour la sous-structure traitée par matériau viscoélastique permet d'améliorer d'avantage les résultats sur toute l'étendue de la bande de fréquence analysée, en garantissant une bonne approximation, comme on peut remarquer à travers les erreurs relatives entre la solution approchée et celle obtenue par le calcul de référence. Ceci confirme la bonne approximation du système condensé par rapport au calcul de référence, avec une erreur relative maximale de 0,16%.

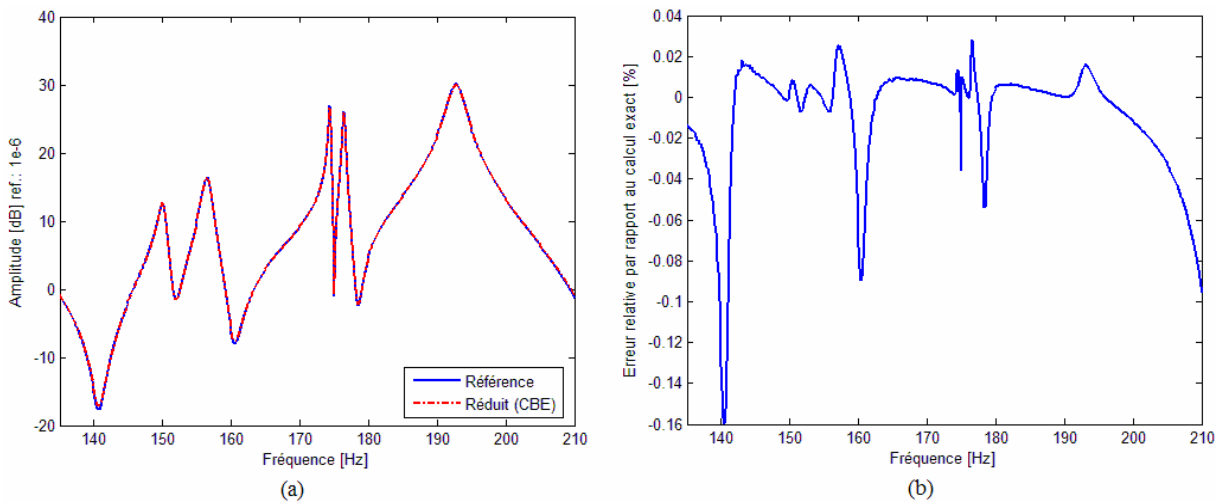


Figure 4.21 – FRFs des systèmes de référence et réduit (a) et les erreurs relatives (b).

La modification imposée au modèle nominal consiste à perturber tous les éléments contenus dans les zones traitées de la sous-structure SS1, par une augmentation de 15% sur la valeur nominale de l'épaisseur de la couche contrainte. La réduction du système modifié est faite en utilisant la base de réduction nominale T_{cbe} associée au système initial (composé par 221 vecteurs), enrichie par des résidus statiques R_A maintenant évalués sur les matrices modifiées ΔM_v et ΔK_v pour prendre en compte les efforts associés aux modifications sur les paramètres viscoélastiques :

$$\mathbf{T}_{cbe} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{cbe}^0 & \mathbf{R}_\Delta \end{bmatrix} \quad (146 \text{ vecteurs})$$

La Figure 4.22.a présente une comparaison entre les FRFs du système perturbé de référence et du système réduit. La Figure 4.22.b montre que la correction statique due aux modifications permet de rapprocher la réponse du système réduit perturbé de la référence, avec une erreur maximale de 6% sur la première anti-résonance.

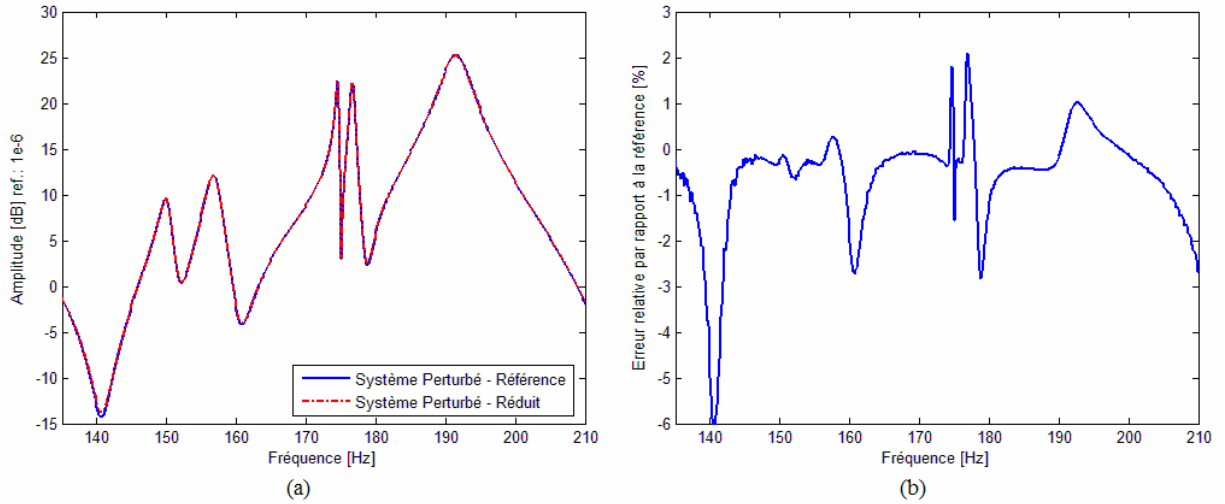


Figure 4.22 – FRFs des systèmes perturbés de référence et réduit (a) et l'erreur relative (b).

Ces résultats montrent que la procédure d'enrichir la base de condensation standard par des vecteurs résiduels statiques bien choisis qui dépendent des paramètres de conception permet d'améliorer les méthodes de sous-structuration standard en prenant en compte une information a priori concernant les modifications structurales. La même transformation peut être alors utilisée tout au long d'une procédure d'optimisation et/ou de recalage de systèmes viscoélastiques, ce qui signifie un gain du temps très significatif par rapport à la réanalyse exacte.

4.3.2 Approximation des FRFs par les ANNs.

Le premier test consiste à utiliser les ANNs pour approcher les réponses forcées de systèmes viscoélastiques. Pour cela, on prend la FRF montrée en Figure 4.15.c associée au système illustré en Figure 4.14. On examine deux configurations de PMC : la configuration PMC1 composé de 3 couches cachées et 10 neurones par couche, et la configuration PMC2 composé de 2 couches cachées et 20 neurones par couche. Pour cet exemple, les entrées du réseau sont les fréquences du système amorti en Hertz, et les sorties (cibles) sont les amplitudes de vibration en dB.

La Figure 4.23 montre les approximations de la fonction FRF exacte en utilisant les deux configurations des réseaux. Une première remarque c'est que les réseaux de neurones sont capables d'approximer des fonctions multi modales, aussi complexes que les FRFs de systèmes amortis par matériaux viscoélastiques. La Figure 4.23.c montre que la qualité de l'approximation dépend de la combinaison entre les nombres de couches cachées et le nombre

de neurones par couche. On précise que pour la création des réseaux de neurones, on applique la stratégie illustrée en Figure 4.6.

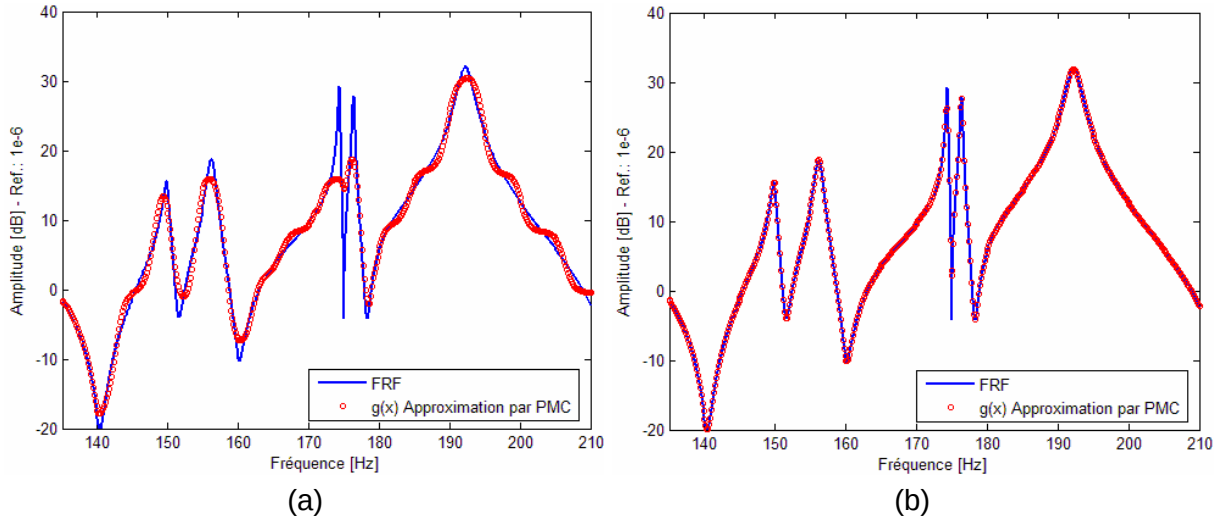


Figure 4.23 – Comparaison entre les FRFs exactes et celles approchées par les configurations PMC1 (a) et PMC2 (b).

La Figure 4.24 démontre que la qualité de prédiction des amplitudes de réponses du système amorti est très satisfaisante, principalement pour le PMC2, puisque l'erreur quadratique moyenne dépasse le but fixé *a priori* de 0,001, comme montré en Figure 4.25.

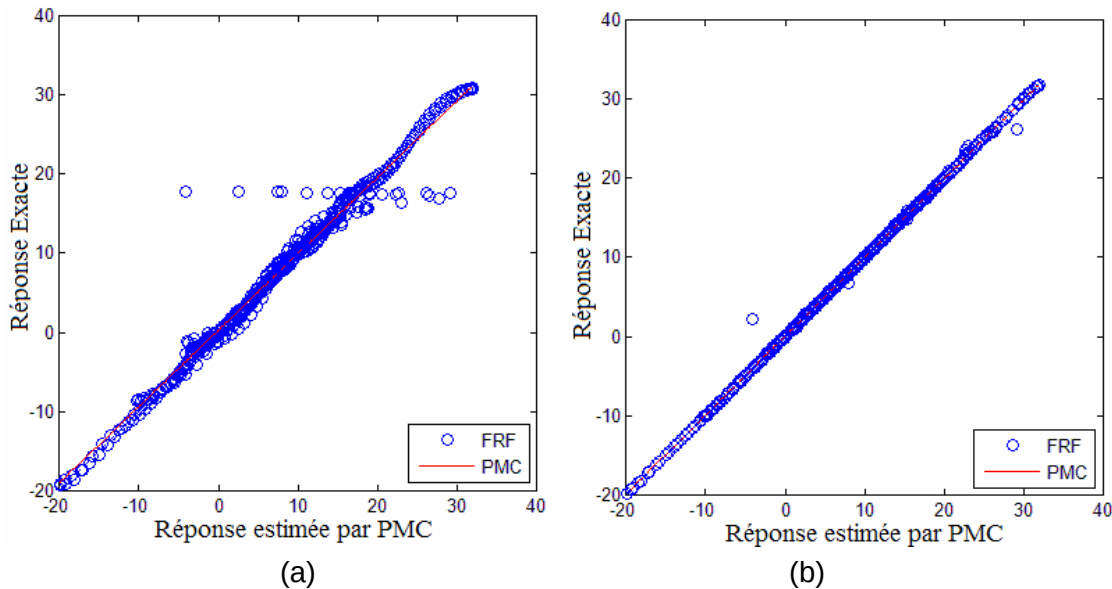


Figure 4.24 – Variation de la réponse exacte en fonction de la réponse estimée pour les deux configurations de réseaux : PMC1 (a) et PMC2 (b).

La Figure 4.25 montre que le bon choix du nombre de couches cachées et du nombre de neurones par couches influe de forme significative dans la précision du PMC et du nombre d'itérations pour arriver au but fixé *a priori* par le concepteur.

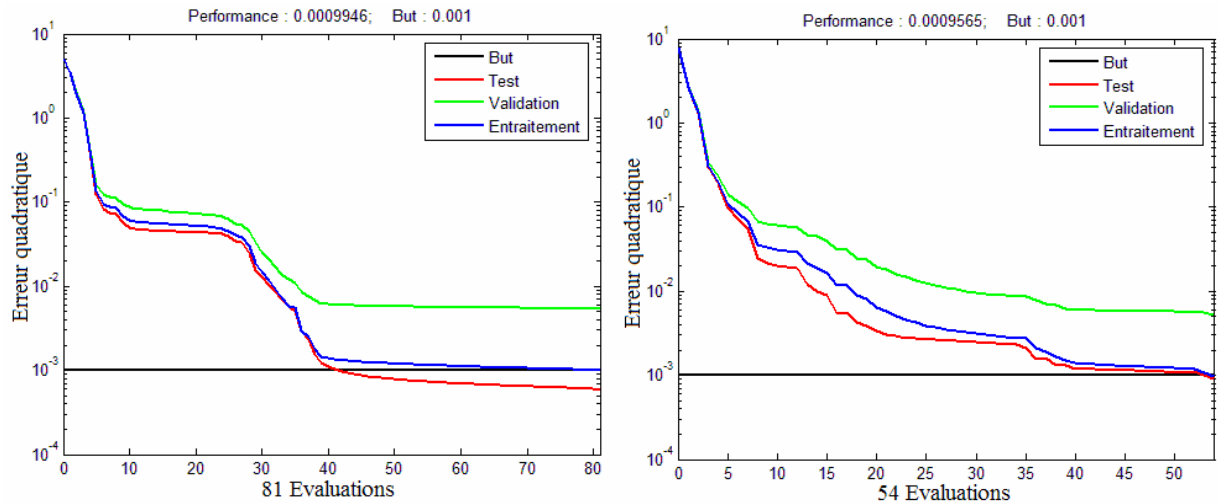


Figure 4.25 – Erreur quadratique moyenne pour PMC1 (a) et PMC2 (b).

4.3.3 Approximation des FRFs par les surfaces de réponses.

Pour les surfaces de réponses RSM et ARSM, on considère le même système amorti illustré en Figure 4.14, où les entrées et les sorties utilisées pour générer les surfaces sont :

- **Entrées du problème**

Les variables d'entrée sont les épaisseurs de couches et la température du matériau viscoélastique, comme illustré au Tableau 4.3.

Tableau 4.3 – Définition des variables d'entrée pour les surfaces de réponses

Variables de conception/ variations admissibles		Description
X_1	$h_3 = 0,5 ; \pm 30\%$	h_3 : l'épaisseur de la couche contrainte [mm]
X_2	$T = 25 ; \pm 15\%$	T : température du matériau viscoélastique [°C]
X_3	$h_2 = 0,0254 ; \pm 60\%$	h_2 : l'épaisseur de la couche viscoélastique [mm]

- **Sorties du problème**

Les fonctions à approcher fixées *a priori* sont définies par la somme des amplitudes de vibration correspondant aux premier et deuxième modes de vibration du système amorti (y_1), dans la bande fréquentielle d'analyse (Figure 4.23), et la masse totale du traitement viscoélastique ajoutée à la structure initiale (y_2).

- **RSM classique**

A travers l'analyse de sensibilité, qu'on détaille au Chapitre 6, on remarque que l'épaisseur de la couche contrainte a l'influence la plus significative sur la réponse du système amorti, suivie de la température du matériau viscoélastique. Le PFC est alors construit de telle façon que la variable x_1 prenne toutes les variations (voir Tableau 4.1) des niveaux [-1, 0, 1] adoptés pour chaque variable. Ceci mène à un PFC composé par 27 expériences. On précise que la construction de la surface de réponse classique est basée sur les étapes décrites en Figure 4.7. Le polynôme désiré est de la forme :

$$\hat{y} = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \beta_{12} X_1 X_2 + \beta_{13} X_1 X_3 + \beta_{23} X_2 X_3 + \beta_{11} X_1^2 + \beta_{22} X_2^2 + \beta_{33} X_3^2$$

L'application de la méthode RSM conduit aux polynômes suivants :

$$\begin{aligned} \hat{y}_1 &= 34.498 - 3.3968 X_1 + 3.5322 X_2 + 7.2375 X_3 - 0.04243 X_1 X_2 + 0.058855 X_1 X_3 + \dots \\ &\quad 0.61575 X_2 X_3 + 0.43194 X_1^2 + 0.086663 X_2^2 - 1.8471 X_3^2 \\ \hat{y}_2 &= 0.14556 + 0.042901 X_1 + 0.0015336 X_3 \end{aligned}$$

La décodification des variables X_1 , X_2 et X_3 , est faite comme suit :

$$X_1 = (h_3 - \bar{h}_3) / (h_3^{max} - h_3^{min}); \quad X_2 = (T - \bar{T}) / (T^{max} - T^{min}); \quad X_3 = (h_2 - \bar{h}_2) / (h_2^{max} - h_2^{min})$$

où h_3 , h_2 et T sont les valeurs courantes des variables ; les indices supérieurs 0, min et max, représentent, respectivement, la valeur moyenne, le minimum et le maximum des variables, calculés selon les variations admissibles.

Une fois l'obtention du polynôme est achevée, on vérifie la qualité des polynômes moyens obtenus sans refaire les simulations exactes. Pour cela, on prend aléatoirement par la méthode d'Hyper Cube Latin (HCL) 200 échantillons de points et on calcule les réponses à travers les polynômes. La Figure 4.26 montre la comparaison entre les résultats estimés issus des polynômes et ceux obtenus des fonctions exactes. On remarque qu'on a des bons estimateurs des fonctions exactes, ce qui est confirmé par les faibles valeurs des erreurs moyennes pour les deux approximations, $\varepsilon_m^{y_1} = 0,41\%$ et $\varepsilon_m^{y_2} \cong 0\%$, respectivement.

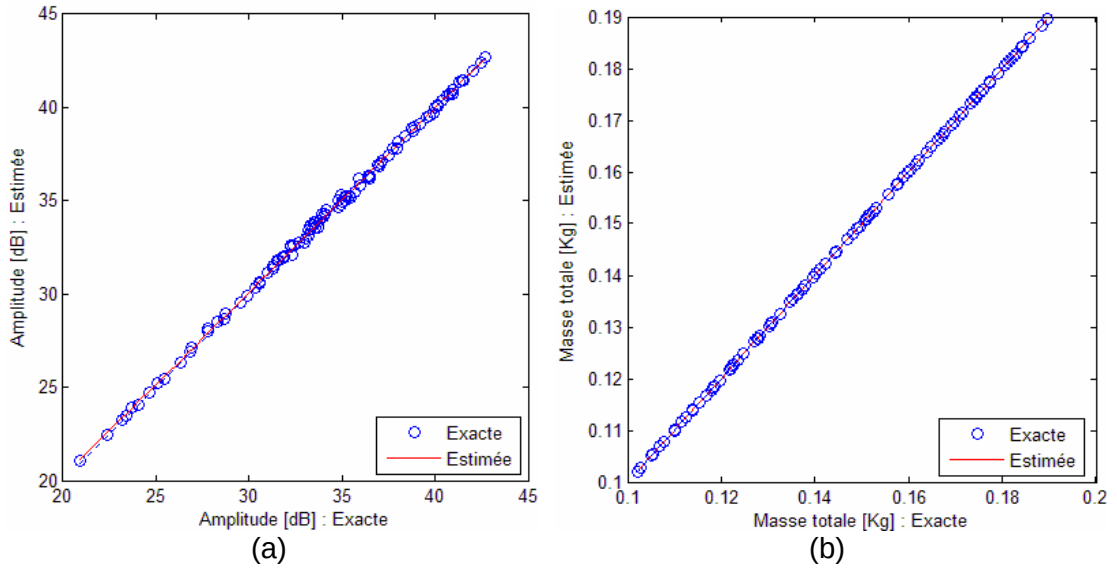


Figure 4.26 – Réponses exactes en fonction des estimées par RSM pour les deux fonctions.

Les critères statistiques de sélection des polynômes restants, P_{rest} , sont l'erreur MSE (*Root Mean Square Error*), qui ne doit pas dépasser la valeur 0,09028 (Battaglia *et al.*, 1996), et le coefficient de détermination R^2 qui doit être le plus proche de 1 ($0 < R^2 < 1$). Pour les approximations ci-dessous, on obtient: $RMSE = 0,000231$ et $R^2 = 0,9998$ (première approximation) ; $RMSE = 0,0000158$ et $R^2 = 1$ (deuxième approximation).

- **ARSM**

L'application de la méthodologie ARSM conduit aux polynômes suivants :

$$\begin{aligned}\hat{y}_1 &= 34.488 - 3.3858X_1 + 3.55566X_2 + 7.2603X_3 - 0.059721X_1X_2 + 0.051235X_1X_3 + \dots \\ &\quad 0.60234X_2X_3 + 0.44414X_1^2 + 0.072274X_2^2 - 1.8321X_3^2 \\ \hat{y}_2 &= 0.14556 + 0.042901X_1 + 0.0015336X_3\end{aligned}$$

De la même façon que pour le cas précédent, on vérifie la qualité satisfaisante des polynômes obtenus. La Figure 4.27 compare les réponses estimées et les réponses exactes. A travers la figure, on confirme les bonnes estimations des fonctions exactes par les approximations, avec les erreurs $\varepsilon_m^{y_1} = 0,431\%$ et $\varepsilon_m^{y_2} \cong 0\%$.

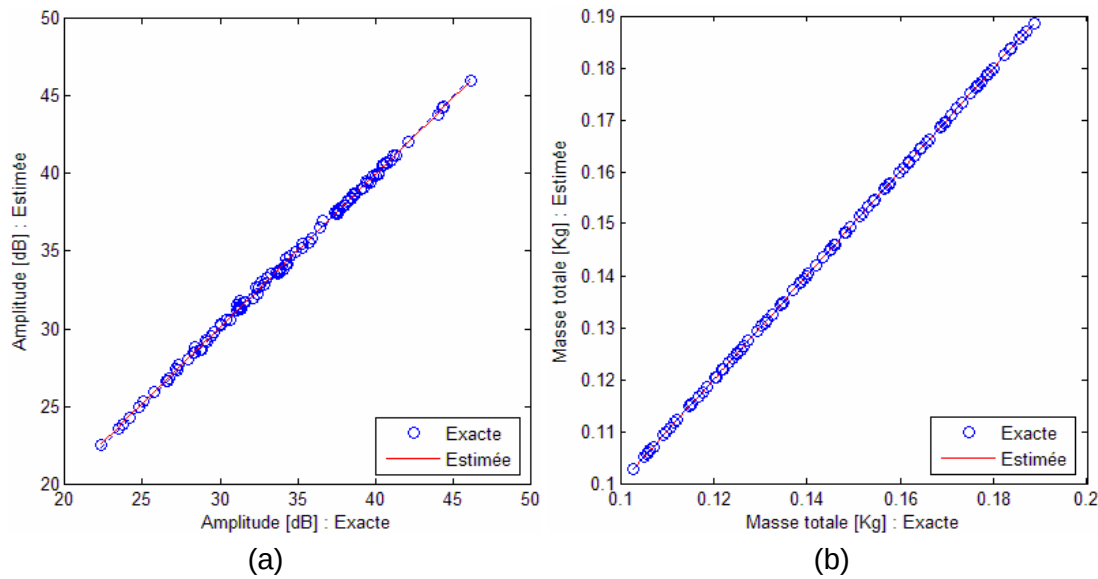


Figure 4.27 – Réponses exactes en fonction des estimées par ARSM pour les deux fonctions

- **Temps de calcul pour les méthodologies RSM classique et ARSM**

Le temps de calcul (temps de CPU) pour les deux approches sont donnés en Tableau 4.4. La méthodologie RSM, ayant un PFC composé par 27 expériences, on réalise 20 tirages aléatoires du PFC, ce qui résulte en 540 évaluations du problème exact. La discrétisation du domaine à 3 variables par la méthode ARSM, mène à 256 évaluations du problème exact, puisque ne sont pas toutes les sous-régions du domaine qui sont raffinées.

Tableau 4.4 – Temps de calcul pour les stratégies RSM/ARSM

Stratégie	CPU Time [min]
RSM (540)	280.85
ARSM (256)	133.15

Ceci mène à conclure que l'utilisation de la méthode ARSM permet une réduction significative du temps de calcul des polynômes, avec un rapport de réduction d'environ 47,41%.

4.4 Conclusions

Dans ce chapitre, on a proposé une stratégie de condensation robuste de systèmes viscoélastiques par l'utilisation d'une base de réduction enrichie par des résidus statiques associés aux forces extérieures et aux effets dus aux modifications viscoélastiques. A travers un exemple, on montre que pour des petites modifications, on peut rapprocher le comportement du système amorti modifié sans l'exécution de réanalyse exacte du système nominal de départ, ce qui justifie l'intérêt à cette stratégie de condensation associée au procédures d'optimisation et/ou le recalage de systèmes amortis de grande taille.

Dans la seconde partie de ce chapitre on a montré quelques techniques d'approximation de fonctions, comme les réseaux de neurones et les surfaces de réponses classiques et adaptatives. A travers des exemples, on a pu remarquer l'efficacité de ces deux approches en représenter les réponses dynamiques des systèmes viscoélastiques. La principale différence

entre les deux approches est le domaine d'application mais, en général, les deux techniques peuvent être utilisées pour approximer de fonctions multi-modales et non-linéaires. Néanmoins, les ANNs présentent deux avantages par rapport aux surfaces de réponses. La première est qu'ils permettent de rapprocher les réponses dynamiques de systèmes amortis dont les variables d'entrées sont hybrides, comme les épaisseurs de couches, température, etc., et les positions du traitement viscoélastique. La deuxième est l'avantage en approcher les problèmes à plusieurs variables d'entrée, puisque pour ces problèmes l'utilisation des surfaces de réponses peut conduire à des polynômes plus complexes que le système physique réel en termes du nombre de coefficients à déterminer. Même si les surfaces sont construites à travers le modèle condensé robuste, le nombre prohibitif d'évaluation des fonctions pour les RSM/ARSM les rend inexploitable en termes du temps de calcul. Néanmoins, les RSM et ARSM peuvent trouver de l'intérêt dans les approches stochastiques (Ghanmi et al, 2005).

CHAPITRE 5

Méthodologie d'Optimisation Multiobjectif Robuste

La conception optimale en avant projet d'une structure mécanique amortie par matériaux viscoélastiques, est aujourd'hui un sujet de grande importance dans plusieurs domaines de la recherche et des applications industrielles dans le domaine spatiale, de l'aéronautique, l'automobile, de la construction civil, etc. En effet, disposer d'une conception optimale et/ou robuste de telles structures amorties est très important en vue de sa fiabilité, robustesse et mise en service avec le maximum de performance et efficacité. Dans ce contexte, l'optimisation intervient de façon primordiale.

Les problèmes d'optimisation dans le domaine de la mécanique des structures, d'une manière générale, sont souvent multiobjectif, étant caractérisés par le fait que les différentes fonctions coût sont généralement en conflit entre elles. Pour cela, il faut choisir une stratégie d'optimisation multiobjectif capable de proposer les meilleures alternatives de projet parmi plusieurs. Les algorithmes évolutionnaires sont largement utilisés pour résoudre des problèmes d'optimisation multiobjectif dans les différents domaines de l'ingénierie, où on a l'intérêt de réduire les coûts et les délais de conception et de fabrication. Dans le but d'avoir une conception robuste des systèmes amortis par matériaux viscoélastiques, l'optimisation robuste s'avère un outil très intéressant, puisque elle prend en compte les incertitudes sur les variables de conception et sur les fonctions coût, ainsi que sur le traitement de contraintes. Avant de passer au problème multiobjectif robuste, il est important de définir un problème multiobjectif déterministe, qui considère seulement les valeurs nominales des variables de conception. Dans ce même contexte, on définit la méthode d'analyse des données *a posteriori* SOM qu'on utilise comme aide aux concepteurs dans le choix des solutions potentielles parmi les solutions optimales fournies par l'optimisation multiobjectif.

5.1 Optimisation multiobjectif déterministe

5.1.1 Définition d'un problème multiobjectif et notion de dominance.

L'optimisation multiobjectif cherche à optimiser plusieurs composantes d'un vecteur de fonctions coût. Contrairement à l'optimisation monoobjectif, la solution d'un problème multiobjectif (PMO) n'est pas unique, mais est constituée d'un ensemble de solutions, connu comme l'ensemble des *solutions Pareto-optimales* (Eschenauer et Osyczka, 1990). Toute solution de cet ensemble est optimale dans le sens qu'aucune amélioration ne peut être faite sur une composante du vecteur sans dégradation d'au moins une autre composante. Le premier but dans la résolution d'un problème multiobjectif est d'obtenir l'ensemble des solutions

Pareto-optimales ou bien d'échantillonner des solutions diversifiées de cet ensemble. La détermination de l'ensemble n'est qu'une première phase dans la résolution pratique d'un PMO qui nécessite, dans un deuxième temps, le choix d'une solution à partir de cet ensemble suivant des préférences choisies par le décideur. Le choix d'une solution par rapport aux autres nécessite la connaissance du problème et des nombreux facteurs liés au problème. Ainsi, une solution choisie par un décideur peut ne pas être acceptable par un autre décideur. Il est donc utile d'avoir plusieurs alternatives dans le choix d'une solution Pareto-optimale.

Classiquement, un PMO est défini par l'expression suivante (Ait Brik, 2005) :

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{x}} \mathbf{F}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_n(\mathbf{x})) \\ g_j(\mathbf{x}) \leq 0 \quad j = 1, \dots, m \\ \mathbf{x}_L \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}_U \quad \mathbf{x} \in C \end{cases} \quad (5.1)$$

où $n \geq 2$ est le nombre de fonctions objectif, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ est le vecteur représentant les variables de conception, $C \subset R^k$ représente l'ensemble réalisable (espace de conception) associé à des contraintes d'égalité ou d'inégalité $g_j(\mathbf{x})$, et des bornes explicites ; $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ est le vecteur des critères ou fonctions objectif à optimiser.

D'après le principe établi par Vilfredo Pareto, *dans un problème multiobjectif, il existe un équilibre tel que l'on ne peut pas améliorer un critère sans détériorer au moins un des autres critères*. Cet équilibre est appelé optimum de Pareto. Cette définition pour les solutions Pareto-optimales, découle directement de la *notion de dominance*. Elle signifie qu'il est impossible de trouver une solution qui améliore les performances sur un critère sans que cela entraîne une dégradation des performances sur au moins un autre critère. Les solutions Pareto-optimales sont connues sous le nom de *solutions admissibles, non dominées et inférieures* (Zitzler et Thiele, 1999).

Définition de dominance de Pareto : Une solution $\mathbf{Y} = (y_1, \dots, y_n)$ domine une autre solution $\mathbf{Z} = (z_1, \dots, z_n)$ si et seulement si $\forall i \in [1, n] \quad y_i \leq z_i$ et $\exists i \in [1, n]$ telles que $y_i < z_i$.

Dans ce contexte, une solution $\mathbf{x}^* \in C$ est une solution Pareto optimale si et seulement si il n'existe pas une solution $\mathbf{x} \in C$ telle que $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ domine $\mathbf{F}(\mathbf{x}^*)$. La Figure 5.2 illustre le concept de dominance, où les points 1, 3 et 5 ne sont dominés par aucun autre. Par contre, le point 2 est dominé par le point 1, et le point 4 est dominé par les points 3 et 5.

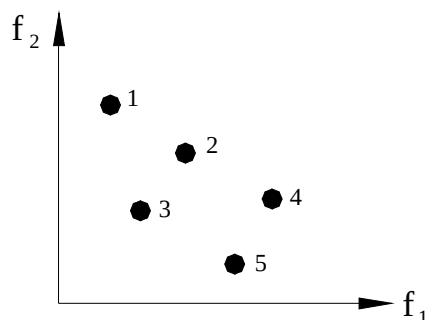


Figure 5.1 – Notion de dominance (figure empruntée à la référence (Ait Brik, 2005)).

5.1.2 Choix d'une méthode d'optimisation multiobjectif.

La difficulté principale d'un problème multiobjectif ne consiste pas à chercher la solution optimale mais l'ensemble des solutions satisfaisantes, qu'on doit ensuite soumettre à une opération de classement. Les méthodes de résolution des problèmes multiobjectifs sont donc des méthodes d'aide à la décision, car le choix final sera laissé au décideur. Dans ce contexte, il existe deux types de résolution d'un problème multiobjectif (Ait Brik, 2005) : la première solution adopte un point de vue utilisateur, et consiste à ramener le problème multiobjectif à un problème simple monoobjectif où les fonctions coût sont pondérées, et la résolution du problème devient alors classique, où la solution est optimale au sens de la fonction monoobjectif. Le problème est que cette solution ne satisfait pas nécessairement tous les critères multiobjectifs, de plus, elle enlève toute signification au problème de départ; et enfin elle ne couvre pas l'ensemble des solutions lorsque le domaine des fonctions coût est non convexe (Das et al, 1997) ; la seconde solution est de tenter d'apporter des réponses au problème en prenant en compte l'ensemble des critères selon le concept de Pareto-optimalité. Dans la première méthode, le décideur intervient dès le début de la définition du problème, en exprimant ses préférences, afin de transformer un problème multiobjectif en un problème monoobjectif. Dans la deuxième stratégie, le décideur effectue son choix dans l'ensemble des solutions proposées par le solveur multiobjectif.

Dans la plupart des cas, le décideur ne peut pas exprimer clairement ses préférences, soit parce qu'il manque d'expérience ou d'informations, soit parce que les fonctions objectif sont de natures différentes. Un inconvénient majeur est que lorsque l'espace de conception n'est pas convexe, la méthode de pondération ignore cette partie de l'ensemble Pareto-optimal (Das et al, 1997) comme illustré en Figure 5.2 ci-dessous.

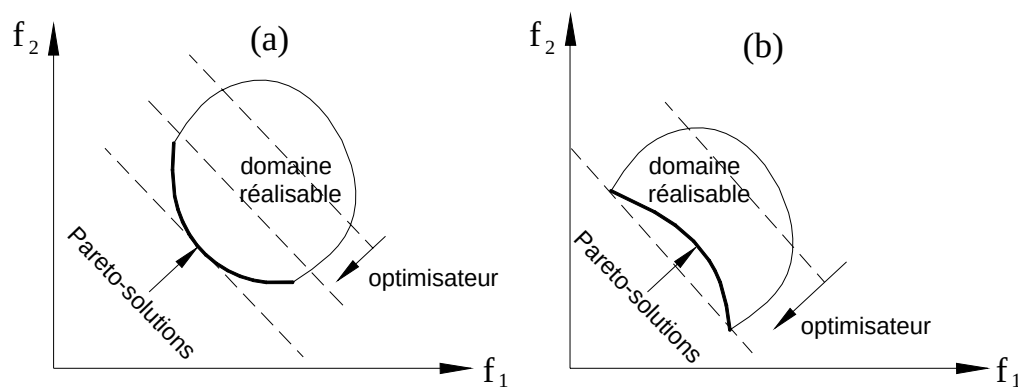


Figure 5.2 – Espace convexe (a) et non convexe (b). (figure adaptée de (Das et al, 1997)).

On remarque qu'il existe un certain nombre de techniques qui permettent de trouver l'ensemble des solutions Pareto optimales (Das et al, 1997 ; Steuer, 1986). Les principaux avantages de ces méthodes sont que les solutions optimales sont indépendantes des préférences du décideur et que l'analyse peut être exécutée seulement une fois, car l'ensemble de Pareto ne changera pas pourvu que la description de problème demeure sans changement. Une difficulté rencontrée c'est que généralement le nombre des solutions sur le front de Pareto est très grand, ce qui pose un problème au décideur pour faire un choix entre ces solutions. Cependant, il existe des méthodes qui peuvent résoudre ce problème en regroupant les

solutions dans des familles qui ont des propriétés semblables (Rosenmann et Gero, 1985 ; Morse, 1980).

5.1.3 Algorithmes évolutionnaires (EAs).

Les algorithmes génétiques sont des algorithmes d'exploration fondés sur les mécanismes de la sélection naturelle et de la génétique. Ils utilisent à la fois les principes de la survie des individus les mieux adaptés, et des échanges d'informations pseudo-aléatoires. Ces algorithmes tentent de maximiser une fonction profit (positive) en générant au hasard une population initiale de solutions potentielles, pour la faire évoluer au gré des opérateurs génétiques. Il existe plusieurs variantes des algorithmes évolutionnaires pour résoudre un problème multiobjectif, comme par exemple, la méthode VEGA (*Vector Evaluated Genetic Algorithm*) (Schaffer, 1985) ; la méthode MOGA (*Multiple Objective Genetic Algorithm*) (Fonseca, 1993) ; la méthode SPEA (*Strength Pareto Evolutionary Algorithm*) (Zitzler, 1998) ; et celle qu'on a choisi dans ce mémoire, appelé NSGA (*Non dominated Sorting Genetic Algorithm*), proposée par Srinivas et Deb (1993).

Le NSGA est basé sur le concept de dominance de Pareto et les solutions sont classées en rang, procédure appelée « *ranking* », où les individus qui ne sont pas dominés, sont affectés au front n°1, puis ils sont éliminés de la population. L'ensemble suivant d'individus non dominés est identifié et affecté au rang 2, et par la suite. Cette procédure est répétée jusqu'à ce que tous les individus de la population aient un rang.

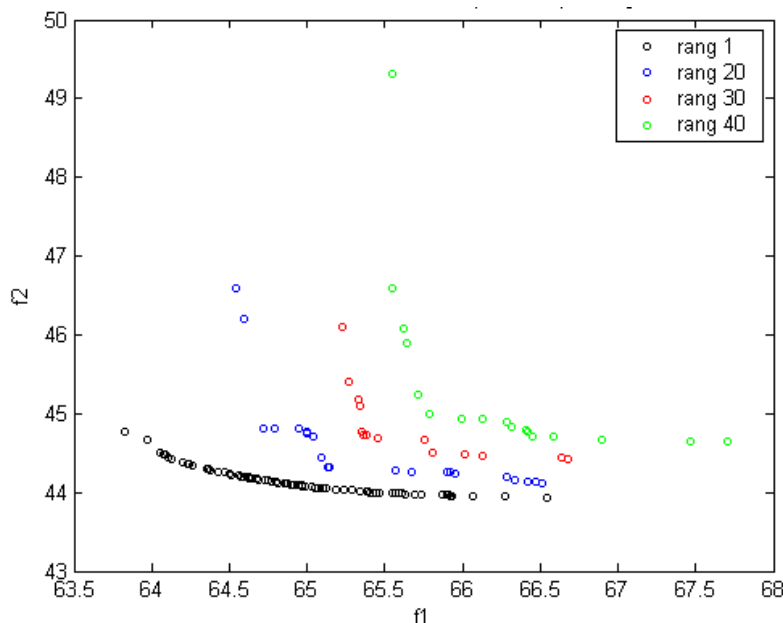


Figure 5.3 – Classification des solutions par rang d'un PMO.

A titre d'exemple, la Figure 5.3 ci-dessus considère le classement des solutions optimales au sens de Pareto, issues d'un problème d'optimisation multiobjectif d'une poutre encastrée-libre traitée par couche contrainte, où les fonctions coût f_1 et f_2 sont, respectivement, les amplitudes de vibration du système amorti associées au premier et au deuxième modes.

Après le classement de chaque population en rang, on attribue à chaque individu x_i une valeur f_i appelée « fitness » telle que $f_i = 1/r$ avec r égale au rang de cet individu. L'objectif de la résolution d'un problème multiobjectif n'est pas seulement de trouver l'ensemble Pareto-optimal, mais aussi des solutions que soient uniformément réparties dans cet ensemble (Srinivas et Deb, 1993). Pour cela, il est nécessaire d'introduire la technique de formation des niches. Les valeurs de la fonction fitness sont ainsi divisées par la fonction de niche (*sharing*) suivante :

$$sh(d(x_i, x_j)) = \begin{cases} 1 - d(x_i, x_j)/\sigma & \text{if } d(x_i, x_j) < \sigma \\ 0 & \text{if } d(x_i, x_j) \geq \sigma \end{cases} \quad (5.2)$$

où x_i et x_j sont des individus ; sh est la fonction de niche ; σ est une constante fixée par le décideur afin de définir l'intervalle des niches ; $d(x_i, x_j)$ est la distance euclidienne entre deux individus x_i et x_j . Après la définition de la fonction de fitness, on utilise les opérations standard d'un algorithme génétique comme sélection, croisement et mutation (Figure 5.4).

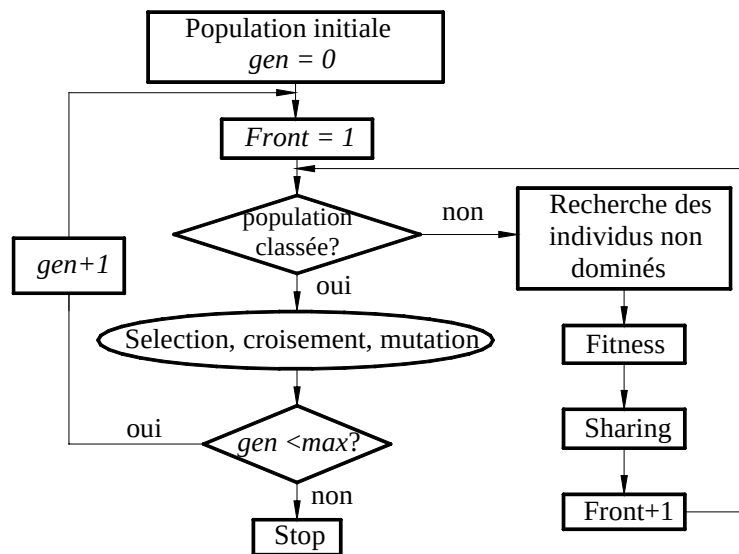


Figure 5.4 – Stratégie NSGA (figure empruntée à la référence (Ait Brik, 2005)).

Plusieurs auteurs montrent que cette méthode paraît moins efficace en termes du temps de calcul que les autres méthodes multiobjectif, mais l'utilisation d'un sharing sur l'espace de solutions maintient une grande diversité des populations permettant de répartir plus efficacement les solutions sur le Front de Pareto. De plus, cette méthode est applicable dans des problèmes avec un nombre quelconque d'objectifs (Srinivas et Deb, 1993).

5.2 Optimisation multiobjectif robuste

L'optimisation robuste a les mêmes caractéristiques que l'optimisation déterministe au niveau du traitement des données, mais tient compte des incertitudes sur les variables de conception et sur les fonctions objectif, ainsi que dans le traitement des contraintes (Lee et

Park, 2001). En ingénierie mécanique, ces incertitudes sont inhérentes aux défauts de modélisation, aux variations des propriétés mécaniques des matériaux, tolérances des processus de fabrication et d'assemblage (épaisseurs de tôles, jonctions, etc.), etc. Dans une phase de conception en avant projet, ces incertitudes sont introduites pour prendre en compte la méconnaissance de certaines variables de conception, ce qui rend toute importance à ces méthodes d'optimisation.

Dans le Chapitre 6 on définit les principales sources d'incertitudes et l'approche couramment employée en dynamique pour résoudre les systèmes stochastiques.

5.2.1 Prise en compte de la robustesse dans la recherche d'un optimum.

Dans le domaine de l'optimisation des structures amorties par matériaux viscoélastiques, la prise en compte de la robustesse des solutions est essentielle dans la recherche d'une conception optimale du système traité, car il est bien connu qu'une solution théoriquement excellente peut s'avérer catastrophique en pratique si les erreurs commises lors de la fabrication ne permettent pas d'obtenir les valeurs optimales des variables de conception avec une précision suffisante (Ait Brik, 2005). Même un faible écart par rapport à leur valeur optimale théorique pourra se traduire par un comportement très éloigné de celui prévu par l'optimisation numérique (contraintes d'optimisation non satisfaites par exemple). Dans ce contexte, une solution sous optimale mais stable vis-à-vis des tolérances de fabrication sera beaucoup plus intéressante pour le concepteur.

L'approche la plus courante consiste d'abord à prendre des marges sur les contraintes imposées, puis à vérifier *a posteriori* que la solution trouvée par une optimisation déterministe reste stable lorsque les différentes variables décrivent les intervalles de tolérance estimés. Cette vérification peut être faite par des méthodes probabilistes comme les simulations de Monte Carlo (MC), ou par la méthode d'Hyper Cube Latin (HCL). Par ailleurs, des méthodes dites « possibilistes », basées sur l'arithmétique des intervalles, ont été développées pour évaluer la variation des réponses lorsque les paramètres décrivent les intervalles (Braibant et al, 1998 ; Dessombz et al, 2001). D'autres auteurs ont proposé l'évaluation de la robustesse des optima seulement à la fin du processus d'optimisation (Bennet, 1990). Les principaux inconvénients de ces stratégies sont : le besoin systématique des expressions analytiques de la fonction objectif et l'utilisation de la pondération de ces fonctions, qui exclut la recherche d'éventuelles solutions dans les régions non convexes de l'espace des solutions robustes ; on trouve des zones de robustesse et non des solutions optimales et robustes.

5.2.2 Critère de robustesse en optimisation multiobjectif

Pour définir la robustesse d'une fonction objectif, on considère comme exemple une fonction coût à un seul paramètre, comme illustrée en Figure 5.5, contenant deux solutions optimales A et B, respectivement. La solution A est l'optimum déterministe, et la solution B est l'optimum robuste. La performance de l'optimum déterministe est meilleure que celle de l'optimum robuste. Cependant, sa distribution est plus large que l'optimum robuste.