

VILMAR DE SOUZA PIRES JUNIOR

ESTUDO EM ETAPAS DE SIMULAÇÕES
COMPUTACIONAIS APLICAS EM MECÂNICA DOS
FLUIDOS



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

2018

VILMAR DE SOUZA PIRES JUNIOR

**ESTUDO EM ETAPAS DE SIMULAÇÕES COMPUTACIONAIS
APLICADAS EM MECÂNICA DOS FLUIDOS**

Monografia apresentada ao
Curso de Graduação em Engenharia
Mecatrônica da Universidade Federal
de Uberlândia, com parte dos
requisitos para a obtenção do título de
**BACHAREL EM ENGENHARIA
MECATRÔNICA.**

Orientador: Prof. Dr. Aristeu da
Silveira Neto

**Uberlândia – MG
2018**

Vilmar de Souza Pires Junior

**ESTUDO EM ETAPAS DE SIMULAÇÕES COMPUTACIONAIS
APLICADAS EM MECÂNICA DOS FLUIDOS**

Monografia apresentada para Curso de
Graduação em Engenharia Mecatrônica
da Universidade Federal de Uberlândia

Área de Concentração: Simulação em
mecânica dos fluidos

Banca Examinadora:

Prof Dr. Aristeu da Silveira Neto – UFU – Orientador

Prof Dr. José Jean-Paul Zanlucchi de Souza Tavares

Prof Dr. João Marcelo Vedovoto

Uberlândia, 2018

AGRADECIMENTOS

À Universidade Federal de Uberlândia e à Faculdade de Engenharia Mecânica pela oportunidade de participar do curso de Engenharia Mecatrônica.

Aos meus familiares e amigos por terem compartilhado comigo todos os momentos durante minha graduação

Resumo

Neste trabalho tem-se como objetivo o desenvolvimento de modelo matemático, físico, numérico e computacional de três problemas de mecânica dos fluidos. São eles: escoamento de Poiseuille plano unidimensional, escoamento bidimensional com velocidades pré-determinadas e escoamento em expansão brusca, sobre um degrau. Em seguida, é feita a verificação e validação do modelo computacional adotado nos problemas. No modelo físico estuda-se as características particulares de cada escoamento, através dos conceitos estudados em Mecânica dos Fluidos. O modelo matemático é utilizado para apresentar o teorema de Reynolds e as análises diferenciais que encontram equações a serem resolvidas. No estágio do modelo numérico discretiza-se tais equações para serem implementadas na simulação computacional, onde são desenvolvidos os algoritmos responsáveis pela resolução de cada problema. Os capítulos de verificação e validação servem para comparar os resultados encontrados pelos modelos desenvolvidos com os resultados encontrados na literatura ou em experimentos. É um trabalho de cunho acadêmico, em que é buscado compor uma base para estudos mais aprofundados em dinâmica dos fluidos computacional.

Abstract

The main objective of this work is the development of mathematical, physical, numerical and computational models of three fluid mechanics problems, it means, Poiseuille flow one-dimensional plane, two-dimensional flow with predetermined speeds and flow in sudden expansion, on a step. Then, the verification and validation of the computational model adopted in the problems is done. In the physical model this study presents the particular characteristics of each flow, through the concepts studied in Fluid Mechanics. The mathematical model is used to present the Reynolds theorem and the differential analyzes that find equations to be solved. In the numerical model stage these equation are discretized to be implemented in the computational simulation, where the algorithms responsible for solving each problem are developed. The verification and validation chapters compare the results found by the models developed with the results literature or experiments. It is an academic work, which composes a basis for further studies on computational fluid dynamics.

Lista de Símbolos

- β - grandeza generalizada intensiva
- μ - viscosidade dinâmica
- ν - viscosidade cinemática
- $\vec{\xi}$ - vorticidade
- ρ - densidade
- φ - função de dissipação viscosa
- $\vec{\nabla}$ - operador gradiente
- $\vec{a}$ - vetor aceleração
- A - área
- B - grandeza generalizada extensiva
- c_p - calor específico a pressão constante
- ELT - erro local de truncamento
- g_x - aceleração da gravidade no eixo x
- g_y - aceleração da gravidade no eixo y
- g_z - aceleração da gravidade no eixo z
- k - coeficiente de condutividade térmica
- L_∞ - erro sob a norma L_∞
- L_2 - erro sob a norma L_2
- m - massa
- $\vec{n}$ - vetor normal
- $O(\Delta x)$ - erro local de truncamento de primeira ordem
- $O(\Delta x)^2$ - erro local de truncamento de segunda ordem
- p - pressão
- $\dot{q}$ - fluxo de calor
- Re - número de Reynolds

$\vec{S}$ - vetor normal à superfície

t - tempo

T - temperatura

u - componente em x da velocidade

$\hat{u}$ - energia interna

v - volume

v - componente em y da velocidade

ϑ - viscosidade cinemática

$\vec{V}$ - vetor velocidade

$\vec{V}_r$ - velocidade relativa

w - componente em z da velocidade

Sumário

Resumo.....	v
Abstract	vi
Lista de Símbolos.....	vii
CAPÍTULO I	11
CAPÍTULO II	13
2.1 Abordagens Lagrangiana e Euleriana, e o Teorema do Transporte de Reynolds	13
2.2 Escoamento de Poiseuille Plano.....	14
2.3 Escoamento Bidimensional Com Velocidades Pré-determinadas	17
2.4 Escoamento Sobre o Degrau	18
CAPÍTULO III	21
3.1 Formação das Equações Diferenciais	21
3.2 Análise Diferencial do Escoamento de Poiseuille Plano.....	24
3.3 Análise Diferencial do Escoamento Bidimensional com Velocidades Pré-determinadas.....	25
3.4 Análise Diferencial para o Escoamento Sobre o Degrau	28
CAPÍTULO IV	30
4.1 Discretização para o Escoamento de Poiseuille Plano	32
4.2 Discretização do Escoamento Bidimensional com Velocidades Pré-determinadas	37
4.3 Discretização do Escoamento Sobre o Degrau.....	40
CAPÍTULO V	47
5.1 Algoritmo para o Escoamento de Poiseuille	47
5.2 Algoritmo para o Escoamento Bidimensional com Velocidades Pré-determinadas.....	51
5.3 Algoritmo para o Escoamento Sobre o Degrau.....	54
CAPÍTULO VI	59
6.1 Considerações Sobre a Análise de Erros	59
6.2 Análise de Erros para o Escoamento de Poiseuille Plano.....	61
6.3 Análise de Erros para o Escoamento Bidimensional com Velocidades Pré-determinadas....	62
CAPÍTULO VII	65
CAPÍTULO VIII	72
Apêndice I.....	74
Apêndice II.....	76

Apêndice III.....	80
Referências Bibliográficas	86

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

Desde que se estabeleceu na Terra como espécie, o homem busca ter o controle sobre a natureza e modificar seu meio, através do trabalho. No contexto atual, a maneira como o homem modifica o meio, é aperfeiçoada através de técnicas de simulação computacional. Com o artifício dos computadores, torna-se possível a previsão do comportamento de determinado sistema, de acordo com determinados parâmetros. A simulação computacional, na área de Mecânica dos Fluidos, será o objeto de estudo deste trabalho.

Plauska (2013) mostra que o estudo de Mecânica dos Fluidos foi muito importante na história, e se iniciou na construção de sistemas de abastecimento de água nas cidades primitivas. Esta área de estudos se desenvolveu ainda com Arquimedes, mas não obteve grandes avanços, até a época de Leonardo Da Vinci. Existe um grande acúmulo para a Mecânica dos Fluidos, neste período, através do trabalho de diversos autores, mas apesar dos esforços dos cientistas, as teorias propostas por eles são, em geral, confirmadas apenas em experimentos relativamente simples. Divergências entre teoria e prática levam d'Alembert a afirmar que a teoria dos fluidos deve ser construída a partir da experiência. Fórmulas empíricas para solução de problemas em Mecânica dos Fluidos se tornam comuns, neste estágio da história.

As demandas comerciais e industriais do século XIX levam ao estudo de elementos muito diferentes de água e ar, e o desenvolvimento da dinâmica dos fluidos torna-se, mais uma vez, necessário. Novos trabalhos são desenvolvidos por Osborne Reynolds, Lord Rayleigh e George Gabriel Stokes, e as equações de Euler e Navier alcançam um patamar mais abrangente. É o começo da reconciliação da hidráulica e da hidrodinâmica com a formulação das equações de Navier-Stokes. No século XX, a aeronáutica experimenta um rápido progresso e vários pesquisadores desenvolvem métodos matemáticos potentes, deixando as descobertas experimentais em segundo plano. A moderna formulação da mecânica dos fluidos tem como base as leis fundamentais do movimento da Mecânica e é intimamente relacionada com as observações experimentais.

No entanto, obstáculos históricos encontrados pelos pesquisadores com relação a método analítico e método empírico não foram completamente vencidos, nos tempos atuais. Através do método matemático enfrenta-se dificuldades com as equações de Navier-Stokes, pelo fato de serem equações diferenciais parciais e não-lineares, cujas soluções analíticas para regiões arbitrárias e condições de contorno gerais ainda não podem ser encontradas. Utilizando o método empírico encontramos dificuldades nas montagens de experimentos, que muitas vezes são impossíveis de serem feitos em laboratórios, ou são caros demais. Fortuna (2000) nos mostra que o advento do computador digital serviu para criar uma alternativa aos métodos analítico e numérico, mesmo que sejam métodos já bem desenvolvidos.

Fortuna (2000) ainda ressalta que o uso dos métodos numéricos não implica, de forma alguma, que análises matemáticas e experimentais estejam sendo postas de lado. O que acontece é que se cria uma alternativa e as três técnicas passam a se complementar durante projetos que envolvam escoamento de fluidos. O método numérico pode ser útil, por exemplo, para fazer simulações preliminares que ajudem na escolha de um experimento mais eficiente a ser montado.

No trabalho aqui relatado, tem-se o objetivo de estudar as etapas empregadas na edificação das simulações computacionais aplicadas em mecânica dos fluidos. Dessa forma, serão resolvidos três escoamentos diferentes por meio de simulação computacional. Escoamento de Poiseuille plano, escoamento bidimensional com velocidades pré-determinadas e escoamento sobre o degrau. O primeiro escoamento tem uma solução analítica simples e servirá para um primeiro contato com os conceitos empregados nos métodos físico, matemático e numérico. Trata-se de um problema cuja solução é unidimensional. O segundo escoamento é um escoamento de característica matemática que vai expandir a modelagem de unidimensional, empregada no primeiro escoamento, para bidimensional. O terceiro problema a ser resolvido utiliza um escoamento de característica mais complexa. Já foram mencionadas as dificuldades em se encontrar soluções analíticas para as equações de Navier-Stokes. Além disso, Silveira-Neto (2002) mostra que o escoamento sobre o degrau se trata de um escoamento com várias regiões de comportamentos diferentes, que podem ser de difícil análise em um experimento de laboratório. Para a modelagem desse problema foi necessária uma discretização envolvendo mais de uma região. O resultado numérico desse escoamento pode servir para nortear outros estudos na área.

CAPÍTULO II

MODELO FÍSICO

2.1 Abordagens Lagrangiana e Euleriana, e o Teorema do Transporte de Reynolds

A cinemática dos fluidos é o estudo feito sobre o modo como os fluidos escoam. Çengel e Cimbala (2007) nos relatam que existem duas formas fundamentais para descrever o movimento dos fluidos. A primeira delas é a descrição lagrangiana, que procura descrever o escoamento a partir do movimento de cada partícula de fluido. A ideia geral dessa descrição é determinar as propriedades (velocidade, aceleração, pressão, entre outras) de cada partícula do fluido. É uma descrição limitada porque o fluido é composto de uma quantidade extremamente grande de partículas e isso torna inviável o cálculo com esse viés. Por causa disso, existe a descrição euleriana do movimento dos fluidos. Esta descrição trabalha com uma parcela limitada do fluido, parcela essa que será chamada de volume de controle. O volume de controle pode ser o interior de um cilindro, uma parcela de um escoamento, ou seja, é um volume, variável ou não, determinado pelo próprio pesquisador. No nosso estudo vamos trabalhar com volumes de controle infinitesimais, que são volumes de controle feitos para englobar porções de fluido infinitamente pequenas. É uma forma de combinar análise lagrangiana com a análise euleriana. A figura abaixo mostra um volume de controle infinitesimal:

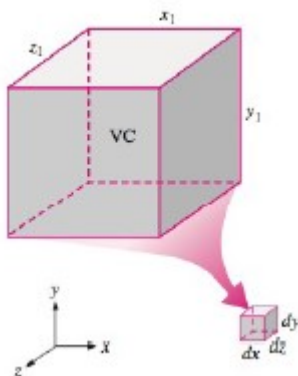


Figura 2.1 - Exemplo de volume de controle infinitesimal em Çengel e Cimbala (2007)

Na abordagem euleriana, as propriedades (velocidade, aceleração, pressão) são grandezas definidas em cada ponto do volume de controle, a cada instante de tempo. Dessa forma, não é mais necessário acompanhar o movimento de cada partícula, mas encontrar equações que possam prever os valores das grandezas estudadas em cada ponto do volume de controle.

As duas abordagens podem ser combinadas, e a partir dos princípios de cada uma delas, obtemos relações válidas entre velocidade e aceleração ao longo do volume de controle.

O volume de controle é uma parcela delimitada no espaço por onde passa o fluido estudado. Dessa forma, existe entrada e saída de fluido. Para determinar as variações das propriedades dos fluidos que acontecem devido ao fluxo, temos o teorema de Reynolds. Com esse teorema, relaciona-se as quantidades de determinada propriedade (massa, energia) que cruzam as fronteiras do volume de controle, e a variação dessa propriedade dentro do volume de controle.

Neste trabalho serão estudados três escoamentos com suas respectivas particularidades. Primeiramente, o escoamento de Poiseuille plano, onde será estudado a evolução do campo de velocidade no decorrer do tempo. Trata-se de uma situação relativamente simples e serve como um primeiro contato com o método de trabalho usado nos problemas mais complexos. Em seguida, teremos um escoamento bidimensional com as velocidades pré-determinadas, e o objetivo será a determinação da temperatura em cada ponto do escoamento. Por último, estudaremos um escoamento com expansão brusca, com a finalidade de determinar campos de velocidade e pressão.

2.2 Escoamento de Poiseuille Plano

Reynolds (1883) demonstrou a existência de dois tipos de escoamento, através de um experimento. São eles, o escoamento laminar e o escoamento turbulento. O experimento buscava a visualização do padrão de um escoamento de água através de um tubo de vidro, utilizando-se de um fluido colorido (corante). Os padrões encontrados no experimento podem ser conferidos na figura abaixo:

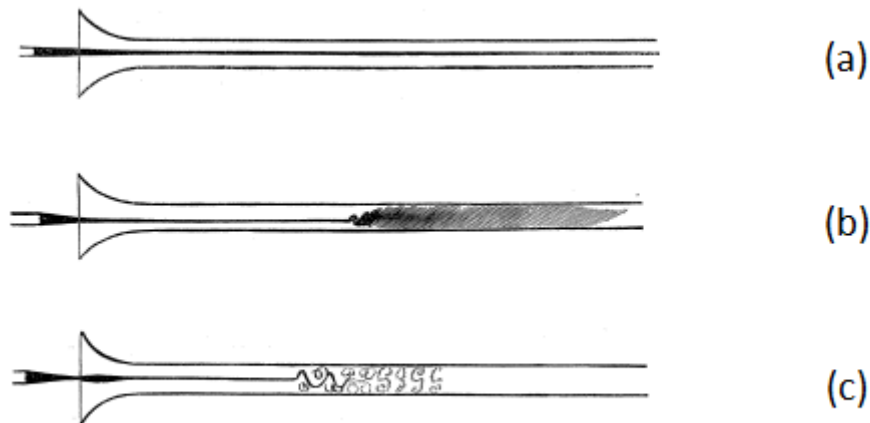


Figura 2.2 - Resultado do experimento de Reynolds

O primeiro fluxo (a) apresenta um comportamento completamente diferente do último fluxo (c), e o fluxo intermediário (b) apresenta certa quantidade de cada um dos dois extremos. O escoamento laminar é definido como aquele em que o fluido se move em camadas, ou lâminas, de modo que cada camada desliza sobre a sua adjacente. Não existe movimento transversal. Cada partícula se move apenas na direção do fluxo. O escoamento turbulento (c), por sua vez, é um escoamento em que as partículas apresentam movimento caótico causado pela presença de movimentos transversais.

A primeira característica do escoamento de Poiseuille é de que se trata de um escoamento laminar. Dessa forma, é um escoamento altamente ordenado, onde as partículas se deslocam apenas na direção do fluxo e não apresentam velocidades transversais. Além disso, consideraremos que o escoamento se dará entre duas placas planas infinitas, o que caracteriza um escoamento de Poiseuille plano. Outra característica do escoamento de Poiseuille, é que ele ocorre devido à queda de pressão de uma região em relação à outra. A figura a seguir mostra o comportamento de um escoamento de Poiseuille plano:

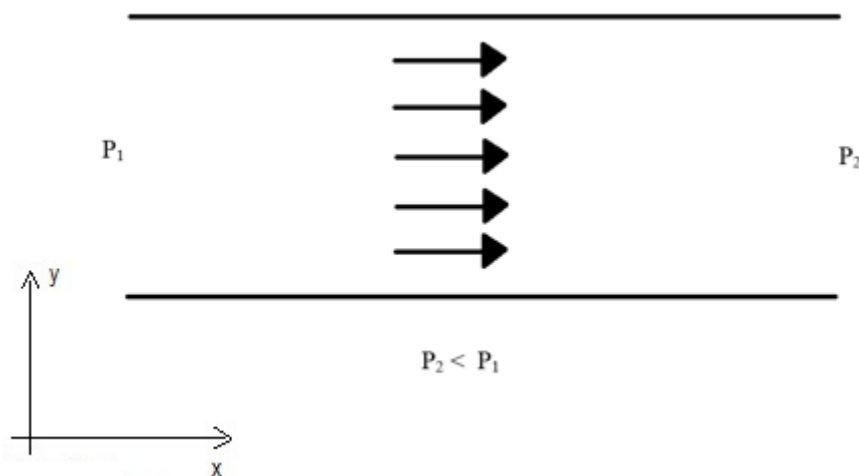


Figura 2.3 - Direção do fluxo em um escoamento de Poiseuille

Admitindo-se que a queda de pressão ocorre apenas na direção do eixo x , e que a queda de pressão é o único fator que leva ao escoamento, torna-se desnecessário o estudo do escoamento nos planos paralelos ao plano da página, porque podemos concluir que os resultados obtidos seriam exatamente os mesmos.

A queda de pressão será modelada como um gradiente de pressão que ocorre ao longo do eixo x . Esse gradiente de pressão é constante ao longo desse eixo. Dessa forma, podemos concluir que o campo de velocidades, ao longo do eixo x , em um dado instante de tempo, permanece constante.

Como o campo de velocidades não varia em relação ao eixo x , nem em relação aos planos ortogonais ao plano da página, nosso estudo, para esse problema, só precisamos considerar o campo de velocidades ao longo do eixo y .

Para que o problema possa ser resolvido, são necessárias as especificações das condições de contorno e das condições iniciais.

A condição de contorno mais comum, e que será utilizada nesse problema, é a condição de não escorregamento nas paredes. De acordo com essa condição de contorno, a parte do fluido que está em contato direto com uma parede, tem uma velocidade igual à velocidade dessa parede. Conceitualmente, isso ocorre porque as moléculas do fluido se prendem à superfície. No nosso exemplo, as paredes são planas, infinitas e estáticas. Dessa forma, a camada de fluido em contato com a parede tem velocidade nula. Já que o modelo montado mostra o campo de velocidades em relação apenas ao eixo y , na prática, as condições de contorno especificam velocidade zero nas duas extremidades.

A condição inicial que especificaremos é a de que o fluido parte do repouso. Dessa forma, para o instante de tempo $t = 0$, o fluido terá velocidade nula.

Aplicando-se um gradiente de pressão ao longo do eixo x , o fluido, que estava em repouso, começa a se deslocar, no sentido que vai da região com maior pressão para a região com menor pressão. Isso ocorre porque as moléculas do fluido em alta pressão estão mais “apertadas”, e por isso, tendem a ocupar um espaço mais livre na região de baixa pressão. Com o passar do tempo, a velocidade do fluido vai aumentando, até que se torna constante, a partir de determinado instante. Daí para frente, a velocidade não muda mais, porque a força exercida pelo gradiente de pressão não é capaz de aumentar a velocidade a partir de tal valor.

Do instante inicial, quando o fluido está em repouso, até o momento em que ele atinge a velocidade máxima, temos o fluido em regime transiente. Isso significa que a propriedade analisada (velocidade) está mudando com o tempo. A partir do momento em que o fluido atinge a velocidade máxima, temos o fluido em regime permanente, que é quando a velocidade não muda com o passar do tempo. Dessa forma, o fluido permanece nessa mesma condição enquanto não houver alguma perturbação que modifique alguma das propriedades do fluido.

Consideraremos que o fluido estudado é incompressível. Isso significa que sua densidade fica constante ao longo do tempo e da posição. Essa é uma aproximação muito válida para os líquidos. Em gases, a densidade costuma ser muito variável, dependendo principalmente da pressão.

Para o trabalho, também, assume-se que o fluido é newtoniano, característica que está ligada com a viscosidade. A viscosidade é uma propriedade pela qual um fluido oferece resistência ao corte, ou a resistência que uma camada tem de se deslocar causada por uma camada vizinha que se desloca em velocidade menor. Um fluido newtoniano é um fluido em que a viscosidade é constante para as diferentes taxas de cisalhamento e não varia com o tempo.

Por último, com esse modelo não leva-se em consideração os efeitos da gravidade, de forma que, a única força que movimenta o fluido existe devido ao gradiente de pressão.

2.3 Escoamento Bidimensional Com Velocidades Pré-determinadas

Assim como no exemplo anterior, o fluido estudado aqui será considerado newtoniano e incompressível. Além disso, vamos partir de um problema bidimensional com o campo de velocidades pré-determinado. Esse campo não muda com o tempo e é função apenas das coordenadas planas.

Sabendo os valores do campo de velocidade em cada ponto e em cada instante de tempo, o objetivo desta parte do estudo será a determinação da temperatura em cada ponto do plano e em cada instante de tempo. Para isso, são imprescindíveis os valores iniciais da temperatura, e a especificação das condições de contorno.

Kreith e Bohn (1977) definem alguns conceitos acerca da transferência de energia térmica. Através da leitura de seus trabalhos, vê-se que o calor flui pelo escoamento de três maneiras. A primeira delas é a troca de calor entre regiões vizinhas. Essa troca acontece por condução, onde a diferença de temperatura entre regiões em contato, promove o fluxo de energia da região de maior temperatura para a região de menor temperatura. Essa troca de temperatura obedece a Lei de Fourier, que estabelece que a quantidade de calor trocado é proporcional à diferença de temperatura entre as regiões vizinhas. A segunda maneira pela qual acontece o fluxo de calor pelo fluido, é o trabalho feito devido às tensões viscosas. Esse trabalho ocorre devido ao deslizamento de uma partícula em relação à outra. Por último, o calor percorre pelo fluido devido à força mecânica gerada por gradientes de pressão, ou pelo próprio movimento do fluido.

Esta parte do estudo consiste num problema de natureza matemática, não havendo tantas considerações acerca do modelo físico a serem tratadas. Poderá ser melhor entendido no capítulo seguinte.

2.4 Escoamento Sobre o Degrau

O terceiro problema a ser resolvido neste estudo trata de um escoamento bidimensional com expansão brusca, gerada através de um degrau, na geometria do escoamento. A geometria do escoamento pode ser conferida na figura abaixo:



Figura 2.4 - Geometria do escoamento sobre o degrau

O escoamento com expansão brusca é classificado por Silveira-Neto (2002) como um escoamento complexo composto por sete regiões, como está mostrado na figura 2.5. Temos escoamento tipo camada limite no ponto (I), que vai até o ponto (II), sobre o degrau, onde a camada limite se descola. O ponto (III) temos a formação de instabilidades submetidas aos efeitos de confinamento, transportadas até a região de recolamento da camada limite, que fica em (V), uma região de grande complexidade devido aos choques

com a parede inferior. Depois tem-se a região de redesenvolvimento da camada limite (IV) e, sobre tudo isso, vemos a região mais estável do escoamento em (VII).

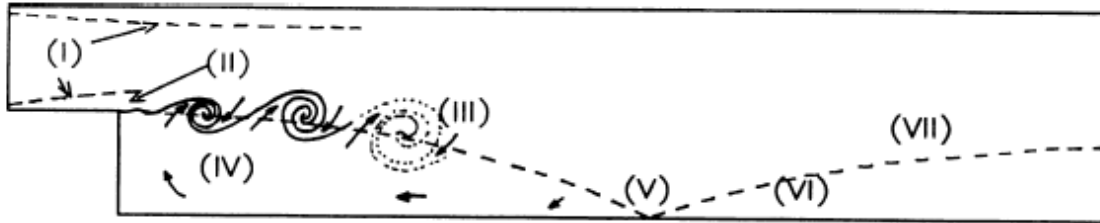


Figura 2.5 - Características do escoamento sobre expansão brusca

Como podemos ver, o estudo leva em consideração duas coordenadas geométricas, por isso sendo considerado como bidimensional. Para as coordenadas x e y , precisaremos determinar o campo vetorial de velocidade, que pode ter componentes nessas duas direções, e o campo de pressão, que trata de uma grandeza de natureza escalar.

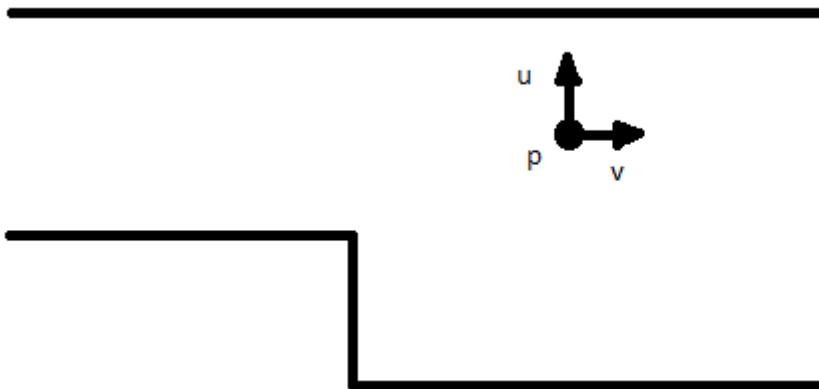


Figura 2.6 - Velocidade e pressão em um ponto do escoamento

Além de determinar campo velocidade e campo de pressão ao longo das direções x e y , é necessário determinar seu desenvolvimento em relação ao tempo. Dessa forma, esses campos serão calculados em cada instante de tempo.

Como os campos serão determinados a partir dos pontos geométricos no escoamento e dos instantes de tempo, é necessário determinar as condições de contorno geométricas e a condição inicial do escoamento.

A condição inicial nos mostra qual será o estado do escoamento no instante em que $t = 0$. Ou seja, vamos impor valores dos campos de velocidade e pressão para este instante. Por conveniência, admitiremos campos de pressão e velocidade nulos, na condição inicial.

As condições de contorno geométricas impõem valores para o escoamento nas bordas. Neste problema temos três tipos de bordas: a entrada, a saída e as paredes do

escoamento. A entrada será imposta com um campo de velocidade uniforme, apontando na direção x , como mostra a figura 2.7. Para a saída, considera-se que o escoamento é comprido o suficiente para que o escoamento já tenha se desenvolvido completamente após a interferência da expansão brusca. Dessa forma, a variação da velocidade na saída, não mais vai se modificar. A figura 2.7 também ilustra esta condição de contorno.

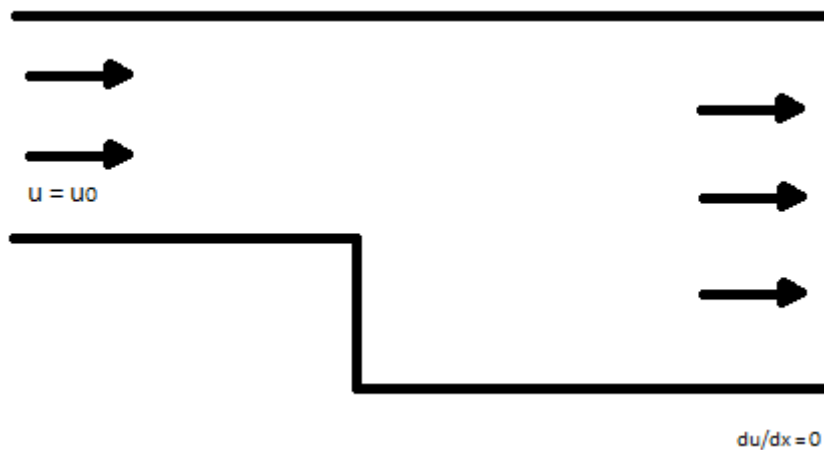


Figura 2.7 - Condições de contorno na entrada e na saída

Além disso, temos a condição de contorno das paredes do escoamento. Será adotada a mesma condição já mostrada no escoamento de Poiseuille plano, a condição de não escorregamento, que impõe velocidade igual a zero em qualquer ponto coincidente com as paredes do escoamento.

Por último, assim como nos problemas anteriores, consideraremos o fluido como sendo newtoniano, incompressível e não levaremos em conta os efeitos da gravidade.

CAPÍTULO III

MODELO MATEMÁTICO

3.1 Formação das Equações Diferenciais

No capítulo anterior foram descritas as abordagens lagrangiana e euleriana para o estudo de problemas de mecânica dos fluidos, utilizando como referência o trabalho de Çengel e Cimbala (2007). Ainda tendo como referência tais estudos, vê-se que a combinação dessas duas abordagens traz uma relação entre velocidade e aceleração em um escoamento. Esta relação está mostrada na equação abaixo:

$$\vec{a}(x, y, z, t) = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\vec{V} \quad (3.1)$$

Na fórmula acima o vetor $\vec{a}$ representa a aceleração no ponto designado pelas coordenadas x, y, z , dentro do volume de controle, no instante de tempo referido pela variável t . O vetor $\vec{V}$ representa a velocidade no ponto referido, dentro do volume de controle. Neste trabalho, utilizaremos as variáveis u, v e w para nos referir às componentes do vetor $\vec{V}$, nas direções x, y e z , respectivamente. O operador $\vec{\nabla}$ representa o operador gradiente, que é utilizado em derivadas parciais de vetores.

Também, no capítulo anterior, foi descrito o conceito que leva ao teorema de Reynolds. A relação matemática que quantifica este conceito está mostrada na equação a seguir:

$$\frac{dB}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{VC} \beta \rho dv \right) + \int_{SC} \beta \rho \vec{V}_r \cdot \vec{dS} \quad (3.2)$$

Onde B é a grandeza estudada, β é sua correspondente intensiva $\beta = \frac{B}{m}$, m é a massa, ρ é a densidade, V é o volume, o vetor $\vec{V}_r$ é a velocidade relativa ao volume de controle e o vetor $\vec{dS}$ é normal à superfície dS de módulo dS .

O teorema de Reynolds serve para estudar o comportamento de certa propriedade (massa, energia, quantidade de movimento) em um volume de controle. A análise matemática será feita com base nessa abordagem. Começaremos utilizando a massa como propriedade analisada no teorema de Reynolds. Esta abordagem nos levará à equação da continuidade. Considerando $B = M$, e $\beta = m$, na equação (teorema de Reynolds), tem-se:

$$\left(\frac{\partial m}{\partial t}\right)_{sist} = 0 = \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{VC} \rho dv \right) + \int_{SC} \rho (\vec{V}_r \cdot \vec{n}) dA \quad (3.3)$$

Esta é a chamada equação da continuidade, que trata do estudo da massa através do teorema de Reynolds.

White (2011) analisa, de forma simplificada, o escoamento em um elemento diferencial do escoamento, através do teorema de Reynolds. A figura abaixo mostra o elemento diferencial estudado:

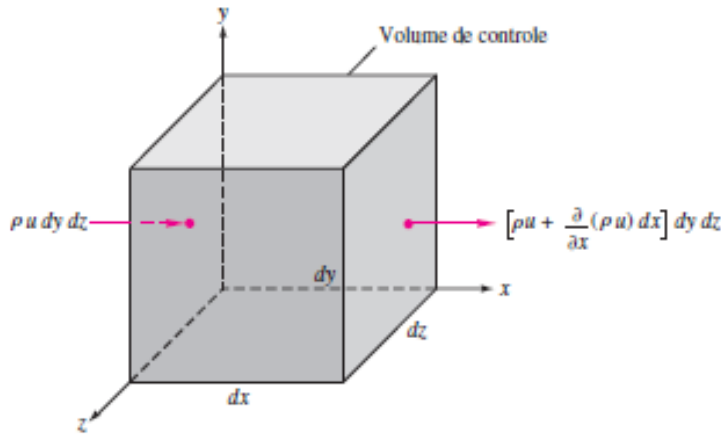


Figura 3.1 - Escoamento de massa em um elemento diferencial em White (2011)

Como se trata de um volume de controle muito pequeno, o termo integral da integral de volume pode ser considerado apenas um termo diferencial:

$$\int_{VC} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \approx \frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz \quad (3.4)$$

Utilizando, ainda, algumas aproximações que não serão aqui descritas, chega-se à seguinte equação:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0 \quad (3.5)$$

Podemos fazer procedimentos semelhantes, utilizando o teorema de Reynolds com a quantidade de movimento e com a energia. Considerando o fluido estudado como fluido newtoniano, a equação gerada pelo estudo da quantidade de movimento é a equação de Navier-Stokes. Trata-se de uma equação vetorial, já que a quantidade de movimento linear é uma grandeza vetorial. Como é uma equação vetorial, trabalharemos com esta equação decomposta em três equações auxiliares, uma para cada componente no espaço:

$$\rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = \rho \frac{\partial u}{\partial t} \quad (3.6)$$

$$\rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) = \rho \frac{\partial v}{\partial t} \quad (3.7)$$

$$\rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) = \rho \frac{\partial w}{\partial t} \quad (3.8)$$

Nestas equações, μ é a viscosidade, e g_x , g_y , g_z , as componentes da gravidade no eixos x , y e z . Os termos das componentes da gravidade serão anulados, para entrar em acordo com a aproximação adotada e a viscosidade será considerada constante.

Por último, utilizamos no teorema de Reynolds, a grandeza energia. Para o estudo da energia no teorema de Reynolds, adotaremos a lei de Fourier, que estabelece que o fluxo de calor é proporcional à variação da temperatura, segundo a equação abaixo:

$$\dot{q} = k \nabla T \quad (3.9)$$

Onde k é uma constante chamada de coeficiente de condutividade térmica, e é característica do fluido por onde se difunde o calor.

Assume-se também que a variação de energia interna é proporcional à variação da temperatura, conforme é mostrado na equação:

$$d\hat{u} = c_p dT \quad (3.10)$$

c_p é uma constante chamada de calor específico a pressão constante. Também é uma propriedade de cada fluido. A partir dessas aproximações, obtemos a equação diferencial:

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} + p(\nabla \cdot \vec{V}) = \nabla \cdot (k \nabla T) + \varphi \quad (3.11)$$

Em que p é a pressão e φ é uma abreviação para a função de dissipação viscosa.

Estas equações serão utilizadas nas análises matemáticas dos escoamentos propostos no capítulo anterior.

3.2 Análise Diferencial do Escoamento de Poiseuille Plano

Nesta etapa do estudo, temos o objetivo de determinar o campo de velocidades, ao longo do tempo, em um escoamento de Poiseuille plano. O modelo físico do escoamento de Poiseuille foi descrito no capítulo anterior. Além do modelo físico, utiliza-se a equação da continuidade e a equação de Navier-Stokes, para a resolução deste problema.

A equação da continuidade possui quatro termos. No entanto, o primeiro termo pode ser cancelado, já que se considera o escoamento incompressível. Dessa forma, a densidade não varia com o tempo. Além disso, como se trata de um escoamento laminar, caso em que o fluido só se movimenta no sentido do escoamento, sabe-se que a velocidade só terá uma componente, que define-se como sendo a componente u , componente esta que aponta na direção do eixo x , mostra a figura 2.3, no capítulo anterior.

Diante dessas considerações, pode-se cancelar também os termos $\frac{\partial v}{\partial y}$ e $\frac{\partial w}{\partial z}$ da equação da continuidade. Chegamos à seguinte equação:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (3.12)$$

A conclusão que se pode chegar, a partir desta equação, é a de que a velocidade não varia ao longo do eixo x . Esta conclusão já era conhecida desde que montamos o modelo físico do problema. Sabe-se também, que a velocidade não depende da posição em z , já que se trata de um problema bidimensional. Desta forma, a velocidade será apenas função da posição em y e do instante t . E em um certo instante de tempo, será função exclusivamente de sua posição no eixo vertical. Estas conclusões não são suficientes para definir o campo de velocidades. Desta forma, utiliza-se as equações de Navier-Stokes.

As equações de Navier-Stokes que tratam das componentes v e w da velocidade não serão utilizadas, já que essas componentes são nulas, para este problema. Da equação de Navier-Stokes para a componente u (equação 3.6), pode-se cancelar o termo $\frac{\partial u}{\partial x}$, por consequência da equação da continuidade. Os termos multiplicados por v ou w também são cancelados, já que a velocidade só tem a componente u . Além disso, os termos $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ e $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ são nulos porque a componente u não varia ao longo dos eixos x e z , mas apenas ao longo do eixo y . Dessa forma, a equação se torna:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial p}{\partial x} \quad (3.13)$$

Como já foi visto no modelo físico, este escoamento parte do repouso, tem uma fase transiente, e entra em regime permanente quando atinge a velocidade máxima. Como o objetivo dessa análise matemática é fornecer informações para conferir o modelo numérico, será suficiente a solução do escoamento quando o mesmo já estiver em regime permanente. Quando o escoamento entra em regime permanente, a velocidade já não muda com o passar do tempo. Dessa forma, podemos cancelar, também, o termo diferencial de tempo da equação acima. Tem-se, então:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\rho}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (3.14)$$

Integrando esta equação duas vezes, e considerando a queda de tensão constante em relação ao eixo x , $\frac{\partial p}{\partial x} = \Delta P$, chegamos à equação que nos traz a velocidade em função da posição y , e de duas constantes:

$$u = \frac{\Delta P}{2\mu} y^2 + C_1 y + C_2 \quad (3.15)$$

Para encontrar o valor das constantes, utiliza-se as condições de contorno, que foram apresentadas no modelo físico deste escoamento. São as condições de não-escorregamento, que assinalam velocidade nula no fluido, quando este está em contato com as paredes planas. Dessa forma, matematicamente, $u = 0$ para as posições $x = 0$ e $x = h$, sendo que h é a distância entre as duas paredes planas. Com o valor das constantes, a equação da velocidade se torna:

$$u = \frac{\Delta P}{2\mu} y^2 - \frac{h\Delta P}{2\mu} y \quad (3.16)$$

3.3 Análise Diferencial do Escoamento Bidimensional com Velocidades Pré-determinadas

Este escoamento será estudado para que sejam ambientados os conceitos de discretização em duas dimensões. Não se trata de um escoamento com foco nos aspectos físicos, de modo que a análise será limitada a obedecer as equações desenvolvidas. Dessa forma, tanto o campo de velocidades, necessário para a resolução do problema, quanto o

campo de temperatura, que é a resolução do problema em si, serão adotados através de fórmulas fechadas.

O campo de velocidades, neste problema, está sendo adotado como:

$$u = u_0 \sin \frac{2\pi x}{L} \quad (3.17)$$

$$v = \frac{-2u_0\pi y}{L} \cos \frac{2\pi x}{L} \quad (3.18)$$

As componentes u e v da velocidade dependem das coordenadas x e y , e do parâmetro L , que representa o comprimento, em relação à direção x . Não depende, portanto, do tempo, sendo assim um campo de velocidades permanente.

Para a solução desse problema é requerida a solução da equação da energia para um escoamento bidimensional com velocidades pré-determinadas. As equações das velocidades pré-determinadas já foram explicitadas. Trata-se de um escoamento incompressível e newtoniano. Para respeitar estas características, a equação da continuidade torna-se:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3.19)$$

Como se nota, o termo referente à componente z não está presente, devido ao escoamento ser bidimensional. Também não está presente o termo que expressa a variação da densidade. Isso porque o escoamento é considerado incompressível. Para verificar se a equação obtida tem validade, deriva-se as equações pré-determinadas da velocidade. O resultado dessas derivadas e o desenvolvimento matemático nos mostram que o problema está de acordo com a equação da continuidade.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2u_0\pi}{L} \cos \frac{2\pi x}{L} \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{2u_0\pi}{L} \cos \frac{2\pi x}{L} \quad (3.21)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y} \quad (3.22)$$

Aplicando a equação da energia para este problema, cancela-se todos termos multiplicados pela componente em z da velocidade. Também despreza-se a influência da dissipação viscosa. Por último, utilizaremos um termo fonte que é função das variáveis do problema (x, y, t) para obter como resultado do estudo, uma situação determinada previamente. Desta forma, a equação toma a forma descrita abaixo:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + f(x, y, t) \quad (3.23)$$

Onde $f(x, y, t)$ é um termo sintetizado que vai ser calculado para que a solução seja a solução adotada que será mostrada no decorrer deste texto.

Nesta equação α é uma constantes que engloba todas as outras constantes do problema. É dada por:

$$\alpha = \frac{k}{\rho c_p} \quad (3.24)$$

Assume-se, para este estudo, a solução para o campo de temperaturas dado pela fórmula seguinte:

$$T(x, y, t) = (x^2 + y^2) \left(1 - e^{-\frac{\alpha t}{L^2}} \right) \quad (3.25)$$

Para este caso, calcula-se o valor da temperatura para cada ponto do escoamento, em cada instante do tempo. A figura abaixo mostra o problema resolvido para o instante de tempo $t = 200$, quando já está em regime permanente.

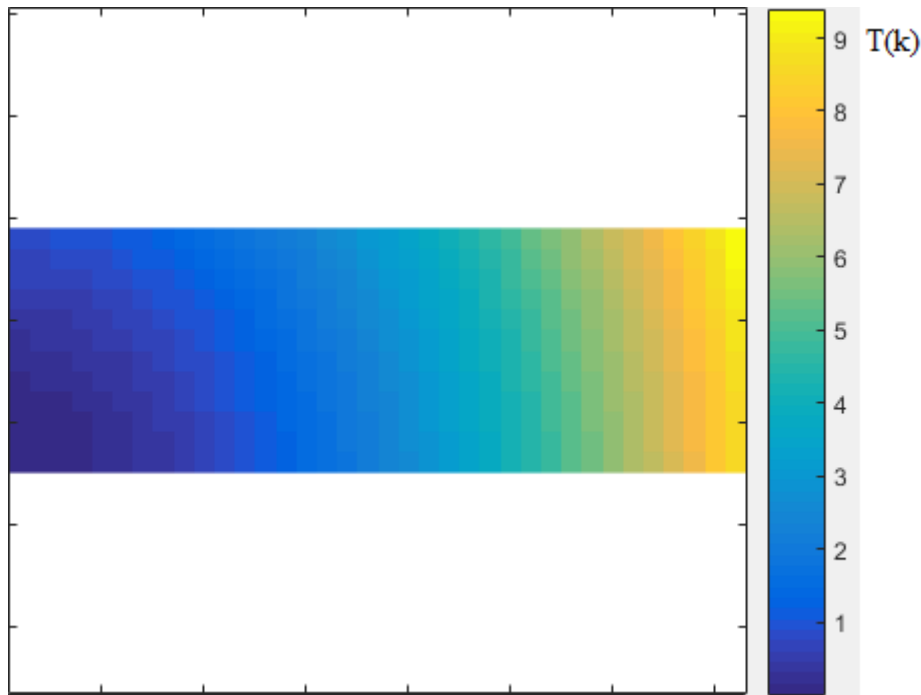


Figura 3.2 - Resultado do campo de temperatura pela fórmula matemática

Agora, determina-se o termo fonte $f(x, y, t)$ que leva a esta solução, partindo das derivadas parciais de $T(x, y, t)$.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = (x^2 + y^2) \left(\frac{\alpha}{L^2} e^{-\frac{\alpha t}{L^2}} \right) \quad (3.26)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 2x \left(1 - e^{-\frac{\alpha t}{L^2}}\right) \quad (3.27)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 2 \left(1 - e^{-\frac{\alpha t}{L^2}}\right) \quad (3.28)$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 2y \left(1 - e^{-\frac{\alpha t}{L^2}}\right) \quad (3.29)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 2 \left(1 - e^{-\frac{\alpha t}{L^2}}\right) \quad (3.30)$$

Substituindo as derivadas parciais encontradas na equação diferencial da energia, obtemos a relação que estabelece o termo fonte.

$$f(x, y, t) = (x^2 + y^2) \left(\frac{\alpha}{L^2} e^{-\frac{\alpha t}{L^2}}\right) + u2x \left(1 - e^{-\frac{\alpha t}{L^2}}\right) + v2y \left(1 - e^{-\frac{\alpha t}{L^2}}\right) - 4\alpha \left(1 - e^{-\frac{\alpha t}{L^2}}\right) \quad (3.31)$$

A resolução da equação da energia com este termo $f(x, y, t)$ leva ao resultado do campo de temperatura acima adotado como $T(x, y, t)$.

3.4 Análise Diferencial para o Escoamento Sobre o Degrau

O escoamento com expansão brusca que será estudado trata-se de um problema bidimensional. Também, desconsidera-se os efeitos da gravidade. Além disso, utilizando as aproximações de fluido incompressível e newtoniano, tem-se, para esta situação, a equação da continuidade na forma:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3.32)$$

Das equações de Navier-Stokes, utiliza-se as que são referentes aos eixos x e y , que tomam as seguintes formas:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \vartheta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \quad (3.33)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v^2}{\partial y} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \vartheta \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \quad (3.34)$$

Nestas equações, ϑ representa a viscosidade cinemática, que é dada por:

$$\vartheta = \frac{\mu}{\rho} \quad (3.35)$$

Como se nota, temos como variáveis as componentes u e v da velocidade, e a pressão p .

Utilizando as condições de contorno para a velocidade, tem-se que em qualquer ponto coincidente com uma parede, a velocidade é nula. Desta forma:

$$u_{parede} = 0 \quad (3.36)$$

$$v_{parede} = 0 \quad (3.37)$$

Trabalha-se com um problema onde a velocidade de entrada seja constante, denominado, a princípio, de u_0 .

$$u_{entrada} = u_0 \quad (3.38)$$

Assume-se ainda, como já dito, que o escoamento será suficientemente longo para que seja completamente desenvolvido. Dessa forma, não haverá variação no valor da velocidade na saída.

$$\frac{\partial u}{\partial x_{saída}} = 0 \quad (3.39)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x_{saída}} = 0 \quad (3.40)$$

CAPÍTULO IV

MODELO NUMÉRICO

Quando é resolvida uma EDP (Equação Diferencial Parcial), encontra-se o valor da variável dependente em cada ponto do escoamento estudado. Como existem várias EDPs que não conseguimos encontrar a solução, torna-se necessário a implementação de outros métodos. O método numérico por diferenças finitas é um método feito para ser executado por computadores, em que o valor da variável dependente pode ser encontrado apenas com operações aritméticas, não tendo, assim, a necessidade de resolver a equação diferencial.

Para que esse método seja implementado, é necessário fazer uma aproximação. Os termos diferenciais das EDPs, significam, fisicamente, a variação de uma variável em relação à outra, em um determinado ponto. Fortuna (2000) nos mostra que essa variação pode ser descrita através da fórmula a seguir:

$$\frac{df}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (4.1)$$

Essa equação pode ser interpretada como a variação de uma variável f , em relação à outra x , em um intervalo infinitamente pequeno h . Pelo método das diferenças finitas, esse intervalo passa a ser finito. Para a implementação desse método, uma região contínua (que possui infinitos pontos) é transformada em uma malha (que possui um número finito de pontos), a figura abaixo ilustra esta transformação:



Figura 4.1 - Conceito de discretização

Para a implementação desse método, é necessária a transformação de termos diferenciais, seja de primeira ordem ou de ordens superiores, em termos de diferenças finitas. Isto é feito através de expansões da série de Taylor, em determinado ponto:

$$f_{i+1} = f_i + (\Delta x) \left. \frac{df}{dx} \right|_i + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_i + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \left. \frac{d^3 f}{dx^3} \right|_i + \dots + R_N \quad (4.2)$$

Isolando a diferencial de primeira ordem, obtemos:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} + \left[-\frac{(\Delta x)^2}{2!} \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_i - \frac{(\Delta x)^3}{3!} \left. \frac{d^3 f}{dx^3} \right|_i - \dots \right] \quad (4.3)$$

Esta é uma fórmula discretizada da diferencial de primeira ordem. O último termo da direita corresponde ao erro de discretização. Esta fórmula é válida para qualquer x dentro de um intervalo onde a função é contínua e possuir derivadas até ordem N contínuas. Nesta fórmula, $i + 1$ é um ponto da função, Δx à frente de i .

Uma situação análoga pode ser feita considerando um ponto $i - 1$ atrás Δx atrás do ponto i . Desta forma teríamos:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x} + \left[-\frac{(\Delta x)^2}{2!} \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_i - \frac{(\Delta x)^3}{3!} \left. \frac{d^3 f}{dx^3} \right|_i - \dots \right] \quad (4.4)$$

É uma outra forma de discretizar a diferencial de primeira ordem. Na equação apresentada primeiro, utilizamos um ponto que ficava à frente de x . Por causa disso, é chamada de discretização por diferenças avançadas. Utilizando um ponto que fica antes de x , temos a discretização por diferenças atrasadas. Ainda é possível combinar as duas formas. Então teremos uma fórmula que considera um ponto à frente e um ponto atrás do ponto estudado. A fórmula se torna:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x} + \text{erro} \quad (4.5)$$

Ainda utilizando as equações 4.3 e 4.4, pode-se combiná-las, de forma a isolar o termo diferencial de segunda ordem $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, com o objetivo de conseguir uma fórmula para discretizá-lo, conforme:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{(\Delta x)^2} + \text{erro} \quad (4.6)$$

Os erros que aparecem em ambas as equações são devido à aproximação numérica. Eles serão estudados com maior profundidade no capítulo 7.

4.1 Discretização para o Escoamento de Poiseuille Plano

A formulação física e matemática do escoamento de Poiseuille já foi feita nos capítulos anteriores. Sabe-se que a variável estudada (velocidade) só varia em relação ao eixo y . E que o vetor velocidade tem apenas a componente u , que aponta na direção do eixo x . A discretização, para este problema, pode ser vista na figura abaixo:

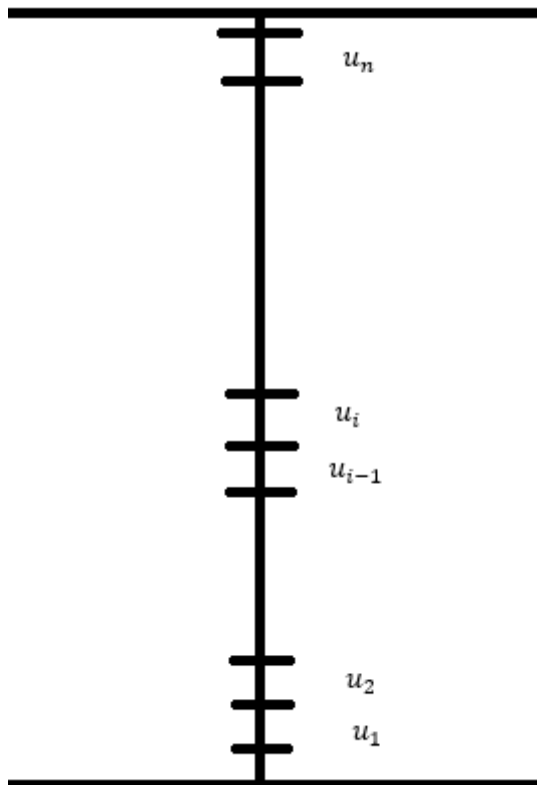


Figura 4.2 - Discretização do escoamento de Poiseuille plano

Para este problema, existem as condições de contorno especificadas nas extremidades. Dessa forma, determina-se os valores do primeiro e do último nó. De acordo com a teoria, o valor especificado fica no ponto exato da parede. Coloca-se o meio desses nós coincidindo com as paredes, para que o modelo numérico fique de acordo com o modelo físico. Como os valores das extremidades já estão determinados, começa a numerar a malha do nó imediatamente acima do nó em cima da parede de baixo, e se tem o último nó numerado sendo o primeiro abaixo do nó na parede de cima. O esquema mostrado na figura 4.2 mostra o que foi explicado.

Como já foi dito, o objetivo da discretização é transformar um problema de equações diferenciais em um sistema de equações com variáveis simples. Para isso, os termos diferenciais das equações são transformados em termos que são funções apenas das velocidades em cada nó da malha discretizada. A equação utilizada para a determinação do campo de velocidades neste problema foi desenvolvida na análise matemática. Trata-se da equação 3.13. Como se vê, os termos $\frac{\partial u}{\partial t}$ e $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ precisam ser discretizados. Começando pela variação da velocidade em relação à posição, de acordo com a equação 4.6, que é utilizada para a discretização de termos diferenciais de segunda ordem, tem-se:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{(\Delta y)^2} + \text{erro} \quad (4.7)$$

Desconsiderando o último termo do lado direito da equação, que será considerado apenas como o erro inerente à discretização.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{(\Delta y)^2} \quad (4.8)$$

Como se vê, o lado direito da equação, está em função apenas das variáveis velocidade em cada nó. Pode-se ter uma visão melhor de como a discretização se dá, nas figuras 4.3 e 4.4. A figura 4.3 mostra a discretização em um elemento do interior da malha, e a figura 4.4 mostra a discretização nos nós das extremidades.

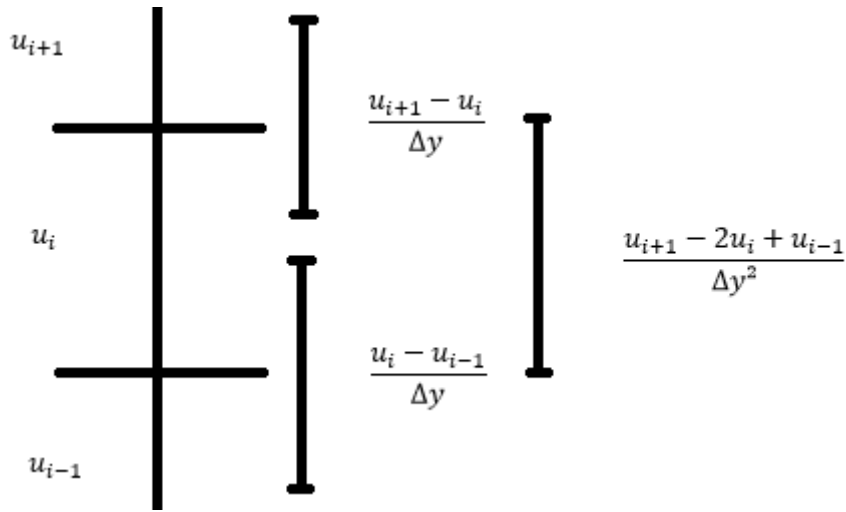


Figura 4.3 - Discretização dos nós centrais

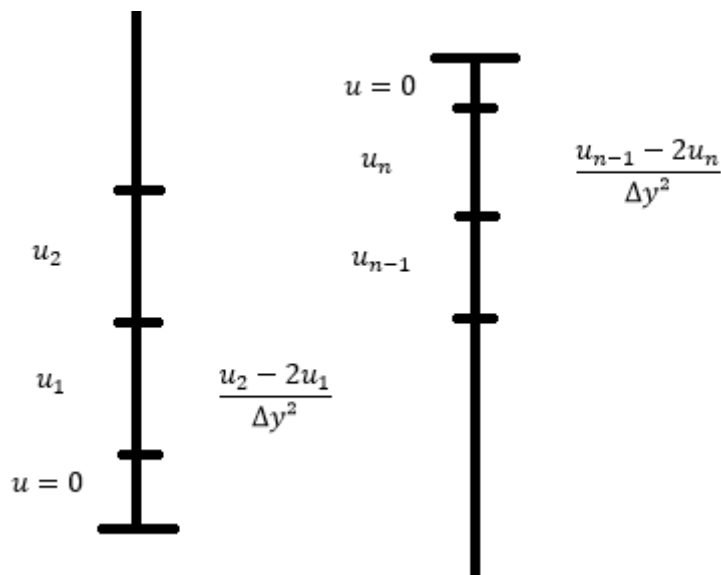


Figura 4.4 - Discretização dos nós das extremidades

Como se vê, os elementos da borda têm suas particularidades. Dessa forma, para o elemento inferior da malha, teremos:

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|_{i=1} = \frac{u_2 - 2u_1}{(\Delta y)^2} \quad (4.9)$$

E para o elemento superior da malha:

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|_{i=N} = \frac{-2u_N + u_{N-1}}{(\Delta y)^2} \quad (4.10)$$

Para o termo diferencial em relação ao tempo $\frac{\partial u}{\partial t}$, a fórmula também será obtida de acordo com as equações deduzidas anteriormente. Desta vez, utiliza-se a fórmula que discretiza elementos diferenciais de primeira ordem. Além disso, como temos a condição inicial imposta, e a partir dela encontraremos os resultados posteriores, utilizaremos a discretização por diferenças avançadas. A fórmula, aplicada a esse problema, está escrita logo abaixo:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta t} + \text{erro} \quad (4.11)$$

Depois de ter definido os termos discretizados, que substituirão os termos diferenciais, pode-se substituí-los na equação 3.13, que descreve o comportamento da velocidade, no escoamento de Poiseuille plano. A fórmula, já discretizada, assume a seguinte forma:

$$\frac{u_{i,k+1} - u_{i,k}}{\Delta t} = \frac{\mu}{\rho} \frac{u_{i+1,k} - 2u_{i,k} + u_{i-1,k}}{(\Delta y)^2} - \frac{\Delta P}{\rho} \quad (4.12)$$

O índice i , nesta equação, diz respeito ao posicionamento do nó no espaço, ou seja, em relação ao eixo y . Nos casos particulares dos nós das extremidades, temos a equação 4.13 para o nó inferior, e a equação 4.14 para o nó superior.

$$\frac{u_{1,k+1} - u_{1,k}}{\Delta t} = \frac{\mu}{\rho} \frac{u_{2,k} - 2u_{1,k}}{(\Delta y)^2} - \frac{\Delta P}{\rho} \quad (4.13)$$

$$\frac{u_{N,k+1} - u_{N,k}}{\Delta t} = \frac{\mu}{\rho} \frac{-2u_{N,k} + u_{N-1,k}}{(\Delta y)^2} - \frac{\Delta P}{\rho} \quad (4.14)$$

O método utilizado nesta discretização é o método implícito. Desta forma, a discretização espacial das derivadas acontece no nível temporal a ser resolvido. Ou seja, o cálculo em um determinado nó depende dos valores dos seus nós vizinhos, no mesmo nível de tempo. Isso é o que está mostrado na figura abaixo:

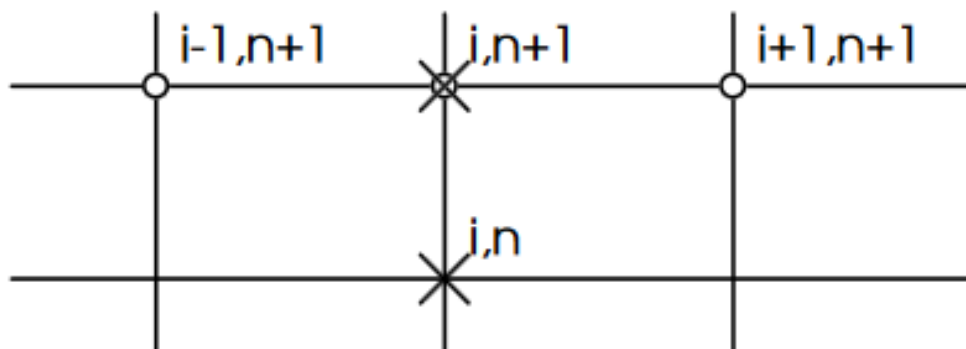


Figura 4.5 - Método implícito de discretização

Outra forma de discretização seria a discretização explícita. Nessa discretização, o cálculo em um determinado nó só depende de valores calculados para níveis de tempo anteriores. A figura abaixo ilustra este caso:

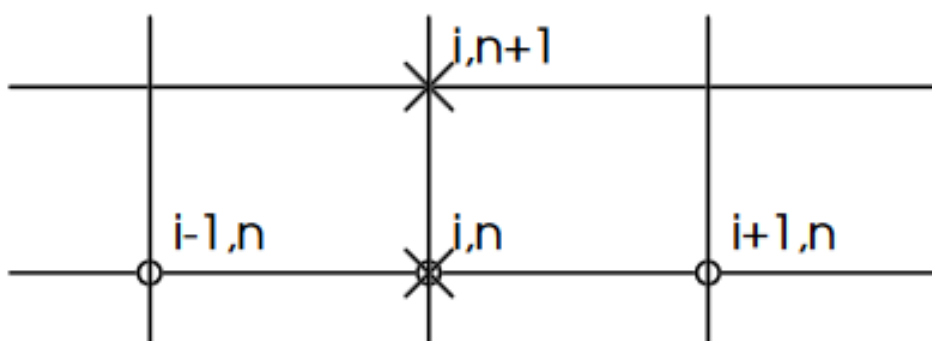


Figura 4.6 - Método explícito de discretização

Como o método utilizado foi o da discretização implícita, monta-se um sistema linear para resolvê-lo, já que neste método, a resolução das equações depende de variáveis dependentes entre si. No caso, as variáveis correspondentes ao nível de tempo que está sendo calculado.

A partir das equações montadas, e da condição inicial de velocidade nula, monta-se um sistema linear para cada instante de tempo seguinte ao já calculado, e encontra-se os campos de velocidade na medida em que o escoamento se desenvolve. A equação 4.15 mostra o sistema linear já montado, em sua forma matricial:

$$\begin{bmatrix}
-\left(2 + \frac{\rho(\Delta y)^2}{\mu \Delta t}\right) & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
1 & -\left(2 + \frac{\rho(\Delta y)^2}{\mu \Delta t}\right) & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & -\left(2 + \frac{\rho(\Delta y)^2}{\mu \Delta t}\right) & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & -\left(2 + \frac{\rho(\Delta y)^2}{\mu \Delta t}\right) & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -\left(2 + \frac{\rho(\Delta y)^2}{\mu \Delta t}\right) & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\left(2 + \frac{\rho(\Delta y)^2}{\mu \Delta t}\right)
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
u_1 \\
u_2 \\
u_3 \\
\vdots \\
u_{N-2} \\
u_{N-1} \\
u_N
\end{bmatrix} =
\begin{bmatrix}
\left(\frac{(\Delta y)^2}{\mu}\right) \left(-\frac{\rho u_{1,k-1}}{\Delta t} + \Delta P\right) \\
\left(\frac{(\Delta y)^2}{\mu}\right) \left(-\frac{\rho u_{2,k-1}}{\Delta t} + \Delta P\right) \\
\left(\frac{(\Delta y)^2}{\mu}\right) \left(-\frac{\rho u_{3,k-1}}{\Delta t} + \Delta P\right) \\
\vdots \\
\left(\frac{(\Delta y)^2}{\mu}\right) \left(-\frac{\rho u_{N-2,k-1}}{\Delta t} + \Delta P\right) \\
\left(\frac{(\Delta y)^2}{\mu}\right) \left(-\frac{\rho u_{N-1,k-1}}{\Delta t} + \Delta P\right) \\
\left(\frac{(\Delta y)^2}{\mu}\right) \left(-\frac{\rho u_{N,k-1}}{\Delta t} + \Delta P\right)
\end{bmatrix} \quad (4.15)$$

4.2 Discretização do Escoamento Bidimensional com Velocidades Pré-determinadas

A discretização do espaço bidimensional segue a mesma lógica da discretização do espaço unidimensional, feita no caso anterior. O espaço estudado será dividido em pequenos quadriláteros, e as equações discretizadas são aplicadas a cada um deles. A figura abaixo mostra a discretização do espaço no caso bidimensional:

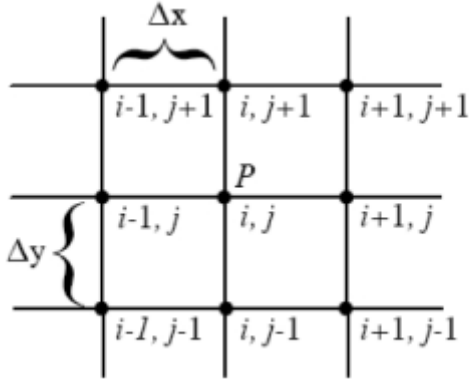


Figura 4.7 - Discretização bidimensional

A equação a ser resolvida é a equação da energia, desenvolvida na seção 2.3. Ela apresenta os termos diferenciais espaciais $\frac{\partial T}{\partial x}$, $\frac{\partial T}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ e $\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$. O método de discretização é similar ao método utilizado na discretização unidimensional, apenas tendo a diferença de

que são necessárias discretizações nas direções x e y , desta vez. A figura a seguir mostra as discretizações para os termos de primeira ordem:

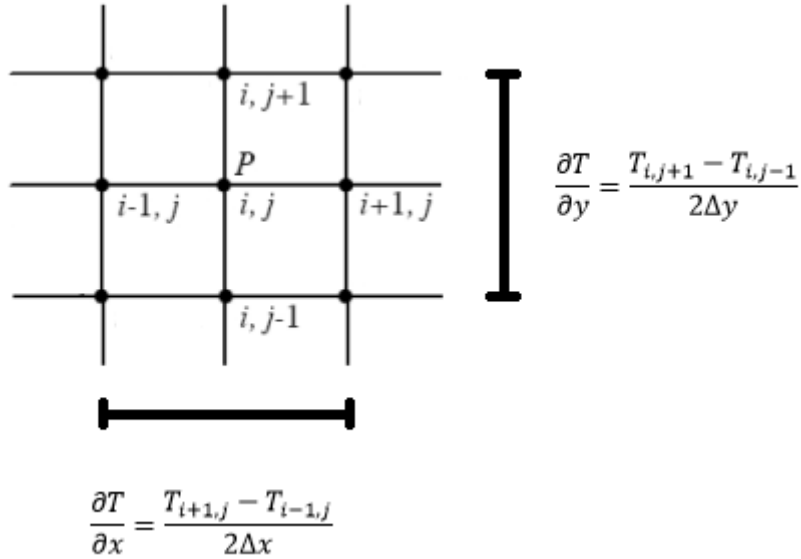


Figura 4.8 - Discretização bidimensional dos termos de primeira ordem

Seguindo a mesma lógica, temos a discretização dos termos de segunda ordem:

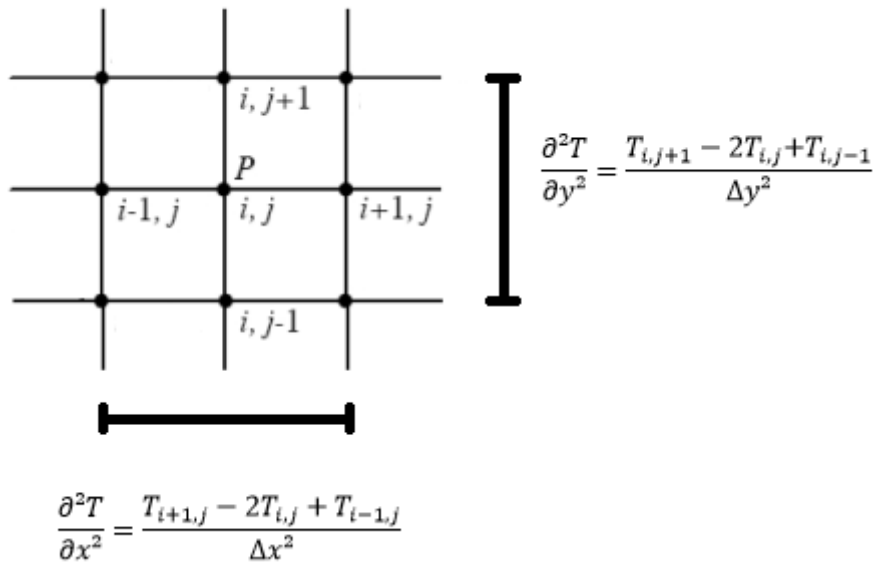


Figura 4.9 - Discretização bidimensional dos termos de segunda ordem

Desta forma, temos as equações para os termos discretizados espaciais:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{T_{i+1,j} - T_{i-1,j}}{2\Delta x} \quad (4.16)$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{T_{i,j+1} - T_{i,j-1}}{2\Delta y} \quad (4.17)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{\Delta x^2} \quad (4.18)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{\Delta y^2} \quad (4.19)$$

A discretização temporal, em princípio, será feita através do método de Euler implícito, assim como foi feita a discretização do problema anterior. A figura abaixo nos mostra como as variáveis estarão dispostas em relação ao eixo do tempo, para esta primeira abordagem:

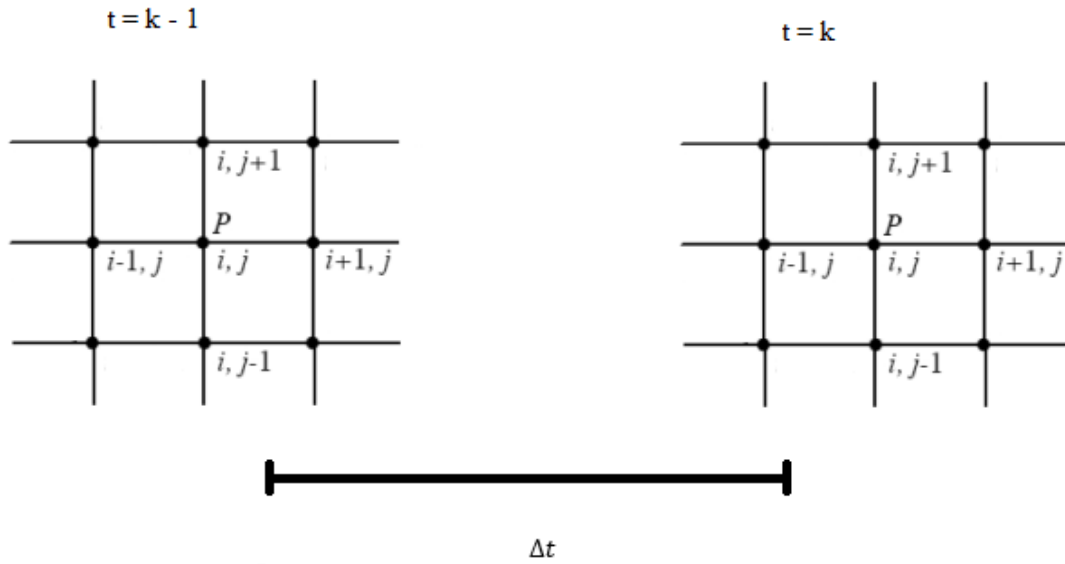


Figura 4.10 - Discretização temporal para o escoamento bidimensional

O termo da discretização temporal $\frac{\partial T}{\partial t}$ precisa do valor calculado no instante anterior e é dado pela equação discretizada abaixo:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T_{i,j}^k - T_{i,j}^{k-1}}{\Delta t} \quad (4.20)$$

As variáveis T presentes nos termos diferenciais espaciais estarão todas no instante de tempo k , que é o instante de tempo que está sendo calculado, enquanto que o instante de tempo $k - 1$ é o último instante de tempo que foi calculado. Esta é uma característica da discretização implícita, que será utilizada neste estágio do estudo.

Agora, pode-se escrever a equação da energia com os termos discretizados:

$$\frac{T_{i,j}^k - T_{i,j}^{k-1}}{\Delta t} + u \frac{T_{i+1,j}^k - T_{i-1,j}^k}{2\Delta x} + v \frac{T_{i,j+1}^k - T_{i,j-1}^k}{2\Delta y} = \alpha \left(\frac{T_{i+1,j}^k - 2T_{i,j}^k + T_{i-1,j}^k}{\Delta x^2} + \frac{T_{i,j+1}^k - 2T_{i,j}^k + T_{i,j-1}^k}{\Delta y^2} \right) + f(x, y, t) \quad (4.21)$$

Esta equação vale para cada ponto da malha. Como pode-se ver, a equação tem como incógnitas o valor da temperatura no próprio ponto, no instante de tempo calculado, $T_{i,j}^k$, nos pontos vizinhos, no instante de tempo calculado, $T_{i+1,j}^k$, $T_{i-1,j}^k$, $T_{i,j+1}^k$, $T_{i,j-1}^k$, e no próprio ponto, mas no instante de tempo anterior $T_{i,j}^{k-1}$. Desta forma, primeiro temos que garantir que todo instante de tempo anterior já tenha sido calculado. Isso é garantido instituindo uma condição inicial para o problema, que neste estudo será nula:

$$T_{i,j}^1 = 0 \quad (4.22)$$

A partir do tempo inicial $k = 1$, calcula-se o tempo posterior $k = 2$, e assim por diante, como foi feito no exemplo de escoamento anterior.

Também, para a resolução da equação, é necessário dos valores da variável nos pontos vizinhos, no instante de tempo calculado. Como cada nó da malha gera uma equação, é possível montar um sistema linear que resolva o problema calculando os valores da variável em todos os nós, ao mesmo tempo. Mas, ainda assim, os nós das fronteiras iriam precisar dos valores vizinhos que não fazem parte da malha. Estes valores serão impostos como condição de contorno. Como trata-se de um problema de natureza matemática, com resolução já pré-estabelecida, mostrada no capítulo anterior, utiliza-se a fórmula da solução para impor estes valores. Desta forma, monta-se o sistema linear que resolve este problema.

O método de Euler para discretização temporal é considerado um método de primeira ordem, o que será melhor descrito no capítulo 7. É um método que utiliza apenas o valor de um instante anterior ao que está sendo calculado. Utiliza-se também, um método de segunda ordem, chamado de método de Crank-Nicholson, que utiliza dois instantes anteriores ao instante que está sendo calculado. Sua fórmula está mostrada a seguir:

$$\frac{3T_{i,j}^k - 4T_{i,j}^{k-1} + T_{i,j}^{k-2}}{2\Delta t} + u \frac{T_{i+1,j}^k - T_{i-1,j}^k}{2\Delta x} + v \frac{T_{i,j+1}^k - T_{i,j-1}^k}{2\Delta y} = \alpha \left(\frac{T_{i+1,j}^k - 2T_{i,j}^k + T_{i-1,j}^k}{\Delta x^2} + \frac{T_{i,j+1}^k - 2T_{i,j}^k + T_{i,j-1}^k}{\Delta y^2} \right) + f(x, y, t) \quad (4.23)$$

4.3 Discretização do Escoamento Sobre o Degrau

No escoamento em expansão brusca utiliza-se as equações da continuidade e de Navier-Stokes, ambas em suas configurações bidimensionais, como já foi exposto. No primeiro exemplo, a equação de Navier-Stokes resolvida não levava em conta variações no gradiente de pressão. Nesta etapa do estudo, este aspecto também é levado em consideração.

Desta forma, o valor do campo de pressão, a cada instante, influencia no valor do campo de velocidades, e vice-versa. Precisa-se resolver campos de pressão e velocidade simultaneamente, neste caso.

Como os campos de pressão e velocidade influenciam um no outro, e são calculados simultaneamente, as equações discretizadas que serão utilizadas poderão apresentar termos diferenciais de pressão e de velocidade na mesma expressão. Ou quando não estão na mesma expressão, são utilizadas na mesma etapa do cálculo. Ou seja, para calcular pressão e velocidade em um determinado nó, calcula-se diferenciais de pressão e velocidade, para um mesmo espaço. Isto gera alguns problemas, já que os termos discretizados nem sempre estão dispostos geometricamente, principalmente se levamos em consideração que existem dois campos para serem discretizados (pressão e velocidade). A figura abaixo mostra um pouco das dificuldades que se pode ter.

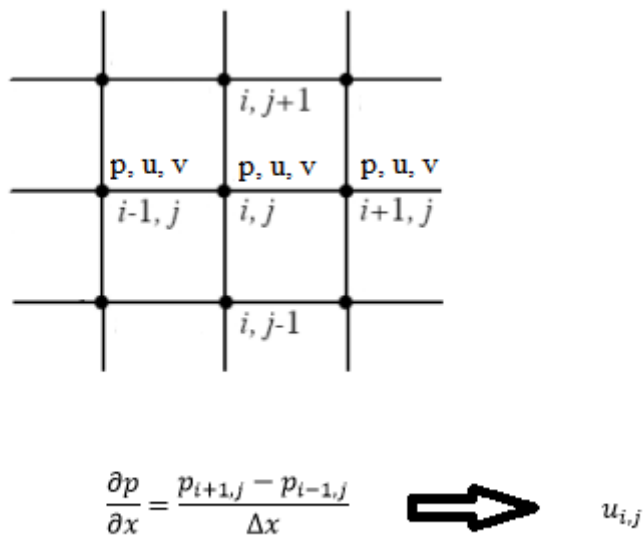


Figura 4.11 - Discretização com malhas coincidentes

Neste exemplo, o diferencial de pressão utiliza o valor dos dois pontos vizinhos, mas não utiliza o valor do ponto em que a variável está sendo resolvida. Mas o valor da variável neste ponto é de fundamental importância quando estiver sendo calculado o diferencial de segunda ordem das componentes da velocidade.

Este problema fica bem resolvido utilizando-se de malhas deslocadas. No sistema de malhas deslocadas, as variáveis p , u e v não são calculadas em pontos coincidentes. A figura 4.12 mostra a geometria das células no sistema de malha deslocadas. Esta configuração é a configuração mais adequada para os cálculos dos campos de pressão e velocidade para este problema.

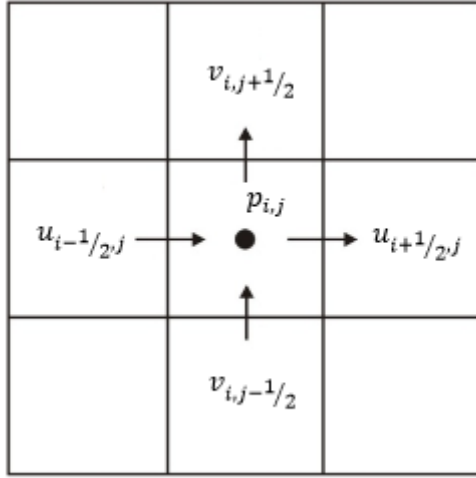


Figura 4.12 - Discretização com malha deslocada

Os termos diferenciais para serem discretizados nesta situação são $\frac{\partial u}{\partial x}$ e $\frac{\partial v}{\partial y}$, da equação da continuidade, $\frac{\partial u}{\partial t}$ e $\frac{\partial v}{\partial t}$, as diferenciais temporais das equações de Navier-Stokes, $\frac{\partial u^2}{\partial x}$, $\frac{\partial (uv)}{\partial y}$, $\frac{\partial p}{\partial x}$, $\frac{\partial p}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ e $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$, as diferenciais espaciais das equações de Navier-Stokes.

As equações 4.24 e 4.25 mostram a forma discretizada dos termos acima referidos, utilizando o sistema de malha deslocada descrito anteriormente.

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{i,j} = \frac{u_{i+1/2,j} - u_{i-1/2,j}}{\Delta x} \quad (4.24)$$

$$\left. \frac{\partial v}{\partial y} \right|_{i,j} = \frac{v_{i,j+1/2} - v_{i,j-1/2}}{\Delta y} \quad (4.25)$$

Estas equações são para as diferenciais espaciais da equação da continuidade. São para o ponto de coordenada i, j ; ponto este que não existe para as variáveis u e v . Mas isso não será problema porque a equação da continuidade será usada apenas como suporte para relacionar o cálculo dos campos de pressão e velocidade.

As próximas diferenciais são para o cálculo da variável u no ponto $i + 1/2, j$; que é um ponto que existe na malha deslocada:

$$\left. \frac{\partial u^2}{\partial x} \right|_{i+1/2,j} = \frac{u^2_{i+1,j} - u^2_{i,j}}{\Delta x} \quad (4.26)$$

$$\left. \frac{\partial (uv)}{\partial y} \right|_{i+1/2,j} = \frac{(uv)_{i+1/2,j+1/2} - (uv)_{i+1/2,j-1/2}}{\Delta y} \quad (4.27)$$

$$\left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{i+1/2,j} = \frac{p_{i+1,j} - p_{i,j}}{\Delta x} \quad (4.28)$$

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{i+1/2,j} = \frac{u_{i-1/2,j} - 2u_{i+1/2,j} + u_{i+3/2,j}}{\Delta x^2} \quad (4.29)$$

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|_{i+1/2,j} = \frac{u_{i+1/2,j+1} - 2u_{i+1/2,j} + u_{i+1/2,j-1}}{\Delta y^2} \quad (4.30)$$

Alguns desses pontos não estão definidos na malha, mas podem ser encontrados seus valores através de interpolações. De forma análoga, tem-se as diferenciais para o cálculo da variável v no ponto $i, j + 1/2$, que também é um ponto definido na malha deslocada.

$$\left. \frac{\partial v^2}{\partial y} \right|_{i,j+1/2} = \frac{v_{i,j+1}^2 - v_{i,j}^2}{\Delta y} \quad (4.31)$$

$$\left. \frac{\partial(uv)}{\partial x} \right|_{i,j+1/2} = \frac{(uv)_{i+1/2,j+1/2} - (uv)_{i-1/2,j+1/2}}{\Delta x} \quad (4.32)$$

$$\left. \frac{\partial p}{\partial y} \right|_{i,j+1/2} = \frac{p_{i,j+1} - p_{i,j}}{\Delta y} \quad (4.33)$$

$$\left. \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right|_{i,j+1/2} = \frac{v_{i,j-1/2} - 2v_{i,j+1/2} + v_{i,j+3/2}}{\Delta y^2} \quad (4.34)$$

$$\left. \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right|_{i,j+1/2} = \frac{v_{i+1,j+1/2} - 2v_{i,j+1/2} + v_{i-1,j+1/2}}{\Delta x^2} \quad (4.35)$$

A discretização em relação ao tempo será explícita, mas com algumas particularidades que serão descritas mais adiante. A discretização dos termos temporais são:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{i+1/2,j} = \frac{u_{i+1/2,j}^k - u_{i+1/2,j}^{k-1}}{\Delta t} \quad (4.36)$$

$$\left. \frac{\partial v}{\partial t} \right|_{i,j+1/2} = \frac{v_{i,j+1/2}^k - v_{i,j+1/2}^{k-1}}{\Delta t} \quad (4.37)$$

Os termos discretizados servem para formar as equações diferenciais discretizadas, assim como nos exemplos anteriores. No entanto, a equação da continuidade, da maneira que está, não pode relacionar velocidade e pressão, o que é necessário para a resolução do problema. Por causa disso, precisa-se relacioná-la com as equações de Navier-Stokes, para que possamos ir adiante. A seguir, apresenta-se uma discretização explícita das equações de Navier-Stokes, com os termos calculados acima, e a variável pressão discretizada no instante de tempo anterior:

$$\frac{u_{i,j+1/2,j}^{*k} - u_{i,j+1/2,j}^{k-1}}{\Delta t} + \frac{(u^2)_{i,j+1}^{k-1} - (u^2)_{i,j}^{k-1}}{\Delta x} + \frac{(uv)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k-1} - (uv)_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{k-1}}{\Delta y} = -\frac{p_{i,j+1}^{k-1} - p_{i,j}^{k-1}}{\Delta x} + \vartheta \left(\frac{u_{i-\frac{1}{2},j}^{k-1} - 2u_{i,j}^{k-1} + u_{i+\frac{3}{2},j}^{k-1}}{\Delta x^2} + \frac{u_{i+\frac{1}{2},j+1}^{k-1} - 2u_{i+\frac{1}{2},j}^{k-1} + u_{i+\frac{1}{2},j-1}^{k-1}}{\Delta y^2} \right) \quad (4.37)$$

$$\frac{v_{i,j+1/2}^{*k} - v_{i,j+1/2}^{k-1}}{\Delta t} + \frac{(v^2)_{i,j+1}^{k-1} - (v^2)_{i,j}^{k-1}}{\Delta y} + \frac{(uv)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k-1} - (uv)_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k-1}}{\Delta x} = -\frac{p_{i,j+1}^{k-1} - p_{i,j}^{k-1}}{\Delta y} + \vartheta \left(\frac{v_{i,j-\frac{1}{2}}^{k-1} - 2v_{i,j}^{k-1} + v_{i,j+\frac{3}{2}}^{k-1}}{\Delta y^2} + \frac{v_{i+1,j+\frac{1}{2}}^{k-1} - 2v_{i,j+\frac{1}{2}}^{k-1} + v_{i-1,j+\frac{1}{2}}^{k-1}}{\Delta x^2} \right) \quad (4.38)$$

Estas equações, da forma como estão, possuem dois problemas. O primeiro é que são insuficientes para calcular o próximo valor da pressão, já que são duas equações para três incógnitas, a serem resolvidas. E o segundo é que o valor de pressão está no instante de tempo anterior ao valor calculado da velocidade. Por isso, as variáveis calculadas $u_{i+1/2,j}^{*k}$ e $v_{i,j+1/2}^{*k}$ não serão consideradas definitivas, mas apenas um primeiro passo para o cálculo do instante de tempo k . Para fazer o cálculo da variação de pressão será necessário discretizar esta equação novamente, com os termos da pressão discretizados no nível de tempo calculado k , relacionar as duas discretizações através de um operador divergente, e utilizar a equação da continuidade para cancelar os termos referentes às velocidades definitivas u e v . Dessa forma estaremos utilizando três equações para resolver as três incógnitas, em cada ponto do escoamento. As equações a seguir, mostram as mesmas equações, mas com os valores da pressão no nível de tempo calculado:

$$\frac{u_{i,j+1/2,j}^k - u_{i,j+1/2,j}^{k-1}}{\Delta t} + \frac{(u^2)_{i,j+1}^{k-1} - (u^2)_{i,j}^{k-1}}{\Delta x} + \frac{(uv)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k-1} - (uv)_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{k-1}}{\Delta y} = -\frac{p_{i,j+1}^k - p_{i,j}^k}{\Delta x} + \vartheta \left(\frac{u_{i-\frac{1}{2},j}^{k-1} - 2u_{i,j}^{k-1} + u_{i+\frac{3}{2},j}^{k-1}}{\Delta x^2} + \frac{u_{i+\frac{1}{2},j+1}^{k-1} - 2u_{i+\frac{1}{2},j}^{k-1} + u_{i+\frac{1}{2},j-1}^{k-1}}{\Delta y^2} \right) \quad (4.39)$$

$$\frac{v_{i,j+1/2}^k - v_{i,j+1/2}^{k-1}}{\Delta t} + \frac{(v^2)_{i,j+1}^{k-1} - (v^2)_{i,j}^{k-1}}{\Delta y} + \frac{(uv)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k-1} - (uv)_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{k-1}}{\Delta x} = -\frac{p_{i,j+1}^k - p_{i,j}^k}{\Delta y} + \vartheta \left(\frac{v_{i,j-\frac{1}{2}}^{k-1} - 2v_{i,j}^{k-1} + v_{i,j+\frac{3}{2}}^{k-1}}{\Delta y^2} + \frac{v_{i+1,j+\frac{1}{2}}^{k-1} - 2v_{i,j+\frac{1}{2}}^{k-1} + v_{i-1,j+\frac{1}{2}}^{k-1}}{\Delta x^2} \right) \quad (4.40)$$

Estas últimas equações não podem ser resolvidas porque não temos, a princípio, os valores do campo de pressão no nível de tempo calculado k . Subtraindo as primeiras equações das segundas, temos:

$$\frac{u_{i+\frac{1}{2},j}^k - u_{i+\frac{1}{2},j}^{*k}}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\Delta p_{i,j}^k - \Delta p_{i,j}^{k-1}}{\Delta x} \quad (4.41)$$

$$\frac{v_{i,j+\frac{1}{2}}^k - v_{i,j+\frac{1}{2}}^{*k}}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\Delta p_{i,j}^k - \Delta p_{i,j}^{k-1}}{\Delta y} \quad (4.42)$$

Aplicando o operador divergente $\vec{\nabla}$ nas equações, e subtraindo uma da outra, chegamos a:

$$\frac{\frac{\partial u^k}{\partial x} + \frac{\partial v^k}{\partial y} - \frac{\partial u^{*k}}{\partial x} + \frac{\partial v^{*k}}{\partial y}}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p'}{\partial y^2} \right] \quad (4.43)$$

Esta equação contém o primeiro membro da equação da continuidade, que pode ser igualado a zero. Além disso, estamos chamando a diferença entre a pressão no nível de tempo atual p^k e a pressão no nível de tempo anterior p^{k-1} de p' , para facilitar.

$$p' = p^k - p^{k-1} \quad (4.44)$$

A equação 4.43, então, se torna:

$$\frac{\frac{\partial u^{*k}}{\partial x} + \frac{\partial v^{*k}}{\partial y}}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p'}{\partial y^2} \right] \quad (4.45)$$

Ou ainda, discretizando os termos diferenciais:

$$\left[\frac{u_{i+\frac{1}{2},j}^{*k} - u_{i-\frac{1}{2},j}^{*k}}{\Delta x} + \frac{v_{i,j+\frac{1}{2}}^{*k} - v_{i,j-\frac{1}{2}}^{*k}}{\Delta y} \right] \frac{\rho}{\Delta t} = \left[\frac{p'_{i+1,j} - 2p'_{i,j} + p'_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{p'_{i,j+1} - 2p'_{i,j} + p'_{i,j-1}}{\Delta y^2} \right] \quad (4.46)$$

Esta equação é válida para cada nó da malha e pode ser resolvida através de um sistema linear de equações, se as condições de contorno forem adequadas. Tendo os valores da correção de pressão p' resolvidos, e os valores da aproximação das componentes da velocidade u^{*k} e v^{*k} , calcula-se os valores das componentes da velocidade para o instante de tempo atual através da seguinte equação:

$$u_{i+\frac{1}{2},j}^k = u_{i+\frac{1}{2},j}^{*k} - \frac{\Delta t}{\rho} \frac{p'_{i+1,j} - p'_{i,j}}{\Delta x} \quad (4.47)$$

$$v_{i,j+\frac{1}{2}}^k = v_{i,j+\frac{1}{2}}^{*k} - \frac{\Delta t}{\rho} \frac{p'_{i,j+1} - p'_{i,j}}{\Delta y} \quad (4.48)$$

Desta forma, temos os valores dos campos de pressão e velocidade calculados para o instante de tempo k , e já é possível calcular os campos para o próximo instante de tempo.

CAPÍTULO V

DESENVOLVIMENTO DO ALGORITMO COMPUTACIONAL

O próximo passo para a resolução dos problemas propostos é a criação de um algoritmo computacional que resolva as equações propostas nos capítulos anteriores. É necessário que as equações sejam resolvidas por programas computacionais porque o volume de operações matemáticas torna-se cada vez maior na medida em que a solução numérica chega mais perto da solução real, através do refinamento das malhas. O programa computacional é gerado através de um algoritmo, que é a sequência de operações pré-definidas, que resolve determinado problema. A confecção do algoritmo de cada um dos problemas resolvidos será descrita nos tópicos abaixo e explicitada através de algoritmos em português estruturado. No final do relatório está anexado os códigos em Matlab.

5.1 Algoritmo para o Escoamento de Poiseuille

O objetivo desta primeira parte é determinar o desenvolvimento do campo de velocidades, ao longo do tempo, de um escoamento de Poiseuille, que parte do repouso. Identificaremos os parâmetros de entrada do problema, determinaremos as variáveis necessárias para a resolução, e descreveremos o procedimento de cálculo.

Os parâmetros de entrada deste problema são: distância entre as placas do escoamento, que será referenciada no algoritmo como L_y , variação de pressão por metro, dP , densidade, ρ , coeficiente de viscosidade dinâmica, μ , passo de tempo, dt , e número de nós do escoamento, nos . O início do algoritmo determina o valor de cada um destes parâmetros, de acordo com o problema a ser resolvido. Dados estes parâmetros, é calculada a distância entre os nós, dy , através dos parâmetros L_y e nos , e é criada um parâmetro $lambda$

que engloba as constantes do problema dP e mi . Também é criado um vetor y com N posições, onde N é o número de nós, para guardar as posições de cada nó do escoamento no eixo y . Os comandos do algoritmo, em português estruturado, que determinam as entradas do problema e os cálculos necessários para o procedimento estão mostrados logo abaixo:

```

Ly = h;

ro =  $\rho$ ;

dP =  $\Delta p$ ;

mi =  $\mu$ ;

dt =  $\Delta t$ ;

nos = N;

dy = Ly / (nos + 1);

lambda = dP / mi;

para i de 1 até nos passo 1 faça
    y(i) = i * p;

fim

```

A variável a ser calculada é a variável u , que será um vetor que carregará o campo de velocidades ao longo do tempo. Esta variável é um vetor com dois índices. O primeiro varia de acordo com a posição do ponto no escoamento e o segundo varia de acordo como tempo. A figura abaixo ilustra o vetor velocidade u .

Último nó, $y = n \cdot dx$

$u_{nos,1}$	$u_{nos,2}$	$u_{nos,3}$
-------------	-------------	-------------

Nó 3, $y = 3 \cdot dx$

Nó 2, $y = 2 \cdot dx$

Nó 1, $y = dx$

$u_{3,1}$	$u_{3,2}$	$u_{3,3}$
$u_{2,1}$	$u_{2,2}$	$u_{2,3}$
$u_{1,1}$	$u_{1,2}$	$u_{1,3}$

$t = 0$ $t = dt$ $t = 2dt$

Figura 5.1 - Representação da variável que guarda os valores do vetor u

O escoamento parte do repouso, por isso impõe-se o valor zero no vetor velocidade, no primeiro instante de tempo, e se passa ao procedimento. O algoritmo para esta imposição está mostrado logo a seguir:

```
para i de 1 até nos passo 1 faça
```

```
     $u(i,1) = 0;$ 
```

```
fim
```

O procedimento trata de resolver a equação 4.15, desenvolvida no modelo numérico, para cada instante de tempo. Dessa forma, utiliza-se um laço de repetição que faz este cálculo. Para cada instante de tempo monta-se uma matriz A e uma matriz C , e calculamos a inversa desta matriz, que resulta no campo de velocidades para aquele determinado instante de tempo.

Como se vê, cada linha da matriz representa a equação referente a um nó da malha. Elas variam do nó inferior até o nó superior. Como os nós das extremidades estão submetidos às condições de contorno, e a condição de contorno, para este caso, é nula, eles apresentam apenas dois coeficientes não nulos, em suas respectivas equações. As equações para os outros nós possuem três coeficientes não-nulos. Por causa disso, precisa-se utilizar comandos específicos para os coeficientes do primeiro e do último nó, e se usa um novo laço de repetição para os nós interiores do escoamento. Os comandos do algoritmo estão mostrados logo abaixo:

```

A(1,1) = -(2+(ro*dy^2)/(mi*dt));
A(1,2) = 1;
A(nos,nos-1) = 1;
A(nos,nos) = -(2+(ro*dy^2)/(mi*dt));
Para i de 2 até nos-1 passo 1 faça
    A(i,i-1) = 1;
    A(i,i) = -(2+(ro*p^2)/(mi*dt));
    A(i,i+1) = 1;
fim
Para i de 1 até nos passo 1 faça
    C(i,1) = (dt^2/mi)*(-(ro*u(i,1))/dt+dP);
Fim
u = inversa(A)*C;

```

Dessa forma, o vetor velocidade é preenchido com os valores calculados pelo laço de repetição. O objetivo do problema é resolver o campo até que o escoamento entre em regime permanente. Por causa disso, a condição de parada do laço é que repita até que o campo de velocidades permaneça constante. Como existem erros no próprio processo de cálculo computacional, a condição de parada é que a diferença entre o campo de velocidade num dado instante e no instante anterior, seja menor que um número estipulado que possa compreender apenas erros computacionais. Ou seja, a diferença entre os campos de velocidade de dois instantes de tempo seguidos, não seja devido a uma variação devido ao próprio escoamento estudado. A estrutura do laço de repetição está mostrada logo a seguir:

```

k = 1;
parada = 0;
enquanto (parada > 10^-7)
    ...
    maximo(modulo(u(:, :, k)-u(:, :, k-1))) = parada;
fim

```

5.2 Algoritmo para o Escoamento Bidimensional com Velocidades Pré-determinadas

Assim como no problema anterior, o primeiro passo é determinar os valores das condições de entrada do problema. Para este caso tem-se: comprimento do escoamento no eixo x , Lx , largura do escoamento, em relação ao eixo y , Ly , número de nós na direção x , $nosx$, número de nós na direção y , $nosy$, passo de tempo, dt , densidade do fluido ro , coeficiente de viscosidade dinâmica, mi , calor específico, cp e coeficiente de condutividade térmica, kk . Além disso, é calculado o $alfa$, através de ro , kk e cp , e os passos de espaço em relação aos eixos x e y , que definiremos como dx e dy .

Os vetores de posição x e y , denominados no código como $posx$ e $posy$ são gerados. O problema tem velocidades pré-determinadas pelas equações mostradas no capítulo 3. Uma matriz com as velocidades em cada nó do escoamento também é gerada. Tudo isto segue uma rotina similar à que já foi mostrada no item anterior.

Assim como no problema anterior, agora será gerada as matrizes A e C que resolvem o sistema linear de $N_x \cdot N_y$ equações e incógnitas, onde N_x é o número de nós na direção x e N_y o número de nós na direção y . Cada nó leva a uma equação x do sistema linear, dessa forma, para encontrar sua equação no sistema linear, é preciso encontrar a linha x da matriz A referente a este nó. E nas equações dos outros nós, para multiplicar um coeficiente referente a este determinado nó, é necessário colocar o coeficiente na coluna x do determinado nó. A figura abaixo ilustra o que foi dito.

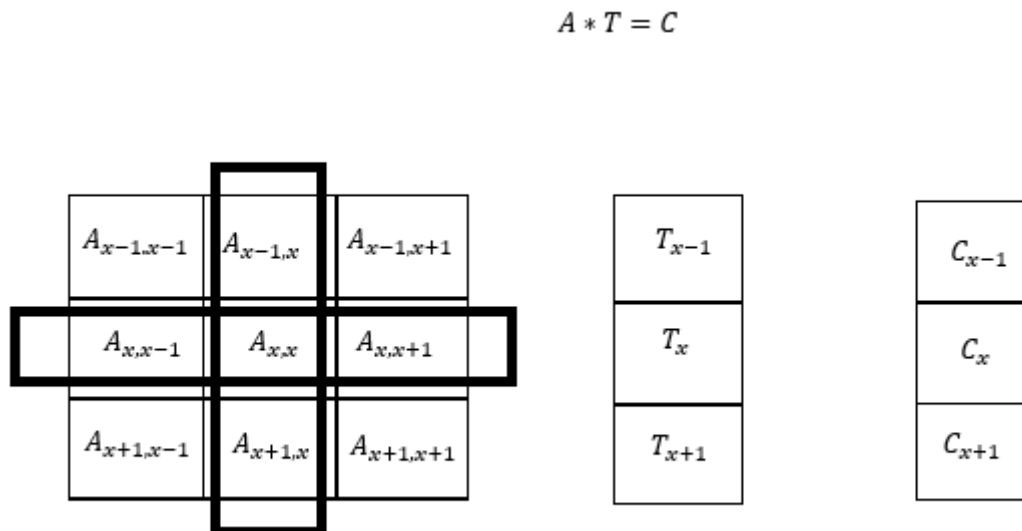


Figura 5.2 - Relação entre os nós da malha e as matrizes montadas

Além disso, existem nós fora da malha, que serão necessários para os cálculos. É o caso das condições de contorno. Utiliza-se, então, uma matriz de mapeamento *MAP* que servirá para mapear a linha da equação de cada nó, e a coluna na qual estarão os coeficientes referentes a cada nó. Nesta matriz, cada nó interior do escoamento receberá um índice *I*, que varia de 1 até o número total de nós, e os nós exteriores, que são referentes às condições de contorno, receberão o índice 0. A figura abaixo ilustra esta matriz:

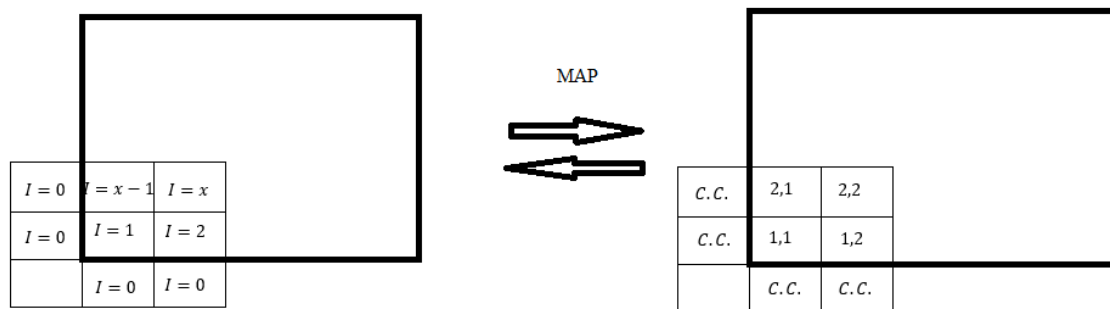


Figura 5.3 - Relação entre os nós da malha e a matriz de mapeamento

Como se vê, o índice $i + 1$ da matriz *MAP* é referente ao índice i da malha do escoamento, pelo fato de que o primeiro índice se refere a pontos ao longo do eixo x que estão fora do escoamento propriamente dito. Da mesma forma, o índice $j + 1$ da matriz *MAP* se refere ao índice j da malha do escoamento. E é por causa disso que a matriz *MAP* tem $N_x + 2$ índices em relação ao eixo x , e $N_y + 2$ índices em relação ao eixo y . O algoritmo usado para gerar esta matriz está mostrado logo a seguir:

Para i de 1 até $nosx+2$ passo 1 faça

$MAP(i, 1) = 0;$

$MAP(i, nosy+2) = 0;$

fim

Para j de 1 até $nosy+2$ passo 1 faça

$MAP(1, j) = 0;$

$MAP(nosx+2, j) = 0;$

fim

contador = 0;

para i de 2 até $nosx+1$ passo 1 faça

```

para j de 2 até nosy+1 passo 1 faça
    contador = contador +1;
    MAP(i,j) = contador;
fim
fim

```

A variável a ser determinada neste estudo é a temperatura T . Desta vez, ela varia em relação aos eixos x e y , e em relação ao tempo. Desta forma, esta matriz terá três índices, o índice i que varia com a posição em x , o índice j , que varia em relação ao eixo y , e a posição k , que varia com o tempo. Além disso, de acordo com a condição inicial, temos que a temperatura é nula para $t = 0$.

Depois, entra o laço de repetição que cria as matrizes A e C e resolvem a temperatura para cada instante de tempo. Dentro deste laço de repetição, existe outro laço de repetição, que gera cada uma das linhas da matriz, referentes a cada equação do sistema linear. A equação para cada nó é a equação 4.21, que foi apresentada no capítulo 4.

O laço de repetição que monta cada linha da matriz varre todos os índices I referentes aos nós da malha do escoamento. Ele começa conferindo com a matriz de mapeamento o índice do nó considerado. Em seguida, confere se cada nó vizinho está dentro da malha, utilizando a matriz de mapeamento MAP . Se estiver dentro da malha, monta o coeficiente e o coloca na coluna adequada através do índice lido na matriz de mapeamento. Caso não esteja, o valor do coeficiente é somado no termo independente, que está na matriz C . Este caso precisa também das condições de contorno geradas pelos vetores *tempesq*, *tempdir*, *tempalto* e *tempbaixo*. O termo independente também é gerado, através da matriz C . O algoritmo está mostrado logo abaixo:

```

tempesq(1 até nosy) = "recebe as condições de contorno"
tempdir(1 até nosy) = "recebe as condições de contorno"
tempalto(1 até nosx) = "recebe as condições de contorno"
tempbaixo(1 até nosx) = "recebe as condições de contorno"
para i de 2 até nosx+1 passo 1 faça
    para j de 2 até nosy+1 passo 1 faça
        "vizinho da esquerda"
        indice = MAP(i,j);

```

```

        ind2 = MAP(i-1,j);
        se (ind2 > 0) faça
            A(indice,indice-1) = "coeficiente para vizinho a
esquerda"
        Senão faça
            C(indice) = C(indice) + "coeficiente para vizinho
a esquerda"
        "executa procedimento similar para o vizinho da direita"
        "executa procedimento similar para o vizinho de baixo"
        "executa procedimento similar para o vizinho de cima"
        C(indice) = C(indice) + "termo independente na matriz"
fim

```

Em seguida, o sistema linear é resolvido através de uma operação matricial e obtemos o valor do campo de temperatura para o instante calculado. Esta rotina calcula o campo de temperaturas para cada instante de tempo e deve parar assim que o escoamento entrar em regime permanente. Assim como no primeiro exemplo, a entrada no estado permanente é conferida ao final de cada vez que o laço de repetição do tempo é executado. Busca-se a maior variação da variável T e, se for menor que o parâmetro estipulado, interrompe-se o laço de repetição.

No exemplo apresentado, a equação utilizada para montar o sistema linear se refere ao método de Euler implícito. No entanto, para apresentar resultados melhores, também se utiliza da discretização temporal pelo método de Crack-Nicholson. Neste método, utiliza-se dois valores da temperatura anteriores ao tempo que está sendo calculado. Por causa disso, para utilizar este método, a partir apenas da condição inicial, é necessário calcular pelo menos uma vez, a temperatura através do método de Euler. Tendo dois valores da temperatura seguidos, já é possível utilizar o método de Crack-Nicholson. A equação montada pra cada nó, do método de Crack-Nicholson, é a equação 4.23.

5.3 Algoritmo para o Escoamento Sobre o Degrau

Os parâmetros de entrada para este escoamento serão número de nós ao longo do eixo x , $nosx$, número de nós no eixo y , $nosy$, comprimento no eixo x , Lx , largura do escoamento no eixo y , Ly , velocidade de entrada, $uzero$, densidade, ro , coeficiente de viscosidade dinâmica, mi , passo de tempo, dt , nó a partir do qual tem-se o degrau, em relação ao eixo x , $degi$, nó a partir do qual tem-se o degrau, a partir do eixo y , $degj$; e a partir destes dados calcula-se o passo no eixo x , dx , e o passo no eixo y , dy . Também existem os vetores de posição em relação aos eixos x e y , $posx$ e $posy$.

Para este problema deve-se resolver os campos de pressão e velocidade, e seus respectivos desenvolvimentos em relação ao tempo. E além disso, o campo velocidade, desta vez, tem duas componentes, uma em relação ao eixo x e outra em relação ao eixo y . Por causa disso, existem três vetores de resposta. Um para a pressão e um para cada componente da velocidade. Além disso, sabe-se que o sistema adota malha deslocada e, no que diz respeito ao campo de velocidades, precisa da determinação de alguns pontos fora da malha.

O campo de pressão está localizado no meio de cada célula, e não necessita de nenhuma pressão determinada fora da malha. Por isso, o vetor pressão p , terá os índices i e j referentes aos índices i e j das células na malha. Além disso, essa variável terá um terceiro índice, k , que irá variar na medida em que o tempo varia.

O campo de velocidades, tanto na componente u , quanto na componente v , está representado nos lados da célula. E são necessários pontos fora da malha para os cálculos nas componentes u e v . Por causa disso, a componente $u_{i+\frac{1}{2},j}$ na malha, será representada por $u(i+1,j+1)$ no algoritmo, e a componente $v_{i,j+\frac{1}{2}}$ na malha, será representada por $v(i+1,j+1)$ no algoritmo. A figura abaixo mostra esta relação:

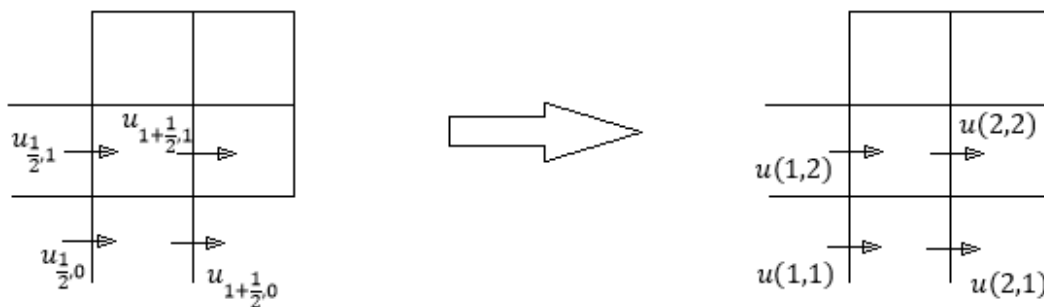


Figura 5.4 - Relação entre os índices do vetor u e os índices da matriz montada pelo algoritmo

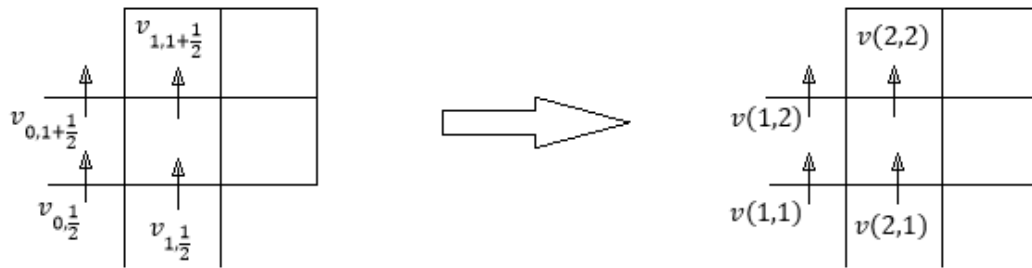


Figura 5.5 - Relação entre os índices do vetor v e os índices da matriz montada pelo algoritmo

As variáveis, para o primeiro instante de tempo, são igualadas a zero. E então começa o laço de repetição que calcula a solução dos campos para cada instante de tempo.

O primeiro passo, no laço de repetição, é estimar o campo de velocidades através das equações 4.37 e 4.38, desenvolvidas no capítulo anterior. Um laço de repetição é utilizado para repetir o procedimento para cada nó da malha. Utilizaremos a variável $u2$ para guardar os valores estimados de u , e a variável $v2$ para guardar os valores estimados de v . Os comandos estão mostrados logo a seguir:

Para (condições que varrem toda a malha do escoamento) faça:

$u2$ = "expressão calculada pela fórmula referida"

fim

Para (condições que varrem toda a malha do escoamento) faça:

$u2$ = "expressão calculada pela fórmula referida"

fim

Em seguida, é preciso determinar os valores das condições de contorno nas variáveis $u2$ e $v2$. Mais uma vez, são utilizados laços de repetição para cada extremidade do escoamento. Os comandos estão mostrados logo abaixo:

Para (pontos superiores e inferiores, folha da malha) faça:

$u2 = 0;$

```

fim

Para (pontos na lateral de entrada) faça

    u2 = uzero;

fim

Para (pontos na lateral de saída) faça

    u2(nosx+1,j) = u2(nosx,j);

fim

Para (pontos na lateral do degrau) faça

    u2 = 0;

fim

Para (pontos superiores e inferiores, fora da malha) faça:

    v2 = 0;

fim

Para (todos os pontos do lado de entrada e do lado do degrau, fora
da malha) faça:

    v2(i=1 ou i=degrau-1,j) = -v2(i=2 ou i=degrau,j);

fim

Para (todos os pontos do lado de saída, fora da malha) faça:

    v2(nosx+1,j) = v2;

fim

```

Com os campos de velocidade estimados, chega o momento de calcular o campo de pressão no próximo passo de tempo. O cálculo da pressão é feito resolvendo um sistema linear que é montado a partir da equação 4.46, para cada nó da malha. Monta-se, então, uma matriz A e uma matriz C para a resolução da variável *plinha*. Assim como foi feito na resolução do sistema linear do problema anterior, será montada uma matriz de mapeamento *MAP* que é utilizada para referenciar cada nó do escoamento com um número, que será a sua posição na linha e na coluna da matriz A . A matriz de mapeamento é gerada através de comandos similares à matriz de mapeamento do exercício anterior.

Em seguida, as matrizes A e C são geradas e resolvidas. Também aqui, os comandos do algoritmo têm a mesma estrutura da montagem das matrizes do segundo caso.

O resultado do sistema linear nos dá a variável p_{linha} , para cada nó do escoamento, o que torna possível o cálculo de p , para o próximo instante de tempo. Este cálculo é feito através da equação 4.44 em um novo laço de repetição. Com o campo de pressão resolvido, torna-se possível utilizar as equações 4.47 e 4.48 para o cálculo das componentes da velocidade no próximo instante de tempo. O algoritmo do que foi dito é mostrado logo a seguir:

```
Para (todos os nos da malha) faça:  
  
    p = pAnterior + pLinha  
  
    u = "equação em função de u2 e p;  
  
    v = "equação em função de v2 e p;  
  
fim
```

Desta forma, todos os pontos do interior da malha são resolvidos, para o próximo instante de tempo. Mas ainda precisa-se determinar as condições de contorno, já que esses valores serão utilizados na próxima execução do laço de repetição que está sendo executado. O algoritmo é similar ao algoritmo que impõe as condições de controle na variável u_2 , mas neste momento ele usa o vetor u .

O laço de repetição roda até que o escoamento chegue a um regime permanente. Da mesma forma como foi feito nos outros problemas, o algoritmo a seguir especifica a condição de parada para o laço de repetição.

Terminado o procedimento, temos os campos de velocidade e pressão, ao longo do tempo, guardados nas variáveis u , v e p .

CAPÍTULO VI

ANÁLISE DOS RESULTADOS DE ACORDO COM MODELOS MATEMÁTICOS

Depois de fazer as análises física e matemática, montar o modelo numérico e resolvê-lo pelo método computacional, obtêm-se os resultados das simulações para cada um dos problemas analisados. Diante disso, torna-se necessária a verificação desses resultados com base em literatura ou em experimentos.

Nos dois primeiros casos, são eles o escoamento de Poiseuille plano e o escoamento bidimensional com velocidades pré-determinadas, existem soluções matemáticas, as quais foram apresentadas no capítulo destinado ao modelo matemático. Para o escoamento sobre o degrau não se tem solução matemática fechada. Por isso, temos que conferir a coerência dos resultados através de testes que já foram feitos. Esta parte ficará para o próximo capítulo.

6.1 Considerações Sobre a Análise de Erros

Para que a solução numérica seja validada, não é necessário que ela seja idêntica à solução analítica, mas que as divergências sejam suficientemente pequenas. Já foi mostrado no capítulo 4 que o modelo numérico possui um erro intrínseco, em sua solução. Dessa forma, precisamos arrumar formas de quantificá-lo. Para isso usaremos duas normas:

A norma, L_2 utiliza a seguinte fórmula de cálculo:

$$L_2 = \frac{\sqrt{\sum_{k=1}^n (x_{num} - x_{analitico})^2}}{\sqrt{n}} \quad (6.1)$$

Onde x_{num} é o valor da variável calculada numericamente e $x_{analitico}$ é o valor calculado através da equação analítica.

A outra norma que utilizaremos é a norma L_∞ , que simplesmente pega o ponto onde o valor discrepante é máximo, como está mostrado na fórmula a seguir:

$$L_\infty = \max(|x_{num} - x_{analitico}|) \quad (6.2)$$

A partir destas normas, é possível relacionar o erro com os passos da discretização. Esta relação vem da expansão das funções em séries de Taylor que foram apresentadas no modelo numérico, através dos estudos de Fortuna (2000). Das equações montadas para as discretizações de primeiro e segundo grau, relacionaremos a magnitude do erro com o tamanho do passo da variável discretizada.

A expansão em séries de Taylor, do caso para discretizações de primeira ordem nos leva a:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i = \frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i)}{\Delta x} + \left[-\frac{\Delta x}{2!} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_i - \frac{(\Delta x)^2}{3!} \left. \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \right|_i - \dots \right] \quad (6.3)$$

O último termo do membro da direita representa o erro local de truncamento (ELT), que aparece devido à utilização de um número finito de termos na série de Taylor. Utilizando propriedades da série de Taylor e de suas derivadas, e fazendo alguns desenvolvimentos algébricos, chega-se à seguinte relação, sobre o erro local de truncamento:

$$[ELT] \leq K \Delta x \quad (6.4)$$

Esta equação nos mostra que o erro de truncamento diminui na mesma proporção em que cai o passo numérico. A ordem do passo numérico é a ordem do ELT . Denotaremos isso por $O(\Delta x)$, que significa que o erro de truncamento é de primeira ordem. Desta forma, denotamos a equação acima como:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i = \frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i)}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (6.5)$$

Utilizando o mesmo raciocínio, podemos ver que para as discretizações de segunda ordem temos erros de segunda ordem $O(\Delta x)^2$.

Estas relações serão úteis na validação dos modelos numéricos empregados nestes estudos.

6.2 Análise de Erros para o Escoamento de Poiseuille Plano

Para simular o escoamento de Poiseuille, precisamos, primeiro, determinar os parâmetros do caso que vamos simular. Simula-se um escoamento plano de água, entre duas placas planas infinitas, paralelas, distanciadas de 1 m, na temperatura ambiente, sob o efeito de queda de pressão de 0,001 Pa/m, na direção x .

O escoamento parte do repouso e se desenvolve de modo que a velocidade vai aumentando até que se estabiliza. O ponto de maior velocidade é o ponto central do escoamento. A forma como o escoamento se desenvolve está de acordo com o esperado e a configuração final que ele assume, quando entra em regime transiente, também está de acordo com o que foi previsto. As figuras abaixo ilustram o desenvolvimento deste escoamento:

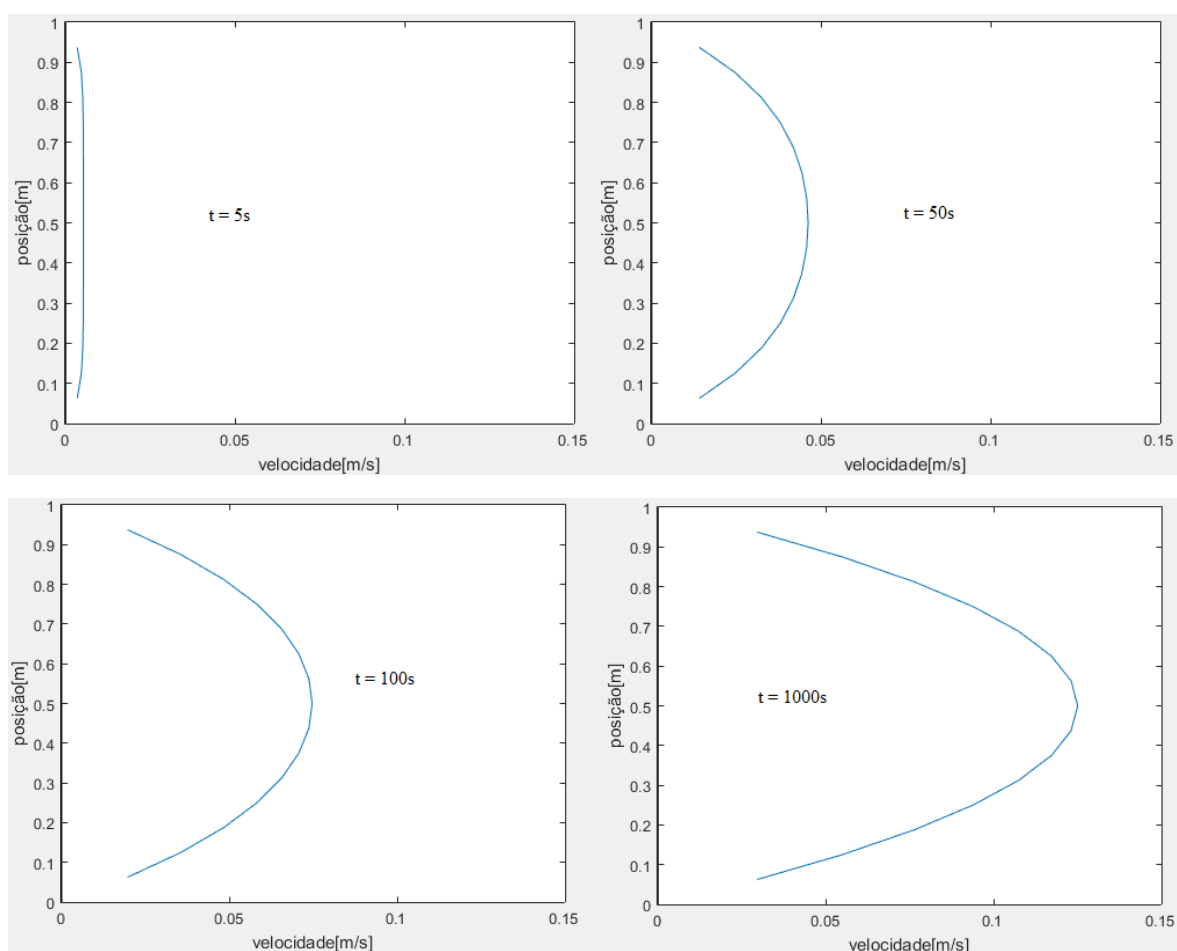


Figura 6.1 - Desenvolvimento da velocidade para o escoamento de Poiseuille

Utilizando a resolução analítica deste problema, para o regime permanente, podemos comparar com o resultado numérico a fim de validar este tipo de resolução. Abaixo estão os gráficos obtidos em ambas as análises, quando o problema já está em regime permanente.

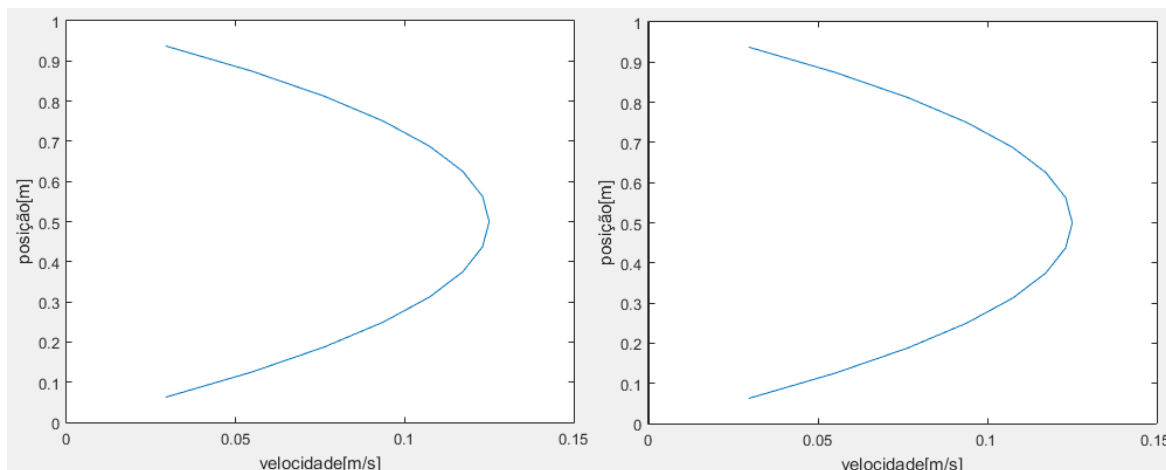


Figura 6.2 - Resultado analítico, à esquerda, e numérico, à direita

Estes gráficos mostram que a resolução numérica está de acordo com a resolução analítica do ponto de vista qualitativo. Parte-se então, para a análise quantitativa dos resultados.

Para o problema descrito, os valores das normas L_2 e L_∞ foram $L_2 = 2,9765 \times 10^{-17}$ e $L_\infty = 5,5511 \times 10^{-17}$. Neste caso, a malha do problema foi configurada com 15 nós e o passo de tempo foi de 100 s. O escoamento entrou em regime permanente em $t = 10000$ s, onde t é a variável tempo na simulação.

Mudando um pouco os parâmetros, podemos ver que o erro aumenta com o aumento do número de nós, o que não é, a princípio, esperado. O esperado é que malhas refinadas tragam resultados melhores. Mas isto ocorre devido aos erros de máquina na execução do programa computacional. Este problema, em particular, gera erro nulo devido à discretização. Desta forma, os únicos erros que existem são devido às operações matemáticas do computador. E estas operações induzem a mais erros quanto maiores são as matrizes montadas e resolvidas.

6.3 Análise de Erros para o Escoamento Bidimensional com Velocidades Pré-determinadas

Este escoamento é bidimensional e ocorre em um retângulo de 3 m de comprimento por 1 m de altura. As velocidades são pré-determinadas pela equação desenvolvida no

capítulo 2. O fluido no escoamento é a água. Através dessas informações, roda-se o algoritmo explicitado no capítulo anterior e encontrar a solução numérica do problema.

O resultado que se vê, na simulação, é um escoamento que parte de uma situação isotérmica e torna-se um escoamento onde a temperatura sobe nas direções positivas de x e y . A figura abaixo mostra a configuração da temperatura quando o escoamento entra em regime permanente.

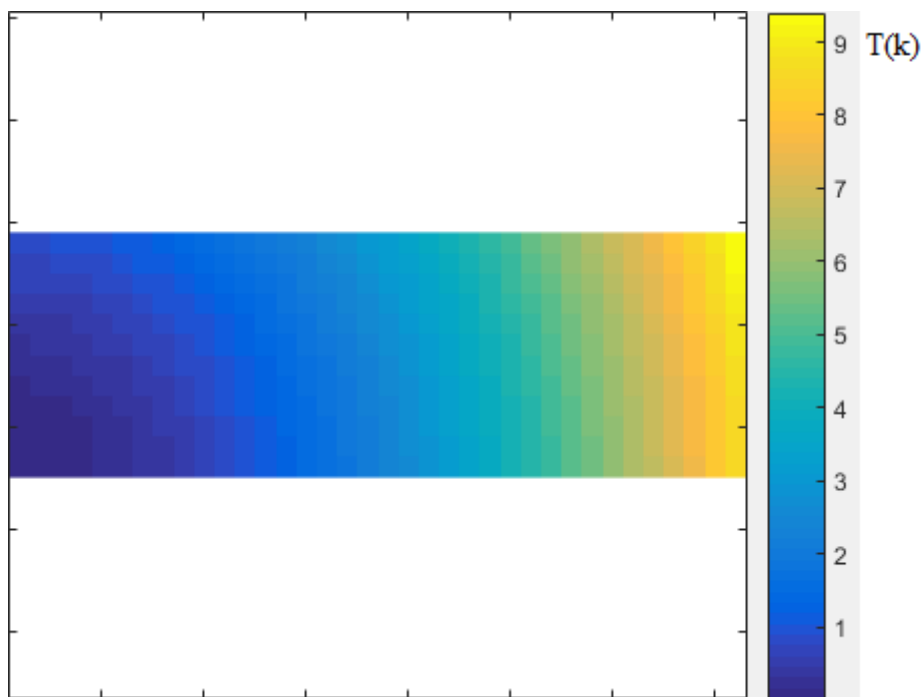


Figura 6.3 - Resultado do escoamento por via computacional

Quando comparamos este resultado com o resultado analítico, podemos ver que o resultado numérico se comporta da maneira esperada, com a temperatura aumentando nas direções x e y , que é justamente o que sugere a fórmula matemática do escoamento. Além disso, a temperatura vai aumentando com o passar do tempo, até chegar a um valor máximo, para cada ponto, no momento em que o escoamento entra em regime permanente. Desta forma, concluímos que a simulação numérica se comporta adequadamente do ponto de vista qualitativo. Partimos então, para a solução quantitativa.

Este problema é de uma natureza em que a temperatura começa variando em altas taxas, e essas taxas vão diminuindo até que se chega ao regime transiente. Quando o escoamento chega em regime transiente, o erro numérico do problema fica maquiado pela característica do exercício, onde a pouca variação da temperatura faz com que o erro numérico tenha uma tendência de ser menor. Por causa disso, utiliza-se uma faixa de tempo inicial, quando a taxa de variação da temperatura é mais alta, para avaliar a influência do número de nós e do tamanho do passo de tempo, no valor dos erros nas normas L_2 e L_∞ . A tabela abaixo mostra estes resultados:

Nós em x	Nós em y	Passo de tempo	Erro norma L_2	Erro norma L_∞
6	6	0,1	$8,8934 \times 10^{-7}$	$7,6499 \times 10^{-6}$
12	12	0,05	$2,3688 \times 10^{-7}$	$2,0658 \times 10^{-6}$
24	24	0,025	$6,082 \times 10^{-8}$	$7,6192 \times 10^{-7}$

Como se vê, com a diminuição pela metade, dos passos de tempo e distância, obtêm-se uma diminuição de perto de um quarto dos erros calculados pelas normas estudadas. Isto está de acordo com o erro local de truncamento para segunda ordem. 2.788646443545700e-06

CAPÍTULO VII

ANÁLISE DE RESULTADOS DE ACORDO COM MODELOS EMPÍRICOS

O estudo do escoamento sobre o degrau não tem solução analítica. Por causa disso, usaremos dados de experimentos feitos por Armaly e Pereira (1983). O experimento foi montado de acordo com o esquema da figura abaixo:

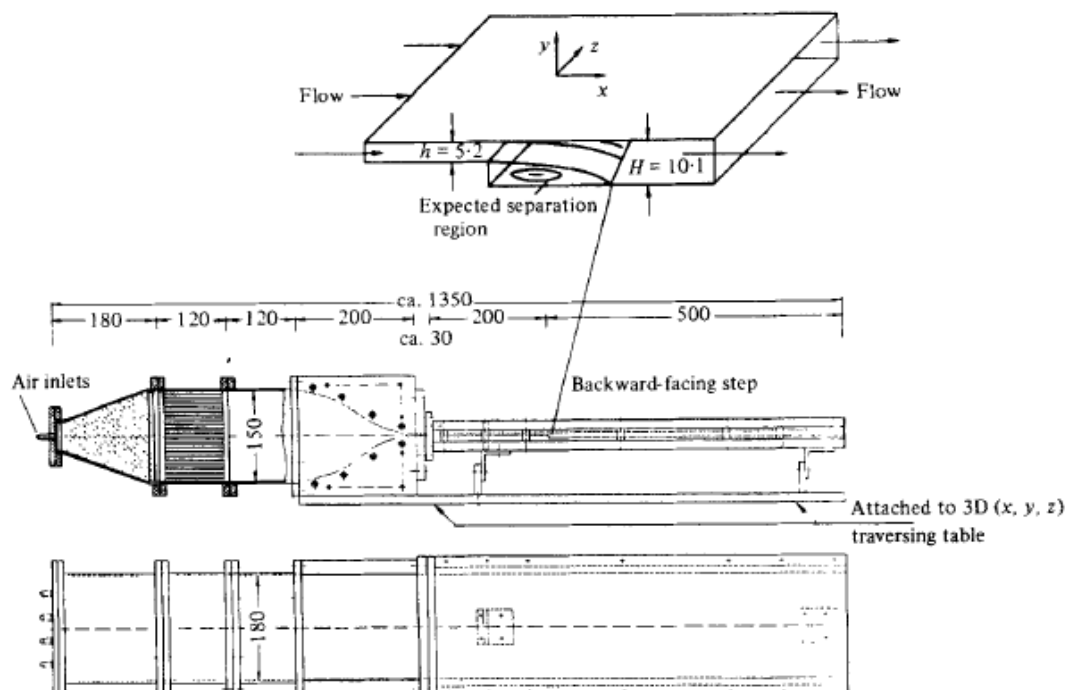


Figura 7.1 - Esquema do experimento montado por Armaly e Pereira

Como se vê, o escoamento montado tem três dimensões, assim como qualquer escoamento no mundo real. No entanto, os resultados deste experimento mostraram que, para número de Reynolds $Re < 400$ ou $Re > 6000$, o perfil do escoamento não muda na direção z , a menos que esteja perto da parede. Desta forma, foi possível pegar o plano que corta o eixo z no meio do experimento montado, e considerá-lo como a versão bidimensional deste escoamento.

Rodando o algoritmo montado para o modelo numérico apresentado, com parâmetros que levam ao número de Reynolds $Re = 100$, obtêm-se os campos de velocidade e de pressão, guardados nas matrizes geradas pelo programa. Os campos de velocidade e pressão estão mostrados nas figuras abaixo:

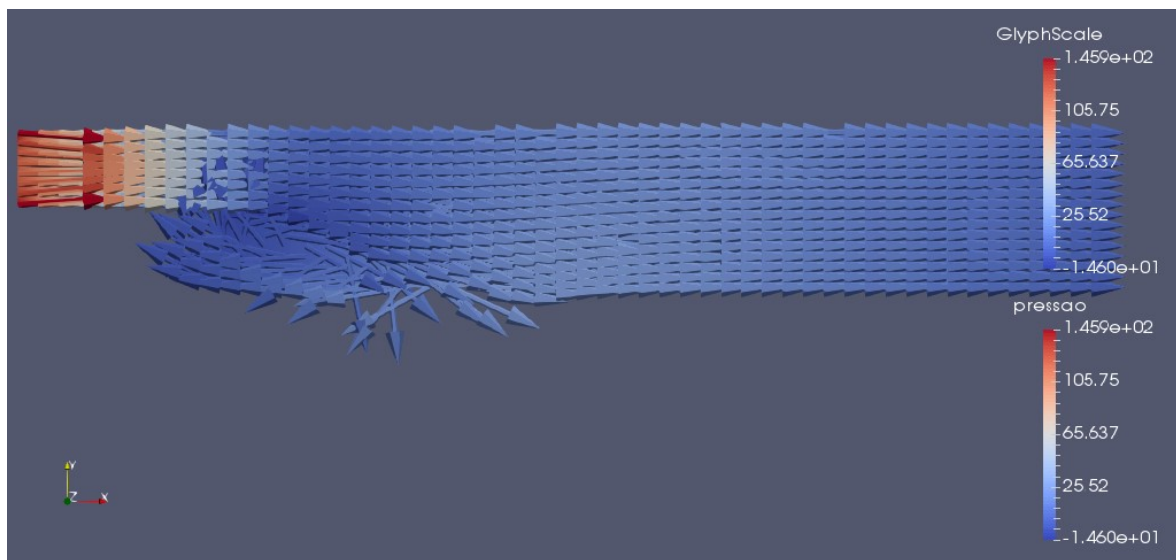


Figura 7.2 - Campo de velocidade calculado por via computacional



Figura 7.3 - Campo de pressão calculado por via computacional

Com os dados obtidos, se começa a análise qualitativa do problema. O campo de velocidade apresenta um perfil geral do escoamento, mas são necessárias técnicas de visualização mais elaboradas para fazer análises mais profundas deste perfil.

O campo de pressão mostra que o escoamento parte de uma região onde a pressão é maior para uma região onde a pressão é menor, o que está dentro do esperado. Além disso, o interior das zonas de recirculação tem pressão menor que nos outros pontos do escoamento.

Através da exportação dos dados obtidos pelo algoritmo do programa Matlab, para o ParaView, que é um software feito para visualização de dados, se traça um gráfico de linhas de corrente.

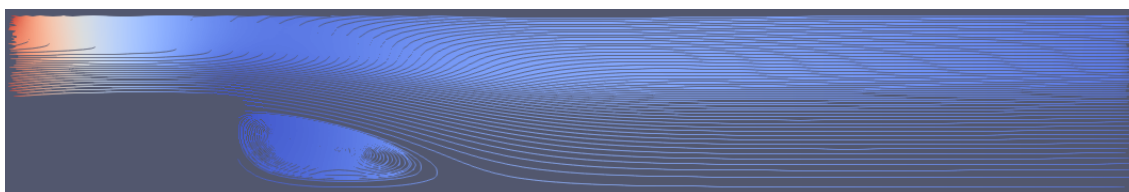


Figura 7.4 - Linhas de corrente do escoamento sobre o degrau

As linhas de corrente são curvas tangentes aos vetores velocidade em cada ponto do escoamento. Estas linhas são úteis para indicar a direção instantânea do movimento dos fluidos ao longo do campo de escoamento. Desta forma, o perfil dá informações qualitativas sobre o escoamento estudado. Nota-se que o escoamento inicia-se quase que exclusivamente com direção no eixo x , até que chega no degrau. O degrau leva a uma expansão brusca e forma uma zona de recirculação bem definida. Este resultado está de acordo com o que é esperado pelos experimentos já referidos acima, bem como o que temos na literatura que trata deste tipo de caso.

Outra ferramenta qualitativa interessante para ser usada é o cálculo do campo de vorticidade. A vorticidade é dada por:

$$\vec{\xi} = \nabla \times \vec{V} \quad (7.1)$$

Pode ser entendida, em seu significado físico, como a maneira e a intensidade com que um elemento diferencial do escoamento está girando. Aplicando este conceito ao campo de velocidades calculado, obtêm-se:

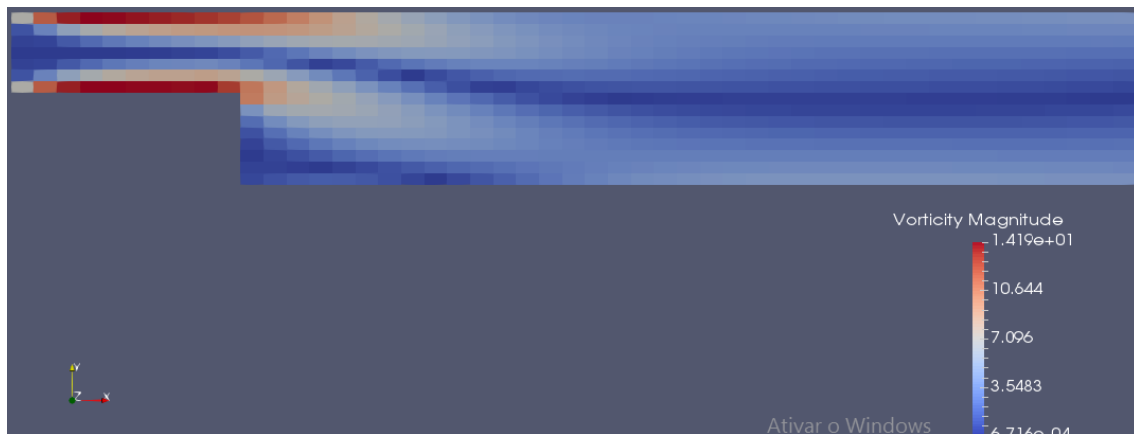


Figura 7.5 - Campo de vorticidade encontrado por via computacional

Depois de fazer a análise qualitativa e notar que o perfil do escoamento é condizente com o que se espera deste tipo de experimento, partimos para a análise quantitativa do problema.

Armaly e Pereira (1983) fizeram experimentos e registraram os resultados utilizando como base o ponto de recolamento. O ponto de recolamento é o ponto onde termina a recirculação, e o fluido que vem da entrada se cola à parede de baixo do escoamento. Os experimentos foram feitos e registrados de acordo com os seus respectivos números de Reynolds. A fórmula do número de Reynolds é:

$$Re = \frac{VL\rho}{\mu} \quad (7.2)$$

Onde L é a altura do escoamento já considerando o expansão pelo degrau.

Fazendo vários experimentos com diferentes números de Reynolds, Armaly e Pereira (1983) relacionam números de Reynolds com o ponto de recolamento através do seguinte gráfico:

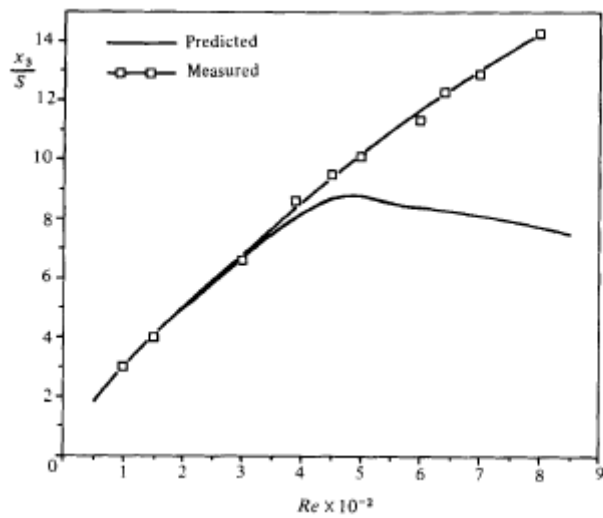


Figura 7.6 - Resultados experimentais e numéricos encontrados por Armaly e Pereira (1983)

Este gráfico mostra os resultados medidos no experimento e os resultados calculados numericamente por algoritmos feitos por estes pesquisadores.

Os resultados obtidos por Armaly e Pereira são utilizados para comparação com os resultados obtidos por este trabalho. O gráfico a seguir mostra esta comparação:

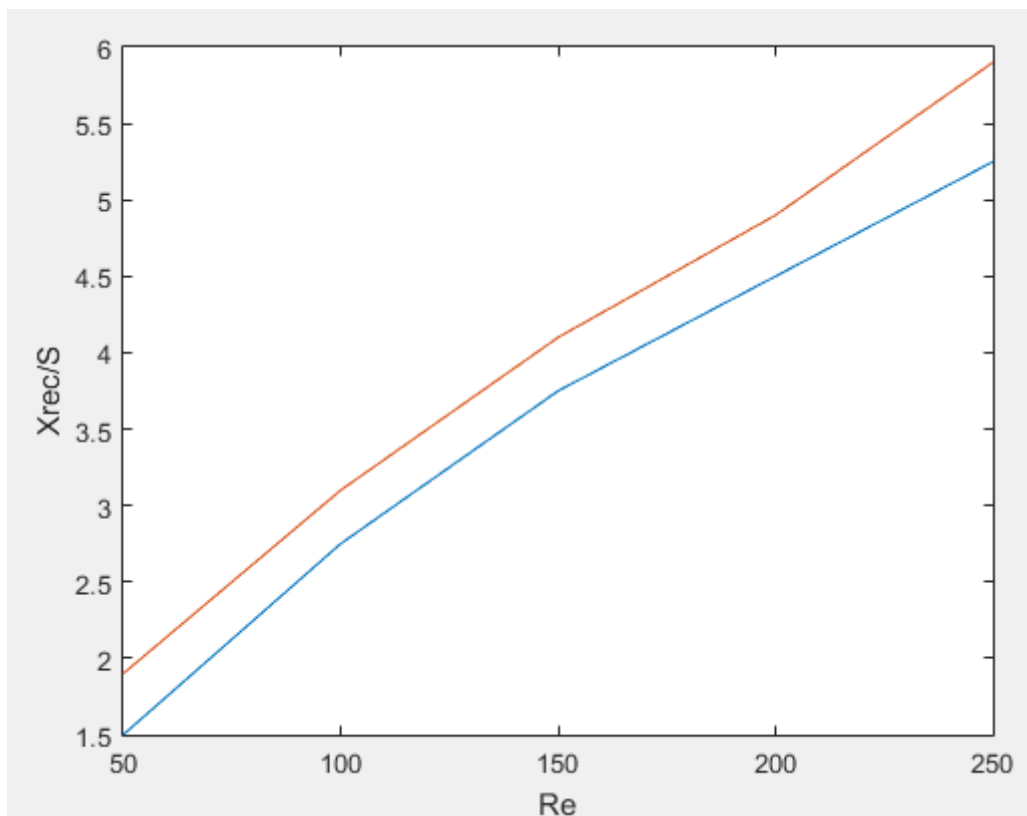


Figura 7.7 - Comparação entre os resultados encontrados

Esta figura apresenta os resultados obtidos por meio deste trabalho registrados pelo gráfico azul, e os dados obtidos por Armaly e Pereira (1983), pelo gráfico vermelho. Para a faixa de valores analisada, os resultados estão próximos, apesar de notarmos que não é coincidente.

Na medida em que o número de Reynolds cresce, as divergências aumentam. Isso também é esperado. Os experimentos de Armaly e Pereira (1983) mostram que quando o número de Reynolds passa de 700, o escoamento passa a ter comportamento tridimensional. Naturalmente, gera divergências quando comparados com simulações de sistemas bidimensionais.

Ainda utilizando os experimentos de Armaly e Pereira (1983) se traça os gráficos da velocidade em x , ao longo do escoamento, após o degrau. A figura abaixo mostra esse gráfico:

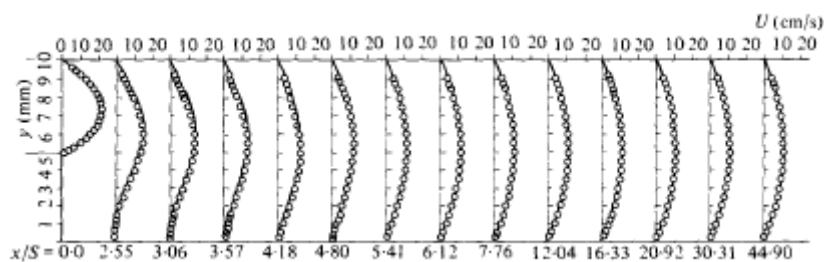


Figura 8 - Velocidade em x por posição em y , gráfico feito através dos experimentos de Armaly e Pereira

Este gráfico foi traçado a partir de um escoamento com $Re = 100$. O algoritmo computacional gerado a partir desse trabalho consegue resultados similares. A figura abaixo compara os resultados encontrados neste trabalho com os resultados encontrados por Armaly e Pereira (1983):

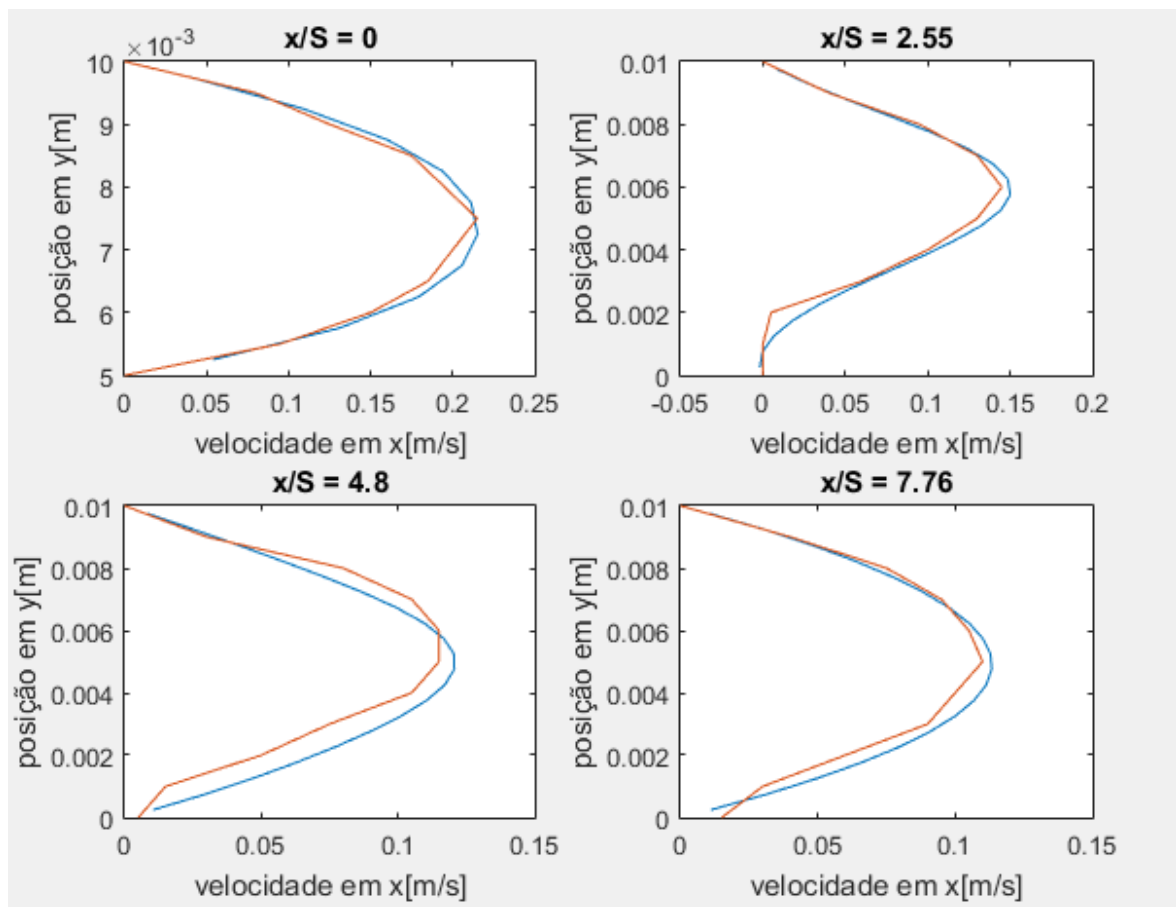


Figura 9 - Comparação dos perfis de velocidade

Nos gráficos mostrados, a linha em azul se refere aos dados obtidos por meio deste trabalho, enquanto que a linha em vermelho mostra os dados obtidos no trabalho que usamos como referência, o trabalho de Armaly e Pereira (1983).

CAPÍTULO VIII

CONCLUSÃO

Foi proposto, para este trabalho, modelagem física, matemática, numérica e computacional, para três tipos de escoamento, sendo eles o escoamento de Poiseuille plano, escoamento bidimensional com velocidades pré-determinadas e escoamento em expansão brusca sobre o degrau. Também foi objetivo deste trabalho mostrar os diversos métodos trabalhando em harmonia para produzir resultados condizentes com a realidade. Desta forma, utilizou-se de métodos consagrados para a detecção de erros, além de experimentos vindos de estudos confiáveis, para a validação dos resultados.

No capítulo do modelo físico são mostrados os métodos lagrangiano e euleriano, que são a base teórica para as formulações em Mecânica dos Fluidos. Em seguida, temos a exposição do teorema de Reynolds, que é fundamental para análise matemática dos escoamentos. Além dessas análises gerais, são mostradas também as especificidades dos escoamentos estudados, com foco no escoamento em expansão brusca, que é o principal escoamento estudado neste trabalho. O modelo matemático vem para complementar o modelo físico através das equações que descrevem os conceitos estudados. A análise numérica surge na necessidade de uma alternativa para os problemas que não podem ser resolvidos pelo método matemático. No entanto, foram montados modelos numéricos, também, para os problemas que possuíam resolução matemática. A resolução numérica dos problemas que possuíam resolução matemática serviu como aprendizado para a resolução numérica do escoamento em expansão brusca, que não pode ser resolvido apenas por método matemático. Em seguida, foi montado o algoritmo computacional, e teve sua lógica de funcionamento explicitada neste relatório.

O algoritmo computacional para o escoamento de Poiseuille plano foi executado e os resultados mostraram que o método numérico, para este caso, não traz erro. Os únicos erros encontrados foram erros de máquina, devido à resolução das variáveis dos computadores. O erro nulo para este caso se deve ao fato de que o problema é muito simples.

Os resultados rodados em software do escoamento bidimensional com velocidades pré-definidas são condizentes com o que se espera da teoria adotada. Quando se utilizou um método de discretização de ordem 1, o erro caía pela metade com o refinamento da malha

em resolução dobrada. Utilizando um método de ordem 2, o erro caía para quase um quarto, para esta mesma situação.

Por fim, a simulação computacional do escoamento em expansão brusca nos trouxe resultados que mais se aproximam da realidade nos pontos em que o número de Reynolds varia entre 100 e 200, quando obteve um erro de aproximadamente 21%.

Apêndice I

Código em Matlab implementando o algoritmo do escoamento de Poiseuille plano.

```
%iniciando os parâmetros

h = 1; % distancia entre as placas: "Ly"
ro = 1; % densidade: "ro"
variaP = - 0.001; % variacao de pressao: "dP"
nos = 30; % numero de nos: "nos"
p = h/(nos + 1); %distancia entre os nos: "dy"
dt = 50; %passo de tempo: "dt"
mi = 0.001; %viscosidade: "mi"
lambda = variaP/mi;
y = zeros(nos,1); %posicao no eixo y
for i = 1:1:nos
    y(i) = i*p;
end
U = zeros(nos,1);
for i = 1:1:nos
    U(i) = (lambda*y(i)^2)/2 - (h*lambda*y(i))/2;
end
% loop temporal
k = 0;
parada = 0.0000000000001;
comp = 1;
while comp > parada
    k = k + 1;
    if k == 1
        for l = 1:1:nos
            ant(l,1,k) = 0;
        end
    else
        for l = 1:1:nos
            ant(l,1,k) = x(l,1,k-1);
        end
    end
    A(1,1,k) = -(2+(ro*p^2)/(mi*dt));
    A(1,2,k) = 1;
    A(nos,nos-1,k) = 1;
    A(nos,nos,k) = -(2+(ro*p^2)/(mi*dt));
    for i = 2:1:nos-1
        A(i,i-1,k) = 1;
        A(i,i,k) = -(2+(ro*p^2)/(mi*dt));
        A(i,i+1,k) = 1;
    end
    for i = 1:1:nos
        C(i,1,k) = (p^2/mi)*(-(ro*ant(i,1,k))/dt+variaP);
    end
    x(:, :, k) = inv(A(:, :, k))*C(:, :, k);
    plot(x(:,1,k),y)
    axis ( [ 0 0.15 0 1 ] )
    xlabel('velocidade[m/s]')
    ylabel('posição[m]')
    M(k) = getframe;
```

```

        comp = 1;
        if k > 1
            comp = 0;
            for i = 1:1:nos
                if abs(x(i,1,k)-x(i,1,k-1)) > comp
                    comp = abs(x(i,1,k)-x(i,1,k-1));
                end
            end
        end
    end
end
movie(M)

% calcula o erro

l2 = 0;
normal2 = zeros(nos);
for i = 1:1:nos
    normal2(i) = (U(i)-x(i,1,k))^2;
    l2 = l2 + normal2(i);
end
l2 = l2/(nos);
l2 = sqrt(l2);
maximo = 0;
teste = 0;
for i = 1:1:nos
    teste = abs(U(i)-x(i,1,k));
    if (teste > maximo)
        maximo = teste;
        maxy = i;
    end
end
end

```

Apêndice II

Código do Matlab implementando o algoritmo do escoamento bidimensional com velocidades pré-determinadas.

```
% iniciando os parâmetros

Lx = 3;
Ly = 1;
nosx = 6;
nosy = 6;
dx = Lx/(nosx+1);
dy = Ly/(nosy+1);
dt = 10;
kk = 0.58;
cp = 4.186;
ro = 1;
umax = 1;
alfa = kk/(ro*cp);
mi = 0.001;
for i = 1:1:nosx
    X(i) = i*dx;
end
for i = 1:1:nosy
    Y(i) = i*dy;
end

% matriz de mapeamento

for i = 1:1:nosx+2
    for j = 1:1:nosy+2
        MAP(i,j) = 0;
        T(i,j,1) = 0;
        T2(i,j,1) = 0;
    end
end
c = 0;
for j = 2:1:nosy+1
    for i = 2:1:nosx+1
        c = c + 1;
        MAP(i,j) = c;
    end
end

% campo de velocidades pré-determinadas

for i = 1:1:nosx
    for j = 1:1:nosy
        u(i,j) = umax*sin((2*pi*X(i))/Lx);
        v(i,j) = -(umax*2*pi*Y(j)*cos((2*pi*X(i))/Lx))/Lx;
    end
end
```

```

% calculo da temperatura para o primeiro passo de tempo através do metodo
de
% primeira ordem

for i = 2:1:nosx+1
    T(i,1,2) = X(i-1)^2*(1 - exp((-alfa*dt)/Lx^2));
    T(i,nosy+2,2) = (X(i-1)^2 + Ly^2)*(1 - exp((-alfa*dt)/Lx^2));
end
for i = 2:1:nosy+1
    T(1,i,2) = Y(i-1)^2*(1 - exp((-alfa*dt)/Lx^2));
    T(nosx+2,i,2) = (Y(i-1)^2 + Lx^2)*(1 - exp((-alfa*dt)/Lx^2));
end
for i = 2:1:nosx+1
    for j = 2:1:nosy+1
        id = MAP(i,j);
        A(id,id,1) = 1/dt+((2*alfa)/dx^2)+((2*alfa)/dy^2);
        C(id,1,1) = T(i,j,1)*(1/dt) + (X(i-1)^2 + Y(j-
1)^2)*(alfa/Lx^2)*exp(-alfa*dt/Lx^2)+umax*2*X(i-1)*sin(2*pi*X(i-
1)/Lx)*(1-exp(-alfa*dt/Lx^2))-((umax*4*pi*Y(j-1)^2)/Lx)*cos(2*pi*X(i-
1)/Lx)*(1-exp(-alfa*dt/Lx^2))-4*alfa*(1-exp(-alfa*dt/Lx^2));
        if MAP(i+1,j) > 0
            id2 = MAP(i+1,j);
            A(id,id2,1) = (umax/(2*dx))*sin((2*pi*X(i-1))/Lx) -
alfa/dx^2;
        else
            C(id,1,1) = C(id,1,1) -
T(i+1,j,2)*((umax/(2*dx))*sin((2*pi*X(i-1))/Lx) - alfa/dx^2);
        end
        if MAP(i-1,j) > 0
            id2 = MAP(i-1,j);
            A(id,id2,1) = (-umax*sin((2*pi*X(i-1))/Lx))/(2*dx)-
alfa/dx^2;
        else
            C(id,1,1) = C(id,1,1) - T(i-1,j,2)*(-
(umax*sin((2*pi*X(1))/Lx))/(2*dx)-alfa/dx^2);
        end
        if MAP(i,j+1) > 0
            id2 = MAP(i,j+1);
            A(id,id2,1) = (-umax*pi*Y(j-1)*cos((2*pi*X(i-1))/Lx))/(dy*Lx)
- alfa/dy^2;
        else
            C(id,1,1) = C(id,1,1) - T(i,j+1,2)*((-umax*pi*Y(j-
1)*cos((2*pi*X(i-1))/Lx))/(dy*Lx) - alfa/dy^2);
        end
        if MAP(i,j-1) > 0
            id2 = MAP(i,j-1);
            A(id,id2,1) = ((umax*pi*Y(j-1)*cos((2*pi*X(i-
1))/Lx))/(dy*Lx)-alfa/dy^2);
        else
            C(id,1,1) = C(id,1,1) - T(i,j-1,2)*((umax*pi*Y(j-
1)*cos((2*pi*X(i-1))/Lx))/(dy*Lx)-alfa/dy^2);
        end
    end
end
temp = inv(A(:,:,1))*C(:,:,1)
for i = 2:1:nosx+1
    for j = 2:1:nosy+1
        id = MAP(i,j);
        T(i,j,2) = temp(id);
    end
end

```

```

        T2(i,j,2) = (X(i-1)^2 + Y(j-1)^2)*(1 - exp((-alfa*dt)/Lx^2));
    end
end

% calculo da temperatura para os demais passos de tempo a partir do
metodo
% de segunda ordem

k = 2;
parada = 0.000001;
comp = 1;

while comp > parada
    k = k + 1;
    for i = 2:1:nosx+1
        T(i,1,k) = X(i-1)^2*(1 - exp((-alfa*(k-1)*dt)/Lx^2));
        T(i,nosy+2,k) = (X(i-1)^2 + Ly^2)*(1 - exp((-alfa*(k-
1)*dt)/Lx^2));
    end
    for i = 2:1:nosy+1
        T(1,i,k) = Y(i-1)^2*(1 - exp((-alfa*(k-1)*dt)/Lx^2));
        T(nosx+2,i,k) = (Y(i-1)^2 + Lx^2)*(1 - exp((-alfa*(k-
1)*dt)/Lx^2));
    end
    for i = 2:1:nosx+1
        for j = 2:1:nosy+1
            id = MAP(i,j);
            A(id,id,k-1) = (3/(2*dt)) + ((2*alfa)/dx^2) + ((2*alfa)/dy^2);
            C(id,1,k-1) = T(i,j,k-1)*(4/(2*dt)) - (1/(2*dt))*T(i,j,k-2) +
(X(i-1)^2 + Y(j-1)^2)*(alfa/Lx^2)*exp(-alfa*(k-1)*dt/Lx^2) + umax*2*X(i-
1)*sin(2*pi*X(i-1)/Lx)*(1-exp(-alfa*(k-1)*dt/Lx^2)) - ((umax*4*pi*Y(j-
1)^2)/Lx)*cos(2*pi*X(i-1)/Lx)*(1-exp(-alfa*(k-1)*dt/Lx^2)) - 4*alfa*(1-
exp(-alfa*(k-1)*dt/Lx^2));
            if MAP(i+1,j) > 0
                id2 = MAP(i+1,j);
                A(id,id2,k-1) = (umax/(2*dx))*sin((2*pi*X(i-1))/Lx) -
alfa/dx^2;
            else
                C(id,1,k-1) = C(id,1,k-1) -
T(i+1,j,k)*((umax/(2*dx))*sin((2*pi*X(i-1))/Lx) - alfa/dx^2);
            end
            if MAP(i-1,j) > 0
                id2 = MAP(i-1,j);
                A(id,id2,k-1) = (-umax*sin((2*pi*X(i-1))/Lx))/(2*dx) -
alfa/dx^2;
            else
                C(id,1,k-1) = C(id,1,k-1) - T(i-1,j,k)*(-
(umax*sin((2*pi*X(1))/Lx))/(2*dx) - alfa/dx^2);
            end
            if MAP(i,j+1) > 0
                id2 = MAP(i,j+1);
                A(id,id2,k-1) = (-umax*pi*Y(j-1)*cos((2*pi*X(i-
1))/Lx))/(dy*Lx) - alfa/dy^2;
            else
                C(id,1,k-1) = C(id,1,k-1) - T(i,j+1,k)*((-umax*pi*Y(j-
1)*cos((2*pi*X(i-1))/Lx))/(dy*Lx) - alfa/dy^2);
            end
            if MAP(i,j-1) > 0

```

```

            id2 = MAP(i,j-1);
            A(id,id2,k-1) = ((umax*pi*Y(j-1)*cos((2*pi*X(i-
1))/Lx))/(dy*Lx)-alfa/dy^2);
        else
            C(id,1,k-1) = C(id,1,k-1) - T(i,j-1,k)*((umax*pi*Y(j-
1)*cos((2*pi*X(i-1))/Lx))/(dy*Lx)-alfa/dy^2);
        end
    end
end
temp = inv(A(:,:,k-1))*C(:,:,k-1)
comp = 0;
for i = 2:1:nosx+1
    for j = 2:1:nosy+1
        id = MAP(i,j);
        T(i,j,k) = temp(id);
        T2(i,j,k) = (X(i-1)^2 + Y(j-1)^2)*(1 - exp((-alfa*(k-
1)*dt)/Lx^2));
        if abs(T(i,j,k)-T(i,j,k-1)) > comp
            comp = abs(T(i,j,k)-T(i,j,k-1));
        end
        temperatura(nosy-j+2,i-1,k-2) = T(i,j,k);
    end
end
imagesc(temperatura(:,:,k-2));
colorbar;
M(k-2) = getframe;
end

% calculo do erro

nt = k;
l2 = 0;
for i = 2:1:nosx+1
    for j = 2:1:nosy+1
        for k = 2:1:nt
            n12 = (T2(i,j,k)-T(i,j,k))^2;
            l2 = l2 + n12;
        end
    end
end
l2 = l2/(nosx*nosy*(nt-1));
movie(M)

```

Apêndice III

Código do Matlab implementando o algoritmo do escoamento sobre o degrau.

```
% inicialização dos parametros

nosx = 50;
nosy = 20;
Lx = 0.05;
Ly = 0.01;
dx = Lx/nosx;
dy = Ly/nosy;
uzero = 0.15;
ro = 1;
mi = 0.000015;
dt = 0.002;
T = 1;
nt = T/dt;
degi = 11;
degj = 11;
Re = (uzero*(degj-1)*dy*2*ro)/mi;
for i = 1:1:nosx
    posx(i) = (i-0.5)*dx;
end
for i = 1:1:nosy
    posy(i) = (i-0.5)*dy;
end
[POSY, POSX] = meshgrid(posy, posx);
for i = 1:1:nosy-degj
    sx(i) = 0.5*dx;
    sy(i) = (degj+i-1.5)*dy;
end

% condicoes iniciais

for i = 1:1:nosx
    for j = 1:1:nosy
        p(i,j,1) = 0;
    end
end
for i = 1:1:nosx+1
    for j = 1:1:nosy+2
        u(i,j,1) = 0;
    end
end
for i = 1:1:nosx+2
    for j = 1:1:nosy+1
        v(i,j,1) = 0;
    end
end
for j = degj+1:1:nosy+1
    u(1,j,1) = uzero;
end
```

```

% loop temporal

for k = 2:1:nt
    it = dt*(k-1);
    for i = 2:1:nosx
        for j = degj+1:1:nosy+1
            CONVu(i,j,k-1) = (((u(i+1,j,k-1)+u(i,j,k-1))/2)^2-((u(i,j,k-1)+u(i-1,j,k-1))/2)^2)/dx;
            CONVu(i,j,k-1) = CONVu(i,j,k-1) + (((u(i,j+1,k-1)+u(i,j,k-1))/2)*((v(i+1,j,k-1)+v(i,j,k-1))/2)-((u(i,j,k-1)+u(i,j-1,k-1))/2)*((v(i+1,j-1,k-1)+v(i,j-1,k-1))/2))/dy;
            VISCu(i,j,k-1) = mi*((u(i+1,j,k-1)-2*u(i,j,k-1)+u(i-1,j,k-1))/dx^2);
            VISCu(i,j,k-1) = VISCu(i,j,k-1) + mi*((u(i,j+1,k-1)-2*u(i,j,k-1)+u(i,j-1,k-1))/dy^2);
            F(i,j,k-1) = u(i,j,k-1) + dt*(-CONVu(i,j,k-1)+VISCu(i,j,k-1));
            u2(i,j,k-1) = F(i,j,k-1) - (dt/(ro*dx))*(p(i,j-1,k-1)-p(i-1,j-1,k-1));
        end
    end
    for i = degi+1:1:nosx
        for j = 2:1:degj
            CONVu(i,j,k-1) = (((u(i+1,j,k-1)+u(i,j,k-1))/2)^2-((u(i,j,k-1)+u(i-1,j,k-1))/2)^2)/dx;
            CONVu(i,j,k-1) = CONVu(i,j,k-1) + (((u(i,j+1,k-1)+u(i,j,k-1))/2)*((v(i+1,j,k-1)+v(i,j,k-1))/2)-((u(i,j,k-1)+u(i,j-1,k-1))/2)*((v(i+1,j-1,k-1)+v(i,j-1,k-1))/2))/dy;
            VISCu(i,j,k-1) = mi*((u(i+1,j,k-1)-2*u(i,j,k-1)+u(i-1,j,k-1))/dx^2);
            VISCu(i,j,k-1) = VISCu(i,j,k-1) + mi*((u(i,j+1,k-1)-2*u(i,j,k-1)+u(i,j-1,k-1))/dy^2);
            F(i,j,k-1) = u(i,j,k-1) + dt*(-CONVu(i,j,k-1)+VISCu(i,j,k-1));
            u2(i,j,k-1) = F(i,j,k-1) - (dt/(ro*dx))*(p(i,j-1,k-1)-p(i-1,j-1,k-1));
        end
    end
    for i = 2:1:nosx+1
        for j = degj+1:1:nosy
            CONVv(i,j,k-1) = (((v(i,j+1,k-1)+v(i,j,k-1))/2)^2-((v(i,j,k-1)+v(i,j-1,k-1))/2)^2)/dy;
            CONVv(i,j,k-1) = CONVv(i,j,k-1) + (((v(i+1,j,k-1)+v(i,j,k-1))/2)*((u(i,j+1,k-1)+u(i,j,k-1))/2)-((v(i,j,k-1)+v(i-1,j,k-1))/2)*((u(i-1,j+1,k-1)+u(i-1,j,k-1))/2))/dx;
            VISCv(i,j,k-1) = mi*((v(i,j+1,k-1)-2*v(i,j,k-1)+v(i,j-1,k-1))/dy^2);
            VISCv(i,j,k-1) = VISCv(i,j,k-1) + mi*((v(i+1,j,k-1)-2*v(i,j,k-1)+v(i-1,j,k-1))/dx^2);
            G(i,j,k-1) = v(i,j,k-1) + dt*(-CONVv(i,j,k-1)+VISCv(i,j,k-1));
            v2(i,j,k-1) = G(i,j,k-1) - (dt/(ro*dy))*(p(i-1,j,k-1)-p(i-1,j-1,k-1));
        end
    end
    for i = degi+1:1:nosx+1
        for j = 2:1:degj
            CONVv(i,j,k-1) = (((v(i,j+1,k-1)+v(i,j,k-1))/2)^2-((v(i,j,k-1)+v(i,j-1,k-1))/2)^2)/dy;

```

```

        CONVv(i,j,k-1) = CONVv(i,j,k-1) + (((v(i+1,j,k-1)+v(i,j,k-1))/2)*((u(i,j+1,k-1)+u(i,j,k-1))/2)-((v(i,j,k-1)+v(i-1,j,k-1))/2)*((u(i-1,j+1,k-1)+u(i-1,j,k-1))/2))/dx;
        VISCv(i,j,k-1) = mi*((v(i,j+1,k-1)-2*v(i,j,k-1)+v(i,j-1,k-1))/dy^2);
        VISCv(i,j,k-1) = VISCv(i,j,k-1) + mi*((v(i+1,j,k-1)-2*v(i,j,k-1)+v(i-1,j,k-1))/dx^2);
        G(i,j,k-1) = v(i,j,k-1) + dt*(-CONVv(i,j,k-1)+VISCv(i,j,k-1));
        v2(i,j,k-1) = G(i,j,k-1) - (dt/(ro*dy))*(p(i-1,j,k-1)-p(i-1,j-1,k-1));
    end
end
for i = 2:1:nosx+1
    v2(i,nosy+1,k-1) = 0;
end
for i = 2:1:degj
    v2(i,degj,k-1) = 0;
end
for i = degi+1:1:nosx+1
    v2(i,1,k-1) = 0;
end
for j = degj+1:1:nosy+1
    v2(1,j,k-1) = - v2(2,j,k-1);
end
for j = 2:1:degj-1
    v2(degi,j,k-1) = - v2(degi+1,j,k-1);
end
for j = 2:1:nosy+1
    v2(nosx+2,j,k-1) = v2(nosx+1,j,k-1);
end
for j = degj+1:1:nosy+1
    u2(1,j,k-1) = uzero;
end
for j = 2:1:degj
    u2(degi,j,k-1) = 0;
end
for j = 2:1:nosy+1
    u2(nosx+1,j,k-1) = u2(nosx,j,k-1);
end
for i = 2:1:nosx
    u2(i,nosy+2,k-1) = - u2(i,nosy+1,k-1);
end
for i = 2:1:degj-1
    u2(i,degj,k-1) = -u2(i,degj+1,k-1);
end
for i = degi+1:nosx
    u2(i,1,k-1) = -u2(i,2,k-1);
end
for i = 1:1:nosx+2
    for j = 1:1:nosy+2
        dp(i,j,k-1,1) = 0; % dp = matriz de mapeamento MAP
        dp(i,j,k-1,2) = 0;
    end
end
end
c = 1;
for i = degi+1:1:nosx+1
    for j = 2:1:degj
        dp(i,j,k-1,1) = 1;
    end
end

```

```

        dp(i,j,k-1,2) = c;
        c = c + 1;
    end
end
for i = 2:1:nosx+1
    for j = degj+1:1:nosy+1
        dp(i,j,k-1,1) = 1;
        dp(i,j,k-1,2) = c;
        c = c + 1;
    end
end
id = 0;
for i = degi+1:1:nosx+1
    for j = 2:1:degj
        id = dp(i,j,k-1,2);
        matp1(id,id,k-1) = (-2)*(1/dx^2+1/dy^2);
        matp2(id,1,k-1) = (ro/dt)*((u2(i,j,k-1)-u2(i-1,j,k-1))/dx+(v2(i,j,k-1)-v2(i,j-1,k-1))/dy);
        if dp(i+1,j,k-1,1) == 1
            id2 = dp(i+1,j,k-1,2);
            matp1(id,id2,k-1) = 1/dx^2;
        else
            matp2(id,1,k-1) = matp2(id,1,k-1) - (1/dx^2)*dp(i+1,j,k-1,2);
        end
        if dp(i-1,j,k-1,1) == 1
            id2 = dp(i-1,j,k-1,2);
            matp1(id,id2,k-1) = 1/dx^2;
        else
            matp1(id,id,k-1) = matp1(id,id,k-1) + (1/dx^2);
        end
        if dp(i,j+1,k-1,1) == 1
            id2 = dp(i,j+1,k-1,2);
            matp1(id,id2,k-1) = 1/dy^2;
        else
            matp1(id,id,k-1) = matp1(id,id,k-1) + (1/dy^2);
        end
        if dp(i,j-1,k-1,1) == 1
            id2 = dp(i,j-1,k-1,2);
            matp1(id,id2,k-1) = 1/dy^2;
        else
            matp1(id,id,k-1) = matp1(id,id,k-1) + (1/dy^2);
        end
    end
end
for i = 2:1:nosx+1
    for j = degj+1:1:nosy+1
        id = dp(i,j,k-1,2);
        matp1(id,id,k-1) = (-2)*(1/dx^2+1/dy^2);
        matp2(id,1,k-1) = (ro/dt)*((u2(i,j,k-1)-u2(i-1,j,k-1))/dx+(v2(i,j,k-1)-v2(i,j-1,k-1))/dy);
        if dp(i+1,j,k-1,1) == 1
            id2 = dp(i+1,j,k-1,2);
            matp1(id,id2,k-1) = 1/dx^2;
        else
            matp2(id,1,k-1) = matp2(id,1,k-1) - (1/dx^2)*dp(i+1,j,k-1,2);
        end
        if dp(i-1,j,k-1,1) == 1

```

```

        id2 = dp(i-1,j,k-1,2);
        matp1(id,id2,k-1) = 1/dx^2;
    else
        matp1(id,id,k-1) = matp1(id,id,k-1) + (1/dx^2);
    end
    if dp(i,j+1,k-1,1) == 1
        id2 = dp(i,j+1,k-1,2);
        matp1(id,id2,k-1) = 1/dy^2;
    else
        matp1(id,id,k-1) = matp1(id,id,k-1) + (1/dy^2);
    end
    if dp(i,j-1,k-1,1) == 1
        id2 = dp(i,j-1,k-1,2);
        matp1(id,id2,k-1) = 1/dy^2;
    else
        matp1(id,id,k-1) = matp1(id,id,k-1) + (1/dy^2);
    end
end
end
p2(:, :, k-1) = inv(matp1(:, :, k-1))*matp2(:, :, k-1);
for i = degi:1:nosx
    for j = 1:1:degj-1
        id = dp(i+1,j+1,k-1,2);
        p3(i,j,k) = p2(id,1,k-1);
        p(i,j,k) = p3(i,j,k)+p(i,j,k-1);
    end
end
for i = 1:1:nosx
    for j = degj:1:nosy
        id = dp(i+1,j+1,k-1,2);
        p3(i,j,k) = p2(id,1,k-1);
        p(i,j,k) = p3(i,j,k)+p(i,j,k-1);
    end
end
for i = degi:1:nosx
    for j = 1:1:degj-1
        campop(nosy-j+1,i,k-1) = p(i,j,k);
    end
end
for i = 1:1:nosx
    for j = degj:1:nosy
        campop(nosy-j+1,i,k-1) = p(i,j,k);
    end
end
for i = 2:1:nosx
    for j = 2:1:nosy+1
        u(i,j,k) = u2(i,j,k-1) - (dt/ro)*((p3(i,j-1,k)-p3(i-1,j-1,k))/dx);
    end
end
for i = 2:1:nosx+1
    for j = 2:1:nosy
        v(i,j,k) = v2(i,j,k-1) - (dt/ro)*((p3(i-1,j,k)-p3(i-1,j-1,k))/dy);
    end
end
for i = 2:1:nosx+1
    v(i,nosy+1,k) = 0;
end

```

```

for i = 2:1:degi
    v(i,degj,k) = 0;
end
for i = degi+1:1:nosx+1
    v(i,1,k) = 0;
end
for j = degj+1:1:nosy+1
    v(1,j,k) = - v(2,j,k);
end
for j = 2:1:degj-1
    v(degi,j,k) = - v(degi+1,j,k);
end
for j = 2:1:nosy+1
    v(nosx+2,j,k) = v(nosx+1,j,k);
end
for j = degj+1:1:nosy+1
    u(1,j,k) = uzero;
end
for j = 2:1:degj
    u(degi,j,k) = 0;
end
for j = 2:1:nosy+1
    u(nosx+1,j,k) = u(nosx,j,k);
end
for i = 2:1:nosx
    u(i,nosy+2,k) = - u(i,nosy+1,k);
end
for i = 2:1:degi-1
    u(i,degj,k) = -u(i,degj+1,k);
end
for i = degi+1:nosx
    u(i,1,k) = -u(i,2,k);
end
for i = 1:1:nosx
    for j = degj:1:nosy
        velu(i,j,k-1) = (u(i+1,j+1,k)+u(i,j+1,k))/2;
        velv(i,j,k-1) = (v(i+1,j+1,k)+v(i+1,j,k))/2;
    end
end
for i = degi:1:nosx
    for j = 1:1:degj-1
        velu(i,j,k-1) = (u(i+1,j+1,k)+u(i,j+1,k))/2;
        velv(i,j,k-1) = (v(i+1,j+1,k)+v(i+1,j,k))/2;
    end
end
quiver(POSX,POSY,velu(:,:),k-1),velv(:,:),k-1));
axis('equal')
title('velocidade')
M(k-1) = getframe;
end
movie(M)

```

Referências Bibliográficas

- ÇENGEL, Yunus A; CIMBALA, John M. Mecânica dos fluidos: Fundamentos e aplicações. Rio de Janeiro: Mc Graw-Hill, 2007. 819 p.
- WHITE, Frank M. Mecânica dos fluidos. 6.ed. Porto Alegre: McGraw-Hill, 2011. 880p.
- FORTUNA, Armando de O. Técnicas computacionais para dinâmica dos fluidos: Conceitos básicos e aplicações. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2000. 552p.
- PLAUSKA, Geraldo Claret. Experimento e aprendizagem: Uma aula introdutória à mecânica dos fluidos, 2013. 87 f. Dissertação de Mestrado – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.
- SILVEIRA-NETO, Aristeu, Fundamentos da Turbulência nos Fluidos, em Turbulência, eds.A. P. Silva-Freire, P. P. M. Menut e J. Su, ABCM – Associação Brasileira de Ciências Mecânicas. Br, 2002.
- REYNOLDS, Osborne. An Experimental Investigation of the Circumstances Which Determine Whether the Motion of Water Shall Be Direct or Sinuous, and of the Law of Resistance in Parallel Channels. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, London, v. 174, p. 935-982, mar. 1883.
- KREITH, Frank; BOHN, Mark S. Princípios de Transferência de Calor. São Paulo: Editora Edgard Blucher, 1977. 550p.
- ARMALY, Bassem F; PEREIRA, Jose C. F. Experimental and theoretical investigation of backward-facing step flow. Journal of Fluid Mechanics, Karlsruhe, vol. 127, p. 473-496, jan. 1983.