
Capítulo 4 – Estimação *on-line* em laço fechado

4.1 Introdução

Se o projeto do controlador adaptativo é baseado em modelos identificados do processo, a identificação deve ser realizada em laço fechado. Portanto, deve ser observado se os métodos desenvolvidos para identificação em laço aberto podem ser aplicados em laço fechado, levando em conta as várias condições de convergência. O problema é óbvio se a análise de correlação é considerada. Para a convergência da correlação cruzada entre a entrada $u(k)$ e a saída $y(k)$, a entrada deve ser não correlacionada com o ruído $n(k)$ contaminando a saída $y(k)$. Como o *feedback* gera tal correlação, técnicas de correlação não podem ser aplicadas diretamente na identificação em laço fechado. No caso de estimação de parâmetros a situação muda, porque somente o sinal do erro $e(k)$ deve ser não correlacionado com os elementos do vetor de dados Ψ^T . Esta abertura possibilita a estimação de parâmetros em laço fechado (ISERMANN *et al.*, 1992).

Para tratar sistematicamente a estimação de parâmetros em laço fechado, os seguintes casos podem ser distinguidos:

- a) Identificação indireta do processo. O modelo do laço fechado é identificado. Se o controlador é conhecido o modelo do processo é calculado baseado no modelo do laço fechado;
- b) Identificação direta do processo. O modelo do processo é diretamente identificado, isto é, não é utilizado o modelo do laço fechado como um resultado intermediário. O controlador não precisa ser conhecido;
- c) Somente a saída $y(k)$ é medida;
- d) Somente a entrada $u(k)$ e a saída $y(k)$ são medidos;
- e) Não há perturbação externa aplicada;
- f) Uma perturbação externa $u_p(k)$ é aplicada (medida ou não medida) mas não é diretamente usada no algoritmo de identificação;
- g) A perturbação externa mensurável $u_p(k)$ é usada no algoritmo de identificação;

As seguintes combinações de casos são possíveis:

(a) + (c) + (e) e **(b) + (d) + (e)**; **(a) + (g)** e **(b) + (d) + (f)**.

4.2 – Estimação de parâmetros sem perturbação externa

A Figura 4.1 mostra um processo linear, invariante no tempo representado pela seguinte função de transferência:

$$G_p(z) = \frac{y_u(z)}{u(z)} = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} z^{-d} = \frac{b_1 z^{-1} + \dots + b_{m_b} z^{-m_b}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_{m_a} z^{-m_a}} z^{-d} \quad (4.1)$$

e o filtro de ruído:

$$G_{pv}(z) = \frac{n(z)}{v(z)} = \frac{D(z^{-1})}{A(z^{-1})} z^{-d} = \frac{1 + d_1 z^{-1} + \dots + d_{m_d} z^{-m_d}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_{m_a} z^{-m_a}} z^{-d} \quad (4.2)$$

que é identificado em laço fechado. A hipótese que $C(z^{-1}) = A(z^{-1})$ no filtro de ruído é para simplificar a estimação de parâmetros sem perturbação. A função de transferência do controlador é:

$$G_R(z) = \frac{u(z)}{e_w(z)} = \frac{Q(z^{-1})}{P(z^{-1})} = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + \dots + q_v z^{-v}}{1 + p_1 z^{-1} + \dots + p_\mu z^{-\mu}} \quad (4.3)$$

onde os sinais são

$$\begin{aligned} y(z) &= y_u(z) + n(z) \\ e_w(z) &= w(z) - y(z) \end{aligned} \quad (4.4)$$

Em geral $w(z)=0$ é considerado, isto é $e_w(z) = -y(z)$. $v(k)$ é admitido ser um ruído não mensurável estatisticamente independente com $E\{v(k)\} = 0$ e variância σ_v^2 .

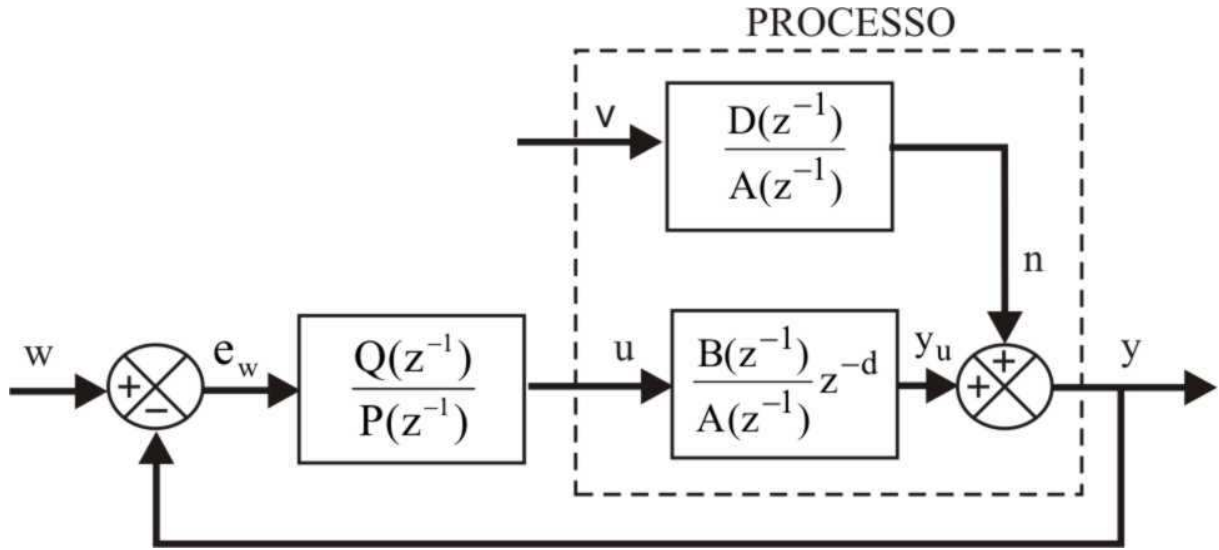


Figura 4.1: Esquema de um processo identificado em laço fechado sem sinal de perturbação externa.

4.2.1 Identificação indireta do processo ((a) + (c) + (e))

A resposta do laço fechado com ruído como entrada é

$$\frac{y(z)}{v(z)} = \frac{G_{PV}(z)}{1 + G_R(z)G_P(z)} = \frac{D(z^{-1})P(z^{-1})}{A(z^{-1})P(z^{-1}) + B(z^{-1})z^{-d}Q(z^{-1})} = \frac{1 + \beta_1 z^{-1} + \dots + \beta_r z^{-r}}{1 + \alpha_1 z^{-1} + \dots + \alpha_\ell z^{-\ell}} = \frac{\mathcal{B}(z^{-1})}{\mathcal{A}(z^{-1})} \quad (4.5)$$

Portanto a variável controlada $y(k)$ é um processo estocástico ARMA, gerado por $v(k)$ e o laço fechado como um filtro de ruído. As ordens são:

$$\begin{aligned} \ell &= \max[m_a + \mu, m_b + v + d] \\ r &= m_d + \mu \end{aligned} \quad (4.6)$$

Se somente a saída $y(k)$ é conhecida, os parâmetros do ARMA:

$$\hat{\theta}_{\alpha, \beta}^T = [\hat{\alpha}_1 \dots \hat{\alpha}_\ell \hat{\beta}_1 \dots \hat{\beta}_r] \quad (4.7)$$

podem ser estimadas usando os métodos discutidos anteriormente, se os pólos de $\mathcal{A}(z) = 0$ estão situados no círculo unitário do plano z e se os polinômios $D(z^{-1})$ e $\mathcal{A}(z^{-1})$ não tem raízes comuns.

O próximo passo é determinar os parâmetros desconhecidos do processo

$$\hat{\theta}^T = [\hat{a}_1 \dots \hat{a}_{m_a} \hat{b}_1 \dots \hat{b}_{m_b} \hat{d}_1 \dots \hat{d}_{m_d}] \quad (4.8)$$

para $\hat{\alpha}_i$ e $\hat{\beta}_i$ dados. Para calcular estes parâmetros, certas condições de identificabilidade devem ser satisfeitas.

4.2.1.a Condições de identificabilidade dos parâmetros

Um processo (em laço fechado) é chamado identificável nos parâmetros se os parâmetros estimados são consistentes quando utilizado um método apropriado de estimação dos parâmetros. Então

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E \{ \hat{\theta}(N) \} = \hat{\theta}_0 \quad (4.9)$$

com $\hat{\theta}_0$ como o verdadeiro vetor de parâmetros e N como a medida de tempo. Se somente a entrada $y(k)$ é medida, as seguintes condições de identificabilidade devem ser satisfeitas:

Condição de identificabilidade 1.

As ordens de A e B não podem ser determinadas baseadas unicamente em medidas de $u(k)$ e $y(k)$, isto é, as ordens dos modelos do processo e do ruído devem ser conhecidas (BOHLIN, 1971 apud ISERMANN *et al.* 1992). Prova ver ISERMANN *et al.* (1992).

Condição de identificabilidade 2.

A Equação 4.5 mostra que $m_a + m_b$ parâmetros desconhecidos do processo $\hat{a}_i$ e $\hat{b}_i$ podem ser determinados pelos ℓ parâmetros $\hat{\alpha}_i$. Se os polinômios D e $\mathcal{A}$ não tem zeros em comum, uma única determinação dos parâmetros do processo requer $\ell \geq m_a + m_b$ ou

$$\left. \begin{aligned} \max[m_a + \mu, m_b + v + d] &\geq m_a + m_b \\ \max[\mu - m_b, v + d - m_a] &\geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.10)$$

Portanto a ordem do controlador deve ser

$$\left. \begin{aligned} v &> \mu - d + m_a - m_b \rightarrow v \geq m_a - d \\ \text{ou} \\ v &> \mu - d + m_a - m_b \rightarrow \mu \geq m_b \end{aligned} \right\} \quad (4.11)$$

Se o tempo morto do processo é $d=0$, as ordens dos polinômios do controlador devem ser satisfeitas, ou seja, $\mu \geq m_a$ ou $\mu \geq m_b$. Se $d>0$, ou $v \geq m_a - d$ ou $\mu \geq m_b$ deve ser satisfeito.

Os parâmetros $\hat{d}_i$ podem ser calculados unicamente de $\hat{\beta}_i$ se $r \geq m_d$, isto é,

$$\mu \geq 0 \quad (4.12)$$

Se $\mathcal{A}(z^{-1})$ e $D(z^{-1})$ possuem p pólos comuns, eles não podem ser identificados, mas somente $\ell - p$ parâmetros $\hat{\alpha}_i$ e $r - p$ parâmetros $\hat{\beta}_i$. A condição de identificabilidade 2 para os parâmetros de processo $\hat{a}_i$ e $\hat{b}_i$ então tornam-se

$$\max[\mu - m_b, v + d - m_a] \geq p \quad (4.13)$$

Note que somente os zeros comuns de $\mathcal{A}$ e D são de interesse, e não aqueles de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ como $\mathcal{B} = DP$ e P é conhecido. Portanto, o número de zeros comuns no numerador e no denominador de

$$G_{id}(z) = \frac{D(z^{-1})}{\mathcal{A}(z^{-1})} = \frac{D(z^{-1})}{A(z^{-1})P(z^{-1}) + B(z^{-1})z^{-d}Q(z^{-1})} \quad (4.14)$$

é significativo. Se a ordem do controlador não é grande o suficiente, a estimação de parâmetros em laço fechado pode ser realizada com dois diferentes “*sets controller parameter*”. Ou então deve-se obter equações adicionais para determinar os parâmetros.

Exemplo (ISERMANN *et al.* (1992)):

Os parâmetros do processo de primeira ordem ($m_a = m_b = m = 1$)

$$y(k) + ay(k-1) = bu(k-1) + v(k) + dv(k-1) \quad (4.15)$$

são estimados em laço fechado. Os seguintes controladores são utilizados.

(a) Um controlador proporcional: $u(k) = -q_0 y(k)$, ($v = 0; \mu = 0$)

Equação (4.3) leva para o processo ARMA

$$y(k) + (a + bq_0)y(k-1) = v(k) + dv(k-1) \quad (4.16)$$

ou

$$y(k) + \alpha y(k-1) = v(k) + \beta v(k-1) \quad (4.17)$$

Da comparação dos coeficientes

$$\left. \begin{aligned} \hat{\alpha} &= \hat{a} + \hat{b}q_0 \\ \hat{\beta} &= \hat{d} \end{aligned} \right\} \quad (4.18)$$

Não há solução única para o sistema acima.

Portanto os parâmetros a e b não são identificáveis. A Equação 4.11 requer $v \geq 1$ ou $\mu \geq 1$.

(b) Um controlador Proporcional-Derivativo: $u(k) = -q_0 y(k) - q_1 y(k-1)$, ($v = 1; \mu = 0$)

O processo ARMA agora se tornou de segunda ordem:

$$y(k) + (a + bq_0)u(k-1) + bq_1 y(k-2) = v(k) + dv(k-1) \quad (4.19)$$

ou

$$y(k) + \alpha_1 y(k-1) + \alpha_2 y(k-2) = v(k) + \beta y(k-1) \quad (4.20)$$

Comparando os coeficientes

$$\begin{aligned}
\hat{a} &= \hat{\alpha}_1 - \hat{b}q_0 \\
\hat{b} &= \hat{\alpha}_2 / q_1 \\
\hat{d} &= \hat{\beta}
\end{aligned}
\tag{4.21}$$

Os parâmetros do processo agora são identificáveis.

Se $v = m$ ou $\mu = m$ o sistema terá solução única pois gerará uma matriz quadrada, mas se $v > m$ ou $\mu > m$ um sistema sobre-determinado será formado podendo ser resolvido pelo uso de uma matriz pseudoinversa. A convergência dos parâmetros do processo identificação indireta é muito lento.

4.2.2 Identificação direta do processo ((b) + (d) + (e))

Para a identificação indireta do processo é assumido que o sinal de saída $y(k)$ é medido e que o controlador é conhecido. Então o sinal de entrada $u(k)$ é também conhecido usando a equação do controlador. Portanto, uma medida adicional de $u(k)$ não trará mais informações. Entretanto, se $u(k)$ é usado para a identificação, o processo pode ser identificado diretamente sem a utilização da equação do laço fechado. Além disso, o conhecimento do controlador não é necessário.

A identificação direta em laço fechado requer o conhecimento do filtro de ruído (ISERMANN *et al.* (1992)).

O modelo básico para identificação indireta do processo é o ARMA,

$$[\hat{A}(z^{-1})P(z^{-1}) + \hat{B}(z^{-1})z^{-d}Q(z^{-1})]y(z) = \hat{D}(z^{-1})P(z^{-1})v(z) \tag{4.22}$$

Substituindo a equação do controlador:

$$Q(z^{-1})y(z) = -P(z^{-1})u(z) \tag{4.23}$$

Em (4.22) tem-se:

$$\hat{A}(z^{-1})P(z^{-1})y(z) - \hat{B}(z^{-1})z^{-d}P(z^{-1})u(z) = \hat{D}(z^{-1})P(z^{-1})v(z) \tag{4.24}$$

e depois do cancelamento do polinômio $P(z^{-1})$, obtém-se a equação do modelo do processo em laço aberto. A diferença é que $u(z)$ ou $P(z^{-1})u(z)$ depende de $y(z)$ ou $Q(z^{-1})y(z)$ e não pode ser livremente escolhido.

As condições de identificabilidade para a identificação direta do processo em laço fechado são agora discutidas de duas maneiras. Primeiro, as condições para um único mínimo da função:

$$V = \sum_{k=1}^N e^2(k) \quad (4.25)$$

são consideradas. O modelo do processo é:

$$\frac{1}{\hat{D}(z^{-1})} \left[\hat{A}(z^{-1}) + \hat{B}(z^{-1})z^{-d} \frac{Q(z^{-1})}{P(z^{-1})} \right] y(z) = e(z) \quad (4.26)$$

Um único mínimo da função V com respeito aos parâmetros desconhecidos do processo requer uma única dependência dos parâmetros do processo em:

$$\frac{1}{\hat{D}} \left[\hat{A} + \hat{B}z^{-d} \frac{Q}{P} \right] = \frac{\hat{A}P + \hat{B}z^{-d}Q}{\hat{D}P} = \frac{\mathcal{A}}{\mathcal{B}} \quad (4.27)$$

no sinal do erro. Este resultado é o inverso do lado direito da Equação 4.5, para que os parâmetros $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{D}$ possam ser determinados baseando-se unicamente na função de transferência $\frac{y(z)}{v(z)}$, as condições de identificabilidade 1 e 2 devem ser satisfeitas. Portanto,

no caso de convergência com $e(z) = v(z)$ as mesmas condições de identificabilidade devem ser válidas para identificação direta em laço fechado. Note que o sinal do erro $e(k)$ é determinado pela mesma equação de ambos os processos de identificação direta e indireta. No caso de convergência tem-se $\hat{A} = A$, $\hat{B} = B$ e $\hat{D} = D$ e portanto em ambos casos $e(k) = v(k)$.

A segunda maneira de obter a condição de identificabilidade 2 resulta da consideração das equações básicas de alguns métodos de estimação paramétrica não recursiva. Da equação do método dos mínimos quadrados tem-se que:

$$y(k) = \Psi^T(k)\theta = [-y(k-1)\dots -y(k-m_a)u(k-d-1)\dots u(k-d-m_b)]\theta \quad (4.28)$$

$\psi^T(k)$ é uma linha da matriz Ψ do sistema de equações. Devido ao *feedback*, há uma relação entre os elementos de $\psi^T(k)$:

$$u(k-d-1) = -p_1u(k-d-2) - \dots - p_\mu u(k-\mu-d-1) - q_0y(k-d-1) - \dots - q_v y(k-v-d-1) \quad (4.29)$$

$u(k-d-1)$ é portanto linearmente dependente dos outros elementos de $\psi^T(k)$ se $\mu \leq m_b - 1$ e $v \leq m_a - d - 1$. Somente se $\mu \geq m_b$ ou $v \geq m_a - d$ a dependência linear não existirá. Isto mostra que equações linearmente dependentes são obtidas se a condição 2 não é satisfeita.

Agora resta considerar se os mesmos métodos de identificação podem ser usados tanto para estimação direta em laço fechado como para o laço aberto. Para os métodos dos mínimos quadrados e mínimos quadrados estendido, a equação do erro ou predição do erro um passo a frente é:

$$e(k) = y(k) - \hat{y}(k|k-1) = y(k) - \psi^T(k)\hat{\theta}(k-1) \quad (4.30)$$

A condição de convergência é que $e(k)$ seja estatisticamente independente dos elementos de $\psi^T(k)$. Para o método dos mínimos quadrados tem-se:

$$\psi^T(k) = [-y(k-1)\dots u(k-d-1)\dots] \quad (4.31)$$

e para o método dos mínimos quadrados estendido:

$$\psi^T(k) = [-y(k-1)\dots u(k-d-1)\dots \hat{v}(k-1)\dots] \quad (4.32)$$

No caso de convergência $e(k) = v(k)$ pode ser admitido. Como $v(k)$ influencia somente $y(k)$, $y(k+1)$,..., e os valores destes sinais não aparecem em $\psi^T(k)$, portanto $e(k)$ é certamente independente dos elementos de $\psi^T(k)$. Isto também é verdade com o *feedback* utilizando $u(k)$ via controlador. O erro $e(k)$ é independente dos elementos de $\psi^T(k)$ também

no laço fechado. Portanto, métodos de estimação de parâmetros que são baseados na predição do erro um passo a frente, podem ser aplicados no laço fechado da mesma forma em que são utilizados no laço aberto, sendo satisfeitas as condições de identificabilidade.

Os resultados mais importantes para a identificação em laço fechado sem perturbação externa mas assumindo um processo linear, invariante no tempo, controlador livre de ruído podem ser resumidos como:

1. Para estimação de parâmetros em laço fechado (direto ou indireto), as condições de identificabilidade 1 e 2 devem ser satisfeitas.
2. Para a identificação direta dos parâmetros em laço fechado, métodos utilizando predição do erro podem ser aplicados da mesma forma que são utilizados no laço aberto. O controlador não precisa ser conhecido.
3. Se o controlador não satisfaz a condição de identificabilidade 2, porque ele é de ordem baixa, a identificabilidade pode ser obtida por:
 - a) ligação entre dois controladores com parâmetros diferentes;
 - b) introdução de tempo morto $d \geq m_a - v + p$
 - c) uso de controladores não lineares ou variantes no tempo.

Para informações mais detalhadas ver GUSTAVSSON *et al.* (1977).

4.3 Estimação de parâmetros com perturbação

Seja uma perturbação externa $u_p(k)$ que atua no laço fechado, como mostrado na Figura 4.2. A entrada do processo então torna-se:

$$u(k) = u_R(k) + u_p(k) \quad (4.33)$$

onde:

$$u_R(z) = -\frac{Q(z^{-1})}{P(z^{-1})} y(z) \quad (4.34)$$

O sinal adicional $u_p(k)$ pode ser gerado por um sinal filtrado $p(k)$:

$$u_p(z) = G_p(z)p(z) \quad (4.35)$$

Há muitas maneiras de gerar a perturbação $u_p(k)$. É importante que esta perturbação seja um sinal externo não correlacionado com o ruído do processo $v(k)$.

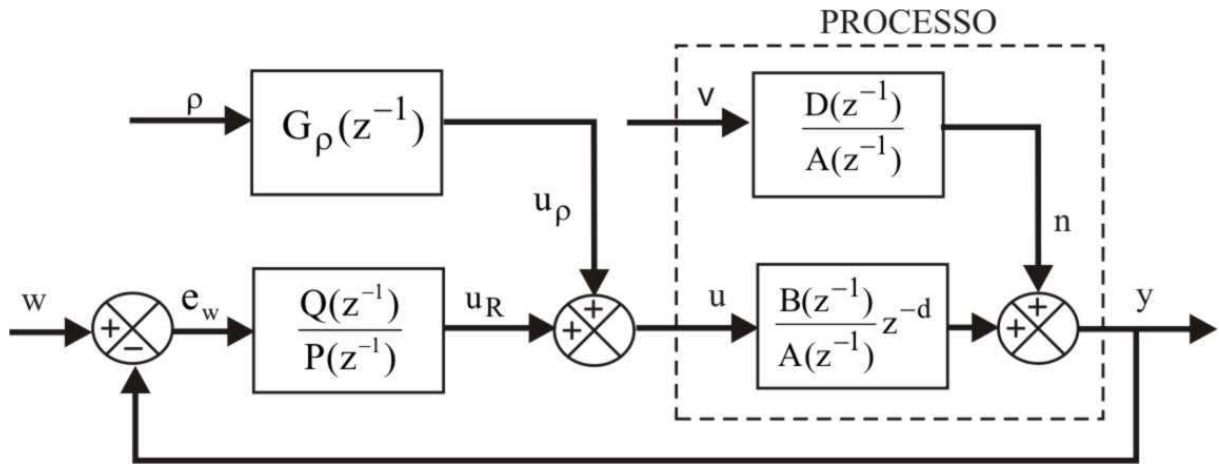


Figura 4.2: Esquema de um processo identificado em laço fechado com uma perturbação externa ρ

Substituindo as Equações 4.1 e 4.2:

$$A(z^{-1})P(z^{-1})y(z) - B(z^{-1})z^{-d}P(z^{-1})u(z) = D(z^{-1})P(z^{-1})v(z) \quad (4.36)$$

e depois do cancelamento do polinômio $P(z^{-1})$, será obtida a equação do processo:

$$A(z^{-1})y(z) - B(z^{-1})z^{-d}u(z) = D(z^{-1})v(z) \quad (4.37)$$

Diferentemente da Equação 4.24, u é gerado não somente do controlador baseado em y , mas da Equação 4.33 pela perturbação $u_p(k)$. Portanto o *feedback* é:

$$\begin{aligned} u(k-d-1) = & -p_1 u(k-d-2) - \dots - p_\mu u(k-\mu-d-1) - q_0 y(k-d-1) - \dots - q_v y(k-v-d-1) \\ & + u_p(k-d-1) + p_1 u_p(k-d-2) + \dots + p_\mu u_p(k-u-d-1) \end{aligned} \quad (4.38)$$

Se $u_p(k) \neq 0$, $u(k-1)$ não é linearmente dependente dos elementos do vetor de dados $\psi^T(k)$ (Equação 4.28), para ordens μ e ν arbitrárias do controlador. O processo descrito pela Equação 4.35 é diretamente identificável se a perturbação externa é persistentemente excitada. A condição de identificabilidade 2 não é válida neste caso. Mas a condição 1 deve ser satisfeita. A perturbação não necessita ser medida, e os resultados são válidos para alguns filtros de ruído D/C. Os mesmos métodos de estimação com predição do erro podem ser aplicados no laço fechado da mesma forma que são utilizados no laço aberto.

Capítulo 5 – Síntese de Controladores: Aspectos Essenciais

5.1 Introdução

Neste capítulo serão abordados dois tipos de controladores, um projetado via síntese direta e o outro um MPC (*Model Predictive Control*). Será proposto o emprego destes dois tipos de controladores acoplados a um algoritmo de estimação de parâmetros *on-line* em sistemas simulados e experimentais.

5.2 Método da síntese direta

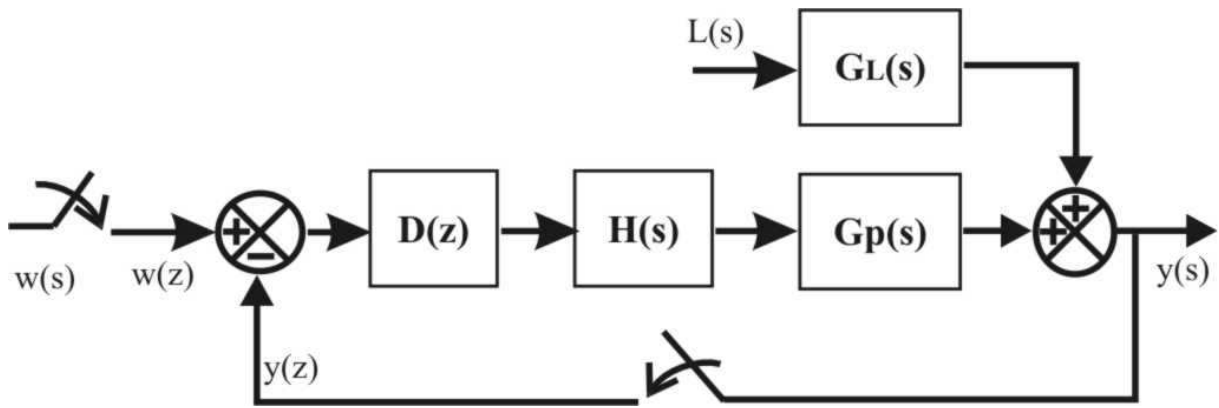


Figura 5.1: Diagrama de blocos para um controlador digital *feedback*

Observando a Figura 5.1 pode-se obter uma equação de mudanças no *set-point* para o laço fechado, como a seguir:

$$\frac{y(z)}{w(z)} = \frac{HG_p(z)D(z)}{1 + HG_p(z)D(z)} \quad (5.1)$$

Pode-se impor uma relação entrada-saída específica para a função de transferência do laço fechado $(y/w)_d$, para que o controlador obtenha um determinado desempenho. Portanto, resolvendo a Equação 5.1 para D:

$$D = \frac{1}{HG_p} \frac{(y/w)_d}{1 - (y/w)_d} \quad (5.2)$$

Uma relação $(y/w)_d$ muito utilizada é a seguinte:

$$\left(\frac{y}{w} \right)_d = \frac{e^{-\sigma s}}{\tau_c s + 1} \quad (5.3)$$

onde τ_c e σ são a constante de tempo e o tempo de atraso da função de transferência do laço fechado. Fazendo $\sigma = d\Delta t$ (o tempo de atraso do processo), a forma discreta da Equação 5.3 com o *hold* de ordem zero tem-se

$$\left(\frac{y}{w} \right)_d = \frac{(1-q)z^{-d-1}}{1 - qz^{-1}} \quad (5.4)$$

onde

$$q = e^{-\frac{\Delta t}{\tau_c}} \quad (5.5)$$

Substituindo (5.4) em (5.2):

$$G_D(z) = \frac{(1-q)z^{-d-1}}{1 - qz^{-1} - (1-q)z^{-d-1}} \frac{1}{HG(z)} \quad (5.6)$$

Para o caso onde HG é de primeira ordem mais tempo morto:

$$HG(z) = \frac{\bar{b}z^{-d-1}}{1 - \bar{a}z^{-1}} \quad (5.7)$$

$$G_D(z) = \frac{(1-q)}{1 - qz^{-1} - (1-q)z^{-d-1}} \left(\frac{1 - \bar{a}z^{-1}}{\bar{b}} \right) \quad (5.8)$$

onde:

$$\bar{a} = e^{-\frac{\Delta t}{\tau}} \quad (5.9)$$

$$\bar{b} = K(1 - \bar{a}) \quad (5.10)$$

Para o caso de um processo de primeira ordem sem tempo morto:

$$G_D(z) = \frac{(1-q)(1-\bar{a}z^{-1})}{(1-z^{-1})\bar{b}} \quad (5.11)$$

$$\frac{u(z)}{e_w(z)} = \frac{(1-q)(1-\bar{a}z^{-1})}{(1-z^{-1})\bar{b}} \quad (5.12)$$

$$u(k) = u(k-1) + \left(\frac{1-q}{\bar{b}} \right) (e_w(k) - \bar{a}e_w(k-1)) \quad (5.13)$$

Na Equação 5.3 τ_c é a constante de tempo do laço fechado e funciona como parâmetro de sintonia. τ_c grande fará com que o controlador fique lento e τ_c pequeno gera um controlador rápido e muito agressivo. Nota-se que a Equação (5.11) tem a mesma estrutura de um controlador PI (proporcional-integral) onde o termo $(1-z^{-1})$ caracteriza a ação integral, portando este controlador é capaz de eliminar o *off-set*.

Neste trabalho foi utilizada a estimação direta dos parâmetros, para um sistema de 1ª ordem as condições de identificabilidade 1 e 2 são satisfeitas, pois a ordem do processo é conhecida e a do controlador é no mínimo da mesma ordem do processo a ser identificado.

O controlador digital projetado via síntese direta apresenta os inconvenientes de gerar ações de controle violentas (SEBORG *et al.*, 1989) e ser inapropriado para sistemas de ordem alta.

Este método pode ser generalizado para sistemas de ordens maiores, para maiores detalhes ver SEBORG *et al.* (1986), SEBORG *et al.* (1989) e SMITH e CORRIPIO (1997).

5.3 O MPC (Controle preditivo baseado em modelo)

O MPC se tornou muito popular no meio industrial e é considerado como um dos mais importantes desenvolvimentos em controle de processos devido ao seu potencial de aplicações industriais (RICHALET *et al.* 1978; CUTLER e RAMAKER, 1980) e pela capacidade de lidar diretamente com restrições no processo. O controle preditivo baseado em

modelos é uma estratégia bem estabelecida para processos lineares (PRETT e GARCIA, 1988; MAURATH *et al.*, 1988; GARCIA *et al.*, 1989).

O controle preditivo por modelos é a estratégia de controle mais usada para o caso multivariável. A primeira técnica MPC foi desenvolvida independentemente por dois grupos industriais na década de 70. A Shell Oil (Houston, Texas) reportou a estratégia DMC (*Dynamic Matrix Control*) enquanto uma técnica similar (IDCOM) foi publicada por uma pequena companhia em 1978. Desde então, centenas de aplicações de técnicas relativas ao MPC têm aparecido em refinarias e plantas petroquímicas. A estratégia MPC foi desenvolvida para problemas multivariáveis de difícil controle onde existem significantes interações entre entradas manipuladas e saídas controladas. A vantagem chave do MPC é que ele pode acomodar restrições de desigualdade sobre as variáveis do processo. Uma versão adaptativa do MPC, o GPC (*Generalized Predictive Control*) (CLARKE *et al.* 1987a; 1987b) tem recebido considerável atenção e tem sido aplicado na indústria.

Na prática os processos químicos geralmente são operados usando controladores lineares, embora seja bem conhecido que o processo possa ser altamente não linear. Controladores preditivos tais como DMC (*Dynamic Matrix Control*) (CUTLER e RAMAKER, 1980), QDMC (*Quadratic Dynamic Matrix Control*) (GARCIA e MORSHEDI, 1986) e IMC (*Internal Model Control*) (GARCIA e MORARI, 1982), desenvolvidos inicialmente para processos lineares, têm sido estendidos com muito sucesso a processos não lineares por vários pesquisadores como, ECONOMOU *et al.* (1986), HUNT e SBARBARO (1991), NAHAS *et al.* (1992), SAINT-DONAT *et al.* (1991) e muitos outros.

O conceito básico do MPC é mostrado na Figura 5.2. Em um determinado instante “k” de amostragem, o controlador recebe informações sobre o estado corrente do sistema e, baseado nestas informações e no modelo do processo, prediz o comportamento dinâmico futuro do sistema em todo um horizonte de predição P, a partir daí, determina-se para todo o horizonte de controle M, com M sempre maior que P, a trajetória das variáveis manipuladas que otimizaram uma função objetivo predeterminada para o laço fechado (GARCIA *et al.*, 1989). Se não existissem erros de modelagem nem perturbações e se o problema de otimização pudesse ser resolvido para um horizonte infinito, então toda a trajetória das variáveis manipuladas, calculada no instante de amostragem “k” poderia ser implementada. Entretanto, normalmente isso não é possível, fazendo com que o comportamento do sistema seja diferente do comportamento predito pelo modelo. Por isso, para a incorporação de mecanismos *feedback*, a função obtida para todo o horizonte de controle tem apenas seu primeiro termo implementado e todo cálculo é repetido no próximo instante de amostragem e

assim sucessivamente. Quando uma nova medida é realizada, todo o procedimento de predição e otimização é repetido para encontrar o novo conjunto de entradas que levam o sistema até o ponto de operação desejado. Os horizontes de predição e controle vão se movendo juntos, ou seja, P e M não mudam.

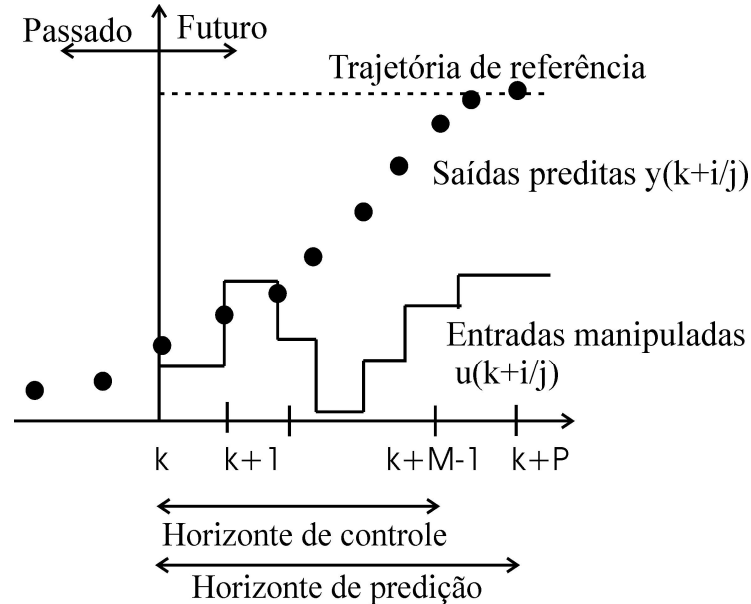


Figura 5.2: Idéia básica do controle preditivo baseado em modelos (MPC).

5.3.1 Cálculo do MPC linear de 1ª ordem

Sendo a equação diferencial que representa o processo:

$$\tau \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = Ku(t) \quad (5.14)$$

Admitindo que $u(t)$ é constante ao longo do intervalo de amostragem, a Equação 5.14 pode ser integrada de t a $t + \Delta t$ restando:

$$\hat{y}(k+1) = e^{(-\tau^{-1}\Delta t)}y(k) + (1 - e^{(-\tau^{-1}\Delta t)})Ku(k) \quad (5.15)$$

onde $y(k)$ é a saída do sistema no tempo de amostragem corrente t_k . A Equação 5.15 pode ser usada para predição de P passos à frente ($j=1, \dots, P$) e pode ser reescrita na forma de velocidade:

$$\hat{y}(k+j) = \hat{y}(k+j-1) + A\Delta\hat{y}(k+j-1) + B\Delta u(k+j-1) \text{ com } \hat{y}(k) = y(k) \quad (5.16)$$

onde:

$$\Delta\hat{y}(k+j-1) = \hat{y}(k+j-1) - \hat{y}(k+j-2)$$

$$\Delta u(k+j-1) = u(k+j-1) - u(k+j-2)$$

$$A = e^{\left(-\frac{\Delta t}{\tau}\right)}$$

$$B = \left(1 - e^{\left(-\frac{\Delta t}{\tau}\right)}\right) K$$

$y(k)$ é a saída medida da planta no intervalo de amostragem corrente, j é o instante de tempo na etapa de predição. P é o horizonte de predição e M é o horizonte de controle. A Equação 5.16 pode ser escrita para cada instante de predição como:

$$j=1: \quad \hat{y}(k+1) = y(k) + A\Delta y(k) + B\Delta u(k)$$

$$j=2: \quad \hat{y}(k+2) = y(k) + (A + A^2)\Delta y(k) + (1 + A)B\Delta u(k) + B\Delta u(k+1)$$

$$j=3: \quad \hat{y}(k+3) = y(k) + (A + A^2 + A^3)\Delta y(k) + (1 + A + A^2)B\Delta u(k) + (1 + A)B\Delta u(k+1) + B\Delta u(k+2)$$

$$j=M: \quad \hat{y}(k+M) = y(k) + \left(\sum_{i=1}^M A^i\right)\Delta y(k) + \left(\sum_{i=1}^M A^{i-1}\right)B\Delta u(k) + \dots + B\Delta u(k+M-1)$$

$$j=P: \quad \hat{y}(k+P) = y(k) + \left(\sum_{i=1}^P A^i\right)\Delta y(k) + \left(\sum_{i=1}^P A^{i-1}\right)B\Delta u(k) + \dots + \left(\sum_{i=1}^{P-M+1} A^{i-1}\right)B\Delta u(k+M-1)$$

As expressões anteriores podem ser re-escritas na forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} \hat{y}(k+1) \\ \hat{y}(k+2) \\ \vdots \\ \hat{y}(k+M) \\ \vdots \\ \hat{y}(k+P) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B & 0 & \cdots & 0 \\ (A+1)B & B & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & 0 \\ \left(\sum_{i=1}^M A^{i-1}\right)B & \left(\sum_{i=1}^{M-1} A^{i-1}\right)B & \cdots & B \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \left(\sum_{i=1}^P A^{i-1}\right)B & \left(\sum_{i=1}^{P-1} A^{i-1}\right)B & \cdots & \left(\sum_{i=1}^{P-M+1} A^{i-1}\right)B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u(k) \\ \Delta u(k+1) \\ \vdots \\ \Delta u(k+M-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y(k) + A\Delta y(k) \\ y(k) + \left(\sum_{i=1}^2 A^i\right)\Delta y(k) \\ \vdots \\ y(k) + \left(\sum_{i=1}^M A^i\right)\Delta y(k) \\ \vdots \\ y(k) + \left(\sum_{i=1}^P A^i\right)\Delta y(k) \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

Note que para um sistema SISO de 1ª ordem a representação do sistema em equação de diferenças com *hold* coincide com a representação em espaço de estados. Um processo que possui ordem maior que 1, pode ser representado por meio de espaço de estados através da transformação da equação original em um sistema de equações diferenciais de primeira ordem. Isto pode ser feito também para sistemas representados por equações de diferenças, ver OGATA (1995).

A Equação 5.17 pode ser representada sinteticamente na forma:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{\Gamma} \Delta \mathbf{U} + \boldsymbol{\gamma} \quad (5.18)$$

onde:

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \hat{y}(k+1) \\ \hat{y}(k+2) \\ \vdots \\ \hat{y}(k+M) \\ \vdots \\ \hat{y}(k+P) \end{bmatrix}, \Delta \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \Delta u(k) \\ \Delta u(k+1) \\ \vdots \\ \Delta u(k+M-1) \end{bmatrix}, \boldsymbol{\gamma} = \begin{bmatrix} y(k) + A\Delta y(k) \\ y(k) + \left(\sum_{i=1}^2 A^i\right)\Delta y(k) \\ \vdots \\ y(k) + \left(\sum_{i=1}^M A^i\right)\Delta y(k) \\ \vdots \\ y(k) + \left(\sum_{i=1}^P A^i\right)\Delta y(k) \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & 0 & \dots & 0 \\ (\mathbf{A} + 1)\mathbf{B} & \mathbf{B} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & 0 \\ \left(\sum_{i=1}^M \mathbf{A}^{i-1}\right)\mathbf{B} & \left(\sum_{i=1}^{M-1} \mathbf{A}^{i-1}\right)\mathbf{B} & \dots & \mathbf{B} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \left(\sum_{i=1}^P \mathbf{A}^{i-1}\right)\mathbf{B} & \left(\sum_{i=1}^{P-1} \mathbf{A}^{i-1}\right)\mathbf{B} & \dots & \left(\sum_{i=1}^{P-M+1} \mathbf{A}^{i-1}\right)\mathbf{B} \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

5.3.2 O problema de otimização

A seguinte função objetivo do problema de otimização usualmente empregada para propósitos de controle é:

$$\mathbf{J} = \min_{\Delta \mathbf{u}(k), \dots, \Delta \mathbf{u}(k+M-1)} (\mathbf{e}^T \mathbf{Q} \mathbf{e} + \Delta \mathbf{U}^T \mathbf{R} \Delta \mathbf{U}) \quad (5.21)$$

Na Equação 5.21 o primeiro termo representa o desvio entre o *setpoint* e a variável controlada e o segundo termo é responsável pela penalização de grandes ações de controle. $\mathbf{Q}$ e $\mathbf{R}$ são matrizes diagonais positivas definidas e são parâmetros ajustáveis do controlador. O vetor desvio do *setpoint* ($\mathbf{e}$) é definido como:

$$\mathbf{e} = (\mathbf{Y}^{\text{SP}} - \mathbf{Y}) \quad (5.22)$$

e $\mathbf{Y}^{\text{SP}}$ é definido como:

$$\mathbf{Y}^{\text{SP}} = [y^{\text{sp}}(k+1), y^{\text{sp}}(k+2), \dots, y^{\text{sp}}(k+M), \dots, y^{\text{sp}}(k+P)]^T \quad (5.23)$$

Substituindo a Equação 5.18 na Equação 5.22 chega-se a:

$$\mathbf{e} = -\mathbf{\Gamma} \Delta \mathbf{U} + (\mathbf{Y}^{\text{SP}} - \gamma) \text{ ou } \mathbf{e} = -\mathbf{\Gamma} \Delta \mathbf{U} + \mathbf{e}' \quad (5.24)$$

onde $\mathbf{e}' = \mathbf{Y}^{\text{SP}} - \gamma$

5.3.2.a A solução analítica para o caso sem restrições

Derivando a função objetivo da Equação 5.21 com relação aos componentes do vetor $\Delta \mathbf{U}$ e igualando o resultado a zero chega-se a:

$$-\Gamma^T(\mathbf{Q} + \mathbf{Q}^T)\mathbf{e}' + (\mathbf{R} + \mathbf{R}^T)\Delta \mathbf{U} = 0 \quad (5.25)$$

Substituindo a Equação 5.24 na Equação 5.25 e resolvendo-a para $\Delta \mathbf{U}$ chega-se a:

$$\Delta \mathbf{U} = [\Gamma^T(\mathbf{Q} + \mathbf{Q}^T)\Gamma + (\mathbf{R} + \mathbf{R}^T)]^{-1} \Gamma^T(\mathbf{Q} + \mathbf{Q}^T)\mathbf{e}' \quad (5.26)$$

Somente as ações de controle do instante corrente, isto é $\Delta u(k)$, que compõe o vetor aumentado $\Delta \mathbf{U}$, são realmente implementadas.

5.3.2.b O problema de programação quadrática (QP)

Existem dois tipos de programação quadrática:

a) Tipo 1: Minimiza a função objetivo da Equação 5.27 sujeita a restrições de desigualdade linear e restrições de não negatividade, e $\mathbf{H}$ é uma matriz definida semi-positiva.

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2} \Delta \mathbf{U}^T \mathbf{H} \Delta \mathbf{U} + \mathbf{c}^T \Delta \mathbf{U} \\ \Gamma \Delta \mathbf{U} &\leq \mathbf{b} \\ \Delta \mathbf{U} &\geq 0 \end{aligned} \quad (5.27)$$

b) Tipo 2: Minimiza a função objetivo da Equação 5.27 sujeita a restrições de igualdades lineares e restrições de não negatividade, onde $\mathbf{H}$ é a mesma matriz definida semi-positiva. O tipo 1 pode ser resolvido no tipo 2 introduzindo uma variável de folga χ tal que:

$$\begin{aligned}\Gamma \Delta \mathbf{U} + \chi &= \mathbf{b} \\ \chi &\geq 0\end{aligned}\tag{5.28}$$

Definindo:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \Gamma = [\Gamma \quad \mathbf{I}], \quad \Delta \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{U} \\ \chi \end{bmatrix}\tag{5.29}$$

obtém-se o problema do tipo 2

$$\begin{aligned}\mathbf{f}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2} \Delta \mathbf{U}^T \mathbf{H} \Delta \mathbf{U} + \mathbf{c}^T \Delta \mathbf{U} \\ \Gamma \Delta \mathbf{U} &= \mathbf{b} \\ \Delta \mathbf{U} &\geq 0\end{aligned}\tag{5.30}$$

O problema de otimização (Equação 5.21) pode ser convertido em um problema de programação quadrática conforme a Equação 5.27 (maiores detalhes ver VILAÇA, 2000), portanto:

$$\begin{aligned}J &= \min_{\Delta u(k), \dots, \Delta u(k+M-1)} \left\{ \frac{1}{2} \Delta \mathbf{U}^T (2\Gamma^T \mathbf{Q} \Gamma + 2\mathbf{R}) - [\mathbf{e}' \mathbf{Q} \Gamma + (\Gamma^T \mathbf{Q} \mathbf{e}')]^T \Delta \mathbf{U} \right\} \\ \text{sujeito a:} \quad & u_{\min}(k+j) \leq u(k+j) \leq u_{\max}(k+j) \\ & -\Delta u_{\max}(k+j) \leq \Delta u(k+j) \leq \Delta u(k+j) \\ & (j = 0, \dots, M-1)\end{aligned}\tag{5.31}$$

Comparando com o problema de otimização da Equação 5.21 encontra-se que:

$$\begin{aligned}\mathbf{H} &= 2\Gamma^T \mathbf{Q} \Gamma + 2\mathbf{R} \\ \mathbf{c}^T &= -[\mathbf{e}' \mathbf{Q} \Gamma + (\Gamma^T \mathbf{Q} \mathbf{e}')]^T\end{aligned}$$

5.3.3 Eliminação de *off-set*

Quando o MPC é aplicado a um sistema dinâmico representado pela Equação 5.14 e se a malha fechada é assintoticamente estável, o controlador proporciona a esta malha um comportamento livre de *off-set*.

Prova: Considere a Equação 5.25 quando $k \rightarrow \infty$. Então se tem:

$$-\Gamma^T(\mathbf{Q} + \mathbf{Q}^T)\mathbf{e}(\infty) + (\mathbf{R} + \mathbf{R}^T)\Delta\mathbf{U}(\infty) = 0$$

Uma vez que $\Delta\mathbf{U}(\infty) = \mathbf{U}(\infty) - \mathbf{U}(\infty) = 0$, chega-se a:

$$\mathbf{e}(\infty) = \mathbf{0} \Rightarrow [-\Gamma\Delta\mathbf{U}(\infty) + \mathbf{Y}^{\text{SP}} - \gamma(\infty)] = \mathbf{0} \quad (5.32)$$

Substituindo γ da Equação 5.19 e a Equação 5.23 na Equação 5.32 e lembrando que $\Delta\mathbf{y}(\infty) = 0$, chega-se a:

$$\mathbf{y}(\infty) = \mathbf{y}^{\text{SP}}(\infty) \text{ c.q.d.}$$

As condições de identificabilidade para este controlador também são satisfeitas, pois a função de transferência da malha fechada para o caso irrestrito tem no mínimo dois pólos (maiores detalhes ver VILAÇA, 2000).

Capítulo 6 – O sistema experimental

6.1 Introdução

Neste capítulo descreve-se a construção, montagem e a operação em laço aberto de um sistema de tanques de nível. O sistema é um processo que tem por objetivo o controle do nível de líquido dentro de um tanque. A vazão de líquido que entra no tanque é considerada como entrada do sistema e o nível do mesmo é considerada como saída.

6.2 Descrição do sistema

O sistema de tanques de nível utilizado neste trabalho, faz parte de um conjunto de processos do Laboratório de Automação e Controle de Processos da Faculdade de Engenharia Química da Universidade Federal de Uberlândia.

O sistema é constituído de dois tanques construídos em PVC. Um dos tanques é formado por um tubo de 150 cm de altura e 20 cm de diâmetro. O outro tanque é dividido em quatro seções: a inferior é formada por um tubo com 22,5 cm de altura e 30 cm de diâmetro; a segunda está localizada entre 22,5 e 62 cm e possui um diâmetro de 20 cm; a penúltima que está entre 62 e 93 cm, tem 10cm de diâmetro e a última seção, que começa em 93 cm e se estende até 150 cm e possuindo 7,5 cm de diâmetro.

O processo utiliza uma bomba centrífuga de $\frac{1}{4}$ CV de potência, uma válvula de controle eletropneumática, um medidor-transmissor de pressão diferencial e válvulas manuais. Para a aquisição, processamento e envio de sinais são utilizados o sistema de aquisição de dados (SCXI – *National Instruments™*) e um computador Pentium 500MHz.

O sinal enviado pelo sistema de controle, responsável pela abertura da válvula de controle, pode variar entre 4 e 20 mA. Os limites 4 e 20 mA correspondem aos estados de completamente fechado e aberto da válvula, respectivamente.

O sinal recebido pelo sistema como medida da altura da coluna de líquido no tanque, é enviado por um sensor-transmissor de pressão diferencial. Este sinal está compreendido entre 4 a 20 mA, tendo uma relação linear com a altura da coluna de líquido. O sistema de aquisição de dados não lê sinais em unidades de corrente, por isso é realizada a conversão

deste para que fique compreendido entre 1,8 e 9,0 V. Esta mudança é feita por meio de uma resistência. A relação linear é mantida.

Um dos tanques de nível apresenta a não linearidade de mudança brusca de diâmetro que varia de um fator de quatro, quando se considera a seção inferior e superior desse. O sistema também apresenta não linearidade devido à válvula de controle, que apesar de ser do tipo linear, apresenta histerese.

Neste trabalho foram realizados experimentos no tanque de área variável e no tanque de área constante individualmente, ou seja, em separado. Note que os dois tanques podem ser ligados em paralelo formando um sistema de dois tanques com interação.

O detalhamento do sistema é mostrado nas figuras a seguir.

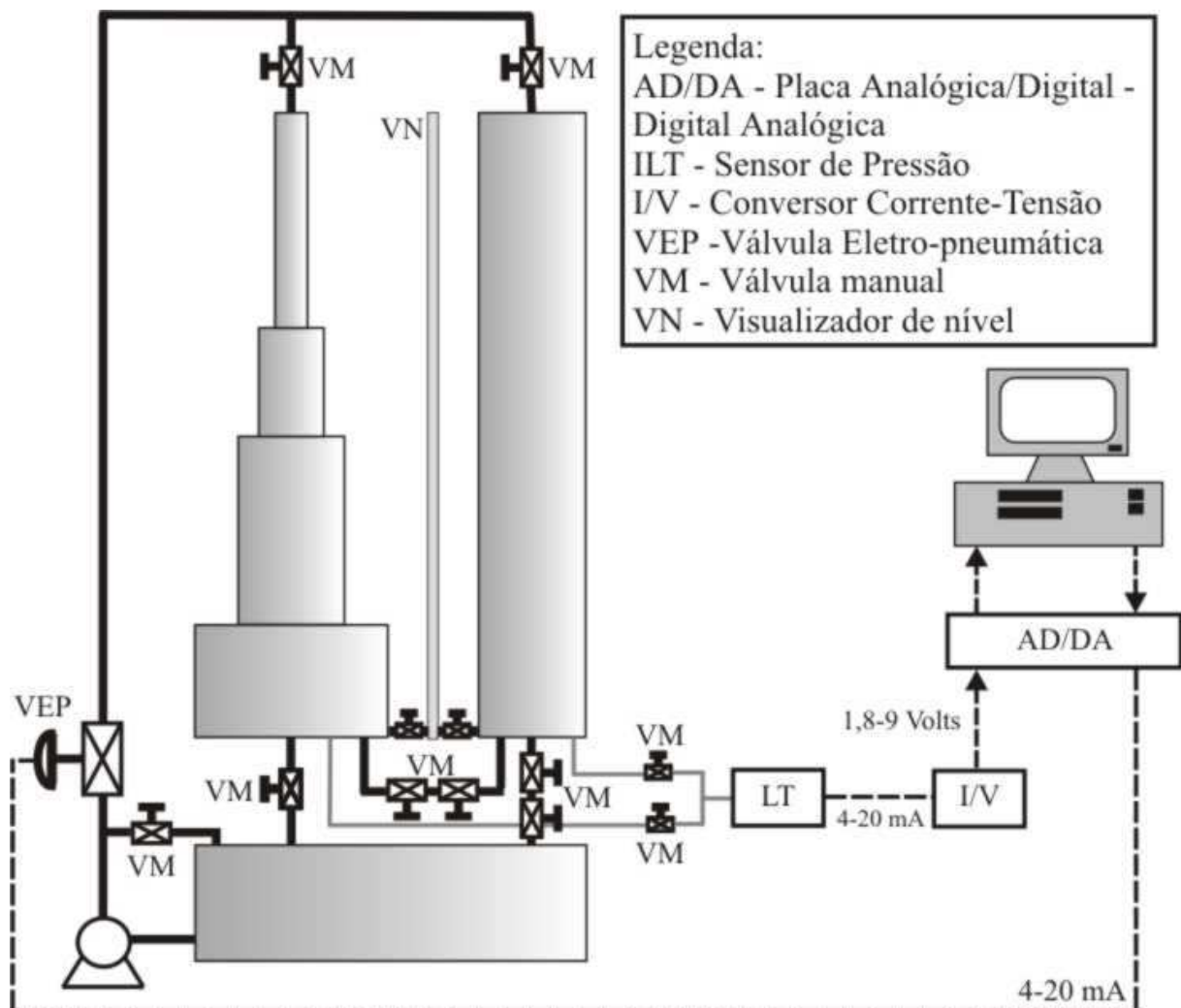


Figura 6.1: Diagrama do sistema de controle dos tanques de nível

A unidade experimental está ilustrada na Figura 6.2. As Figuras 6.3 e 6.4 mostram em detalhes a válvula de controle e o sensor de pressão. As Figuras 6.5 e 6.6 são as fotos do computador e do sistema de aquisição de dados utilizados neste trabalho.



Figura 6.2: Unidade experimental

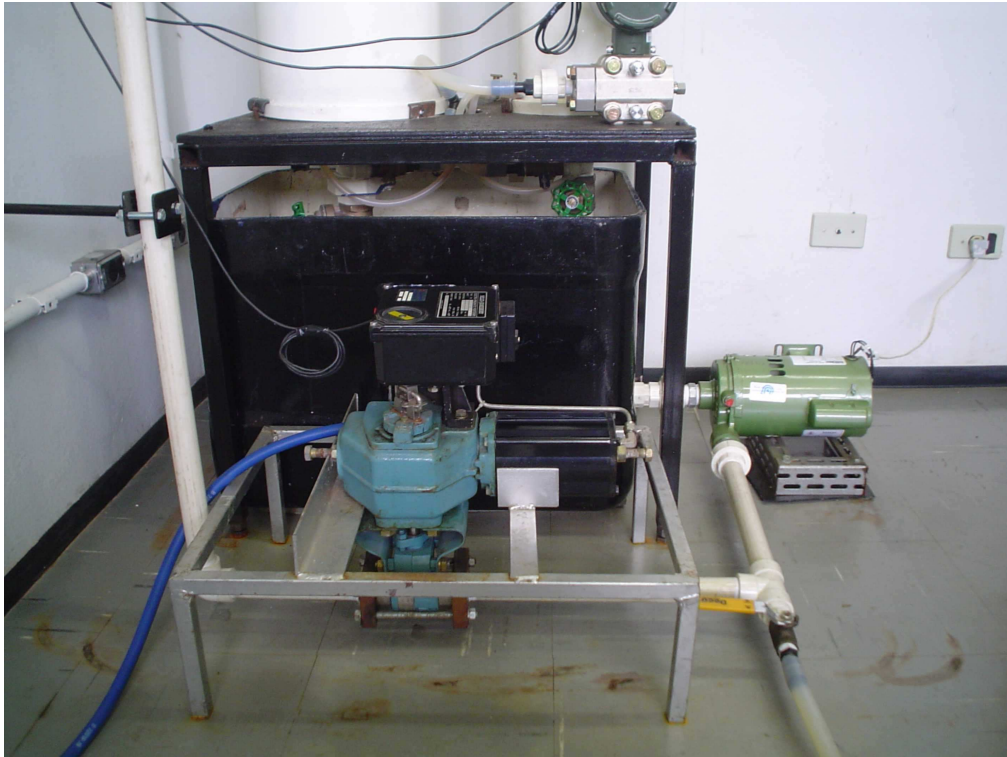


Figura 6.3: Válvula de controle

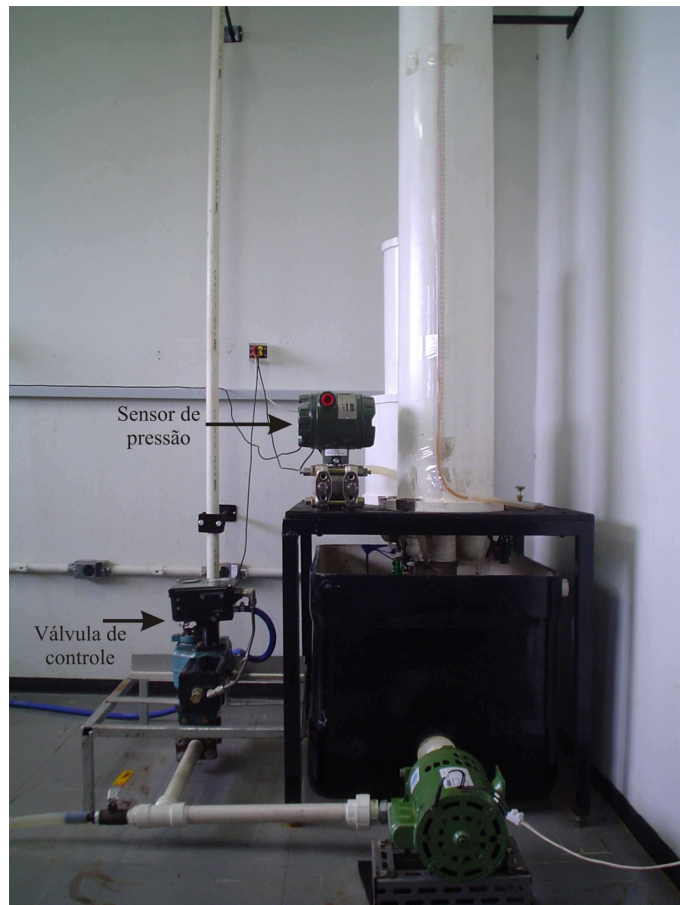


Figura 6.4: Sensor de pressão e válvula de controle

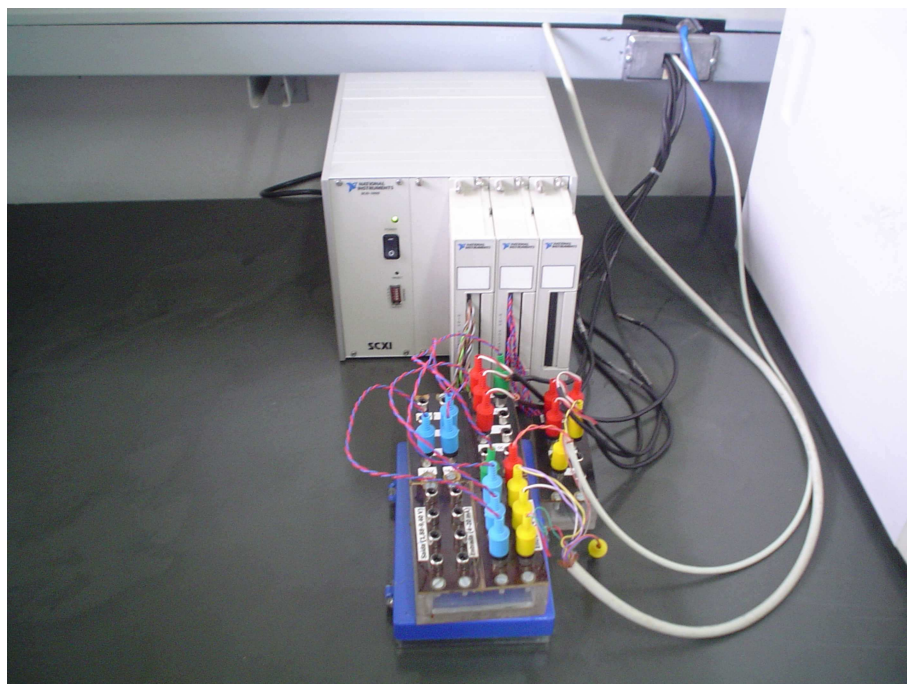


Figura 6.5: Sistema de aquisição de dados



Figura 6.6: Computador Pentium 500MHz

6.3 Calibração dos instrumentos

O objetivo da calibração dos elementos sensores é obter uma relação entre a variável a ser medida, no caso do tanque de nível esta é a altura, e o sinal enviado pelo sensor. A calibração obtida, realmente, não se refere ao sensor especificamente, mas sim ao conjunto de elementos de medição, ou seja, neste caso ao sensor de pressão e o conversor I/V. Desta forma, uma relação $\text{Voltagem} \times \text{Altura}$ é obtida.

6.3.1 Procedimento para determinação da curva de calibração

Um *software* em LabView[®] é utilizado para ler informações da planta em volts. A primeira válvula manual na saída do tanque de área constante é operada totalmente aberta ou totalmente fechada, devido a sua utilização especificamente para fins de calibração do sensor de pressão. Portanto, inicialmente esta válvula deve ser fechada e a válvula de controle totalmente aberta até encher completamente o tanque. Quando o tanque estiver cheio, a válvula de controle deve ser fechada e a válvula manual aberta e fechada em diferentes posições do tanque, anotando-se a altura da coluna de água e a respectiva voltagem. Desta forma, obtém-se um grupo de dados de Altura(cm) x Voltagem(Volts) com o qual procede-se uma aproximação linear. A equação da curva de calibração obtida para o conjunto sensor de pressão I/V é mostrada (o coeficiente de correção da reta obtida foi de 1). A curva ajustada pode ser vista na Figura 6.7.

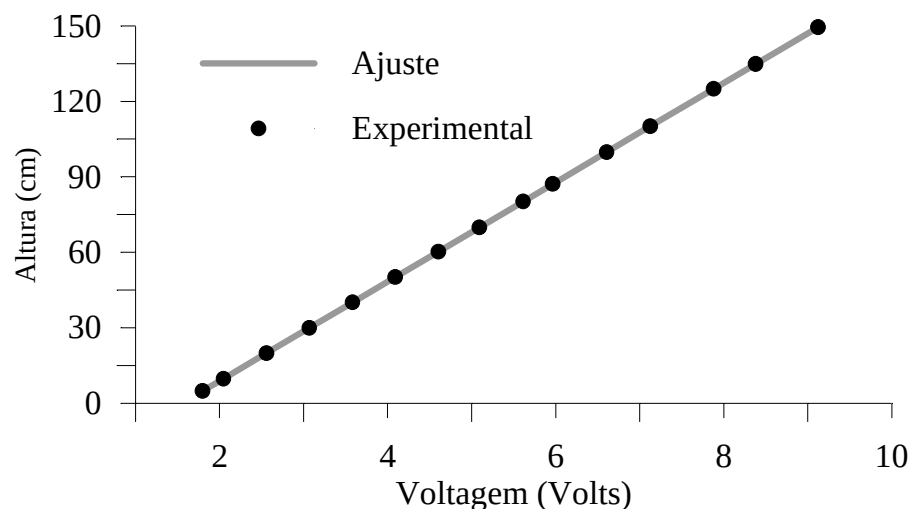


Figura 6.7: Gráfico da curva de calibração do sensor de pressão

$$\text{Altura (cm)} = 17,753(\text{Volts}) - 30,699 \pm 0,057 \text{ (95\% de confiança)} \quad (6.1)$$

6.4 Operação em malha aberta

Nessa operação são promovidas perturbações ao sistema e se observa qual será seu comportamento frente a essas perturbações. Implementou-se uma VI (programa em linguagem LabVIEW[®]) para este fim. A operação em malha aberta é importante para determinar o modelo que melhor se ajusta à resposta do sistema frente a perturbações. A corrente foi limitada a faixa de 9,7 a 14 mA para o tanque de área variável e de 10 a 14 mA para o tanque de área constante. Esta limitação tem como objetivo evitar que haja falta de água nos tanques (corrente mínima) ou que os mesmos transbordem (corrente máxima). A válvula de controle utilizada neste trabalho é superdimensionada para o sistema em questão, isto trouxe problemas como, baixa *rangeabilidade* e amplificação da histerese. Devido à histerese, a válvula de controle não respondeu bem a pequenas variações de corrente (ações de controle) calculadas pelo controlador.

O teste consistiu em se variações na corrente enviada à válvula de controle. As perturbações aplicadas foram uma sequência de sinais randômicos tanto na amplitude como na duração (tempo). Todo o teste foi controlado pelo programa implementado. A operação em malha aberta foi realizada para os dois tanques em separado. Primeiramente no tanque com área constante onde o tempo de amostragem foi de 3 segundos e depois no tanque com área variável onde o intervalo de amostragem foi de 0,5 segundo. A seleção dos tempos de amostragem foram feitas baseando-se em observações preliminares do comportamento das plantas. Como será mostrado nas seções adiante, os tempos de amostragem utilizados se encaixam nas recomendações feitas por SEBORG *et. al.*, (1989), principalmente na que o tempo de amostragem deve ser menor que 10% da constante de tempo do sistema. “A *seleção do tempo de amostragem continua sendo mais uma arte do que ciência*” (SEBORG, *et al.*, 1989).

Os gráficos a seguir mostram as perturbações nos sistemas e as suas respectivas respostas dinâmicas.

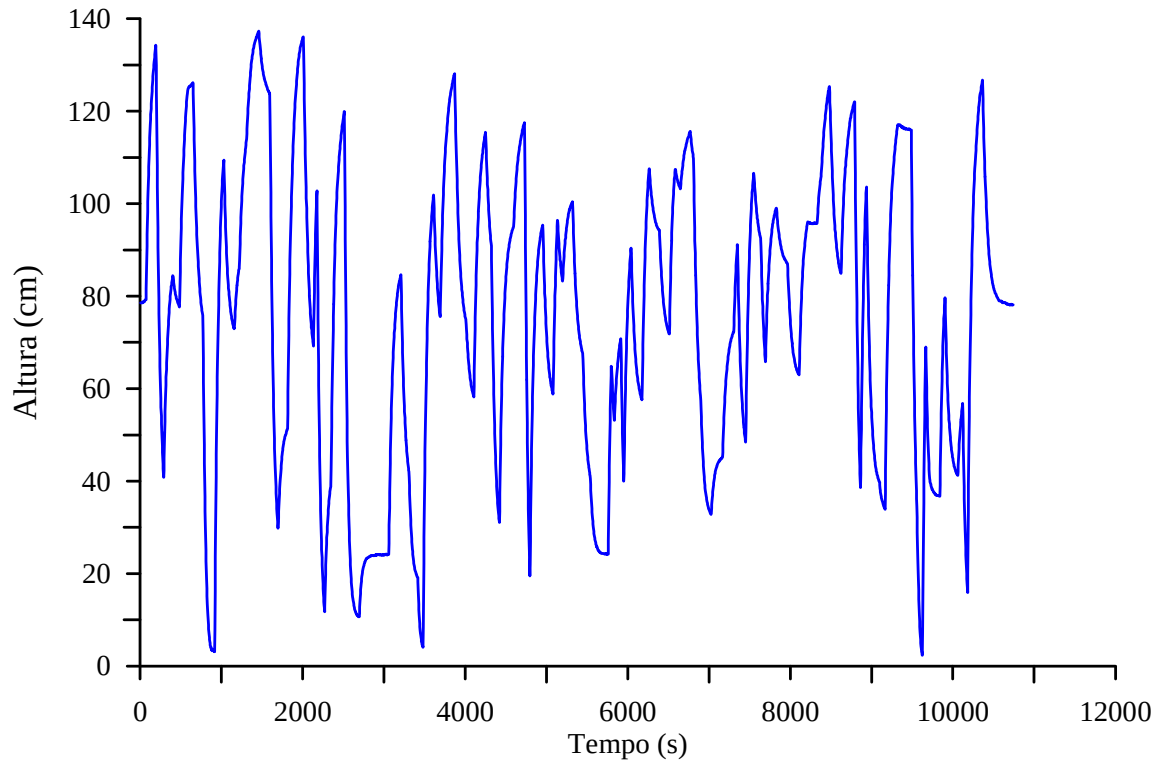


Figura 6.8: Altura da coluna de líquido no tanque de área constante

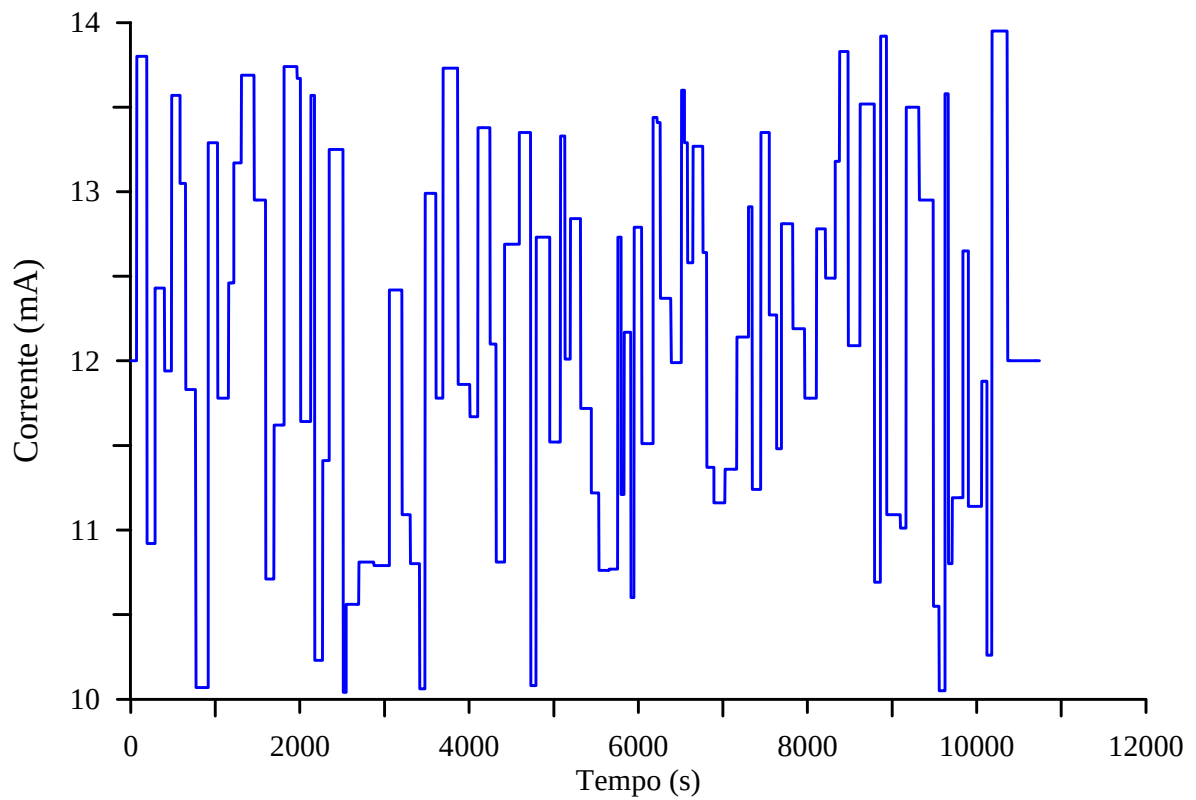


Figura 6.9: Corrente enviada à válvula no tanque de área constante

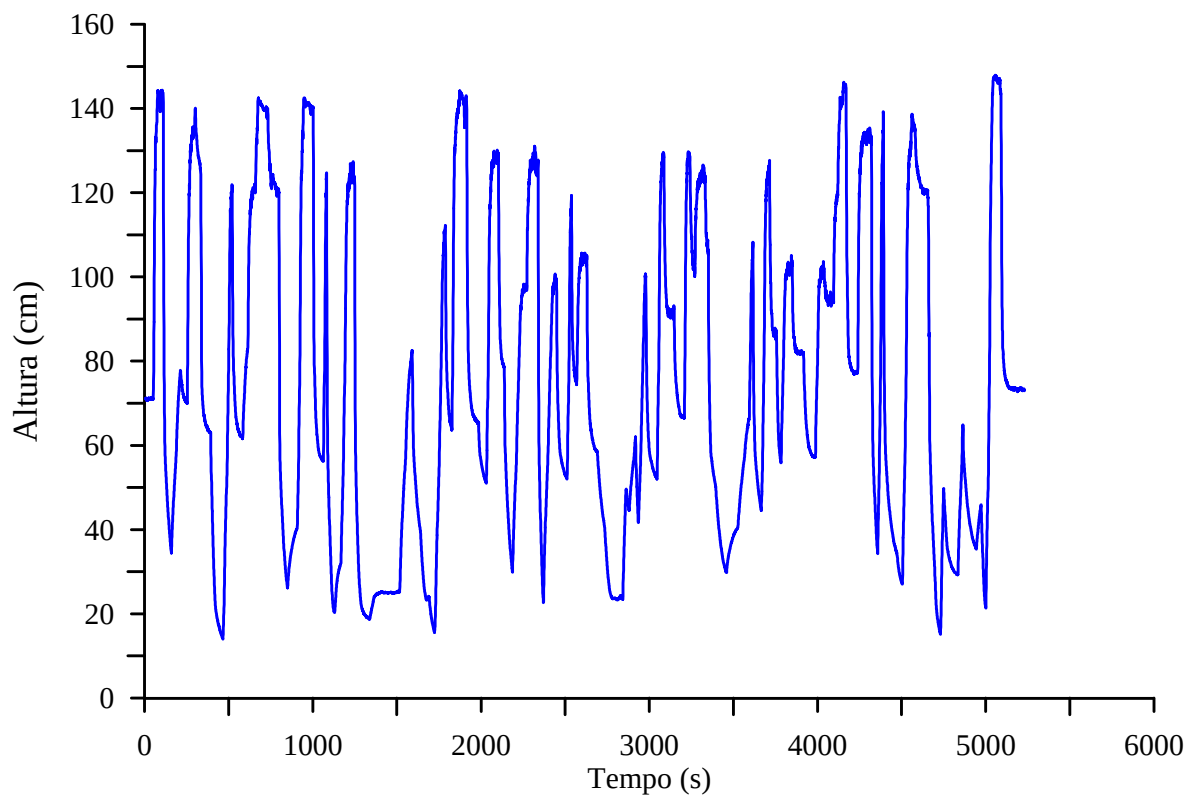


Figura 6.10: Altura da coluna de líquido no tanque de área variável

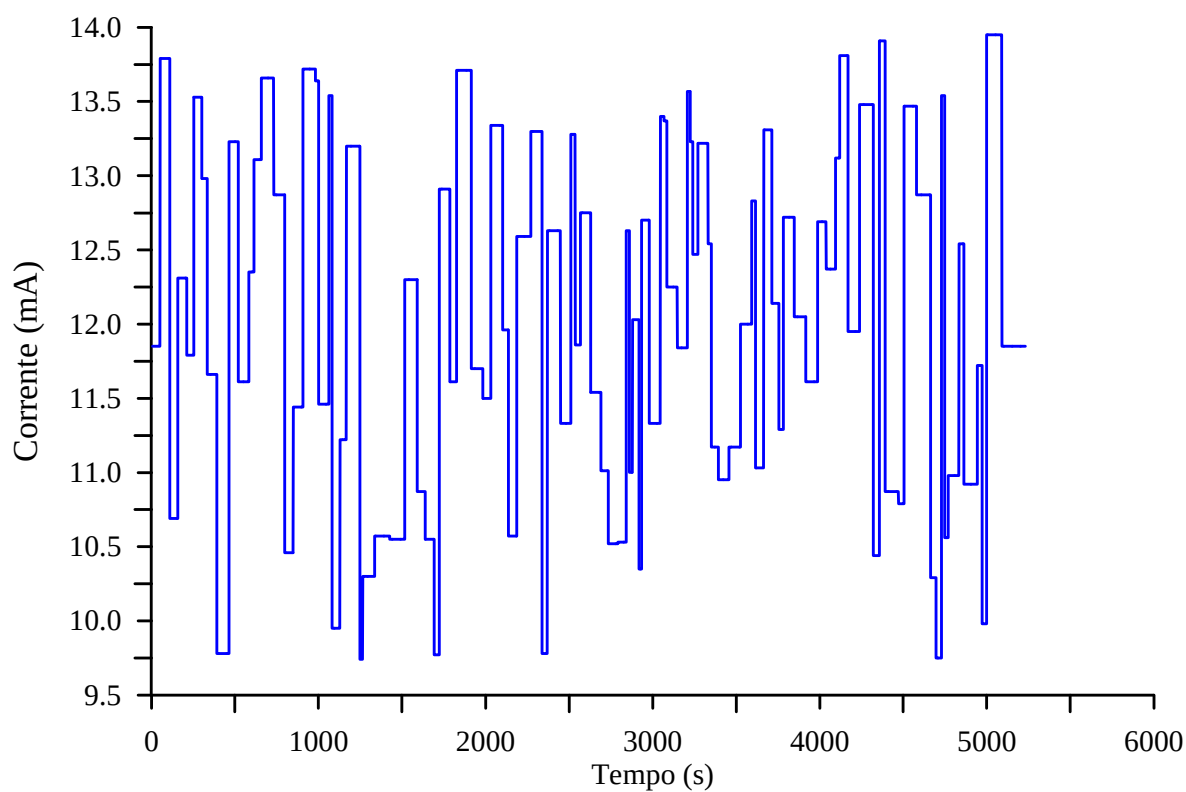


Figura 6.11: Corrente enviada à válvula no tanque de área variável

6.5 Identificação do sistema

Para modelagem dos sistemas serão utilizados modelos semi-empíricos (caixa cinza) dos processos.

6.5.1 Modelagem do tanque com área constante

Seja a seguinte representação do tanque com área constante:

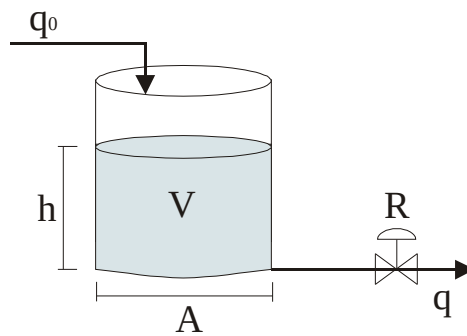


Figura 6.12: Representação esquemática da unidade experimental.

Onde q_0 é a vazão de entrada, q é a vazão de saída, h é a altura do líquido dentro do tanque, V é o volume do líquido no tanque, R é a resistência da válvula manual e A é a área da seção transversal do tanque.

O balanço de massa para o sistema pode ser dado por:

$$\frac{dm}{dt} = \dot{m}_0 - \dot{m} \quad (6.2)$$

Onde dm/dt é a variação da massa com o tempo (acúmulo), $\dot{m}_0$ é a vazão mássica que entra no tanque e $\dot{m}$ é vazão mássica que deixa o tanque. Admitindo que a densidade do líquido (ρ) é constante a Equação 6.2 pode ser escrita da seguinte forma :

$$\rho \frac{dV}{dt} = \rho q_0 - \rho q \quad (6.3)$$

$$\frac{dV}{dt} = q_0 - q \quad (6.4)$$

$$A \frac{dh}{dt} = q_0 - q \quad (6.5)$$

Na saída do tanque foi utilizada uma válvula gaveta manual. Admitindo-se que $q = h/R$ chega-se a:

$$A \frac{dh}{dt} = q_0 - \frac{1}{R} h \quad (6.6)$$

$$AR \frac{dh}{dt} + h = Rq_0 \quad (6.7)$$

A hipótese de $q = h/R$ é plausível pois a coluna de líquido dentro do tanque é pequena. Como pode ser visto na Figura 6.13 a variação da altura com a corrente é muito próxima da linear.

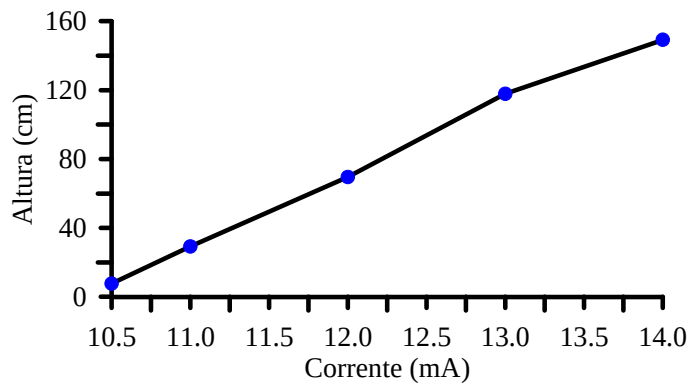


Figura 6.13: Variação da altura com a corrente (Tanque de área constante)

Onde h e q_0 são funções do tempo. Definindo $\tau = AR$ e $\kappa = R$ a Equação 6.7 torna-se:

$$\tau \frac{dh}{dt} + h = \kappa q_0 \quad (6.8)$$

A válvula de controle mantém uma relação linear com a vazão (Figura 6.14) que pode ser representada pela seguinte equação:

$$q = \Omega u + \Xi \quad (6.9)$$

Onde u é a corrente enviada à válvula de controle.

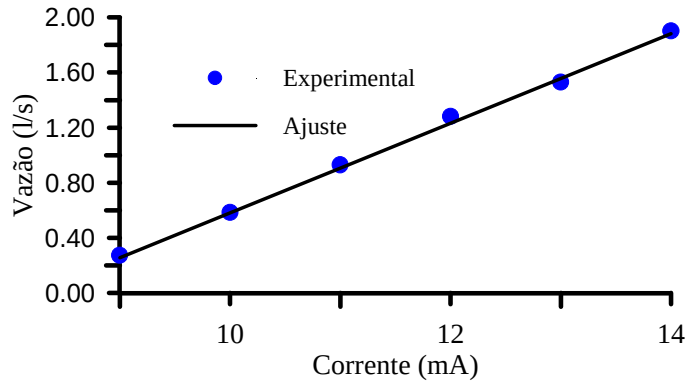


Figura 6.14: Variação da vazão com a corrente

Portanto $\Omega = 0,3248 \text{ (dm}^3/\text{s)}/\text{mA}$ e $\Xi = 2,6664 \text{ dm}^3/\text{s}$ com $R^2 = 0,9988$

Representando a Equação 6.8 em variável desvio já substituindo a Equação 6.9:

$$\tau \frac{dh'}{dt} + h' = \kappa \Omega u' \quad (6.10)$$

Fazendo

$$K = \kappa \Omega \quad (6.11)$$

e substituindo na Equação 6.10 segue que:

$$\tau \frac{dh'}{dt} + h' = K u' \quad (6.12)$$

Onde $h' = h - \bar{h}$, $u' = u - \bar{u}$, sendo $\bar{h}$ e $\bar{u}$ os valores da altura de líquido e da corrente de entrada em estado estacionário inicial. Aplicando a Transformada de Laplace na Equação 6.12 chega-se a:

$$L \left[\tau \frac{dh'}{dt} + h' \right] = L[Ku'] \quad (6.13)$$

$$\tau[sH'(s) - h'(0)] + H'(s) = KU'(s) \quad (6.14)$$

Sendo $h'(0) = 0$:

$$H'(s)(\tau s + 1) = KU'(s) \quad (6.15)$$

$$\frac{H'(s)}{U'(s)} = \frac{K}{\tau s + 1} \quad (6.16)$$

Pela função de transferência deduzida conclui-se que o sistema é de primeira ordem, levando-se em conta a hipótese de que $q = h/R$.

Para o ajuste dos parâmetros K e τ foi utilizado o método de Levenberg-Marquardt obtendo-se os seguintes valores:

$$K=39,24 \text{ cm/mA}$$

$$\tau=50,81 \text{ s}$$

Para uma simulação infinitos passos à frente na fase de validação obteve-se um coeficiente de correlação $R^2=0,9617$ e para 1 passo à frente $R^2=0,9997$. A Figura 6.15 mostra as simulações 1 passo à frente e infinitos passos à frente. Foram utilizados 2/3 das amostras para a fase de treinamento.

Sendo:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{k=1}^N (y(k) - \hat{y}(k))^2}{\sum_{k=1}^N (y(k) - \bar{y})^2} \quad (6.17)$$

onde

N : número de pontos do grupo de dados;

$y(k)$: valores de saída para os pontos do grupo de dados ($k=1...N$);

$\hat{y}$: valores previstos por um modelo para os pontos de saída de um grupo de dados ($k=1...N$);

$\bar{y}$: valor médio dos pontos de saída do grupo de dados.

Valores satisfatórios de R^2 estão próximos de 1.

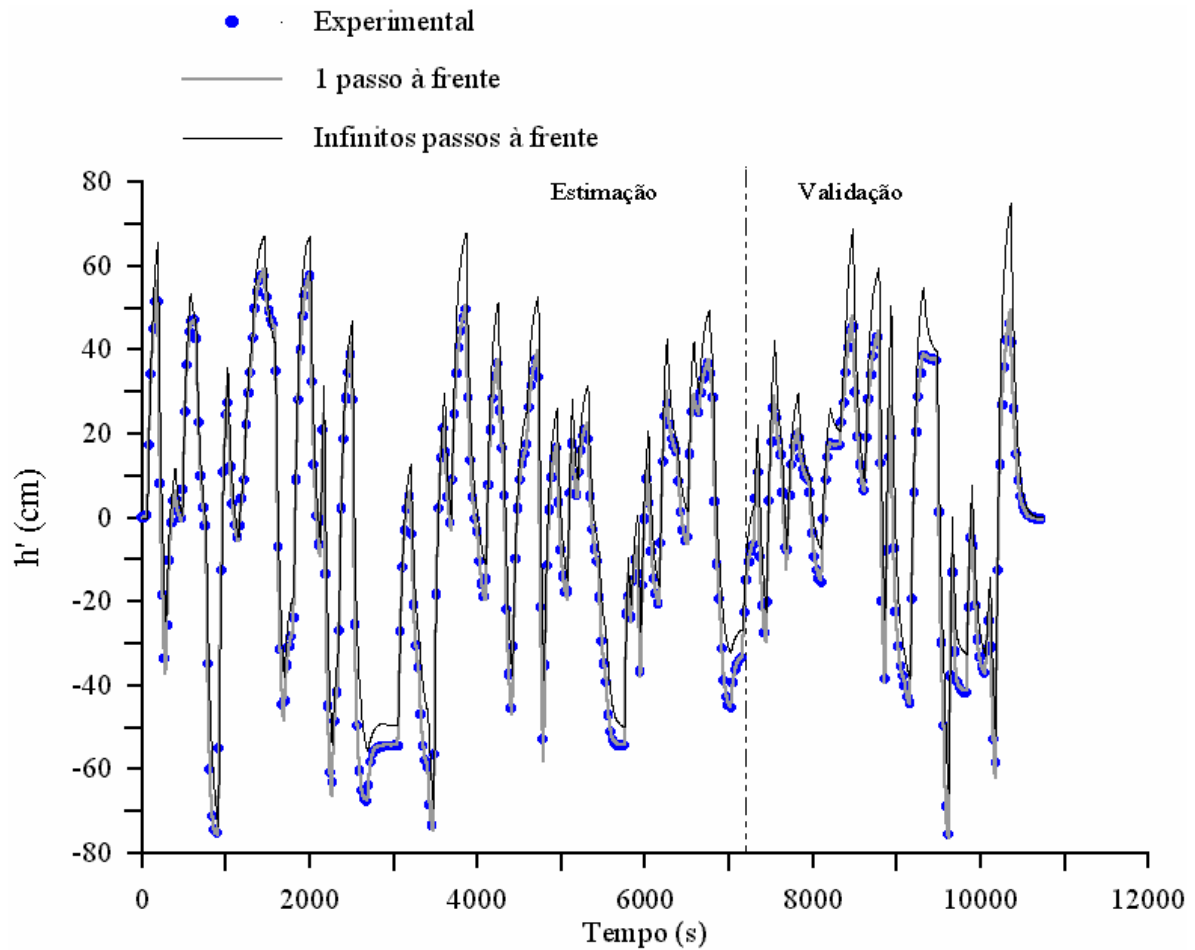


Figura 6.15: Simulação do processo 1 e infinitos passos à frente

6.5.2 Modelagem do tanque com área variável

Para a modelagem do tanque com área variável, foram utilizadas as mesmas equações do item anterior. O sistema como um todo é não linear (a área transversal varia com a altura do tanque), mas se cada seção for tomada separadamente pode-se representá-la por uma equação diferencial linear de primeira ordem. Como se pode observar na Equação 6.7 o estado estacionário não depende da área transversal do tanque, a área influenciará somente o tempo que o sistema irá levar para atingir um novo estado estacionário. Portanto, o modelo do processo será:

$$AR \frac{dh'}{dt} + h' = \kappa \Omega u' \quad (6.18)$$

$$AR \frac{dh'}{dt} + h' = Ku' \quad (6.19)$$

onde

$$A = \begin{cases} A1, & 0 < h \leq 22,5 \text{ cm} \\ A2, & 22,5 < h \leq 62 \text{ cm} \\ A3, & 62 < h \leq 93 \text{ cm} \\ A4, & h > 93 \text{ cm} \end{cases} \quad (6.20)$$

Neste trabalho:

$$A1 = 706,8 \text{ cm}^2$$

$$A2 = 314,1 \text{ cm}^2$$

$$A3 = 78,5 \text{ cm}^2$$

$$A4 = 44,2 \text{ cm}^2$$

Uma modelagem semelhante pode ser encontrada em MILLS *et al.* (1994).

Para se obter os parâmetros K e R, foi utilizado o método de Levenberg-Marquardt.

Os valores são os seguintes:

$$K = 38,7257 \text{ cm/mA}$$

$$R = 0,1371 \text{ s/cm}^2$$

Sendo $\tau = AR$:

$$0 < h \leq 22,5 \Rightarrow \tau = 96,90\text{s}$$

$$22,5 < h \leq 62 \Rightarrow \tau = 43,20\text{s}$$

$$62 < h \leq 93 \Rightarrow \tau = 10,73\text{s}$$

$$h > 93 \Rightarrow \tau = 6,05\text{s}$$

A Figura 6.16 ilustra a simulação 1 e infinitos passos à frente.

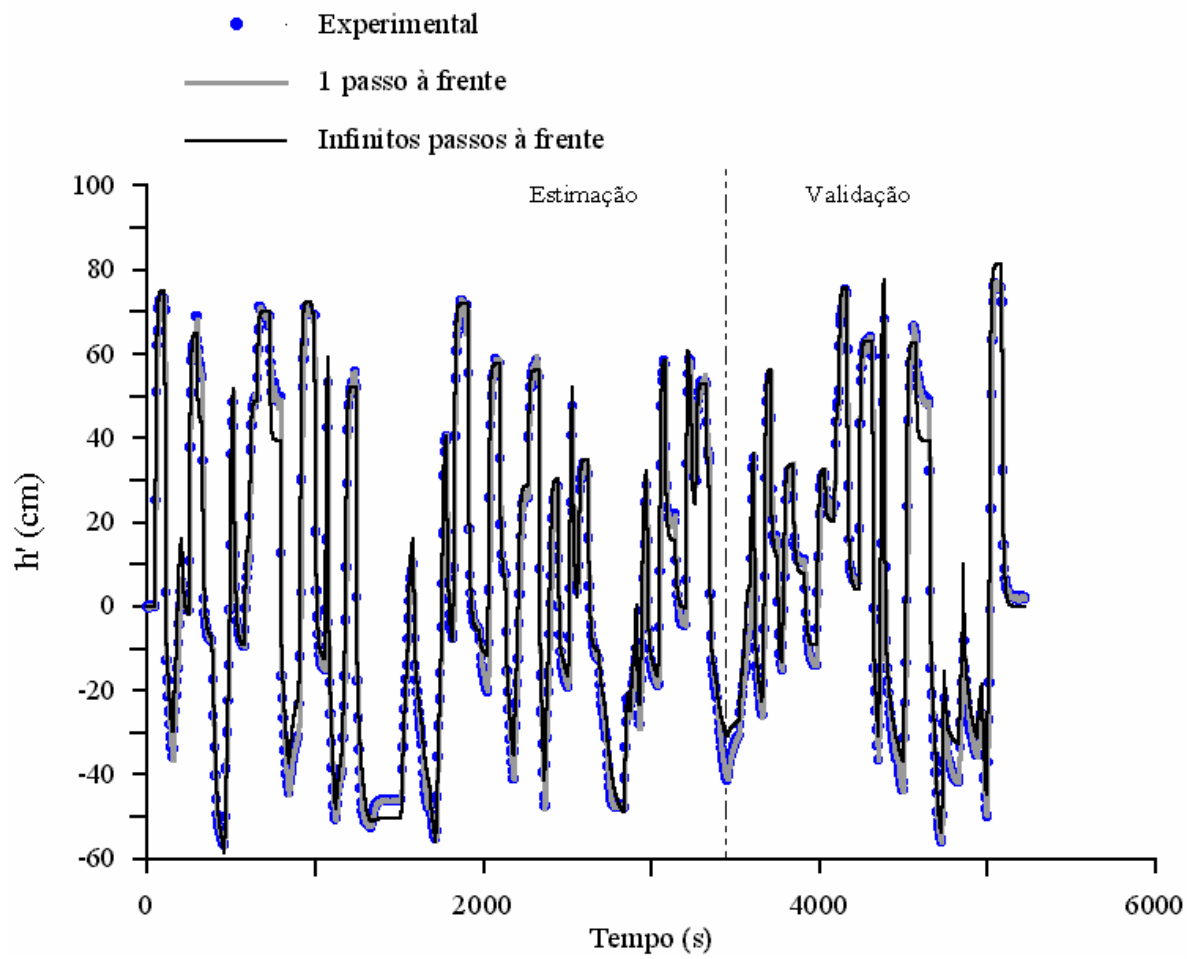


Figura 6.16: Simulação 1 e infinitos passos à frente

Para infinitos passos à frente na fase de validação obteve-se $R^2=0,9643$ e $R^2=0,9997$ para 1 passo a frente. Por inspeção visual observa-se que os modelos representam bem o comportamento dos processos.