AMANDA MALAFAIA CAVALCANTE

DESLOCAMENTOS E DEFORMAÇÕES DE UMA VIGA COMPÓSITA ENGASTADA-LIVRE COM SEÇÃO-CAIXÃO SIMULANDO ASA AERONÁUTICA

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA AERONÁUTICA
2019

AMANDA MALAFAIA CAVALCANTE

Deslocamentos e Deformações de uma Viga Compósita Engastada-Livre com Seção-Caixão simulando Asa Aeronáutica

Projeto de Conclusão de Curso apresentado ao corpo docente do Curso de Graduação em Engenharia Aeronáutica da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para obtenção do título de **BACHAREL EM ENGENHARIA AERONÁUTICA**.

Orientadora: Profª. Drª. Núbia dos Santos Saad

UBERLÂNDIA – MG

2019

AMANDA MALAFAIA CAVALCANTE

Deslocamentos e Deformações de uma Viga Compósita Engastada-Livre com Seção-Caixão simulando Asa Aeronáutica

Projeto de Conclusão de Curso **Aprovado** pelo corpo docente do Curso de Graduação em Engenharia Aeronáutica da Universidade Federal de Uberlândia.

Banca Examinadora:

_____

Profa. Dra. Núbia dos Santos Saad – FEMEC/UFU – Orientadora

_____

Prof. MSc. Felipe Machini Malachias Marques – FEMEC/UFU

_____

Eng. MSc. Jefferson Gomes do Nascimento – FEMEC/UFU (doutorando)

Uberlândia, 14 de dezembro de 2019.

AGRADECIMENTOS

À minha família, pelo apoio incondicional em todos esses anos.

Aos amigos, por todos os momentos compartilhados.

À professora Núbia, por toda a dedicação, disponibilidade, paciência e, principalmente, pelo amor ao que faz e por quem faz.

À Faculdade de Engenharia Mecânica e à Universidade Federal de Uberlândia, por proporcionarem todas as experiências, não só acadêmicas, aqui vividas.

CAVALCANTE, A.M. **Deslocamentos e Deformações de uma Viga Compósita Engastada-Livre com Seção-Caixão Simulando Asa Aeronáutica.** 2019. 66 f. Projeto de Conclusão de Curso – Curso de Graduação em Engenharia Aeronáutica, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG.

RESUMO

Esse estudo trata da análise de deslocamentos e deformações de uma viga de paredes finas submetida a um esforço axial excêntrico. Realizou-se uma análise teórica de suas tensões normais e cisalhantes, bem como dos deslocamentos decorrentes dos efeitos de flexão e de torção. A viga considerada, em condição engastada-livre, foi admitida em três diferentes materiais, um isotrópico e dois compósitos. Além disso, as análises foram dadas sob dois contextos, considerando ou não a idealização estrutural por *booms* e a presença de reforçadores na estrutura, o que totalizou seis modelos de estudo. Como resultado, foram obtidas as tensões normais para os seis modelos, assim como os fluxos e as tensões cisalhantes, destacando-se os valores máximos desses esforços. Os deslocamentos devidos à flexão e à torção também foram contabilizados, sendo possível somá-los para obtenção do deslocamento teórico total da viga. Feito isso, foram realizadas considerações acerca do efeito dos diferentes materiais e dos diferentes modelos de análise da estrutura.

Palavras-chave: *Viga caixão. Idealização estrutural. Booms. Tensões nas vigas.*

CAVALCANTE, A.M. **Displacements and Deformations of a Free-crimped Closed-section Composite Beam Simulating Aeronautical Wing.** 2019. 66 f. Term Paper – Bachelor of Aeronautical Engineering, Federal University of Uberlândia, Uberlândia, MG.

ABSTRACT

The present study analyzes the displacements and deformations of a thin-walled beam subjected to an eccentric axial stress. A theoretical analysis was performed, dealing with its direct and shear stresses, as well as the displacements due to bending and torsion effects. The considered beam is in free end condition, and it is admitted in three materials: one of them is isotropic and the others are laminated composites. Moreover, the analyzes is given in two structural contexts, whether or not considering the structural idealization by booms and the application of reinforcers in the structure. As a result, the direct stresses for six different models were obtained, as well as the flows and shear stresses. The displacements due to bending and torsion were also accounted for. After that, considerations were made about the effect of different materials and different models of structural analysis.

Keywords: *Box beam. Structural idealization. Booms. Stresses in beams.*

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Evolução da porcentagem de compósitos em aeronaves francesas. Fonte: Gay (2015). 2
Figura 2.1 – Barra com carga axial. Fonte: Hibbeler (2010). 4
Figura 2.2 – Força aplicada na seção transversal da barra. Fonte: Hibbeler (2010). 5
Figura 2.3 – Viga sob efeito de flexão. Fonte: Megson (2013). 7
Figura 2.4 – Notação e convenção de sinal para forças, momentos e deslocamentos. 8
Figura 2.5 – Sistemas de esforços internos e externos da viga. Fonte: Megson (2013). 9
Figura 2.6 – Decomposição do momento fletor nos planos x e y da viga: (a) para θ > 90º; (b) para θ < 90º. Fonte: Megson (2013). 9
Figura 2.7 – Determinação da Linha Neutra e da Tensão Normal devido à flexão. Fonte: Megson (2013). 10
Figura 2.8 – Determinação do deslocamento da viga em decorrência da flexão. Fonte: Megson (2013). 14
Figura 2.9 – (a) Sistema geral de tensões em um elemento de seção aberta ou fechada; (b) sistema de tensões normais e fluxo cisalhante no elemento. Fonte: Megson (2013). 18
Figura 2.10 – Componentes do deslocamento de um ponto na parede da viga. Fonte: Megson (2013). 19
Figura 2.11 – Determinação da deformação de cisalhamento γ, em termos das componentes tangencial e axial de deslocamento. 20
Figura 2.12 – Definição das relações de deslocamento e posição do centro de torção da viga. 21
Figura 2.13 – Carregamentos cisalhantes de uma viga com seção transversal aberta. Fonte: Megson (2013). 22
Figura 2.14 – Cisalhamento em viga de seção transversal fechada. Fonte: Megson (2013). 25
Figura 2.15 – (a) Esquema para determinação de qs,0; (b) Exemplo de corte na seção fechada. Fonte: Megson (2013). 26
Figura 2.16 – Centro de cisalhamento de uma viga com seção transversal fechada. Fonte: Megson (2013). 29
Figura 2.17 – Torção de uma viga de seção fechada. Fonte: Megson (2013). 31
Figura 2.18 – (a) Seção de asa típica; (b) Idealização da seção com booms. Fonte: Megson (2013). 35

Figura 2.19 – (a) Painel real; (b) Painel idealizado com booms e revestimento. Fonte: Megson, 2013. 36
Figura 3.1 – Representação da viga de paredes finas. (a) Viga compósita. (b) Vista frontal. (c) Vista lateral. 41
Figura 4.1 – Deslocamentos causados pela Torção. Fonte: Megson (2013). 56
Figura 4.2 – Detalhamento do deslocamento causado pela torção. Fonte: autoria própria. 56

LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1 – Características do Alumínio 2024-T3. Fonte: ASM, 2016. 42
Tabela 3.2 – Características do compósito epóxi/vidro. Fonte: Gay, 2015. 42
Tabela 3.3 – Características do compósito epóxi/carbono. Fonte: Gay, 2015. 42
Tabela 3.4 – Descrição dos perfis utilizados na seção. 43
Tabela 3.5 – Modelos utilizados na análise. 43
Tabela 4.1 – Área de cada boom. 45
Tabela 4.2 – Momentos de inércia I_{xx} para cada modelo analisado. 47
Tabela 4.3 – Valores da tensão normal atuante em cada boom para os modelos I, III e V. 48
Tabela 4.4 – Tensões normais para os modelos II, IV e VI. 48
Tabela 4.5 – Fluxos e tensões cisalhantes que atuam na ST do Modelo I. 51
Tabela 4.6 – Fluxos e tensões cisalhantes que atuam na ST do Modelo V. 52
Tabela 4.7 – Fluxos e tensões cisalhantes que atuam na ST do Modelo II. 53
Tabela 4.8 – Fluxos e tensões cisalhantes que atuam na ST do Modelo VI. 54
Tabela 4.9 – Deslocamentos decorrentes da flexão para os seis modelos. 55
Tabela 4.10 – Deslocamentos causados pela Torção. 57
Tabela 5.1 – Deslocamento vertical total. 62

LISTA DE SÍMBOLOS

α	Inclinação da linha neutra em relação ao centroide
γ	Deformação de cisalhamento
δA	Elemento de área
ΔF	Força normal
$\varepsilon_{x,i}$	Deformação longitudinal na lâmina
ε_z	Deformação longitudinal na viga
ζ	Deslocamento do centroide após a flexão
θ	Ângulo do momento fletor
ξ	Distância da linha neutra
ρ	Raio de curvatura da flexão da viga em torno da linha neutra
σ	Tensão normal
σ_z	Tensão normal num laminado
τ	Tensão cisalhante
A	Área
B_i	Área do *boom*
C	Centroide da seção transversal
Cx	Eixo centroidal na direção x
Cy	Eixo centroidal na direção y
$E_{x,i}$	Módulo de elasticidade
G	Módulo de cisalhamento do material
$G_{XY,i}$	Módulo de cisalhamento da lâmina
I_{xx}	Segundo momento de inércia em relação ao eixo Cx
I_{yy}	Segundo momento de inércia em relação ao eixo Cy
I_{xy}	Produto de inércia
I'_{XX}	Segundo momento de inércia incluindo módulo de Young do laminado
I'_{YY}	Segundo momento de inércia incluindo módulo de Young do laminado
I'_{XY}	Segundo momento de inércia incluindo módulo de Young do laminado

M	Momento de flexão
M_X	Momento fletor com influência do módulo de Young do laminado
M_Y	Momento fletor com influência do módulo de Young do laminado
$Oxyz$	Sistema de eixos coordenados
p	Distância entre a linha neutra e o centroide
P	Carregamento axial
P_i	Fração do carregamento axial
q	Fluxo cisalhante
R	Centro de torção
s	Distância medida na seção transversal a partir de uma extremidade
S	Força cisalhante
t	Espessura da parede
T	Momento de torção
u	Componente do deslocamento centroidal pós flexão, direção x
v	Componente do deslocamento centroidal pós flexão, direção y
v_n	Deslocamento normal à superfície do plano xy
v_t	Deslocamento tangencial do plano xy
w	Deslocamento axial na direção z
w	Carga distribuída
x	Eixo coordenado da lâmina na direção x
x_{LN}	Posição da linha neutra no eixo x
x_R	Componente do centro de torção na direção x
X	Eixo coordenado da viga na direção x
y	Eixo coordenado da lâmina na direção y
y_{LN}	Posição da linha neutra no eixo y
y_R	Componente do centro de torção na direção y
Y	Eixo coordenado da viga na direção y
z	Eixo coordenado da lâmina na direção z
Z	Eixo coordenado da viga na direção z

SUMÁRIO

CAPÍTULO I – Introdução 1

CAPÍTULO II – Revisão Bibliográfica 3

2.1 Introdução 3

2.2 Carga Axial em Seção Transversal de Vigas com Paredes Finas 3

2.2.1 Material Isotrópico 3

2.2.2 Material Compósito 5

2.3 Flexão assimétrica em Seção Transversal de Vigas com Paredes Finas 6

2.3.1 Material Isotrópico 6

2.3.2 Material Compósito 16

2.4 Cargas Cisalhantes em Seção Transversal de Vigas com Paredes Finas 17

2.4.1 Material Isotrópico 17

2.4.2 Material Compósito 30

2.5 Torção em Seção Transversal de Vigas com Paredes Finas 31

2.5.1 Material Isotrópico 31

2.5.2 Material Compósito 33

2.6 Idealização Estrutural 35

CAPÍTULO III – Materiais e Métodos 40

3.1 Apresentação 40

3.2 Aspectos Elástico-Geométricos e de Carregamento da Viga 40

CAPÍTULO IV – Análise Teórica de Tensões 44

4.1 Modelo Teórico 44

4.2 Tensões Normais Devidas ao Momento de Flexão 45

4.3 Tensões Tangenciais devidas ao Momento de Torção (T_z) 49

4.4 Deslocamentos Decorrentes da Flexão 54

4.5 Deslocamentos Decorrentes da Torção 55

CAPÍTULO V – Análise de Resultados **58**

5.1 Tensões Normais Devidas ao Momento de Flexão 58

5.2 Tensões Tangenciais 59

5.3 Deslocamentos Decorrentes da Flexão e da Torção 61

CAPÍTULO VI – Conclusões **64**

Referências Bibliográficas **66**

CAPÍTULO I

Introdução

A concepção de uma aeronave envolve diversas áreas: aerodinâmica, estabilidade, desempenho e mecânica do voo, dentre outras, têm, cada uma, um objetivo diferente para o projeto, e precisam chegar em um consenso. Dentre essas áreas, uma das mais importantes é a estrutural, responsável por dar forma ao avião e garantir que ele seja capaz de aguentar os esforços aos quais vai ser submetido. Um dos grandes desafios dessa área é o peso: a estrutura deve combinar uma robustez que garanta a segurança ao mesmo tempo que tenha o menor peso possível, para não prejudicar áreas como a aerodinâmica e o desempenho. Essa combinação, entretanto, não se dá de forma fácil.

Uma alternativa de uso crescente nas aeronaves modernas para solucionar essa questão é a aplicação de materiais compósitos. Como cita Gay (2015), além da redução do peso, que permite reduzir o consumo de combustível, aumentar o *payload* e o alcance e melhorar, com isso, o desempenho da aeronave, esses materiais têm uma boa resistência à fadiga e à corrosão, fatores que aumentam a vida útil da aeronave e geram economia com os custos de manutenção.

Ainda baseado em Gay (2015), construtores de aeronaves vêm buscando nos compósitos uma alternativa para redução de peso e robustez há bastante tempo. Em 1938, o Morane 406, de fabricação francesa, utilizou painéis sanduíche com núcleo de madeira coberto com ligas leves. Na década de 1950, iniciou-se o uso de vidro e resina com *honeycombs*, o que permitiu a fabricação de carenagens com formas mais complexas. Finalmente, em 1970 e 1972, respectivamente, surgiram duas das combinações mais comuns da atualidade: carbono/epóxi e kevlar/epóxi.

Atualmente, compósitos podem ser utilizados em diversas partes da aeronave, sendo combinações diferentes aplicadas nas partes às quais mais se adequam. Compósitos de vidro/epóxi e kevlar/epóxi, por exemplo, são comumente empregados em carenagens, pisos,

compartimentos de passageiros e outros. Já fibras de carbono/epóxi são úteis para fuselagens, estabilizadores horizontais e verticais, ailerons, asas, spoilers e mais. Esse aumento crescente de utilização é mostrado na Figura *1.1*, que descreve a porcentagem de massa estrutural ocupada por compósitos em indústrias francesas com o passar das décadas.

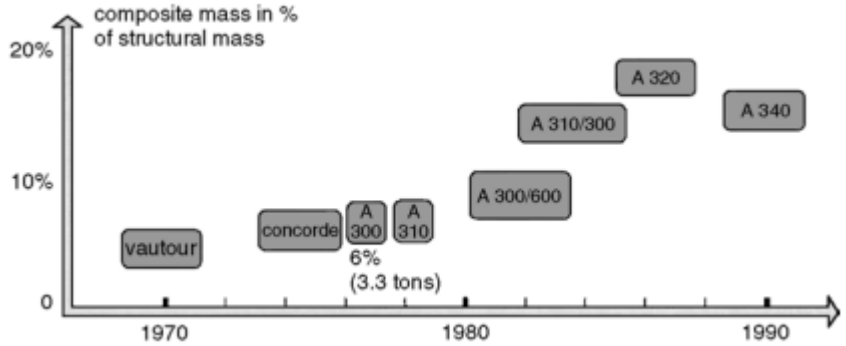


Figura 1.1 – Evolução da porcentagem de compósitos em aeronaves francesas. Fonte: GAY (2015).

Vista a importância desses materiais na indústria aeronáutica atual, o presente trabalho tem como objetivo estudar uma viga compósita engastada-livre com seção caixão, simulando asa aeronáutica. Serão analisados para isso os deslocamentos e as deformações causados pela aplicação de um esforço excêntrico.

Com esse fim, será feita uma revisão analítica dos esforços normais e cisalhantes atuantes em uma seção fechada de paredes finas, compilando a formulação disponível na literatura para essa situação. Isso feito, os modelos matemáticos serão aplicados na viga admitindo três diferentes composições, uma isotrópica e duas compósitas, em duas formas diferentes de análise, considerando ou não a aplicação de modelagem estrutural por *booms*, totalizando, portanto, seis modelos de estudo.

CAPÍTULO II

Revisão Bibliográfica

2.1 Introdução

Baseado no conteúdo exposto em Megson (2013), este capítulo descreverá as tensões geradas em vigas de seções transversais abertas e fechadas de paredes finas, quando sujeitas a cargas axial, de flexão, de cisalhamento e de torção. Tal estudo será realizado para ambos os materiais isotrópicos e compósitos.

2.2 Carga Axial em Seção Transversal de Vigas com Paredes Finas

2.2.1 Material Isotrópico

Conforme disposto por Hibbeler (2010), define-se como tensão normal, σ, a intensidade de uma força que age perpendicularmente a uma área ΔA. Diz-se que a tensão é de tração se a força normal traciona o elemento de área ΔA, e de compressão se o elemento é comprimido.

Pode-se dizer que é frequente encontrar elementos estruturais compridos e delgados que estão sujeitos a cargas axiais, normalmente aplicadas às suas extremidades. Para determinar a tensão média que age sobre a seção transversal da barra, ilustrada na Figura 2.1, é necessário adotar duas premissas:

1. A barra deve permanecer reta antes e depois da aplicação da carga, e a seção transversal deve permanecer plana durante a deformação. Assim, é garantido que as linhas horizontais e verticais da grade aplicada à barra se deformarão uniformemente. Além disso, as regiões próximas às extremidades das barras não devem ser consideradas.

2. A força **P** deve ser aplicada ao longo do eixo do centroide da seção transversal, e o material deve ser homogêneo (com as mesmas propriedades físicas e mecânicas em todo o seu volume) e isotrópico (possui as mesmas propriedades em todas as direções).

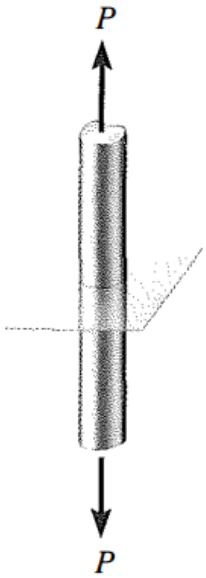


Figura 2.1 – Barra com carga axial. Fonte: HIBBELER (2010).

Feitas essas considerações, contanto que a barra esteja submetida a uma deformação uniforme e constante, cada área ΔA na seção transversal será submetida a uma força descrita pela Equação (2.1).

$$\Delta F = \sigma \Delta A \tag{2.1}$$

A atuação da força normal à superfície pode ser visualizada na Figura 2.2.

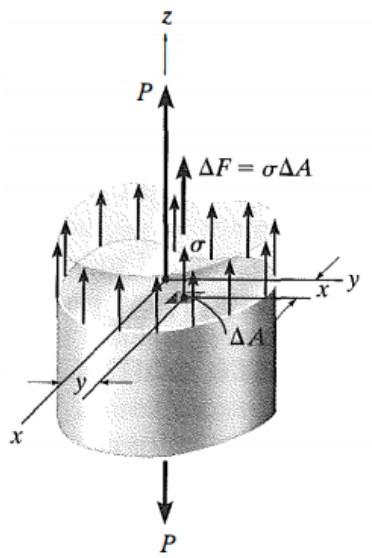


Figura 2.2 – Força aplicada na seção transversal da barra. Fonte: HIBBELER (2010).

A soma das forças que agem em toda a área da seção transversal deve ser equivalente à força resultante interna *P* na seção. Fazendo-se ΔA→dA e, portanto, ΔF→dF, a tensão normal média σ em qualquer ponto na área da seção transversal pode ser descrita pelas Equações (2.2) a (2.4).

$$\int dF = \int_A \sigma dA \tag{2.2}$$

$$P = \sigma \cdot A \tag{2.3}$$

$$\sigma = \frac{P}{A} \tag{2.4}$$

2.2.2 Material Compósito

Tratando agora de materiais compósitos, admite-se que os eixos coordenados da viga como sendo *XYZ*. Supõe-se que cada lâmina é submetida a uma fração do carregamento axial *P*, denominada de P_i. A deformação longitudinal $\varepsilon_{x,i}$ na lâmina é igual à deformação longitudinal ε_z na viga, uma vez que as análises aqui realizadas, com exceção da torção, admitem que as seções planas permanecem planas após a aplicação do carregamento. Assim, são obtidas as Equações (2.5) e, por consequência, (2.6) e (2.7).

$$\frac{P_i}{b_i t_i} = \varepsilon_{x,i} E_{x,i} \tag{2.5}$$

$$P_i = b_i t \varepsilon_{x,i} E_{x,i} \tag{2.6}$$

$$P_i = \varepsilon_z b_i t_i E_{x,i} \tag{2.7}$$

Assim, o carregamento axial total na viga compósita pode ser calculado pela Equação (2.8).

$$P = \varepsilon_z \sum_{i=1}^{n} b_i t_i E_{x,i} \tag{2.8}$$

Nota-se, na Equação (2.8), que a tensão longitudinal ε_z é a mesma na viga e em cada uma das lâminas. Além disso, o valor do módulo de Young para uma lâmina em específico é o mesmo, não importando estar em referência ao eixo x da lâmina ou ao eixo Z da viga. Dessa forma, a Equação (2.8) pode ser reescrita ainda nas formas das Equações (2.9) e (2.10).

$$P = \varepsilon_z \sum_{i=1}^{n} b_i t_i E_{z,i} \tag{2.9}$$

$$\varepsilon_z = \frac{P}{\sum_{i=1}^{n} b_i t_i E_{z,i}} \tag{2.10}$$

2.3 Flexão assimétrica em Seção Transversal de Vigas com Paredes Finas

2.3.1 Material Isotrópico

Na seção anterior, viu-se que a aplicação de um carregamento axial em uma viga produz uma tensão uniforme na seção transversal do elemento. Uma outra situação possível de acontecer ao se aplicar esse tipo de carga a uma viga é que esta sofra flexão. Neste caso, a deformação sofrida em cada uma das faces da estrutura é diferente, e, portanto, a tensão varia no decorrer da espessura da viga.

Em elementos fletidos, podem ser observadas duas configurações de deslocamento, sendo elas côncava e convexa, como mostra a Figura 2.3. Nota-se que as fibras da extremidade inferior, chamada de côncava, estão comprimidas, enquanto as da extremidade superior,

convexa, são tracionadas. Em determinada seção entre essas duas extremidades, existe o chamado plano neutro, onde as fibras não sofrem efeito de tração ou compressão.

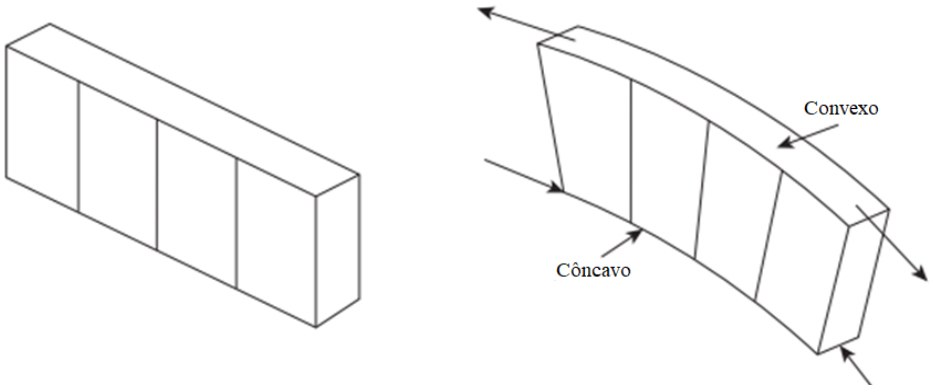


Figura 2.3 – Viga sob efeito de flexão. Fonte: Megson (2013).

O valor da tensão normal em um ponto da seção transversal de uma viga sujeita a flexão depende da posição deste ponto, do carregamento aplicado e das propriedades geométricas da seção. Para derivar uma expressão a fim de determinar a distribuição de tensão numa viga fletida, devem ser estabelecidas algumas considerações e convenções de sinal para momentos, forças e deslocamentos.

Primeiramente, assume-se que os planos das seções transversais se mantêm planos e normais às fibras longitudinais da viga após a flexão. Além disso, o material da viga é considerado como sendo linearmente elástico, obedecendo à Lei de Hooke, e homogêneo.

Em seguida, define-se que as forças, momentos e deslocamentos serão tomados em referência a um sistema de eixos arbitrário *Oxyz*, como disposto na Figura *2.4*. Nota-se que o eixo *Oz* é paralelo ao eixo longitudinal da viga e Oxy são eixos no plano da seção transversal. São adotados os símbolos *M, S, P, T* e *w* para momento de flexão, força cisalhante, força axial, momento de torção e carga distribuída, respectivamente; e os índices *x*, *y* e *z* se referem aos esforços relativos ao eixo de mesmo nome.

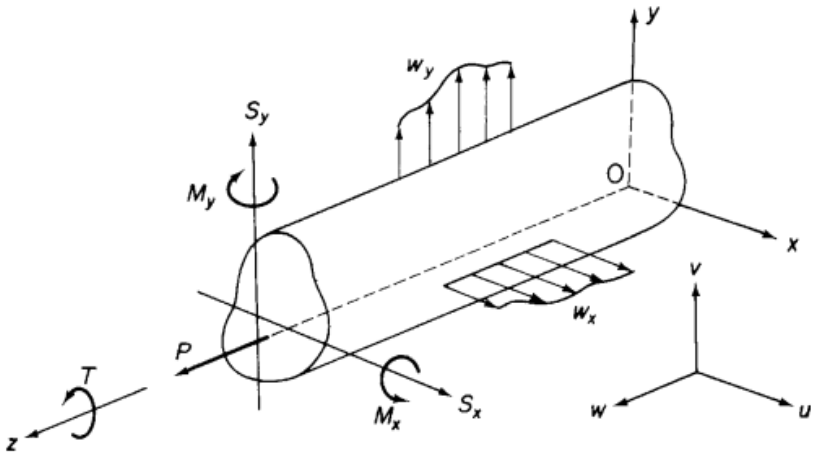


Figura 2.4 – Notação e convenção de sinal para forças, momentos e deslocamentos.

Nota-se na Figura 2.4 que os momentos fletores M_x e M_y são positivos quando induzem tração no quadrante positivo *xy* da seção transversal.

Por fim, escolhe-se uma seção transversal arbitrária e sem nenhum eixo de simetria, conforme Figura 2.5, para analisar os esforços internos. As solicitações de forças e momentos internos são positivas nas mesmas direções e sentidos das cargas externas aplicadas.

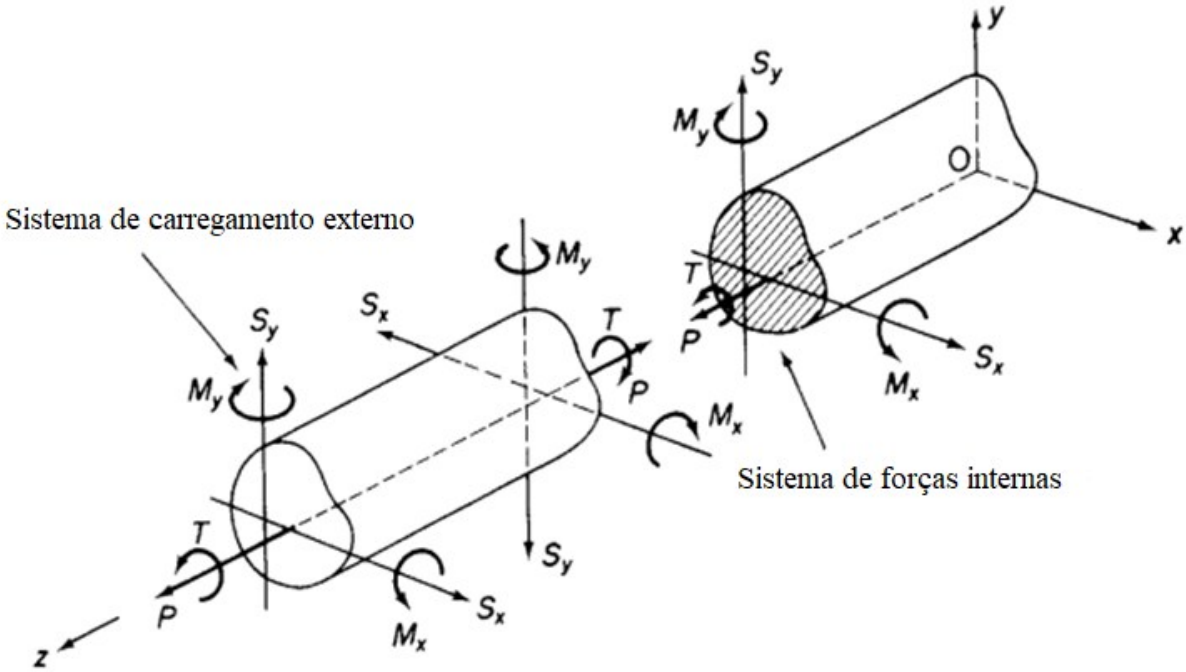
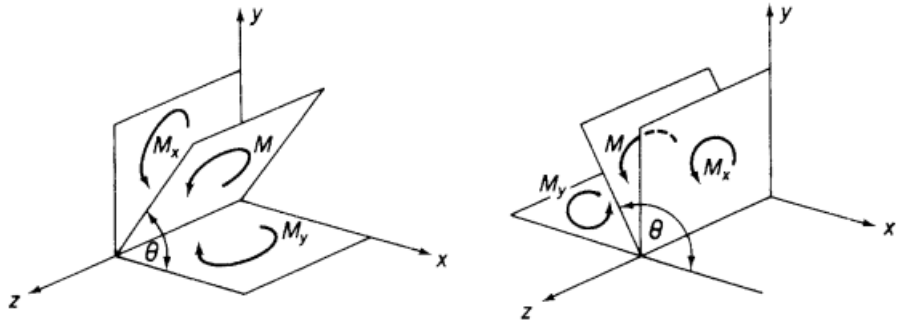


Figura 2.5 – Sistemas de esforços internos e externos da viga. Fonte: MEGSON (2013).

Um momento fletor M aplicado em qualquer plano longitudinal paralelo ao eixo z pode ser decomposto nas componentes M_x e M_y, de acordo com a Figura 2.6. A componente de cada direção dependerá do ângulo θ do momento, conforme Equações (2.11) e (2.12).

$$M_x = M \cdot \sin\theta \tag{2.11}$$

$$M_y = M \cdot \cos\theta \tag{2.12}$$

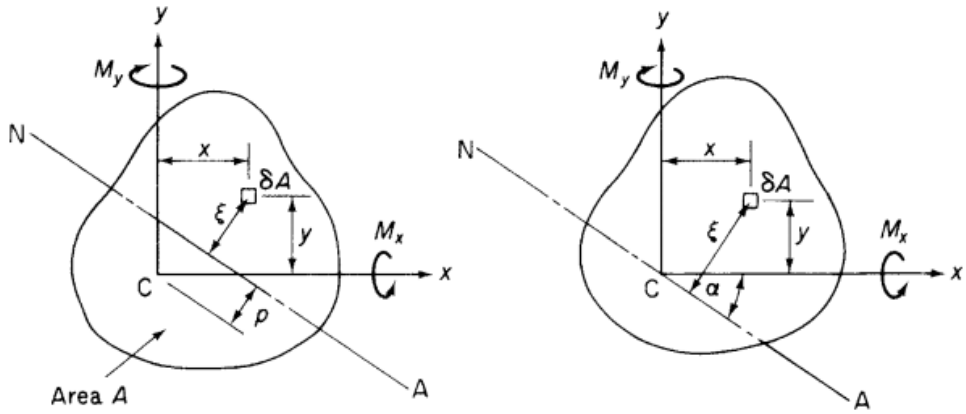


(a) (b)

Figura 2.6 – Decomposição do momento fletor nos planos x e y da viga: (a) para θ > 90º; (b) para θ < 90º. Fonte: MEGSON (2013).

2.3.1.1 Distribuição de Tensões Normais devidas à Flexão

Considera-se uma viga com uma seção transversal como a descrita na Figura 2.7. A viga está sob ação dos momentos M_x e M_y e flete ao redor da linha neutra na sua seção transversal, onde as tensões e deformações geradas pela flexão são nulas.



(a) (b)

Figura 2.7 – Determinação da Linha Neutra e da Tensão Normal devido à flexão.
Fonte: MEGSON (2013).

Supondo que a origem dos eixos coincida com o centroide *C* da seção transversal, e que a linha neutra está a uma distância *p* de *C*. A tensão normal σ_z num elemento de área δA, em um ponto *(x,y)* e a uma distância ξ da linha neutra pode ser calculada pela Equação (2.13).

$$\sum_z = E\varepsilon_z \,, \tag{2.13}$$

sendo *E* o módulo de elasticidade do material e ε_z a deformação linear na direção longitudinal da viga.

Uma vez que a viga seja fletida em um raio de curvatura ρ em torno da linha neutra em uma seção particular, tem-se a Equação (2.14).

$$\varepsilon_z = \frac{\xi}{\rho} \tag{2.14}$$

Substituindo na Equação (2.13), a tensão normal é dada pela Equação (2.15)

$$\sigma_z = E\frac{\xi}{\rho} \tag{2.15}$$

A viga suporta momentos de flexão de forma que a resultante normal em qualquer seção deve ser zero, logo, conforme Equação (2.16),

$$\int_A \sigma_z dA = 0. \tag{2.16}$$

Utilizando a expressão de σ_z na Equação (2.15), e cancelando a constante E/ρ, tem-se a Equação (2.17).

$$\int_A \xi dA = 0 \tag{2.17}$$

Assim, mostra-se que o primeiro momento de área da seção transversal da viga em relação à linha neutra é nulo, ou seja, a linha neutra passa sobre o centroide da seção transversal analisada.

Admitindo que a inclinação da linha neutra em relação a *Cx* seja o ângulo α, medido em sentido horário a partir de *Cx*, obtém-se a Equação (2.18).

$$\xi = x \sin\alpha + y \cos\alpha \tag{2.18}$$

Sobrepondo as Equações (2.15) e (2.18), a tensão normal σ_z é, enfim, mostrada na Equação (2.19).

$$\sigma_z = \frac{E}{\rho}(x \sin\alpha + y \cos\alpha) \tag{2.19}$$

Os momentos resultantes da distribuição interna de tensão, por sua vez, têm o mesmo sentido de M_x e M_y e podem ser determinados pelas Equações (2.20) e (2.21).

$$M_x = \int_A \sigma_z y dA \tag{2.20}$$

$$M_y = \int_A \sigma_z x dA \tag{2.21}$$

Substituindo pela tensão encontrada na Equação (2.19), e definindo os segundos momentos de área em relação aos eixos *Cx* e *Cy* na Equação (2.22), os momentos M_x e M_y podem ser reescritos conforme a Equação (2.23).

$$I_{xx} = \int_A y^2 dA,\ I_{yy} = \int_A x^2 dA,\ I_{xy} = \int_A xy dA. \tag{2.22}$$

$$M_x = \frac{E\sin\alpha}{\rho} I_{xy} + \frac{E\cos\alpha}{\rho} I_{xx}, \quad M_y = \frac{E\sin\alpha}{\rho} I_{yy} + \frac{E\cos\alpha}{\rho} I_{xy} \tag{2.23}$$

Na forma matricial, tem-se a Equação (2.24):

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \end{Bmatrix} = \frac{E}{\rho} \begin{bmatrix} I_{xy} & I_{xx} \\ I_{yy} & I_{xy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sin\alpha \\ \cos\alpha \end{Bmatrix}, \tag{2.24}$$

de onde se encontra a Equação (2.25):

$$\frac{E}{\rho} \begin{Bmatrix} \sin\alpha \\ \cos\alpha \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xy} & I_{xx} \\ I_{yy} & I_{xy} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \end{Bmatrix}. \tag{2.25}$$

Assim, a partir Equação (2.19), determina-se a Equação (2.26), ou, numa segunda formulação, a Equação (2.27).

$$\sigma_z = \left(\frac{M_y I_{xx} - M_x I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} \right) x + \left(\frac{M_x I_{yy} - M_y I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} \right) y \tag{2.26}$$

$$\sigma_z = \frac{M_x (I_{yy} y - I_{xy} x)}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} + \frac{M_y (I_{xx} x - I_{xy}\, \mathrm{y})}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} \tag{2.27}$$

Pela segunda Equação (2.27), nota-se que, se $M_y = 0$, M_x produz uma tensão que varia com ambos x e y; o mesmo ocorre para M_y se $M_x = 0$. Em seções que possuam simetria nos dois eixos, *Cx* e *Cy*, o produto I_{xy} é nulo, e a Equação (2.27) se reduz à Equação (2.28).

$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_{xx}} y + \frac{M_y}{I_{yy}} x \tag{2.28}$$

Analisando a expressão, percebe-se que, quando $M_y = 0$, o eixo x se torna a linha neutra e, similarmente, quando $M_x = 0$, está se encontra no eixo y. Ou seja, a posição da linha neutra depende tanto da forma de aplicação do carregamento quanto das propriedades geométricas da seção transversal.

2.3.1.2 Posição da linha neutra

A linha neutra sempre perpassa o centroide da seção transversal, mas sua inclinação α em relação ao eixo x depende da forma de aplicação do carregamento e das propriedades geométricas da referida seção.

Em todos os pontos da linha neutra, a tensão normal é nula. Assim, com base na Equação (2.28), encontra-se a Equação (2.29).

$$0 = \left(\frac{M_y I_{xx} - M_x I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} \right) x_{LN} + \left(\frac{M_x I_{yy} - M_y I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} \right) y_{LN} \tag{2.29}$$

onde x_{LN} e y_{LN} são as coordenadas de qualquer ponto na linha neutra. Portanto, a reorganização dos termos formula a Equação (2.30).

$$\frac{y_{LN}}{x_{LN}} = -\frac{M_y I_{xx} - M_x I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} \tag{2.30}$$

Ou ainda, em referência à Figura 2.7, e observando que, quando $\alpha > 0$, x_{LN} e y_{LN} possuem sinal negativo, pode ser obtida a Equação (2.31).

$$\tan \alpha = \frac{M_y I_{xx} - M_x I_{xy}}{M_x I_{yy} - M_y I_{xy}} \tag{2.31}$$

2.3.1.2 Deslocamentos Decorrentes da Flexão

Uma viga deflete em torno de sua linha neutra, cuja inclinação relativa aos eixos centroidais foi explicitada pela Equação (2.31). Supondo que, em uma determinada seção de uma viga assimétrica, a deflexão perpendicular à linha neutra é ζ, como mostra a Figura 2.8.

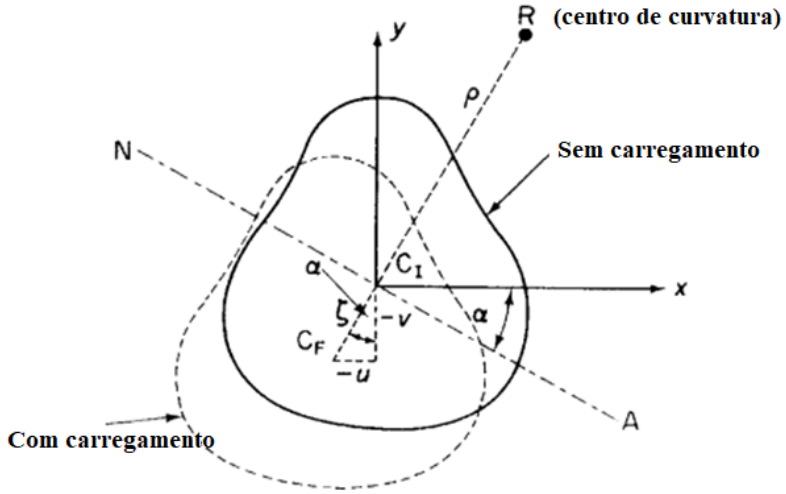


Figura 2.8 – Determinação do deslocamento da viga em decorrência da flexão. Fonte: MEGSON (2013).

Em referência à Figura 2.8, observa-se que o centroide *C* é deslocado de uma posição inicial C_I para uma posição final C_F, percorrendo para isso uma distância ζ. Admitindo que o centro de curvatura *R* da viga nessa seção em particular esteja do lado oposto à linha neutra na direção do deslocamento, e que o raio de curvatura é ρ. Para a posição do centro de curvatura, a expressão aproximada é dada pela Equação (2.32).

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2\zeta}{dz^2} \tag{2.32}$$

O deslocamento ζ pode ser representado nas componentes *u* e *v*, que estão na direção negativa dos eixos *x* e *y*, respectivamente. Logo, obtém-se a Equação (2.33).

$$u = -\zeta \sin\alpha,\ v = -\zeta \cos\alpha \tag{2.33}$$

Diferenciando a Equação (2.33) duas vezes em relação a z e substituindo a expressão do deslocamento pela encontrada na Equação (2.32), é encontrada a Equação (2.34).

$$\frac{\sin\alpha}{\rho} = -\frac{d^2u}{dz^2}, \quad \frac{\cos\alpha}{\rho} = -\frac{d^2v}{dz^2} \tag{2.34}$$

Derivando a Equação (2.26), observa-se a Equação (2.35).

$$\frac{1}{\rho}\begin{Bmatrix}\sin\alpha \\ \cos\alpha\end{Bmatrix} = \frac{1}{E(I_{xx}I_{yy} - I_{xy}^2)}\begin{bmatrix}-I_{xy} & I_{xx} \\ I_{yy} & -I_{xy}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}M_x \\ M_y\end{Bmatrix} \tag{2.35}$$

Substituindo pelos valores de *sen* α/ρ e *cos* α/ρ encontrados na Equação (2.35), e escrevendo $u'' = d^2u/dz^2$, $v'' = d^2v/dz^2$, é formulada a Equação (2.36).

$$\begin{Bmatrix}u'' \\ v''\end{Bmatrix} = -\frac{1}{E(I_{xx}I_{yy} - I_{xy}^2)}\begin{bmatrix}-I_{xy} & I_{xx} \\ I_{yy} & -I_{xy}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}M_x \\ M_y\end{Bmatrix} \tag{2.36}$$

Rearranjando, determinam-se as Equações (2.37) e (2.38).

$$\begin{Bmatrix}M_x \\ M_y\end{Bmatrix} = -E\begin{bmatrix}-I_{xy} & I_{xx} \\ I_{yy} & -I_{xy}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u'' \\ v''\end{Bmatrix} \tag{2.37}$$

$$\begin{cases}M_x = -EI_{xy}u'' - EI_{xx}v'' \\ M_y = -EI_{yy}u'' - EI_{xy}v''\end{cases} \tag{2.38}$$

A primeira parte da Equação (2.38) mostra que M_x produz deflexão em ambos os planos xz e yz, mesmo quando $M_y = 0$; caso semelhante ocorre para M_y quando $M_x = 0$. Assim, uma viga assimétrica deflete tanto vertical quanto horizontalmente, mesmo que o carregamento esteja inteiramente no plano vertical ou inteiramente no plano horizontal.

Para uma viga com C_x, C_y ou ambos como eixos de simetria, os deslocamentos u'' e v'' são simplificados na forma da Equação (2.39):

$$u'' = -\frac{M_y}{EI_{yy}},$$
$$v'' = -\frac{M_x}{EI_{xx}}. \tag{2.39}$$

2.3.2 Material Compósito

Em vigas compósitas, diferentemente das isotrópicas, não se pode assumir que o módulo de Young é constante, uma vez que o módulo de elasticidade *E* pode variar de lâmina para lâmina. Assim, as Equações (2.20) e (2.21) podem ser reescritas na forma das Equações (2.40) e (2.41).

$$M_x = \int_A \frac{E_{z,i}}{\rho}(x\sin\alpha + y\cos\alpha)ydA$$
$$M_y = \int_A \frac{E_{z,i}}{\rho}(x\sin\alpha + y\cos\alpha)xdA \tag{2.40}$$

ou

$$M_x = \frac{\sin\alpha}{\rho}\int_A E_{z,i}xydA + \frac{\cos\alpha}{\rho}\int_A E_{z,i}y^2dA$$
$$M_y = \frac{\sin\alpha}{\rho}\int_A E_{z,i}x^2dA + \frac{\cos\alpha}{\rho}\int_A E_{z,i}xydA \tag{2.41}$$

Uma segunda alteração a ser feita para vigas compósitas se refere ao cálculo do segundo momento de inércia, que agora inclui o valor do módulo de Young do laminado, $E_{z,i}$, e se refere aos eixos *XYZ*, conforme Equação (2.42).

$$I'_{XX} = \int_A E_{z,i}Y^2dA,\ I'_{YY} = \int_A E_{z,i}X^2dA,\ I'_{XY} = \int_A E_{z,i}XYdA \tag{2.42}$$

Assim, da Equação (2.41), é gerada a Equação (2.43).

$$M_X = \frac{\sin\alpha}{\rho}I'_{XY} + \frac{\cos\alpha}{\rho}I'_{XX}$$
$$M_Y = \frac{\sin\alpha}{\rho}I'_{YY} + \frac{\cos\alpha}{\rho}I'_{XY} \tag{2.43}$$

Resolvendo o sistema, obtém-se a Equação (2.44).

$$\frac{\sin\alpha}{\rho} = \frac{M_Y I'_{XX} - M_X I'_{XY}}{I'_{XX} I'_{YY} - I'^{\,2}_{XX}}$$
$$\frac{\cos\alpha}{\rho} = \frac{M_X I'_{YY} - M_Y I'_{XY}}{I'_{XX} I'_{YY} - I'^{\,2}_{XX}} \tag{2.44}$$

Dessa forma, a partir da Equação (2.19), a tensão normal σ_Z será dada pela Equação **Erro! Fonte de referência não encontrada.**.

$$\sigma_Z = E_{Z,i}\left[\left(\frac{M_Y I'_{XX} - M_X I'_{XY}}{I'_{XX} I'_{YY} - I'^{\,2}_{XX}}\right)x + \left(\frac{M_X I'_{YY} - M_Y I'_{XY}}{I'_{XX} I'_{YY} - I'^{\,2}_{XX}}\right)y\right] \tag{2.45}$$

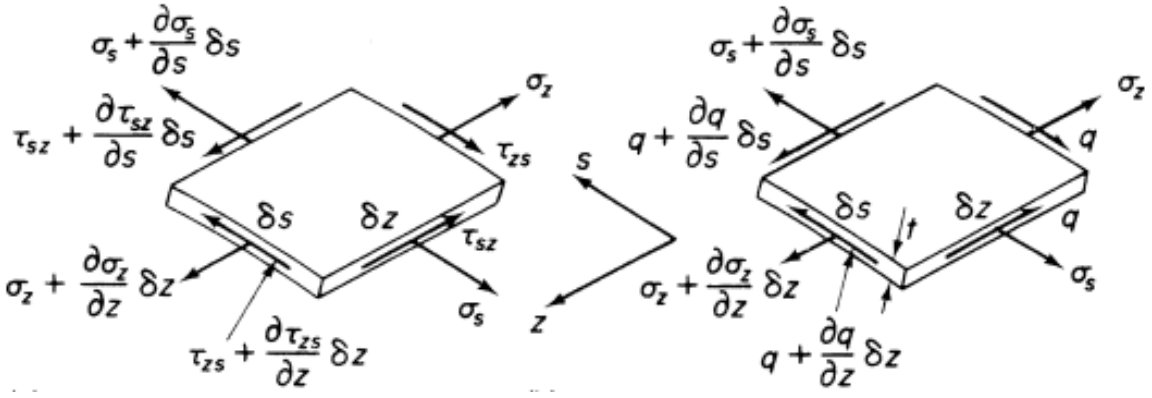
2.4 Cargas Cisalhantes em Seção Transversal de Vigas com Paredes Finas

2.4.1 Material Isotrópico

Dando prosseguimento às análises de vigas com paredes finas, Megson (2013) esclarece que, diferentemente da flexão, na qual a teoria independe da geometria da seção transversal da viga, a aplicação de cargas cisalhantes em vigas de paredes finas exige uma teoria exclusiva a essas.

Para iniciar o estudo, devem ser estabelecidas algumas considerações: assume-se que os efeitos de restrição axial são desprezíveis; as tensões de cisalhamento normais à superfície da viga são negligenciáveis, uma vez que a parede é fina; as tensões normais e tangenciais são constantes em toda a espessura; a viga possui seção transversal uniforme, podendo a espessura variar na seção, mas é constante ao longo do comprimento da viga. Além disso, são ignoradas potências de segunda ou maior ordem no que se refere à espessura t da seção transversal, para o cálculo de suas propriedades.

Considera-se um parâmetro s como sendo a distância entre a seção transversal e alguma origem conveniente. Um elemento $\delta s \times \delta z \times t$ da viga é mantido em equilíbrio por um sistema de tensões normais e cisalhantes, conforme mostra a Figura 2.9.



(a) (b)

Figura 2.9 – (a) Sistema geral de tensões em um elemento de seção aberta ou fechada; (b) sistema de tensões normais e fluxo cisalhante no elemento. Fonte: MEGSON (2013).

Na Figura 2.9, a tensão normal σ_z é gerada por momentos fletores ou por cargas cisalhantes. Já as tensões cisalhantes τ_{ij} são devidas ao cisalhamento e/ou à torsão, no caso de seções fechadas; ou ao cisalhamento exclusivamente, nas seções abertas. A tensão σ_s é comumente zero, mas, em seções fechadas, pode ser causada por pressões internas. A espessura t, embora possa variar com s, é considerada como sendo constante no comprimento δs devido ao fato de ser uma parede fina.

A partir de equações de equilíbrio, sabe-se que $\tau_{zs} = \tau_{sz} = \tau$. Por conveniência, a tensão de cisalhamento τ pode ser substituída por um fluxo cisalhante q, conforme Equação (2.46), que é positivo na direção de crescimento de s.

$$q = \tau t \tag{2.46}$$

O equilíbrio de forças do elemento na direção z, negligenciando as forças internas, pode ser descrito pela Equação (2.47), ou ainda, de maneira reduzida, pela Equação (2.48).

$$\left(\sigma_z + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z}\delta z\right) t\delta s - \sigma_z t\delta s + \left(q + \frac{\partial q}{\partial s}\delta s\right)\delta z - q\delta z = 0 \tag{2.47}$$

$$\frac{\partial q}{\partial s} + t\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \tag{2.48}$$

Similarmente, equilíbrio de forças na direção s é exposto na Equação (2.49).

$$\frac{\partial q}{\partial z} + t\frac{\partial \sigma_s}{\partial s} = 0 \tag{2.49}$$

As tensões normais σ_z e σ_s são responsáveis por produzir as deformações ε_z e ε_s, enquanto a tensão de cisalhamento τ induz uma deformação γ (= γ_{zs} = γ_{sz}). Essas deformações devem ser expressas em termos dos deslocamentos de um ponto na seção da parede, mostrados na Figura 2.10. Para isso, considera-se v_t como o deslocamento tangencial no plano xy, sendo positivo no sentido do aumento de s; v_n é o deslocamento normal à superfície do plano xy, com sinal positivo para fora dela; e, finalmente, w é o deslocamento axial, positivo quando estiver de acordo com o sentido positivo do eixo z.

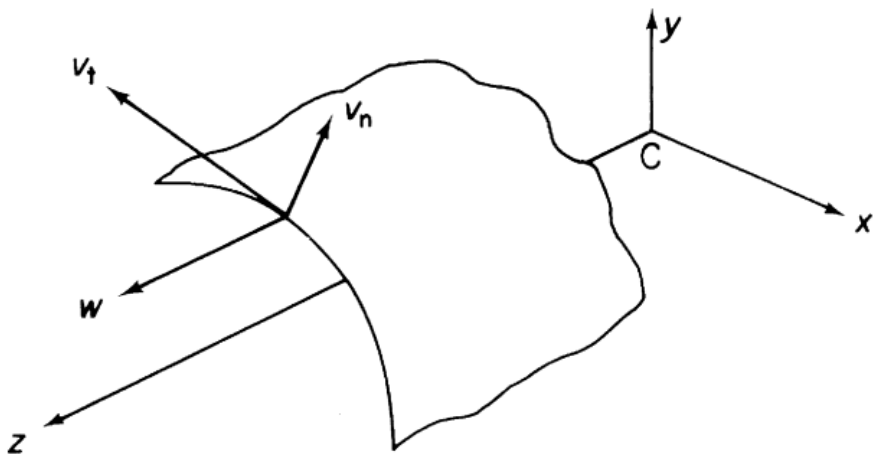


Figura 2.10 – Componentes do deslocamento de um ponto na parede da viga. Fonte: Megson (2013).

A deformação na direção z, ε_z, pode ser definida com base no deslocamento axial w nesta direção, conforme Equação (2.50).

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \tag{2.50}$$

Além disso, para a deformação ε_s, é possível derivar uma expressão em termos de v_t, v_n,s e da curvatura $1/r$ no plano xy da parede da viga, como mostra a Equação (2.51).

$$\varepsilon_s = \frac{\partial v_t}{\partial s} + \frac{v_n}{r} \tag{2.51}$$

A deformação de cisalhamento γ pode ser encontrada em função dos deslocamentos w e v_t, considerando a distorção do elemento $\delta s \times \delta z$ da parede da viga. Com auxílio da Figura 2.11, a deformação pode ser calculada pela Equação (2.52), ou, fazendo δs e δz tenderem a zero, pela Equação (2.53).

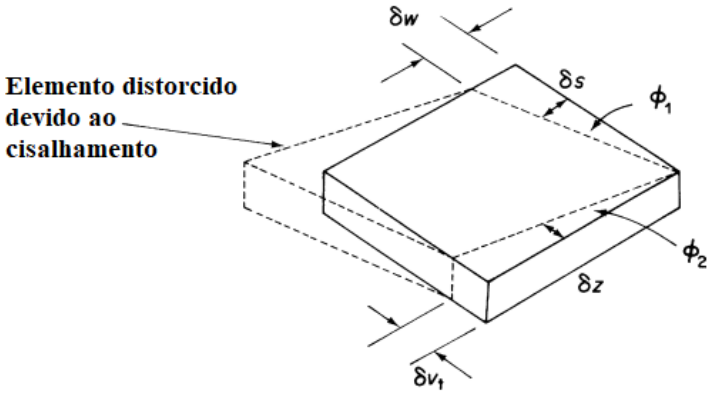


Figura 2.11 – Determinação da deformação de cisalhamento γ, em termos das componentes tangencial e axial de deslocamento.

$$\gamma = \phi_{1+}\phi_2 \tag{2.52}$$

$$\gamma = \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial v_t}{\partial z} \tag{2.53}$$

Em complemento às considerações feitas no início desta seção, Megson (2013) assume agora também que, durante qualquer deslocamento, a forma da seção transversal da viga será mantida por um sistema de diafragmas rígidos em seu próprio plano, mas perfeitamente flexíveis ao plano normal ao seu próprio. Assim sendo, não há resistência ao deslocamento axial w, e a seção transversal se move como um corpo rígido em seu próprio plano, podendo então qualquer ponto ter seu deslocamento descrito pelas translações u e v e pela rotação θ, conforme Figura 2.12.

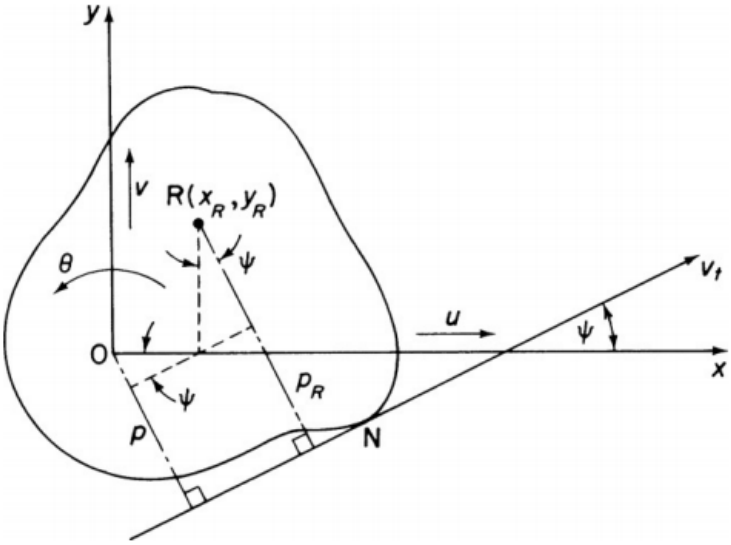


Figura 2.12 – Definição das relações de deslocamento e posição do centro de torção da viga.

Feitas essas considerações, e com auxílio da Figura 2.12, o deslocamento tangencial v_t de qualquer ponto N na parede de uma seção aberta ou fechada pode ser calculado pela Equação (2.54):

$$v_t = p\theta + u\cos\Psi + v\sin\Psi, \tag{2.54}$$

sendo u, v e θ funções de z apenas.

A origem do eixo O na Figura 2.12 foi escolhida arbitrariamente, e os eixos sofreram os deslocamentos u, v e θ. Esses deslocamentos, no caso de um carregamento de torção puro, são equivalentes a uma rotação a partir de um ponto R (x_R, y_R) na seção transversal, sendo R o centro de torção. Assim, o deslocamento tangencial também pode ser obtido pela Equação (2.55).

$$\begin{aligned} v_t &= p_R\theta \\ p_R &= p - x_R\sin\Psi + y_R\cos\Psi \end{aligned} \tag{2.55}$$

Substituindo os termos da Equação (2.55), obtém-se a Equação (2.56).

$$v_t = p\theta - x_R\theta\cos\Psi + y_R\theta\sin\Psi \tag{2.56}$$

Derivando a Equação (2.56) em relação a z, a relação da Equação (2.57) é encontrada.

$$\frac{\partial v_t}{\partial z} = p\frac{\partial\theta}{\partial z} - x_R\sin\Psi\frac{d\theta}{dz} + y_R\cos\Psi\frac{d\theta}{dz} \tag{2.57}$$

Ainda, com base agora na Equação (2.54), a derivada pode ser dada pela Equação (2.58)
.

$$\frac{\partial v_t}{\partial z} = p\frac{\partial \theta}{\partial z} + \frac{du}{dz}\cos\Psi + \frac{dv}{dz}\sin\Psi \tag{2.58}$$

Comparando os coeficientes das Equações (2.57) e (2.58), as coordenadas do centro de torção R da seção transversal podem, enfim, ser determinadas pela Equação (2.59).

$$x_R = -\frac{dv/dz}{d\theta/\delta z},\ y_R = \frac{du/dz}{d\theta/dz} \tag{2.59}$$

2.4.1.1. Cisalhamento em Vigas de Seção Transversal Aberta

Considerando uma viga de seção arbitrária aberta, conforme Figura 2.13, admite-se que ela suporta os carregamentos cisalhantes S_x e S_y, sem sofrer torção.

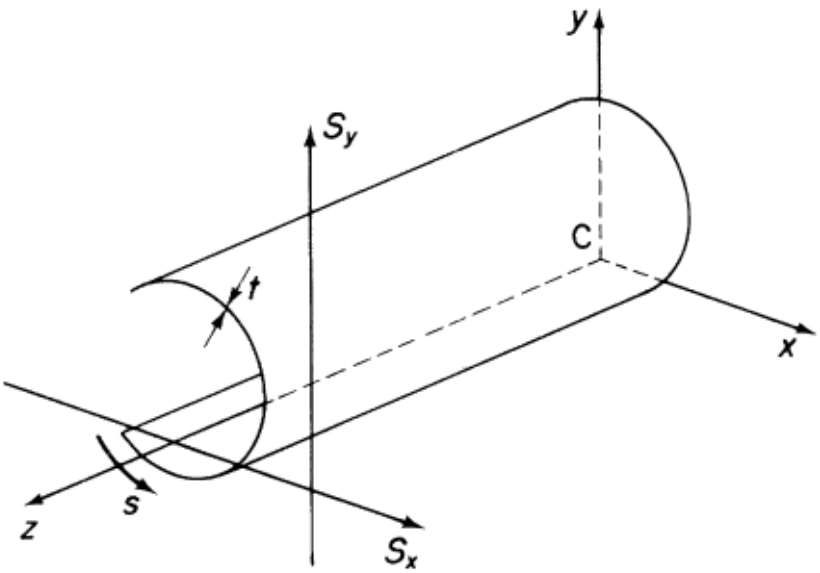


Figura 2.13 – Carregamentos cisalhantes de uma viga com seção transversal aberta. Fonte: MEGSON (2013).

Para a condição de não torção da viga ser válida, os carregamentos cisalhantes devem passar através de um ponto particular na seção transversal, conhecido como centro de cisalhamento. Uma vez que a tensão σ_s pode ser desconsiderada graças à seção transversal

aberta, os fluxos cisalhantes e as tensões normais num elemento da parede da viga podem ser relacionados pela Equação (2.60).

$$\frac{\partial q}{\partial s} + t\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \tag{2.60}$$

Assumindo que as tensões normais podem ser obtidas da teoria de flexão básica já descrita, conforme Equação (2.26), a derivada da tensão normal na direção *z* pode ser visualizada na Equação (2.61).

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \frac{[(\partial M_y / \partial z)I_{xx} - (\partial M_x / \partial z)I_{xy}]}{I_{xx}I_{yy} - I_{xy}^2}x + \frac{[(\partial M_x / \partial z)I_{yy} - (\partial M_y / \partial z)I_{xy}]}{I_{xx}I_{yy} - I_{xy}^2}y \tag{2.61}$$

Utilizando a relação $\partial M_y/\partial z = S_x$, obtém-se a Equação (2.62).

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \frac{(S_x I_{xx} - S_y I_{xy})}{I_{xx}I_{yy} - I_{xy}^2}x + \frac{(S_y I_{yy} - S_x I_{xy})}{I_{xx}I_{yy} - I_{xy}^2}y \tag{2.62}$$

Substituindo o termo encontrado na Equação (2.48), encontra-se a Equação (2.63).

$$\frac{\partial q}{\partial s} = \frac{(S_x I_{xx} - S_y I_{xy})}{I_{xx}I_{yy} - I_{xy}^2}tx + \frac{(S_y I_{yy} - S_x I_{xy})}{I_{xx}I_{yy} - I_{xy}^2}ty \tag{2.63}$$

A Equação (2.63) pode ser integrada em relação a *s*, no intervalo entre a origem e qualquer ponto da seção transversal, gerando assim a Equação (2.64).

$$\int_0^s \frac{\partial q}{\partial s}ds = -\left(\frac{S_x I_{xx} - S_y I_{xy}}{I_{xx}I_{yy} - I_{xy}^2}\right)\int_0^s tx\ ds - \left(\frac{S_y I_{yy} - S_x I_{xy}}{I_{xx}I_{yy} - I_{xy}^2}\right)\int_0^s ty\ ds \tag{2.64}$$

Se a origem *s* for escolhida como sendo a borda aberta da seção transversal, então o fluxo cisalhante $q = 0$ quando $s = 0$, e a Equação (2.64) se torna a Equação (2.65).

$$q_s = -\left(\frac{S_x I_{xx} - S_y I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2}\right)\int_0^s tx\ ds - \left(\frac{S_y I_{yy} - S_x I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2}\right)\int_0^s ty\ ds \tag{2.65}$$

E, para uma seção que possua *Cx* ou C*y* como um eixo de simetria, $I_{xy} = 0$, reduzindo a Equação (2.65) à Equação (2.66).

$$q_s = -\frac{S_x}{I_{yy}}\int_0^s tx\ ds - \frac{S_y}{I_{xx}}\int_0^s ty\ ds \tag{2.66}$$

· **Centro de Cisalhamento**

O posicionamento do centro de cisalhamento é definido como o ponto da seção transversal através do qual as cargas cisalhantes não produzem torção. Em seções transversais que contenham um eixo de simetria, esse centro deve estar contido no eixo.

2.4.1.2. Cisalhamento em Vigas de Seção Transversal Fechada

A análise de vigas com seção transversal fechada é semelhante às daquelas com seção aberta, mas possui duas diferenças importantes. Primeiramente, as cargas cisalhantes devem ser aplicadas através de pontos da seção transversal que não sejam o centro de cisalhamento, assim os efeitos de torção serão considerados juntamente com os de cisalhamento. Isso é possível pelo fato de as tensões cisalhantes produzidas pela torção em vigas de seção fechada possuir a mesma forma das tensões cisalhantes produzidas pelo cisalhamento. A segunda diferença consiste em não ser possível, para as seções fechadas, escolher uma origem *s* na qual o fluxo cisalhante é conhecido.

Considerando uma viga de seção transversal fechada, como a mostrada na Figura 2.14. As cargas cisalhantes S_x e S_y são aplicadas através de qualquer ponto na seção, e, em geral, causam tensões normais de flexão e fluxos cisalhantes, como mostrou a Equação (2.48).

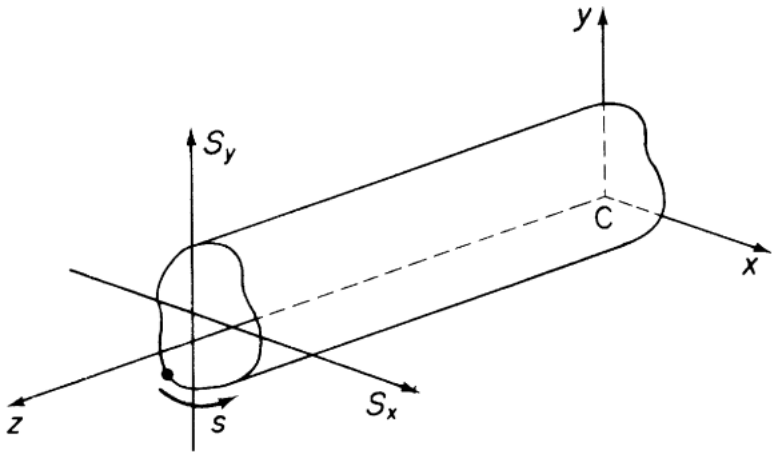


Figura 2.14 – Cisalhamento em viga de seção transversal fechada. Fonte: Megson (2013).

A análise realizada da Equação (2.48) até a Equação (2.64) é igual para ambas as seções aberta e fechada. A partir dessa etapa, no entanto, o estudo deve ser realizado de uma maneira diferente. Supondo que seja escolhida uma origem *s*, na qual o fluxo cisalhante é desconhecido e vale $q_{s,0}$. Integrando a Equação (2.64), para uma seção fechada, é encontrada a Equação (2.67) , ou ainda, em outra disposição, a Equação (2.68).

$$q_s - q_{s,0} = -\left(\frac{S_x I_{xx} - S_y I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2}\right)\int_0^s tx\ ds - \left(\frac{S_y I_{yy} - S_x I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2}\right)\int_0^s ty\ ds \tag{2.67}$$

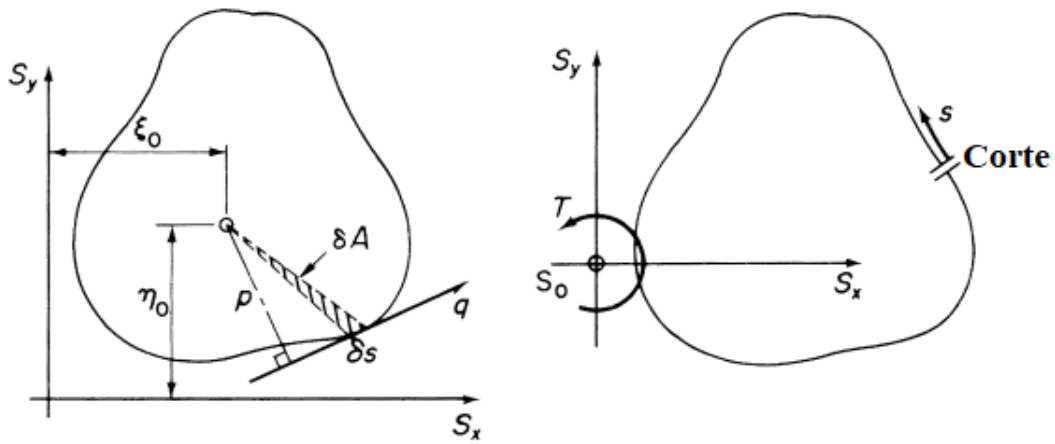
$$q_s = -\left(\frac{S_x I_{xx} - S_y I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2}\right)\int_0^s tx\ ds - \left(\frac{S_y I_{yy} - S_x I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2}\right)\int_0^s ty\ ds + q_{s,0} \tag{2.68}$$

Comparando as Equações (2.65) e (2.68), observa-se que os dois primeiros termos do lado direito da Equação (2.68) representam a distribuição de fluxo cisalhante numa viga de seção transversal aberta, com uma carga atravessando seu centro de cisalhamento. Essa percepção origina um método de solução para vigas de seção fechada. Representando a seção aberta, ou fluxo cisalhante básico, por q_b, a Equação (2.68) pode ser escrita na forma da Equação (2.69).

$$q_s = q_b + q_{s,0} \tag{2.69}$$

A expressão para q_b pode ser obtida supondo que a seção fechada é cortada em algum ponto conveniente, produzindo assim uma seção aberta, como exemplifica a Figura 2.15. O fluxo cisalhante nessa seção aberta criada é dado pela Equação (2.70).

$$q_b = -\left(\frac{S_x I_{xx} - S_y I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2}\right)\int_0^s tx\ ds - \left(\frac{S_y I_{yy} - S_x I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2}\right)\int_0^s ty\ ds \tag{2.70}$$



(a) (b)

Figura 2.15 – (a) Esquema para determinação de qs,0; (b) Exemplo de corte na seção fechada. Fonte: MEGSON (2013).

Para determinar o valor do fluxo cisalhante no local do corte, $q_{s,0}$, devem ser igualados os momentos internos e externos para um ponto qualquer, também convenientemente escolhido, como mostrado na Equação (2.71).

$$S_x \eta_0 - S_y \xi_0 = \bigcirc \qquad \bigcirc \qquad \bigcirc \tag{2.71}$$

onde a integração deve ser realizada ao redor da seção transversal.

Observando a Figura 2.15.a, encontra-se a relação mostrada na Equação (2.72). Integrando ao redor da área da seção transversal, determina-se a Equação (2.73) e, consequentemente, a Equação (2.74):

$$\delta \mathrm{A} = \frac{1}{2}\delta sp\ , \tag{2.72}$$

$$\bigcirc \qquad \bigcirc \quad , \tag{2.73}$$

$$\bigcirc \tag{2.74}$$

sendo A a área interna da seção transversal vazada. Assim, tem-se a Equação (2.75).

$$S_x \eta_0 - S_y \xi_0 = \bigcirc \qquad {}_{,0} \tag{2.75}$$

Caso o centro de momento seja escolhido para coincidir com as linhas de ação de S_x e S_y, a Equação (2.75) é reduzida à Equação (2.76).

$$0 = \bigcirc \qquad {}_{,0} \tag{2.76}$$

- **Torção e Deformação de Vigas de Seção Fechada sob Ação de Cargas Cisalhantes**

Cargas cisalhantes, quando não são aplicadas ao centro de cisalhamento da viga de seção transversal fechada, fazem as seções transversais torcerem e se deformarem. Ou seja, além de rotação, elas sofrem deslocamentos para fora do plano axial. A expressão para determinar esse deslocamento pode ser determinada em termos do fluxo cisalhante q_s.

Sabe-se que $q = \tau.t$ e que $\tau = G.\gamma$, sendo G o módulo de cisalhamento do material. Logo, q_s pode ser determinado em função dos deslocamentos axial e tangencial, w e v_t, respectivamente, em um ponto da parede da viga, conforme a Equação (2.53), gerando a Equação (2.77).

$$q_s = Gt\left(\frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial v_t}{\partial z}\right) \tag{2.77}$$

Substituindo por $\partial v_t/\partial z$ da Equação (2.58), encontra-se a Equação (2.78).

$$\frac{q_s}{Gt} = \frac{\partial w}{\partial s} + p\frac{d\theta}{dz} + \frac{du}{dz}\cos\Psi + \frac{dv}{dz}\sin\Psi \tag{2.78}$$

Integrando a Equação (2.78) em relação a *s*, da origem até *s*, e observando que G pode ser uma função de *s,* obtêm-se as Equações (2.79) a (2.81):

$$\int_0^s \frac{q_s}{Gt} ds = \int_0^s \frac{\partial w}{\partial s} ds + \frac{d\theta}{dz} \int_0^s p ds + \frac{du}{dz} \int_0^s \cos\Psi ds + \frac{dv}{dz} \int_0^s \sin\Psi ds \ , \tag{2.79}$$

$$\int_0^s \frac{q_s}{Gt} ds = \int_0^s \frac{\partial w}{\partial s} ds + \frac{d\theta}{dz} \int_0^s p ds + \frac{du}{dz} \int_0^s dx + \frac{dv}{dz} \int_0^s dy \ , \tag{2.80}$$

$$\int_0^s \frac{q_s}{Gt} ds = (w_s - w_0) + 2A_{O_s} \frac{d\theta}{dz} + \frac{du}{dz}(x_s - x_0) + \frac{dv}{dz}(y_s - y_0), \tag{2.81}$$

sendo A_{Os} a área varrida a partir da origem dos eixos, *O*, da origem até *s*. Continuando a integração da Equação (2.81) ao redor das fronteiras da seção transversal, encontra-se a Equação (2.82), a partir da qual resulta a Equação (2.83).

$$\bigcirc \qquad \frac{\theta}{z} \tag{2.82}$$

$$\frac{d\theta}{dz} = \frac{1}{2A} \bigcirc \tag{2.83}$$

Substituindo a taxa de torção da Equação (2.81) na Equação (2.83), determina-se a distribuição da deformação ao redor da seção transversal, como mostra a Equação (2.84).

$$w_s - w_0 = \int_0^s \frac{q_s}{Gt} ds - \frac{A_{o_s}}{A} \bigcirc \qquad - x_0) - \frac{dv}{dz}(y_s - y_0) \tag{2.84}$$

Utilizando a Equação (2.59) para substituir as taxas *du/dz* e *dv/dz* na Equação (2.84), tem-se a Equação (2.85).

$$w_s - w_0 = \int_0^s \frac{q_s}{Gt} ds - \frac{A_{o_s}}{A} \bigcirc \qquad (x_s - x_0) + x_R \frac{d\theta}{dz}(y_s - y_0) \tag{2.85}$$

Os últimos dois termos da Equação (2.85) representam o efeito de relacionar o deslocamento causado pela deformação a uma origem arbitrária que sofre ela mesma um deslocamento devido à deformação. No caso em que a origem coincide com o centro de torção *R* da seção, a Equação (2.85) se reduz à Equação (2.86).

$$w_s - w_0 = \int_0^s \frac{q_s}{Gt} ds - \frac{A_{o_s}}{A} \bigcirc \tag{2.86}$$

Em problemas envolvendo seções simétricas, a origem *s* pode ser escolhida para coincidir com um ponto de flexão nula, o que ocorre onde o eixo de simetria e a parede da seção se intersectam. Para seções assimétricas, a origem *s* deve ser escolhida arbitrariamente.

Centro de Cisalhamento

A resolução do centro de cisalhamento *S* de uma viga com seção transversal fechada se dá com a determinação de sua coordenada ξ_s, conforme a Figura 2.16.

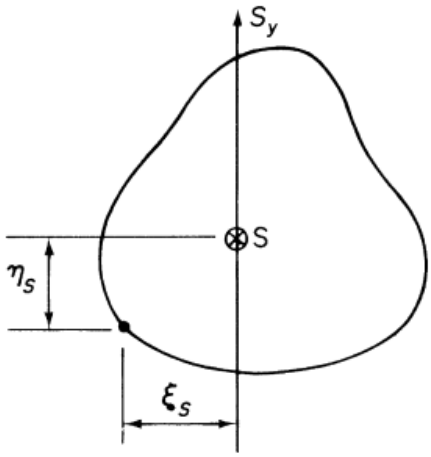


Figura 2.16 – Centro de cisalhamento de uma viga com seção transversal fechada. Fonte: MEGSON (2013).

Primeiramente, ainda de acordo com a Figura 2.16, a aplica-se uma carga cisalhante S_y arbitrária através de *S*; em seguida, calcula-se a distribuição do fluxo q_s; e, por fim, igualam-se os momentos internos e externos.

Para facilitar a análise, utiliza-se a condição de que uma carga cisalhante agindo sobre o centro de cisalhamento de uma seção produz zero torção. Assim, *dθ/dz = 0*, e, portanto, da Equação (2.83), sucedem as Equações (2.87) e (2.88).

$$0 = \bigcirc \qquad \bigcirc \qquad s \tag{2.87}$$

$$q_{s,0} = -\cdot \begin{matrix} \bigcirc \\ \bigcirc \end{matrix} \tag{2.88}$$

Se *Gt = constante,* o termo pode ser simplificado ainda para a Equação (2.89).

$$q_{s,0} = -\cdot \begin{matrix} \bigcirc \\ \bigcirc \end{matrix} \tag{2.89}$$

A coordenada η_s pode ser encontrada de maneira similar, aplicando-se a carga cisalhante S_x através de *S*.

2.4.2 Material Compósito

Na seção 2.4.1, a Equação (2.65) descreve a distribuição do fluxo cisalhante numa viga com seção transversal aberta. Esse fluxo é ligado à distribuição de tensão normal na seção, demonstrada na Equação (2.48), e as considerações aplicadas à flexão de materiais compósitos são válidas também agora para o cisalhamento. Feito isso, a Equação (2.65) toma a forma da Equação (2.90).

$$q_s = -E_{Z,i}\left[\left(\frac{S_X I'_{XX} - S_Y I'_{XY}}{I'_{XX} I'_{YY} - I'^{\,2}_{XY}}\right)\int_0^s t_i x ds + \left(\frac{S_Y I'_{YY} - S_X I'_{XX}}{I'_{XX} I'_{YY} - I'^{\,2}_{XY}}\right)\int_0^s t_i Y ds\right] \tag{2.90}$$

Para o caso de seções transversais fechadas, as mesmas considerações devem ser tomadas. Agora, a Equação (2.68) passa a ser escrita como a Equação (2.91).

$$q_s = -E_{Z,i}\left[\left(\frac{S_X I'_{XX} - S_Y I'_{XY}}{I'_{XX} I'_{YY} - I'^{\,2}_{XY}}\right)\int_0^s t_i x ds + \left(\frac{S_Y I'_{YY} - S_X I'_{XX}}{I'_{XX} I'_{YY} - I'^{\,2}_{XY}}\right)\int_0^s t_i y ds\right] + q_{s,0} \qquad (2.91)$$

O valor do fluxo cisalhante $q_{s,0}$ pode ser encontrado utilizando as equações já descritas para materiais isotrópicos.

2.5 Torção em Seção Transversal de Vigas com Paredes Finas

2.5.1 Material Isotrópico

2.5.1.1 Torção em Vigas de Seção Transversal Fechada

Como demonstrado por Megson (2013), uma viga de seção transversal fechada sujeita a um torque puro T, conforme Figura 2.17, não proporciona nenhuma tensão normal. Assim, as condições de equilíbrio, Equações (2.48) e (2.49), se reduzem à $\partial q/\partial s = 0$ e $\partial q/\partial z = 0$, respectivamente. Por consequência, ambas as equações só são satisfeitas para um fluxo cisalhante constante. Sendo assim, a tensão de cisalhamento pode variar em torno da seção transversal somente no caso em que a espessura da parede t seja uma função de s (MEGSON, 2013) mostra ainda que, a relação entre o torque T e o fluxo de cisalhamento constante q se dá pela Equação (2.92):

$$T = 2Aq \ . \qquad (2.92)$$

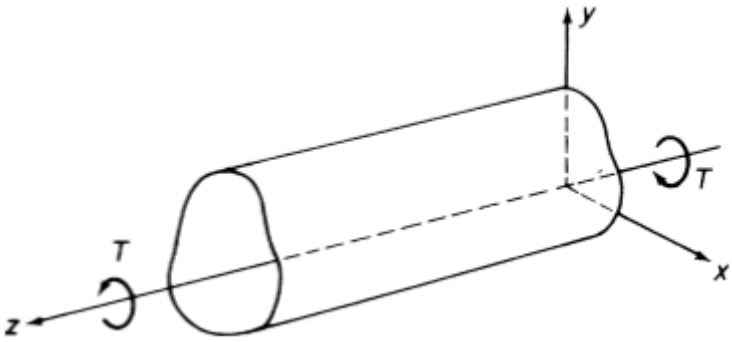


Figura 2.17 – Torção de uma viga de seção fechada. Fonte: MEGSON (2013).

A teoria de torção em uma viga de seção fechada é conhecida como teoria de *Bredt-Batho* e a Equação (2.92) é frequentemente referida como relação de *Bredt-Batho*.

A relação entre q e a deformação cisalhante γ, definida na Equação (2.77):

$$q = Gt\left(\frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial v_t}{\partial z}\right) \tag{2.93}$$

é válida para torção pura onde q é constante. Diferenciando a expressão em relação à coordenada z, tem-se:

$$\frac{\partial q}{\partial z} = Gt\left(\frac{\partial^2 w}{\partial z \partial s} + \frac{\partial^2 v_t}{\partial z^2}\right) = 0 \tag{2.94}$$

ou

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right) + \frac{\partial^2 v_t}{\partial z^2} = 0 \ . \tag{2.95}$$

Na ausência de tensões normais, a deformação longitudinal $\partial w / \partial z \left(= \varepsilon_z\right)$ é zero, portanto

$$\frac{\partial^2 v_t}{\partial z^2} = 0 \ . \tag{2.96}$$

Consequentemente, da Equação (2.54) segue-se:

$$p\frac{d^2\theta}{dz^2} + \frac{d^2 u}{dz^2}\cos\psi + \frac{d^2 v}{dz^2}\sin\psi = 0 \ . \tag{2.97}$$

Para a Equação (2.97) ser válida em todos os pontos ao redor da parede, ou seja, para todos os valores de ψ :

$$\frac{d^2\theta}{dz^2} = 0, \quad \frac{d^2 u}{dz^2} = 0, \quad \frac{d^2 v}{dz^2} = 0 \ . \tag{2.98}$$

Segue que $\theta = Az + B$, $u = Cz + D$ e $v = Ez + F$, onde A, B, C, D, E e F são constantes desconhecidas e θ, u e v são funções lineares de z.

A Equação (2.83), que relaciona a taxa de torção ao fluxo cisalhante variável q_s em uma viga de seção fechada, também pode ser aplicada para o caso de $q_s = q =$ constante, conforme a Equação (2.99), ou, ao substituir a Equação (2.92) tem-se a Equação (2.100).

$$\frac{d\theta}{dz} = \frac{q}{2A}\bigcirc \tag{2.99}$$

$$\frac{d\theta}{dz} = \frac{T}{4A^2}\bigcirc \tag{2.100}$$

A distribuição de deformação produzida por um fluxo de cisalhamento variável, conforme definido pela Equação (2.86) para eixos com origem no centro de torção, é também aplicável para o caso de um fluxo de cisalhamento constante, obtendo assim a Equação (2.101) .

$$w_s - w_0 = q\int_0^s \frac{ds}{Gt} - \frac{A_{O_s}}{A}\bigcirc \tag{2.101}$$

Substituindo o q da Equação (2.92), chega-se na Equação (2.102):

$$w_s - w_0 = \frac{T\delta}{2A}\left(\frac{\delta_{O_s}}{\delta} - \frac{A_{O_s}}{A}\right), \tag{2.102}$$

onde $\delta = \bigcirc$ e $\delta_{O_s} = \int_0^s \frac{ds}{Gt}$.

O sinal do deslocamento na Equação (2.102) é determinado pelo sinal do torque aplicado T e dos parâmetros δ_{O_s} e A_{O_s}.

2.5.2 Material Compósito

A distribuição do fluxo cisalhante em uma viga com seção transversal fechada submetida a um torque foi dada pela Equação (2.92). Numa outra forma, pode ser descrita pela Equação (2.103).

$$q = \frac{T}{2A} \tag{2.103}$$

A derivação da Equação (2.103) é baseada unicamente em equações de equilíbrio, não sendo influenciada pelas propriedades da seção da viga. Assim, pode ser aplicada igualmente para materiais isotrópicos e compósitos.

A taxa de torção para viga de seção fechada mostrada na Equação (2.100) também pode ser aplicada para uma seção compósita, desde que o módulo de cisalhamento G seja mantido dentro da integral e que o módulo de cisalhamento da lâmina, $G_{XY,i}$, seja apropriadamente usado. Assim, obtém-se a Equação (2.104) e, reorganizando, a Equação (2.105).

$$\frac{d\theta}{dZ} = \frac{T}{4A^2} \bigcirc \tag{2.104}$$

$$T = \frac{4A^2}{\bigcirc} \frac{d\theta}{} \tag{2.105}$$

Uma vez que o torque e a taxa de torção em uma viga são relacionados pela rigidez torsional GJ, a partir da Equação (2.105) percebe-se que a rigidez torsional de uma viga com seção compósita fechada é dada pela Equação (2.106).

$$GJ = \frac{4A^2}{\bigcirc} \tag{2.106}$$

Assim, a distribuição de deformação neste tipo de viga pode ser dada pela Equação (2.107), ou ainda, em termos do torque aplicado, pela Equação (2.108).

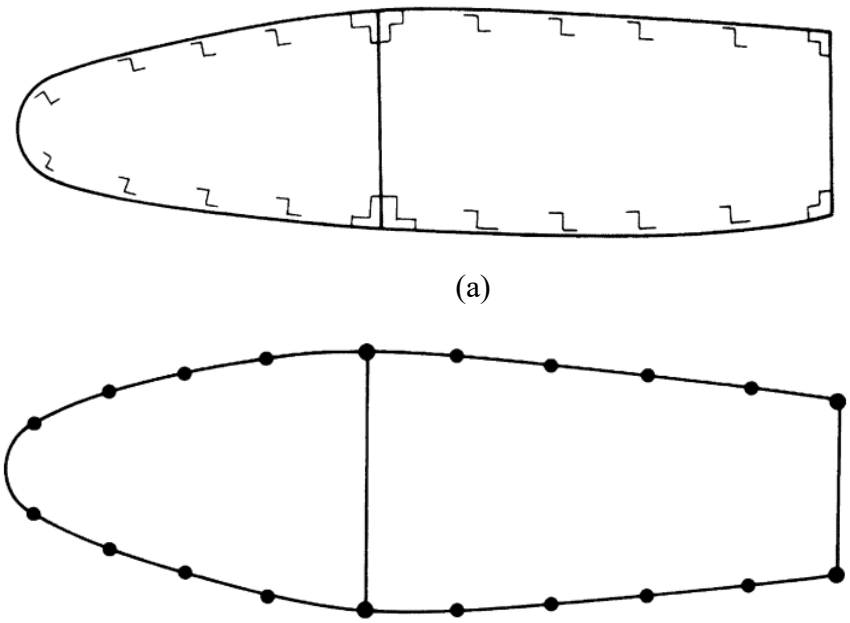
$$W_s - W_0 = q\int_0^s \frac{ds}{G_{XY,i}t_i} - \frac{A_{0s}}{A} q \bigcirc \tag{2.107}$$

$$W_s - W_0 = \frac{T}{2A}\left(\int_0^s \frac{ds}{G_{XY,i}t_i} - \frac{A_{0s}}{A}q\bigcirc\right. \tag{2.108}$$

2.6 Idealização Estrutural

Em aeronaves, asas, empenagens e fuselagens são formas estruturais complexas, formadas por paredes finas enrijecidas. Devido à complexidade da análise das seções dessas estruturas, podem ser feitas simplificações no intuito de gerar um Modelo Mecânico com comportamento bastante similar ao da Estrutura Real.

Admitindo uma seção típica de asa como a mostrada na Figura 2.18.a, são realizadas algumas considerações. Primeiramente, analisa-se que as nervuras e as longarinas dos bordos possuem uma seção transversal consideravelmente menor que a seção transversal total. Assim, a variação das tensões ao longo de sua seção devido à flexão é pequena. Além disso, a distância entre os centros de gravidade e o revestimento é pequena. Visto isso, pode-se assumir que as tensões normais são constantes nas nervuras e nas longarinas dos bordos, o que permite substituí-las por áreas concentradas na linha média do *skin*, os chamados *booms*, mostrados na Figura 2.18.b.



(a)

(b)

Figura 2.18 – (a) Seção de asa típica; (b) Idealização da seção com booms. Fonte: MEGSON (2013).

Em seções transversais de asas e fuselagens, as nervuras e as longarinas de bordo resistem à maior parte das tensões normais, enquanto o revestimento resiste à maior parte das tensões cisalhantes. Dessa forma, pode ser considerado que as tensões normais são suportadas pelos booms, e que as tensões cisalhantes são suportadas pelo revestimento.

- **Idealização de um painel**

Supondo que se deseje idealizar o painel mostrado na Figura 2.19 numa combinação de *booms* e revestimento. Na Figura 2.19.a, a espessura t_D que suporta as tensões normais é igual à espessura real t. Já na Figura 2.19.b, nota-se que essa espessura t_D é considerada como sendo nula. Também se supõe que a distribuição de tensão normal no painel real varia linearmente de um extremo com tensão desconhecida σ_1 até outro extremo também desconhecido σ_2.

No painel idealizado, a distribuição de tensão normal é desconsiderada. Uma vez que o carregamento precisa ser o mesmo em ambas as situações, podem ser equacionados momentos para obter as áreas dos *booms* B_1 e B_2, como mostram as Equações (2.109) a (2.111).

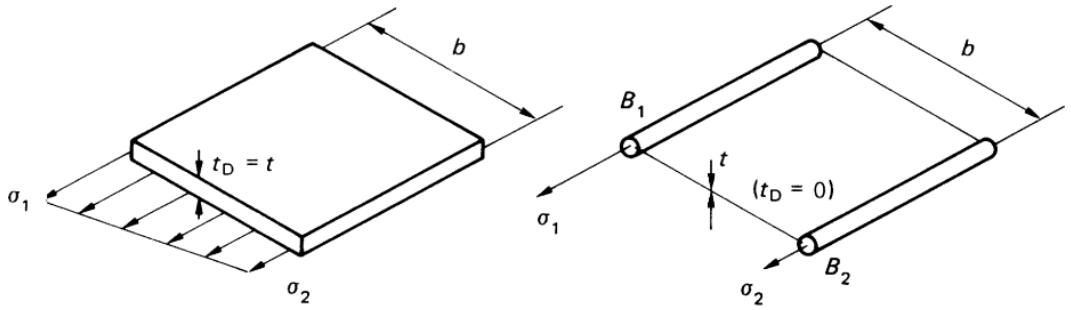


Figura 2.19 – (a) Painel real; (b) Painel idealizado com booms e revestimento. Fonte: MEGSON, 2013.

$$\sigma_2 t_D \frac{b^2}{2} + \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) t_D b \frac{2}{3} b = \sigma_1 B_1 b \tag{2.109}$$

$$B_1 = \frac{t_D b}{6}\left(2 + \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right) \tag{2.110}$$

$$B_2 = \frac{t_D b}{6}\left(2 + \frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right) \tag{2.111}$$

A distribuição de tensão normal na Figura 2.19.a é causada por uma combinação de carregamento axial e momento fletor. Para um carregamento axial puro, $\sigma_1/\sigma_2 = 1$ e $B_1 = B_2 = t_D b/2$. Já para um momento cisalhante exclusivamente, $\sigma_1/\sigma_2 = -1$ e $B_1 = B_2 = t_D b/6$.

2.6.1 Flexão e Cisalhamento em Vigas de Seção Fechada Idealizada

A adição do carregamento de uma tensão normal nos *booms* modifica as análises mostradas nas seções anteriores. Normalmente, em qualquer idealização, condições diferentes de carregamento exigem diferentes idealizações para uma mesma estrutura.

Supondo a idealização de uma viga de seção aberta ou fechada, submetida a carregamentos de flexão ou cisalhamento. A análise dessa seção normalmente envolve a determinação da posição da linha neutra e o cálculo das propriedades da seção. Esse posicionamento da linha neutra, por sua vez, deriva da condição na qual o carregamento resultante na seção transversal da viga é zero, como mostra a Equação (2.112).

$$\int_A \sigma_z dA = 0 \tag{2.112}$$

A área mostrada na Equação (2.112) é aquela que está submetida à tensão axial. Assim, o centroide da seção transversal é o centroide da área que suporta a tensão axial, dependendo do grau e do método de idealização. Portanto, as propriedades da seção, tais como os momentos de inércia I_{xx}, I_{yy} e I_{xy}, devem ser determinadas a partir dessa área de referência.

2.6.1.1 Flexão de vigas de seção aberta e fechada

A análise mostrada na seção 2.3 pode ser aqui aplicada, e o carregamento axial é então dado pelas Equações (2.26) e (2.27), a depender da seção investigada. Nessas equações, as coordenadas *(x,y)* dos pontos na seção transversal se referem aos eixos cuja origem se localiza no centroide da área de referência.

2.6.1.2 Cisalhamento de vigas de seção aberta

A Equação (2.50) para a distribuição de fluxo cisalhante em uma viga de seção transversal aberta é baseada no equilíbrio mostrado na Equação (2.48). A espessura t nessa equação se refere à espessura t_D do revestimento. Assim, pode-se reescrever essas equações na forma da Equação (2.113).

$$q_s = -\left(\frac{S_x I_{xx} - S_y I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2}\right)\int_0^s t_D x ds - \left(\frac{S_y I_{yy} - S_x I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2}\right)\int_0^s t_D y ds \tag{2.113}$$

Na Equação (2.113), assume-se que $t_D = t$ se o revestimento for o responsável por suportar completamente o carregamento axial, ou $t_D = 0$ se o revestimento for submetido apenas a cisalhamento. Essa equação, no entanto, não contabiliza os efeitos de descontinuidades no revestimento, e, consequentemente, do fluxo cisalhante, o que é causado pela presença dos *booms*. Assim, faz-se necessário adaptá-la para admitir a mudança no fluxo cisalhante induzida pelo fato de o *boom* ser submetido a um carregamento ($\sigma_z B_r$). Para isso, a cada distância s percorrida na seção, e dado um número n de *booms* passados, o fluxo cisalhante passa a ser acrescido do montante mostrado na Equação (2.114).

$$\begin{aligned} q_s = &-\left(\frac{S_x I_{xx} - S_y I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2}\right)\left(\int_0^s t_D x ds + \sum_{r=1}^{n} B_r x_r\right) \\ &-\left(\frac{S_y I_{yy} - S_x I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2}\right)\left(\int_0^s t_D y ds + \sum_{r=1}^{n} B_r y_r\right) \end{aligned} \tag{2.114}$$

2.6.1.3 Cisalhamento de vigas de seção fechada

Aqui são feitas as mesmas considerações para o cisalhamento de vigas de seção aberta. Visto isso, o fluxo cisalhante em qualquer ponto da seção fechada, incluindo *booms* e revestimento, com espessura t_D, pode ser obtido por uma comparação entre as Equações (2.68) e (2.114), resultando na Equação (2.115).

$$q_s = -\left(\frac{S_x I_{xx} - S_y I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2}\right)\left(\int_0^s t_D x ds + \sum_{r=1}^{n} B_r x_r\right)$$
$$-\left(\frac{S_y I_{yy} - S_x I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2}\right)\left(\int_0^s t_D y ds + \sum_{r=1}^{n} B_r y_r\right) + q_{\mathrm{s},0} \tag{2.115}$$

CAPÍTULO III

Materiais e Métodos

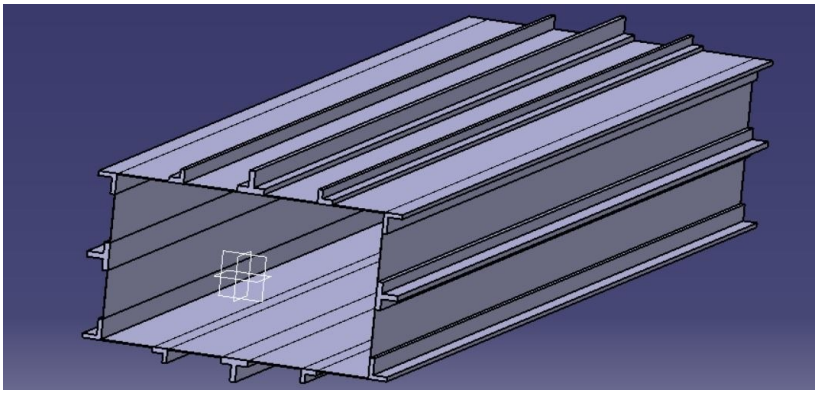
3.1 Apresentação

A análise proposta nesse Projeto de Conclusão de Curso é feita utilizando uma viga compósita tipo caixão engastada-livre, sobre a qual se aplica uma carga axial excêntrica, com o objetivo de estudar as tensões normais e cisalhantes, bem como os deslocamentos produzidos por esse esforço.

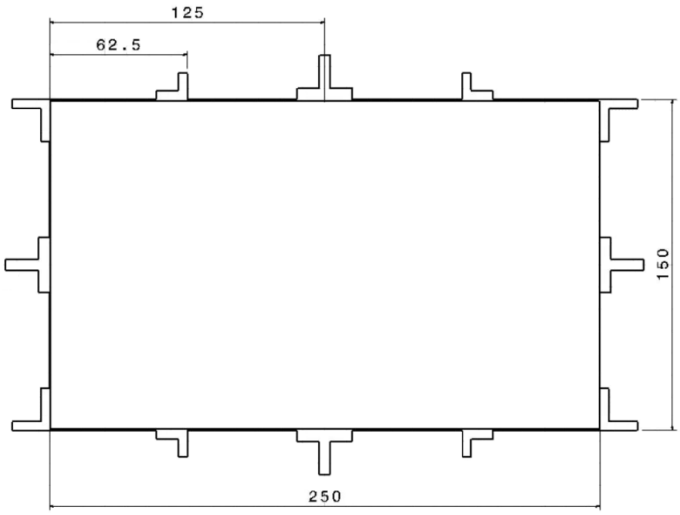
Partindo desse intuito, será aplicado o procedimento teórico-analítico descrito no Capítulo 2, baseado em Hibbeler (2010) e, principalmente, em Megson (2013). Para enriquecimento da análise, serão utilizados materiais distintos, possibilitando assim uma comparação entre eles.

3.2 Aspectos Elástico-Geométricos e de Carregamento da Viga

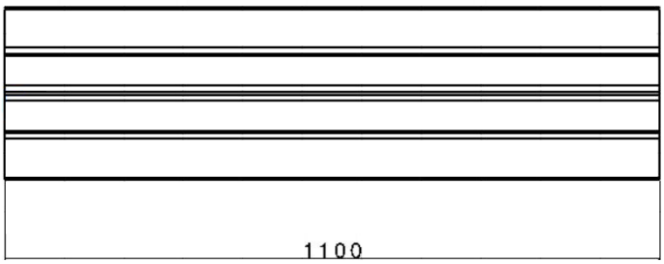
Este estudo terá como elemento estrutural a viga de paredes finas ilustrada na Figura 3.1, de dimensões 250 mm x 150 mm x 1100 mm, sendo sua espessura de 2,0 mm nas paredes verticais e 0,8 mm nas horizontais. Para aproximar a viga de uma asa aeronáutica real, foram dispostos, longitudinalmente, perfis estruturais enrijecedores de três tipos (P_1, P_2 e P_3), cujas seções são apresentadas na Figura 3.1.(b). Além disso, a análise será feita na condição de extremidade engastada-livre.



(a)



(b)



(c)

Figura 3.1 – Representação da viga de paredes finas. (a) Viga compósita. (b) Vista frontal. (c) Vista lateral.

Conforme já mencionado, a análise será feita considerando três materiais, sendo um isotrópico e dois compósitos. O material isotrópico utilizado será o Alumínio 2024-T3, liga aeronáutica largamente utilizada em fabricação de aeronaves, e que apresenta as características mecânicas mostradas na Tabela 3.1.

Tabela 3.1 – Características do Alumínio 2024-T3. Fonte: ASM, 2016.

Módulo de Elasticidade (*E*)	73100 N/mm²
Coeficiente de Poisson (ν)	0,33
Módulo de Rigidez ao Cisalhamento (*G*)	27500 N/mm²

Para o primeiro material compósito, será considerado um laminado em resina epóxi com fibras de vidro em fração volumétrica de 60%. Tal material possui uso expressivo graças à sua elevada resistência e baixo peso, e suas características mecânicas são descritas na Tabela 3.2.

Tabela 3.2 – Características do compósito epóxi/vidro. Fonte: Gay, 2015.

Módulo de Elasticidade Longitudinal (E_l)	45000 N/mm²
Módulo de Elasticidade Transversal (E_t)	12000 N/mm²
Coeficiente de Poisson (ν)	0,30
Módulo de Rigidez ao Cisalhamento (G_{lt})	4500 N/mm²

Por fim, o segundo compósito, aqui empregado para fins comparativos, é constituído por lâminas de resina epóxi com fibras de carbono, também com 60% de fração volumétrica. Em relação ao compósito anterior, este possui rigidez longitudinal três vezes maior, e suas propriedades encontram-se na Tabela 3.3:

Tabela 3.3 – Características do compósito epóxi/carbono. Fonte: Gay, 2015.

Módulo de Elasticidade Longitudinal (E_l)	134000 N/mm²
Módulo de Elasticidade Transversal (E_t)	7000 N/mm²
Coeficiente de Poisson (ν)	0,25
Módulo de Rigidez ao Cisalhamento (G_{lt})	4200 N/mm²

Os perfis utilizados foram alocados simetricamente na seção-caixão, repetidos nos quatro quadrantes desta. Suas descrições seguem na Tabela 3.4.

Com a finalidade de explorar as comparações teórico-numéricas, foram concebidos seis Modelos, variando quanto à consideração ou não de *booms* e ao material, sendo eles expostos na Tabela 3.5.

Tabela 3.4 – Descrição dos perfis utilizados na seção.

Perfil	Tipo	Dimensões [mm]	Área [mm²]
P_1	Cantoneira	19 x 17 x 4	$A_1 = 128$
P_2	Cantoneira	14 x 12 x 4	$A_2 = 88$
P_3	"T"	25 x 15 x 5	$A_3 = 200$

Com a finalidade de explorar as comparações teórico-numéricas, foram concebidos seis Modelos, variando quanto à consideração ou não de *booms* e ao material, sendo eles expostos na Tabela *3.5*.

Tabela 3.5 – Modelos utilizados na análise.

Modelo	Consideração estrutural	Material
Modelo I	Com *booms*	Alumínio 2024-T3
Modelo II	Apenas paredes	Alumínio 2024-T3
Modelo III	Com *booms*	Compósito: epóxi/vidro
Modelo IV	Apenas paredes	Compósito: epóxi/vidro
Modelo V	Com *booms*	Compósito: epóxi/vidro nas paredes verticais; epóxi/carbono nas horizontais.
Modelo VI	Apenas paredes	Compósito: epóxi/vidro nas paredes verticais; epóxi/carbono nas horizontais.

Definidos os materiais, os perfis e os modelos, o carregamento aplicado na análise será uma força vertical para baixo, com magnitude de 200 kgf, numa distância de 300 mm da parede vertical direita da viga.

CAPÍTULO IV

Análise Teórica de Tensões

4.1 Modelo Teórico

A análise teórica da viga considerou, primeiramente, a idealização estrutural por *booms* mostrada na Seção 2.6. Tal idealização, utilizada nos Modelos I, III e V, segue ilustrada na Figura 4.1. Para os modelos II, IV e VI, que não utilizam enrijecedores, não se aplica a análise realizada nessa Subseção.

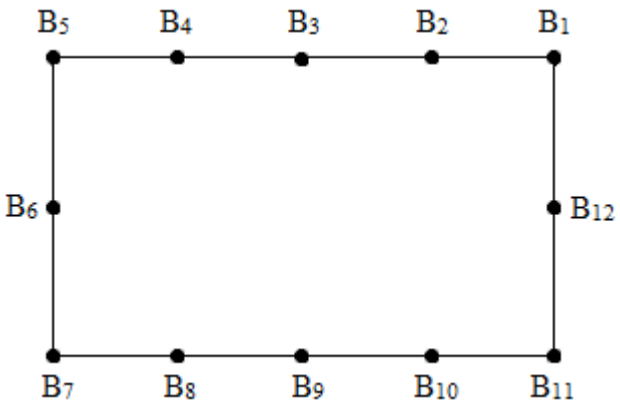


Figura 4.1 – Idealização estrutural da viga utilizando doze *booms*.

Definido o modelo, faz-se necessário determinar a área pontual de cada *boom*, B_i, cálculo já descrito na Equação (2.110). Para fins de ilustração, o cálculo da área referente ao primeiro *boom*, B_1, é mostrado nas Equações (4.1) e (4.2).

$$B_1 = A_1 + \frac{t_{1-2} l_{1-2}}{6}\left[2 + \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right] + \frac{t_{1-12} l_{1-12}}{6}\left[2 + \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1}\right] \tag{4.1}$$

$$B_1 = A_1 + \frac{t_{1-2}l_{1-2}}{6}\left[2 + \frac{y_2}{y_1}\right] + \frac{t_{1-12}l_{1-12}}{6}\left[2 + \frac{y_{12}}{y_1}\right], \tag{4.2}$$

sendo t a espessura do trecho e l a distância entre os *booms*, ambas as medidas referentes aos dois *booms* imediatamente vizinhos ao analisado.

Nota-se que, para o cálculo das áreas, não se faz necessário conhecer os valores das tensões normais σ_i. São suficientes os valores das coordenadas y_i, que descrevem a distância dos *booms* até a linha de ação do momento M_x, ou seja, até o eixo centroidal da seção. Isso se deve ao fato de que o quociente das tensões normais é simplificado pelos parâmetros referentes às propriedades de inércia e ao momento fletor atuante na seção transversal da viga.

Estendido o desenvolvimento para os demais *booms*, os valores das áreas de todos eles podem ser encontrados na Tabela 4.1.

Tabela 4.1 – Área de cada boom.

Boom	**Área [mm²]**
B_1	203
B_2	138
B_3	250
B_4	138
B_5	203
B_6	200
B_7	203
B_8	138
B_9	250
B_{10}	138
B_{11}	203
B_{12}	200

4.2 Tensões Normais Devidas ao Momento de Flexão

A viga estudada possui seção transversal simétrica em relação aos eixos x e y, o que torna então $I_{xy} = 0$. Assim, a carga vertical aplicada ocasionará uma flexão em torno do eixo x, gerando, portanto, o momento M_x.

Como citado na Seção 2.6, a idealização estrutural por *booms* considera que as tensões normais são suportadas pelos *booms*, enquanto as tensões cisalhantes são suportadas pelo revestimento. Dito isso, e adaptando as Equações (2.26) e (2.27) para a viga aqui analisada, a tensão axial no *boom* pode ser determinada pela Equação (4.3), para materiais isotrópicos.

$$\sigma_Z = \frac{M_X y_r}{I_{xx}} = \frac{F(l-z)y_r}{I_{xx}} \tag{4.3}$$

Considera-se aqui que F é a carga aplicada na viga, já citada na Seção 3.2; l é o comprimento da viga; z é a locação da seção seguindo o eixo longitudinal da viga; y_r é a coordenada vertical de cada *boom*, sendo r a referência indicial desses; e I_{xx} é o momento de inércia da seção idealizada em relação ao eixo centroidal de inércia x.

No caso de materiais compósitos, o cálculo da tensão normal foi anteriormente mostrado na Equação **Erro! Fonte de referência não encontrada.**. A viga objeto desta análise possui dois eixos de simetria, conforme já explicado, portanto apenas o momento M_x é aplicado. Assim, a expressão passa a ser reduzida à Equação (4.4).

$$\sigma_Z = E_{Z,i}\left(\frac{M_x}{I'_{xx}}\right)y \tag{4.4}$$

Para este estudo, foi adotada a seção K localizada no meio do comprimento da viga considerada, na qual $z = 550\ mm$. O valor do momento M_x pode então ser determinado pela Equação (4.5).

$$M_x = +F(l-z) = 1961{,}32 \times 550 = 1{,}0787 \cdot 10^6\ Nm \tag{4.5}$$

Os cálculos dos momentos de inércia I_{xx}, para seções formadas por material isotrópico, e I'_{xx}, aplicado a materiais compósitos, foram descritos nas Equações (2.22) e (2.42), respectivamente. Adaptando ambas para considerar a idealização estrutural por *booms*, são obtidas as Equações (4.6) e (4.7).

$$I_{xx} = \sum_{i=1}^{r} B_r y_r^2 \tag{4.6}$$

$$I'_{xx} = E_{Z,i} \sum_{i=1}^{r} B_r y_r^2 \tag{4.7}$$

Aplicando a equação apropriada para cada um dos seis modelos já tratados, os valores para o momento de inércia de cada um deles em relação ao eixo centroidal *x* podem ser visualizados na Tabela 4.2.

Tabela 4.2 – Momentos de inércia I_{xx} para cada modelo analisado.

Modelo	I_{xx} **[mm^4]**
Modelo I	1,0485x10^6
Modelo II	3,3750x10^6
Modelo III	4,7183x10^{11}
Modelo IV	1,5188x10^{11}
Modelo V	1,4050x10^{12}
Modelo VI	3,5213x10^{11}

Visto isso, é possível então calcular as tensões normais aplicadas a cada um dos *booms*, primeiramente, nos Modelos I, III e V. Os resultados obtidos encontram-se na Tabela 4.3.

Como mostra a Tabela 4.3, os valores das tensões atuantes em cada um dos *booms* para os três diferentes modelos não se alteram. Isso se explica pelo fato de que todos os *booms* são constituídos pelo mesmo material, em cada um dos modelos.

No caso dos materiais compósitos, o módulo de elasticidade aparece na expressão do cálculo tanto das tensões normais quanto dos momentos de inércia, de maneira inversamente proporcional, anulando, portanto, seu valor.

Observa-se, ainda, que os *booms* B_6 e B_{12} apresentam tensão normal nula, em todos os modelos, devido à coordenada vertical *y* deles ser também zero.

Tabela 4.3 – Valores da tensão normal atuante em cada boom para os modelos I, III e V.

		Tensão Normal σ_z [N/mm²]		
Boom	**y_r [mm]**	**Modelo I**	**Modelo III**	**Modelo V**
B_1	75	7,7162	7,7162	7,7162
B_2	75	7,7162	7,7162	7,7162
B_3	75	7,7162	7,7162	7,7162
B_4	75	7,7162	7,7162	7,7162
B_5	75	7,7162	7,7162	7,7162
B_6	0	0	0	0
B_7	-75	-7,7162	-7,7162	-7,7162
B_8	-75	-7,7162	-7,7162	-7,7162
B_9	-75	-7,7162	-7,7162	-7,7162
B_{10}	-75	-7,7162	-7,7162	-7,7162
B_{11}	-75	-7,7162	-7,7162	-7,7162
B_{12}	0	0	0	0

Seguindo agora para os modelos II, IV e VI, nos quais não foi aplicada a idealização estrutural por *booms*, sabe-se que os valores máximos de tensão normal serão obtidos nas paredes superior e inferior. Ambas estão distantes 75 mm do centro de gravidade da seção transversal, onde está agindo o momento de flexão. O cálculo das tensões foi mostrado nas Equações (2.28), para materiais isotrópicos, e **Erro! Fonte de referência não encontrada.**, para materiais compósitos. A Tabela 4.4 mostra os resultados encontrados.

Tabela 4.4 – Tensões normais para os modelos II, IV e VI.

		Tensão Normal σ_z [N/mm²]		
Local	**y [mm]**	**Modelo II**	**Modelo IV**	**Modelo VI**
Mesa superior	75	23,9716	23,9716	30,7878
Mesa inferior	-75	-23,9716	-23,9716	-30,7878
Alma	37,5	11,9858	11,9858	5,1696
	-37,5	-11,9858	-11,9858	-5,1696

A Tabela 4.4 permite visualizar que, para todos os modelos, na mesa superior ocorre a tensão normal máxima de tração, com sinal positivo, e, na mesa inferior, de compressão, com sinal negativo. Para os Modelos II e IV, cujas paredes são todas compostas pelo mesmo material, os valores se repetem pela mesma razão esclarecida nos Modelos I, III e V: o módulo de elasticidade do material compósito é aplicado tanto no cálculo da tensão normal quanto na expressão do momento de inércia, anulando-se.

No Modelo VI, entretanto, há uma diferença de composição entre as paredes verticais e horizontais da viga, fazendo com que dois módulos de elasticidade diferentes interfiram no valor do momento de inércia. Na expressão da tensão normal, apenas o módulo de elasticidade das paredes horizontais é levado em consideração, o que gera a discrepância encontrada em relação aos dois modelos anteriores.

4.3 Tensões Tangenciais devidas ao Momento de Torção (T_z)

Como já enunciado na Seção 2.4, as forças cortantes em uma viga de seção fechada, quando aplicadas através de pontos da seção transversal que não são o centro de cisalhamento, geram também efeitos de torção que contribuem com as tensões cisalhantes, que podem ser traduzidas no fluxo cisalhante q. Essa carga excêntrica é direcionada ao centro de cisalhamento, que coincide com o centro de gravidade da seção transversal e com a origem do sistema cartesiano xy.

Dito isso, a expressão do fluxo cisalhante pode ser visualizada na Equação (4.8), na qual o primeiro termo se refere à parcela do fluxo cisalhante gerada pelo momento de torção, enquanto as demais são ligadas à força cortante.

$$q_{s,total} = q_T + q_b + q_{s,0} \tag{4.8}$$

O fluxo cisalhante oriundo da torção é calculado de acordo com a Equação (2.92). Reescrevendo-a em outros termos, é possível também realizar esta operação a partir da Equação (4.9), na qual F é a força excêntrica já descrita, d é a distância total da carga aplicada até o centro de torção da seção e A é a área retangular interna à seção caixão.

$$q_T = \frac{F.d}{2A} = \frac{-1961,33 \times (300+125)}{2 \times (250-2) \times (150-0,8)} = -11,2639 \text{ N/mm}^2 \tag{4.9}$$

O valor encontrado é o mesmo para os seis modelos analisados, uma vez que o fluxo independe das propriedades mecânicas do material. Continuando a análise, é possível agora calcular as tensões de cisalhamento torcionais, conforme as Equações (4.10) e (4.11), dependentes das espessuras das paredes.

$$\tau_{T,mesas} = \frac{q_T}{0,8} = -14,0798 \text{ N/mm}^2 \tag{4.10}$$

$$\tau_{T,almas} = \frac{q_T}{2,0} = -5,6320 \text{ N/mm}^2 \tag{4.11}$$

O segundo termo da Equação (4.8), q_b, tem seu valor dado pela Equação (2.114). Algumas considerações se fazem necessárias para simplificar esse cálculo: primeiramente, leva-se em conta a dupla simetria da seção; além disso, graças à idealização estrutural provinda dos *booms*, é possível desprezar a espessura dos painéis. Assim, a expressão é reduzida à Equação (4.12).

$$q_b = -\frac{F}{I_{xx}} \sum_{i=1}^{r} B_r y_r \tag{4.12}$$

Conforme indicou a Seção 2.4, a análise do fluxo cisalhante q_b inicia-se escolhendo um trecho do painel para cortar, sendo nesse trecho $q_b = 0$, e um sentido para percorrer a seção transversal. Aqui, admite-se um corte no trecho 1-2, bem como o sentido anti-horário, logo $q_{b_{1-2}} = 0$.

Em seguida, para cada um dos *booms* percorridos, adiciona-se o valor calculado na Equação (4.12).

O termo $q_{s,0}$ tem por objetivo corrigir os valores básicos obtidos, e seu cálculo foi mostrado na Equação (2.89), aqui rearranjada na forma da Equação (4.13). É importante frisar que seu valor depende do local de corte e do sentido do giro admitidos.

$$q_{s,0} = -\cdot \tag{4.13}$$

Determinada essa parcela, o fluxo decorrente da força cortante é então calculado pela Equação (2.69). Esse valor, dividido pela espessura de cada uma das paredes, resulta na tensão cisalhante τ_{Sy} atuante em cada uma dessas, conforme Equação (4.14).

$$\tau_{Sy} = \frac{q_s}{t} \tag{4.14}$$

A tensão cisalhante total em cada um dos trechos, τ_{Total}, é, por fim, obtida pela a soma das tensões cisalhantes com as tensões geradas pela torção.

Aplicando os valores e equações discutidos, os fluxos e as tensões cisalhantes atuantes na seção transversal do Modelo I podem ser visualizados na Tabela 4.5.

Tabela 4.5 – Fluxos e tensões cisalhantes que atuam na ST do Modelo I.

Trecho	q_b [N/mm]	$q_{s,0}$ [N/mm]	q_s [N/mm]	τ_T [N/mm²]	τ_{Sy} [N/mm²]	τ_{Total} [N/mm²]
1-2	0,0000	-3,6898	-3,6898	-14,0798	-4,6122	-18,6921
2-3	1,9361	-3,6898	-1,7537	-14,0798	-2,1921	-16,2720
3-4	5,4435	-3,6898	1,7537	-14,0798	2,1921	-11,8878
4-5	7,3795	-3,6898	3,6898	-14,0798	4,6122	-9,4677
5-6	10,2275	-3,6898	6,5378	-5,6320	3,2689	-2,3631
6-7	10,2275	-3,6898	6,5378	-5,6320	3,2689	-2,3631
7-8	7,3795	-3,6898	3,6898	-14,0798	4,6122	-9,4677
8-9	5,4435	-3,6898	1,7537	-14,0798	2,1921	-11,8878
9-10	1,9361	-3,6898	-1,7537	-14,0798	-2,1921	-16,2720
10-11	-0,0000	-3,6898	-3,6898	-14,0798	-4,6122	-18,6921
11-12	-2,8480	-3,6898	-6,5378	-5,6320	-3,2689	-8,9008
12-1	-2,8480	-3,6898	-6,5378	-5,6320	-3,2689	-8,9008

O Modelo III estudado, apesar de ser compósito, possui todos os seus *booms* compostos pelo mesmo material. Assim, o módulo de elasticidade que se adiciona ao cálculo do fluxo *basic* q_b é anulado pela influência do mesmo valor na expressão do momento de inércia, de

maneira inversamente proporcional. Portanto, infere-se que os resultados mostrados na Tabela 4.5 também podem ser aplicados a este modelo.

No Modelo V, entretanto, há *booms* de duas composições diferentes, que influenciam de maneira distinta no cálculo do momento de inércia e de q_b. Assim, haverá uma diferença nos valores anteriormente encontrados, como mostra a Tabela 4.6.

Tabela 4.6 – Fluxos e tensões cisalhantes que atuam na ST do Modelo V.

Trecho	q_b [N/mm]	$q_{s,0}$ [N/mm]	q_s [N/mm]	τ_T [N/mm²]	τ_{Sy} [N/mm²]	τ_{Total} [N/mm²]
1-2	0,0000	-2,7440	-2,7440	-14,0798	-3,4300	-17,5099
2-3	1,9361	-2,7440	-0,8079	-14,0798	-1,0099	-15,0898
3-4	5,4435	-2,7440	2,6995	-14,0798	3,3744	-10,7055
4-5	7,3795	-2,7440	4,6356	-14,0798	5,7944	-8,2854
5-6	8,3360	-2,7440	5,5920	-5,6320	2,7960	-2,8360
6-7	8,3360	-2,7440	5,5920	-5,6320	2,7960	-2,8360
7-8	5,4880	-2,7440	2,7440	-14,0798	3,4300	-10,6499
8-9	3,5519	-2,7440	0,8079	-14,0798	1,0099	-13,0700
9-10	0,0445	-2,7440	-2,6995	-14,0798	-3,3744	-17,4542
10-11	-1,8916	-2,7440	-4,6356	-14,0798	-5,7944	-19,8743
11-12	-2,8480	-2,7440	-5,5920	-5,6320	-2,7960	-8,4279
12-1	-2,8480	-2,7440	-5,5920	-5,6320	-2,7960	-8,4279

Partindo agora para os modelos sem a idealização por *booms*, os cálculos para os fluxos cisalhantes passam a seguir as Equações (2.68) a (2.70).

Uma vez que a carga é aplicada no eixo de simetria vertical, pode-se afirmar que o fluxo cisalhante no eixo de simetria *y* será nulo. Assim, assumindo os mesmos trechos utilizados com os *booms* para fins comparativos, o corte será realizado no ponto 3. Dessa forma, tem-se que $q_{s,0} = 0$ para toda a seção transversal, e, portanto, $q_s = q_b$.

Aplicando as Equações mencionadas para o Modelo II, encontram-se as tensões cisalhantes mostradas na Tabela 4.7.

Tabela 4.7 – Fluxos e tensões cisalhantes que atuam na ST do Modelo II.

Trecho	q_b [N/mm]	τ_T [N/mm²]	τ_{Sy} [N/mm²]	τ_{Total} [N/mm²]
1-2	-2,1792	-14,0798	-2,7240	-16,8039
2-3	0	-14,0798	0	-14,0799
3-4	2,1792	-14,0798	2,7240	-11,3558
4-5	4,3585	-14,0798	5,4481	-8,6318
5-6	7,6273	-5,6320	3,8137	-1,8183
6-7	4,3585	-5,6320	2,1792	-3,4527
7-8	2,1792	-14,0798	2,7240	-11,3558
8-9	0	-14,0798	0	-14,0799
9-10	-2,1792	-14,0798	-2,7240	-16,8039
10-11	-4,3585	-14,0798	-5,4481	-19,5280
11-12	-1,0896	-5,6320	-0,5448	-6,1768
12-1	-4,3585	-5,6320	-2,1792	-7,8112

Assim como para os casos I e III, uma vez que o material é o mesmo em todos os *booms* de cada um dos modelos II e IV, os resultados mostrados na Tabela 4.7 serão válidos para os dois casos.

No modelo VI, entretanto, há uma diferença no material dos *booms* laterais. Dessa forma, os valores dos fluxos e das tensões cisalhantes são mostrados na Tabela 4.8.

Tabela 4.8 – Fluxos e tensões cisalhantes que atuam na ST do Modelo VI.

Trecho	q_b [N/mm]	τ_T [N/mm²]	τ_{Sy} [N/mm²]	τ_{Total} [N/mm²]
1-2	-2,7989	-14,0798	-3,4986	-17,5785
2-3	0	-14,0798	0	-14,0799
3-4	2,7989	-14,0798	3,4986	-10,5813
4-5	5,5978	-14,0798	6,9972	-7,0827
5-6	7,0077	-5,6320	3,5038	-2,1281
6-7	5,5978	-5,6320	2,7989	-2,8331
7-8	2,7989	-14,0798	3,4986	-10,5813
8-9	0	-14,0798	0	-14,0799
9-10	-2,7989	-14,0798	-3,4986	-17,5785
10-11	-5,5978	-14,0798	-6,9972	-21,0771
11-12	-4,1879	-5,6320	-2,0939	-7,7259
12-1	-5,5978	-5,6320	-2,7989	-8,4308

4.4 Deslocamentos Decorrentes da Flexão

Conforme detalhado na Subseção 2.3.1.2, o cálculo da segunda derivada dos deslocamentos causados pela flexão da viga pode ser realizado pela Equação (2.39), transcrita a seguir.

$$u'' = -\frac{M_y}{EI_{yy}},$$
$$v'' = -\frac{M_x}{EI_{xx}}.$$

No caso analisado, como anteriormente mencionado, a carga vertical aplicada ocasiona um momento de flexão em torno do eixo x, gerando, portanto, o momento M_x. Dessa forma, a viga sofrerá apenas com o deslocamento vertical v, sendo $u'' = 0$.

Para obtenção do valor de v, a Equação (2.39) deverá ser integrada duas vezes em relação a z. Sabendo que, dos termos analisados, apenas o momento M_x é dependente desta

variável, vide Equação (4.5), a integração será dada conforme seguem as Equações (4.15) a (4.17).

$$v'' = \frac{+F(l-z)}{EI_{xx}} \tag{4.15}$$

$$v' = \int -\frac{+F(l-z)}{EI_{xx}} dz = -\frac{F}{EI_{xx}} \int (l-z) dz = -\frac{F}{EI_{xx}} \left[lz - \frac{z^2}{2} \right] \tag{4.16}$$

$$v = -\frac{F}{EI_{xx}} \left[\frac{lz^2}{2} - \frac{z^3}{6} \right] \tag{4.17}$$

A Equação (4.17) será aplicada aos seis modelos estudados, em duas seções diferentes da viga: a primeira, no meio dela, com $z = 550\ mm$, e a segunda na extremidade, sendo $z = 1100\ mm$. Os resultados obtidos para as doze combinações são mostrados na Tabela 4.9.

Tabela 4.9 – Deslocamentos decorrentes da flexão para os seis modelos.

Modelo	$v_{z\,=\,550\,mm}$ **[mm]**	$v_{z\,=\,1100\,mm}$ **[mm]**
Modelo I	-0,3548	-1,1353
Modelo II	-1,1022	-3,5271
Modelo III	$-1{,}2807 \times 10^{-5}$	$-4{,}0984 \times 10^{-5}$
Modelo IV	$-3{,}9788 \times 10^{-5}$	$-1{,}2732 \times 10^{-4}$
Modelo V	$-1{,}4444 \times 10^{-6}$	$-4{,}6220 \times 10^{-6}$
Modelo VI	$-5{,}7630 \times 10^{-6}$	$-1{,}8442{,}10^{-5}$

4.5 Deslocamentos Decorrentes da Torção

Além do deslocamento causado pela flexão, a aplicação do momento torsor na viga faz com que ela gire, gerando assim deslocamentos em x e em y. Tais deslocamentos podem ser calculados com o auxílio do ângulo θ, que descreve o giro da seção transversal. Seu valor pode ser encontrado integrando a Equação (2.100), a seguir reescrita, em relação a z, conforme as Equações (4.18) e (4.19).

$$\frac{d\theta}{dz} = \frac{T}{4A^2} \bigcirc$$

$$\int d\theta = \int \left(\frac{T}{4A^2} \bigcirc \right. \tag{4.18}$$

$$\theta = \left(\frac{T}{4A^2} \bigcirc \right. \tag{4.19}$$

Uma vez conhecido o ângulo θ, os deslocamentos em x e em y podem ser calculados como exemplifica a Figura 4.1.

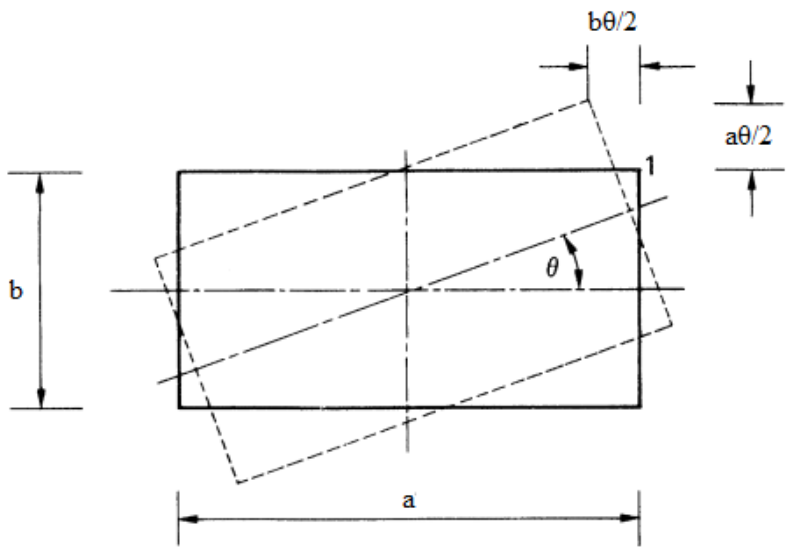


Figura 4.1 – Deslocamentos causados pela Torção. Fonte: MEGSON (2013).

Analisando apenas o triângulo retângulo destacado em vermelho na Figura 4.2, aplica-se a relação trigonométrica de seno e é obtida a Equação (4.20).

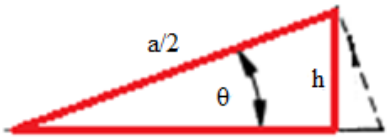


Figura 4.2 – Detalhamento do deslocamento causado pela torção. Fonte: autoria própria.

$$sen\theta = \frac{h}{a/2} \tag{4.20}$$

Neste estudo, será considerado apenas o deslocamento vertical h. Sabendo que o ângulo θ é pequeno, e, por isso, pode-se considerar sen $\theta = \theta$, conclui-se que o deslocamento causado pela torção é dado pela Equação (4.21).

$$h = \frac{\theta a}{2} \tag{4.21}$$

As análises serão novamente realizadas em duas seções transversais, sendo $z = 550\ mm$ e $z = 1100\ mm$. Os resultados obtidos pelas Equações (4.19) e (4.21) encontram-se na Tabela 4.10.

Tabela 4.10 – Deslocamentos causados pela Torção.

	θ [º]		**h [mm]**	
Modelo	*z = 550 mm*	*z = 1100 mm*	*z = 550 mm*	*z = 1100 mm*
Modelos I/II	-0,1352	-0,2703	-0,2949	-0,5898
Modelos III/IV	-0,8261	-1,6521	-1,8022	-3,6044
Modelo V/VI	-0,8736	-1,7473	-1,9060	-3,8120

CAPÍTULO V

Análise de Resultados

5.1 Tensões Normais Devidas ao Momento de Flexão

Os valores mostrados na Tabela 4.3, referentes à tensão normal atuante em cada *boom* nos modelos I, III e V, mostram o comportamento da seção transversal com relação à flexão: os *booms* superiores, de 1 a 5, são tracionados, sendo $\sigma_z > 0$, enquanto nos *booms* inferiores, com $\sigma_z < 0$, ocorre compressão.

Além disso, nota-se que os valores são idênticos para os três modelos. Tal semelhança é explicada pelo fato de todos os *booms*, dentro de cada um dos modelos, serem compostos por um mesmo material. Mesmo no caso dos Modelos III e V, compósitos, isso se mantém, devido ao módulo de elasticidade influenciar no cálculo da tensão normal e do momento de inércia de maneira inversamente proporcional.

É importante frisar ainda que os *booms* B_6 e B_{12} possuem valor nulo de tensão normal graças à sua coordenada vertical, $y = 0$. Essa coordenada faz com que, no Modelo V, a diferença de material neles presente não seja notada na análise, uma vez que, tanto no cálculo do momento de inércia, quanto no cálculo da tensão normal, o efeito desses *booms* torna-se desconsiderado.

Tratando agora dos modelos II, IV e VI, cuja análise é realizada sem considerar a idealização estrutural por *booms*, foram calculados os valores de tensão normal nas mesas superior e inferior e na alma da seção, como mostra a Tabela 4.4. Nota-se que, para os três casos, o valor máximo de tensão é obtido nas mesas, sendo a tração máxima na mesa superior e a compressão máxima na mesa inferior.

Aqui novamente observa-se a semelhança entre os dois primeiros modelos, II e IV, cujos *booms* são constituídos por um único material. Agora, no entanto, passa a ser considerada a

diferença de material presente nas paredes verticais do Modelo VI, uma vez que o momento de inércia é influenciado pelos dois módulos de elasticidade, enquanto a tensão normal é afetada apenas pelo módulo da parede em análise. O valor consideravelmente superior do módulo de elasticidade das mesas do Modelo VI faz com que as tensões nelas encontradas nesse modelo sejam maiores que as dos outros dois, uma vez que, quando maior o valor de E_l, maior a quantidade de esforços normais que a parede absorve. Em compensação, na alma, sujeita a um módulo de elasticidade quase três vezes menor, as tensões são menores ainda do que aquelas encontradas nos Modelos II e IV.

Por fim, é possível ainda comparar modelos com a mesma composição, porém analisados sob óticas distintas, como os Modelos I e II. Observa-se que ocorre uma redução considerável das tensões normais máximas uma vez empregados os reforçadores do Modelo I. Apesar de a análise aqui realizada não considerar fatores reais como o peso da viga, ainda assim é notável a redução de esforços trazida pela aplicação dessas estruturas, o que pode impactar diretamente projetos no que se refere à resistência de materiais.

5.2 Tensões Tangenciais

A Tabela 4.5 e a Tabela 4.6 mostram os resultados dos cálculos referentes às tensões tangenciais causadas pelo momento de torção e pela força cortante nos Modelos I, III e V. Os valores descrevem desde os fluxos cisalhantes até a tensão cisalhante total. Novamente, observa-se a igualdade dos valores dos Modelos I e III, causada pela composição uniforme de todas as suas paredes e *booms*, enquanto os valores do Modelo V sofrem uma variação, por razão semelhante à explicada na Subseção anterior. Aqui, o módulo de elasticidade dos materiais influencia de maneira inversamente proporcional nos cálculos do fluxo cisalhante *basic*, q_b, e do momento de inércia. Nos Modelos I e III, pelo valor de E_{lt} ser constante, seu efeito é anulado. No Modelo V, isso não ocorre, e os valores encontrados sofrem uma variação.

Nas duas tabelas, podem ser observadas as tensões de cisalhamento torcionais, τ_T, aquelas oriundas diretamente do momento de torção. Por essas tensões sofrerem influência apenas do momento e da espessura das paredes, duas constantes entre os seis modelos, seu valor não varia entre eles. Assim, em todos nota-se que o cisalhamento é maior nas paredes horizontais, graças à espessura 2,5x menor das mesmas em relação às paredes verticais.

A outra parcela da tensão cisalhante total é devida à força cortante. Aqui, a análise ocorre transferindo a força excêntrica aplicada na viga para o centro de cisalhamento da seção

transversal. O efeito cisalhante dessa carga independe da seção analisada da viga, sendo o esforço cortante constante ao longo dela.

Nos três modelos primeiramente analisados, nota-se um comportamento semelhante apesar da variação ocorrida no Modelo V. Assim, serão citados como exemplos aqui os valores dos Modelos I e III. O fluxo cisalhante q_b cresce na parede horizontal a partir do *boom* B_1, tendo seu valor máximo alcançado na parede vertical entre os *booms* B_5 e B_7, q_s = 6,5378 N/mm. Seguindo a seção, o valor volta a diminuir na parede inferior até trocar de sinal, atingindo o valor mínimo, q_s = -6,5378 N/mm, novamente na parede vertical, agora entre os *booms* B_{11} e B_1.

As tensões cisalhantes τ_{Sy} dependem, além do fluxo, da espessura da parede analisada, como mostra a Equação (4.14). Assim, apesar de os fluxos terem sido maiores na parede vertical, de espessura 2 mm, as tensões máximas foram encontradas nas paredes horizontais, graças à sua espessura inferior, de 0,8 mm. Esse valor máximo foi de τ_{Sy} = 4,6122 N/mm², nos trechos 4-5 e 7-8, e o mínimo foi de τ_{Sy} = -4,6122 N/mm², nos trechos 1-2 e 10-11, ou seja, nos extremos das paredes horizontais, onde houve maior solicitação.

Somando os efeitos do momento de torção e da força cisalhante, é obtida a tensão cisalhante total, $\tau_{Total.}$ Para todos os trechos, observa-se que a tensão causada pela torção se sobressai, sendo preponderante no valor final. Assim, apesar da influência da carga cisalhante na tensão total, os valores finais possuem sinal negativo, com a tensão cisalhante concordando com o sentido do giro causado pela torção, horário. A solicitação total máxima ocorre nas paredes horizontais, no lado direito, mais próximo à aplicação do esforço, nos trechos 1-2 e 10-11, sendo τ_{Total} = -18,6921 N/mm². Esse valor decresce nas paredes horizontais até os *booms* B_5, na superior, e B_7, na inferior, e alcança seu mínimo na parede vertical esquerda, onde τ_{Total} = -2,3631.

Partindo agora para a Tabela 4.7 e a Tabela 4.8, são mostrados os cálculos dos fluxos cisalhantes nos Modelos II, IV e VI. Assim como explicado acima, os resultados coincidem para os Modelos II e VI, de composição homogênea entre si, e sofre uma variação no Modelo VI devido à diferença de materiais nas suas paredes. Entretanto, o comportamento é semelhante entre os três modelos, portanto serão utilizados como exemplo os resultados dos Modelos II e IV.

Novamente, a tensão cisalhante é dividida entre a parcela causada pela torção e a parcela oriunda da carga cisalhante. Por ser constante para os seis modelos, a tensão causada pela torção já foi discutida. No que se refere ao fluxo cisalhante, assim como nos modelos com reforçadores, o valor máximo foi obtido na parede vertical, no trecho 5-6, q_b = 7,6273 N/mm. Também similarmente, a tensão máxima causada por esse fluxo foi encontrada nas paredes horizontais, nos trechos 4-5 e 10-11, sendo τ_{Sy} = 5,4481 N/mm².

Somando os efeitos na tensão cisalhante total, mais uma vez se tem uma preponderância da tensão cisalhante causada pela torção, e todos os valores são também negativos, em concordância com o giro horário. Os maiores valores ocorrem na extremidade direita das paredes horizontais, sendo o valor máximo τ_{Total} = -19,5280 N/mm² encontrado no trecho 10-11.

Comparando agora as diferentes formas de análise, nos Modelos I e II, observa-se valores bastante semelhantes, com sinais sempre concordando, nas mesas horizontais. Ainda assim, há uma redução do valor máximo encontrado no Modelo II, q = 4,3585, para o Modelo I, q = 3,6898, no trecho 4-5. Essa redução também se mostra na parede vertical, sendo o valor máximo do Modelo II q = 7,6273 e, no Modelo I, q = 6,5378, no trecho 5-6. Essa redução é explicada pela presença dos *booms* no Modelo I, uma vez que, além das tensões normais serem reduzidas, como já mencionado, devido ao fato do fluxo cisalhante percorrer o *boom* e retornar para a parede, em cada um dos trechos, seu valor também se reduz.

5.3 Deslocamentos Decorrentes da Flexão e da Torção

Como já explicado na Subseção 4.2, os deslocamentos decorrentes de flexão ocorrem apenas no sentido vertical para este estudo, devido à carga aplicada e o momento gerado. A Tabela 4.9 apresenta os valores para os seis modelos.

A Equação (4.17) mostra que o valor do deslocamento v é inversamente proporcional ao momento de inércia I_{xx} e diretamente proporcional à distância z da seção transversal. Assim, os resultados obtidos estão de acordo com a teoria: nos seis modelos, houve um aumento no deslocamento na ponta da viga, z = 1100 mm, com relação à seção no meio dela, z = 550. Além disso, o deslocamento se reduz drasticamente nos modelos compósitos, devido ao maior valor

de I_{xx} desses, consequência de seus módulos de elasticidade também mais elevados. Por fim, todos os valores obtidos são negativos, ou seja, o deslocamento da viga é para baixo, como o esperado.

Outro deslocamento que ocorre na viga estudada é aquele decorrente exclusivamente do momento torsor, que faz com que ela gire e desloque, assim, nas direções x e y. Aqui, serão analisados somente os deslocamentos em y, para avaliar sua influência juntamente aos deslocamentos da flexão. Os valores encontrados para os ângulos de giro e os deslocamentos em y são mostrados na Tabela 4.10.

A Equação (4.19) mostra que o ângulo de giro θ é inversamente proporcional ao Módulo de Rigidez ao Cisalhamento G. Assim, notam-se na tabela ângulos maiores para os modelos compósitos, e, portanto, deslocamentos também. Pelo fato de z ser diretamente proporcional aos valores de θ e h, tem-se que os valores encontrados na ponta são exatamente o dobro daqueles encontrados na seção intermediária.

Todos os valores encontrados na tabela são negativos, pois o giro se dá no sentido horário, deslocando a viga para baixo. Entretanto, uma vez que ocorra o giro da viga, a metade dos *booms* à esquerda do eixo y terá um deslocamento para cima. Assim, para o cálculo do deslocamento vertical total em cada modelo, serão considerados dois pontos diferentes: o ponto 6, na extremidade esquerda, e o ponto 12, na extremidade direita. Os resultados obtidos são mostrados na Tabela 5.1.

Tabela 5.1 – Deslocamento vertical total.

	Deslocamento no Ponto 6 [mm]		**Deslocamento no Ponto 12 [mm]**	
Modelo	z = 550 mm	z = 1100 mm	z = 550 mm	z = 1100 mm
Modelo I	-0,0599	-0,5455	-0,6497	-1,7251
Modelo II	-0,8073	-2,9373	-1,3971	-4,1169
Modelo III	1,8022	3,6043	-1,8022	-3,6044
Modelo IV	1,8021	3,6043	-1,8022	-3,6045
Modelo V	1,9060	3,8120	-1,9060	-3,8120
Modelo VI	1,9060	3,8120	-1,9060	-3,8120

A Tabela 5.1 mostra que, nos modelos isotrópicos, a maior parte do deslocamento se deve à flexão, enquanto nos modelos compósitos o deslocamento da torsão se torna preponderante. A explicação para isso, já citada, é o maior momento de inércia dos últimos materiais, que torna os deslocamentos por flexão praticamente nulos. Já deslocamento pela torção, com o *G* consideravelmente inferior, seu deslocamento é mais acentuado. Isso justifica, no ponto da esquerda, apenas os Modelos I e II possuírem deslocamento final teórico para baixo, apesar de o giro sofrido os mover para cima.

CAPÍTULO VI

Conclusões

O projeto de uma aeronave compreende diversas áreas, sendo a estrutural uma das mais importantes. Uma das grandes dificuldades de sua atuação é conseguir garantir a robustez e a segurança da aeronave mantendo o peso da mesma o mais baixo possível. Nesse aspecto, um importante aliado é encontrado nos materiais compósitos, cujo peso é consideravelmente inferior ao de ligas metálicas tradicionalmente utilizadas, mantendo, ainda, a resistência necessária à estrutura.

Visto isso, investigou-se nesse trabalho o comportamento estrutural de uma viga compósita, engastada-livre, com seção caixão simulando asa aeronáutica. A viga foi submetida a uma carga aplicada de maneira excêntrica ao eixo longitudinal desse elemento estrutural, com o objetivo de provocar o aparecimento de esforços de flexão, cisalhamento e torção, bem como as tensões normais de tração e compressão, cisalhantes, bem como deslocamentos intervenientes. Além disso, foram empregados três diferentes tipos de materiais, um isotrópico e dois compósitos, para possibilitar a comparação do desempenho deles em relação aos esforços e permitir uma análise interessante, na ótica didática, para consolidar aspectos de ensino-aprendizagem no tocante a materiais compósitos utilizados em componentes estruturais de paredes finas aeronáuticas.

No que se refere às tensões normais, os modelos com análise por idealização estrutural, considerando-se a aplicação de reforçadores, apresentaram resultados iguais, assim como esperado em teoria, dadas as composições das vigas e a disposição dos reforçadores. Comparando com os modelos formados apenas por paredes, os esforços desses últimos são pelo menos três vezes maiores. Isso mostra a eficiência dos reforçadores em absorver os esforços normais para si, reduzindo a solicitação nas paredes e permitindo, portanto, que elas sejam

menos resistentes, o que otimiza o gasto de material e, consequentemente, concorre para a economia em projetos. Vale ressaltar que as análises feitas desconsideram o peso próprio da estrutura, o que não invalida o resultado encontrado.

Tratando das tensões cisalhantes, constatou-se que a maior parte desse esforço é oriunda do efeito direto do momento de torção, para os seis modelos. Em todos estes, o fluxo cisalhante, e consequentemente tensão cisalhante total que solicita os painéis teve sentido horário, em consonância com a rotação no mesmo sentido que a viga sofre, dada a localização da carga aplicada. No que se refere aos materiais, é possível comparar, na tensão $\tau_{Sy,}$ os modelos II e VI: no caso do último, em todos os trechos houve um aumento desse parâmetro, explicado pelo menor módulo de elasticidade encontrado nas paredes verticais, o que influencia os momentos de inércia e os fluxos cisalhantes.

Por fim, com relação aos deslocamentos, novamente observou-se haver concordância com o sentido e a posição da força aplicada. No caso dos dois modelos isotrópicos, houve uma predominância do deslocamento causado pela flexão, graças ao maior módulo de rigidez ao cisalhamento e ao menor momento de inércia encontrado nesses materiais. Já nos quatro modelos compósitos, o deslocamento pela flexão é quase nulo devido ao elevado momento de inércia, enquanto o causado pela torção se sobressai pelo menor módulo de rigidez ao cisalhamento desses materiais.

O desenvolvimento desse Projeto de Conclusão de Curso (PCC) permitiu a aplicação e a consolidação dos estudos realizados em sala de aula, pela autora do mesmo, nas disciplinas que a mesma cursou, referentes à área estrutural, incluindo a disciplina optativa de materiais compósitos. Foi possível relembrar e aprofundar esses conhecimentos inserindo-os em um contexto bem próximo ao real, de maneira perceptível e bastante didática, notadamente com investigação e constatações importantes obtidas da aplicação de materiais compósitos em elementos de paredes finas aeronáuticas. Assim sendo, a experiência foi enriquecedora e de grande importância à formação acadêmica em Engenharia Aeronáutica da referida discente.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ASM, Aerospace Specification Metals. **Aluminum 2024-T3.** Disponível em: <http://asm.matweb.com/search/SpecificMaterial.asp?bassnum=MA2024T3>. Acesso em: 19 ago. 2019.

GAY, D. **Composite Materials: Design and Applications**. 3. ed. Boca Raton: CRC Press, 2015.

HIBBELER, R. C. **Resistência dos Materiais.** 7. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.

MEGSON, T.H.G. **Aircraft Structures for Engineering Students.** 5. ed. United Kingdom: Elsevie, 2013.