

**ALBERT WILLIAN FARIA**

**MODELAGEM POR ELEMENTOS FINITOS DE  
PLACAS COMPOSTAS DOTADAS DE SENSORES E  
ATUADORES PIEZOELÉTRICOS: IMPLEMENTAÇÃO  
COMPUTACIONAL E AVALIAÇÃO NUMÉRICA**



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA**

**2006**

**ALBERT WILLIAN FARIA**

**MODELAGEM POR ELEMENTOS FINITOS DE PLACAS  
COMPOSTAS DOTADAS DE SENSORES E ATUADORES  
PIEZOELÉTRICOS: IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL E  
AVALIAÇÃO NUMÉRICA**

**Dissertação** apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para a obtenção do título de **MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA**.

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos e Vibrações.

Orientador: Prof. Domingos Alves Rade

**UBERLÂNDIA - MG**

**2006**

## FICHA CATALOGRÁFICA

Elaborada pelo Sistema de Bibliotecas da UFU / Setor de Catalogação e Classificação

F224m      Faria, Albert Willian, 1980-  
Modelagem por elementos finitos de placas compostas dotadas de sensores e atuadores piezoelétricos : implementação computacional e avaliação numérica / Albert Willian Faria. - Uberlândia, 2006.  
152f. : il.  
Orientador: Domingos Alves Rade.  
Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Uberlândia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.  
Inclui bibliografia.  
1. Vibração - Teses. 2. Método dos elementos finitos - Teses. I. Rade, Domingos Alves. II. Universidade Federal de Uberlândia. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. III. Título.

621:534

Dedico esta dissertação aos meus amigos. Graças aos seus ensinamentos, apoio emocional e espiritual este trabalho tornou-se uma realidade. Amigos do Laboratório de Mecânica de Estruturas (LMEst), amigo orientador, amigos familiares, em especial para minha querida amiga e mãe Cleusa, a Fernanda minha grande amiga e companheira nestes períodos difíceis, amiga Minas Gerais, terra grandiosa e que me acolheu e ao maior dos amigos que propiciou o nosso encontro: DEUS.

## **AGRADECIMENTOS**

A Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro. Ao programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia pela confiança depositada neste trabalho. Aos membros da banca examinadora, pelas contribuições dadas ao trabalho. E em especial ao professor Dr. Domingos Alves Rade pela orientação, incentivo, dedicação e amizade durante a realização desta dissertação.

FARIA, A. W. **Modelagem por elementos finitos de placas compostas dotadas de sensores e atuadores piezoelétricos: implementação computacional e avaliação numérica**. 2006. 152f. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG.

## RESUMO

Esta dissertação apresenta uma metodologia baseada no Método dos Elementos Finitos (MEF) para a modelagem de estruturas compostas laminadas do tipo viga e placa dotadas de sensores e atuadores piezoelétricos. Os conceitos fundamentais e o desenvolvimento teórico são apresentados, seguidos de simulações numéricas realizadas em ambiente MATLAB® para a modelagem dessas estruturas. O elemento finito implementado é do tipo Serendipity, tem forma retangular, oito pontos nodais, onze graus de liberdade mecânicos por nó e oito graus de liberdade elétricos por interface de camada piezoelétrica. Os efeitos da temperatura são desprezados. É empregada uma *Teoria Mista* baseada no uso de camada equivalente única para representação do campo de deslocamentos mecânicos e em múltiplas camadas para o campo elétrico. A aproximação do campo de deslocamentos mecânicos utiliza duas teorias distintas: a *Teoria da Deformação de Terceira Ordem (HSDT)* e a *Teoria da Deformação Cisalhante de Primeira Ordem (FSDT)*. As teorias em estudo são implementadas computacionalmente e confrontadas através da realização de simulações numéricas e os resultados são comparados com os disponíveis na literatura. Nestas simulações, alguns aspectos relevantes do comportamento estático e dinâmico sob vibração livre de vigas e placas retangulares dotadas de sensores e atuadores piezoelétricos são avaliados, tais como deflexão, frequências naturais e potenciais elétricos. São discutidas as vantagens e desvantagens da utilização de cada uma dessas teorias na modelagem de estruturas inteligentes.

*Palavras Chave: Elementos finitos. Estruturas inteligentes. Estruturas compostas. Teoria Mista. Teoria da Deformação Cisalhante de Primeira/Terceira Ordem. Piezoeletricidade.*

FARIA, A. W. **Finite element modeling of composite plates incorporating piezoelectric sensors and actuators: implementation and numerical assessment**. 2006. 152f. Master Dissertation, Federal University of Uberlândia, Uberlândia, MG.

## ABSTRACT

This Dissertation presents a methodology based on the Finite Element method for the modeling of laminated composite beams and plates containing piezoelectric sensors and actuators. The fundamental concepts and the theoretical developments are presented, followed by a number of numerical simulations performed in MATLAB<sup>®</sup> environment. The finite element used is a Serendipity-type element with rectangular shape, eight nodes, eleven mechanical degrees-of-freedom per node and eight electrical degrees-of-freedom per interface of piezoelectric layer. Temperature effects are neglected. A Mixed Theory is adopted, which uses a single equivalent layer for discretization of the mechanical displacement field and a layerwise representation of the electrical field. For the approximation of the mechanical displacements, two different theories are used, namely: the Higher-order Shear Deformation Theory (*HSDT*) and the First-order Shear Deformation Theory (*FSDT*). Both theories are numerically implemented and used in a number numerical simulations whose results are available in the literature. In these simulations, some relevant aspects of the static and dynamic behavior of beams and rectangular plates containing piezoelectric sensors and actuators are appraised. The main advantages and drawbacks of the theories, as applied to the modeling of intelligent composite structures are pointed-out.

*Keywords: Finite element method. Intelligent structures. Composite materials. Mixed Theory. First-order/ High-order shear deformation theory. Piezoelectricity.*

## LISTA DE SÍMBOLOS

### SÍMBOLOS LATINOS

|                                                       |                                                                          |
|-------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------|
| $c$                                                   | resistência mecânica                                                     |
| $d$                                                   | constante piezoelétrica de deformação                                    |
| $\{D\}$                                               | vetor dos deslocamentos elétricos                                        |
| $e$                                                   | constante piezoelétrica de tensão                                        |
| $\{E\}$                                               | campo elétrico                                                           |
| $\{F\}, \{Q\}$                                        | vetores de carregamento elétrico e mecânico                              |
| $h$                                                   | espessura total do composto                                              |
| $J$                                                   | Jacobiano                                                                |
| $K_e, K_g$                                            | energia cinética elementar e global                                      |
| $K_{44}, K_{45}, K_{54}, K_{55}$                      | fatores de correção do cisalhamento transversal                          |
| $[K_{uu}], [K_{u\phi}], [K_{\phi u}], [K_{\phi\phi}]$ | matrizes de rigidez eletromecânica que incorporam efeitos piezoelétricos |
| $L$                                                   | Lagrangeano                                                              |
| $[L_e]$                                               | matriz de conectividade                                                  |
| $L_{id}, L_{iu}$                                      | funções layerwise                                                        |
| $[M_e], [M_g]$                                        | matrizes de massa elementar e global                                     |
| $N^8$                                                 | funções de forma do elemento Serendipity de 8 nós.                       |
| $P_e, P_g$                                            | energia potencial elementar e global                                     |
| $[Q], [T]$                                            | matrizes de transformação 2D e 3D - rotação sobre o eixo z               |
| $[R]$                                                 | matriz inversa da matriz T                                               |
| $T$                                                   | temperatura                                                              |
| $\{U\}$                                               | vetor deslocamento mecânico total elementar                              |
| $V$                                                   | voltagem                                                                 |
| $W_e, W_g$                                            | trabalho elementar e global                                              |
| $(u, v, w)$                                           | componentes do deslocamento total                                        |
| $(x, y)$                                              | sistema de coordenadas planas globais                                    |

## SÍMBOLOS GREGOS

|                        |                                                      |
|------------------------|------------------------------------------------------|
| $[\Lambda]$            | matriz das frequências naturais elevadas ao quadrado |
| $(\varepsilon, \eta)$  | sistema local de coordenadas planas do elemento      |
| $[\chi]$               | matriz permissividade elétrica                       |
| $[\psi]$               | matriz dos modos de vibrar                           |
| $\phi(x, y)$           | funções de interface                                 |
| $\varphi_e, \varphi_g$ | potência elétrico elementar e global                 |
| $\{\varepsilon\}$      | vetor deformação mecânica                            |
| $\{\sigma\}$           | vetor tensão mecânica                                |

## LISTA DE ABREVIações

|              |                                                   |
|--------------|---------------------------------------------------|
| <i>CLT</i>   | Teoria Clássica dos Laminados                     |
| <i>g.d.l</i> | graus de liberdade                                |
| <i>FSDT</i>  | Teoria da Deformação Cisalhante de Primeira Ordem |
| <i>HSDT</i>  | Teoria da Deformação Cisalhante de Terceira Ordem |
| <i>MEF</i>   | Método dos Elementos Finitos                      |
| <i>PVDF</i>  | fluorido de polivinilideno                        |
| <i>PZT</i>   | zirconato titanato de chumbo                      |
| <i>PVH</i>   | Princípio Variacional de Hamilton                 |

## SUMÁRIO

|                     |                                                                              |           |
|---------------------|------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>CAPÍTULO I</b>   | <b>INTRODUÇÃO</b>                                                            | <b>1</b>  |
| <b>CAPÍTULO II</b>  | <b>REVISÃO DA LITERATURA</b>                                                 | <b>7</b>  |
|                     | 2.1 Controle ativo e passivo de forma e vibrações de estruturas inteligentes | 7         |
|                     | 2.2 Modelos analíticos e numéricos de estruturas inteligentes                | 9         |
| <b>CAPÍTULO III</b> | <b>REVISÃO DAS TEORIAS DE PLACAS E CASCAS</b>                                | <b>17</b> |
|                     | 3.1 Introdução                                                               | 17        |
|                     | 3.2 Teoria da Camada Equivalente Única                                       | 19        |
|                     | 3.2.1 Teoria Clássica dos Laminados (CLT)                                    | 19        |
|                     | 3.2.2 Teoria da Deformação Cisalhante de Primeira Ordem (FSDT)               | 21        |
|                     | 3.2.3 Teoria da Deformação Cisalhante de Ordem Superior (HSDT)               | 22        |
|                     | 3.3 Teoria das Camadas Equivalentes Discretas                                | 25        |
|                     | 3.4 Teoria Mista                                                             | 30        |
|                     | 3.5 Definição das relações deslocamento-deformação das placas                | 32        |
|                     | 3.6 Definição dos campos de deslocamentos elétricos das placas               | 34        |
| <b>CAPÍTULO IV</b>  | <b>FUNDAMENTOS DA PIEZOELETRICIDADE LINEAR</b>                               | <b>35</b> |
|                     | 4.1 Histórico da piezoelectricidade                                          | 35        |
|                     | 4.2 Equações constitutivas da piezoelectricidade linear                      | 38        |
|                     | 4.3 Estrutura cristalina dos materiais piezoelétricos                        | 45        |
|                     | 4.4 Rotação do sistema de coordenadas                                        | 47        |

|                     |                                                                                                                                  |           |
|---------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>CAPÍTULO V</b>   | <b>MATERIAIS COMPOSTOS</b>                                                                                                       | <b>51</b> |
| 5.1                 | Introdução                                                                                                                       | 51        |
| 5.2                 | Constituição dos materiais compostos                                                                                             | 53        |
| 5.3                 | Arquitetura dos compostos                                                                                                        | 54        |
| 5.3.1               | Compostos com fibras                                                                                                             | 55        |
| 5.3.2               | Compostos particulados                                                                                                           | 56        |
| 5.3.3               | Compostos estruturais                                                                                                            | 57        |
| <b>CAPÍTULO VI</b>  | <b>FORMULAÇÃO DO MODELO DE ELEMENTOS FINITOS</b>                                                                                 | <b>61</b> |
| 6.1                 | Discretização do potencial elétrico linear distribuído por camadas                                                               | 63        |
| 6.2                 | Deslocamentos mecânicos da HSDT representados em uma camada equivalente única                                                    | 72        |
| 6.3                 | Formulação de elementos finitos                                                                                                  | 78        |
| 6.3.1               | Formulação elementar e global com base no Princípio Variacional de Hamilton                                                      | 78        |
| 6.3.2               | Condições de contorno mecânicas                                                                                                  | 87        |
| 6.3.3               | Equações dos sensores e atuadores piezoelétricos                                                                                 | 90        |
| 6.3.4               | Frequências naturais e modos de vibração                                                                                         | 93        |
| <b>CAPÍTULO VII</b> | <b>APLICAÇÕES NUMÉRICAS</b>                                                                                                      | <b>95</b> |
| 7.1                 | Placa em balanço                                                                                                                 | 95        |
| 7.2                 | Placa composta laminada, quadrada, sujeita a um carregamento senoidal                                                            | 97        |
| 7.3                 | Placa composta laminada, quadrada, sujeita a um carregamento senoidal e modelada pela formulação FSDT                            | 100       |
| 7.4                 | Placa composta em balanço contendo atuadores piezoelétricos                                                                      | 101       |
| 7.5                 | Análise modal de uma placa quadrada, simplesmente apoiada, com atuadores contínuos colados em sua superfície superior e inferior | 105       |
| 7.6                 | Viga em balanço com atuadores de PVDF                                                                                            | 117       |
| 7.7                 | Viga em balanço com sensores de PVDF                                                                                             | 120       |

|                      |                                                                                  |            |
|----------------------|----------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>CAPÍTULO VIII</b> | <b>CONCLUSÕES</b>                                                                | <b>125</b> |
| 8.1                  | Considerações finais                                                             | 125        |
| 8.2                  | Sugestões para trabalhos futuros                                                 | 126        |
|                      | <b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>                                                | <b>129</b> |
| <b>ANEXO I</b>       | <b>COMPARAÇÃO ENTRE AS PRINCIPAIS TEORIAS DE CÁLCULO DE ESTRATIFICADOS</b>       | <b>141</b> |
| <b>ANEXO II</b>      | <b>PROPRIEDADES DOS MATERIAIS EM TERMOS DAS COORDENADAS PRINCIPAIS E GLOBAIS</b> | <b>143</b> |
|                      | Matriz de rigidez mecânica                                                       | 143        |
|                      | Matriz das constantes piezoelétricas de tensão                                   | 146        |
|                      | Matriz das constantes piezoelétricas de deformação                               | 147        |
|                      | Matriz da permissividade elétrica                                                | 147        |
| <b>ANEXO III</b>     | <b>FLUXOGRAMA DO PROGRAMA DE ELEMENTOS FINITOS</b>                               | <b>149</b> |
| <b>ANEXO IV</b>      | <b>PROPRIEDADES DOS MATERIAIS</b>                                                | <b>151</b> |
|                      | Constantes de rigidez elástica                                                   | 151        |
|                      | Constantes piezoelétricas de deformação e permissividade elétrica                | 152        |
|                      | Constantes piezoelétricas de tensão e permissividade elétrica                    | 152        |

# CAPÍTULO I

## INTRODUÇÃO

A Engenharia Estrutural está entrando em uma nova era em virtude do desenvolvimento de estruturas integradas a *materiais adaptativos* e *controladores*, configurando-se as chamadas *estruturas inteligentes* ou estruturas adaptativas. Imitando o comportamento observado nos seres vivos, estas estruturas são capazes de "perceber" alterações nas condições ambientais e operacionais e se adaptar com o objetivo de assegurar desempenho satisfatório. Concebe-se, inclusive, a possibilidade de que estas estruturas possam detectar a ocorrência de danos e promover uma reparação automática.

O conceito de estrutura inteligente é perfeitamente integrado à Engenharia Mecatrônica e tem uma vasta gama de aplicações em setores em que há uma exigência natural de maximização da segurança, confiabilidade e desempenho, tais como em estruturas espaciais, satélites, aviões e helicópteros, automóveis, construção civil, equipamentos esportivos de alto desempenho, dentre outros.

Freqüentemente, as estruturas estão sujeitas a perturbações estáticas ou dinâmicas. Caso as respostas a estas perturbações sejam consideradas insatisfatórias, requerendo ações de controle, ficam configurados os problemas de *controle de vibrações*, no primeiro caso, e de *controle de forma* no segundo caso, os quais podem ser tratados empregando estratégias de controle ativo ou passivo. Nestas situações, as estruturas inteligentes podem ser concebidas para efetuar, de forma autônoma, as tarefas de sensoramento, atuação e controle.

Os quatro elementos fundamentais de uma estrutura inteligente são: os *sensores*, destinados a captar as alterações ambientais e/ou de funcionamento, os *atuadores*, responsáveis pela ação de adaptação do sistema, os *procedimentos de controle*, geralmente implementados em microprocessadores digitais e que determinam as ações de controle a serem executadas pelos atuadores a partir das informações adquiridas pelos sensores e, é claro, a *própria estrutura*.

Um dos fatores que têm impulsionado a tecnologia de estruturas inteligentes é a viabilização crescente do uso dos chamados materiais inteligentes ou adaptativos na concepção de sensores e atuadores.

Existem diferentes tipos de materiais adaptativos, classificados de acordo com o tipo de transformações energéticas envolvidas (ROGERS, 1992; PIEFORT, 2001). Por exemplo, materiais piezoelétricos, eletrostrictivos e fluídos eletroreológicos transformam energia elétrica em mecânica e vice-versa; materiais magnetostrictivos e fluídos magnético-reológicos sofrem transformações do tipo magnética-mecânica; fibras ópticas transformam energia luminosa em mecânica e vice-versa; ligas com memória de forma (*Shape Memory Alloys* - *SMA*) sofrem transformações termo-mecânicas.

Dentre os materiais inteligentes, os materiais piezoelétricos são, indubitavelmente, os mais utilizados em diversos tipos de aplicações. Isso se deve ao fato de poderem ser usados efetivamente tanto como sensores como atuadores. Outras vantagens que explicam a grande popularidade desses materiais referem-se à sua facilidade de obtenção comercial e de adaptação a diferentes tipos estruturais (placas, cascas, vigas e estruturas curvas). Além disso, podem ser confeccionados em formas variadas, são leves, pouco intrusivos e fáceis de manusear.

Além dos materiais classicamente empregados na construção de sistemas estruturais (materiais metálicos, concreto e madeira), os chamados *materiais compostos* vêm tendo utilização crescente em numerosos tipos de sistemas estruturais, notadamente na concepção de estruturas inteligentes.

Materiais compostos podem ser considerados aqueles formados por dois ou mais materiais ou fases de diferente constituição e com propriedades mecânicas e físicas diferentes entre si (SOUZA, 2003). Essas combinações são feitas de modo que o material resultante apresente comportamento diferenciado dos convencionais. Existem ligas metálicas que são resultantes da combinação de dois materiais metálicos diferentes, mais estes apresentam propriedades aproximadamente iguais. Alguns plásticos que são misturados com aditivos por questão de custo, só são considerados materiais compostos somente se suas propriedades físicas forem substancialmente afetadas.

Vários tipos de classificação para os materiais compostos são disponíveis na literatura. Os definidos em termos da morfologia de seus agentes de reforço são classificados em: compostos particulados, com fibras e compostos estruturais (SOUZA, 2003; PEREIRA Jr., 2004). Esses últimos por sua vez são subdivididos em compostos estruturais do tipo sanduíche e compostos laminados.

São de interesse desta dissertação somente os materiais compostos laminados que consistem de diferentes lâminas fibrosas onde a orientação e o material de cada uma dependem do projeto estrutural.

Segundo Chalaye (2002), os materiais mais tradicionais, como o aço e o alumínio, aparecem freqüentemente como uma solução mais segura do que os compostos, pois suas performances técnicas são mais bem conhecidas e seu comportamento é bem previsível. No entanto, os materiais compostos dispõem de várias vantagens em relação aos materiais tradicionais de uso corrente. A mais relevante delas, do ponto de vista mecânico, é a relação resistência/peso muito superior às de outros tipos de materiais. Além disso, os materiais compostos permitem o aumento de vida de certos equipamentos graças a suas propriedades mecânicas (rigidez, resistência à fadiga) e químicas (resistência à corrosão). Reforçam a segurança, graças a um melhor comportamento ao choque e ao fogo. Alguns materiais compostos oferecem um melhor isolamento térmico, sonoro e elétrico, além de enriquecerem as possibilidades de concepções estruturais, permitindo a realização de formas estruturais complexas com otimização da relação custo/desempenho.

Como é bem conhecido, o custo de fabricação dos materiais compostos é superior ao dos materiais tradicionais como o aço, a madeira ou o alumínio. No entanto, as vantagens dos materiais compostos podem valorizar-se em termos dos ganhos ao longo da vida útil.

Com base no exposto acima, percebe-se que a combinação de materiais compostos com materiais adaptativos, notadamente materiais piezoelétricos, é uma estratégia extremamente interessante na tecnologia das estruturas inteligentes, e vem recebendo muita atenção de pesquisadores nos últimos anos (DONADON, 2000; ROCHA, 2004).

Modernamente, todas as etapas de projeto de estruturas complexas requerem o uso de modelos numéricos confiáveis capazes de proporcionar previsões realistas qualitativas e quantitativas do comportamento estrutural. Tais modelos são indispensáveis para a otimização estrutural e para avaliação de confiabilidade. Neste sentido, grande esforço de pesquisa vem sendo empreendido nos últimos anos visando o desenvolvimento de técnicas de modelagem adaptadas a estruturas inteligentes (DONADON, 2000). No caso particular de estruturas dotadas de sensores e atuadores piezoelétricos, estes modelos devem ser capazes de representar, de forma adequada, o acoplamento eletromecânico existente, e devem ser aplicáveis a diversos tipos de elementos estruturais (barras, vigas, placas e cascas).

Dentre as diferentes técnicas de modelagem existentes, o Método dos Elementos Finitos (MEF) tem se mostrado o mais adequado para a modelagem de estruturas inteligentes, principalmente em virtude de suas características vantajosas de flexibilidade de

modelagem e relativa facilidade de implementação numérica. Além disso, o MEF é hoje uma ferramenta de Engenharia bastante amadurecida, cujas potencialidades e limitações são amplamente conhecidas. Conforme será evidenciado no Capítulo II, diversas variantes de modelagem por elementos finitos de estruturas compostas com sensores e atuadores piezoelétricos existem. A principal distinção entre elas é a ordem das funções polinomiais escolhidas para aproximar as variáveis de campo mecânicas e elétricas. Segundo este critério, as classes mais importantes são as teorias de primeira ordem (*First-order Shear Deformation Theory - FSDT*) e as teorias de ordem superior (*Higher-order Shear Deformation Theory - HSDT*), Correia et al. (2000).

O estudo reportado neste trabalho insere-se no contexto delineado acima. Especificamente, enfocam-se os procedimentos de modelagem por elementos finitos de estruturas inteligentes constituídas de placas compostas dotadas de sensores e atuadores piezoelétricos.

Observa-se, na literatura, uma grande diversidade de teorias utilizadas na formulação de elementos finitos de estruturas compostas inteligentes, cada uma delas apresentando características favoráveis e desfavoráveis próprias, notadamente no que diz respeito à precisão, domínio de aplicação e esforço computacional envolvido na sua implementação. Foram, portanto, estabelecidos os seguintes objetivos específicos para este trabalho:

1º. realizar um estudo bibliográfico referente às diversas formulações apresentadas na literatura, visando apreender o estado atual da arte e avaliar as características destas formulações;

2º. com base no estudo bibliográfico, efetuar a implementação computacional de algumas das formulações mais difundidas, FSDT e HSDT, e avaliar e comparar seu desempenho quando aplicadas a placas compostas laminadas. O modelo implementado deve ser capaz de acomodar diferentes tipos de análises estáticas e dinâmicas, oferecendo flexibilidade quanto à discretização espacial, estratificação do laminado e posicionamento de sensores e atuadores piezoelétricos.

Deve-se também observar que, no âmbito do grupo de pesquisa em Vibrações e Dinâmica da Faculdade de Engenharia Mecânica da UFU, as estruturas inteligentes vêm sendo estudadas há alguns anos, sob os aspectos de modelagem e controle, com aplicações a estruturas constituídas de materiais metálicos (ALBUQUERQUE, 2004; ABREU, 2003; TEIXEIRA, 2001; VIANA, 2005; SANTANA, 2002; SANTANA et al. 2004; RADE e STEFFEN Jr, 2006). O presente trabalho objetiva a extensão do trabalho de pesquisa a estruturas constituídas de materiais compostos, que ocupam uma importante posição na tecnologia de estruturas inteligentes.

Além deste capítulo introdutório esta dissertação está estruturada em seis capítulos cujo conteúdo é o seguinte:

O segundo capítulo traz uma revisão bibliográfica de algumas das principais contribuições dadas ao estudo de temas ligados às estruturas compostas inteligentes.

O terceiro capítulo estabelece uma discussão sobre a fundamentação teórica pertinente à modelagem de placas compostas laminadas, com ênfase nas teorias de primeira ordem e de alta ordem.

O quarto capítulo dedica-se ao estudo dos materiais piezoelétricos utilizados em estruturas inteligentes, apresentando um breve histórico da piezoelectricidade, com ênfase nas relações constitutivas eletromecânicas acopladas empregadas na modelagem numérica.

No quinto capítulo apresenta-se uma breve revisão das terminologias sobre os materiais compostos adotadas nesta dissertação.

O sexto capítulo apresenta passo a passo a formulação do elemento finito Serendipity escolhido para implementação computacional. Nele, as relações deformações/deslocamentos e campos elétricos/voltagens são expressos em termos de variáveis nodais e funções de forma e associados posteriormente ao princípio variacional eletromecânico em nível elementar e global para a obtenção da Equação do Geral do Sistema Eletromecânico Acoplado. Para a solução numérica dessas equações, são formuladas as teorias *HSDT* e *FSDT* utilizadas para a aproximação do campo de deslocamentos mecânicos da *Teoria Mista*. Essas equações descrevem o comportamento global da estrutura sob condições estáticas e sob vibração livre e suas condições de contorno são apresentadas.

No sétimo capítulo, para efeito de validação dos programas computacionais implementados, são modeladas estruturas compostas laminadas comuns e estruturas compostas laminadas inteligentes dotadas de sensores e atuadores piezoelétricos.

Por fim, o oitavo capítulo traz comentários e conclusões sobre o trabalho, além de sugestões para trabalhos futuros.



## **CAPÍTULO II**

### **REVISÃO DA LITERATURA**

Neste capítulo é apresentado um levantamento das principais contribuições encontradas na literatura científica voltadas aos dois principais aspectos das estruturas compostas abordados neste trabalho: o controle de forma e de vibrações empregando sensores e atuadores piezoelétricos e as técnicas de modelagem por elementos finitos.

#### **2.1 Controle ativo e passivo de forma e vibrações de estruturas inteligentes**

Conforme anunciado anteriormente no Capítulo I, em uma aplicação típica de controle ativo, elementos piezoelétricos são usados como sensores de deformação ou de vibração e como atuadores colados à estrutura-base ou inseridos em seu interior. A voltagem gerada pelo sensor é devidamente processada por um controlador (um conjunto de instruções implementadas em computador digital), que determina uma voltagem a ser aplicada ao atuador piezoelétrico com o intuito de minimizar as perturbações indesejáveis da estrutura.

Segundo Lima Jr. (1999) e Rocha (2004), na área do controle ativo usando materiais piezoelétricos estão disponíveis na literatura vários trabalhos empregando diferentes estratégias de controle, como por exemplo: controle por realimentação positiva (FANSON e CAUGHEY, 1990), intensidade estrutural (GIBBS e FULLER, 1992; ARRUDA, M. et al., 1997), controle adaptativo (ABREU, 2003; CHANDRASHEKHARA et al., 1996), controle por Redes Neurais Artificiais e Lógica Fuzzy (VIPPERMAN e CLARK, 1996; ASSUNÇÃO e TEIXEIRA, 2001; ABREU e RIBEIRO, 2002), controle robusto de bandas limitadas (MOREIRA, 1998) e técnicas empregando a formulação das desigualdades matriciais lineares - LMIs (GONÇALVES et al., 2002).

Tem sido explorada ainda uma interessante possibilidade de se obter o controle passivo de vibrações e ruído (sem introdução de energia externa) empregando materiais

piezoelétricos, baseado no fato que elementos piezoelétricos podem converter parte da deformação da estrutura em energia elétrica durante o ciclo de vibrações. Essa energia pode ser dissipada e ou transformada através de um circuito elétrico passivo, também conhecido como *circuito shunt*, constituindo uma forma usual de controle passivo de estruturas obtendo-se assim atenuação dos níveis de vibrações (HAGOOD et al., 1991, HOLLKAMP, 1994; VIANA, 2005). Comparada com outras técnicas de controle passivo, que tipicamente introduzem alto amortecimento, como é o caso do amortecimento viscoelástico, esta técnica oferece a vantagem de que o nível de amortecimento pode ser modificado periodicamente através da variação das propriedades elétricas dos elementos passivos (resistores e indutores) ou através da reconfiguração do circuito elétrico. Além disso, no caso dos materiais compostos, segundo Saravanos (1999b), esta técnica não reduz a rigidez das lâminas como ocorre no caso de camadas amortecidas por cisalhamento de materiais viscoelásticos.

São relativamente recentes os trabalhos feitos na área de amortecimento piezoelétrico passivo. Hagood et al (1991) foram os primeiros a estudar o uso de elementos piezoelétricos em vigas amortecidas passivamente com circuito shunt. Revisões sobre o tema são apresentadas por Rao e Sunar (1994) e Crawley (1994). A maioria dos estudos se limita a configurações simples de laminados e elementos estruturais do tipo viga. Koshigoe e Murdock (1993) fizeram simplificações nas fórmulas analíticas de placas com elementos piezoelétricos passivos. Davis et al. (1995) desenvolveram um método para prever o amortecimento passivo em vigas com malhas piezoelétricas com circuito shunt, baseados na dissipação da energia de deformação e também apresentaram resultados experimentais. Koshigoe e Murdock (1993) e Saravanos (1999a) desenvolveram formulações analíticas, enquanto Saravanos (1999b) desenvolveu uma formulação de elementos finitos para o controle de vibrações de uma estrutura de casca laminada com piezoelétricos ligados a um circuito shunt integrado utilizando a teoria dos campos mistos de laminados piezoelétricos. Plagiankos e Saravanos (2003) desenvolveram um modelo para a predição do amortecimento em vigas e placas compostas, proporcionado pela contribuição conjunta das camadas viscoelásticas e piezoelétricas amortecidas passivamente com circuitos shunt. Estudos similares tratando da modelagem de compostos laminados inteligentes combinados com circuitos elétricos shunt foram apresentados por Bisegna e Caruso (2000) e Bisegna e Caruso (2001).

## 2.2 Modelos analíticos e numéricos de estruturas inteligentes

Uma grande variedade de *modelos analíticos* foi desenvolvida na tentativa de predição do comportamento dos materiais piezoelétricos em estruturas inteligentes. Estes modelos são classificados segundo Lee (2001) em duas distintas categorias: *modelos de deformação induzida (induced strain models)* e *modelos eletro-mecânico acoplados (coupled electromechanical models)*.

Os *modelos de deformação induzida* usam aproximações teóricas para incorporar o efeito piezoelétrico direto e inverso, e são geralmente limitados, predizendo somente a resposta ativa do material piezoelétrico, visto que negligenciam o potencial elétrico como uma variável de estado na formulação. Modelos deste tipo, implementados em códigos de elementos finitos, foram propostos por Hwang et al. (1994) no estudo de placas compostas laminadas. Estas placas são controladas ativamente, através do *controle com realimentação negativa de velocidade (negative velocity feedback control)* com atuadores e sensores piezoelétricos, e controladas passivamente através da mudança de rigidez obtida através da mudança de orientação das lâminas do composto.

*Modelos eletromecânicos acoplados* são modelos que promovem uma representação mais consistente de ambos efeitos piezoelétricos (direto e inverso) por incorporarem em sua formulação os deslocamentos e potenciais elétricos como variáveis de estado. Algumas análises utilizando estes tipos de modelo são baseadas nas aproximações analíticas de Bailey e Hubbard (1985), Crawley e de Luis (1987), Crawley e Anderson (1990), Lee (1990), Mitchell e Reddy (1995), Heyliger e Saravanos (1995), Liang (1997) e Machado (2004).

Tipicamente, os modelos de deformação induzida e eletromecânico acoplado são implementados em códigos de elementos finitos em virtude das limitações apresentadas pelos modelos analíticos, cuja aplicabilidade fica restrita a formas estruturais e condições de contorno mais simples.

Na técnica de elementos finitos, o campo de deslocamentos mecânicos dos modelos eletromecânicos acoplados normalmente é aproximado através de uma série polinomial ao longo da espessura. A ordem desta série é que dá nome às teorias utilizadas na modelagem. Assim, dentre as mais conhecidas estão a chamada *Teoria da Deformação Cisalhante de Primeira Ordem (FSDT)* e a *Teoria da Deformação Cisalhante de Terceira Ordem (HSDT)*, ou simplesmente conhecida como *Teoria Cisalhante de Ordem Superior* por ser a teoria mais importante dentre as teorias de alta ordem.

Existe além dessas duas teorias, a *Teoria Clássica dos Laminados (CLT)* que é uma teoria mais antiga e largamente utilizada por vários autores. A *CLT* negligencia os efeitos

devidos às deformações cisalhantes transversais e requer funções campo de deslocamentos mecânicos pertencentes ao espaço  $C^1$ .

Os números de graus de liberdade mecânicos das teorias *CLT*, *FSDT* e *HSDT* não dependem do número de camadas do composto laminado, e são conhecidas como *Teorias da Camada Equivalente Única*, ou *Teorias da Camada Equivalente Simples (Equivalente Single Layer Theory)*.

Além dessas, existe a chamada *Teoria de Camadas Equivalentes Discretas (Layerwise Theory)* onde, o número de graus de liberdade (mecânicos ou elétricos) depende do número de camadas ao longo da espessura da estrutura composta. A aplicação da *Teoria das Camadas Equivalentes Discretas* na aproximação das variáveis elétricas permite a inclusão de camadas piezoelétricas em diferentes posições, embutidas ou coladas nas superfícies da estrutura composta.

De modo geral, deve-se buscar um compromisso entre a ordem da função de aproximação e o esforço computacional resultante na modelagem de estruturas inteligentes. Com este objetivo, existe também na modelagem de estruturas inteligentes a *Teoria Mista* e cuja grande vantagem está relacionada exatamente à economia de custo computacional em relação à *Teoria das Camadas Equivalentes Discretas*.

A *Teoria Mista* combina o comportamento mecânico concebido em uma camada simples com o comportamento elétrico da estrutura inteligente em multicamadas.

No capítulo subsequente, as formulações teóricas da *CLT*, *FSDT* e da *HSDT* serão detalhadas, e serão destacadas as vantagens, desvantagens e condições de aplicações de cada uma delas. Revisões abrangentes sobre estas teorias são encontradas nas publicações de Reddy (1997) e Mendonça (2005). Com propósito de apresentar e discutir os avanços e tendências na formulação e desenvolvimento dos modelos de elementos finitos aplicados na modelagem de estruturas inteligentes, Benjeddou (2000) apresenta uma extensa revisão de trabalhos.

Para os *modelos eletromecânicos acoplados*, existem números trabalhos que utilizam diferentes formulações teóricas. A revisão dos trabalhos a seguir não pretende incluir todos esses trabalhos, mais apenas informar o leitor sobre o atual estágio do desenvolvimento da pesquisa acerca do tema e nele contextualizar o presente trabalho.

Análises dinâmica e estática de placas finas com atuadores e sensores piezoelétricos acoplados usando o *Método dos Elementos Finitos* (MEF) são realizadas por Tzou e Tseng (1990) e Ha et al. (1992), sendo que a estrutura hospedeira dos materiais adaptativos e o próprio conjunto sensor/atuador são modelados por elementos sólidos isoparamétricos de 8 nós que utilizam a *CLT* na aproximação das variáveis mecânicas. Estes elementos sólidos são formulados especificamente para placas ou cascas finas, com sensores e atuadores

piezoelétricos distribuídos. Estudos numéricos para avaliar a performance de placas em balanço com camadas piezoelétricas passivas e ativas de materiais poliméricos em vibração foram realizadas por Tzou e Tseng (1990), enquanto Ha et al. (1992) realizaram análises estáticas e dinâmicas de placas compostas laminadas contendo cerâmicas piezoelétricas distribuídas e sujeitas a carregamentos mecânicos e elétricos.

Devido ao elevado número de graus de liberdade (*g.d.l.*), o elemento sólido isoparamétrico conduz a problemas de grande dimensão, o que requer o emprego da técnica especial de *redução de Guran*, que reduz o número total de graus de liberdade do modelo, conforme relatado no estudo de Suleman e Venkayya (1995). A ocorrência de excessivas energias de deformação cisalhante e a elevada rigidez na direção da espessura da placa, que propicia o fenômeno conhecido por *shear locking* (literalmente, travamento por cisalhamento), é outro problema associado com os elementos sólidos isoparamétricos na análise de placas finas. Para superar estes problemas, três *g.d.l.* internos foram adicionados a este elemento de 8 nós, ocasionando aumento adicional na complexidade da formulação e na dimensão dos modelos, segundo Detwiler et al. (1995). Estes autores afirmam ainda que o uso de elementos bidimensionais de placa reduz consideravelmente o tamanho do problema e o tempo computacional de certas aplicações em elementos finitos.

O elemento bidimensional de placa desenvolvido por Hwang e Park (1993) é mais eficiente que elementos sólidos, porém aparenta ter capacidades restritas de modelagem. Este elemento, segundo Detwiler et al. (1995) pode ser usado somente para modelar vigas e placas dotadas de pares de sensores e atuadores piezoelétricos colados simetricamente ao longo de sua espessura. Possui somente três *g.d.l.* estruturais por nó, não sendo capaz de modelar o acoplamento membrana-flexão.

Saravanos e Heyliger (1995) desenvolveram uma formulação de elementos finitos utilizando a *Teoria das Camadas Equivalentes Discretas* para a análise da performance estática e sob vibração livre de placas compostas piezoelétricas simplesmente apoiadas e de placas compostas engastadas dotadas de piezocerâmicas discretizadas. Em comparação com as predições das soluções exatas, os autores mostraram a grande capacidade desta teoria para modelar placas compostas piezoelétricas finas e espessas sob vibração livre na condição de circuito aberto e fechado. Foi demonstrada também a habilidade da formulação na obtenção das respostas estática de placas compostas engastadas dotadas de piezocerâmicas distribuídas de maneira discreta. Além de análises globais, as aplicações desenvolvidas demonstraram a grande capacidade da formulação na obtenção das respostas locais. Os resultados das tensões interlaminares e planas, dos deslocamentos planos e transversais e dos potenciais elétricos ao longo da espessura da estrutura inteligente apresentam grande precisão com os obtidos através da solução exata.

Com o propósito de desenvolver modelos mais simples, reduzidos e eficientes comparados aos modelos tridimensionais utilizando elementos sólidos e os da *Teoria das Camadas Equivalentes Discretas*, Suleman e Venkayya (1995) também desenvolveram um elemento bidimensional de placa piezoelétrica, e no lugar da *CLT* utilizaram o modelo de placa de Mindlin (*FSDT*) no estudo de placas compostas laminadas com sensores e atuadores piezoelétricos. Os *g.d.l* elétricos são assumidos sobre o plano de cada lâmina piezoelétrica e variam linearmente através de sua espessura. Um elemento bidimensional dotado de 4 nós foi desenvolvido. Na validação da formulação, os resultados obtidos foram confrontados com resultados analíticos e experimentais para vigas piezoelétricas em balanço e placas compostas em balanço dotadas de atuadores piezoelétricos. Suleman e Venkayya (1995) validam tal teoria restritos a  $\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0$ , para placas finas com base em resultados experimentais e modelos teóricos 3D.

Detwiler et al. (1995) formularam um elemento bidimensional de placa capaz de modelar placas compostas laminadas contendo uma ou mais camadas piezoelétricas ativas e passivas sujeitas a carregamentos mecânicos e elétricos sob condições estáticas e dinâmicas. Cada camada piezoelétrica, diferentemente do elemento de Hwang e Park (1993), pode ser colada em uma distância arbitrária do plano médio de referência da placa e estar sujeita a diferentes voltagens elétricas. O elemento piezoelétrico desenvolvido apresenta 4 nós e é baseado na hipótese que o potencial elétrico permanece constante no plano e varia linearmente através da espessura da placa. A deformação estrutural por sua vez é modelada usando a *FSDT*. Conclui que o modelo baseado em seu elemento bidimensional é mais eficiente computacionalmente do que os modelos sólidos simulados numericamente por possuírem um maior número de *g.d.l* totais.

Segundo Cen et al. (2002), o modelo de Detwiler et al. (1995) apresenta travamento por cisalhamento. Assim, os autores promovem em seu modelo híbrido a correção do cisalhamento transversal, desenvolvendo um elemento livre de travamento, o qual pode ser utilizado na análise de placas compostas laminadas piezoelétricas finas e moderadamente espessas.

Saravanos (1997) apresentou um elemento bidimensional de casca para compostos laminados piezoelétricos curvilíneos que combina a *FSDT* para os deslocamentos mecânicos conjuntamente com *Teoria das Camadas Equivalentes Discretas* para os potenciais elétricos. Este modelo chamado por Saravanos (1997) de modelo misto, é semelhante aos modelos “*híbridos*” dos autores citados anteriormente. Um elemento quadrático de oito nós foi formulado para análises estática e dinâmica de cascas compostas laminadas contendo camadas piezoelétricas. Resultados numéricos para painéis compostos cilíndricos com atuadores piezocerâmicos contínuos e cascas em balanço com atuadores e

sensores piezoelétricos contínuos ou discretos ilustram as vantagens do elemento e quantificam os efeitos da curvatura na resposta eletromecânica de cascas piezoelétricas. Alguns termos que envolvem a curvatura são desprezados visando tornar a teoria mais apropriada para a modelagem de cascas achatadas (MACHADO, 2004).

O modelo de Lee (2001) utiliza a *Teoria das Camadas Equivalentes Discretas* na discretização da estrutura inteligente. Diferente dos modelos citados anteriormente, este modelo incluiu os efeitos da temperatura nas respostas de estruturas compostas laminadas inteligentes. Resultados de publicações anteriores em diversos estudos analíticos de vigas piezoelétricas em balanço, placas compostas simplesmente apoiadas dotadas de malhas piezoelétricas discretas foram confrontados com aqueles produzidos pelo modelo. Vários outros estudos numéricos foram desenvolvidos para demonstrar as capacidades adicionais apresentadas pelo modelo, no cálculo das tensões térmicas, no controle de forma de flexões e torções induzidas termicamente, na incorporação do efeito piroelétrico e da dependência das propriedades dos materiais com a temperatura e na determinação da influência da curvatura sobre as respostas eletromecânicas.

Correia et al. (2000) desenvolveram recentemente um elemento bidimensional de placa de 9 nós que utiliza o modelo misto utilizado por Saravanos (1997) para a aproximação dos campos elétricos e mecânicos acoplados. Mas, diferentemente de Saravanos, os autores utilizam a HSDT na aproximação do campo de deslocamentos mecânicos. Esta escolha permite a modelagem de estruturas compostas laminadas finas e espessas e elimina alguns inconvenientes apresentados pela teoria FSDT. Análises estáticas, de vibração livre e otimização do projeto de multicamadas laminadas também foram realizadas, além de ter sido feita a redução do modelo da HSDT para a FSDT na aproximação das variáveis mecânicas.

Diferentemente de Correia et al. (2000), Chee (2000) utiliza um elemento bidimensional de placa do tipo Serendipity de 8 nós. Ele utiliza a formulação mista, realiza o controle de forma de placas compostas laminadas inteligentes em condições estáticas, e estuda o projeto ótimo de estruturas inteligentes quanto à posição dos atuadores e sensores piezoelétricos. A escolha do número de nós do elemento de Chee deve-se a estudos prévios feitos pelo autor. Ao propor elementos retangulares de 4 nós, Chee observara o aparecimento de problemas de travamento na modelagem de estruturas compostas laminadas finas. Além dos estudos em placas compostas laminadas, este autor também desenvolve um elemento de viga para o estudo de vigas compostas laminadas inteligentes. Para isso utiliza o campo de deslocamentos mecânicos da HSDT proposta por Reddy (1985).

A principal diferença teórica existente entre os modelos de Correia e colaboradores e o de Chee é que os primeiros pesquisadores impõem uma descontinuidade do potencial elétrico nas interfaces comuns dos dois elementos adjacentes, enquanto que, no modelo do segundo autor existe conectividade nodal do potencial elétrico dos elementos adjacentes, e, portanto continuidade do potencial elétrico. De fato, segundo Detwiler et al. (1995), quando dois ou mais elementos piezoelétricos são adjacentes entre si, suas voltagens são os valores médios, em virtude da condutividade. Nos modelos de Correia et al. (2000), bem como nos de Saravanos (1997), Hwang e Park (1993) e Detwiler et al. (1995), existe a descontinuidade nos limites do elemento porque é atribuído somente *um g.d.l* para o potencial elétrico em cada superfície da camada piezoelétrica. Assim, numa primeira análise, a utilização desta metodologia em relação à de Chee torna o modelo mais econômico computacionalmente. Por outro lado, o modelo de Chee permite a obtenção das voltagens elétricas em diferentes posições da estrutura, permitindo modelar o caso em que estas voltagens são obtidas por eletrodos colados pontualmente sob a superfície dos sensores piezoelétricos, tal como ocorre no trabalho de Tzou e Tseng (1990). Desta forma, o modelo de Chee permite uma discretização menos refinada da estrutura para a obtenção da distribuição do potencial elétrico ao longo do plano da placa ou viga, enquanto que as teorias que impõem descontinuidades do potencial elétrico exigem um maior grau de refinamento da estrutura para a obtenção dessa distribuição.

Cen et al. (2002) desenvolvem um elemento bidimensional de placa com 4 nós para a análise de placas compostas laminadas contendo camadas piezoelétricas coladas superficialmente ou embutidas na estrutura. Seu modelo utiliza *Teoria Mista* semelhante à de Saravanos (1997), que é por ele chamada híbrida parcial (*partial hybrid*). Este autor promove a correção do fator de cisalhamento, o que torna, segundo ele, os modelos com excelente performance na análise das placas compostas laminadas piezoelétricas finas e moderadamente espessas.

Na literatura nacional existem poucos trabalhos relacionados à modelagem numérica de estruturas compostas inteligentes que utilizam materiais piezoelétricos como sensores e atuadores. Dentre eles destacam-se os trabalhos de Lima Jr. (1999), Carvalho Neto (2000), Donadon (2000), Machado (2004) e Rocha (2004).

Lima Jr. (1999) apresenta uma metodologia para a modelagem de estruturas com elementos piezoelétricos incorporados via MEF e desenvolve um ambiente de simulações de estruturas inteligentes utilizando um elemento sólido tridimensional. Realiza simulações numéricas e experimentais no controle ativo de vibrações usando estruturas de viga de Euler-Bernoulli e Timoshenko e também de placas de Kirchhoff e Reissner-Mindlin, ou seja, usa em seus modelos de viga e placa a *CLT* e a *FSDT*.

Carvalho Neto (2000) apresenta uma formulação de elementos finitos para placas compostas laminadas contendo camadas piezoelétricas distribuídas e coladas sob a superfície ou inseridas no interior da estrutura. O elemento finito proposto por este autor tem uma forma retangular, sendo dotado de 4 pontos nodais, seis *g.d.l* mecânicos por ponto nodal e um *g.d.l* elétrico por camada piezoelétrica. Este elemento apresenta uma continuidade  $C^0$  nos deslocamentos de membrana e  $C^1$  no deslocamento transversal, ou seja, utiliza a *CLT*, e os potenciais elétricos são assumidos constantes no plano da camada piezoelétrica e variam linearmente na direção da espessura.

O trabalho de Donadon (2000) descreve uma formulação em elementos finitos para placas laminadas dotadas de atuadores piezoelétricos incluindo o efeito de enrijecimento por tensão. Para as análises numéricas, o autor apresenta um elemento quadrilateral lagrangiano bicúbico baseado na *FSDT*, formado por 16 nós e 5 *g.d.l* por nó. Os resultados experimentais e numéricos realizados mostraram que para o caso de placas engastadas os efeitos de tensões induzidas no plano afetam significativamente o comportamento mecânico da placa. O efeito de enrijecimento depende da magnitude das voltagens impostas sobre os atuadores piezoelétricos, da disposição dos mesmos na placa, condições de contorno, geometria das placas e propriedades do material.

O trabalho de Donadon (2000) está inserido dentro das linhas de pesquisa do grupo de *Estruturas Inteligentes e Compósitos* do *Instituto Tecnológico de Aeronáutica* (ITA), cujo trabalho é voltado ao desenvolvimento de tecnologias de interesse do setor aeroespacial brasileiro nas áreas de compostos estruturais e estruturas inteligentes. Na área de compostos destacam-se os trabalhos de análise e otimização de estruturas compostas e que resultaram em um conceito inovador que permite projetar a estrutura de forma a se introduzir tensões residuais térmicas de cura favoráveis ao comportamento estrutural. Outros trabalhos são voltados para a caracterização experimental de estruturas compostas visando estabelecer procedimentos de projeto e de inspeção de estruturas aeroespaciais incluindo os efeitos de fatores ambientais. O grupo vem desenvolvendo ainda metodologias para o projeto ótimo de estruturas aeronáuticas incluindo efeitos de flambagem e pós-flambagem. Na área de estruturas inteligentes, dedica-se a técnicas de modelagem de estruturas de vigas e placas laminadas contendo atuadores piezoelétricos pelo MEF.

Machado (2004) procura obter soluções analíticas para as equações eletromecânicas acopladas no estudo de placas compostas laminadas inteligentes sob diferentes carregamentos e condições de contorno. Apresenta a teoria de placas compostas laminadas piezoelétricas com um campo de deslocamentos idêntico ao da teoria de placas de Reissner-Mindlin, ou seja, usa a *FSDT*, e um potencial elétrico com variação linear ao longo da espessura de cada camada piezoelétrica e constante no plano da placa. Outro trabalho

dedicado à modelagem de estruturas isotrópicas inteligentes é o de Rocha (2004) que apresenta um programa implementado no ambiente Matlab® usando o MEF para modelar vigas e placas isotrópicas dotadas de materiais piezoelétricos colados sob a estrutura. Usa a teoria de viga e placa de Kirchhoff (*CLT*) na modelagem do campo de deslocamentos mecânicos. No entanto, diferentemente dos trabalhos de Lima Jr. (1999), Carvalho Neto (2000) e Machado (2004), a distribuição de potencial elétrico não apresenta descontinuidades nas interfaces interlaminares. Esta descontinuidade ocorre, segundo o autor, devido à conectividade nodal do potencial representado por dois momentos opostos aplicados às extremidades do elemento. O autor implementa também técnicas para o posicionamento otimizado de sensores e atuadores e descreve aplicações de controle de forma.

A revisão da literatura efetuada e sumarizada acima leva a concluir que o estudo de estruturas inteligentes formadas pela combinação de materiais compostos com sensores e atuadores piezoelétrico é um tema de grande interesse junto à comunidade científica internacional, fato comprovado pelo grande número de publicações efetuadas nos últimos anos. De modo particular, o desenvolvimento de técnicas de modelagem numérica eficientes é um aspecto que tem merecido grande atenção de pesquisadores, havendo, contudo, a necessidade de um esforço continuado de pesquisa para a incorporação destas técnicas em análises avançadas de estruturas inteligentes, tais como otimização, análise de confiabilidade e monitoramento de integridade estrutural.

## CAPÍTULO III

### REVISÃO DAS TEORIAS DE PLACAS E CASCAS

Neste capítulo encontra-se uma discussão sucinta sobre a fundamentação teórica dos campos de deslocamento mecânico e elétrico em placas e cascas compostas laminadas, empregada na modelagem de estruturas inteligentes. Especificadamente, a segunda sessão deste capítulo analisa a *Teoria da Deformação Cisalhante de Primeira Ordem (FSDT)*, a *Teoria da Deformação Cisalhante de Ordem Superior (HSDT)*, também conhecida como *Teoria da Deformação de Terceira Ordem*, e a *Teoria Clássica dos Laminados (CLT)*, que são empregadas na modelagem de materiais compostos. Na terceira sessão é apresentada a *Teoria da Deformação Cisalhante Mista*, ou simplesmente *Teoria Mista*, segundo a qual o comportamento mecânico é modelado com base em uma camada equivalente única e a distribuição do campo elétrico é modelada em camadas discretas. A quarta sessão fornece as relações deformação-deslocamento para placas compostas laminadas. Finalizando, na quinta sessão são definidos os campos de deslocamentos elétricos das placas compostas.

No final deste capítulo, o leitor estará apto a escolher, dentre as teorias apresentadas, aquela que melhor atende a seus propósitos na modelagem de placas compostas laminadas inteligentes, levando em consideração as vantagens, desvantagens e custos computacionais apresentados por cada uma dessas teorias.

#### 3.1 Introdução

Inicialmente, é fundamental estabelecer os conceitos de placa e casca que serão muito utilizados nas partes subseqüentes deste trabalho.

Segundo Alhazza e Alhazza (2004), cascas podem ser definidas como estruturas finas e curvadas feitas de uma simples camada ou várias camadas de materiais isotrópicos ou anisotrópicos. As cascas podem ser classificadas conforme sua curvatura em: placas, cascas cilíndricas, cascas cônicas e cascas duplamente curvadas. As placas são cascas

planas com duas curvaturas nulas, cascas cilíndricas possuem uma única curvatura nula, cascas cônicas possuem uma das curvaturas nula e outra que varia na direção axial da casca e finalmente, cascas duplamente curvadas apresentam as duas curvaturas não nulas (como as cascas esféricas, por exemplo). Portanto, as placas, que são o foco principal desta dissertação, podem ser consideradas como um tipo especial de casca.

Diferentes teorias, classificadas de acordo com as hipóteses cinemáticas adotadas na aproximação das quantidades mecânicas (deslocamentos e deformação), foram originalmente desenvolvidas para a modelagem de placas e cascas homogêneas e isotrópicas e estendidas posteriormente para o estudo de placas e cascas compostas laminadas, ortotrópicas ou anisotrópicas, com materiais piezoelétricos colados ou embutidos nelas. Essas teorias podem ser divididas basicamente em duas categorias distintas:

- Teorias baseadas em Camada Equivalente Única (*Equivalent Single Layer Theory*).
- Teorias baseadas em Camadas Equivalentes Discretas (*Layerwise Theory or Discrete Layer Theory*).

No caso particular de estruturas laminadas inteligentes, contendo sensores e atuadores piezoelétricos, as duas teorias acima podem ser combinadas nas teorias denominadas *Mistas*, nas quais o conceito de *Camada Equivalente Única* é usado para aproximação dos campos de deslocamentos mecânicos e o conceito de *Camadas Equivalentes Discretas* é usado para aproximar os potenciais elétricos.

A primeira categoria engloba a *Teoria Clássica dos Laminados (CLT)*, a *Teoria da Deformação Cisalhante de Primeira Ordem (FSDT)* e a *Teoria da Deformação Cisalhante de Ordem Superior (HSDT)*. Já na segunda categoria estão inseridas a *Teoria das Camadas Independentes*, também conhecida como *Teoria Zig-zag*, e a *Teoria das Camadas Dependentes*.

Na primeira categoria, a estrutura composta laminada é modelada como uma única camada equivalente e na segunda cada lâmina do composto é tratada individualmente. Essas duas categorias são ilustradas na representação esquemática apresentada na Fig. 3.1.

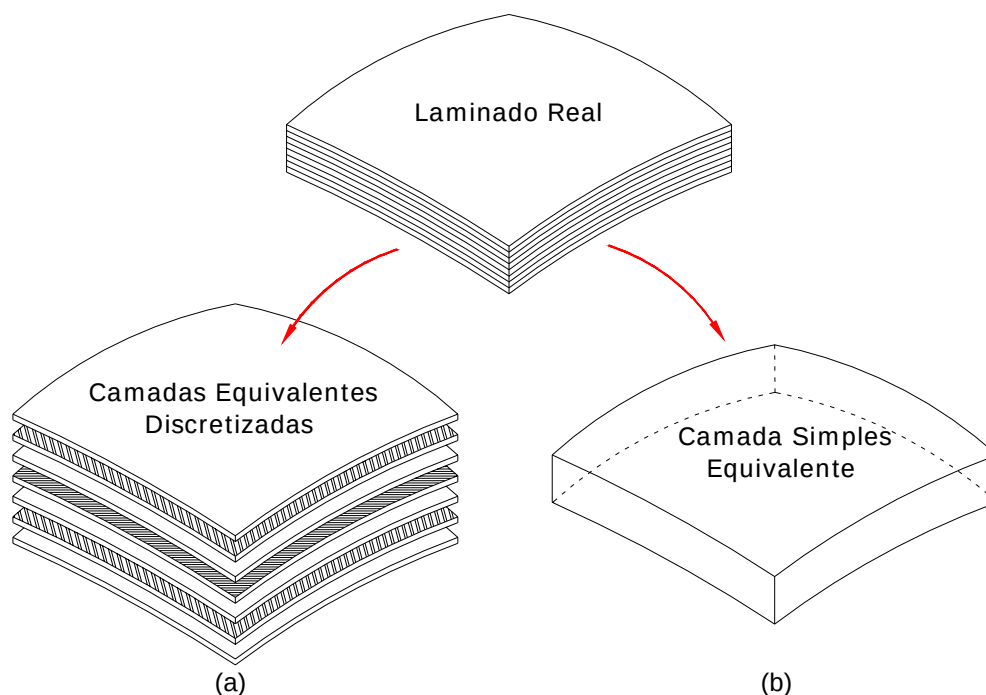


Figura 3.1 - (a) Teoria das Camadas Equivalentes Discretas. (b) Teoria da Camada Equivalente Única, para uma casca composta formado por sete lâminas.

Na próxima seção estas categorias, aplicadas ao estudo de placas e cascas compostas laminadas inteligentes, são detalhadas.

### 3.2 Teoria da Camada Equivalente Única

#### 3.2.1 Teoria Clássica dos Laminados (CLT)

A CLT baseia-se nas conhecidas hipóteses cinemáticas de Kirchhoff empregadas no estudo de placas e de Kirchhoff-Love utilizadas no estudo de cascas, segundo as quais uma linha reta e perpendicular à superfície média indeformada, também conhecida como superfície de referência, permanece reta e perpendicular a esse plano e não se alonga na direção da espessura, ou seja, permanece inextensível nesta direção, conforme ilustração apresentada na Fig. 3.2. De acordo com essas hipóteses, a *CLT* negligencia o efeito das deformações cisalhantes transversais ( $\gamma_{xz}$ ,  $\gamma_{yz}$ ) e da deformação normal transversal ( $\varepsilon_{zz}$ ) (REDDY, 1997; MENDONÇA, 2005).

Na formulação dessa teoria outras hipóteses assumidas são:

- (1) As lâminas são perfeitamente coladas umas nas outras, isto é, não ocorre deslizamento ou descolamentos entre elas.
- (2) Os deslocamentos são contínuos através das lâminas.

- (3) O material de cada camada exibe comportamento linearmente elástico.
- (4) O laminado é considerado delgado, ou seja, as camadas da placa ou casca composta são relativamente finas em relação às suas dimensões superficiais.
- (5) O material de cada lâmina tem três planos de simetria (material ortotrópico).
- (6) As deformações, os deslocamentos e as rotações são pequenos.

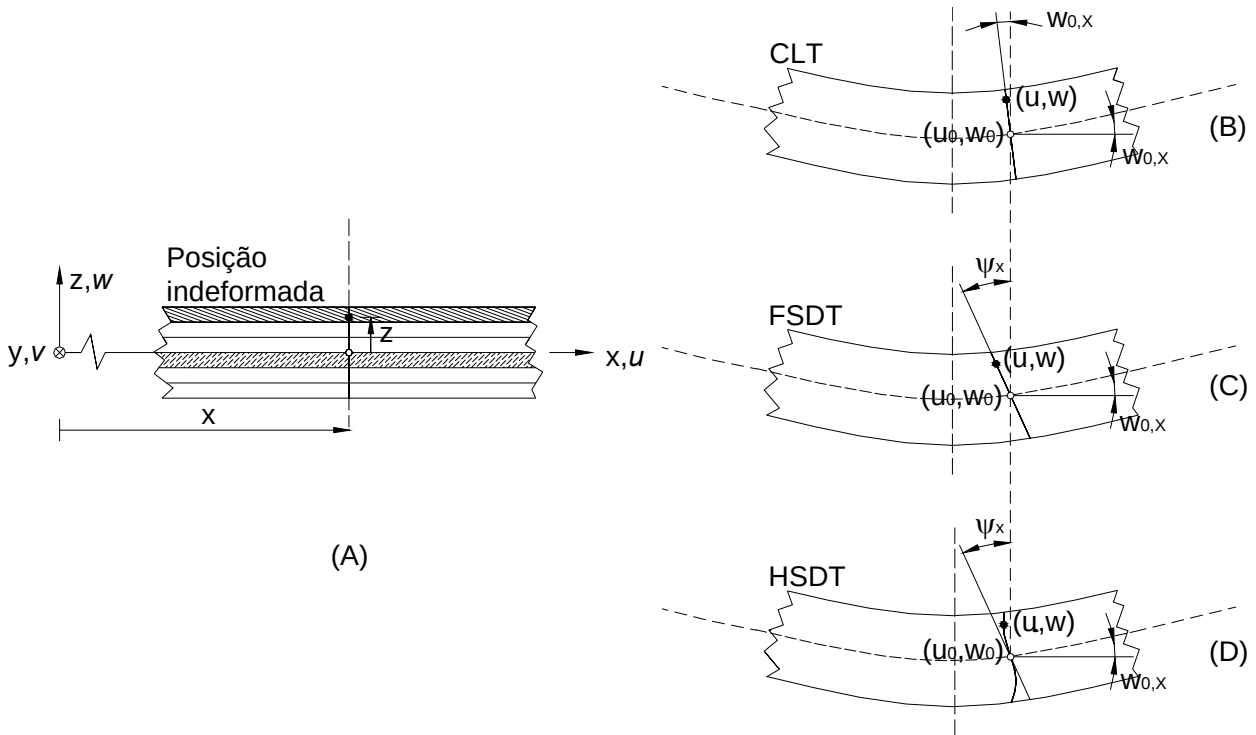


Figura 3.2 - (A) Representação esquemática de uma placa composta e ilustração da cinemática da deformação representada como uma camada equivalente única, na *CLT* (B), na *FSDT* (C) e na *HSDT* (D).

De acordo com a *CLT* o campo de deslocamentos é dado por:

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z, t) &= u_o(x, y, t) - zw_{o,x} \\
 v(x, y, z, t) &= v_o(x, y, t) - zw_{o,y} \\
 w(x, y, z, t) &= w_o(x, y, t)
 \end{aligned}
 \tag{3.1}$$

onde:  $(x, y, z)$  é um conjunto de coordenadas cartesianas escolhido de forma que  $(x, y, 0)$  é plano médio não deformado,  $t$  é o tempo,  $u = u(x, y, z, t)$  e  $v = v(x, y, z, t)$  são os deslocamentos nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente, e  $w = w(x, y, z, t)$  é o deslocamento transversal constante ao longo da espessura do laminado;  $u_o$ ,  $v_o$  e  $w_o$  são os deslocamentos nas direções

coordenadas de um ponto material da superfície de referência e  $w_{0,x} = \frac{\partial w_0}{\partial x}$ ,  $w_{0,y} = \frac{\partial w_0}{\partial y}$  são as rotações em torno dos eixos y e x, respectivamente. Estas grandezas são ilustradas na Fig. 3.2 (B).

Uma vez conhecidos os deslocamentos do plano médio da superfície de referência  $u_0$ ,  $v_0$  e  $w_0$ , os deslocamentos de qualquer ponto arbitrário do contínuo tri-dimensional são determinados por meio das Eq.(3.1).

Esta teoria, no entanto, requer uma continuidade no campo dos deslocamentos, com funções pertencentes ao espaço  $C^1$ , ou seja, funções com primeiras derivadas contínuas. No âmbito das soluções analíticas este fato não é restritivo, mas formulações de elementos finitos que exigem formulações baseadas em aproximações no espaço  $C^1$  são geralmente mais complexas do que as pertencentes ao espaço  $C^0$ , que requerem apenas funções contínuas.

A teoria clássica tem sido usada na análise de tensões de placas compostas, porém, devido à hipótese de deslocamento linear e a não consideração das deformações cisalhantes, a sua precisão somente é satisfatória no estudo de compostos laminados finos. Assim, o erro apresentado por esta teoria aumenta com o aumento da relação espessura/largura da placa composta laminada (CEN et al., 2002; MENDONÇA, 2005).

### 3.2.2 Teoria da Deformação Cisalhante de Primeira Ordem (FSDT)

Modelos analíticos, desenvolvidos de acordo com a *Teoria da Deformação Cisalhante de Primeira Ordem (FSDT)*, baseiam-se nas hipóteses assumidas pela *Teoria das Placas de Mindlin-Reissner* segundo a qual uma linha reta e normal ao plano médio antes da deformação, permanece reta, mais não necessariamente normal a esse plano após a deformação (Fig. 3.2 (C)).

Os campos de deslocamentos da *FSDT* são dados por:

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) + z\psi_x(x, y, t) \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) + z\psi_y(x, y, t) \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t) \end{aligned} \quad (3.2)$$

onde:  $\psi_x$ ,  $\psi_y$  indicam as rotações em torno dos eixos y e x dos segmentos normais à superfície de referência, como ilustrado pelas Fig. 3.2 (C).

A *FSDT* assume que a deformação cisalhante transversal varie linearmente ao longo da espessura do laminado. Portanto, para que haja concordância com a situação real, em que a deformação cisalhante transversal assume uma distribuição parabólica ao longo da

espessura do laminado, é necessária a introdução de uma constante de correção das deformações de cisalhamento transversais  $\varepsilon_{xz}$  e  $\varepsilon_{yz}$  (CEN et al., 2002; CHUGAL e SHIMPI, 2002; REDDY, 1997).

Esta teoria requer funções pertencentes ao espaço  $C^0$ , ou seja, funções contínuas, e pode ser usada para a modelagem de placas e cascas finas e moderadamente espessas (CEN et al., 2002). Além disso, a *FSDT* é considerada a teoria que apresenta a melhor relação entre capacidade de predição e custo computacional para uma larga classe de aplicações. É também bastante precisa na estimação das características mecânicas globais como deflexões, frequências naturais fundamentais e cargas de flambagem. Porém, mostra-se inadequada na predição de frequências e modos de vibração de ordem elevada e de distribuições de tensões. Apresenta problemas de travamento (*shear locking*) na modelagem de placas finas, isto é conduz a rigidez excessiva e, como já mencionado, tem a desvantagem de requerer um fator de correção para as deformações de cisalhamento (CHUGAL e SHIMPI, 2002; MENDONÇA, 2005).

### 3.2.3 Teoria da Deformação Cisalhante de Ordem Superior (HSDT)

Como as teorias *CLT* e *FSDT* não são adequadas para uma predição adequada do comportamento estático e dinâmico de estruturas compostas laminadas em determinadas circunstâncias, foram desenvolvidas teorias mais elaboradas, dentre as quais a *Teoria Cisalhante de Ordem Superior (HSDT)*, ou *Teoria da Deformação Cisalhante de Terceira Ordem*, que adota uma variação cúbica para os deslocamentos coplanares. Na *HSDT* não é usual introduzir um fator de correção uma vez que assume para as deformações cisalhantes transversais uma distribuição parabólica ao longo da espessura do laminado. Segundo Chugal e Shimpi (2002), Cen et al. (2002), Kulkarni e Bajoria (2003) e Mendonça (2005), esta teoria conduz a distribuições de tensões e deformações cisalhantes transversais ( $\varepsilon_{zx}$ ,  $\varepsilon_{zy}$ ) e normal ( $\varepsilon_{zz}$ ), ao longo da espessura bem próximas das obtidas pela *Teoria da Elasticidade Tridimensional*.

Os campos de deslocamentos da HSDT, com expansão até os termos de terceira ordem para  $u$  e  $v$  e de segunda ordem para  $w$ , é expresso segundo Lo et al. (1977) pelas seguintes equações:

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) + z\psi_x(x, y, t) + z^2\zeta_x(x, y, t) + z^3\Phi_x(x, y, t) \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) + z\psi_y(x, y, t) + z^2\zeta_y(x, y, t) + z^3\Phi_y(x, y, t) \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t) + z\psi_z(x, y, t) + z^2\zeta_z(x, y, t) \end{aligned} \quad (3.3)$$

onde:  $\psi_x$  e  $\psi_y$  são as rotações dos segmentos normais à superfície de referência em torno dos eixos y e x respectivamente, como ilustrado na Fig. 3.2 (D). As funções  $\zeta_x$ ,  $\zeta_y$ ,  $\zeta_z$ ,  $\Phi_x$  e  $\Phi_y$  são funções dependentes apenas das coordenadas (x, y); não apresentam significado físico evidente, mais podem ser vistas como rotações de ordem superior que descrevem a deformação de uma linha normal ao plano de referência (MENDONÇA, 2005). Nestas condições, esta linha não permanece reta depois da deformação, conforme indicado na Fig. 3.2 (D).

Naturalmente, a introdução de seis variáveis na *HSDT* aumenta o custo computacional associado à implementação de modelos baseados nesta teoria. Assim, surgiram vários outros trabalhos, como os de Reddy (1987), que simplifica o campo de deslocamento w, conforme as equações abaixo:

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) + z\psi_x(x, y, t) + z^2\zeta_x(x, y, t) + z^3\Phi_x(x, y, t) \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) + z\psi_y(x, y, t) + z^2\zeta_y(x, y, t) + z^3\Phi_y(x, y, t) \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Segundo este autor, as funções  $\zeta_x$ ,  $\zeta_y$ ,  $\Phi_x$  e  $\Phi_y$  não são arbitrárias, devendo garantir que as tensões cisalhantes transversais se anulem nas superfícies inferior e superior da estrutura composta laminada, ou seja:

$$\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = \left( x, y, \pm \frac{h}{2} \right) = 0 \quad (3.5)$$

Assim, o campo de deslocamentos pode ser simplificado de acordo com as expressões abaixo:

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) + z\psi_x(x, y, t) - c_1 z^3 \left( \psi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) + z\psi_y(x, y, t) - c_1 z^3 \left( \psi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Observando as Eqs.(3.6) e (3.2), nota-se que o campo de deslocamentos da *FSDT* é obtido adotando  $c_1 = 0$ . Segundo Reddy (1987),  $c_1 = 4/(3h^2)$  na *HSDT*.

Observe-se ainda que, na teoria *HSDT* simplificada de Reddy existem no total apenas cinco funções incógnitas:  $u_0$ ,  $v_0$ ,  $w_0$ ,  $\psi_x$  e  $\psi_y$ , ou seja, é a mesma quantidade de incógnitas

da *FSDT*, o que a torna uma teoria bastante atrativa em termos de redução do custo computacional. Porém, existe uma série de restrições do ponto de vista de sua aplicabilidade em modelos de elementos finitos, uma vez que como o termo  $z^3$  envolve derivadas de  $w_0$ , as deformações envolvem também derivadas de  $w_0$ , exigindo o uso de funções com primeiras derivadas contínuas, pertencentes ao espaço  $C^1$ .

A *teoria de Reddy* serviu como ponto de partida para a elaboração de diversas outras teorias de alta ordem em que o campo de deslocamentos não contém derivadas, podendo fazer uso de aproximações no espaço  $C^0$  que são mais adequadas para a modelagem por elementos finitos de estruturas compostas laminadas.

A Figura 3.3 mostra graficamente os resultados numéricos obtidos por Reddy (1987) para a deflexão estática de uma placa composta ortotrópica quadrada formada por lâminas idênticas e simétricas, submetida a um carregamento senoidal. Reddy compara os resultados obtidos pela *Teoria da Elasticidade Tridimensional* com os obtidos pelas teorias de primeira e de terceira ordem para a distribuição da deformação cisalhante transversal  $\gamma_{yz}$  ao longo da espessura do laminado.

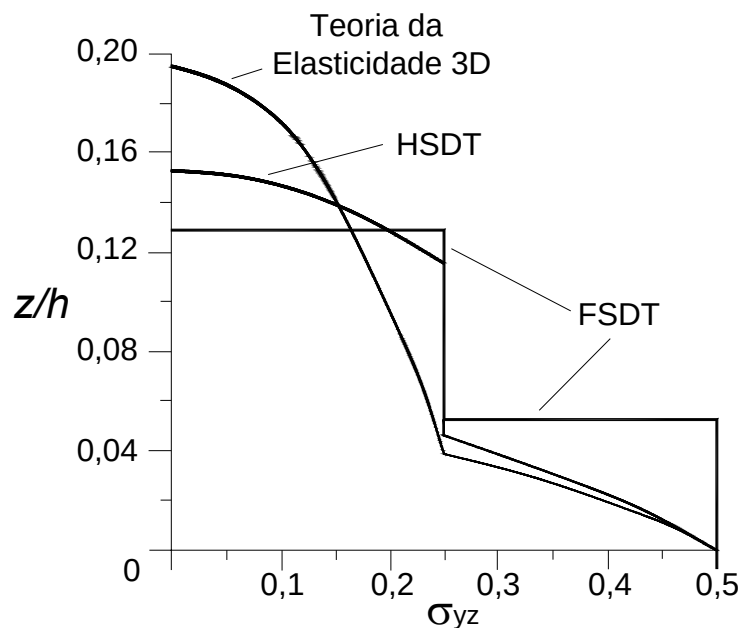


Figura 3.3 - Distribuição típica de tensões cisalhantes  $\sigma_{yz}$  ao longo da espessura, para uma placa laminada quadrada  $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$  sob carga senoidal com relação largura/altura igual a 10 (Adaptado de Mendonça, 2005).

Nota-se, pela Figura 3.3, que mesmo na *HSDT de Reddy* as tensões cisalhantes transversais são erroneamente descontínuas, embora sejam parabólicas ao longo da

espessura de cada lâmina, segundo Mendonça, 2005. A ausência da deformação normal  $\varepsilon_{zz}$  e da tensão normal  $\sigma_{zz}$  na *HSDT de Reddy*, afeta o balanço de forças e impede a correta satisfação das equações de equilíbrio, gerando as descontinuidades das tensões  $\sigma_{yz}$  e  $\sigma_{xz}$ , além de afetar os deslocamentos transversais (MENDONÇA, 2005).

Embora a *HSDT de Reddy* seja a que mais se aproxima dos resultados obtidos pela *Teoria da Elasticidade Tridimensional*, ela não é completamente satisfatória, o que sugere o uso do campo de deslocamentos *HSDT de Lo et al.* apresentado na Eq.(3.3).

Segundo Reddy (2004), quando a ênfase principal do estudo é a determinação da resposta global dos componentes laminados, por exemplo, deflexões, carregamentos críticos de flambagem, frequências fundamentais de vibração, e os modos de forma associados, então, o comportamento global poderá ser determinado de forma bastante precisa usando as *teorias de Camada Equivalente Única*. Por outro lado, quando o objetivo da análise é identificar a localização das regiões mais críticas do material composto, como por exemplo as regiões prováveis da ocorrência de dano, recomenda-se o uso das *teorias baseadas em Camadas Equivalentes*, detalhadas na próxima seção.

### 3.3 Teoria das Camadas Equivalentes Discretas

Do equilíbrio das forças interlaminares ilustrado na Fig. 3.5, seguem as seguintes condições de continuidade dos campos de tensões nas interfaces de duas camadas adjacentes, dadas pela Eq.(3.7).

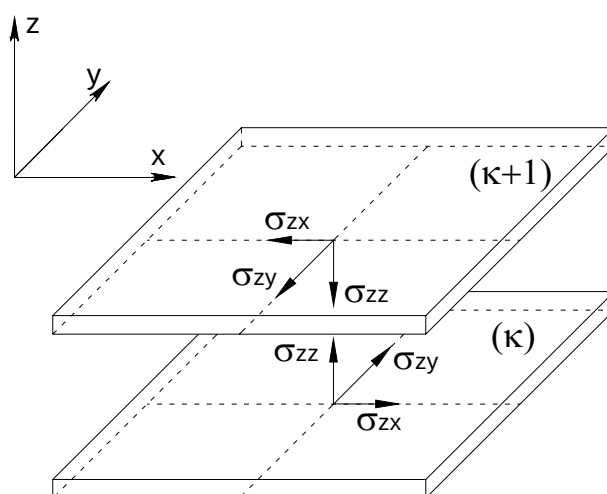


Figura 3.5 - Equilíbrio das tensões interlaminares das camadas k e k+1, adaptado de Reddy (1997).

$$\begin{aligned}
 \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} &\neq \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}^{(k+1)} \\
 \begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zz} \end{Bmatrix}^{(k)} &= \begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zz} \end{Bmatrix}^{(k+1)}
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Além das condições expressas na Eq.(3.7), os campos de deformações e de deslocamentos das camadas adjacentes  $k$  e  $k+1$  devem satisfazer as seguintes condições:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}^{(k+1)} \tag{3.8-a}$$

$$\begin{aligned}
 \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \\ \varepsilon_{zz} \end{Bmatrix}^{(k)} &\neq \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \\ \varepsilon_{zz} \end{Bmatrix}^{(k+1)} \\
 \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}^{(k)} &= \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}^{(k+1)}
 \end{aligned} \tag{3.8-b}$$

Segundo Reddy (1997), em todas as teorias laminadas de camada equivalente única, os deslocamentos devem ser funções contínuas ao longo da coordenada da espessura do laminado. Logo, as deformações transversais também são contínuas e as deformações no plano da placa, por sua vez, são descontínuas, contrariando o que realmente ocorre às condições impostas pela mecânica do contínuo e que é expresso na Eq. (3.8-a). Resulta que, nestas teorias, as tensões transversais atuantes nas interfaces entre duas camadas adjacentes são descontínuas, ou seja:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zz} \end{Bmatrix}^{(k)} \neq \begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zz} \end{Bmatrix}^{(k+1)} \tag{3.9}$$

Segundo Reddy, para laminados finos o erro devido à descontinuidade das tensões interlaminares pode ser negligenciado. Porém, para laminados espessos, a *Teoria da*

*Camada Equivalente Única* gera previsões errôneas em todas as tensões e requer o uso da *Teoria das Camadas Equivalentes Discretas*.

As *Teorias das Camadas Equivalentes Discretas* são desenvolvidas de forma que os campos de deslocamentos exibam apenas funções  $C^0$ , ou seja, para que os deslocamentos sejam contínuos através da espessura  $z$  do laminado. Porém, as derivadas dos deslocamentos em relação à coordenada na direção da espessura podem ser descontínuas para vários pontos através da espessura da placa, permitindo assim a continuidade das tensões transversais das interfaces entre camadas adjacentes.

A *Teoria das Camadas Equivalentes Discretas* pode ser subdividida em duas classes:

(1) *Teoria das Camadas Equivalentes Parcial (partial layerwise theory)*, que usa a expansão em camadas equivalentes apenas para as componentes  $u$  e  $v$  dos deslocamentos planos;

(2) *Teoria das Camadas Equivalentes Total (full layerwise theory)*, que usa a expansão em camadas para todas as três componentes de deslocamento  $u$ ,  $v$  e  $w$ .

Comparada com a *Teoria da Camada Equivalente Única*, a *Teoria das Camadas Equivalentes Parcial* promove uma descrição mais realista da cinemática do composto laminado pela introdução das deformações de cisalhamento transversais ( $\gamma_{xz}$ ,  $\gamma_{yz}$ ) nas camadas discretas. A *Teoria das Camadas Equivalentes Total* acrescenta as deformações de cisalhamento transversais ( $\gamma_{xz}$ ,  $\gamma_{yz}$ ) e a deformação normal transversal ( $\varepsilon_{zz}$ ) nas camadas discretas (LEE, 2001).

Segundo Reddy (1997), o uso das teorias das camadas equivalentes para a análise de placas compostas finas e espessas é amplamente aceito. Ambas teorias representam o comportamento zig-zag dos deslocamentos planos ( $u$ ,  $v$ ) através da espessura da casca ou placa, conforme ilustrado na Fig. 3.6. Este comportamento zig-zag pode ser visto nas soluções exatas 3-D da Teoria da Elasticidade, sendo muito mais evidente em laminados espessos, onde as deformações de cisalhamento transversais mudam abruptamente através da espessura.

A *Teoria das Camadas Equivalentes Parcial*, conforme o número de incógnitas do modelo cinemático, pode ser subclassificada em duas categorias distintas:

(a) *Teoria das Camadas Equivalentes Parciais Dependentes*.

(b) *Teoria das Camadas Equivalentes Parciais Independentes*.

Na *Teoria das Camadas Equivalentes Parciais Dependentes*, o número de incógnitas do modelo depende do número de camadas da placa ou casca, e devido a esta dependência, são teorias computacionalmente ineficientes. Já na *Teoria das Camadas Equivalentes Parciais Independentes*, o número de incógnitas do modelo não depende do número de camadas.

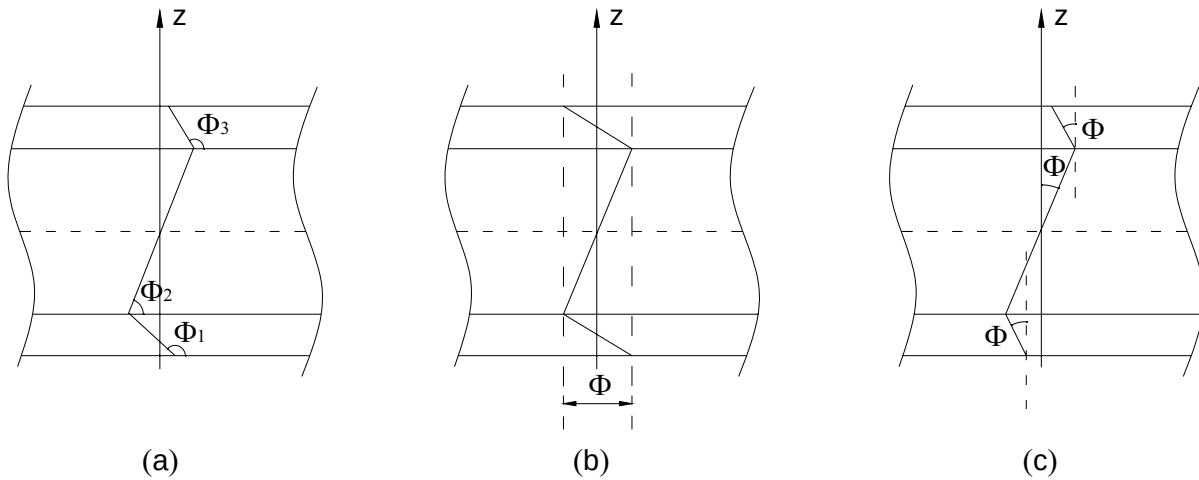


Figura 3.6 - Funções Zig-zag  $\Phi$  através da espessura de uma placa composta laminada de três camadas (adaptado de Di e Rothert, 1995).

A Figura 3.6 ilustra as três diferentes concepções possíveis para variação da função linear zig-zag através da espessura do laminado. Em (a) cada camada da placa possui rotações independentes, em (b) porém, o parâmetro  $\Phi$  é definido de modo que a seção transversal de cada camada possui a mesma projeção no plano x-y; já em (c) o parâmetro  $\Phi$  é definido como a rotação da camada perpendicular ao eixo transversal z em relação a esse próprio eixo. A concepção apresentada em (a) não é recomendada, visto que o número de rotações aumenta com o aumento do número de camadas; já as concepções (b) e (c) são equivalentes, mas no caso em que as espessuras das camadas são muito diferentes a concepção (c) é mais apropriada porque o parâmetro  $\Phi$  reflete a influência das espessuras das várias camadas (Di e Rothert, 1995).

A *Teoria das Camadas Equivalentes Parciais Independentes*, conforme a ordem da teoria da deformação cisalhante utilizada em sua formulação, pode ser subdividida em duas subclasses.

A primeira subclasse, conhecida como *Teoria das Camadas Equivalentes Parciais Zig-zag de Primeira Ordem* usa uma função linear por partes (*piecewise linear function*), que é superposta ao campo de deslocamentos linear considerado (Fig. 3.6). Esta teoria subdivide o laminado em  $(N - 1)$  camadas discretas e pode ser reduzida à *Teoria da Camada Equivalente Única* quando a casca ou placa é modelada por apenas duas camadas.

Os campos de deslocamentos da *Teoria das Camadas Equivalentes Parciais Zig-zag de Primeira Ordem* desenvolvida por Di e Bending (1986) é expresso sob a forma:

$$\begin{aligned}
u_i(x_j, x_3, t) &= u_i^0(x_j, t) - x_3 u_{3,i}^0(x_j, t) + f_{i\gamma}(x_3) \Phi_\gamma(x_j, t) \\
u_3(x_j, x_3, t) &= u_3^0(x_j, t)
\end{aligned} \tag{3.10}$$

onde:  $i$  e  $j$  assumem os valores de 1 e 2, e  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$  e  $x_3 = z$ . As funções  $f_{i\gamma}$  e  $\Phi_\gamma$  são determinadas de maneira que os deslocamentos e as tensões transversais são contínuas nas interfaces das camadas. As funções  $f_{i\gamma}$  são dependentes apenas de  $x_3$  e das espessuras das camadas. Como consequência, esta teoria em camadas equivalentes parcial contém somente cinco variáveis desconhecidas, como na *FSDT* ou *HSDT de Reddy*.

Devido à baixa ordem assumida para o campo de deslocamentos na teoria zig-zag de primeira ordem as tensões cisalhantes transversais são constantes ao longo da espessura do laminado. Segundo Reddy (1997), melhorias do modelo foram proposto pelo próprio Di Sciuva em 1992, por Bhaskar e Varadan (1989), Lee e Liu (1991) e Cho e Parmerter (1993). Estes autores consideraram que as deformações cisalhantes ( $\gamma_{xz}$ ,  $\gamma_{yz}$ ) variam parabolicamente através da espessura das camadas do laminado e que são, como na condição real, descontínuas através das interfaces dessas camadas. Portanto, essa teoria que superpõe uma variação cúbica ao campo linear de deslocamentos, constitui a segunda subclasse da *Teoria das Camadas Equivalentes Parciais Independentes*, e é conhecida como *Teoria das Camadas Equivalentes de Terceira Ordem Zig-zag*.

Porém, como no modelo *FSDT* citado por Reddy (1997), em ambas as subclasses das *Teorias das Camadas Equivalentes Discretas*, as tensões cisalhantes são nulas nas superfícies superiores e inferiores do laminado, o que exige a utilização de funções do tipo  $C^1$ .

Segundo Reddy (1997), como a *Teoria das Camadas Equivalentes Parciais* negligencia a deformação normal transversal ( $\varepsilon_{zz}$ ), ela não é capaz de representar precisamente as tensões interlaminares nas proximidades de furos ou entalhes, a tração das bordas livres ou delaminações. Na modelagem destes efeitos localizados, a contribuição da tensão normal transversal nessas regiões é significativa. Portanto, nesse tipo de estudo, uma excelente alternativa é o uso da *Teoria das Camadas Equivalentes Totais* que inclui os efeitos da tensão normal e das tensões cisalhantes transversais.

Segundo Reddy (1997), o campo de deslocamentos mecânicos da *Teoria das Camadas Equivalentes Totais*, para a  $k$ -ésima camada é expresso como:

$$\begin{aligned}
u^k(x, y, z, t) &= \sum_{j=1}^{m-1} u_j^k(x, y, t) \phi_j^k(z) \\
v^k(x, y, z, t) &= \sum_{j=1}^{m-1} v_j^k(x, y, t) \phi_j^k(z) \\
w^k(x, y, z, t) &= \sum_{j=1}^{m-1} w_j^k(x, y, t) \Psi_j^k(z)
\end{aligned} \tag{3.11}$$

onde:  $u^k$ ,  $v^k$  e  $w^k$  representam as componentes de deslocamentos nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente, de um ponto material do laminado, e  $\phi_j^k(z)$  e  $\Psi_j^k(z)$  são funções contínuas de  $z$ . Em geral  $\phi_j^k(z) \neq \Psi_j^k(z)$  e são detalhadas por Reddy (1997).

A seguir, na próxima seção, a *Teoria Mista*, muito utilizada para a modelagem de estruturas compostas laminadas inteligentes, será estudada.

### 3.4 Teoria Mista

A *Teoria Mista* considera o campo de deslocamentos mecânicos concebido de forma condensada em uma única camada equivalente e o potencial elétrico distribuído por camadas.

A Figura 3.7 apresenta a seção típica de uma casca composta, formada por sete camadas, sendo três delas constituídas de materiais piezoelétricos. Nesta modelagem, como ilustrado em (C), o campo de deslocamento elétrico é discretizado de acordo com a estratificação. Tanto em (A) e quanto em (B), o campo de deslocamentos mecânicos da casca é discretizado em uma camada única equivalente, sendo que (A) usa a *FSDT* e (B) a *HSDT* para este fim.

A *Teoria Mista* aplicada a cascas e placas compostas inteligentes finas e espessas pode adotar as aproximações de baixa ordem da *FSDT* ou de alta ordem da *HSDT* para o campo de deslocamentos mecânicos, conforme ilustrado na Fig. 3.7(A) e Fig.3.7(B) respectivamente.

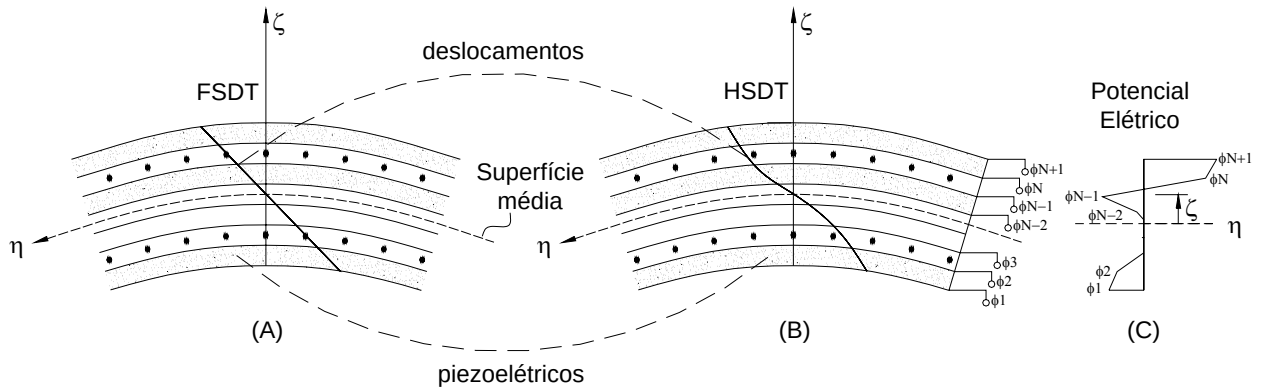


Figura 3.7 - Seção de uma casca composta modelada pela *Teoria Mista*, com representação do campo de deslocamento elétrico (C) e mecânico (A, B) em camadas equivalentes discretas e simples, respectivamente.

Uma das principais vantagens da *Teoria Mista* é que ela supera a desvantagem do elevado custo computacional apresentado pelas teorias das camadas equivalentes discretas na modelagem dos deslocamentos mecânicos. Além disso, por representar as variáveis elétricas definidas segundo a estratificação, permite a acomodação de diversos atuadores e sensores e a captura da heterogeneidade elétrica que é induzida pelas camadas piezoelétricas embutidas no composto ao longo da espessura.

A discretização das variáveis elétricas por camadas é feita através da subdivisão do laminado em lâminas (ou camadas discretas) controladas de acordo com a configuração das camadas piezoelétricas. O potencial elétrico é assumido contínuo em cada camada discreta, o que resulta em uma variação do tipo  $C^0$  através da espessura.

Na *Teoria Mista*, o campo de deslocamentos mecânicos pode ser dos tipos *FSDT* ou *HSDT*, sendo acrescentada a seguinte aproximação para o potencial elétrico:

$$\phi(x, y, z, t) = \sum_{j=1}^{ncamadas+1} L_j(z) \phi_j(x, y, t) \quad (3.12)$$

onde:  $\phi_j$  designa o potencial elétrico de cada interface das camadas ao longo da espessura do composto, o subscrito  $j$  diz respeito às interfaces (incluindo as faces superior e inferior do estratificado) e  $L_j$  são funções de interpolação Lagrangeanas detalhadas no sexto capítulo.

### 3.5 Definição das relações deslocamento-deformação das placas

Considerando que as relações entre deslocamentos e deformações das placas estão dentro do campo da elasticidade linear, e que as deformações e deslocamentos são pequenos, então as deformações mecânicas são definidas em termos das formas diferenciais dos deslocamentos mecânicos expressas na Eq.(3.13) e definidas por Reddy (1997).

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_1 = \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} \\
 \varepsilon_2 = \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\
 \varepsilon_3 = \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} \\
 2\varepsilon_4 = \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\
 2\varepsilon_5 = \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \\
 2\varepsilon_6 = \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

Substituindo a Eq.(3.3) na equação anterior e organizando as equações resultantes, as relações entre as deformações e os deslocamentos mecânicos usando o campo de deslocamento da *HSDT* no sistema de coordenadas cartesianas são expressas como:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_1 &= \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) + z \left( \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \right) + z^2 \left( \frac{\partial \zeta_1}{\partial x} \right) + z^3 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \\
 \varepsilon_2 &= \left( \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) + z \left( \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \right) + z^2 \left( \frac{\partial \zeta_2}{\partial y} \right) + z^3 \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \\
 \varepsilon_3 &= \psi_3 + 2 \cdot z \cdot \zeta_3 \\
 \gamma_{12} &= \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + z \left( \frac{\partial \psi_1}{\partial y} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \right) + z^2 \left( \frac{\partial \zeta_1}{\partial y} + \frac{\partial \zeta_2}{\partial x} \right) + z^3 \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} \right) \\
 \gamma_{13} &= \left( \psi_1 + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) + z \left( 2 \cdot \zeta_1 + \frac{\partial \psi_3}{\partial x} \right) + z^2 \left( 3 \cdot \Phi_1 + \frac{\partial \zeta_3}{\partial x} \right) \\
 \gamma_{23} &= \left( \psi_2 + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) + z \left( 2 \cdot \zeta_2 + \frac{\partial \psi_3}{\partial y} \right) + z^2 \left( 3 \cdot \Phi_2 + \frac{\partial \zeta_3}{\partial y} \right)
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

A expressão da relação deformação-deslocamento usando o campo de deslocamento da *FSDT* é expressa pela Eq.(3.15) e é obtida anulando os termos de segundo e terceiro grau ( $z^2, z^3$ ) e a deformação transversal na direção de  $z$  ( $\varepsilon_{zz}$ ) da Eq.(3.14).

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_1 &= \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) + z \left( \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \right) \\
 \varepsilon_2 &= \left( \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) + z \left( \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \right) \\
 \varepsilon_3 &= 0 \\
 \gamma_{12} &= \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + z \left( \frac{\partial \psi_1}{\partial y} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \right) \\
 \gamma_{13} &= \left( \psi_1 + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \\
 \gamma_{23} &= \left( \psi_2 + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

A relação deformação-deslocamento usando o campo de deslocamentos da *CLT* é expressa pela Eq.(3.16), sendo obtida anulando os termos de primeiro, segundo e terceiro grau ( $z, z^2, z^3$ ) e a deformação transversal na direção de  $z$  ( $\varepsilon_{zz}$ ) da Eq.(3.14).

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_1 &= \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) - z w_{0,xx} \\
 \varepsilon_2 &= \left( \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) - z w_{0,yy} \\
 \varepsilon_3 &= 0 \\
 \gamma_{12} &= \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - 2z w_{0,xy} \\
 \gamma_{13} &= 0 \\
 \gamma_{23} &= 0
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

### 3.6 Definição dos campos de deslocamentos elétricos das placas

Para as placas, segundo Hwang e Park (1993) os campos elétricos são simplesmente o gradiente negativo do potencial elétrico, como mostrado a seguir, sendo  $i = 1, 2$  e  $3$ .

$$E_i = -\phi_{,i} \quad (3.17)$$

Expandindo a Eq.(3.17) tem-se a expressão dos campos elétricos das placas em coordenadas cartesianas:

$$\begin{aligned} E_1 &= -\frac{\partial \phi}{\partial x} \\ E_2 &= -\frac{\partial \phi}{\partial y} \\ E_3 &= -\frac{\partial \phi}{\partial z} \end{aligned} \quad (3.18)$$

O ANEXO I apresenta um breve resumo comparativo entre as principais teorias empregadas na modelagem de estruturas estratificadas.

# **CAPÍTULO IV**

## **FUNDAMENTOS DA PIEZOELETRICIDADE LINEAR**

Este capítulo é dedicado aos materiais piezoelétricos utilizados em estruturas inteligentes. Apresenta-se inicialmente um breve histórico da piezoelectricidade, tipos e características de alguns dos principais materiais piezoelétricos. Seguem as equações constitutivas acopladas que relacionam os comportamentos elétrico e mecânico. A penúltima seção aborda a influência da estrutura cristalina dos materiais piezoelétricos sobre o seu comportamento e a última seção descreve o procedimento para consideração de rotações geométricas dos materiais piezoelétricos nas equações constitutivas acopladas.

### **4.1 Histórico da piezoelectricidade**

De acordo com Piefort (2001), séculos atrás os nativos de Ceilão vislumbravam uma propriedade peculiar dos cristais de turmalina: quando atirados ao fogo estes cristais se atraíam e se repeliam. Através dos comerciantes alemães, este experimento pôde ser repedido na Europa no século XVIII e a turmalina então recebeu o nome de imã do Ceilão.

Em 1756, o físico germânico Aepinus, inventor do capacitor elétrico, observou nos cristais de turmalina a presença de uma polarização elétrica (distribuição de cargas elétricas) quando eram submetidos a variações de temperatura. Este comportamento foi chamado de piroelectricidade pelo físico escocês D. Brewster em 1824. O efeito piroelétrico é definido como a polarização elétrica induzida pela absorção de energia térmica, sendo esta polarização proporcional à variação da temperatura. De menor amplitude, a propriedade inversa é chamada de efeito eletrocalórico.

O efeito piezoelétrico direto consiste da habilidade que certos materiais possuem para gerar uma carga elétrica proporcionalmente à força externa aplicada. Este efeito foi inicialmente mencionado pelo mineralogista francês René Just Haüy por volta de 1817,

observando a presença de cargas elétricas na superfície de um cristal de turmalina tensionado. Mas somente em 1880 os irmãos Curie publicaram o primeiro trabalho descrevendo o efeito piezoelétrico direto, ou seja, a conversão da energia mecânica em energia elétrica em cristais. No ano seguinte, confirmaram experimentalmente as previsões de Lippmann, que utilizou considerações termodinâmicas para a previsão do efeito piezoelétrico inverso, no qual um campo elétrico externo induz uma deformação no material piezoelétrico, havendo a conversão da energia elétrica em energia mecânica.

Uma das primeiras aplicações da piezoelectricidade foi também realizada pelos irmãos Curie que construíram aparelhos de medição de pequenas correntes elétricas que auxiliaram Pierre e sua esposa, Marie Sklodowska Curie, na descoberta dos elementos químicos Rádio e Polônio.

A primeira aplicação fora dos laboratórios apareceu somente durante a Primeira Guerra Mundial em 1917 e foi realizada por Langevin, um ex-aluno de Pierre Curie. Langevin utilizou o quartzo para a produção de ondas ultra-sônicas e foi o precursor do primeiro sonar (*Sound Navigation Ranging*).

Na década de 1920, o físico norte americano Cady propôs o uso do quartzo para controlar a frequência de ressonância de osciladores (PIEFORT, 2001).

No período posterior à Segunda Guerra Mundial ocorreu o desenvolvimento da maioria das aplicações piezoelétricas com as quais estamos familiarizados (microfones, transdutores ultrasônicos, acelerômetros, sonares, etc.). Porém, os materiais disponíveis naquele tempo apresentavam desempenho limitado. O desenvolvimento da eletrônica, especialmente durante a Segunda Guerra Mundial, possibilitou a descoberta das cerâmicas ferroelétricas, difundindo o uso dos materiais piezoelétricos.

Os materiais piezoelétricos podem ser divididos em duas classes: *monocristais* (cristais e filmes finos) e *policristais* (cerâmicas e polímeros).

Cristais piezoelétricos são os mais utilizados para aplicações como osciladores e componentes que funcionam com ondas acústicas de superfície. Como principais vantagens destacam-se suas altas temperaturas de operação, relativamente alta estabilidade térmica (pequenas alterações de suas propriedades piezoelétricas em função da temperatura) e alto fator de qualidade mecânico.

Arthur Von Hiffel produziu na década de 40 o primeiro material piezoelétrico sintético após polarizar o *titanato de bário* ( $BaTiO_3$ ) pela aplicação de um campo elétrico. O desenvolvimento deste material piezoelétrico cerâmico levou ao desenvolvimento na década de 50 da melhor piezocerâmica conhecida, o *zirconato titanato de chumbo* (PZT), que desenvolvem deformações recuperáveis da ordem de 0,1%, trabalham em uma larga faixa de frequências quando usados como atuadores e/ou sensores, incluindo faixas ultra-

sônicas, e apresentam coeficientes piezoelétricos relativamente altos, o que resulta em uma elevada capacidade de conversão de energia mecânica em energia elétrica e vice-versa (VAUGHAN, 2001). Trata-se do material cerâmico piezoelétrico mais facilmente encontrado no mercado.

Os materiais cerâmicos policristalinos apresentam as seguintes vantagens: processo de obtenção mais barato, possibilidade de serem fabricados em uma grande variedade de composições permitindo o controle e alteração de suas propriedades físicas, e a possibilidade de serem produzidos numa maior variedade de geometrias. Como desvantagens destacam-se a maior dependência de suas propriedades eletromecânicas com a temperatura, a formação de fases não desejadas durante sua produção (o que pode alterar suas propriedades), e a variação de suas propriedades com o tempo (envelhecimento).

Os piezocerâmicos, quando em seu estado inicial de produção, são isotrópicos e não apresentam uma orientação espontânea da polarização em nível macroscópico. Para serem utilizadas como elementos piezoelétricos elas devem ser polarizadas sob a aplicação de altos campos elétricos, na ordem de alguns KV/mm, em uma direção de polarização escolhida. Tornam-se assim anisotrópicas.

Uma das limitações de operação mais importantes das cerâmicas piezoelétricas é o fato que para temperaturas superiores a um certo valor limite, denominado, temperatura de Curie, o material perde a polarização e, em consequência, suas propriedades piezoelétricas. Da mesma forma, quando o material é submetido a um campo elétrico de intensidade superior a um certo valor limite, chamado campo coercitivo, de sentido oposto ao campo elétrico aplicado durante a fabricação do material, ocorre a despolarização. Os valores da temperatura de Curie e do campo coercivo depende do tipo específico de cerâmica piezoelétrica e são fornecidos pelo fabricante.

Além dos materiais piezoelétricos cerâmicos, polímeros piezoelétricos como o *fluoreto de polivinilideno (PVDF)* são amplamente utilizados nos dias atuais. Sua descoberta remonta ao final dos anos 1960 e foi feita pelo físico Kawai, sendo somente comercializado a partir da década de 1980. Piezopolímeros são usados principalmente como sensores e o melhor piezopolímero conhecido é o *PVDF*.

Piezopolímeros, como o *PVDF*, possuem baixa densidade e flexibilidade. Por outro lado, apresentam desvantagens, como a dificuldade de serem polarizados e a baixa constante dielétrica que, combinada com a pequena espessura, dificulta a construção de circuitos de detecção (devido à baixa capacitância).

Embora as primeiras aplicações dos materiais piezoelétricos tenham sido realizadas utilizando cristais, particularmente o quartzo, o maior crescimento do número de aplicações

ocorreu a partir do descobrimento dos piezoelétricos cerâmicos baseados nos *PZTs*. Desde então as piezocerâmicas são utilizadas em numerosas aplicações, dentre as quais podem ser citadas:

- transdutores ultrassônicos utilizados para exames médicos baseados em imagens, ensaios de inspeção não-destrutivos, usinagem de precisão e limpeza de superfícies;
- ignitores domésticos e industriais;
- acelerômetros, sensores de contato, transdutores de força, medidores de pressão;
- motores e micro-bombas.

Novas aplicações continuam a ser desenvolvidas. A título de exemplo, um transportador vibratório com acionamento piezoelétrico foi recentemente proposto por Albuquerque (2004).

Uma das utilizações mais freqüentes dos materiais piezoelétricos é na concepção de sensores e atuadores em sistemas mecânicos adaptativos, também conhecidos como estruturas inteligentes. Estas estruturas são capazes de captar alterações ambientais ou operacionais e se adaptar automaticamente visando assegurar condições satisfatórias de operação.

No contexto das estruturas inteligentes, sistemas de controle de vibrações, de ruído e de forma baseados em sensores e atuadores piezoelétricos têm sido amplamente estudados (BEVAN, 1998; SANTANA, 2003; MOITA et al., 2004), devido à possibilidade que os materiais piezoelétricos oferecem de combinar grande capacidade de sensoriamento, controle e pouca intrusividade. Uma parte significativa das aplicações reportadas dizem respeito a estruturas aeroespaciais, nas quais são utilizados materiais de alto desempenho e, em particular, materiais compostos.

Na próxima seção, os efeitos mecânicos, elétricos e piezoelétricos são descritos individualmente, e em seguida, são combinados para se obter as equações constitutivas acopladas. A estrutura cristalina é brevemente mencionada, bem como a equação constitutiva geral que inclui a rotação material.

## 4.2 Equações constitutivas da piezoeletricidade linear

A tensão mecânica  $\sigma_{ij}$  e a deformação mecânica  $\varepsilon_{kl}$  são relacionadas com o tensor de rigidez  $C_{ijkl}$  através da *lei de Hooke* da elasticidade linear, expressa em notação indicial sob a forma:

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (4.1)$$

onde:  $i, j, k, l$  assumem os valores 1, 2 e 3.

Pela simetria do tensor de tensões, suas nove componentes são reduzidas para seis componentes independentes e a notação tensorial é contraída da seguinte maneira:

|                    |      |      |      |          |          |          |
|--------------------|------|------|------|----------|----------|----------|
| Índices do tensor: | (11) | (22) | (33) | (23, 32) | (13, 31) | (12, 21) |
| Índice contraído:  | (1)  | (2)  | (3)  | (4)      | (5)      | (6)      |

De forma análoga, a notação do tensor de tensões em função de coordenadas  $x, y$  e  $z$ , que é mais familiar, torna-se:

$$\{\sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{zz} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx} \quad \tau_{xy}\}^T = \{\sigma_1 \quad \sigma_2 \quad \sigma_3 \quad \sigma_4 \quad \sigma_5 \quad \sigma_6\}^T \quad (4.2)$$

onde: o sobrescrito  $()^T$  indica a operação de transposição.

O tensor deformação da Eq.(4.1) é o chamado *tensor de deformação infinitesimal de Cauchy* sendo definido segundo:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right] \quad (4.3)$$

De forma similar à representação (4.2), a notação contraída do tensor deformação é a seguinte:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{zx} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (4.4)$$

A *lei de Hooke* é reescrita utilizando a forma contraída dos tensores de tensão e de deformação e o tensor  $c_{ijkl}$  de quarta ordem da Eq.(4.1) é reduzido a um tensor de segunda ordem  $c_{ij}$ :

$$\sigma_i = c_{ij} \varepsilon_j \quad (4.5)$$

onde:  $i, j = 1, 2, \dots, 6$ .

Um material que pode ser polarizado sob um campo elétrico é chamado material dielétrico e também é conhecido como isolante elétrico. Dentre as formas possíveis de se obter a polarização, a que se aplica aos materiais piezoelétricos industriais é o mecanismo de *reorientação dos dipolos*, quando um campo elétrico aplicado causa uma reorientação das moléculas do dielétrico, induzindo uma polarização global. Um material macroscópico pode ser composto por várias moléculas polarizadas, distribuídas aleatoriamente e no conjunto este material é neutro. Em uma estrutura molecular polar, o fenômeno de polarização consiste no alinhamento dos dipolos de suas moléculas, e numa estrutura apolar consiste na criação e no subsequente alinhamento dos dipolos.

A distribuição aleatória dos dipolos de um dielétrico eletricamente neutro é desfeita com a polarização, ocorrendo uma separação do centro das cargas elétricas positivas do centro das cargas negativas. Assim, no dielétrico ocorre a *indução de momentos dipolos*, também conhecidos como simplesmente *dipolo elétrico*.

O vetor polarização  $P_i$  é definido como a densidade volumétrica dos momentos dipolos elétricos induzidos  $p$  conforme expresso segundo:

$$P_i = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=1}^N p_k^i}{\Delta V} \quad (4.6)$$

onde:  $N$  é o número de dipolos elétricos encerrados no volume  $v$  do material dielétrico,  $i = 1, 2, 3$ .

Segundo Chee (2000), quando o material dielétrico é polarizado, os dipolos elétricos alinhados produzem uma densidade de carga volumétrica equivalente  $\rho_p$  que afeta o campo elétrico. A densidade de carga volumétrica pode ser relacionada com a polarização conforme a expressão:

$$\rho_p = -P_{i,i} \quad (4.7)$$

onde, de acordo com a *convenção de soma de Einstein*, em que presença dos índices repetidos  $i,i$  indica a existência de um somatório de  $i = 1$  a  $3$ . A virgula ( , ) indica a derivação de  $P_i$  com relação a coordenada  $x_i$ .

A relação anterior leva à seguinte definição do chamado deslocamento elétrico  $D_i$ , (NYE, 1969):

$$D_i = \chi_0 E_j + P_i \quad (4.8)$$

onde:  $E_j$  é definido como o vetor campo elétrico, sendo que  $j = 1, 2, 3$ .

A relação entre o campo elétrico  $E_j$  e o vetor polarização  $P_i$  é admitida linear e é estabelecida por meio do tensor constante  $K_{ij}$  conforme a expressão:

$$P_i = \chi_0 K_{ij} E_j \quad (4.9)$$

onde:  $i, j = 1, 2, 3$ .

Substituindo a Eq.(4.9) na Eq.(4.8) resulta:

$$D_i = \chi_0 (1 + K_{ij}) E_j = \chi_{ij} E_j \quad (4.10)$$

onde:  $i, j = 1, 2, 3$ ,  $\chi_0$  é a *constante de permissividade elétrica* no vácuo, igual à  $8.854 \times 10^{-12}$  F/m, e o tensor  $\chi_{ij}$  é conhecido como tensor de permissividade elétrica.

O tensor  $\chi_{ij}$  é um tensor simétrico, e para os materiais anisotrópicos apresenta 6 variáveis independentes.

Por definição, o *efeito piezoelétrico direto* é um fenômeno decorrente do desenvolvimento de uma polarização causada pela deformação mecânica do material dielétrico. O efeito direto pode ser formulado como uma relação linear na qual cada um dos componentes da polarização  $P_i$  é dado por uma combinação linear das 9 componentes do tensor tensão  $\sigma_{jk}$  (NYE, 1969). Estes dois tensores são relacionados pelo *tensor de coeficientes piezoelétricos*  $d_{ijk}$ , que é um tensor de terceira ordem, de acordo com a relação:

$$P_i = d_{ijk} \sigma_{jk} \quad (4.11-a)$$

onde:  $i, j, k = 1, 2, 3$ .

Devido à simetria do material, existem apenas dezoito componentes independentes no tensor  $d_{ijk}$ . Assim, utilizando a notação simplificada pode-se reescrever a Eq.(4.11-a) na seguinte forma:

$$P_i = d_{il}\sigma_l \quad (4.11-b)$$

com  $i = 1, 2, 3$  ;  $l = 1, 2, \dots 6$ .

O tensor de coeficientes piezoelétricos  $d_{il}$  pode ser exposto sob a forma:

$$d_{il} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} & d_{16} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} & d_{26} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} & d_{35} & d_{36} \end{bmatrix} \quad (4.11-c)$$

Quando a polarização é devida somente às tensões mecânicas, então o deslocamento elétrico pode ser escrito para o *efeito piezoelétrico direto* como:

$$D_i = d_{ijk}\sigma_{jk} \quad (4.12-a)$$

com:  $i, j, k = 1, 2, 3$ .

Ou, da forma contraída:

$$D_i = d_{il}\sigma_l \quad (4.12-b)$$

com:  $i = 1, 2, 3$  e  $l = 1, 2, \dots 6$ .

Quando um campo elétrico é aplicado ao material dielétrico, causando mudanças de dimensões e/ou de formas geométricas, este fenômeno é conhecido como *efeito piezoelétrico inverso*. Sua existência é uma consequência termodinâmica do efeito piezoelétrico direto. Este efeito é formulado por uma relação linear entre o vetor campo elétrico  $E_i$  e o *tensor deformação mecânica*  $\varepsilon_{jk}$  usando as *constantes piezoelétricas* ( $d_{ijk}$ ):

$$\varepsilon_{jk} = d_{ijk}E_i \quad (4.13-a)$$

com:  $i, j, k = 1, 2, 3$ .

Ou na forma contraída:

$$\varepsilon_l = d_{il}E_i \quad (4.13-b)$$

onde:  $i = 1, 2, 3$  e  $l = 1, 2, \dots 6$ .

Note-se que a ordem dos índices apresentados na Eq.(4.13-b) indicam que nesta expressão o tensor coeficientes piezoelétricos é o transposto do tensor de coeficientes piezoelétricos que aparece na Eq.(4.12-b). Assim, em (4.12-b), o coeficiente piezoelétrico  $d_{ij}$  representa o deslocamento elétrico na direção  $i$  criado pela tensão unitária aplicada na direção  $j$ , ao passo que, na Eq.(4.13-b), o coeficiente  $d_{ij}$  representa a deformação gerada na direção  $j$  devido a um campo elétrico unitário aplicado na direção  $i$ .

A forma esquemática apresentada pela Fig. 4.1 sumariza as equações piezoelétricas na notação matricial. Horizontalmente, a figura fornece o efeito piezoelétrico direto e verticalmente o efeito inverso.

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} \downarrow \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{array} \quad \begin{array}{c} \rightarrow \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{array} \quad \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{cccccc} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} & d_{16} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} & d_{26} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} & d_{35} & d_{36} \end{array} \right] \end{array} \quad \begin{array}{c} \varepsilon_1 \quad \varepsilon_2 \quad \varepsilon_3 \quad \varepsilon_4 \quad \varepsilon_5 \quad \varepsilon_6 \\ \sigma_1 \quad \sigma_2 \quad \sigma_3 \quad \sigma_4 \quad \sigma_5 \quad \sigma_6 \end{array}
 \end{array}$$

Figura 4.1 - Resumo esquemático das equações piezoelétricas na notação matricial, segundo Nye (1969).

A Tabela 4.1 resume as equações dos efeitos piezoelétricos diretos e inversos na forma tensorial e na notação matricial.

Tabela 4.1 - Equações do efeito piezoelétrico direto e inverso definidas nas notações tensorial e matricial, adaptadas de Nye (1969).

|                       | <b>Notação indicial tensorial</b><br>(i, j, k = 1, 2, 3) | <b>Notação indicial contraída</b><br>(i = 1, 2, 3; j = 1, 2, ... 6) |
|-----------------------|----------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------|
| <b>Efeito Direto</b>  | $P_i = d_{ijk} \sigma_{jk}$                              | $P_i = d_{ij} \sigma_j$                                             |
| <b>Efeito Inverso</b> | $\varepsilon_{jk} = d_{ijk} E_i$                         | $\varepsilon_j = d_{ij} E_i$                                        |

Quando os carregamentos mecânicos e elétricos são simultaneamente aplicados no material piezoelétrico, a resposta eletromecânica acoplada é estabelecida pelas seguintes equações constitutivas acopladas para a piezoelectricidade linear (NYE, 1969), empregando a notação contraída para os tensores envolvidos:

$$\sigma_i(\varepsilon, E) = c_{ij}^E \varepsilon_j - e_{ki} E_k \quad (4.14)$$

$$D_i(\varepsilon, E) = e_{ij} \varepsilon_j + \chi_{ik}^E E_k$$

onde: o sobrescrito ( )<sup>E</sup> significa que os valores são medidos para um campo elétrico constante (superfícies curto-circuitadas), o sobrescrito ( )<sup>e</sup> significa que os valores são medidos para deformação constante (superfícies livres de carregamento) e  $\varepsilon$  é tensor de deformação mecânica [m/m],  $\sigma$  é o *tensor de tensão mecânica* [N/m<sup>2</sup>],  $D$  é o *tensor de deslocamento elétrico* [C/m<sup>2</sup>],  $E$  é o *tensor campo elétrico* [V/m ou N/m<sup>2</sup>],  $c^E$  é o *tensor de elasticidade linear* para campo elétrico constante [N/m<sup>2</sup>],  $\chi^E$  é a *matriz de permissividade dielétrica* [N/V.m] e  $e_{ij}$  o *tensor de constantes dielétricas* para deformação mecânica constante [N/V<sup>2</sup>].

As constantes de deformação piezoelétricas  $d_{ij}$  são mais freqüentemente fornecidas pelos fabricantes do que as constantes de tensão  $e_{ij}$ . Essas duas constantes, piezoelétricas de tensão e de deformação, são relacionadas entre si através das equações Nye (1969):

$$e_{ik} = d_{ij} c_{jk}^E \quad (4.15)$$

ou,

$$d_{ik} = e_{ij} s_{jk}^E \quad (4.16)$$

A Equação (4.14), em sua forma matricial, é expressa como:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \\ D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}^E & c_{12}^E & c_{13}^E & c_{14}^E & c_{15}^E & c_{16}^E & e_{11} & e_{21} & e_{31} \\ c_{21}^E & c_{22}^E & c_{23}^E & c_{24}^E & c_{25}^E & c_{26}^E & e_{12} & e_{22} & e_{32} \\ c_{31}^E & c_{32}^E & c_{33}^E & c_{34}^E & c_{35}^E & c_{36}^E & e_{13} & e_{23} & e_{33} \\ c_{41}^E & c_{42}^E & c_{43}^E & c_{44}^E & c_{45}^E & c_{46}^E & e_{14} & e_{24} & e_{34} \\ c_{51}^E & c_{52}^E & c_{53}^E & c_{54}^E & c_{55}^E & c_{56}^E & e_{15} & e_{25} & e_{35} \\ c_{61}^E & c_{62}^E & c_{63}^E & c_{64}^E & c_{65}^E & c_{66}^E & e_{16} & e_{26} & e_{36} \\ e_{11} & e_{12} & e_{13} & e_{14} & e_{15} & e_{16} & \chi_{11}^E & \chi_{12}^E & \chi_{13}^E \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} & e_{24} & e_{25} & e_{26} & \chi_{21}^E & \chi_{22}^E & \chi_{23}^E \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & e_{34} & e_{35} & e_{36} & \chi_{31}^E & \chi_{32}^E & \chi_{33}^E \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{Bmatrix} \quad (4.17)$$

A forma inversa das Eq.(4.14) segundo Nye (1969) assume a forma:

$$\varepsilon_i(\sigma, E) = s_{ij}^E \sigma_j + d_{ki} E_k \quad (4.18)$$

$$D_i(\sigma, E) = d_{ij} \sigma_j + \chi_{ik}^\sigma E_k$$

onde:  $s$  é a *matriz da flexibilidade para um campo elétrico constante* [ $m^2/N$ ], sendo a inversa da *matriz de elasticidade* para campo elétrico constante,  $\chi^\sigma$  é a *matriz de constantes dielétricas* para tensão mecânica constante [ $N/V^2$ ] e  $d$  é a *matriz de constantes piezoelétricas* [ $m/V$ ].

A Equação (4.18) em sua forma matricial é expressa como:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \\ D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11}^E & s_{12}^E & s_{13}^E & s_{14}^E & s_{15}^E & s_{16}^E & d_{11} & d_{21} & d_{31} \\ s_{21}^E & s_{22}^E & s_{23}^E & s_{24}^E & s_{25}^E & s_{26}^E & d_{12} & d_{22} & d_{32} \\ s_{31}^E & s_{32}^E & s_{33}^E & s_{34}^E & s_{35}^E & s_{36}^E & d_{13} & d_{23} & d_{33} \\ s_{41}^E & s_{42}^E & s_{43}^E & s_{44}^E & s_{45}^E & s_{46}^E & d_{14} & d_{24} & d_{34} \\ s_{51}^E & s_{52}^E & s_{53}^E & s_{54}^E & s_{55}^E & s_{56}^E & d_{15} & d_{25} & d_{35} \\ s_{61}^E & s_{62}^E & s_{63}^E & s_{64}^E & s_{65}^E & s_{66}^E & d_{16} & d_{26} & d_{36} \\ d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} & d_{16} & \chi_{11}^\sigma & \chi_{12}^\sigma & \chi_{13}^\sigma \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} & d_{26} & \chi_{21}^\sigma & \chi_{22}^\sigma & \chi_{23}^\sigma \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} & d_{35} & d_{36} & \chi_{31}^\sigma & \chi_{32}^\sigma & \chi_{33}^\sigma \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{Bmatrix} \quad (4.19)$$

### 4.3 Estrutura cristalina dos materiais piezoelétricos.

O efeito piezoelétrico pode ser visto como uma transformação energética. Nos materiais dielétricos, a repetição regular de átomos, íons e moléculas no reticulado, forma a chamada estrutura cristalina. A presença do fenômeno piezoelétrico depende da estrutura interna do material dielétrico. Em particular, o efeito piezoelétrico ocorre somente em cristais que não possuem um centro de simetria. Sob o ponto de vista do efeito piezoelétrico direto, quando o material é elasticamente deformado o centro de atração das cargas positivas e negativas é deslocado e a assimetria impede o cancelamento elétrico do material. A soma desses dipolos elétricos cria um campo de polarização macroscópico.

No estudo da cristalografia existe um total de 32 diferentes classes de cristais e dessas somente 20 são assimétricas e apresentam capacidade piezoelétrica. As 32 classes são divididas em sete grupos de materiais: triclínico, monoclínico, ortorrômbico, tetragonal, trigonal, hexagonal e cúbico (NYE, 1969). Esses grupos estão associados com a natureza

elástica do material, onde, por exemplo, o grupo triclinico é formado por materiais anisotrópicos, o ortorrômbico representa os materiais ortotrópicos e grupo cúbico é formado usualmente por materiais isotrópicos.

O tipo de estrutura cristalina do piezoelétrico utilizada nesta dissertação será a ortotrópica, classe  $mm2$ . A escolha dessa estrutura cristalina é feita para acomodar a maior variedade possível de direções de atuação do material piezoelétrico, evitar o número excessivo de coeficientes materiais e tirar proveito da maior disponibilidade de informações sobre esses materiais na literatura.

Os materiais piezoelétricos e os não piezoelétricos considerados nesta dissertação são maioria do tipo ortotrópicos.

Conforme mencionado na Seção (4.1), existem dois tipos de materiais piezoelétricos largamente usados em estruturas inteligentes: as piezocerâmicas, que são estruturas policristalinas como o *PZT*, e os piezopolímeros como o *PVDF*. Devido aos métodos de polarização, para gerar as propriedades piezoelétricas, as piezocerâmicas possuem freqüentemente estruturas cristalinas  $mm2$ , e os piezopolímeros possuem estrutura cristalina  $mm6$ . As estruturas  $mm6$  são consideradas um subgrupo degenerado das estruturas cristalinas  $mm2$ , (CHEE, 2000). Assim, as estruturas da classe  $mm2$  cobrem os materiais piezoelétricos mais freqüentemente associados as estruturas inteligentes. A matriz elasto-piezo-dielétrica acoplada do material que corresponde à classe  $mm2$  é expressa na forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \\ D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}^E & c_{12}^E & c_{13}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{31} \\ c_{21}^E & c_{22}^E & c_{23}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{32} \\ c_{13}^E & c_{23}^E & c_{33}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{33} \\ 0 & 0 & 0 & c_{44}^E & 0 & 0 & 0 & -e_{24} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55}^E & 0 & -e_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66}^E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & \chi_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{24} & 0 & 0 & 0 & \chi_{22} & 0 \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \chi_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{Bmatrix} \quad (4.20)$$

Devido as simetrias cristalinas, o número de elementos nulos nas matrizes de acoplamento piezoelétrico  $d$  e  $e$  é reduzido. As matrizes elasto-piezo-termo-dielétrica-piroelétrica acoplada do material de todas as 32 classes de cristais são apresentadas na publicação de NYE (1969).

#### 4.4 Rotação do sistema de coordenadas

Devido a sua natureza ortotrópica, os materiais compostos e piezoelétricos incorporados na estrutura inteligente possuem individualmente propriedades mecânicas e elétricas que dependem de suas orientações no estratificado. Assim, torna-se útil adotar um sistema de coordenadas comum a toda estrutura, denominado *sistema de coordenadas globais*, que será utilizado na formulação das equações constitutivas e na modelagem numérica. Assim, as matrizes das propriedades dos materiais podem ser transformadas por rotação de um ângulo  $\theta$  em torno do eixo  $z$  usando uma apropriada matriz de transformação,  $T$  ou  $Q$  mostradas respectivamente nas Eq.(4.21) e Eq.(4.22), as quais promovem a transformação do sistema de coordenadas locais do material para o sistema de coordenadas globais e principais da estrutura ( $x, y, z$ ).

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos^2(\theta) & \sin^2(\theta) & 0 & 0 & 0 & -\sin(2\theta) \\ \sin^2(\theta) & \cos^2(\theta) & 0 & 0 & 0 & \sin(2\theta) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ \sin(\theta)\cos(\theta) & -\sin(\theta)\cos(\theta) & 0 & 0 & 0 & (\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)) \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

$$[Q] = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

Diferentemente dos tensores tensão  $\sigma$  e deformação  $\varepsilon$  que são rotacionados com o auxílio de um tensor  $T$  de segunda ordem, os vetores deslocamento elétrico  $D$  e campo elétrico  $E$  são rotacionados com auxílio do tensor  $Q$ . Estes tensores transformam as quantidades fornecidas pelas equações constitutivas eletromecânicas representadas em coordenadas locais ( $\sigma_L, \varepsilon_L, D_L, E_L$ ), para coordenadas globais ( $\sigma_g, \varepsilon_g, D_g, E_g$ ), de acordo com as seguintes expressões (REDDY, 1997; CHEE, 2000):

$$\{\sigma_g\} = [T]\{\sigma_L\} \quad (4.23-a)$$

$$\{\varepsilon_g\} = [R]^T \{\varepsilon_L\} \quad (4.23-b)$$

$$\{D_g\} = [Q]\{D_L\} \quad (4.23-c)$$

$$\{E_g\} = [Q]\{E_L\} \quad (4.23-d)$$

onde:  $R$  é a matriz inversa da matriz  $T$  de transformação definida na Eq.(4.22), ou seja:  $R = T^{-1}$ , o  $L$  subscrito indica coordenadas locais do sistema e o subscrito  $g$  indica coordenadas globais do sistema.

A rotação sofrida por um material ortorrômbico muda a matriz das propriedades do material apresentada na Eq.(4.20) e os coeficientes que eram nulos antes da rotação ( $c_{16}$ ,  $c_{26}$ ,  $c_{36}$ ,  $c_{45}$ ,  $e_{14}$ ,  $e_{36}$ ,  $\chi_{12}$ ) depois da rotação, não mais o serão.

Uma vez, transformadas as quantidades locais para o novo sistema de coordenadas globais, as equações eletromecânicas acopladas resultantes são expressas sob a forma:

$$\begin{Bmatrix} \{\sigma\} \\ \{D\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [R][c_L][T]^T & -[R][e_L]^T[Q]^{-1} \\ [Q][e_L][T]^T & [Q][\chi_L][Q]^{-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\varepsilon\} \\ \{E\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [c_g] & -[e_{2g}] \\ -[e_{1g}] & [\chi_g] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\varepsilon\} \\ \{E\} \end{Bmatrix} \quad (4.24)$$

As propriedades materiais globais são funções agora dos ângulos  $\theta$  de rotação em torno do eixo  $z$ . Note-se ainda que a magnitude das *constantes piezoelétricas de tensão*  $e_{1g}$  e  $e_{2g}$  são idênticas. As constantes apresentadas na Eq.(4.24) são expressas no ANEXO II.

As equações acopladas, apresentadas anteriormente, são convenientemente reagrupadas nas formas compactas mostradas nas Eqs.(4.25-a), (4.26-a), (4.27-a) e (4.28-a) para que as constantes materiais que são sempre nulas nos materiais ortotrópicos sejam omitidas da formulação. Essas equações são separadas nas *componentes*  $\sigma_b$  *de flexão*, expressadas nas Eqs.(4.25-a) e (4.27-a), e nas componentes  $\sigma_s$  de cisalhamento expressas pelas Eqs.(4.26-a) e (4.28-a).

$$\{\sigma_b\} = [c_b]\{\varepsilon_b\} - \{e_b\}^T E_0 \quad (4.25-a)$$

ou, de forma expandida:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{16} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & c_{26} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & c_{36} \\ c_{16} & c_{26} & c_{36} & c_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} e_{31} \\ e_{32} \\ e_{33} \\ e_{36} \end{Bmatrix} E_3 \quad (4.25-b)$$

$$\{\sigma_s\} = [c_s]\{\varepsilon_s\} - \{e_s\}^T E_i \quad (4.26-a)$$

ou de forma expandida:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_4 \\ \sigma_5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{44} & c_{45} \\ c_{45} & c_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} e_{14} & e_{24} \\ e_{15} & e_{14} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{Bmatrix} \quad (4.26-b)$$

$$D_0 = [e_b]\{\varepsilon_b\} + \chi_0 E_0 \quad (4.27-a)$$

ou de forma expandida:

$$D_3 = \begin{bmatrix} e_{31} & e_{32} & e_{33} & e_{36} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} + \chi_{33} E_3 \quad (4.27b)$$

$$\{D_i\} = [e_s]\{\varepsilon_s\} + [\chi_i]\{E_i\} \quad (4.28-a)$$

ou de forma expandida:

$$\begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{14} & e_{15} \\ e_{24} & e_{14} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \chi_{11} & \chi_{12} \\ \chi_{12} & \chi_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{Bmatrix} \quad (4.28-b)$$



# **CAPÍTULO V**

## **MATERIAIS COMPOSTOS**

A abordagem deste capítulo se desdobra sobre os principais aspectos relevantes explorados neste trabalho, tais como as composições micro-mecânicas do material composto, tipos e características dos compostos existentes, exposição de algumas das aplicações desses materiais e da terminologia adotada nesta dissertação para a designação dos estratificados laminados. Aspectos referentes a características individuais dos diferentes tipos de matrizes e fibras, processos de fabricação dos compostos, critérios de resistência e falha, dentre outros, não serão abordados por se tratar de assuntos específicos e demasiadamente amplos, podendo ser encontrados facilmente em variadas fontes de pesquisa, como nos trabalhos Berthelot (1992), Chou (1992), Schwartz (1996), Pereira Jr. (2004) e Mendonça (2005).

### **5.1 Introdução**

Materiais compostos são entendidos como materiais resultantes da associação de dois ou mais tipos de materiais diferentes, visando o aproveitamento simultâneo de suas características vantajosas. Em virtude desta composição, os materiais compostos são heterogêneos e, na maioria das vezes, apresentam comportamento mecânico anisotrópico.

A utilização dos materiais compostos data do segundo milênio antes de Cristo, quando os egípcios empiricamente confeccionavam tijolos de argila para serem aplicados as construções urbanas (GARCIA, 2003; MENDONÇA, 2005). Esses tijolos de argila eram reforçados por palha vegetal picotada, sendo a argila responsável pela resistência mecânica à compressão e as fibras vegetais pela diminuição do peso e aumento da resistência à tração da peça.

A partir da abordagem empírica inicial, a abordagem científica iniciada no início do século XX possibilitou a expansão das formas de utilização desses materiais, que pode ser constatada na fabricação de diversos produtos, de quadros de bicicletas a fuselagens de aeronaves e hélices de helicópteros.

Esta expansão deve-se, sobretudo ao desenvolvimento dos novos materiais poliméricos impulsionado pelo crescimento da indústria do petróleo. Desde 1930, o petróleo é a principal fonte de matéria-prima para a fabricação de produtos químicos orgânicos, a partir dos quais são fabricados plásticos, borrachas, fibras e adesivos (FITESA, 2002).

Os principais tipos de materiais compostos utilizados na construção de sistemas estruturais são bifásicos e apresentam uma fase descontínua chamada de *reforço*, embebida em uma fase contínua conhecida como *matriz*. A distribuição e interação destas duas fases determinam as propriedades finais do material composto e são estudadas pela micro-mecânica. Geralmente, os compostos estruturais se apresentam sob a forma de um empilhamento de várias camadas com diferentes orientações das fibras, conforme ilustrado na Figura 5.1. A macro-mecânica estuda o comportamento da lâmina como um todo.

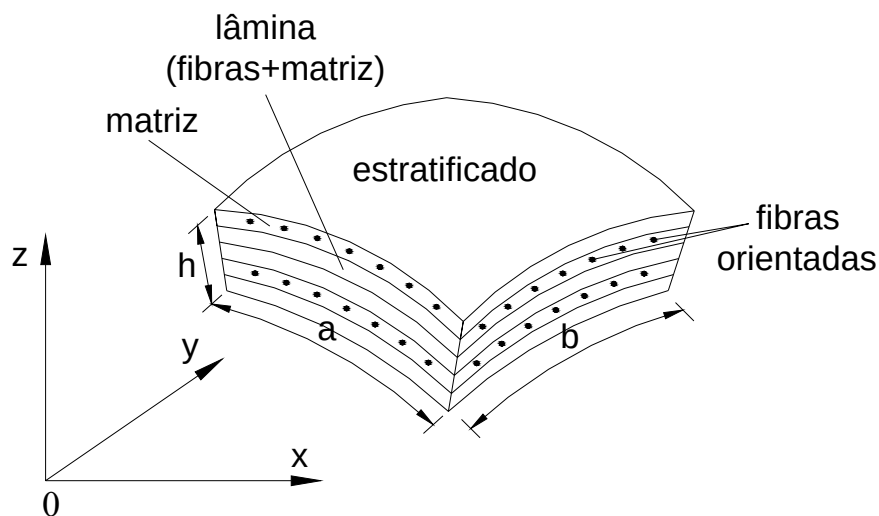


Figura 5.1 - Componentes principais de um estratificado laminado de dimensões  $a \times b$  e espessura  $h$ .

Um dos procedimentos clássicos utilizados na micro-mecânica para a obtenção das propriedades médias de cada lâmina é a *regra da mistura* (GARCIA, 2003). Neste procedimento, algumas propriedades elásticas médias de uma lâmina, tais como módulo de elasticidade e densidade, são obtidas através das frações volumétricas de fibras e da matriz. Outros modelos são utilizados conforme o tipo de propriedade a ser determinado. O modelo que consiste na *concentração de massa das fibras* (reforço) numa região do volume elementar apresenta resultados satisfatórios quando se trata de ensaios de tração

longitudinal na direção das fibras. Para ensaios de tração transversal, os modelos de Hopkins e Chamis que levam em consideração o efeito da descontinuidade dos materiais constituintes apresentam resultados satisfatórios com relação aos experimentais (GARCIA, 2003; MENDONÇA, 2005). Outro tipo de abordagem utilizada trata os modelos baseados na teoria da elasticidade. Neste caso, esses modelos representam soluções fechadas das equações diferenciais da elasticidade ou soluções obtidas por métodos numéricos quando se trata de geometrias complexas. Detalhes sobre estes modelos micro-mecânicos são encontrados nas publicações de Berthelot (1992), Chou (1992) e Mendonça (2005).

A macro-mecânica estuda o comportamento da lâmina a partir das propriedades mecânicas médias fornecidas pelo estudo micro-mecânico da lâmina. Dentro da abordagem macro-mecânica do laminado são introduzidas as teorias de ordem superior *FSDT* e *HSDT*, capazes de modelar de forma mais realista que a teoria clássica (*CLT*) a distribuição de tensões transversais e os fenômenos de acoplamento entre os mecanismos de deformação característicos dos materiais anisotrópicos (GARCIA, 2003).

As propriedades macroscópicas do laminado, como resistência e comportamento elástico, dependem das propriedades das lâminas individuais que o compõem e da ordem de orientação das lâminas. As propriedades mecânicas das lâminas são determinadas previamente, seja pelas formulações da micro-mecânica, seja por via experimental (MENDONÇA, 2005). Detalhes suplementares sobre a macro-mecânica são encontrados nas publicações de Berthelot (1992), Reddy (1997) e Mendonça (2005).

## 5.2 Constituição dos materiais compostos.

Em geral, o material composto é constituído de uma *matriz* que pode ser de natureza orgânica (resinas), mineral (carbono) ou metálica (alumínio) e por *elementos reforçantes* sob forma de fibras (vidro, carbono, etc.). Aditivos também podem ser incorporados aos compostos para melhorar características particulares (reforço, condutividade, peso, custo, etc.).

As *matrizes* são a fase contínua dos materiais compostos e suas funções principais são:

- interligar as fibras de forma a aglutiná-las,
- transmitir as cargas mecânicas às fibras,
- proteger as fibras contra ataques químicos ou danos provenientes durante a manipulação ou desgaste pelo uso.

As fibras são os elementos constituintes que conferem ao material composto suas características mecânicas de rigidez e resistência à ruptura. Portanto, são esses os elementos que têm uma influência fundamental sobre as propriedades mecânicas do material composto.

As fibras podem ser curtas, de alguns centímetros e injetadas no momento da moldagem da peça, ou podem ser longas, sendo, neste caso, cortadas após a fabricação da peça.

Os tipos mais comuns de fibras utilizadas são as fibras de vidro, de aramida (Kevlar), de carbono e de boro.

Existem outras fibras utilizadas em aplicações específicas, tais como:

- Fibras de origem vegetal: madeiras, utilizadas sob a forma de fibras orientadas, feltro, papéis impregnados, sisal, juta, linho.
- Fibras de origem mineral: amianto, silício.
- Fibras sintéticas: fibras de poliéster, poliamidas.
- Fibras metálicas: aço, cobre e alumínio. São geralmente associadas a matrizes metálicas para a obtenção de boas condutibilidades térmicas e elétricas, e de boas características termomecânicas (Berthelot, 1992).

Com exceção das fibras metálicas, as fibras especiais possuem geralmente baixos módulos de elasticidade e resistência a elevadas temperaturas.

Dentro da lâmina, as fibras podem ser orientadas numa única direção, segundo duas direções cruzadas ortogonalmente (tecidos), orientadas aleatoriamente (esteiras) ou ainda numa configuração tridimensional quando as fibras são orientadas no espaço tridimensional.

### **5.3 Arquitetura dos compostos.**

De acordo com classificação em função da forma dos agentes de reforço, os compostos podem ser do tipo: particulados, com fibras e compostos estruturais. A Figura 5.2 apresenta a gama de materiais compostos que podem ser obtidos segundo Tita, 1999.

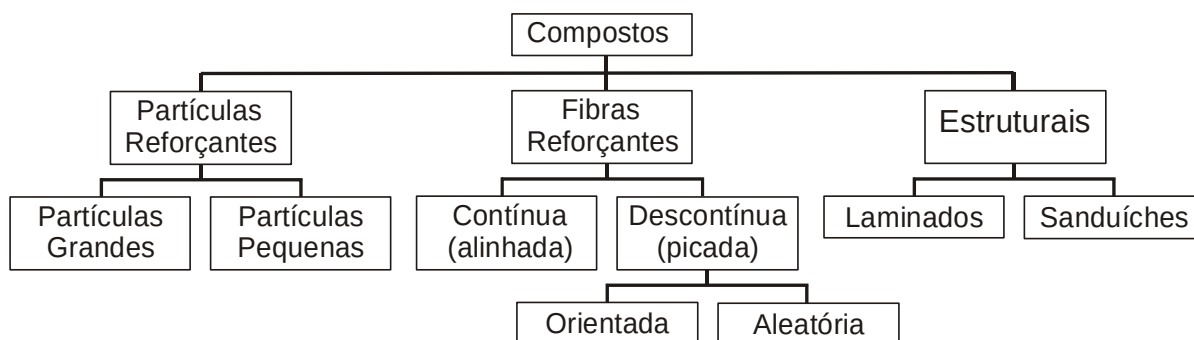


Figura 5.2 - Esquema de classificação dos materiais compostos, adaptado de Tita (1999).

Nas subseções a seguir são detalhadas as particularidades de cada um dos tipos de materiais compostos existentes.

### 5.3.1 Compostos com fibras

Compostos com fibras são materiais compostos resultantes da introdução de componentes que apresentam uma razão entre sua maior e menor dimensão (relação de forma ou “*aspect ratio*”) maior que 3 (SALIBA Jr., 2003), e que podem ser divididos em compostos com fibras descontínuas (fibras cortadas, fibras curtas ,etc) e contínuas.

Nos compostos com fibras contínuas, as tensões aplicadas são preferencialmente suportadas pelas fibras. Neste caso, a matriz atua como agente de união das fibras e transferidor de tensões (SALIBA Jr., 2003).

Embora não sejam capazes de produzir níveis de reforço similares aos de fibras contínuas, compostos com fibras descontínuas apresentam uma grande versatilidade de processamento (podem ser processados via injeção e extrusão) e permitem moldar compostos obtendo materiais indo de fortemente anisotrópicos a materiais isotrópicos em um plano.

As fibras são usadas como agente de reforço por possuírem resistências mecânicas elevadas, e como agente sustentador de tensões que dissipam energia à frente das trincas, conferindo elevadas propriedades mecânicas aos compostos. As fibras usualmente utilizadas em compostos apresentam diâmetros entre 10 e 100 $\mu$ m (SALIBA Jr., 2003). As fibras picotadas normalmente possuem de 5 mm a 25mm de comprimento, enquanto as fibras contínuas são longas (MENDONÇA, 2005).

A Figura 5.3 exibe uma fotomicrografia (Microscopia Eletrônica de Varredura - MEV) da superfície fraturada de uma matriz de poliuretano reforçada por *Microfibras de Sílica Amorfa* (MFSA) obtida por Saliba Jr. (2003) para ilustrar um composto fibroso. Nota-se, através desta figura, o aspecto desorientado assumido por essas fibras no interior da matriz e o seu formato tubular com extremidades afinadas.

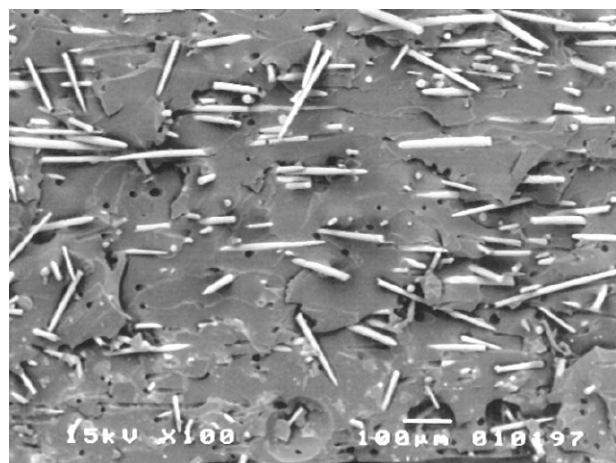


Figura 5.3 - Fotomicrografia da superfície fraturada de um poliuretano reforçado por MFSA ampliado em 100x (SALIBA Jr., 2003).

Uma das grandes áreas de aplicação de compostos fibrosos é na construção civil onde são usados diversos tipos de fibras, desde as naturais, como a de celulose, amianto, sisal e juta, como as artificiais: plástico (polipropileno, nylon, poliéster), vidro e aço.

Por exemplo, fibras de polipropileno são empregadas no micro-reforço de concreto e argamassa para a obtenção de características específicas desses materiais, notadamente no estado fresco e nas primeiras idades (FITESA, 2002). São usadas para diminuir a incidência de fissuras de retração plástica ou diminuir a exsudação e a segregação do concreto no estado plástico, ou ainda para aumentar a resistência ao impacto no seu estado endurecido.

### 5.3.2 Compostos particulados

São materiais resultantes da introdução de componentes que apresentam uma relação de forma pouco pronunciada, normalmente menor que 3 (SALIBA Jr., 2003). Uma partícula, em oposição às fibras, não possui dimensões privilegiadas.

Numa matriz polimérica, estes agentes (partículas) são chamados de agentes de preenchimento ou *fillers* e são adicionados para melhorar certas propriedades do material ou da matriz, como por exemplo: rigidez do material (*módulo elástico*), resistência abrasiva, diminuição da contração, amortecimento de vibrações, resistência à corrosão, para reduzir custos e modificar propriedades térmicas e elétricas, dentre outras.

Para citar um exemplo em estudo desses materiais, no Laboratório de Metrologia da Universidade Federal de Brasília (UnB), vêm se desenvolvendo técnicas de processamento de materiais compostos particulados para bases de máquinas de precisão. Um dos materiais em estudo é o granito sintético, um composto de matriz polimérica epóxi com adição de cargas de partículas de material cerâmico de granito.

Segundo Piratelli Filho e Levy Neto (2003), a utilização desses materiais é bastante ampla: substituição do ferro fundido e do alumínio em bases de máquinas ferramentas, como tornos e retificadoras, aplicação em máquinas e equipamentos médicos de precisão, como microscópios, equipamentos de corte e laser, utilização em padrões e bases de medição de instrumentos de metrologia, como máquinas de medição por coordenadas e em bases para medição na indústria.

As vantagens apresentadas por esses materiais são variadas: módulo de elasticidade elevado de 40GPa, resistência à compressão de 140GPa, capacidade de amortecimento de vibrações, reduzido coeficiente de expansão térmica ( $1,2 \times 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ ), densidade reduzida, elevada resistência à corrosão e facilidade de conformação. Como desvantagens, estes materiais apresentam absorção de umidade, dilatação térmica lenta e módulo de elasticidade menor do que o ferro fundido.

Segundo Piratelli Filho e Levy Neto (2003), alguns fabricantes de máquinas e ferramentas já utilizam materiais compostos particulados em seus projetos.

### 5.3.3 Compostos estruturais

São subdivididos em compostos estruturais do tipo laminado e do tipo sanduíche.

Na grande maioria das peças estruturais (vigas, placas e cascas) a estrutura composta laminada, conhecida simplesmente como laminado, é constituída de sucessivas lâminas (camadas) ao longo da espessura da estrutura, conforme é ilustrado pela Fig. 5.4.

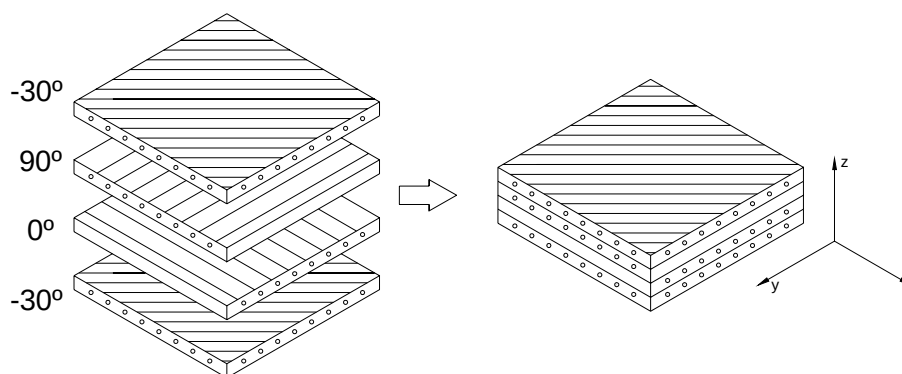


Figura 5.4 - Composto laminado formado por várias lâminas orientadas a  $[-30^\circ / 0^\circ / 90^\circ / -30^\circ]$ .

As fibras pertencentes a cada uma das lâminas orientadas localmente por um sistema designado por 1-2-3, podem ser orientadas em relação ao sistema global de referência x-y-z adotado para o laminado como um todo, conforme ilustrado na Fig. 5.5, de forma a maximizar a rigidez e a resistência mecânica e minimizar o peso final da estrutura. A

designação dos laminados é efetuada segundo a disposição das camadas e a orientação da camada com relação ao eixo referencial adotado.

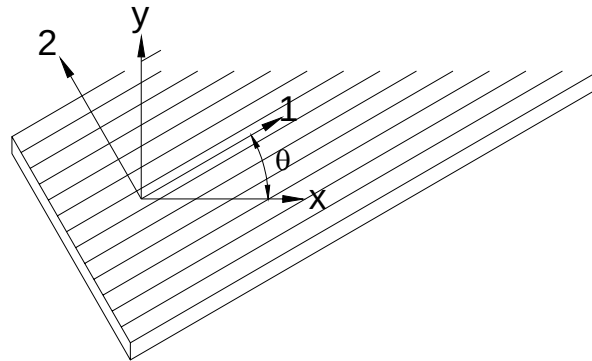


Figura 5.5 - Vista superior de uma lâmina com orientação  $\theta$  arbitrária segundo o eixo de referência plano x-y, adaptado de Da Rocha, 1999.

A designação destes estratificados é efetuada segundo a convenção:

- Para estratificados simétricos em relação ao plano médio de referência, são designados pelo índice subscrito **S**, sendo necessária a designação apenas da metade das camadas sucessivas.
- Cada camada é designada por um número indicando o valor em graus do ângulo que a direção das fibras faz com o eixo de referência x. Exemplo:  $[\pm 45 / 30 / 90 / 90 / 30 / \pm 45]_S$ .
- As camadas sucessivas são separadas por uma barra (/) se os ângulos forem diferentes; se forem iguais, são separadas por espaço.
- As camadas sucessivas de mesma orientação são designadas por um índice numérico. Exemplo:  $[\pm 45 / 30 / 90_2 / 30 / \pm 45]_S$ .
- As camadas são nomeadas sucessivamente indo de uma face à outra. Colchetes ou parênteses indicam o início e o fim da notação.
- Camadas orientadas com ângulos iguais em valor absoluto mas opostas em sinal são indicadas através do acréscimo dos sinais + e -.
- A repetição de seqüência pode ser indicada por um índice subscrito que se refere ao número de vezes que uma seqüência é sucessivamente repetida. Exemplo:  $[(\pm 45 / 30 / 90)_2]_S$ . Neste exemplo a seqüência de camadas  $\pm 45 / 30 / 90$  é repetida duas vezes.
- Em estratificados híbridos, ou seja, constituídos de camadas sucessivas comportando fibras de diferentes naturezas é necessário mencioná-las dentro da designação. Por exemplo, para um estratificado qualquer formado por resinas de vidro (v) e carbono(c) tem-se:  $[0_v / \pm 45_c / 30_c]_S$ .

No estudo de compostos laminados inteligentes, a camada piezoelétrica será designada simplesmente como **P** conforme notação adotada em publicações de Saravanos e Heyliger (1995), Correia (2000), Chee (2000) e outras. Será suprimido o número indicando valor nulo do ângulo que a direção da camada piezoelétrica faz com o eixo de referência global x. Por exemplo: **[P / 30 / 45 / P]** designa um composto laminado inteligente formado por duas camadas piezoelétricas coladas em sua face superior e inferior e orientadas em relação ao eixo de referência global x.

Os compostos estruturais do tipo laminado, dotados de materiais piezoelétricos colados a sua superfície, constituem o objeto de estudo no âmbito desta Dissertação.

Compostos estruturais do tipo sanduíche constituem um tipo especial de composto, formado por um núcleo de baixa rigidez feito de material leve com boas propriedades a compressão chamado *alma* ou simplesmente *núcleo* e por lâminas altamente resistentes à tração e anisotrópicas, chamadas de *faces* ou simplesmente de *placas rígidas* (BERTHELOT, 1992; MENDONÇA, 2005).

Segundo Berthelot existem basicamente dois tipos de almas: cheias e vazadas, conforme exemplos ilustrados pela Fig. 5.6.

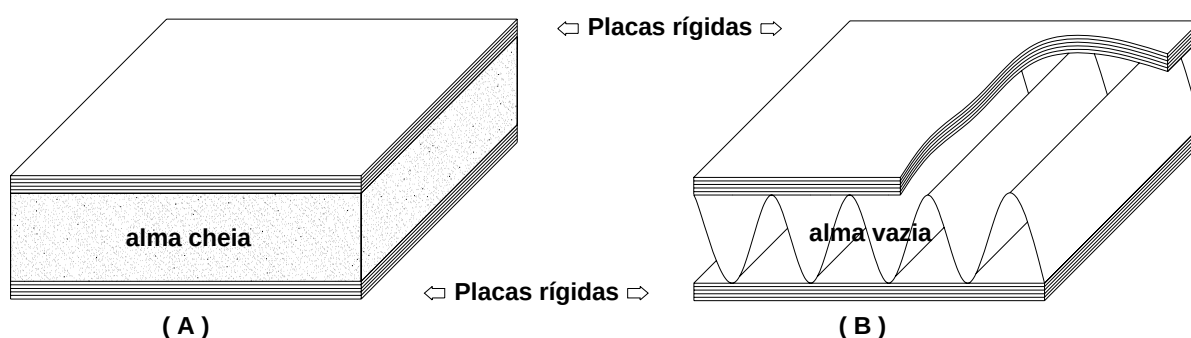


Figura 5.6 - Estrutura sanduíche de alma plena (A) e de alma vazada do tipo ondulada (B). Adaptado de Berthelot (1992).

Os materiais mais utilizados para almas cheias são madeiras celulares, diversas espumas celulares, resinas carregadas de micro-esferas vazias de vidro denominadas espumas sintáticas, plásticos, etc. Os principais materiais utilizados nas almas vazias, essencialmente na forma de colméia de abelhas (alvéolos hexagonais) e perfis são: ligas metálicas leves, papel Kraft (com ou sem resina), papel poliamida, etc.

Segundo Mendonça, 2005, a partir da década de 1950 as estruturas sanduíche foram largamente aplicadas nas indústrias aeroespacial e militar. Em aeronaves são aplicadas em pás de hélices de helicópteros, painéis de asas, pisos de compartimento de carga, cones de

aeronaves, dutos de ar, porta e estrutura de portal. Em mísseis e veículos espaciais são usados em aletas e superfícies de controle, tanques, antenas e contêineres de carga.

A partir da década de 1990, a aplicação dos sanduíches tem se difundido e se expandido em direção à indústria da construção civil (MENDONÇA, 2005), notadamente aplicados em abrigos pré-fabricados, divisórias de escritórios, portas, forros, etc.

Finalmente, dentre outros setores industriais que largamente usam os materiais compostos destacam-se a *indústria automobilística*, na fabricação de capotas, cárters de óleo, colunas de direção, árvores de transmissão, molas laminadas, painéis, etc; na *indústria de material esportivo*, na construção de barcos a vela, esquis, bicicletas, tacos de golfe, raquetes de tênis, pranchas de surfe; na *área aeroespacial*, em painéis solares de satélites, em veículos lançadores de satélite , etc.

## CAPÍTULO VI

### FORMULAÇÃO DO MODELO DE ELEMENTOS FINITOS

A modelagem dos sistemas físicos freqüentemente resulta em equações diferenciais parciais que não podem ser resolvidas analiticamente ou são desprovidas de uma solução exata devido à complexidade das condições de contorno ou do domínio do problema. Nestes casos, um método numérico deve ser usado para resolver o problema. O *Método dos Elementos Finitos (MEF)* é freqüentemente julgado o método numérico mais adequado.

O desenvolvimento dos modernos computadores tornou o *MEF* uma das ferramentas de análise mais importantes na engenharia, o qual tem sido utilizado com sucesso em muitas aplicações, tais como transferência de calor, mecânica dos fluidos, eletromagnetismo, acústica e mecânica da fratura. Vários programas de elementos finitos, tais como o *Ansys*®, *Nastran*®, *Abaqus*®, *Comsol Multiphysics*®, entre outros, são largamente comercializados.

Os princípios fundamentais do *MEF* são:

- O contínuo é dividido em um número finito de elementos, de formas geométricas relativamente simples.
- Estes elementos são conectados por um número finito de *nós*.
- São escolhidas *funções de interpolação polinomiais* que descrevem o campo do deslocamento desconhecido, sob a forma de uma combinação linear dos valores dos deslocamentos nos nós. Desta forma, as incógnitas do problema passam a ser os valores dos deslocamentos (e, eventualmente, de suas derivadas) nos nós. Estas incógnitas são conhecidas como graus de liberdade elementares. No caso de estruturas contendo materiais piezoelétricos, os graus de liberdade incluem também grandezas de natureza elétrica (potenciais elétricos).
- As forças aplicadas na estrutura são substituídas por um *sistema equivalente de forças* aplicadas nos nós.

- As equações do movimento ou de equilíbrio são formuladas no domínio de cada elemento utilizando as leis físicas que regem o problema. Nestas equações, as incógnitas são as variáveis nodais.
- Impondo condições de compatibilidade e equilíbrio nos nós compartilhados por elementos vizinhos, as equações do movimento ou de equilíbrio elementares são combinadas em um conjunto de equações globais que têm como incógnitas as variáveis nodais de todos os nós do modelo.
- São impostas as condições de contorno estabelecendo valores prescritos para um subconjunto de variáveis nodais em nível global.

Uma das recentes aplicações do *MEF* é a simulação de materiais piezoelétrico incorporados a estruturas isotrópicas ou compostas laminadas, atuando como sensores e/ou atuadores em variadas condições de contorno.

A formulação em elementos finitos desenvolvida neste capítulo será aplicada na modelagem de estruturas isotrópicas ou compostas laminadas planas inteligentes.

Na presente formulação, os graus de liberdade nodais incluem as variáveis elétricas (potenciais elétricos) e mecânicas (deslocamentos) acopladas e usa elementos retangulares planos de oito nós para a discretização do campo de deslocamentos, em uma única camada equivalente, e dos potenciais elétricos em camadas discretas, consistindo assim em uma *formulação mista*, de acordo com a definição apresentada na Seção 3.3.

A escolha de um elemento com oito nós deve-se às investigações prévias feitas por Chee (2000) que verificou sua excelente performance na modelagem de estruturas inteligentes formadas por placas planas compostas laminadas finas ou espessas. Este tipo de elemento, como verificado por aquele autor, é livre do travamento por cisalhamento (*shear locking*) quando utiliza a teoria *HSDT* na aproximação do campo de deslocamentos mecânicos. Além destas vantagens, estruturas de geometrias diversas e sujeitas a condições de contorno complicadas podem ser convenientemente modeladas por elementos retangulares.

O objetivo deste capítulo é expressar as relações deformações-deslocamentos e campos elétricos-voltagens em termos das variáveis nodais e funções de forma correspondentes, as quais são posteriormente associadas a uma formulação variacional para obtenção da Equação Geral do Sistema Eletromecânico Acoplado.

## 6.1 Discretização do potencial elétrico linear distribuído por camadas

A *Teoria das Camadas Equivalentes Discretas* é baseada na técnica de *separação de variáveis* do cálculo superior, em que a coordenada  $z$ , na direção da espessura da casca ou placa, é desacoplada das coordenadas na superfície de referência  $x$ - $y$ .

Segundo Chee (2000), a formulação geral é escrita na Eq.(6.1) onde,  $L_j(z)$  é chamada de *função em camadas equivalentes (layerwise function)* e  $\phi_j(x, y, t)$  são *funções de interface (interface functions)* da  $j$ -ésima interface do composto laminado.

$$\phi(x, y, z, t) = \sum_{j=1}^{ncamadas+1} L_j(z) \phi_j(x, y, t) \quad (6.1)$$

Na *Teoria das Camadas Equivalentes Discretas*, diferentes funções, ou campos, podem ser usados em cada camada do composto laminado. Portanto, esta teoria apresenta uma maior flexibilidade comparada à *Teoria da Camada Equivalente Única* (ver Capítulo III, Seção 3.2). No entanto, ela requer um número maior de graus de liberdade, o que eleva o custo computacional do modelo. Por isso, para efeito de redução de custo computacional, a *Teoria da Camada Equivalente Única* será usada na representação dos graus de liberdade mecânicos enquanto a *Teoria das Camadas Equivalentes Discretas* será utilizada na representação dos graus de liberdade elétricos.

A *Teoria das Camadas Equivalentes Discretas* é adequada à modelagem do potencial elétrico uma vez que a voltagem elétrica é usualmente aplicada ao longo da espessura dos materiais ativos e a sua distribuição é geralmente linear, assumindo que o material seja homogêneo.

Considerando que a estrutura laminada é dividida em várias camadas, o campo elétrico através de camada pode ser aproximado por uma função linear por partes na direção da espessura  $z$ .

O campo potencial elétrico linear  $\phi(x, y, z, t)$  para uma estrutura laminada com  $n$  camadas é composto por um grupo de equações expressas sob a forma:

$$\begin{array}{rcl}
z_{n+1} & & \phi_{n+1}(x, y, t) \\
\text{camada}(n) & & \phi_{\text{camada}(n)}(x, y, z, t) = \phi_n(x, y, t) \frac{(z - z_{n+1})}{(z_n - z_{n+1})} + \phi_{n+1}(x, y, t) \frac{(z - z_n)}{(z_{n+1} - z_n)} \\
z_n & \text{-----} & \phi_n(x, y, t) \\
\text{camada}(n-1) & & \phi_{\text{camada}(n-1)}(x, y, z, t) = \phi_{n-1}(x, y, t) \frac{(z - z_n)}{(z_{n-1} - z_n)} + \phi_n(x, y, t) \frac{(z - z_{n-1})}{(z_n - z_{n-1})} \\
z_{n-1} & \text{-----} & \phi_{n-1}(x, y, t) \\
& \vdots & \\
z_3 & \text{-----} & \phi_3(x, y, t) \\
\text{camada}(2) & & \phi_{\text{camada}(2)}(x, y, z, t) = \phi_2(x, y, t) \frac{(z - z_3)}{(z_2 - z_3)} + \phi_3(x, y, t) \frac{(z - z_2)}{(z_3 - z_2)} \\
z_2 & \text{-----} & \phi_2(x, y, t) \\
\text{camada}(1) & & \phi_{\text{camada}(1)}(x, y, z, t) = \phi_1(x, y, t) \frac{(z - z_2)}{(z_1 - z_2)} + \phi_2(x, y, t) \frac{(z - z_1)}{(z_2 - z_1)} \\
z_1 & \text{-----} & \phi_1(x, y, t)
\end{array} \tag{6.2}$$

Cada uma das  $n$  camadas tem uma *função potencial elétrico*  $\phi_{\text{camada}(n)}$  composta por duas *funções de interface*  $\phi_n$  e  $\phi_{(n+1)}$  nas interfaces inferior e superior desta camada. Assim, o potencial elétrico na  $i$ -ésima camada é obtido como expresso na Eq.(6.3-a). Note-se que  $\phi_i(x, y, t)$  e  $\phi_{i+1}(x, y, t)$  são *funções de interface* para as interfaces  $i$  e  $(i+1)$  da  $i$ -ésima camada, respectivamente.

$$\phi_{\text{camada}(i)}(x, y, z, t) = L_{id}(z)\phi_i(x, y, t) + L_{iu}(z)\phi_{i+1}(x, y, t) \tag{6.3-a}$$

onde  $L_{id}$  e  $L_{iu}$  são *funções de interpolação Lagrangeana linear* da interface inferior e superior da  $i$ -ésima camada do composto laminado, respectivamente, sendo dadas por:

$$\begin{aligned}
L_{id}(z) &= \frac{z - z_{i+1}}{z_i - z_{i+1}} \\
L_{iu}(z) &= \frac{z - z_i}{z_{i+1} - z_i}
\end{aligned} \tag{6.3-b}$$

Usando a definição do campo elétrico como o gradiente negativo do potencial elétrico apresentada na Seção (3.6), a expansão em camadas do campo elétrico para a  $i$ -ésima camada de uma placa composta laminada é expressa da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} E_x(x, y, z, t) \\ E_y(x, y, z, t) \\ E_z(x, y, z, t) \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi(x, y, z, t)}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi(x, y, z, t)}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi(x, y, z, t)}{\partial z} \end{Bmatrix} \quad (6.4-a)$$

Simplificando:

$$\{E(x, y, z, t)\} = -\vec{\nabla}\phi(x, y, z, t) \quad (6.4-b)$$

ou,

$$\{E\} = -\vec{\nabla}\phi \quad (6.4-c)$$

Combinando as equações (6.3-a) e (6.4-a), para a  $i$ -ésima camada tem-se:

$$\begin{Bmatrix} E_x(x, y, z, t) \\ E_y(x, y, z, t) \\ E_z(x, y, z, t) \end{Bmatrix}_{camada(i)} = - \begin{Bmatrix} L_{id}(z) \frac{\partial \phi_i(x, y, t)}{\partial x} + L_{iu}(z) \frac{\partial \phi_{i+1}(x, y, t)}{\partial x} \\ L_{id}(z) \frac{\partial \phi_i(x, y, t)}{\partial y} + L_{iu}(z) \frac{\partial \phi_{i+1}(x, y, t)}{\partial y} \\ \frac{1}{z_i - z_{i+1}} \phi_i(x, y, t) + \frac{1}{z_{i+1} - z_i} \phi_{i+1}(x, y, t) \end{Bmatrix} \quad (6.5)$$

A Figura 6.1 representa os *potenciais elétricos nodais*  $\phi_{ij}$  de um elemento composto por quatro camadas e cinco interfaces. O primeiro subscrito,  $i$ , indica o número da interface da camada, que na ilustração varia de 1 a 5, e o segundo subscrito,  $j$ , indica o número local do nó, que varia de 1 a 8.

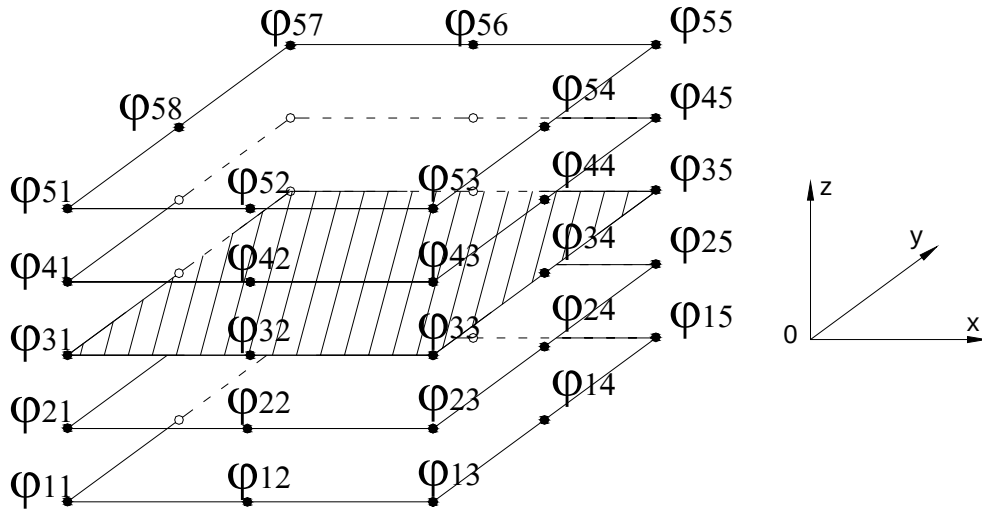


Figura 6.1 - Potenciais elétricos nodais, de um elemento plano, multicamadas e composto por oito nós para cada uma das cinco interfaces planas.

As  $(n+1)$  funções de interface  $\phi_{n+1}(x, y, t)$  são escritas em termos de aproximação em elementos finitos conforme expresso a seguir. Em um elemento retangular de oito nós, cada uma das  $(n+1)$  funções de interfaces são expressas na formulação em termos das funções de forma e dos correspondentes potenciais elétricos nodais  $\phi_{ij}$  da interface da camada, como indicado a seguir:

$$\begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_{(n+1)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & N_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & N_2 & \dots & N_8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \\ \phi_{31} \\ \vdots \\ \phi_{71} \\ \phi_{81} \\ \phi_{12} \\ \phi_{22} \\ \phi_{32} \\ \vdots \\ \phi_{17} \\ \phi_{27} \\ \vdots \\ \phi_{(n+1)8} \end{Bmatrix} \quad (6.6)$$

onde  $N_i = N_i(x, y)$ ,  $i=1$  a 8 são funções de interpolação (funções de forma) que serão definidas mais adiante e  $\phi_{ij} = \phi_{ij}(t)$  são os potenciais elétricos nodais em nível elementar.

A família *Serendipity* dos *elementos Lagrangeanos lineares* é constituída de elementos que não têm nós interiores (REDDY, 1997). O *elemento retangular Serendipity* em coordenadas globais utilizado neste trabalho é mostrado na Fig. 6.2. As relações entre as coordenadas espaciais globais e locais são dadas pelas Eq.(6.7-a) e Eq.(6.7-b), sendo os nós intermediários (2, 4, 6, 8) posicionados nos pontos médios dos lados, entre os nós (1, 3, 5, 7) do vértice do elemento.

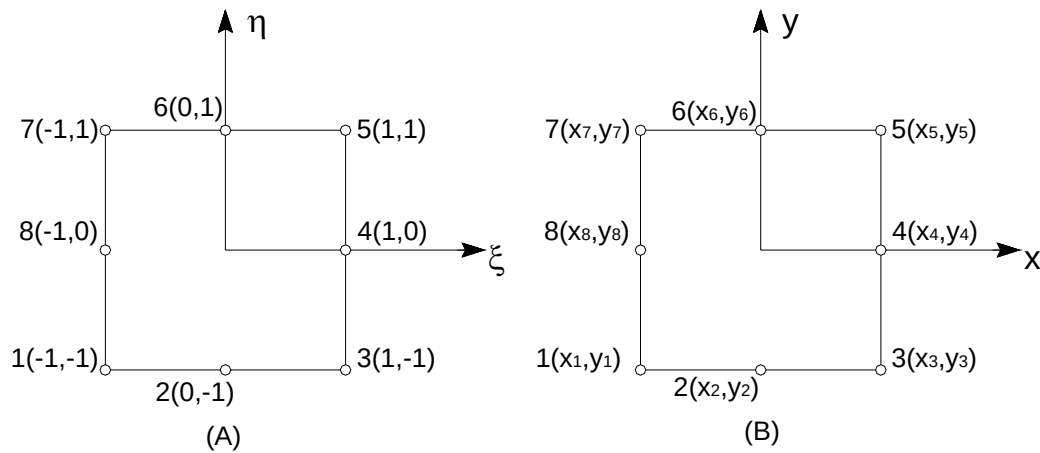


Figura 6.2 - Elemento retangular de oito nós em coordenadas locais (A) e globais (B).

$$\xi = \frac{(2x - x_8 - x_4)}{x_8 - x_4} \quad (6.7-a)$$

$$x = \frac{1}{2} [\xi(x_8 - x_4) + x_8 + x_4]$$

$$\eta = \frac{(2y - y_6 - y_2)}{y_6 - y_2} \quad (6.7-b)$$

$$y = \frac{1}{2} [\eta(y_6 - y_2) + y_6 + y_2]$$

A matriz Jacobiana da transformação linear entre as coordenadas globais e locais é expressa segundo Reddy (1997) sob a forma:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (x_8 - x_4) & 0 \\ 0 & (y_6 - y_2) \end{bmatrix} \quad (6.8)$$

O *Jacobiano*, definido como o determinante da matriz Jacobiana, é dado por:

$$J = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} = \frac{(y_6 - y_2)(x_8 - x_4)}{4} \quad (6.9)$$

As funções  $N_i(\xi, \eta, t)$ , com  $i = 1 \dots 8$ , apresentados na Eq.(6.6) são *funções de forma* do tipo *Serendipity* que podem ser escritas em coordenadas locais  $\xi$  e  $\eta$  conforme expresso pelas equações:

$$\begin{aligned} N_1(\xi, \eta) &= -\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(1+\xi+\eta) \\ N_2(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1-\xi)(1+\xi)(1-\eta) \\ N_3(\xi, \eta) &= -\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(1-\xi+\eta) \\ N_4(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1+\xi)(1+\eta)(1-\eta) \\ N_5(\xi, \eta) &= -\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(1-\xi-\eta) \\ N_6(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1-\xi)(1+\xi)(1+\eta) \\ N_7(\xi, \eta) &= -\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(1+\xi-\eta) \\ N_8(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1-\xi)(1+\eta)(1-\eta) \end{aligned} \quad (6.10)$$

Simplificando a Eq.(6.6) e escrevendo-a em função das coordenadas intrínsecas apresentadas anteriormente escreve-se:

$$\{\phi(\xi, \eta, t)\}_{(n+1) \times 1} = [\bar{N}_\phi(\xi, \eta)]_{(n+1) \times 8(n+1)} \{\varphi_e(t)\}_{8(n+1) \times 1} \quad (6.11)$$

ou ainda,

$$\{\phi\} = [\bar{N}_\phi] \{\varphi_e\} \quad (6.12)$$

Deve-se observar que se o potencial elétrico expresso na Eq.(6.1) em termos das *funções de interface* e *funções em camadas equivalentes* for escrito simultaneamente para todas as camadas do laminado, a expressão resultará numa matriz esparsa com muitos termos nulos (CHEE, 2000). Porém, devido à natureza discreta da formulação *em camadas equivalentes discretas*, as equações do potencial elétrico dependem de funções discretizadas na camada particular. Assim, é mais conveniente escrever o potencial elétrico separadamente para cada uma das camadas como expressado pela Eq.(6.3-a). Como exemplo, o potencial elétrico para a primeira e terceira camadas de uma estrutura composta por quatro camadas é escrito respectivamente como:

$$\phi(x, y, z, t)_1 = \begin{bmatrix} L_{1d}(z) & L_{1u}(z) & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1(x, y, t) \\ \phi_2(x, y, t) \\ \phi_3(x, y, t) \\ \phi_4(x, y, t) \\ \phi_5(x, y, t) \end{Bmatrix} \quad (6.13-a)$$

$$\phi(x, y, z, t)_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & L_{3d}(z) & L_{3u}(z) & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1(x, y, t) \\ \phi_2(x, y, t) \\ \phi_3(x, y, t) \\ \phi_4(x, y, t) \\ \phi_5(x, y, t) \end{Bmatrix} \quad (6.13-b)$$

Assim, o potencial elétrico para a *k-ésima* camada elementar do *e-ésimo* elemento é expresso sob a forma:

$$\phi(\xi, \eta, z, t)_e^k = \begin{bmatrix} \dots & L_{kd}(z) & L_{ku}(z) & \dots \end{bmatrix}_{1 \times (n+1)} [\bar{N}_\phi(\xi, \eta)]_{(n+1) \times (8(n+1))} \begin{Bmatrix} \varphi(t)_{11} \\ \vdots \\ \varphi(t)_{(n+1)1} \\ \vdots \\ \varphi(t)_{(n+1)8} \end{Bmatrix}_{8(n+1) \times 1} \quad (6.14)$$

Simplificando a notação matricial apresentada na Eq.(6.14), escreve-se:

$$\phi(\xi, \eta, z, t)_e^k = [N_\phi(\xi, \eta, z)]_{1 \times 8(n+1)} \{\varphi_e(t)\}_{8(n+1) \times 1} \quad (6.15-a)$$

ou ainda:

$$\phi_e^k = [N_\phi] \{\varphi_e\} \quad (6.15-b)$$

Na equação acima,  $[N_\phi(\xi, \eta, z)]$  é a *matriz de funções de forma elétrica* que relaciona os potenciais elétricos no volume do elemento com os valores nodais do potencial elétrico. Assim, a *formulação em camadas equivalentes discretas* e as *funções de forma Serendipity* são incorporadas na matriz de funções de forma elétrica.

Acrescentando a *matriz função de forma elétrica*  $[N_\phi]$  no vetor campo elétrico definido pela Eq.(6.4-a), e realizando o desenvolvimento de coordenadas globais para locais elementares:

$$\{E(x, y, z, t)_e^k\} = - \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix} \phi(x, y, z, t) = - \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix} [N_\phi(\xi, \eta, z)_k] \{\varphi_e(t)\} \quad (6.16-a)$$

ou, de forma simplificada:

$$\{E(\xi, \eta, z, t)_e^k\}_{3 \times 1} = -\vec{\nabla}([N_\phi(\xi, \eta, z)]_{1 \times 8(n+1)} \{\varphi_e(t)\}_{8(n+1) \times 1}) \quad (6.16-b)$$

ou ainda,

$$\{E(\xi, \eta, z, t)_e^k\}_{3 \times 1} = -[B_\phi(\xi, \eta, z)_k]_{3 \times 8(n+1)} \{\varphi_e(t)\}_{8(n+1) \times 1} \quad (6.16-c)$$

onde,

$$[B_\phi(\xi, \eta, z)_k] = \begin{bmatrix} \cdots & L_{kd} N_{1,\xi} & L_{ku} N_{1,\xi} & \cdots & L_{kd} N_{2,\xi} & L_{ku} N_{2,\xi} & \cdots & L_{kd} N_{8,\xi} & L_{ku} N_{8,\xi} & \cdots \\ \cdots & L_{kd} N_{1,\eta} & L_{ku} N_{1,\eta} & \cdots & L_{kd} N_{2,\eta} & L_{ku} N_{2,\eta} & \cdots & L_{kd} N_{8,\eta} & L_{ku} N_{8,\eta} & \cdots \\ \cdots & L_{kd} N_1 & L_{ku} N_1 & \cdots & L_{kd} N_2 & L_{ku} N_2 & \cdots & L_{kd} N_8 & L_{ku} N_8 & \cdots \end{bmatrix} \quad (6.17)$$

sendo  $L'_{kd}$ ,  $L'_{ku}$ ,  $N_{i,\xi}$  e  $N_{i,\eta}$  dados por:

$$L'_{kd}(z) = \frac{1}{z_k - z_{k+1}} \quad (6.18)$$

$$L'_{ku}(z) = \frac{1}{z_{k+1} - z_k}$$

e,

$$N_{i,\xi}(\xi, \eta) = \frac{dN_i}{d\xi} = \frac{dN_i}{dx} \frac{dx}{d\xi} \quad (6.19)$$

$$N_{i,\eta}(\xi, \eta) = \frac{dN_i}{d\eta} = \frac{dN_i}{dy} \frac{dy}{d\eta}$$

As derivadas das funções de forma, indicadas na Eq.(6.19), em relação às coordenadas locais  $\xi$  e  $\eta$  são detalhadas a seguir:

$$\begin{aligned} N_{1,\xi}(\xi, \eta) &= -\frac{1}{4}(-1+\eta)(2\xi+\eta), & N_{1,\eta}(\xi, \eta) &= -\frac{1}{4}(-1+\xi)(\xi+2\eta), \\ N_{2,\xi}(\xi, \eta) &= \xi(-1+\eta), & N_{2,\eta}(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1+\xi)(-1+\xi), \\ N_{3,\xi}(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(-1+\eta)(\eta-2\xi), & N_{3,\eta}(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1+\xi)(2\eta-\xi), \\ N_{4,\xi}(\xi, \eta) &= -\frac{1}{2}(1+\eta)(-1+\eta), & N_{4,\eta}(\xi, \eta) &= -\eta(1+\xi), \\ N_{5,\xi}(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1+\eta)(2\xi+\eta), & N_{5,\eta}(\xi, \eta) &= \frac{1}{4}(1+\xi)(\xi+2\eta), \\ N_{6,\xi}(\xi, \eta) &= -\xi(1+\eta), & N_{6,\eta}(\xi, \eta) &= -\frac{1}{2}(1+\xi)(-1+\xi), \\ N_{7,\xi}(\xi, \eta) &= -\frac{1}{4}(1+\eta)(\eta-2\xi), & N_{7,\eta}(\xi, \eta) &= -\frac{1}{4}(-1+\xi)(2\eta-\xi), \\ N_{8,\xi}(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}(1+\eta)(-1+\eta), & N_{8,\eta}(\xi, \eta) &= \eta(-1+\xi) \end{aligned} \quad (6.20)$$

Assim, utilizando a equação definida em (6.16-c), o vetor campo elétrico  $[E]$  é particionado em uma componente  $[E_i]$ , e outra  $[E_o]$  tal que  $E = [E_i \ E_o]$ , o que resulta:

$$\{E_i\} = -\left\{\frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y}\right\}^T \varphi = -\vec{\nabla}_i \varphi = -\vec{\nabla}_i ([N_\phi] \{\varphi_e\}) \quad (6.21-a)$$

$$\{E_0\} = -\left\{\frac{\partial}{\partial z}\right\} \varphi = -\vec{\nabla}_0 \varphi = -\vec{\nabla}_0 ([N_\phi] \{\varphi_e\}) \quad (6.21-b)$$

ou, de forma simplificada:

$$\{E_i\} = [-B_{\phi i}] \{\varphi_e\} \quad (6.21-c)$$

$$\{E_0\} = -[B_{\phi 0}] \{\varphi_e\} \quad (6.21-d)$$

sendo:

$$[B_{\phi i}(\xi, \eta, z)_k] = \begin{bmatrix} \cdots & L_{kd} N_{1,\xi} & L_{ku} N_{1,\xi} & \cdots & L_{kd} N_{2,\xi} & L_{ku} N_{2,\xi} & \cdots & L_{kd} N_{8,\xi} & L_{ku} N_{8,\xi} & \cdots \\ \cdots & L_{kd} N_{1,\eta} & L_{ku} N_{1,\eta} & \cdots & L_{kd} N_{2,\eta} & L_{ku} N_{2,\eta} & \cdots & L_{kd} N_{8,\eta} & L_{ku} N_{8,\eta} & \cdots \end{bmatrix} \quad (6.22-a)$$

e,

$$[B_{\phi 0}(\xi, \eta, z)_k] = \begin{bmatrix} \cdots & L'_{kd} N_1 & L'_{ku} N_1 & \cdots & L'_{kd} N_2 & L'_{ku} N_2 & \cdots & L'_{kd} N_8 & L'_{ku} N_8 & \cdots \end{bmatrix} \quad (6.22-b)$$

## 6.2 Deslocamentos mecânicos da HSDT representados em uma camada equivalente única

Na discussão iniciada no terceiro capítulo definiu-se que nesta dissertação será implementada uma teoria baseada em uma aproximação para o campo de deslocamentos de ordem elevada do tipo *HSDT* formulado em uma única camada equivalente. Especificamente, a aproximação para o campo de deslocamentos escolhido é o proposto por Lo et al. (1977) para a qual, diferentemente da formulação *HSDT* de Reddy (1997),

complicações associadas com a imposição das tensões cisalhantes transversais nas condições de contorno são eliminadas.

O campo de deslocamentos *HSDT* de Lo et al. é formulado em uma única camada equivalente, sendo expresso por:

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) + z\psi_x(x, y, t) + z^2\zeta_x(x, y, t) + z^3\Phi_x(x, y, t) \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) + z\psi_y(x, y, t) + z^2\zeta_y(x, y, t) + z^3\Phi_y(x, y, t) \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t) + z\psi_z(x, y, t) + z^2\zeta_z(x, y, t) \end{aligned} \quad (6.23)$$

Por conveniência, a Eq.(6.23) é reescrita na seguinte forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} u(x, y, z, t) \\ v(x, y, z, t) \\ w(x, y, z, t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & z & 0 & 0 & z^2 & 0 & 0 & z^3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & z & 0 & 0 & z^2 & 0 & 0 & z^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & z & 0 & 0 & z^2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \{\hat{u}(x, y, t)\} \quad (6.24-a)$$

ou, de forma simplificada:

$$\{U(x, y, z, t)\}_{3 \times 1} = [A_u(z)]_{3 \times 11} \{\hat{u}(x, y, t)\}_{11 \times 1} \quad (6.24-b)$$

ou simplesmente:

$$\{U\} = [A_u] \{\hat{u}\} \quad (6.24-c)$$

As onze funções planas fornecidas por  $\hat{u}(x, y, t)$  que definem os 11 graus de liberdade mecânicos nodais são expressas sob a forma:

$$\hat{u}(x, y, t) = \{u_0 \quad v_0 \quad w_0 \quad \psi_x \quad \psi_y \quad \psi_z \quad \zeta_x \quad \zeta_y \quad \zeta_z \quad \Phi_x \quad \Phi_y\}^T \quad (6.25)$$

As deformações mecânicas são definidas em termos dos deslocamentos como:

$$\begin{aligned} [\varepsilon_1 \quad \varepsilon_2 \quad \varepsilon_3 \quad \varepsilon_4 \quad \varepsilon_5 \quad \varepsilon_6]^T &= [\varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \varepsilon_{zz} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx} \quad \gamma_{xy}]^T = \\ &= \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \quad \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial w}{\partial z} \quad \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right]^T \end{aligned} \quad (6.26)$$

Aplicando as relações deformações-deslocamentos expressadas pela equação anterior combinadas com as equações (6.24-a) e (6.25), obtêm-se as seguintes expressões, em que as deformações são agrupadas em *deformações de flexão*  $\varepsilon_b$  e em *deformações cisalhantes transversais*  $\varepsilon_s$ .

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \{\varepsilon_b(x, y, z, t)\}_{4 \times 1} = [D_0 + zD_1 + z^2D_2 + z^3D_3]_{4 \times 11} \{\hat{u}(x, y, t)\}_{11 \times 1}$$

$$= [D_b(z)]_{4 \times 11} \{\hat{u}(x, y, t)\}_{11 \times 1} \quad (6.27-a)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \end{Bmatrix} = \{\varepsilon_s(x, y, z, t)\}_{2 \times 1} = [D_4 + zD_5 + z^2D_6]_{2 \times 11} \{\hat{u}(x, y, t)\}_{11 \times 1}$$

$$= [D_s(z)]_{2 \times 11} \{\hat{u}(x, y, t)\}_{11 \times 1} \quad (6.27-b)$$

onde:

$$[D_0] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.28-a)$$

$$[D_1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.28-b)$$

$$[D_2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.28-c)$$

$$[D_3] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (6.28-d)$$

$$[D_4] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.28-e)$$

$$[D_5] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.28-f)$$

$$[D_6] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.28-g)$$

A parte mecânica da formulação adota um elemento retangular bidimensional, como mostra a Fig. 6.3, onde as onze variáveis mecânicas  $\{\hat{u}(x, y, t)\} = \{u_0(x, y, t), v_0(x, y, t), w_0(x, y, t), \psi_x(x, y, t), \psi_y(x, y, t), \psi_z(x, y, t), \zeta_z(x, y, t), \zeta_y(x, y, t), \zeta_x(x, y, t), \phi_x(x, y, t), \phi_y(x, y, t)\}^T$ , são expressas em termos das suas 88 correspondentes *variáveis mecânicas nodais*:  $\{u_e\} = \{u_i, v_i, w_i, \psi_{xi}, \psi_{yi}, \psi_{zi}, \zeta_{zi}, \zeta_{yi}, \zeta_{xi}, \phi_{xi}, \phi_{yi}\}^T$ , com  $i = 1$  a 8, conforme indicado nas Eq.(6.29-a) e Eq.(4.26b).

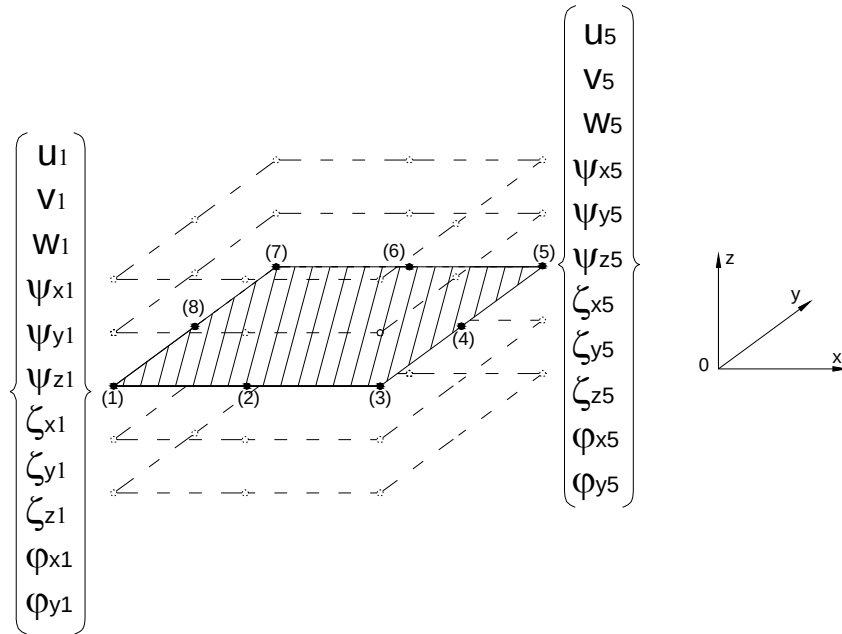


Figura 6.3 - Variáveis mecânicas nodais para os nós 1 e 5 de um elemento plano de 8 nós.

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \psi_x \\ \psi_y \\ \psi_z \\ \zeta_x \\ \zeta_y \\ \zeta_z \\ \phi_x \\ \phi_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & N_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & N_2 & \dots & N_8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \vdots \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \\ \psi_{x2} \\ \psi_{y2} \\ \vdots \\ \phi_{x2} \\ \phi_{y2} \\ \vdots \\ \phi_{y8} \end{Bmatrix} \quad (6.29-a)$$

ou, de forma condensada:

$$\{\hat{u}(\xi, \eta, t)\}_{(11 \times 1)} = [N_u(\xi, \eta)]_{11 \times 88} \{u_e(t)\}_{88 \times 1} \quad (6.29-b)$$

As funções de forma  $N_i(\xi, \eta)$ , com  $i = 1$  a 8, da Equação (6.10) são incluídas na matriz de funções de forma mecânicas  $N_u(\xi, \eta)$  de dimensões  $11 \times 88$ .

Utilizando a equação posterior, o campo de deslocamentos *HSDT de Lo* da Eq. (6.24-a) é reescrito em coordenadas locais elementares como:

$$\begin{Bmatrix} u(\xi, \eta, z, t) \\ v(\xi, \eta, z, t) \\ w(\xi, \eta, z, t) \end{Bmatrix}_{3 \times 1} = [A_u(z)]_{3 \times 11} [N_u(\xi, \eta)]_{11 \times 88} \{u_e(t)\}_{88 \times 1} \quad (6.30-a)$$

ou, de forma simplificada:

$$\{U(\xi, \eta, z, t)\} = [A_u(z)] [N_u(\xi, \eta)] \{u_e(t)\} \quad (6.30-b)$$

ou ainda,

$$\{U\} = [A_u] [N_u] \{u_e\} \quad (6.30-c)$$

Assim, conforme foi mostrado na equação anterior, o vetor de deslocamentos mecânicos elementar  $U$  é expresso na formulação em termos das *funções de forma* e das *variáveis nodais dos deslocamentos mecânicos*.

Reescrevendo as deformações mecânicas apresentadas nas Eqs.(6.27-a) e (6.27-b) em termos das funções de forma e dos deslocamentos mecânicos nodais utilizando a Eq.(6.30-b), resulta:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \varepsilon_b(\xi, \eta, z, t) \\ \varepsilon_s(\xi, \eta, z, t) \end{Bmatrix}_{6 \times 1} &= \begin{bmatrix} D_b(z) \\ D_s(z) \end{bmatrix}_{6 \times 11} [N_u(\xi, \eta)]_{11 \times 88} \{u_e(t)\}_{88 \times 1} \\ &= \begin{bmatrix} B_{bu}(\xi, \eta, z) \\ B_{su}(\xi, \eta, z) \end{bmatrix}_{6 \times 88} \{u_e(t)\}_{88 \times 1} \end{aligned} \quad (6.31-a)$$

ou, de forma condensada:

$$\{\varepsilon(\xi, \eta, z, t)\} = [D(z)] [N_u(\xi, \eta)] \{u_e(t)\} \quad (6.31-b)$$

ou ainda:

$$\{\varepsilon_b\} = [B_{bu}] \{u_e\} \quad (6.31-c)$$

$$\{\varepsilon_s\} = [B_{su}]\{u_e\} \quad (6.31-d)$$

As matrizes  $B$  são expressas como uma função polinomial de  $z$  da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \{\varepsilon_b(\xi, \eta, z, t)\}_{4 \times 1} &= [D_b(z)]_{4 \times 11} [N_u(\xi, \eta)]_{11 \times 88} \{u_e(t)\}_{88 \times 1} = [B_{bu}(\xi, \eta, z)]_{4 \times 88} \{u_e(t)\}_{88 \times 1} \\ &= [B_0(\xi, \eta, z)]_{4 \times 88} \{u_e(t)\}_{88 \times 1} + z[B_1(\xi, \eta, z)]_{4 \times 88} \{u_e(t)\}_{88 \times 1} + z^2[B_2(\xi, \eta, z)]_{4 \times 88} \{u_e(t)\}_{88 \times 1} \\ &\quad + z^3[B_3(\xi, \eta, z)]_{4 \times 88} \{u_e(t)\}_{88 \times 1} \end{aligned} \quad (6.32-a)$$

$$\begin{aligned} \{\varepsilon_s(\xi, \eta, z, t)\}_{2 \times 1} &= [D_s(z)]_{2 \times 11} [N_u(\xi, \eta)]_{11 \times 88} \{u_e(t)\}_{88 \times 1} = [B_{su}(\xi, \eta, z)]_{2 \times 88} \{u_e(t)\}_{88 \times 1} \\ &= [B_4(\xi, \eta, z)]_{2 \times 88} \{u_e(t)\}_{88 \times 1} + z[B_5(\xi, \eta, z)]_{2 \times 88} \{u_e(t)\}_{88 \times 1} + z^2[B_6(\xi, \eta, z)]_{2 \times 88} \{u_e(t)\}_{88 \times 1} \end{aligned} \quad (6.32-b)$$

### 6.3 Formulação de elementos finitos

Como uma estrutura inteligente é composta de materiais ativos e passivos, o acoplamento entre atuadores ativos, substrato passivo (isotrópico ou anisotrópico) e sensores passivos, deve ser incluído no modelo. Este acoplamento é estabelecido pelo *Princípio Variacional de Hamilton* (PVH), considerando as energias mecânica e elétrica do sistema.

A formulação de elementos finitos baseados no *PVH* é muito conveniente porque todas as formas de energia são tratadas conjuntamente e não são necessárias equações baseadas em forças e momentos. A inclusão das energias do substrato, dos atuadores e sensores piezoelétrico unifica os componentes ativos e passivos da estrutura. Assim, o *PVH* permite que toda estrutura seja modelada de uma maneira muito natural através da incorporação de todas as contribuições energéticas presentes.

O *PVH* será utilizado nesta Seção para a obtenção das equações de equilíbrio e de movimento em nível elementar dos modelos de elementos de placas compostas inteligentes, com base nas aproximações para potenciais elétricos e campos de deslocamentos desenvolvidos na Seção anterior, utilizando a *Teoria Mista*.

#### 6.3.1 Formulação elementar e global com base no Princípio Variacional de Hamilton

O *PVH* pode ser expresso matematicamente da seguinte forma (MEIROVITCH, 2000):

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta k - \delta P + \delta W) dt = 0 \quad (6.33)$$

onde  $P$  é a *energia potencial total do sistema*,  $K$  é a *energia cinética total*,  $W$  é o *trabalho total das forças externas* e  $t_0$  e  $t_1$  são instantes de tempo arbitrários.

As integrais das variações da energia cinética e da energia potencial são expressas na formulação em elementos finitos pela transformação da integral no volume  $V$  da estrutura em uma soma de integrais nos volumes dos elementos  $V_e$  e no emprego das funções de forma e variáveis nodais apropriadas no integrando.

A energia cinética em nível elementar é dada por:

$$K_e = \frac{1}{2} \int_{V_e} \rho \{\dot{U}\}^T \{\dot{U}\} dV_e \quad (6.34)$$

onde  $\rho$  é a densidade do material,  $V_e$  é definido como o volume elementar e o vetor  $\{U\} = \{u(x, y, z, t) \ v(x, y, z, t) \ w(x, y, z, t)\}^T$  é o vetor de deslocamentos dado pela Eq.(6.24-c).

Integrando por partes com respeito ao tempo e lembrando que  $\delta U_T(t_0)$  e  $\delta U_T(t_1)$  são nulos (MEIROVITCH, 2000), a *variação da energia cinética total do sistema* é apresentada sob a seguinte forma elementar:

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta K_e dt = \int_{t_0}^{t_1} \int_{V_e} \rho \{\delta \dot{U}\}^T \{\dot{U}\} dV_e dt = - \int_{t_0}^{t_1} \int_{V_e} \rho \{\delta U\}^T \{\ddot{U}\} dV_e dt \quad (6.35)$$

A equação a seguir fornece a integral da variação da *energia cinética* em nível elementar, desenvolvida substituindo as funções de formas expressas na Eq.(6.30-c) na equação anterior.

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta K_e dt = - \int_{t_0}^{t_1} \{\delta u_e\}^T [m_e] \{\ddot{u}_e\} dt \quad (6.36)$$

onde  $[m_e]$  é a matriz de massa elementar expressa segundo:

$$[m_e] = \int_{V_e} \rho [N_u]^T [A_u]^T [A_u] [N_u] dV_e \quad (6.37)$$

onde a matriz  $[A_u]$  é apresentada na Eq.(6.24-c).

Já a *energia potencial elementar* inclui a *energia potencial mecânica elementar* e a *energia potencial elétrica elementar*. Como na formulação por elementos finitos as variáveis naturais preferidas são a deformação e o campo elétrico, a energia potencial mais apropriada é aquela definida em termos destas variáveis. Portanto, segundo Chee (2000):

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta P_e dt = \int_{t_0}^{t_1} \int_{V_e} \left( \{\sigma\}^T \{\delta \varepsilon\} - \{D\}^T \{\delta E\} \right) dV_e dt \quad (6.38)$$

A tensão e o deslocamento elétrico que figuram na equação anterior são expressos em termos da deformação e do campo elétrico usando as equações constitutivas apresentadas no quarto capítulo na Eq. (4.20). A substituição das equações constitutivas fornecidas pela Eq. (4.24) apresentada no referido capítulo, fornece a possibilidade de rotação em torno do eixo transversal z e estão reagrupadas em uma forma compacta, com componentes de flexão e de cisalhamento.

A *energia potencial elementar* pode agora ser expressa em termos das propriedades materiais e das variáveis deformação e campo elétrico expressas através das Eqs. (4.25-a), (4.26-a), (4.27-a) e (4.28-a), assim:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \delta P_e dt &= \int_{t_0}^{t_1} \int_{V_e} \left( \{\sigma_b\}^T \{\delta \varepsilon_b\} + \{\sigma_s\}^T \{\delta \varepsilon_s\} - \{D_i\}^T \{\delta E_i\} - \{D_0\}^T \{\delta E_0\} \right) dV_e dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \int_{V_e} \left( \{\delta \varepsilon_b\}^T \left( [c_b] \{\varepsilon_b\} - [e_b]^T \{E_0\} \right) + \{\delta \varepsilon_s\}^T \left( [c_s] \{\varepsilon_s\} - [e_s]^T \{E_i\} \right) \right) dV_e dt \\ &\quad - \int_{t_0}^{t_1} \int_{V_e} \left( \{\delta E_i\}^T \left( [e_s] \{\varepsilon_s\} + [\chi_i] \{E_i\} \right) + \{\delta E_0\}^T \left( [e_b] \{\varepsilon_b\} + \chi_0 \{E_0\} \right) \right) dV_e dt \end{aligned} \quad (6.39)$$

Se o sistema não possui materiais ativos em sua estrutura, as matrizes  $e_b$  e  $e_s$  serão identicamente nulas. Em caso contrário, a equação anterior considera o efeito piezoelétrico direto e inverso e permite ao material atuar respectivamente como sensor ou atuador. Esta é a característica que permite aos materiais piezoelétrico serem modelados conjuntamente com os materiais passivos da estrutura.

Substituindo as equações das deformações e dos campos elétricos fornecidos nas equações de (6.31-c), (6.31-d), (6.21-c) e (6.21-d) na integral da energia potencial expressa

na Eq.(6.39) e efetuando algumas manipulações matemáticas, resulta a seguinte somatória das contribuições energéticas potenciais:

$$\begin{aligned}
 \int_{t_0}^{t_1} \delta P_e dt = & \int_{t_0}^{t_1} \int_{V_e} \left( \{\delta u_e\}^T \left( [B_{bu}]^T [c_b] [B_{bu}] + [B_{su}]^T [c_s] [B_{su}] \right) \{u_e\} \right) dV_e dt \\
 & + \int_{t_0}^{t_1} \int_{V_e} \left( \{\delta u_e\}^T \left( [B_{bu}]^T [e_b]^T [B_{\phi 0}] + [B_{su}]^T [e_s]^T [B_{\phi i}] \right) \{\phi_e\} \right) dV_e dt \\
 & + \int_{t_0}^{t_1} \int_{V_e} \left( \{\delta \phi_e\}^T \left( [B_{\phi 0}]^T [e_b] [B_{bu}] + [B_{\phi i}]^T [e_s] [B_{su}] \right) \{u_e\} \right) dV_e dt \\
 & - \int_{t_0}^{t_1} \int_{V_e} \left( \{\delta \phi_e\}^T \left( [B_{\phi 0}]^T \chi_0 [B_{\phi 0}] + [B_{\phi i}]^T [\chi_i] [B_{\phi i}] \right) \{\phi_e\} \right) dV_e dt
 \end{aligned} \tag{6.40}$$

Deve-se notar que a estrutura é mecanicamente equivalente a uma simples camada, pois os campos de deslocamento e deformação são aplicados a uma camada única, conforme ilustrado pela Fig. 6.3. Porém, conforme ilustrado na Fig. 6.2, a integração ao longo da espessura  $z$  incorpora os diferentes tipos de materiais das diferentes camadas do elemento de placa. Assim, a Eq. (6.40) é reescrita como:

$$\begin{aligned}
 \int_{t_0}^{t_1} \delta P_e dt = & \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \int \int \int \sum_{k=1}^{nc} \int_{z=z_k}^{z_{(k+1)}} \{ [A] + [B] + [C] - [D] \} dz dy dx \right\} dt
 \end{aligned} \tag{6.41}$$

onde:

$$[A] = \{\delta u_e\}^T \left( [B_{bu}]^T [c_b] [B_{bu}] + [B_{su}]^T [c_s] [B_{su}] \right) \{u_e\} \tag{6.42-a}$$

$$[B] = \{\delta u_e\}^T \left( [B_{bu}]^T [e_b]^T [B_{\phi 0}] + [B_{su}]^T [e_s]^T [B_{\phi i}] \right) \{\phi_e\} \tag{6.42-b}$$

$$[C] = \{\delta \phi_e\}^T \left( [B_{\phi 0}]^T [e_b] [B_{bu}] + [B_{\phi i}]^T [e_s] [B_{su}] \right) \{u_e\} \tag{6.42-c}$$

$$[D] = \{\delta\phi_e\}^T \left( [B_{\phi 0}]^T \chi_0 [B_{\phi 0}] + [B_{\phi i}]^T [\chi_i] [B_{\phi i}] \right) \{\phi_e\} \quad (6.42-d)$$

Para efetuar a integração nas coordenadas no plano da placa, transformam-se as coordenadas planas (x, y) presentes na Eq.(6.41) em coordenadas locais ( $\xi$ ,  $\eta$ ), introduzidas anteriormente por meio das equações (6.7-a), (6.7-b) e (6.8). Assim procedendo, a Eq.(6.41) é rescrita em função das coordenadas locais elementares:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \delta P_e dt = \\ = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \int_{\xi=-1}^{+1} \int_{\eta=-1}^{+1} \left( \sum_{k=1}^{nc} \int_{z=z_k}^{z_{k+1}} \{[A] + [B] + [C] - [D]\} dz \right) J d\eta d\xi \right\} dt \end{aligned} \quad (6.43)$$

onde  $J$  é o Jacobiano, que embute a área plana elementar.

A forma integral apresentada na Eq.(6.43) inclui segundo Chee et al. (2001), as seguintes expressões em nível elementar:

$$[K_{uu}^e] = \sum_{k=1}^{nc} \int_{\xi=-1}^{+1} \int_{\eta=-1}^{+1} \int_{z=z_k}^{z_{k+1}} \left( [B_{bu}]^T [c_b] [B_{bu}] + [B_{su}]^T [c_s] [B_{su}] \right) J dz d\eta d\xi \quad (6.44-a)$$

$$[K_{u\phi}^e] = \sum_{k=1}^{nc} \int_{\xi=-1}^{+1} \int_{\eta=-1}^{+1} \int_{z=z_k}^{z_{k+1}} \left( [B_{bu}]^T [e_b] [B_{\phi 0}] + [B_{su}]^T [e_s] [B_{\phi i}] \right) J dz d\eta d\xi \quad (6.44-b)$$

$$[K_{\phi u}^e] = \sum_{k=1}^{nc} \int_{\xi=-1}^{+1} \int_{\eta=-1}^{+1} \int_{z=z_k}^{z_{k+1}} \left( [B_{\phi 0}]^T [e_b] [B_{bu}] + [B_{\phi i}]^T [e_s] [B_{su}] \right) J dz d\eta d\xi \quad (6.44-c)$$

$$[K_{\phi\phi}^e] = \sum_{k=1}^{nc} \int_{\xi=-1}^{+1} \int_{\eta=-1}^{+1} \int_{z=z_k}^{z_{k+1}} \left( [B_{\phi 0}]^T \chi_0 [B_{\phi 0}] + [B_{\phi i}]^T [\chi_i] [B_{\phi i}] \right) J dz d\eta d\xi \quad (6.44-d)$$

onde,  $[K_{uu}^e]$  é conhecida como *matriz de rigidez elástica* em nível elementar, as matrizes  $[K_{\phi u}^e]$  e  $[K_{u\phi}^e]$  são as *matrizes de rigidez ao acoplamento eletro-mecânico* em nível elementar e  $[K_{\phi\phi}^e]$  é conhecida como *matriz dielétrica* elementar.

Observando as expressões fornecidas pela Eq.(6.44-b) e Eq.(6.44-c), nota-se que as matrizes  $[K_{\phi u}^e]$  e  $[K_{u\phi}^e]$  são transpostas uma da outra.

O último componente da integral da energia é o *trabalho externo*. O trabalho virtual originado dos carregamentos aplicados externamente é o produto entre as *coordenadas variacionais generalizadas* e *forças virtuais*. No caso do sistema em estudo, os trabalhos mecânico e elétrico podem ser compostos por *forças de corpo* ( $F_v$ ), *forças de superfície* ( $F_s$ ), *forças pontuais* ( $F_p$ ) e *cargas elétricas de superfície* ( $Q_s$ ). Então, a integral do trabalho virtual é dado por:

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta W_e dt = \int_{t_0}^{t_1} \left( \int_{V_e} \{\delta U\}^T \{F^v\} dV_e + \int_{S_e} \{\delta U\}^T \{F^s\} dS_e + \{\delta U\}^T \{F^p\} - \int_{S_e} \{\delta \phi\}^T \{Q^s\} dS_e \right) dt \quad (6.45)$$

sendo  $\{F^v\}^T = \{F_x^v \ F_y^v \ F_z^v\}$ ,  $\{F^s\}^T = \{F_x^s \ F_y^s \ F_z^s\}$  e  $\{F^p\}^T = \{F_x^p \ F_y^p \ F_z^p\}$ .  $\{\delta U\}^T$  é o vetor deslocamento mecânico,  $\phi$  o potencial elétrico e  $S_e$  denota área elementar.

A contribuição das cargas elétricas superficiais, das forças de corpo e de superfície expressa na equação em nível elementar a seguir são obtidas escrevendo o trabalho virtual em termos de suas *funções de forma* e *quantidades nodais* fornecidas pelas Eqs.(6.30-c) e (6.15-b). Substituindo essas equações na Eq.(6.45) e efetuando algumas manipulações matemáticas, resulta, em nível elementar, que:

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta W_e dt = \int_{t_0}^{t_1} \left( \{\delta u_e\}^T \{F_e\} - \{\delta \phi_e\}^T \{Q_e\} \right) dt \quad (6.46)$$

onde  $\{F_e\}$  e  $\{Q_e\}$ , são respectivamente os *vetores de forças* e *cargas nodais generalizadas em nível elementar*, dados por:

$$\{F_e\} = \int_{V_e} [N_u]^T [A_u]^T \{F^v\} dV_e + \int_{S_e} [N_u]^T [A_u]^T \{F^s\} dS_e + [N_u]^T [A_u]^T \{F^p\} \quad (6.47)$$

$$\{Q_e\} = \int_{S_e} [N_\phi]^T \{Q^s\} dS_e \quad (6.48)$$

As equações governantes são desenvolvidas substituindo as integrais variacionais energéticas fornecidas nas equações (6.36), (6.43) e (6.46) na equação (6.33) em nível elementar resultando assim na seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
& \int_{t_0}^{t_1} (\delta K_e - \delta P_e + \delta W_e) dt = \\
& \int_{t_0}^{t_1} \{\delta u_e\}^T [m_e] \{\ddot{u}_e\} dt \\
& + \int_{t_0}^{t_1} \left( \{\delta u_e\}^T [K_{uu}^e] \{u_e\} + \{\delta u_e\}^T [K_{u\phi}^e] \{\phi_e\} + \{\delta \phi_e\}^T [K_{\phi u}^e] \{u_e\} + \{\delta \phi_e\}^T [K_{\phi\phi}^e] \{\phi_e\} \right) dt \\
& + \int_{t_0}^{t_1} \left( -\{\delta u_e\}^T \{F_e\} + \{\delta \phi_e\}^T \{Q_e\} \right) dt = 0
\end{aligned} \tag{6.49}$$

As expressões das energias em nível elementar, indicadas pelo subscrito *e*, podem ser transformadas para o nível global, indicadas por subscrito *g*, através da introdução da *matriz de conectividade*  $[L_e]$ , (RADE, 2002; ASSAN, 2003).

Para *ne* elementos, a variação da *energia cinética total do sistema* é dada por:

$$\begin{aligned}
& \int_{t_0}^{t_1} \delta K dt = \\
& \int_{t_0}^{t_1} \left( \sum_{e=1}^{ne} \{\delta u_g\}^T [L_e]^T [m_e] [L_e] \{\ddot{u}_g\} \right) dt = \\
& \int_{t_0}^{t_1} \{\delta u_g\}^T [M_g] \{\ddot{u}_g\} dt
\end{aligned} \tag{6.50}$$

sendo que:

$$[M_g] = \sum_{e=1}^{ne} [L_e]^T [m_e] [L_e] \tag{6.51}$$

é a chamada *matriz de massa global do sistema*. O subscrito *g* indica quantidade global.

Da mesma maneira, a integral da *energia potencial total do sistema* será a soma de todas as contribuições energéticas potenciais em nível elementar de todos os *ne* elementos, sem levar em consideração se eles são materiais ativos ou passivos, o que garante a modelagem de toda estrutura. Portanto:

$$\begin{aligned}
& \int_{t_0}^{t_1} \delta P \, dt = \\
& = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \sum_{e=1}^{ne} \iint_{x \, y} \left( \sum_{k=1}^{nc} \int_{z=z_k}^{z_{(k+1)}} \{A + B + C - D\} dz \right) dy dx \right\} dt
\end{aligned} \tag{6.52}$$

Na modelagem dos materiais puramente passivos esta formulação também se aplica, requerendo somente que as propriedades piezoelétricas sejam anuladas.

A variação da energia potencial *global do sistema* é dada por:

$$\begin{aligned}
& \int_{t_0}^{t_1} \delta P \, dt = \\
& \int_{t_0}^{t_1} \left( \{\delta u_g\}^T [K_{uu}] \{u_g\} + \{\delta u_g\}^T [K_{u\phi}] \{\phi_g\} + \{\delta \phi_g\}^T [K_{\phi u}] \{u_g\} + \{\delta \phi_g\}^T [K_{\phi\phi}] \{\phi_g\} \right) dt
\end{aligned} \tag{6.53}$$

sendo que,

$$[K_{uu}] = \sum_{e=1}^{ne} [L_e]^T [K_{uu}^e] [L_e] \tag{6.54-a}$$

$$[K_{u\phi}] = \sum_{e=1}^{ne} [L_e]^T [K_{u\phi}^e] [L_e] \tag{6.54-b}$$

$$[K_{\phi u}] = \sum_{e=1}^{ne} [L_e]^T [K_{\phi u}^e] [L_e] \tag{6.54-c}$$

$$[K_{\phi\phi}] = \sum_{e=1}^{ne} [L_e]^T [K_{\phi\phi}^e] [L_e] \tag{6.54-d}$$

Para um dado elemento, o trabalho virtual elementar de todas as contribuições das forças externas, mecânicas e elétricas, é dado pela soma de todas as contribuições de forças em nível elementar, ou seja:

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta W_e \, dt = \int_{t_0}^{t_1} \left( \{\delta u_e\}^T \{F_e\} - \{\delta \phi_e\}^T \int_S [N_\phi]^T \{Q^S\} dS_e \right) dt \tag{6.55}$$

Portanto, para  $ne$  elementos, o trabalho virtual de todas as forças que agem sobre o sistema é dado por:

$$\begin{aligned}
 \int_{t_0}^{t_1} \delta W dt = \\
 \int_{t_0}^{t_1} \left( - \{ \delta u_g \}^T \sum_{e=1}^{ne} [L_e] \{ F_e \} + \{ \delta \phi_g \}^T \sum_{e=1}^{ne} [L_e] \{ Q_e \} \right) dt = \\
 \int_{t_0}^{t_1} \left( - \{ \delta u_g \}^T \{ F_g \} + \{ \delta \phi_g \}^T \{ Q_g \} \right) dt
 \end{aligned} \tag{6.56}$$

sendo que  $F_g$  e  $Q_g$  são os *vetores das forças e cargas nodais globais* que agem sobre o sistema respectivamente.

As equações governantes da formulação são desenvolvidas substituindo as integrais variacionais energéticas em nível global fornecidas nas equações (6.50), (6.53) e (6.56) na equação (6.33), resultando na seguinte expressão em nível global:

$$\begin{aligned}
 \int_{t_0}^{t_1} (\delta K - \delta P + \delta W) dt = \\
 \int_{t_0}^{t_1} \{ \delta u_g \}^T [M_g] \{ \ddot{u}_g \} dt \\
 + \int_{t_0}^{t_1} \left( \{ \delta u_g \}^T [K_{uu}] \{ u_g \} + \{ \delta u_g \}^T [K_{u\phi}] \{ \phi_g \} + \{ \delta \phi_g \}^T [K_{\phi u}] \{ u_g \} + \{ \delta \phi_g \}^T [K_{\phi\phi}] \{ \phi_g \} \right) dt \\
 + \int_{t_0}^{t_1} \left( - \{ \delta u_g \}^T \{ F_g \} + \{ \delta \phi_g \}^T \{ Q_g \} \right) dt = 0
 \end{aligned} \tag{6.57}$$

Usando o lema fundamental do cálculo variacional, que estabelece que cada expressão associada com cada tipo de variação deve ser nula para satisfazer a Equação (6.57), o modelo matemático do sistema é expresso pela seguinte *Equação Global do Sistema Eletromecânico Acoplado*:

$$\begin{bmatrix} [M_g] & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{ \ddot{u}_g \} \\ \{ \ddot{\phi}_g \} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [K_{uu}] & [K_{u\phi}] \\ [K_{\phi u}] & [K_{\phi\phi}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{ u_g \} \\ \{ \phi_g \} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{ F_g \} \\ \{ Q_g \} \end{Bmatrix} \tag{6.58}$$

sendo  $g$  o subscrito que indica quantidades globais.

Observa-se que a matriz de rigidez do sistema matricial global construído é formado por quatro submatrizes que representam as componentes de rigidez puramente mecânicas, elétricas e piezoelétricas. As dimensões dessas matrizes dependente do *número total de nós do sistema* ( $nn$ ) e do número de *g.d.l* (11) e camadas  $n$  do elemento. Portanto segue que a matriz  $[K_{uu}]$  é uma matriz quadrada e de ordem  $(nn \times 11)$ , a matriz  $[K_{u\phi}]$  é uma matriz de ordem  $(nn \times 11) \times nn(n+1)$  e a matriz  $[K_{\phi\phi}]$  é uma matriz quadrada de ordem  $nn(n+1)$ . Já a matriz  $[K_{\phi u}]$  é a transposta da matriz  $[K_{u\phi}]$ .

A matriz de massa  $[M_g]$  global do sistema é uma matriz quadrada de ordem  $(nn \times 11)$ . Os vetores  $F_g$ ,  $\ddot{u}_g$  e  $u_g$  possuem dimensão  $(nn \times 11) \times 1$ , e os vetores  $\ddot{\phi}_g$ ,  $\phi_g$  e  $Q_g$  dimensão  $nn(n+1) \times 1$ .

A formulação em elementos finitos, sumarizada pelo sistema apresentado na Eq.(6.58) pode ser aplicada usando qualquer tipo de elemento. As especificidades de cada tipo de elemento são representadas pelas matrizes  $B$  que incorporam as funções de forma.

No programa computacional desenvolvido para esta formulação, as matrizes  $K$  e  $M$  definidas pelas Eqs.(6.51) e (6.54) são integradas simbolicamente usando as funções de cálculo simbólico do ambiente *Matlab*®.

Esta formulação é bastante geral no sentido de propiciar a modelagem de estruturas compostas laminadas com condições de contorno arbitrárias. Cada camada pode ser feita de qualquer material, e se ela for piezoelétrica, poderá agir como atuador ou sensor através da imposição de condições de contorno apropriadas, a seguir discutidas.

### 6.3.2 Condições de contorno mecânicas

Um dos procedimentos de uso corrente para a aplicação das condições de contorno e cálculo das reações consiste no particionamento dos graus de liberdade mecânicos em *graus de liberdade livres* e *graus de liberdade impostos* (RADE, 2002).

O *vetor de deslocamento mecânico global*  $u_g$  pode ser particionado em uma componente livre ou passiva  $u^L$  e outra componente imposta ou ativa  $u^I$ , de tal que:

$$\{u_g\} = \{u_g^L; u_g^I\} \quad (6.59)$$

$$[M_g] = \begin{bmatrix} [M_g^{LL}] & [M_g^{LI}] \\ [M_g^{IL}] & [M_g^{II}] \end{bmatrix} \quad (6.60)$$

$$[K_{uu}] = \begin{bmatrix} [K_{uu}^{LL}] & [K_{uu}^{Li}] \\ [K_{uu}^{iL}] & [K_{uu}^{ii}] \end{bmatrix} \quad (6.61)$$

$$[K_{u\phi}] = \begin{bmatrix} K_{u\phi}^{LL} \\ K_{u\phi}^{ii} \end{bmatrix} \quad (6.62)$$

$$[K_{\phi u}] = \begin{bmatrix} K_{u\phi}^{LL} & K_{u\phi}^{ii} \end{bmatrix} \quad (6.63)$$

ou ainda, de forma simplificada:

$$[M_g^{LL}]\{\ddot{u}_g^L\} + [\bar{K}_g^{LL}]\{u_g^L\} = \{\bar{F}_g\} \quad (6.64)$$

onde:

$$[\bar{K}_g^{LL}] = [K_{uu}^{LL}] - [K_{u\phi}^{LL}][K_{\phi\phi}]^{-1}[K_{\phi u}^{LL}] \quad (6.65)$$

$$\{\bar{F}_g\} = \{F_g^L\} - [M_g^{Li}]\{\ddot{u}_g^i\} + ([K_{u\phi}^{LL}][K_{\phi\phi}]^{-1}[K_{\phi u}^{ii}] - [K_{uu}^{Li}])\{u_g^i\} \quad (6.66)$$

O lado esquerdo da equação diferencial apresentada em (6.64) está expresso em termos das coordenadas livres apenas, e o lado direito envolve as coordenadas impostas. Essa equação diferencial fornece as expressões para cálculo dos deslocamentos nodais  $\{u_g^L\}$  correspondentes aos graus de liberdade livres. O uso da Eq.(6.66) permite a obtenção das forças de reação  $\{\bar{F}_g\}$  correspondentes aos graus de liberdade impostos. Através da Eq.(6.61-c) e dos graus de liberdade livres, são obtidos os potenciais elétricos induzidos nos sensores piezoelétricos do sistema dinâmico.

Os subscritos usados para referir a condição livre dos graus de liberdade e impostas adotados nas matrizes anteriores também podem ser utilizados para indicar a ordem apresentada por essas matrizes. Assim,  $L$  pode representar o número total de graus de liberdade mecânicos (ou elétricos) livres e  $i$  o número total de g.d.l mecânicos/elétricos impostos. Por exemplo para a matriz de rigidez mecânica  $k_{uu}^{iL}$  sua ordem pode ser expressa simplesmente como  $i \times L$ , sendo que o número total de graus de liberdade mecânicos é igual a  $nn \times 11$  e é igual a soma do número de g.d.l impostos  $i$  e dos g.d.l  $L$  livres. A matriz de

rigidez elétrica  $K_{u\phi}^{LL}$  é uma matriz quadrada de ordem  $L$ . O número total de g.d.l elétricos nesse caso é  $nn(n+1)$ , sendo igual a soma dos números de g.d.l elétricos livres e impostos.

Foi constatado na literatura um desacordo em relação à aplicação das condições de contorno aos graus de liberdade mecânicos relativos aos termos de ordem elevada das teorias de ordem superior e que não possuem uma interpretação física imediata.

Alguns autores como Sadek (1998), Chee (2001) e Khare et al.(2003), consideram em suas publicações que os g.d.l mecânicos nodais  $\zeta_{xj}$ ,  $\zeta_{yj}$ ,  $\zeta_{zj}$ ,  $\Phi_{xj}$  e  $\Phi_{yj}$ , com  $j = 1$  a  $8$ , são efetivamente rotações de ordem superior sendo eliminados conjuntamente com as rotações de ordem inferior  $\psi_{xj}$ ,  $\psi_{yj}$ ,  $\psi_{zi}$  e os deslocamentos mecânicos planos  $u_{0j}$  e  $v_{0j}$  nas condições de placas simplesmente apoiadas na extremidade x ou y da placa. Esta maneira de abordar as condições de contorno para uma placa ou viga simplesmente apoiadas diverge da condição de contorno de Kirchhoff e de Reissner-Mindlin aplicadas a vigas e a placas, onde somente são eliminados os g.d.l referentes aos deslocamentos mecânicos planos  $u_0$  ou  $v_0$ .

Para Correia et al. (2000), no entanto, os g.d.l mecânicos de ordem superior  $\zeta_{xj}$ ,  $\zeta_{yj}$ ,  $\zeta_{zj}$ , são vistos como uma espécie de “deslocamento de ordem superior” enquanto  $\Phi_{xj}$  e  $\Phi_{yj}$ , são vistos como rotações de ordem superior. Portanto, diferentemente de demais autores anteriores, os g.d.l:  $\zeta_{xj}$ ,  $\zeta_{yj}$  e  $\zeta_{zj}$ , conjuntamente com os g.d.l deslocamentos mecânicos planos  $u_0$  e  $v_0$  e a rotação  $\psi_{zi}$  são eliminados quando do estudo de placas compostas simplesmente apoiadas, não sendo eliminadas as rotações de ordem elevada  $\Phi_{xj}$  e  $\Phi_{yj}$  e as rotações de baixa ordem  $\psi_{xj}$ ,  $\psi_{yj}$ .

Sendo assim, Correia (2002) expressa a condição de *apoio simples*, como sendo:

- Para as bordas da placa paralelos ao eixo x:

$$u_0 = w_0 = \zeta_x = \zeta_z = \psi_z = 0 \quad (6.67-a)$$

- Para as bordas da placa em que y é constante:

$$v_0 = w_0 = \zeta_y = \zeta_z = \psi_z = 0 \quad (6.67-b)$$

Por outro lado, os demais autores como Sadek (1998), Chee (2000) e Khare et al.(2003) consideram a condição de *apoio simples* como sendo:

- Para um lado paralelo ao eixo global x tem-se  $u = w = 0$ . De acordo com a Eq.(2.3) esta condição conduz a:

$$u_0 = \psi_x = \zeta_x = \Phi_x = w_0 = \psi_z = \zeta_z = 0 \quad (6.68-a)$$

- Para um lado paralelo ao eixo global y, tem-se  $v = w = 0$ . De acordo com a Eq.(2.3) deve-se impor:

$$v_0 = \psi_y = \zeta_y = \Phi_y = w_0 = \psi_z = \zeta_z = 0 \quad (6.68-b)$$

Essas diferentes variantes de condições de contorno são utilizadas no decorrer desta dissertação aplicadas aos modelos formulados no capítulo posterior quando em placas simplesmente apoiadas. No entanto, é observada a importância de um estudo mais profundo sobre o assunto.

Para placas laminadas com lados engastados, os autores anteriores concordam em que:

$$u_0 = \psi_x = \zeta_x = \Phi_x = v_0 = \psi_y = \zeta_y = \Phi_y = w_0 = \psi_z = \zeta_z = 0 \quad (6.69)$$

### 6.3.3 Equações dos sensores e atuadores piezoelétricos

Assumindo que as camadas piezoelétricas passivas (sensores piezoelétricos) e ativas (atuadores piezoelétricos) são embutidas na estrutura, o *vetor de potenciais elétricos*  $\varphi_g$  pode ser particionando em uma componente livre  $\varphi_g^L$ , composta pelas voltagens captadas pelos sensores e outra componente imposta  $\varphi_g^i$ , constituída pelas voltagens impostas aos atuadores piezoelétricos, de forma que:

$$\{\varphi_g\} = \{\varphi_g^L; \varphi_g^i\} \quad (6.70)$$

Separando a expressão apresentada pela Eq.(6.58) nas componentes ativas e passivas e utilizando a equação anterior, a *equação global do sistema eletromecânico acoplado* assume a seguinte forma (SARAVANOS et al., 1995):

$$\begin{bmatrix} [M_g] & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_g \\ \ddot{\varphi}_g^L \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [K_{uu}] & [K_{u\phi}^{LL}] \\ [K_{\phi u}^{LL}] & [k_{\phi\phi}^{LL}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_g \\ \varphi_g^L \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_g\} - [K_{u\phi}^{Li}] \{\varphi_g^i\} \\ \{Q_g^L\} - [K_{\phi\phi}^{Li}] \{\varphi_g^i\} \end{Bmatrix} \quad (6.71)$$

onde os sobrescritos  $L$  e  $i$  indicam as condições livre ou imposta do potencial  $\varphi$ . O lado esquerdo da Eq.(6.71) inclui as respostas eletromecânicas desconhecidas da estrutura  $\{u$ ,

$\phi\}$  que são os deslocamentos mecânicos da estrutura e voltagens elétricas dos sensores piezoelétricos. O lado direito inclui as excitações da estrutura em termos de carregamentos mecânicos, cargas elétricas nodais e voltagens elétricas aplicadas nos atuadores piezoelétricos.

Segundo Saravanos et al. (1997) dentre as vantagens da modelagem representada pelo sistema eletromecânico acoplado dado pela Eq.(6.71) está sua capacidade de modelar a resposta da estrutura inteligente no modo ativo (*active mode*), que é quando voltagens específicas são aplicadas ao longo da espessura das camadas piezoelétricas para produzir uma desejada deflexão/deformação, no modo passivo (*sensory mode*) onde, deslocamentos ou carregamentos mecânicos são aplicados na estrutura e as voltagens ou cargas resultantes são monitoradas, ou ainda no modo híbrido ativo e sensorial (*activity/sensory mode*).

Manipulando a Eq.(6.71), resulta nas seguintes equações dinâmicas desacopladas nos deslocamentos estruturais impostos pelos atuadores e as voltagens medidas pelos sensores, respectivamente expressas a seguir.

$$\begin{aligned} [M_g]\{\ddot{u}_g\} + \left( [k_{uu}] - [k_{u\phi}^{LL}][k_{\phi\phi}^{LL}]^{-1}[k_{\phi u}^{LL}] \right) \{u_g\} &= \{F_g\} - \left( [k_{u\phi}^{LL}][k_{\phi\phi}^{LL}]^{-1}[k_{\phi\phi}^{Li}]^{-1} + [k_{u\phi}^{Li}]^{-1} \right) \{\phi_g^i\} \\ &+ [k_{u\phi}^{LL}][k_{\phi\phi}^{LL}]^{-1}\{Q_g^L\} \end{aligned} \quad (6.72-a)$$

$$\{\phi_g^L\} = [k_{\phi\phi}^{LL}]^{-1} \left( [k_{\phi\phi}^{Li}]\{\phi_g^i\} - [k_{\phi u}^{LL}]\{u_g\} - Q_g^L \right) \quad (6.72-b)$$

sendo que as matrizes  $k_{\phi\phi}^{Li}$  e  $k_{\phi\phi}^{Li}$  surgem devido o particionamento da matriz  $k_{\phi\phi}^{Li}$ , tal como indicado na expressão:

$$[k_{\phi\phi}] = \begin{bmatrix} [k_{\phi\phi}^{LL}] \\ [k_{\phi\phi}^{Li}] \end{bmatrix} \quad (6.73)$$

Como a carga elétrica dos sensores  $Q_g^L$  é assumida igual a zero, as equações (6.72-a) e (6.72-b) podem ser reescritas da forma:

$$\begin{aligned} [M_g]\{\ddot{u}_g\} + \left( [k_{uu}] - [k_{u\phi}^{LL}][k_{\phi\phi}^{LL}]^{-1}[k_{\phi u}^{LL}] \right) \{u_g\} &= \{F_g\} - \left( [k_{u\phi}^{LL}][k_{\phi\phi}^{LL}]^{-1}[k_{\phi\phi}^{Li}]^{-1} + [k_{u\phi}^{Li}]^{-1} \right) \{\phi_g^i\} \end{aligned} \quad (6.74-a)$$

$$\{\varphi_g^L\} = [k_{\phi\phi}^{LL}]^{-1} \left( [k_{\phi\phi}^{Li}] \{\varphi_g^i\} - [k_{\phi u}^{LL}] \{u_g\} \right) \quad (6.74-b)$$

As equações diferenciais acima podem ser integradas numericamente para obtenção da resposta temporal do sistema a uma excitação mecânica e/ou elétrica. Para isso, vários algoritmos de integração numérica passo-a-passo podem ser empregadas (THOMSON,1978; MEIROVITCH, 2000).

Em uma análise estática, a Eq.(6.74-a) reduz-se ao seguinte conjunto de equações algébricas:

$$\left( [k_{uu}] - [k_{u\phi}^{LL}] [k_{\phi\phi}^{LL}]^{-1} [k_{\phi u}^{LL}] \right) \{u_g\} = \{F_g\} - \left( [k_{u\phi}^{LL}] [k_{\phi\phi}^{LL}]^{-1} [k_{\phi\phi}^{Li}]^{-1} + [k_{u\phi}^{Li}]^{-1} \right) \{\varphi_g^i\} \quad (6.75)$$

As equações do sistema eletromecânico acoplado podem ser resolvidas para se obter os modos de vibração e frequências naturais do sistema, conforme detalhado na seção seguinte.

Dois grupos de condições de contorno elétricas são extensivamente adotados para um sistema inteligente: circuito fechado e aberto. Na primeira condição, o potencial elétrico é forçada a permanecer nulo (pastilhas piezoelétricas aterradas) e na segunda condição o potencial elétrico permanece livre. Portanto, na condição de circuito fechado, o sistema de equações aplicadas para as condições de contorno elétricas são simplificados uma vez que o vetor  $\varphi_g^i$ , que fornece os g.d.l elétricos impostos, é considerado um vetor nulo. Na condição de circuito aberto são adotadas as equações apresentadas anteriormente em (6.74-a), (6.74-b) e (6.75).

Portanto, a Eq.(6.74-a) na condição de circuito fechado é simplificada para:

$$[M_g] \{\ddot{u}_g\} + [k_{uu}] \{u_g\} = \{F_g\} \quad (6.76)$$

Para análises estáticas em circuito fechado a Eq.(6.76) se reduz para:

$$[k_{uu}] \{u_g\} = \{F_g\} \quad (6.77)$$

### 6.3.4 Frequências naturais e modos de vibração

Considerando o sistema dinâmico representado pela Eq.(6.74-a), escreve-se:

$$[M_g]\{\ddot{u}_g(t)\} + [\tilde{K}_g]\{u_g(t)\} = \{\tilde{F}_g(t)\} \quad (6.78)$$

sendo:

$$[\tilde{K}_g] = [k_{uu}] - [k_{u\phi}^{LL}][k_{\phi\phi}^{LL}]^{-1}[k_{\phi u}^{LL}] \quad (6.79-a)$$

$$\{\tilde{F}_g(t)\} = \{F_g(t)\} - \left( [k_{u\phi}^{LL}][k_{\phi\phi}^{LL}]^{-1}[k_{\phi\phi}^{Li}]^{-1} + [k_{u\phi}^{Li}]^{-1} \right) \{\phi_g^i(t)\} \quad (6.79-b)$$

No caso de *vibração livre* do sistema não amortecido,  $\tilde{F}_g(t)$  é um vetor nulo. Neste caso, tem-se:

$$[M_g]\{\ddot{u}_g(t)\} + [\tilde{K}_g]\{u_g(t)\} = \{0\} \quad (6.80)$$

Escrevendo a solução da Eq.(6.39) sob a forma:

$$\{u_g(t)\} = \{\tilde{u}_g\} e^{i\omega t} \quad (6.81)$$

a equação (6.80) leva a:

$$\left( [\tilde{K}_g] - \omega^2 [M_g] \right) \{\tilde{u}_g\} = 0 \quad (6.82)$$

A Equação (6.81) representa um problema de autovalor, cuja solução é expressa por duas matrizes  $N \times N$  da forma:

$$[\Lambda] = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \omega_{(N-1)}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \omega_N^2 \end{bmatrix} \quad (6.83)$$

$$[\Psi] = \begin{bmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} & \cdots & \Psi_{1(N-1)} & \Psi_{1(N)} \\ \Psi_{21} & \Psi_{22} & \ddots & \Psi_{2(N-1)} & \Psi_{2(N)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \Psi_{(N-1)1} & \Psi_{(N-1)2} & \ddots & \Psi_{(N-1)(N-1)} & \Psi_{(N-1)(N)} \\ \Psi_{(N)1} & \Psi_{(N)2} & \cdots & \Psi_{(N)(N-1)} & \Psi_{(N)(N)} \end{bmatrix} \quad (6.84)$$

onde,  $[\Lambda]$  é a *matriz diagonal das frequências naturais*  $\omega$  elevadas ao quadrado, chamada *matriz espectral* e  $[\Psi]$  é a *matriz dos modos de vibrar* do sistema, ou matriz modal, correspondentes respectivamente aos autovalores e autovetores do sistema.

O ANEXO III apresenta o fluxograma simplificado do programa desenvolvido em ambiente MATLAB®.