

Raul David Zisa Garcia

**Subespaços complementados e não
complementados em espaços de polinômios
homogêneos**



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE MATEMÁTICA
2025**

Raul David Zisa Garcia

Subespaços complementados e não complementados em espaços de polinômios homogêneos

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA**.

Área de Concentração: Matemática.

Linha de Pesquisa: Análise Funcional.

Orientador: Prof. Dr. Geraldo Márcio de Azevedo Botelho.

UBERLÂNDIA - MG
2025

Ficha Catalográfica Online do Sistema de Bibliotecas da UFU
com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

G216
2025

Garcia, Raul David Zisa, 1996-
Subespaços complementados e não complementados em
espaços de polinômios homogêneos [recurso eletrônico] /
Raul David Zisa Garcia. - 2025.

Orientador: Geraldo Márcio de Azevedo Botelho.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de
Uberlândia, Pós-graduação em Matemática.

Modo de acesso: Internet.

Disponível em: <http://doi.org/10.14393/ufu.di.2025.90>

Inclui bibliografia.

1. Matemática. I. Botelho, Geraldo Márcio de Azevedo,
1962-, (Orient.). II. Universidade Federal de
Uberlândia. Pós-graduação em Matemática. III. Título.

CDU: 51

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de acordo com o AACR2:

Gizele Cristine Nunes do Couto - CRB6/2091
Nelson Marcos Ferreira - CRB6/3074



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA

Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática
Av. João Naves de Ávila, 2121, Bloco 1F, Sala 1F 158 - Bairro Santa Mônica, Uberlândia-
MG, CEP 38400-902
Telefone: (34) 3239-4209/4154 - www.ppmat.ime.ufu.br - ppmat@ime.ufu.br



ATA DE DEFESA - PÓS-GRADUAÇÃO

Programa de Pós-Graduação em:	Matemática				
Defesa de:	Dissertação de Mestrado Acadêmico, 124, PPGMAT				
Data:	27 de fevereiro de 2025	Hora de início:	10:00	Hora de encerramento:	12:00
Matrícula do Discente:	12312MAT006				
Nome do Discente:	Raul David Zisa Garcia				
Título do Trabalho:	Subespaços complementados e não complementados em espaços de polinômios homogêneos				
Área de concentração:	Matemática				
Linha de pesquisa:	Análise Funcional				
Projeto de Pesquisa de vinculação:	Análise em dimensão infinita: dinâmica linear, ideais e reticulados de Banach				

Reuniu-se na Sala 1F 119 (Sala Multiuso do Instituto de Matemática e Estatística) - Bloco 1F (Campus Santa Mônica) da Universidade Federal de Uberlândia, a Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-graduação em Matemática, assim composta: Professores Doutores: Vinícius Colferai Corrêa Miranda - Universidade Federal do ABC ; Thiago Rodrigo Alves - Universidade Federal do Amazonas; e Geraldo Márcio de Azevedo Botelho - IME/UFU, orientador do candidato.

Iniciando os trabalhos o presidente da mesa, Dr. Geraldo , apresentou a Comissão Examinadora e o candidato, agradeceu a presença do público, e concedeu ao Discente a palavra para a exposição do seu trabalho.

A duração da apresentação do Discente e o tempo de arguição e resposta foram conforme as normas do Programa. A seguir o senhor presidente concedeu a palavra, pela ordem sucessivamente, aos examinadores, que passaram a arguir o candidato. Ultimada a arguição, que se desenvolveu dentro dos termos regimentais, a Banca, em sessão secreta, atribuiu o resultado final, considerando o candidato:

Aprovado.

Esta defesa faz parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre.

O competente diploma será expedido após cumprimento dos demais requisitos, conforme as normas do Programa, a legislação pertinente e a regulamentação interna da UFU.

Nada mais havendo a tratar foram encerrados os trabalhos. Foi lavrada a presente ata que após lida e achada conforme foi assinada pela Banca Examinadora.



Documento assinado eletronicamente por **Geraldo Marcio de Azevedo Botelho, Professor(a) do Magistério Superior**, em 06/03/2025, às 17:55, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Thiago Rodrigo Alves, Usuário Externo**, em 06/03/2025, às 19:04, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Vinícius Colferai Corrêa Miranda, Usuário Externo**, em 06/03/2025, às 21:06, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **6150172** e o código CRC **B03E15DD**.

Dedicatória

A mi madre, Luz Marina Garcia Mora; a mi padre, Raul Zisa Cristancho; y a mi hermano, Jesus Odilio Zisa Garcia, por su amor, su apoyo incondicional y por ser mi motor en este camino.

Agradecimentos

À minha família, Luz, Raul e Jesus. Tudo isso é possível graças a vocês.

Ao meu orientador, Geraldo Botelho, agradeço por me aceitar como seu orientado e por compartilhar comigo não apenas um vasto conhecimento acadêmico, mas também valiosas lições de vida. Sou profundamente grato pelo seu apoio constante, especialmente nos momentos mais desafiadores.

A Samanta, que esteve ao meu lado durante todo este processo do mestrado. Obrigado pelo seu carinho, sua paciência e por ser um apoio inabalável.

Aos meus familiares e amigos, especialmente às famílias García e Zisa, que foram fundamentais para que eu pudesse chegar até aqui.

A todas as pessoas que me ajudaram a adaptar-me a este novo lugar.

Aos meus irmãos, Diego e Duvan, que, apesar da distância, sempre me ofereceram seu apoio moral e palavras de encorajamento nos momentos mais importantes.

Às novas amizades que surgiram durante esta etapa, especialmente Josimar, Angela, Juan, Gyan, Eduar, Nati, Ricardo e Fredy, cujo apoio foi fundamental para superar os desafios deste período.

Ao corpo docente da Universidade Federal de Uberlândia (UFU), por sua dedicação, profissionalismo e excelência no ensino, que foram essenciais para a minha formação acadêmica.

Ao Brasil, um país maravilhoso que me acolheu de braços abertos e me permitiu viver experiências que sempre recordarei com gratidão.

À Universidade Distrital Francisco José de Caldas e seu corpo docente, por estabelecerem as bases sólidas da minha formação em matemática e me motivarem a alcançar novas metas.

À UFU, por me admitir como estudante e pela valiosa contribuição que oferece à sociedade por meio de uma educação de qualidade.

À CAPES, pelo generoso financiamento que tornou possível esta etapa da minha formação acadêmica e pessoal.

ZISA GARCIA R. D.. *Subespaços complementados e não complementados em espaços de polinômios homogêneos*. 2025. 88 p. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia-MG.

Resumo

O principal objetivo deste trabalho é estudar subespaços complementados e subespaços não complementados de espaços de polinômios homogêneos contínuos entre espaços de Banach. Num primeiro momento, vários casos clássicos de subespaços complementados são estudados em detalhes. A seguir, o foco da dissertação se concentra nos subespaços formados pelos polinômios homogêneos que são compactos, fracamente compactos e fracamente contínuos sobre limitados, e nas situações em que esses subespaços não são complementados. Este estudo tem como base um teorema relevante de I. Ghenciu para subespaços não complementados em espaços de operadores lineares. A demonstração deste teorema linear é desenvolvida em detalhes. Por fim, apresenta-se o estudo de sua versão generalizada para polinômios, devida a S. Pérez. Os teoremas polinomiais são provados em detalhes e um grande número de aplicações para situações específicas são apresentadas. Com essa abordagem, estabelecem-se várias condições sob as quais os subespaços de polinômios mencionados acima não são complementados.

Palavras-chave: Espaços de Banach, subespaços complementados, subespaços não complementados, polinômios homogêneos, polinômios fracamente contínuos sobre limitados, polinômios compactos e polinômios fracamente compactos.

ZISA GARCIA R. D.. *Complemented and uncomplemented subspaces of spaces of homogeneous polynomials*. 2025. 88 p. M. Sc. Dissertation, Federal University of Uberlândia, Uberlândia-MG.

Abstract

The main purpose of this work is to study complemented subspaces and uncomplemented subspaces of spaces of homogeneous polynomials between Banach spaces. At first, a number of classic cases of complemented subspaces are investigated in detail. Next, the focus of the work is concentrated in the subspaces formed by homogeneous polynomials which are compact, weakly compact and weakly continuous on bounded sets, as well as in situations where these subspaces are not complemented. This investigation is based on a relevant result due to I. Ghenciu for uncomplemented subspaces of spaces of linear operators. The proof of this linear result is developed in detail. Finally, we present the study of its generalized version for polynomials, due to S. Pérez. The polynomial theorems are proved in detail and several applications for specific situations are provided. With this approach, several conditions under which the aforementioned subspaces of polynomials are uncomplemented are established.

Keywords: Banach spaces, complemented subspaces, uncomplemented subspaces, homogeneous polynomials, weakly continuous polynomials on bounded sets, compact polynomials, weakly compact polynomials.

Lista de Símbolos

$\mathbb{N}$	conjunto dos números naturais.
$\mathbb{N}_0$	$\mathbb{N} \cup \{0\}$
$\mathbb{R}$	conjunto dos números reais
$\mathbb{C}$	conjunto dos números complexos
$\mathbb{K}$	$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
E^n	produto cartesiano $\underbrace{E \times \cdots \times E}_{n\text{-vezes}}$
ℓ_∞	espaço de sequências limitadas com valores em $\mathbb{K}$
c_0	espaço de sequências com valores em $\mathbb{K}$ convergentes para 0
ℓ_p	espaço de sequências $(x_n)_n$ com valores em $\mathbb{K}$ tais que $\sum_{n=1}^\infty x_n ^p < \infty$, onde $1 \leq p < \infty$
BAN	classe dos espaços de Banach sobre o corpo $\mathbb{K}$
$B_E[x; r]$	bola fechada no espaço normado E com centro em x e raio r
B_E	$B_E[0; 1]$
E^*	dual topológico do espaço normado E
J_E	mergulho canônico de E em E^{**}
$\sigma(E, E^*)$	topologia fraca do espaço normado E
$\sigma(E^*, E)$	topologia fraca estrela de E^*
$\overline{K}$	fecho topológico do conjunto K em um espaço topológico especificado
$\overline{A}^{\sigma(E, E^*)}$	fecho do conjunto A na topologia fraca de E
$f \otimes b$	função definida por $(f \otimes b)(x) = f(x)b$, onde f é uma função escalar e b um vetor fixo.
$f^n \otimes g$	função definida por $(f^n \otimes g)(x) = f(x)^n g(x)$, onde f é uma função escalar e g é uma função com valores em um espaço vetorial.
$E \xhookrightarrow{c} F$	o espaço normado F contém uma cópia complementada do espaço normado E
$\mathcal{L}(E, F)$	conjunto de operadores lineares contínuos de E em F
$\mathcal{K}(E, F)$	conjunto de operadores lineares compactos de E em F
$\mathcal{K}$	coleção de operadores lineares compactos entre espaços de Banach quaisquer
$\mathcal{W}(E, F)$	operadores fracamente compactos de E em F
$\mathcal{W}$	coleção de todos os operadores fracamente compactos entre espaços de Banach.
$L(E_1, \dots, E_n; F)$	conjunto das aplicações n -lineares de $E_1 \times \cdots \times E_n$ em F
$L(^n E; F)$	conjunto das aplicações n -lineares de E^n em F
$\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$	conjunto das aplicações n -lineares contínuas de $E_1 \times \cdots \times E_n$ em F
$\mathcal{L}(^n E; F)$	conjunto das aplicações n -lineares contínuas de E^n em F

$L^s(^nE; F)$	conjunto de operadores n -lineares simétricos de E^n em F
$\mathcal{L}^s(^nE; F)$	conjunto de operadores n -lineares simétricos contínuos de E^n em F
$P(^nE; F)$	espaço de polinômios n -homogêneos de E em F
$\mathcal{P}(^nE; F)$	espaço de polinômios n -homogêneos contínuos de E em F
$\mathcal{P}$	ideal de polinômios homogêneos contínuos de E em F
$\mathcal{P}_f$	ideal de polinômios homogêneos de tipo finito
$\mathcal{P}_f(^nE; F)$	espaço de polinômios homogêneos de tipo finito de grau n de E em F
$\mathcal{P}_K$	ideal de polinômios homogêneos compactos
$\mathcal{P}_K(^nE; F)$	espaço de polinômios homogêneos compactos de grau n de E em F
$\mathcal{P}_W(^nE; F)$	espaço de polinômios homogêneos fracamente compactos de grau n de E em F
$\mathcal{P}_W$	ideal de polinômios homogêneos fracamente compactos
$\mathcal{P}_\omega(^nE; F)$	espaço de polinômios n -homogêneos fracamente contínuos sobre limitados de E em F
$\mathcal{P}_\omega$	ideal de polinômios homogêneos fracamente contínuos sobre limitados
$A(x_1^{n_1}, \dots, x_m^{n_m})$	operador n -linear A avaliado em $(\overbrace{x_1, \dots, x_1}^{n_1\text{-vezes}}, \dots, \overbrace{x_m, \dots, x_m}^{n_m\text{-vezes}})$ com $n_1 + \dots + n_m = n$
$\overset{\vee}{P}$	aplicação multilinear simétrica associada ao polinômio homogêneo P
$\hat{A}$	polinômio homogêneo associado ao operador multilinear A
P_a	Polinômio $n - 1$ homogêneo definido por $P_a(x) = \overset{\vee}{P}(a, x^{n-1})$, quando P é um polinômio n -homogêneo

Sumário

Resumo	viii
Abstract	ix
Lista de Símbolos	x
Introdução	1
1 Preliminares	4
1.1 Espaços normados	4
1.2 Operadores lineares contínuos	6
1.3 Operadores compactos	9
1.4 Topologia fraca e operadores fracamente compactos	10
1.5 A topologia fraca-estrela	13
1.6 Bases de Schauder	14
1.7 Espaço quociente	16
2 Espaços de polinômios homogêneos e alguns subespaços	18
2.1 Operadores multilineares	18
2.2 Polinômios homogêneos	21
2.3 Ideais coerentes de polinômios	27
2.3.1 Polinômios homogêneos compactos e fracamente compactos	28
2.3.2 Polinômios homogêneos fracamente contínuos sobre limitados	33
2.4 O produto tensorial	37
3 Complementabilidade em espaços de polinômios homogêneos	40
3.1 Subespaços complementados	40
3.2 Subespaços complementados em espaços de polinômios n -homogêneos	45
4 O Teorema de Ghenciu	52
4.1 Resultados preparatórios	52
4.2 O Teorema de Ghenciu e sua demonstração	60
5 Subespaços não complementados de espaços de polinômios	65
5.1 Casos polinomiais do Teorema de Ghenciu	65
5.2 Aplicações	68
5.3 Uma aplicação usando medidas vetoriais	73
5.4 Conclusões acerca da não complementabilidade de $\mathcal{P}_K(^n E; F)$ e $\mathcal{P}_\omega(^n E; F)$	84

Introdução

Desde seu início, nas primeiras décadas do século XX, a Análise Funcional surgiu como uma disciplina destinada a estudar os espaços normados e os operadores lineares entre eles. Com o passar do tempo e com o sucesso da teoria linear, a disciplina passou a tratar também de operadores não lineares, cujos primeiros exemplos são os operadores multilineares e os polinômios homogêneos, operadores esses que estão intimamente relacionados entre si. No início, tanto operadores multilineares como polinômios homogêneos eram estudados como uma ferramenta para o estudo de holomorfia em dimensão infinita, ou seja, o estudo de funções complexas holomorfas em espaços de dimensão infinita. Nas últimas décadas, espaços de polinômios homogêneos passaram a ser estudados por seu interesse próprio, e um dos objetivos sempre foi estender resultados lineares para o caso polinomial. Prova disso são, por exemplo, os importantes trabalhos [28, 37, 43]. Um pouco mais da história do estudo recente de espaços de polinômios homogêneos pode ser encontrada no livro [20].

O objetivo inicial desta dissertação é apresentar, em detalhes, os resultados e, principalmente, as demonstrações de [43]. Os resultados deste artigo foram motivados pela ambição de se generalizar os resultados provados em [25] sobre a complementabilidade de subespaços de espaços de operadores lineares para o contexto de subespaços de espaços de polinômios homogêneos. Cabe mencionar, desde já, que os dois artigos mencionados omitem muitos passos das demonstrações e, às vezes, omitem demonstrações inteiras. Uma das contribuições da presente dissertação é detalhar todos esses argumentos, apresentando todas as justificativas e referências pertinentes.

Quando se fala em subespaços complementados, surge naturalmente a seguinte pergunta: Um determinado subespaço fechado de um determinado espaço de Banach é complementado ou não? Muitas vezes, essa questão se mostra um verdadeiro desafio. Além disso, as seguintes perguntas são usualmente exploradas: Existem subespaços fechados não triviais que são complementados em um dado espaço de Banach? Ou então, existem subespaços fechados que não são complementados em um determinado espaço de Banach? Mais uma vez, em certos casos essas questões se mostram verdadeiramente difíceis.

Um resultado significativo nesta área estabelece que todo subespaço fechado de um espaço de Hilbert é complementado (veja, por exemplo, [11, Corolário 5.2.7]). Entretanto, este panorama é muito diferente para outros espaços de Banach. Por exemplo:

- Em 1937, Murray [38] demonstrou que, para todo $p > 2$, ℓ_p tem subespaços fechados não complementados.

- Em 1940, Phillips [44] provou que c_0 não é complementado em ℓ_∞ .
- Em 1960, Pełczyński [39] estabeleceu que todo subespaço complementado de ℓ_1 é isomorfo a ℓ_1 .
- Em 1971, Lindenstrauss e Tzafriri [34] demonstraram que todo espaço de Banach de dimensão infinita que não é isomorfo a um espaço de Hilbert contém subespaços fechados não complementados. Note que esse resultado responde a uma das perguntas enunciadas acima.

Na teoria dos espaços de Banach, espaços de operadores lineares contínuos desempenham um importante papel. Por $\mathcal{L}(E; F)$ denotamos o espaço dos operadores lineares contínuos do espaço de Banach E no espaço de Banach F , e por $\mathcal{K}(E; F)$ o subespaço fechado de $\mathcal{L}(E; F)$ formado pelos operadores compactos. Complementabilidade em espaços de operadores lineares é uma linha relevante na área. Um exemplo importante é o seguinte:

- Em 1992, Emmanuele [22] e John [31] provaram que se E e F são espaços de Banach tais que $\mathcal{K}(E, F)$ contém uma cópia complementada de c_0 , então $\mathcal{K}(E, F)$ não é complementado em $\mathcal{L}(E, F)$.

Chegando nos objetivos específicos desta dissertação, em 2005 Ghenciu [25] publica um resultado que generaliza vários teoremas obtidos anteriormente por Bator [5], Feder [24] e Emmanuele [21] acerca de subespaços complementados de espaços de operadores lineares. É com base neste teorema de Ghenciu que Pérez [43] realiza a generalização para o caso de espaços de polinômios homogêneos.

Nesta dissertação, estudamos subespaços complementados/não complementados em espaços de operadores lineares e, de forma mais ampla, subespaços complementados/não complementados em espaços de polinômios homogêneos entre espaços de Banach. O objetivo principal é analisar detalhadamente o teorema linear e sua generalização para espaços de polinômios homogêneos. Todos os resultados apresentados são fundamentados em trabalhos já existentes, principalmente em [25] e [43]. Nosso foco, portanto, é descrever e detalhar os resultados e as demonstrações encontrados nessas fontes.

Passamos agora a descrever os conteúdos da dissertação.

O primeiro capítulo apresenta resultados fundamentais da teoria dos espaços de Banach. As demonstrações desses resultados podem ser encontradas nas fontes citadas, que são amplamente conhecidas na literatura, e servem como base essencial para o desenvolvimento dos capítulos subsequentes.

No Capítulo 2, introduzimos o conceito de polinômios n -homogêneos entre espaços de Banach. Também discutimos os subespaços importantes de polinômios homogêneos que serão estudados no último capítulo, os quais são os polinômios compactos, fracamente compactos e fracamente contínuos sobre conjuntos limitados. Por fim, apresentamos um resultado essencial, conhecido como linearização, introduzido por Ryan [46], que será fundamental para generalizar propriedades do caso linear para o caso polinomial.

O terceiro capítulo introduz o conceito de subespaço complementado, abordando resultados clássicos importantes e úteis. Em seguida, apresentamos resultados específicos para o caso dos polinômios homogêneos, demonstrando os primeiros exemplos de como a complementabilidade é tratada nesses espaços. Provamos, em particular, vários casos de subespaços complementados em espaços de polinômios.

No Capítulo 4, expomos o teorema central desta dissertação, introduzido pela matemática romena Ghenciu. Para isso, detalhamos resultados prévios necessários para sua demonstração e desenvolvemos a demonstração completa do teorema.

Por fim, no quinto capítulo, trabalhamos na generalização do caso linear do Teorema de Ghenciu para o caso polinomial, com ênfase em situações em que os subespaços de polinômios descritos no Capítulo 2 não são complementados no espaço de todos os polinômios contínuos. Abordamos a generalização do Teorema de Ghenciu para espaços de polinômios homogêneos, conforme apresentado em [43]. Também incluímos corolários que servem como exemplos e aplicações de diferentes métodos, envolvendo medidas vetoriais, linearização (discutida no Capítulo 2) e séries fracamente incondicionalmente de Cauchy.

Raul David Zisa Garcia
Uberlândia-MG, 27 de fevereiro de 2025.

Capítulo 1

Preliminares

Apresentamos neste capítulo noções e resultados básicos de Análise Funcional que serão utilizados ao longo do texto. Referências para as demonstrações dos teoremas enunciados serão fornecidas. Também aproveitamos este capítulo para fixar boa parte da notação que será empregada.

Por $\mathbb{K}$ denotaremos, indistintamente, o corpo $\mathbb{R}$ dos números reais ou o corpo $\mathbb{C}$ dos números complexos. Os seus elementos serão chamados de escalares e sempre consideraremos espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$.

1.1 Espaços normados

Na Álgebra Linear, estamos familiarizados com as noções de soma de vetores e multiplicação de vetores por escalares, as quais estruturam as operações algébricas dos espaços vetoriais. Por outro lado, em espaços métricos, contamos com uma forma de medir “distância” entre dois pontos, o que nos permite falar de conceitos como convergência, continuidade e compacidade. Os espaços normados, que definiremos a seguir, são estruturas que combinam essas duas ideias.

Definição 1.1.1. Seja E um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Uma *norma* em E é uma função

$$\| \cdot \| : E \longrightarrow \mathbb{R}$$

que cumpre as seguintes condições:

(N1) $\|x\| \geq 0$ para todo $x \in E$ e $\|x\| = 0 \iff x = 0$.

(N2) $\|ax\| = |a| \cdot \|x\|$ para todo escalar a e todo $x \in E$.

(N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para quaisquer $x, y \in E$.

Um espaço vetorial munido de uma norma será chamado de *espaço vetorial normado* ou simplesmente *espaço normado*. É fácil ver que um espaço normado E é um espaço métrico com a métrica dada por

$$d(x, y) = \|x - y\|, \quad x, y \in E.$$

Neste caso dizemos que d é a métrica induzida pela norma $\|\cdot\|$. A menos que seja dito o contrário, um espaço normado será considerado um espaço métrico e, portanto, um espaço topológico, com a topologia induzida pela norma. Dessa forma, toda a Topologia Geral, em particular a teoria de espaços métricos, se aplica aos espaços normados. Em particular, uma sequência $(x_n)_{n=1}^\infty$ em um espaço normado E converge para o vetor $x \in E$ se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0.$$

Nesse caso escrevemos $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ ou $x_n \rightarrow x$.

Definição 1.1.2. Um espaço normado E é chamado *espaço de Banach* quando for um espaço métrico completo com a métrica induzida pela norma, isto é, quando toda sequência de Cauchy em E converge para um elemento de E .

Teorema 1.1.3. *Todo espaço normado de dimensão finita é um espaço de Banach.*

Demonstração. Veja [11, Teorema 1.1.6]. □

Exemplo 1.1.4. Vejamos alguns exemplos clássicos de espaços de Banach:

- (a) Do teorema anterior é imediato que, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $\mathbb{K}^n$ é um espaço de Banach com qualquer uma de suas normas usuais (veja a Definição 1.1.9).
- (b) $\ell_\infty := \{(a_n)_{n=1}^\infty : a_n \in \mathbb{K} \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \text{ e } (a_n)_{n=1}^\infty \text{ é limitada}\}$ é um espaço de Banach com a norma $\|(a_n)_{n=1}^\infty\|_\infty = \sup\{|a_n| : n \in \mathbb{N}\}$. Veja [11, Seção 1.4].
- (c) Por c_0 denota-se o subespaço (fechado) de ℓ_∞ formado pelas sequências convergentes para zero. Então c_0 é espaço de Banach, veja [11, Exemplo 1.1.7].
- (d) Para $1 \leq p < \infty$, $\ell_p := \left\{ (a_n)_{n=1}^\infty : a_n \in \mathbb{K} \text{ para todo } n \text{ e } \sum_{n=1}^\infty |a_n|^p < \infty \right\}$ com a norma $\|(a_n)_{n=1}^\infty\|_p = \left(\sum_{n=1}^\infty |a_n|^p \right)^{1/p}$ é um espaço de Banach (veja [11, Seção 1.4]).

Proposição 1.1.5 (Desigualdade de Hölder). *Sejam $p, q > 1$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $(x_n)_{n=1}^\infty \in \ell_p$ e $(y_n)_{n=1}^\infty \in \ell_q$. Então*

$$\sum_{n=1}^\infty |x_n y_n| \leq \left(\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{n=1}^\infty |y_n|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

Demonstração. Veja [11, Proposição 1.4.1]. □

Proposição 1.1.6. *Sejam p e q tais que $1 \leq p < q \leq \infty$. Então*

$$\ell_p \subseteq \ell_q \text{ e } \|\cdot\|_q \leq \|\cdot\|_p.$$

Demonstração. Veja [48, Proposição 36] para o caso em que $q < \infty$. O caso $q = \infty$ é trivial. □

Proposição 1.1.7. *Sejam E um espaço de Banach e F um subespaço vetorial de E . Então F é um espaço de Banach, com a norma induzida de E , se, e somente se, F é fechado em E .*

Demonstração. Veja [11, Proposição 1.1.1]. □

Definição 1.1.8. Duas normas $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ em um espaço vetorial E são ditas *equivalentes* se existirem constantes positivas c_1 e c_2 tais que

$$c_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2\|x\|_1 \text{ para todo } x \in E.$$

Definição 1.1.9. Sejam $E_1, \dots, E_n$ espaços vetoriais normados sobre $\mathbb{K}$. Para $(x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \dots \times E_n$, definimos

$$\begin{aligned} \|(x_1, \dots, x_n)\|_1 &= \|x_1\| + \dots + \|x_n\|, \\ \|(x_1, \dots, x_n)\|_2 &= (\|x_1\|^2 + \dots + \|x_n\|^2)^{\frac{1}{2}}, \text{ e} \\ \|(x_1, \dots, x_n)\|_\infty &= \max\{\|x_1\|, \dots, \|x_n\|\}. \end{aligned}$$

Proposição 1.1.10. *Sejam $E_1, \dots, E_n$ espaços vetoriais normados.*

- (a) *As aplicações $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ e $\|\cdot\|_\infty$ são normas equivalentes no produto cartesiano $E_1 \times \dots \times E_n$.*
- (b) *Se $E_1, \dots, E_n$ são espaços de Banach, então $E_1 \times \dots \times E_n$ é um espaço de Banach com qualquer uma das normas definidas anteriormente.*

Demonstração. Para o item (a), veja [47, Proposição 2.3 e 2.6 (a)]; para o item (b), veja [47, Proposição 2.6(b)]. □

Definição 1.1.11. Um espaço normado E que contém um subconjunto enumerável e denso em E é dito *separável*.

Para um subconjunto A de um espaço normado E , denotamos por $\text{span}(A)$ o subespaço de E formado pelas combinações lineares finitas de elementos de A . Por $\overline{\text{span}}(A)$, denotamos o fecho do subespaço $\text{span}(A)$, ou seja, o menor subespaço fechado de E que contém A . É claro que $\text{span}(A) \subseteq \overline{\text{span}}(A)$.

Proposição 1.1.12. *Um espaço normado E é separável se, e somente se, existe um subconjunto enumerável A de E tal que $\text{span}(A)$ é denso em E .*

Demonstração. Veja [11, Lema 1.6.3]. □

1.2 Operadores lineares contínuos

Para espaços vetoriais normados E e F , será denotado por $\mathcal{L}(E, F)$ o espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ dos operadores lineares contínuos de E em F . Quando F for o corpo dos escalares, escrevemos E^* no lugar de $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$, chamamos este espaço de *dual de E* , e dizemos que seus elementos são *funcionais lineares contínuos*.

Definição 1.2.1. Dizemos que os espaços normados E e F são *topologicamente isomorfos*, ou simplesmente *isomorfos*, se existe um operador bijetor $T \in \mathcal{L}(E; F)$ com operador inverso contínuo. Tal operador T é chamado de *isomorfismo topológico*, ou simplesmente *isomorfismo*.

Dizemos que T é um *isomorfismo sobre sua imagem* se T é um isomorfismo topológico entre E e o subespaço $T(E)$ de F . Neste caso dizemos que F *contém uma cópia de E* .

Uma função $f: E \rightarrow F$ tal que $\|f(x)\| = \|x\|$ para todo $x \in E$ é chamada de *isometria*. Se, além disso, f é linear, então f é chamada de *isometria linear*. Observe que uma isometria linear é injetora e contínua. Se f é uma isometria linear sobrejetora dizemos que f é um isomorfismo isométrico entre E e F e que esses espaços são isometricamente isomorfos.

E se $T \in \mathcal{L}(E; F)$ é um isomorfismo isométrico sobre sua imagem, dizemos que F *contém uma cópia isométrica de E* .

Dados E, F e G espaços normados, $T: E \rightarrow G$ e $S: G \rightarrow F$ funções, é sabido que a composta $S \circ T$ é função. Também é bem conhecido que: (i) Se T e S são lineares, então $S \circ T$ é linear. (ii) Se T e S são contínuas, então $S \circ T$ é contínua. (iii) Se T e S são isomorfismos, então $S \circ T$ é isomorfismo. (iv) Se T e S são isometrias, então $S \circ T$ é isometria.

Exemplo 1.2.2. (i) Os espaços c_0^* e ℓ_1 são isometricamente isomorfos. (ii) ℓ_1^* é isometricamente isomorfo a ℓ_∞ . (iii) ℓ_p^* é isometricamente isomorfo a ℓ_q , para $p > 1$, onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Para mais detalhes, veja [11, Seção 4.2].

A equivalência entre os itens (a) e (c) do seguinte teorema será frequentemente utilizada ao longo deste trabalho.

Teorema 1.2.3. *Sejam E e F espaços normados sobre $\mathbb{K}$ e $T: E \rightarrow F$ linear. As seguintes condições são equivalentes:*

- (a) T é contínuo.
- (b) $\sup\{\|T(x)\| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\} < \infty$.
- (c) Existe uma constante $C \geq 0$ tal que $\|T(x)\| \leq C\|x\|$ para todo $x \in E$.

Demonstração. Veja [11, Teorema 2.1.1.]. □

Proposição 1.2.4. *Sejam E e F espaços normados.*

- (a) A expressão

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\}$$

define uma norma no espaço $\mathcal{L}(E, F)$.

- (b) $\|T(x)\| \leq \|T\| \cdot \|x\|$ para todos $T \in \mathcal{L}(E, F)$ e $x \in E$.
- (c) Se F for Banach, então $\mathcal{L}(E, F)$ também é Banach.

Demonstração. Veja [11, Proposição 2.1.4.]. □

Sempre que nos referirmos ao espaço $\mathcal{L}(E, F)$, o consideraremos munido com a norma enunciada no item (a) da proposição anterior. Pelo item (c), $\mathcal{L}(E, F)$ será um espaço de Banach sempre que F for um espaço de Banach. Em particular, se E é um espaço normado, então seu dual E^* é um espaço de Banach, pois $\mathbb{K}$ é um espaço de Banach.

Também utilizaremos frequentemente o fato de que, se $A \subseteq E$ é limitado e $T \in \mathcal{L}(E, F)$, então $T(A)$ é limitado em F . Isso é evidente, pois, se existe $c > 0$ tal que $\|x\| \leq c$ para todo $x \in A$, então $\|T(x)\| \leq \|T\| \cdot \|x\| \leq \|T\| \cdot c < \infty$ para todo $x \in A$.

Teorema 1.2.5 (Teorema da Aplicação Aberta). *Sejam E e F espaços de Banach e $T: E \rightarrow F$ linear, contínuo e sobrejetor. Então T é uma aplicação aberta, isto é, T transforma abertos em E em abertos em F . Em particular, todo operador linear contínuo e bijetor entre espaços de Banach é um isomorfismo.*

Demonstração. Veja [11, Teorema 2.4.2]. □

Definição 1.2.6. Sejam E e G espaços normados e F subespaço vetorial de E . Dizemos que $\tilde{T} \in \mathcal{L}(E, G)$ é uma *extensão* de $T \in \mathcal{L}(F, G)$ se a restrição de $\tilde{T}$ ao subespaço F coincide com T , isto é, se $\tilde{T}(x) = T(x)$ para todo $x \in F$. Denotando por $\tilde{T}|_F$ a restrição de $\tilde{T}$ a F , isso é o mesmo que dizer que $\tilde{T}|_F = T$.

Teorema 1.2.7 (Teorema de Hahn-Banach). *Seja F um subespaço vetorial de um espaço normado E sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, e seja $\varphi: F \rightarrow \mathbb{K}$ um funcional linear contínuo. Então existe uma extensão $\tilde{\varphi}: E \rightarrow \mathbb{K}$ de φ tal que $\|\tilde{\varphi}\| = \|\varphi\|$.*

Demonstração. Veja [11, Corolário 3.1.3]. □

Teorema 1.2.8. *Seja E um espaço normado. Para todo $x_0 \in E$, $x_0 \neq 0$, existe um funcional linear $\varphi \in E^*$ tal que $\|\varphi\| = 1$ e $\varphi(x_0) = \|x_0\|$.*

Demonstração. Veja [11, Corolário 3.1.4]. □

Teorema 1.2.9 (Teorema de Phillips). *Sejam F um subespaço vetorial do espaço normado E e $T \in \mathcal{L}(F, \ell_\infty)$. Então existe $\tilde{T} \in \mathcal{L}(E, \ell_\infty)$ extensão de T a E . Mais ainda, $\|\tilde{T}\| = \|T\|$.*

Demonstração. Veja [11, Teorema 3.2.7]. □

Proposição 1.2.10. *Todo espaço normado separável é isomorfo isometricamente a um subespaço de ℓ_∞ .*

Demonstração. Veja [11, Proposição 3.3.3]. □

Por E^{**} denotamos o bidual do espaço normado E , isto é, $E^{**} := (E^*)^*$.

Proposição 1.2.11. *Para todo espaço normado E , o operador linear*

$$J_E: E \rightarrow E^{**}, \quad J_E(x)(\varphi) = \varphi(x) \text{ para todos } x \in E \text{ e } \varphi \in E^*,$$

é uma isometria linear, chamado de mergulho canônico de E em E^{**} .

Demonstração. Veja [11, Proposição 4.3.1]. □

Definição 1.2.12. Um espaço normado E é dito *reflexivo* se o mergulho canônico $J_E: E \rightarrow E^{**}$ for sobrejetor.

Proposição 1.2.13. Para $1 < p < \infty$, o espaço ℓ_p é reflexivo.

Demonstração. Veja [11, Proposição 4.3.12]. □

Definição 1.2.14. Sejam E, F espaços vetoriais normados e $T \in \mathcal{L}(E; F)$. Definimos o operador $T^*: F^* \rightarrow E^*$ por

$$T^*(\varphi)(x) = \varphi(T(x)) \text{ para todos } x \in E \text{ e } \varphi \in F^*.$$

O operador T^* é chamado *adjunto* de T .

Proposição 1.2.15. Sejam E e F espaços de Banach e $T \in \mathcal{L}(E, F)$.

- (a) $T^* \in \mathcal{L}(F^*, E^*)$ e $\|T^*\| = \|T\|$.
- (b) T é sobrejetor se, e somente se, T^* é um isomorfismo sobre sua imagem.
- (c) T é um isomorfismo sobre sua imagem se, e somente se, T^* é sobrejetor.
- (d) T é um isomorfismo se, e somente se, T^* é um isomorfismo.

Demonstração. Para os itens (a) e (d), veja [11, Proposição 4.3.11]. Para os itens (b) e (c), veja [14, Theorem 2.1]. □

1.3 Operadores compactos

Definição 1.3.1. Um subconjunto K de um espaço normado E é dito *compacto* se toda cobertura aberta de K admite subcobertura finita. Diz-se que K é *relativamente compacto* se seu fecho em norma, denotado por $\overline{K}$, é compacto.

A seguinte caracterização é muito útil quando se trata de conjuntos compactos.

Proposição 1.3.2. Um subconjunto K de um espaço normado é compacto se, e somente se, toda sequência em K admite subsequência convergente em K .

Demonstração. Veja [33, Proposição 8.5.7]. □

Proposição 1.3.3. Se E é um espaço vetorial normado de dimensão finita, então os compactos em E são precisamente os conjuntos limitados e fechados.

Demonstração. Veja [11, Proposição 1.5.1]. □

Por B_E denotamos a bola unitária fechada do espaço normado E , isto é, $B_E = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$.

Teorema 1.3.4. Um espaço normado E tem dimensão finita se, e somente se, B_E é um subconjunto compacto de E .

Demonstração. Veja [11, Teorema 1.5.4]. □

Definição 1.3.5. Um operador linear $T: E \longrightarrow F$ entre espaços normados é dito *compacto* se $T(B_E)$ é um subconjunto relativamente compacto em F . A coleção dos operadores compactos de E em F é denotada por $\mathcal{K}(E, F)$, e por $\mathcal{K}$ denotamos a coleção de todos os operadores compactos entre espaços de Banach quaisquer.

Da definição de operador compacto segue imediatamente que a restrição de um operador compacto a qualquer subespaço de seu domínio também é um operador compacto.

A seguinte caracterização de operadores compactos é muito útil.

Proposição 1.3.6. *Sejam E e F espaços normados. As seguintes afirmações são equivalentes para um operador linear $T: E \longrightarrow F$.*

- (a) T é compacto.
- (b) $\overline{T(A)}$ é compacto em F para todo limitado A em E .
- (c) Para toda sequência limitada $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em E , a sequência $(T(x_n))_{n=1}^{\infty}$ tem subsequência convergente em F .

Demonstração. Veja [11, Proposição 7.2.3]. □

Proposição 1.3.7. *Sejam E e F espaços normados. Então $\mathcal{K}(E, F)$ é subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E, F)$. Se F é espaço de Banach, então $\mathcal{K}(E, F)$ é fechado em $\mathcal{L}(E, F)$.*

Demonstração. Veja [11, Proposição 7.2.5]. □

Proposição 1.3.8 (Propriedade de ideal dos operadores compactos). *Sejam E, F e G espaços de Banach, $T \in \mathcal{L}(E, G)$ e $S \in \mathcal{L}(G, F)$ tais que T ou S é compacto. Então $S \circ T$ é compacto.*

Demonstração. Veja [11, Proposição 7.2.6]. □

Teorema 1.3.9 (Teorema de Schauder). *Sejam E e F espaços de Banach e $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Então T é compacto se, e somente se, o adjunto T^* é compacto.*

Demonstração. Veja [11, Teorema 7.2.7]. □

1.4 Topologia fraca e operadores fracamente compactos

Um dos resultados básicos da topologia é que, para qualquer conjunto arbitrário, existe uma topologia que pode ser gerada a partir de um espaço topológico e uma família de funções definidas no conjunto com valores no espaço topológico. Essa topologia, conhecida como a topologia gerada por uma família de funções, é definida como a topologia que tem como base a coleção de interseções finitas das imagens inversas de abertos do espaço topológico. Essa topologia é a menor topologia na qual todas as funções da família são contínuas.

Na Análise Funcional, os elementos de interesse são os espaços normados, os quais têm um corpo escalar associado $\mathbb{K}$, que também é um espaço topológico, e a família de funcionais lineares contínuos que formam o dual do espaço normado. Assim, é natural a seguinte definição:

Definição 1.4.1. A *topologia fraca* no espaço normado E , denotada por $\sigma(E, E^*)$, é a topologia gerada pelos funcionais lineares contínuos $\varphi \in E^*$.

Quando uma rede $(x_\lambda)_{\lambda \in \Omega}$ em E converge para $x \in E$ na topologia fraca de E escrevemos $x_\lambda \xrightarrow{\omega} x$, ou também podemos dizer que $(x_\lambda)_{\lambda \in \Omega}$ é uma rede ω -convergente para x .

Pelo conceito de topologia de subespaço temos que, se E é um espaço normado e A é um subconjunto de E , existe uma topologia em A induzida pela topologia fraca de E , que consiste em todas as interseções de A com elementos de $\sigma(E, E^*)$. Isto é,

$$\sigma(E, E^*)|_A := \{A \cap B : B \in \sigma(E, E^*)\}$$

Além disso, se $(x_\lambda)_{\lambda \in \Omega} \subseteq A$ e $x \in A$, então $x_\lambda \xrightarrow{\omega} x$ se, e somente se, $(x_\lambda)_{\lambda \in \Omega}$ converge para x na topologia de A induzida pela topologia fraca em E . Para esclarecer a diferença quando estamos tratando de uma convergência no subconjunto A , escreveremos $x_\lambda \xrightarrow{\omega_A} x$ para indicar que a rede $(x_\lambda)_\lambda \subseteq A$ converge para $x \in A$ com respeito à topologia $\sigma(E, E^*)|_A$.

Para $A \subseteq E$, denotamos por $\overline{A}^{\sigma(E, E^*)}$ o fecho de A na topologia fraca de E .

Proposição 1.4.2. *Seja E um espaço normado.*

- (a) *Funcionais lineares contínuos são fracamente contínuos, isto é, para todo $\varphi \in E^*$, $\varphi : (E, \sigma(E, E^*)) \rightarrow \mathbb{K}$ é contínuo.*
- (b) *Para cada $x_0 \in E$, os conjuntos da forma*

$$V_{J, \varepsilon} = \{x \in E : |\varphi_i(x) - \varphi_i(x_0)| < \varepsilon \text{ para todo } i \in J\}$$

onde J é um conjunto finito, $\varphi_i \in E^*$ para todo $i \in J$ e $\varepsilon > 0$, formam uma base de vizinhanças abertas de x_0 para a topologia fraca.

- (c) *Seja $(x_n)_{n=1}^\infty$ uma sequência em E . Então $x_n \xrightarrow{\omega} x$ se, e somente se, $\varphi(x_n) \rightarrow \varphi(x)$ para todo $\varphi \in E^*$.*
- (d) *A topologia fraca $\sigma(E, E^*)$ é de Hausdorff.*

Demonstração. Veja [11, Proposição 6.2.2]. □

Proposição 1.4.3. *Se $x_n \rightarrow x$ em um espaço normado, então $x_n \xrightarrow{\omega} x$.*

Demonstração. Veja [11, Corolário 6.2.3]. □

Para cada $n \in \mathbb{N}$, denotamos por e_n a sequência de elementos em $\mathbb{K}$ que tem o valor 1 na n -ésima coordenada e zero em todas as outras coordenadas. Nos espaços de sequências mencionados no Exemplo 1.1.4, os vetores da forma e_n , com $n \in \mathbb{N}$, são chamados de *vetores canônicos unitários* ou *vetores canônicos*. É imediato que os vetores canônicos são linearmente independentes.

Exemplo 1.4.4. No espaço c_0 , a sequência dos vetores canônicos unitários $(e_n)_{n=1}^\infty$ é uma sequência fracamente convergente para 0 que não é convergente em norma em c_0 . Veja [11, Exemplo 6.2.4].

Proposição 1.4.5. *Sejam E e F espaços de Banach. Um operador linear $T : E \longrightarrow F$ é contínuo se, e somente se, $T : (E, \sigma(E, E^*)) \longrightarrow (F, \sigma(F, F^*))$ é contínuo.*

Demonstração. Veja [11, Proposição 6.2.9]. □

Teorema 1.4.6 (Teorema de Kakutani). *Um espaço de Banach E é reflexivo se, e somente se, a bola unitária fechada B_E é compacta na topologia fraca $\sigma(E, E^*)$.*

Demonstração. Ver [11, Teorema 6.4.5]. □

Proposição 1.4.7. *Seja E um espaço normado.*

(a) *A topologia fraca está contida na topologia da norma.*

(b) *As topologias da norma e fraca coincidem se, e somente se, E tem dimensão finita.*

Demonstração. Veja [11, Proposição 6.2.6]. □

Teorema 1.4.8 (Teorema de Mazur). *Sejam E um espaço normado e K um subconjunto convexo de E . Então o fecho de K na topologia da norma de E coincide com o fecho de K na topologia fraca de E . Em particular, um conjunto convexo é fechado na topologia fraca se, e somente se, é fechado na topologia da norma.*

Demonstração. Veja [11, Teorema 6.2.11]. □

Uma consequência imediata do Teorema de Mazur é que, se F é subespaço vetorial do espaço normado E , então $\overline{F} = \overline{F}^{\sigma(E, E^*)}$.

Definição 1.4.9. *Seja K um subconjunto de um espaço de Banach E . Dizemos que:*

(a) *K é fracamente compacto em E se K é compacto na topologia fraca $\sigma(E, E^*)$.*

(b) *K é relativamente fracamente compacto em E se $\overline{K}^{\sigma(E, E^*)}$ é compacto em $(E, \sigma(E, E^*))$.*

Apesar da topologia fraca não ser metrizável em geral, assim como na topologia da norma (relembre a Proposição 1.3.2), a compacidade fraca é equivalente à compacidade sequencial fraca:

Teorema 1.4.10 (Teorema de Eberlein-Smulian). *Seja K um subconjunto do espaço de Banach E . Então K é relativamente fracamente compacto (respectivamente, fracamente compacto) se, e somente se, cada subsequência em K admite subsequência que converge fracamente para algum ponto em E (respectivamente, para algum ponto de K).*

Demonstração. Veja [35, Theorem 2.8.6]. □

Definição 1.4.11. *Um operador linear $T : E \longrightarrow F$ entre espaços de Banach é fracamente compacto se $T(B_E)$ é um subconjunto relativamente fracamente compacto de F . A coleção de operadores fracamente compactos de E em F é denotada por $\mathcal{W}(E, F)$; e por $\mathcal{W}$ denotamos a coleção de todos os operadores fracamente compactos entre espaços de Banach quaisquer.*

É muito fácil verificar que, na definição de operador fracamente compacto, a bola B_E pode ser substituída por subconjuntos limitados de E .

É também consequência imediata da definição que a restrição de um operador fracamente compacto a qualquer subespaço de seu domínio também é um operador fracamente compacto.

Proposição 1.4.12. (i) *Todo operador linear compacto entre espaços de Banach é fracamente compacto.*

(ii) *Todo operador linear fracamente compacto entre espaços de Banach é contínuo.*

Demonstração. Veja [35, Proposition 3.5.2 e 3.5.3]. □

Proposição 1.4.13. *Sejam E e F espaços de Banach. Então $\mathcal{W}(E, F)$ é subespaço fechado de $\mathcal{L}(E, F)$, e portanto é espaço de Banach.*

Demonstração. Veja [35, Proposition 3.5.9 e Corollary 3.5.10]. □

Proposição 1.4.14 (Propriedade de ideal dos operadores fracamente compactos). *Sejam E, F e G espaços de Banach, $T \in \mathcal{L}(E, G)$ e $S \in \mathcal{L}(G, F)$ tais que T ou S é fracamente compacto. Então $S \circ T$ é fracamente compacto.*

Demonstração. Veja [35, Proposition 3.5.11]. □

Teorema 1.4.15 (Teorema de Gantmacher). *Sejam E e F espaços de Banach e $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Então T é fracamente compacto se, e somente se, o adjunto T^* é fracamente compacto.*

Demonstração. Veja [35, Theorem 3.5.13] ou [42, Teorema 4.1.5]. □

1.5 A topologia fraca-estrela

A coleção de funções usada para definir a topologia fraca em um espaço normado E foi a coleção dos funcionais lineares contínuos $\varphi \in E^*$. Em espaços duais, isto é, em um espaço E^* em que E é um espaço normado, a coleção $\{J_E(x) : x \in E\}$ também desempenha um papel importante. Essa coleção é utilizada para definir uma outra topologia em E^* .

Definição 1.5.1. A *topologia fraca-estrela* no dual E^* do espaço normado E , denotada por $\sigma(E^*, E)$, é a topologia em E^* gerada pelas funções pertencentes ao conjunto $J_E(E) = \{J_E(x) : x \in E\}$, isto é, pelas funções $\varphi \in E^* \mapsto J_E(x)(\varphi) = \varphi(x) \in \mathbb{K}$, onde $x \in E$.

Quando uma sequência $(\varphi_n)_{n=1}^\infty$ em E^* converge para $\varphi \in E^*$ na topologia fraca-estrela, escrevemos $\varphi_n \xrightarrow{\omega^*} \varphi$, e também dizemos que $(\varphi_n)_{n=1}^\infty$ é uma sequência ω^* -convergente para φ .

Proposição 1.5.2. *Seja E um espaço normado. Então:*

- (a) *Seja $(\varphi_n)_{n=1}^\infty$ uma sequência em E^* . Então $\varphi_n \xrightarrow{\omega^*} \varphi$ se, e somente se, $\varphi_n(x) \rightarrow \varphi(x)$ para todo $x \in E$.*
- (b) *A topologia fraca-estrela $\sigma(E^*, E)$ é de Hausdorff.*

Demonstração. Veja [11, Proposição 6.3.2]. □

Proposição 1.5.3. *Seja E um espaço normado.*

- (a) *Se $\varphi_n \xrightarrow{\omega} \varphi$ em E^* , então $\varphi_n \xrightarrow{\omega^*} \varphi$.*

(b) Se E é Banach e $\varphi_n \xrightarrow{\omega^*} \varphi$ em E^* , então a sequência $(\|\varphi_n\|)_{n=1}^\infty$ é limitada.

Demonstração. Veja [11, Proposição 6.3.3]. $\square$

Exemplo 1.5.4. A sequência $(e_n)_{n=1}^\infty$ dos vetores canônicos unitários em $\ell_1 = (c_0)^*$ é ω^* -convergente para 0 mas não é ω -convergente em ℓ_1 . Veja [11, Exemplo 6.3.4].

É sabido que existem espaços de dimensão infinita nos quais convergência de sequências na topologia da norma é equivalente à convergência fraca; um exemplo clássico é o espaço ℓ_1 (veja [11, Proposição 6.2.12]). Para a topologia fraca-estrela isso não acontece:

Teorema 1.5.5 (Teorema de Josefson-Nissenzweig). *Todo espaço de Banach dual de dimensão infinita admite uma sequência $(\varphi_n)_{n=1}^\infty$ tal que $\varphi_n \xrightarrow{\omega^*} 0$ e $\|\varphi_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Veja [17, Chapter XII]. $\square$

1.6 Bases de Schauder

Definição 1.6.1. Seja $(x_n)_{n=1}^\infty$ uma sequência no espaço normado E . Diz-se que a série $\sum_{n=1}^\infty x_n$:

(a) *Converge* para $x \in E$ se a sequência das somas parciais $\left(\sum_{j=1}^n x_j\right)_{n=1}^\infty$ converge para x . Neste caso dizemos que a série $\sum_{n=1}^\infty x_n$ é *convergente* e escrevemos $\sum_{n=1}^\infty x_n = x$.

(b) É *absolutamente convergente* se a série numérica $\sum_{n=1}^\infty \|x_n\|$ é convergente. Neste caso escrevemos $\sum_{n=1}^\infty \|x_n\| < \infty$.

(c) É *incondicionalmente convergente* se a série $\sum_{n=1}^\infty x_{\sigma(n)}$ é convergente, qualquer que seja a permutação $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Neste caso prova-se que (veja [11, Proposição 5.3.8.]) $\sum_{n=1}^\infty x_n = \sum_{n=1}^\infty x_{\sigma(n)}$ para toda permutação σ .

Teorema 1.6.2. *Um espaço normado E é de Banach se, e somente se, toda série absolutamente convergente em E é incondicionalmente convergente.*

Demonstração. Veja [11, Proposição 10.1.4.]. $\square$

Teorema 1.6.3. *Para uma sequência $(x_n)_{n=1}^\infty$ em um espaço de Banach E , as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) $\sum_{n=1}^\infty x_n$ é incondicionalmente convergente em E .

(ii) $\sum_{k=1}^{\infty} x_{n_k}$ é incondicionalmente convergente, para qualquer subsequência $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n x_n$ é convergente em E para qualquer $(\xi_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_{\infty}$.

Demonstração. Veja [18, Pág. 9]. □

Definição 1.6.4. Uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ no espaço de Banach E é chamada de *base de Schauder* de E se cada $x \in E$ tem uma representação única sob a forma

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n,$$

onde $a_n \in \mathbb{K}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. A partir de agora escrevemos apenas *base* para designar uma base de Schauder. A base é dita *base incondicional* se, para cada $x \in E$, a série converge incondicionalmente.

A unicidade da representação permite considerar os funcionais lineares

$$x_n^*: E \longrightarrow \mathbb{K}, \quad x_n^* \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j \right) = a_n,$$

com $n \in \mathbb{N}$, que são chamados de *funcionais coeficientes* (ou *funcionais coordenados* ou ainda *funcionais biortogonais associados*).

Segue imediatamente da definição de espaço de Banach E com base de Schauder $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ que

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x) x_n$$

para todo $x \in E$.

Exemplo 1.6.5. Os vetores canônicos unitários $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ formam uma base incondicional de c_0 e ℓ_p para $1 \leq p < \infty$. Por outro lado, ℓ_{∞} é um espaço de Banach que não tem base de Schauder. Veja [11, Exemplo 10.3.3 (a) e (c)].

Em particular todo elemento $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ de c_0 ou de ℓ_p com $1 \leq p < \infty$ pode ser escrito da forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n.$$

Da definição de funcional coordenado temos $e_m^*((a_n)_{n=1}^{\infty}) = a_m$ para todo $m \in \mathbb{N}$.

A sequência $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ não tem subsequência convergente em nenhum dos espaços de sequências mencionados anteriormente, uma vez que $\|e_n - e_m\| = 1$ para todos $n, m \in \mathbb{N}$. Portanto, a sequência $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ não é de Cauchy na topologia da norma, logo não é convergente.

Proposição 1.6.6. *Seja E um espaço de Banach com base de Schauder $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) $(x_n)_{n=1}^\infty$ é uma base incondicional.

(b) Existe $K > 0$ tal que, se a série $\sum_{n=1}^\infty a_n x_n$ converge, então para todas $(b_n)_{n=1}^\infty, (a_n)_{n=1}^\infty \in \ell_\infty$ tais que $|b_n| \leq |a_n|$ para todo $n \in \mathbb{N}$, vale que

$$\left\| \sum_{n=1}^\infty b_n x_n \right\| \leq K \left\| \sum_{n=1}^\infty a_n x_n \right\|.$$

Demonstração. Veja a equivalência (a) $\iff$ (d') em [29, Theorem I-3.2]. $\square$

Definição 1.6.7. Uma sequência $(x_n)_{n=1}^\infty$ no espaço de Banach E é dita *sequência básica* se for base de Schauder de $\overline{\text{span}}(\{x_n : n \in \mathbb{N}\})$.

Definição 1.6.8. Uma sequência $(x_n)_{n=1}^\infty$ em um espaço normado E é dita *sequência seminormalizada* se existem $C_1, C_2 > 0$ tais que $C_1 < \|x_n\| < C_2$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se $\|x_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então a sequência é dita *normalizada*.

Proposição 1.6.9. Sejam $(x_n)_{n=1}^\infty$ uma base de Schauder do espaço de Banach E e $(x_n^*)_{n=1}^\infty$ seus funcionais coeficientes. Então existe uma constante K tal que

$$1 \leq \|x_n^*\| \cdot \|x_n\| \leq K$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Ver [11, Corolário 10.3.9]. $\square$

Teorema 1.6.10 (Banach-Mazur, Bessaga-Pełczyński, Gelbaum). *Todo espaço de Banach de dimensão infinita contém um subespaço de dimensão infinita com base de Schauder.*

Demonstração. Veja [11, Teorema 10.4.10]. $\square$

Segue diretamente que os elementos de uma base de Schauder são linearmente independentes e, em particular, não nulos.

Proposição 1.6.11. Se $(x_n)_{n=1}^\infty$ é uma base de Schauder do espaço E , então $\left(\frac{x_n}{\|x_n\|}\right)_{n=1}^\infty$ é uma base de Schauder normalizada de E .

Demonstração. Veja [35, Corolary 4.1.6]. $\square$

1.7 Espaço quociente

Definição 1.7.1. Seja M um subespaço de um espaço vetorial E . O *espaço quociente* de E módulo M , denotado por E/M , é o espaço vetorial formado pela coleção $\{x + M : x \in E\}$ com as operações

$$(x + M) + (y + M) = (x + y) + M$$

e

$$\alpha \cdot (x + M) = (\alpha \cdot x) + M.$$

Teorema 1.7.2. *Seja M um subespaço vetorial fechado do espaço de Banach E . Defina $d: E/M \times E/M \longrightarrow \mathbb{R}$ por*

$$d(x + M, y + M) = \inf\{\|u - w\| : u \in x + M, w \in y + M\},$$

para todos $x, y \in E$. Então a correspondência

$$x + M \in E/M \mapsto \|x + M\| := d(x + M, 0 + M)$$

define uma norma em E/M , a qual é conhecida como a norma quociente.

Demonstração. Veja [35, Theorem 1.7.4]. □

Definição 1.7.3. *Seja M um subespaço fechado de um espaço normado E . A função quociente de E em E/M é a função $\pi: E \longrightarrow E/M$ definida por $\pi(x) = x + M$.*

Teorema 1.7.4. *Seja M um subespaço fechado de um espaço normado E . Então a função quociente π de E em E/M é um operador linear contínuo sobrejetor.*

Demonstração. A linearidade é clara. Veja [35, Proposition 1.7.12] para a continuidade de π . A sobrejetividade é imediata da definição. □

Capítulo 2

Espaços de polinômios homogêneos e alguns subespaços

Apresentamos nesta seção a teoria básica de operadores multilineares e polinômios homogêneos entre espaços normados, bem como os espaços formados por polinômios homogêneos com propriedades especiais que serão o objeto de estudo dos capítulos subsequentes. As principais fontes utilizadas neste capítulo são [1, 20, 37, 45–47].

2.1 Operadores multilineares

O primeiro passo para conhecer polinômios homogêneos e espaços de polinômios homogêneos é estudar operadores multilineares entre espaços normados.

Definição 2.1.1. Sejam $n \in \mathbb{N}$, $E_1, \dots, E_n$ e F espaços normados sobre o corpo $\mathbb{K}$. Dizemos que uma aplicação $A: E_1 \times \dots \times E_n \longrightarrow F$ é um *operador n -linear* (ou *multilinear*) se é linear em cada uma das suas variáveis, isto é, se

$$A(x_1, \dots, \lambda x_i + x'_i, \dots, x_n) = \lambda A(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) + A(x_1, \dots, x'_i, \dots, x_n)$$

para quaisquer $x_i, x'_i \in E_i$, com $i = 1, \dots, n$ e $\lambda \in \mathbb{K}$.

Quando $E_1 = \dots = E_n$ denotamos $E^n := E_1 \times \dots \times E_n$. Se $A: E^n \longrightarrow F$ é um operador n -linear, então para $n_1, \dots, n_m \in \mathbb{N}$ tal que $n_1 + \dots + n_m = n$ e $x_{n_1}, \dots, x_{n_m} \in E$ denotamos

$$A(x_1^{n_1}, \dots, x_m^{n_m}) := A(\underbrace{x_1, \dots, x_1}_{n_1 \text{ vezes}}, \dots, \underbrace{x_m, \dots, x_m}_{n_m \text{ vezes}}).$$

Em particular, para cada $x \in E$, $Ax^n := A(\underbrace{x, \dots, x}_{n \text{ vezes}})$.

É fácil verificar que o conjunto dos operadores n -lineares do espaço vetorial $E_1 \times \dots \times E_n$ em F , dotado das operações algébricas usuais de funções, formam um espaço vetorial, o qual é denotado como $L(E_1, \dots, E_n; F)$. Considerando $E_1 \times \dots \times E_n$, munido com qualquer uma das normas equivalentes expostas na Definição 1.1.9, denotamos por $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ o conjunto dos operadores n -lineares contínuos de $E_1 \times \dots \times E_n$ em F . Conforme provado em [47, Proposição 2.10], $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ é um subespaço vetorial de $L(E_1, \dots, E_n; F)$. Quando $E_1 = \dots = E_n$, denotamos $L(E_1, \dots, E_n; F)$ por $L^n E; F$, e $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ por $\mathcal{L}^n E; F$.

Proposição 2.1.2. *Sejam $E_1, \dots, E_n$ e F espaços vetoriais normados. Para cada operador $A \in L(E_1, \dots, E_n; F)$, as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (a) A é contínuo.
- (b) A é contínuo na origem.
- (c) Existe uma constante $c \geq 0$ tal que $\|A(x_1, \dots, x_n)\| \leq c \|x_1\| \cdots \|x_n\|$ para quaisquer $x_i \in E_i$, com $i = 1, \dots, n$.
- (d) $\|A\| := \sup\{\|A(x_1, \dots, x_n)\| : x_i \in E_i \text{ e } \|x_i\| \leq 1 \text{ para todo } i = 1, \dots, n\} < \infty$.

Demonstração. Veja [47, Proposição 2.7]. □

Proposição 2.1.3. *Sejam $E_1, \dots, E_n$ e F espaços vetoriais normados. Considere um operador n -linear contínuo $A: E_1 \times \cdots \times E_n \longrightarrow F$. Então:*

- (a) $\|A(x_1, \dots, x_n)\| \leq \|A\| \cdot \|x_1\| \cdots \|x_n\|$ para quaisquer $x_1 \in E_1, \dots, x_n \in E_n$.
- (b) $\|A\| = \inf\{c \geq 0 : \|A(x_1, \dots, x_n)\| \leq c \|x_1\| \cdots \|x_n\| \text{ para todos } x_j \in E_j, j = 1, \dots, n\}$.

Demonstração. Veja [47, Proposição 2.8]. □

Definição 2.1.4. Um operador multilinear $A: E^n \longrightarrow F$ é dito *simétrico* se

$$A(x_1, \dots, x_n) = A(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$$

para todos $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ e $\sigma \in S_n$, onde S_n denota o conjunto das permutações dos n primeiros números naturais.

É imediato que o conjunto de operadores n -lineares simétricos de E^n em F , denotado por $L^s(nE; F)$, é um subespaço vetorial de $L(nE; F)$. Analogamente, o conjunto de operadores n -lineares simétricos contínuos de E^n em F , denotado por $\mathcal{L}^s(nE; F)$, é um subespaço vetorial de $\mathcal{L}(nE; F)$.

Na seguinte proposição, a propriedade descrita no item (b) é conhecida como *propriedade binomial dos operadores multilineares*. Essa propriedade é análoga ao teorema binomial clássico, adaptado para operadores multilineares simétricos, e constitui uma ferramenta essencial no estudo de polinômios homogêneos.

Proposição 2.1.5. *Sejam E e F espaços normados e $A \in L^s(nE; F)$. Para quaisquer $\lambda \in \mathbb{K}$ e $x, y \in E$ tem-se:*

- (a) $A(\lambda x)^n = \lambda^n A x^n$.
- (b) $A(x + y)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} A(x^i, y^{n-i})$.

Demonstração. (a) Segue da definição de operador n -linear que

$$A(\lambda x)^n = A(\lambda x, \dots, \lambda x) = \lambda^n A(x, \dots, x) = \lambda^n Ax^n.$$

(b) Apresentamos apenas um esboço da demonstração, que pode ser completada por indução com facilidade. Para $n = 1$, temos $A(x + y) = A(x) + A(y)$, e a igualdade desejada se cumpre trivialmente. Para $n = 2$ temos

$$\begin{aligned} A(x + y)^2 &= A(x + y, x + y) = A(x, x + y) + A(y, x + y) \\ &= A(x, x) + A(x, y) + A(y, x) + A(y, y) \\ &= \binom{2}{0} A(x, x) + \binom{2}{1} A(x, y) + \binom{2}{2} A(y, y) \\ &= \sum_{i=0}^2 A(x^i, y^{2-i}), \end{aligned}$$

o que fornece a igualdade desejada. Realizando um processo análogo ao anterior para qualquer $n \in \mathbb{N}$ teremos

$$A(x + y)^n = \sum_{z_1, \dots, z_n \in \{x, y\}} A(z_1, \dots, z_n).$$

Como A é simétrico, podemos fatorar a somatória dependendo da quantidade de x e de y que tenham os termos $A(z_1, \dots, z_n)$, portanto, fazendo o cálculo combinatório obtemos

$$A(x + y)^n = \sum_{z_1, \dots, z_n \in \{x, y\}} A(z_1, \dots, z_n) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} A(x^i, y^{n-i}).$$

□

Proposição 2.1.6. Para cada $A \in L^n(E; F)$, define $A^s: E^n \rightarrow F$ por

$$A^s(x_1, \dots, x_n) := \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} A(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}).$$

Então as seguintes propriedades são satisfeitas:

- (a) $A^s \in L^s(nE; F)$.
- (b) $A^s = A$ se, e somente se, $A \in L^s(nE; F)$.
- (c) $(A^s)^s = A^s$.
- (d) O operador $\hat{s}: L^n(E; F) \rightarrow L^s(nE; F)$, definido por $\hat{s}(A) = A^s$, é linear.
- (e) Para cada $x \in E$, $Ax^n = A^s x^n$.

Demonstração. Veja [1, Proposição 1.1.6].

□

Proposição 2.1.7 (Fórmula de Polarização). Seja $A \in L^s(nE; F)$. Para quaisquer $x_0, x_1, \dots, x_n \in E$, vale a fórmula

$$A(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n! 2^n} \sum_{\varepsilon_j = \pm 1} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n A(x_0 + \varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_n x_n)^n.$$

Demonstração. Veja [37, Theorem 1.10].

□

2.2 Polinômios homogêneos

Como dito antes, polinômios homogêneos eram usados como ferramenta para estudar funções analíticas (ou holomorfas) em espaços complexos de dimensão infinita. Há algumas décadas, além dessa óbvia e importante aplicação, os polinômios também têm sido estudados por seu interesse próprio.

Definição 2.2.1. Sejam E e F espaços vetoriais normados e $n \in \mathbb{N}$. Uma aplicação $P: E \rightarrow F$ é denominada *polinômio n -homogêneo* ou *polinômio homogêneo de grau n* , se existe um operador n -linear simétrico $A \in L(^n E; F)$ tal que $P(x) = Ax^n$ para todo ponto $x \in E$.

Um *polinômio homogêneo* é uma aplicação que é um polinômio n -homogêneo para algum $n \in \mathbb{N}$.

Pela Proposição 2.1.5, se $P: E \rightarrow F$ é um polinômio n -homogêneo, então

$$P(\lambda x) = \lambda^n P(x) \text{ para todos } \lambda \in \mathbb{K} \text{ e } x \in E.$$

É fácil ver que o conjunto dos polinômios n -homogêneos $P: E \rightarrow F$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ com as operações algébricas usuais de funções. Denotaremos esse espaço por $P(^n E; F)$. A coleção dos polinômios n -homogêneos $P: E \rightarrow F$ contínuos será denotada por $\mathcal{P}(^n E; F)$. Para o caso em que $F = \mathbb{K}$ escrevemos simplesmente $\mathcal{P}(^n E)$.

Para cada $P \in P(^n E; F)$, definimos

$$\|P\| := \sup\{\|P(x)\| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\} \in [0, +\infty].$$

Em geral, a expressão acima não define uma norma em $P(^n E; F)$, mas, como se verá na Proposição 2.2.5, define sim uma norma em $\mathcal{P}(^n E; F)$.

Proposição 2.2.2. Sejam E e F espaços normados sobre $\mathbb{K}$. Para cada $A \in L^s(^n E; F)$, considere a aplicação

$$\hat{A}: E \rightarrow F, \hat{A}(x) := Ax^n.$$

Então a correspondência $A \mapsto \hat{A}$ é um isomorfismo entre os espaços vetoriais $L^s(^n E; F)$ e $P(^n E; F)$.

Demonstração. Veja [6, Proposição 1.3.5]. □

Da proposição anterior segue que, para cada polinômio $P \in P(^n E; F)$, existe um único operador multilinear simétrico $A \in L^s(^n E; F)$ tal que

$$Ax^n = P(x) \text{ para todo } x \in E.$$

Nesse caso, denotamos $\overset{\vee}{P} := A$. É claro que $\hat{A} = P$.

Proposição 2.2.3. Sejam E e F espaços normados e $P \in P(^n E; F)$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:

- (a) P é contínuo.
- (b) $\|P\| < \infty$.

(c) Existe $K > 0$ tal que $\|P(x)\| \leq K \|x\|^n$ para todo ponto x em E .

(d) $P(A)$ é limitado em F sempre que A for limitado em E .

(e) O operador n -linear simétrico $\overset{\vee}{P}$ é contínuo.

(f) Existe $A \in \mathcal{L}(^n E, F)$ tal que $P(x) = Ax^n$ para todo ponto x em E .

Demonstração. Veja [1, Proposição 1.2.7]. □

Proposição 2.2.4. *Sejam E e F espaços normados, $n \in \mathbb{N}$ e $P \in \mathcal{P}(^n E; F)$. Então:*

(a) $\|P(x)\| \leq \|P\| \cdot \|x\|^n$ para todo $x \in E$.

(b) $\|P\| = \inf\{K \geq 0 : \|P(x)\| \leq K \|x\|^n \text{ para todo } x \in E\}$.

Demonstração. (a) A desigualdade é óbvia para $x = 0$. Para $x \in E$ não nulo,

$$P(x) = P\left(\frac{\|x\|}{\|x\|}x\right) = \|x\|^n P\left(\frac{x}{\|x\|}\right).$$

Como $\left\|\frac{x}{\|x\|}\right\| = 1$, $\left\|P\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \leq \|P\|$. Assim,

$$\|P(x)\| = \left\|P\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \cdot \|x\|^n \leq \|P\| \cdot \|x\|^n.$$

(b) Como $\|P(x)\| \leq \|P\| \cdot \|x\|^n$ para todo $x \in E$, o conjunto $\{K \geq 0 : \|P(x)\| \leq K \|x\|^n, \forall x \in E\}$ é não vazio e contém $\|P\|$. Por definição de ínfimo,

$$\inf\{K \geq 0 : \|P(x)\| \leq K \|x\|^n, \forall x \in E\} \leq \|P\|.$$

Seja $\alpha \in \{K \geq 0 : \|P(x)\| \leq K \|x\|^n, \forall x \in E\}$. Em particular, para qualquer $x \in E$ com $\|x\| \leq 1$, temos $\|P(x)\| \leq \alpha \|x\|^n \leq \alpha$. Logo, α é uma cota superior do conjunto $\{\|P(x)\| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\}$, e por definição de supremo, temos

$$\|P\| = \sup\{\|P(x)\| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\} \leq \alpha.$$

Portanto, $\|P\|$ é uma cota inferior do conjunto $\{K \geq 0 : \|P(x)\| \leq K \|x\|^n, \forall x \in E\}$. Isso implica, por definição de ínfimo, que

$$\|P\| \leq \inf\{K \geq 0 : \|P(x)\| \leq K \|x\|^n, \forall x \in E\},$$

donde segue o resultado. □

Proposição 2.2.5. *Sejam E e F espaços vetoriais normados. Então $(\mathcal{P}(^n E; F), \|\cdot\|)$ é um espaço vetorial normado. Mais ainda, se F é espaço de Banach, então $(\mathcal{P}(^n E; F), \|\cdot\|)$ também é um espaço de Banach.*

Demonstração. Veja [1, Proposição 1.2.8 e Proposição 1.2.10]. □

Exemplo 2.2.6. Considere a aplicação

$$P: \ell_2 \longrightarrow \mathbb{K}, \quad P(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2.$$

P está bem definida pois, para qualquer $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_2$, tem-se

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty.$$

Como série absolutamente convergente em $\mathbb{K}$ é convergente em $\mathbb{K}$, temos

$$P(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 \in \mathbb{K}.$$

Seja

$$A: \ell_2 \times \ell_2 \longrightarrow \mathbb{K}, \quad A(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n.$$

A está bem definida pois, usando a Desigualdade de Hölder (Proposição 1.1.5), temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

e portanto $\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n \in \mathbb{K}$ por ser uma série absolutamente convergente.

Para todos $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}, y = (y_n)_{n=1}^{\infty}, z = (z_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_2$ e $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} A(\lambda x + y, z) &= \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda x_n + y_n) z_n = \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda x_n z_n + y_n z_n) \\ &= \lambda \sum_{n=1}^{\infty} x_n z_n + \sum_{n=1}^{\infty} y_n z_n = \lambda A(x, z) + A(y, z), \end{aligned}$$

provando que A é linear na primeira coordenada. Analogamente se prova a linearidade de A na segunda coordenada, donde segue que A é bilinear. Para todo $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_2$,

$$P(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 = A(x, x),$$

o que mostra que P é um polinômio 2-homogêneo. E de

$$|P(x)| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 = \|x\|_2^2,$$

segue que P é contínuo, isto é, $P \in \mathcal{P}({}^2\ell_2)$.

Fixemos algumas notações. Sejam E e F espaços normados sobre $\mathbb{K}$, $T: E \longrightarrow \mathbb{K}$ e $S: E \longrightarrow F$ funções, e $n \in \mathbb{N}$. Denotamos por $T^n \otimes S$ a função de E em F definida por

$$(T^n \otimes S)(x) = T(x)^n S(x) \text{ para todo } x \in E.$$

Em particular, para $n = 1$, escrevemos $T^1 \otimes S = T \otimes S$.

Se para todo $i = 1, \dots, n$, $\varphi_i \in E^*$ definimos por $\varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_n \otimes T$ a função definida por $(\varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_n \otimes T)(x) = \varphi_1(x) \dots \varphi_n(x) \cdot T(x)$.

Para $b \in F$, a função $T^n \otimes b$ é definida por

$$(T^n \otimes b)(x) = T(x)^n b \text{ para todo } x \in E.$$

O leitor deve estar atento para que a notação fixada acima não seja confundida com a notação para a composição iterada $T \circ \dots \circ T$ de um operador $T: E \longrightarrow E$, a qual também é denotada por T^n .

Exemplo 2.2.7. Dados E e F espaços normados, $P \in \mathcal{P}(^n E)$ e $b \in F$, provemos que $P \otimes b \in \mathcal{P}(^n E; F)$. Para isso, defina

$$A: E^n \longrightarrow F, \quad A(x_1, \dots, x_n) = \bigvee P(x_1, \dots, x_n)b.$$

É fácil verificar, usando a propriedade distributiva do produto por escalar em F , que A é um operador n -linear. Para todo $x \in E$,

$$(P \otimes b)(x) = P(x)b = \bigvee P(x^n)b = A(x^n),$$

o que prova que $P \otimes b$ é um polinômio n -homogêneo. Para provar a continuidade da Proposição 2.2.3, $\|P\| < \infty$ e assim:

$$\begin{aligned} \|P \otimes b\| &= \sup\{\|(P \otimes b)(x)\| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\} \\ &= \sup\{\|P(x)b\| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\} \\ &= \sup\{|P(x)| \cdot \|b\| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\} \\ &= \|b\| \cdot \sup\{|P(x)| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\} \\ &= \|b\| \cdot \|P\| < \infty \end{aligned}$$

onde tem-se, que $P \otimes b \in \mathcal{P}(^n E; F)$ e $\|P \otimes b\| = \|b\| \cdot \|P\|$.

Exemplo 2.2.8. Sejam E e F espaços de Banach, $n, m \in \mathbb{N}$, $P \in \mathcal{P}(^n E; F)$ e $\varphi_1, \dots, \varphi_m \in E^*$. Verificaremos que $\varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_m \otimes P \in \mathcal{P}(^{n+m} E; F)$. Primeiro fazemos a prova para o caso $m = 1$.

Dado $\varphi \in E^*$, seja $A: E^{n+1} \longrightarrow F$ definida por

$$A(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = \varphi(x_1) \bigvee P(x_2, \dots, x_{n+1}).$$

É fácil ver que $A \in L(^{n+1} E; F)$ e que $(\varphi \otimes P)(x) = Ax^{n+1}$ para todo x em E , o que prova que $\varphi \otimes P$ é um polinômio $(n+1)$ -homogêneo, isto é, $\varphi \otimes P \in \mathcal{P}(^{n+1} E; F)$.

Para a continuidade, note que

$$\begin{aligned}
\|\varphi \otimes P\| &= \sup\{\|(\varphi \otimes P)(x)\| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\} \\
&= \sup\{\|\varphi(x) \cdot P(x)\| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\} \\
&= \sup\{|\varphi(x)| \cdot \|P(x)\| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\} \\
&\leq (\sup\{|\varphi(x)| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\}) \cdot (\sup\{\|P(x)\| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\}) \\
&= \|\varphi\| \cdot \|P\| < \infty.
\end{aligned}$$

Segue que $\varphi \otimes P$ é contínuo e $\|\varphi \otimes P\| \leq \|\varphi\| \cdot \|P\|$.

Voltando ao enunciado geral, do caso que acabamos de provar sabemos que $\varphi_1 \otimes P$ é um polinômio $(n+1)$ -homogêneo contínuo e $\|\varphi_1 \otimes P\| \leq \|\varphi_1\| \cdot \|P\|$. Como

$$\varphi_1 \otimes \varphi_2 \otimes P = \varphi_2 \otimes (\varphi_1 \otimes P),$$

também do primeiro caso segue que $\varphi_1 \otimes \varphi_2 \otimes P$ é polinômio $(n+2)$ -homogêneo e $\|\varphi_1 \otimes \varphi_2 \otimes P\| \leq \|\varphi_1\| \cdot \|\varphi_2\| \cdot \|P\|$. Repetindo este processo um número finito de vezes, concluímos que $\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_m \otimes P \in \mathcal{P}^{(n+m)}(E; F)$ e

$$\|\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_m \otimes P\| \leq \|\varphi_1\| \cdots \|\varphi_m\| \cdot \|P\|.$$

Exemplo 2.2.9. Sejam E e F espaços normados, $\varphi \in E^*$ e $b \in F$. Do Exemplo 2.2.7 sabemos que $\varphi \otimes b \in \mathcal{P}^1(E, F) = \mathcal{L}(E, F)$. E do Exemplo 2.2.8 segue que, para todo $n \in \mathbb{N}$ e todos $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in E^*$, $\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n \otimes b \in \mathcal{P}^n(E; F)$. Mais ainda, se $F = \mathbb{K}$ e $b = 1$, então $\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n \otimes 1 = \varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n \in \mathcal{P}^n(E)$.

Definição 2.2.10. Um polinômio $P \in \mathcal{P}^n(E; F)$ entre espaços normados é denominado de *tipo finito* se P se escreve na forma

$$P = \sum_{j=1}^k \varphi_j^n \otimes b_j,$$

onde $k \in \mathbb{N}$, $\varphi_j \in E^*$ e $b_j \in F$ para todo $j = 1, \dots, k$.

Denotamos por $\mathcal{P}_f^n(E; F)$ o conjunto de polinômios n -homogêneos de tipo finito de E em F .

Usando o Exemplo 2.2.9 e o fato de que $\mathcal{P}^n(E; F)$ é espaço vetorial, concluímos que $\mathcal{P}_f^n(E, F)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{P}^n(E; F)$.

No Exemplo 2.2.8 vimos que, ao multiplicar um polinômio homogêneo P por um funcional linear, obtemos um novo polinômio homogêneo de grau maior que o grau de P . Veremos em seguida uma maneira de obter um polinômio homogêneo de grau menor que o grau de P .

Exemplo 2.2.11. Sejam E e F espaços de Banach, $P \in \mathcal{P}^n(E; F)$, com $2 \leq n \in \mathbb{N}$, e $x_0 \in E$. Definimos

$$P_{x_0} : E \longrightarrow F, \quad P_{x_0}(x) = \overset{\vee}{P}(x_0, x^{n-1}).$$

Vejamos que $P_{x_0} \in \mathcal{P}^{(n-1)}(E; F)$. A boa definição de P_{x_0} é clara. Usando a linearidade de $\overset{\vee}{P}$ nas últimas $(n-1)$ -coordenadas, é fácil provar que a aplicação $A : E^{n-1} \longrightarrow F$ definida por

$$A(y_1, \dots, y_{n-1}) := \overset{\vee}{P}(x_0, y_1, \dots, y_{n-1}),$$

é um operador $(n - 1)$ -linear. Para todo $x \in E$,

$$P_{x_0}(x) = \overset{\vee}{P}(x_0, x^{n-1}) = Ax^{n-1},$$

provando que P_{x_0} é um polinômio $(n - 1)$ -homogêneo. Para provar a continuidade, seja $x \in E$. Como $\overset{\vee}{P} \in \mathcal{L}(^n E; F)$, pela Proposição 2.1.3 temos

$$\begin{aligned} \|P_{x_0}(x)\| &= \left\| \overset{\vee}{P}(x_0, x^{n-1}) \right\| \\ &\leq \underbrace{\|\overset{\vee}{P}\| \cdot \|x_0\|}_{\text{Constante}} \|x\|^{n-1}. \end{aligned}$$

Como isso vale para todo $x \in E$, temos $P_{x_0} \in \mathcal{P}(^{n-1} E; F)$ e $\|P_{x_0}\| \leq \|\overset{\vee}{P}\| \cdot \|x_0\|$.

Se $P \in \mathcal{P}(^n E; F)$, com $n > 2$, para $x_0, x_1 \in E$, denotamos $P_{x_0, x_1} := (P_{x_0})_{x_1}$. Do que acabamos de verificar segue que P_{x_0, x_1} é um polinômio $(n - 2)$ -homogêneo contínuo. Repetindo este processo um número finito de vezes, para $x_0, \dots, x_m \in E$ e $n_0, \dots, n_m \in \mathbb{N}$ tais que $r = n_0 + \dots + n_m < n$, definindo $P_{x_0^{n_0}, \dots, x_m^{n_m}} : E \rightarrow F$ por

$$P_{x_0^{n_0}, \dots, x_m^{n_m}}(x) = \overset{\vee}{P}(x_0^{n_0}, \dots, x_m^{n_m}, x^{n-r}),$$

concluimos que $P_{x_0^{n_0}, \dots, x_m^{n_m}}$ é um polinômio $(n - r)$ -homogêneo contínuo.

Em particular se $i < n$, então a expressão $P_{x_0^i}(x) = \overset{\vee}{P}(x_0^i, x^{n-i})$ define um polinômio homogêneo contínuo de grau $(n - i)$.

Teorema 2.2.12. *Sejam E, F, G e H espaços de Banach, $n \in \mathbb{N}$, $P \in \mathcal{P}(^n E; F)$, $u \in \mathcal{L}(G, E)$ e $v \in \mathcal{L}(F, H)$. Então $v \circ P \circ u \in \mathcal{P}(^n G; H)$ e*

$$\|v \circ P \circ u\| \leq \|v\| \cdot \|P\| \cdot \|u\|^n.$$

Demonstração. Seja $A: G^n \rightarrow H$ definida por

$$A(x_1, \dots, x_n) = v \left(\overset{\vee}{P}(u(x_1), \dots, u(x_n)) \right)$$

para quaisquer $x_1, \dots, x_n \in G$. É claro que A está bem definida e resulta fácil verificar que é um operador n -linear. Para qualquer $x \in E$,

$$\begin{aligned} (v \circ P \circ u)(x) &= v(P(u(x))) \\ &= v \left(\overset{\vee}{P}(u(x))^n \right) \\ &= Ax^n, \end{aligned}$$

o que prova que $v \circ P \circ u \in \mathcal{P}(^n G; H)$. Para a continuidade, veja que

$$\begin{aligned} \|(v \circ P \circ u)(x)\| &= \|v((P \circ u)(x))\| \\ &\leq \|v\| \cdot \|(P \circ u)(x)\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \|v\| \cdot \|P(u(x))\| \\
&\leq \|v\| \cdot \|P\| \cdot \|u(x)\|^n \\
&\leq \|v\| \cdot \|P\| (\|u\| \cdot \|x\|)^n. \\
&= \underbrace{(\|v\| \cdot \|P\| \cdot \|u\|^n)}_{\text{constante}} \cdot \|x\|^n
\end{aligned}$$

para todo $x \in E$. Da Proposição 2.2.3 concluímos que $v \circ P \circ u \in \mathcal{P}(^n G; H)$, e a desigualdade desejada segue da Proposição 2.2.4. $\square$

Nas hipóteses da proposição anterior, temos, em particular, que

$$\|v \circ P\| \leq \|v\| \cdot \|P\| \text{ e que } \|P \circ u\| \leq \|P\| \cdot \|u\|^n. \quad (2.1)$$

2.3 Ideais coerentes de polinômios

Nesta seção, estudaremos classes especiais de polinômios homogêneos entre espaços de Banach, denominadas ideais coerentes e fechados de polinômios homogêneos. Essas classes serão importantes na continuação do nosso estudo, especialmente no último capítulo da dissertação. Os conceitos e resultados apresentados nesta seção podem ser encontrados em [10] e [41].

Por BAN passaremos a denotar a classe de todos os espaços de Banach sobre o corpo $\mathbb{K}$ fixado.

Definição 2.3.1. Considere uma subclasse $\mathcal{Q}$ da classe de todos os polinômios homogêneos contínuos entre espaços de Banach, isto é:

$$\mathcal{Q} \subseteq \bigcup_{E, F \in BAN} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{P}(^n E; F).$$

Para espaços de Banach E e F fixados e $n \in \mathbb{N}$ também fixado, definimos a componente da classe $\mathcal{Q}$ por

$$\mathcal{Q}(^n E; F) := \mathcal{P}(^n E; F) \cap \mathcal{Q}.$$

Dizemos que $\mathcal{Q}$ é um *ideal de polinômios homogêneos* se para quaisquer $E, F, G, H \in BAN$ e $n \in \mathbb{N}$, as seguintes condições se cumprem:

- (i) $\mathcal{Q}(^n E; F)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{P}(^n E; F)$ que contém os polinômios de tipo finito, isto é, $\mathcal{P}_f(^n E; F) \subseteq \mathcal{Q}(^n E; F)$.
- (ii) *Propriedade de ideal:* se $u \in \mathcal{L}(G; E)$, $P \in \mathcal{Q}(^n E; F)$ e $v \in \mathcal{L}(F; H)$, então $v \circ P \circ u \in \mathcal{Q}(^n G; H)$.

Por simplicidade, algumas vezes escreveremos *ideal de polinômios* no lugar de *ideal de polinômios homogêneos*.

Definição 2.3.2. Dizemos que um ideal de polinômios homogêneos $\mathcal{Q}$ é um *ideal coerente de polinômios homogêneos* se para quaisquer espaços de Banach E e F , $n \in \mathbb{N}$, $a \in E$ e $\varphi \in E^*$, vale a seguinte implicação:

$$P \in \mathcal{Q}(^n E; F) \implies P_a \in \mathcal{Q}(^{n-1} E; F) \text{ e } \varphi \otimes P \in \mathcal{Q}(^{n+1} E; F).$$

As ideias inerentes à noção de ideal coerente apareceram primeiramente em [8, 9], o termo coerente foi cunhado em [13].

Exemplo 2.3.3. Denotamos por $\mathcal{P}$ a coleção de todos os polinômios homogêneos contínuos entre espaços de Banach. Por definição de polinômios n -homogêneos de tipo finito e Proposição 2.2.12, temos que $\mathcal{P}$ é um ideal de polinômios homogêneos. Mais ainda, é o ideal que contém qualquer outro ideal de polinômios homogêneos. Além disso, dos Exemplos 2.2.8 e 2.2.11 segue que $\mathcal{P}$ é um ideal coerente de polinômios.

Exemplo 2.3.4. Denotamos por $\mathcal{P}_f$ a coleção de todos os polinômios homogêneos contínuos de tipo finito entre espaços de Banach. Provaremos em seguida que $\mathcal{P}_f$ cumpre a propriedade de ideal. Uma vez feito isso, podemos concluir que, em conjunto com o Exemplo 2.2.9, que $\mathcal{P}_f$ é um ideal de polinômios homogêneos. Mais ainda, $\mathcal{P}_f$ é o ideal que está contido em qualquer outro ideal de polinômios homogêneos.

Sejam E, F, G e H espaços de Banach, $P \in \mathcal{P}_f(nE; F)$, $u \in \mathcal{L}(G, E)$ e $v \in \mathcal{L}(F, H)$. Por definição de polinômio de tipo finito, existem $k \in \mathbb{K}$, $\varphi_j \in E^*$ e $b_j \in F$, com $j = 1, \dots, k$, tais que

$$P = \sum_{j=1}^k \varphi_j^n \otimes b_j.$$

Para cada $x \in G$,

$$\begin{aligned} (v \circ P \circ u)(x) &= v(P(u(x))) = v\left(\sum_{j=1}^k (\varphi_j(u(x)))^n b_j\right) \\ &= \sum_{j=1}^k ((\varphi_j \circ u)(x))^n v(b_j) \\ &= \left(\sum_{j=1}^k (\varphi_j \circ u)^n \otimes v(b_j)\right)(x). \end{aligned}$$

Isso prova que $v \circ P \circ u = \sum_{j=1}^k (\varphi_j \circ u)^n \otimes v(b_j)$. Como $\varphi_j \circ u \in G^*$ e $v(b_j) \in H$ para todo $j = 1, \dots, k$, segue que $v \circ P \circ u$ é de tipo finito.

Também é verdade que $\mathcal{P}_f$ é ideal coerente de polinômios, para uma demonstração veja [36, Proposição 5.2.6].

Exemplos adicionais de ideais coerentes de polinômios homogêneos serão vistos nas próximas seções.

2.3.1 Polinômios homogêneos compactos e fracamente compactos

Alguns dos nossos objetos centrais de interesse neste trabalho são os espaços de polinômios compactos, fracamente contínuos sobre limitados e fracamente compactos. Nesta seção e na próxima, apresentaremos esses conceitos e algumas de suas propriedades mais relevantes.

Polinômios compactos são definidos à semelhança do caso linear tratado na Seção 1.3.

Definição 2.3.5. Um polinômio n -homogêneo $P : E \longrightarrow F$ entre espaços de Banach é denominado *compacto* se $\overline{P(B_E)}$ é um subconjunto compacto de F . A coleção de polinômios n -homogêneos compactos de E em F é denotada por $\mathcal{P}_K(^nE; F)$. E denotaremos por $\mathcal{P}_K$ a coleção de todos os polinômios homogêneos compactos entre espaços de Banach quaisquer.

Definição 2.3.6. Sejam E e F espaços vetoriais e $U \subseteq E$. Uma função $f : U \longrightarrow F$ é dita de *posto finito* se o subespaço vetorial $\text{span}(f(U))$ tem dimensão finita.

Em particular um polinômio homogêneo $P : E \longrightarrow F$ é de posto finito se $\text{span}(P(E))$ tem dimensão finita. Também da definição de polinômio n -homogêneo de tipo finito tem-se que os polinômios de tipo finito são de posto finito.

Proposição 2.3.7. *Todo polinômio n -homogêneo entre espaços de Banach $P : E \longrightarrow F$ de posto finito é um polinômio homogêneo compacto.*

Demonstração. Se $x \in B_E$, então $\|P(x)\| \leq \|P\| \cdot \|x\|^n \leq \|P\|$. Portanto, $P(B_E) \subseteq B_F[0; \|P\|]$ e, por tanto, $\overline{P(B_E)} \subseteq \overline{B_F[0; \|P\|]}$, onde $B_F[0; \|P\|]$ denota a bola fechada com centro em 0 e raio $\|P\|$ em F . Por outro lado, como P tem posto finito, pelas Proposições 1.1.3 e 1.1.7 tem-se que $\overline{P(B_E)} \subseteq \overline{\text{span}(P(E))} = \text{span}(P(E))$. Disso segue que

$$\overline{P(B_E)} \subseteq B_F[0; \|P\|] \cap \text{span}(P(E)).$$

Então $\overline{P(B_E)}$ é um subconjunto fechado e limitado do espaço de dimensão finita $\text{span}(P(E))$. Da Proposição 1.3.3 segue que $\overline{P(B_E)}$ é compacto, e assim P é um polinômio homogêneo compacto. $\square$

Exemplo 2.3.8. (a) Aplicando a proposição anterior, temos que os polinômios homogêneos dos Exemplos 2.2.6, 2.2.7 e 2.2.9 são polinômios compactos.

(b) Para todo $n \geq 2$, a aplicação

$$P_n : \ell_1 \longrightarrow \ell_1, \quad P_n((a_j)_{j=1}^\infty) = ((a_j)^n)_{j=1}^\infty,$$

é um polinômio n -homogêneo contínuo que não é compacto. Para uma demonstração, veja [1, Exemplo 4.2.9].

Vale para o caso polinomial a caracterização de compacidade por sequências, análoga à condição (c) da Proposição 1.3.6:

Proposição 2.3.9. *Sejam E e F espaços de Banach e $P \in \mathcal{P}(^nE; F)$. Então P é compacto se, e somente se, para toda sequência limitada $(x_k)_{k=1}^\infty$ em E , a sequência $(P(x_k))_{k=1}^\infty$ possui uma subsequência convergente em F .*

Demonstração. Ver [45, Proposição 4.4.3]. $\square$

Da mesma forma, polinômios fracamente compactos são definidos em paralelo ao que fizemos na Seção 1.4.

Definição 2.3.10. Um polinômio n -homogêneo $P : E \longrightarrow F$ entre espaços de Banach é denominado *fracamente compacto* se $\overline{P(B_E)}^{\sigma(F, F^*)}$ é fracamente compacto em F . A coleção de polinômios n -homogêneos fracamente compactos de E em F é denotada por $\mathcal{P}_W(^nE; F)$. Denotaremos por $\mathcal{P}_W$ a coleção de todos os polinômios homogêneos fracamente compactos entre espaços de Banach quaisquer.

Lema 2.3.11. *Sejam E um espaço de Banach e $A \subseteq E$. Se A é relativamente compacto, então A é relativamente fracamente compacto.*

Demonstração. Seja $(x_n)_n \subseteq A$. Como $\overline{A}$ é compacto por hipótese, pela Proposição 1.3.2 existe uma subsequência $(x_{n_i})_{i=1}^\infty$ convergindo em norma para algum ponto de E . Pela Proposição 1.4.3 essa convergência se dá também na topologia fraca. Assim, $(x_n)_{n=1}^\infty$ contém uma subsequência fracamente convergente em E . Pelo Teorema de Eberlein-Smulian (Teorema 1.4.10) segue que $\overline{A}^{\sigma(E, E^*)}$ é fracamente compacto em E . $\square$

Proposição 2.3.12. *Todo polinômio homogêneo compacto é fracamente compacto, isto é, $\mathcal{P}_K \subseteq \mathcal{P}_W$.*

Demonstração. Segue imediatamente do Lema 2.3.11 e das definições de polinômio compacto e de polinômio fracamente compacto. $\square$

Corolário 2.3.13. *Todo polinômio homogêneo de posto finito é compacto e fracamente compacto. Em particular todo operador linear de posto finito é compacto e fracamente compacto.*

Demonstração. Segue imediatamente das Proposições 2.3.7 e 2.3.12. $\square$

Exemplo 2.3.14. (a) Da Proposição 2.3.12 e do Exemplo 2.3.8(a) segue que os polinômios homogêneos dos Exemplos 2.2.6, 2.2.7 e 2.2.9 são polinômios fracamente compactos.

(b) Os polinômios homogêneos descritos no Exemplo 2.3.8(b) são contínuos mas não são fracamente compactos. Para a demonstração, veja [45, Exemplo 4.5.21] ou [1, Exemplo 4.2.9].

(c) O operador identidade em ℓ_2 é obviamente um operador linear contínuo. Pela Proposição 1.2.13 sabemos que ℓ_2 é reflexivo, logo a identidade em ℓ_2 é um operador fracamente compacto pelo Teorema de Kakutani (Teorema 1.4.6). Mas ela não é compacta pois a bola fechada B_E não é compacta em nenhum espaço normado de dimensão infinita, como é indicado no Teorema 1.3.4. Assim a identidade em ℓ_2 é um polinômio 1-homogêneo fracamente compacto que não é compacto.

A caracterização sequencial também vale no caso fracamente compacto (graças ao Teorema de Eberlein-Smulian):

Proposição 2.3.15. *Sejam E e F espaços de Banach e $P \in \mathcal{P}({}^n E; F)$. Então P é fracamente compacto se, e somente se, para toda sequência limitada $(x_k)_{k=1}^\infty$ em E , a sequência $(P(x_k))_{k=1}^\infty$ possui uma subsequência fracamente convergente em F .*

Demonstração. Ver [45, Proposição 4.15.14]. $\square$

Trabalharemos agora no sentido de provar propriedades especiais dos ideais dos polinômios compacto e fracamente compactos.

Lema 2.3.16. *Sejam E um espaço normado, Ω um conjunto dirigido, $(a_\lambda)_{\lambda \in \Omega}$ uma rede em $\mathbb{K}$, $(x_\lambda)_{\lambda \in \Omega}, (y_\lambda)_{\lambda \in \Omega}$ redes em E , $a \in \mathbb{K}$ e $x, y \in E$.*

(a) *Se $a_\lambda \rightarrow a$ em $\mathbb{K}$ e $x_\lambda \rightarrow x$ em E , então $a_\lambda x_\lambda \rightarrow ax$ em E .*

(b) Se $x_\lambda \rightarrow x$ e $y_\lambda \rightarrow y$ em E , então $x_\lambda + y_\lambda \rightarrow x + y$ em E .

(c) Se $a_\lambda \rightarrow a$ em $\mathbb{K}$ e $x_\lambda \xrightarrow{\omega} x$ em E , então $a_\lambda x_\lambda \xrightarrow{\omega} ax$.

(d) Se $x_\lambda \xrightarrow{\omega} x$ e $y_\lambda \xrightarrow{\omega} y$ em E , então $x_\lambda + y_\lambda \xrightarrow{\omega} x + y$.

O lema acima pode ser entendido da seguinte forma: todo espaço normado é espaço vetorial topológico tanto com a topologia da norma como com a topologia fraca.

Demonstração. (a) Se $a = 0$ o resultado é imediato. Considere $a \neq 0$ e seja $\varepsilon > 0$. Como $x_\lambda \rightarrow x$ e a norma $\|\cdot\|: E \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, temos $\|x_\lambda\| \rightarrow \|x\|$ em $\mathbb{R}$. Existe então $\lambda_1 \in \Omega$ tal que $|\|x_\lambda\| - \|x\|| < \varepsilon$ para todo $\lambda \geq \lambda_1$. Em particular, $\|x_\lambda\| < \varepsilon + \|x\|$ para todo $\lambda \geq \lambda_1$.

Por outro lado, como $a_\lambda \rightarrow a$ em $\mathbb{K}$, existe $\lambda_2 \in \Omega$ tal que se $\lambda \geq \lambda_2$ então $|a_\lambda - a| < \frac{\varepsilon}{2(\varepsilon + \|x\|)}$.

Usando novamente $x_\lambda \rightarrow x$ em E , existe $\lambda_3 \in \Omega$ tal que se $\lambda \geq \lambda_3$ então $\|x_\lambda - x\| < \frac{\varepsilon}{|a|}$.

Como Ω é conjunto dirigido, existe $\lambda_0 \in \Omega$ tal que $\lambda_1 \leq \lambda_0$, $\lambda_2 \leq \lambda_0$ e $\lambda_3 \leq \lambda_0$. Logo,

$$\begin{aligned} \|a_\lambda x_\lambda - ax\| &= \|a_\lambda x_\lambda - ax_\lambda + ax_\lambda - ax\| \\ &\leq \|a_\lambda x_\lambda - ax_\lambda\| + \|ax_\lambda - ax\| \\ &= |a_\lambda - a| \cdot \|x_\lambda\| + |a| \cdot \|x_\lambda - x\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2(\varepsilon + \|x\|)} \|x_\lambda\| + |a| \frac{\varepsilon}{|a|} \\ &< \frac{\varepsilon}{2(\varepsilon + \|x\|)} (\varepsilon + \|x\|) + |a| \frac{\varepsilon}{|a|} \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Está provado que $a_\lambda x_\lambda \rightarrow ax$.

(b) Por hipótese, $\|x_\lambda - x\| \rightarrow 0$ e $\|y_\lambda - y\| \rightarrow 0$. Daí,

$$\|(x_\lambda + y_\lambda) - (x + y)\| = \|(x_\lambda - x) + (y_\lambda - y)\| \leq \|x_\lambda - x\| + \|y_\lambda - y\| \rightarrow 0,$$

donde segue que $x_\lambda + y_\lambda \rightarrow x + y$.

(c) Seja $\varphi \in E^*$. Como $x_\lambda \xrightarrow{\omega} x$, temos $\varphi(x_\lambda) \rightarrow \varphi(x)$. Pelo item (a) do lema segue que

$$\varphi(a_\lambda x_\lambda) = a_\lambda \varphi(x_\lambda) \rightarrow a \varphi(x) = \varphi(ax).$$

Como isso vale para todo $\varphi \in E^*$, temos $a_\lambda x_\lambda \xrightarrow{\omega} ax$.

(d) Seja $\varphi \in E^*$. Por hipótese, $\varphi(x_\lambda) \rightarrow \varphi(x)$ e $\varphi(y_\lambda) \rightarrow \varphi(y)$. Pelo item (b) segue que

$$\varphi(x_\lambda + y_\lambda) = \varphi(x_\lambda) + \varphi(y_\lambda) \rightarrow \varphi(x) + \varphi(y) = \varphi(x + y).$$

Como isso vale para todo $\varphi \in E^*$, temos $x_\lambda + y_\lambda \xrightarrow{\omega} x + y$. □

Definição 2.3.17. Um ideal de polinômios $\mathcal{Q}$ é dito *fechado* se, para todos $n \in \mathbb{N}$ e espaços de Banach E e F , sua componente $\mathcal{Q}(^n E; F)$ é um subespaço fechado de $\mathcal{P}(^n E; F)$.

Proposição 2.3.18. Os ideais $\mathcal{P}_{\mathcal{K}}$ dos polinômios compactos e $\mathcal{P}_{\mathcal{W}}$ dos polinômios fracamente compactos são ideais coerentes e fechados.

Demonstração. O fato de que $\mathcal{P}_{\mathcal{K}}$ e $\mathcal{P}_{\mathcal{W}}$ são ideais de polinômios fechados segue de [10, Proposition 3.3] e do comentário subsequente à prova dessa proposição.

Provemos as propriedades de coerência. Sejam E e F espaços de Banach, $n \in \mathbb{N}$, $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{K}}(^n E; F)$, $\varphi \in E^*$ e $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ uma sequência limitada em E . Provemos primeiramente que o polinômio $(n+1)$ -homogêneo $\varphi \otimes P$ é compacto.

Pela Proposição 2.3.7, sabemos que $\varphi \in E^*$ é um operador compacto, então existe pela Proposição 2.3.9 uma subsequência $(x_{k_i})_{i=1}^{\infty}$ de $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ tal que $(\varphi(x_{k_i}))_{i=1}^{\infty}$ é convergente em $\mathbb{K}$. Como $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ é limitada, sua subsequência $(x_{k_i})_{i=1}^{\infty}$ também é limitada; e como P é compacto, da Proposição 2.3.9 existe uma subsequência $(x_{i_j})_{j=1}^{\infty}$ de $(x_{k_i})_{i=1}^{\infty}$ tal que $P(x_{i_j})_{j=1}^{\infty}$ é convergente em F . E como $(\varphi(x_{k_i}))_{i=1}^{\infty}$ é convergente, então $(\varphi(x_{i_j}))_{j=1}^{\infty}$ também é convergente em $\mathbb{K}$. Usando o Lema 2.3.16(a) segue que

$$(\varphi(x_{i_j}) \cdot P(x_{i_j}))_{j=1}^{\infty} = ((\varphi \otimes P)(x_{i_j}))_{j=1}^{\infty}$$

converge em F . Mas $((\varphi \otimes P)(x_{i_j}))_{j=1}^{\infty}$ é subsequência de $((\varphi \otimes P)(x_k))_{k=1}^{\infty}$, portanto, da Proposição 2.3.9 segue que $\varphi \otimes P$ é compacto.

Para provar que, se $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{W}}(^n E; F)$, então $\varphi \otimes P$ é um operador fracamente compacto, segue-se uma demonstração análoga ao caso compacto provado no parágrafo anterior. Utiliza-se a Proposição 2.3.12 em conjunto com a Proposição 2.3.7 para estabelecer que φ é um operador fracamente compacto. Além disso, emprega-se a Proposição 2.3.15 no lugar da Proposição 2.3.9 e o item (c) no lugar do item (a) do Lema 2.3.16.

Agora considere $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{K}}(^n E; F)$ e $a \in E$. Provemos que o polinômio $(n-1)$ -homogêneo P_a é compacto. Para isso, seja $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ uma sequência limitada em E , digamos $\|x_k\| \leq C$ para todo $k \in \mathbb{N}$, onde $C > 0$. Para quaisquer $\varepsilon_1 = \pm 1, \dots, \varepsilon_n = \pm 1$ e $k \in \mathbb{N}$ temos que:

$$\|\varepsilon_1 a + \varepsilon_2 x_k + \dots + \varepsilon_n x_k\| \leq \|a\| + (n-1)\|x_k\| \leq \underbrace{\|a\| + (n-1)C}_{\text{constante}}$$

Portanto, a sequência $(\varepsilon_1 a + \varepsilon_2 x_k + \dots + \varepsilon_n x_k)_{k=1}^{\infty} \subseteq E$ é limitada. Como o polinômio P é compacto, pela Proposição 2.3.9, para cada escolha $\varepsilon_1 = \pm 1, \dots, \varepsilon_n = \pm 1$, existe uma subsequência $(x_{k_i})_{i=1}^{\infty}$ de $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ tal que a sequência $(P(\varepsilon_1 a + \varepsilon_2 x_{k_i} + \dots + \varepsilon_n x_{k_i}))_{i=1}^{\infty}$ é convergente em F . Como o número de escolhas $\varepsilon_1 = \pm 1, \dots, \varepsilon_n = \pm 1$ é finito, fazendo cada uma dessas escolhas de cada vez, existe uma subsequência $(x_{k_i})_{i=1}^{\infty}$ de $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ tal que, para toda escolha $\varepsilon_1 = \pm 1, \dots, \varepsilon_n = \pm 1$, $(P(\varepsilon_1 a + \varepsilon_2 x_{k_i} + \dots + \varepsilon_n x_{k_i}))_{i=1}^{\infty}$ converge em F . Existe então $y_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n} \in F$ tal que $P(\varepsilon_1 a + \varepsilon_2 x_{k_i} + \dots + \varepsilon_n x_{k_i}) \rightarrow y_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n}$. Aplicando a Formula de Polarização e os itens (a) e (b) do Lema 2.3.16, temos

$$\begin{aligned} P_a(x_{k_i}) &= \overset{\vee}{P}(a, x_{k_i}^{n-1}) = \frac{1}{n!2^n} \sum_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{\pm 1\}} \varepsilon_1 \dots \varepsilon_n \overset{\vee}{P}(\varepsilon_1 a + \varepsilon_2 x_{k_i} + \dots + \varepsilon_n x_{k_i})^n \\ &= \frac{1}{n!2^n} \sum_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{\pm 1\}} \varepsilon_1 \dots \varepsilon_n P(\varepsilon_1 a + \varepsilon_2 x_{k_i} + \dots + \varepsilon_n x_{k_i}) \end{aligned}$$

$$\longrightarrow \frac{1}{n!2^n} \sum_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{\pm 1\}} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n y_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n} \in F.$$

Por tanto, P_a é compacto.

Para provar que, se $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{W}}(^n E; F)$, então P_a é fracamente compacto, segue-se uma demonstração análoga ao do caso compacto provado no parágrafo anterior. Utiliza-se a Proposição 2.3.15 no lugar da Proposição 2.3.9 e os itens (c) e (d) em substituição aos itens (a) e (b) do Lema 2.3.16

Está completa a demonstração de que $\mathcal{P}_{\mathcal{K}}$ e $\mathcal{P}_{\mathcal{W}}$ são ideais coerentes de polinômios. $\square$

2.3.2 Polinômios homogêneos fracamente contínuos sobre limitados

Apresentaremos nesta seção mais uma classe de polinômios homogêneos de fundamental interesse para nosso estudo. Diferentemente dos casos compacto e fracamente compacto, a classe aqui estudada não tem análogo linear (veremos o motivo em breve). Todos os resultados aqui apresentados são baseados em [2] e [3].

Definição 2.3.19. Um polinômio n -homogêneo $P: E \longrightarrow F$ entre espaços de Banach é denominado *fracamente contínuo sobre limitados* se $P|_A: A \longrightarrow F$ é contínuo para cada conjunto limitado $A \subseteq E$, considerando A com a topologia de subespaço da topologia fraca de E e F com a topologia da norma. A coleção de polinômios n -homogêneos fracamente contínuos sobre limitados de E em F é denotada por $\mathcal{P}_{\omega}(^n E; F)$. Denotaremos por $\mathcal{P}_{\omega}$ a coleção de todos os polinômios homogêneos fracamente contínuos sobre limitados entre espaços de Banach quaisquer.

Da definição de $\mathcal{P}_{\omega}$ e do fato que a topologia fraca estar contida na topologia da norma (Proposição 1.4.7), segue que todo polinômio homogêneo fracamente contínuo sobre limitados é contínuo, isto é, $\mathcal{P}_{\omega} \subseteq \mathcal{P}$. Na verdade, vale algo mais forte que isso:

Proposição 2.3.20. *Todo polinômio homogêneo fracamente contínuo sobre limitados é compacto, isto é, $\mathcal{P}_{\omega} \subseteq \mathcal{P}_{\mathcal{K}}$.*

Demonstração. Segue de [3, Lema 2.2] e [2, Theorem 2.9]. $\square$

Vejamos que, no caso linear, essa definição não fornece uma nova classe de operadores, apenas recupera a classe já estudada dos operadores compactos.

Proposição 2.3.21. *Sejam E e F espaços de Banach e $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Então T é compacto se, e somente se, T é fracamente contínuo sobre limitados. Ou seja,*

$$\mathcal{P}_{\omega}(^1 E; F) = \mathcal{P}_{\mathcal{K}}(^1 E; F) = \mathcal{K}(E, F),$$

para quaisquer espaços de Banach E e F .

Demonstração. Veja [3, Proposition 2.5]. $\square$

O resultado a seguir é uma propriedade clássica da Topologia Geral, frequentemente utilizada para verificar a continuidade de funções por meio de redes. Essa propriedade é particularmente útil na manipulação de polinômios fracamente contínuos sobre conjuntos limitados.

Proposição 2.3.22. *Uma função $f: X \longrightarrow Y$ entre espaços topológicos é contínua se, e somente se, para toda rede $(x_\lambda)_{\lambda \in \Omega}$ convergente para x na topologia de X , tem-se que a rede $(f(x_\lambda))_{\lambda \in \Omega}$ converge para $f(x)$ na topologia de Y .*

Demonstração. Veja [11, Teorema B.31(c)]. □

Vejamos que, diferentemente do caso linear, existem polinômios homogêneos compactos que não são fracamente contínuos sobre limitados.

Exemplo 2.3.23. Considere a aplicação

$$P: \ell_2 \longrightarrow \mathbb{K}, \quad P(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2.$$

Dos Exemplos 2.2.6 e 2.3.8(a) sabemos que este é um polinômio 2-homogêneo compacto. Vejamos que P não é fracamente contínuo sobre limitados. Para isso, considere os vetores canônicos $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ de ℓ_2 e $A = \{e_k : k \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$. É claro que A é um subconjunto limitado de ℓ_2 . Da dualidade $\ell_2^* = \ell_2$ (veja [11, Seção 4.2]), para todo $\varphi \in \ell_2^*$ existe $(a_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_2$ tal que $\varphi((b_n)_{n=1}^{\infty}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ para todo $(b_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_2$. Dessa forma, $\varphi(e_n) = a_n \longrightarrow 0$ em $\mathbb{K}$ para todo $\varphi \in \ell_2^*$, pois $\ell_2 \subseteq c_0$. Como $0 \in A$ temos $e_n \xrightarrow{\omega_A} 0$. Por outro lado, $P(e_n) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e assim

$$P(e_n) \longrightarrow 1 \neq 0 = P(0).$$

Pela Proposição 2.3.22 segue que a função $P|_A : (A, \sigma(\ell_2, \ell_2^*)|_A) \longrightarrow \mathbb{K}$ não é contínua. Isso prova que P é um polinômio 2-homogêneo compacto que não é fracamente contínuo sobre limitados.

Proposição 2.3.24. *A classe $\mathcal{P}_\omega$ dos polinômios homogêneos fracamente contínuos sobre limitados é um ideal coerente e fechado de polinômios.*

Demonstração. Da Proposição 1.4.7 segue que $\mathcal{P}_\omega \subseteq \mathcal{P}$. Sejam E e F espaços de Banach quaisquer e $n \in \mathbb{N}$.

(i) Provemos que $\mathcal{P}_\omega(^n E; F)$ é subespaço vetorial de $\mathcal{P}(^n E; F)$. Sejam $P, Q \in \mathcal{P}_\omega(^n E; F)$, $\alpha \in \mathbb{K}$, $A \subseteq E$ limitado e $(x_\lambda)_{\lambda \in \Omega} \subseteq A$ uma rede tal que $x_\lambda \xrightarrow{\omega_A} x \in A$. Como P e Q são fracamente contínuos sobre limitados, pela Proposição 2.3.22 sabemos que $P|_A(x_\lambda) \longrightarrow P|_A(x)$ e $Q|_A(x_\lambda) \longrightarrow Q|_A(x)$. Do Lema 2.3.16(a) e (b) segue que

$$(\alpha P + Q)|_A(x_\lambda) = \alpha P|_A(x_\lambda) + Q|_A(x_\lambda) \longrightarrow \alpha P|_A(x) + Q|_A(x) = (\alpha P + Q)|_A(x).$$

Aplicando novamente a Proposição 2.3.22 concluímos que $(\alpha P + Q)|_A : (A, \sigma(E, E^*)_A) \longrightarrow F$ é contínua, provando que $\mathcal{P}_\omega(^n E; F)$ é subespaço vetorial de $\mathcal{P}(^n E; F)$.

(ii) Vejamos que $\mathcal{P}_\omega$ contém os polinômios homogêneos de tipo finito. Dados $\varphi \in E^*$ e $b \in F$, provemos que $\varphi^n \otimes b \in \mathcal{P}_\omega(^n E; F)$. Para isso sejam $(x_\lambda)_{\lambda \in \Omega} \subseteq E$ uma rede tal que

$x_\lambda \xrightarrow{\omega} x \in E$. Por definição da topologia fraca, φ é fracamente contínua sobre E , e assim temos pela Proposição 2.3.22 que $\varphi(x_\lambda) \rightarrow \varphi(x)$. Como a função $a \in \mathbb{K} \mapsto a^n \in \mathbb{K}$ é uma função contínua em $\mathbb{K}$, segue que $\varphi(x_\lambda)^n \rightarrow \varphi(x)^n$. Pelo Lema 2.3.16(a) concluímos que

$$(\varphi^n \otimes b)(x_\lambda) = \varphi(x_\lambda)^n b \rightarrow \varphi(x)^n b = (\varphi^n \otimes b)(x).$$

Pela Proposição 2.3.22 segue que $\varphi^n \otimes b: (E, \sigma(E, E^*)) \rightarrow F$ é contínua; em particular é contínua sobre subconjuntos limitados de E . Isso prova que $\varphi^n \otimes b \in \mathcal{P}_\omega(^n E; F)$ para todos $\varphi \in E^*$ e $b \in F$. Usando que todo polinômio n -homogêneo de tipo finito de E em F é uma combinação linear de polinômios dessa forma e que $\mathcal{P}_\omega(^n E; F)$ é espaço vetorial, segue que $\mathcal{P}_f(^n E; F) \subseteq \mathcal{P}_\omega(^n E; F)$.

(iii) Verifiquemos agora a propriedade de ideal. Sejam G e H espaços de Banach, $u \in \mathcal{L}(G; E)$, $P \in \mathcal{P}_\omega(^n E; F)$, $t \in \mathcal{L}(F; H)$ e $A \subseteq G$ um subconjunto limitado. Pela Proposição 1.4.5, a função $u: (G, \sigma(G, G^*)) \rightarrow (E, \sigma(E, E^*))$ é contínua. Logo, a função $u|_A: (A, \sigma(G, G^*)|_A) \rightarrow (u(A), \sigma(E, E^*)|_{u(A)})$ também é contínua. Da desigualdade $\|u(x)\| \leq \|u\| \cdot \|x\|$ para todo $x \in G$, segue imediatamente que $u(A)$ é subconjunto limitado de E . Como P é fracamente contínuo sobre limitados, a função

$$P|_{u(A)}: (u(A), \sigma(E, E^*)|_{u(A)}) \rightarrow (P \circ u)(A) \subseteq F$$

é contínua. Como $t: F \rightarrow H$ é um operador contínuo, a função $t|_{(P \circ u)(A)}: (P \circ u)(A) \rightarrow H$ é contínua. Daí, a função composta

$$(t \circ P \circ u)|_A = t|_{(P \circ u)(A)} \circ P|_{u(A)} \circ u|_A: (A, \sigma(G, G^*)|_A) \rightarrow H$$

é contínua, provando que $t \circ P \circ u \in \mathcal{P}_\omega(^n G; H)$.

O que fizemos até agora prova que $\mathcal{P}_\omega$ é um ideal de polinômios homogêneos. Procederemos agora à demonstração de que o ideal $\mathcal{P}_\omega$ é coerente. Sejam $P \in \mathcal{P}_\omega(^n E; F)$, $\varphi \in E^*$, $a \in E$, $A \subseteq E$ um subconjunto limitado e $(x_\lambda)_{\lambda \in \Omega} \subseteq A$ uma rede tal que $x_\lambda \xrightarrow{\omega_A} x \in E$.

(iv) Provemos que $\varphi \otimes P \in \mathcal{P}_\omega(^{n+1} E; F)$. Como $x_\lambda \xrightarrow{\omega_A} x$ implica que $x_\lambda \xrightarrow{\omega} x$ e φ é fracamente contínua, temos pela Proposição 2.3.22 que

$$\varphi|_A(x_\lambda) = \varphi(x_\lambda) \rightarrow \varphi(x) = \varphi|_A(x) \text{ em } \mathbb{K}.$$

Por P ser fracamente contínuo sobre limitados, temos $P|_A(x_\lambda) \rightarrow P|_A(x)$ em F . Usando o Lema 2.3.16(a),

$$(\varphi \otimes P)|_A(x_\lambda) = (\varphi|_A \otimes P|_A)(x_\lambda) = \varphi|_A(x_\lambda) \cdot P|_A(x_\lambda) \rightarrow \varphi|_A(x) \cdot P|_A(x) = (\varphi \otimes P)|_A(x).$$

Da arbitrariedade da rede convergente em A , segue que $(\varphi \otimes P)|_A: (A, \sigma(E, E^*)|_A) \rightarrow F$ é fracamente contínua, portanto $\varphi \otimes P \in \mathcal{P}_\omega(^{n+1} E; F)$.

(v) Demonstremos agora que $P_a \in \mathcal{P}_\omega(^{n-1} E; F)$. Como A é limitado, existe $C > 0$ tal que $\|y\| \leq C$ para todo $y \in A$. Dados $\varepsilon_1 = \pm 1, \dots, \varepsilon_n = \pm 1$,

$$\|\varepsilon_1 a + \varepsilon_2 y + \dots + \varepsilon_n y\| \leq \|a\| + (n-1)\|y\| \leq \underbrace{\|a\| + (n-1)C}_{\text{constante}}$$

para todo $y \in A$. Isso mostra que o conjunto

$$B := \{\varepsilon_1 a + \varepsilon_2 y + \cdots + \varepsilon_n y : \varepsilon_1 = \pm 1, \dots, \varepsilon_n = \pm 1 \text{ e } y \in A\}$$

é limitado em E . Como $x_\lambda \xrightarrow{\omega_A} x$, temos $x_\lambda \xrightarrow{\omega} x$. Do Lema 2.3.16(c) e (d) segue que

$$\varepsilon_1 a + \varepsilon_2 x_\lambda + \cdots + \varepsilon_n x_\lambda \xrightarrow{\omega} \varepsilon_1 a + \varepsilon_2 x + \cdots + \varepsilon_n x.$$

Usando que $\varepsilon_1 a + \varepsilon_2 x_\lambda + \cdots + \varepsilon_n x_\lambda$ e $\varepsilon_1 a + \varepsilon_2 x + \cdots + \varepsilon_n x$ pertencem a B para todo $x_\lambda \in \Omega$, obtemos que $\varepsilon_1 a + \varepsilon_2 x_\lambda + \cdots + \varepsilon_n x_\lambda \xrightarrow{\omega_B} \varepsilon_1 a + \varepsilon_2 x + \cdots + \varepsilon_n x$. E por P ser um polinômio fracamente contínuo sobre limitados e B ser um subconjunto limitado de E , pela Proposição 2.3.22 temos

$$P(\varepsilon_1 a + \varepsilon_2 x_\lambda + \cdots + \varepsilon_n x_\lambda) \longrightarrow P(\varepsilon_1 a + \varepsilon_2 x + \cdots + \varepsilon_n x) \text{ em } F.$$

Como isso vale para toda escolha de sinais $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$, aplicando a Formula de Polarização e o Lema 2.3.16(a) e (b) temos

$$\begin{aligned} P_a(x_\lambda) &= \bigvee P(a, x_\lambda^{n-1}) = \frac{1}{n!2^n} \sum_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{-1, 1\}} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n \bigvee P(\varepsilon_1 a + \varepsilon_2 x_\lambda + \cdots + \varepsilon_n x_\lambda)^n \\ &= \frac{1}{n!2^n} \sum_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{-1, 1\}} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n P(\varepsilon_1 a + \varepsilon_2 x_\lambda + \cdots + \varepsilon_n x_\lambda) \\ &\longrightarrow \frac{1}{n!2^n} \sum_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{-1, 1\}} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n P(\varepsilon_1 a + \varepsilon_2 x + \cdots + \varepsilon_n x) \\ &= \frac{1}{n!2^n} \sum_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{-1, 1\}} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n \bigvee P(\varepsilon_1 a + \varepsilon_2 x + \cdots + \varepsilon_n x)^n \\ &= \bigvee P(a, x^{n-1}) = P_a(x). \end{aligned}$$

Está provado que a função $P_{a|A} : (A, \sigma(E, E^*))|_A \longrightarrow F$ é contínua, ou seja $P_a \in \mathcal{P}_\omega^{(n-1)}E; F$. Está completa a demonstração de que $\mathcal{P}$ é um ideal coerente de polinômios.

(vi) Faltava apenas provar que $\mathcal{P}_\omega$ é ideal fechado. Para provar que $\mathcal{P}_\omega^{(n)}E, F$ é fechado em $\mathcal{P}^{(n)}E, F$, seja $(P_i)_{i=1}^\infty \subseteq \mathcal{P}_\omega^{(n)}E, F$ uma sequência convergente para $P \in \mathcal{P}^{(n)}E, F$ em relação à norma induzida por $\mathcal{P}^{(n)}E, F$. Devemos demonstrar que $P \in \mathcal{P}_\omega^{(n)}E, F$. Para tanto, tomemos A um subconjunto limitado de E e $(x_\lambda)_{\lambda \in \Omega}$ uma rede tal que $x_\lambda \xrightarrow{\omega_A} x \in A$. Da limitação de A podemos tomar $C > 0$ tal que $\|y\| \leq C$ para todo $y \in A$. Seja $\varepsilon > 0$. Da convergência $P_i \longrightarrow P$, existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|P_i - P\| < \frac{\varepsilon}{3C^n}$ para todo $i \geq i_0$. Do fato de P_{i_0} ser fracamente contínuo sobre limitados temos $P_{i_0}(x_\lambda) \longrightarrow P_{i_0}(x)$ em F . Portanto existe $\lambda_0 \in \Omega$ tal que $\|P_{i_0}(x) - P_{i_0}(x_\lambda)\| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ para todo $\lambda \geq \lambda_0$. Combinando essas três estimativas, obtemos que, para todo $\lambda \geq \lambda_0$,

$$\begin{aligned} \|P(x) - P(x_\lambda)\| &= \|P(x) - P_{i_0}(x) + P_{i_0}(x) - P_{i_0}(x_\lambda) + P_{i_0}(x_\lambda) - P(x_\lambda)\| \\ &\leq \|P(x) - P_{i_0}(x)\| + \|P_{i_0}(x) - P_{i_0}(x_\lambda)\| + \|P_{i_0}(x_\lambda) - P(x_\lambda)\| \\ &= \|(P - P_{i_0})(x)\| + \|P_{i_0}(x) - P_{i_0}(x_\lambda)\| + \|(P - P_{i_0})(x_\lambda)\| \\ &\leq \|P - P_{i_0}\| \cdot \|x\|^n + \|P_{i_0}(x) - P_{i_0}(x_\lambda)\| + \|P - P_{i_0}\| \cdot \|x_\lambda\|^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C^n \|P - P_{i_0}\| + \|P_{i_0}(x) - P_{i_0}(x_\lambda)\| + C^n \|P - P_{i_0}\| \\
&< \frac{\varepsilon}{3C^n} C^n + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3C^n} C^n \\
&= \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Isso prova que $P(x_\lambda) \rightarrow P(x)$ em F , onde decorre que a função $P|_A: (A, \sigma(E, E^*)|_A) \rightarrow F$ é contínua; provando que $P \in \mathcal{P}_\omega({}^n E; F)$. Está completa a demonstração de que $\mathcal{P}_\omega$ é um ideal coerente e fechado de polinômios. $\square$

Vejamos que os quatro ideais coerentes e fechados de polinômios que estudamos são todos distintos entre si.

Proposição 2.3.25. *A seguinte sequência de inclusões estritas entre ideais coerentes e fechados de polinômios é válida:*

$$\mathcal{P}_\omega \subsetneq \mathcal{P}_\mathcal{K} \subsetneq \mathcal{P}_\mathcal{W} \subsetneq \mathcal{P}.$$

Demonstração. Da Proposição 2.3.20 e do Exemplo 2.3.23 segue que $\mathcal{P}_\omega \subsetneq \mathcal{P}_\mathcal{K}$. Da Proposição 2.3.12 e do Exemplo 2.3.14(c) segue que $\mathcal{P}_\mathcal{K} \subsetneq \mathcal{P}_\mathcal{W}$. E da Proposição 2.3.18 e do Exemplo 2.3.14(b) segue que $\mathcal{P}_\mathcal{W} \subsetneq \mathcal{P}$. $\square$

2.4 O produto tensorial

O objetivo desta seção é apresentar um resultado fundamental na teoria de polinômios n -homogêneos, que estabelece uma correspondência isomorfa entre um espaço de polinômios n -homogêneos e um espaço de operadores lineares particular. Essa correspondência simplifica muitos cálculos na teoria e, particularmente nesta dissertação, servirá como uma ferramenta poderosa para obter resultados em capítulos subsequentes. Os resultados apresentados nesta seção foram originalmente introduzidos por Ryan em sua tese de doutorado [46]. Ressalta-se que os conceitos abordados aqui representam apenas uma visão parcial da teoria geral; incluímos apenas os resultados necessários para os capítulos seguintes. Para um estudo mais detalhado dos conceitos discutidos, se recomenda consultar [46].

Dados $n \in \mathbb{N}$, $E_1, \dots, E_n$ espaços vetoriais e $x_1 \in E_1, \dots, x_n \in E_n$, denotaremos por $x_1 \otimes \dots \otimes x_n$ a aplicação definida por

$$\begin{aligned}
x_1 \otimes \dots \otimes x_n: L(E_1, \dots, E_n; \mathbb{K}) &\longrightarrow \mathbb{K} \\
A &\longmapsto (x_1 \otimes \dots \otimes x_n)(A) := A(x_1, \dots, x_n).
\end{aligned}$$

Omitimos a óbvia demonstração de que essa aplicação é linear. Desse modo, segue que $x_1 \otimes \dots \otimes x_n$ é um funcional linear em $L(E_1, \dots, E_n; \mathbb{K})$.

Definição 2.4.1. Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $E_1, \dots, E_n$ espaços vetoriais. Denominamos por *produto tensorial* de $E_1, \dots, E_n$ o subespaço vetorial do espaço dos funcionais lineares em $L(E_1, \dots, E_n; \mathbb{K})$ gerado pelo conjunto

$$D := \{x_1 \otimes \dots \otimes x_n : x_1 \in E_1, \dots, x_n \in E_n\}.$$

O produto tensorial de $E_1, \dots, E_n$ será denotado por $E_1 \otimes \dots \otimes E_n$. Em particular, se $E_1 = \dots = E_n = E$, então o produto tensorial de $E_1, \dots, E_n$ será denotado por $\otimes^n E$.

Os elementos do produto tensorial $E_1 \otimes \dots \otimes E_n$ são chamados *tensores*, e os tensores pertencentes ao conjunto gerador D , isto é, tensores da forma $x_1 \otimes \dots \otimes x_n$, são chamados de *tensores elementares*.

No caso em que E é um espaço normado, pode-se introduzir no produto tensorial $\otimes^n E$ uma norma denominada *norma tensorial projetiva*, denotada por π e definida por

$$\pi(z) := \inf \left\{ \sum_{j=1}^k |\lambda_j| \cdot \|x_{j1}\| \cdots \|x_{jn}\| : k \in \mathbb{N} \text{ e } z = \sum_{j=1}^k \lambda_j \cdot x_{j1} \otimes \dots \otimes x_{jn} \right\}$$

para $z \in \otimes^n E$.

Definição 2.4.2. Sejam $n \in \mathbb{N}$ e E um espaço vetorial. O subespaço do produto tensorial $\otimes^n E$ gerado pelos tensores elementares da forma

$$\otimes^n x := x \otimes \dots \otimes x, \quad x \in E,$$

é denominado *produto tensorial simétrico* de E por E n vezes. Este subespaço será denotado por $\otimes^{n,s} E$.

Denotaremos o espaço normado $(\otimes^{n,s} E, \pi)$ por $\otimes_\pi^{n,s} E$ e chamaremos de *produto tensorial simétrico projetivo* o completamento do espaço normado $\otimes_\pi^{n,s} E$, que será denotado por $\hat{\otimes}_\pi^{n,s} E$.

Agora estamos em condições de descrever em que sentido os polinômios homogêneos contínuos são linearizados através do produto tensorial simétrico projetivo. Essa linearização dos polinômios homogêneos através do produto tensorial simétrico projetivo é devida a Ryan [46], e diz que o espaço de polinômios homogêneos de grau n é isomorfo com o espaço dos operadores lineares definidos no produto tensorial simétrico projetivo. Mais precisamente:

Teorema 2.4.3. Sejam E e F espaços de Banach e $n \in \mathbb{N}$. Se $P: E \longrightarrow F$ é um polinômio n -homogêneo contínuo, então existe um único operador linear contínuo $P^L \in \mathcal{L}(\hat{\otimes}_\pi^{n,s} E; F)$ tal que

$$P(x) = P^L(x \otimes \dots \otimes x) \text{ para todo } x \in E.$$

Além disso, a correspondência $P \longleftrightarrow P^L$ é um isomorfismo entre os espaços de Banach $\mathcal{P}(^n E; F)$ e $\mathcal{L}(\hat{\otimes}_\pi^{n,s} E; F)$.

Demonstração. Ver [46, Proposition 2.1] □

O operador linear contínuo P^L do teorema anterior é conhecido como *linearização* do polinômio n -homogêneo contínuo P . Muito importante para o nosso estudo é que um polinômio homogêneo é compacto (fracamente compacto, respectivamente) se, e somente se, sua linearização é compacta (fracamente compacta, respectivamente), isto é:

Proposição 2.4.4. Nas condições descritas no Teorema 2.4.3:

- (i) A correspondência $P \longleftrightarrow P^L$ é um isomorfismo entre os espaços de Banach $\mathcal{P}_{\mathcal{K}}(^n E; F)$ e $\mathcal{K}(\hat{\otimes}_{\pi}^{n,s} E; F)$.
- (ii) A correspondência $P \longleftrightarrow P^L$ é um isomorfismo entre os espaços de Banach $\mathcal{P}_{\mathcal{W}}(^n E; F)$ e $\mathcal{W}(\hat{\otimes}_{\pi}^{n,s} E; F)$.

Demonstração. De [10, Proposition 3.2] e do comentário subsequente à Proposition 3.3 da mesma referência, sabemos que:

$$P \in \mathcal{P}_{\mathcal{K}}(^n E, F) \text{ se, e somente se, } P^L \in \mathcal{K}(\hat{\otimes}_{\pi}^{n,s} E; F),$$

e que

$$P \in \mathcal{P}_{\mathcal{W}}(^n E, F) \text{ se, e somente se, } P^L \in \mathcal{W}(\hat{\otimes}_{\pi}^{n,s} E; F).$$

Isso implica que a linearização define uma bijeção entre os espaços

$$\mathcal{P}_{\mathcal{K}}(^n E, F) \quad \text{e} \quad \mathcal{K}(\hat{\otimes}_{\pi}^{n,s} E; F),$$

e entre os espaços

$$\mathcal{P}_{\mathcal{W}}(^n E, F) \quad \text{e} \quad \mathcal{W}(\hat{\otimes}_{\pi}^{n,s} E; F).$$

Pelo Teorema 2.4.3 segue que a linearização define um isomorfismo entre os espaços mencionados. $\square$

Observação 2.4.5. Para o caso dos polinômios n -homogêneos fracamente contínuos sobre limitados, nem sempre é possível garantir que a linearização gera um isomorfismo entre os espaços $\mathcal{P}_{\omega}(^n E; F)$ e $\mathcal{P}_{\omega}(^1 \hat{\otimes}_{\pi}^{n,s} E, F) = \mathcal{K}(\hat{\otimes}_{\pi}^{n,s} E, F)$. De fato, como vimos no Exemplo 2.3.23, $\mathcal{P}_{\omega}(^2 \ell_2) \neq \mathcal{P}_{\mathcal{K}}(^2 \ell_2)$; mas pela Proposição 2.3.21 sabemos que $\mathcal{P}_{\omega}(^1 \hat{\otimes}_{\pi}^{2,s} \ell_2, \mathbb{K}) = \mathcal{K}(\hat{\otimes}_{\pi}^{2,s} \ell_2, \mathbb{K})$.

Capítulo 3

Complementabilidade em espaços de polinômios homogêneos

Abordaremos neste capítulo um dos conceitos fundamentais da Análise Funcional, que constitui o eixo central desta dissertação: a complementabilidade. Focaremos na sua aplicação aos espaços de polinômios homogêneos, explorando sua estrutura e propriedades dentro deste contexto especializado.

3.1 Subespaços complementados

Começamos com uma apresentação dos resultados básicos sobre subespaços complementados de espaços de Banach. O conceito a seguir desempenha um papel central e de muita utilidade ao momento de falar sobre complementabilidade em espaços de Banach:

Definição 3.1.1. Seja E um espaço de Banach. Um operador linear contínuo $\rho: E \rightarrow E$ é uma *projeção* se $\rho^2 := \rho \circ \rho = \rho$.

Dizemos que uma função de um conjunto em si mesmo *fixa um ponto* se a imagem desse ponto pela função é o próprio ponto.

Frequentemente usaremos a seguinte proposição para provar que um operador linear contínuo é projeção, ou também para dizer que uma projeção fixa os elementos da sua imagem.

Proposição 3.1.2. *Sejam E um espaço de Banach e $\rho \in \mathcal{L}(E, E)$. Então as seguintes afirmações são equivalentes.*

- (a) ρ é uma projeção.
- (b) ρ fixa os elementos da sua imagem.

Demonstração. (a) $\implies$ (b) Dado $x \in \rho(E)$, existe $y \in E$ tal que $\rho(y) = x$. Da definição de projeção obtemos que $x = \rho(y) = \rho(\rho(y)) = \rho(x)$. Isso mostra que ρ fixa os elementos de sua imagem.

(b) $\implies$ (a) Para todo $x \in E$, temos $\rho(x) \in \rho(E)$, e como ρ fixa os elementos de sua imagem por hipótese, segue que $\rho^2(x) = \rho(\rho(x)) = \rho(x)$. Isso prova que $\rho^2 = \rho$, ou seja, ρ é uma projeção. $\square$

Sejam W_1 e W_2 subespaços vetoriais do espaço vetorial V . Na Álgebra Linear diz-se que V é a *soma direta* (ou *soma direta algébrica*) de W_1 e W_2 se $V = W_1 + W_2$, isto é, para todos $x \in V$ existem $x_1 \in W_1$ e $x_2 \in W_2$ tais que $x = x_1 + x_2$, e $W_1 \cap W_2 = \{0\}$. Neste caso, escreve-se $V = W_1 \oplus W_2$.

Supondo o Axioma da Escolha, é verdade que todo subconjunto linearmente independente de um espaço vetorial contém uma base (algébrica ou de Hamel) do espaço (veja, por exemplo, [15, Teorema 2.8.1]). Disso segue que, dado um subespaço vetorial W_1 do espaço vetorial V , sempre existe um subespaço vetorial W_2 de V tal que $V = W_1 \oplus W_2$.

Em Análise Funcional, os subespaços fechados desempenham papel central (veja Teorema 1.1.7), por isso a seguinte pergunta, respondida na proposição a seguir, é muito natural: dado um subespaço fechado F do espaço de Banach E , existe um subespaço fechado G de E tal que $E = F \oplus G$?

Proposição 3.1.3. *Seja F um subespaço do espaço de Banach E . As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (a) *Existe uma projeção $\rho : E \rightarrow E$ cuja imagem coincide com F . Neste caso dizemos que ρ é uma projeção de E sobre F .*
- (b) *F é fechado e existe um subespaço fechado G de E tal que $E = F \oplus G$. Neste caso, $F = \{x \in E : \rho(x) = x\}$ e $G = \ker(\rho)$.*

Demonstração. Veja [11, Proposição 3.2.2]. □

Definição 3.1.4. Um subespaço F do espaço de Banach E é *complementado* se satisfaz as condições equivalentes da Proposição 3.1.3. Neste caso, se G é subespaço fechado de E tal que $E = F \oplus G$, então dizemos que E é a *soma topológica* de F e G .

Exemplo 3.1.5. É imediato que todo espaço de Banach é um subespaço complementado de si mesmo, considerando o operador identidade como projeção. Além disso, ao tomar o operador nulo em um espaço de Banach, conclui-se que $\{0\}$ é um subespaço complementado em qualquer espaço de Banach. Mais geralmente, todo subespaço de dimensão finita de um espaço de Banach é complementado (veja [11, Exemplo 3.2.4]).

Na Introdução, listamos vários exemplos conhecidos de subespaços não complementados de determinados espaços de Banach.

Como mencionado antes, todas as demonstrações de que determinado subespaço de um espaço de Banach não é complementado são não triviais. Dessa forma, sempre que um subespaço importante de dimensão infinita de um dado espaço de Banach é identificado, o problema de sua complementabilidade (ou não) sempre vem à tona. Nesta dissertação trataremos de determinados subespaços não complementados em espaços de operadores lineares e de polinômios homogêneos.

Lema 3.1.6. *Toda subsequência de uma sequência básica (seminormalizada) em um espaço de Banach é também uma sequência básica (seminormalizada).*

Demonstração. Sejam E um espaço de Banach, $(x_n)_{n=1}^\infty$ uma sequência básica em E e $(x_{n_i})_{i=1}^\infty$ uma subsequência de $(x_n)_{n=1}^\infty$. Por [11, Corolário 10.3.14] sabemos que $(x_{n_i})_{i=1}^\infty$ é uma sequência básica. Se $(x_n)_{n=1}^\infty$ for seminormalizada, existe $K > 0$ tal que $\frac{1}{K} < x_n < K$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Em particular, $\frac{1}{K} < x_{n_i} < K$ para todo $i \in \mathbb{N}$, provando que $(x_{n_i})_{i=1}^\infty$ é seminormalizada. □

Proposição 3.1.7. *Seja E um espaço de Banach com base de Schauder incondicional $(x_n)_{n=1}^\infty$. Então, para todo $M \subseteq \mathbb{N}$, o subespaço $F := \overline{\text{span}}\{x_m : m \in M\}$ é complementado em E . Mais ainda, se $\rho : E \rightarrow E$ é uma projeção sobre F , então, para todo $x = \sum_{n=1}^\infty x_n^*(x)x_n \in E$, vale que*

$$\rho(x) = \sum_{m \in M} x_m^*(x)x_m,$$

onde $(x_n^*)_{n=1}^\infty$ é a sequência de funcionais coordenados associados com a base $(x_n)_{n=1}^\infty$.

Demonstração. Se M for finito, então o subespaço gerado tem dimensão finita, portanto é fechado. Assim,

$$F = \overline{\text{span}}\{x_m : m \in M\} = \text{span}\{x_m : m \in M\} = \left\{ \sum_{m \in M} a_m x_m : a_m \in \mathbb{K} \right\}.$$

Se M for infinito, então, considerando M ordenado de forma crescente, $(x_m)_{m \in M}$ é uma subsequência de $(x_n)_{n=1}^\infty$. Portanto, do Lema 3.1.6 segue que $(x_m)_{m \in M}$ é uma sequência básica de $\overline{\text{span}}\{x_m : m \in M\}$. Assim, pela definição de sequência básica, temos

$$F = \overline{\text{span}}\{x_m : m \in M\} = \left\{ \sum_{m \in M} a_m x_m : a_m \in \mathbb{K} \text{ e } \sum_{m \in M} a_m x_m \text{ converge} \right\}.$$

Em ambos os casos, definimos

$$G := \overline{\text{span}}\{x_m : m \notin M\} = \left\{ \sum_{m \notin M} a_m x_m : a_m \in \mathbb{K} \text{ e } \sum_{m \notin M} a_m x_m \text{ converge} \right\}.$$

Agora, seja $x \in E$. Existe então uma sequência $(a_n)_{n=1}^\infty \subseteq \mathbb{K}$ tal que $x = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x_n$. Como a base $(x_n)_{n=1}^\infty$ é incondicional, a série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x_n$ converge incondicionalmente, e portanto

$$x = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x_n = \sum_{m \in M} a_m x_m + \sum_{m \notin M} a_m x_m.$$

Aplicando o Teorema 1.6.3, que diz toda subsérie de uma série incondicionalmente convergente é convergente, obtemos que $\sum_{m \in M} a_m x_m \in F$ e $\sum_{m \notin M} a_m x_m \in G$. Isso prova que $E = F + G$

Se $x \in F \cap G$, então $x = \sum_{m \in M} a_m x_m$ e $x = \sum_{m \notin M} a_m x_m$ para alguma sequência $(a_n)_{n=1}^\infty \subseteq \mathbb{K}$. Pela unicidade da representação em termos da base $(x_n)_{n=1}^\infty$, concluímos que $a_m = 0$ para todo $m \in M$ e para todo $m \notin M$. Segue que todos os coeficientes a_n são iguais a zero, e portanto $x = 0$. Logo, $F \cap G = \{0\}$, o que prova que $E = F \oplus G$ e, portanto, F é complementado em E .

Dada uma projeção $\rho : E \rightarrow E$ sobre F , pela Proposição 3.1.3 temos $\rho(x_m) = x_m$ para todo $m \in M$ e $G = \ker(\rho)$. Portanto, para $n \notin M$ temos $\rho(x_n) = 0$, e assim, para qualquer $x = \sum_{n=1}^\infty x_n^*(x)x_n \in E$,

$$\rho(x) = \rho\left(\sum_{n=1}^\infty x_n^*(x)x_n\right) = \sum_{n=1}^\infty x_n^*(x)\rho(x_n) = \sum_{m \in M} x_m^*(x)x_m.$$

□

Proposição 3.1.8. *Todo isomorfismo de um espaço de Banach E a valores em um espaço de Banach F transforma subespaços complementados de E em subespaços complementados de F .*

Demonstração. Dados espaços de Banach E e F , sejam $T: E \rightarrow F$ um isomorfismo e G um subespaço complementado de E . Então existe um subespaço fechado H de E tal que $E = G \oplus H$. Por ser um isomorfismo, T também é um homeomorfismo, portanto transforma os fechados G e H de E em fechados $T(G)$ e $T(H)$ de F . Por T ser linear, $T(G)$ e $T(H)$ são então subespaços fechados de F .

Seja $y \in F$ e tome $x \in E$ tal que $T(x) = y$. Existem então $g \in G$ e $h \in H$ tais que $x = g + h$, temos

$$y = T(x) = T(g + h) = T(g) + T(h),$$

com $T(g) \in T(G)$ e $T(h) \in T(H)$. Portanto $F = T(G) + T(H)$.

Se $y \in T(G) \cap T(H)$, então existem $g \in G$ e $h \in H$ tais que $y = T(g) = T(h)$. Segue que $T(g) - T(h) = T(g - h) = 0$, donde segue que $g - h = 0$ pois T é injetora. Temos $g = h \in G \cap H = \{0\}$, donde decorre que $g = h = 0$, e assim $y = T(0) = 0$. Está provado que $T(G) \cap T(H) = \{0\}$. Acabamos de provar que $F = T(G) \oplus T(H)$, logo $T(G)$ é complementado em F . □

A seguinte caracterização será muito utilizada a seguir. Por Id_E denotamos o operador identidade no espaço E .

Teorema 3.1.9. *Sejam E e F espaços de Banach. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (a) E é isomorfo a um subespaço complementado de F .
- (b) Existem operadores $u \in \mathcal{L}(E; F)$ e $v \in \mathcal{L}(F; E)$ tais que $v \circ u = \text{Id}_E$.

Demonstração. Se E é isomorfo a um subespaço complementado de F , então existe um subespaço fechado $G \subseteq F$, um isomorfismo $\hat{u}: E \rightarrow G$, e uma projeção $\rho: F \rightarrow F$ sobre G . Definimos

$$u: E \rightarrow F, \quad u(x) = \hat{u}(x).$$

É claro que $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Como $\rho(F) = G$, está bem definido o operador

$$v: F \rightarrow E, \quad v(x) = \hat{u}^{-1}(\rho(x)).$$

Também é claro que $v \in \mathcal{L}(F, E)$. Para todo $x \in E$,

$$v \circ u(x) = v(u(x)) = \hat{u}^{-1}(\rho(u(x))) = \hat{u}^{-1}(\rho(\hat{u}(x))) = \hat{u}^{-1}(\hat{u}(x)) = x,$$

provando que $v \circ u = \text{Id}_E$.

Para a implicação inversa, sejam $u \in \mathcal{L}(E; F)$ e $v \in \mathcal{L}(F; E)$ tais que $v \circ u = \text{Id}_E$. Definindo

$$\hat{u}: E \rightarrow u(E), \quad \hat{u}(x) = u(x),$$

é imediato que $\hat{u} \in \mathcal{L}(E, u(E))$ é sobrejetor. Suponha $\hat{u}(x) = 0$. Então

$$x = \text{Id}_E(x) = v \circ u(x) = v \circ \hat{u}(x) = v(\hat{u}(x)) = v(0) = 0,$$

provando $\hat{u}$ é injetor, e portanto tem inversa. Também é fácil ver que $\hat{u}^{-1} = v|_{u(E)} : u(E) \rightarrow E$. Como $v \in \mathcal{L}(F, E)$, temos $\hat{u}^{-1} = v|_{u(E)} \in \mathcal{L}(u(E), E)$, donde segue que $\hat{u}$ é um isomorfismo de E em $u(E)$. Em particular, $u(E)$ é Banach, portanto subespaço fechado de F .

Para provar que $u(E)$ é complementado em F , seja $\rho : F \rightarrow F$ definida por $\rho(y) = \hat{u}(v(y))$. Por definição, $\rho \in \mathcal{L}(F, F)$ e $\rho(F) \subseteq \hat{u}(E) = u(E)$. Para todo $y \in u(E)$,

$$\rho(y) = \hat{u}(v(y)) = \hat{u}(v|_{u(E)}(y)) = \hat{u}(\hat{u}^{-1}(y)) = y,$$

o qual prova que $u(E) \subseteq \rho(F)$, e portanto $u(E) = \rho(F)$. Além disso, provamos que ρ fixa os elementos de $u(E) = \rho(F)$, portanto ρ é projeção sobre $u(E)$ pela Proposição 3.1.2. Segue que E é isomorfo a $u(E)$ que é um subespaço complementado de F . $\square$

Observação 3.1.10. Do último comentário da demonstração anterior, deixamos registrado que, sempre que E e F são espaços de Banach para os quais existem operadores $u \in \mathcal{L}(E; F)$ e $v \in \mathcal{L}(F; E)$ tais que $v \circ u = \text{Id}_E$, é verdade que E é isomorfo a $u(E)$ o qual é subespaço complementado de F .

Para dois espaços de Banach E e F , escrevemos $E \xrightarrow{c} F$ para indicar que E é isomorfo a um subespaço complementado de F .

Proposição 3.1.11. *Sejam E, F e G espaços de Banach tais que $E \xrightarrow{c} G$ e $G \xrightarrow{c} F$. Então $E \xrightarrow{c} F$.*

Demonstração. Pela hipótese existem isomorfismos $T : E \rightarrow T(E) \subseteq G$, $S : G \rightarrow S(G) \subseteq F$, $\rho : G \rightarrow G$ projeção sobre $T(E)$ e $\pi : F \rightarrow F$ projeção sobre $S(G)$. Definindo

$$u : E \rightarrow F, \quad u(x) = S(T(x)),$$

temos claramente que $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Como S é isomorfismo sobre $S(G)$ e T é isomorfismo sobre $T(E)$, podemos considerar suas inversas $S^{-1} : S(G) \rightarrow G$ e $T^{-1} : T(E) \rightarrow E$, e portanto está bem definido o operador

$$v : F \rightarrow E, \quad v(y) = T^{-1}(\rho(S^{-1}(\pi(y)))).$$

É claro que $v \in \mathcal{L}(F, E)$. Para $x \in E$, como $S(T(x)) \in S(G)$ temos $\pi(S(T(x))) = S(T(x))$, e como $T(x) \in T(E)$ temos $\rho(T(x)) = T(x)$. Daí,

$$\begin{aligned} (v \circ u)(x) &= v(u(x)) = v(S(T(x))) = T^{-1}(\rho(S^{-1}(\pi(S(T(x)))))) \\ &= T^{-1}(\rho(S^{-1}(S(T(x))))) = T^{-1}(\rho(T(x))) \\ &= T^{-1}(T(x)) = x. \end{aligned}$$

Segue que $v \circ u = \text{Id}_E$, portanto $E \xrightarrow{c} F$ pela Proposição 3.1.9. $\square$

Teorema 3.1.12. *Sejam E um espaço de Banach e $n \in \mathbb{N}$. Então*

$$\hat{\otimes}_{\pi}^{n,s} E \xrightarrow{c} \hat{\otimes}_{\pi}^{n+1,s} E.$$

Demonstração. Veja [7, Theorem 3]. $\square$

Corolário 3.1.13. *Seja E um espaço de Banach. Então*

$$E \xhookrightarrow{c} \hat{\otimes}_{\pi}^{n,s} E$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. O resultado segue do Teorema 3.1.12 e do uso repetido da Proposição 3.1.11. $\square$

3.2 Subespaços complementados em espaços de polinômios n -homogêneos

Um dos resultados mais significativos no estudo de subespaços complementados de espaços de polinômios homogêneos contínuos é o fato de que esses espaços contêm cópias complementadas de espaços de polinômios de grau inferior. A demonstração do resultado a seguir foi apresentada por Aron e Schottenloher [4] no caso de espaços de polinômios homogêneos tomando valores no corpo de escalares $\mathbb{K}$. Entretanto, na literatura usa-se rotineiramente que o resultado também vale para espaços de polinômios homogêneos tomando valores em espaços de Banach arbitrários. Por não termos encontrado nenhuma demonstração deste caso vetorial, apresentaremos uma demonstração detalhada. Na verdade, mesmo o caso escalar provado em [4, Proposition 5.3] omite muitos detalhes não triviais.

A seguir estamos supondo que todos os espaços são não triviais, isto é, diferentes de $\{0\}$.

Teorema 3.2.1. *Sejam E e F espaços de Banach e $k, n \in \mathbb{N}$ com $k < n$. Então $\mathcal{P}({}^k E; F)$ é isomorfo a um subespaço complementado de $\mathcal{P}({}^n E; F)$.*

Demonstração. Dado $k \in \mathbb{N}$, é suficiente provar que $\mathcal{P}({}^k E; F)$ é isomorfo a um subespaço complementado de $\mathcal{P}({}^{k+1} E; F)$, pois, aplicando repetidamente a Proposição 3.1.11, obteremos o resultado para qualquer $n > k$.

Suponha então que $k \in \mathbb{N}$ está dado. Pelo Corolário 1.2.8 existem $x_0 \in E$ e $\varphi \in E^*$ tais que $\|x_0\| = \varphi(x_0) = \|\varphi\| = 1$. Definimos

$$A: \mathcal{P}({}^k E; F) \longrightarrow \mathcal{P}({}^{k+1} E; F), \quad A(Q) = \varphi \otimes Q.$$

A boa definição de A vem do Exemplo 2.2.8. É fácil ver que A é linear. Para provar que A é contínua, veja que, também pelo Exemplo 2.2.8, tem-se

$$\|A(Q)\| = \|\varphi \otimes Q\| \leq \|\varphi\| \cdot \|Q\| = \|Q\|$$

para todo $Q \in \mathcal{P}({}^k E; F)$, logo $\|A\| \leq 1$. Para verificar que A é injetora, considere $Q \in \mathcal{P}({}^k E; F)$, $Q \neq 0$. Pela continuidade de Q , o conjunto $Q^{-1}(\{0\}) = \{x \in E : Q(x) = 0\}$ é fechado em E . Tomando $a \in E$ tal que $Q(a) \neq 0$, que existe pois $Q \neq 0$, segue que a pertence ao conjunto aberto $[Q^{-1}(\{0\})]^c = \{x \in E : Q(x) \neq 0\}$. Existe então $\varepsilon > 0$ tal que $B[a; \varepsilon] \subseteq [Q^{-1}(\{0\})]^c$, isto é, $Q(x) \neq 0$ para todo $x \in B[a; \varepsilon]$. Suponha que $\varphi(x) = 0$ para todo $x \in B[a; \varepsilon]$. Neste caso, para todo $x \in E$ com $\|x\| = 1$, de $\|(\varepsilon x + a) - a\| = \varepsilon$ teríamos $\varepsilon x + a \in B[a; \varepsilon]$. Seria então verdade que

$$0 = \varphi(\varepsilon x + a) = \varepsilon \varphi(x) + \varphi(a) = \varepsilon \varphi(x)$$

para todo $x \in E$ com $\|x\| = 1$. Seguiria que $\varphi(x) = 0$ para todo $x \in E$ com $\|x\| = 1$. Teríamos então

$$1 = \|\varphi\| \stackrel{(*)}{=} \sup\{\varphi(x) : x \in E, \|x\| = 1\} = 0$$

(para $(*)$, veja [11, Exercício 2.7.8]). Essa contradição garante que existe $\hat{x} \in B[a; \varepsilon]$ tal que $\varphi(\hat{x}) \neq 0$. Como $B[a; \varepsilon] \subseteq [Q^{-1}(\{0\})]^c$, temos $Q(\hat{x}) \neq 0$. Logo $A(Q)(\hat{x}) = \varphi(\hat{x})Q(\hat{x}) \neq 0$, o que é suficiente para garantir que $A(Q) \neq 0$. Está provado que o operador linear A é injetor.

Agora provaremos que existe uma projeção em $\mathcal{P}^{(k+1)}E; F$ sobre a imagem de A ; e em seguida provaremos que $\mathcal{P}^{(k)}E; F$ é isomorfo à imagem de A . Considere as aplicações

$$D: \mathcal{P}^{(k+1)}E; F \longrightarrow \mathcal{P}^{(k+1)}E; F, \quad D(P)(x) = P(x) - P(x - \varphi(x)x_0) \text{ e}$$

$$u: E \longrightarrow E, \quad u(x) = x - \varphi(x)x_0.$$

De $u = \text{Id}_E - \varphi \otimes x_0$ segue que u é um operador linear contínuo de E em E . A boa definição de D segue do Teorema 2.2.12 e do fato de $\mathcal{P}^{(k+1)}E; F$ ser espaço vetorial. Também é fácil ver que D é linear. Para comprovar a continuidade de D , note que, para todo $P \in \mathcal{P}^{(k+1)}E; F$,

$$\|D(P)\| = \|P - P \circ u\| \leq \|P\| + \|P \circ u\| \leq \|P\| + \|P\| \cdot \|u\|^{k+1} = \|P\| \underbrace{(1 + \|u\|^{k+1})}_{\text{constante}}.$$

Assim temos que D é um operador linear contínuo. Comprovemos que $D^2 = D$. Para todos $P \in \mathcal{P}^{(k+1)}E; F$ e $x \in E$,

$$\begin{aligned} D^2(P)(x) &= D(D(P))(x) = D(P)(x) - D(P)(x - \varphi(x)x_0) \\ &= D(P)(x) - [P(x - \varphi(x)x_0) - P(x - \varphi(x)x_0 - \varphi(x - \varphi(x)x_0)x_0)] \\ &= D(P)(x) - P(x - \varphi(x)x_0) + P(x - \varphi(x)x_0 - \varphi(x)x_0 + \varphi(x)\varphi(x_0)x_0) \\ &= D(P)(x) - P(x - \varphi(x)x_0) + P(x - \varphi(x)x_0) \\ &= D(P)(x). \end{aligned}$$

Está feito que $D^2(P) = D(P)$, ou seja, D é uma projeção.

Verifiquemos agora que os operadores D e A têm a mesma imagem. Dado $Q \in \mathcal{P}^{(k)}E; F$, como $\varphi(x_0) = 1$,

$$\begin{aligned} D(A(Q))(x) &= A(Q)(x) - A(Q)(x - \varphi(x)x_0) \\ &= A(Q)(x) - \varphi(x - \varphi(x)x_0) \cdot Q(x - \varphi(x)x_0) \\ &= A(Q)(x) - (\varphi(x) - \varphi(x)\varphi(x_0)) \cdot Q(x - \varphi(x)x_0) \\ &= A(Q)(x). \end{aligned}$$

Segue que $D(A(Q)) = A(Q)$ para todo $Q \in \mathcal{P}^{(k)}E; F$. Como D é uma projeção, sua imagem é formada por todos os polinômios que satisfazem $D(P) = P$ (Proposição 3.1.3). Portanto, $A(Q)$ está contido na imagem de D , logo a imagem de A está contida na imagem de D . Para provar a inclusão inversa, considere $P \in \mathcal{P}^{(k+1)}E; F$. Seja $x \in E$. Aplicando a Propriedade Binomial de operadores multilineares simétricos (Proposição 2.1.5) temos

$$D(P)(x) = P(x) - P(x - \varphi(x)x_0) = \check{P}(x^{k+1}) - \check{P}((x - \varphi(x)x_0)^{k+1})$$

$$\begin{aligned}
&= \check{P}(x^{k+1}) - \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} \check{P}((- \varphi(x)x_0)^i, x^{k+1-i}) \\
&= \check{P}(x^{k+1}) - \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} (-1)^i (\varphi(x)^i) \check{P}(x_0^i, x^{k+1-i}) \\
&= \check{P}(x^{k+1}) - \check{P}(x^{k+1}) - \sum_{i=1}^{k+1} \binom{k+1}{i} (-1)^i (\varphi(x)^i) \check{P}(x_0^i, x^{k+1-i}) \\
&= \varphi(x) \sum_{i=1}^{k+1} \binom{k+1}{i} (-1)^{i+1} (\varphi(x)^{i-1}) \check{P}(x_0^i, x^{k+1-i}) \\
&= \varphi(x) \sum_{i=1}^{k+1} \binom{k+1}{i} (-1)^{i+1} (\varphi^{i-1} \otimes P_{x_0^i})(x).
\end{aligned}$$

Como isso vale para todo $x \in E$, temos

$$D(P) = \varphi \otimes \left(\sum_{i=1}^{k+1} \binom{k+1}{i} (-1)^{i+1} (\varphi^{i-1} \otimes P_{x_0^i}) \right).$$

Pelo Exemplo 2.2.11 sabemos que, para $i < k+1$, $P_{x_0^i} \in \mathcal{P}^{(k+1-i)}E; F$; e, pelo Exemplo 2.2.8, $\varphi^{i-1} \otimes P_{x_0^i} \in \mathcal{P}^k E; F$. Se $i = k+1$, então $P_{x_0^i}$ é uma função constante em F , logo existe $b \in F$ tal que $P_{x_0^i}(x) = b$ para todo $x \in E$. Dessa forma, pelo Exemplo 2.2.7 temos $\varphi^k \otimes P_{x_0^{k+1}} = \varphi^k \otimes b \in \mathcal{P}^k E; F$. Do fato de que $\mathcal{P}^k E; F$ é espaço vetorial segue que

$$Q_P := \sum_{i=1}^{k+1} \binom{k+1}{i} (-1)^{i+1} (\varphi^{i-1} \otimes P_{x_0^i}) \in \mathcal{P}^k E; F.$$

Pela definição de A tem-se $A(Q_P) = \varphi \otimes Q_P = D(P)$. Verificamos que, para todo $P \in \mathcal{P}^{(k+1)}E; F$, existe $Q_P \in \mathcal{P}^k E; F$ tal que $A(Q_P) = D(P)$. Disso decorre que a imagem de D está contida na imagem de A , o que prova que $A(\mathcal{P}^k E; F) = D(\mathcal{P}^{(k+1)}E; F)$.

Por último provemos que $\mathcal{P}^k E; F$ é isomorfo a $A(\mathcal{P}^k E; F)$. Por definição de subespaço complementado temos que $A(\mathcal{P}^k E; F)$ é fechado em $\mathcal{P}^{(k+1)}E; F$, e pela Proposição 1.1.7 é espaço de Banach. Logo, como $A: \mathcal{P}^k E; F \longrightarrow \mathcal{P}^{(k+1)}E; F$ é um operador linear contínuo injetor, sabemos que

$$\hat{A}: \mathcal{P}^k E; F \longrightarrow A(\mathcal{P}^k E; F), \quad \hat{A}(P) = A(P),$$

é um operador linear contínuo bijetor. Pelo Teorema da Aplicação Aberta (Teorema 1.2.5), $\hat{A}$ é um isomorfismo. Está provado que $\mathcal{P}^k E; F$ é isomorfo ao subespaço complementado $A(\mathcal{P}^k E; F)$ de $\mathcal{P}^{(k+1)}E; F$. $\square$

Corolário 3.2.2. *Sejam E um espaço de Banach e $n \in \mathbb{N}$. Então*

$$E^* \xrightarrow{c} \mathcal{P}^2 E \xrightarrow{c} \mathcal{P}^3 E \xrightarrow{c} \dots \xrightarrow{c} \mathcal{P}^n E.$$

Demonstração. O resultado é imediato do Teorema 3.2.1. $\square$

Veremos a seguir outros subespaços complementados em espaços de polinômios homogêneos.

Proposição 3.2.3. *Para quaisquer espaços de Banach E e F e para todo $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(^n E; F)$ contém uma cópia isométrica complementada de $\mathcal{P}(^n E)$.*

Demonstração. Seja $b \in F$ tal que $\|b\| = 1$. Pelo Teorema 1.2.8 existe $\varphi \in F^*$ tal que $\|\varphi\| = 1 = \|b\| = \varphi(b)$. Defina

$$u: \mathcal{P}(^n E) \longrightarrow \mathcal{P}(^n E, F), \quad u(P) = P \otimes b.$$

Pelo Exemplo 2.2.7 sabemos que u é uma isometria. Para $\lambda \in \mathbb{K}$ e $P, Q \in \mathcal{P}(^n E)$,

$$\begin{aligned} u(\lambda P + Q)(x) &= ((\lambda P + Q) \otimes b)(x) = (\lambda P + Q)(x)b \\ &= (\lambda P(x) + Q(x))b = \lambda(P(x)b) + Q(x)b \\ &= \lambda((P \otimes b)(x)) + (Q \otimes b)(x) = \lambda u(P)(x) + u(Q)(x), \end{aligned}$$

provando que u é uma isometria linear. Seja agora

$$v: \mathcal{P}(^n E; F) \longrightarrow \mathcal{P}(^n E), \quad v(Q) = \varphi \circ Q.$$

Pelo Teorema 2.2.12, a aplicação v está bem definida. É imediato que v é linear, e do Exemplo 2.2.8 segue que $\|v(Q)\| = \|\varphi \circ Q\| \leq \|\varphi\| \cdot \|Q\|$, provando que v é contínua. Para todos $P \in \mathcal{P}(^n E)$ e $x \in E$,

$$(v \circ u)(P) = v(u(P)) = v(P \otimes b) = \varphi \circ (P \otimes b),$$

e

$$(v \circ u)(P)(x) = \varphi \circ (P \otimes b)(x) = \varphi(P(x)b) = P(x)\varphi(b) = P(x).$$

Portanto, $(v \circ u)(P) = P$, ou seja, $v \circ u = \text{Id}_{\mathcal{P}(^n E)}$. Pela Proposição 3.1.9 concluímos que $\mathcal{P}(^n E)$ é isomorfo a um subespaço complementado de $\mathcal{P}(^n E; F)$. Mais ainda, pela Observação 3.1.10, $\mathcal{P}(^n E)$ é isomorfo à imagem de u . Como u é isometria linear, temos que $\mathcal{P}(^n E)$ é isometricamente isomorfo ao subespaço $u(\mathcal{P}(^n E))$, o qual é complementado em $\mathcal{P}(^n E; F)$. $\square$

O resultado a seguir será útil algumas vezes adiante.

Proposição 3.2.4. *Sejam $\mathcal{Q}$ um ideal de polinômios, E, F e G espaços de Banach, $n \in \mathbb{N}$ com $\mathcal{Q}(^n E; F)$ complementado em $\mathcal{P}(^n E; F)$ e $G \xrightarrow{c} E$. Então:*

(i) $\mathcal{Q}(^n G; F)$ é complementado em $\mathcal{P}(^n G; F)$.

(ii) $\mathcal{Q}(^n G; F) \xrightarrow{c} \mathcal{P}(^n E; F)$.

Demonstração. Pela Proposição 3.1.9 existem operadores $u \in \mathcal{L}(G; E)$ e $v \in \mathcal{L}(E; G)$ tais que $v \circ u = \text{Id}_G$, e pela hipótese podemos tomar $\rho: \mathcal{P}(^n E; F) \longrightarrow \mathcal{P}(^n E; F)$ projeção sobre $\mathcal{Q}(^n E; F)$.

(i) Considere

$$\pi: \mathcal{P}(^nG; F) \longrightarrow \mathcal{P}(^nG; F) , \quad \pi(P) := \rho(P \circ v) \circ u.$$

Se $P \in \mathcal{P}(^nG; F)$, então $P \circ v \in \mathcal{P}(^nE; F)$ pelo Teorema 2.2.12. Como ρ é projeção sobre $\mathcal{Q}(^nE; F)$, temos $\rho(P \circ v) \in \mathcal{Q}(^nE; F)$. Da propriedade de ideal de $\mathcal{Q}$ segue que

$$\rho(P \circ v) \circ u \in \mathcal{Q}(^nG, F) \subseteq \mathcal{P}(^nG, F).$$

Isso prova que π está bem definida. Mais ainda, a imagem de π está contida em $\mathcal{Q}(^nG; F)$. É fácil ver que π é linear. Para verificar que π é contínua, usando a desigualdade de norma da composição de um polinômio com um operador linear vista em (2.1), temos

$$\begin{aligned} \|\pi(P)\| &= \|\rho(P \circ v) \circ u\| \leq \|\rho(P \circ v)\| \cdot \|u\|^n \\ &\leq \|\rho\| \cdot \|P \circ v\| \cdot \|u\|^n \\ &\leq \|\rho\| \cdot \|P\| \cdot \|v\|^n \cdot \|u\|^n \\ &= \underbrace{\|\rho\| \cdot \|v\|^n \cdot \|u\|^n}_{\text{constante}} \cdot \|P\|. \end{aligned}$$

Segue que $\|\pi\| \leq \|\rho\| \cdot \|v\|^n \cdot \|u\|^n$. Se $Q \in \mathcal{Q}(^nG; F)$, então $Q \circ v \in \mathcal{Q}(^nE; F)$; e como ρ é projeção, temos $\rho(Q \circ v) = Q \circ v$, e assim

$$\pi(Q) = \rho(Q \circ v) \circ u = (Q \circ v) \circ u = Q \circ (v \circ u) = Q \circ \text{Id}_G = Q. \quad (3.1)$$

Logo $\mathcal{Q}(^nG; F)$ está contido na imagem de π . Como já tínhamos a inclusão inversa, vale que $\mathcal{Q}(^nG; F) = \pi(\mathcal{P}(^nG; F))$. Além disso, já provamos em (3.1) que π fixa os elementos de sua imagem, então π é projeção sobre $\mathcal{Q}(^nG; F)$ pela Proposição 3.1.2. A demonstração deste item está completa.

(ii) Analogamente ao que fizemos na demonstração do item (i) para provar que π é um operador linear contínuo, prova-se que as seguintes aplicações são operadores lineares contínuos:

$$\begin{aligned} R: \mathcal{Q}(^nG; F) &\longrightarrow \mathcal{P}(^nE; F) , \quad R(P) = P \circ v, \text{ e} \\ S: \mathcal{P}(^nE; F) &\longrightarrow \mathcal{Q}(^nG; F) , \quad S(Q) = \rho(Q) \circ u. \end{aligned}$$

Para todo $P \in \mathcal{Q}(^nG; F)$, de $\rho(P \circ v) = P \circ u$ segue que

$$\begin{aligned} (S \circ R)(P) &= S(R(P)) = S(P \circ v) = \rho(P \circ v) \circ u = (P \circ v) \circ u \\ &= P \circ (v \circ u) = P \circ \text{Id}_G = P. \end{aligned}$$

Isso prova que $S \circ R = \text{Id}_{\mathcal{Q}(^nG; F)}$, donde segue que $\mathcal{Q}(^nG; F) \xrightarrow{c} \mathcal{P}(^nE; F)$ pela Proposição 3.1.9. $\square$

Corolário 3.2.5. *Se E, F e G são espaços de Banach tais que $G \xrightarrow{c} E$, então $\mathcal{P}(^nG; F) \xrightarrow{c} \mathcal{P}(^nE; F)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. O resultado segue aplicando a Proposição 3.2.4(ii) para o ideal $\mathcal{Q} = \mathcal{P}$, pois $\mathcal{P}(^nE; F)$ é complementado em si mesmo. $\square$

O resultado acima trata de subespaços complementados no domínio dos espaços de polinômios. Já o resultado a seguir trata de subespaços complementados no contradomínio dos espaços de polinômios.

Proposição 3.2.6. *Sejam $\mathcal{Q}$ um ideal de polinômios, E, F e H espaços de Banach, $n \in \mathbb{N}$ com $\mathcal{Q}(^n E; F)$ complementado em $\mathcal{P}(^n E; F)$ e $H \xhookrightarrow{c} F$. Então:*

- (i) $\mathcal{Q}(^n E; H)$ é complementado em $\mathcal{P}(^n E; H)$.
- (ii) $\mathcal{Q}(^n E; H) \xhookrightarrow{c} \mathcal{P}(^n E; F)$.

Demonstração. Pela Proposição 3.1.9, existem $u \in \mathcal{L}(H; F)$ e $v \in \mathcal{L}(F; H)$ tais que $v \circ u = \text{Id}_H$, e existe $\rho: \mathcal{P}(^n E; F) \rightarrow \mathcal{P}(^n E; F)$ projeção sobre $\mathcal{Q}(^n E; F)$.

(i) Considere

$$\pi: \mathcal{P}(^n E; H) \rightarrow \mathcal{P}(^n E; H), \quad \pi(P) := v \circ \rho(u \circ P).$$

Se $P \in \mathcal{P}(^n E; H)$, então $u \circ P \in \mathcal{P}(^n E; F)$ pelo Teorema 2.2.12. Como ρ é projeção sobre $\mathcal{Q}(^n E; F)$, temos $\rho(u \circ P) \in \mathcal{Q}(^n E; F)$. Da propriedade de ideal de $\mathcal{Q}$ podemos concluir que $v \circ \rho(u \circ P) \in \mathcal{Q}(^n E; H) \subseteq \mathcal{P}(^n E; F)$. Portanto, π está bem definida e, ainda mais, a imagem de π está contida em $\mathcal{Q}(^n E; H)$. É fácil ver que π é linear. Para verificar sua continuidade, usando a desigualdade de norma da composição de um polinômio com um operador linear vista em (2.1), temos

$$\begin{aligned} \|\pi(P)\| &= \|v \circ \rho(u \circ P)\| \leq \|v\| \cdot \|\rho(u \circ P)\| \\ &\leq \|v\| \cdot \|\rho\| \cdot \|u \circ P\| \\ &\leq \underbrace{\|v\| \cdot \|\rho\| \cdot \|u\|}_{\text{constante}} \cdot \|P\| \end{aligned}$$

para todo $P \in \mathcal{P}(^n E; H)$. Segue que $\|\pi\| \leq \|v\| \cdot \|\rho\| \cdot \|u\|$. Se $Q \in \mathcal{Q}(^n E; H)$, então $u \circ Q \in \mathcal{Q}(^n E; F)$, e como ρ é projeção, temos $\rho(u \circ Q) = u \circ Q$. Segue que

$$\pi(Q) = v \circ \rho(u \circ Q) = v \circ (u \circ Q) = (v \circ u) \circ Q = \text{Id}_H \circ Q = Q. \quad (3.2)$$

Logo $\mathcal{Q}(^n E; H)$ está contido na imagem de π . Como a inclusão inversa já havia sido estabelecida, se cumpre que $\mathcal{Q}(^n E; H) = \pi(\mathcal{P}(^n E; H))$. Além disso, está provado em (3.2) que π fixa os elementos de sua imagem, portanto π é projeção sobre $\mathcal{Q}(^n E; H)$ pela Proposição 3.1.2.

(ii) Analogamente ao que fizemos na demonstração do item (i) para provar que π é um operador linear contínuo, prova-se que as seguintes aplicações são operadores lineares contínuos:

$$\begin{aligned} R: \mathcal{Q}(^n E; H) &\rightarrow \mathcal{P}(^n E; F), \quad R(P) = u \circ P, \text{ e} \\ S: \mathcal{P}(^n E; F) &\rightarrow \mathcal{Q}(^n E; H), \quad S(Q) = v \circ \rho(Q). \end{aligned}$$

Para todo $P \in \mathcal{Q}(^n E; H)$, $\rho(u \circ P) = u \circ P$, o que implica

$$\begin{aligned} (S \circ R)(P) &= S(R(P)) = S(u \circ P) = v \circ \rho(u \circ P) = v \circ (u \circ P) \\ &= (v \circ u) \circ P = \text{Id}_H \circ P = P. \end{aligned}$$

Isso prova que $S \circ R = \text{Id}_{\mathcal{Q}(^n E; H)}$, donde segue que $\mathcal{Q}(^n E; H) \xhookrightarrow{c} \mathcal{P}(^n E; F)$ pela Proposição 3.1.9. $\square$

Corolário 3.2.7. *Se E, F e H são espaços de Banach tais que $H \xrightarrow{c} F$, então $\mathcal{P}(^n E; H) \xrightarrow{c} \mathcal{P}(^n E; F)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. O resultado segue aplicando a Proposição 3.2.6(ii) para o ideal $\mathcal{Q} = \mathcal{P}$, pois $\mathcal{P}(^n E; F)$ é complementado em si mesmo. $\square$

Neste ponto, a seguinte questão é bastante natural:

Dados espaços de Banach E, F e H tais que $\mathcal{P}(^n H; F) \xrightarrow{c} \mathcal{P}(^n E; F)$ para algum $n \in \mathbb{N}$, então é verdade que $H \xrightarrow{c} E$?

A resposta para esta pergunta é negativa. Em [32, Example 3] encontra-se um exemplo de espaços não isomorfos com espaços duais isomorfos. Mais precisamente, existem espaços de Banach E e F tais que $\mathcal{P}(E^*) \xrightarrow{c} \mathcal{P}(F^*)$ mas F não tem cópia complementada de E .

Terminamos este capítulo com mais um caso de subespaços complementados em espaços de polinômios homogêneos.

Proposição 3.2.8. *Sejam E e F espaços de Banach. Então, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(^n E; F)$ contém uma cópia isométrica complementada de F .*

Demonstração. Seja $x_0 \in E$ tal que $\|x_0\| = 1$. Pelo Teorema 1.2.8 existe $\varphi \in E$ tal que $\|\varphi\| = 1 = \|x_0\| = \varphi(x_0)$. Defina

$$u: F \longrightarrow \mathcal{P}(^n E; F), \quad u(y) = \varphi^n \otimes y.$$

Do Exemplo 2.2.9 sabemos que u está bem definida, e do Exemplo 2.2.7 temos que u é uma isometria. É fácil verificar que u é isometria linear. Defina agora

$$v: \mathcal{P}(^n E; F) \longrightarrow F, \quad v(P) = P(x_0).$$

É imediato que v está bem definido e é linear. A continuidade segue da desigualdade

$$\|v(P)\| = \|P(x_0)\| \leq \|P\| \cdot \|x_0\|^n = \|P\|$$

para todo $P \in \mathcal{P}(^n E; F)$. Para todo $y \in F$,

$$\begin{aligned} (v \circ u)(y) &= v(u(y)) = v(\varphi^n \otimes y) = (\varphi^n \otimes y)(x_0) = \varphi(x_0)^n \otimes y \\ &= 1^n \otimes y = y, \end{aligned}$$

o que prova que $v \circ u = \text{Id}_F$. Pela Proposição 3.1.9, F é isomorfo a um subespaço complementado de $\mathcal{P}(^n E; F)$. E pela Observação 3.1.10, $u(F)$ é subespaço complementado de $\mathcal{P}(^n E; F)$. Como u é isometria, segue que F é isometricamente isomorfo a um subespaço complementado de $\mathcal{P}(^n E; F)$. $\square$

Capítulo 4

O Teorema de Ghenciu

Neste capítulo, apresentaremos um teorema provado por I. Ghenciu [25] em 2005, que generaliza vários resultados obtidos anteriormente sobre subespaços complementados em espaços de operadores lineares contínuos. Mais precisamente, o teorema estabelece condições sob as quais os espaços dos operadores compactos e fracamente compactos não são complementados nos espaços dos operadores lineares contínuos. Neste capítulo temos dois objetivos: (i) Apresentar uma demonstração detalhada do teorema de Ghenciu, o que não aparece nem na demonstração original em [25], nem nas extensões do teorema para outros espaços de operadores. Cabe mencionar que a demonstração do teorema é um refinamento de técnicas anteriormente desenvolvidas por Kalton [30]. (ii) Preparar o terreno para as extensões polinomiais do teorema de Ghenciu que trataremos no último capítulo desta dissertação.

4.1 Resultados preparatórios

Nesta seção provamos vários resultados que serão usados na demonstração do Teorema de Ghenciu.

Na Topologia Geral sabe-se que um espaço métrico que é homeomorfo a um espaço métrico completo nem sempre é completo. O exemplo clássico é que o intervalo incompleto $(-1, 1)$ é homeomorfo a $\mathbb{R}$, que é completo. Entretanto, em espaços normados vale o seguinte:

Lema 4.1.1. *Todo espaço normado isomorfo a um espaço de Banach é um espaço de Banach.*

Demonstração. Sejam E um espaço normado, F um espaço de Banach, $T: E \rightarrow F$ um isomorfismo e $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq E$ uma sequência de Cauchy. De

$$\|T(x_n) - T(x_m)\| = \|T(x_n - x_m)\| \leq \|T\| \cdot \|x_n - x_m\| \xrightarrow{m,n \rightarrow \infty} 0,$$

segue que $(T(x_n))_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy no espaço de Banach F . Existe então $y \in F$ tal que $T(x_n) \rightarrow y$. Por T ser bijetora, existe $x \in E$ tal que $y = T(x)$. Como T^{-1} também é isomorfismo, temos

$$\|x_n - x\| = \|T^{-1}(T(x_n)) - T^{-1}(y)\| = \|T^{-1}(T(x_n) - y)\| \leq \|T^{-1}\| \cdot \|T(x_n) - y\| \rightarrow 0.$$

Segue que $x_n \rightarrow x$ e, portanto, E é espaço de Banach. □

O que está por trás da demonstração acima é que, ao contrário de funções contínuas entre espaços métricos, operadores lineares contínuos entre espaços normados são sempre uniformemente contínuos.

Lema 4.1.2. *Sejam E um espaço normado, F subespaço de E , $(x_n)_{n=1}^\infty$ uma sequência em F e $x \in F$. Então, $x_n \rightarrow x$ em $(F, \sigma(F, F^*))$ se, e somente se, $x_n \rightarrow x$ em $(E, \sigma(E, E^*))$.*

Demonstração. Suponha primeiramente que $x_n \rightarrow x$ em $(F, \sigma(F, F^*))$. Para todo funcional $\varphi \in E^*$, $\varphi|_F \in F^*$ pela Proposição 1.4.2. Como $x, x_n \in F$ para todo $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\varphi(x_n) = \varphi|_F(x_n) \rightarrow \varphi|_F(x) = \varphi(x) \text{ em } \mathbb{K}.$$

Da Proposição 1.4.2 segue que $x_n \rightarrow x$ em $(E, \sigma(E, E^*))$.

Reciprocamente, suponha que $x_n \rightarrow x$ em $(E, \sigma(E, E^*))$. Para todo funcional $\varphi \in F^*$, pelo Teorema de Hahn-Banach existe $\tilde{\varphi} \in E^*$ tal que $\tilde{\varphi}(y) = \varphi(y)$ para todo $y \in F$. Pela Proposição 1.4.2 temos $\tilde{\varphi}(x_n) \rightarrow \tilde{\varphi}(x)$ em $\mathbb{K}$; e como $x, x_n \in F$ para todo $n \in \mathbb{N}$, temos $\varphi(x_n) = \tilde{\varphi}(x_n) \rightarrow \tilde{\varphi}(x) = \varphi(x)$ em $\mathbb{K}$. Da Proposição 1.4.2 segue que $x_n \rightarrow x$ em $(F, \sigma(F, F^*))$. $\square$

Lema 4.1.3. *Sejam E e F espaços de Banach, $T: E \rightarrow F$ um isomorfismo sobre sua imagem e $(x_n)_{n=1}^\infty$ uma sequência em E . Então $(x_n)_{n=1}^\infty$ converge em E (respectivamente, converge fracamente em E) se, e somente se, $(T(x_n))_{n=1}^\infty$ converge em F (respectivamente, converge fracamente em F).*

Demonstração. Primeiro note que $T(E)$ é um espaço de Banach pelo Lema 4.1.1. Veja agora que, para provar o resultado, é suficiente provar apenas uma implicação, pois a implicação recíproca segue da que foi provada, usando que $T|_{T(E)}^{-1}: T(E) \rightarrow E$ também é um isomorfismo.

Se $(x_n)_{n=1}^\infty$ converge para $x \in E$, como T é contínuo, então $(T(x_n))_{n=1}^\infty$ converge para $T(x)$ em F pela Proposição 2.3.22.

Suponha agora que $(x_n)_{n=1}^\infty$ converge fracamente para $x \in E$. Para qualquer $\varphi \in F^*$, sabemos que $T^*(\varphi) \in E^*$ pela Proposição 1.2.15. Como $(x_n)_{n=1}^\infty$ converge fracamente para $x \in E$, temos que $T^*(\varphi)(x_n) \rightarrow T^*(\varphi)(x)$, daí

$$|\varphi(T(x_n)) - \varphi(T(x))| = |T^*(\varphi)(x_n) - T^*(\varphi)(x)| \rightarrow 0,$$

ou seja, $\varphi(T(x_n)) \rightarrow \varphi(T(x))$. Segue que $(T(x_n))_{n=1}^\infty$ converge fracamente para $T(x)$ em F . $\square$

Lema 4.1.4. *Sejam E um espaço de Banach e $(x_n)_{n=1}^\infty$ uma sequência em E tais que o conjunto $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ não é relativamente compacto (respectivamente, não é relativamente fracamente compacto). Então a sequência $(x_n)_{n=1}^\infty$ admite uma subsequência que não possui subsequência convergente (respectivamente, fracamente convergente).*

Demonstração. Façamos o caso em que o conjunto $A := \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ não é relativamente fracamente compacto.

Pelo Teorema de Eberlein-Smulian (Teorema 1.4.10), existe uma sequência $(y_n)_{n=1}^\infty$ em A que não admite subsequência fracamente convergente em E . Essa sequência tem infinitos elementos distintos de A , pois, caso contrário, haveria ao menos um elemento

de A repetido infinitas vezes, o que garantiria uma subsequência constante, a qual seria fracamente convergente. Como $(y_n)_{n=1}^\infty \subseteq A$, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $n' \in \mathbb{N}$ tal que $y_n = x_{n'}$. Pelo Axioma da Escolha existe uma função $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tal que $f(n) = n'$, satisfazendo a condição $y_n = x_{n'}$.

Seja $(y_{n_i})_{i=1}^\infty$ a subsequência de $(y_n)_{n=1}^\infty$ definida da seguinte maneira: $n_1 = 1$; e, para $i \geq 2$, n_i é algum número natural tal que, para todo $k < i$, tem-se $n_k < n_i$ e $f(n_k) < f(n_i)$. Como a sequência $(y_n)_{n=1}^\infty$ tem infinitos elementos distintos de A , para cada i sempre é possível associar um número natural suficientemente grande n_i que satisfaça as condições da definição de $(y_{n_i})_{i=1}^\infty$. Isso justifica a boa definição da subsequência.

Por construção, $n_i < n_{i+1}$ para todo i , portanto $(y_{n_i})_{i=1}^\infty$ é uma subsequência de $(y_n)_{n=1}^\infty$ e, assim, não admite subsequência fracamente convergente. Por outro lado, para cada i temos $y_{n_i} = x_{f(n_i)}$ e $y_{n_{i+1}} = x_{f(n_{i+1})}$ por definição. Como $n_i < n_{i+1}$, temos $f(n_i) < f(n_{i+1})$, o que mostra que $(y_{n_i})_{i=1}^\infty = (x_{f(n_i)})_{i=1}^\infty$ é uma subsequência de $(x_n)_{n=1}^\infty$, o que conclui que $(y_{n_i})_{i=1}^\infty$ é uma subsequência de $(x_n)_{n=1}^\infty$ que não admite subsequência fracamente convergente em E .

O caso em que o conjunto $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ não é relativamente compacto segue de forma análoga ao que fizemos acima, a única diferença é que aplicamos o Teorema 1.3.2 no lugar do Teorema de Eberlein-Smulian. $\square$

Proposição 4.1.5. *Seja E um espaço de Banach com base de Schauder seminormalizada $(x_n)_{n=1}^\infty$ e funcionais coeficientes $(x_n^*)_{n=1}^\infty$. Então, a sequência $(x_n^*)_{n=1}^\infty$ é seminormalizada e, portanto, limitada.*

Demonstração. Por $(x_n)_{n=1}^\infty$ ser seminormalizada, existe $C > 0$ tal que $\frac{1}{C} \leq \|x_n\| \leq C$ para todo n , ou seja, $\frac{1}{C} \leq \frac{1}{\|x_n\|} \leq C$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Pela Proposição 1.6.9, existe $K > 0$ tal que $1 \leq \|x_n^*\| \cdot \|x_n\| \leq K$, ou seja, $\frac{1}{\|x_n\|} \leq \|x_n^*\| \leq \frac{K}{\|x_n\|}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{C} \leq \frac{1}{\|x_n\|} \leq \|x_n^*\| \leq \frac{K}{\|x_n\|} \leq C \cdot K,$$

provando assim que $(x_n^*)_{n=1}^\infty$ é seminormalizada. $\square$

Lema 4.1.6. *Sejam E e F espaços de Banach, F_0 subespaço fechado de F e $T \in \mathcal{L}(E, F)$, tal que $T(E) \subseteq F_0$. Então T é fracamente compacto (respectivamente, compacto) se, e somente se, para toda isometria linear $S: F_0 \rightarrow G$, com G espaço de Banach, $S \circ T$ é fracamente compacto (respectivamente, compacto).*

Demonstração. Como $T(E) \subseteq F_0 = \text{domínio de } S$, a composição $S \circ T$ está bem definida para toda função $S: F_0 \rightarrow G$.

Suponha que T seja fracamente compacto. Definimos

$$\widehat{T}: E \rightarrow F_0, \quad \widehat{T}(x) = T(x).$$

Usando que F_0 é espaço de Banach por ser subespaço fechado de F . Do Teorema de Eberlein-Smulian segue facilmente que $\widehat{T}$ também é fracamente compacto. Dada uma isometria linear $S: F_0 \rightarrow G$, onde G é espaço de Banach, segue da Proposição 1.4.14 que $S \circ T = S \circ \widehat{T}$ é fracamente compacto pois $\widehat{T}$ é fracamente compacto.

Reciprocamente, suponhamos que, para toda isometria linear $S: F_0 \rightarrow G$, onde G é um espaço de Banach, $S \circ T$ seja fracamente compacto. Considerando o operador $\widehat{T}: E \rightarrow$

F_0 do parágrafo anterior e chamando de $S: F_0 \rightarrow F$ a inclusão, que é uma isometria linear definida em F_0 , por hipótese temos que $S \circ T = S \circ \widehat{T}$ é fracamente compacto. Suponha que T não seja fracamente compacto. Neste caso existem um subconjunto limitado A de E e $(x_n)_{n=1}^\infty \subseteq A$ tal que $(T(x_n))_{n=1}^\infty \subseteq F_0$ não é relativamente fracamente compacto em F . Pelo Lema 4.1.4, existe $(x_{n_i})_{i=1}^\infty$ subsequência de $(x_n)_{n=1}^\infty$ tais que $(T(x_{n_i}))_{i=1}^\infty$ não admite subsequência fracamente convergente em F ; portanto também não em F_0 . Por $S: F_0 \rightarrow F$ ser um isomorfismo sobre sua imagem, pelo Lema 4.1.3 segue que $(S(T(x_{n_i})))_{i=1}^\infty$ não admite subsequência fracamente convergente em F . Disso segue que $\{S(T(x_{n_i})) : i \in \mathbb{N}\}$ não é fracamente compacto em F , e assim $S \circ T$ não é fracamente compacto. Essa contradição mostra que T é fracamente compacto.

Como usamos acima apenas propriedades dos operadores fracamente compactos que também valem para os operadores compactos, a mesma demonstração prova o caso compacto do resultado. $\square$

Os lemas a seguir são dois dos principais ingredientes usados em [25, 30], para os quais não dão nem demonstração, nem referência e nem indicação de porque são verdadeiros. Imaginamos que são fatos bem conhecidos, que devem estar demonstrados em algum lugar da literatura; mas como não conseguimos localizar nenhuma demonstração, optamos por tentar demonstrá-los em detalhes.

Lema 4.1.7. *Sejam E e F espaços de Banach e $(T_n)_{n=1}^\infty$ uma sequência em $\mathcal{L}(E, F)$. Então existe um subespaço separável e fechado E_0 de E tal que $\|T\| = \|T|_{E_0}\|$ para todo $T \in \overline{\text{span}}(\{T_n : n \in \mathbb{N}\})$.*

Demonstração. Seja $\mathcal{D}$ um subconjunto enumerável e denso em $\mathbb{K}$ e defina

$$H := \left\{ \sum_{i=1}^k a_i T_i : k \in \mathbb{N} \text{ e } a_i \in \mathcal{D} \right\} = \bigcup_{k=1}^\infty \bigcup_{a_1, \dots, a_k \in \mathcal{D}} \left\{ \sum_{i=1}^k a_i T_i \right\}.$$

É claro que H é enumerável e $H \subseteq \mathcal{L}(E, F)$ pois $\mathcal{L}(E, F)$ é espaço vetorial. Assim, para cada $T \in H$ temos $\|T\| = \sup\{\|T(x)\| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\} < \infty$. Por propriedade do supremo, existe uma sequência não-decrescente de elementos do conjunto $\{\|T(x)\| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\}$ que converge para $\sup\{\|T(x)\| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\} = \|T\|$. Assim, para cada $T \in H$ existe uma sequência $(x_n^T)_{n=1}^\infty$ em E tal que $\|x_n^T\| \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e

$$\|T\| = \lim_n \|T(x_n^T)\| = \sup_n \|T(x_n^T)\|. \quad (4.1)$$

Como o conjunto $\bigcup_{T \in H} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x_n^T\}$ é enumerável, pela Proposição 1.1.12 obtemos que

$$E_0 := \overline{\text{span}} \left(\bigcup_{T \in H} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x_n^T\} \right)$$

é subespaço separável de E . Assim para $T \in H$

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup_n \|T(x_n^T)\| && \text{(segue de (4.1))} \\ &\leq \sup\{\|T(x)\| : x \in E_0 \text{ e } \|x\| \leq 1\} && \text{(pois } (x_n^T)_{n=1}^\infty \subseteq B_{E_0}) \end{aligned}$$

$$= \|T|_{E_0}\|. \quad (\text{definição de } \|T|_{E_0}\|).$$

Provamos que $\|T\| \leq \|T|_{E_0}\|$. Por outro lado, como $E_0 \subseteq E$,

$$\|T|_{E_0}\| = \sup\{\|T(x)\| : x \in E_0 \text{ e } \|x\| \leq 1\} \leq \sup\{\|T(x)\| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\} = \|T\|,$$

o que nos fornece $\|T\| = \|T|_{E_0}\|$ para todo $T \in H$.

Seja agora $T \in \text{span}(\{T_n : n \in \mathbb{N}\})$ dado. Podemos tomar $k \in \mathbb{N}$ e $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{K}$ tais que $T = \sum_{i=1}^k a_i T_i$. Para cada $i = 1, \dots, k$, podemos tomar uma sequência $(a_n^i)_{n=1}^\infty$ em $\mathcal{D}$ tal que $a_n^i \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a_i$, donde decorre que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^i T_i = a_i T_i$. Temos

$$\begin{aligned} \|T\| &= \left\| \sum_{i=1}^k a_i T_i \right\| && (\text{definição de } T) \\ &= \left\| \sum_{i=1}^k \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^i T_i \right\| && (\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^i T_i = a_i T_i) \\ &= \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k a_n^i T_i \right\| && (\text{propriedade de limite}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \sum_{i=1}^k a_n^i T_i \right\| && (\text{a norma é contínua}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \left(\sum_{i=1}^k a_n^i T_i \right)_{|E_0} \right\| && (\text{pois } \sum_{i=1}^k a_n^i T_i \in H). \\ &= \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^k a_n^i T_i \right)_{|E_0} \right\| && (\text{a norma é contínua}) \\ &= \left\| \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k a_n^i T_i \right)_{|E_0} \right\| && (\text{a restrição é contínua}) \\ &= \left\| \left(\sum_{i=1}^k \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^i T_i \right)_{|E_0} \right\| && (\text{propriedade de limite}) \\ &= \left\| \left(\sum_{i=1}^k a_i T_i \right)_{|E_0} \right\| && (\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^i T_i = a_i T_i) \\ &= \|T|_{E_0}\| && (\text{definição de } T). \end{aligned}$$

Está provado que $\|T\| = \|T|_{E_0}\|$ para todo $T \in \text{span}(\{T_n : n \in \mathbb{N}\})$. Para finalizar a demonstração, seja $T \in \overline{\text{span}}(\{T_n : n \in \mathbb{N}\})$. Tomando uma sequência $(S_n)_{n=1}^\infty$ em $\text{span}(\{T_n : n \in \mathbb{N}\})$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = T$, temos

$$\|T\| = \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n|_{E_0}\| = \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} S_n|_{E_0} \right\|$$

$$\begin{aligned}
&= \sup \left\{ \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n|E_0}(x) \right\| : x \in E_0 \text{ e } \|x\| \leq 1 \right\} \\
&= \sup \left\{ \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) \right\| : x \in E_0 \text{ e } \|x\| \leq 1 \right\} \\
&= \sup \{ \|T(x)\| : x \in E_0 \text{ e } \|x\| \leq 1 \} = \|T|_{E_0}\|.
\end{aligned}$$

A demonstração do lema está completa. $\square$

O seguinte resultado está enunciado como exercício em [17, Chapter V].

Lema 4.1.8. *Seja E um espaço de Banach com base incondicional $(x_n)_{n=1}^\infty$ e coeficientes coordenados $(x_n^*)_{n=1}^\infty$. Então existe $K > 0$ tal que para todo $x \in E$ e toda sequência $(\xi_n)_{n=1}^\infty \in B_{\ell_\infty}$, tem-se*

$$\left\| \sum_{n=1}^\infty \xi_n x_n^*(x) x_n \right\| \leq K \left\| \sum_{n=1}^\infty x_n^*(x) x_n \right\|.$$

Demonstração. Pela Proposição 1.6.6 existe $K > 0$ tal que, para quaisquer sequências $(a_n)_{n=1}^\infty, (b_n)_{n=1}^\infty \in \ell_\infty$ com $|b_n| \leq |a_n|$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se

$$\left\| \sum_{n=1}^\infty b_n x_n \right\| \leq K \left\| \sum_{n=1}^\infty a_n x_n \right\|. \quad (4.2)$$

Sejam $x \in E$ e $(\xi_n)_{n=1}^\infty \in B_{\ell_\infty}$ quaisquer. Para $N \in \mathbb{N}$, defina

$$\begin{aligned}
(\hat{b}_n)_{n=1}^\infty &:= (\xi_1 x_1^*(x), \dots, \xi_N x_N^*(x), 0, 0, \dots) \\
(\hat{a}_n)_{n=1}^\infty &:= (x_1^*(x), \dots, x_N^*(x), 0, 0, \dots)
\end{aligned}$$

Note que $(\hat{a}_n)_{n=1}^\infty, (\hat{b}_n)_{n=1}^\infty \in \ell_\infty$ e, além disso:

$$\begin{aligned}
|\hat{b}_n| &= \begin{cases} |\xi_n| \cdot |x_n^*(x)|, & 1 \leq n \leq N \\ 0, & n > N \end{cases} \\
&\leq \begin{cases} |1| \cdot |x_n^*(x)|, & 1 \leq n \leq N \\ 0, & n > N \end{cases} \\
&= \begin{cases} |x_n^*(x)|, & 1 \leq n \leq N \\ 0, & n > N \end{cases} \\
&= |\hat{a}_n|.
\end{aligned}$$

Segue de (4.2) que

$$\left\| \sum_{n=1}^N \xi_n x_n^*(x) x_n \right\| \leq K \left\| \sum_{n=1}^N x_n^*(x) x_n \right\| \quad \text{para todo } N \in \mathbb{N}. \quad (4.3)$$

Como $(x_n)_{n=1}^\infty$ é base incondicional, a série $\sum_{n=1}^\infty x_n^*(x) x_n$ é incondicionalmente convergente.

Do Teorema 1.6.3 tem-se que a série $\sum_{n=1}^\infty \xi_n x_n^*(x) x_n$ converge. Fazendo $N \rightarrow \infty$ em (4.3),

$$\left\| \sum_{n=1}^\infty \xi_n x_n^*(x) x_n \right\| \leq K \left\| \sum_{n=1}^\infty x_n^*(x) x_n \right\|.$$

$\square$

Lema 4.1.9. *Sejam E, F e G espaços de Banach, $(g_n)_{n=1}^\infty$ uma base incondicional de G , $T \in \mathcal{L}(E, G)$ e $B \in \mathcal{L}(G, F)$. Então*

$$\Psi: \ell_\infty \longrightarrow \mathcal{L}(E, F), \quad \Psi(\xi)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n g_n^*(T(x)) B(g_n),$$

define um operador linear contínuo, onde $(g_n^*)_{n=1}^\infty$ é a sequência de funcionais coordenados associada com a base $(g_n)_{n=1}^\infty$.

Demonstração. Provemos que Ψ está bem definida. Seja $\xi = (\xi_n)_{n=1}^\infty \in \ell_\infty$, distinto da sequência nula. Devemos provar que $\Psi(\xi) \in \mathcal{L}(E, F)$. Para qualquer $x \in E$, $T(x) \in G$ e, como $(g_n)_{n=1}^\infty$ é base incondicional, a série $\sum_{n=1}^{\infty} g_n^*(T(x)) g_n$ converge incondicionalmente.

Pelo Teorema 1.6.3, $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n g_n^*(T(x)) g_n$ converge em G . Como $B \in \mathcal{L}(G, F)$,

$$B \left(\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n g_n^*(T(x)) g_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n g_n^*(T(x)) B(g_n) = \Psi(\xi)(x), \quad (4.4)$$

com a convergência ocorrendo em F . Isso prova que $\Psi(\xi)$ está bem definida.

Para provar que $\Psi(\xi)$ é linear, sejam $x, y \in E$ e $\alpha \in \mathbb{K}$. De

$$\begin{aligned} \Psi(\xi)(\alpha x + y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n g_n^*(T(\alpha x + y)) B(g_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n g_n^*(T(\alpha x) + T(y)) B(g_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n [g_n^*(T(\alpha x)) + g_n^*(T(y))] B(g_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} [\xi_n g_n^*(T(\alpha x)) B(g_n) + \xi_n g_n^*(T(y)) B(g_n)] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n g_n^*(T(\alpha x)) B(g_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n g_n^*(T(y)) B(g_n) \\ &= \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n g_n^*(T(x)) B(g_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n g_n^*(T(y)) B(g_n) \\ &= \alpha \Psi(\xi)(x) + \Psi(\xi)(y) \end{aligned}$$

concluimos que $\Psi(\xi)$ é linear.

Para provar que o operador linear $\Psi(\xi)$ é contínuo, usaremos o Lema 4.1.8 que afirma que, para a base incondicional $(g_n)_{n=1}^\infty$, existe $C > 0$ tal que, para todo $y = \sum_{n=1}^{\infty} g_n^*(y) g_n \in G$ e para toda sequência $(\eta_n)_{n=1}^\infty \in B_{\ell_\infty}$, tem-se

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n g_n^*(y) g_n \right\| \leq C \cdot \left\| \sum_{n=1}^{\infty} g_n^*(y) g_n \right\| = C \cdot \|y\|. \quad (4.5)$$

Como $\frac{\xi}{\|\xi\|_\infty} = \left(\frac{\xi_n}{\|\xi\|_\infty} \right)_{n=1}^\infty \in B_{\ell_\infty}$, de (4.5) segue que, para todo $x \in E$,

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n}{\|\xi\|_\infty} g_n^*(T(x)) g_n \right\| \leq C \cdot \|T(x)\|. \quad (4.6)$$

Disso decorre que

$$\begin{aligned}
\|\Psi(\xi)(x)\| &\stackrel{(4.4)}{=} \left\| B \left(\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n g_n^*(T(x)) g_n \right) \right\| \leq \|B\| \cdot \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n g_n^*(T(x)) g_n \right\| \\
&= \|B\| \cdot \|\xi\|_{\infty} \cdot \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n}{\|\xi\|_{\infty}} g_n^*(T(x)) g_n \right\| \\
&\stackrel{(4.6)}{\leq} \|B\| \cdot \|\xi\|_{\infty} \cdot C \cdot \|T(x)\| \\
&\leq \|B\| \cdot \|\xi\|_{\infty} \cdot C \cdot \|T\| \cdot \|x\|.
\end{aligned}$$

Como o número $\|B\| \cdot \|\xi\|_{\infty} \cdot C \cdot \|T\|$ é constante para cada ξ fixado, obtemos que $\Psi(\xi)$ é contínuo e, mais ainda,

$$\|\Psi(\xi)\| \leq \|B\| \cdot \|T\| \cdot C \cdot \|\xi\|_{\infty}. \quad (4.7)$$

Está provado que $\Psi(\xi) \in \mathcal{L}(E, F)$, e portanto Ψ está bem definida.

Para provar que Ψ é linear, sejam $\xi = (\xi_n)_{n=1}^{\infty}, \eta = (\eta_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_{\infty}$ e $\alpha \in \mathbb{K}$. Para qualquer $x \in E$,

$$\begin{aligned}
\Psi(\alpha\xi + \eta)(x) &= \Psi((\alpha\xi_n + \eta_n)_{n=1}^{\infty})(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha\xi_n + \eta_n) g_n^*(T(x)) B(g_n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} [\alpha\xi_n g_n^*(T(x)) B(g_n) + \eta_n g_n^*(T(x)) B(g_n)] \\
&= \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n g_n^*(T(x)) B(g_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n g_n^*(T(x)) B(g_n) \\
&= \alpha\Psi(\xi)(x) + \Psi(\eta)(x) \\
&= (\alpha\Psi(\xi) + \Psi(\eta))(x),
\end{aligned}$$

provando que $\Psi(\alpha\xi + \eta) = \alpha\Psi(\xi) + \Psi(\eta)$, logo Ψ é linear.

Como Ψ é um operador linear, por (4.7) segue que Ψ é contínuo. $\square$

Concluimos esta seção de resultados preparatórios com mais um resultado devido a Kalton, este sim demonstrado em [30].

Teorema 4.1.10. *Sejam E um espaço de Banach separável e $\phi: \ell_{\infty} \longrightarrow \mathcal{L}(E, \ell_{\infty})$ um operador linear contínuo tal que $\phi(e_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, onde $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ são os vetores canônicos unitários de ℓ_{∞} . Então existe um subconjunto infinito M de $\mathbb{N}$ tal que, para toda sequência*

$$\xi \in \ell_{\infty}(M) := \{(\xi_n)_{n=1}^{\infty} : (\xi_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_{\infty} \text{ e } \xi_n = 0, \forall n \notin M\},$$

tem-se $\phi(\xi) = 0$.

Demonstração. Veja [30, Proposition 5]. $\square$

4.2 O Teorema de Ghenciu e sua demonstração

Agora estamos em condições de abordar a demonstração do Teorema de Ghenciu, que, como veremos no próximo capítulo, será uma poderosa ferramenta para o estudo de subespaços não complementados em espaços de polinômios homogêneos.

Teorema 4.2.1. (Teorema de Ghenciu [25, Theorem 1.]) *Sejam E e F espaços de Banach e seja G um espaço de Banach com base incondicional $(g_i)_{i=1}^\infty$ e funcionais coeficientes $(g_i^*)_{i=1}^\infty$.*

- (i) *Se existem operadores $R \in \mathcal{L}(G; F)$ e $S \in \mathcal{L}(E; G)$ tais que $(R(g_i))_{i=1}^\infty$ é uma sequência básica seminormalizada em F e $\{S^*(g_i^*) : i \in \mathbb{N}\}$ não é relativamente fracamente compacto em E^* , então $\mathcal{W}(E; F)$ não é complementado em $\mathcal{L}(E; F)$.*
- (ii) *Se existem operadores $R \in \mathcal{L}(G; F)$ e $S \in \mathcal{L}(E; G)$ tais que $(R(g_i))_{i=1}^\infty$ é uma sequência básica seminormalizada em F e $\{S^*(g_i^*) : i \in \mathbb{N}\}$ não é relativamente compacto em E^* , então $\mathcal{K}(E; F)$ não é complementado em $\mathcal{L}(E; F)$.*

Demonstração. (i) Por $\{S^*(g_i^*) : n \in \mathbb{N}\}$ não ser relativamente fracamente compacto em E^* , pelo Lema 4.1.4 existe uma subsequência $(g_{i_j})_{j=1}^\infty$ de $(g_i)_{i=1}^\infty$ tal que $(S^*(g_{i_j}^*))_{j=1}^\infty$ não admite subsequência fracamente convergente em E^* .

Denote por $G_0 = \overline{\text{span}}(\{g_{i_j} : j \in \mathbb{N}\}) \subseteq G$. Pelo Lema 3.1.6, $(g_{i_j})_{j=1}^\infty$ é base de Schauder de G_0 . E como a base $(g_{i_j})_{j=1}^\infty$ é subsequência de uma base incondicional, é imediato que ela também é base incondicional. Chamemos $y_j = R(g_{i_j})$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Como $(y_j)_{j=1}^\infty$ é subsequência da sequência básica seminormalizada $(R(g_i))_{i=1}^\infty$, pelo Lema 3.1.6 segue que $(y_j)_{j=1}^\infty$ é uma sequência básica seminormalizada em F . Ou seja, (y_j) é uma base de Schauder para $F_0 := \overline{\text{span}}(\{y_j : j \in \mathbb{N}\})$. Pela Proposição 4.1.5, os funcionais coeficientes $(y_j^*)_{j=1}^\infty$ associados com $(y_j)_{j=1}^\infty$ em F_0 são limitados em F_0^* . É imediato que

$$B: G_0 \longrightarrow F, \quad B(g) = R(g),$$

define um operador linear contínuo. Pela Proposição 3.1.7, G_0 é subespaço complementado em G . Podemos então tomar $\rho: G \longrightarrow G$ uma projeção sobre G_0 . Como $\rho(G) = G_0$, a expressão

$$T: E \longrightarrow G_0, \quad T(x) = \rho(S(x)),$$

é um operador linear contínuo bem definido.

Estamos agora em condições de aplicar o Lema 4.1.9 para os espaços de Banach E e F , o espaço G_0 que tem a sequência $(g_{i_j})_{j=1}^\infty$ como base incondicional, e os operadores T e B . Fazendo isso, concluímos que a definição

$$\Psi: \ell_\infty \longrightarrow \mathcal{L}(E; F), \quad \Psi(\xi)(x) := \sum_{j=1}^\infty \xi_j g_{i_j}^*(T(x)) B(g_{i_j}) = \sum_{j=1}^\infty \xi_j g_{i_j}^*(T(x)) y_j, \quad (4.8)$$

fornece um operador linear contínuo. Como o conjunto $\{y_j : j \in \mathbb{N}\}$ é enumerável e F_0 é o subespaço fechado gerado por esse conjunto, segue da Proposição 1.1.12 que F_0 é separável. E, pela Proposição 1.2.10, F_0 é isometricamente isomorfo a um subespaço de ℓ_∞ . Existe então uma isometria linear $J: F_0 \longrightarrow \ell_\infty$. Pelo Teorema de Phillips (Teorema 1.2.9), existe uma extensão linear $A: F \longrightarrow \ell_\infty$ de J com $\|A\| = \|J\|$.

Pelo Lema 4.1.7 existe um subespaço separável e fechado E_0 de E tal que, chamando $D := \overline{\text{span}}(\{g_{i_j}^* \circ T : j \in \mathbb{N}\}) \subseteq E^*$, temos $\|x_{|E_0}^*\| = \|x^*\|$ para todo $x^* \in D$. Segue que, chamando $D_{|E_0} := \{x_{|E_0}^* : x^* \in D\} \subseteq E_0^*$,

$$R_1: D \longrightarrow D_{|E_0}, \quad R_1(x^*) = x_{|E_0}^*,$$

é um isomorfismo isométrico. Como D é fechado em E^* , D é espaço de Banach pelo Teorema 1.1.7. E do Lema 4.1.1 segue que $D_{|E_0}$ é espaço de Banach e, novamente pelo Teorema 1.1.7, $D_{|E_0}$ é fechado em E_0^* .

Suponha que $\mathcal{W}(E, F)$ seja complementado em $\mathcal{L}(E, F)$ e seja $\gamma: \mathcal{L}(E, F) \longrightarrow \mathcal{L}(E, F)$ uma projeção sobre $\mathcal{W}(E, F)$. Note que, para qualquer $\xi \in \ell_\infty$, vale que $\Psi(\xi) \in \mathcal{L}(E, F)$ e, portanto, $(\gamma \circ \Psi)(\xi) = \gamma(\Psi(\xi)) \in \mathcal{W}(E, F)$. Como a restrição de um operador fracamente compacto a um subespaço fechado também é um operador fracamente compacto (isso segue, por exemplo, da Proposição 1.4.14), obtemos que $((\gamma \circ \Psi)(\xi))_{|E_0} \in \mathcal{W}(E_0, F)$. Aplicando mais uma vez a Proposição 1.4.14, a composição $A \circ [((\gamma \circ \Psi)(\xi))_{|E_0}]$ pertence a $\mathcal{W}(E_0, \ell_\infty)$. Isso nos permite concluir o seguinte operador está bem definido:

$$\mu: \ell_\infty \longrightarrow \mathcal{W}(E_0, \ell_\infty), \quad \mu(\xi) := A \circ [((\gamma \circ \Psi)(\xi))_{|E_0}].$$

Provemos que μ é um operador linear contínuo. Para isso sejam $\xi, \eta \in \ell_\infty$ e $\alpha \in \mathbb{K}$ quaisquer. De

$$\begin{aligned} \mu(\alpha\xi + \eta) &= A \circ [((\gamma \circ \Psi)(\alpha\xi + \eta))_{|E_0}] = A \circ [(\alpha(\gamma \circ \Psi)(\xi) + (\gamma \circ \Psi)(\eta))_{|E_0}] \\ &= A \circ [(\alpha(\gamma \circ \Psi)(\xi))_{|E_0} + ((\gamma \circ \Psi)(\eta))_{|E_0}] \\ &= A \circ [\alpha((\gamma \circ \Psi)(\xi))_{|E_0}] + A \circ [((\gamma \circ \Psi)(\eta))_{|E_0}] \\ &= \alpha\mu(\xi) + \mu(\eta), \end{aligned}$$

concluimos que μ é linear. E de

$$\begin{aligned} \|\mu(\xi)\| &= \|A \circ [((\gamma \circ \Psi)(\xi))_{|E_0}]\| \leq \|A\| \cdot \|((\gamma \circ \Psi)(\xi))_{|E_0}\| \\ &\leq \|A\| \cdot \|(\gamma \circ \Psi)(\xi)\| \leq \|A\| \cdot \|(\gamma \circ \Psi)\| \cdot \|\xi\|_\infty \end{aligned}$$

obtemos que μ é contínuo e $\|\mu\| \leq \|A\| \cdot \|(\gamma \circ \Psi)\|$.

Observe agora que, para qualquer $\xi \in \ell_\infty$, como $\Psi(\xi) \in \mathcal{L}(E, F)$, segue que $(\Psi(\xi))_{|E_0} \in \mathcal{L}(E_0, F)$. Pela propriedade de que a composição de operadores lineares contínuos é um operador linear contínuo, concluimos que a composição $A \circ [(\Psi(\xi))_{|E_0}] \in \mathcal{L}(E_0, \ell_\infty)$. Assim, o operador abaixo está bem definido:

$$\nu: \ell_\infty \longrightarrow \mathcal{L}(E_0, \ell_\infty), \quad \nu(\xi) = A \circ [(\Psi(\xi))_{|E_0}].$$

Argumentando exatamente como no caso do operador μ , concluimos que ν também é um operador linear contínuo. Considerando, uma vez mais, os vetores canônicos unitários $(e_n)_{n=1}^\infty$ de ℓ_∞ , e escrevendo $e_n = (e_j^n)_{j=1}^\infty$ (isto é, $e_j^n = 0$ se $n \neq j$ e $e_j^n = 1$ se $n = j$), temos, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\Psi(e_n)(x) = \sum_{j=1}^{\infty} e_j^n g_{i_j}^*(T(x))y_j = g_{i_n}(T(x))y_j.$$

Isso mostra que $\Psi(e_n) = (g_{i_n}^* \circ T) \otimes y_n$ para todo n . Em particular, cada $\Psi(e_n)$ tem posto 1. Como pelo Corolário 2.3.13, os operadores de posto finito são compactos, e fracamente compactos, temos $\Psi(e_n) \in \mathcal{W}(E, F)$ para todo n . Usando que γ fixa os elementos de $\mathcal{W}(E, F)$ por ser uma projeção sobre esse espaço, segue que $\gamma(\Psi(e_n)) = \Psi(e_n)$ para todo n . Daí,

$$\mu(e_n) = A \circ [(\gamma \circ \Psi)(e_n)]_{|E_0} = A \circ [(\Psi(e_n))_{|E_0}] = \nu(e_n) \quad (4.9)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Chamemos $\phi := \mu - \nu \in \mathcal{L}(\ell_\infty, \mathcal{L}(E_0, \ell_\infty))$. Por (4.9), $\phi(e_n) = \mu(e_n) - \nu(e_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como E_0 é subespaço fechado, logo Banach pela Proposição 1.1.7, E_0 é um espaço de Banach separável e temos todas as hipóteses do Teorema 4.1.10. Existe então um subconjunto infinito M de $\mathbb{N}$ tal que $\phi(\xi) = 0$ para toda sequência $\xi \in \ell_\infty(M)$ (a definição de $\ell_\infty(M)$ encontra-se no enunciado do Teorema 4.1.10).

Definindo $\chi_M = (\chi_j)_{j=1}^\infty$ por $\chi_j = 1$ se $j \in M$ e $\chi_j = 0$ se $j \notin M$, temos $\chi_M \in \ell_\infty(M)$. Portanto,

$$\mu(\chi_M) - \nu(\chi_M) = \phi(\chi_M) = 0 \implies \mu(\chi_M) = \nu(\chi_M).$$

Temos $\nu(\chi_M) = \mu(\chi_M) \in \mathcal{W}(E_0, \ell_\infty)$ pela definição de μ , e isso implica que

$$\nu(\chi_M) \text{ é um operador fracamente compacto.} \quad (4.10)$$

Essa última informação foi obtida a partir das hipóteses do teorema e da suposição de que $\mathcal{W}(E, F)$ é complementado em $\mathcal{L}(E, F)$. O próximo passo é provar que essa afirmação é falsa, chegando assim a um absurdo que provará que $\mathcal{W}(E, F)$ não é complementado em $\mathcal{L}(E, F)$.

Note que, por ρ ser uma projeção sobre $G_0 = \overline{\text{span}}(\{g_{i_j} : j \in \mathbb{N}\})$, da Proposição 3.1.7 segue que, para todo $x \in E$,

$$T(x) = \rho(S(x)) = \rho\left(\sum_{i=1}^\infty g_i^*(S(x))g_i\right) = \sum_{j=1}^\infty g_{i_j}^*(S(x))g_{i_j}.$$

Logo, para qualquer $j \in \mathbb{N}$,

$$g_{i_j}^*(T(x)) = g_{i_j}^*\left(\sum_{k=1}^\infty g_{i_k}^*(S(x))g_{i_k}\right) = g_{i_j}^*(S(x)) = S^*(g_{i_j}^*)(x),$$

o que prova que $g_{i_j}^* \circ T = S^*(g_{i_j}^*)$. Pelo Teorema de Hahn-Banach, existe uma sequência $(\tilde{y}_j^*)_{j=1}^\infty$ em F^* tal que cada $\tilde{y}_j^*$ é extensão de y_j^* em F e $\|\tilde{y}_j^*\| = \|y_j^*\|$. Assim, para o operador adjunto $\Psi(\chi_M)^*: F^* \rightarrow E^*$, $j \in \mathbb{N}$ e $x \in E$, temos

$$\begin{aligned} \Psi(\chi_M)^*(\tilde{y}_j^*)(x) &= \tilde{y}_j^*(\Psi(\chi_M)(x)) = \tilde{y}_j^*\left(\sum_{k \in M} g_{i_k}^*(T(x))y_k\right) \\ &= \sum_{k \in M} g_{i_k}^*(T(x))\tilde{y}_j^*(y_k) \\ &= \sum_{k \in M} S^*(g_{i_k}^*)(x)\tilde{y}_j^*(y_k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k \in M} S^*(g_{i_k}^*)(x) y_j^*(y_k) \\
&= \begin{cases} S^*(g_{i_j}^*)(x) & , \text{ se } j \in M \\ 0 & , \text{ se } j \notin M \end{cases} .
\end{aligned}$$

Em particular, $\Psi(\chi_M)^*(\tilde{y}_j^*) = S^*(g_{i_j}^*)$ para todo $j \in M$. Como M é um subconjunto infinito de $\mathbb{N}$, $(S^*(g_{i_j}^*))_{j \in M}$ é uma subsequência de $(S^*(g_{i_j}^*))_{j=1}^\infty$, e como essa última sequência não admite subsequência fracamente convergente, a sequência $(S^*(g_{i_j}^*))_{j \in M} = \left(\Psi(\chi_M)^*(\tilde{y}_j^*) \right)_{j \in M}$ também não admite subsequência fracamente convergente em E^* . Pela definição de D ,

$$(g_{i_j}^* \circ T)_{j \in M} = (S^*(g_{i_j}^*))_{j \in M} = \left(\Psi(\chi_M)^*(\tilde{y}_j^*) \right)_{j \in M} \subseteq D.$$

E como D é subespaço de E^* , $\left(\Psi(\chi_M)^*(\tilde{y}_j^*) \right)_{j \in M}$ não admite subsequência fracamente convergente em D pelo Lema 4.1.2. Como R_1 é uma isometria linear entre D e $D|_{E_0}$, pelo Lema 4.1.3 a imagem por R_1 de uma sequência que não é fracamente convergente também não é fracamente convergente, portanto

$$\left(R_1 \left(\Psi(\chi_M)^*(\tilde{y}_j^*) \right) \right)_{j \in M} = \left(\left[\Psi(\chi_M)^*(\tilde{y}_j^*) \right]_{|E_0} \right)_{j \in M}$$

não admite subsequência fracamente convergente em $D|_{E_0}$. Como $D|_{E_0}$ é subespaço fechado de E_0^* , pelo Teorema de Mazur (Teorema 1.4.8), sabemos que $D|_{E_0}$ é fechado na topologia fraca de E_0^* , e isso implica que $\left(\left[\Psi(\chi_M)^*(\tilde{y}_j^*) \right]_{|E_0} \right)_{j \in M}$ não admite subsequência fracamente convergente em E_0^* . Pelo Teorema de Eberlein-Smulian (Teorema 1.4.10), o conjunto $\overline{\left\{ \left[\Psi(\chi_M)^*(\tilde{y}_j^*) \right]_{|E_0} : j \in M \right\}}^\omega$ não é fracamente compacto em E_0^* . Para todos $j \in \mathbb{N}$ e $x \in E_0$,

$$\begin{aligned}
\left[\Psi(\chi_M)^*(\tilde{y}_j^*) \right]_{|E_0} (x) &= \Psi(\chi_M)^*(\tilde{y}_j^*)(x) = \tilde{y}_j^*(\Psi(\chi_M)(x)) \\
&= \tilde{y}_j^* \left(\Psi(\chi_M)|_{E_0}(x) \right) = \left(\Psi(\chi_M)|_{E_0} \right)^* (\tilde{y}_j^*)(x),
\end{aligned}$$

o que prova que $\left[\Psi(\chi_M)^*(\tilde{y}_j^*) \right]_{|E_0} = \left(\Psi(\chi_M)|_{E_0} \right)^* (\tilde{y}_j^*)$ para todo j . Então o conjunto

$$\overline{\left\{ \left[\Psi(\chi_M)^*(\tilde{y}_j^*) \right]_{|E_0} : j \in M \right\}}^\omega = \overline{\left\{ \left(\Psi(\chi_M)|_{E_0} \right)^* (\tilde{y}_j^*) : j \in M \right\}}^\omega$$

não é fracamente compacto em E_0^* . Como a sequência $(y_j^*)_{j=1}^\infty$ é limitada e $\|y_j\| = \|\tilde{y}_j^*\|$ para todo $j \in M$, a sequência $(\tilde{y}_j^*)_{j=1}^\infty$ também é limitada. Pela definição de operador fracamente compacto segue que o operador $\left(\Psi(\chi_M)|_{E_0} \right)^*$ não é um operador fracamente compacto. Pelo Teorema de Gantmacher (Teorema 1.4.15), obtemos que $\Psi(\chi_M)|_{E_0}$ também não é fracamente compacto. Por definição de Ψ temos

$$\Psi(\chi_M)(x) = \sum_{j \in M} g_{i_j}^*(T(x)) y_j$$

para todo $x \in E_0$, o que implica que a imagem de $\Psi(\chi_M)|_{E_0}$ está contida em F_0 . Como $J: F_0 \rightarrow \ell_\infty$ é isometria linear, pelo Lema 4.1.6 concluímos que $J \circ \Psi(\chi_M)|_{E_0}$ não é fracamente compacto. Como A e J coincidem em F_0 , espaço este que contém a imagem de $\Psi(\chi_M)|_{E_0}$, segue que $\nu(\chi_M) = A \circ \Psi(\chi_M)|_{E_0} = J \circ \Psi(\chi_M)|_{E_0}$. Isso prova que o operador $\nu(\chi_M)$ não é fracamente compacto. Tendo em vista (4.10), isso é uma contradição. Assim, por redução ao absurdo, concluímos que $\mathcal{W}(E, F)$ não é complementado em $\mathcal{L}(E, F)$.

(ii) No caso compacto do teorema, a demonstração é análoga e baseia-se nas propriedades correspondentes da teoria de compacidade na topologia da norma. Por exemplo, para o caso compacto, utiliza-se o Teorema de Schauder (Teorema 1.3.9) no lugar do Teorema de Gantmacher (Teorema 1.4.15), usado no caso fracamente compacto. $\square$

Capítulo 5

Subespaços não complementados de espaços de polinômios

Sejam E e F espaços de Banach e $n \in \mathbb{N}$. No Capítulo 3, estudamos que os espaços $\mathcal{P}_{\mathcal{K}}(^nE; F)$ dos polinômios compactos, $\mathcal{P}_{\mathcal{W}}(^nE; F)$ dos polinômios fracamente compactos e $\mathcal{P}_{\omega}(^nE; F)$ dos polinômios fracamente contínuos sobre limitados são subespaços fechados de $\mathcal{P}(^nE; F)$. Assim, faz todo sentido perguntar se esses subespaços são complementados em $\mathcal{P}(^nE; F)$ ou não. Frequentemente, é mais desafiador demonstrar que um espaço não é complementado do que provar que ele é. Neste capítulo, focamos em identificar condições necessárias para que os espaços mencionados não sejam complementados em $\mathcal{P}(^nE; F)$. Este capítulo é fortemente baseado nos resultados provados em Pérez [43].

5.1 Casos polinomiais do Teorema de Ghenciu

Nosso primeiro objetivo neste capítulo é generalizar o Teorema de Ghenciu (Teorema 4.2.1) para espaços de polinômios homogêneos; e aplicar essa generalização para os subespaços específicos de polinômios mencionados na introdução deste capítulo. A partir dessa generalização, obteremos, posteriormente, uma variedade de resultados. A seguir, apresentamos a versão do Teorema 4.2.1 adaptada para o caso dos espaços de polinômios compactos e fracamente compactos.

Teorema 5.1.1. *Sejam E e F espaços de Banach e seja G um espaço de Banach com base incondicional $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ e funcionais coeficientes $(g_n^*)_{n=1}^{\infty}$.*

- (i) *Se existem operadores $R \in \mathcal{L}(G; F)$ e $S \in \mathcal{L}(E; G)$ tais que $(R(g_n))_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência básica seminormalizada em F e $\{S^*(g_n^*) : n \in \mathbb{N}\}$ não é relativamente compacto em E^* , então $\mathcal{P}_{\mathcal{K}}(^nE; F)$ não é complementado em $\mathcal{P}(^nE; F)$ para cada $n \in \mathbb{N}$.*
- (ii) *Se existem operadores $R \in \mathcal{L}(G; F)$ e $S \in \mathcal{L}(E; G)$ tais que $(R(g_n))_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência básica seminormalizada em F e $\{S^*(g_n^*) : n \in \mathbb{N}\}$ não é fracamente relativamente compacto em E^* , então $\mathcal{P}_{\mathcal{W}}(^nE; F)$ não é complementado em $\mathcal{P}(^nE; F)$ para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. (i) O caso $n = 1$, isto é, $\mathcal{K}(E; F)$ não é complementado em $\mathcal{L}(E, F)$, segue do Teorema de Ghenciu.

Seja $n > 1$. Pelos Teoremas 2.4.3 e 2.4.4(i), existe um isomorfismo entre $\mathcal{P}(^n E; F)$ e $\mathcal{L}(\hat{\otimes}_\pi^{n,s} E, F)$ que transforma, de maneira biunívoca, $\mathcal{P}_\mathcal{K}(^n E; F)$ em $\mathcal{K}(\hat{\otimes}_\pi^{n,s} E, F)$. Suponha que $\mathcal{P}_\mathcal{K}(^n E; F)$ seja complementado em $\mathcal{P}(^n E; F)$. Pela Proposição 3.1.8 segue que $\mathcal{K}(\hat{\otimes}_\pi^{n,s} E, F)$ é complementado em $\mathcal{L}(\hat{\otimes}_\pi^{n,s} E, F)$ e, portanto, existe $\pi: \mathcal{L}(\hat{\otimes}_\pi^{n,s} E, F) \longrightarrow \mathcal{L}(\hat{\otimes}_\pi^{n,s} E, F)$ uma projeção sobre $\mathcal{K}(\hat{\otimes}_\pi^{n,s} E, F)$. Pelo Corolário 3.1.13 sabemos que E é isomorfo a um subespaço complementado de $\hat{\otimes}_\pi^{n,s} E$. Segue do Teorema 3.1.9 que existem $u \in \mathcal{L}(E, \hat{\otimes}_\pi^{n,s} E)$ e $v \in \mathcal{L}(\hat{\otimes}_\pi^{n,s} E, E)$ tais que $v \circ u = \text{Id}_E$. Definimos

$$\rho: \mathcal{L}(E, F) \longrightarrow \mathcal{L}(E, F), \quad \rho(T) = \pi(T \circ v) \circ u.$$

Vejamos que ρ está bem definida. De fato, como $T \circ v \in \mathcal{L}(\hat{\otimes}_\pi^{n,s} E, F)$, temos $\pi(T \circ v) \in \mathcal{K}(\hat{\otimes}_\pi^{n,s} E, F)$. Pela propriedade de ideal de $\mathcal{K}$ (Proposição 1.3.8), $\pi(T \circ v) \circ u \in \mathcal{K}(E, F) \subseteq \mathcal{L}(E, F)$. A boa definição de ρ está estabelecida e, além disso, a imagem de ρ está contida em $\mathcal{K}(E, F)$. A linearidade e continuidade de ρ são imediatas de sua definição.

Para cada $T \in \mathcal{K}(E, F)$, temos $T \circ v \in \mathcal{K}(\hat{\otimes}_\pi^{n,s} E, F)$ novamente pela Proposição 1.3.8, e, como π é uma projeção sobre $\mathcal{K}(\hat{\otimes}_\pi^{n,s} E, F)$, $\pi(T \circ v) = T \circ v$. Portanto,

$$\rho(T) = \pi(T \circ v) \circ u = (T \circ v) \circ u = T \circ (v \circ u) = T \circ \text{Id}_E = T.$$

Da Proposição 3.1.2 decorre que ρ é uma projeção sobre $\mathcal{K}(E, F)$ e, portanto, $\mathcal{K}(E, F)$ é complementado em $\mathcal{L}(E, F)$, contradizendo o caso $n = 1$. Está provado que $\mathcal{P}_\mathcal{K}(^n E; F)$ não é complementado em $\mathcal{P}(^n E; F)$.

(ii) Pelos Teoremas 2.4.3 e 2.4.4(ii), o isomorfismo de linearização entre os espaços $\mathcal{P}(^n E; F)$ e $\mathcal{L}(\hat{\otimes}_\pi^{n,s} E, F)$ também transforma, de maneira biunívoca, $\mathcal{P}_\mathcal{W}(^n E; F)$ em $\mathcal{W}(\hat{\otimes}_\pi^{n,s} E, F)$. Isso quer dizer que podemos proceder neste caso de forma análoga ao que fizemos na demonstração do item (i) para obter o resultado. $\square$

Nosso próximo passo é demonstrar um teorema análogo ao anterior para os espaços de polinômios fracamente contínuos sobre conjuntos limitados. Contudo, pela Observação 2.4.5, não é possível aplicar o mesmo método utilizado na demonstração anterior, pois, usando a linearização de polinômios no produto tensorial simétrico projetivo, não podemos garantir um isomorfismo entre $\mathcal{P}_\omega(^n E; F)$ e $\mathcal{P}_\omega(1 \hat{\otimes}_\pi^{n,s} E; F) = \mathcal{K}(\hat{\otimes}_\pi^{n,s} E; F)$. Para alcançar o resultado desejado, é necessário primeiro estabelecer o seguinte lema:

Lema 5.1.2. *Sejam $\mathcal{Q}$ um ideal coerente de polinômios, E e F espaços de Banach, $\varphi \in E^*$, $x_0 \in E$ com $\varphi(x_0) = \|x_0\| = \|\varphi\| = 1$ e considere os operadores*

$$A: \mathcal{P}(^n E; F) \longrightarrow \mathcal{P}(^{n+1} E; F), \quad [A(P)](x) := \varphi(x)P(x) \text{ e}$$

$$D: \mathcal{P}(^{n+1} E; F) \longrightarrow \mathcal{P}(^{n+1} E; F), \quad [D(P)](x) := P(x) - P(x - \varphi(x)x_0).$$

Então $A \in \mathcal{L}(\mathcal{P}(^n E; F), \mathcal{P}(^{n+1} E; F))$ e $B := A^{-1} \circ D \in \mathcal{L}(\mathcal{P}(^{n+1} E; F), \mathcal{P}(^n E; F))$ com $B \circ A = I$, onde I denota o operador identidade em $\mathcal{P}(^n E; F)$ e A^{-1} é o inverso de A sobre sua imagem. Além disso, $B(P) = (A^{-1} \circ D)(P) \in \mathcal{Q}(^n E; F)$ para todo $P \in \mathcal{Q}(^{n+1} E; F)$ e $A(P) \in \mathcal{Q}(^{n+1} E; F)$ para todo $P \in \mathcal{Q}(^n E; F)$.

Demonstração. Pela demonstração do Teorema 3.2.1 sabemos que A é um isomorfismo sobre sua imagem e que D é projeção sobre a imagem de A . Isso implica, em particular, que A e B são operadores lineares contínuos bem definidos. É imediato que $B \circ A = I$.

Considere o operador linear contínuo $u: E \longrightarrow E$ definido por $u(x) = x - \varphi(x)x_0$ para todo $x \in E$. Como $\mathcal{Q}$ é ideal coerente de polinômios,

$$D(P) = P - P \circ u \in \mathcal{Q}(^{n+1}E; F) \text{ para todo } P \in \mathcal{Q}(^{n+1}E; F).$$

Conforme provado na demonstração do Teorema 3.2.1,

$$\begin{aligned} A^{-1}(D(P))(x) &= \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n+1}{i} (-1)^{i+1} \varphi(x)^{i-1} D(P)(x_0^i, x^{n+1-i}) \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n+1}{i} (-1)^{i+1} \left(\varphi^{i-1} \otimes D(P)_{x_0^i} \right) (x) \end{aligned}$$

para todo $x \in E$. Por $\mathcal{Q}$ ser ideal coerente de polinômios, $\varphi^{i-1} \otimes D(P)_{x_0^i} \in \mathcal{Q}(^nE; F)$ para todo $i = 1, \dots, n+1$, donde segue imediatamente da expressão acima que $A^{-1}(D(P)) \in \mathcal{Q}(^nE; F)$. A condição $A(P) \in \mathcal{Q}(^{n+1}E; F)$ segue diretamente da propriedade de ideal de $\mathcal{Q}$. $\square$

Teorema 5.1.3. *Sejam E e F espaços de Banach e seja G um espaço de Banach com base incondicional $(g_n)_{n=1}^\infty$ e funcionais coeficientes $(g_n^*)_{n=1}^\infty$. Se existem operadores $R \in \mathcal{L}(G; F)$ e $S \in \mathcal{L}(E; G)$ tais que $(R(g_n))_{n=1}^\infty$ é uma sequência básica seminormalizada em F e $\{S^*(g_n^*) : n \in \mathbb{N}\}$ não é relativamente compacto em E^* , então $\mathcal{P}_\omega(^nE; F)$ não é complementado em $\mathcal{P}(^nE; F)$ para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Para $n = 1$, pela Proposição 2.3.21 temos $\mathcal{P}_\omega(^1E; F) = \mathcal{K}(E; F)$. Segue do Teorema de Ghenciu que $\mathcal{P}_\omega(^1E; F)$ não é complementado em $\mathcal{L}(E; F)$.

Procederemos agora por indução sobre o grau de homogeneidade n . Suponhamos que $\mathcal{P}_\omega(^{n+1}E; F)$ seja complementado em $\mathcal{P}(^{n+1}E; F)$ e consideremos $\pi: \mathcal{P}(^{n+1}E; F) \longrightarrow \mathcal{P}(^{n+1}E; F)$ projeção sobre $\mathcal{P}_\omega(^{n+1}E; F)$. Seja $x_0 \in E$ tal que $\|x_0\| = 1$. Por consequência do Teorema de Hahn-Banach (na forma do Corolário 1.2.8), existe $\varphi \in E^*$ tal que $\|\varphi\| = \varphi(x_0) = \|x_0\| = 1$. Sabemos da Proposição 2.3.24 que $\mathcal{P}_\omega$ é ideal coerente de polinômios. Podemos então aplicar o Lema 5.1.2 para $\mathcal{Q} = \mathcal{P}_\omega$ para garantir que existem operadores $A \in \mathcal{L}(\mathcal{P}(^nE; F), \mathcal{P}(^{n+1}E; F))$ e $B \in \mathcal{L}(\mathcal{P}(^{n+1}E; F), \mathcal{P}(^nE; F))$ tais que $B \circ A = \text{Id}_{\mathcal{P}(^nE; F)}$, $B(\mathcal{P}_\omega(^{n+1}E; F)) \subseteq \mathcal{P}_\omega(^nE; F)$ e $A(\mathcal{P}(^nE; F)) \subseteq \mathcal{P}_\omega(^{n+1}E; F)$. Defina agora

$$\rho: \mathcal{P}(^nE; F) \longrightarrow \mathcal{P}(^nE; F), \quad \rho(P) = B(\pi(A(P))).$$

Como sempre, vejamos que ρ está bem definida:

$$\begin{aligned} P \in \mathcal{P}(^nE; F) &\implies A(P) \in \mathcal{P}(^{n+1}E; F) \implies \pi(A(P)) \in \mathcal{P}_\omega(^{n+1}E; F) \\ &\implies B(\pi(A(P))) \in \mathcal{P}_\omega(^nE; F) \subseteq \mathcal{P}(^nE; F) \therefore \rho \text{ está bem definida.} \end{aligned}$$

Se $P \in \mathcal{P}_\omega(^nE; F)$, então $A(P) \in \mathcal{P}_\omega(^{n+1}E; F)$ e, portanto, $\pi(A(P)) = A(P)$. Assim,

$$\rho(P) = B(\pi(A(P))) = B(A(P)) = P \text{ para todo } P \in \mathcal{P}_\omega(^nE; F).$$

Pela Proposição 3.1.2, temos que ρ é projeção sobre $\mathcal{P}_\omega(^nE; F)$ e, portanto, $\mathcal{P}_\omega(^nE; F)$ é complementado em $\mathcal{P}(^nE; F)$. Provamos então que $\mathcal{P}_\omega(^{n+1}E; F)$ seja complementado em $\mathcal{P}(^{n+1}E; F)$ implica que $\mathcal{P}_\omega(^nE; F)$ é complementado em $\mathcal{P}(^nE; F)$. Uma repetição do processo com n no lugar de $n+1$ nos permite concluir que $\mathcal{P}_\omega(^{n-1}E; F)$ é complementado em $\mathcal{P}(^{n-1}E; F)$. Após um número finito de repetições, concluímos que $\mathcal{K}(E; F) = \mathcal{P}_\omega(^1E; F)$ é complementado em $\mathcal{L}(E; F) = \mathcal{P}(^1E; F)$. Como isso contradiz o caso linear $n = 1$, concluímos que $\mathcal{P}_\omega(^nE; F)$ não é complementado em $\mathcal{P}(^nE; F)$. $\square$

5.2 Aplicações

Agora que temos os casos do Teorema 4.2.1 para algumas classes de polinômios homogêneos, apresentaremos nesta seção uma série de consequências, organizadas como corolários, que são generalizações de resultados conhecidos. Para cada enunciado, indicaremos a fonte original do resultado generalizado e, em seguida, apresentaremos a demonstração correspondente. Precisamos primeiramente de alguns resultados preparatórios.

Lema 5.2.1. *Sejam E e F espaços de Banach e $T \in \mathcal{L}(E; F)$ um isomorfismo sobre sua imagem. Se E tem uma base de Schauder $(x_n)_{n=1}^\infty$ (seminormalizada), então $(T(x_n))_{n=1}^\infty$ é uma sequência básica em F (seminormalizada).*

Demonstração. Pelo Lema 4.1.1 sabemos que $T(E)$ é um espaço de Banach com a norma herdada de F . Seja $y \in T(E)$. Como T é um isomorfismo sobre sua imagem, existe um único $x \in E$ tal que $T(x) = y$. Por $(x_n)_{n=1}^\infty$ ser base de Schauder de E , existe uma única sequência $(a_n)_{n=1}^\infty \subseteq \mathbb{K}$ tal que $x = \sum_{n=1}^\infty a_n x_n$. Além disso, usando a linearidade e a continuidade de $T \in \mathcal{L}(E; F)$, temos

$$\begin{aligned} y = T(x) &= T\left(\sum_{n=1}^\infty a_n x_n\right) = T\left(\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k a_n x_n\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} T\left(\sum_{n=1}^k a_n x_n\right) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k a_n T(x_n) = \sum_{n=1}^\infty a_n T(x_n). \end{aligned}$$

Como T é injetora, essa representação é única para cada $y \in T(E)$. Assim, $(T(x_n))_{n=1}^\infty$ é uma base de Schauder de $T(E)$. Pelo Teorema 1.1.7, $\overline{[T(x_n) : n \in \mathbb{N}]} \subseteq \overline{T(E)} = T(E)$, onde segue que $(T(x_n))_{n=1}^\infty$ é uma base de Schauder de $\overline{[T(x_n) : n \in \mathbb{N}]}$, e portanto é uma sequência básica.

Se $(x_n)_{n=1}^\infty$ é seminormalizada, existe $K > 0$ tal que $\frac{1}{K} \leq \|x_n\| \leq K$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por $T|_E$ denotamos o isomorfismo $T|_E: E \rightarrow T(E)$. Dessa forma, para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{K} &\leq \|x_n\| = \|T|_E^{-1}(T(x_n))\| \leq \|T|_E^{-1}\| \cdot \|T(x_n)\| \\ \implies \frac{1}{K\|T|_E^{-1}\|} &\leq \|T(x_n)\| \leq \|T\| \cdot \|x_n\| \leq K\|T\|, \end{aligned}$$

provando que $(T(x_n))_{n=1}^\infty$ é uma sequência básica seminormalizada em F . □

Lema 5.2.2. *Sejam E um espaço de Banach e $(x_n^*)_{n=1}^\infty$ uma sequência ω^* -convergente para zero em E^* . Então*

$$S: E \rightarrow c_0, \quad S(x) := (x_n^*(x))_{n=1}^\infty,$$

é um operador linear contínuo. Mais ainda, $S^*(e_n^*) = x_n^*$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Para todo $x \in E$, $x_n^*(x) \rightarrow 0$ pois $x_n^* \xrightarrow{\omega^*} 0$, portanto S está bem definida. Pela linearidade de cada x_n^* e pela convergência da soma finita de sequências

convergentes, segue que S é linear. Por $(x_n^*)_{n=1}^\infty$ ser uma sequência ω^* -convergente, temos $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|x_n^*\| < \infty$ pela Proposição 1.5.3. Daí,

$$\|S(x)\| = \|(x_n^*(x))_{n=1}^\infty\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n^*(x)| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \|x_n^*\| \cdot \|x\|,$$

o que prova a continuidade de S . Para todos $x \in E$ e $n \in \mathbb{N}$,

$$S^*(e_n^*)(x) = e_n^*(S(x)) = e_n^*((x_i^*(x))_{i=1}^\infty) = x_n^*(x),$$

donde segue que $S^*(e_n^*) = x_n^*$ para todo $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Lema 5.2.3. *Sejam E um espaço normado e $(x_n^*)_{n=1}^\infty$ uma sequência em E^* que é ω^* -convergente para zero mas não é fracamente convergente para zero. Então $(x_n^*)_{n=1}^\infty$ admite uma subsequência que não possui subsequência fracamente convergente em E^* .*

Demonstração. Primeiramente note que, se $(x_{n_i}^*)_{i=1}^\infty$ é qualquer subsequência de $(x_n^*)_{n=1}^\infty$ convergente fracamente para algum $y^* \in E^*$, como $x_n^* \xrightarrow{\omega^*} 0$, tem-se $x_{n_i}^* \xrightarrow{\omega^*} 0$. Neste caso, $x_{n_i}^*(x) = J_x(x_{n_i}^*) \rightarrow 0$. Como $\varphi(x_{n_i}^*) \rightarrow \varphi(y^*)$ para todo $\varphi \in E^*$, segue que $J_x(y^*) = 0$ para todo $x \in E$. Isso implica que $y^*(x) = 0$ para todo $x \in E$, e, portanto, $y^* = 0$. Em resumo, se $(x_{n_i}^*)_{i=1}^\infty$ é uma subsequência de $(x_n^*)_{n=1}^\infty$ que converge fracamente, então $x_{n_i}^* \xrightarrow{\omega} 0$.

Suponhamos que toda subsequência de $(x_n^*)_{n=1}^\infty$ admita uma subsequência fracamente convergente. Pelo parágrafo anterior, essa convergência seria necessariamente para 0. Como $(x_n^*)_{n=1}^\infty$ não converge fracamente para 0, existe uma vizinhança U de 0 na topologia fraca de E^* para a qual não existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n^* \in U$ para todo $n \geq N$. Isso implica, em particular, que existem infinitos elementos da sequência que não pertencem a U . Seja $(x_{n_i}^*)_{i=1}^\infty$ a subsequência formada por todos esses elementos. Pela suposição feita, $(x_{n_i}^*)_{i=1}^\infty$ teria uma subsequência fracamente convergente para 0. Isso implicaria que um número infinito de termos dessa sequência pertenceriam a U . Isso é uma contradição pois, por construção, todos os pontos desta sequência não pertencem a U . Essa contradição prova que $(x_n^*)_{n=1}^\infty$ admite uma subsequência que não possui subsequência fracamente convergente. $\square$

Definição 5.2.4. Seja E um espaço de Banach. Dizemos que E tem a *propriedade de Grothendieck* se toda sequência de E^* ω^* -convergente é ω -convergente.

Exemplo 5.2.5. (i) Como as topologias fraca e fraca-estrela coincidem em E^* para todo espaço reflexivo E (veja [11, Proposição 6.3.8(b)]), segue que todo espaço reflexivo tem a propriedade de Grothendieck.

(ii) É bem conhecido que ℓ_∞ tem a propriedade de Grothendieck (veja [17]). Um outro exemplo de espaço não reflexivo que tem a propriedade de Grothendieck pode ser encontrado em [12].

(iii) Pelo Exemplo 1.4.4, $c_0^* = \ell_1$ tem uma sequência ω^* -convergente para 0 que não é ω -convergente para 0. Portanto, c_0 não tem a propriedade de Grothendieck. Na verdade, vale algo bem mais geral: Todo espaço de Banach separável e não reflexivo não tem a propriedade de Grothendieck (veja [23, Exercise 3.42(iii)]). Em particular, os espaços do item (ii) não são separáveis.

Proposição 5.2.6. *As seguintes afirmações são equivalentes para um espaço de Banach E :*

- (a) E tem a propriedade de Grothendieck.
- (b) Toda sequência ω^* -convergente para zero em E^* é ω -convergente para zero.

Demonstração. A implicação (a) $\implies$ (b) é imediata da definição da propriedade de Grothendieck.

(b) $\implies$ (a) Seja $(x_n^*)_{n=1}^\infty$ uma sequência ω^* -convergente para x^* em E^* . Considere a sequência $(x_n^* - x^*)_{n=1}^\infty \subseteq E^*$. Para qualquer $x \in E$,

$$(x_n^* - x^*)(x) = x_n^*(x) - x^*(x) \longrightarrow x^*(x) - x^*(x) = 0,$$

portanto $x_n^* - x^* \xrightarrow{\omega^*} 0$. Por hipótese, $x_n^* - x^* \xrightarrow{\omega} 0$, portanto, para qualquer $\varphi \in E^*$,

$$\varphi(x_n^* - x^*) = \varphi(x_n^*) - \varphi(x^*) \longrightarrow 0.$$

Então $\varphi(x_n^*) \longrightarrow \varphi(x^*)$ para todo $\varphi \in E^*$, e portanto $x_n^* \xrightarrow{\omega} x^*$. Segue que E tem a propriedade de Grothendieck. $\square$

A partir de agora, as consequências do Teorema 5.1.1 serão rotuladas como corolários.

O corolário a seguir generaliza, para o caso polinomial, os resultados [21, Theorem 2 e Theorem 3] e [5, Theorem 4].

Corolário 5.2.7. *Sejam E e F espaços de Banach tais que E não tem a propriedade de Grothendieck e F contém uma cópia de c_0 . Então $\mathcal{P}_{\mathcal{W}}({}^n E; F)$ não é complementado em $\mathcal{P}({}^n E; F)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Considere a base canônica $(e_i)_{i=1}^\infty$ de c_0 , $(e_i^*)_{i=1}^\infty$ os funcionais coeficientes, e $R: c_0 \longrightarrow F$ um isomorfismo sobre sua imagem. Como $\|e_i\| = 1$ para todo $i \in \mathbb{N}$, pelo Lema 5.2.1 sabemos que $(R(e_i))_{i=1}^\infty$ é uma sequência básica seminormalizada em F .

Por outro lado, como E não tem a propriedade de Grothendieck, existe uma sequência $(x_i^*)_{i=1}^\infty$ que é ω^* -convergente para zero em E^* mas não é ω -convergente para zero. Pelo Lema 5.2.3, podemos supor que $(x_i^*)_{i=1}^\infty$ é uma sequência em E^* que não admite subsequência fracamente convergente em E^* .

Definindo $S: E \longrightarrow c_0$ por $S(x) = (x_i^*(x))_{i=1}^\infty$ para todo $x \in E$, pelo Lema 5.2.2 sabemos que S é um operador linear contínuo e que $S^*(e_i^*) = x_i^*$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Como $(x_i^*)_{i=1}^\infty$ não admite subsequência fracamente convergente em E^* , pelo Teorema de Eberlein-Smulian (Teorema 1.4.10) o conjunto $\overline{\{S^*(e_i^*) : i \in \mathbb{N}\}}^{\sigma(E, E^*)}$ não é fracamente compacto em E^* . Isso é o mesmo que dizer que o conjunto $\{S^*(e_i^*) : i \in \mathbb{N}\}$ não é relativamente fracamente compacto. Aplicando o Teorema 5.1.1(ii) com $G = c_0$, obtemos que $\mathcal{P}_{\mathcal{W}}({}^n E; F)$ não é complementado em $\mathcal{P}({}^n E; F)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. $\square$

O próximo corolário generaliza o resultado linear [21, Corollary 4].

Corolário 5.2.8. *Sejam E e F espaços de Banach tais que F contém uma cópia de c_0 e E contém uma cópia complementada de c_0 . Então $\mathcal{P}_{\mathcal{W}}({}^n E; F)$ não é complementado em $\mathcal{P}({}^n E; F)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Pelo Exemplo 5.2.5, c_0 não tem a propriedade de Grothendieck, logo $\mathcal{P}_{\mathcal{W}}(^nc_0; F)$ não é complementado em $\mathcal{P}(^nc_0; F)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ pelo Corolário 5.2.7.

Por outro lado, suponha que para algum $n \in \mathbb{N}$ seja verdade que $\mathcal{P}_{\mathcal{W}}(^nE; F)$ é complementado em $\mathcal{P}(^nE; F)$. Como $c_0 \xhookrightarrow{c} E$, da Proposição 3.2.4(i) decorre que $\mathcal{P}_{\mathcal{W}}(^nc_0; F)$ é complementado em $\mathcal{P}(^nc_0; F)$, o qual é uma contradição. Conclui-se que $\mathcal{P}_{\mathcal{W}}(^nE; F)$ não é complementado em $\mathcal{P}(^nE; F)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. $\square$

O próximo corolário generaliza o resultado linear [24, Corollary 4] para o caso polinomial.

Corolário 5.2.9. *Sejam E e F espaços de Banach. Se F contém uma cópia de c_0 e E é de dimensão infinita, então:*

- (a) $\mathcal{P}_{\mathcal{K}}(^nE; F)$ não é complementado em $\mathcal{P}(^nE; F)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- (b) $\mathcal{P}_{\omega}(^nE; F)$ não é complementado em $\mathcal{P}(^nE; F)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Por E ter dimensão infinita, pelo Teorema de Josefson-Nissenzweig (Teorema 1.5.5), existe uma sequência $(x_i^*)_{i=1}^{\infty}$ tal que $x_i^* \xrightarrow{\omega^*} 0$ em E^* e $\|x_i^*\| = 1$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

Suponha que $(x_i^*)_{i=1}^{\infty}$ tenha uma subsequência $(x_{i_k}^*)_{k=1}^{\infty}$ convergente em norma para algum $x^* \in E^*$. Neste caso, as Proposições 1.4.3 e 1.5.2(a) garantem que $(x_{i_k}^*)_{k=1}^{\infty}$ é também ω^* -convergente para x^* . Além disso, em qualquer topologia, toda subsequência de uma sequência convergente converge ao mesmo limite. Portanto, $(x_{i_k}^*)_{k=1}^{\infty}$ é ω^* -convergente para 0. Como a topologia fraca* é de Hausdorff (Proposição 1.5.2(b)), temos $x^* = 0$. Isso implica que $1 = \|x_{i_k}^*\| \rightarrow 0$, o que é absurdo. Assim, $(x_i^*)_{i=1}^{\infty}$ não tem subsequência convergente em norma. Pela Proposição 1.3.2 concluímos que o conjunto $\overline{\{x_i^* : i \in \mathbb{N}\}}$ não é compacto.

Seja $S: E \rightarrow c_0$ definido por $S(x) = (x_i^*(x))_{i=1}^{\infty}$. Pelo Lema 5.2.2, $S \in \mathcal{L}(E, c_0)$ e $S^*(e_i^*) = x_i^*$ para todo i . Isso implica, pelo que foi provado anteriormente, que o conjunto $\overline{\{S^*(e_i^*) : i \in \mathbb{N}\}}$ não é compacto.

Por hipótese, existe $R: c_0 \rightarrow F$ um isomorfismo sobre sua imagem. Pelo Lema 5.2.1, sabemos que $(R(e_i))_{i=1}^{\infty}$ é uma sequência básica seminormalizada em F . Assim, tomando $G = c_0$ nos Teoremas 5.1.1(i) e 5.1.3, concluímos a demonstração do item (a).

O item (b) segue analogamente, utilizando os resultados correspondentes ao caso fracamente contínuo sobre limitados. $\square$

A seguir obtém-se uma generalização de [30, Theorem 5].

Corolário 5.2.10. *Sejam E e F espaços de Banach. Se E contém uma cópia complementada de ℓ_1 e F tem dimensão infinita, então:*

- (a) $\mathcal{P}_{\mathcal{K}}(^nE; F)$ não é complementado em $\mathcal{P}(^nE; F)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- (b) $\mathcal{P}_{\omega}(^nE; F)$ não é complementado em $\mathcal{P}(^nE; F)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Sem perda de generalidade, considere $\ell_1 \subseteq E$ e seja $\hat{\rho}: E \rightarrow E$ uma projecção sobre ℓ_1 . Portanto, $\rho: E \rightarrow \ell_1$ definido por $\rho(x) = \hat{\rho}(x)$ para todo $x \in E$, é um operador linear contínuo sobrejetor. Pela Proposição 1.2.15, $\rho^*: \ell_1^* = \ell_{\infty} \rightarrow E^*$ é

um isomorfismo sobre sua imagem. Considerando a base canônica $(e_i)_{i=1}^\infty$ de ℓ_1 , do que fizemos no Exemplo 1.2.2 segue que $(e_i^*)_{i=1}^\infty$ é a sequência dos vetores canônicos de ℓ_∞ , a qual não tem subsequência convergente. Pelo Lema 4.1.3, a sequência $(\rho^*(e_i^*))_{i=1}^\infty$ não tem subsequência convergente em E^* . Da Proposição 1.3.2 é imediato que $\{\rho^*(e_i^*) : i \in \mathbb{N}\}$ não é compacto em E^* .

Por outro lado, como F tem dimensão infinita, os Teoremas 1.6.10 e 1.6.11 garantem que F contém uma sequência básica normalizada $(y_i)_{i=1}^\infty$. Definimos

$$R: \ell_1 \longrightarrow F, \quad R((a_i)_{i=1}^\infty) = \sum_{i=1}^\infty a_i y_i.$$

Note que, para toda sequência $(a_i)_{i=1}^\infty \in \ell_1$,

$$\sum_{i=1}^\infty \|a_i y_i\| = \sum_{i=1}^\infty |a_i| \cdot \|y_i\| = \sum_{i=1}^\infty |a_i| = \|(a_i)_{i=1}^\infty\|_1 < \infty. \quad (5.1)$$

Como F é espaço de Banach, temos $R((a_i)_{i=1}^\infty) = \sum_{i=1}^\infty a_i y_i \in F$ pelo Teorema 1.6.2, o que prova a boa definição de R . A linearidade de R é imediata. Para a continuidade, usando (5.1) obtemos

$$\|R((a_i)_{i=1}^\infty)\| = \left\| \sum_{i=1}^\infty a_i y_i \right\| \leq \sum_{i=1}^\infty \|a_i y_i\| = \|(a_i)_{i=1}^\infty\|_1$$

para toda $(a_i)_{i=1}^\infty \in \ell_1$, provando que $\|R\| \leq 1$. Como $R(e_i) = y_i$ para todo i , aplicando os Teoremas 5.1.1(i) e 5.1.3 com $S = \rho$ e $G = \ell_1$ concluímos a demonstração. $\square$

O último corolário desta seção generaliza o resultado enunciado em [22, pag. 334].

Corolário 5.2.11. *Sejam E e F espaços de Banach. Se E contém uma cópia de ℓ_1 e F contém uma cópia de ℓ_p para algum $2 \leq p < \infty$, então:*

- (a) $\mathcal{P}_K(^n E; F)$ não é complementado em $\mathcal{P}(^n E; F)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- (b) $\mathcal{P}_\omega(^n E; F)$ não é complementado em $\mathcal{P}(^n E; F)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Por um resultado de [40], existe um subespaço fechado M de E tal que o espaço quociente E/M é isomorfo a ℓ_2 (veja a demonstração de [43, Corollary 3.8]). Existe então um isomorfismo $T: E/M \longrightarrow \ell_2$. Chame de $\pi: E \longrightarrow E/M$ a função canônica de E em E/M , a qual é um operador linear contínuo sobrejetor (veja Teorema 1.7.4). Portanto, $S := T \circ \pi: E \longrightarrow \ell_2$ é um operador linear contínuo sobrejetor. Então seu adjunto $S^*: \ell_2 \longrightarrow E^*$ é um isomorfismo sobre sua imagem pela Proposição 1.2.15(b). Considere a base incondicional canônica $(e_i)_{i=1}^\infty$ de ℓ_2 , a qual não tem subsequência convergente em ℓ_2 . Do Lema 4.1.3 segue que $(S^*(e_i))_{i=1}^\infty$ não admite subsequência convergente em E^* , e portanto o conjunto $\{S^*(e_i) : i \in \mathbb{N}\}$ não é compacto em E^* pelo Lema 5.3.5.

Por outro lado, $\ell_2 \subseteq \ell_p$ e $\|\cdot\|_p \leq \|\cdot\|_2$. Isso é o mesmo que dizer que a inclusão $i: \ell_2 \longrightarrow \ell_p$, definida pela fórmula $i((a_i)_{i=1}^\infty) = (a_i)_{i=1}^\infty$, é um operador linear contínuo. Por hipótese, existe um isomorfismo sobre sua imagem $u: \ell_p \longrightarrow F$. Então $R := u \circ i: \ell_2 \longrightarrow F$ é um operador linear contínuo. Mais ainda, pelo Lema 5.2.1 obtemos que $(R(e_i))_{i=1}^\infty = (u(i(e_i)))_{i=1}^\infty = (u(e_i))_{i=1}^\infty$ é uma sequência básica seminormalizada em F . Aplicando os Teoremas 5.1.1(i) e 5.1.3 para $G = \ell_2$, obtemos o resultado desejado. $\square$

5.3 Uma aplicação usando medidas vetoriais

Muitas das ideias trabalhadas na teoria dos espaços de Banach têm suas origens na teoria de medidas vetoriais, a qual ainda hoje é uma ferramenta fundamental no estudo desses espaços. Aplicações de medidas vetoriais a temas próximos a esta dissertação podem ser encontradas nos trabalhos da própria I. Ghenciu, veja [26, 27]. A seguir, apresentaremos uma aplicação ao tema dos subespaços de polinômios homogêneos não complementados. O objetivo principal é detalhar as demonstrações de alguns resultados de [43]. Para isso, vamos primeiro apresentar as definições e os resultados básicos da teoria de medidas vetoriais que utilizaremos para este fim. Trata-se apenas de um breve resumo; para mais detalhes o leitor deve consultar o excelente livro [19], de onde obtivemos as definições e resultados que apresentamos a seguir.

Definição 5.3.1. Seja Ω um conjunto. Uma coleção $\mathcal{A}$ de subconjuntos de Ω é uma álgebra se as seguintes condições são satisfeitas:

- (i) $\emptyset, \Omega \in \mathcal{A}$.
- (ii) Se $A \in \mathcal{A}$, então $A^c \in \mathcal{A}$.
- (iii) Se $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$, então $(A_1 \cup \dots \cup A_n) \in \mathcal{A}$.

Se, além disso, a seguinte condição é satisfeita, diz-se que a coleção $\mathcal{A}$ é uma σ -álgebra:

- (iv) Se $A_n \in \mathcal{A}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Exemplo 5.3.2. Para um conjunto Ω , tem-se de imediato da definição de σ -álgebra que a coleção de todos os subconjuntos de Ω , comumente denotada por $\mathcal{P}(\Omega)$, é uma σ -álgebra em Ω .

Definição 5.3.3. Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra de subconjuntos de Ω e E um espaço de Banach. Diz-se que uma função $\mu: \mathcal{A} \rightarrow E$ é uma *medida vetorial finitamente aditiva*, ou simplesmente *medida vetorial*, se para cada par de conjuntos disjuntos $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ tem-se $\mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2)$.

Diz-se que a medida vetorial μ é uma *medida vetorial limitada* se existe $M > 0$ tal que $\|\mu(A)\| \leq M$ para todo $A \in \mathcal{A}$.

Também diz-se que a medida vetorial μ é uma *medida vetorial fortemente aditiva* se, para toda sequência $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ de conjuntos disjuntos dois a dois em $\mathcal{A}$, tem-se que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ converge em E . É imediato que, neste caso, a convergência é incondicional.

De muita importância para o nosso estudo será o seguinte teorema.

Teorema 5.3.4 (Teorema de Diestel-Faires). *Sejam $\mathcal{A}$ uma σ -álgebra de subconjuntos de Ω , E um espaço de Banach e $\mu: \mathcal{A} \rightarrow E$ uma medida vetorial limitada. Se μ não é fortemente aditiva, então E contém uma cópia de ℓ_{∞} .*

Demonstração. Veja [19, pag. 20 Theorem 2]. □

Lema 5.3.5. *Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra de subconjuntos de Ω , E e F espaços de Banach e $\mu: \mathcal{A} \rightarrow E$ uma medida vetorial. Se $\pi \in \mathcal{L}(E; F)$, então $\pi \circ \mu: \mathcal{A} \rightarrow F$ é medida vetorial. Além disso, se μ for medida vetorial limitada, então $\pi \circ \mu$ também é medida vetorial limitada.*

Demonstração. A boa definição de $\pi \circ \mu$ é clara. Sejam $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ tais que $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Como μ é medida vetorial e π é linear, temos

$$\begin{aligned} (\pi \circ \mu)(A_1 \cup A_2) &= \pi(\mu(A_1 \cup A_2)) = \pi(\mu(A_1) + \mu(A_2)) \\ &= \pi(\mu(A_1)) + \pi(\mu(A_2)) = (\pi \circ \mu)(A_1) + (\pi \circ \mu)(A_2), \end{aligned}$$

provando que $\pi \circ \mu$ é medida vetorial.

Agora suponha que μ seja limitada e tome $M > 0$ tal que $\|\mu(A)\| \leq M$ para todo $A \in \mathcal{A}$. Da continuidade de π segue que

$$\|(\pi \circ \mu)(A)\| \leq \|\pi\| \cdot \|\mu(A)\| \leq M\|\pi\|$$

para todo $A \in \mathcal{A}$. Está provado que $\pi \circ \mu$ é medida vetorial limitada. $\square$

Antes de desenvolver a aplicação de medidas vetoriais ao assunto desta dissertação, precisamos apresentar alguns conceitos muito úteis da teoria dos espaços de Banach.

Definição 5.3.6. Sejam E um espaço de Banach e $(x_\lambda)_{\lambda \in \Omega}$ uma rede em E . Dizemos que $(x_\lambda)_{\lambda \in \Omega}$ é *fracamente de Cauchy em E* se a rede $(\varphi(x_\lambda))_{\lambda \in \Omega}$ for convergente em $\mathbb{K}$ para todo $\varphi \in E^*$.

Definição 5.3.7. Sejam E um espaço de Banach e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em E . Dizemos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é *fracamente incondicionalmente de Cauchy em E* se, para cada permutação $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, a sequência de somas parciais

$$\left(\sum_{n=1}^k x_{\sigma(n)} \right)_{k \in \mathbb{N}}$$

for fracamente de Cauchy em E , ou, equivalentemente, se a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(x_{\sigma(n)})$$

for convergente em $\mathbb{K}$ para todo funcional $\varphi \in E^*$.

Teorema 5.3.8. *As seguintes afirmações são equivalentes para uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ no espaço de Banach E :*

- (a) *A série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é fracamente incondicionalmente de Cauchy em E .*
- (b) *Para cada subsérie de $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, a sequência de somas parciais da subsérie é fracamente de Cauchy em E .*

(c) A série $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(x_n)$ é absolutamente convergente para todo $\varphi \in E^*$.

(d) Para toda sequência $(a_n)_{n=1}^{\infty} \in c_0$, a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ converge em E .

(e) Existe $M > 0$ tal que

$$\left\| \sum_{n=1}^m \xi_n x_n \right\| \leq M \cdot \max\{|\xi_n| : n = 1, \dots, m\}$$

para todos $m \in \mathbb{N}$ e $\xi_1, \dots, \xi_m \in \mathbb{K}$.

(f) Existe $M > 0$ tal que, para qualquer subconjunto finito F de $\mathbb{N}$ e qualquer escolha dos sinais $\xi_n = \pm 1$ para $n \in F$, tem-se

$$\left\| \sum_{n \in F} \xi_n x_n \right\| \leq M.$$

Demonstração. Para as equivalências dos itens (a) até (e), veja [35, Proposition 4.3.9], para a equivalência desses itens com o item (f), veja [17, pag. 44. Theorem 6]. $\square$

Exemplo 5.3.9. Considere $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ a base canônica de Schauder de c_0 . Então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$ converge em c_0 para toda $(a_n)_{n=1}^{\infty} \in c_0$. Pela equivalência (a) $\iff$ (d) do teorema acima, concluímos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} e_n$ é fracamente incondicionalmente de Cauchy em c_0 .

Teorema 5.3.10. As seguintes afirmações são equivalentes para um espaço de Banach E :

(i) Para toda sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em E tal que $\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_n)| < \infty$ para todo $\varphi \in E^*$, tem-se

que a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge incondicionalmente em E .

(ii) E não contém cópia de c_0 .

Demonstração. Veja [17, pag 45. Theorem 8]. $\square$

Lema 5.3.11. Isomorfismos entre espaços de Banach transformam séries fracamente incondicionalmente de Cauchy em séries fracamente incondicionalmente de Cauchy.

Demonstração. Seja $T: E \longrightarrow F$ um isomorfismo entre espaços de Banach e seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência em E tal que a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é fracamente incondicionalmente de Cauchy em E . Devemos provar que a série $\sum_{n=1}^{\infty} T(x_n)$ é fracamente incondicionalmente de Cauchy

em F . Para isso, seja $\varphi \in F^*$. Como $\varphi \circ T \in E^*$ e $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é fracamente incondicionalmente de Cauchy em E , para qualquer permutação $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ a série

$$\left(\sum_{n=1}^k (\varphi \circ T)(x_{\sigma(n)}) \right)_{k=1}^{\infty} = \left(\sum_{n=1}^k \varphi(T(x_{\sigma(n)})) \right)_{k=1}^{\infty}$$

converge em $\mathbb{K}$. Como isso vale para todo $\varphi \in F^*$, segue que a série $\sum_{n=1}^{\infty} T(x_n)$ é fracamente incondicionalmente de Cauchy em F . $\square$

O lema a seguir é simples e bem conhecido, optamos por incluir a demonstração apenas por completude.

Lema 5.3.12. *Se $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é uma série convergente em um espaço normado E , então $\lim_n x_n = 0$.*

Demonstração. Chamemos de S a soma da série, isto é, $S = \sum_{n=1}^{\infty} x_n = \lim_k \sum_{n=1}^k x_n$. Então também temos $S = \lim_k \sum_{n=1}^{k-1} x_n$, donde segue que

$$\begin{aligned} 0 &= S - S = \lim_k \sum_{n=1}^k x_n - \lim_k \sum_{n=1}^{k-1} x_n = \\ &= \lim_k \left(\sum_{n=1}^k x_n - \sum_{n=1}^{k-1} x_n \right) = \lim_k x_k. \end{aligned}$$

$\square$

Utilizaremos os seguintes teoremas sobre polinômios fracamente contínuos sobre limitados provados por González e Gutiérrez [28].

Teorema 5.3.13. *Sejam E e F espaços de Banach e suponha que E contém uma cópia complementada de ℓ_1 . Então $\mathcal{P}_{\omega}(^n E; F)$ não é complementado em $\mathcal{P}(^n E; F)$ para todo $n > 1$.*

Demonstração. Veja [28, Lemma 5]. $\square$

Teorema 5.3.14. *Sejam E e F espaços de Banach. Então $\mathcal{P}_{\omega}(^n E; F)$ contém uma cópia de ℓ_{∞} se, e somente se, F contém uma cópia de c_0 ou E contém uma cópia complementada de ℓ_1 .*

Demonstração. Veja [28, Theorem 3]. $\square$

Agora estamos prontos para desenvolver uma aplicação da teoria das medidas vetoriais no nosso estudo dos espaços de polinômios homogêneos. O teorema a seguir é uma extensão polinomial de [22, Theorem 2] e de [31, Theorem 1]. Nosso objetivo é detalhar sua demonstração, que encontra-se em [43, Proposition 3.10] e foi inspirada em ideias de [27, Corollary 11].

Teorema 5.3.15. *Sejam E e F espaços de Banach com E de dimensão infinita e $n > 1$. Se $\mathcal{P}_\omega(^n E; F)$ contém uma cópia de c_0 , então $\mathcal{P}_\omega(^n E; F)$ não é complementado em $\mathcal{P}(^n E; F)$.*

Demonstração. Se F contém uma cópia de c_0 , então $\mathcal{P}_\omega(^n E; F)$ não é complementado em $\mathcal{P}(^n E; F)$ pelo Corolário 5.2.9. E se E contém uma cópia complementada de ℓ_1 , então $\mathcal{P}_\omega(^n E; F)$ não é complementado em $\mathcal{P}(^n E; F)$ pelo Teorema 5.3.13. Basta então fazer o caso em que F não contém cópia de c_0 e que E não tem cópia complementada de ℓ_1 . Sob essas condições, $\mathcal{P}_\omega(^n E; F)$ não contém uma cópia de ℓ_∞ pelo Teorema 5.3.14.

Por hipótese, existe $T: c_0 \rightarrow T(c_0) \subseteq \mathcal{P}_\omega(^n E; F)$ que é um isomorfismo sobre $T(c_0)$. Chamemos $p_i = T(e_i)$ para todo $i \in \mathbb{N}$, onde $(e_i)_{i=1}^\infty$ é a base canônica de c_0 . Como $\sum_{i=1}^\infty e_i$ é fracamente incondicionalmente de Cauchy em c_0 (Exemplo 5.3.9), pelo Lema 5.3.11 segue que $\sum_{i=1}^\infty T(e_i)$ é fracamente incondicionalmente de Cauchy em $T(c_0)$.

Para qualquer $\phi \in \mathcal{P}_\omega(^n E; F)^*$, tem-se $\phi|_{T(c_0)} \in T(c_0)^*$, e assim

$$\sum_{i=1}^\infty \phi(T(e_{\sigma(i)})) = \sum_{i=1}^\infty \phi|_{T(c_0)}(T(e_{\sigma(i)})) = \sum_{i=1}^\infty \phi|_{T(c_0)}(p_{\sigma(i)})$$

é convergente em $\mathbb{K}$ para qualquer permutação $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Isso mostra que a série $\sum_{i=1}^\infty p_i$ é fracamente incondicionalmente de Cauchy em $\mathcal{P}_\omega(^n E; F)$. Para todos $\varphi \in F'$ e $x \in E$, considere

$$\psi_{\varphi, x}: \mathcal{P}_\omega(^n E; F) \rightarrow \mathbb{K}, \quad \psi_{\varphi, x}(P) = \varphi(P(x)).$$

Como $P: E \rightarrow F$ para todo $P \in \mathcal{P}_\omega(^n E; F)$ e $\varphi: F \rightarrow \mathbb{K}$, então $\psi_{\varphi, x}$ está bem definida. Se $P, Q \in \mathcal{P}_\omega(^n E; F)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, então

$$\begin{aligned} \psi_{\varphi, x}(\lambda P + Q) &= \varphi((\lambda P + Q)(x)) = \varphi(\lambda P(x) + Q(x)) \\ &= \lambda \varphi(P(x)) + \varphi(Q(x)) = \lambda \psi_{\varphi, x}(P) + \psi_{\varphi, x}(Q), \end{aligned}$$

o que prova que $\psi_{\varphi, x}$ é linear. Para qualquer $P \in \mathcal{P}_\omega(^n E; F)$,

$$|\psi_{\varphi, x}(P)| = |\varphi(P(x))| \leq \underbrace{\|\varphi\| \cdot \|x\|^n}_{\text{constante}} \cdot \|P\|,$$

provando a continuidade de $\psi_{\varphi, x}$. Em resumo, $\psi_{\varphi, x} \in \mathcal{P}_\omega(^n E; F)^*$. Como $\sum_{i=1}^\infty p_i$ é fracamente incondicionalmente de Cauchy, a série $\sum_{i=1}^\infty \psi_{\varphi, x}(p_i)$ é absolutamente convergente pela equivalência (a) $\iff$ (c) do Teorema 5.3.8. Dessa forma,

$$\sum_{i=1}^\infty |\psi_{\varphi, x}(p_i)| = \sum_{i=1}^\infty |\varphi(p_i(x))| < \infty$$

para todos $\varphi \in F^*$ e $x \in E$. Como F não contém cópia de c_0 , a série $\sum_{i=1}^\infty p_i(x)$ converge incondicionalmente em F , para todo $x \in E$, pelo Teorema 5.3.10.

Considere

$$\mu: \mathcal{P}(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathcal{P}(^n E; F), \quad \mu(A)(x) = \sum_{i \in A} p_i(x).$$

Provemos que μ é uma medida vetorial. Como sempre, comecemos por provar que está bem definida como função.

Seja $A \subseteq \mathbb{N}$. Se A é finito, por $\mathcal{P}(^n E; F)$ ser um espaço vetorial, $\sum_{i \in A} p_i \in \mathcal{P}(^n E; F)$, e, por definição de $\mu(A)$,

$$\mu(A)(x) = \sum_{i \in A} p_i(x) = \left(\sum_{i \in A} p_i \right) (x)$$

para todo $x \in E$. Logo, $\mu(A) = \sum_{i \in A} p_i \in \mathcal{P}_\omega(^n E; F)$.

Suponha agora que A seja infinito. Devemos provar que $\mu(A) \in \mathcal{P}(^n E; F)$. Já sabemos que $\mu(A)$ está bem definida como função de E em F . Seja $x \in E$. Como $\sum_{i=1}^{\infty} p_i(x)$ é incondicionalmente convergente em F , então qualquer subsérie é convergente pela Proposição 1.6.3. Segue que $\mu(A)(x) = \sum_{i \in A} p_i(x)$ é convergente em F . Considere

$$B: E^n \longrightarrow F, \quad B(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i \in A} \check{p}_i(x_1, \dots, x_n).$$

Para qualquer escolha de sinais $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{\pm 1\}$, $\varepsilon_1 x_1 + \dots + \varepsilon_n x_n \in E$, e disso decorre que $\sum_{i \in A} \varepsilon_1 \dots \varepsilon_n p_i(\varepsilon_1 x_1 + \dots + \varepsilon_n x_n)$ converge incondicionalmente em F . Como o número de escolhas $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n = \pm 1$ é finito, segue que

$$\sum_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{\pm 1\}} \sum_{i \in A} \varepsilon_1 \dots \varepsilon_n p_i(\varepsilon_1 x_1 + \dots + \varepsilon_n x_n) = \sum_{i \in A} \sum_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{\pm 1\}} \varepsilon_1 \dots \varepsilon_n p_i(\varepsilon_1 x_1 + \dots + \varepsilon_n x_n)$$

converge em F . Usando a fórmula de polarização, temos que

$$\begin{aligned} B(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{i \in A} \check{p}_i(x_1, \dots, x_n) \\ &= \sum_{i \in A} \frac{1}{n! 2^n} \sum_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{\pm 1\}} \varepsilon_1 \dots \varepsilon_n \check{p}_i(\varepsilon_1 x_1 + \dots + \varepsilon_n x_n)^n \\ &= \frac{1}{n! 2^n} \sum_{i \in A} \sum_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{\pm 1\}} \varepsilon_1 \dots \varepsilon_n p_i(\varepsilon_1 x_1 + \dots + \varepsilon_n x_n) \end{aligned}$$

é convergente em F para quaisquer $x_1, \dots, x_n \in E$. Portanto, B está bem definida como função. Para verificar que B é n -linear, para todos $1 \leq i \leq n$, $x_i, x'_i \in E$ e $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} B(x_1, \dots, \lambda x_i + x'_i, \dots, x_n) &= \sum_{i \in A} \check{p}_i(x_1, \dots, \lambda x_i + x'_i, \dots, x_n) \\ &= \sum_{i \in A} \left[\lambda \check{p}_i(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) + \check{p}_i(x_1, \dots, x'_i, \dots, x_n) \right] \\ &= \lambda B(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) + B(x_1, \dots, x'_i, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Portanto B é um operador n -linear. Para todo $x \in E$,

$$\mu(A)(x) = \sum_{i \in A} p_i(x) = \sum_{i \in A}^{\vee} p_i x^n = Bx^n,$$

donde podemos concluir que $\mu(A)$ é um polinômio n -homogêneo. Provemos sua continuidade. Para isso, note que para qualquer sequência crescente $(i_k)_{k=1}^{\infty}$ de números naturais,

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=1}^m p_{i_k} \right\| &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=1}^m T(e_{i_k}) \right\| = \lim_{m \rightarrow \infty} \left\| T \left(\sum_{k=1}^m e_{i_k} \right) \right\| \\ &\leq \|T\| \cdot \lim_{m \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=1}^m e_{i_k} \right\|_{\infty} = \|T\| \cdot \lim_{m \rightarrow \infty} 1 = \|T\|. \end{aligned}$$

Por A ser um subconjunto infinito de $\mathbb{N}$, podemos escrever $A = \{i_1 < i_2 < \dots\}$. Pelo que fizemos acima segue que, para todo $x \in E$,

$$\begin{aligned} \|\mu(A)(x)\| &= \left\| \sum_{k=1}^{\infty} p_{i_k}(x) \right\| = \left\| \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m p_{i_k}(x) \right\| \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=1}^m p_{i_k}(x) \right\| \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=1}^m \rho_{i_k} \right\| \cdot \|x\|^n \\ &\leq \|T\| \cdot \|x\|^n. \end{aligned}$$

Isso prova que $\|\mu(A)\| \leq \|T\|$ e, em particular, $\mu(A) \in \mathcal{P}(^n E; F)$. Está provada a boa definição de μ . No caso em que A é finito, tem-se também $\|\mu(A)\| \leq \|T\|$ pelo processo anterior. Por isso, depois que provarmos que $\mu(A)$ é finitamente aditiva, já teremos que será limitada. Sejam $A_1, A_2 \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ tais que $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Para $x \in E$, como $\sum_{i \in A_1 \cup A_2} p_i(x)$

é subsérie de $\sum_{i=1}^{\infty} p_i(x)$, pelo Teorema 1.6.3 sabemos que $\sum_{i \in A_1 \cup A_2} p_i(x)$ é incondicionalmente convergente. E como $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, temos

$$\sum_{i \in A_1 \cup A_2} p_i(x) = \sum_{i \in A_1} p_i(x) + \sum_{i \in A_2} p_i(x).$$

Assim,

$$\begin{aligned} \mu(A_1 \cup A_2)(x) &= \sum_{i \in A_1 \cup A_2} p_i(x) = \sum_{i \in A_1} p_i(x) + \sum_{i \in A_2} p_i(x) \\ &= \mu(A_1)(x) + \mu(A_2)(x) \\ &= (\mu(A_1) + \mu(A_2))(x). \end{aligned}$$

Logo, $\mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2)$, provando que μ é uma medida vetorial limitada.

Suponha que $\mathcal{P}_{\omega}(^n E; F)$ seja subespaço complementado em $\mathcal{P}(^n E; F)$. Neste caso, existe uma projeção $\pi : \mathcal{P}(^n E; F) \rightarrow \mathcal{P}_{\omega}(^n E; F)$ sobre $\mathcal{P}_{\omega}(^n E; F)$. Como μ é uma medida vetorial limitada e $\mathcal{P}_{\omega}(^n E; F)$ é um espaço de Banach, $\pi \circ \mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{P}_{\omega}(^n E; F)$ é uma medida vetorial limitada pelo Lema 5.3.5.

Suponha agora que a medida vetorial limitada $\pi \circ \mu$ seja fortemente aditiva. Então, para a coleção enumerável $(\{i\})_{i \in \mathbb{N}}$ de subconjuntos disjuntos dois a dois de $\mathbb{N}$, temos que a série $\sum_{i=1}^{\infty} (\pi \circ \mu)(\{i\})$ é convergente em $\mathcal{P}_{\omega}(^n E; F)$. Por π ser projeção sobre $\mathcal{P}_{\omega}(^n E; F)$ e por $p_i \in \mathcal{P}_{\omega}(^n E; F)$ para todo i , temos

$$\sum_{i=1}^{\infty} (\pi \circ \mu)(\{i\}) = \sum_{i=1}^{\infty} \pi(\mu(\{i\})) = \sum_{i=1}^{\infty} \pi(p_i) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i,$$

é convergente em $\mathcal{P}_{\omega}(^n E, F)$. Segue que $\|p_i\| \rightarrow 0$ pelo Lema 5.3.12. E como $T(e_i) = p_i$ para todo i , a sequência $(e_i)_{i=1}^{\infty}$ converge em c_0 pelo Lema 4.1.3. É claro que isso não acontece, pois $\|e_i - e_j\|_{\infty} = 1$ para todos $i \neq j \in \mathbb{N}$. Logo, não é verdade que $\|p_i\| \rightarrow 0$. Segue que a suposição de $\pi \circ \mu$ ser fortemente aditiva é falsa, o que prova que $\pi \circ \mu$ não é fortemente aditiva.

Assim, $\pi \circ \mu: \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{P}_{\omega}(^n E, F)$ é uma medida vetorial limitada que não é fortemente aditiva e $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ é uma σ -álgebra. Pelo Teorema de Diestel-Faires (Teorema 5.3.4), concluímos que $\mathcal{P}_{\omega}(^n E; F)$ contém uma cópia de ℓ_{∞} , o que contradiz a informação obtida no primeiro parágrafo desta demonstração. Portanto, $\mathcal{P}_{\omega}(^n E; F)$ não é complementado em $\mathcal{P}(^n E; F)$. $\square$

O conceito definido a seguir também é clássico na teoria dos espaços de Banach.

Definição 5.3.16. Diz-se que um espaço de Banach E tem uma *expansão incondicional de dimensão finita da identidade* se existe uma sequência de operadores lineares contínuos de posto finito $A_n: E \rightarrow E$, $n \in \mathbb{N}$, tal que, para todo $x \in E$,

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(x)$$

com convergência incondicional.

Exemplo 5.3.17. Seja E um espaço de Banach com base de Schauder incondicional $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ e funcionais coeficientes $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$. Para todo $x \in E$,

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x) x_n = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n^* \otimes x_n)(x)$$

incondicionalmente. Para todo $n \in \mathbb{N}$, o operador $x_n^* \otimes x_n: E \rightarrow E$ é linear contínuo de posto 1. Portanto, todo espaço de Banach com base de Schauder incondicional tem uma expansão incondicional de dimensão finita da identidade.

Teorema 5.3.18. *Sejam E e F espaços de Banach e $P \in \mathcal{P}(^n E; F)$. Se E possui uma expansão incondicional de dimensão finita da identidade, então existe uma sequência $(p_i)_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{P}_{\omega}(^n E; F)$ tal que a série $\sum_{i=1}^{\infty} p_i$ é fracamente incondicionalmente de Cauchy em $\mathcal{P}_{\omega}(^n E; F)$ e, para todo $x \in E$,*

$$P(x) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i(x)$$

com convergência incondicional.

Demonstração. Veja [28, Lemma 6]. □

O próximo resultado é o princípio da limitação uniforme, ou Teorema de Banach-Steinhaus, para polinômios homogêneos.

Teorema 5.3.19. *Sejam E e F espaços de Banach e $A \subseteq \mathcal{P}(^n E; F)$. Então,*

$$\sup_{P \in A} \|P(x)\| < \infty$$

para todo $x \in E$ se, e somente se,

$$\sup_{P \in A} \|P\| < \infty.$$

Demonstração. Veja [37, Theorem 2.6]. □

Em seguida apresentamos uma demonstração detalhada de [43, Theorem 3.11], resultado este que generaliza para o caso polinomial o teorema linear [31, Theorem 2].

Teorema 5.3.20. *Sejam E e F espaços de Banach e $P \in \mathcal{P}(^n E; F)$ tais que $P \notin \mathcal{P}_\omega(^n E; F)$. Suponha que P admita uma fatoração $P = Q \circ T$ através de um espaço de Banach G com uma expansão incondicional de dimensão finita da identidade, onde $T \in \mathcal{L}(E, G)$ e $Q \in \mathcal{P}(^n G; F)$. Então $\mathcal{P}_\omega(^n E; F)$ contém uma cópia de c_0 e, portanto, $\mathcal{P}_\omega(^n E; F)$ não é complementado em $\mathcal{P}(^n E; F)$.*

Demonstração. Para $n = 1$, veja [31, Theorem 2 and Remark (3)(a)]. Façamos o caso em que $n > 1$. Como G tem expansão incondicional de dimensão finita da identidade, pelo Teorema 5.3.18 existe uma sequência $(Q_i)_{i=1}^\infty$ em $\mathcal{P}_\omega(^n E; F)$ tal que $\sum_{i=1}^\infty Q_i$ é fracamente incondicionalmente de Cauchy em $\mathcal{P}_\omega(^n E; F)$ e $Q(z) = \sum_{i=1}^\infty Q_i(z)$ incondicionalmente para todo $z \in G$. Portanto,

$$P(x) = Q(T(x)) = \sum_{i=1}^\infty Q_i(T(x)) = \sum_{i=1}^\infty (Q_i \circ T)(x)$$

incondicionalmente para todo $x \in E$. Usando que a série $\sum_{i=1}^\infty Q_i$ é fracamente incondicionalmente de Cauchy em $\mathcal{P}_\omega(^n E; F)$, pela equivalência (a) $\iff$ (e) do Teorema 5.3.8 existe $M > 0$ tal que

$$\left\| \sum_{i=1}^m \xi_i Q_i \right\| \leq M \cdot \max\{|\xi_i| : i = 1, \dots, m\}$$

para todos $m \in \mathbb{N}$ e $\xi_1, \dots, \xi_m \in \mathbb{K}$. Em particular, para qualquer subconjunto finito F de $\mathbb{N}$, se $m = \max\{i : i \in F\}$ e considerando $\xi_i = 0$ para todo $i \notin F$ e $\xi_i = 1$ se $i \in F$, para $i = 1, \dots, m$, temos

$$\left\| \sum_{i \in F} Q_i \right\| = \left\| \sum_{i=1}^m \xi_i Q_i \right\| \leq M \cdot \max\{|\xi_i| : i = 1, \dots, m\} = M.$$

Segue que

$$\sup \left\{ \left\| \sum_{i \in F} Q_i \right\| : F \subseteq \mathbb{N}, F \text{ finito} \right\} \leq M,$$

e, portanto, para cada $x \in E$,

$$\begin{aligned} & \sup \left\{ \left\| \left(\sum_{i \in F} Q_i \circ T \right) (x) \right\| : F \subseteq \mathbb{N}, F \text{ finito} \right\} \\ & \leq \sup \left\{ \left\| \sum_{i \in F} Q_i \circ T \right\| \cdot \|x\|^n : F \subseteq \mathbb{N}, F \text{ finito} \right\} \\ & = \|x\|^n \cdot \sup \left\{ \left\| \left(\sum_{i \in F} Q_i \right) \circ T \right\| : F \subseteq \mathbb{N}, F \text{ finito} \right\} \\ & = \|x\|^n \cdot \sup \left\{ \left\| \sum_{i \in F} Q_i \right\| \cdot \|T\|^n : F \subseteq \mathbb{N}, F \text{ finito} \right\} \\ & \leq \|x\|^n \cdot \|T\|^n \cdot \sup \left\{ \left\| \sum_{i \in F} Q_i \right\| : F \subseteq \mathbb{N}, F \text{ finito} \right\} \\ & \leq \|x\|^n \cdot \|T\|^n \cdot M < \infty. \end{aligned}$$

Aplicando o Teorema 5.3.19 para o conjunto

$$\left\{ \sum_{i \in F} (Q_i \circ T) : F \subseteq \mathbb{N}, F \text{ finito} \right\} \subseteq \mathcal{P}({}^n E; F),$$

tem-se

$$\sup \left\{ \left\| \sum_{i \in F} Q_i \circ T \right\| : F \subseteq \mathbb{N}, F \text{ finito} \right\} =: C \leq \infty.$$

Seja $F \subseteq \mathbb{N}$ finito e considere a soma $\sum_{i \in F} \xi_i Q_i \circ T$, onde $\xi_i = \pm 1$ para todo $i \in F$. Considerando os conjuntos

$$F^+ = \{i \in F : \xi_i = 1\} \quad \text{e} \quad F^- = \{i \in F : \xi_i = -1\},$$

temos

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i \in F} \xi_i Q_i \circ T \right\| &= \left\| \sum_{i \in F^+} Q_i \circ T - \sum_{i \in F^-} Q_i \circ T \right\| \\ &\leq \left\| \sum_{i \in F^+} Q_i \circ T \right\| + \left\| \sum_{i \in F^-} Q_i \circ T \right\| \\ &\leq C + C = 2C < \infty. \end{aligned}$$

Aplicando a equivalência (a) $\iff$ (f) do Teorema 5.3.8, obtemos que a série $\sum_{i=1}^{\infty} Q_i \circ T$ é fracamente incondicionalmente de Cauchy em $\mathcal{P}_{\omega}({}^n E; F)$. E aplicando a equivalência (a) $\iff$ (c) deste mesmo teorema, segue que $\sum_{i=1}^{\infty} |\psi(Q_i \circ T)| < \infty$ para todo $\psi \in \mathcal{P}_{\omega}({}^n E; F)^*$.

Provemos agora que a série $\sum_{i=1}^{\infty} Q_i \circ T$ não é convergente em $\mathcal{P}_{\omega}(^n E; F)$. Suponha que seja convergente. Por um lado, como a convergência em norma de polinômios homogêneos implica convergência pontual, temos

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} Q_i \circ T \right) (x) = \sum_{i=1}^{\infty} (Q_i \circ T)(x) = P(x)$$

para todo $x \in E$. Por hipótese,

$$\sum_{i=1}^{\infty} Q_i \circ T = P \notin \mathcal{P}_{\omega}(^n E; F). \quad (5.2)$$

Por outro lado, como $Q_i \in \mathcal{P}_{\omega}(^n E; F)$ para todo $i \in \mathbb{N}$ e $\mathcal{P}_{\omega}$ é ideal de polinômios (Proposição 2.3.24), temos $Q_i \circ T \in \mathcal{P}_{\omega}(^n E; F)$ para todo $i \in \mathbb{N}$. A mesma Proposição 2.3.24 garante que o ideal de polinômios $\mathcal{P}_{\omega}$ é fechado, logo $P = \sum_{i=1}^{\infty} Q_i \circ T \in \mathcal{P}_{\omega}(^n E; F)$,

o que contradiz (5.2). Isso prova que a série $\sum_{i=1}^{\infty} Q_i \circ T$ não é convergente em $\mathcal{P}_{\omega}(^n E; F)$.

Dos dois últimos parágrafos sabemos que $\sum_{i=1}^{\infty} |\psi(Q_i \circ T)| < \infty$ para todo $\psi \in \mathcal{P}_{\omega}(^n E; F)^*$ e que $\sum_{i=1}^{\infty} Q_i \circ T$ não é convergente em $\mathcal{P}_{\omega}(^n E; F)$. Uma aplicação do Teorema 5.3.10 garante que o espaço $\mathcal{P}_{\omega}(^n E; F)$ contém uma cópia de c_0 e, neste caso, o Teorema 5.3.15 implica que $\mathcal{P}_{\omega}(^n E; F)$ não é complementado em $\mathcal{P}(^n E; F)$. $\square$

Conforme dissemos antes, normalmente é difícil mostrar que determinado subespaço não é complementado. Do que fizemos até agora, está claro também que, mesmo sabendo que determinado subespaço de operadores não é complementado, a extensão para que o espaço correspondente de polinômios homogêneos também não é trivial, em geral. Por exemplo, nos Teoremas 5.3.15 e 5.3.20 foi necessário recorrer a diversos resultados da Análise Funcional e também da Teoria da Medida, tornando o processo bem complexo. Terminaremos esta seção mostrando que, em certas situações, é fácil passar do caso linear para o caso polinomial, ou seja, sabendo que determinado espaço de operadores não é complementado, é fácil concluir que o espaço correspondente de polinômios também não é complementado.

O resultado linear que estenderemos para o caso polinomial é o seguinte:

Teorema 5.3.21. *Se E e F são espaços de Banach de dimensão infinita tais que $\mathcal{K}(E, F)$ contém uma cópia de c_0 , então $\mathcal{K}(E, F)$ não é complementado em $\mathcal{L}(E, F)$.*

Demonstração. Veja [31, Theorem 1]. $\square$

Agora vejamos como, a partir do caso linear, podemos obter facilmente o caso polinomial.

Corolário 5.3.22. *Sejam E e F espaços de Banach de dimensão infinita e $n \in \mathbb{N}$ tais que $\mathcal{P}_{\mathcal{K}}(^n E; F)$ contém uma cópia de c_0 . Então $\mathcal{P}_{\mathcal{K}}(^n E; F)$ não é complementado em $\mathcal{P}(^n E; F)$.*

Demonstração. Pelos Teoremas 2.4.3 e 2.4.4(i) existe um isomorfismo de $\mathcal{P}(^n E; F)$ em $\mathcal{L}(\hat{\otimes}_\pi^{n,s} E; F)$ que transforma $\mathcal{P}_K(^n E; F)$ em $\mathcal{K}(\hat{\otimes}_\pi^{n,s} E; F)$. Como $\mathcal{P}_K(^n E; F)$ contém uma cópia de c_0 por hipótese, segue que $\mathcal{K}(\hat{\otimes}_\pi^{n,s} E; F)$ também contém uma cópia de c_0 . Pelo Teorema 5.3.21 conclui-se que $\mathcal{K}(\hat{\otimes}_\pi^{n,s} E; F)$ não é complementado em $\mathcal{L}(\hat{\otimes}_\pi^{n,s} E; F)$, onde segue que $\mathcal{P}_K(^n E; F)$ não é complementado em $\mathcal{P}(^n E; F)$ pela Proposição 3.1.8. $\square$

5.4 Conclusões acerca da não complementabilidade de $\mathcal{P}_K(^n E; F)$ e $\mathcal{P}_\omega(^n E; F)$

O resultado provado nesta seção, demonstrado originalmente em [43, Corollary 3.12], pode ser visto como um consolidado sobre a complementabilidade dos espaços de polinômios compactos e dos espaços de polinômios fracamente contínuos sobre limitados. Mais ainda, mostra que, nas condições do teorema, essas duas não complementabilidades são equivalentes.

Teorema 5.4.1. *Sejam E e F espaços de Banach, com E de dimensão infinita e $n > 1$. Se para cada $P \in \mathcal{P}(^n E; F)$ tal que $P \notin \mathcal{P}_\omega(^n E; F)$ existe uma fatoração $P = Q \circ T$, onde $T \in \mathcal{L}(E, G)$, $Q \in \mathcal{P}(^n G; F)$ e G é um espaço de Banach com expansão incondicional de dimensão finita da identidade, então as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (1) $\mathcal{P}_\omega(^n E; F)$ contém uma cópia de c_0 .
- (1') $\mathcal{P}_K(^n E; F)$ contém uma cópia de c_0 .
- (2) $\mathcal{P}_\omega(^n E; F)$ não é complementado em $\mathcal{P}(^n E; F)$.
- (2') $\mathcal{P}_K(^n E; F)$ não é complementado em $\mathcal{P}(^n E; F)$.
- (3) $\mathcal{P}_\omega(^n E; F) \neq \mathcal{P}(^n E; F)$.
- (3') $\mathcal{P}_K(^n E; F) \neq \mathcal{P}(^n E; F)$.
- (4) $\mathcal{P}(^n E; F)$ contém uma cópia de c_0 .
- (5) $\mathcal{P}(^n E; F)$ contém uma cópia de ℓ_∞ .

Demonstração. (1) $\Rightarrow$ (2) É imediato pelo Teorema 5.3.15.

(2) $\Rightarrow$ (3) Como $\mathcal{P}_\omega(^n E; F)$ não é complementado em $\mathcal{P}(^n E; F)$, e dado que $\mathcal{P}(^n E; F)$ é complementado em si mesmo, segue que $\mathcal{P}_\omega(^n E; F) \neq \mathcal{P}(^n E; F)$.

(3) $\Rightarrow$ (1) Por hipótese, existe $P \in \mathcal{P}(^n E; F)$ tal que $P \notin \mathcal{P}_\omega(^n E; F)$. Todas as hipóteses do Teorema 5.3.20 estão satisfeitas, portanto $\mathcal{P}_\omega(^n E; F)$ contém uma cópia de c_0 .

(1) $\Rightarrow$ (4) É imediato pois $\mathcal{P}_\omega(^n E; F) \subseteq \mathcal{P}(^n E; F)$.

(4) $\Rightarrow$ (3) Suponha que $\mathcal{P}(^n E; F)$ contenha uma cópia de c_0 e que $\mathcal{P}_\omega(^n E; F) = \mathcal{P}(^n E; F)$. Então $\mathcal{P}_\omega(^n E; F)$ contém uma cópia de c_0 , portanto $\mathcal{P}_\omega(^n E; F)$ não é complementado em $\mathcal{P}_\omega(^n E; F) = \mathcal{P}(^n E; F)$ pelo Teorema 5.3.15. Essa contradição garante que $\mathcal{P}_\omega(^n E; F) \neq \mathcal{P}(^n E; F)$.

(5) $\Rightarrow$ (4) Como $c_0 \subseteq \ell_\infty$, se $\mathcal{P}(^n E; F)$ contiver uma cópia de ℓ_∞ , então $\mathcal{P}(^n E; F)$ também conterá uma cópia de c_0 .

(1) $\Rightarrow$ (1') Basta notar que $\mathcal{P}_\omega(^n E; F) \subseteq \mathcal{P}_\mathcal{K}(^n E; F)$.

(1') $\Rightarrow$ (2') Essa implicação segue do Corolário 5.3.22.

(2') $\Rightarrow$ (3') Como $\mathcal{P}_\mathcal{K}(^n E; F)$ não é complementado em $\mathcal{P}(^n E; F)$, então $\mathcal{P}_\mathcal{K}(^n E; F) \neq \mathcal{P}(^n E; F)$.

(3') $\Rightarrow$ (3) Como $\mathcal{P}_\omega(^n E; F) \subseteq \mathcal{P}_\mathcal{K}(^n E; F) \subseteq \mathcal{P}(^n E; F)$ e $\mathcal{P}_\mathcal{K}(^n E; F) \neq \mathcal{P}(^n E; F)$, segue que $\mathcal{P}_\omega(^n E; F) \neq \mathcal{P}(^n E; F)$.

(4) $\Rightarrow$ (5) Uma vez que (4) $\Rightarrow$ (1'), $\mathcal{P}_\mathcal{K}(^n E; F)$ contém uma cópia de c_0 . Pelos Teoremas 2.4.3 e 2.4.4(i) existe um isomorfismo de $\mathcal{P}(^n E; F)$ em $\mathcal{L}(\hat{\otimes}_\pi^{n,s} E; F)$ que transforma $\mathcal{P}_\mathcal{K}(^n E; F)$ em $\mathcal{K}(\hat{\otimes}_\pi^{n,s} E; F)$. Portanto, $\mathcal{K}(\hat{\otimes}_\pi^{n,s} E; F)$ contém uma cópia de c_0 . Como E tem dimensão infinita e $\hat{\otimes}_\pi^{n,s} E$ contém uma cópia de E (Corolário 3.1.13), então $\hat{\otimes}_\pi^{n,s} E$ também tem dimensão infinita. Conforme mencionado em [31, Remark 3(e)(2) $\Rightarrow$ (3)], isso é suficiente para aplicar o resultado [30, Theorem 6(ii) $\Rightarrow$ (iii)], em cuja demonstração encontramos que se $\mathcal{K}(E, F)$ contém uma cópia de c_0 com E de dimensão infinita, então $\mathcal{L}(E, F)$ contém uma cópia de ℓ_∞ . Isso garante que $\mathcal{L}(\hat{\otimes}_\pi^{n,s} E, F)$ contém uma cópia de ℓ_∞ e, portanto, $\mathcal{P}(^n E; F)$ contém uma cópia de ℓ_∞ . $\square$

Referências Bibliográficas

- [1] Alves, T., *Polinômios dominados entre espaços de Banach*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, 2011. <https://repositorio.ufu.br/handle/123456789/16785>
- [2] Aron, R. M.; Hervés, C.; Valdivia, M. *Weakly continuous mappings on Banach spaces*. J. Funct. Anal. **52** (1983), no. 2, 189–204. [https://doi.org/10.1016/0022-1236\(83\)90081-2](https://doi.org/10.1016/0022-1236(83)90081-2)
- [3] Aron, R. M.; Prolla, J. B. *Polynomial approximation of differentiable functions on Banach spaces*. J. Reine Angew. Math. **313** (1980), 195–216. <https://doi.org/10.1515/crll.1980.313.195>
- [4] Aron, R. M.; Schottenloher, M. *Compact holomorphic mappings on Banach spaces and the approximation property*. J. Funct. Anal. **21** (1976), no. 1, 7–30. [https://doi.org/10.1016/0022-1236\(76\)90026-4](https://doi.org/10.1016/0022-1236(76)90026-4)
- [5] Bator, E.; Lewis, P. W. *Complemented spaces of operators*. Bull. Polish Acad. Sci. Math. **50** (2002), no. 4, 413–416.
- [6] Bernardino, A.T.L. *Ideais de aplicações multilineares e polinômios entre espaços de Banach*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal da Paraíba, 2008.
- [7] Blasco, F. *Complementation in spaces of symmetric tensor products and polynomials*. Studia Math. **123** (1997), no. 2, 165–173. <https://doi.org/10.4064/sm-123-2-165-173>
- [8] Botelho, G., Braunss, H.-A., Junek, H., Pellegrino, D. *Holomorphy types and ideals of multilinear mappings*. Studia Math. **177** (2006), no. 1, 43–65.
- [9] Botelho, G., Pellegrino, D. *Two new properties of ideals of polynomials and applications*. Indag. Math. (N.S.) **16** (2005), no. 2, 157–169. [https://doi.org/10.1016/S0019-3577\(05\)80019-9](https://doi.org/10.1016/S0019-3577(05)80019-9)
- [10] Botelho, G.; Pellegrino, D.; Rueda, P. *On composition ideals of multilinear mappings and homogeneous polynomials*. Publ. Res. Inst. Math. Sci. **43** (2007), no. 4, 1139–1155. DOI 10.2977/PRIMS/1201012383
- [11] Botelho, G.; Pellegrino, D.; Teixeira, E. *Fundamentos de Análise Funcional*, 3a. Edição, Sociedade Brasileira de Matemática, 2023.

- [12] Bourgain, J. *H^∞ is a Grothendieck space*, Studia Math. **75** (1983), 193–216. <https://doi.org/10.4064/sm-75-2-193-216>
- [13] Carando, D., Dimant, V., Muro, S. *Coherent sequences of polynomial ideals on Banach spaces*. Math. Nachr. **282** (2009), no. 8, 1111–1133. <https://doi.org/10.1002/mana.200610791>
- [14] Carothers, N. L. *A Short Course on Banach Space Theory*. London Mathematical Society Student Texts, **64**. Cambridge University Press, Cambridge, 2005.
- [15] Coelho, F. U., Lourenço, M. L., *Um Curso de Álgebra Linear*, Edusp, 2005.
- [16] Çalışkan, E.; Rueda, Pilar. *On distinguished polynomials and their projections*. Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **37** (2012), no. 2, 595–603. <https://doi.org/10.5186/aasfm.2012.3745>
- [17] Diestel, J. *Sequences and Series in Banach Spaces*. Graduate Texts in Mathematics, 92. Springer-Verlag, New York, 1984. <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-5200-9>
- [18] Diestel, J.; Jarchow, H.; Tonge, A. *Absolutely Summing Operators*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics 43. Cambridge University Press, Cambridge, 1995. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511526138>
- [19] Diestel, J.; Uhl, J. Jr. *Vector Measures*. Mathematical Surveys, No. 15. American Mathematical Society, Providence, RI, 1977. <https://doi.org/10.1090/surv/015>
- [20] Dineen, S. *Complex Analysis on Infinite Dimensional Spaces*, Springer, 1999. <https://doi.org/10.1007/978-1-4471-0869-6>
- [21] Emmanuele, G. *Remarks on the uncomplemented subspace $W(E, F)$* . J. Funct. Anal. **99** (1991), no. 1, 125–130. [https://doi.org/10.1016/0022-1236\(91\)90055-A](https://doi.org/10.1016/0022-1236(91)90055-A)
- [22] Emmanuele, G. *A remark on the containment of c_0 in spaces of compact operators*. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **111** (1992), no. 2, 331–335. <https://doi.org/10.1017/S0305004100075435>
- [23] Fabian, M., Habala, P., Hájek, P., Montesinos, V., Zizler, V. *Banach Space Theory: The Basis for Linear and Nonlinear Analysis*, Springer, 2011. <https://doi.org/10.1007/978-1-4419-7515-7>
- [24] Feder, M. *On the non-existence of a projection onto the space of compact operators*. Canad. Math. Bull. **25** (1982), no. 1, 78–81. <https://doi.org/10.4153/CMB-1982-011-0>
- [25] Ghenciu, I. *Complemented spaces of operators*. Proc. Amer. Math. Soc. **133** (2005), no. 9, 2621–2623. <https://doi.org/10.1090/S0002-9939-05-07932-3>
- [26] Ghenciu, I. *Weak precompactness in the space of vector-valued measures of bounded variation*, J. Funct. Spaces 2015, Art. ID 213679, 6 pp. <https://doi.org/10.1155/2015/213679>

- [27] Ghenciu, I.; Lewis, P. *Unconditional convergence in the strong operator topology and ℓ_∞* . Glasg. Math. J. **53** (2011), no. 3, 583–598. <https://doi.org/10.1017/S0017089511000152>
- [28] González, M.; Gutiérrez, J. *The polynomial property (V)*. Arch. Math. (Basel) **75** (2000), no.4 299–306. <https://doi.org/10.1007/s000130050507>
- [29] Guerre-Delabrière, S. *Classical Sequences in Banach Spaces*. Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics **166**. Marcel Dekker, Inc., New York, 1992.
- [30] Kalton, N. J. *Spaces of compact operators*. Math. Ann. **208** (1974), 267–278. <https://doi.org/10.1007/BF01432152>
- [31] John, K. *On the uncomplemented subspace $K(X, Y)$* . Czechoslovak Math. J. **42** (117) (1992), no. 1, 167–173. <https://doi.org/10.21136/CMJ.1992.128319>
- [32] Lassalle, S.; Zaldueño, I. *To what extent does the dual Banach space E' determine the polynomials over E ?* Ark. Mat. **38** (2000), no. 2, 343–354. <https://doi.org/10.1007/BF02384324>
- [33] Lima, E. L. *Espaços Métricos*. Projeto Euclides **4**, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1977.
- [34] Lindenstrauss, J.; Tzafriri, L. *Classical Banach Spaces I. Sequence Spaces* Ergeb. Math. Grenzgeb., 97 [Results in Mathematics and Related Areas], Springer-Verlag, Berlin-New York, 1979.
- [35] Megginson, R. E. *An Introduction to Banach Space Theory*. Graduate Texts in Mathematics 183, Springer-Verlag, New York, 1998. <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0603-3>
- [36] Moura, F. R. *Ideais algébricos de aplicações multilineares e polinômios homogêneos*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, 2014. <https://doi.org/10.14393/ufu.di.2014.316>
- [37] Mujica, J. *Complex Analysis in Banach Spaces*. Dover Publications, 2010.
- [38] Murray, F. J. *On complementary manifolds and projections in spaces L_p and ℓ_p* . Trans. Amer. Math. Soc. **41** (1937), no. 1, 138–152. <https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1937-1501894-5>
- [39] Pełczyński, A. *Projections in certain Banach spaces*. Studia Math. **19** (1960), 209–228. <https://doi.org/10.4064/sm-19-2-209-228>
- [40] Pełczyński, A. *On Banach spaces containing $L_1(\mu)$* . Studia Math. **30** (1968), 231–246. <https://doi.org/10.4064/sm-30-2-231-246>
- [41] Pellegrino, D.; Ribeiro, J. *On multi-ideals and polynomial ideals of Banach spaces: a new approach to coherence and compatibility*. Monatsh. Math. **173** (2014), no. 3, 379–415. <https://doi.org/10.1007/s00605-013-0534-x>

- [42] Pereira, G. M. R. *O dual de um ideal de operadores e ideais de operadores simétricos entre espaços de Banach*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, 2012. <https://doi.org/10.14393/ufu.di.2012.08>
- [43] Pérez, S. A. *Complemented subspaces of homogeneous polynomials*. Rev. Mat. Complut. **31** (2018), no. 1, 153–161. <https://doi.org/10.1007/s13163-017-0240-7>
- [44] Phillips, R. S. *On linear transformations*. Trans. Amer. Math. Soc. **48**, (1940). 516-541. <https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1940-0004094-3>
- [45] Polac, L. G. *O adjunto de um polinômio homogêneo contínuo entre espaços de Banach*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, 2013. <https://doi.org/10.14393/ufu.di.2013.292>
- [46] Ryan, R. A. *Applications of topological tensor products to infinite dimensional holomorphy*. Ph.D. Thesis, Trinity College Dublin, 1980.
- [47] Silva, A. R. *Linearização de aplicações multilineares contínuas entre espaços de Banach e multi-ideais de composição*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, 2010. <https://repositorio.ufu.br/handle/123456789/16777>
- [48] Silva, K. A. *Lineabilidade em conjuntos de sequências e de funções*. Trabalho de Conclusão de Curso, Universidade Federal de Uberlândia, 2019. <https://repositorio.ufu.br/handle/123456789/26180>