

**Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática**

Lucas Santos Borges

Valdair Bonfim

ALGUNS ASPECTOS SOBRE O DIVINO E O BELO NA MATEMÁTICA

Uberlândia
2021

**ALGUNS ASPECTOS SOBRE O
DIVINO E O BELO NA
MATEMÁTICA**

LUCAS SANTOS BORGES

Monografia apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Licenciado em Matemática na Universidade Federal de Uberlândia.

Orientador: Prof. Valdair Bonfim

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho a Deus e aos meus Irmãos.

“Uma equação não significa nada para mim
a não ser que expresse um pensamento de
Deus.”

(Srinivasa Ramanujan)

ALGUNS ASPECTOS SOBRE O DIVINO E O BELO NA MATEMÁTICA

RESUMO

Este trabalho apresenta algumas relações entre a Matemática e a Teologia, incluindo estudos sobre influências da segunda ciência na primeira. Uma das vertentes estudadas foi a beleza da Matemática, abrangendo um questionamento metafísico acerca da natureza da Matemática e ferramentas para o processo de ensino-aprendizagem da disciplina. Como conteúdo exemplar, é estudada a sequência de Fibonacci e suas propriedades, além de generalizações e da razão áurea.

Palavras-Chave: Deus e a Matemática, Beleza matemática, Sequência de Fibonacci, Teologia.

SOME ASPECTS ABOUT THE DIVINE AND THE BEAUTIFUL IN MATHEMATICS

ABSTRACT

This work presents some relations between Mathematics and Theology, including studies about influences of the second science on the first. One of the aspects studied was the beauty in/of Mathematics, embracing a metaphysical questioning about the nature of Mathematics and tools to the process of teaching-learning of the subject. As an exemplar content, it's studied the Fibonacci Sequence and some of her properties, as well as generalizations and golden ratio.

Keywords: God and Mathematics, Math Beauty, Fibonacci Sequence, Theology.

LISTA DE FIGURAS

2.1	Gráfico de $\beta^2(x)$	16
2.2	Gráfico do polinômio $P_3(x)$	21
2.3	Gráfico do polinômio $P_4(x)$	23
2.4	Gráfico do polinômio $P_5(x)$	24
2.5	Gráfico do polinômio $P_6(x)$	24
2.6	Gráfico do polinômio $P_7(x)$	24
2.7	Raízes positivas dos polinômios $P_5(x)$, $P_6(x)$ e $P_7(x)$	25
2.8	Triângulo de Pascal e as "diagonais inversas"	36
2.9	Triângulo de Pascal e a Sequência de Fibonacci	36
2.10	Gráfico de $h(x)$	40
2.11	As três primeiras frações escritas na forma decimal, com 500 casas ...	41
2.12	Divisão áurea, com o segmento maior duplicado	42
2.13	Terceira divisão áurea	43
2.14	Construção da divisão áurea com régua e compasso	46
3.1	Arco-íris	47
3.2	Camélia-rosa	48
3.3	Fases da lua	48
3.4	Girassol	49
3.5	Favo de mel	49
3.6	Situação 1 de uma partida de Wythoff	58
3.7	Situação 2 de uma partida de Wythoff	58
3.8	Situação 3 de uma partida de Wythoff	58
3.9	Representação com coordenadas	59
3.10	Representação no plano cartesiano	60
3.11	Primeiras posições vencedoras	61
3.12	Mais vencedoras e primeiras perdedoras não-triviais	62
3.13	Tabela cheia	63
3.14	Vista frontal e lateral do Partenon	69
3.15	Desenho frontal do Paternon, enquadrado em um retângulo áureo	70
3.16	Construção do retângulo áureo	71

3.17	Gráfico de preferências com respeito ao formato do retângulo, a partir dos dados de Fechner	73
3.18	Náutilo de câmaras e o interior de sua concha	74
3.19	Radiografia do náutilo de câmaras	74
3.20	Espiral arquimediana na lápide de Jacob Bernoulli	74
3.21	Construção da espiral logarítmica	75
4.1	Ladislav Kvasz	77

LISTA DE TABELAS

2.1	Termos de $(q_n)_n$	14
2.2	Termos de $(f_n)_n$ e de $(F_n)_n$	27
2.3	Desenvolvimento da série (coeficientes de x^m nas colunas vs. coefi- cientes de $(x + x^2)^n$ nas linhas)	35
2.4	Triângulo de Pascal na forma binomial	37
3.1	"Mágica com números" para os valores iniciais x e y	54
3.2	Oito posições perdedoras	64

LISTA DE SIGLAS

HI – Hipótese de Indução

PG – Progressão Geométrica

PIF – Princípio da Indução Finita

TID – Teoria da Iluminação Divina

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
2	SEQUÊNCIA DE FIBONACCI E VARIAÇÕES	13
2.1	SEQUÊNCIAS DE FIBONACCI GENERALIZADAS	18
2.2	VARIAÇÃO NA SEQUÊNCIA DE FIBONACCI	26
2.3	ENCONTRANDO O N-ÉSIMO TERMO	28
2.4	O PADRÃO DAS "SOMAS DOS ALGARISMOS"	31
2.5	FRAÇÕES FIBONACCIANAS	34
2.6	A RAZÃO ÁUREA	41
3	A BELEZA DA MATEMÁTICA	47
3.1	MATEMÁTICA: INVENTADA E/OU DESCOBERTA?	50
3.2	FERRAMENTAS PARA O ENSINO-APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA	52
3.2.1	MOTIVANDO POR MEIO DO LÚDICO: "MÁGICA COM NÚMEROS"	53
3.2.2	MOTIVANDO POR MEIO DO LÚDICO: O JOGO DE WYTHOFF	57
3.2.3	MOTIVANDO POR MEIO DO BELO: O RETÂNGULO ÁUREO	69
3.2.4	MOTIVANDO POR MEIO DO BELO: A ESPIRAL LOGARÍTIMCA	73
4	A MATEMÁTICA E A TEOLOGIA	77
4.1	LADISLAV KVASZ	77
4.2	O ELO INVISÍVEL	78
4.2.1	PADRÕES COMUNS	79
	REFERÊNCIAS	80

1. INTRODUÇÃO

Ao longo da história da humanidade, a matemática como a conhecemos hoje foi sendo (re)construída e (re)estruturada, desde os primitivos até os mais avançados métodos de contagem, do cálculo de áreas e de otimização de problemas. Desde a matemática maia até a babilônica, dos indígenas ancestrais dos astecas aos indianos comerciantes de Bombaim, cada povo desenvolveu não só sua matemática, mas também sua cultura, sociedade, religião e economia, cada um com suas peculiaridades.

Mas, afinal, há algo em comum entre a matemática de povos tão diversos? Não existiria Algo que uniria todas as matemáticas, uma Matemática universal, ainda que incompreendida pelos homens? Estaria Platão totalmente equivocado ao afirmar que o conhecimento provém do mundo das ideias? Não haveria uma fonte ilimitada do conhecimento (e que, portanto, nunca o homem acessaria por completo), que une todos os conhecimentos, uma unidade na variedade, uma ordem no caos, um padrão no diverso, um absoluto no relativo?

Se você, caro(a) leitor(a), pensou em Deus, parabéns! Você acertou um dos focos deste trabalho. Caso contrário, não desanime! Vamos todos juntos nesta viagem que busca relacionar Deus e a Matemática. O objetivo principal deste trabalho é, pois, responder às perguntas: Quais são as relações entre Deus e a Matemática? Como elas se dão? A Matemática é divina e/ou humana?

Alguns objetivos específicos são:

- levantar estudos e pesquisas sobre a ligação entre a Teologia e a Matemática, tendo como fonte principal Kvasz (2007);
- estudar a beleza matemática, em especial na sequência de Fibonacci, no mundo natural e como ferramenta na Educação Matemática.

Conforme o filósofo-teólogo Aurélio Agostinho de Hipona (Santo Agostinho, 354 - 430), há uma ordem de perfeição, uma graduação dos seres para alcançar o conhecimento que leva a uma vida plena e feliz: seres inanimados, vegetais, animais, ser humano, verdades objetivas e, por fim, Deus. Tais verdades não dependem da subjetividade, já que são universais, a saber: as Matemáticas, a Estética e a Moral. Estas, portanto, na visão de Agostinho, são criadas, ordenadas e dadas a conhecer aos homens por Deus. Em outras palavras, Deus ilumina as verdades já existentes em nosso espírito, o que possibilita que o ser humano (re)descubra teoremas, padrões e leis universais (Cabral, 2020). Denomina-se isso como Teoria da Iluminação Divina (TID).

Desta forma, acredita-se que o assunto deste trabalho fora e é iluminado por Deus, baseando-se na TID de Santo Agostinho. Ademais, é uma área de interesse. Afinal, por qual

motivo a faceta filosófica da matemática é tão pouco estudada? E, quando é considerada, por que fica tão restrita, de modo que poucos a conhecem, tanto no âmbito escolar, quanto no acadêmico?

O conteúdo deste trabalho estrutura-se em quatro capítulos, cada qual no seu papel de contribuir para a elucidação das perguntas principais a serem respondidas, como supracitado. Após esta Introdução, o segundo capítulo explora a Sequência de Fibonacci, suas variações e, por fim, suas (re)ocorrências no mundo natural. No terceiro capítulo, buscamos encontrar e fundamentar algumas respostas no que se refere à beleza da Matemática, incluindo sua relação com outra área: a Educação Matemática. No quarto e último capítulo, literalmente intitulado “A Matemática e a Teologia”, almejamos uma visão mais teológica da Matemática, havendo, neste sentido, uma explanação sobre a influência da Teologia monoteísta no processo de matematização de alguns conteúdos.

O desenvolvimento do trabalho ocorreu por meio de encontros virtuais entre orientador e orientando, tendo como fio-mestre as temáticas e perguntas elencadas. Ademais, a base referencial foram as bibliografias citadas ao fim deste texto.

2. SEQUÊNCIA DE FIBONACCI E VARIAÇÕES

A Sequência de Fibonacci aparece tanto na Educação Básica, relacionada a estudos de sequências de números naturais, quanto na Educação Superior, quando estudamos o tema de forma aprofundada e com ferramentas mais elaboradas. Além disso, tal sequência destaca-se com relação às outras por estar mais interligada ao belo do que o comum, seja em suas ocorrências no mundo natural, seja nas interessantes e diversas propriedades matemáticas que ela apresenta.

Primeiramente, definamos a Sequência de Fibonacci. Consideramos, neste trabalho, que o conjunto dos números naturais inicia-se no 1:

$$\mathbb{N} = \{ 1, 2, 3, 4, \dots \}.$$

Definição 1 (Sequência de Fibonacci). *A Sequência de Fibonacci é formada pela regra de que cada termo é a soma dos dois termos anteriores, sendo 0 e 1 os dois primeiros. Ou seja:*

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \quad (2.1)$$

$$1 \mapsto f(1) = f_1 = 1 \quad (2.2)$$

$$2 \mapsto f(2) = f_2 = 1 \quad (2.3)$$

$$n \geq 3 \mapsto f(n) = f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \quad (2.4)$$

Note que esta sequência é crescente a partir do terceiro termo e ilimitada. Dada ela, nos perguntamos: $\left(\frac{f_{n+1}}{f_n}\right)_n$ converge ou diverge? Se converge, para quanto?

Definamos uma nova sequência $(q_n)_n$, com $q_n := \frac{f_{n+1}}{f_n}$. Chamamo-la de sequência das razões sucessivas da Sequência de Fibonacci. Note que o termo geral q_n está bem definido para todo n , pois $f_n \neq 0$.

Como $f_n \leq f_{n+1}$, então $q_n = \frac{f_{n+1}}{f_n} \geq 1$. Também temos que $q_n = \frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{f_n + f_{n-1}}{f_n} = 1 + \frac{f_{n-1}}{f_n} \leq 2$. Destas duas afirmações, deduzimos que $1 \leq q_n \leq 2$, ou seja, $(q_n)_n$ é limitada.

Os primeiros termos aproximados de $(q_n)_n$ são fornecidos na tabela seguinte.

Tabela 2.1: Termos de $(q_n)_n$

n	f_n	q_n
1	1	1
2	1	2
3	2	1,5
4	3	1, $\overline{6}$
5	5	1,6
6	8	1,625
7	13	1, $\overline{615384}$
8	21	1, $\overline{619047}$
9	34	1,617647058...
10	55	1, $\overline{618}$
11	89	1,617977528...
12	144	1,6180 $\overline{5}$
13	233	1,618025751...
14	377	1,618037135...
15	610	1,618032786...
16	987	1,618034447...

Fonte: Elaborado pelo autor.

Os primeiros termos parecem indicar que a subsequência $(q_{2n+1})_n$ é monótona crescente e a $(q_{2n})_n$ é monótona decrescente. Veremos que isso de fato ocorre, conforme o seguinte resultado:

Lema 2. Se q_n é a sequência das razões sucessivas da Sequência de Fibonacci, então as subsequências $(q_{2n+1})_n$ e $(q_{2n})_n$ são, respectivamente, crescente e decrescente.

Demonstração. Note que

$$q_{2n+1} = \frac{f_{2n+2}}{f_{2n+1}} = \frac{f_{2n+1} + f_{2n}}{f_{2n+1}} = 1 + \frac{1}{q_{2n}}.$$

Chamando $\beta(x) = 1 + \frac{1}{x}$, com $x > 0$, então $q_{2n+1} = \beta(q_{2n})$. Analogamente,

$$q_{2n} = \frac{f_{2n+1}}{f_{2n}} = \frac{f_{2n} + f_{2n-1}}{f_{2n}} = 1 + \frac{1}{q_{2n-1}} = \beta(q_{2n-1}).$$

Logo,

$$q_{2n+1} = \beta(q_{2n}) = \beta(\beta(q_{2n-1})) = \beta^2(q_{2n-1}),$$

onde $\beta^2 = \beta \circ \beta$ denota a composição usual de funções.

Também temos que

$$q_{2n} = \beta(q_{2n-1}) = \beta(\beta(q_{2n-2})) = \beta^2(q_{2n-2}).$$

Agora faremos alguns cálculos para mostrar que $\beta^2(x)$ é crescente no intervalo $[0, \infty)$. Primeiramente, encontremos a lei de tal função.

$$\beta^2(x) = 1 + \frac{1}{\beta(x)} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{\frac{x+1}{x}} = 1 + \frac{x}{x+1} = \frac{x+1+x}{x+1} = \frac{2x+2}{x+1} = \frac{2x+2}{x+1} - \frac{1}{x+1} = 2 - \frac{1}{x+1}$$

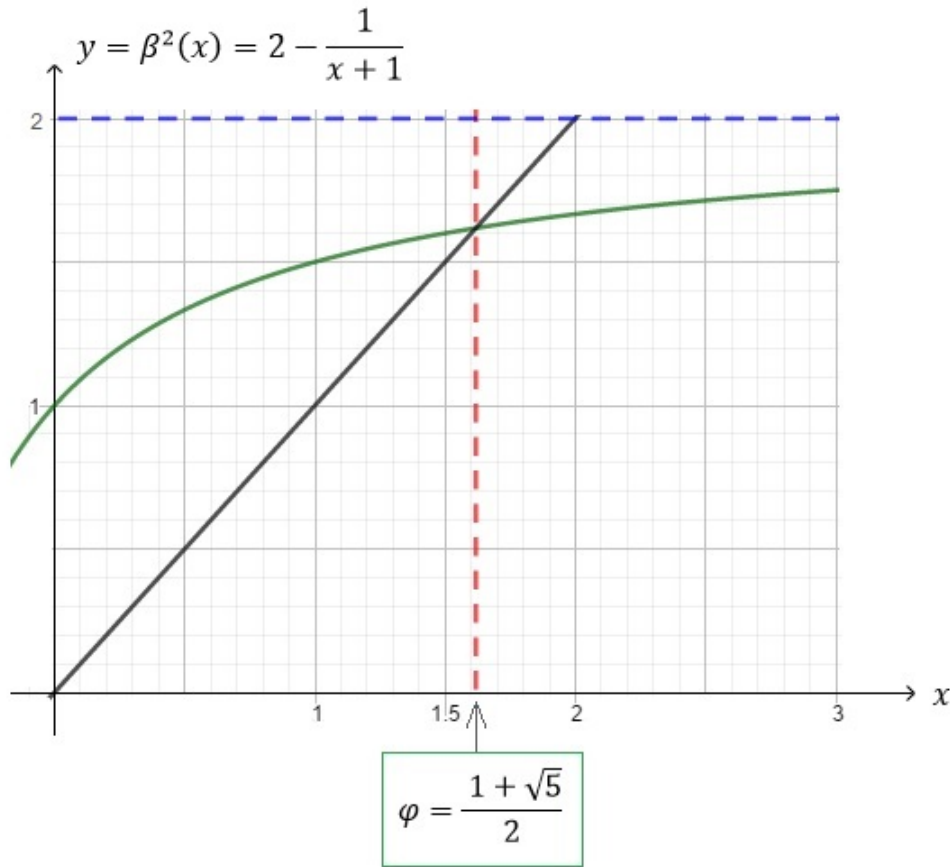
Calculemos, neste momento, sua derivada.

$$(\beta^2)'(x) = 0 - \left(\frac{1}{x+1} \right)' = - \frac{[0 \cdot (x+1) - 1 \cdot 1]}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$$

Como $\frac{1}{(x+1)^2}$ é positiva para todo $x \in \mathbb{R}$, então, pelo Teste da Primeira Derivada, $\beta^2(x)$ é uma função crescente no intervalo $[0, \infty)$. Ademais, se assumirmos um valor não negativo do domínio, a imagem também o será:

$$x \geq 0 \Rightarrow x+1 \geq 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{x+1} \leq 1 \Rightarrow 1 \leq 2 - \frac{1}{x+1} < 2 \Rightarrow \beta^2([0, \infty)) \subset [0, \infty).$$

Esta última propriedade permite calcularmos as iteradas de β^2 em qualquer $x \in [0, \infty)$. A próxima figura ilustra o gráfico de β^2 , em verde.

Figura 2.1: Gráfico de $\beta^2(x)$ 

Fonte: Elaborado pelo autor.

Por inspeção temos que $q_1 < q_3$. Assumindo a Hipótese de Indução (HI) $q_{2n-1} < q_{2n+1}$, então $\beta^2(q_{2n-1}) < \beta^2(q_{2n+1})$, pois, como já observamos, β^2 é uma função crescente em $[0, \infty)$. Logo, $q_{2n+1} < q_{2n+3}$ e, pelo Princípio da Indução Finita, segue que $(q_{2n+1})_n$ é estritamente crescente.

Analogamente, sendo $q_2 > q_4$ e assumindo a HI $q_{2n} > q_{2n+2}$, podemos concluir que $\beta^2(q_{2n}) > \beta^2(q_{2n+2})$, ou seja, $q_{2n+2} > q_{2n+4}$, o que conclui a prova do Lema. ■

Estamos agora em condições de provar a

Proposição 3. *A sequência das razões sucessivas $(q_n)_n$ da Sequência de Fibonacci é convergente e converge para $\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.*

Demonstração. Já provamos que $(q_{2n+1})_n$ é monótona crescente e limitada superiormente e, também, que $(q_{2n})_n$ é monótona decrescente e limitada inferiormente. Logo, ambas são convergentes, pelo Teorema da Convergência Monótona - que pode ser encontrado em Cardoso Júnior (2015).

Digamos que, quando $n \rightarrow \infty$, $(q_{2n+1})_n \rightarrow L$ e $(q_{2n})_n \rightarrow M$, com $L, M \in \mathbb{R}$.

Vamos provar agora que $L = M$. Temos que

$$q_{2n+1} = \frac{f_{2n+2}}{f_{2n+1}} = \frac{f_{2n+1} + f_{2n}}{f_{2n+1}} = 1 + \frac{f_{2n}}{f_{2n+1}} = 1 + \frac{1}{q_{2n}}.$$

Quando fazemos $n \rightarrow \infty$, ficamos com:

$$L = 1 + \frac{1}{M}. \quad (2.5)$$

De forma análoga, obtemos:

$$q_{2n} = \frac{f_{2n+1}}{f_{2n}} = \frac{f_{2n} + f_{2n-1}}{f_{2n}} = 1 + \frac{f_{2n-1}}{f_{2n}} = 1 + \frac{1}{q_{2n-1}}.$$

Fazendo $n \rightarrow \infty$, obtemos:

$$M = 1 + \frac{1}{L}. \quad (2.6)$$

Multiplicando (2.5) por M e (2.6) por L , temos que

$$\begin{cases} L \cdot M = M + 1 \\ M \cdot L = L + 1 \end{cases}.$$

Portanto, pela propriedade comutativa de $\mathbb{R}$, $M + 1 = L + 1$, o que implica que $M = L$.

Logo, como as duas subsequências tendem para um mesmo valor L , ou seja, dado $\epsilon > 0$, existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, tais que $|q_{2n} - L| < \epsilon$, $\forall n \geq n_1$, e $|q_{2n+1} - L| < \epsilon$, $\forall n \geq n_2$. Tomando $m = \max\{2n_1, 2n_2 + 1\}$, temos que $|q_n - L| < \epsilon$, $\forall n \geq m$. Portanto, $(q_n)_n \rightarrow L$, quando $n \rightarrow \infty$. A referência utilizada para essa prova foi Scott (2012).

Agora vamos concluir que $L = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. Sabemos que

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n.$$

Tomando $n \geq 1$, temos que $f_n \neq 0$. Dividindo ambos os membros por f_n , obtemos:

$$\frac{f_{n+2}}{f_n} = \frac{f_{n+1}}{f_n} + 1 \Rightarrow \frac{f_{n+2}}{f_{n+1}} \cdot \frac{f_{n+1}}{f_n} = q_n + 1 \Rightarrow q_{n+1} \cdot q_n = q_n + 1.$$

Fazendo $n \rightarrow \infty$, obtemos a equação do segundo grau

$$L \cdot L = L + 1 \Rightarrow L^2 - L - 1 = 0,$$

cujo discriminante vale $\Delta = 1 + 4 = 5$. Logo,

$$L = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Como q_n é uma sequência de termos positivos, a raiz negativa não convém.

Portanto,

$$L = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

■

Definição 4 (Número de ouro). *O limite L da sequência das razões sucessivas $(q_n)_n$ é denominado **número de ouro** na literatura e indicado historicamente por ϕ . Uma aproximação para tal é 1,6180339887.*

A letra ϕ é a primeira do escultor grego Fídias (480 a.C. - 430 a.C.). Na Subseção 3.2.3, veremos sua relação com tal número.

2.1 Sequências de Fibonacci Generalizadas

A ideia desta subseção é trabalhar com outras sequências, parecidas com a Sequência de Fibonacci. Também estudaremos a convergência da sequência das razões sucessivas, a qual explicaremos após a Definição 5.

Para começar, vamos considerar uma sequência cuja lei de formação é uma variação da lei da Sequência de Fibonacci. Declaramos que seus três primeiros termos são iguais a 1 e que cada termo, a partir do quarto, é a soma dos três anteriores.

Definição 5. A sequência $(f_n)_n$ definida por $f_1 = f_2 = f_3 = 1$ e $f_{n+3} = f_{n+2} + f_{n+1} + f_n$, $\forall n \geq 1$, é denominada Sequência de Fibonacci de ordem 3.

Esta nova sequência ficaria, pois, da seguinte forma:

$$(1, 1, 1, 3, 5, 9, 17, 31, 57, 105, 193, 355, 653, 1201, \dots).$$

Surgem, então, duas perguntas: será que converge a sequência das razões sucessivas dos termos da Sequência de Fibonacci de ordem 3? Ou seja, a sequência de termo geral $Q_n^{(3)} := \frac{f_{n+1}}{f_n}$, para $n \geq 1$, converge? Se sim, quanto vale o limite de $(Q_n^{(3)})_n$ quando n tende a infinito?

Vamos verificar, inicialmente, que se trata de uma sequência limitada. Como $f_{n+1} \geq f_n$, $\forall n$, então $Q_n^{(3)} \geq 1$ e, portanto, a sequência é limitada inferiormente. Além disso, como $Q_n^{(3)} = \frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{f_n + f_{n-1} + f_{n-2}}{f_n} = 1 + \frac{f_{n-1}}{f_n} + \frac{f_{n-2}}{f_n} \leq 3$, então $(Q_n^{(3)})_n$ é também limitada superiormente.

Essa sequência apresenta um comportamento estranho. Diferentemente do que ocorre com a Sequência de Fibonacci clássica (de ordem 2), aqui observamos que as subsequências $(Q_{2n-1}^{(3)})_n$ e $(Q_{2n}^{(3)})_n$ evidenciam serem não monótonas. Para demonstrar a convergência de $(Q_n^{(3)})_n$, usaremos dois teoremas importantes: um de Análise Real, a respeito da convergência de sequências numéricas, e outro relativo ao número de raízes positivas de um polinômio, conhecido como Regra dos Sinais de Descartes, os quais passamos a enunciar.

Teorema 6. Sejam $(a_n)_n$ uma sequência de números reais e $\alpha \in \mathbb{R}$. Se para toda subsequência $(a_{n_k})_k$ existir uma subsequência $(a_{n_{k_j}})_{j \rightarrow \infty}$ tal que $a_{n_{k_j}} \rightarrow \alpha$ quando $j \rightarrow \infty$, então $a_n \rightarrow \alpha$ quando $n \rightarrow \infty$.

Demonstração. Suponha por absurdo que a_n não convirja para α . Então, intuitivamente, podemos construir uma subsequência a_{n_k} cujos termos estão longe de α . Em termos matemáticos, existe $\epsilon_0 > 0$ tal que, para todo $k \in \mathbb{N}$, existe natural $n_k > k$ com $a_{n_k} \notin (\alpha - \epsilon_0, \alpha + \epsilon_0)$.

Para a subsequência a_{n_k} , existe, por hipótese, subsequência $a_{n_{k_j}}$ tal que $a_{n_{k_j}} \rightarrow \alpha$, quando $j \rightarrow \infty$. Assim, para todo $\epsilon > 0$, existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $j > j_0 \Rightarrow a_{n_{k_j}} \in (\alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon)$. Particularmente, $a_{n_{k_j}}$ está neste intervalo para $\epsilon = \epsilon_0$. Mas, se isso fosse verdade, haveria termos de $(a_{n_k})_k$ que pertenceriam ao intervalo $(\alpha - \epsilon_0, \alpha + \epsilon_0)$, contradizendo a terceira frase desta prova.

Conclusão: $a_n \rightarrow \alpha$ quando $n \rightarrow \infty$.

A seguir, enunciamos um Teorema conhecido por Regra dos Sinais de Descartes. Uma demonstração pode ser encontrada em Coutinho (2016).

Teorema 7 (Regra dos Sinais de Descartes). *Seja $P(x) = a_n x^{b_n} + \dots + a_2 x^{b_2} + a_1 x^{b_1} + a_0 x^{b_0}$ um polinômio com coeficientes reais não nulos e cujos expoentes satisfazem $b_n > \dots > b_2 > b_1 > b_0$. Então, o número de raízes positivas de $P(x)$, contadas as suas multiplicidades, é menor ou igual à quantidade de mudanças de sinais na sequência de coeficientes $a_n, \dots, a_2, a_1, a_0$. Além disso, a diferença entre a quantidade de mudanças de sinais e a quantidade de raízes positivas de $P(x)$ é um número par.*

Voltemos à sequência $(Q_n^{(3)})_n$, a qual já sabemos ser limitada. Da lei de formação da Sequência de Fibonacci de ordem 3, temos que

$$f_{n+3} = f_{n+2} + f_{n+1} + f_n, \quad \forall n \geq 1.$$

Dividindo ambos os membros por f_n , obtemos:

$$\frac{f_{n+3}}{f_n} = \frac{f_{n+2}}{f_n} + \frac{f_{n+1}}{f_n} + \frac{f_n}{f_n}.$$

Reescrevendo de forma que tenhamos termos sucessivos em frações, ficamos com:

$$\frac{f_{n+3}}{f_{n+2}} \cdot \frac{f_{n+2}}{f_{n+1}} \cdot \frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{f_{n+2}}{f_{n+1}} \cdot \frac{f_{n+1}}{f_n} + \frac{f_{n+1}}{f_n} + 1. \quad (2.7)$$

Portanto,

$$Q_{n+2}^{(3)} \cdot Q_{n+1}^{(3)} \cdot Q_n^{(3)} = Q_{n+1}^{(3)} \cdot Q_n^{(3)} + Q_n^{(3)} + 1. \quad (2.8)$$

Tomemos uma subsequência $(Q_{n_k}^{(3)})_k$. Como $(Q_n^{(3)})_n$ é limitada, $(Q_{n_k}^{(3)})_k$ também o é. Logo, pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, esta subsequência admitirá uma subsequência $(Q_{n_{k_j}}^{(3)})_j$ a qual convergirá para um número real α , quando $j \rightarrow \infty$.

Aplicando o Teorema 6 com a sequência $(Q_n^{(3)})_n$ e com o número real α , chegamos à conclusão de que a sequência das razões sucessivas converge para α . Mas qual é o valor de α ? É o que passaremos a estudar agora.

Como os termos de $(Q_{n_{k_j}}^{(3)})_j$ também satisfazem à equação (2.8), ao passarmos o limite fazendo $j \rightarrow \infty$, veremos que α satisfará a equação

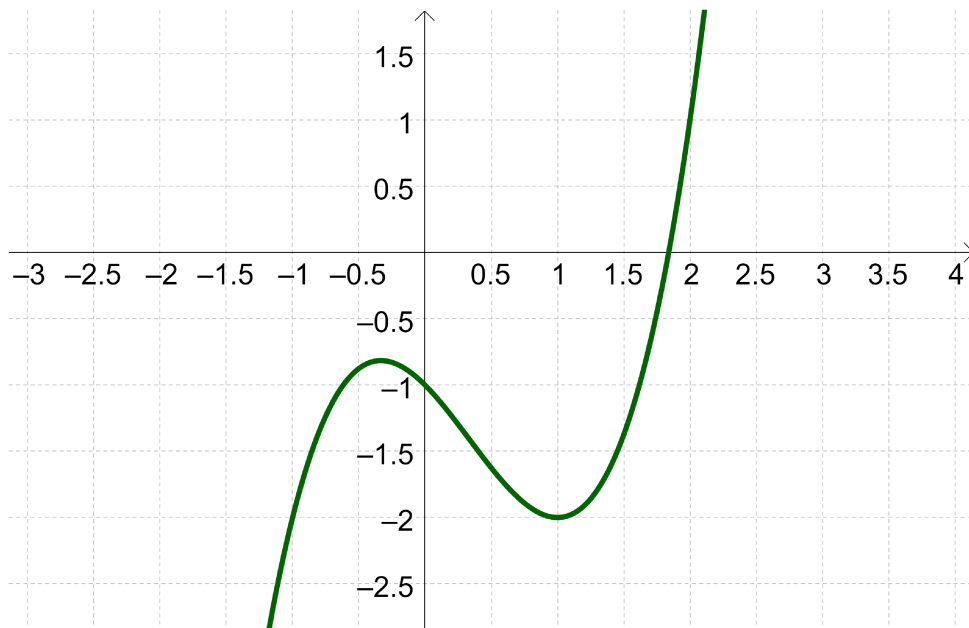
$$\alpha^3 = \alpha^2 + \alpha + 1,$$

ou seja, α será raiz do polinômio $P_3(x) := x^3 - x^2 - x - 1$.

O número de variações dos sinais na sequência dos coeficientes de $P_3(x)$ é 1, visto que a única mudança de sinal ocorre do monômio x^3 para o $-x^2$. Logo, pela Regra dos Sinais de Descartes (Teorema 7) o número m de raízes positivas desse polinômio satisfaz $m \leq 1$. Além disso, $m \geq 0$ e $1 - m$ é múltiplo inteiro de 2. Logo, $m = 1$, de onde concluímos que $P_3(x)$ tem exatamente uma raiz positiva. Desta forma, concluímos que α é essa única raiz positiva, a qual denotaremos por $\phi^{(3)}$.

Um valor aproximado de $\phi^{(3)}$ é 1,83928. Ele e outros mencionados neste capítulo podem ser obtidos a partir do Método da Bissecção, que é um método numérico de se obter aproximações de uma raiz de determinada função. Vale dizer que tal artifício é baseado no seguinte fato: se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua e $f(a) \cdot f(b) < 0$, então existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$. A seguir, apresentamos o gráfico da função polinomial $P_3(x)$.

Figura 2.2: Gráfico do polinômio $P_3(x)$



Fonte: Elaborado pelo autor.

Analisemos agora a Sequência de Fibonacci de ordem 4.

Definição 8. A sequência $(f_n)_n$ definida por $f_1 = f_2 = f_3 = f_4 = 1$ e $f_{n+4} = f_{n+3} + f_{n+2} + f_{n+1} + f_n$, $\forall n \geq 1$, é denominada Sequência de Fibonacci de ordem 4.

Seus primeiros termos são:

$$(1, 1, 1, 1, 4, 7, 13, 25, 49, 94, 181, 349, 673, 1297, 2500, \dots).$$

Encontremos, agora, os primeiros termos da sequência das razões sucessivas, a qual denotamos por $(Q_n^{(4)})_n$, sendo que $Q_n^{(4)} := \frac{f_{n+1}}{f_n}$, $\forall n \geq 1$:

$$Q_1^{(4)} = \frac{f_2}{f_1} = \frac{1}{1} = 1; \quad Q_2^{(4)} = \frac{f_3}{f_2} = \frac{1}{1} = 1; \quad Q_3^{(4)} = \frac{f_4}{f_3} = \frac{1}{1} = 1; \quad Q_4^{(4)} = \frac{f_5}{f_4} = \frac{4}{1} = 4$$

Os onze primeiros termos dessa sequência, arredondados com 4 casas decimais, são:

$$(1; 1; 1; 4; 1,7500; 1,8571; 1,9231; 1,9600; 1,9184; 1,9255; 1,9282; \dots).$$

Isto parece indicar que a sequência converge. Passemos a uma verificação criteriosa. Analogamente ao caso anterior, de

$$f_{n+4} = f_{n+3} + f_{n+2} + f_{n+1} + f_n, \quad \forall n \geq 1,$$

segue que

$$\begin{aligned} \frac{f_{n+4}}{f_n} &= \frac{f_{n+3}}{f_n} + \frac{f_{n+2}}{f_n} + \frac{f_{n+1}}{f_n} + \frac{f_n}{f_n} \Rightarrow \frac{f_{n+4}}{f_{n+3}} \cdot \frac{f_{n+3}}{f_{n+2}} \cdot \frac{f_{n+2}}{f_{n+1}} \cdot \frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{f_{n+3}}{f_{n+2}} \cdot \frac{f_{n+2}}{f_{n+1}} \cdot \frac{f_{n+1}}{f_n} + \frac{f_{n+2}}{f_{n+1}} \cdot \frac{f_{n+1}}{f_n} + \frac{f_{n+1}}{f_n} + 1 \Rightarrow \\ Q_{n+3}^{(4)} \cdot Q_{n+2}^{(4)} \cdot Q_{n+1}^{(4)} \cdot Q_n^{(4)} &= Q_{n+2}^{(4)} \cdot Q_{n+1}^{(4)} \cdot Q_n^{(4)} + Q_{n+1}^{(4)} \cdot Q_n^{(4)} + Q_n^{(4)} + 1. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Ademais, temos que

$$Q_n^{(4)} = \frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{f_n + f_{n-1} + f_{n-2} + f_{n-3}}{f_n} = 1 + \frac{f_{n-1}}{f_n} + \frac{f_{n-2}}{f_n} + \frac{f_{n-3}}{f_n} \leq 4, \quad \forall n \geq 4.$$

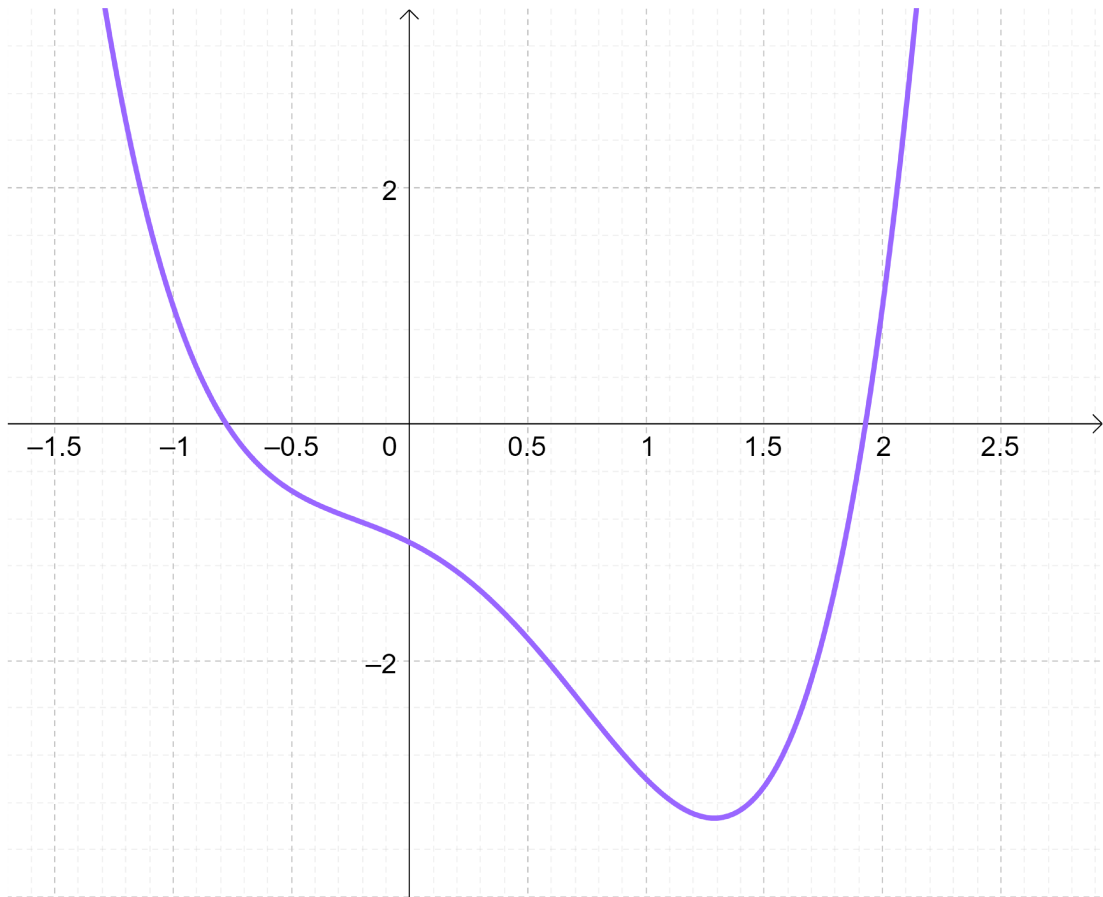
Mas, para $n = 1$, $n = 2$ e $n = 3$, sabemos que $Q_n^{(4)} = 1 < 4$. Portanto, $Q_n^{(4)} \leq 4$, $\forall n$. Assim, $(Q_n^{(4)})_n$ é limitada.

Aplicando a argumentação análoga à feita no caso da Sequência de Fibonacci de ordem 3, deduzimos que existe $\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n^{(4)}$, o qual denotaremos por $\phi^{(4)}$. Introduzindo o limite com $n \rightarrow \infty$ em (2.9), obtemos que

$$(\phi^{(4)})^4 = (\phi^{(4)})^3 + (\phi^{(4)})^2 + \phi^{(4)} + 1,$$

donde, pela Regra dos Sinais de Descartes (Teorema 7), concluímos que $\phi^{(4)}$ é a única raiz positiva de $P_4(x) := x^4 - x^3 - x^2 - x - 1$, cujo gráfico é:

Figura 2.3: Gráfico do polinômio $P_4(x)$



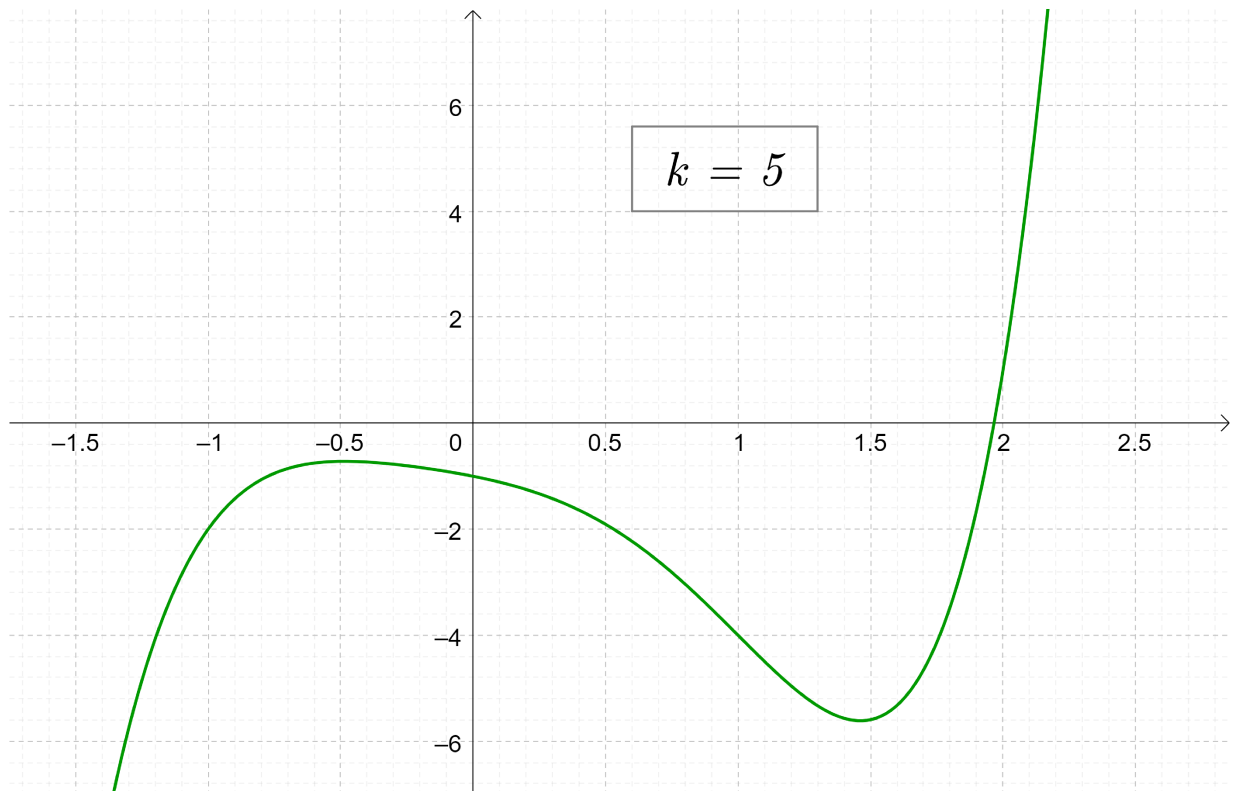
Fonte: Elaborado pelo autor.

Um valor aproximado de $\phi^{(4)}$ é 1,92756. Passemos à definição da Sequência de Fibonacci generalizada de ordem k .

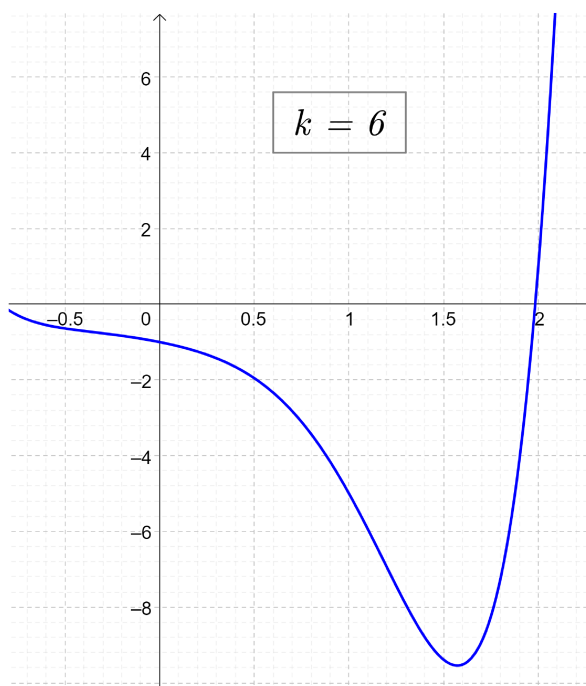
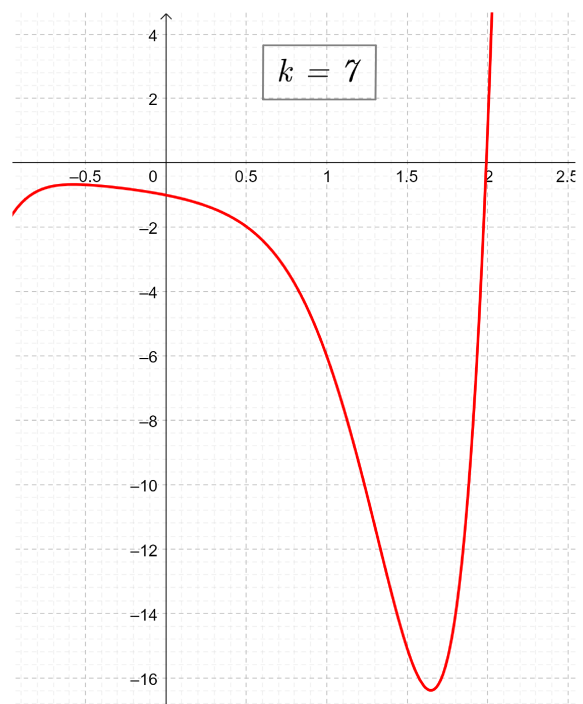
Definição 9 (Sequência de Fibonacci de ordem k). *A sequência $(f_n)_n$ definida por $f_1 = \dots = f_k = 1$, com $k \geq 2$, e $f_{n+k} = f_{n+k-1} + f_{n+k-2} + \dots + f_{n+1} + f_n$, $\forall n$, é denominada Sequência de Fibonacci de ordem k .*

Se repetirmos a argumentação feita anteriormente, mais precisamente, se usarmos os Teoremas 6 e 7, descobriremos que a sequência $(Q_n^{(k)})_n$, com $Q_n^{(k)} := \frac{f_{n+1}}{f_n}$, converge. Mais ainda, chamando $\phi^{(k)} := \lim_{n \rightarrow \infty} Q_n^{(k)}$, deduziremos que $\phi^{(k)}$ é a única raiz positiva do polinômio $P_k(x) := x^k - x^{k-1} - \dots - x - 1$.

Observemos, agora, os gráficos dos polinômios $P_5(x)$, $P_6(x)$ e $P_7(x)$, ou seja, os esboços dos polinômios associados quando $k = 5$, $k = 6$ e $k = 7$:

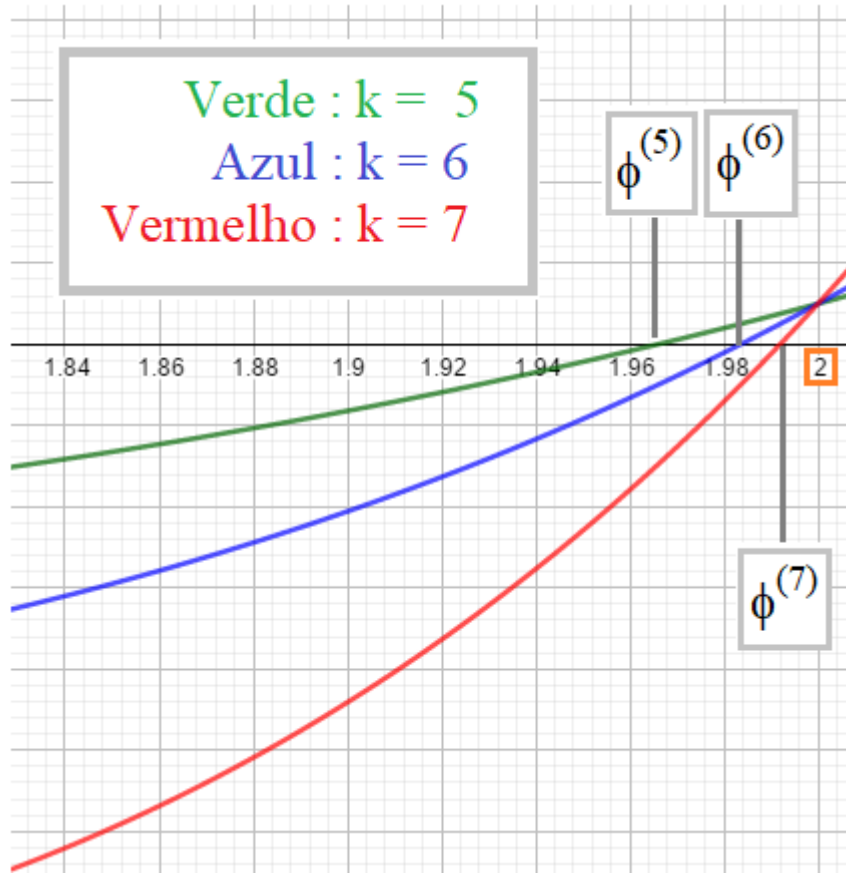
Figura 2.4: Gráfico do polinômio $P_5(x)$ 

Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 2.5: Gráfico do polinômio $P_6(x)$ Figura 2.6: Gráfico do polinômio $P_7(x)$ 

Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 2.7: Raízes positivas dos polinômios $P_5(x)$, $P_6(x)$ e $P_7(x)$



Fonte: Elaborado pelo autor.

Estes gráficos sugerem que, quando a ordem k da Sequência de Fibonacci generalizada tende a infinito, o valor da única raiz positiva do polinômio associado $P_k(x)$ tende a 2. Isto realmente se concretiza e está enunciado e demonstrado no Teorema a seguir.

Teorema 10. *Considere a Sequência de Fibonacci de ordem k e sua sequência das razões sucessivas $(Q_n^{(k)})_n$. Então, existem os limites $\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n^{(k)} := \phi^{(k)}$ e $\lim_{k \rightarrow \infty} \phi^{(k)} = 2$.*

Ou, dito de outra forma,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n^{(k)} \right] = 2.$$

Demonstração. A prova de que existe $\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n^{(k)} = \phi^{(k)}$ e de que o polinômio associado $P_k(x) = x^k - x^{k-1} - \dots - x - 1$ tem exatamente uma raiz positiva é análoga à feita para o caso $k = 3$ e é validada pela Regra dos Sinais de Descartes (Teorema 7). Provemos, pois, que $\lim_{k \rightarrow \infty} \phi^{(k)} = 2$ e que, portanto, ele existe. Se encontrarmos um intervalo $[a, b] \subset (0, \infty)$ tal que $P_k(a) \cdot P_k(b) < 0$, então a continuidade de $P_k(x)$ garantirá que a sua única raiz positiva $\phi^{(k)}$ pertencerá a esse intervalo.

Alguns cálculos mostram que $P_k(2) = 1 > 0$. De fato, $1 + x + x^2 + \dots + x^{k-1}$ é a soma de k termos de uma progressão geométrica (PG) finita cujo primeiro termo é 1 e cuja razão é x . Utilizando a fórmula para a soma dos termos de uma PG finita, concluímos que

$$1 + x + x^2 + \dots + x^{k-1} = \frac{x^k - 1}{x - 1}. \quad (2.10)$$

Fazendo $x = 2$, obtemos que $P_k(2) = 2^k - \frac{2^k - 1}{2 - 1} = 1$.

Também podemos constatar que $P_k\left(\frac{2k}{k+1}\right) < 0$. De fato, pela Equação 2.10,

$$P_k(x) = x^k - \frac{x^k - 1}{x - 1} = \frac{x^{k+1} - 2x^k + 1}{x - 1}.$$

Como $x - 1 > 0$ para todo $1 < x < \frac{2k}{k+1}$, bastará estudar o sinal do numerador $N_k(x) := x^{k+1} - 2x^k + 1$ nesse intervalo, o qual faz sentido, pois a ordem k da Sequência de Fibonacci generalizada é maior que 1. Como $(N_k)'(x) = x^{k-1} \cdot [(k+1)x - 2k]$, temos que $(N_k)'(1) = -k + 1$, que é negativo, uma vez que $k > 1$; por outro lado, $(N_k)'\left(\frac{2k}{k+1}\right) = 0$. Portanto, $(N_k)'(x) < 0$ para todo $x \in \left(1, \frac{2k}{k+1}\right)$, o que implica que N_k é decrescente neste intervalo.

Em particular, $N_k\left(\frac{2k}{k+1}\right) < N_k(1) = 0$, de onde segue que $P_k\left(\frac{2k}{k+1}\right) < 0$. Logo, a única raiz positiva $\phi^{(k)}$ de $P_k(x)$ satisfaz $\frac{2k}{k+1} < \phi^{(k)} < 2$. Mas, pela Regra de L'Hospital, $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2k}{k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2}{1} = 2$. Pelo Teorema do Confronto, segue que $\phi^{(k)} \rightarrow 2$, quando $k \rightarrow \infty$. ■

Uma vez que $\phi^{(2)}$ é a chamada razão áurea, associada à Sequência de Fibonacci clássica, é natural chamarmos $\phi^{(k)}$ de k -ésima razão áurea, já que está associada à Sequência de Fibonacci de ordem k . Assim, o Teorema anterior prova que a k -ésima razão áurea tem limite igual a 2 quando $k \rightarrow \infty$.

2.2 Variação na Sequência de Fibonacci

Vimos que a sequência das razões sucessivas da Sequência de Fibonacci converge para a razão áurea $\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. Ou seja, se $q_n := \frac{f_{n+1}}{f_n}$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = \phi$. Veremos, agora, que

essa propriedade continua válida se a "Sequência de Fibonacci" começar com termos positivos genéricos. Denotemos os termos dessa nova sequência por F_n .

Tabela 2.2: Termos de $(f_n)_n$ e de $(F_n)_n$

n	f_n	F_n
1	1	a
2	1	b
3	2	$a + b$
4	3	$a + 2b$
5	5	$2a + 3b$
6	8	$3a + 5b$
7	13	$5a + 8b$
8	21	$8a + 13b$
9	34	$13a + 21b$

Fonte: Elaborado pelo autor.

Disso concluímos que $F_{n+2} = f_n \cdot a + f_{n+1} \cdot b$, para $n \geq 1$. Provemos essa afirmação pelo Princípio da Indução Finita (PIF).

Temos que para $n = 1$ ela é válida. De fato, $F_{1+2} = F_3 = a + b$ e, por outro lado, $f_1 \cdot a + f_{1+1} \cdot b = 1 \cdot a + 1 \cdot b = a + b$. Portanto, $F_{1+2} = f_1 \cdot a + f_{1+1} \cdot b$.

Suponha que a afirmação vale para todo $n \leq k$ (HI). Provemos que vale para $n = k + 1$, ou seja, que

$$F_{(k+1)+2} = f_{k+1} \cdot a + f_{(k+1)+1} \cdot b.$$

Para isso, utilizaremos as leis de formação de $(F_n)_n$ e $(f_n)_n$, além da HI com $n = k$ para substituir F_{k+2} e com $n = k - 1$ para substituir F_{k+1} . Veja:

$$F_{(k+1)+2} = F_{k+3} = F_{k+2} + F_{k+1} = (f_k \cdot a + f_{k+1} \cdot b) + (f_{k-1} \cdot a + f_k \cdot b) =$$

$$(f_k + f_{k-1}) \cdot a + (f_{k+1} + f_k) \cdot b = f_{k+1} \cdot a + f_{k+2} \cdot b = f_{k+1} \cdot a + f_{(k+1)+1} \cdot b,$$

como queríamos demonstrar.

Passemos à sequência das razões sucessivas de $(F_n)_n$. Chamando $Q_n := \frac{F_{n+1}}{F_n}$, teremos:

$$Q_n = \frac{f_{n-1} \cdot a + f_n \cdot b}{f_{n-2} \cdot a + f_{n-1} \cdot b}. \quad (2.11)$$

Como os termos iniciais são positivos, temos que $a \cdot f_{n-2} + b \cdot f_{n-1} \neq 0$ e, portanto, Q_n fica bem definido para todo $n > 2$.

Em (2.11), dividindo numerador e denominador por f_{n-1} , obtemos:

$$Q_n = \frac{a + \frac{f_n}{f_{n-1}} \cdot b}{\frac{f_{n-2}}{f_{n-1}} \cdot a + b} = \frac{a + q_{n-1} \cdot b}{\frac{1}{q_{n-2}} \cdot a + b}.$$

Multiplicando numerador e denominador por q_{n-2} , ficamos ainda com:

$$Q_n = \frac{q_{n-2} \cdot a + q_{n-1} \cdot q_{n-2} \cdot b}{a + q_{n-2} \cdot b}.$$

Quando $n \rightarrow \infty$, como já sabemos que $q_n \rightarrow \phi$, então:

$$Q_n \rightarrow \frac{\phi \cdot a + \phi^2 \cdot b}{a + \phi \cdot b} = \frac{\phi(a + \phi \cdot b)}{a + \phi \cdot b} = \phi.$$

Isto é, a sequência das razões sucessivas de elementos de sequências em que se soma dois termos anteriores para se obter o próximo converge para ϕ , independentemente de quais sejam os dois primeiros termos a e b . Observe também que a dedução acima vale para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$.

E se partíssemos de reais a, b e c quaisquer, montando uma sequência de Fibonacci genérica de ordem 3? Afirmamos que encontraríamos um valor limite da sequência das razões sucessivas $(Q_n^{(3)})_n$ igual a, aproximadamente, 1,83928, como antes. Isso porque o processo que utilizamos na Seção 2.1 para chegar nesse valor não dependeu dos valores iniciais $f_1 = f_2 = f_3 = 1$.

Analogamente, se construirmos uma Sequência de Fibonacci genérica de ordem 4, a partir de valores a, b, c e d quaisquer, encontraríamos $\phi^{(4)} \approx 1,92756$. Por fim, se tomarmos p números reais valendo $a_1, a_2, \dots, a_{p-1}$ e a_p e montarmos uma sequência de Fibonacci genérica de ordem p , então, pelo Teorema 10, o limite de $(Q_n^{(p)})_n$ quando $n \rightarrow \infty$ existe e independe destes p valores iniciais. Mais que isso: atestamos que ele vale 2.

2.3 Encontrando o n -ésimo termo

Nesta seção, vamos perceber e demonstrar que existe uma relação entre o dobro de um termo qualquer e seu posterior. Observe a Sequência de Fibonacci:

$$(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \dots).$$

Anotando as diferenças $2f_{n-1} - f_n$, para $n \geq 2$, obtemos uma "nova" sequência:

$$(1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots).$$

Formulamos, então, uma conjectura:

$$f_n = 2 \cdot f_{n-1} - f_{n-3}, \quad \forall n \geq 3. \quad (2.12)$$

Note que, ao validarmos essa 1ª Conjectura (o que será feito no Teorema 11), temos, além da lei de formação da Sequência de Fibonacci, outra informação sobre f_{n-1} :

$$\begin{cases} f_{n-1} = f_n - f_{n-2} \\ f_{n-1} = 2 \cdot f_{n-2} - f_{n-4} \end{cases}, \quad \forall n \geq 4$$

Igualando as equações, temos uma 2ª Conjectura:

$$f_n = 3 \cdot f_{n-2} - f_{n-4}, \quad \forall n \geq 4. \quad (2.13)$$

Logo, nos perguntamos: existe uma terceira conjectura? Como seria?

Lembre que $f_{k+1} = f_k + f_{k-1}$, para todo natural $k \geq 2$. A ideia é usar a 1ª Conjectura para f_{k-1} e a 2ª para f_k . Observe que para isso devemos ter: $k-1 \geq 3 \wedge k \geq 4 \Rightarrow k+1 \geq 5$. Então,

$$f_{k+1} = (3f_{k-2} - f_{k-4}) + (2f_{k-2} - f_{k-4}) = 5f_{k-2} - 2f_{k-4}.$$

Conseguimos, pois, a 3ª Conjectura:

$$f_n = 5 \cdot f_{n-3} - 2 \cdot f_{n-5}, \quad \forall n \geq 6. \quad (2.14)$$

Em outras palavras, conjecturamos que, ao relacionarmos um elemento da Sequência de Fibonacci com dois anteriores, estes distantes 2 posições entre si e o primeiro até 3 posições do inicial, os elementos da própria Sequência aparecem como fatores, de forma ordenada.

Contudo, essas Conjecturas são válidas? Conseguimos construir outras? Existe uma conjectura geral? Veremos que sim:

Teorema 11. *Seja $(f_n)_n$ a Sequência de Fibonacci. Então, vale que*

$$f_n = f_{v+2} \cdot f_{n-v} - f_v \cdot f_{n-(v+2)}, \quad \forall v \geq 1, \quad \forall n \geq v+3. \quad (2.15)$$

Demonstração. Vamos mostrar pelo PIF sobre v .

Para $v = 1$, a sentença de fato é verdadeira, visto que

$$f_{1+2} \cdot f_{n-1} - f_1 \cdot f_{n-(1+2)} = f_3 \cdot f_{n-1} - f_1 \cdot f_{n-3} = 2 \cdot f_{n-1} - f_{n-3}.$$

Mas, pela lei de formação da Sequência de Fibonacci, $f_{n-3} = f_{n-1} - f_{n-2}$, $\forall n \geq 4$.

Substituindo e utilizando novamente essa lei, concluímos que

$$f_{1+2} \cdot f_{n-1} - f_1 \cdot f_{n-(1+2)} = 2 \cdot f_{n-1} - f_{n-1} + f_{n-2} = f_{n-1} + f_{n-2} = f_n, \quad \forall n \geq 4.$$

Observe que a condição do Teorema está satisfeita, uma vez que $n \geq v+3 \Leftrightarrow n \geq 4$, para $v = 1$.

Suponhamos por indução que a sentença vale para todo $v \leq k$, sendo $k \in \mathbb{N}$, ou seja, que as Conjecturas são verdadeiras até a k -ésima:

$$f_n = f_{v+2} \cdot f_{n-v} - f_v \cdot f_{n-(v+2)}, \quad \forall 1 \leq v \leq k, \quad \forall n \geq v+3. \quad (2.16)$$

Queremos mostrar que vale para $v = k+1$, isto é, que

$$f_n = f_{(k+1)+2} \cdot f_{n-(k+1)} - f_{k+1} \cdot f_{n-((k+1)+2)}, \quad \forall n \geq (k+1)+3. \quad (2.17)$$

Para isso, partiremos da lei de formação da Sequência de Fibonacci (hipótese do Teorema). Também utilizaremos, como HI, a k -ésima Conjectura para substituir f_{n-1} e a $(k-1)$ -ésima para substituir f_{n-2} e tornaremos a utilizar a lei. Observe:

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} = \quad (2.18)$$

$$(f_{k+2} \cdot f_{(n-1)-k} - f_k \cdot f_{(n-1)-(k+2)}) + (f_{(k-1)+2} \cdot f_{(n-2)-(k-1)} - f_{k-1} \cdot f_{(n-2)-((k-1)+2)}) = \quad (2.19)$$

$$f_{k+2} \cdot f_{n-k-1} - f_k \cdot f_{n-k-3} + f_{k+1} \cdot f_{n-k-1} - f_{k-1} \cdot f_{n-k-3} = f_{n-k-1} \cdot (f_{k+2} + f_{k+1}) - f_{n-k-3} \cdot (f_k + f_{k-1}) =$$

$$f_{n-k-1} \cdot f_{k+3} - f_{n-k-3} \cdot f_{k+1} = f_{n-(k+1)} \cdot f_{(k+1)+2} - f_{n-((k+1)+2)} \cdot f_{k+1}.$$

Verifiquemos, agora, que as condições sobre n são satisfeitas. A equação 2.18 é válida para $n \geq 3$. Já a 2.19, para $n-1 \geq k+3$ e para $n-2 \geq (k-1)+3$. Dessas três condições, implica que $n \geq k+4$, o que é equivalente a $n \geq (k+1)+3$, como queríamos.

Portanto, a sentença é válida para todo $v \geq 1$, para todo $n \geq v+3$, ou seja,

$$f_n = f_{v+2} \cdot f_{n-v} - f_v \cdot f_{n-(v+2)}, \quad \forall v \geq 1, \quad \forall n \geq v+3.$$

■

Exemplo 12. Agora, se quisermos saber o centésimo termo da sequência de Fibonacci, basta tomarmos um v que nos favoreça. Tomemos $v = 49$. Para tal, as condições do Teorema 11 são satisfeitas: $49 \geq 1$ e $100 \geq v+3 = 52$. Veja:

$$f_{100} = f_{51} \cdot f_{51} - f_{49} \cdot f_{49} = (20\,365\,011\,074)^2 - (7\,778\,742\,049)^2 = 354\,224\,848\,179\,261\,915\,075.$$

Vale observar que esta é apenas uma das maneiras de calcular o n -ésimo termo de $(f_n)_n$. O interessante é que podemos tomar posições com variadas distâncias a n , já que $1 \leq v \leq n-3$.

2.4 O padrão das "somas dos algarismos"

A seguir, estudaremos outra propriedade vislumbrante da Sequência de Fibonacci. Deus iluminou-nos (veja a TID no Capítulo 1) para intuirmos que a soma módulo 9 dos algarismos dos elementos de $(f_n)_n$ segue um padrão.

Por exemplo, $55 \rightarrow 10 \rightarrow 1$. Note que 1 é justamente o resultado da congruência módulo 9 de 55. De forma geral, o algarismo resultante desse processo de somar representa a classe módulo 9 a que o número inicial pertence. Em particular, se o inteiro é congruente a 0 módulo 9, ele é divisível por 9.

Observe as classes módulo 9 dos termos da Sequência de Fibonacci, para $0 \leq n \leq 48$:

(1, 1, 2, 3, 5, 8, 4, 3, 7, 1, 8, 0, 8, 8, 7, 6, 4, 1, 5, 6, 2, 8, 1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 4, 3, 7, 1, 8, 0, 8, 8, 7, 6, 4, 1, 5, 6, 2, 8, 1, 0)

Conjecturamos, pois, que este padrão de 24 algarismos perpetua-se em toda a Sequência. Porém, antes de enunciarmos isso, consideremos uma definição e dois resultados preliminares.

Definição 13 (Sequência dos Restos). *Considere a sequência $(R_n)_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ formada pela regra de que cada termo R_n corresponde ao resto da divisão euclidiana de f_n por 9. Chamamos $(R_n)_n$ de Sequência dos Restos.*

A lei de formação da Sequência de Fibonacci estende-se à dos Restos? Mostraremos que de certa forma sim:

Proposição 14. *Sejam $(R_n)_n$ a Sequência dos Restos e $(f_n)_n$ a Sequência de Fibonacci. Então,*

$$R_n \equiv R_{n-1} + R_{n-2} \pmod{9}, \quad \forall n \geq 3.$$

Demonstração. Utilizando a Definição da Sequência dos Restos, a lei da Sequência de Fibonacci e aquela Definição novamente, chegamos ao que queremos:

$$R_n \stackrel{(Def13)}{\equiv} f_n \pmod{9} \stackrel{(Def1)}{=} f_{n-1} + f_{n-2} \stackrel{(Def13)}{\equiv} R_{n-1} + R_{n-2} \pmod{9}, \quad \forall n \geq 3.$$

Note que também lançamos mão de uma propriedade de Teoria dos Números: "a soma é congruente à soma das congruências". ■

Logo, encontramos outra forma de "gerar" a Sequência dos Restos, além de simplesmente calcular as congruências módulo 9 de cada elemento da Sequência de Fibonacci.

Corolário 15. *Sejam $(f_n)_n$ a Sequência de Fibonacci e $(R_n)_n$ a Sequência dos Restos. Então,*

$$f_n \equiv R_{n-1} + R_{n-2} \pmod{9}.$$

Agora enunciaremos e demonstraremos a proposição da periodicidade da Sequência dos Restos.

Proposição 16. *Seja $(f_n)_n$ a Sequência de Fibonacci. Então, os restos das divisões dos elementos f_n por 9 seguem o seguinte padrão de 24 algarismos, a começar por $n = 1$:*

$$P = \{1, 1, 2, 3, 5, 8, 4, 3, 7, 1, 8, 0, 8, 8, 7, 6, 4, 1, 5, 6, 2, 8, 1, 0\}. \quad (2.20)$$

Demonstração. Notemos que quando aparece um 0, o algarismo anterior repete duas vezes e isto acontece duas vezes em P :

$$\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 4, 3, 7, 1, 8, 0, 8, 8, 7, 6, 4, 1, 5, 6, 2, 8, 1, 0, |1, 1, \dots\}$$

No início aparecem dois algarismos 1, os quais se repetem após o último elemento de P , que é um 0. Logo, pela Proposição 14, segue que as repetições ocorrem a cada 24 termos.

■

Note que agora podemos restringir o contradomínio de $(R_n)_n$ de $\mathbb{N}$ para P . A Proposição 16 fornece-nos uma ferramenta a mais para descobrir restos da divisibilidade por 9, útil quando os termos da Sequência de Fibonacci são muito grandes.

Exemplo 17. *Calcule o resto módulo 9 do centésimo termo da sequência de Fibonacci.*

Observe que $f_{100} \equiv f_4 \pmod{24}$, pois $100 = 24 \cdot 4 + 4$. Logo, $R_{100} = R_4 = 3$. De fato, do Exemplo 12,

$$\frac{354\,224\,848\,179\,261\,915\,075 - 3}{9} = 39\,358\,316\,464\,362\,435\,008.$$

Poderíamos questionar: os restos das divisões dos elementos f_n por 3 também produzem uma periodicidade? E por outro número diferente de 9 e de 3? Veja a observação seguinte:

Observação 18. *A periodicidade ocorre mesmo quando consideramos congruência módulo p , com $p \in \mathbb{N}$ diferente de 9. Porém, o comprimento da parte periódica pode mudar. Vamos provar que isto também é verdade: os pares ordenados (R_n, R_{n+1}) assumem p^2 valores, no máximo, pois há p possibilidades para R_n e p possibilidades para R_{n+1} (há p restos possíveis quando fazemos a divisão de um número por p). Portanto, ao desenvolvermos a sequência $\{R_1, R_2, \dots, R_k, R_{k+1}, \dots, R_n, R_{n+1}, \dots\}$, haverá um momento em que o par (R_n, R_{n+1}) coincidirá com o par (R_k, R_{k+1}) . Em outras palavras, se escrevermos os p^2 primeiros pares de restos sucessivos possíveis, caso não tenha ocorrido repetição de pares até então, certamente ocorrerá no $(p^2 + 1)$ -ésimo par. Em particular, deduzimos que o comprimento da parte periódica é menor ou igual a p^2 .*

Exemplo 19. Considerando $(R_n)_n$ a sequência dos restos das divisões dos elementos f_n por 5, temos que seus elementos são:

$$\{1, 1, 2, 3, 0, 3, 3, 1, 4, 0, 4, 4, 3, 2, 0, 2, 2, 4, 1, 0, 1, 1, \dots\},$$

sendo que o tamanho da parte periódica é igual a 20 (o qual, de fato, é menor ou igual a $5^2 = 25$).

2.5 Frações Fibonaccianas

Observe:

$$\frac{100}{89} = 1,1235955056179775280898876404494\dots$$

$$\frac{10\,000}{9\,899} = 1,0102030508132134559046368320032\dots$$

$$\frac{1\,000\,000}{998\,999} = 1,0010020030050080130210340550891\dots$$

$$\frac{100\,000\,000}{99\,989\,999} = 1,001000200030005000800130021003\dots$$

Note que os elementos da Sequência de Fibonacci aparecem em casas decimais dos números acima e em maior quantidade nas últimas frações. Ou seja, a partir de $\frac{100}{89}$, ao acrescentarmos dois zeros ao numerador e dois noves ao denominador, um à esquerda e outro à direita de 89, (re)produzimos frações fibonaccianas. Mas como podemos escrever isso matematicamente? E por que em algum momento os elementos cessam? É o que estudaremos nesta seção.

Tome a seguinte função:

$$r: \mathbb{R} - \left\{ \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}, \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right\} \rightarrow \mathbb{R} \quad (2.21)$$

$$x \mapsto \frac{1}{1 - x - x^2} \quad (2.22)$$

Também considere o seguinte resultado para séries geométricas, desde que $|t| < 1$, $t \in \mathbb{R}$:

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n$$

Desde que $|x + x^2| < 1$, substituimos t por $x + x^2$:

$$\frac{1}{1-x-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (x + x^2)^n \quad (2.23)$$

Ao desenvolver a somatória, obtemos:

$$\begin{aligned} & 1 + (x + x^2) + (x + x^2)^2 + (x + x^2)^3 + (x + x^2)^4 + \dots = \\ & 1 + (x + x^2) + (x^2 + 2x \cdot x^2 + x^4) + (x^3 + 3x^2 \cdot x^2 + 3x \cdot x^4 + x^6) + (x^4 + 4x^3 \cdot x^2 + 6x^2 \cdot x^4 + 4x \cdot x^6 + x^8) + \dots = \\ & 1 + x + (x^2 + x^2) + (2x^3 + x^3) + (x^4 + 3x^4 + x^4) + (3x^5 + 4x^5 + x^5) + \dots = \\ & = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 8x^5 + \dots \end{aligned} \quad (2.24)$$

O desenvolvimento parcial da série $\sum_{n=0}^{\infty} (x + x^2)^n$ sugere que ela é equivalente a $\sum_{m=0}^{\infty} f_{m+1} \cdot x^m$ e é isso que nos propomos a provar agora. Para tal, vamos organizar os coeficientes do desenvolvimento de $(x + x^2)^n$ na linha n da tabela 2.3, tendo a preocupação de colocar os coeficientes de x^m na coluna m , visto que estes serão somados, de modo a obtermos o coeficiente desejado de x^m .

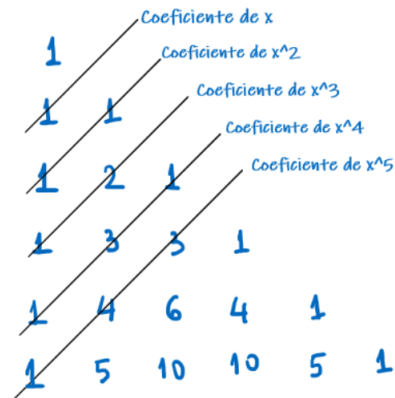
Tabela 2.3: Desenvolvimento da série (coeficientes de x^m nas colunas vs. coeficientes de $(x + x^2)^n$ nas linhas)

	x	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8	x^9	x^{10}	x^{11}	x^{12}	x^{13}	x^{14}	...
$(x + x^2)^1$	1	1													
$(x + x^2)^2$		1	2	1											
$(x + x^2)^3$			1	3	3	1									
$(x + x^2)^4$				1	4	6	4	1							
$(x + x^2)^5$					1	5	10	10	5	1					
$(x + x^2)^6$						1	6	15	20	15	6	1			
$(x + x^2)^7$							1	7	21	35	35	21	7	1	
$(x + x^2)^8$								1	8	28	56	70	56	28	...
$\vdots$									$\ddots$	$\ddots$	$\ddots$	$\ddots$	$\ddots$	$\ddots$	$\ddots$

Fonte: Elaborado pelo autor.

As entradas não nulas desta tabela formam o conhecido Triângulo de Pascal - cuja definição pode ser encontrada em Oliveira (2021) -, porém com as linhas deslocadas para a direita. Note que os coeficientes de x , x^2 , x^3 , x^4 , x^5 , ... são obtidos somando-se os elementos das "diagonais inversas" do referido Triângulo, conforme a ilustração seguinte:

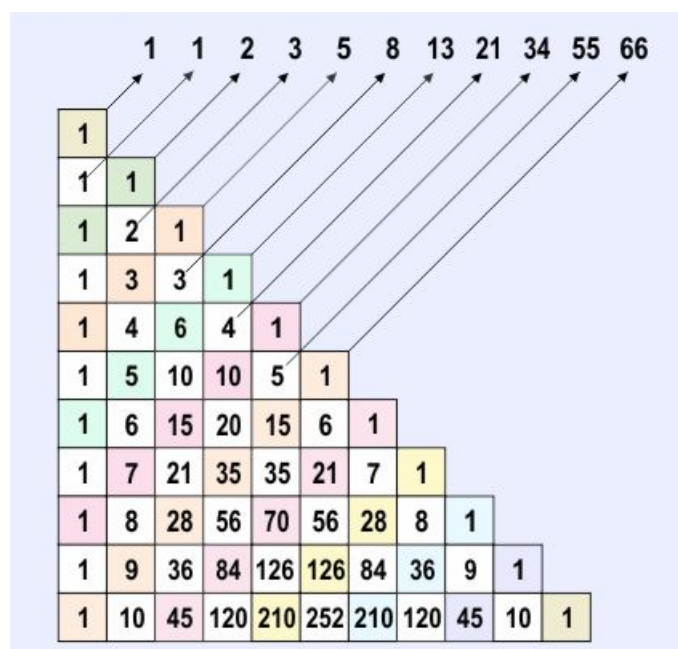
Figura 2.8: Triângulo de Pascal e as "diagonais inversas"



Fonte: Elaborado pelo autor.

Mas, afinal, o que os termos da Sequência de Fibonacci têm a ver com os números do Triângulo de Pascal? O seguinte resultado diz que a soma dos elementos das "diagonais inversas" supracitadas geram a Sequência de Fibonacci; vamos demonstrá-lo, tendo como referência Silva (2017).

Figura 2.9: Triângulo de Pascal e a Sequência de Fibonacci



Fonte: Silva (2022).

Proposição 20. *A soma dos elementos da n -ésima "diagonal inversa" do Triângulo de Pascal é igual ao n -ésimo elemento da sequência de Fibonacci.*

Demonstração. Seja F_n a soma dos elementos da n -ésima "diagonal inversa" do Triângulo de Pascal. Basta mostrarmos que $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, para todo $n \geq 1$.

Tabela 2.4: Triângulo de Pascal na forma binomial

	0	1	2	3	4	5		n
0	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$							
1	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$						
2	$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$					
3	$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$				
4	$\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$		
n	$\begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} n \\ 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} n \\ 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} n \\ 5 \end{pmatrix}$	...	$\begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Fonte: Elaborado pelo autor.

Por definição, temos o seguinte:

$$F_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$F_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
F_3 &= \binom{3}{0} + \binom{2}{1} \\
&\vdots \\
F_n &= \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \dots \\
F_{n+1} &= \binom{n+1}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n-1}{2} + \dots \\
F_{n+2} &= \binom{n+2}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n}{2} + \dots
\end{aligned}$$

Entenda-se que as reticências das últimas três igualdades não significam que a soma é infinita; ela continua até certo ponto, a saber:

$$F_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-k}{k}.$$

Assim, adicionando F_{n+1} a F_n , temos que

$$\begin{aligned}
&\left[\binom{n+1}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n-1}{2} + \binom{n-2}{3} + \dots \right] + \left[\binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \dots \right] = \\
&\binom{n+1}{0} + \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1} \right] + \left[\binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2} \right] + \left[\binom{n-2}{2} + \binom{n-2}{3} \right] + \dots
\end{aligned}$$

Usando, agora, que $\binom{n+1}{0} = 1 = \binom{n+2}{0}$ e a relação de Stifel para números binomiais, isto é,

$$\binom{m}{p} = \binom{m-1}{p} + \binom{m-1}{p-1},$$

com $m > p$, obtemos que

$$F_{n+1} + F_n = \binom{n+2}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n-1}{3} + \dots = F_{n+2},$$

o que conclui a prova. ■

Isso prova, junto com a igualdade (2.23), que

$$r(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+1} x^n. \quad (2.25)$$

Aplicaremos, nas linhas que seguem, $r(x)$ a $0,1$. Note que este número está no domínio da função e que $|0,1 + 0,1^2| < 1$. Logo,

$$r(0,1) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+1} (0,1)^n \Rightarrow$$

$$\frac{1}{1 - 0,1 - 0,1^2} = f_1 + f_2(0,1) + f_3(0,1)^2 + f_4(0,1)^3 + f_5(0,1)^4 + f_6(0,1)^5 + f_7(0,1)^6 \dots \Rightarrow$$

$$\frac{100}{100 - 10 - 1} = 1 + 0,1 + 0,02 + 0,003 + 0,0005 + \dots \Rightarrow \frac{100}{89} = 1,1235\dots$$

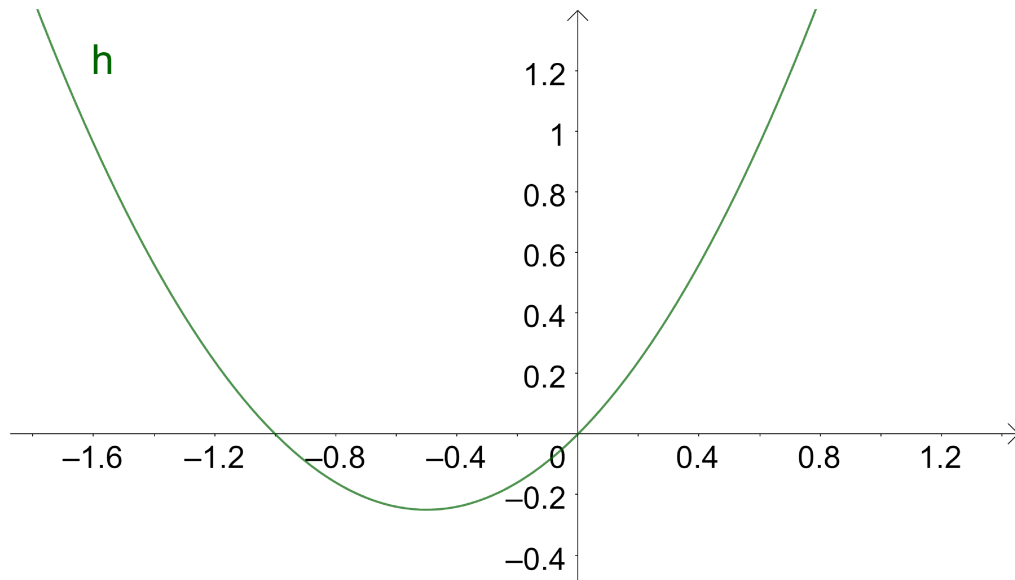
Podemos esclarecer isto dispondo a soma verticalmente:

$$\begin{array}{r} 1 \\ 0,1 \\ 0,02 \\ 0,003 \\ 0,0005 \\ 0,00008 \\ 0,000013 \\ + \vdots \\ \hline 1,12359\dots \end{array}$$

Com as outras frações ocorrerão resultados semelhantes, ao aplicarmos $r(x)$ a $0,01$, $0,001$ etc. Note que estes são potências de $0,1 = 10^{-1}$ e veremos, portanto, que as condições continuarão sendo satisfeitas. A diferença é que, devido às potências maiores, os números de Fibonacci aparecerão mais espaçados e demorará mais para ocorrer o erro ao se mudar de ordem (dezena para centena, centena para unidade de milhar e assim por diante).

Vamos verificar que a condição $|x + x^2| < 1$ é válida para toda potência de 10 com expoente negativo. Chame $h(x) = x^2 + x$ e observe no gráfico a seguir que h é crescente para $x > 0$.

Figura 2.10: Gráfico de $h(x)$



Fonte: Elaborado pelo autor.

Mas, $h(x) = 1 \iff x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Considerando o valor positivo de x (o número de ouro) e como $10^{-n} \rightarrow 0^+$ quando $n \rightarrow \infty$, todas as potências de 10 com expoente negativo serão menores que $\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$, pois a primeira é $0,1 < \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$. Portanto, $|h(x)| < 1$ para esse tipo de potências de 10. Como estas são todas positivas e menores que $\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$, também concluímos que pertencem ao domínio de $r(x)$.

Aplicando a igualdade 2.25 a $x = 0,01$, obtemos a segunda fração fibonacciana:

$$r(0,01) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+1}(0,01)^n \Rightarrow$$

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{100} - \left(\frac{1}{100}\right)^2} = f_1 + f_2(0,01) + f_3(0,01)^2 + f_4(0,01)^3 + f_5(0,01)^4 + f_6(0,01)^5 + f_7(0,01)^6 \dots \Rightarrow$$

$$\frac{10000}{10000 - 100 - 1} = 1 + 0,01 + 0,0002 + 0,000003 + 0,00000005 + 0,0000000008 +$$

$$0,000000000013 + \dots \Rightarrow \frac{10000}{9899} = 1,010203050813\dots$$

Sendo assim, a propriedade de acrescentar dois zeros provém de elevar potências de

0, 1 ao quadrado. Já a propriedade de agregar nove vem da subtração $10^{2n} - 10^n - 1$, $n \geq 1$, obtida após encontrarmos o mínimo múltiplo comum no denominador.

Por fim, obtenhamos a terceira fibonacciana:

$$r(0, 001) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+1}(0, 001)^n \Rightarrow$$

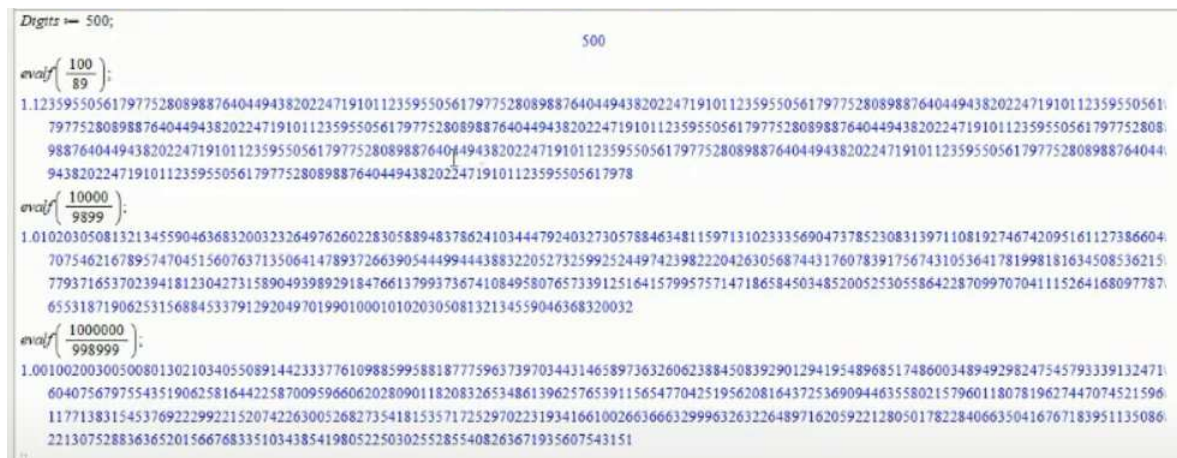
$$\frac{1000000}{1000000 - 1000 - 1} = 1 + 0,001 + 0,000002 + 0,000000003 + 0,000000000005 +$$

$$0,000000000000008 + 0,00000000000000013 + \dots \Rightarrow$$

$$\frac{1000000}{998999} = 1,001002003005008013...$$

A seguir, apresentamos uma imagem contendo as três primeiras frações fibonaccianas na forma decimal, com 500 casas. Observe que a terceira delas (re)produz os elementos da Sequência de Fibonacci até o décimo quinto (610), que termina na 42ª casa decimal.

Figura 2.11: As três primeiras frações escritas na forma decimal, com 500 casas



Fonte: Elaborado pelo autor.

2.6 A razão áurea

Agora, definiremos o que Johannes Kepler chamou de "divina proporção". Neste trabalho, utilizaremos a notação $m(\overline{AB})$ para a medida de um segmento $\overline{AB}$.

Definição 21. *Seja um segmento $\overline{AB}$ de comprimento l , dividido em dois segmentos por um ponto C . Tomemos $m(\overline{AC}) = a$ e $m(\overline{CB}) = b$. Então:*

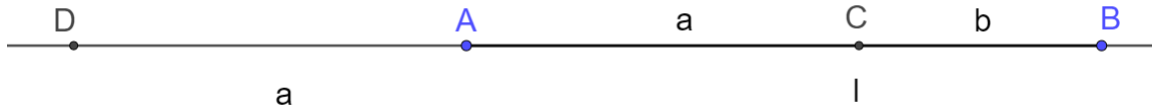
(i) *se C é tal que $\frac{l}{a} = \frac{a}{b}$, então C é a **divisão áurea** (ou **seção áurea**) de $\overline{AB}$.*

(ii) a razão $\frac{l}{a} = \frac{a}{b}$ é chamada de **razão áurea de $\overline{AB}$** .

Neste momento, encontraremos uma forma de encontrar uma nova divisão áurea, dada uma já existente. Veja:

Proposição 22. *Seja $\overline{BD}$ um segmento, como na figura a seguir, de modo que C é a divisão áurea de $\overline{AB}$.*

Figura 2.12: Divisão áurea, com o segmento maior duplicado



Fonte: Elaborado pelo autor.

Então, A é a divisão áurea de $\overline{BD}$.

Demonstração. Por hipótese, C é a divisão áurea de $\overline{AB}$. Isto implica, pela Definição 21, que $\frac{m(AB)}{m(AC)} = \frac{m(AC)}{m(CB)}$. Logo,

$$l \cdot b = a^2 \quad (2.26)$$

Queremos mostrar que A é divisão áurea de $\overline{BD}$, ou seja, que

$$\frac{m(BD)}{m(BA)} = \frac{m(BA)}{m(AD)} \iff \frac{l+a}{l} = \frac{l}{a} \iff l^2 = a \cdot l + a^2 \iff a^2 = l(l-a),$$

o que realmente ocorre, uma vez que $l - a = b$ e vale a equação (2.26). ■

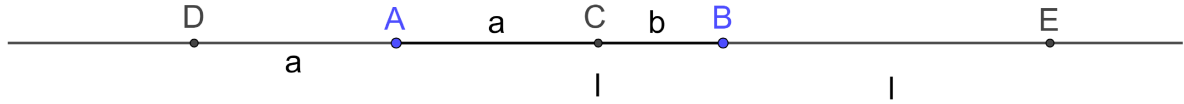
Chamemos

$$r_1 = \frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} \quad \text{e} \quad r_2 = \frac{2a+b}{a+b} = \frac{a+b}{a}.$$

Portanto, dados dois segmentos separados pela divisão áurea do segmento total, ao dobrarmos o segmento de comprimento maior a partir do ponto extremo, o ponto de "dobramento" torna-se uma nova divisão áurea, agora referente ao segmento total novo.

Almejamos continuar. Tome E sobre a reta AB distando l de B ($E \neq A$). Pela Proposição 22, B é a divisão áurea de $\overline{DE}$.

Figura 2.13: Terceira divisão áurea



Fonte: Elaborado pelo autor.

Então,

$$\begin{aligned} \frac{m(DE)}{m(DB)} = \frac{m(DB)}{m(BE)} &\iff \frac{a+2l}{2a+b} = \frac{2a+b}{l} \iff \frac{a+2l}{a+l} = \frac{a+l}{l} \iff \\ \frac{a+l+l}{a+l} = \frac{a+l}{a+b} &\iff \frac{l+(a+l)}{a+(l)} = \frac{a+(l)}{b+(a)}, \end{aligned} \quad (2.27)$$

o que chamamos de **soma errada** das duas primeiras razões áureas, r_1 e r_2 .

A seguir, estudaremos as razões áureas seguintes e suas relações com as anteriores. Note que a igualdade (2.27) é equivalente a

$$r_3 = \frac{3a+2b}{2a+b} = \frac{2a+b}{a+b}.$$

Veja que aparecem os termos 3, 2 e 1 da Sequência de Fibonacci. Nosso intuito é mostrar que os elementos dessa sequência continuarão aparecendo nas igualdades posteriores.

Construamos a quarta divisão áurea: tome F sobre a reta AB distando $2a+b$ de D , mas com $F \neq B$. Pela Proposição 22, D é a divisão áurea de $\overline{EF}$. Então,

$$r_4 = \frac{2a+b+2a+b+a+b}{2a+b+a+b} = \frac{2a+b+a+b}{2a+b}$$

Observe que não aparecem simultaneamente r_1 , r_2 e r_3 , mas r_4 é a soma errada de r_2 e r_3 . Olhe:

$$r_4 = \frac{[3a+2b] + (2a+b)}{[2a+b] + (a+b)} = \frac{[2a+b] + (a+b)}{[a+b] + (a)}.$$

A r_3 está delimitada por colchetes e a r_2 , por parêntesis. Além disso,

$$r_4 = \frac{5a+3b}{3a+2b} = \frac{3a+2b}{2a+b}.$$

Mas e se quisermos escrever (r_4) em função de (r_1) ? Constate que $r_3 = \frac{3a+2b}{2a+b} = \frac{2a+b}{a+b}$, que $r_2 = \frac{2a+b}{a+b} = \frac{a+b}{a}$ e que $r_1 = \frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$. Logo,

$$\frac{5a+3b}{3a+2b} = \frac{3a+2b}{2a+b} = \frac{2a+b}{a+b} = \frac{a+b}{a} = \frac{a}{b},$$

isto é,

$$r_4 = r_3 = r_2 = r_1.$$

Agora, veremos que a razão áurea está relacionada com ϕ . Na figura 2.12, consideremos $m(CB) = 1$. Encontraremos x tal que $m(AC) = x$.

Pela definição de divisão áurea (Definição 21), temos que

$$\frac{x+1}{x} = \frac{x}{1} \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0.$$

Já vimos que a solução positiva dessa equação é $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,61803 = \phi$. Já a negativa é $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0,61803 := \phi'$, a qual não convém, nesse caso.

Agora, tome $m(AC) = 1$. Queremos encontrar x' tal que $m(CB) = x'$. Observe que, nesta situação,

$$\frac{1}{x'} = \phi. \quad (2.28)$$

Por definição,

$$\frac{1+x'}{1} = \frac{1}{x'} \Rightarrow x'^2 + x' - 1 = 0,$$

cujas soluções positivas são $x' = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0,61803$, ou seja, $x' = -\phi'$. Substituindo na equação (2.28), chegamos que

$$\frac{1}{-\phi'} = \phi \iff \phi \cdot \phi' = -1, \quad (2.29)$$

o que significa que ϕ' é o recíproco negativo de ϕ . Além disso,

$$\phi - 1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = -\phi'.$$

Por outro lado, a equação (2.29) implica que

$$\frac{1}{\phi} = -\phi'.$$

Portanto, pelas duas últimas equações, concluimos que

$$\phi - 1 = \frac{1}{\phi},$$

sendo o valor numérico dessa igualdade igual a aproximadamente 0,61803. De acordo com Huntley (1985, p. 38), o número ϕ é o único com essa propriedade. Discordamos: o ϕ' também a satisfaz. De fato, uma outra forma de encontrar esse igualdade é a partir da equação

$$x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x - 1 = \frac{1}{x},$$

que só é satisfeita por ϕ e ϕ' .

Retornando às razões áureas, conjecturamos que a relacionada ao $(k - 1)$ -ésimo "dobramento", com $k \geq 4$, é

$$(r_k) : \frac{[f_k \cdot a + f_{k-1} \cdot b] + (f_{k-1} \cdot a + f_{k-2} \cdot b)}{[f_{k-1} \cdot a + f_{k-2} \cdot b] + (f_{k-2} \cdot a + f_{k-3} \cdot b)} = \frac{[f_{k-1} \cdot a + f_{k-2} \cdot b] + (f_{k-2} \cdot a + f_{k-3} \cdot b)}{[f_{k-2} \cdot a + f_{k-3} \cdot b] + (f_{k-3} \cdot a + f_{k-4} \cdot b)},$$

que é a soma errada entre a razão áurea r_{k-1} - entre colchetes - e a razão áurea r_{k-2} - entre parêntesis.

De forma simplificada, r_k fica assim:

$$r_k = \frac{f_{k+1} \cdot a + f_k \cdot b}{f_k \cdot a + f_{k-1} \cdot b} = \frac{f_k \cdot a + f_{k-1} \cdot b}{f_{k-1} \cdot a + f_{k-2} \cdot b}, \quad k \geq 2.$$

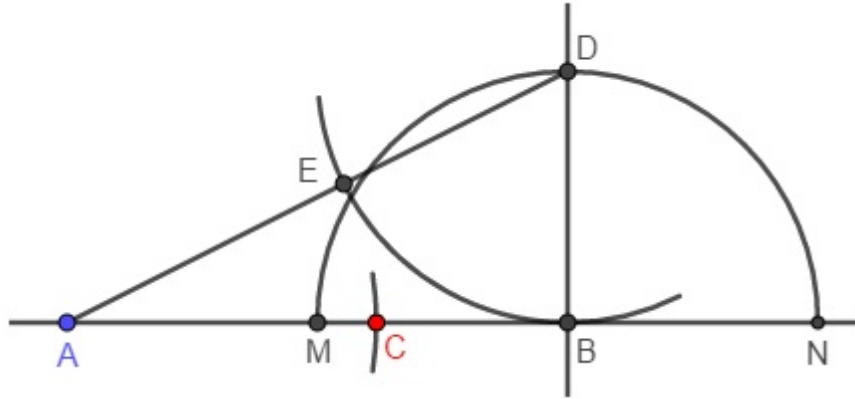
Ademais, questionamos: é possível encontrar a divisão áurea de um segmento com régua e compasso? Veremos uma forma para tal, conforme Huntley (1985, p. 38).

Proposição 23. *Façamos o procedimento a seguir a partir de um segmento $\overline{AB}$:*

- 1) *Encontrar o ponto médio M de $\overline{AB}$ (a partir da mediatriz);*
- 2) *Traçar a circunferência com centro em B e raio $m(MB) = \frac{m(AB)}{2}$, sendo N o outro ponto de interseção com a reta AB;*
- 3) *Traçar, pelo ponto B, a perpendicular à reta AB (mediatriz de $\overline{MN}$);*
- 4) *Unir A a D, sendo D um dos pontos de intersecção da mediatriz de $\overline{MN}$ com a circunferência traçada no passo 2;*
- 5) *Traçar o arco com centro em D e raio $m(DB)$, intersectando $\overline{AD}$ em E;*
- 6) *Traçar o arco de raio $m(AE)$ e com centro em A, cortando $\overline{AB}$ em C.*

Então, este ponto C é a divisão áurea do segmento $\overline{AB}$.

Figura 2.14: Construção da divisão áurea com régua e compasso



Fonte: Elaborado pelo autor.

Demonstração. Vamos encontrar $m(AE)$. Consideremos $m(AB) = l$.

Como o triângulo ABD é retângulo, então:

$$m(AD)^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 + l^2 \Rightarrow m(AD)^2 = \frac{5l^2}{4} \Rightarrow m(AD) = \frac{l\sqrt{5}}{2}.$$

Mas,

$$m(AE) = m(AD) - m(ED) = \frac{l\sqrt{5}}{2} - \frac{l}{2} = l \cdot \frac{(\sqrt{5} - 1)}{2}.$$

Isto implica, por construção, que

$$m(AC) = l \cdot \frac{(\sqrt{5} - 1)}{2} \quad \wedge \quad m(CB) = l - l \cdot \frac{(\sqrt{5} - 1)}{2} = l \cdot \frac{(3 - \sqrt{5})}{2}.$$

Como

$$\frac{m(AB)}{m(AC)} = \frac{l}{l \cdot \frac{(\sqrt{5} - 1)}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5} - 1} = \frac{2(\sqrt{5} + 1)}{5 - 1} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = \phi$$

e

$$\frac{m(AC)}{m(CB)} = l \cdot \frac{(\sqrt{5} - 1)}{2} \cdot \frac{2}{l(3 - \sqrt{5})} = \frac{3\sqrt{5} - 3 + 5 - \sqrt{5}}{9 - 5} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = \phi,$$

então $\frac{m(AB)}{m(AC)} = \frac{m(AC)}{m(CB)}$ e, pela Definição 21, C é a divisão áurea de AB . ■

3. A BELEZA DA MATEMÁTICA

Há uma ambiguidade no título deste capítulo. Ele pode significar o prazer que deriva da atividade mental que o estudo da matemática gera; ou pode significar a sensação estética evocada, por exemplo, por um teorema matemático que, por causa desta sensação, é considerado um objeto de beleza (Huntley, 1985, p. 75).

Acrescentamos, ainda, um terceiro significado à expressão. Adicionamos a beleza de elementos da natureza, os quais, aparentemente, não apresentam matemática alguma, mas em que, ao debruçarmo-nos em estudo, pelo menos um pouco, podemos perceber padrões, geometrias, sequências, simetrias e funções matemáticas.

Quem nunca vislumbrou a beleza de um arco-íris? Ou de uma simétrica flor que desabrocha? Ou nunca reparou a beleza dos ciclos da lua, da ordenada distribuição das sementes de um girassol ou de perfeitos favos de mel em formato hexagonal?

Bom, se alguém não parou para ver alguma dessas belezas, eis o convite!

Figura 3.1: Arco-íris



Fonte: Baldassin (2018).

Figura 3.2: Camélia-rosa



Fonte: Almeida (2025).

Figura 3.3: Fases da lua



Fonte: Soares (2024).

Figura 3.4: Girassol



Fonte: Machado (2016).

Figura 3.5: Favo de mel



Fonte: Fotos (2012).

Mas, alguns questionamentos atordoam mentes científicas, em especial as dos matemáticos: a beleza é passível de demonstração? Pode a apreciação estética ter validade científica? De que vale tanta beleza se é relativa a cada gosto, não podendo ser universal? Para que vale, pois, enfatizar a beleza de um teorema antes de demonstrá-lo? Essas perguntas serão elucidadas ao longo deste capítulo.

3.1 Matemática: inventada e/ou descoberta?

Um debate metafísico que se trava em relação à ciência matemática é o seguinte: a Matemática e seus resultados como os conhecemos foram inventados pelos(as) matemáticos(as) ou foi descoberta por eles(as), de forma que já existia? Nas palavras do Professor Rafael Pro-cóprio (2015): "se os seres humanos não existissem, será que a Matemática existiria?"

Há os que acreditam que a Matemática é uma linguagem criada pelos seres humanos para "ler" a natureza, em seus fenômenos físicos e químicos. Afinal, é inegável que ela foi sendo aprimorada ao longo dos séculos por homens e mulheres. Esses defensores são chamados **aristotélicos**, já que Aristóteles (384 a.C. - 322 a.C.) dizia que é a partir da observação e da experiência que obtemos conhecimento, ou seja, a partir dos sentidos humanos é que poderia ser desenvolvida a ciência matemática.

Por outro lado, existem pessoas que defendem a descoberta matemática, alegando que a existência de tal ciência independe da vida humana. Evidências dessa afirmação podem ser encontradas no mundo natural: curvas e simetrias dispostas na própria natureza, cuja existência prescinde da ação do ser humano. Esses indivíduos são chamados de **platônicos**, pois Platão (c. 428 a.C. - 348 a.C.) defendia a existência do mundo das ideias - no qual estaria inclusa a Matemática -, que não poderia ser acessado diretamente pelo ser humano, mas do qual poderíamos nos aproximar, por meio de nossa racionalidade (Jaccoud, 2016).

Roger Penrose, físico-matemático e filósofo da ciência inglês¹, apresenta uma defesa do porquê a Matemática é descoberta:

Se você gosta de fatos matemáticos, como, por exemplo, de tentar descobrir se há um número primo maior, isso é algo independente de nós, sempre foi verdade. O que não ocorre é que, de alguma forma, tal fato tornou-se verdade assim que alguém achou que parecia tão difícil de provar (Truth, 2020, tradução adaptada).

¹Penrose também é professor emérito da Cátedra Rouse Ball de Matemática da Universidade de Oxford, conforme Roger (2021).

O cientista também fala sobre a existência de um mundo matemático e que parece haver muita matemática sem ligação com o mundo físico. De fato, esta é uma visão platônica da Matemática.

Conforme Truth (2020), quando Penrose é perguntado sobre o seu próprio senso sobre o que a Matemática é, ele responde achar que há dois aspectos da ciência em questão: algumas pessoas que estão apenas explorando a Matemática e fazem isso porque acham estimulante e realmente maravilhoso de fazer; e, por outro lado, a relação da Matemática com o mundo físico, ou seja, quando acertamos nas verdades matemáticas, ela deveras espelha o comportamento da realidade física, com extraordinária precisão. Conclui que,

portanto, há esses dois lados da Matemática: ela tem essa realidade que você pode estudar independentemente de seu papel na Física e, do outro lado, parece revelar como o mundo real opera, isto é, em um certo sentido, o que o mundo é, tanto quanto podemos entendê-lo (Truth, 2020, tradução adaptada).

Aliada a isso está uma famosa frase de Galileu Galilei, que viveu de 1564 a 1642: “A matemática é o alfabeto com o qual Deus escreveu o universo.” Logo, o astrônomo e físico defendia que Deus criou um alfabeto chamado "Matemática" e, por meio dele, formou todas as outras coisas, com o que concordamos.

Diante de todos esses argumentos, defendemos que as alternativas não são mutuamente exclusivas, ou seja, a Matemática é uma descoberta e uma invenção, concomitantemente. Concordamos com Huntley (1985, p. 32) ao dizer que, à semelhança de seu Criador, o homem nasceu para criar, para talhar a beleza. Em outras palavras, o fato de descobrirmos alguma verdade matemática, não implica dizer que não estejamos inventando Matemática; na verdade, (re)inventamos:

No momento da apreciação, vivemos de novo o momento em que o Criador viu e reteve a similitude oculta... Reeditamos o ato criador e nós mesmos fazemos de novo a descoberta... O grande poema e o teorema profundo são novos para cada leitor e no entanto são as suas próprias experiências, porquanto ele próprio as recria. Eles são as marcas da unidade na variedade, e no instante em que a mente apreende isto para si, o coração falha uma batida (Bronowski *apud* Huntley, 1985, p.33, adaptado).

Isso explica o prazer de uma descoberta matemática, ou mesmo de uma demonstração concluída. Não é mesmo fascinante quando, por exemplo, um estudante ou um graduado consegue provar um resultado matemático, mesmo que já tenha sido provado várias outras vezes na história da humanidade?

A seguir, apresentamos alguns estudos sobre a beleza matemática na Educação Matemática. Nesse sentido, propomos intervenções pedagógicas, as quais podem ser motivadoras, seja por meio do caráter lúdico, seja por meio do belo.

3.2 Ferramentas para o ensino-aprendizagem de Matemática

Considerar a resolução de problemas como uma meta a ser alcançada consiste em uma concepção antiga no ensino-aprendizagem da Matemática. Esse é, em nossa opinião, um objetivo nobre; afinal, seria ruim se, após anos de estudo, um discente não tivesse ao menos um pouco de habilidade para resolver problemas. Nas palavras de Miguel (2005), "tomada como habilidade básica, a resolução de problemas é compreendida como uma competência mínima para que o indivíduo possa inserir-se no mundo do conhecimento e do trabalho." De fato, problemas ocorrem nas situações mais ordinárias da vida, tais como:

- É melhor abastecer um automóvel com gasolina ou com álcool?
- Pago à vista com desconto ou de forma parcelada com juros?
- Devo comprar um carro ou andar de Uber e aplico as economias?
- Qual é a forma mais bela? E a mais útil? Consigo alcançar as duas?
- Quais as frequências mais adequadas na composição de uma música?
- Qual é a trajetória mais rápida para ir de casa até o mercado?
- É melhor comprar um imóvel ou pagar aluguel e abrir uma empresa?
- Será que o troco devolvido pela operadora de caixa está correto?
- Qual porcentagem da energia gasta em determinado mês proveio do chuveiro?

Apesar de sua importância, a resolução de problemas, por vezes, é tratada de forma bastante desmotivadora nas escolas. Focam-se as energias em processos de memorização desvinculados de situações práticas ou lúdicas, de maneira que não há uma aprendizagem significativa. Nesse contexto o aluno busca memorizar para fazer a prova e, após este momento avaliativo, o conteúdo esvai-se. Podemos, pois, nos perguntar: dessa maneira, o que se aprende?

Segundo Miguel (2005),

uma segunda concepção de resolução de problemas toma-a como processo, isto é, centra o enfoque nos procedimentos usados pelos alunos para chegar à resposta, enquanto esta perde a sua importância; trata-se de aplicar conhecimentos previamente adquiridos a situações novas, âmbito do clássico problema da transferência.

Concordamos em parte com esta segunda concepção de resolução de problemas: é essencial considerar o processo para a resolução de um problema. Porém, a resposta do problema não pode perder toda a sua importância; apenas não deve ser nossa única preocupação, se almejamos educar por essa via. E como alcançar esse equilíbrio? Defendemos que uma das maneiras é criar atividades e meios que oportunizem o alcance de tais objetivos: situações inovadoras, carregadas de significado, sejam elas pelo caráter lúdico, sejam pelo belo. Motivados por esse desafio, daremos algumas contribuições.

3.2.1 Motivando por meio do lúdico: "mágica com números"

Na 66ª edição da Revista do Professor de Matemática, publicada pela Sociedade Brasileira de Matemática, na seção "Em classe", Bonfim (2008) propõe uma brincadeira, que, em nossa opinião, colabora com as ideias defendidas sobre a resolução de problemas. Nas palavras da própria autora:

Neste artigo propomos uma interessante "brincadeira" cuja aplicação em sala de aula instiga a curiosidade do aluno e, possivelmente, propicia a abordagem de alguns temas da teoria dos números, propriedades da sequência de Fibonacci, e algumas questões de convergência.

Esses possíveis temas seriam de interessante abordagem para estudantes dos anos finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio, ainda que de forma superficial. Não seria possível, por exemplo, falar formalmente sobre convergência na primeira etapa citada, entretanto faria-se apropriado trabalhar com desigualdades de frações.

Partamos, então, para a atividade propriamente dita. Acompanhe os passos a seguir:

1. Conceda aos(às) estudantes uma folha com doze linhas em branco, sendo enumeradas de 1 a 12; uma tabela também é uma boa opção;
2. Solicite a cada um(a) que escolha dois números inteiros, entre 1 e 20, por exemplo, e que anote-os nas duas primeiras linhas;
3. Em seguida, peça que os(as) alunos(as) escrevam, da terceira linha até a décima, a soma dos números registrados nas duas linhas anteriores;
4. Depois, diga para eles(as) somarem os números que constam nas dez linhas e escreverem o resultado na 11ª linha;
5. Por fim, peça que os(as) estudantes façam a divisão do décimo número pelo nono e escrevam o resultado na 12ª linha.

É possível que o(a) docente "advinhe" duas coisas, o que pode motivar e instigar os(as) estudantes. A primeira delas é a soma dos números das dez linhas, desde que eles lhe forneçam o elemento da 7ª linha. Basta que o docente multiplique o valor fornecido por 11. Vejamos por que isso é válido para quaisquer dois inteiros iniciais x e y escolhidos. Ao realizarmos a soma dos números de duas linhas para encontrar o elemento da próxima nos deparamos com:

Tabela 3.1: "Mágica com números" para os valores iniciais x e y

1.	x
2.	y
3.	$x + y$
4.	$x + 2y$
5.	$2x + 3y$
6.	$3x + 5y$
7.	$5x + 8y$
8.	$8x + 13y$
9.	$21x + 34y$
10.	$34x + 55y$

Fonte: Elaborado pelo autor.

Quando somamos as expressões das dez linhas, obtemos $55x + 88y$, que é igual a $11(5x + 8y)$, ou seja, a soma corresponde a onze vezes o valor da sétima linha, independentemente dos valores iniciais x e y escolhidos.

Observamos que até aqui já se pode aplicar a brincadeira, com proveito, para estudantes do 6º ano, desenvolvendo conceitos de aritmética e modelagem matemática via manipulação algébrica de símbolos.

A segunda "adivinhação" seria a da razão entre o elemento da linha 10 e o da linha 9, com duas casas decimais, sendo que, agora, não é mais necessário que seja fornecido nenhum elemento ao(à) docente. Esse quociente será igual a 1,61, quaisquer que sejam os dois números iniciais.

Se a turma já for do 8º ano, a explicação da divisão da linha 10 pela linha 9 exigiria trabalhar conteúdos um pouco mais complexos, tais como comparação de frações genéricas. Em outras palavras, faria-se uso da seguinte propriedade:

Propriedade 24. Se a, b, c e d são números reais positivos tais que $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, então vale que $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.

Demonstração. Da hipótese, temos que $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$. Multiplicando ambos os membros por $bd > 0$, segue que $ad < bc$. Somando cd em ambos os membros, ficamos com $ad + cd < bc + cd$ e, portanto, $d(a + c) < c(b + d)$. Finalmente, dividindo ambos os membros por $d(b + d) > 0$, obtemos a seguinte desigualdade:

$$\frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}.$$

De maneira completamente análoga, prova-se que $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d}$. ■

Diferentes aspectos de frações foram trabalhados nesta demonstração, desde as operações até o uso de certas propriedades, em um contexto no qual eles são justificados. Estudá-las isoladamente nos parece não fazer muito sentido; ademais, já foi constatado que tal abordagem não cativa a maior parte dos(as) estudantes. Conforme a Base Nacional Comum Curricular,

as técnicas de resolução de equações e inequações, inclusive no plano cartesiano, devem ser desenvolvidas como uma maneira de representar e resolver determinados tipos de problema, e não como objetos de estudo em si mesmos (Brasil, 2018, p. 271).

Voltando à atividade, temos que

$$\frac{21}{13} = 1,\overline{615384} \quad \text{e} \quad \frac{34}{21} = 1,\overline{619047}$$

e, portanto,

$$\frac{21}{13} < \frac{34}{21} \Rightarrow \frac{21x}{13x} < \frac{34y}{21y}.$$

Usando a Propriedade 24, concluímos que o resultado da divisão do elemento da linha 10 pelo da linha 9, isto é, a fração $\frac{21x + 34y}{13x + 21y}$ está entre os números $\frac{21}{13}$ e $\frac{34}{21}$, os quais independem dos valores iniciais x e y ; seu valor, com duas casas decimais, é 1,61.

Mas o que isso tem a ver com a sequência de Fibonacci? É o que veremos a seguir.

Note que, na brincadeira proposta, o processo de obtenção da lista de números é semelhante ao empregado na construção da sequência de Fibonacci, diferindo-se pelo fato de que seus dois primeiros elementos são números aleatórios e não necessariamente iguais a 1. De fato, observe que os elementos de tal sequência aparecem como coeficientes de y e de x .

Caso queiramos impressionar ainda mais os(as) estudantes, podemos solicitar que avancem na lista construída, até a 25ª linha. A partir de operações corretas, obterão o resultado das expressões $17711x + 28657y$ e $28657x + 46368y$ para as linhas 24 e 25, respectivamente.

Logo, usando a Propriedade 24, temos que

$$\frac{46368}{28657} = \frac{46368y}{28657y} < \frac{28657x + 46368y}{17711x + 28657y} < \frac{28657x}{17711x} = \frac{28657}{17711}.$$

Como

$$\frac{46368}{28657} \approx 1,61803398 \quad \text{e} \quad \frac{28657}{17711} \approx 1,61803399,$$

então o quociente de $28657x + 46368y$ por $17711x + 28657y$, com sete casas decimais, é igual a 1,6180339.

Desse modo, o(a) docente poderá "adivinhar" o quociente de dois elementos sucessivos da lista construída com um grau de precisão melhor, sem o conhecimento de x e y ou de qualquer outra informação. Poderá também ser entregue um envelope lacrado contendo a aproximação antes de a brincadeira ser iniciada. Seria interessante se os(as) alunos(as), com os próprios esforços e com a mediação do(a) professor(a), descobrissem que não há nada de adivinhação nessa atividade. Isso pode ser feito partindo dos números genéricos iniciais x e y , como feito anteriormente neste trabalho.

Uma pergunta natural que surge é a seguinte: se continuarmos calculando cada vez mais termos, de qual número os quocientes de termos sucessivos aproximarão-se? Já vimos, por meio de multiplicações e divisões de termos na fração Q_n , na Seção 2.2, que a resposta a essa pergunta é o número de ouro. Mas há outra forma de verificar isto; vejamos.

Estamos lidando com frações do tipo

$$A_n = \frac{f_{n+1} \cdot X + f_{n+2} \cdot Y}{f_n \cdot X + f_{n+1} \cdot Y},$$

que pela Propriedade 24 está compreendida entre as frações $\frac{f_{n+1}}{f_n}$ e $\frac{f_{n+2}}{f_{n+1}}$.

Além disso, já provamos que $\frac{f_{k+1}}{f_k} \rightarrow \phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, quando $k \rightarrow \infty$. Portanto, concluímos que

$$A_n \rightarrow \phi, \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

3.2.2 Motivando por meio do lúdico: o jogo de Wythoff

Outra atividade lúdica que pode resultar em boas discussões matemáticas é o jogo de Wythoff. Ele, da forma como está disposto neste trabalho, é mais indicado para turmas do nível superior, embora as(os) docentes (de Matemática) da Educação Básica possam adaptá-lo para suas realidades e para os contextos de seus(suas) estudantes, de forma a variar o grau de aprofundamento na Matemática por trás da brincadeira. De fato, o jogo é acessível a qualquer pessoa que saiba contar.

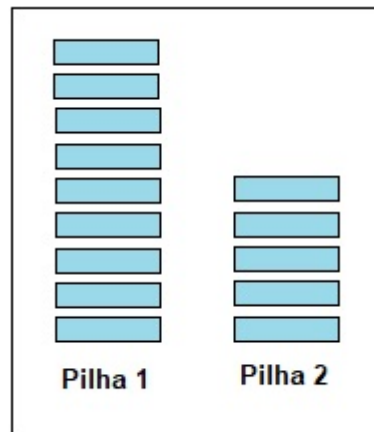
E em que consiste o jogo? Observe sua descrição: há duas pilhas de fichas, digamos pilha 1 e pilha 2; cada jogador (num total de dois), na sua vez de jogar, pode fazer uma, e somente uma, das ações a seguir:

- retirar qualquer quantidade positiva de fichas da pilha 1 (inclusive todas);
- retirar qualquer quantidade positiva de fichas da pilha 2 (inclusive todas);
- retirar a mesma quantidade positiva de fichas de ambas as pilhas.

O vencedor será aquele que retirar as últimas fichas, deixando vazias ambas as pilhas. Vejamos um exemplo.

Exemplo 25. *Suponhamos que uma rodada do jogo inicia com 9 fichas na pilha 1 e 5 na 2. Visualize a representação a seguir:*

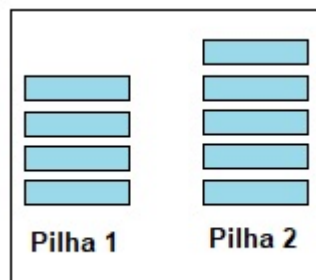
Figura 3.6: Situação 1 de uma partida de Wythoff



Fonte: Elaborado pelo autor.

O jogador A retira, suponhamos, 5 fichas da pilha 1, deixando para o jogador B a situação seguinte:

Figura 3.7: Situação 2 de uma partida de Wythoff



Fonte: Elaborado pelo autor.

Na sequência, o jogador B retira 3 fichas de ambas as pilhas, deixando para seu oponente a seguinte situação:

Figura 3.8: Situação 3 de uma partida de Wythoff



Fonte: Elaborado pelo autor.

Nesta situação, não importa o que o jogador A faça, ele perderá. Isso, é claro, se o jogador B não desperdiçar sua chance de vencer (afinal, vamos construir nossos estudos seguintes tendo essa observação como base).

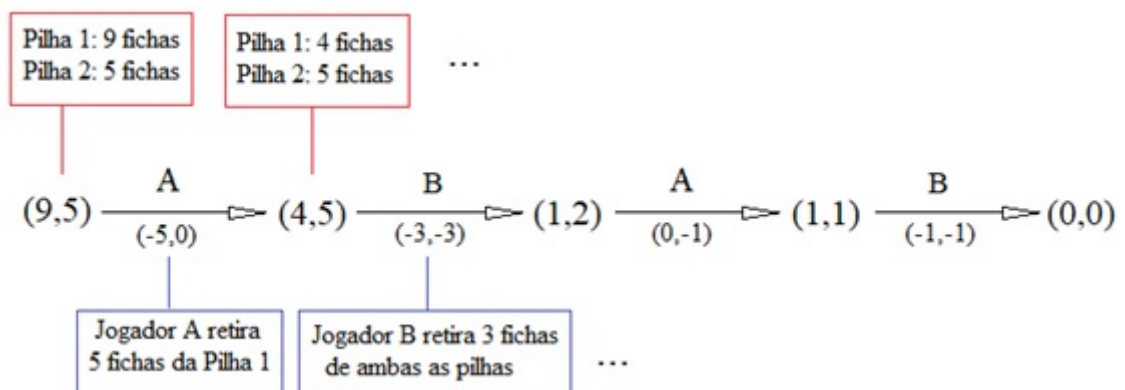
De fato, as opções do primeiro são:

- retirar a única ficha da pilha 1 e neste caso o jogador B vencerá retirando as duas fichas restantes da pilha 2;
- retirar uma ficha da pilha 2 e, neste caso, o jogador B vencerá retirando 1 ficha de cada pilha;
- retirar as duas fichas da pilha 2, de onde o jogador B vencerá retirando a última ficha da pilha 1;
- finalmente, retirar uma ficha de ambas as pilhas e, então, o jogador B vencerá retirando a última ficha da pilha 2.

Vejamos formas alternativas de representar tal jogo.

- Representação usando coordenadas cartesianas, em que a abscissa e a ordenada do par (x, y) representam o número de fichas na primeira e na segunda pilhas, respectivamente.

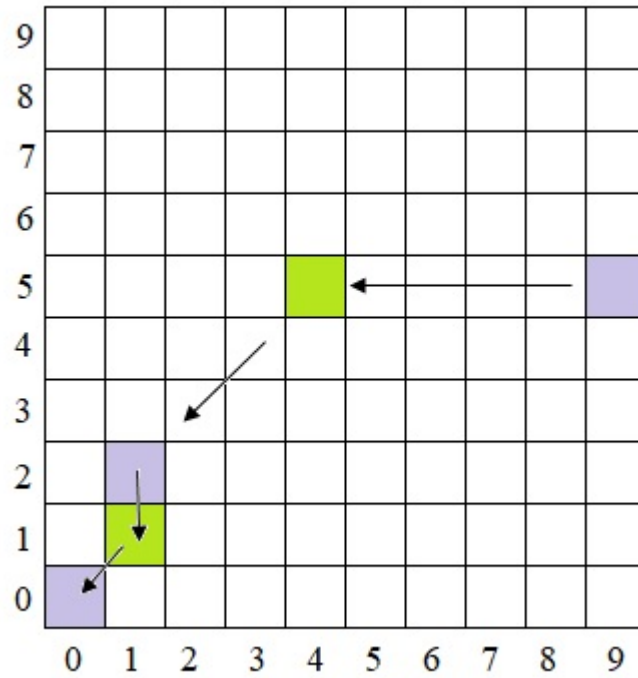
Figura 3.9: Representação com coordenadas



Fonte: Elaborado pelo autor.

- *Representação usando o plano cartesiano; no caso da figura a seguir, a cor roxa representa a situação das pilhas na vez do jogador A e a verde, como o B depara-se antes de jogar.*

Figura 3.10: Representação no plano cartesiano



Fonte: Elaborado pelo autor.

Note, pelas regras do jogo, que os únicos movimentos permitidos são:

- M_1 : Horizontais para a esquerda (quando o jogador tira apenas ficha(s) da pilha 1);
- M_2 : Verticais para baixo (quando o jogador retira apenas ficha(s) da pilha 2);
- M_3 : Descidas ao longo das diagonais, apontando para a parte inferior esquerda do plano (quando o jogador retira o mesmo número de fichas de ambas as pilhas).

O objetivo de um jogador é conduzir seu oponente, após algumas retiradas, à posição $(0,0)$, considerada como uma posição perdedora trivial. As definições de posições vencedoras e de posições perdedoras não triviais são feitas de forma indutiva. Precisamente:

Definição 26. *Uma posição (m,n) é dita ser vencedora se existe uma jogada que permita levar o oponente a uma posição perdedora.*

Definição 27. Uma posição (m, n) é dita ser perdedora não-trivial se qualquer jogada válida levar o oponente a posições vencedoras.

Na tabela acima, como $(0, 0)$ é perdedora, então:

- todas as posições da forma $(n, 0)$ são vencedoras, pois o jogador, em sua vez de jogar, poderá retirar n fichas da pilha 1, conduzindo o oponente à posição perdedora trivial $(0, 0)$;
- todas as posições da forma $(0, m)$ são vencedoras, pois o jogador, em sua vez de jogar, poderá retirar m fichas da pilha 2, conduzindo o oponente à posição perdedora trivial $(0, 0)$;
- todas as posições da forma (n, n) , com $n > 0$, são vencedoras, pois o jogador, em sua vez de jogar, poderá retirar n fichas de ambas as pilhas, conduzindo o oponente à posição perdedora trivial $(0, 0)$.

Na tabela abaixo, indicamos por P a única posição perdedora ainda identificada e por V as posições vencedoras até o momento identificadas:

Figura 3.11: Primeiras posições vencedoras

9	V								V	
8	V							V		
7	V						V			
6	V					V				
5	V				V					
4	V			V						
3	V		V							
2	V	V								
1	V	V								
0	P	V	V	V	V	V	V	V	V	
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Fonte: Elaborado pelo autor.

As posições $(1, 2)$ e $(2, 1)$ são as nossas primeiras posições perdedoras não-triviais identificadas. De fato, partindo destas posições e fazendo qualquer movimento válido (isto é, fazendo qualquer jogada que respeite as regras do jogo) o oponente será conduzido a posições vencedoras.

Marcando as posições perdedoras $(1, 2)$ e $(2, 1)$ em nossa tabela, veremos que elas gerarão outras posições vencedoras, a saber, as posições dos tipos:

- $(m, 1)$, com $3 \leq m \leq 9$;
- $(1, n)$, com $3 \leq n \leq 9$;
- $(m, 2)$, com $3 \leq m \leq 9$;
- $(2, n)$, com $3 \leq n \leq 9$;
- $(m + 1, m)$, com $3 \leq m \leq 8$;
- $(n, n + 1)$, com $3 \leq n \leq 8$,

conforme ilustrado na tabela seguinte. Note que n e m começam a variar a partir de 3 porque as posições em que tais variáveis assumem os valores 1 e 2 já foram consideradas.

Figura 3.12: Mais vencedoras e primeiras perdedoras não-triviais

9	V	V	V						V	V
8	V	V	V					V	V	V
7	V	V	V				V	V	V	
6	V	V	V			V	V	V		
5	V	V	V		V	V	V			
4	V	V	V	V	V	V				
3	V	V	V	V	V					
2	V	P	V	V	V	V	V	V	V	V
1	V	V	P	V	V	V	V	V	V	V
0	P	V	V	V	V	V	V	V	V	V
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Continuando com este processo (factível para tabelas finitas e relativamente pequenas), podemos completar a tabela acima, com todas as posições bem caracterizadas quanto a serem vencedoras ou perdedoras.

Figura 3.13: Tabela cheia

9	V	V	V	V	V	V	V	V	V	
8	V	V	V	V	V	V	V	V	V	
7	V	V	V	V	P	V	V	V	V	
6	V	V	V	V	V	V	V	V	V	
5	V	V	V	P	V	V	V	V	V	
4	V	V	V	V	V	V	P	V	V	
3	V	V	V	V	V	P	V	V	V	
2	V	P	V	V	V	V	V	V	V	
1	V	V	P	V	V	V	V	V	V	
0	P	V	V	V	V	V	V	V	V	
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Fonte: Elaborado pelo autor.

Queremos, entretanto, responder se as posições $(345, 987)$ e $(1925, 1437)$, por exemplo, são perdedoras ou vencedoras, visto que almejamos uma generalização. Claro que, se tivermos paciência, poderemos continuar o processo acima descrito para construir tabelas tão grandes quanto desejarmos, de modo a classificarmos as posições como vencedoras ou perdedoras. Porém, esta não seria uma solução que os(as) matemáticos(as) considerariam elegante. O ideal seria uma fórmula que fornecesse a resposta "perdedora" ou "vencedora" para qualquer posição $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ e é isso que nos propomos a fazer agora.

Vemos na tabela que as posições perdedoras são em número bem menor que as posições vencedoras e, assim, optaremos por classificar as primeiras por meio de uma fórmula. Claro que, classificando as perdedoras, estaremos também classificando as vencedoras. Seguem algumas considerações iniciais:

1. Se (m, n) é uma posição perdedora, então (n, m) também o é. De fato, não há diferença essencial em um jogo onde a primeira pilha possui m fichas e a segunda pilha contém n fichas, de outro jogo em que a primeira possui n e a segunda m . Ou seja, a tabela é

simétrica com relação à sua diagonal principal. Sendo assim, optaremos por classificar as posições perdedoras (m, n) em que $m > n$. Se aumentarmos um pouco a tabela acima e listarmos as primeiras posições perdedoras, excetuando a trivial $(0,0)$, obteremos, ao continuarmos a construção da tabela:

- $(x_1, y_1) = (2, 1)$
- $(x_2, y_2) = (5, 3)$
- $(x_3, y_3) = (7, 4)$
- $(x_4, y_4) = (10, 6)$
- $(x_5, y_5) = (13, 8)$
- $(x_6, y_6) = (15, 9)$
- $(x_7, y_7) = (18, 11)$
- $(x_8, y_8) = (20, 12)$

Também podemos organizar esta lista na forma seguinte:

Tabela 3.2: Oito posições perdedoras

n	1	2	3	4	5	6	7	8	...
x_n	2	5	7	10	13	15	18	20	...
y_n	1	3	4	6	8	9	11	12	...

Fonte: Elaborado pelo autor.

2. Observando a lista de pontos acima, parece ser verdade que cada número natural aparece uma e somente uma vez, ou como ordenada ou como abscissa de algum desses pontos.

Além disso, note as diferenças a seguir:

- $x_1 - y_1 = 1$

- $x_2 - y_2 = 2$
- $x_3 - y_3 = 3$
- $x_4 - y_4 = 4$
- $x_5 - y_5 = 5$
- $x_6 - y_6 = 6$
- $x_7 - y_7 = 7$
- $x_8 - y_8 = 8$

o que nos leva a conjecturar que $x_n - y_n = n$.

3. Outra observação é que, se desenharmos os pontos correspondentes às posições perdidas, eles parecem estar próximos de uma reta que passa pela origem, conforme sugere a Figura 3.13 acima. Ou seja, parecem existir números reais α e β tais que

$$(x_n, y_n) \approx (\alpha \cdot n, \beta \cdot n)$$

Mais ainda, supondo $x_n - y_n = n$, então devemos ter que $(\alpha - \beta) \cdot n \approx n$, de onde segue que $\alpha - \beta \approx 1$. Por esta razão, iremos buscar uma solução em que

$$\alpha - \beta = 1,$$

isto é,

$$\alpha = \beta + 1.$$

Como tais números α e β podem não ser inteiros, talvez seja promissor conjecturarmos que a solução tem o seguinte formato:

$$x_n = \lfloor \alpha \cdot n \rfloor \text{ e } y_n = \lfloor \beta \cdot n \rfloor,$$

em que $\lfloor r \rfloor$ designa a parte inteira de um número real qualquer r .

Mas, agora perguntamos: quem deveriam ser os números α e β ? Para responder vamos explorar um pouco mais a segunda observação feita anteriormente.

Sob quais condições as sequências

$$S_\alpha : \lfloor \alpha \rfloor, \lfloor 2 \cdot \alpha \rfloor, \dots, \lfloor n \cdot \alpha \rfloor, \dots$$

$$S_\beta : [\beta], [2 \cdot \beta], \dots, [n \cdot \beta], \dots$$

geram o conjunto dos números naturais? Uma condição suficiente é dada por um clássico resultado da Teoria dos Números, conhecido como “Sequência de Beatty”.

Teorema 28 (Sequência de Beatty). *Sejam α e β números irracionais positivos tais que*

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1.$$

$$\text{Então, } S_\alpha \cup S_\beta = \mathbb{N} \text{ e } S_\alpha \cap S_\beta = \emptyset.$$

Ou seja, cada número natural aparece exatamente uma vez em uma, e somente uma, das sequências acima.

Demonstração. Provemos inicialmente que $S_\alpha \cap S_\beta = \emptyset$.

Suponha, por absurdo, que exista um inteiro $n \in S_\alpha \cap S_\beta$. Então, existirão números naturais k e r tais que $[k\alpha] = n = [r\beta]$. Logo,

$$n \leq k\alpha < n+1 \text{ e } n \leq r\beta < n+1.$$

Como α e β são irracionais, podemos afirmar ainda que

$$n < k\alpha < n+1 \text{ e } n < r\beta < n+1.$$

Dividindo por k e r , respectivamente, obtemos:

$$\frac{n}{k} < \alpha < \frac{n+1}{k} \text{ e } \frac{n}{r} < \beta < \frac{n+1}{r}.$$

Invertendo estas desigualdades concluímos, então, que

$$\frac{k}{n+1} < \frac{1}{\alpha} < \frac{k}{n} \text{ e } \frac{r}{n+1} < \frac{1}{\beta} < \frac{r}{n}.$$

Somando estas desigualdades e lembrando que $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$, deduzimos que

$$\frac{k+r}{n+1} < 1 < \frac{k+r}{n}.$$

Estas desigualdades implicam que $n < k+r < n+1$, ou seja, $k+r$ é um inteiro entre dois inteiros consecutivos, o que é um absurdo. Isto conclui a prova de que $S_\alpha \cap S_\beta = \emptyset$.

Provemos agora que $\mathbb{N} = S_\alpha \cup S_\beta$. Para isso, seja $n \in \mathbb{N}$.

Como $\mathbb{R} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n} \right)$, então existe um único $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\frac{k-1}{n} < \frac{1}{\alpha} < \frac{k}{n}$.

Note que, como $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$ e α e β são números positivos, então $\frac{1}{\alpha} < 1$, de onde segue que $\frac{k-1}{n} < 1$ e, portanto, $k-1 < n$. Com esta desigualdade, podemos concluir que $\frac{k}{n+1} \in \left(\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n} \right)$; veja:

$$\frac{k-1}{n} < \frac{k}{n+1} \iff (n+1)(k-1) < nk \iff nk - n + k - 1 < nk \iff k - 1 < n$$

Como $\frac{1}{\alpha} \in \left(\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n} \right)$, então temos dois casos excludentes:

1º caso: $\frac{k}{n+1} < \frac{1}{\alpha} < \frac{k}{n}$.

Invertendo as desigualdades, obtemos:

$$\frac{n}{k} < \alpha < \frac{n+1}{k}.$$

Ao multiplicarmos por k , concluimos que

$$n < k\alpha < n+1.$$

Logo, $n = \lfloor k\alpha \rfloor$, ou seja, $n \in S_\alpha$.

2º caso: $\frac{k-1}{n} < \frac{1}{\alpha} < \frac{k}{n+1}$.

Multiplicando por -1 , obtemos:

$$-\frac{k}{n+1} < -\frac{1}{\alpha} < -\frac{k-1}{n}.$$

Quando somamos 1, deduzimos ainda que

$$1 - \frac{k}{n+1} < 1 - \frac{1}{\alpha} < 1 - \frac{k-1}{n}.$$

Lembrando que $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$, segue que

$$\frac{n-k+1}{n+1} < \frac{1}{\beta} < \frac{n-k+1}{n}.$$

Dividamos, agora, por $n-k+1$, o qual é positivo devido à condição $\frac{k-1}{n} < \frac{1}{\alpha} < 1$:

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{(n-k+1)\beta} < \frac{1}{n}.$$

Invertendo novamente, chegamos em $n < (n-k+1)\beta < n+1$, de onde segue que $n = \lfloor (n-k+1)\beta \rfloor$, ou seja, $n \in S_\beta$.

■

Observe agora o seguinte: como $\alpha = \beta + 1$, então a condição $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$ fornece-nos que

$$\frac{1}{\beta+1} + \frac{1}{\beta} = 1$$

e, equivalentemente,

$$\beta^2 - \beta - 1 = 0,$$

cujas raízes positivas é

$$\beta = \frac{1 + \sqrt{5}}{2},$$

que é a razão áurea.

É curioso o fato de a razão áurea "intrinsecar-se" assim, de maneira tão inusitada, nos contextos mais variados e aparentemente desconexos. Nada indicava, quando propusemos o Jogo de Wythoff, qualquer vínculo com a razão áurea, de modo que esse desfecho é bastante instigador.

Escrevendo de outra maneira, assumidas as condições da Sequência de Beatty, obtemos que

$$\beta \approx 1,61803$$

e

$$\alpha \approx 2,61803.$$

Nossa argumentação investigativa anterior não é (e nem pode ser considerada) uma prova rigorosa, mas apenas uma trajetória relativamente natural na busca de uma fórmula que forneça as posições perdedoras diretamente em termos de n . O leitor interessado poderá ver a demonstração do teorema que enunciamos em seguida em Severo ([s. d.]).

Teorema 29. *As posições perdedoras (x_n, y_n) do jogo de Wythoff, com $y_n < x_n$, são dadas por*

$$(x_n, y_n) = (\lfloor (\beta + 1) \cdot n \rfloor, \lfloor \beta \cdot n \rfloor),$$

em que $\beta = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ é a razão áurea.

Agora, partiremos de abordagens lúdicas para duas cujos conteúdos fazem um apelo para apreciação estética e o belo na Matemática. São eles: o retângulo áureo e a espiral logarítmica.

3.2.3 Motivando por meio do belo: o retângulo áureo

Nós já estudamos a razão áurea e algumas de suas propriedades (veja a Seção 2.6). Agora veremos duas de suas diversas aplicações no mundo real, o que pode ser motivador em uma sala de aula.

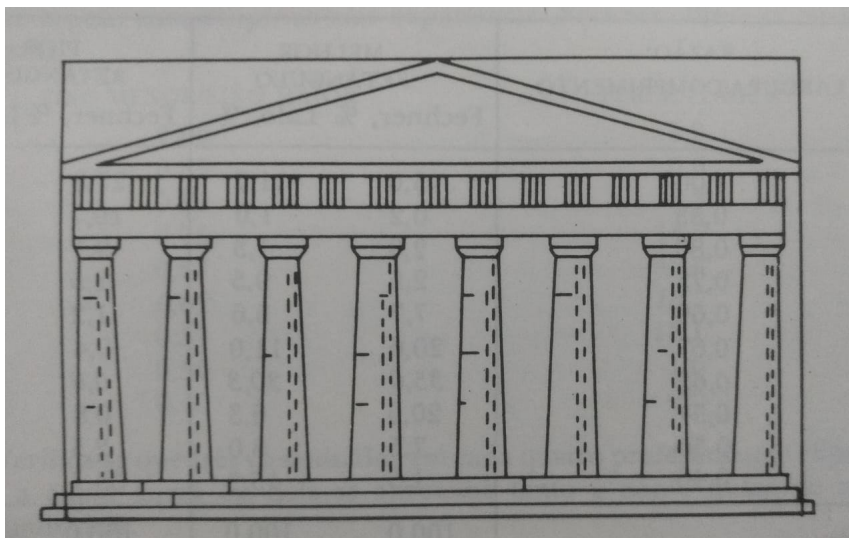
É razoável afirmar que escultores e arquitetos gregos incorporavam essa razão em suas obras. Fídias, um famoso escultor grego que viveu em Atenas, é um exemplo (Fídias, 2021), o que é ilustrado pelas proporções do Partenon. Ele foi convidado para os principais trabalhos do monumento por Péricles (495 a.C. - 429 a.C.), o vigente líder político e militar de Atenas, em um período entre guerras. O governante estimulou a literatura e as artes, de forma que a cidade-Estado passou a ser o centro cultural da Grécia (Carvalho, 2021a).

Figura 3.14: Vista frontal e lateral do Partenon



Fonte: Pártenon ([s.d.]).

Figura 3.15: Desenho frontal do Paternon, enquadrado em um retângulo áureo



Fonte: Huntley (1985).

Esse tipo de revelação é estimulante, de acordo com Huntley (1985, p. 67): "É o descobrimento destas relações insuspeitadas, com suas pequenas surpresas e prazeres de realização menores, que constitui parte do fascínio da matemática". O mesmo autor, no capítulo V, intitulado "A arte e o retângulo áureo", busca discernir os elementos que podem desvendar a beleza latente na matemática elementar. Para tal, ele traz duas definições de beleza. A primeira, do filósofo-teólogo Tomás de Aquino (Santo Tomás de Aquino, 1225 - 1274), é a seguinte: "A beleza é aquilo que agrada à mera contemplação". Já a segunda, sem autor informado, é: "Beleza é uma palavra de Deus."

Aos leitores que julguem a Matemática como um deserto estéril, desenvolvidor somente de pobre material de apelo estético, ou que, por não procurar embaixo da beleza superficial, só encontrem recompensas superficiais, Huntley (1985) sugere que são deles mesmos a culpa. Partamos agora para o retângulo áureo, conforme a mesma obra (p. 67-68):

Definição 30 (Retângulo áureo). *Um retângulo cuja medida da base dividida pela medida da altura é igual à razão áurea é chamado de retângulo áureo.*

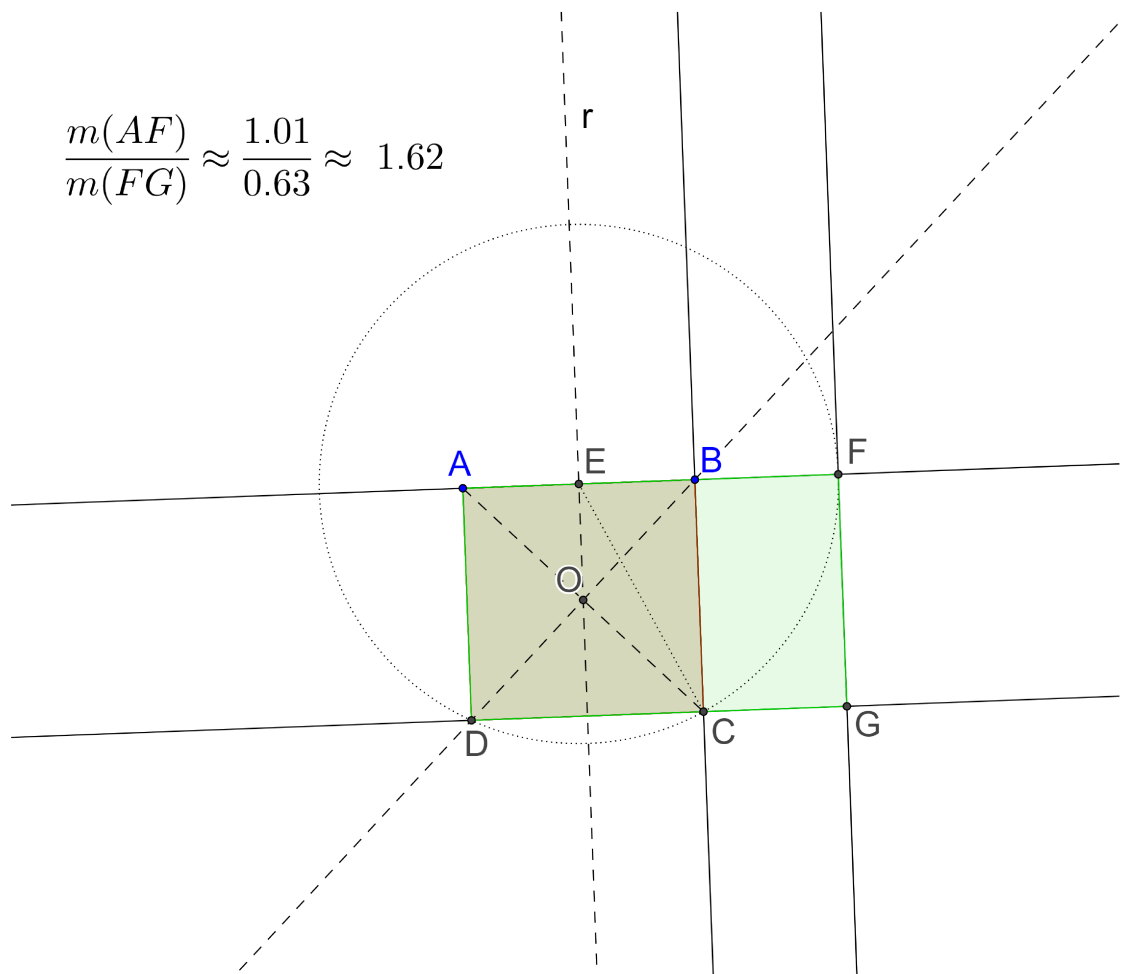
Mostremos, pois, uma maneira de se construir um retângulo áureo, utilizando régua e compasso.

Proposição 31. *Se for realizado o processo a seguir, partindo de um segmento $\overline{AB}$, então o retângulo AFGD é um retângulo áureo:*

1. *Trace um segmento $\overline{AB}$ qualquer;*
2. *Trace a mediatriz r e marque o ponto médio E , ambos referentes ao segmento $\overline{AB}$;*

3. Trace a perpendicular à reta AB passando por B ;
4. Marque C na perpendicular, de modo que $m(BC) = m(AB)$;
5. Trace o segmento $\overline{AC}$; seja O sua interseção com a reta r ;
6. Trace a reta BO e marque sobre ela o ponto D , de maneira que $m(BO) = m(OD)$;
7. Trace os segmentos $\overline{DC}$ e $\overline{DA}$;
8. Construa a circunferência de centro E e raio $m(EC)$; seja F sua interseção com a reta AB .
9. Trace a perpendicular à reta AF , passando por F ;
10. Marque o ponto G , interseção dessa perpendicular com a reta DC .

Figura 3.16: Construção do retângulo áureo



Fonte: Elaborado pelo autor.

Demonstração. Seja $AB = x$. Logo, $m(EB) = \frac{x}{2}$ e $m(BC) = x$, por construção. Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo EBC , temos que

$$m(EC)^2 = x^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 \Rightarrow m(EC) = \frac{\sqrt{5}x}{2}.$$

Isso implica, também por construção, que $EF = \frac{\sqrt{5}x}{2}$ e, portanto,

$$AF = EF + AE = \frac{\sqrt{5}x}{2} + \frac{x}{2} = \frac{(\sqrt{5} + 1)x}{2}.$$

Por outro lado, como o retângulo $AFGD$ tem a mesma altura que o quadrado $ABCD$, então $FG = x$.

$$\therefore \frac{AF}{FG} = \frac{\frac{(\sqrt{5}+1)x}{2}}{x} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = \phi.$$

Concluimos, pois, que $AFGD$ é um retângulo áureo. ■

Outra questão a ser explanada em relação ao retângulo áureo é que, subtraindo-se dele um quadrado "bem encaixado" em uma de suas extremidades, obtemos outro retângulo áureo. É o que enunciamos na proposição a seguir.

Proposição 32. *Se for realizado o processo da proposição 31, então $BFGC$ é um retângulo áureo.*

Demonstração. Usando a mesma medida x para o segmento $\overline{AB}$, temos, por construção, que $m(FG) = x$.

Agora,

$$BF = EF - EB = \frac{\sqrt{5}x}{2} - \frac{x}{2} = \frac{(\sqrt{5} - 1)x}{2}.$$

Logo,

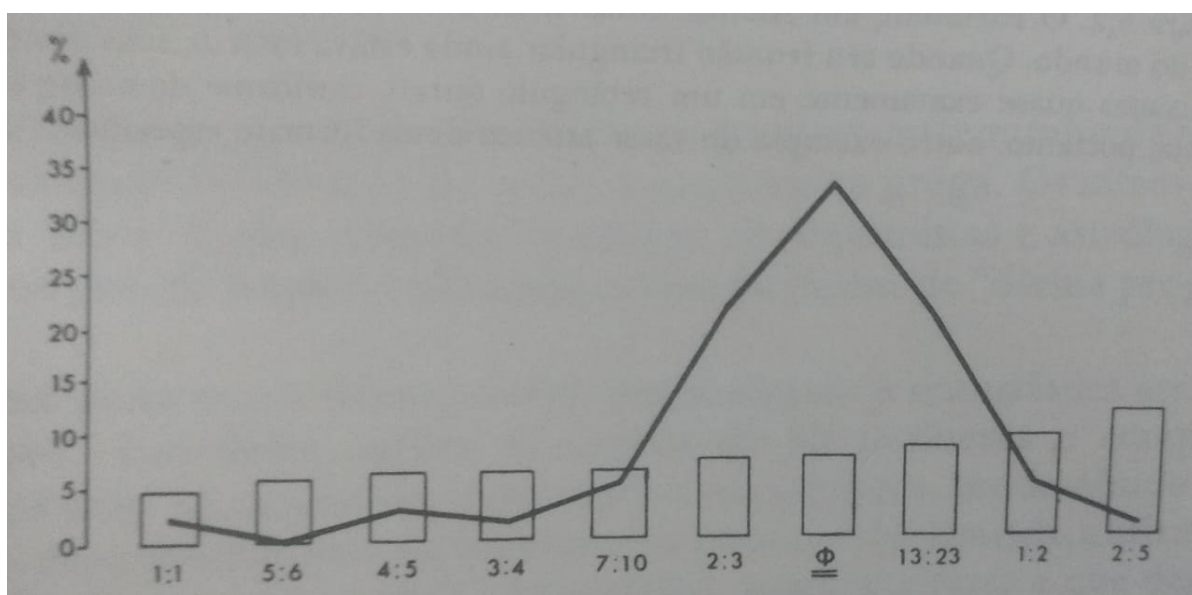
$$\frac{FG}{BF} = \frac{x}{\frac{(\sqrt{5}-1)x}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5} - 1} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \phi,$$

o que implica que $BFGC$ é um retângulo áureo. ■

Isso também mostra que, utilizando as mesmas notações, B é a divisão áurea de $\overline{AF}$, conforme a Definição 21. Isso porque $\frac{AF}{AB} = \frac{AB}{BF} = \phi$, já que $m(FG) = m(AB)$.

Um último comentário em relação ao retângulo áureo é a preferência popular por um tipo de retângulo parecido com o dele. O psicólogo alemão Gustav Fechner realizou uma pesquisa sobre o assunto, mensurando as razões (medida da base pela medida da altura) de retângulos que são conhecidos comumente, tais como "[...] cartas de baralho, janelas, blocos de papel de carta, capas de livros [...]" (Huntley, 1985, p. 70). Em outras palavras, ele buscou responder à pergunta: tomando diferentes formatos do polígono, qual deles é o preferido da população?

Figura 3.17: Gráfico de preferências com respeito ao formato do retângulo, a partir dos dados de Fechner



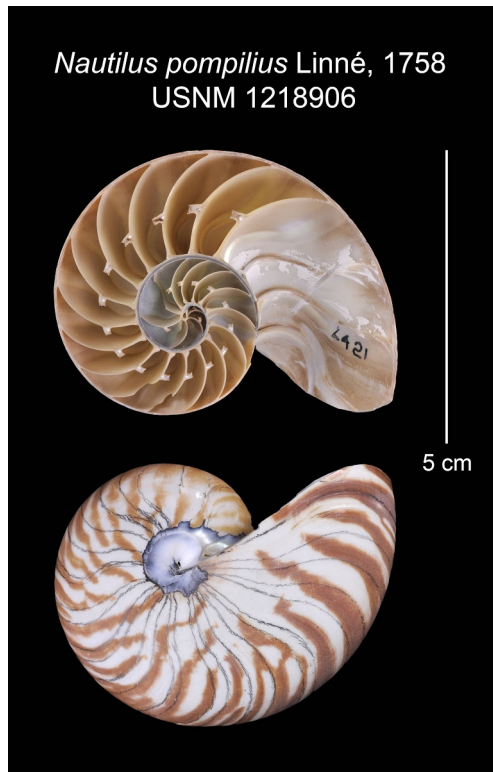
Fonte: Huntley (1985).

A conclusão foi a existência de um interesse estético especial pelo retângulo áureo. Votaram em formatos aproximados a este 75,6% dos entrevistados. Podemos arriscar que Fídias estaria incluso nessa porcentagem. Sigamos agora para a espiral logarítmica.

3.2.4 Motivando por meio do belo: a espiral logarítmica

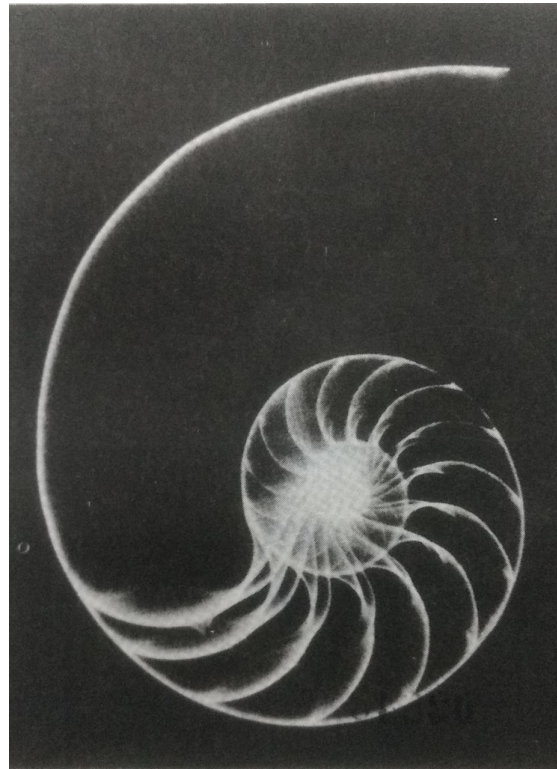
Uma outra (re)ocorrência natural da Sequência de Fibonacci que pode ser motivadora em uma sala de aula é o náutilo de câmaras. Conhecido cientificamente por *Nautilus pompilius*, é um animal do filo dos moluscos que vive na região do Indo-Pacífico (Nautilus, 2018) e cuja concha é composta de câmaras, em formato de espiral logarítmica (veja as figuras 3.18 e 3.19). O corpo fica contido na última câmara (a mais externa).

Figura 3.18: Náutilo de câmaras e o interior de sua concha



Fonte: Nautilus ([s.d.]).

Figura 3.19: Radiografia do náutilo de câmaras



Fonte: Huntley (1985).

Mas o que a espiral logarítmica tem a ver com a Sequência de Fibonacci? É o que veremos a seguir.

A espiral logarítmica também é denominada espiral equiangular e foi chamada de *spira mirabilis* por Jacob Bernoulli (1654 - 1705). Ele, de acordo com Carvalho (2021b), descobriu muitas propriedades dessa curva e gostou tanto dela que solicitou que em seu túmulo fosse gravado um desenho de tal espiral, além da frase "Eadem mutata resurgo", a qual significa "Embora mudada, ressurgir (a mesma)", parecendo fazer referência a uma propriedade que veremos mais adiante. O gravador, entretanto, desenhou uma espiral arquimediana; veja:

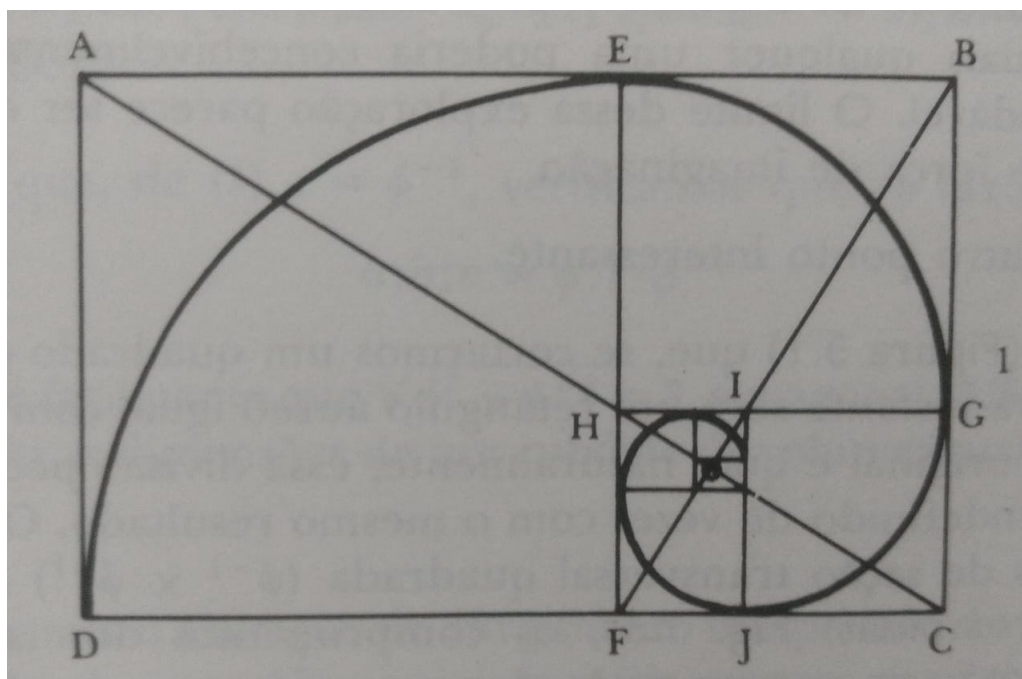
Figura 3.20: Espiral arquimediana na lápide de Jacob Bernoulli



Fonte: Carvalho (2021b).

Considere o retângulo áureo a seguir. Construiremos a espiral logarítmica a partir de um número indefinido de determinações de retângulos áureos. Lembre que esse tipo de retângulo possui a característica que, subtraindo-se um quadrado "bem encaixado" de sua extremidade, obtemos outro retângulo áureo. Mas podemos fazer a mesma coisa com este, de modo a obter um novo; e assim sucessivamente.

Figura 3.21: Construção da espiral logarítmica



Fonte: Carvalho (2021b).

Olhando agora para a figura acima, supomos inicialmente que E seja a divisão áurea de $\overline{AB}$. Traçando o segmento $\overline{EF}$, perpendicular a $\overline{AB}$ e com medida igual a $m(BC)$, conseguimos o quadrado $AEFD$, uma vez que $\frac{AB}{AE} = \phi$ e $\frac{AB}{BC} = \phi$. Já vimos que o retângulo resultante, $BCFE$, também é áureo (veja a Proposição 32). Neste ponto, repetimos o processo: tomamos a divisão áurea G de $\overline{BC}$ (e não de $\overline{CB}$) e traçamos $\overline{GH}$, perpendicular a $\overline{BC}$, de modo que $EBGH$ é um quadrado e $GCFH$ é um novo retângulo áureo. Na terceira vez, tomamos a divisão áurea J de $\overline{CF}$ e o segmento $\overline{JI}$, perpendicular a $\overline{CF}$. Repetimos essas etapas indefinidamente, até chegarmos ao "retângulo-limite" O , parecido com um ponto e denominado pólo da espiral equiangular que passa pelas seções áureas $D, E, G, J, \dots$

Note que sempre tomamos a divisão áurea oposta, pela diagonal de um quadrado, à anterior. Consideremos algumas características da figura 3.21, segundo Huntley (1985, p. 100-101):

1. Nas diagonais AC e BF , está contido um conjunto alternado de pontos da espiral retangular $ABCFH...$, pulando-se as divisões áureas.

Definição 33. *A espiral retangular relativa à espiral logarítmica da figura 3.21 é a união dos segmentos AB , BC , CF , FH , ...*

Observe que os comprimentos desses segmentos medem, respectivamente, ϕ , 1 , $\frac{1}{\phi}$, $\frac{1}{\phi^2}$, ... Isso pode ser obtido utilizando-se as definições de divisão áurea (Definição 21), de retângulo áureo (Definição 30) e uma propriedade deste (conforme a Proposição 32);

2. As diagonais AC e BF são perpendiculares mutuamente;
3. São colineares os pontos E , O e J , além dos pontos G , O e D ;
4. Os quatro ângulos retos no ponto O têm as retas EJ e DG por bissetrizes, de forma que estas são mutuamente perpendiculares;
5. $\frac{OA}{OB} = \frac{OB}{OC} = \frac{OC}{OF} = \frac{OF}{OH} = \frac{OH}{OI} = \dots$, pois os triângulos AOB , BOC , COF , FOH , HOI , ... são semelhantes dois a dois;
6. Observe agora os quadrados sucessivos da Figura 3.21. Eles formam uma Sequência de Fibonacci:

Se o menor quadrado mostrado da Figura [...] tem lado de comprimento d , o quadrado adjacente tem também lado de comprimento d ; o quadrado seguinte tem lado de comprimento $2d$, o seguinte $3d$ e assim por diante, resultando na série $1d, 1d, 2d, 3d, 5d, 8d, \dots$ (Huntley, 1985, p. 101);

7. A curva logarítmica pode crescer indefinidamente, para dentro ou para fora. Isso indica um outro sentido para construí-la: acrescentando quadrados maiores, de forma adequada (o primeiro a ser adicionado na figura teria $\overline{DC}$ como lado).

Por fim, outra propriedade curiosa da espiral logarítmica é que dois segmentos da curva, por mais diferentes que sejam em tamanho, possuem o mesmo formato. Isso quer dizer que, se aplicássemos um *zoom* nas convoluções "próximas" ao pólo, a cópia poderia ser encaixada em partes "maiores" da espiral. Essa característica também se aplica ao náutilo: embora a extensão das câmaras seja alterada, isso não ocorre com seus formatos.

4. A MATEMÁTICA E A TEOLOGIA

Pode ser instigador o título deste capítulo, mas defendemos que a Matemática e a Teologia possuem tantas ligações quantas não podemos imaginar. Afinal, às vezes, é preciso crer para compreender, mas também compreender para crer melhor. Esta é uma fórmula do Sermão 43 de Santo Agostinho, a qual "[...] consubstancia a fusão entre a razão grega e a fé judaica – marca do cristianismo, uma das marcas essenciais da civilização dita ocidental" (Fonseca, 2010).

Nesse itinerário, tomamos Kvasz (2007) como fonte principal. A seguir, há uma breve biografia do autor.

4.1 Ladislav Kvasz

Ladislav Kvasz é um matemático, filósofo e teórico da ciência da Eslováquia, o qual nasceu em 1862. É formado na Faculdade de Matemática, Física e Informática na Universidade Comenius (Bratislava). Defendeu sua tese de doutorado em 1995 na área da Filosofia e duas habilitações no campo de Revoluções Científicas (Ladislav, 2024).

Em 2008, residindo em Praga (República Tcheca), publicou o livro *Patterns of Change*, com o qual "[...] ganhou o Prêmio Internacional Fernando Gil de Filosofia da Ciência" (Prof., 2022). Dois anos depois, tornou-se professor de Educação Matemática na Universidade Charles.

Figura 4.1: Ladislav Kvasz



Fonte: Ladislav (2024).

Estudemos, nas próximas linhas, seu artigo *O Elo Invisível entre a Matemática e a Teologia*. Com ele, poderemos compreender, ao menos de relance, as conexões existentes entre as duas ciências.

4.2 O elo invisível

Talvez a Teoria de Conjuntos seja o tópico (dentre os muitos que encontramos na História da Matemática) mais famoso no que se refere a revelar uma conexão direta entre a Matemática e a Teologia. "Outro assunto [...] é a Lógica Matemática", de acordo com Kvasz (2007).

O autor apresenta em seu trabalho cinco exemplos que eram considerados não passíveis de descrição matemática pelos antigos, mas que foram matematizados. Aqui é levada em conta a Antiguidade tardia, que vigorou de cerca de 284 a 750 depois de Cristo (Antiguidade, 2021). A Matemática de tal época é comparada, a partir de cinco termos, com a Matemática dos séculos XVI e XVII.

Na opinião de Kvasz, compartilhada por nós, os vários aspectos sob os quais a Matemática antiga difere da Matemática moderna foram influenciados pela Teologia monoteísta. Em outras palavras, a proposta é que "a Teologia monoteísta [...] influenciou de forma indireta o processo dessa matematização" (Kvasz, 2007, p. 120).

O primeiro exemplo trazido pelo autor é o infinito. Esta noção possuía significado bem mais amplo na Antiguidade: "apeiron", tudo que não possuísse fronteira (sem "peras"), que fosse indefinido ou vago. Já na Matemática moderna, "considera-se infinito [...] como determinado e inequívoco, e por isso acessível à investigação matemática" (Kvasz, 2007, p. 121).

Dessa maneira, a noção antiga de "apeiron" foi subdividida em duas na Matemática moderna: o infinito, que possui lugar na Matemática, e a noção de indefinido, ainda sem lugar em tal ciência.

A noção de acaso também possuía significado mais amplo na Antiguidade: "tyché", que além de aleatoriedade abrangia a ideia de destino. Com o aparecimento de livros sobre jogos e apostas, a partir do século XVI, e o desenvolvimento da Teoria das Probabilidades, no século XVII, a aleatoriedade tornou-se objeto de estudo da Matemática, enquanto a noção de destino não.

Em terceiro lugar, é trazida a ideia de incógnito. A mudança de interpretação desta noção está relacionada ao nascimento da Álgebra, do árabe "al-jabr", conforme Álgebra (2021). A civilização árabe é, de fato, monoteísta, o que reforça a tese da conexão implícita entre a Teologia monoteísta e a Matemática moderna.

Para os antigos, a grandeza incógnita "[...] não podia ser manipulada em operações

aritméticas" (Kvasz, 2007, p. 122). Já na Álgebra, temos a ideia básica de representar uma incógnita por uma letra e realizar com ela as mesmas operações matemáticas dos números ordinários.

A quarta mudança ocorreu no entendimento de espaço. Enquanto a noção antiga de vazio (próxima à noção moderna de espaço) não era passível de ser estudada, pela Matemática ou por outra ciência, por estar onde nada existe, a noção matemática de espaço passou a ser utilizada na ciência moderna, tendo ele as seguintes características: tem três dimensões, é orientável e é contínuo.

Por fim, a última diferença exemplificada por Kvasz é a noção de movimento. Antigamente, esta era mais ampla, englobando, além da variação da posição no espaço, mudança de cor, crescimento e envelhecimento. O que parecia impossível de ser matematizado foi subdividido em duas subáreas: a que inclui somente movimento local - Cinemática, introduzida por Galileu Galilei - e outra mais ampla, incluindo o repouso.

4.2.1 Padrões comuns

As matematizações das três novas áreas da Matemática moderna (Álgebra, Teoria da Probabilidade e Cinemática) e das duas noções modernas (infinito e espaço) possuem "vários aspectos em comum" (Kvasz, 2007, p. 124). Considera-se, aqui, as investigações matemáticas dos séculos XVI e XVII, sobre estes cinco novos objetos de estudo.

A primeira característica comum é que todas as noções "apeiron", "tyché", "kenón" e "kinesis" eram bem mais amplas que as noções modernas de infinito, aleatoriedade, espaço e movimento. Distingue-se, atualmente, infinito de indeterminado, aleatoriedade de fato, espaço de vazio e movimento de mudança, de forma que "[...] foram separadas partes específicas e delimitadas, e somente as noções mais delimitadas foram matematizadas" (Kvasz, 2007, p. 125).

Outro aspecto em comum é que nas noções modernas e restritas de infinito, probabilidade, espaço e movimento, ainda é encontrado um pouco de ambiguidade. Entretanto, a diminuição da diversidade de significados já contribuiu de forma fundamental para a descrição matemática, uma vez que era justamente a ambiguidade de tais noções que impedia essa matematização, ao ver dos matemáticos gregos.

A terceira questão em comum entre as cinco noções é a seguinte: no passo que os matemáticos antigos viam a noção de infinito, por exemplo, como algo obscuro, desorientador, os medievais associaram o caminho ao infinito ao caminho a Deus. Essa associação à Teologia tornou a noção de infinito positiva, clara e precisa, já que Deus é perfeito, apesar de infinito. Tal ideia tornou-se, pois, ideal à investigação matemática.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] ÁLGEBRA. In: WIKIPÉDIA: a enciclopédia livre. Wikimedia, 2021. Disponível em: <<https://pt.m.wikipedia.org/wiki/Algebra>>. Acesso em: mai. 2021
- [2] ALMEIDA, Flavia. **Camélia-rosa**. *Super Universo das Plantas*, 2025. Disponível em: <<https://superuniversodasplantas.com.br/camelia-rosa>>. Acesso em: 09 fev. 2025.
- [3] ANTIGUIDADE Tardia. In: WIKIPÉDIA: a enciclopédia livre. Wikimedia, 2021. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Antiguidade_Tardia>. Acesso em: 03 jan. 2022.
- [4] BALDASSIN, Paula. **Arco-íris duplo**. *IGUi Ecologia*, 2018. Disponível em: <<https://www.iguiecologia.com/como-os-arco-iris-sao-formados/arco-iris-duplo>>. Acesso em: 09 fev. 2025.
- [5] BONFIM, Lúcia Resende P. **Mágica com números**. Revista do Professor de Matemática, Rio de Janeiro, 2008. Disponível em: <<https://rpm.org.br/cdrpm/66/6.html>>. Acesso em 05 jul. 2021.
- [6] BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília: 2018, p. 271
- [7] CABRAL, João Francisco P. **TEORIA DA ILUMINAÇÃO NATURAL EM SANTO AGOSTINHO**; *Brasil Escola*, 2020. Disponível em: <<https://m.brasilecola.uol.com.br/amp/filosofia/teoria-iluminacao-natural-santo-agostinho.htm>>. Acesso em: 19 mai. 2020.
- [8] CARDOSO JÚNIOR, Abílio Lemos. **Sequências**. Viçosa. 17 e 20 mar. 2015. Apresentação em Beamer. 9 slides. Aula da disciplina MAT 147 da UFV. Disponível em: <<http://www.dma.ufv.br/downloads/MAT%20147/2015-I/listas/Aula5e6%20-%20MAT%20147%20-%202015-I.pdf>>. Acesso em: 10 nov. 2021.
- [9] CARVALHO, Cícero. **O século V a.C. na Grécia**. Uberlândia. 26 jul. 2021a. Apresentação em Beamer. 17 slides. Aula da disciplina História da Matemática da UFU. Acesso em: 14 out. 2021.
- [10] CARVALHO, Cícero. **Colegas de Leibniz e Newton**. Uberlândia. 04 out. 2021b. Apresentação em Beamer. 21 slides. Aula da disciplina História da Matemática da UFU. Acesso em: 26 out. 2021.
- [11] COUTINHO, Adriano Chagas. **A Regra dos Sinais de Descartes**. Dissertação (Mestrado pelo PROFMAT) - Departamento de Matemática, Universidade Federal do Pernambuco,

- Recife/PE, 2016, p. 18. Disponível em: <<http://www.tede2.ufrpe.br:8080/tede/bitstream/tede2/7905/2/Adriano%20Chagas%20Coutinho.pdf>>. Acesso em: 21 jan. 2023.
- [12] FÍDIAS. In: WIKIPÉDIA: a enciclopédia livre. Wikimedia, 2021. Disponível em: <<https://pt.wikipedia.org/wiki/Fídias>>. Acesso em: 07 out. 2021.
- [13] FONSECA, Nuno. **CREIO PARA COMPREENDER**. Trento na língua, *Blogger*, 2010. Disponível em: <<http://trentonalingua.blogspot.com/2010/07/creio-para-compreender.html>>. Acesso em: 13 jan. 2022.
- [14] FOTOS de Favo de mel. **Mel de cerveja em favos de mel**. *Depositphotos*, 2012. Disponível em: <<https://depositphotos.com/br/photos/favo-de-mel.html?qview=10048917>>. Acesso em: 09 fev. 2025.
- [15] HUNTLEY, H. E. **A divina proporção**. Tradução de Luíz Carlos Ascêncio Nunes. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1985, pp. 32-33, 38, 67-68, 70, 75, 100-101.
- [16] JACCOUD, J. **MATEMÁTICA FOI CRIADA OU DESCOBERTA? Resposta Role Gourmet | A Matemaníaca**. 2016. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=a7X1DUZGuOg>>. Acesso em: 23 abr. 2021.
- [17] KVASZ, Ladislav. **O Elo Invisível entre a Matemática e a Teologia**. Tradução por: Patrícia Rebello Teles. [s. l.]: Revista de Estudos da Religião, 12 mar. 2007, pp. 120-122, 124-125. Disponível em: <https://www.pucsp.br/rever/rv1_2007/p_kvasz.pdf>. Acesso em: 19 jun. 2021.
- [18] LADISLAV, Kvasz. In: WIKIPÉDIA: a enciclopédia livre. Wikimedia, 2024. Disponível em: <https://cs.wikipedia.org/wiki/Ladislav_Kvasz>. Acesso em: 10 fev. 2025.
- [19] MACHADO, Marcos. **Girassol geométrico**. *Matéria incógnita*, 2016. Disponível em: <<https://materiaincognita.com.br/sequencia-de-fibonacci-na-simetria-geometrica-das-plantas>>. Acesso em: 09 fev. 2025.
- [20] MIGUEL, J. C. **O processo de formação de conceitos em Matemática**: implicações pedagógicas. 40 anos de Pós-graduação em Educação no Brasil, 2005, v. I, p. 1 - 18. Disponível em: <http://www.ufrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_28/processo.pdf>. Acesso em: 17 out. 2021.
- [21] NAUTILUS pompilius. In: WIKIPÉDIA: a enciclopédia livre. Wikimedia, 2018. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Nautilus_pompilius>. Acesso em: 20 out. 2021.
- [22] NAUTILUS pompilius. *Smithsonian National Museum of Natural History*, [s.d.]. Disponível em: <<https://collections.nmnh.si.edu/search/iz/?ark=ark:/65665/36142b516d93244d7bc5071754e503fd2>>. Acesso em: 10 fev. 2025.

- [23] OLIVEIRA, Raul Rodrigues de. **Binômio de Newton**; *Brasil Escola*, 2021. Disponível em: <<https://brasilecola.uol.com.br/matematica/binomio-de-newton.htm>>. Acesso em: 31 out. 2021.
- [24] PÁRTENON, Templo Consagrado à deusa Atena. *Enciclopédia Global*, [s.d.]. Disponível em: <<https://www.megatimes.com.br/2015/01/partenon-templo-consagrado-deusa-atena.html>>. Acesso em: 10 fev. 2025.
- [25] PROCOPIO, R. **A Matemática é uma Invenção ou uma Descoberta? | Matemática Rio Ep01**. 2015. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=ur5CSd2D3MU>>. Acesso em: 23 abr. 2021
- [26] PROF. RNDr. Ladislav Kvasz, Dr. *Centre for Formal Epistemology*, 2022. Disponível em: <<https://fec.flu.cas.cz/index.php/en/people/prof-rndr-ladislav-kvasz-dr>>. Acesso em: 13 jan. 2022.
- [27] ROGER Penrose. In: WIKIPÉDIA: a enciclopédia livre. Wikimedia, 2021. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Roger_Penrose>. Acesso em: 27 ago. 2021.
- [28] SCOTT, Brian M. **Sufficiency to prove the convergence of a sequence using even and odd terms**. 27 ago. 2012. Disponível em: <<https://math.stackexchange.com/questions/187525/sufficiency-to-prove-the-convergence-of-a-sequence-using-even-and-odd-terms?rq=1>>. Acesso em: 10 nov. 2021.
- [29] SEVERO, F. **Aplicações da função parte inteira e o Jogo de Wythoff**. *Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo*. [s. d.] Disponível em: <<https://potiimpa.br/index.php/modulo/ver?modulo=8#>>>. Acesso em: 31 out. 2021.
- [30] SILVA, Paulo Estéfano Araújo da. **A sequência de Fibonacci e o Ensino Médio**. Mossoró: Universidade Federal Rural do Semi-Árido, 2017.
- [31] SILVA, Ricardo. **Triângulo de Pascal e números de Fibonacci**. *Os Fantásticos Números Primos*, 2022. Disponível em: <<http://www.osfantasticosnumerosprimos.com.br/011-estudos-378-triangulo-de-pascal-e-sequencias-numericas.html>>. Acesso em: 09 fev. 2025.
- [32] SOARES, Lucas. **As fases da Lua variam conforme ela reflete a luz do Sol**. *Olhar Digital*, 2024. Disponível em: <<https://olhardigital.com.br/2024/01/02/ciencia-e-espaco/fases-da-lua-de-2024-veja-o-calendario-completo-de-cada-mes>>. Acesso em: 09 fev. 2025.
- [33] TRUTH, Closer To. **Roger Penrose - Is Mathematics Invented or Discovered?** Youtube, 13 abr. 2020. Disponível em: <www.youtube.com/watch?v=ujvS2K06dg4>. Acesso em: 24 ago. 2021.