

Universidade Federal de Uberlândia

Faculdade de Ciências Integradas do Pontal

Curso de Matemática

Trabalho de Conclusão de Curso

**Uma formalização via sistema matemático
para o conjunto dos números naturais e
inteiros**

por

Amanda Vitória de Jesus Mendes

Bacharel em Matemática – Ituiutaba - MG

Orientador: Prof. Dr. João Carlos Moreira

Uma formalização via sistema matemático para o conjunto dos números naturais e inteiros

Este exemplar corresponde à redação final da Monografia devidamente corrigida e defendida por **Amanda Vitória de Jesus Mendes** e aprovada pela comissão julgadora.

Ituiutaba, 30 de março de 2022.



Prof. Dr. João Carlos Moreira

Banca Examinadora:

Prof. Dr. João Carlos Moreira
(Orientador).

Prof. Dr. Moisés Rodrigues Cirilo do
Monte.

Profa. Dra. Patrícia Borges dos Santos.

Monografia apresentada ao Instituto de Ciências Exatas e Naturais do Pontal, UFU, como requisito parcial para obtenção do título de **Bacharel em Matemática**.

Ao meu orientador Prof. Dr. João Carlos
Moreira.

AGRADECIMENTOS

A **Deus**, pois sem ele nada disso seria possível.

Aos meus pais **Eliony Eva de Jesus** e **Vanderlei Costa Oliveira**, pelo amor e incentivo. Vocês são os melhores exemplos de força, amor e persistência que eu poderia ter.

A minha irmã **Fabricia Cristina de Jesus Santos**, que sempre esteve ao meu lado em todos os momentos.

Ao meu orientador **João Carlos Moreira**, pela paciência e compromisso com minha orientação.

A minha amiga **Ana Livia Rodrigues Nascimento**, que me ajudou e me arrancou as melhores risadas.

Aos professores da banca, **Moisés Rodrigues Cirilo do Monte** e **Patrícia Borges dos Santos**, pelas contribuições feitas neste trabalho.

A todos os **professores** que contribuíram com minha formação acadêmica.

A todos os **colegas** do curso de graduação.

A **Escola de Matemática**, pela oportunidade de fazer parte da sua história.

A **Universidade Federal de Uberlândia** e ao **Instituto de Ciências Exatas e Naturais do Pontal (ICENP)**, que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho.

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo estudar os conceitos de sistemas formais, formalizar o sistema numérico dos números naturais e inteiros, baseando-se no conceito de sistemas matemáticos e na linguagem de primeira ordem. A formalização desses sistemas permitirá compreender o processo de formalização de outros sistemas numéricos. O presente trabalho foi desenvolvido em um projeto de iniciação científica, após a necessidade de se fazer uma iniciação científica dentro do Programa de Educação Tutorial (PET). A pesquisa teve caráter bibliográfico tendo como base a referência MOREIRA (2020). Os resultados obtidos foram a formalização do sistema numérico dos números naturais e inteiros e o desenvolvimento dos conceitos que são abordados em Álgebra e Lógica Matemática. A pesquisa contribuirá para a formação da graduanda, leitores e futuros pesquisadores em Matemática.

Palavras-chave: Sistema numérico. Sistemas matemáticos. Números naturais. Números inteiros. Formalização.

LISTA DE SÍMBOLOS

E^ω	$\underbrace{E \times E \times \dots \times E}_{\omega \text{ vezes}}.$
A_{Peano}	Axiomas de Peano.
A_n	Axioma de Peano de número n .
x^*	Sucessor de x .
D_n	Definição de número n .
$\vdash$	Prova.
H	Hipótese de Indução.
Λ	Absurdo.
$\therefore$	Portanto.
L_n	Lema de número n .
P_n	Proposição de número n .

SUMÁRIO

AGRADECIMENTOS.....	i
RESUMO.....	ii
LISTA DE SÍMBOLOS.....	iii
INTRODUÇÃO.....	1
Objetivo.....	2
Estrutura dos Tópicos Apresentados.....	2
CAPÍTULO 1 - SISTEMAS MATEMÁTICOS E FORMAIS.....	4
1.1 O Sistema Matemático dos Números Naturais e Inteiros.....	4
1.2 Sistemas algébricos	5
1.3 O Sistema Formal para S_1	6
1.4 O Sistema Formal para S_2	8
CAPÍTULO 2 - O SISTEMA NUMÉRICO DOS NÚMEROS NATURAIS	11
2.1 Construção dos Números Naturais	11
2.2 Aritmética dos Números Naturais.....	12
2.2.1 Operação de Adição.....	12
2.2.2 Operação de Multiplicação.....	19
2.2.3 Relação de Ordem em $\mathbb{N}$	30
CAPÍTULO 3 - O SISTEMA NUMÉRICO DOS NÚMEROS INTEIROS	34
3.1 Construção dos Números Inteiros.....	34
3.2 Aritmética dos Números Inteiros.....	37
3.2.1 Operação de Adição.....	37
3.2.2 Operação de Multiplicação.....	41
Considerações	47
Referências.....	48

INTRODUÇÃO

Durante muito tempo, a matemática foi desenvolvida de forma intuitiva e informal e a eficácia das teorias era verificada na construção de objetos em atividades do cotidiano. A principal consequência da falta de formalismo na matemática foi o aparecimento de paradoxos nas teorias; isto é, duas afirmações decorrentes da teoria que são comprovadamente contraditórias. O ponto alto dessa discussão foi durante a crise dos fundamentos da matemática. Ao ser confrontado pelos paradoxos, David Hilbert propõe uma nova abordagem na revisão dos fundamentos da matemática. O programa de Hilbert tinha como objetivo formalizar todas as teorias matemáticas e demonstrar a consistência das mesmas. O programa ficou conhecido por *Programa de Hilbert*.

Em resposta ao programa de David Hilbert, os teoremas do matemático Kurt Gödel, conhecidos como Teoremas de Incompletude de Gödel, mostrou que todos os sistemas formais da matemática são incompletos, ou seja, podemos construir uma proposição que seja indefinível em relação ao seu valor lógico. Em outras palavras, o teorema de Gödel mostra que um sistema formal não pode ser consistente e completo ao mesmo tempo. No segundo teorema, mostrou que um sistema formal não poderia provar a sua própria consistência. Os teoremas de Gödel não aniquilaram de vez o programa formalista de Hilbert, mas lhe mostraram os seus limites. Entretanto, a ideia de Hilbert possibilitou um desenvolvimento significativo nas teorias da matemática. (LANNES, 2009; MOREIRA, 2007).

Embora o objetivo de Hilbert não pôde ser atingido, apresentamos neste trabalho uma proposta de formalização baseando-se em um conceito chamado de sistemas matemáticos e na linguagem de primeira ordem. A importância de se estudar a formalização de um sistema numérico está no aprofundamento da compreensão do processo de sua construção e desenvolvimento. Para a formalização do sistema numérico dos números naturais e inteiros utilizamos a lógica de primeira ordem.

A lógica de primeira ordem pode ser dividida em três aspectos: símbolos, axiomas e semântica. Os símbolos e os axiomas constituem o que chamamos de *sintaxe* da lógica de primeira ordem. A *semântica* é o estudo dos significados das expressões lógicas. (FAJARDO, 2017).

Neste trabalho foram estudados os conceitos de sistemas algébricos, o sistema formal para o sistema matemático dos números naturais e inteiros e lógica de primeira ordem para

formalizar os sistemas numéricos. Dessa forma, com esta pesquisa foi possível aprofundar os estudos de Álgebra e Lógica Matemática vistos na graduação.

Quanto aos procedimentos de estudo, a pesquisa tem o caráter bibliográfico¹. Os capítulos 1, 2 e 3 deste trabalho foram elaborados com base na referência MOREIRA (2020).

O presente trabalho foi desenvolvido em um projeto de iniciação científica, após a necessidade de se fazer uma iniciação científica dentro do Programa de Educação Tutorial (PET).

Os resultados obtidos foram a formalização do sistema numérico dos números naturais e inteiros e o desenvolvimento dos conceitos que são abordados em Álgebra e Lógica Matemática. A pesquisa está contribuindo para uma formação ampla e diversificada da graduanda e espera-se que este trabalho sirva de base para novas pesquisas e contribua para o conhecimento de futuros pesquisadores em Matemática.

Objetivo

O objetivo principal deste trabalho é apresentar uma proposta de formalização baseando-se no conceito de sistemas matemáticos e na linguagem de primeira ordem e usá-la para formalizar o sistema numérico dos números naturais e inteiros.

Estruturas dos Tópicos Apresentados:

O presente trabalho está dividido da seguinte maneira:

- O capítulo 1, é composto por quatro seções. A primeira seção é destinada a apresentação dos objetos matemáticos que definem o conceito de sistemas matemáticos. No final da seção é exibido o sistema matemático dos números naturais e inteiros. Na segunda seção, são apresentados os conceitos relacionados aos sistemas algébricos. Na terceira e na quarta seção é apresentado o sistema lógico do conjunto dos números naturais e inteiros, respectivamente.
- No capítulo 2, são realizados estudos referentes as propriedades e operações dos números naturais. Este capítulo é composto por três seções. A primeira seção é destinada aos axiomas de Peano. Na segunda seção são apresentadas as operações de

¹ Para Severino, “A pesquisa bibliográfica é aquela que se realiza a partir do registro disponível, decorrente de pesquisas anteriores, em documentos impressos, como livros, artigos, teses etc.” SEVERINO, J. A. **Metodologia do Trabalho Científico**. 23. ed. rev. e atual. São Paulo: Cortez, 2007.

adição, multiplicação e suas propriedades, respectivamente. Por fim, na terceira seção definimos a relação de menor e menor ou igual e apresentamos algumas de suas propriedades.

- No capítulo 3, são realizados estudos referentes as propriedades e operações dos números inteiros. Este capítulo será composto por duas seções. A primeira seção é destinada a construção dos números inteiros. Na segunda seção são apresentadas as operações de adição, multiplicação bem como suas propriedades.

CAPÍTULO 1

SISTEMAS MATEMÁTICOS E FORMAIS

1.1 O Sistema Matemático dos Números Naturais e Inteiros

Definição 1. Sejam A e B conjuntos quaisquer. O *produto cartesiano*, denotado por $A \times B$, dos conjuntos A e B é o conjunto de todos os pares ordenados (x, y) tal que $x \in A$ e $y \in B$.

Definição 2. Seja E um conjunto qualquer. Uma *relação ω -ária* sobre E , onde ω é um número cardinal, é qualquer subconjunto do produto cartesiano E^ω .

Definição 3. Seja E um conjunto qualquer. Uma *operação ω -ária* sobre E é uma função do produto cartesiano E^ω sobre o conjunto E .

Definição 4. *Estrutura matemática* é um objeto matemático que unifica conceitos da matemática e é utilizado como ponto de partida para o desenvolvimento de uma teoria. Nessa teoria, esses conceitos podem ser considerados como primitivos.

Definição 5. Um *sistema matemático*, denotado por $S = (E, R, O, A)$, é uma classe de estrutura matemática composta de um conjunto não vazio E , uma família $R = (r_j)_{j \in J}$ de relações (ω_j) -ária sobre E , uma família $O = (O_k)_{k \in K}$ de operações (ω_k) -ária sobre E e uma família $A = (A_l)_{l \in L}$ de axiomas.

O conjunto E de um sistema matemático $S = (E, R, O, A)$ é chamado de sistema, conjunto universo ou conjunto fundamental, e os seus objetos de elementos de S . Os objetos E , R , O e A são chamados de pressupostos primitivos de S .

O sistema matemático dos números naturais e dos inteiros baseiam-se nos axiomas de Peano e em um sistema formal. Portanto, $S_1 = (\mathbb{N}, \{<, =\}, \{+, \cdot\}, A_{Peano})$ é o sistema matemático dos números naturais e $S_2 = (\mathbb{Z}, \{<, =\}, \{+, \cdot\}, A_{Peano})$ é o sistema matemático dos inteiros. A partir daqui, denotaremos S_1 e S_2 como sendo o sistema dos números naturais e dos inteiros, respectivamente.

1.2 Sistemas Algébricos

Definição 6. Um sistema matemático $S = (E, R, O, A)$, onde $A = \emptyset$, é chamado de *sistema algébrico* ou *estrutura algébrica* e será denotado por $S = (E, R, O)$.

Os sistemas algébricos $S = (\mathbb{N}, \{<, =\}, \{+, \cdot\})$ e $S = (\mathbb{Z}, \{<, =\}, \{+, \cdot\})$ são conhecidos como os sistemas algébricos dos números naturais e inteiros, respectivamente.

Definição 7. Um sistema algébrico $S = (E, R, \emptyset, \emptyset)$, é chamado de *sistema relacional* e será denotado por $S = (E, R)$.

Os sistemas relacionais dos números naturais e inteiros são $S = (\mathbb{N}, \{<, =\})$ e $S = (\mathbb{Z}, \{<, =\})$, respectivamente.

Definição 8. Um sistema algébrico $S = (E, \emptyset, O, \emptyset)$, é chamado de *álgebra universal* ou simplesmente *álgebra* e denotaremos por $S = (E, O)$.

Os sistemas $S = (\mathbb{N}, \{+, \cdot\})$ e $S = (\mathbb{Z}, \{+, \cdot\})$ são exemplos de álgebra.

Definição 9. Uma álgebra $S = (E, \{\varphi, \psi\})$ é chamada de *sistema numérico* se:

- i) φ e ψ são operações binárias associativas;
- ii) φ e ψ são operações binárias comutativas; e
- iii) Uma das operações é distributiva com relação à outra.

A álgebra $S = (\mathbb{N}, \{+, \cdot\})$ é conhecida como o sistema numérico dos naturais, bem como o $S = (\mathbb{Z}, \{+, \cdot\})$ dos números inteiros.

1.3 O Sistema Formal para S_1

Definição 10. Um *sistema formal* ou *lógico* para um sistema matemático $S = (E, R, O, A)$, consiste em um sistema de pensamento abstrato bem definido em S , composto de uma linguagem, denotada por $L(S)$, bem como o seu estudo sintático e semântico.

As regras de sintaxe de um sistema lógico possibilitam a correta obtenção das expressões da linguagem. O real significado das expressões da linguagem $L(S)$, a semântica, vai depender do sistema matemático $S = (E, R, O, A)$ a ser estudado. Portanto, podemos ter expressões formais com a mesma sintaxe, mas semântica diferente.

Exemplo 1. A fórmula $(\exists x)(x + 1 = 0)$ não existe solução em S_1 , porém, em S_2 a fórmula é verdadeira, ou seja, em ambos os sistemas matemáticos a fórmula tem a mesma sintaxe, mas semântica diferente.

Definição 11. Um sistema lógico de primeira ordem para $S_1 = (\mathbb{N}, \{<, =\}, \{+, \cdot\}, A_{Peano})$ é um sistema lógico, composto de uma linguagem de primeira ordem, denotada por $L^1(S_1)$, e regras de sintaxe.

A especificação de uma linguagem $L(S)$ em um sistema matemático S , ocorre quando determinamos sua assinatura; isto é, um conjunto $\Sigma(S)$ de símbolos. Os três itens abaixo, determinam o que chamamos de assinatura da linguagem $L^1(S_1)$.

1. Símbolos constantes: $\{1, 2, 3, \dots\}$ representam cada elemento de $\mathbb{N}$;
2. Relações: $\in$ (símbolo de relação unária chamada de incidência ou pertinência), $\notin$ (símbolo de negação da relação unária chamada de incidência ou pertinência), $=$ (símbolo de relação binária chamada de igualdade), $\neq$ (símbolo de negação de relação

binária chamada de igualdade), $\leq$ (símbolo de relação de ordem) e $<$ (símbolo de relação de ordem)

3. Operações: $+$ (símbolo da operação de adição) e $\cdot$ (símbolo da operação de multiplicação);

Outros símbolos de $L^1(S_1)$:

4. Variáveis: são expressas por letras minúsculas dos alfabetos grego $\alpha, \beta, \dots, \omega$ e latino $a, b, \dots, z$, com ou sem índices e representam, de forma abstrata, um elemento do sistema $\mathbb{N}$;
5. Quantificadores lógicos: são expressos por $\forall$ (universal – “para todo”), $\exists$ (existencial – “existe”) e $\exists!$ (existencial – “existe um único”);
6. Conectivos lógicos: são expressos por $\wedge$ (conjunção – “e”), $\vee$ (disjunção inclusiva – “ou”), $\underline{\vee}$ (disjunção exclusiva – “ou”), $\rightarrow$ (condicional – “se ... então”) e $\leftrightarrow$ (bicondicional – “se, e somente se”);
7. Operador descrição ι , que significa “um objeto tal que...”;
8. Parênteses: $()$, funciona como uma “pontuação” na separação entre termos e fórmulas;
9. O símbolo $\Leftrightarrow$: que pode significar que “o lado esquerdo é uma notação para o lado direito” ou, em alguns casos, o operador bicondicional.

Definição 12. Uma sequência de símbolos da assinatura, denotado por $a_1 a_2 \dots a_n$ é chamada de *expressão* da linguagem $L^1(S_1)$. Para a formação das expressões da $L^1(S_1)$, são necessários um conjunto de regras de sintaxe. Do ponto de vista semântico, uma expressão poderá ser uma variável, um termo ou uma fórmula. O número n de ocorrências de símbolos na expressão $a_1 a_2 \dots a_n$ é chamado de *comprimento* da expressão e geralmente é denotado por $|a_1 a_2 \dots a_n|$. Por convenção, uma expressão sem símbolos terá comprimento zero.

Exemplo 2. A expressão “Existe um conjunto vazio”, pode ser expressa em linguagem formal pela fórmula $(\exists x)(\forall y)(y \notin x)$. O comprimento dessa expressão é 13.

Definição 13. Um termo de $L^1(S_1)$ é uma expressão usada para denotar os objetos de S_1 . Os termos elementares de uma linguagem são suas constantes $(c_l)_{l \in L}$, que denotam os elementos do sistema $\mathbb{N}$.

Exemplo 3. As expressões 1 , $x + 1$ e $1 + 1$ são termos de uma linguagem.

Uma regra de sintaxe importante do sistema lógico de primeira ordem é que $O_k(x_1, \dots, x_n)$ é um termo e se $t_1, \dots, t_n$ são termos então $O_k(t_1, \dots, t_n)$ também será um termo, onde $(O_k)_{k \in K}$ é uma família de símbolos O_k de operações n_k -ária de $L^1(S_1)$.

Definição 14. Uma *fórmula atômica* de $L^1(S_1)$ é uma expressão do tipo $r_i t_1 \dots t_n$, denotada por $r_i(t_1, \dots, t_n)$, onde r_i é uma relação (incluindo as relações $\in$ e $=$) e $t_1, \dots, t_n$ são termos da linguagem. O agrupamento de duas ou mais fórmulas atômicas, obtidas através dos operadores lógicos e regras de sintaxe, determinam as *fórmulas moleculares*.

Exemplo 4. As fórmulas $x \in y$ e $x = z$ são fórmulas atômicas. A fórmula $(\forall x)((x \in y) \rightarrow (x = z))$ é uma fórmula molecular.

Definição 15. Uma *regra de derivação* (ou de inferência) é a condição necessária para que uma fórmula, chamada de *conclusão* (tese), possa ser derivada (ou inferida) através de um sistema lógico, de certas outras fórmulas, chamadas de *premissas* (ou hipóteses).

Na derivação de fórmulas moleculares devemos obedecer às seguintes regras de derivação:

1. Se x e y são variáveis, então $(x \in y)$ e $(x = y)$ são fórmulas;
2. Se P e Q são fórmulas, então $(P \leftrightarrow Q)$, $(P \rightarrow Q)$, $(P \wedge Q)$, $(P \vee Q)$, $(P \underline{\vee} Q)$ e $(\neg P)$ são fórmulas;
3. Se P é fórmula e x é uma variável, então $(\forall x)(P(x))$ e $(\exists x)(P(x))$ são fórmulas, $(\iota x)(P(x))$ e a variável x são termos (objetos).

1.4 O Sistema Formal para S_2

Definição 16. Um sistema lógico de primeira ordem para $S_2 = (\mathbb{Z}, \{<, =\}, \{+, \cdot\}, A_{\text{Peano}})$ é um sistema lógico, composto de uma linguagem de primeira ordem, denotada por $L^1(S_2)$, e regras de sintaxe.

A especificação de uma linguagem $L(S)$ em um sistema matemático S , ocorre quando determinamos sua assinatura; isto é, um conjunto $\Sigma(S)$ de símbolos. Os três itens abaixo, determinam o que chamamos de assinatura da linguagem $L^1(S_2)$.

Os três itens abaixo, determinam o que chamamos de assinatura da linguagem $L^1(S_2)$.

1. Símbolos constantes: $\{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ representam cada elemento de $\mathbb{Z}$;
2. Relações: $\in$ (símbolo de relação unária chamada de incidência ou pertinência), $=$ (símbolo de relação binária chamada de igualdade), $\neq$ (símbolo de negação de relação binária chamada de igualdade), $\leq$ (símbolo de relação de ordem) e $<$ (símbolo de relação de ordem);
3. Operações: $+$ (símbolo da operação de adição), $\cdot$ (símbolo da operação de multiplicação) e $-$ (símbolo da operação de subtração);

Outros símbolos de $L^1(S_2)$:

4. Variáveis: são expressas por letras minúsculas dos alfabetos grego $\alpha, \beta, \dots, \omega$ e latino $a, b, \dots, z$, com ou sem índices e representam, de forma abstrata, um elemento do sistema $\mathbb{Z}$;
5. Quantificadores lógicos: são expressos por $\forall$ (universal – “para todo”), $\exists$ (existencial – “existe”) e $\exists!$ (existencial – “existe um único”);
6. Conectivos lógicos: são expressos por $\wedge$ (conjunção – “e”), $\vee$ (disjunção inclusiva – “ou”), $\underline{\vee}$ (disjunção exclusiva – “ou”), $\neg$ (negação – “não”), $\rightarrow$ (condicional – “se ... então”) e $\leftrightarrow$ (bicondicional – “se, e somente se”);
7. Operador descrição ι , que significa “um objeto tal que...”;
8. Parênteses: $()$, funciona como uma “pontuação” na separação entre termos e fórmulas;
9. O símbolo $\Leftrightarrow$: que pode significar que “o lado esquerdo é uma notação para o lado direito” ou, em alguns casos, o operador bicondicional.

Definição 17. Uma sequência de símbolos da assinatura, denotado por $a_1 a_2 \dots a_n$ é chamada de *expressão* da linguagem $L^1(S_2)$. Para a formação das expressões da $L^1(S_2)$, são necessários um conjunto de regras de sintaxe. Do ponto de vista semântico, uma expressão poderá ser uma variável, um termo ou uma fórmula. O número n de ocorrências de símbolos na expressão

$a_1 a_2 \dots a_n$ é chamado de *comprimento* da expressão e geralmente é denotado por $|a_1 a_2 \dots a_n|$. Por convenção, uma expressão sem símbolos terá comprimento zero.

Exemplo 5. A expressão “Existe um único conjunto vazio”, pode ser expressa em linguagem formal pela fórmula $(\exists! x)(\forall y)(y \notin x)$. O comprimento dessa expressão é 14.

Definição 18. Um termo de $L^1(S_2)$ é uma expressão usada para denotar os objetos de S_2 . Os termos elementares de uma linguagem são suas constantes $(c_l)_{l \in L}$, que denotam os elementos do sistema $\mathbb{Z}$.

Exemplo 6. As expressões -1 , $x - 1$ e $-1 - 1$ são termos de uma linguagem.

Uma regra de sintaxe importante do sistema lógico de primeira ordem é que $O_k(x_1, \dots, x_n)$ é um termo e se $t_1, \dots, t_n$ são termos então $O_k(t_1, \dots, t_n)$ também será um termo, onde $(O_k)_{k \in K}$ é uma família de símbolos O_k de operações n_k -ária de $L^1(S_2)$.

Definição 19. Uma *fórmula atômica* de $L^1(S_2)$ é uma expressão do tipo $r_i t_1 \dots t_n$, denotada por $r_i(t_1, \dots, t_n)$, onde r_i é uma relação (incluindo as relações $\in$ e $=$) e $t_1, \dots, t_n$ são termos da linguagem. O agrupamento de duas ou mais fórmulas atômicas, obtidas através dos operadores lógicos e regras de sintaxe, determinam as *fórmulas moleculares*.

Definição 20. Uma *regra de derivação* (ou de inferência) é a condição necessária para que uma fórmula, chamada de *conclusão* (tese), possa ser derivada (ou inferida) através de um sistema lógico, de certas outras fórmulas, chamadas de *premissas* (ou hipóteses).

Na derivação de fórmulas moleculares devemos obedecer às seguintes regras de derivação:

4. Se x e y são variáveis, então $(x \in y)$ e $(x = y)$ são fórmulas;
5. Se P e Q são fórmulas, então $(P \leftrightarrow Q)$, $(P \rightarrow Q)$, $(P \wedge Q)$, $(P \vee Q)$, $(P \underline{\vee} Q)$ e $(\neg P)$ são fórmulas;
6. Se P é fórmula e x é uma variável, então $(\forall x)(P(x))$ e $(\exists x)(P(x))$ são fórmulas, $(\iota x)(P(x))$ e a variável x são termos (objetos).

CAPÍTULO 2

O SISTEMA NUMÉRICO DOS NÚMEROS NATURAIS

Neste capítulo, definiremos a operação de adição e multiplicação dos números naturais por meio de axiomas e, depois, mostraremos que $S_1 = (\mathbb{N}, \{+, \cdot\})$ é um sistema numérico.

2.1 Construção dos Números Naturais

A formalização que apresentaremos foi devida ao matemático Giuseppe Peano. De acordo com o mesmo, a definição de número natural é estabelecida a partir de conceitos primitivos e dos seguintes axiomas, como segue:

$$A_1. (\exists 1)(1 \in \mathbb{N})$$

$$A_2. (\forall x)(\exists! x^*)$$

$$A_3. (\forall x)(x^* \neq 1)$$

$$A_4. (\forall x)(\forall y)((x \neq y) \rightarrow (x^* \neq y^*))$$

$$A_5. \mathbb{N} \Leftrightarrow (\iota y)(\forall x)((x = 1) \wedge (x \in y \rightarrow x^* \in y))$$

Desses axiomas, segue que

$$\begin{aligned}
& (\exists 1)(1 \in \mathbb{N}) \\
& (\exists 1^*)(1^* \in \mathbb{N} \wedge (1^* \neq 1)) \\
& (\exists (1^*)^*)((1^*)^* \in \mathbb{N} \wedge ((1^*)^* \neq 1) \wedge ((1^*)^* \neq 1^*))
\end{aligned}$$

Podemos observar que cada elemento novo é diferente dos elementos anteriores. Esse processo continua; e, portanto,

$$\mathbb{N} = \{1, (1^*), (1^*)^*, \dots\}.$$

Os elementos desse conjunto $1, (1^*), (1^*)^*, \dots$, usualmente denotados por $1, 2, 3, \dots$, são chamados de números naturais.

2.2 Aritmética dos Números Naturais

2.2.1 Operação de Adição

Definição 21. Uma lei de composição sobre E é uma aplicação $\varphi : A \times E \rightarrow E$, onde A e E são conjuntos. Se $A = E$, dizemos que φ é uma lei de composição interna, caso contrário φ será uma lei de composição externa. Uma operação binária sobre E é uma lei de composição interna sobre E .

Definição 22. Uma operação binária sobre $\mathbb{N}$ é uma aplicação $\varphi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$.

Definição 23. A operação de adição sobre $\mathbb{N}$ é uma operação binária sobre $\mathbb{N}$, denotada por $+$: $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, que a cada par ordenado (x, y) de números naturais associa o número natural $x + y$ definido por

$$(\forall x)(\forall y) \left((x + 1 = x^*) \vee (x + y^* = (x + y)^*) \right)$$

Exemplo 7. $2 + 1 \stackrel{D_{23}}{=} 2^* = 3$;

Exemplo 8. $2 + 2 \stackrel{D_{23}}{=} 2 + 1^* \stackrel{D_{23}}{=} (2 + 1)^* = (3)^* = 4$.

Vamos agora formalizar a ideia intuitiva de sucessor utilizando o quinto axioma de Peano, para mostrar que $n + m$ está bem definido para todos $n, m \in \mathbb{N}$.

Proposição 1. A soma está bem definida para todo par de números naturais.

⊢

$$\mathbb{N} \Leftrightarrow (\iota w)(\forall m) \left((m \in w) \leftrightarrow (\forall n)(n \in \mathbb{N})(n + m \in \mathbb{N}) \right)$$

$$(1 \in w) \leftrightarrow (\forall n)(n \in \mathbb{N}) \left(n + 1 \stackrel{D_{23}}{=} n^* \in \mathbb{N} \right)$$

$$(\forall m)((m \in w) \rightarrow (m^* \in w)) \leftrightarrow (\forall m)(\forall n)(n \in \mathbb{N})(n + m \in \mathbb{N} \rightarrow n + m^* \in \mathbb{N})$$

$$(\forall n)(n \in \mathbb{N}) \left(n + m^* \stackrel{D_{23}}{=} (n + m)^* \in \mathbb{N} \right)$$

■

Definição 24. Dados $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, definimos a sua soma, recursivamente por

$$(\forall n)(\forall x_1)(\forall x_2) \cdots (\forall x_n)((n > 3)) \rightarrow \sum_{j=1}^n x_j = (((x_1 + x_2) + \cdots + x_{n-1}) + x_n)$$

Lema 1. $(\forall x)(x^* \neq x)$

⊢

$$\mathbb{N} \Leftrightarrow (\iota w)(\forall x)((x \in w) \leftrightarrow (x^* \neq x))$$

$$\left(\begin{array}{c} \left((1 \in w) \leftrightarrow \left(1^* \neq 1 \right) \right) \\ \wedge \\ H \Leftrightarrow (\forall x)(x^* \neq x) \\ \downarrow \\ \left((x^* \in w) \leftrightarrow (\forall x) \left(((x^*)^* = x^*) \rightarrow (x^* = x) \rightarrow \Lambda \right) \right) \end{array} \right)$$

$$\therefore (\forall x)((x \in w) \leftrightarrow (x^* \neq x))$$

■

Proposição 2. (Transitiva). $(\forall x)(\forall y)(\forall z)((x = y) \wedge (y = z)) \rightarrow (x = z)$

⊢

$$\mathbb{N} \Leftrightarrow (\iota w)(\forall y)((y \in w) \leftrightarrow (\forall x)(\forall z)((x = y) \wedge (y = z)) \rightarrow (x = z))$$

$$(1 \in w) \leftrightarrow (\forall x)(\forall z)((x = 1) \wedge (1 = z)) \rightarrow (x = z)$$

$$(\forall x)(\forall z) \left((x \neq z) \stackrel{A_4}{\rightarrow} (x^* \neq z^*) \stackrel{L_1}{\rightarrow} (x \neq x^* \neq z^* \neq z = 1) \stackrel{H}{\rightarrow} (x \neq 1) \rightarrow \Lambda \right)$$

$$(\forall y)((y \in w) \rightarrow (y^* \in w))$$

$$\begin{aligned}
& (y^* \in w) \leftrightarrow (\forall x)(\forall z) \left(((x = y^*) \wedge (y^* = z)) \rightarrow (x = z) \right) \\
& (\forall x)(\forall z) \left((x \neq z) \xrightarrow{A_4} (x^* \neq z^*) \xrightarrow{L_1} \left(x \neq x^* \neq z^* \neq z = y^* \right) \xrightarrow{H} (x \neq y^*) \rightarrow \Lambda \right) \\
& \therefore (\forall x)(\forall y)(\forall z) \left(((x = y) \wedge (y = z)) \rightarrow (x = z) \right)
\end{aligned}$$

■

Proposição 3. (*Associativa*). $(\forall x)(\forall y)(\forall z)((x + y) + z = x + (y + z))$

⊢

$$\mathbb{N} \Leftrightarrow (\iota w)(\forall z) \left((z \in w) \leftrightarrow (\forall x)(\forall y)((x + y) + z = x + (y + z)) \right)$$

$$\left(\left(\begin{array}{c} (1 \in w) \\ \Downarrow \\ (\forall x)(\forall y) \left((x + y) + 1 \xrightarrow{D_{23}} (x + y)^* \xrightarrow{D_{23}} x + y^* \xrightarrow{D_{23}} x + (y + 1) \right) \\ \wedge \\ H \Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)((x + y) + z = x + (y + z)) \end{array} \right) \downarrow \left(\begin{array}{c} (z^* \in w) \\ \Downarrow \\ (\forall x)(\forall y) \\ \left((x + y) + z^* \xrightarrow{D_{23}} ((x + y) + z)^* \xrightarrow{H} (x + (y + z))^* \xrightarrow{D_{23}} x + (y + z)^* \xrightarrow{D_{23}} x + (y + z^*) \right) \\ \xrightarrow{A_2} \end{array} \right) \right)$$

$$\therefore (\forall x)(\forall y)((x + y) + z = x + (y + z))$$

■

Lema 2. $(\forall y)(1 + y = y + 1)$

⊢

$$\mathbb{N} \Leftrightarrow (\iota w)(\forall y) \left((y \in w) \leftrightarrow (1 + y = y + 1) \right)$$

$$\begin{array}{c}
\left(\begin{array}{c} \left((1 \in w) \leftrightarrow \left(1 + 1 \stackrel{D_{23}}{=} 1^* \stackrel{D_{23}}{=} 1 + 1 \right) \right) \\ \wedge \\ H \Leftrightarrow (1 + y = y + 1) \end{array} \right) \\
\downarrow \\
\left(\left((y^* \in w) \leftrightarrow \left(y^* + 1 \stackrel{D_{23}}{=} (y + 1) + 1 \stackrel{D_{23}}{=} (y + 1)^* \stackrel{H}{=} (1 + y)^* \stackrel{D_{23}}{=} 1 + y^* \right) \right) \right) \\
\vdots (\forall y)(1 + y = y + 1)
\end{array}$$

■

Proposição 4.1 (*Lei do Cancelamento*). $(\forall x)(\forall y)(\forall c)((x = y) \leftrightarrow (x + c = y + c))$

$\vdash$

$$\mathbb{N} \Leftrightarrow (\iota w)(\forall c) \left((c \in w) \leftrightarrow (\forall x)(\forall y)((x = y) \leftrightarrow (x + c = y + c)) \right)$$

$\vdash_1$

$$(\forall x)(\forall y)((x = y) \rightarrow (x + c = y + c))$$

$$\begin{array}{c}
\left(\begin{array}{c} \left((\forall x)(\forall y) \left((x = y) \stackrel{A_2}{\rightarrow} (x + 1 = y + 1) \right) \right) \\ \wedge \\ H \Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)((x = y) \rightarrow (x + c = y + c)) \end{array} \right) \\
\downarrow \\
\left(\begin{array}{c} (c^* \in w) \leftrightarrow (\forall x)(\forall y) \left(\begin{array}{c} (x = y) \\ \downarrow \quad H \\ (x + c = y + c) \\ \downarrow \quad A_2 \\ ((x + c)^* = (y + c)^*) \\ \downarrow \quad D_{23} \\ (x + c^* = y + c^*) \end{array} \right) \end{array} \right)
\end{array}$$

■

$\vdash_2$

$$(\forall x)(\forall y)((x + c = y + c) \rightarrow (x = y))$$

$$\left(\begin{array}{c} \left((\forall x)(\forall y) \left((x + 1 = y + 1) \xrightarrow{D_{23}} (x^* = y^*) \xrightarrow{A_4} (x = y) \right) \right) \\ \wedge \\ H \Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)((x + c = y + c) \rightarrow (x = y)) \\ \downarrow \\ \left((c^* \in w) \Leftrightarrow (\forall x)(\forall y) \left(\begin{array}{c} (x + c^* = y + c^*) \\ \downarrow D_{23} \\ ((x + c)^* = (y + c)^*) \\ \downarrow A_4 \\ (x + c = y + c) \\ \downarrow H \\ (x = y) \end{array} \right) \right) \end{array} \right)$$

■

$$\therefore (\forall x)(\forall y)(\forall c)((x = y) \leftrightarrow (x + c = y + c))$$

■

Proposição 4.2 (*Lei do Cancelamento*). $(\forall x)(\forall y)(\forall c)((x = y) \leftrightarrow (c + x = c + y))$

$\vdash$

$$\mathbb{N} \Leftrightarrow (\iota w)(\forall c) \left((c \in w) \leftrightarrow (\forall x)(\forall y)((x = y) \leftrightarrow (c + x = c + y)) \right)$$

$\vdash$

$$L_3 \Leftrightarrow (\forall x)(x^* = 1 + x)$$

$$\left((\forall x) \left(x^* = x + 1 \right) \wedge (\forall x) \left(x + 1 = 1 + x \right) \right) \xrightarrow{P_2} (\forall x)(x^* = 1 + x)$$

■

$\vdash_1$

$$(\forall x)(\forall y)((x = y) \rightarrow (c + x = c + y))$$

$$\left(\begin{array}{c}
\left((\forall x)(\forall y) \left((x = y) \xrightarrow{P_{4.1}} (x + 1 = y + 1) \xrightarrow{L_2} (1 + x = 1 + y) \right) \right) \\
\wedge \\
H \Leftrightarrow (\forall x)(\forall y) ((x = y) \rightarrow (c + x = c + y)) \\
\downarrow \\
\left((c^* \in w) \Leftrightarrow (\forall x)(\forall y) \left(\begin{array}{c}
(x = y) \\
\downarrow H \\
(c + x = c + y) \\
\downarrow A_2 \\
((c + x)^* = (c + y)^*) \\
\downarrow D_{23} \\
(c + x^* = c + y^*) \\
\downarrow D_{23} \\
(c + (x + 1) = c + (y + 1)) \\
\downarrow P_3 \\
((c + x) + 1 = (c + y) + 1) \\
\downarrow L_2 \\
(1 + (c + x) = 1 + (c + y)) \\
\downarrow P_3 \\
((1 + c) + x = (1 + c) + y) \\
\downarrow L_3 \\
(c^* + x = c^* + y)
\end{array} \right) \right)
\end{array} \right)$$

■

$\vdash_2$

$$(\forall x)(\forall y) ((c + x = c + y) \rightarrow (x = y))$$

$$\left(\left(\begin{array}{c} (\forall x)(\forall y) \left((1+x=1+y) \xrightarrow{L_2} (x+1=y+1) \xrightarrow{P_{4.1}} (x=y) \right) \\ \wedge \\ H \Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)((c+x=c+y) \rightarrow (x=y)) \\ \downarrow \\ (c^* \in w) \Leftrightarrow (\forall x)(\forall y) \left(\begin{array}{c} (c^*+x=c^*+y) \\ \downarrow L_3 \\ ((1+c)+x=(1+c)+y) \\ \downarrow P_3 \\ (1+(c+x)=1+(c+y)) \\ \downarrow L_3 \\ ((c+x)^*=(c+y)^*) \\ \downarrow A_4 \\ (c+x=c+y) \\ \downarrow H \\ (x=y) \end{array} \right) \end{array} \right) \right)$$

■

$$\therefore (\forall x)(\forall y)(\forall c)((x=y) \leftrightarrow (c+x=c+y))$$

■

Proposição 5. (Comutativa). $(\forall x)(\forall y)(x+y=y+x)$

⊢

$$\mathbb{N} \Leftrightarrow (\iota w)(\forall x) ((x \in w) \leftrightarrow (\forall y)(x+y=y+x))$$

⊢

$$L_4 \Leftrightarrow (\forall y)(x+(1+y)=x+(y+1))$$

$$(\forall y) \left(\left((1+y=y+1) \xrightarrow{L_2} (x+(1+y)=x+(y+1)) \right) \xrightarrow{P_{4.2}} (x+(1+y)=x+(y+1)) \right)$$

■

$$\left(\begin{array}{c}
\left((1 \in w) \overset{L_2}{\leftrightarrow} (\forall y)(1 + y = 1 + y) \right) \\
\wedge \\
H \Leftrightarrow (\forall y)(x + y = y + x)
\end{array} \right)$$

$$\downarrow$$

$$(x^* \in w)$$

$$\updownarrow$$

$$(\forall y) \left(x^* + y \overset{D_{23}}{=} (x + 1) + y \overset{P_3}{=} x + (1 + y) \right)$$

$$\wedge$$

$$(\forall y) \left(y + x^* \overset{D_{23}}{=} (y + x)^* \overset{D_{23}}{=} (y + x) + 1 \overset{H}{\underset{A_2}{=}} (x + y) + 1 \overset{P_3}{=} x + (y + 1) \right)$$

$$\overset{L_4}{\downarrow} \overset{P_2}{}$$

$$(\forall y)(x^* + y = y + x^*)$$

$$\therefore (\forall x)(\forall y)(x + y = y + x)$$

■

2.2.2 Operação de Multiplicação

Definição 25. A operação de multiplicação em $\mathbb{N}$ é uma aplicação binária $\cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, que a cada par ordenado (x, y) de números naturais associa o número natural $x \cdot y$, definido por

$$(\forall x)(\forall y) \left((x \cdot 1 = x) \underline{\vee} (x \cdot y^* = x \cdot y + x) \right)$$

Exemplo 9. $\overset{D_{25}}{2 \cdot 1 = 2};$

Exemplo 10. $\overset{D_{25}}{2 \cdot 2 = 2 \cdot 1 + 2 = 2 + 2 = 4}.$

Proposição 6. O produto está bem definido para todo par de números naturais.

⊢

$$\mathbb{N} \Leftrightarrow (\iota w)(\forall m)((m \in w) \leftrightarrow (\forall n)(n \in \mathbb{N})(n \cdot m \in \mathbb{N}))$$

$$(1 \in w) \leftrightarrow (\forall n)(n \in \mathbb{N}) \left(n \cdot 1 \stackrel{D_{25}}{=} n \in \mathbb{N} \right)$$

$$(\forall m)((m \in w) \rightarrow (m^* \in w)) \leftrightarrow (\forall m)(\forall n)(n \in \mathbb{N})(n \cdot m \in \mathbb{N} \rightarrow n \cdot m^* \in \mathbb{N})$$

$$(\forall n)(n \in \mathbb{N}) \left((n \cdot m \in \mathbb{N} \wedge n \in \mathbb{N}) \stackrel{P_1}{\rightarrow} n \cdot m + n \in \mathbb{N} \right)$$

■

Definição 26. Dados $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, definimos o seu produto, recursivamente por:

$$(\forall n)(\forall x_1)(\forall x_2) \dots (\forall x_n)((n > 3)) \rightarrow \prod_{j=1}^n x_j = (((x_1 \cdot x_2) \cdot \dots \cdot x_{n-1}) \cdot x_n)$$

Proposição 7. $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(\forall w)((x = y) \wedge (z = w)) \rightarrow (x + z = y + w)$

⊢

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(\forall w) \left(\left(\left((x = y) \stackrel{P_{4.1}}{\rightarrow} (x + z = y + z) \right) \wedge \left((z = w) \stackrel{P_{4.2}}{\rightarrow} (y + z = y + w) \right) \right) \right) \downarrow_{P_2} (x + z = y + w)$$

$$\therefore (\forall x)(\forall y)(\forall z)(\forall w)((x = y) \wedge (z = w)) \rightarrow (x + z = y + w)$$

■

Proposição 8. (Existência do elemento neutro). $(\forall x)(\exists 1)(x \cdot 1 = x = 1 \cdot x)$

⊢

$$\mathbb{N} \Leftrightarrow (\iota w)(\forall x)((x \in w) \leftrightarrow (\exists 1)(x \cdot 1 = x = 1 \cdot x))$$

⊢

$$L_5 \Leftrightarrow (\forall x)(x + 1 = x \cdot 1 + 1)$$

$$(\forall x) \left(\left(x \cdot 1 \stackrel{D_{25}}{=} x \right) \stackrel{P_{4.1}}{\rightarrow} (x \cdot 1 + 1 = x + 1) \right)$$

■

$$\left(\begin{array}{c} \left(\begin{array}{c} (1 \in w) \leftrightarrow \left(1 \cdot 1 \stackrel{D_{25}}{=} 1 \stackrel{D_{25}}{=} 1 \cdot 1 \right) \\ \wedge \\ H \Leftrightarrow (\exists 1)(x \cdot 1 = x = 1 \cdot x) \end{array} \right) \\ \downarrow \\ \left(\begin{array}{c} (x^* \in w) \leftrightarrow \left(\begin{array}{c} \left(x^* \cdot 1 \stackrel{D_{25}}{=} x^* \stackrel{D_{25}}{=} x + 1 \right) \\ \wedge \\ \left(x + 1 \stackrel{L_5}{=} (x \cdot 1) + 1 \stackrel{D_{25}}{=} (x \cdot 1)^* \right) \\ \wedge \\ \left(\begin{array}{c} (x \cdot 1)^* \stackrel{H}{=} (1 \cdot x)^* \stackrel{D_{25}}{=} 1 \cdot x + 1 \stackrel{D_{25}}{=} 1 \cdot x^* \end{array} \right) \\ \downarrow P_2 \\ (x^* \cdot 1 = 1 \cdot x^*) \end{array} \right) \end{array} \right) \end{array} \right)$$

(Unicidade do elemento neutro). $(\forall x)(\exists! n)(x \cdot n = x = n \cdot x)$

$\vdash$

$$(\forall x)(x \cdot 1 = x = 1 \cdot x) \stackrel{x=1'}{\rightarrow} (1' \cdot 1 = 1' = 1 \cdot 1') \quad (1)$$

$$(\forall x)(x \cdot 1' = x = 1' \cdot x) \stackrel{x=1}{\rightarrow} (1 \cdot 1' = 1 = 1' \cdot 1) \quad (2)$$

$$\left(1 \stackrel{(2)}{=} 1 \cdot 1' \stackrel{(1)}{=} 1' \cdot 1 \stackrel{(1)}{=} 1' \right) \rightarrow (1 = 1')$$

■

Proposição 9.1 (Distributiva). $(\forall x)(\forall y)(\forall z)((x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z)$

$\vdash$

$$\mathbb{N} \Leftrightarrow (w)(\forall z) \left((z \in w) \leftrightarrow (\forall x)(\forall y)((x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z) \right)$$

$\vdash$

$$L_6 \Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(x + y = x \cdot 1 + y \cdot 1)$$

$$(\forall x)(\forall y) \left(\left(\left(x \stackrel{D_{25}}{=} x \cdot 1 \right) \wedge \left(y \stackrel{D_{25}}{=} y \cdot 1 \right) \right) \stackrel{P_7}{\rightarrow} (x + y = x \cdot 1 + y \cdot 1) \right)$$

■

⊢

$$L_7 \Leftrightarrow (\forall x)(\forall y) ((x + y) \cdot z + (x + y) = x \cdot z + y \cdot z + (x + y))$$

$$\left(\begin{array}{c} H \Leftrightarrow (\forall x)(\forall y) ((x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z) \\ \downarrow P_{4.1} \\ (\forall x)(\forall y) ((x + y) \cdot z + (x + y) = x \cdot z + y \cdot z + (x + y)) \end{array} \right)$$

■

⊢

$$L_8 \Leftrightarrow (\forall x)(\forall y) (x \cdot z + x + y \cdot z + y = x \cdot z^* + y \cdot z^*)$$

$$(\forall x)(\forall y) \left(\left(\left(x \cdot z + x \stackrel{D_{25}}{=} x \cdot z^* \right) \wedge \left(y \cdot z + y \stackrel{D_{25}}{=} y \cdot z^* \right) \right) \stackrel{P_7}{\rightarrow} (x \cdot z + x + y \cdot z + y = x \cdot z^* + y \cdot z^*) \right)$$

■

$$\begin{array}{c}
\left(\begin{array}{c}
(1 \in w) \leftrightarrow (\forall x)(\forall y) \left((x+y) \cdot 1 \stackrel{D_{25}}{=} x+y \stackrel{L_6}{=} x \cdot 1 + y \cdot 1 \right) \\
\wedge \\
H \Leftrightarrow (\forall x)(\forall y) ((x+y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z) \\
\downarrow
\end{array} \right) \\
(z^* \in w) \leftrightarrow \left(\begin{array}{c}
(\forall x)(\forall y) \left((x+y) \cdot z^* \stackrel{D_{25}}{=} (x+y) \cdot z + (x+y) \right) \\
\wedge \\
(\forall x)(\forall y) \left((x+y) \cdot z + (x+y) \stackrel{L_7}{=} x \cdot z + y \cdot z + (x+y) \right) \\
\wedge \\
(\forall x)(\forall y) \left(x \cdot z + y \cdot z + (x+y) \stackrel{P_3}{=} x \cdot z + (y \cdot z + x) + y \right) \\
\wedge \\
(\forall x)(\forall y) \left(x \cdot z + (y \cdot z + x) + y \stackrel{P_5}{=} x \cdot z + x + y \cdot z + y \right) \\
\wedge \\
(\forall x)(\forall y) \left(x \cdot z + x + y \cdot z + y \stackrel{L_8}{=} x \cdot z^* + y \cdot z^* \right) \\
\downarrow \quad P_2 \\
(\forall x)(\forall y) ((x+y) \cdot z^* = x \cdot z^* + y \cdot z^*)
\end{array} \right)
\end{array}$$

$$\therefore (\forall x)(\forall y)(\forall z) ((x+y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z)$$

■

Proposição 9.2 (*Distributiva*). $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z)$

⊢

$$\mathbb{N} \Leftrightarrow (IW)(\forall x) ((x \in w) \leftrightarrow (\forall y)(\forall z)(x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z))$$

⊢

$$L_9 \Leftrightarrow (\forall y)(\forall z)(1 \cdot y + 1 \cdot z = y + z)$$

$$(\forall y)(\forall z) \left(\left(\left(1 \cdot y = y \right)^{P_8} \wedge \left(1 \cdot z = z \right)^{P_8} \right)^{P_7} \rightarrow (1 \cdot y + 1 \cdot z = y + z) \right)$$

■

⊢

$$L_{10} \Leftrightarrow (\forall y)(\forall z)(x \cdot (y + z) + 1 \cdot (y + x) = x \cdot z + y \cdot z + (y + z))$$

$$\left(\begin{array}{c} \left(H \Leftrightarrow (\forall y)(\forall z)(x \cdot (y + z) = x \cdot z + y \cdot z) \wedge (\forall y)(\forall z) \left(1 \cdot (y + z) = y + z \right)^{P_8} \right) \\ \downarrow P_7 \\ (\forall y)(\forall z)(x \cdot (y + z) + 1 \cdot (y + x) = x \cdot z + y \cdot z + y + z) \end{array} \right)$$

■

⊢

$$L_{11} \Leftrightarrow (\forall y)(\forall z)(x \cdot y + y + x \cdot z + z = (x + 1) \cdot y + (x + 1) \cdot z)$$

$$\left(\begin{array}{c} \left((\forall y) \left(x \cdot y + y = (x + 1) \cdot y \right)^{P_{9.1}} \wedge (\forall z) \left(x \cdot z + z = (x + 1) \cdot z \right)^{P_{9.1}} \right) \\ \downarrow P_7 \\ (\forall y)(\forall z)(x \cdot y + y + x \cdot z + z = (x + 1) \cdot y + (x + 1) \cdot z) \end{array} \right)$$

■

⊢

$$L_{12} \Leftrightarrow (\forall y)(\forall z)((x + 1) \cdot y + (x + 1) \cdot z = x^* \cdot y + x^* \cdot z)$$

$$\left(\begin{array}{c} \left((\forall y) \left((x + 1) \cdot y = x^* \cdot y \right)^{D_{23}} \wedge (\forall z) \left((x + 1) \cdot z = x^* \cdot z \right)^{D_{23}} \right) \\ \downarrow P_7 \\ (\forall y)(\forall z)((x + 1) \cdot y + (x + 1) \cdot z = x^* \cdot y + x^* \cdot z) \end{array} \right)$$

■

$$\begin{aligned}
 & \left(\begin{aligned} & \left((1 \in w) \leftrightarrow (\forall y)(\forall z) \left(1 \cdot (y+z) \stackrel{P_8}{=} y+z \stackrel{L_9}{=} 1 \cdot y + 1 \cdot z \right) \right) \\ & \quad \wedge \\ & H \leftrightarrow (\forall y)(\forall z)(x \cdot (y+z) = x \cdot z + y \cdot z) \end{aligned} \right) \\
 & \quad \downarrow \\
 & (x^* \in w) \\
 & \quad \downarrow \\
 & \left((\forall y)(\forall z) \left(x^* \cdot (y+z) \stackrel{D_{25}}{=} (x+1) \cdot (y+z) \right) \right) \\
 & \quad \wedge \\
 & (\forall y)(\forall z) \left((x+1) \cdot (y+z) \stackrel{P_{9,1}}{=} x \cdot (y+z) + 1 \cdot (y+z) \right) \\
 & \quad \wedge \\
 & (\forall y)(\forall z) \left(x \cdot (y+z) + 1 \cdot (y+z) \stackrel{L_{10}}{=} x \cdot y + x \cdot z + (y+z) \right) \\
 & \quad \wedge \\
 & (\forall y)(\forall z) \left(x \cdot y + x \cdot z + (y+z) \stackrel{P_3}{=} x \cdot y + (x \cdot z + y) + z \right) \\
 & \quad \wedge \\
 & (\forall y)(\forall z) \left(x \cdot y + (x \cdot z + y) + z \stackrel{P_5}{=} x \cdot y + (y + x \cdot z) + z \right) \\
 & \quad \wedge \\
 & (\forall y)(\forall z) \left(x \cdot y + (y + x \cdot z) + z \stackrel{P_3}{=} (x \cdot y + y) + x \cdot z + z \right) \\
 & \quad \wedge \\
 & (\forall y)(\forall z) \left((x \cdot y + y) + x \cdot z + z \stackrel{L_{11}}{=} (x+1) \cdot y + (x+1) \cdot z \right) \\
 & \quad \wedge \\
 & (\forall y)(\forall z) \left((x+1) \cdot y + (x+1) \cdot z \stackrel{L_{12}}{=} x^* \cdot y + x^* \cdot z \right) \\
 & \quad \downarrow \quad P_2 \\
 & (\forall y)(\forall z)(x^* \cdot (y+z) = x^* \cdot y + x^* \cdot z)
 \end{aligned}$$

$$\therefore (\forall x)(\forall y)(\forall z)(x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z)$$

■

Proposição 10. (*Associativa*). $(\forall x)(\forall y)(\forall z)((x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z))$

⊢

$$\mathbb{N} \Leftrightarrow (\iota w)(\forall z) \left((z \in w) \leftrightarrow (\forall x)(\forall y)((x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)) \right)$$

⊢

$$L_{13} \Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)((x \cdot y) \cdot z + (x + y) = x \cdot (y \cdot z) + (x + y))$$

$$\left(\begin{array}{c} H \Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)((x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)) \\ \downarrow P_{4.1} \\ (\forall x)(\forall y)((x \cdot y) \cdot z + (x + y) = x \cdot (y \cdot z) + (x + y)) \end{array} \right)$$

■

$$\begin{array}{c}
\left(\left((1 \in w) \leftrightarrow (\forall x)(\forall y) \left(\left(\left(x \cdot (y \cdot 1) = x \cdot y \right) \wedge \left((x \cdot y) \cdot 1 = x \cdot y \right) \right) \right) \right) \right) \\
\downarrow P_2 \\
(x \cdot y) \cdot 1 = (x \cdot y) \cdot 1 \\
\wedge \\
H \Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)((x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)) \\
\downarrow \\
\left((z^* \in w) \leftrightarrow \left(\left((\forall x)(\forall y) \left((x \cdot y) \cdot z^* = (x \cdot y) \cdot z + (x + y) \right) \right) \wedge \right. \right. \\
\left. \left((\forall x)(\forall y) \left((x \cdot y) \cdot z + (x + y) = x \cdot (y \cdot z) + (x + y) \right) \right) \wedge \right. \\
\left. \left((\forall x)(\forall y) \left(x \cdot (y \cdot z) + (x \cdot y) = x \cdot ((y \cdot z) + y) \right) \right) \wedge \right. \\
\left. \left((\forall x)(\forall y) \left(x \cdot ((y \cdot z) + y) = x \cdot (y \cdot z^*) \right) \right) \right) \downarrow P_2 \\
\left. \left((\forall x)(\forall y)((x \cdot y) \cdot z^* = x \cdot (y \cdot z^*)) \right) \right)
\end{array}$$

$$\therefore (\forall x)(\forall y)(\forall z)((x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z))$$

■

Proposição 11. (Comutativa). $(\forall x)(\forall y)(x \cdot y = y \cdot x)$

⊢

$$\mathbb{N} \Leftrightarrow (\iota w)(\forall x)((x \in w) \leftrightarrow (\forall y)(x \cdot y = y \cdot x))$$

⊢

$$L_{14} \Leftrightarrow (\forall y)(x \cdot y + 1 \cdot y = y \cdot x + y)$$

$$\left(\begin{array}{c} \left((\forall y)(x \cdot y = y \cdot x) \wedge (\forall y) \left(1 \cdot y = y \right)^{P_8} \right) \\ \downarrow P_7 \\ (\forall y)(x \cdot y + 1 \cdot y = y \cdot x + y) \end{array} \right)$$

■

$$\left(\begin{array}{c} \left((1 \in w) \leftrightarrow (\forall y) \left(1 \cdot y = y = y \cdot 1 \right)^{P_8 D_{25}} \right) \\ \wedge \\ H \Leftrightarrow (\forall y)(x \cdot y = y \cdot x) \\ \downarrow \\ (x^* \in w) \leftrightarrow \left(\begin{array}{c} (\forall y) \left(x^* \cdot y = (x + 1) \cdot y \right)^{D_{25}} \\ \wedge \\ (\forall y) \left((x + 1) \cdot y = x \cdot y + 1 \cdot y \right)^{P_{9,1}} \\ \wedge \\ (\forall y) \left(x \cdot y + 1 \cdot y = y \cdot x + y \right)^{L_{14}} \\ \wedge \\ (\forall y) \left(y \cdot x + y = y \cdot x^* \right)^{D_{25}} \\ \downarrow P_2 \\ (\forall y)(x^* \cdot y = y \cdot x^*) \end{array} \right) \end{array} \right)$$

$$\therefore (\forall x)(\forall y)(x \cdot y = y \cdot x)$$

■

Proposição 12. (*Lei do Cancelamento*). $(\forall x)(\forall y)(\forall c)((x = y) \leftrightarrow (x \cdot c = y \cdot c))$

$\vdash$

$$\mathbb{N} \Leftrightarrow (\iota w)(\forall c) \left((c \in w) \leftrightarrow (\forall x)(\forall y)((x = y) \leftrightarrow (x \cdot c = y \cdot c)) \right)$$

$\vdash_1$

$$(\forall x)(\forall y)((x = y) \rightarrow (x \cdot c = y \cdot c))$$

⊢

$$L_{15} \Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(x = y) \rightarrow (x \cdot 1 = y \cdot 1)$$

$$\left(H \Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(y = x) \wedge (\forall x) \left(x \stackrel{D_{25}}{=} x \cdot 1 \right) \right) \stackrel{P_2}{\rightarrow} (\forall x)(\forall y)(y = x \cdot 1) \quad (1)$$

$$(\forall x)(\forall y) \left(\left(x \cdot 1 \stackrel{(1)}{=} y \right) \wedge \left(y \stackrel{D_{25}}{=} y \cdot 1 \right) \right) \stackrel{P_2}{\rightarrow} (\forall x)(\forall y)(x \cdot 1 = y \cdot 1)$$

■

⊢

$$L_{16} \Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)((x \cdot c = y \cdot c) \rightarrow (x \cdot c + x = y \cdot c + y))$$

$$\left(\begin{array}{c} (H \Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(x = y) \wedge (\forall x)(\forall y)(x \cdot c = y \cdot c)) \\ \downarrow P_7 \\ (\forall x)(\forall y)(x \cdot c + x = y \cdot c + y) \end{array} \right)$$

■

$$\left(\begin{array}{c} \left((\forall x)(\forall y) \left((x = y) \stackrel{L_{15}}{\rightarrow} (x \cdot 1 = y \cdot 1) \right) \right) \\ \wedge \\ H \Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)((x = y) \rightarrow (x \cdot c = y \cdot c)) \\ \downarrow \\ \left((c^* \in w) \leftrightarrow (\forall x)(\forall y) \left(\begin{array}{c} (x = y) \\ \downarrow H \\ (x \cdot c = y \cdot c) \\ \downarrow L_{16} \\ (x \cdot c + x = y \cdot c + y) \\ \downarrow D_{25} \\ (x \cdot c^* = y \cdot c^*) \end{array} \right) \right) \end{array} \right)$$

■

⊢₂

$$(\forall x)(\forall y)((x \cdot c = y \cdot c) \rightarrow (x = y))$$

⊢

$$L_{17} \Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(x \cdot 1 = y \cdot 1) \rightarrow (x = y)$$

$$\left((\forall x) \left(x = x \cdot 1 \right) \wedge H \Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(x \cdot 1 = y \cdot 1) \right) \xrightarrow{P_2} (\forall x)(\forall y)(x = y \cdot 1) \quad (2)$$

$$(\forall x)(\forall y) \left(\left(\overset{(2)}{x = y \cdot 1} \right) \wedge \left(y \cdot 1 = y \right) \right) \xrightarrow{P_2} (\forall x)(\forall y)(x = y)$$

■

⊢

$$L_{18} \Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)((x \cdot c + x = y \cdot c + y) \rightarrow (x = y))$$

$$(H \Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(x \cdot c = y \cdot c) \wedge (\forall x)(\forall y)(x \cdot c + x = y \cdot c + y)) \xrightarrow{P_{4.2}} (\forall x)(\forall y)(x = y)$$

■

$$\left(\left(\left((\forall x)(\forall y) \left((x \cdot 1 = y \cdot 1) \xrightarrow{L_{17}} (x = y) \right) \right) \wedge \left(H \Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)((x \cdot c = y \cdot c) \rightarrow (x = y)) \right) \right) \downarrow \left((c^* \in w) \leftrightarrow (\forall x)(\forall y) \left(\begin{array}{c} (x \cdot c^* = y \cdot c^*) \\ \downarrow D_{25} \\ (x \cdot c + x = y \cdot c + y) \\ \downarrow L_{18} \\ (x = y) \end{array} \right) \right) \right)$$

■

$$\therefore (\forall x)(\forall y)(\forall c)((x = y) \leftrightarrow (x \cdot c = y \cdot c))$$

■

2.2.1 Relação de ordem em $\mathbb{N}$

Definição 27. Dizemos que x é menor que y se existir um z tal que y é a soma de x e z .

$$(x < y) \Leftrightarrow (\exists z)(y = x + z).$$

Exemplo 11. $3 < 7 \Leftrightarrow (\exists 4)(7 = 3 + 4)$.

Definição 28. Uma relação $\leq \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é chamada de ordem em $\mathbb{N}$ se satisfaz as seguintes propriedades:

- i) $(\forall a)(a \leq a) \leftrightarrow (a, a) \in \leq$;
- ii) $(\forall a)(\forall b)((a \leq b) \wedge (b \leq a)) \rightarrow (a = b)$;
- iii) $(\forall a)(\forall b)(\forall c)((a \leq b) \wedge (b \leq c)) \rightarrow (a \leq c)$.

Definimos a relação de ordem $\leq$ como sendo

$$\leq \stackrel{\text{def}}{=} \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, (a < b) \vee (a = b)\}.$$

Mostremos que a relação $\leq$ é uma relação de ordem em $\mathbb{N}$.

Proposição 13. (*Reflexiva*). $(\forall a)(a \leq a)$

$\vdash$

$$\begin{aligned} & (\forall a) \left((a = a) \rightarrow ((a = a) \vee (a < a)) \rightarrow (a \leq a) \right) \\ & \therefore (\forall a)(a \leq a) \end{aligned}$$

■

Proposição 14. (*Antissimétrica*). $(\forall a)(\forall b)((a \leq b) \wedge (b \leq a)) \rightarrow (a = b)$

$\vdash_1$

$$(\forall a)(\forall b) \left((a = b) \wedge (b = a) \xrightarrow{P_2} (a = b) \right)$$

■

$\vdash_2$

$$\left(\begin{array}{c} (\forall a)(\forall b)((a = b) \wedge (b < a)) \\ \downarrow \\ (\forall a)(\forall b)((a = b) \wedge (\exists q)(a = b + q)) \\ \downarrow \\ (b = b + q) \\ \downarrow \\ (b < b) \\ \downarrow \\ \perp \end{array} \right)$$

■

$\vdash_3$

$$\left(\begin{array}{c} (\forall a)(\forall b)((a < b) \wedge (b = a)) \\ \Downarrow \\ (\forall a)(\forall b)((\exists q)(b = a + q) \wedge (b = a)) \\ \downarrow \\ (a = a + q) \\ \downarrow \\ (a < a) \\ \downarrow \\ \Lambda \end{array} \right)$$

■

$\vdash_4$

$$\left(\begin{array}{c} (\forall a)(\forall b)((a < b) \wedge (b < a)) \\ \Downarrow \\ (\forall a)(\forall b)((\exists q_1)(b = a + q_1) \wedge (\exists q_2)(a = b + q_2)) \\ \downarrow \\ (\exists(q_1 + q_2) \in \mathbb{N})(b = b + (q_1 + q_2)) \\ \downarrow \\ (b < b) \\ \downarrow \\ \Lambda \end{array} \right)$$

■

$$\therefore (\forall a)(\forall b)((a \leq b) \wedge (b \leq a)) \rightarrow (a = b)$$

■

Proposição 15. (*Transitiva*). $(\forall a)(\forall b)(\forall c)((a \leq b) \wedge (b \leq c)) \rightarrow (a \leq c)$

$\vdash_1$

$$(\forall a)(\forall b)(\forall c) \left(((a = b) \wedge (b = c)) \xrightarrow{P_2} (a = c) \right)$$

■

$\vdash_2$

$$\left(\begin{array}{c} (\forall a)(\forall b)(\forall c)((a = b) \wedge (b < c)) \\ \Downarrow \\ (\forall a)(\forall b)(\forall c)((a = b) \wedge (\exists q)(c = b + q)) \\ \downarrow \\ (c = a + q) \\ \downarrow \\ (a < c) \end{array} \right)$$

■

$\vdash_3$

$$\left(\begin{array}{c} (\forall a)(\forall b)(\forall c)((a < b) \wedge (b = c)) \\ \Downarrow \\ (\forall a)(\forall b)(\forall c)((\exists q)(b = a + q) \wedge (b = c)) \\ \downarrow \\ (c = a + q) \\ \downarrow \\ (a < c) \end{array} \right)$$

■

$\vdash_4$

$$\left(\begin{array}{c} (\forall a)(\forall b)(\forall c)((a < b) \wedge (b < c)) \\ \Downarrow \\ \left(\begin{array}{c} (\forall a)(\forall b)(\exists q_1)(b = a + q_1) \wedge (\forall b)(\forall c)(\exists q_2)(c = b + q_2) \\ \downarrow \\ (\exists(q_1 + q_2) \in \mathbb{N})(c = a + (q_1 + q_2)) \\ \downarrow \\ (a < c) \end{array} \right) \end{array} \right)$$

■

$$\therefore (\forall a)(\forall b)(\forall c) \left(((a \leq b) \wedge (b \leq c)) \rightarrow (a \leq c) \right)$$

■

CAPÍTULO 3

O SISTEMA NUMÉRICO DOS NÚMEROS INTEIROS

Assim como no capítulo anterior, definiremos a operação de adição e multiplicação de números inteiros por meio de axiomas e, depois, mostraremos que $S_2 = (\mathbb{Z}, \{+, \cdot\})$ é um sistema numérico.

3.1 Construção dos Números Inteiros

A construção axiomática do conjunto dos números naturais, apresentada pelo matemático Giuseppe Peano, em 1889, possibilitou a construção formal de outros conjuntos numéricos importantes da matemática.

O conjunto dos números inteiros pode ser construído da seguinte forma:

Definição 29. Uma relação binária R no conjunto $\mathbb{N}$ é qualquer subconjunto do produto cartesiano $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, isto é, $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Definição 30. Seja $\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais. Uma relação R em $\mathbb{N}$ é chamada de

relação de equivalência se possuir as seguintes propriedades:

i) (reflexiva). $(\forall a)(aRa)$;

ii) (simétrica). $(\forall a)(\forall b)(aRb \rightarrow bRa)$;

iii) (transitiva). $(\forall a)(\forall b)(\forall c)((aRb) \wedge (bRc) \rightarrow (aRc))$.

Definição 31. Sejam $(x, y), (w, z) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y): (x \in \mathbb{N}) \wedge (y \in \mathbb{N})\}$. Dizemos que (x, y) está relacionado com (w, z) quando $x + z = y + w$, isto é,

$$(x, y)R(w, z) \Leftrightarrow x + z = y + w.$$

Proposição 16. A relação $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sobre $\mathbb{N}$ é de equivalência sobre $\mathbb{N}$.

i) $(\forall(a, b))((a, b)R(a, b))$

⊢

$$\begin{aligned} (\forall(a, b)) &\rightarrow \left(a + b \stackrel{P_5}{=} b + a \right) \stackrel{D_{31}}{\rightarrow} ((a, b)R(a, b)) \\ &\therefore (\forall(a, b))((a, b)R(a, b)) \end{aligned}$$

■

ii) $(\forall(a, b))(\forall(c, d))(((a, b)R(c, d)) \rightarrow ((c, d)R(a, b)))$

⊢

$$\left(\begin{array}{c} (\forall(a, b))(\forall(c, d))((a, b)R(c, d)) \\ \downarrow D_{31} \\ (a + d = b + c) \\ \downarrow P_5 \\ (d + a = c + b) \\ \downarrow \\ (c + b = d + a) \\ \downarrow D_{31} \\ ((c, d)R(a, b)) \end{array} \right)$$

$$\therefore (\forall(a, b))(\forall(c, d))(((a, b)R(c, d)) \rightarrow ((c, d)R(a, b)))$$

■

iii) $(\forall(a, b))(\forall(c, d))(\forall(e, f))(((a, b)R(c, d)) \wedge ((c, d)R(e, f)) \rightarrow ((a, b)R(e, f)))$

⊢

$$\left(\begin{array}{c} ((\forall(a,b))(\forall(c,d))(\forall(e,f))((a,b)R(c,d)) \wedge ((c,d)R(e,f))) \\ \downarrow D_{31} \\ ((c+f=d+e) \wedge (a+d=b+c)) \\ P_{4.1} \downarrow P_{4.2} \\ ((a+c+f=a+d+e) \wedge (a+d+e=b+c+e)) \\ \downarrow P_2 \\ (a+c+f=b+c+e) \\ P_5 \downarrow P_{4.1} \\ (a+f=b+e) \\ \downarrow D_{31} \\ ((a,b)R(e,f)) \end{array} \right)$$

$$\therefore (\forall(a,b))(\forall(c,d))(\forall(e,f)) \left(((a,b)R(c,d)) \wedge ((c,d)R(e,f)) \rightarrow ((a,b)R(e,f)) \right)$$

■

Definição 32. Seja R uma relação de equivalência em $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Se $(z, w) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, a classe de equivalência do par ordenado (z, w) , denotada por $\overline{(z, w)}$, consiste de todos os elementos de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ que são equivalentes à (z, w) , isto é,

$$\overline{(z, w)} \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y): (x, y)R(z, w)\}, \text{ onde } (z, w) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}.$$

Definição 33. O conjunto quociente de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ por R , constituído pelas classes de equivalência $\overline{(z, w)}$, se denota por $\mathbb{Z}$ e será chamado de *conjunto dos números inteiros*.

Assim,

$$\mathbb{Z} = (\mathbb{N} \times \mathbb{N})/R \stackrel{\text{def}}{=} \{\overline{(z, w)}: (z, w) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\}.$$

Se adotarmos o sistema de numeração hindu-arábico para denotarmos as classes de equivalência

$$(\forall n)(n \in \mathbb{N}) \left((-n \Leftrightarrow \overline{(1, n+1)}) \wedge (0 \Leftrightarrow \overline{(1, 1)}) \wedge (n \Leftrightarrow \overline{(n+1, 1)}) \right),$$

então o conjunto dos números inteiros será

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\},$$

como conhecemos.

3.2 Aritmética dos Números Inteiros

Ao longo desta seção definiremos as operações do conjunto $\mathbb{Z}$ e, posteriormente, formalizaremos as operações de adição e multiplicação.

3.2.1 Operação de Adição

Definição 27. Uma operação binária sobre $\mathbb{Z}$ é uma aplicação $\varphi: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$.

Definição 34. A operação de adição sobre $\mathbb{Z}$ é uma operação binária sobre $\mathbb{Z}$, denotada por $+$: $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, que a cada par ordenado (x, y) de números naturais associa o número natural $x + y$ definido por

$$\begin{cases} x = \overline{(a, b)}, (a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \text{ e } y = \overline{(c, d)}, (c, d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \\ x + y = \overline{(a + c, b + d)} \end{cases}$$

Exemplo 12. $7 + 5 = \overline{(8, 1)} + \overline{(6, 1)} = \overline{(8 + 6, 1 + 1)} = \overline{(14, 2)} = \overline{(13, 1)} = 12;$

Exemplo 13. $-7 + 6 = \overline{(1, 8)} + \overline{(7, 1)} = \overline{(1 + 7, 8 + 1)} = \overline{(8, 9)} = \overline{(1, 2)} = -1;$

Exemplo 14. $7 + (-6) = \overline{(8, 1)} + \overline{(1, 7)} = \overline{(8 + 1, 1 + 7)} = \overline{(9, 8)} = \overline{(2, 1)} = 1;$

Exemplo 15. $7 + (-7) = \overline{(8, 1)} + \overline{(1, 8)} = \overline{(8 + 1, 1 + 8)} = \overline{(9, 9)} = 0.$

Vamos mostrar que a soma está bem definida em $\mathbb{Z}$.

Proposição 17.

$$(\forall \overline{(a, b)})(\forall \overline{(a', b')})(\forall \overline{(c, d)})(\forall \overline{(c', d')}) \left(\begin{array}{c} \left(\overline{(a, b)} = \overline{(a', b')} \right) \\ \wedge \\ \left(\overline{(c, d)} = \overline{(c', d')} \right) \\ \downarrow \\ \overline{(a, b)} + \overline{(c, d)} = \overline{(a', b')} + \overline{(c', d')} \end{array} \right)$$

$\vdash$

$$\begin{array}{c}
(\forall \overline{(a,b)})(\forall \overline{(a',b')})(\forall \overline{(c,d)})(\forall \overline{(c',d')}) \left(\begin{array}{c}
\overline{(a,b)} = \overline{(a',b')} \wedge \overline{(c,d)} = \overline{(c',d')} \\
\downarrow D_{31} \quad \downarrow D_{32} \\
((a,b)R(a',b')) \wedge ((c,d)R(c',d')) \\
\downarrow D_{31} \\
((a+b' = a' + b) \wedge (c+d' = c' + d)) \\
\downarrow P_7 \\
((a+b') + (c+d') = (a'+b) + (c'+d)) \\
\downarrow P_3 \quad \downarrow P_5 \\
((a+c) + (b'+d') = (b+d) + (a'+c')) \\
\downarrow D_{31} \quad \downarrow D_{32} \\
\overline{(a+c, b+d)} = \overline{(a'+c', b'+d')} \\
\downarrow D_{34} \\
\overline{(a,b)} + \overline{(c,d)} = \overline{(a',b')} + \overline{(c',d')}
\end{array} \right)
\end{array}$$

$$\therefore (\forall \overline{(a,b)})(\forall \overline{(a',b')})(\forall \overline{(c,d)})(\forall \overline{(c',d')}) \left(\begin{array}{c}
\overline{(a,b)} = \overline{(a',b')} \\
\wedge \\
\overline{(c,d)} = \overline{(c',d')} \\
\downarrow \\
\overline{(a,b)} + \overline{(c,d)} = \overline{(a',b')} + \overline{(c',d')}
\end{array} \right)$$

■

Agora, vamos mostrar as propriedades dos números inteiros.

Proposição 18. (Comutativa). $(\forall \overline{(a,b)})(\forall \overline{(c,d)})(\overline{(a,b)} + \overline{(c,d)} = \overline{(c,d)} + \overline{(a,b)})$

⊢

$$\left(\overline{(a,b)} + \overline{(c,d)} \xrightarrow{D_{34}} \overline{(a+c, b+d)} \xrightarrow[P_{17}]{P_3} \overline{(c+a, d+b)} \xrightarrow{D_{34}} \overline{(c,d)} + \overline{(a,b)} \right)$$

$$\therefore (\forall \overline{(a,b)})(\forall \overline{(c,d)})(\overline{(a,b)} + \overline{(c,d)} = \overline{(c,d)} + \overline{(a,b)})$$

■

Proposição 19. (Associativa).

$$(\forall \overline{(a,b)})(\forall \overline{(c,d)})(\forall \overline{(e,f)}) \left((\overline{(a,b)} + \overline{(c,d)}) + \overline{(e,f)} = \overline{(a,b)} + (\overline{(c,d)} + \overline{(e,f)}) \right)$$

⊢

$$\left(\begin{array}{c} (\forall \overline{(a,b)})(\forall \overline{(c,d)})(\forall \overline{(e,f)}) \left(((\overline{(a,b)} + \overline{(c,d)}) + \overline{(e,f)}) \stackrel{D_{34}}{=} \overline{(a+c, b+d)} + \overline{(e,f)} \right) \\ \wedge \\ (\forall \overline{(a,b)})(\forall \overline{(c,d)})(\forall \overline{(e,f)}) \left(\overline{(a+c, b+d)} + \overline{(e,f)} \stackrel{D_{34}}{=} \overline{(a+c) + e, (b+d) + f} \right) \\ \wedge \\ (\forall \overline{(a,b)})(\forall \overline{(c,d)})(\forall \overline{(e,f)}) \left(\overline{(a+c) + e, (b+d) + f} \stackrel{P_3}{=} \overline{(a+(c+e), b+(d+f))} \right) \\ \wedge \\ (\forall \overline{(a,b)})(\forall \overline{(c,d)})(\forall \overline{(e,f)}) \left(\overline{(a+(c+e), b+(d+f))} \stackrel{D_{34}}{=} \overline{(a,b)} + \overline{(c+e, d+f)} \right) \\ \wedge \\ (\forall \overline{(a,b)})(\forall \overline{(c,d)})(\forall \overline{(e,f)}) \left(\overline{(a,b)} + \overline{(c+e, d+f)} \stackrel{D_{34}}{=} \overline{(a,b)} + \overline{(c,d)} + \overline{(e,f)} \right) \end{array} \right)$$

↓ $P_{16. (iii)}$

$$\therefore (\forall \overline{(a,b)})(\forall \overline{(c,d)})(\forall \overline{(e,f)}) \left(((\overline{(a,b)} + \overline{(c,d)}) + \overline{(e,f)}) = \overline{(a,b)} + (\overline{(c,d)} + \overline{(e,f)}) \right)$$

■

Proposição 20. (*Elemento neutro*). $(\forall \overline{(a,b)})(\exists \overline{(1,1)})(\overline{(a,b)} + \overline{(1,1)} = \overline{(a,b)})$

⊢

$$\left(\overline{(a,b)} + \overline{(1,1)} \stackrel{D_{34}}{=} \overline{(a+1, b+1)} \stackrel{P_3}{=} \overline{(a,b)} \right) \stackrel{D_{31}}{\leftrightarrow} \left((a+1) + b \stackrel{P_3}{=} (b+1) + a \right) \stackrel{D_{32}}{\leftrightarrow} \left((a+1) + b \stackrel{P_5}{=} (b+1) + a \right)$$

$$\therefore (\forall \overline{(a,b)})(\exists \overline{(1,1)})(\overline{(a,b)} + \overline{(1,1)} = \overline{(a,b)})$$

■

Proposição 21. (*Lei do cancelamento*).

$$(\forall \overline{(a,b)})(\forall \overline{(c,d)})(\forall \overline{(e,f)})(\overline{(a,b)} + \overline{(e,f)} = \overline{(c,d)} + \overline{(e,f)} \rightarrow \overline{(a,b)} = \overline{(c,d)})$$

⊢

$$(\forall \overline{(a,b)})(\forall \overline{(c,d)})(\forall \overline{(e,f)}) \left(\begin{array}{c} \overline{(a,b)} + \overline{(e,f)} = \overline{(c,d)} + \overline{(e,f)} \\ \downarrow D_{34} \\ \overline{(a+e,b+f)} = \overline{(c+e,d+f)} \\ D_{31} \downarrow D_{32} \\ ((a+e) + (d+f) = (b+f) + (c+e)) \\ P_3 \downarrow P_5 \\ ((a+d) + e + f = (b+c) + e + f) \\ \downarrow P_{4.1} \\ (a+d = b+c) \\ \downarrow D_{34} \\ \overline{(a,b)} = \overline{(c,d)} \end{array} \right)$$

$$\therefore (\forall \overline{(a,b)})(\forall \overline{(c,d)})(\forall \overline{(e,f)})(\overline{(a,b)} + \overline{(e,f)} = \overline{(c,d)} + \overline{(e,f)} \rightarrow \overline{(a,b)} = \overline{(c,d)})$$

■

Proposição 22. (*Elemento oposto*). $(\forall \overline{(a,b)})(\exists! \overline{(c,d)})(\overline{(a,b)} + \overline{(c,d)} = \overline{(1,1)})$

$\vdash_1$

$$(\forall \overline{(a,b)})(\exists \overline{(c,d)})(\overline{(a,b)} + \overline{(c,d)} = \overline{(1,1)})$$

$$(\overline{(c,d)} = \overline{(b,a)}) \rightarrow \left(\begin{array}{c} \overline{(a,b)} + \overline{(b,a)} = \overline{(1,1)} \\ \downarrow D_{34} \\ \overline{(a+b,b+a)} = \overline{(1,1)} \\ D_{31} \downarrow D_{32} \\ \left(\begin{array}{c} P_3 \\ a+b+1 = b+a+1 \\ P_5 \end{array} \right) \end{array} \right)$$

$$\therefore (\forall \overline{(a,b)})(\exists \overline{(c,d)})(\overline{(a,b)} + \overline{(c,d)} = \overline{(1,1)})$$

■

$\vdash_2$

$$(\forall \overline{(a,b)})(\exists! \overline{(c,d)})(\overline{(a,b)} + \overline{(c,d)} = \overline{(1,1)})$$

$$(\exists \overline{(c, d)})(\exists \overline{(c', d')}) \left(\overline{(c, d)} \neq \overline{(c', d')} \stackrel{\neg D_{31}}{\Leftrightarrow} (c + d' \neq d + c') \right) \quad (1)$$

$$\left(\left(\left(\overline{(a, b)} + \overline{(c, d)} = \overline{(1, 1)} \stackrel{D_{34}}{\rightarrow} \overline{(a + c, b + d)} = \overline{(1, 1)} \right) \right. \right. \\ \wedge \\ \left. \left(\overline{(a, b)} + \overline{(c', d')} = \overline{(1, 1)} \stackrel{D_{34}}{\rightarrow} \overline{(a + c', b + d')} = \overline{(1, 1)} \right) \right) \\ \begin{array}{c} D_{31} \quad \downarrow \quad D_{32} \\ \left(\begin{array}{c} (a + c + 1 = b + d + 1) \\ \wedge \\ (a + c' + 1 = b + d' + 1) \end{array} \right) \\ \begin{array}{c} P_3 \quad \downarrow \quad P_7 \\ (a + c + 1 + b + d' + 1 = b + d + 1 + a + c' + 1) \\ P_3 \quad \downarrow \quad P_5 \\ (c + d' + a + b + 1 + 1 = d + c' + a + b + 1 + 1) \\ \downarrow \quad P_{4.1} \\ (c + d' = d + c') \\ D_{31} \quad \downarrow \quad D_{32} \\ \overline{(c, d)} = \overline{(c', d')} \\ \downarrow \quad (1) \\ \Lambda \end{array} \end{array} \right)$$

$$\therefore (\forall \overline{(a, b)})(\exists \overline{(c, d)})(\overline{(a, b)} + \overline{(c, d)} = \overline{(1, 1)})$$

■

3.2.2 Operação de Multiplicação

Definição 35. A operação de multiplicação sobre $\mathbb{Z}$ é uma aplicação binária em $\mathbb{Z}$, denotada por $\cdot : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, que associa cada par ordenado (x, y) de números inteiros associa o número inteiro $x \cdot y$, definido por

$$\begin{cases} (x = \overline{(a, b)}, (a, b) \in \mathbb{N}) \wedge (y = \overline{(c, d)}, (c, d) \in \mathbb{N}) \\ x \cdot y = \overline{(a \cdot c + b \cdot d, a \cdot d + b \cdot c)} \end{cases}$$

Mostremos que a multiplicação está bem definida em $\mathbb{Z}$.

Proposição 23.

$$(\forall \overline{(a, b)})(\forall \overline{(c, d)})(\forall \overline{(a', b')})(\forall \overline{(c', d')}) \left(\begin{array}{c} ((\overline{(a, b)} = \overline{(a', b')}) \wedge (\overline{(c, d)} = \overline{(c', d')})) \\ \downarrow \\ (\overline{(a, b)} \cdot \overline{(c, d)} = \overline{(a', b')} \cdot \overline{(c', d')}) \end{array} \right)$$

$\vdash$

$$(\forall \overline{(a, b)})(\forall \overline{(a', b')}) \left(\begin{array}{c} (\overline{(a, b)} = \overline{(a', b')}) \\ \begin{array}{ccc} D_{31} & \downarrow & D_{32} \\ (a + b' = b + a') & & \\ P_{9,1} & \downarrow & P_{12} \end{array} \\ \left(\begin{array}{c} (ac + b'c = bc + a'c) \\ \wedge \\ (ad + b'd = bd + a'd) \end{array} \right) \\ \begin{array}{ccc} P_3 & \downarrow & P_7 \\ (ac + b'c + bd + a'd = bc + a'c + ad + b'd) & & \\ P_3 & \downarrow & P_5 \\ (ac + bd + a'd + b'c = ad + bc + a'c + b'd) & & \\ D_{31} & \downarrow & D_{32} \\ (\overline{(ac + bd, ad + bc)} = \overline{(a'c + b'd, a'd + b'c)}) & & \\ \downarrow & D_{35} & \\ (\overline{(a, b)} \cdot \overline{(c, d)} = \overline{(a', b')} \cdot \overline{(c, d)}) & (1) & \end{array} \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned}
& \left(\begin{array}{c} \overline{(c, d)} = \overline{(c', d')} \\ \downarrow D_{31} \\ (c + d' = d + c') \\ P_{12} \quad \downarrow \quad P_{9,2} \\ \left(\begin{array}{c} (a'c + a'd' = a'd + a'c') \\ \wedge \\ (b'c + b'd' = b'd + b'c') \end{array} \right) \\ P_3 \quad \downarrow \quad P_7 \\ (a'c + a'd' + b'd + b'c' = a'd + a'c' + b'c + b'd') \\ P_3 \quad \downarrow \quad P_5 \\ (a'c + b'd + a'd' + b'c' = a'd + b'c + a'c' + b'd') \\ D_{31} \quad \downarrow \quad D_{32} \\ \overline{(a'c + b'd, a'd + b'c)} = \overline{(a'c' + b'd', a'd' + b'c')} \\ \downarrow D_{35} \\ \overline{(a', b') \cdot (c, d)} = \overline{(a', b') \cdot (c', d')} \quad (2) \end{array} \right) \\
& (\forall \overline{(a', b')})(\forall \overline{(c', d')})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\begin{array}{c} \left(\overline{(a, b)} \cdot \overline{(c, d)} \stackrel{(1)}{=} \overline{(a', b')} \cdot \overline{(c, d)} \right) \\ \wedge \\ \left(\overline{(a', b')} \cdot \overline{(c, d)} \stackrel{(2)}{=} \overline{(a', b')} \cdot \overline{(c', d')} \right) \\ \downarrow P_{16. (iii)} \\ \overline{(a, b)} \cdot \overline{(c, d)} = \overline{(a', b')} \cdot \overline{(c', d')} \end{array} \right) \\
& (\forall \overline{(a, b)})(\forall \overline{(a', b')})(\forall \overline{(a', b')})(\forall \overline{(c', d')})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \therefore (\forall \overline{(a, b)})(\forall \overline{(c, d)})(\forall \overline{(a', b')})(\forall \overline{(c', d')}) \left(\begin{array}{c} ((\overline{(a, b)} = \overline{(a', b')}) \wedge (\overline{(c, d)} = \overline{(c', d')})) \\ \downarrow \\ \overline{(a, b)} \cdot \overline{(c, d)} = \overline{(a', b')} \cdot \overline{(c', d')} \end{array} \right)
\end{aligned}$$

■

Exemplo 16. $(-4) \cdot (-4) = \overline{(1, 5)} \cdot \overline{(1, 5)} = \overline{(1 \cdot 1 + 5 \cdot 5, 1 \cdot 5 + 5 \cdot 1)} = \overline{(1 + 25, 5 + 5)} = \overline{(26, 10)} = \overline{(17, 1)} = 16;$

Exemplo 17. $(-4) \cdot 4 = \overline{(1, 5)} \cdot \overline{(5, 1)} = \overline{(1 \cdot 5 + 5 \cdot 1, 1 \cdot 1 + 5 \cdot 5)} = \overline{(5 + 5, 1 + 25)} = \overline{(10, 26)} = \overline{(1, 17)} = -16.$

Mostremos as propriedades da multiplicação dos números inteiros.

Proposição 24. (*Comutativa*). $(\forall \overline{(a, b)})(\forall \overline{(c, d)})(\overline{(a, b)} \cdot \overline{(c, d)} = \overline{(c, d)} \cdot \overline{(a, b)})$

⊢

$$\left(\overline{(a, b)} \cdot \overline{(c, d)} \xrightarrow{D_{35}} \overline{(ac + bd, ad + bc)} \xrightarrow[P_{17}]{P_{11}} \overline{(ca + db, da + cb)} \xrightarrow{D_{35}} \overline{(c, d)} \cdot \overline{(a, b)} \right)$$

$$\therefore (\forall \overline{(a, b)})(\forall \overline{(c, d)})(\overline{(a, b)} \cdot \overline{(c, d)} = \overline{(c, d)} \cdot \overline{(a, b)})$$

■

Proposição 25. (*Associativa*).

$$(\forall \overline{(a, b)})(\forall \overline{(c, d)})(\forall \overline{(e, f)}) \left((\overline{(a, b)} \cdot \overline{(c, d)}) \cdot \overline{(e, f)} = \overline{(a, b)} \cdot (\overline{(c, d)} \cdot \overline{(e, f)}) \right)$$

⊢

$$(\forall \overline{(a, b)})(\forall \overline{(c, d)})(\forall \overline{(e, f)})$$

$$\left(\begin{array}{c} \left(\overline{(a, b)} \cdot \overline{(c, d)} \right) \cdot \overline{(e, f)} \xrightarrow{D_{35}} \overline{(ac + bd, ad + bc)} \cdot \overline{(e, f)} \\ \wedge \\ \overline{(ac + bd, ad + bc)} \cdot \overline{(e, f)} \xrightarrow{D_{35}} \overline{((ac + bd)e + (ad + bc)f, (ac + bd)f + (ad + bc)e)} \\ \wedge \\ \overline{((ac + bd)e + (ad + bc)f, (ac + bd)f + (ad + bc)e)} \xrightarrow{P_{9,1}} \overline{(ace + bde + adf + bcf, acf + bdf + ade + bce)} \end{array} \right) \\ \left(\begin{array}{c} \overline{(a, b)} \cdot (\overline{(c, d)} \cdot \overline{(e, f)}) \xrightarrow{D_{35}} \overline{(a, b)} \cdot \overline{(ce + df, cf + de)} \\ \wedge \\ \overline{(a, b)} \cdot \overline{(ce + df, cf + de)} \xrightarrow{D_{35}} \overline{(a(ce + df) + b(cf + de), a(cf + de) + b(ce + df))} \\ \wedge \\ \overline{(a(ce + df) + b(cf + de), a(cf + de) + b(ce + df))} \xrightarrow{P_{9,2}} \overline{(ace + bde + adf + bcf, acf + bdf + ade + bce)} \end{array} \right) \\ \downarrow P_2 \\ \overline{(a, b)} \cdot \overline{(c, d)} \cdot \overline{(e, f)} = \overline{(a, b)} \cdot (\overline{(c, d)} \cdot \overline{(e, f)}) \end{array} \right)$$

$$\therefore (\forall \overline{(a,b)})(\forall \overline{(c,d)})(\forall \overline{(e,f)}) \left((\overline{(a,b)} \cdot \overline{(c,d)}) \cdot \overline{(e,f)} = \overline{(a,b)} \cdot (\overline{(c,d)} \cdot \overline{(e,f)}) \right)$$

■

Proposição 26. (*Elemento neutro*).

$$(\forall \overline{(a,b)})(\exists \overline{(n+1,n)})(\overline{(a,b)} \cdot \overline{(n+1,n)} = \overline{(n+1,n)} \cdot \overline{(a,b)} = \overline{(a,b)})$$

⊢

$$\left(\begin{array}{c} \left(\overline{(a,b)} \cdot \overline{(n+1,n)} = \overline{(a \cdot (n+1) + b \cdot n, a \cdot n + b \cdot (n+1))} = \overline{(a,b)} \right) \\ \begin{array}{c} D_{31} \quad \downarrow \quad D_{32} \\ a \cdot (n+1) + b \cdot n + b = a \cdot n + b \cdot (n+1) + a \\ \downarrow \\ \left(\begin{array}{c} P_3 \\ a \cdot n + a + b \cdot n + b = a \cdot n + b \cdot n + b + a \\ P_5 \end{array} \right) \end{array} \end{array} \right)$$

$$\therefore (\forall \overline{(a,b)})(\exists \overline{(n+1,n)})(\overline{(a,b)} \cdot \overline{(n+1,n)} = \overline{(n+1,n)} \cdot \overline{(a,b)} = \overline{(a,b)})$$

■

Proposição 27. (*Distributiva*).

$$(\forall \overline{(a,b)})(\forall \overline{(c,d)})(\forall \overline{(e,f)})(\overline{(a,b)} \cdot (\overline{(c,d)} + \overline{(e,f)}) = \overline{(a,b)} \cdot \overline{(c,d)} + \overline{(a,b)} \cdot \overline{(e,f)})$$

⊢

$$(\forall \overline{(a,b)})(\forall \overline{(c,d)})(\forall \overline{(e,f)})$$

$$\left(\begin{array}{c}
\overline{(a,b)} \cdot \overline{((c,d) + (e,f))} \stackrel{D_{34}}{=} \overline{(a,b)} \cdot \overline{(c+e, d+f)} \\
\wedge \\
\overline{(a,b)} \cdot \overline{(c+e, d+f)} \stackrel{D_{35}}{=} \overline{(a(c+e) + b(d+f), a(d+f) + b(c+e))} \\
\wedge \\
\overline{(a(c+e) + b(d+f), a(d+f) + b(c+e))} \stackrel{P_{9,2}}{=} \overline{(ac + ae + bd + bf, ad + af + bc + be)} \\
\wedge \\
\overline{(ac + ae + bd + bf, ad + af + bc + be)} \stackrel{P_3}{=} \overline{(ac + bd + ae + bf, ad + bc + af + be)} \\
\stackrel{P_5}{=} \overline{(ac + bd + ae + bf, ad + bc + af + be)} \\
\wedge \\
\overline{(ac + bd + ae + bf, ad + bc + af + be)} \stackrel{D_{34}}{=} \overline{(ac + bd, ad + bc)} + \overline{(ae + bf, af + be)} \\
\wedge \\
\overline{(ac + bd, ad + bc)} + \overline{(ae + bf, af + be)} \stackrel{D_{35}}{=} \overline{(a,b)} \cdot \overline{(c,d)} + \overline{(a,b)} \cdot \overline{(e,f)} \\
\downarrow P_2 \\
\overline{(a,b)} \cdot \overline{((c,d) + (e,f))} = \overline{(a,b)} \cdot \overline{(c,d)} + \overline{(a,b)} \cdot \overline{(e,f)}
\end{array} \right)$$

$$\therefore (\forall \overline{(a,b)})(\forall \overline{(c,d)})(\forall \overline{(e,f)})(\overline{(a,b)} \cdot \overline{((c,d) + (e,f))} = \overline{(a,b)} \cdot \overline{(c,d)} + \overline{(a,b)} \cdot \overline{(e,f)})$$

■

CONSIDERAÇÕES

A formalização de uma teoria pode ser vista como uma poderosa metodologia de ensino, uma vez que ela nos remete aos seus pressupostos primitivos e a ordenação de todo o seu desenvolvimento. Desse modo, a pesquisa contribuiu, principalmente, para a formação da graduanda por permitir aprofundar nos conteúdos que são vistos na graduação. Assim, este trabalho permitiu a autora compreender o processo de formalização do sistema numérico dos números naturais e inteiros baseando-se no conceito chamado de sistema matemático, tendo como pressupostos primitivos, o conceito de sucessor de um número natural, os axiomas de Peano e um sistema formal. O sistema matemático aqui apresentado abre diversas possibilidades para o desenvolvimento de trabalhos futuros, como por exemplo, aprofundar os estudos na formalização da teoria dos números naturais e inteiros.

REFERÊNCIAS

FAJARDO, R. A. D. S. **Teoria dos Conjuntos**. Disponível em: < <https://www.ime.usp.br/~fajardo/Conjuntos.pdf> > Acesso em: 18 abr. 2022.

FERREIRA, J. **A construção dos números**. 3.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

LANNES, W. **A Incompletude Além da Matemática: Impactos Culturais do Teorema de Gödel no Século XX**. 2009. Tese – (doutorado) – Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2009. Disponível em < <https://repositorio.ufmg.br/handle/1843/VGRO-82THEU> >

MOREIRA, J. C. **Teoria dos Sistemas Matemáticos - Gênese**. Disponível em: < <https://www.escoladematematicapontal.com.br/central-de-ebook/> > Acesso em: 06 mar. 2022.

MOREIRA, J. C. **Teoria dos Números Naturais**. Disponível em: < <https://www.escoladematematicapontal.com.br/central-de-ebook/> > Acesso em: 06 mar. 2022.

MOREIRA, J. C. **Teoria dos Números Inteiros**. Disponível em: < <https://www.escoladematematicapontal.com.br/central-de-ebook/> > Acesso em: 06 mar. 2022.

MACHADO, M. G. **A construção dos números**. 2014. Trabalho de Conclusão de Curso. (Graduação) – Curso de Licenciatura em Matemática, Universidade Federal de São Carlos, Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia, 2014. Disponível em: < <https://www.dm.ufscar.br/dm/index.php/component/attachments/download/43> >

MOREIRA, C. S. G. A. **Elementos de História da Lógica**. 2007. Dissertação – (mestrado) – Universidade Portucalense, Porto, 2007. Disponível em < <http://repositorio.uportu.pt/bitstream/11328/523/2/TMMAT%2077.pdf> >

PINEDO, Q. C. **Fundamentos da Matemática**. Disponível em < <https://docplayer.com.br/5682783-Fundamentos-da-matematica.html> > Acesso em: 07 mar. 2022.