



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA – UFU
CURSO DE FÍSICA MÉDICA

ANA LAURA RAMOS MITIDIERO

**ANÁLISE DE DADOS PARA CARACTERIZAÇÃO DE
ASSIMETRIAS LONGITUDINAIS DO ANEL C1R DE CHARIKLO**

UBERLÂNDIA - MG

2025

ANA LAURA RAMOS MITIDIERO

**ANÁLISE DE DADOS PARA CARACTERIZAÇÃO DE
ASSIMETRIAS LONGITUDINAIS DO ANEL C1R DE CHARIKLO**

Trabalho de Conclusão do Curso, como requisito obrigatório para a obtenção do título de Bacharel em Física Médica pela Universidade Federal de Uberlândia (UFU), Uberlândia, MG.

Orientador: Prof. Dr. Altair Ramos Gomes Júnior

Universidade Federal de Uberlândia

Curso de Física Médica

Orientador: Prof. Dr. Altair Ramos Gomes Júnior

Uberlândia - MG

2025

ANA LAURA RAMOS MITIDIERO

**ANÁLISE DE DADOS PARA CARACTERIZAÇÃO DE
ASSIMETRIAS LONGITUDINAIS DO ANEL C1R DE CHARIKLO**

Trabalho de Conclusão do Curso, como requisito obrigatório para a obtenção do título de Bacharel em Física Médica pela Universidade Federal de Uberlândia (UFU), Uberlândia, MG.

Orientador: Prof. Dr. Altair Ramos Gomes Júnior

A banca examinadora, conforme abaixo assinado, certifica a adequação deste trabalho de conclusão de curso para obtenção do grau de Bacharel em Física Médica.

Uberlândia - MG, 28 de maio de 2025

Prof. Dr. Altair Ramos Gomes Júnior
Orientador

Profa. Dra. Ana Paula Perini
Convidado 1

Dr. Chrystian Luciano Pereira
Convidado 2

Uberlândia - MG
2025

*Este trabalho é dedicado às crianças adultas que,
quando pequenas, sonharam em se tornar cientistas.*

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço ao meu Criador e Salvador, por ser meu refúgio seguro e minha fonte inesgotável de inspiração em cada capítulo desta jornada. Jamais conseguirei expressar minha gratidão a Deus, que me concedeu força nos momentos de fraqueza e sabedoria nas horas de incerteza. Sua presença foi a bússola que guiou meus passos.

Sou imensamente grata à minha família, em especial aos meus pais, Eliu e Flávia, e ao meu irmão, João Vitor. Obrigada pelo amor, pelo incentivo e pelo apoio incondicional. Sem vocês, esta conquista não seria possível.

Agradeço, de maneira especial, ao Prof. Dr. Altair, pelas oportunidades incríveis, pela dedicação e pelo apoio oferecido ao longo dos três anos em que tive o privilégio de ser sua aluna.

A cada professor da Universidade Federal de Uberlândia, deixo meu sincero agradecimento por me desafiarem a ser melhor a cada dia, compartilhando não apenas seu conhecimento, mas também suas experiências de vida.

Aos meus amigos e amigas que caminharam comigo durante esta trajetória, obrigada pelas risadas, pelos momentos de desespero e pelos instantes em que encontramos refúgio uns nos outros. Sou grata por toda vez em que nos motivamos mutuamente a continuar, mesmo quando o caminho parecia impossível.

Agradeço também a todos os meus irmãos em Cristo, que me ajudaram a enfrentar os obstáculos através de orações, cânticos e momentos de alegria.

Por fim, meu mais profundo agradecimento àquele que esteve ao meu lado desde o momento em que me inscrevi na graduação até agora, e que continuará comigo por toda a vida: meu namorado, Guilherme. Obrigada por me mostrar que o verdadeiro amor é paciente, gentil e incondicionalmente apoiador, especialmente nos momentos de caos.

*“Então orou Ana, e disse:
O meu coração exulta ao Senhor;
o meu poder está exaltado no Senhor:
a minha boca se dilatou sobre meus inimigos,
porquanto me alegro na tua salvação.”
(Bíblia Sagrada, I Samuel 2:1)*

RESUMO

Por centenas de anos, só eram conhecidos sistemas de anéis ao redor de planetas gigantes do Sistema Solar. Entretanto, em 2013, este panorama foi alterado com a descoberta de um sistema de anéis ao redor do Centauro Chariklo. A existência de anéis ao redor de pequenos corpos do Sistema Solar ampliou as possibilidades de novos estudos de formação e evolução de anéis e suas características. Em particular, foram identificadas variações longitudinais na largura do anel C1R de Chariklo. Porém, distintamente do que aconteceu com os planetas, não há previsão do envio de sondas espaciais para estudar estes anéis *in loco*. Logo, a caracterização destes anéis deve ser estudada com métodos indiretos, como o método de ocultações estelares. A metodologia consiste em, empregando o pacote Redução e Análise de Ocultação Estelar (SORA) e dados de diversas ocultações, relacionar o plano de referência das observações ao plano orbital do anel, determinando a distribuição espacial dos pontos do anel em função da longitude orbital e calculando as coordenadas no referencial do anel para cada detecção, permitindo também a estimativa da largura do anel. Utilizando informações temporais, é possível definir velocidades características e identificar modos de oscilação que melhor descrevem os anéis, utilizando modelos senoidais. Ajustando este modelo aos dados usando modos de oscilação de 1, 2 ou 3 e suas combinações, conclui-se que o melhor ajuste ocorre com os modos 1 e 2 combinados. A amplitude dos modos de oscilação mais prováveis varia de 0.9 ± 0.2 a 0.8 ± 0.3 km, e a largura do anel mais provável é 6.7 ± 0.2 km. Ao restringir a velocidade angular do modo de oscilação, as soluções sugerem uma velocidade angular de $\Omega_1 = 3.8 \pm 0.6$ e $\Omega_2 = 620.9 \pm 0.4$ graus/dia. Por fim, após diversas análises e utilizando o máximo possível de observações resolvidas de Chariklo, foi obtido informações relevantes sobre seus anéis recém-descobertos.

Palavras-chave: ocultação estelar; anéis; Chariklo.

ABSTRACT

For hundreds of years, ring systems were only known to exist around the giant planets of the Solar System. However, in 2013, this view changed with the discovery of a ring system around the Centaur Chariklo. The existence of rings around small bodies in the Solar System expanded the possibilities for new studies on the formation, evolution, and characteristics of rings. In particular, longitudinal variations in the width of Chariklo's C1R ring were identified. However, unlike what happened with the planets, there are no plans to send space probes to study these rings *in loco*. Therefore, the characterization of these rings must be carried out using indirect methods, such as the stellar occultation method. The methodology consists of using the Stellar Occultation Reduction and Analysis package (SORA) and data from various occultations to relate the observation reference plane to the ring's orbital plane, determining the spatial distribution of ring points as a function of orbital longitude and calculating the coordinates in the ring reference frame for each detection, also allowing an estimation of the ring's width. By using temporal information, it is possible to define characteristic velocities and identify oscillation modes that best describe the rings, using sinusoidal models. By fitting this model to the data using oscillation modes 1, 2, or 3 and their combinations, it was concluded that the best fit occurs with a combination of modes 1 and 2. The amplitude of the most probable oscillation modes ranges from 0.9 ± 0.2 to 0.8 ± 0.3 km, and the most probable ring width is 6.7 ± 0.2 km. When constraining the angular velocity of the oscillation mode, the solutions suggest an angular velocity of $\Omega_1 = 3.8 \pm 0.6$ and $\Omega_2 = 620.9 \pm 0.4$ degrees/day. Finally, after several analyses and using as many resolved observations of Chariklo as possible, relevant information about its newly discovered rings was obtained.

Keywords: stellar occultation; rings; Chariklo.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

- Figura 1 – Ilustração que representa Chariklo e seus anéis, baseado em dados de eventos de ocultações estelares. 16
- Figura 2 – Esquema representativo de uma ocultação estelar. A luz da estrela é bloqueada pela passagem do corpo ocultador, projetando a sombra do objeto na Terra. Diversos observadores, representados pelos pontos coloridos, poderão observar a ocultação e contribuir com uma corda do perfil da ocultação, desde que estejam dentro da área da sombra. . . . 21
- Figura 3 – Curva de luz obtida pela observação do evento de ocultação pelo Centauro Chariklo em 09 de abril de 2017, pelo observador em Outeniqua. Os pontos em preto são os dados fotométricos extraídos da ocultação, enquanto os pontos em vermelho são o modelo ajustado. O eixo *time* representa o tempo, em segundos, em relação ao instante de referência em 09 de abril de 2017, à meia-noite. O eixo *relative flux* é o fluxo relativo da estrela alvo e estrelas calibradoras. 21
- Figura 4 – Curva de luz obtida pela observação do evento de ocultação pelo Centauro Chariklo em 09 de abril de 2017, pelo observador Weaver Rocks Lodge. O eixo *time relative to 2017-04-09 00:00:00.000* representa o tempo, em segundos, em relação ao instante de referência em 09 de abril de 2017, à meia-noite. O eixo *relative flux* é o fluxo relativo da estrela alvo e estrelas calibradoras. Os pontos em preto representam a curva de luz retirada dos dados da ocultação, enquanto os pontos em vermelho são o modelo ajustado. Destaca-se a existência de três quedas principais, sendo duas quedas simétricas menos acentuadas devido a passagem do anel, e a queda central devido a passagem do corpo de Chariklo. 22
- Figura 5 – Gráficos representando como varia a opacidade do anel C1R ao longo da distância radial, projetados no plano do anel, para a ocultação de 09 de abril de 2017, apenas para os momentos de imersão. O eixo *Radial distance* é a distância radial, em quilômetros, e o eixo *Flux* é o fluxo relativo da estrela alvo em comparação com o das estrelas calibradoras. Os observadores são: Wabi Lodge (1), Weaver Rocks Lodge (2) e Hakos (3). Destaca-se a presença de estruturas em *W* no anel C1R. 23

- Figura 6 – Representação da esfera celeste, dos eixos e coordenadas do Sistema Internacional de Referência Celeste. PN e PS representam o polo norte e sul da esfera, respectivamente. O equador celeste é definido como a intersecção entre o plano do equador com a esfera celeste. O eixo x representa o equinócio vernal médio em J2000, o eixo z é perpendicular ao plano do equador celeste médio em J2000 e o eixo y forma um sistema ortogonal com os outros dois eixos. A intersecção entre o meridiano que passa pelo ponto vernal γ e o círculo horário que passa pela estrela E definem a ascensão reta α . Já a intersecção entre o equador e o paralelo que passa por E representa a declinação δ 25
- Figura 7 – Representação esquemática do Sistema de Referência do Plano Tangente. A esfera celeste (em cinza) está centrada no observador. O plano tangente ao ponto onde se encontra o corpo ocultador corresponde ao plano de referência do TPRF (Tangent Plane Reference Frame). Nele estão definidos os eixos $\hat{f}$ e $\hat{g}$, orientados respectivamente para o leste e norte celestes. O eixo $\hat{r}$ aponta da Terra para o corpo observado, sendo perpendicular ao plano tangente. 26
- Figura 8 – Representação esquemática do Sistema de Referência do Plano do Anel (RPRF). Na figura, o corpo central está circundado pelo anel, definido pelo plano formado pelos eixos x e y , e o eixo z representa o vetor normal ao anel, apontando para o polo norte deste sistema. O eixo x indica o aumento da longitude do anel, enquanto o eixo y (orientado para o leste) e o z (apontando para o norte) completam os eixos do sistema de referência. A longitude λ será melhor definida posteriormente. 27
- Figura 9 – Esquema ilustrativo da transformação entre o ICRS e o RPRF. A esfera celeste está centrada em Chariklo, com o vetor apontando para o polo norte do corpo, definido pelas coordenadas (α_b, δ_b) . O RPRF é construído com base no plano do anel, com o eixo x apontando para a intersecção entre o plano do anel e o Equador do ICRS, o eixo z sendo o vetor normal ao plano do anel, e o eixo y sendo perpendicular aos dois eixos anteriores. 34
- Figura 10 – Gráfico que representa as cordas da ocultação e a elipse de Chariklo, no evento de ocultação de 23 de julho de 2017. A elipse em preto representa a elipse que melhor se ajusta ao formato das cordas do anel C1R. As linhas azuis escuras representam a linha que cruza o corpo principal durante o evento de ocultação, no ponto de vista do observador. As linhas azuis pontilhadas representam as cordas do anel. Os pontos vermelhos representam os instantes de desaparecimento e reaparecimento da luz da estrela. Os eixos f e g representam as coordenadas da detecção no plano da ocultação. 35

- Figura 11 – Representações esquemáticas de modos de oscilação ao redor de uma circunferência, induzida por modos de perturbação com diferentes números de lóbulos m . A linha cinza tracejada representa a circunferência central de referência, enquanto a linha preta indica a forma das oscilações após a aplicação dos modos: $m = 1$ (deslocamento global), $m = 2$ (deformação com duas cristas), $m = 3$ (três cristas) e suas combinações lineares. As figuras ilustram, de forma qualitativa, como a superposição desses modos pode gerar geometrias mais complexas observadas nos anéis. 40
- Figura 12 – Distribuição da largura radial da detecção do anel durante a ocultação estelar de 23 de julho de 2017. Os pontos azuis e os quadrados vermelhos representam, respectivamente, as detecções não resolvidas e resolvidas. A linha azul corresponde ao melhor ajuste utilizando todas as detecções, enquanto a linha vermelha tracejada representa o melhor ajuste considerando apenas as detecções resolvidas. Os eixos “longitude” e “width” são a longitude e a largura das detecções calculadas pelo modelo proposto neste trabalho, respectivamente. 44
- Figura 13 – Qui-quadrado resultante dos ajustes considerando os valores esperados para as velocidades de padrão dos modos combinados 1 e 2. As linhas horizontais vermelhas marcam os limites de 1σ (inferior) e 3σ (superior). Os eixos Ω_1 e Ω_2 representam as velocidades características dos modos de oscilação 1 e 2, respectivamente, em graus por dia. O eixo *chi squared* representa os valores do teste de qui quadrado para cada valor da velocidade sugeridos modelo proposto neste trabalho. 47
- Figura 14 – Distribuição da largura radial da detecção do anel de todas as detecções positivas das ocultações estelares presentes na Tabela 2. Os pontos azuis e os quadrados vermelhos representam, respectivamente, as detecções não resolvidas e resolvidas. A linha azul corresponde ao melhor ajuste considerando apenas as detecções resolvidas, com os modos de oscilação 1 e 2 combinados. Os eixos “longitude” e “width” são a longitude e a largura das detecções calculadas pelo modelo proposto neste trabalho, respectivamente. 49

LISTA DE TABELAS

- Tabela 1 – Instantes de imersão e emersão da luz estelar detectados durante eventos de ocultação pelo anel C1R de Chariklo. São apresentados os tempos de imersão e emersão para cada detecção em diferentes eventos, com suas respectivas incertezas. Cada evento é identificado pelo local de observação e pela detecção da borda do anel, sendo “1°” a primeira detecção da borda do anel, e “2°” a segunda detecção da borda do anel. 28
- Tabela 2 – Conjunto de dados de detecções do anel a partir de ocultações estelares. As grandezas listadas são a longitude (λ) no RPRF, a largura radial do anel (W), e sua distância (d) em relação ao centro de Chariklo. A coluna “resolvida?” indica se o anel foi resolvido (s) ou não resolvido (n). Detecções marcadas com “*” são dados que vêm diretamente de [Bérard et al. \(2017\)](#). As indicações (e) e (i) referem-se a valores associados às partes externa e interna da detecção do anel, respectivamente, em vez do centro. 36
- Tabela 3 – Resultados do ajuste de qui-quadrado usando apenas os dados de 23 de julho de 2017. N_{ajuste} é um identificador do procedimento de ajuste de modos, m_i indica qual conjunto de modos de oscilação foi usado no ajuste, A_i e ϕ_i são a amplitude e o ângulo de fase do respectivo modo de oscilação, n_p é o número de parâmetros ajustados, χ^2_{min} é o valor mínimo do qui-quadrado, e χ^2_{pgl} é o valor mínimo do qui-quadrado por grau de liberdade. 43
- Tabela 4 – Resultados do ajuste de qui-quadrado usando os dados de todas as ocultações resolvidas apresentar na Tabela 2. N_{ajuste} é um identificador do procedimento de ajuste de modos, m_i indica qual conjunto de modos de oscilação foi usado no ajuste, A_i e ϕ_i são a amplitude e o ângulo de fase do respectivo modo de oscilação, n_p é o número de parâmetros ajustados, χ^2_{min} é o valor mínimo do qui-quadrado, χ^2_{pgl} é o valor mínimo do qui-quadrado por grau de liberdade, e Ω_i é a velocidade característica. 48

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

C1R	Chariklo First Ring
C2R	Chariklo Second Ring
SORA	Stellar occultation reduction and analysis
IAU	União Astronômica Internacional
J2000	Ano Juliano 2000.0, correspondente a 1º de janeiro de 2000, às 12h TDB
TDB	Tempo Dinâmico Baricêntrico
TT	Tempo Terrestre
UTC	Tempo Universal Coordenado
PN	Polo Norte
PS	Polo Sul
ICRS	<i>International Celestial Reference System</i>
TPRF	<i>Tangent Plane Reference Frame</i>
RPRF	<i>Ring Plane Reference Frame</i>
mas	Milissegundos de arco
h	Horas
km	Quilômetro

LISTA DE SÍMBOLOS

α	Ascensão reta
α_p	Ascensão reta do polo do anel
α_b	Ascensão reta do centro de Chariklo
δ	Declinação
δ_p	Declinação do polo do anel
δ_b	Declinação do centro de Chariklo
γ	Ponto vernal
R_x	Matriz de rotação em torno do eixo x
R_y	Matriz de rotação em torno do eixo y
R_z	Matriz de rotação em torno do eixo z
λ	Longitude
W	Largura radial do anel
$W_{média}$	Largura radial média do anel
$W(\lambda_j)$	Largura do anel, em função da longitude da j-ésima detecção
W_j	Largura radial da j-ésima detecção
σ_{w_j}	Incerteza da largura radial da j-ésima detecção
A	Amplitude do modo de oscilação
ϕ_i	Ângulo de fase do modo de oscilação
d	Distância da detecção do anel ao centro de Chariklo
m_i	Modo de oscilação
e	Detecção da parte externa do anel
i	Detecção da parte interna do anel
n_d	Número de pontos utilizados no ajuste de qui-quadrado
n_p	Número de parâmetros ajustados no qui-quadrado
χ^2	Qui-quadrado

χ^2_{min}	Qui-quadrado mínimo
χ^2_{pgl}	Qui-quadrado por grau de liberdade
N_{ajuste}	Número do ajuste
Ω_i	Velocidade característica do i-ésimo modo de oscilação
t	Instante em que a luz da estrela transpassa C1R
t_0	Tempo de referência, definido como 12h00 de 1º de janeiro de 2020 (TDB)
Δt	Diferença entre o instante da detecção da ocultação corrigido pelo tempo de luz e a época de referência
t_{luz}	Tempo em que a luz levou para percorrer desde a incidência sobre o anel, até o observador na Terra
t_{obs}	Instante da observação
t_{des}	Instante de imersão da luz da estrela durante a ocultação
t_{rea}	Instante de emersão da luz da estrela durante a ocultação
σ	Desvio padrão dos valores encontrados pelo ajuste de qui-quadrado
E	Estrela

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	16
2	OBJETIVOS	19
3	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	20
3.1	Ocultações estelares	20
3.1.1	Ocultações estelares por anéis	22
3.2	Sistemas de Referência	23
3.2.1	Sistema Internacional de Referência Celeste (ICRS)	24
3.2.2	Sistema de Referência do Plano Tangente (TPRF)	26
3.2.3	Sistema de Referência do Plano do Anel (RPRF)	27
4	DADOS UTILIZADOS	28
4.1	Dados das ocultações estelares	28
5	METODOLOGIA	31
5.1	Caracterização do plano do anel	31
5.2	Aplicação da metodologia	33
6	RESULTADOS	39
6.1	Modos de oscilação para a ocultação do dia 23/07/2017	40
6.2	Modos de oscilação considerando todas as ocultações	45
7	CONCLUSÕES	50
	REFERÊNCIAS	52
	ANEXOS	55

1 INTRODUÇÃO

Chariklo é classificado como um Centauro, um pequeno objeto do Sistema Solar. Os Centauros orbitam entre Júpiter e Netuno, e recebem esse nome por parte de sua população portarem características de dois tipos de corpos celestes diferentes: se movem como asteroides, e podem possuir uma calda de gás e poeira, como de cometas. Assim, remetendo à figura mitológica, os Centauros, mesmo possuindo propriedades semelhantes à outros objetos, receberam uma classificação própria depois de anos após a descoberta de 2060 Chiron, em 1977, que inicialmente foi classificado como cometa (Di Sisto; BRUNINI, 2007).

O (10199) Chariklo é o maior Centauro conhecido, orbitando a região entre Saturno e Urano, a distâncias que variam de 13,1 a 18,9 unidades astronômicas, com um raio equivalente a 124 ± 9 km (MORGADO *et al.*, 2021). Uma representação de Chariklo é vista na Figura 1.

Figura 1 – Ilustração que representa Chariklo e seus anéis, baseado em dados de eventos de ocultações estelares.



Fonte: NASA, ESA, CSA, Leah Hustak (STScI).

Em 2013, Braga-Ribas *et al.* (2014) detectaram um sistema de anéis ao redor desse objeto celeste, um marco significativo que revelou o primeiro sistema de anéis presente em um objeto além dos planetas gigantes do Sistema Solar.

Chariklo apresenta dois anéis. O anel principal e interno (C1R) e o anel secundário e externo (C2R) possuem respectivamente dimensões de 7 km e 3 km de largura. Além disso, o sistema de anéis de Chariklo abrange um diâmetro de aproximadamente 800 km, aparecendo como cerca de 80 milissegundos de arco (*mas*) quando projetado no céu a partir da perspectiva da Terra (BRAGA-RIBAS *et al.*, 2014).

Tais anéis foram detectados por meio de uma ocultação estelar, um evento na qual um

corpo do Sistema Solar oculta uma estrela de fundo, bloqueando a passagem da luz pelo ponto de vista de observadores na Terra e gerando uma queda do brilho aparente da estrela. Para a obtenção de mais detalhes acerca do objeto da ocultação, a observação do mesmo evento por diversos observadores dentro da zona de observação é relevante, resultando em uma ocultação estelar de multi-cordas que provê a possibilidade da determinação do formato e características físicas do corpo responsável pela ocultação.

Após a descoberta dos anéis de Chariklo, cerca de outras vinte ocultações desse sistema foram observadas entre 2013 e 2020 (BÉRARD *et al.*, 2017; MORGADO *et al.*, 2021). Dentre essas ocultações, dezesseis eventos proporcionaram detecções das estruturas anelares, permitindo o cálculo de sua largura e da distância ao corpo principal no plano tangente. No entanto, com um número limitado de observadores distribuídos por uma grande área para cobrir a zona da ocultação, essas detecções são esparsas, dificultando a identificação de variações suaves na largura ao longo da longitude. Além disso, muitas das observações não são resolvidas, o que impede a obtenção de uma medida precisa, resultando em grandes incertezas. Determinar a taxa de variação da largura com base em múltiplas ocultações é ainda mais desafiador, já que a maioria dos eventos careceu de dados suficientes para estabelecer tais mudanças.

Morgado *et al.* (2021) apresentaram os resultados da análise de curvas de luz provenientes de eventos de ocultação estelar por Chariklo, como a do dia 09 de abril de 2014. Nesse evento, foram observadas estruturas em formato de “W” no anel C1R, para três observadores diferentes. No evento de 23 de julho de 2017, essas mesmas estruturas reapareceram nas curvas de luz. Com estas informações, foi derivada uma largura média para C1R de 6,9 km, com extremos em 4,8 a 9,1 km, excedendo significativamente as incertezas nas medições. Além disso, essas variações de largura podem estar ligadas à excentricidade do anel, um fator crucial para entender sua estabilidade e evolução dinâmica.

O objetivo deste estudo é definir como a largura do anel principal de Chariklo (C1R) varia com a longitude, apresentando um modelo que melhor descreva essa variação. A metodologia consistiu em, empregando o pacote *Stellar Occultation Reduction and Analysis* (SORA) (GOMES-JUNIOR *et al.*, 2022) e dados de 7 eventos de ocultação estelar, relacionar o plano de referência das observações ao plano orbital do anel, determinando a distribuição espacial dos pontos em função da longitude orbital e calculando as coordenadas no referencial do anel para cada detecção, permitindo também a estimativa da largura do anel.

Para a análise dos parâmetros obtidos na metodologia, foram utilizadas informações temporais (como os instantes de desaparecimento e reaparecimento da estrela durante a ocultação descritas por Morgado *et al.* (2021)), e foi estipulado parâmetros como velocidades características de modos de oscilação que melhor descrevem os anéis, utilizando modelos senoidais propostos por Longaretti (1989), com a qualidade de tal modelo sendo estimada por método de qui-quadrado. O melhor modelo obtido poderá ser utilizado para

o estudo de outros pequenos objetos possuidores de anéis, como o Centauro (2060) Chiron (ORTIZ *et al.*, 2015; ORTIZ *et al.*, 2023), o planeta anão (136108) Haumea (ORTIZ *et al.*, 2017) e o objeto transnetuniano (50000) Quaoar (MORGADO *et al.*, 2023; PEREIRA *et al.*, 2023).

Neste trabalho são utilizadas técnicas estatísticas amplamente presentes em diversas áreas, como na Física Médica. Um desses métodos, como o qui-quadrado, é utilizada para a calibração de detectores (KNOLL, 2010) e para a reconstrução de imagens médicas em tomografia computadorizada, tomografia computadorizada por emissão de fóton único e tomografia por emissão de pósitrons (HENDEE; RITENOUR, 2002; BUSHBERG; LEIDHOLDT, 2020). A simulação por Monte Carlo, método aplicado neste trabalho para a geração de números aleatórios na Seção 6, é uma ferramenta utilizada em Física Médica para o estudo de interação da radiação ionizante com o meio, em aplicações médicas (HENDEE, 2013). Além disso, a análise de oscilações, empregada neste estudo para descrever variações na largura dos anéis, possui aplicação em Física Médica no monitoramento de sinais fisiológicos e na detecção de variações periódicas em imagens médicas (BRONZINO, 2000).

A Seção 2 apresenta os objetivos deste trabalho. Na Seção 3, uma breve fundamentação teórica foi apresentada para a compreensão em totalidade do tema. A Seção 4 detalha os dados usados neste projeto, baseados em valores publicados de ocultações estelares anteriores pelos anéis de Chariklo. Na Seção 5, foi descrita a metodologia, incluindo como foi caracterizado o plano do anel, e enfim foram calculadas as longitudes. A Seção 6 apresenta os resultados sobre a relação largura-longitude e suas possíveis velocidades de rotação. As conclusões são fornecidas na Seção 7.

2 OBJETIVOS

O presente estudo visa descrever adequadamente as variações longitudinais da largura do anel principal do Centauro Chariklo, com base em dados provenientes de ocultações estelares, por meio de modelos senoidais para representar os modos de oscilação no anel C1R e técnicas como qui-quadrado para a otimização dos parâmetros ajustados. Dessa forma, a base metodológica pode ser adaptada para o estudo de anéis presentes em outros objetos do Sistema Solar, como Haumea e Quaoar, além de contribuir em estudos futuros para a investigação de processos de formação, evolução e manutenção das estruturas anelares em volta de pequenos corpos do Sistema Solar.

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

3.1 Ocultações estelares

Ocultação estelar é o evento que ocorre quando um objeto do Sistema Solar atravessa o caminho de uma estrela de fundo, pelo ponto de vista de um observador. Esse fenômeno é semelhante a um eclipse solar, se diferenciando pelo fato da estrela estar mais distante do corpo ocultador, com um tamanho quase pontual.

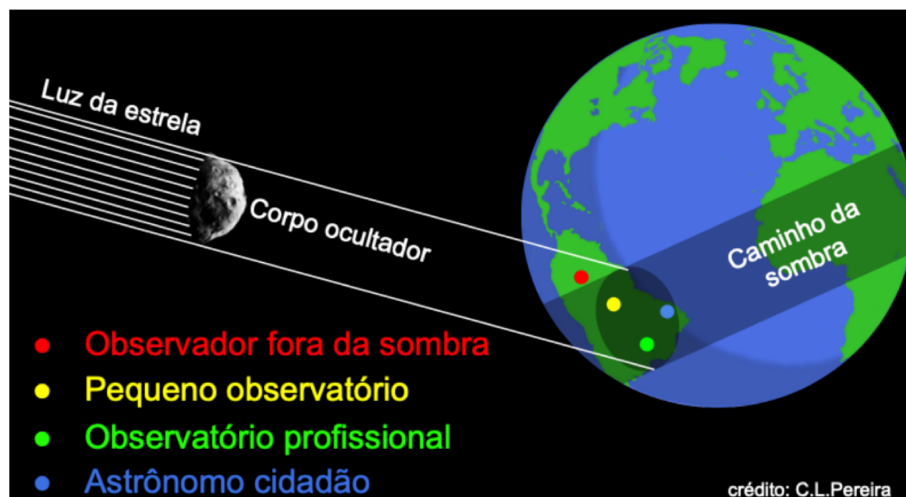
Dada essa característica pontual da estrela, seus raios luminosos são paralelos o suficiente para que a sombra projetada do objeto no plano do céu seja muito próxima do tamanho e forma real do corpo celeste. A sombra projetada na Terra tem uma área, onde diversos observadores poderão observá-la. O desaparecimento do brilho da estrela, do ponto de vista de um observador, marca o início da ocultação. O reaparecimento, por sua vez, indica o término do evento. Com o brilho da estrela retornando, é o fim da ocultação (PORCO; HAMILTON, 2007; GOMES-JUNIOR *et al.*, 2022; SICARDY *et al.*, 2024).

É possível aferir diversas características do corpo ocultador em uma ocultação estelar. Se a órbita do objeto for conhecida, se tem também a velocidade aparente, que permite calcular quanto tempo o objeto leva para passar na frente da estrela. Tendo a velocidade em que o corpo se desloca em relação ao observador e a duração da ocultação, é calculada uma medida de comprimento chamada corda, que é a trajetória linear do caminho aparente da estrela por trás do corpo ocultador. Combinando as cordas fornecidas por diversos observadores, o resultado é o perfil do objeto, fornecendo informações sobre o tamanho e forma do astro (RIBAS, 2024). A Figura 2 ilustra uma ocultação estelar e observadores na Terra (PEREIRA, 2020).

As observações consistem em registrar uma sequência de imagens da estrela alvo, durante um certo intervalo de tempo, para comparar com as estrelas no mesmo campo. Nas imagens, será evidenciada uma variação entre o brilho da estrela alvo, com uma interrupção no seu brilho (fluxo), seguido pelo seu reaparecimento. Esses são os instantes de imersão e emersão da estrela, respectivamente. Esses instantes indicam que o corpo ocultador bloqueou a luz estelar pelo ponto de vista do observador (linha de visada), e o instante em que a estrela voltou a aparecer.

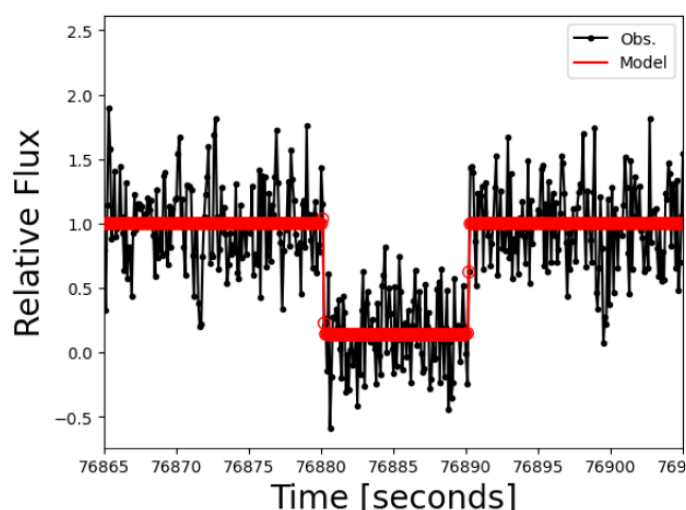
A técnica utilizada nessa análise de imagens é a fotometria diferencial de abertura, que mede o fluxo das estrelas em uma área de abertura circular centrada na fonte de interesse (no caso, a estrela), comparando o fluxo dessa estrela com as estrelas ao redor, conhecidas como estrelas calibradoras (HOWELL, 2006). A variação, ao longo do tempo, da razão entre o brilho da estrela alvo e das estrelas calibradoras é representada por um gráfico denominado curva de luz (ELLIOT; YOUNG, 1992; GOMES-JUNIOR *et al.*, 2022; RIBAS, 2024), ilustrada na Figura 3.

Figura 2 – Esquema representativo de uma ocultação estelar. A luz da estrela é bloqueada pela passagem do corpo ocultador, projetando a sombra do objeto na Terra. Diversos observadores, representados pelos pontos coloridos, poderão observar a ocultação e contribuir com uma corda do perfil da ocultação, desde que estejam dentro da área da sombra.



Fonte: Chrystian L. Pereira (2020).

Figura 3 – Curva de luz obtida pela observação do evento de ocultação pelo Centauro Chariklo em 09 de abril de 2017, pelo observador em Outeniqua. Os pontos em preto são os dados fotométricos extraídos da ocultação, enquanto os pontos em vermelho são o modelo ajustado. O eixo *time* representa o tempo, em segundos, em relação ao instante de referência em 09 de abril de 2017, à meia-noite. O eixo *relative flux* é o fluxo relativo da estrela alvo e estrelas calibradoras.

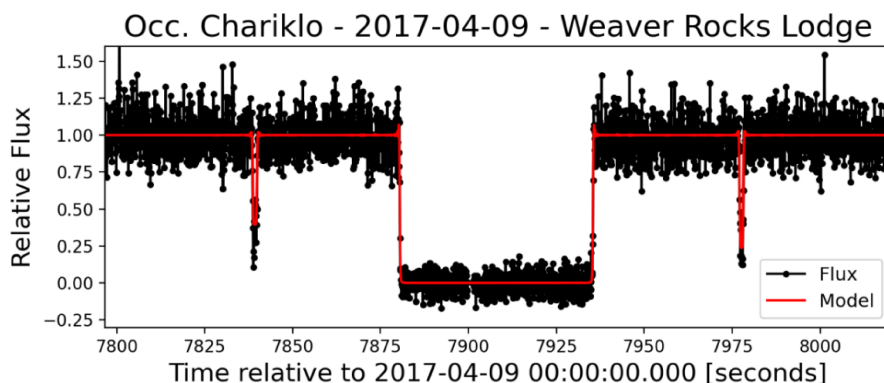


Fonte: da autora.

3.1.1 Oculações estelares por anéis

Em uma ocultação estelar por um objeto que possui anéis, o comportamento da queda do fluxo da luz da estrela alvo difere de um corpo totalmente opaco. Nesse caso, o anel, por ser uma estrutura que é parcialmente transparente, não bloqueando completamente o brilho da estrela, irá fornecer uma curva de luz onde o fluxo cai parcialmente, como no exemplo retirado do evento de 09 de abril de 2017, na Figura 4.

Figura 4 – Curva de luz obtida pela observação do evento de ocultação pelo Centauro Chariklo em 09 de abril de 2017, pelo observador Weaver Rocks Lodge. O eixo *time relative to 2017-04-09 00:00:00.000* representa o tempo, em segundos, em relação ao instante de referência em 09 de abril de 2017, à meia-noite. O eixo *relative flux* é o fluxo relativo da estrela alvo e estrelas calibradoras. Os pontos em preto representam a curva de luz retirada dos dados da ocultação, enquanto os pontos em vermelho são o modelo ajustado. Destaca-se a existência de três quedas principais, sendo duas quedas simétricas menos acentuadas devido a passagem do anel, e a queda central devido a passagem do corpo de Chariklo.



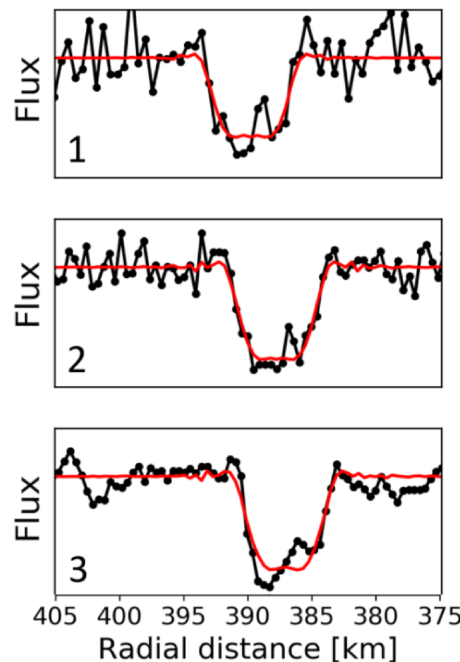
Fonte: Morgado *et al.* (2021).

A importância da análise dessas curvas de luz provenientes de ocultações de pequenos corpos do Sistema Solar se demonstrou evidente quando Braga-Ribas *et al.* (2014) detectou o primeiro sistema de anéis ao redor de um objeto celeste que não seja os planetas gigantes, levantando questões sobre o processo de formação e manutenção desses anéis, além de trazer informações sobre suas propriedades físicas.

Também por meio da análise de curvas de luz de eventos de ocultações estelares, Morgado *et al.* (2021) detectaram uma curiosa característica no anel C1R de Chariklo. No evento de 09 de abril de 2017, as observações feitas por observadores na Namíbia permitiram realizar uma investigação com alta resolução temporal, devido à velocidade excepcionalmente baixa da ocultação. Após o processamento das curvas de luz resultantes da observação, foram observadas estruturas em formato de *W* no anel, em perfis radiais normalizados, projetados no plano do anel, como mostra a Figura 5.

Após esse evento, a ocultação de 23 de julho de 2017 permitiu novamente a detecção das estruturas *W*. Isso leva a concluir que a transmissão da luz varia de forma não uniforme

Figura 5 – Gráficos representando como varia a opacidade do anel C1R ao longo da distância radial, projetados no plano do anel, para a ocultação de 09 de abril de 2017, apenas para os momentos de imersão. O eixo *Radial distance* é a distância radial, em quilômetros, e o eixo *Flux* é o fluxo relativo da estrela alvo em comparação com o das estrelas calibradoras. Os observadores são: Wabi Lodge (1), Weaver Rocks Lodge (2) e Hakos (3). Destaca-se a presença de estruturas em *W* no anel C1R.



Fonte: Morgado *et al.* (2021).

dentro do anel, sugerindo variações de densidade de material na largura do anel, ou seja, na forma como a matéria está distribuída em C1R. Os perfis resolvidos do anel C1R também permitiram estimar a sua largura média, sendo aproximadamente 6,9 km, com extremos em 4,8 e 9,1 km. Morgado *et al.* (2021) assumiram que essa variação da largura está associada a um modo de oscilação $m = 1$, possibilidade que será melhor aprofundada neste trabalho.

Ortiz *et al.* (2017) detectaram um anel ao redor do planeta anão (136108) Haumea, expandindo ainda mais a possibilidade da existência de anéis em objetos ao redor dos pequenos corpos do Sistema Solar. Posteriormente, o objeto transnetuniano (50000) Quaoar também teve a presença de seus anéis revelada (MORGADO *et al.*, 2023; PEREIRA *et al.*, 2023). Atualmente, a possibilidade de um sistema de anéis ao redor do Centauro (2060) Chiron ainda está sendo estudada (ORTIZ *et al.*, 2023).

3.2 Sistemas de Referência

Um sistema de referência é definido como um conjunto de regras, convenções e modelos matemáticos que permitem estabelecer, em qualquer instante, três direções bem definidas no espaço (ou seja, um sistema tridimensional de eixos) (CAPITAINE DANIEL GAMBIS;

VONDRAK, 2002). É importante a utilização de tais sistemas, por exemplo, para que haja uma padronização de dados e resultados utilizados por astrônomos em âmbito global. Nesta seção, serão apresentados os três sistemas de referência utilizados neste trabalho.

3.2.1 Sistema Internacional de Referência Celeste (ICRS)

Com o intuito de manter um sistema de referência adequado para aplicações em Astronomia, navegação espacial e geodinâmica global, o *International Celestial Reference System* (ICRS) foi adotado como sistema de referência convencional pela União Astronômica Internacional (IAU) em 1991.

Esse sistema tem sua origem no baricentro do Sistema Solar, sendo, portanto, um sistema baricêntrico. As direções de seus três eixos estão fixamente orientadas com base em posições de fontes extragalácticas distantes, consideradas praticamente imóveis. O plano principal do ICRS corresponde ao equador médio em J2000.0, e a origem das ascensões retas está alinhada com o equinócio dinâmico nessa mesma época (ARIAS *et al.*, 1995). A sigla J2000.0 refere-se à época padrão astronômica, definida como 1º de janeiro do ano 2000, às 12h no Tempo Terrestre (TT).

Para compreender as especificações do ICRS, é importante revisar um conceito teórico fundamental: a esfera celeste. A esfera celeste é uma esfera imaginária centrada na Terra, na qual todos os astros visíveis estão projetados. Essa esfera aparenta rotacionar ao redor da Terra, com exceção de seus polos celestes, que são fixos. A linha que conecta os polos define o eixo de rotação da esfera celeste, e o plano perpendicular a esse eixo é o plano do equador celeste. A interseção entre o plano do equador e a esfera celeste define o equador celeste, que divide os hemisférios norte e sul (BOCZKO, 1984).

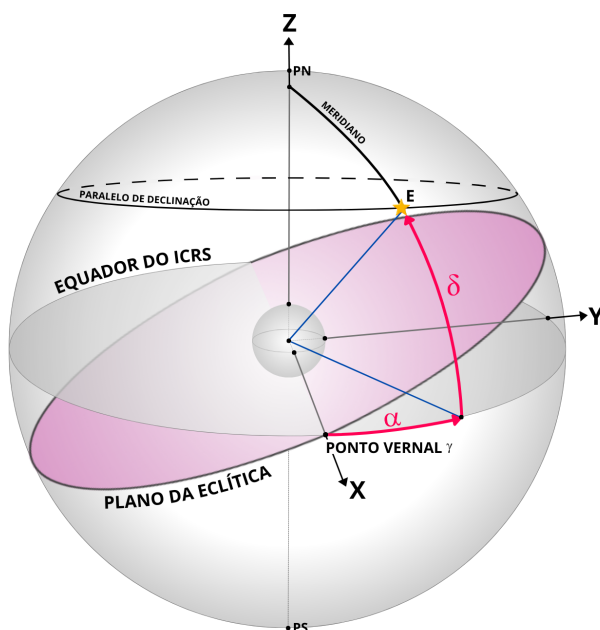
No contexto da esfera celeste, utilizam-se linhas de referência semelhantes às da superfície terrestre: os paralelos e os meridianos (neste caso chamados de círculos horários). Os planos fundamentais para o sistema de coordenadas celestes são o plano do equador celeste e um plano meridiano que passa pelo ponto vernal (o ponto de interseção entre o equador celeste e a eclíptica, importante para a definição das coordenadas equatoriais, embora não seja aprofundado neste trabalho). Como o ICRS é fixo em relação às fontes extragalácticas, ele não se altera com o tempo, possuindo eixos invariáveis.

As coordenadas de um objeto no ICRS são dadas por dois ângulos: a ascensão reta (α) e a declinação (δ). Esses ângulos são análogos, respectivamente, à longitude e à latitude na superfície terrestre. A ascensão reta, α , é o ângulo medido ao longo do equador celeste, a partir do ponto vernal até o círculo horário que passa pelo objeto observado. Seu valor varia de 0° a 360° , ou, mais comumente, de 0^h a 24^h . A declinação δ é o ângulo medido ao longo do círculo horário do objeto, desde o equador celeste até o objeto observado. Seus valores variam de -90° (polo sul celeste) a $+90^\circ$ (polo norte celeste).

Quanto aos eixos do sistema ICRS, o eixo x é direcionado para $\alpha = 0^\circ$ no plano do

equador celeste. Já o eixo z é perpendicular ao plano do equador celeste, apontando para o polo norte celeste médio em J2000.0. O termo “médio” é utilizado porque essa direção leva em conta apenas a precessão do eixo terrestre, eliminando variações rápidas como a nutação. Por fim, o eixo y é perpendicular aos eixos x e z , apontando para $\alpha = 90^\circ$ no equador celeste. A Figura 6 contém uma representação que permite a melhor visualização dos conceitos em torno do ICRS, seus eixos e coordenadas.

Figura 6 – Representação da esfera celeste, dos eixos e coordenadas do Sistema Internacional de Referência Celeste. PN e PS representam o polo norte e sul da esfera, respectivamente. O equador celeste é definido como a intersecção entre o plano do equador com a esfera celeste. O eixo x representa o equinócio vernal médio em J2000, o eixo z é perpendicular ao plano do equador celeste médio em J2000 e o eixo y forma um sistema ortogonal com os outros dois eixos. A intersecção entre o meridiano que passa pelo ponto vernal γ e o círculo horário que passa pela estrela E definem a ascensão reta α . Já a intersecção entre o equador e o paralelo que passa por E representa a declinação δ .



Fonte: da autora.

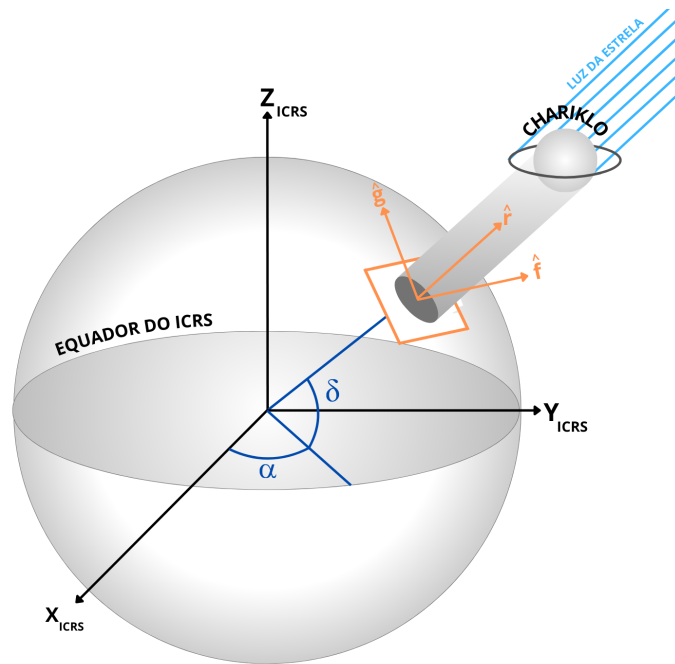
Em uma ocultação estelar, os valores de ascensão reta e declinação da estrela e dos corpos envolvidos já são conhecidos por meio de efemérides astronômicas, que são bancos de dados que fornecem a posição precisa de corpos celestes ao longo do tempo. Assim, as efemérides de Chariklo e da estrela ocultada são fornecidas no sistema ICRS e obtidas com antecedência ao evento de ocultação.

3.2.2 Sistema de Referência do Plano Tangente (TPRF)

O *Tangent Plane Reference Frame* (TPRF) é um sistema de coordenadas que permite descrever eventos de ocultações estelares precisamente, principalmente para representar a geometria do instante da ocultação, permitindo mapear as posições das detecções do anel em relação ao corpo central de Chariklo.

O plano de referência deste sistema é o plano perpendicular à linha de visada (linha que conecta o observador ao corpo ocultador), centrado em Chariklo. Esse plano é chamado de plano tangente, pois representa a superfície celeste onde os objetos aparentam estar projetados, do ponto de vista do observador. Ou seja, este plano tangente simboliza a posição aparente de Chariklo no céu, como exemplifica a Figura 7.

Figura 7 – Representação esquemática do Sistema de Referência do Plano Tangente. A esfera celeste (em cinza) está centrada no observador. O plano tangente ao ponto onde se encontra o corpo ocultador corresponde ao plano de referência do TPRF (Tangent Plane Reference Frame). Nele estão definidos os eixos $\hat{f}$ e $\hat{g}$, orientados respectivamente para o leste e norte celestes. O eixo $\hat{r}$ aponta da Terra para o corpo observado, sendo perpendicular ao plano tangente.



Fonte: da autora.

Sendo o TPRF um sistema cartesiano tridimensional, conta com três eixos que descrevem a ocultação estelar. O eixo $\hat{r}$, que aponta do observador para o centro de Chariklo no instante da ocultação, sendo chamado de linha de visada. O eixo $\hat{f}$ aponta na direção onde a ascensão reta é crescente, e o eixo $\hat{g}$ é direcionado para onde a declinação é crescente.

Quanto às coordenadas (r, f, g) neste sistema, r é a distância ao longo da linha de visada, determinando a distância relativa entre o anel de Chariklo e o plano tangente. A

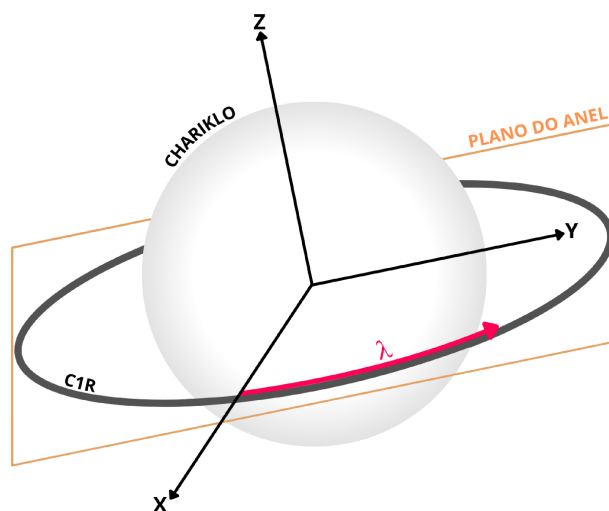
coordenada f representa o deslocamento na direção leste (ascensão reta crescente), e o eixo g representa o deslocamento na direção norte (declinação crescente) em relação à posição esperada de Chariklo, ambos no plano do céu.

3.2.3 Sistema de Referência do Plano do Anel (RPRF)

O terceiro e último sistema de referência relevante para este trabalho é o *Ring Plane Reference Frame* (RPRF), ou Sistema de Referência do Plano do Anel. Este sistema tem origem no centro de Chariklo, e seu plano de referência é o plano que contém o anel principal, C1R. Ele é usado para descrever a geometria e a orientação do anel, principalmente quando se quer entender as variações da largura ao longo da longitude e a posição das detecções durante as ocultações.

Os eixos do RPRF são definidos da seguinte forma: o eixo x é direcionado para a interseção entre o plano do anel e o Equador do sistema ICRS. O eixo y está contido no plano do anel e, juntamente com x , define esse plano. Por fim, o eixo z é o vetor normal ao plano do anel, apontando para o polo norte do anel. Representações esquemáticas do RPRF estão nas Figuras 8 e 9.

Figura 8 – Representação esquemática do Sistema de Referência do Plano do Anel (RPRF). Na figura, o corpo central está circundado pelo anel, definido pelo plano formado pelos eixos x e y , e o eixo z representa o vetor normal ao anel, apontando para o polo norte deste sistema. O eixo x indica o aumento da longitude do anel, enquanto o eixo y (orientado para o leste) e o z (apontando para o norte) completam os eixos do sistema de referência. A longitude λ será melhor definida posteriormente.



Fonte: da autora.

4 DADOS UTILIZADOS

4.1 Dados das ocultações estelares

As informações dos eventos de ocultação utilizados para a análise do anel C1R foram retiradas de [Bérard *et al.* \(2017\)](#) e [Morgado *et al.* \(2021\)](#). A Tabela 1 mostra os observadores e seus respectivos instantes de imersão e emersão da luz da estrela observados, para diferentes eventos de ocultação pelo anel C1R. As indicações “1°” e “2°” representam que a detecção é referente à obstrução da luz da estrela pela primeira e pela segunda borda do anel, respectivamente. [Bérard *et al.* \(2017\)](#) fornece os tempos médios de desaparecimento e reaparecimento para as ocultações de 03 de junho de 2013, 16 de fevereiro de 2014 e 29 de abril de 2014.

Tabela 1 – Instantes de imersão e emersão da luz estelar detectados durante eventos de ocultação pelo anel C1R de Chariklo. São apresentados os tempos de imersão e emersão para cada detecção em diferentes eventos, com suas respectivas incertezas. Cada evento é identificado pelo local de observação e pela detecção da borda do anel, sendo “1°” a primeira detecção da borda do anel, e “2°” a segunda detecção da borda do anel.

Detecção do anel	Tempo de imersão (hh:mm:ss.sss)	Tempo de emersão (hh:mm:ss.sss)
2013-06-03 06:25 UTC		
Danish 1°	06:25:21.166 ± 0,0007	
Danish 2°	06:25:40.462 ± 0,0012	
2014-02-16 07:45 UTC		
VLT 1°	07:45:25.541 ^{+0,010} _{-0,004}	
VLT 2°	07:45:45.133 ^{+0,313} _{-0,332}	
2014-04-29 23:14 UTC		
Springbook 1°	23:14:25.884 ± 0,007	
Springbook 2°	23:15:04.362 ± 0,006	
SAAO 1°	23:13:56.191 ± 0,007	
SAAO 2°	23:14:28.964 ± 0,008	
2017-04-09 02:24 UTC		
Wabi Lodge 1°	02:10:45.861 ± 0,045	02:10:47.259 ± 0,087
Wabi Lodge 2°	02:13:00.816 ± 0,053	02:13:01.868 ± 0,053
Weaver R. L. 1°	02:10:38,477 ± 0.022	02:10:39,737 ± 0.024
Weaver R. L. 2°	02:12:56.960 ± 0.023	02:12:57.986 ± 0.007
Continua na próxima página		

Tabela 1 – Continuação da página anterior

Detecção do anel	Tempo de imersão (hh:mm:ss.sss)	Tempo de emersão (hh:mm:ss.sss)
2017-06-22 21:18 UTC		
Outeniqua 1°	21:21:11.469 ± 0.048	21:21:11.768 ± 0.053
Outeniqua 2°	21:21:39.450 ± 0.044	21:21:39.745 ± 0.037
Onduruquea 1°	21:21:13.486 ± 0.012	21:21:13.702 ± 0.015
Onduruquea 2°	21:21:42.047 ± 0.014	21:21:42.251 ± 0.012
Windhoek - Backes 1°	21:21:07.646 ± 0.067	21:21:07.898 ± 0.069
Windhoek - Backes 2°	21:21:35.709 ± 0.052	21:21:36.082 ± 0.076
Windhoek - Meza 1°	21:21:07.718 ± 0.076	21:21:07.976 ± 0.122
Windhoek - Meza 2°	21:21:35.825 ± 0.039	21:21:35.825 ± 0.039
Tivoli Lodge 1°	21:21:03.630 ± 0.031	21:21:03.834 ± 0.038
Tivoli Lodge 2°	21:21:30.580 ± 0.036	21:21:30.724 ± 0.018
Hakos 1°	21:21:10.218 ± 0.007	21:21:10.426 ± 0.007
Hakos 2°	21:21:36.347 ± 0.011	21:21:36.570 ± 0.007
2017-07-23 05:58 UTC		
VLT 1°	05:55:51.104 ± 0.004	05:55:51.406 ± 0.008
VLT 2°	05:56:14.242 ± 0.011	05:56:14.532 ± 0.006
SNO 1°	05:55:50.836 ± 0.263	05:55:51.474 ± 0.243
SNO 2°	05:56:14.242 ± 0.215	05:56:14.731 ± 0.068
Tolar Grande 1°	05:55:37.371 ± 0.026	05:55:37.721 ± 0.040
Tolar Grande 2°	05:56:03.775 ± 0.022	05:56:04.017 ± 0.026
El Rodeo 1°	05:55:31.878 ± 0.288	05:55:32.374 ± 0.069
El Rodeo 2°	05:55:59.265 ± 0.107	05:55:59.819 ± 0.107
El Salvador 1°	05:55:45.710 ± 0.033	05:55:46.009 ± 0.017
El Salvador 2°	05:56:14.349 ± 0.056	05:56:14.660 ± 0.140
Inca de Oro 1°	05:55:46.430 ± 0.043	05:55:46.651 ± 0.121
Inca de Oro 2°	05:56:15.079 ± 0.027	05:56:15.210 ± 0.025
Danish V 1°	05:55:54.536 ± 0.004	05:55:54.874 ± 0.006
Danish V 2°	05:56:13.750 ± 0.011	05:56:14.183 ± 0.008
Danish R 1°	05:55:54.539 ± 0.004	05:55:54.861 ± 0.005
Danish R 2°	05:56:13.752 ± 0.008	05:56:14.193 ± 0.005
La Silla 1°	05:55:54.519 ± 0.013	05:55:54.855 ± 0.018
La Silla 2°	05:56:13.745 ± 0.010	05:56:14.226 ± 0.011
TRAPPIST-South 1°	05:55:54.498 ± 1.366	05:55:55.994 ± 1.743
TRAPPIST-South 2°	05:56:12.782 ± 1.403	05:56:14.072 ± 1.498
OPD 1°	05:54:29.963 ± 0.009	05:54:30.731 ± 0.007
OPD 2°	05:54:39.651 ± 0.006	05:54:40.534 ± 0.008
Continua na próxima página		

Tabela 1 – Continuação da página anterior

Detecção do anel	Tempo de imersão (hh:mm:ss.sss)	Tempo de emersão (hh:mm:ss.sss)
2017-08-24 02:59 UTC		
OPD 1°	02:54:03.343 ± 0.182	02:54:04.058 ± 0.175
OPD 2°	02:54:48.556 ± 0.153	02:54:49.019 ± 0.071

Bérard *et al.* (2017) relatou observações do anel principal de Chariklo (C1R) a partir de 9 ocultações estelares entre 2014 e 2016. No entanto, apenas 3 eventos (03 de junho de 2013, 16 de fevereiro de 2014 e 29 de abril de 2014) resultaram em 8 detecções resolvidas provenientes de 4 observações.

De acordo com Morgado *et al.* (2021), uma detecção resolvida é aquela onde três parâmetros podem ser adquiridos: o tempo de imersão, o tempo de emersão e a opacidade aparente (o quanto a luz estelar é bloqueada ao passar por C1R).

Já em uma detecção não resolvida, há uma correlação entre a duração e a opacidade do anel, dificultando a sua caracterização. Geralmente, o que há é uma determinação do tempo médio, sendo esse a média do tempo de emersão e de imersão.

As 15 observações restantes relatadas por Bérard *et al.* (2017) resultaram em detecções não resolvidas, tornando-as em grande parte inadequadas para uma caracterização detalhada do anel. De maneira semelhante, Morgado *et al.* (2021) publicou resultados de 6 ocultações estelares que detectaram o C1R. Dentre elas, 23 detecções resolvidas provenientes de 12 observações em 4 eventos foram obtidas, com outras 24 detecções permanecendo não resolvidas.

Com base nos dados apresentados, é possível dispor de um conjunto de detecções resolvidas e não resolvidas que permite uma análise da estrutura do anel C1R. A distinção entre detecções resolvidas e não resolvidas é fundamental para garantir a precisão dos parâmetros derivados, como largura e posição do anel. A seguir, será descrita a metodologia utilizada para transformar esses dados em informações espaciais no plano do anel, possibilitando a caracterização de suas variações longitudinais.

5 METODOLOGIA

A caracterização adequada do anel C1R requer a identificação da detecção do anel dentro do sistema RPRF. Inicialmente, é apresentado um método para transportar a observação do anel do plano tangente da ocultação para o Sistema Internacional de Referência Celeste (ICRS), caso a orientação do polo seja conhecida. Por fim, é detalhado o processo para obter a longitude da detecção do anel no plano do anel.

5.1 Caracterização do plano do anel

Nesta seção, o objetivo será obter parâmetros que permitam determinar a longitude da detecção dentro do plano do anel, por meio de cálculos matriciais que facilitam a transformação de coordenadas entre diferentes sistemas de referência. A princípio, considera-se a Equação 5.1, para um plano qualquer:

$$ax + by + cz + d = 0 \quad (5.1)$$

Onde o vetor $\vec{n} = (a, b, c)$ é um vetor que define a normal do plano, e (x, y, z) são coordenadas em dado sistema de referência. Assumindo que a origem do sistema de referência está localizada neste plano, tem-se $d = 0$, e

$$ax + by + cz = 0. \quad (5.2)$$

Considerando a Equação 5.2 sendo o plano do anel C1R de Chariklo, o vetor normal $\vec{n}$ ao plano corresponde às coordenadas do polo do anel no ICRS, pois representam a direção perpendicular ao plano do anel no espaço tridimensional. O polo do anel é definido por suas coordenadas de ascensão reta ($\alpha_p = 151.03^\circ$) e declinação ($\delta_p = 41.81^\circ$), presentes em [Morgado *et al.* \(2021\)](#), que são coordenadas esféricas. Considerando que a normal $\vec{n} = (a, b, c)$ está descrita em coordenadas cartesianas, deve-se converter (α_p, δ_p) também para coordenadas cartesianas. Assim,

$$\begin{aligned} a &= r \cos \alpha_p \cos \delta_p \\ b &= r \sin \alpha_p \cos \delta_p \\ c &= r \sin \delta_p \end{aligned} \quad (5.3)$$

Como o objetivo é obter a direção do vetor normal, e não sua magnitude, foi considerado $r = 1$. Portanto,

$$-0.652095x + 0.361016y + 0.666663z = 0. \quad (5.4)$$

Outro conjunto de dados acessível são as coordenadas de ascensão reta e declinação do centro de Chariklo (α_b, δ_b), a partir do observador, no instante da ocultação. Essas

coordenadas estão no sistema ICRS, mas, transformando-as em coordenadas no sistema TPRF, tem-se a posição aparente de Chariklo para o observador.

A transformação do sistema ICRS para o TPRF é feito por meio de matrizes de rotação, como mostrado na Equação 5.5.

$$\begin{bmatrix} \hat{r} \\ \hat{f} \\ \hat{g} \end{bmatrix}_{TPRF} = R_y(-\delta_b) R_z(\alpha_b) \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{bmatrix}_{ICRS} \quad (5.5)$$

Sendo

$$R_y(-\delta_b) = \begin{bmatrix} \cos(\delta_b) & 0 & \sin(\delta_b) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\delta_b) & 0 & \cos(\delta_b) \end{bmatrix}, \quad (5.6)$$

e

$$R_z(\alpha_b) = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_b) & \sin(\alpha_b) & 0 \\ -\sin(\alpha_b) & \cos(\alpha_b) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.7)$$

R_y e R_z são matrizes de rotação ao redor dos eixos y e z , respectivamente. A matriz R_y rotaciona de acordo com o ângulo da declinação, em sentido horário. Já a matriz R_z tem como ângulo de rotação a ascensão reta, orientada em sentido anti-horário. O esquema que representa a transformação realizada na Equação 5.5 está presente na Figura 7.

Aplicando a Equação 5.5 para as coordenadas do polo (a, b, c) , como consta na Equação 5.3, é obtido o vetor do polo do anel no sistema TPRF, $\vec{n}' = (a', b', c')$. O referencial TPRF foi considerado de modo que o plano do anel passe exatamente pelo centro de Chariklo. Como tanto a posição da detecção do anel quanto o próprio centro do corpo devem satisfazer a equação do plano, tratamos o centro como a origem do TPRF, $(d' = 0)$, garantindo que a linha de visada cruze o plano em $(0, 0, 0)$. Assim, a Equação para as coordenadas do plano do anel no TPRF é dada pela Equação 5.8.

$$a'r + b'f + c'g = 0 \quad (5.8)$$

As coordenadas f e g da detecção do anel foram obtidas na ocultação, e a terceira coordenada (r) foi obtida pela Equação 5.9.

$$r = -\frac{(b'f + c'g)}{a'} \quad (5.9)$$

O vetor $\vec{r} = (r, f, g)$ representa o vetor posição da detecção do anel em relação ao centro do corpo no TPRF. Por fim, aplicando a transformação inversa da Equação 5.5, é recuperado o vetor r no ICRS, que será utilizado no próximo passo.

Para analisar a posição das detecções do anel, foi utilizado o RPRF, que permite medir a posição dos pontos do anel em relação ao próprio plano do anel, sendo essencial para estudar sua dinâmica e variações de largura.

A utilização desse novo sistema se deve à necessidade de encontrar a longitude e distância do corpo ao longo do anel. Assim, encontra-se a distância da detecção do anel até o centro de Chariklo, que é definida pela norma do vetor $\vec{r}$, como descreve a Equação 5.10.

$$||\vec{r}|| = \sqrt{r^2 + f^2 + g^2} \quad (5.10)$$

Para realizar a transformação do ICRS para o RPRF, foi adotado um modelo de transformação de coordenadas de acordo com Archinal *et al.* (2018), assumindo um referencial não girante, para posteriormente estimar a velocidade das partículas ao redor de Chariklo. A transformação do ICRS para o RPRF é dada pela Equação 5.11.

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix}_{RPRF} = R_x(90^\circ - \delta_p) R_z(90^\circ + \alpha_p) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{ICRS} \quad (5.11)$$

Sendo

$$R_x(90^\circ - \delta_p) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(90^\circ - \delta_p) & \sin(90^\circ - \delta_p) \\ 0 & -\sin(90^\circ - \delta_p) & \cos(90^\circ - \delta_p) \end{bmatrix}, \quad (5.12)$$

e

$$R_z(90^\circ + \alpha_p) = \begin{bmatrix} \cos(90^\circ + \alpha_p) & \sin(90^\circ + \alpha_p) & 0 \\ -\sin(90^\circ + \alpha_p) & \cos(90^\circ + \alpha_p) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.13)$$

As matrizes de rotação R_x e R_z representam as matrizes de rotação em torno dos eixos x e z , respectivamente, e (α_p, δ_p) são as coordenadas do polo do anel no ICRS. Um esquema representativo da Equação 5.5 está na Figura 9.

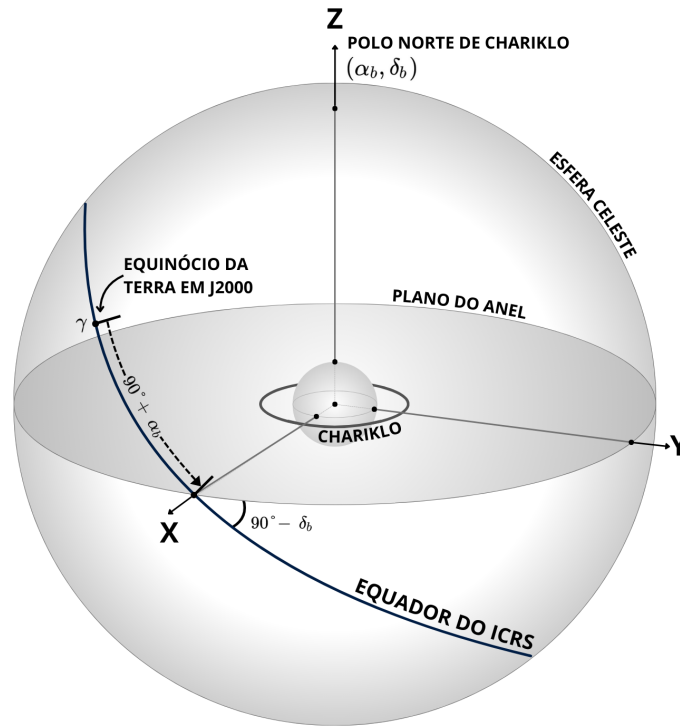
Após obtido o vetor (r, f, g) no RPRF, correspondente à (x'', y'', z'') , a longitude λ é determinada pela Equação 5.14. Uma representação esquemática de λ é demonstrada na Figura 8.

$$\lambda = \arctan 2(y, x) \quad (5.14)$$

5.2 Aplicação da metodologia

A metodologia foi inteiramente desenvolvida em Python, com o auxílio do pacote *Stellar Occultation Reduction and Analysis* (GOMES-JUNIOR *et al.*, 2022). Inicialmente,

Figura 9 – Esquema ilustrativo da transformação entre o ICRS e o RPRF. A esfera celeste está centrada em Chariklo, com o vetor apontando para o polo norte do corpo, definido pelas coordenadas (α_b, δ_b) . O RPRF é construído com base no plano do anel, com o eixo x apontando para a intersecção entre o plano do anel e o Equador do ICRS, o eixo z sendo o vetor normal ao plano do anel, e o eixo y sendo perpendicular aos dois eixos anteriores.



Fonte: modificado de Archinal *et al.*, 2019.

foram definidas as funções do pacote: Body, representando o corpo ocultador, e Occultation, utilizada separadamente para o corpo principal e para o anel. Em seguida, foi definido o observador e as curvas de luz. O ponto de partida foi diretamente os instantes de imersão e emersão apresentados na Tabela 1, sem a necessidade de analisar as curvas de luz.

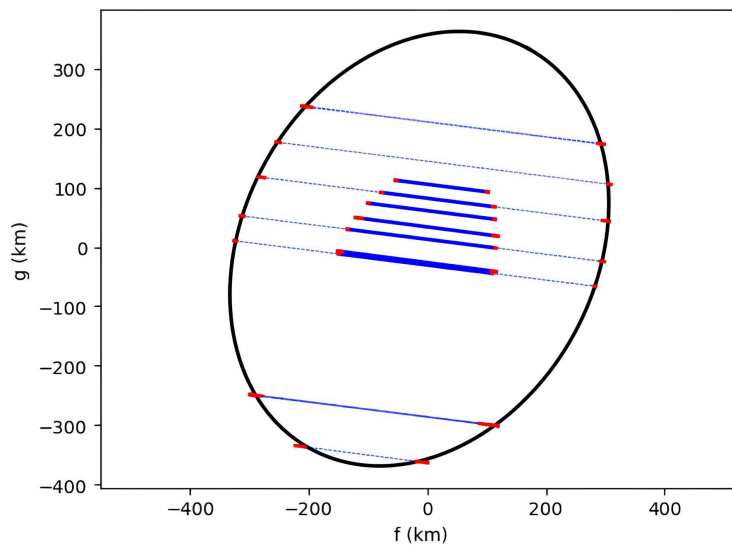
Em seguida, determinou-se a posição da ocultação do anel, calculando as coordenadas f e g de cada detecção do anel no plano tangente correspondente. Esse cálculo foi realizado com base nas coordenadas da estrela, nas posições dos observadores e nos instantes da ocultação.

Para modelar o anel, utilizou-se uma função que gera uma elipse a partir de valores de f e g , raio equatorial, achatamento, ângulo de posição e os respectivos erros associados. Estes parâmetros são gerados aleatoriamente utilizando Monte Carlo em Cadeia de Markov, e a qualidade de cada combinação é avaliada por meio de gráficos de qui-quadrado. Esses gráficos permitem identificar os valores centrais e aqueles que apresentam o menor qui-quadrado, indicando o melhor ajuste para as variáveis analisadas.

Assim, foi encontrado o centro da elipse formada pelo anel, podendo ser visualizada

juntamente das cordas do anel e de Chariklo, que são as linhas imaginárias que representam o caminho da estrela através do objeto, como visto na Figura 10.

Figura 10 – Gráfico que representa as cordas da ocultação e a elipse de Chariklo, no evento de ocultação de 23 de julho de 2017. A elipse em preto representa a elipse que melhor se ajusta ao formato das cordas do anel C1R. As linhas azuis escuras representam a linha que cruza o corpo principal durante o evento de ocultação, no ponto de vista do observador. As linhas azuis pontilhadas representam as cordas do anel. Os pontos vermelhos representam os instantes de desaparecimento e reaparecimento da luz da estrela. Os eixos f e g representam as coordenadas da detecção no plano da ocultação.



Fonte: da autora.

Os próximos passos concentraram-se na caracterização do plano do anel, incluindo a determinação da longitude, seguindo a metodologia detalhada na Seção 5.1. Primeiramente, foram definidos o polo de Chariklo e o TPRF, com o objetivo de calcular o vetor do anel no plano tangente.

Seguidamente, foi subtraído das coordenadas do centro de Chariklo (f_0, g_0) os valores f e g . Esse passo é necessário pois a Equação 5.4 é válida apenas se Chariklo estiver na origem do referencial, já que ela é derivada assumindo que o plano do anel passa pela origem do sistema de coordenadas. Caso contrário, seria necessário ajustar a Equação 5.4 levando em conta o deslocamento.

Portanto, a metodologia descrita na Seção 5.1 foi aplicada a cada instante de desaparecimento e reaparecimento do C1R de todas as ocultações, para determinar a longitude e a distância radial em relação ao centro de Chariklo. Como esperado, uma vez que a corda da ocultação não cruza o anel radialmente (ou seja, não passa exatamente pelo centro do anel), as longitudes dos instantes de desaparecimento e reaparecimento da mesma detecção do anel apresentam uma pequena diferença. Essa diferença geralmente é inferior a 1 grau, portanto, a longitude é apresentada como a longitude média de cada detecção do

anel. Consequentemente, a largura radial do anel é calculada como a variação da distância radial entre os instantes de desaparecimento e reaparecimento. As longitudes e larguras são fornecidas na Tabela 2.

Tabela 2 – Conjunto de dados de detecções do anel a partir de ocultações estelares. As grandezas listadas são a longitude (λ) no RPRF, a largura radial do anel (W), e sua distância (d) em relação ao centro de Chariklo. A coluna “resolvida?” indica se o anel foi resolvido (s) ou não resolvido (n). Detecções marcadas com “*” são dados que vêm diretamente de [Bérard *et al.* \(2017\)](#). As indicações (e) e (i) referem-se a valores associados às partes externa e interna da detecção do anel, respectivamente, em vez do centro.

Detecção do anel	λ (°)	W (km)	d (km)	resolvida?
2013-06-03 06:25 UTC				
Danish 1°*	341.76	6.16 ± 0.11		s
Danish 2°*	124.38	7.14 ± 0.04		s
2014-02-16 07:45 UTC				
VLT °*	183.37	$5.316^{+0.868}_{-1.916}$		s
VLT 2°*	300.99	$4.833^{+1.667}_{-0.476}$		s
2014-04-29 23:15 UTC				
Springbok 1°*	287.42	5.575 ± 0.398		s
Springbok 2°*	157.83	$6.75^{+0.48}_{-0.21}$		s
SAAO °*	266.66	5.68 ± 0.2		s
SAAO 2°*	198.90	6.625 ± 0.2		s
2017-04-09 02:24 UTC				
Wabi Lodge 1°	156.88	7.6 ± 0.7	384.2	s
Wabi Lodge 2°	4.05	5.7 ± 0.6	388.8	s
Weaver R. L. 1°	167.74	7.0 ± 0.2	386.0	s
Weaver R. L. 2°	353.36	5.7 ± 0.2	387.0	s
2017-06-22 21:18 UTC				
Outeniqua 1°	346.47	8 ± 2	386.4	n
Outeniqua 2°	145.04	8 ± 2	389.5	n
Onduruquea 1°	337.36	5.8 ± 0.7	389.2	s
Onduruquea 2°	154.06	5.5 ± 0.7	389.1	s
Windhoek - Backes 1°	324.85	7 ± 4	391.8	n
Windhoek - Backes 2°	166.68	10 ± 3	388.6	n
Windhoek - Meza 1°	324.79	7 ± 5	389.9	n
Windhoek - Meza 2°	166.68	4 ± 2	388.6	n
Tivoli Lodge 1°	316.16	5 ± 3	389.6	n
Tivoli Lodge 2°	175.32	4 ± 1	389.0	n

Continua na próxima página

Tabela 2 – Continuação da página anterior

Detecção do anel	λ (°)	W (km)	d (km)	resolvida?
Hakos 1°	311.97	5.2 ± 0.4	390.8	s
Hakos 2°	179.67	5.6 ± 0.5	387.7	s
2017-07-23 05:58 UTC				
VLT 1°	15.61	6.8 ± 0.3	392.6	s
VLT 2°	126.36	6.4 ± 0.3	383.1	s
SSO 1°	16.33	14 ± 11	385.5	n
SSO 2°	126.59	10.8 ± 0.8	385.3	n
Tolar Grande 1°	4.66	9 ± 2	388.0	s
Tolar Grande 2°	138.35	6 ± 1	388.4	s
El Rodeo 1°	354.96	13 ± 9	381.4	n
El Rodeo 2°	148.06	14 ± 6	382.1	n
El Salvador 1°	344.15	8 ± 1	388.4	n
El Salvador 2°	158.79	8 ± 5	388.6	n
Inca de Oro 1°	337.59	6 ± 4	388.4	n
Inca de Oro 2°	165.34	3 ± 1	388.4	n
Danish V 1°	293.65	6.1 ± 0.2	388.3	s
Danish V 2°	209.24	7.8 ± 0.4	388.4	s
Danish R 1°	293.66	5.8 ± 0.2	388.3	s
Danish R 2°	209.22	8.0 ± 0.2	388.5	s
La Silla 1°	293.70	6.1 ± 0.6	388.6	s
La Silla 2°	209.18	8.7 ± 0.4	388.8	s
TRAPPIST-South 1°	292.01	3 ± 7	378.6	n
TRAPPIST-South 2°	210.88	22 ± 51	378.7	n
OPD 1°	272.64(e)	6.9 ± 0.1	393.2(e)	s
	269.78(i)		386.3(i)	s
OPD 2°	230.21(e)	8.1 ± 0.1	394.4(e)	s
	233.50(i)		386.3(i)	s
SARA graze	260.40(e)		395.8(e)	s
	242.73(e)		395.6(e)	s
PROMPT graze	261.32(e)		396.9(e)	s
	241.80(e)		396.6(e)	s
2017-08-24 02:59 UTC				
OPD 1°	354.69	12 ± 6	386.4	n
OPD 2°	174.29	8 ± 4	384.3	n

Como uma verificação de consistência, também foi analisada a latitude, e todos os valores encontrados foram zero, conforme esperado, já que o plano do anel é o plano equatorial do RPRF.

Durante a ocultação de 23 de julho de 2017, as detecções de SARA e PROMPT foram tangenciais (graze), com o desaparecimento e reaparecimento da estrela ocorrendo na borda externa do anel. Consequentemente, não foi possível determinar a largura do anel nessa localização, e tais cordas não foram utilizadas na análise. Para esses dados, a Tabela 2 apresenta apenas a longitude e a distância da parte externa do anel, rotulada como “(e)”. No mesmo evento, a observação fornecida por OPD detectou a estrela desaparecendo duas vezes. No entanto, cada detecção do anel foi bastante tangencial, resultando no desaparecimento e reaparecimento da estrela ocorrendo em diferentes longitudes. A Tabela 2 apresenta separadamente a longitude e a distância para as partes interna (i) e externa (e) do anel. Nesse caso, foi utilizada a diferença radial (W) associada à longitude média ($\lambda_{média}$) para a análise.

Por outro lado, [Bérard et al. \(2017\)](#) não forneceu os instantes de desaparecimento e reaparecimento para suas detecções do anel. Como resultado, não foi possível aplicar a metodologia desenvolvida para calcular a longitude e a largura radial do anel utilizando estes dados. No entanto, os autores forneceram esses valores para as detecções resolvidas, embora não tenham detalhado os métodos usados para derivar esses parâmetros. Esses valores são reproduzidos na Tabela 2. Para verificar a consistência, foi aplicada a metodologia descrita nas seções anteriores ao instante médio de cada detecção do anel. Não foram encontradas diferenças significativas na longitude, indicando que ambas as metodologias são consistentes.

6 RESULTADOS

De acordo com [Bérard et al. \(2017\)](#), o anel C1R de Chariklo apresenta variações significativas em sua largura, com valores que oscilam entre 5 e 7,5 km. [Morgado et al. \(2021\)](#) também observaram diferentes larguras para o anel principal, variando de 4,8 a 9,1 km, e uma média de 6,5 km.

Apesar da escassez de dados completos ao longo da longitude, das características específicas das ocultações e das incertezas significativas decorrentes de detecções não resolvidas, foi possível determinar o comportamento do anel com base no formalismo proposto por [Longaretti \(1989\)](#). Originalmente desenvolvido para compreender a dinâmica dos anéis de Urano, esse formalismo descreve os modos de oscilação nos quais a largura do anel varia em função da longitude, fornecendo uma base teórica para a análise das variações observadas no anel de Chariklo.

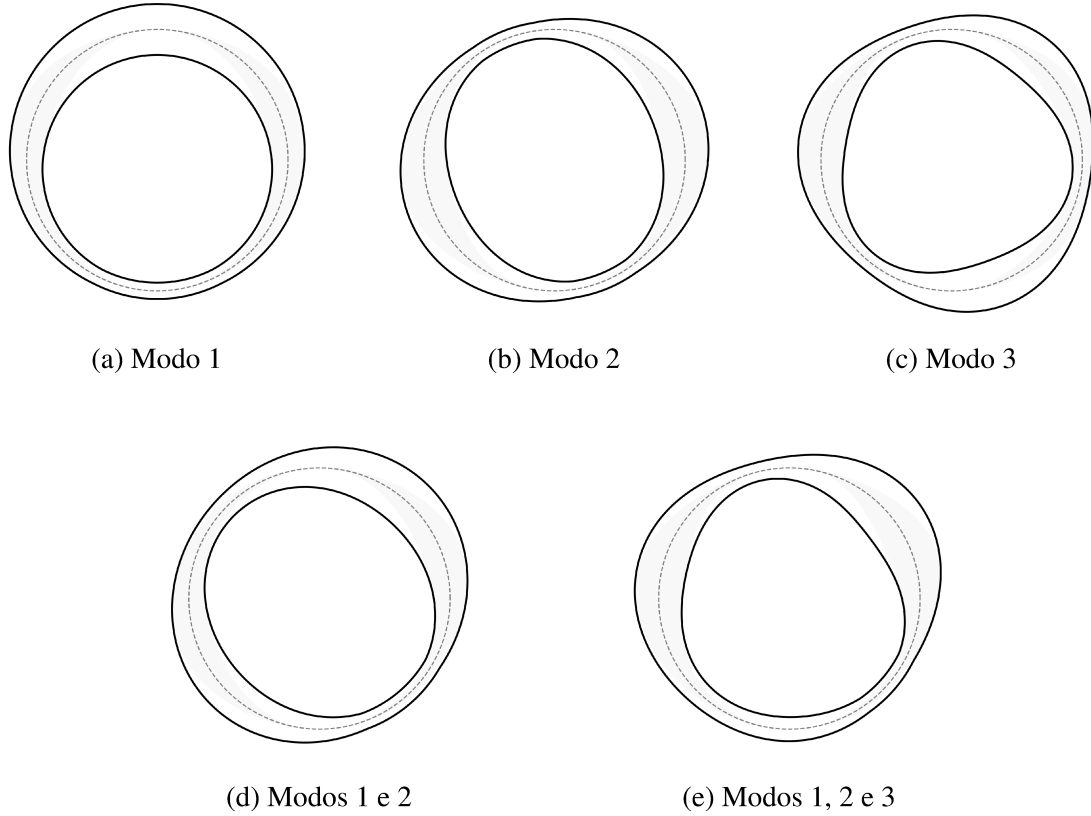
Um modo de oscilação, neste contexto, refere-se a uma perturbação global que induz uma variação periódica na forma ou na largura do anel ([LONGARETTI, 1989](#)). [French, Elliot e Levine \(1986\)](#) utilizaram o modelo de autogravidade para precessão uniforme dos anéis para mostrar a variação sinusoidal da largura do anel em função da longitude para os anéis de Urano, e, posteriormente, [Longaretti \(1989\)](#) consolidou tal formalismo com uma abordagem de multimodos que influencia a largura em anéis estreitos.

Esses modos se referem a padrões de oscilação que se mantêm ao longo do tempo e podem surgir por diversos motivos, como a excentricidade do anel, interações ressonantes com o corpo central ou até mesmo por mecanismos de auto organização gravitacional. O parâmetro m_i está ligado a diferentes simetrias desses padrões: $m = 1$ indica uma assimetria geral no anel, como uma forma levemente alongada, enquanto valores como $m = 2$ ou $m = 3$ mostram variações mais complexas em sua largura ou densidade ([LONGARETTI, 1989](#)).

A Figura 11 representa os modos de oscilação em torno de uma circunferência. A identificação e o ajuste desses modos será o método utilizado para a caracterização do anel C1R e, posteriormente, para a inferência de demais propriedades físicas do corpo central ao qual estão associados.

Dessa forma, foram explorados quais modos de oscilação melhor se ajustam ao nosso conjunto de dados. Para introduzir o formalismo utilizado e avaliar de maneira mais simplificada a consistência das variáveis envolvidas, optou-se por iniciar a análise com a ocultação de 23 de julho de 2017, que apresenta um número maior de detecções resolvidas. Posteriormente, a análise foi expandida para incluir todo o conjunto de dados, incorporando maior complexidade ao modelo e permitindo uma avaliação mais abrangente das características dinâmicas do anel.

Figura 11 – Representações esquemáticas de modos de oscilação ao redor de uma circunferência, induzida por modos de perturbação com diferentes números de lóbulos m . A linha cinza tracejada representa a circunferência central de referência, enquanto a linha preta indica a forma das oscilações após a aplicação dos modos: $m = 1$ (deslocamento global), $m = 2$ (deformação com duas cristas), $m = 3$ (três cristas) e suas combinações lineares. As figuras ilustram, de forma qualitativa, como a superposição desses modos pode gerar geometrias mais complexas observadas nos anéis.



Fonte: da autora.

6.1 Modos de oscilação para a ocultação do dia 23/07/2017

As observações de ocultação estelar em 23 de julho de 2017 resultaram em 12 detecções resolvidas do anel principal de Chariklo, juntamente com 10 detecções não resolvidas. Como demonstrado em [Morgado *et al.* \(2021\)](#), essas observações cobrem uma porção significativa da longitude do anel, tornando esta ocultação a mais adequada para explorar modos de oscilação em uma única época.

Como o escopo deste trabalho não inclui uma análise dinâmica detalhada do anel, foi evitado adotar diretamente o modelo proposto por [Longaretti \(1989\)](#), que considera os parâmetros orbitais do anel, como o semieixo maior e excentricidade. Em vez disso, foi escolhido uma abordagem mais simples, empregando uma função senoidal para modelar a largura W do anel em função da longitude λ , como

$$W(\lambda) = W_{média} + \sum_i A_i \sin[m_i(\lambda - \phi_i)], \quad (6.1)$$

onde $W_{média}$ denota a largura média do anel, enquanto A_i , m_i e ϕ_i representam a amplitude, o modo de oscilação e o ângulo de fase, respectivamente.

O modo de oscilação m_i deve ser um número inteiro positivo. Um modo de oscilação de $m = 1$ para a variação de largura com base em 8 detecções resolvidas foi sugerido por [Bérard et al. \(2017\)](#). [Morgado et al. \(2021\)](#) também assumiram um modo $m = 1$ para estimar variações na excentricidade, que representa o quanto a forma do anel se desvia de um círculo perfeito, e no semieixo maior do anel, que define o tamanho médio do anel. Utilizar um modo de oscilação igual a 1 sugere uma deformação elíptica, implicando numa distribuição assimétrica de massa ao longo do anel.

Para obter uma compreensão mais detalhada do comportamento do anel, os dados foram ajustados a modos de oscilação com $m = 1, 2, 3$, além de explorar combinações desses modos. Essa abordagem permitiu investigar como diferentes padrões de oscilação podem influenciar a variação observada na largura do anel em função da longitude.

Devido ao limitado número de pontos e incertezas significativas em algumas detecções, o ajuste de modos de oscilação mais elevados pode gerar sobreajuste, fazendo com que o modelo possa se tornar excessivamente complexo, ajustando-se a flutuações aleatórias nos dados em vez de capturar os padrões físicos reais do anel. Modos de oscilação mais baixos são capazes de ajustar o modelo descrevendo padrões mais básicos e significativos do anel.

O procedimento de ajuste também envolveu a análise por meio do método de qui-quadrado. O qui-quadrado é uma técnica estatística que foi utilizada para ajustar o modelo para os dados observados, minimizando as diferenças entre os valores previstos pelo modelo e os valores observados. Ele foi calculado usando a Equação 6.2:

$$\chi^2 = \sum_j \frac{[W_j - W(\lambda_j)]^2}{(\sigma_{W_j})^2} \quad (6.2)$$

W_j representa a largura radial da j -ésima detecção (apresentada na Tabela 2), com sua respectiva incerteza (σ_{W_j}), e $W(\lambda_j)$ é o modelo derivado na Equação 6.1 calculado para a longitude da j -ésima detecção.

Foram realizados dois conjuntos de procedimentos de ajuste: um incluindo todas as 22 detecções do anel da ocultação e outro compreendendo apenas as 12 detecções resolvidas. Isso permite entender como as detecções não resolvidas (que têm maiores incertezas) afetam o ajuste do modelo, podendo ser útil para explorar tendências gerais, desde que interpretadas com a devida cautela.

Além disso, para cada conjunto de dados, foram feitos 5 testes: considerando apenas o modo 1, apenas o modo 2, apenas o modo 3, a combinação dos modos 1 e 2, e, por fim, a combinação dos modos 1, 2 e 3, para verificar qual combinação melhor se ajustaria ao

modelo. Durante esses testes, foram ajustados os parâmetros $W_{média}$, A_i e ϕ_i , enquanto m_i é fixo para cada teste.

Para explorar o espaço de parâmetros e encontrar os valores que melhor descrevem os dados, o código realiza uma simulação onde são gerados valores aleatórios utilizando Monte Carlo em Cadeia de Markov para os parâmetros do modelo (largura média, amplitude e ângulo da fase), e, para cada conjunto de parâmetros, o qui-quadrado é calculado. Esse processo é repetido de dezenas a centenas de milhões de vezes, permitindo uma ampla exploração das possíveis combinações de parâmetros. Os resultados são filtrados para manter apenas aqueles que apresentam um qui-quadrado próximo ao valor mínimo encontrado, garantindo que apenas as soluções mais plausíveis sejam consideradas.

Outro parâmetro usado para avaliar a qualidade dos resultados foi o qui-quadrado mínimo por graus de liberdade (χ_{pgl}^2). Os graus de liberdade representam o número de informações independentes disponíveis para estimar os parâmetros do modelo, e são calculados conforme a Equação 6.3:

$$\text{graus de liberdade} = n_d - n_p \quad (6.3)$$

Os parâmetros utilizados são o n_d , sendo este o número de pontos utilizados no ajuste, e n_p , o número de parâmetros ajustados. Ao dividir o qui-quadrado mínimo pelos graus de liberdade é obtida uma normalização que leva em consideração tanto a qualidade do ajuste quanto a complexidade do modelo. Um valor próximo de 1 indica que o modelo descreve bem os dados dentro das incertezas observacionais. Valores significativamente maiores que 1 sugerem que o modelo não está capturando adequadamente a variabilidade dos dados, enquanto valores menores que 1 podem indicar que o modelo está superajustado ou que as incertezas foram superestimadas.

O qui-quadrado mínimo pelos graus de liberdade é calculado por:

$$\chi_{pgl}^2 = \frac{\chi_{\min}^2}{n_d - n_p} \quad (6.4)$$

Os resultados do ajuste de qui-quadrado são apresentados na Tabela 3, juntamente com o qui-quadrado mínimo ($\chi_{\min}^2$) e o qui-quadrado mínimo por grau de liberdade (χ_{pgl}^2).

Comparando o qui-quadrado mínimo por graus de liberdade para todos os ajustes, o melhor ajuste encontrado foi o $N_{\text{ajuste}} = 9$ que contém apenas as detecções resolvidas, combinando os modos 1 e 2, com $\chi_{pgl}^2 = 1,0$, sendo o melhor possível entre todos os ajustes.

O segundo melhor ajuste é $N_{\text{ajuste}} = 10$, que inclui o modo 1, 2 e 3 e somente as detecções resolvidas. No entanto, as incertezas da amplitude ($0,5 \pm 0,5$) e do ângulo de fase (60 ± 60) ajustados para o modo 3 são da mesma ordem de magnitude do valor

Tabela 3 – Resultados do ajuste de qui-quadrado usando apenas os dados de 23 de julho de 2017. N_{ajuste} é um identificador do procedimento de ajuste de modos, m_i indica qual conjunto de modos de oscilação foi usado no ajuste, A_i e ϕ_i são a amplitude e o ângulo de fase do respectivo modo de oscilação, n_p é o número de parâmetros ajustados, χ_{min}^2 é o valor mínimo do qui-quadrado, e χ_{pgl}^2 é o valor mínimo do qui-quadrado por grau de liberdade.

N_{ajuste}	m_i	$W_{média}$ (km)	A_i (km)	ϕ_i (graus)	n_p	χ^2_{min}	χ^2_{pgl}
Todas as detecções (22)							
1	1	$7,0 \pm 0,1$	$1,3 \pm 0,1$	82 ± 6	3	90,1	4,7
2	2	$6,96 \pm 0,08$	$1,1 \pm 0,1$	0 ± 3	3	64,5	3,4
3	3	$7,17 \pm 0,06$	$1,03 \pm 0,08$	77 ± 2	3	60,1	3,1
4	1	$7,1 \pm 0,1$	$0,7 \pm 0,1$	58 ± 18	5	44,5	2,6
	2		$0,9 \pm 0,2$	6 ± 5			
	1		$0,6 \pm 0,3$	75 ± 59			
5	2	$7,0 \pm 0,3$	$0,8 \pm 0,5$	171 ± 26	7	42,7	2,8
	3		$0,4 \pm 0,3$	76 ± 17			
Apenas detecções resolvidas (12)							
6	1	$7,0 \pm 0,1$	$1,4 \pm 0,1$	87 ± 6	3	60,1	6,7
7	2	$6,88 \pm 0,08$	$1,2 \pm 0,1$	2 ± 3	3	18,1	2,0
8	3	$7,16 \pm 0,06$	$1,01 \pm 0,08$	76 ± 2	3	38,7	4,3
9	1	$6,9 \pm 0,1$	$0,5 \pm 0,1$	84 ± 25	5	7,1	1,0
	2		$0,9 \pm 0,2$	2 ± 6			
	1		$1,4 \pm 1,0$	90 ± 56			
10	2	$6,6 \pm 0,5$	$1,2 \pm 0,6$	161 ± 31	7	7,1	1,4
	3		$0,5 \pm 0,5$	60 ± 60			

ajustado, sugerindo que o ajuste pode assumir uma ampla gama de valores, o que o torna estatisticamente irrelevante devido a sua precisão insuficiente.

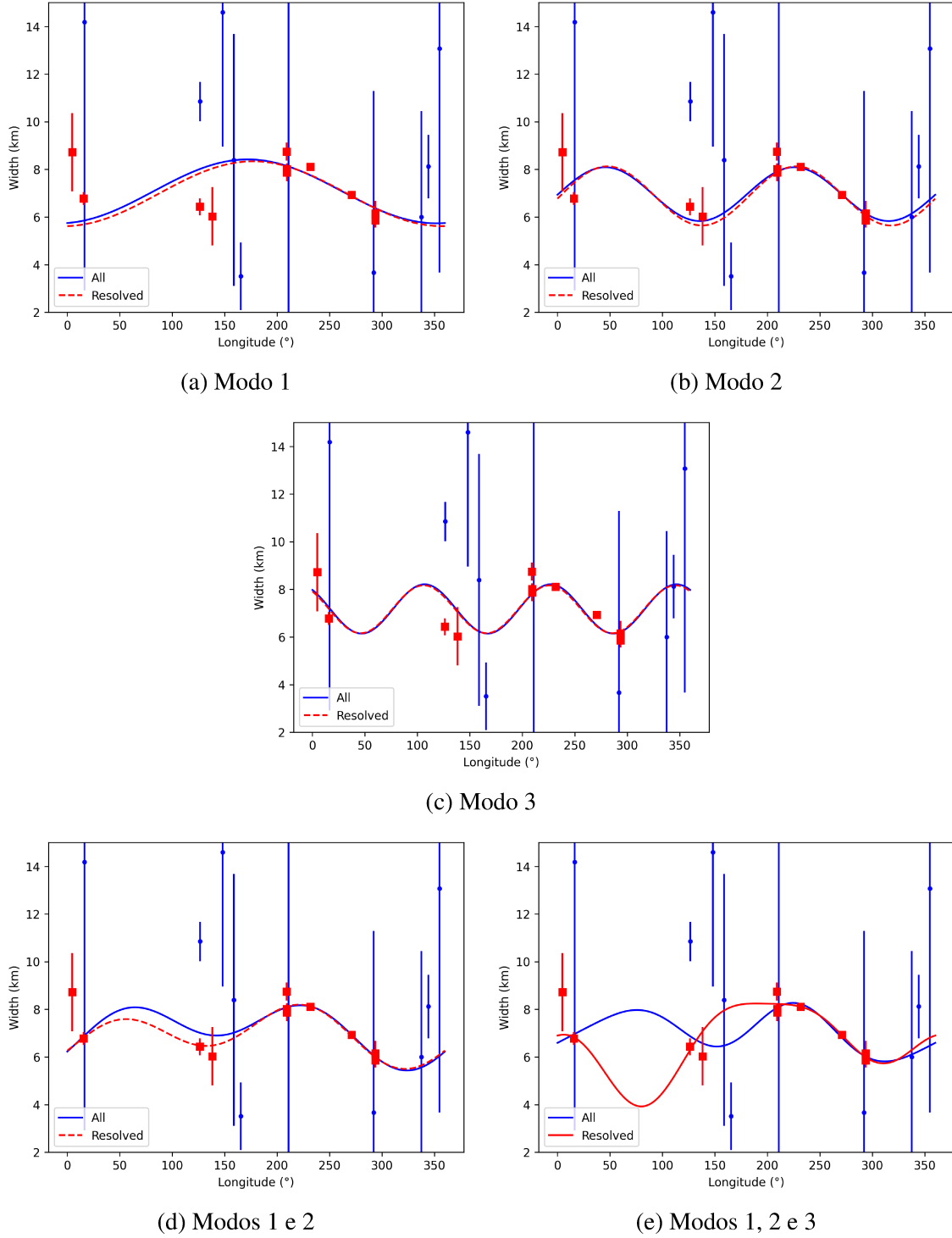
A similaridade entre os parâmetros adquiridos pelos ajustes usando todas as detecções e por aqueles usando apenas as detecções resolvidas sugere que a inclusão das detecções não resolvidas não necessariamente melhora a determinação dos parâmetros. No entanto, obtemos um χ_{pgl}^2 menor usando todas as detecções ao considerar apenas o modo 1 ou o modo 3. Contudo, essa tendência não se reflete quando esses modos são combinados, ou mesmo considerando apenas o modo 2.

Além disso, a largura média de C1R foi estimada como 6,86 km por [Morgado et al. \(2021\)](#), que é mais consistente com $N_{ajuste} = 9$ do que com $N_{ajuste} = 10$. As amplitudes de cada modo são aproximadamente 1 km quando ajustadas individualmente. No entanto, quando os modos são combinados, as amplitudes dos modos 1 e 3 geralmente são menores que a do modo 2, tanto nas análises considerando todas as detecções, quanto nas que consideram apenas aquelas resolvidas, exceto no $N_{ajuste} = 10$. Isso sugere que o modo 2 é o mais proeminente em todos esses ajustes.

A Figura 12 exibe a variação da largura de C1R para todos os ajustes considerando os parâmetros obtidos para o qui-quadrado mínimo.

É evidente que, com modos individuais, os resultados são semelhantes entre os dois

Figura 12 – Distribuição da largura radial da detecção do anel durante a ocultação estelar de 23 de julho de 2017. Os pontos azuis e os quadrados vermelhos representam, respectivamente, as detecções não resolvidas e resolvidas. A linha azul corresponde ao melhor ajuste utilizando todas as detecções, enquanto a linha vermelha tracejada representa o melhor ajuste considerando apenas as detecções resolvidas. Os eixos “longitude” e “width” são a longitude e a largura das detecções calculadas pelo modelo proposto neste trabalho, respectivamente.



Fonte: da autora.

conjuntos de dados. Já para os modos combinados 1 e 2, há uma ligeira diferença entre as curvas para cada conjunto, indicando que o modelo se ajusta razoavelmente bem, com apenas algumas variações entre os diferentes conjuntos de observação.

Há uma diferença maior entre os dois conjuntos de dados quando todos os 3 modos são combinados, sugerindo que a discrepância se torna mais significativa, indicando que o modelo começa a perder precisão. Enquanto que na Figura 12d parece haver um melhor ajuste para o conjunto de dados com apenas detecções resolvidas, na Figura 12e parece que o modelo é incapaz de fornecer um bom ajuste.

6.2 Modos de oscilação considerando todas as ocultações

Exceto pela ocultação estelar de 23 de julho de 2017, todos os outros eventos resultaram em menos detecções resolvidas do anel C1R. Essas detecções individuais são insuficientes para identificar modos de oscilação, pois apresentam um número de dados reduzido que não permite distinguir se as variações são causadas por ruídos ou pelas características físicas do anel.

No entanto, foi possível elaborar um modelo mais sofisticado capaz de combinar todas as detecções da Tabela 2 para refinar os resultados da Seção 6.1. Neste caso, também foi preciso levar em conta a velocidade característica dos modos de oscilação.

Esse parâmetro define como as variações na posição do anel se propagam ao longo do tempo, ou seja, a velocidade esperada de propagação das oscilações no anel de Chariklo. Como os eventos de ocultação ocorrem em locais e tempos diferentes, é necessário um fator que possa avaliar como os padrões de oscilação rotacionam com o tempo e auxiliar na previsão da posição da oscilação no momento de cada detecção.

Esse modelo aprimorado é expresso na Equação 6.5:

$$W(\lambda) = W_{média} + \sum_i A_i \sin[m_i(\lambda - \phi_i - \Omega_i \Delta t)], \quad (6.5)$$

Ω_i representa a velocidade característica do i -ésimo modo de oscilação, $\Delta t = t - t_0$ denota a diferença entre o instante da ocultação corrigido pelo tempo de luz e a época de referência. Foi estipulado um tempo de referência, às 12:00 horas do dia 01 de janeiro de 2020, em Tempo Dinâmico Baricêntrico (TDB).

O TDB é uma escala de tempo usada para cálculos dinâmicos em observações astronômicas, pois é baseado no movimento do baricentro do Sistema Solar, não sendo afetado por variações na rotação da Terra, além de levar em conta a dilatação do tempo ao calcular efemérides. Como as posições de Chariklo e da estrela foram calculadas utilizando TDB, é ideal que continue sendo utilizada essa mesma escala.

Este instante onde a luz da estrela transpassa o C1R foi referido como t na Equação 6.5. Ele é calculado por:

$$t = t_{obs} - t_{luz}, \quad (6.6)$$

sendo t_{obs} o instante da observação (presente na Tabela 2) e t_{luz} o tempo que a luz da estrela leva para viajar da posição do anel até o observador na Terra. O t_{obs} deve ser calculado como a média entre esses dois instantes adquiridos na detecção, como descrito na Equação 6.7:

$$t_{obs} = \frac{t_{des} - t_{rea}}{2} \quad (6.7)$$

Foi utilizada a Equação 6.2 para ajustar o modelo aos dados, utilizando apenas as detecções resolvidas presentes na Tabela 2. Além disso, como a combinação dos modos 1 e 2 forneceu o melhor ajuste para a análise de um único evento realizada na seção 6.1, foram feitos ajustes apenas com essa combinação. No entanto, ajustar as velocidades características via qui-quadrado é desafiador. Dado que os dados abrangem quatro anos de observações, pequenas variações nessas velocidades geram grandes mudanças acumuladas ao longo de anos, tornando o qui-quadrado extremamente sensível e a função de ajuste altamente não linear, com muitos mínimos locais e degenerações com outros parâmetros do modelo. Por exemplo, uma diferença de apenas $0.01 \frac{grau}{dia}$ em uma velocidade característica resulta em uma diferença de cerca de 15° após quatro anos. Devido a isso, foi considerado a velocidade característica do modo 1 (Ω_1) no intervalo $0 - 25 \frac{graus}{dia}$ e do modo 2 (Ω_2) no intervalo $600 - 630 \frac{graus}{dia}$, que são valores próximos aos esperados dados os parâmetros físicos do sistema.

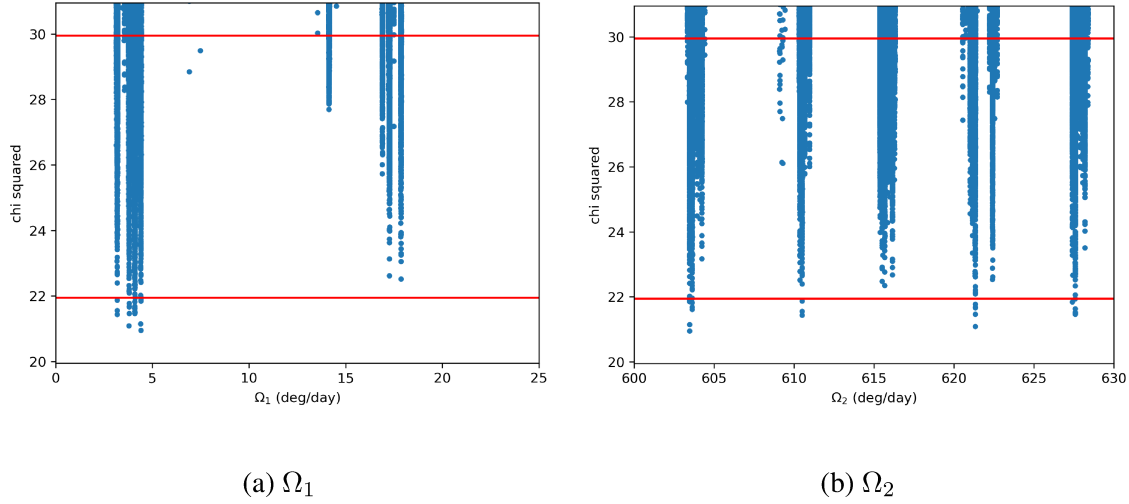
A Figura 13 mostra o qui-quadrado resultante em função de Ω_1 e Ω_2 para todos os testes no intervalo citado anteriormente, para a combinação dos modos 1 e 2.

Para verificar quão confiáveis eram os valores encontrados para as velocidades de referência Ω_1 e Ω_2 , foram utilizados os limites estatísticos de 1σ e 3σ . Tais limites estabelecem regiões de confiança, calculadas com base na variação do qui-quadrado (χ^2) em torno de seu valor mínimo encontrado. A faixa de 1σ , que representa uma confiança de cerca de 68.3%, indica a área onde os parâmetros ajustados são considerados estatisticamente consistentes com os dados observacionais. Por outro lado, a faixa de 3σ , com uma confiança de quase 99.7%, abrange uma faixa mais ampla de incerteza, permitindo avaliar possíveis soluções alternativas ainda compatíveis com os dados.

Na Figura 13 é possível identificar vários mínimos locais para ambas as velocidades características. No entanto, foi notado que eles estão agrupados em torno de dois valores principais para Ω_1 e seis valores principais para Ω_2 . Isso destaca a dificuldade em derivar as velocidades características a partir de tais dados. A Tabela 4 apresenta todas as soluções possíveis encontradas dentro do limite de 3σ para todos esses grupos.

Um ajuste global ideal é alcançado adotando os valores de Ω_1 sendo aproximadamente $3.8 \frac{graus}{dia}$ e Ω_2 sendo aproximadamente $620.9 \frac{graus}{dia}$, com $\chi_{pgl}^2 = 1$, indicando um ajuste

Figura 13 – Qui-quadrado resultante dos ajustes considerando os valores esperados para as velocidades de padrão dos modos combinados 1 e 2. As linhas horizontais vermelhas marcam os limites de 1σ (inferior) e 3σ (superior). Os eixos Ω_1 e Ω_2 representam as velocidades características dos modos de oscilação 1 e 2, respectivamente, em graus por dia. O eixo *chi squared* representa os valores do teste de qui quadrado para cada valor da velocidade sugeridos modelo proposto neste trabalho.



Fonte: Da autora.

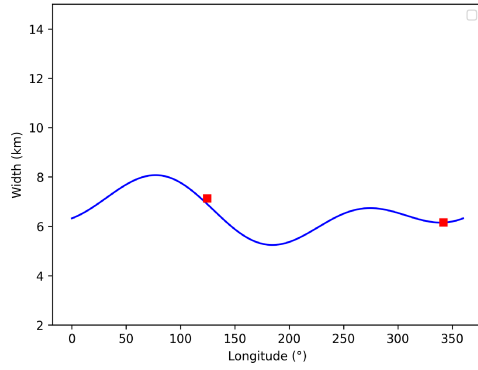
satisfatório do nosso modelo aos dados. No entanto, a presença de múltiplos mínimos locais na distribuição de (χ^2) conforme ilustrado na Figura 13, revela uma sensibilidade significativa do ajuste aos parâmetros de rotação. Isso sugere que um conjunto maior de dados é necessário para restringir de maneira mais robusta os valores de Ω_1 e Ω_2 , e assim confirmar a validade dos modos identificados.

Como está sendo analisado um conjunto de mínimos locais das velocidades características dentro da região de 3σ , as estimativas da largura média e das amplitudes apresentam barras de erro maiores do que as obtidas na análise de um único evento. No entanto, ao comparar com o melhor ajuste apresentado na seção 6.1 ($N_{ajuste} = 9$), foi observado que a largura média é ligeiramente menor, enquanto a amplitude associada ao modo $m = 1$ é maior. Já a amplitude correspondente ao modo $m = 2$ permanece praticamente inalterada. A Figura 14 apresenta as soluções associadas ao modo 1 e 2 combinados, ajustados à todos os dados de ocultação, e que resultam no menor valor de χ_{pgl}^2 .

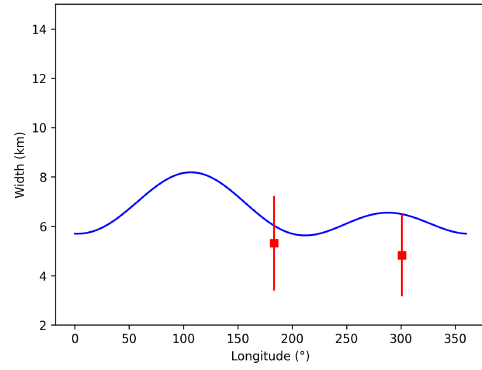
Tabela 4 – Resultados do ajuste de qui-quadrado usando os dados de todas as ocultações resolvidas apresentar na Tabela 2. N_{ajuste} é um identificador do procedimento de ajuste de modos, m_i indica qual conjunto de modos de oscilação foi usado no ajuste, A_i e ϕ_i são a amplitude e o ângulo de fase do respectivo modo de oscilação, n_p é o número de parâmetros ajustados, χ^2_{min} é o valor mínimo do qui-quadrado, χ^2_{pgl} é o valor mínimo do qui-quadrado por grau de liberdade, e Ω_i é a velocidade característica.

N_{ajuste}	Modos m_i	$W_{média}$ (km)	A_i (km)	ϕ_i (graus)	Ω_i (graus/dia)	n_p	χ^2_{min}	χ^2_{pgl}
Todas as detecções resolvidas (28)								
11	1	6.7 ± 0.2	0.8 ± 0.2	144 ± 144	3.8 ± 0.6	7	20.9	0.99
	2		0.7 ± 0.3	90 ± 90	603.8 ± 0.5			
12	1	6.7 ± 0.2	0.8 ± 0.3	143 ± 137	3.8 ± 0.6	7	21.4	1.02
	2		0.8 ± 0.3	111 ± 66	610.6 ± 0.3			
13	1	6.7 ± 0.2	0.9 ± 0.2	150 ± 150	3.8 ± 0.6	7	22.3	1.06
	2		0.8 ± 0.3	90 ± 90	615.8 ± 0.5			
14	1	6.7 ± 0.2	0.9 ± 0.2	169 ± 130	3.8 ± 0.6	7	21.1	1.00
	2		0.8 ± 0.3	90 ± 90	620.9 ± 0.4			
15	1	6.7 ± 0.2	0.8 ± 0.2	148 ± 130	3.8 ± 0.6	7	22.5	1.07
	2		0.8 ± 0.3	90 ± 90	622.5 ± 0.2			
16	1	6.7 ± 0.2	0.8 ± 0.2	136 ± 130	3.8 ± 0.6	7	21.4	1.02
	2		0.8 ± 0.3	90 ± 90	627.9 ± 0.5			
17	1	6.7 ± 0.2	0.7 ± 0.2	130 ± 130	17.4 ± 0.5	7	22.5	1.07
	2		0.8 ± 0.2	119 ± 53	610.4 ± 0.1			
18	1	6.7 ± 0.2	0.8 ± 0.2	50 ± 50	17.24 ± 0.04	7	23.9	1.14
	2		0.8 ± 0.2	67 ± 56	615.7 ± 0.5			
19	1	6.7 ± 0.2	0.8 ± 0.3	180 ± 180	17.4 ± 0.5	7	22.6	1.07
	2		0.8 ± 0.2	76 ± 67	621.7 ± 0.6			

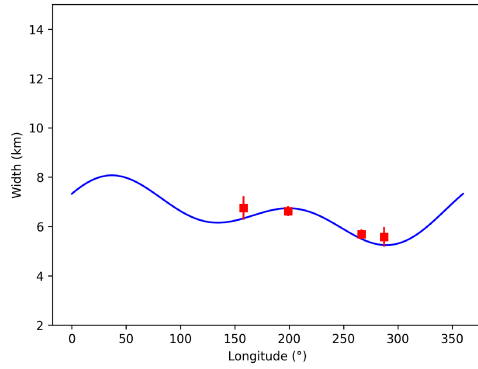
Figura 14 – Distribuição da largura radial da detecção do anel de todas as detecções positivas das ocultações estelares presentes na Tabela 2. Os pontos azuis e os quadrados vermelhos representam, respectivamente, as detecções não resolvidas e resolvidas. A linha azul corresponde ao melhor ajuste considerando apenas as detecções resolvidas, com os modos de oscilação 1 e 2 combinados. Os eixos “longitude” e “width” são a longitude e a largura das detecções calculadas pelo modelo proposto neste trabalho, respectivamente.



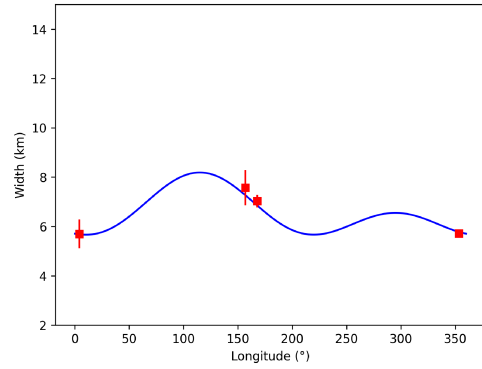
(a) 2013-06-03



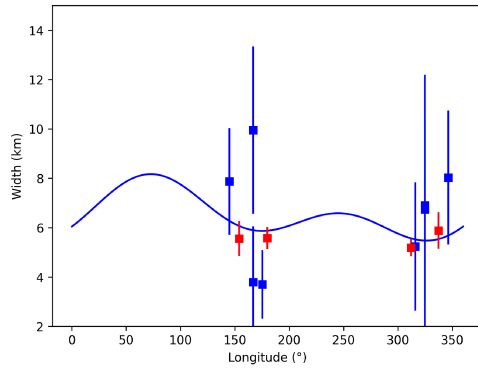
(b) 2014-02-16



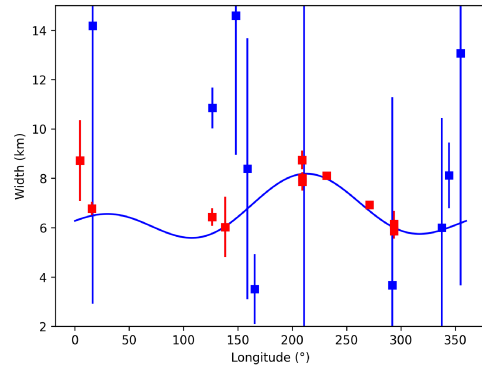
(c) 2014-04-29



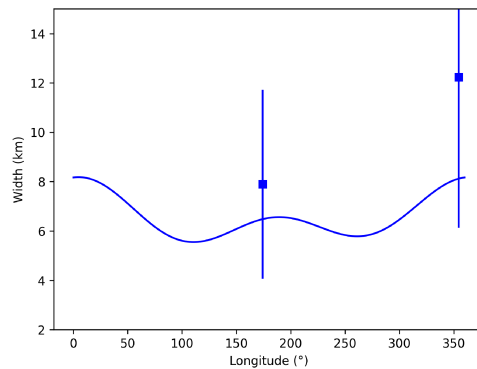
(d) 2017-04-09



(e) 2017-06-22



(f) 2017-07-23



(g) 2017-08-24

7 CONCLUSÕES

A descoberta do sistema de anéis ao redor de (10199) Chariklo em 2013 representou um marco significativo na astronomia, ao revelar que corpos menores também podem sustentar estruturas anelares complexas. Desde então, múltiplas ocultações estelares têm possibilitado a caracterização de tais estruturas, revelando variações longitudinais na largura do anel principal, C1R, e flutuações associadas à sua densidade radial. Este trabalho se propôs a analisar essas variações por meio de uma abordagem quantitativa baseada em dados obtidos a partir de ocultações estelares, utilizando o pacote SORA e transformações entre diferentes sistemas de referência astronômicos.

Desenvolvemos uma metodologia para calcular a longitude orbital das detecções do anel, o que possibilitou modelar a largura do C1R em função da longitude por meio de modos de oscilação representados por funções senoidais. Inicialmente, os dados da ocultação de 23 de julho de 2017 foram ajustados com combinações de modos $m = 1$, $m = 2$ e $m = 3$, sendo que a melhor concordância foi obtida com a combinação dos modos $m_1 = 1$ e $m_2 = 2$, indicando amplitudes que variaram de $0,56 \pm 0,07$ km a $1,09 \pm 0,05$ km. A largura média mais provável do anel foi estimada como $6,85 \pm 0,05$ km.

Ao incorporar observações de diferentes épocas, foi possível estimar as velocidades angulares associadas aos modos oscilatórios. Para $m = 1$, foram obtidos valores de $\Omega_1 = 3,8 \pm 0,6$ graus por dia, o que diverge da previsão teórica de aproximadamente 8 graus por dia, sugerindo incertezas nos parâmetros físicos assumidos para Chariklo. Já para $m = 2$, os melhores ajustes apontaram para $\Omega_2 = 603.47$ graus por dia.

Apesar das limitações impostas pela escassez de perfis radiais resolvidos, os resultados são consistentes com os modelos de oscilação livre aplicados e incentivam a continuidade das observações de ocultações estelares. Tais dados são fundamentais para a determinação de novos parâmetros físicos dos anéis, como a excentricidade, sua estabilidade e evolução dinâmica.

Este trabalho também apresenta uma conexão com a Física Médica. A análise de modos oscilatórios em anéis planetários, com base em dados extraídos de ocultações estelares, guarda semelhanças metodológicas com abordagens utilizadas na dosimetria e na modelagem de distribuição de dose em tratamentos radioterápicos. Em ambas as áreas, busca-se reconstruir estruturas a partir de sinais indiretos, seja a estrutura de um anel a partir da atenuação da luz de uma estrela, seja a anatomia de um tecido e o perfil de dose a partir da resposta de detectores ou imagens médicas. Assim, o domínio de ferramentas computacionais, técnicas de ajuste e interpretação de dados espaciais e temporais complexos, como demonstrado neste estudo, também representa uma competência na formação e atuação do físico médico.

Ademais, a metodologia desenvolvida neste estudo mostra-se versátil, podendo ser aplicada ao estudo do anel secundário C2R, quando mais dados estiverem disponíveis, bem como aos sistemas anelares de outros corpos menores, como Chiron, Haumea e Quaoar. Dessa forma, o trabalho não apenas contribui para o avanço do conhecimento sobre Chariklo, como também estabelece uma base metodológica para a exploração de outros sistemas anelares no Sistema Solar.

REFERÊNCIAS

- ARCHINAL, B. A. *et al.* Report of the iau working group on cartographic coordinates and rotational elements: 2015. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, Springer Science and Business Media LLC, v. 130, n. 3, fev. 2018. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1007/s10569-017-9805-5>. Citado na página 33.
- ARIAS, F. *et al.* The extragalactic reference system of the international earth rotation service, icrs. *Astronomy and Astrophysics*, v. 303, p. 604–608, 10 1995. Citado na página 24.
- BOCZKO, R. *Conceitos de Astronomia*. [S.l.]: Editora Blucher, 1984. Citado na página 24.
- BRAGA-RIBAS, F. *et al.* A ring system detected around the centaur (10199) chariklo. *Nature*, Springer Science and Business Media LLC, v. 508, n. 7494, p. 72–75, mar. 2014. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1038/nature13155>. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 22.
- BRONZINO, J. D. *The Biomedical Engineering Handbook*. [S.l.]: CRC Press, 2000. Citado na página 18.
- BUSHBERG, J. A. S. J. T.; LEIDHOLDT, J. E. *The Essential Physics of Medical Imaging*. [S.l.]: Lippincott Williams Wilkins, 2020. Citado na página 18.
- BÉRARD, D. *et al.* The structure of chariklo's rings from stellar occultations. *The Astronomical Journal*, American Astronomical Society, v. 154, n. 4, p. 144, set. 2017. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.3847/1538-3881/aa830d>. Citado 8 vezes nas páginas 11, 17, 28, 30, 36, 38, 39 e 41.
- CAPITAINE DANIEL GAMBIS, D. D. M. G. P. J. R. B. R. M. R. E. M. S. N.; VONDRAK, J. *Proceedings of the IERS Workshop on the Implementation of the New IAU Resolutions*. [S.l.], 2002. Citado na página 24.
- Di Sisto, R. P.; BRUNINI, A. The origin and distribution of the centaur population. *Icarus*, v. 190, n. 1, p. 224–235, 2007. ISSN 0019-1035. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0019103507000991>. Citado na página 16.
- ELLIOT, J. L.; YOUNG, L. A. Analysis of stellar occultation data for planetary atmospheres. i - model fitting, with application to pluto. *The Astronomical Journal*, American Astronomical Society, v. 103, p. 991, mar. 1992. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1086/116121>. Citado na página 20.
- FRENCH, R.; ELLIOT, J.; LEVINE, S. *Structure of the Uranian Rings*. Elsevier BV, 1986. 134–163 p. Disponível em: [http://dx.doi.org/10.1016/0019-1035\(86\)90181-8](http://dx.doi.org/10.1016/0019-1035(86)90181-8). Citado na página 39.
- GOMES-JUNIOR, A. R. *et al.* Sora: Stellar occultation reduction and analysis. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Oxford University Press (OUP), v. 511, n. 1, p. 1167–1181, jan. 2022. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1093/mnras/stac032>. Citado 3 vezes nas páginas 17, 20 e 33.

HENDEE, W. R. *Monte Carlo Techniques in Radiation Therapy*. [S.l.]: CRC Press, 2013. Citado na página 18.

HENDEE, W. R.; RITENOUR, E. R. *Medical Imaging Physics*. [S.l.]: Wiley, 2002. Citado na página 18.

HOWELL, S. B. *Handbook of CCD Astronomy*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2006. Citado na página 20.

KNOLL, G. F. *Radiation Detection and Measurement*. [S.l.]: Wiley, 2010. Citado na página 18.

LONGARETTI, P.-Y. Uranian ring dynamics: An analysis of multimode motions. *Icarus*, Elsevier BV, v. 82, n. 2, p. 281–287, dez. 1989. Disponível em: <[http://dx.doi.org/10.1016/0019-1035\(89\)90039-0](http://dx.doi.org/10.1016/0019-1035(89)90039-0)>. Citado 3 vezes nas páginas 17, 39 e 40.

MORGADO, B. E. *et al.* Refined physical parameters for chariklo's body and rings from stellar occultations observed between 2013 and 2020. *Astronomy amp; Astrophysics*, EDP Sciences, v. 652, p. A141, ago. 2021. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1051/0004-6361/202141543>>. Citado 11 vezes nas páginas 16, 17, 22, 23, 28, 30, 31, 39, 40, 41 e 43.

MORGADO, B. E. *et al.* A dense ring of the trans-neptunian object quaoar outside its roche limit. *Nature*, Springer Science and Business Media LLC, v. 614, n. 7947, p. 239–243, fev. 2023. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1038/s41586-022-05629-6>>. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 23.

ORTIZ, J. L. *et al.* Possible ring material around centaur (2060) chiron. *Astronomy amp; Astrophysics*, EDP Sciences, v. 576, p. A18, mar. 2015. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1051/0004-6361/201424461>>. Citado na página 18.

ORTIZ, J. L. *et al.* Changing material around (2060) chiron revealed by an occultation on december 15, 2022. *Astronomy amp; Astrophysics*, EDP Sciences, v. 676, p. L12, ago. 2023. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1051/0004-6361/202347025>>. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 23.

ORTIZ, J. L. *et al.* The size, shape, density and ring of the dwarf planet haumea from a stellar occultation. *Nature*, Springer Science and Business Media LLC, v. 550, n. 7675, p. 219–223, out. 2017. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1038/nature24051>>. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 23.

PEREIRA, C. L. *Tamanho e forma do Centauro (2060) Chiron e a busca por estruturas em seu entorno a partir de ocultações estelares*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2020. Citado na página 20.

PEREIRA, C. L. *et al.* The two rings of (50000) quaoar. *arXiv*, arXiv, 2023. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/2304.09237>>. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 23.

PORCO, C. C.; HAMILTON, D. P. Chapter 27 - planetary rings. In: MCFADDEN, L.-A.; WEISSMAN, P. R.; JOHNSON, T. V. (Ed.). *Encyclopedia of the Solar System (Second Edition)*. Second edition. San Diego: Academic Press, 2007. p. 503–518. ISBN 978-0-12-088589-3. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9780120885893500311>>. Citado na página 20.

RIBAS, F. B. Ocultações estelares: os 10 anos da descoberta dos anéis de chariklo, e os avanços no estudo do sistema solar. *Cadernos de Astronomia*, Universidade Federal do Espírito Santo, v. 5, n. 2, p. 56–64, set. 2024. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.47456/Cad.Astro.v5n2.45931>. Citado na página 20.

SICARDY, B. *et al.* Stellar occultations by trans-neptunian objects. *The Astronomy and Astrophysics Review*, Springer Science and Business Media LLC, v. 32, n. 1, dez. 2024. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1007/s00159-024-00156-x>. Citado na página 20.

Anexos

Research



Cite this article: Gomes-Junior AR, Mitidiero ALR, Morgado BE, Sicardy B. 2025 Characterizing longitude variation on Chariklo's main ring. *Phil. Trans. R. Soc. A* **383**: 20240199. <https://doi.org/10.1098/rsta.2024.0199>

Received: 15 July 2024

Accepted: 8 January 2025

One contribution of 15 to a theme issue 'Major advances in planetary sciences thanks to stellar occultations'.

Subject Areas:

solar system

Keywords:

stellar occultation, rings, Chariklo

Author for correspondence:

A. R. Gomes-Junior

e-mail: altair.gomes@ufu.br

Characterizing longitude variation on Chariklo's main ring

A. R. Gomes-Junior^{1,2}, A. L. R. Mitidiero¹, B. E. Morgado^{2,3} and B. Sicardy⁴

¹Institute of Physics, Federal University of Uberlândia, Av. João Naves de Ávila, Uberlândia, Minas Gerais CEP 38408-100, Brazil

²Laboratório Interinstitucional de e-Astronomia-LIneA, Av. Pastor Martin Luther King Jr 126, Rio de Janeiro CEP 20765-000, Brazil

³Universidade Federal do Rio de Janeiro - Observatório do Valongo, Ladeira Pedro Antônio 43, Rio de Janeiro CEP 20080-090, Brazil

⁴IMCCE, Observatoire de Paris, PSL Université, Sorbonne Université, Université Lille 1, CNRS UMR 8028, 77 Avenue Denfert-Rochereau, Paris 75014, France

ARG-J, 0000-0002-3362-2127; ALRM, 0009-0009-7478-9116; BEM, 0000-0003-0088-1808; BS, 0000-0003-1995-0842

In 2013, a stellar occultation revealed the presence of a ring system around the Centaur Chariklo, marking the first discovery of such a feature on a small body. Subsequent observations indicated that the main ring exhibits not only radial density variations but also changes in width depending on longitude. In this study, we propose a method to determine the longitude (within an inertial reference frame) and the orbital radius of each point of the ring detected during stellar occultations. In addition, we provide a descriptive analysis of the ring's width variations and identify the combination of oscillation modes 1 and 2 as the most likely pattern governing the ring behaviour.

This article is part of the theme issue 'Major advances in planetary sciences thanks to stellar occultations'.

1. Introduction

The Centaur (10199) Chariklo, a small body located between Saturn and Uranus at distances ranging from 13.1 to 18.9 astronomical units (au), boasts a remarkable

feature: a pair of dense, narrow rings encircling it. These rings, designated as C1R and C2R, were first detected during a stellar occultation in 2013. Subsequent stellar occultation events have confirmed their existence and uncovered intricate details about their structure [1–3].

The discovery of Chariklo's rings marked a significant milestone as it was the first non-giant-planet object found to possess rings. Subsequent discoveries in our Solar System included the detection of material around the Centaur (2060) Chiron [4,5] and, more notably, the discovery of a ring around the dwarf planet (136 108) Haumea in 2017 [6]. Most recently, in 2023, two rings were identified around the trans-Neptunian object (50 000) Quaoar [7,8].

These discoveries were made using the stellar occultation technique. An occultation occurs when a body passes in front of a background star for an observer. Following the discovery of Chariklo's rings in 2013 [1], another 20 occultations of the Chariklo system were observed between 2013 and 2020 [2,3].

Chariklo's ring system spans a diameter of approximately 800 km, appearing as approximately 80 milliarcseconds (mas) when projected on to the sky from Earth's perspective. One intriguing feature of Chariklo's main ring (C1R) is its width variation, which ranges from 4.8 to 9.1 km, significantly exceeding the uncertainties in the width measurements [3]. In addition, these width variations can be linked to the ring's eccentricity, a crucial factor in understanding its stability and dynamical evolution.

Studies have shown that the ϵ , α and β rings of Uranus undergo locked precession [9–12], a phenomenon also observed in several of Saturn's narrow ringlets [13,14]. This locked precession together with an eccentricity gradient causes the width of the rings to vary with the true anomaly.

Observations of Uranus's rings ([15], and references therein) reveal a clear relationship between ring width and longitude, which, in some cases, can be modelled by a sinusoidal function. Deviations from this model can indicate non-uniform radial structures, as evidenced by the double-dip structure in Uranus's α ring [15].

Sixteen stellar occultations of Chariklo provided ring detections, allowing the computation of the ring widths and their distance from the main body on the tangent plane [2,3]. However, with a limited number of observers spread over a large area to cover the shadow path of the occultation, the ring detections are sparse, making it difficult to identify smooth variations in ring width over longitude. Furthermore, many of the ring detections are unresolved, resulting in large uncertainties in ring width. Determining the pattern speed(s) of the width variations from multiple occultations is even more challenging, as most events lacked sufficient ring detections to ascertain the pattern speed(s).

This project explores how the width of Chariklo's main ring (C1R) varies with longitude, and presents a newly determined width–longitude relationship for C1R. In §2, we describe our methodology, including how we characterized the ring plane and computed the longitudes. In §3 we give details of the data used in this project, based on published values from previous stellar occultations by Chariklo's rings. In §4 we present our findings on the width–longitude relationship and possible pattern speeds. Conclusions are provided in §5.

2. Methodology

Proper characterization of C1R requires identifying the ring detection within an inertial reference frame. In §2a, we explain how to translate the observation of the ring from the occultation tangent plane to the International Celestial Reference System (ICRS) if the pole orientation is known. In §2b, we detail the process for obtaining the correct longitude of the ring detection on the ring plane.

(a) Ring plane characterization

To determine the longitude for each ring detection, we employ a geometrical procedure to calculate the intersection between a line and a plane—specifically, the line of sight and the ring plane. If the normal vector of the plane is $\vec{n} = (a, b, c)$, the plane can be defined by

$$ax + by + cz + d = 0, \quad (2.1)$$

where (x, y, z) are coordinates in a given reference frame. Assuming the origin is located on the plane, then $d = 0$. For Chariklo, the normal vector of the ring plane corresponds to the ring pole coordinates in the ICRS, $\alpha_p = 151.03^\circ$, $\delta_p = 41.81^\circ$, as provided by [3]. Thus, $a = \cos \alpha_p \cos \delta_p$, $b = \sin \alpha_p \cos \delta_p$ and $c = \sin \delta_p$.

During an occultation, the ring is detected owing to the shadow cast when the star passes behind the ring from the observer's perspective. To analyse this, we define the tangent plane, which is perpendicular to the line of sight and centred on the observer. Two of its axes point to the north and east, while the third axis points from the observer to the body's centre. For simplicity, we refer to this provisional reference system as the tangent plane reference frame (TPRF).

At the moment of occultation, the apparent separation between the star and the body provides the relative position of the ring and the body's centre in the tangent plane [16], typically referred to as the f and g coordinates. However, the occultation does not directly provide the third coordinate, which is the relative distance of the ring to the tangent plane (e.g. the ring to be in front or behind the plane).

To fully characterize the ring detection's position, we redefine equation (2.1) from the ICRS to the TPRF. Considering the ICRS position of the body centred on the observer at the instant of the ring detection as (α_b, δ_b) , the transformation of the unit vector between ICRS and the TPRF is given by

$$\begin{bmatrix} \hat{r} \\ \hat{\alpha} \\ \hat{\delta} \end{bmatrix}_{\text{TPRF}} = R_y(-\delta_b) R_z(\alpha_b) \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{bmatrix}_{\text{ICRS}}, \quad (2.2)$$

where R_y and R_z represent the rotational matrices around the y and z axes, respectively. When applied to the star coordinates and normalized to the body's distance, we obtain the so-called f and g coordinates as the second and third components, respectively.

We apply equation (2.2) to the pole coordinates to obtain the pole direction in the TPRF. The resulting vector characterizes the ring plane in the TPRF as $\vec{n}' = (a', b', c')$.

Finally, the ring detection and Chariklo's centre must belong to the ring plane, thus we redefine the origin of the TPRF to the body centre ($d' = 0$). Notice that, this change of origin does not affect the f and g coordinates and places the distance value (hereafter r) relative to the body. Given the f and g coordinates of the ring detection from the occultation, we compute the third coordinate using the following equation:

$$r = -\frac{(b'f + c'g)}{a'}. \quad (2.3)$$

The vector $\vec{r} = (r, f, g)$ represents the position vector of the ring detection relative to the body centre in the TPRF. By applying the inverse transformation of equation (2.2), we can recover this vector in the ICRS.

(b) Longitude determination

Following the discussion in §2a, we can characterize the position of the ring detection in both the TPRF and the ICRS. However, to study the dynamics of the ring, we need to determine its

distance from the body and its longitude along the ring. The distance to the body can be readily computed as the norm of the vector $\vec{r}$.

To determine the longitude, we define a new reference system centred on the body, with its equator aligned with the ring plane. Let us call it the ring plane reference frame (RPRF). We adopt the methodology of [17] for a non-rotating frame for this transformation, given by equation (4.1):

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix}_{\text{RPRF}} = R_x(90^\circ - \delta_p) R_z(90^\circ + \alpha_p) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{\text{ICRS}}, \quad (2.4)$$

where R_x and R_z represent the rotational matrices around the x and z axes, respectively, and (α_p, δ_p) are the ring pole coordinates in the ICRS. In such a definition, the origin of the longitude is the ascending node of the ring plane relative to the ICRS equator. Using standard procedures, the longitude, λ , can then be determined from x'' and y'' .

3. Occultation data

In their study [2], reported observations of the Chariklo main ring (C1R) from 10 stellar occultations. However, only three events yielded eight resolved detections from four observations. We define a resolved detection as an event where the magnitude drop in the light curve is observed in more than three data points. In these cases, the instants of immersion and emersion, as well as the magnitude drop, can be more precisely characterized. The remaining 15 observations reported by [2] resulted in unresolved detections of the rings, rendering them mostly unsuitable for detailed characterization. Similarly [3], published findings from six stellar occultations that detected C1R. Among these, 23 resolved detections from 12 observations across four events were obtained, with a further 24 detections remaining unresolved.

The instants of disappearance and reappearance for each ring detection, including the unresolved ones, are given by [3]. Utilizing the SORA library [16], we computed the f and g coordinates of each ring detection on the respective tangent plane using the star coordinates, the observers' locations, and instants of occultation. To apply the methodology presented in §2, we first subtracted these coordinates from Chariklo's centre (f_0, g_0) . This step is necessary as equation (2.3) is valid only if Chariklo is at the origin of the reference frame.

Subsequently, the methodology outlined in §2 was employed for each C1R instant of disappearance and reappearance from all occultations to determine the longitude and radial distance from Chariklo's centre. As expected, since the occultation chord does not cross the ring radially, the longitudes of the disappearance and reappearance instants of the same ring detection exhibit a slight difference. This difference typically remains smaller than 1° , thus the longitude is presented as the mean longitude of each ring detection. Consequently, the radial width of the ring is computed as the radial distance variation between disappearance and reappearance instants. The longitudes and widths of each ring detection are listed in table 1. As a sanity check, we also verified the latitude, and all values were found to be zero, as expected.

During the c23 July 2017 occultation, the SARA and PROMPT detections were grazing, with the star's disappearance and reappearance occurring at the outer edge of the ring. Consequently, it was not possible to determine the ring width at this location, and we could not use these chords in the analysis. For these data, table 1 lists only the longitude and distance of the outer part of the ring, labelled '(o)'. During the same event, the Observatório do Pico dos Dias (OPD) observation detected the star disappearing twice. However, each ring detection was fairly grazing, resulting in the star's disappearance and reappearance occurring at different longitudes. Table 1 lists the longitude and distance for the inner (i) and outer (o) parts of the ring separately. In this case, we used the radial difference associated with the mean longitude for the analysis.

Table 1. Dataset of ring detections from stellar occultations. The listed quantities are λ , the longitude in an inertial frame based on the ring plane, W , the radial width of the ring, d its distance to Chariklo's centre. The 'resolved' column indicates if the ring is resolved (y) or unresolved (n). Detections marked with '*' are data that came directly from [2]; (o) and (i) indicate the values that are associated with the outer and inner parts of the ring detection instead of the centre.

ring detection	λ (°)	W (km)	d (km)	resolved
2013–06–03 06:25 UTC				
Danish first*	341.76	6.16 ± 0.11		y
Danish second*	124.38	7.14 ± 0.04		y
2014–02–16 07:45 UTC				
VLT first*	183.37	$5.316^{+0.868}_{-1.916}$		y
VLT second*	300.99	$4.833^{+1.667}_{-0.476}$		y
2014–04–29 23:15 UTC				
Springbok first*	287.42	5.575 ± 0.398		y
Springbok second*	157.83	$6.75^{+0.48}_{-0.21}$		y
SAAO first*	266.66	5.68 ± 0.2		y
SAAO second*	198.90	6.625 ± 0.2		y
2017–04–09 02:24 UTC				
Wabi Lodge first	156.88	7.6 ± 0.7	384.2	y
Wabi Lodge second	4.05	5.7 ± 0.6	388.8	y
Weaver R. L. first	167.74	7.0 ± 0.2	386.0	y
Weaver R. L. second	353.36	5.7 ± 0.2	387.0	y
2017–06–22 21:18 UTC				
Outeniqua first	346.47	8 ± 2	386.4	n
Outeniqua second	145.04	8 ± 2	389.5	n
Onduruquea first	337.36	5.8 ± 0.7	389.2	y
Onduruquea second	154.06	5.5 ± 0.7	389.1	y
Windhoek–Backes first	324.85	7 ± 4	391.8	n
Windhoek–Backes second	166.68	10 ± 3	388.6	n
Windhoek–Meza first	324.79	7 ± 5	389.9	n
Windhoek–Meza second	166.68	4 ± 2	388.6	n
Tivoli Lodge first	316.16	5 ± 3	389.6	n
Tivoli Lodge second	175.32	4 ± 1	389.0	n
Hakos first	311.97	5.2 ± 0.4	390.8	y
Hakos second	179.67	5.6 ± 0.5	387.7	y
2017–07–23 05:58 UTC				
VLT first	15.61	6.8 ± 0.3	392.6	y
VLT second	126.36	6.4 ± 0.3	383.1	y
SSO first	16.33	14 ± 11	385.5	n
SSO second	126.59	10.8 ± 0.8	385.3	n
Tolar Grande first	4.66	9 ± 2	388.0	y

(Continued.)

Table 1. (Continued.)

ring detection	λ (°)	W (km)	d (km)	resolved
Tolar Grande second	138.35	6 ± 1	388.4	y
El Rodeo first	354.96	13 ± 9	381.4	n
El Rodeo second	148.06	14 ± 6	382.1	n
El Salvador first	344.15	8 ± 1	388.4	n
El Salvador second	158.79	8 ± 5	388.6	n
Inca de Oro first	337.59	6 ± 4	388.4	n
Inca de Oro second	165.34	3 ± 1	388.4	n
Danish V first	293.65	6.1 ± 0.2	388.3	y
Danish V second	209.24	7.8 ± 0.4	388.4	y
Danish R first	293.66	5.8 ± 0.2	388.3	y
Danish R second	209.22	8.0 ± 0.2	388.5	y
La Silla first	293.70	6.1 ± 0.6	388.6	y
La Silla second	209.18	8.7 ± 0.4	388.8	y
TRAPPIST-South first	292.01	3 ± 7	378.6	n
TRAPPIST-South 2nd	210.88	22 ± 51	378.7	n
OPD first	272.64(o)	6.9 ± 0.1	393.2(o)	y
	269.78(i)		386.3(i)	y
OPD second	230.21(o)	8.1 ± 0.1	394.4(o)	y
	233.50(i)		386.3(i)	y
SARA graze	260.40(o)		395.8(o)	y
	242.73(o)		395.6(o)	y
PROMPT graze	261.32(o)		396.9(o)	y
	241.80(o)		396.6(o)	y
2017—08—24 02:59 UTC				
OPD first	354.69	12 ± 6	386.4	n
OPD second	174.29	8 ± 4	384.3	n

In contrast [2], did not provide the instants of disappearance and reappearance for their ring detections. As a result, we could not apply our methodology to compute the longitude and radial width of the ring using their data. However, the authors did supply these values for the resolved detections, although they did not elaborate on the methods used to derive these parameters. These values are reproduced in table 1. To verify consistency, we applied our methodology to the mid-instant of each ring detection. No significant differences were found in longitude, indicating that both methodologies are consistent.

4. Results

To understand the dynamics of Uranus's rings [18] developed a formalism to elucidate the oscillation modes, where the ring width varied as a function of longitude. As evident in table 1, and as reported by both [2] and [3], Chariklo's C1R also exhibits width variation along the

longitude. However, determining the ring's behaviour definitively poses challenges owing to incomplete data along longitude, characteristics of occultations and the significant uncertainties stemming from unresolved detections.

Nevertheless, we can explore which oscillation modes best fit our data. Initially, we focus on the occultation observed on 23 July 2017, as it represents the single event with the most resolved detections (§4a). Analysing all events simultaneously necessitates accounting for the pattern speed of the modes, introducing further complications in the model, see §4b.

(a) The oscillation modes for the 23 July 2017 occultation

The stellar occultation observations on 23 July 2017 yielded 12 resolved detections of Chariklo's main ring, along with 10 unresolved detections. As demonstrated in [3], these observations cover a significant portion of the ring's longitude, rendering this occultation the most suitable for exploring oscillation modes within a single epoch.

As our scope does not encompass a detailed dynamical analysis of the ring, we refrain from directly adopting the model proposed by [18], which considers the ring's orbital parameters. Instead, we opt for a simpler approach, employing a sinusoidal function to model the ring width W as a function of longitude λ , as

$$W(\lambda) = W_{\text{mean}} + \sum_i A_i \sin[m_i(\lambda - \phi_i)], \quad (4.1)$$

where W_{mean} denotes the mean width of the ring, while A_i , m_i and ϕ_i represent the amplitude, oscillation mode and phase angle, respectively.

An oscillation mode of $m = 1$ based on eight resolved detections was suggested by [2], while [3] also assumed an $m = 1$ mode to estimate variations in the ring's eccentricity and semi-major axis. To gain further insight into the ring's behaviour, we fit our data to oscillation modes with m equal to 1, 2 or 3, as well as their combinations. We refrain from fitting higher oscillation modes to prevent overfitting owing to the limited number of data points and the uncertainties in the data.

The fitting procedure involves a standard χ , computed using equation (4.2):

$$\chi^2 = \sum_j \frac{[W_j - W(\lambda_j)]^2}{(\sigma_{W_j})^2}, \quad (4.2)$$

where W_j represents the radial width of the j th detection (as listed in table 1), with the respective uncertainty (σ_{W_j}) , and $W(\lambda_j)$ is the model derived in equation (4.1) computed for the longitude of the j th detection.

We conduct two sets of fitting procedures: one including all 22 ring detections from the occultation and another comprising only the 12 resolved detections. In addition, for each dataset, we perform five tests: considering only mode 1, only mode 2, only mode 3, the combination of modes 1 and 2 and the combination of modes 1, 2 and 3. During these tests, we fit the parameters W_{mean} , A_i and ϕ_i , while m_i is fixed for each test. The results of the χ^2 fit are listed in table 2, along with the minimum chi-square (χ_{min}^2) and the minimum chi-square per degree-of-freedom (χ_{pdf}^2) for further analysis.

First, when comparing the minimum chi-square per degree-of-freedom for all fits, we find the best fit using only the resolved detections with a combination of modes 1 and 2 ($N_{\text{fit}} = 9$). With $\chi_{\text{pdf}}^2 = 1.0$, it suggests the best possible fit among all fits. The second best fit is $N_{\text{fit}} = 10$, which includes mode 3. However, the uncertainties of the fitted amplitude and phase for this specific mode are too large compared with the fitted values to be statistically meaningful.

The similarity in the derived parameters between fits using all detections and those using only resolved detections suggests that including unresolved detections does not generally improve their determination. However, there is a smaller χ_{pdf}^2 when using all detections when

Table 2. Results of the χ^2 fitting that uses only 23 July 2017, data. Here, N_{fit} is an identifier of the mode-fitting procedure, 'Modes' denotes which set of oscillation modes were used in the fit, A_i and ϕ_i are the amplitude and phase angle of the respective oscillation mode, n_p is the number of parameters fitted, χ^2_{min} is the minimum chi-square value and χ^2_{pdf} is the minimum chi-square value per degree-of-freedom.

N_{fit}	Modes (m_i)	W_{mean} (km)	A_i (km)	ϕ_i (deg)	n_p	χ^2_{min}	χ^2_{pdf}
all detections (22)							
1	1	7.0 ± 0.1	1.3 ± 0.1	82 ± 6	3	90.1	4.7
2	2	6.96 ± 0.08	1.1 ± 0.1	0 ± 3	3	64.5	3.4
3	3	7.17 ± 0.06	1.03 ± 0.08	77 ± 2	3	60.1	3.1
4	1		0.7 ± 0.1	58 ± 18			
	2	7.1 ± 0.1	0.9 ± 0.2	6 ± 5	5	44.5	2.6
	1		0.6 ± 0.3	75 ± 59			
5	2	7.0 ± 0.3	0.8 ± 0.5	171 ± 26	7	42.7	2.8
	3		0.4 ± 0.3	76 ± 17			
only resolved detections (12)							
6	1	7.0 ± 0.1	1.4 ± 0.1	87 ± 6	3	60.1	6.7
7	2	6.88 ± 0.08	1.2 ± 0.1	2 ± 3	3	18.1	2.0
8	3	7.16 ± 0.06	1.01 ± 0.08	76 ± 2	3	38.7	4.3
9	1		0.5 ± 0.1	84 ± 25			
	2	6.9 ± 0.1	0.9 ± 0.2	2 ± 6	5	7.1	1.0
	1		1.4 ± 1.0	90 ± 56			
10	2	6.6 ± 0.5	1.2 ± 0.6	161 ± 31	7	7.1	1.4
	3		0.5 ± 0.5	60 ± 60			

considering only mode 1 or mode 3. Nevertheless, this trend is not reflected when the modes are combined.

In addition, the mean width of C1R varies between 6.9 and 7.1 km, excluding $N_{\text{fit}} = 10$ as previously explained, which is in agreement with [3] who proposed the mean width to be 6.86 km. The amplitudes of each mode are approximately 1 km when fitted individually. However, when the modes are combined, the amplitudes of modes 1 and 3 are smaller than mode 2.

Figure 1 shows the width variation of C1R for all fits considering the parameters obtained for the minimum chi-square. It is evident that with individual modes, the results are similar between the two datasets. For the tests with combinations of oscillation modes, there is a slight difference with modes 1 and 2 and a larger one when all 3 modes are combined. While in figure 1*d*, it appears to be a better fit for the dataset with only resolved detections, in figure 1*e* it seems the model is degenerate and unable to provide a good fit.

(b) The oscillation modes considering all occultations

Except for the 23 July 2017 stellar occultation, all other events yielded fewer resolved detections of C1R. These individual detections are insufficient to identify oscillation modes. However, we can devise a more sophisticated model capable of combining all the detections listed in table 1 to refine the results from §4a. In this case, we also need to account for the pattern speed of the oscillation modes. This improved model is expressed in equation (4.3):

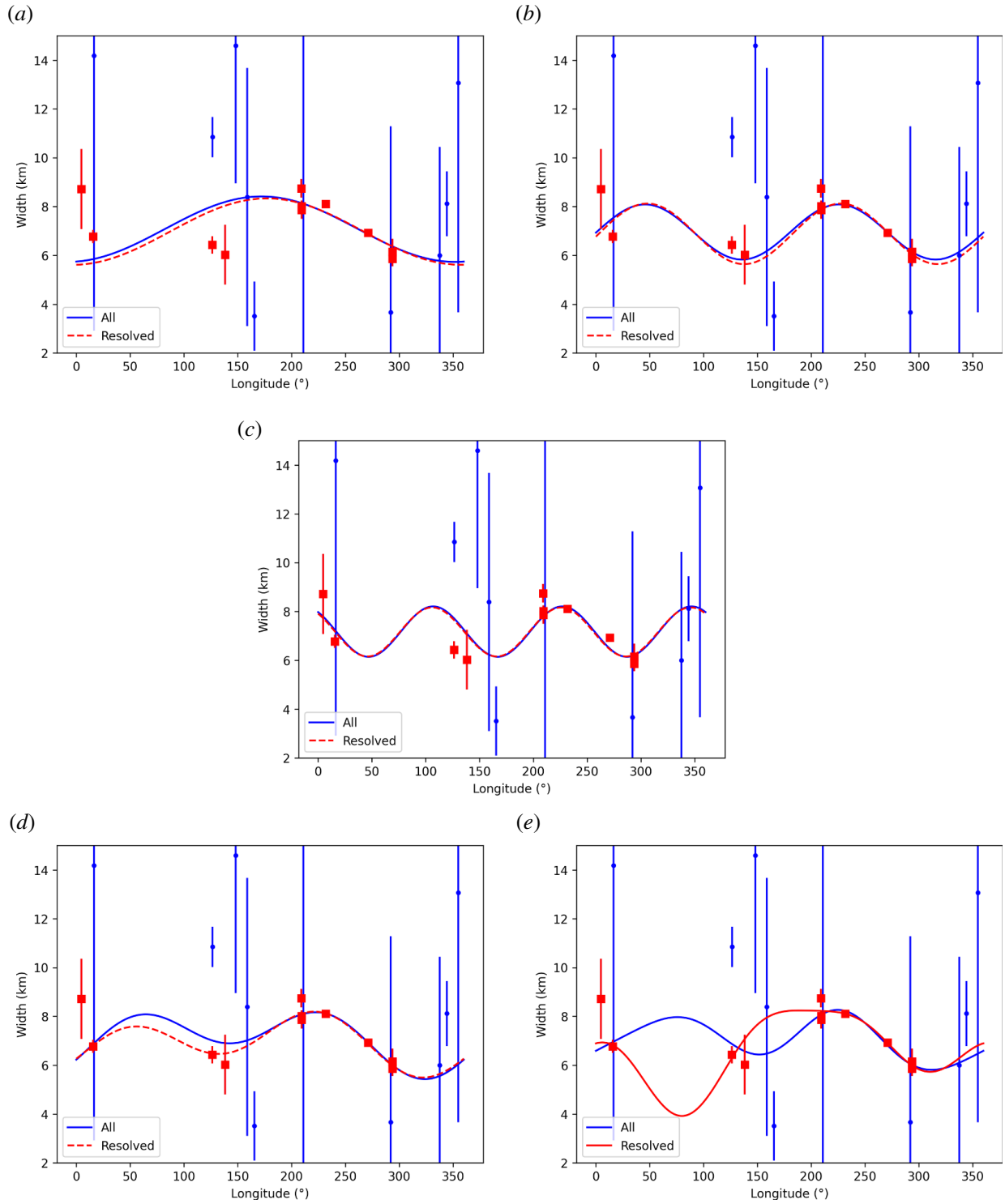


Figure 1. Distribution of the radial width of the ring detection on 23 July 2017, stellar occultation when using (a) mode 1, (b) mode 2, (c) mode 3, (d) modes 1 and 2, and (e) modes 1, 2, and 3. The blue dots and red squares are the unresolved and resolved detections, respectively. The blue line is the best fit using all detections, while the red dashed line is the best fit considering only the resolved detections.

$$W(\lambda) = W_{\text{mean}} + \sum_i A_i \sin[m_i(\lambda - \phi_i - \Omega_i \Delta t)], \quad (4.3)$$

where Ω_i represents the pattern speed of the i th oscillation mode and $\Delta t = t - t_0$ denotes the difference between the occultation instant corrected by light-time and the reference epoch.

In equation (4.3), t corresponds to the instant when the starlight traverses the ring, in Barycentric Dynamical Time), thus $t = t_{\text{obs}} - lt$, where t_{obs} signifies the instant of observation and lt denotes the light-time from the target. For accuracy, t_{obs} should be the mid-instant

between disappearance and reappearance for each ring detection. Since each detection happens at different times, sometimes spanning minutes, we consider the pattern speed of the oscillation mode during the observations. Nonetheless, for Chariklo, where data precision is limited, only the mean occultation instant listed in [table 1](#) is used.

The model described in [equation \(4.3\)](#) can be the diagnosis of a collective motion of the ring particles, which oscillate m_i times at the epicyclic frequency κ while completing 2π radians in a frame rotating at the pattern speed Ω_i . In this frame, a given particle moves at an average angular motion of $n - \Omega_i$, so that the condition above imposes $\kappa = m_i(n - \Omega_i)$, classically referred to as a Lindblad mode. If we assume Chariklo is nearly spherical, we have $\kappa \approx n$, so that the condition above can be written $\Omega_i \approx [(m_i - 1)/m_i]n$. These modes can be forced by Lindblad $m_i/(m_i - 1)$ resonances excited for instance by satellites, or by the non-axisymmetric terms in the potential of the central body [19,20]. They can also be free modes excited by forced modes with other values of m_i through nonlinear interactions [21]. The case $m_i = 1$ yields $\Omega_i = n - \kappa = \dot{\omega}$, which corresponds to the locked precession mode of an ellipse with rate $\dot{\omega}$ forced by the dynamical oblateness term J_2 of the central body. For $m_i \neq 1$, the cases $m_i > 0$ (respectively, $m_i < 0$) correspond to $\Omega_i < n$ (respectively, $\Omega_i > n$), possibly forced by an outer (respectively, inner) perturber. We consider here only modes with $m_i < 0$,¹ i.e. modes that have pattern speeds $\Omega_i > n$, because they are expected as free modes that are excited by the one-third spin-orbit resonance between the ring and the body itself [22].

Except for its rotational period of 7.004 ± 0.036 h [23] the physical parameters of Chariklo, such as its mass M_C , radius R_C and J_2 coefficient, are not known accurately. Adopting $M_C \approx 7 \times 10^{18}$ kg [24] and $R_C \approx 125$ km [3], we can estimate $J_2 \approx \Omega_C^2 R_C^3 / 2GM_C \approx 0.13$, where $\Omega_C = 2.5 \times 10^{-4}$ s⁻¹ is Chariklo's spin rate. This eventually leads to a precession rate $\dot{\omega} = 1.5(R_C/a)^2 J_2 n$, where $a = 386$ km is C1R's semi-major axis [3]. This value implies that the ring is close to the one-third spin-orbit resonance [24], i.e. that $n \approx \Omega_C = 8.3 \times 10^{-5}$ s⁻¹, so that $\dot{\omega} \approx 1.7 \times 10^{-6}$ s⁻¹, which is, approximately, 8° d⁻¹.

Consequently, for the $m_i = 1$ mode, we searched possible fits to the observations using pattern speeds Ω_i of the order of 8° d⁻¹. For the other modes, we searched possible fits with pattern speeds $\Omega_i = [(|m_i| + 1)/|m_i|]n \approx [(|m_i| + 1)/|m_i|](\Omega_C/3) \approx [(|m_i| + 1)/|m_i|] \times 411^\circ$ d⁻¹. In particular, for the $|m_i| = 2$ mode, we searched for possible fits using pattern speeds $\Omega_i \approx 616^\circ$ d⁻¹ in combination with mode $m_i = 1$.

We used [equation \(4.2\)](#) to fit the model to the data, utilizing only the resolved detections listed in [table 1](#). From the results found in §4a, the unresolved detections generally provide estimations of the width with such large error bars that they do not provide a better determination of the ring's width variation. Also, since the combination of modes 1 and 2 provided the best fit for the single event analysis, we conducted fits only with this combination, considering the pattern speed Ω_1 to be in the interval 0 – 25° d⁻¹ and Ω_2 to be in the interval 600 – 630° d⁻¹. However, fitting the pattern speeds via χ^2 is challenging. Given that the data spans 4 years of observations, χ^2 becomes overly sensitive to this parameter. [Figure 2](#) shows the resulting χ^2 as a function of Ω_1 and Ω_2 for all tests in the given interval.

We identified several local minima for both pattern speeds. However, we notice they are grouped around two main values for Ω_1 and six main values for Ω_2 . This highlights the difficulty in deriving the pattern speeds from such data. [Table 3](#) lists all possible solutions found within the 3σ limit for all these groups.

A global best fit is achieved by adopting the values $\Omega_1 \approx 3.8$ and $\Omega_2 \approx 603.5^\circ$ d⁻¹, with the minimum chi-square per degree-of-freedom basically equal to one, indicating a satisfactory fit of our model to the data. We see from [table 2](#) that the introduction of a third mode with $m = 3$ does not provide a better fit. This said, the presence of several local minima of χ^2 seen in [figure 2](#) shows that more data are required to firmly determine these modes.

¹By commodity, we will still refer to these modes by quoting the absolute value of m_i , i.e. omitting its sign

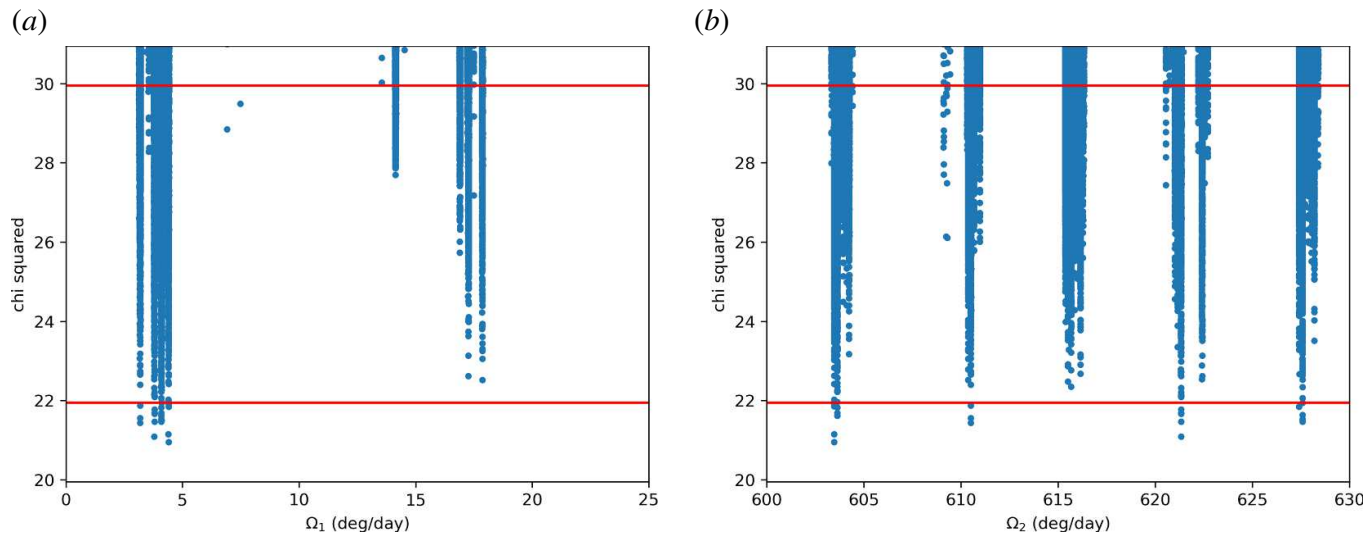


Figure 2. Resulting χ^2 of the fits considering the expected values for the pattern speeds of the combined modes 1 (a) and 2 (b). The red horizontal lines mark the 1σ (lower) and 3σ (upper) limits.

Table 3. Similar to table 2, but with the addition of the pattern speeds Ω_i .

N_{fit}	Modes (m_i)	W_{mean} (km)	A_i (km)	ϕ_i ($^\circ$)	Ω_i ($^\circ \text{ d}^{-1}$)	n_p	χ^2_{min}	χ^2_{pdf}
all resolved detections (28)								
11	1	6.7 ± 0.2	0.8 ± 0.2	144 ± 144	3.8 ± 0.6	7	20.9	0.99
	2		0.7 ± 0.3	90 ± 90	603.8 ± 0.5			
12	1	6.7 ± 0.2	0.8 ± 0.3	143 ± 137	3.8 ± 0.6	7	21.4	1.02
	2		0.8 ± 0.3	111 ± 66	610.6 ± 0.3			
13	1	6.7 ± 0.2	0.9 ± 0.2	150 ± 150	3.8 ± 0.6	7	22.3	1.06
	2		0.8 ± 0.3	90 ± 90	615.8 ± 0.5			
14	1	6.7 ± 0.2	0.9 ± 0.2	169 ± 130	3.8 ± 0.6	7	21.1	1.00
	2		0.8 ± 0.3	90 ± 90	620.9 ± 0.4			
15	1	6.7 ± 0.2	0.8 ± 0.2	148 ± 130	3.8 ± 0.6	7	22.5	1.07
	2		0.8 ± 0.3	90 ± 90	622.5 ± 0.2			
16	1	6.7 ± 0.2	0.8 ± 0.2	136 ± 130	3.8 ± 0.6	7	21.4	1.02
	2		0.8 ± 0.3	90 ± 90	627.9 ± 0.5			
17	1	6.7 ± 0.2	0.7 ± 0.2	130 ± 130	17.4 ± 0.5	7	22.5	1.07
	2		0.8 ± 0.2	119 ± 53	610.4 ± 0.1			
18	1	6.7 ± 0.2	0.8 ± 0.2	50 ± 50	17.24 ± 0.04	7	23.9	1.14
	2		0.8 ± 0.2	67 ± 56	615.7 ± 0.5			
19	1	6.7 ± 0.2	0.8 ± 0.3	180 ± 180	17.4 ± 0.5	7	22.6	1.07
	2		0.8 ± 0.2	76 ± 67	621.7 ± 0.6			

Since we are analysing a group of local minima for the pattern speed in the 3σ region, the mean width and amplitudes present a larger error bar than those found for the single event analysis. However, compared with the best fit in §4a ($N_{\text{fit}} = 9$), we notice that the mean width is slightly smaller, while the amplitude for the $m = 1$ mode is higher. The amplitude for the $m = 2$

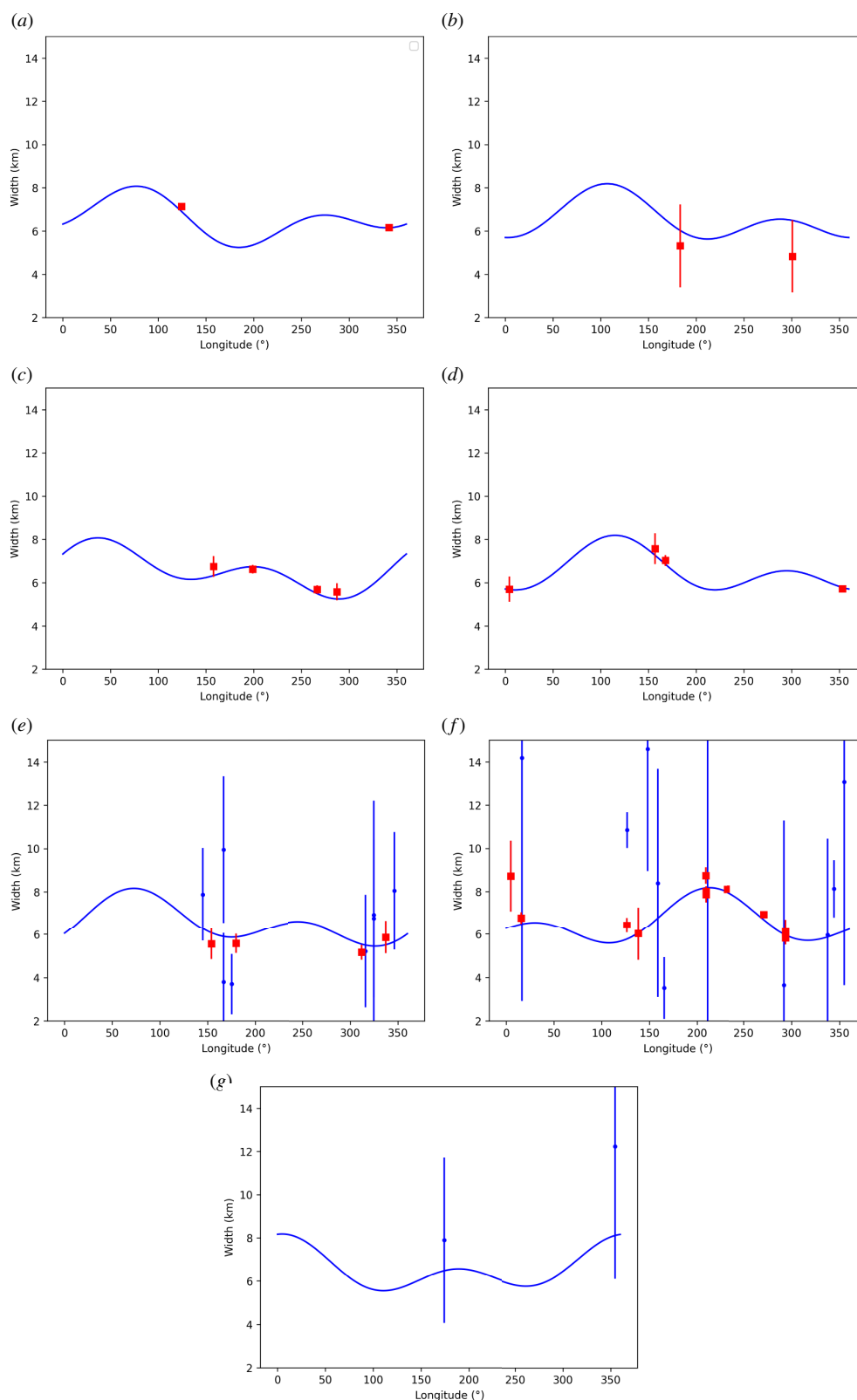


Figure 3. Similar to figure 1, but for the best fit considering all detections simultaneously, for the occultations observed in (a) 2013-06-03, (b) 2014-02-16, (c) 2014-04-29, (d) 2017-04-09, (e) 2017-06-22, (f) 2017-07-23, and (g) 2017-08-24 (see §4b).

mode remains similar. Figure 3 illustrates the solutions for the fit with the minimum chi-square over all our occultation data.

5. Conclusion

The discovery of Chariklo's rings in 2013 posed a new puzzle for scientists, adding complexity to our understanding of small celestial bodies. Over a decade later, a series of stellar occultations unveiled intriguing characteristics of the Chariklo main ring, that is, its radial density fluctuations and longitudinal width variations.

However, stellar occultation provides only fragmented glimpses of the ring's structure, with each observation capturing a swift dimming of a limited portion of the ring. Often, this rapid drop in brightness surpasses the observer's temporal resolution, resulting in unresolved detections and a correlation between local ring width and opacity. Yet, we can glean insights into certain ring properties by combining ring detections from various longitudes across multiple occultations.

Our study focussed on determining the oscillation modes associated with the width variations of the Chariklo main ring, as reported by [2,3]. Initially, we outlined a meticulous method for computing the longitude of ring detections from stellar occultations within an inertial reference frame. To maintain simplicity in our model, owing to limited data availability, we concentrated on describing width variations as a function of longitudes rather than conducting a dynamic analysis. Hence, our model adopts the straightforward sinusoidal function demonstrated in [equation \(4.1\)](#).

We fitted our model to the data of a single event, the 23 July 2017 occultation, using the oscillation modes with azimuthal numbers m_i of 1, 2 or 3 and combinations thereof. Our analysis revealed that the best fit occurs when modes 1 and 2 are combined (refer to [table 2](#)), with mode 2 exhibiting a slightly higher amplitude than mode 1. We also note the mode 3 remains undetected in our dataset.

By incorporating data from various observation epochs, we can also pin down the angular velocity of the oscillation mode. As explained previously, the rings are estimated to be close to the one-third spin-orbit resonance. From the estimated mass and J_2 of Chariklo, and its known rotational period, we expect the pattern speed for mode $m_i = 1$ to be approximately $\Omega_1 \approx 8^\circ \text{ d}^{-1}$, while our best fits provide $\Omega_1 = 3.8 \pm 0.6$ or $\Omega_1 = 17.4 \pm 0.5^\circ \text{ d}^{-1}$. The mismatch of these two values with the expected result probably reflects the difficulty to estimate the mass and J_2 of Chariklo, which is described here as an over-simplified homogeneous and triaxial object. This makes the expected value of 8° d^{-1} a guess rather than an accurate determination.

If the ring is at the one-third spin-orbit resonance with Chariklo, then the pattern speed of its $m_i = 2$ free mode is 616° d^{-1} . This is close to one of the solutions we find, $\Omega_2 = 615.8 \pm 0.5^\circ \text{ d}^{-1}$. However, other minima are seen in [figure 2](#) near this value, with a global minimum at $\Omega_2 = 603.47^\circ \text{ d}^{-1}$. From the χ^2 , it is not possible to favour any of the solutions found.

In summary, owing to our limited dataset, and in particular the scarcity of resolved radial profiles of C1R, we could not find a unique solution in terms of pattern speeds that best fits the width variations of this ring. At this stage, the results obtained with the modes $m = 1$ and $m = 2$ are encouraging, as they satisfactorily explain the width variations of C1R while being consistent with the expected pattern speeds of free modes in this ring.

These possibilities warrant further investigation. Continued observations of stellar occultations are essential to deepen our understanding of Chariklo's rings. From [table 1](#), the next step is to use the ring's distance from Chariklo's centre to estimate the eccentricity of the ring. These observations will enable us to refine our knowledge of the oscillation modes of C1R and their pattern speeds, and enhance our comprehension of this intriguing feature. Finally, the methodology created here can be easily replicated to study the C2R once more data are available, as well as for studying the rings of other small bodies, such as Haumea and Quaoar, using stellar occultations.

Data accessibility. All data used or computed are provided in the tables.

Declaration of AI use. As non-English speakers, the OpenAI website was used to correct and improve our text from already written sentences.

Authors' contributions. A.R.G.-J.: conceptualization, funding acquisition, methodology, project administration, resources, software, supervision, validation, visualization, writing—original draft, writing—review and editing; A.L.R.M.: data curation, formal analysis, investigation, methodology, software, visualization; B.E.M.: conceptualization, data curation, software, validation, writing—original draft, writing—review and editing; B.S.: conceptualization, data curation, formal analysis, methodology, validation, writing—review and editing.

All authors gave final approval for publication and agreed to be held accountable for the work performed therein.

Conflict of interest declaration. We declare we have no competing interests.

Funding. The authors thank the support of FAPEMIG, CAPES, and CNPq. A.L.R.M. thanks Federal University of Uberlândia, proposal 4518179. B.E.M. thanks CNPq. grant 150612/2020-6. This work was carried out within the “Lucky Star” team that brings together the efforts of the Paris, Granada, and Rio groups, funded by the European Research Council under the European Community’s H2020 (ERC Grant Agreement No. 669416). The authors also thank the computational support of LineA.

References

1. Braga-Ribas F *et al.* 2014 A ring system detected around the Centaur (10199) Chariklo. *Nature* **508**, 72–75. (doi:10.1038/nature13155)
2. Bérard D *et al.* 2017 The Structure of Chariklo’s Rings from Stellar Occultations. *Astron. J.* **154**, 144. (doi:10.3847/1538-3881/aa830d)
3. Morgado BE *et al.* 2021 Refined physical parameters for Chariklo’s body and rings from stellar occultations observed between 2013 and 2020. *Astron. Astrophys.* **652**, A141. (doi:10.1051/0004-6361/202141543)
4. Ortiz JL *et al.* 2015 Possible ring material around centaur (2060) *Chiron*. *Astron. Astrophys.* **576**, A18. (doi:10.1051/0004-6361/201424461)
5. Ortiz JL *et al.* 2023 Changing material around (2060) *Chiron* revealed by an occultation on December 15, 2022. *Astron. Astrophys.* **676**, L12. (doi:10.1051/0004-6361/202347025)
6. Ortiz JL *et al.* 2017 The size, shape, density and ring of the dwarf planet Haumea from a stellar occultation. *Nature* **550**, 219–223. (doi:10.1038/nature24051)
7. Morgado BE *et al.* 2023 A dense ring of the trans-Neptunian object Quaoar outside its *Roche* limit. *Nature* **614**, 239–243. (doi:10.1038/s41586-022-05629-6)
8. Pereira CL *et al.* 2023 The two rings of (50000) Quaoar. *Astron. Astrophys.* **673**, L4. (doi:10.1051/0004-6361/202346365)
9. Elliot JL, French RG, Frogel JA, Elias JH, Mink DJ, Liller W. 1981 Orbits of nine Uranian rings. *Astron. J.* **86**, 444. (doi:10.1086/112904)
10. Elliot JL, French RG, Meech KJ, Elias JH. 1984 Structure of the Uranian rings. I - Square-well model and particle-size constraints. *Astron. J.* **89**, 1587. (doi:10.1086/113662)
11. Nicholson PD, Persson SE, Matthews K, Goldreich P, Neugebauer G. 1978 The rings of Uranus - Results of the 10 April 1978 occultation. *Astron. J.* **83**, 1240. (doi:10.1086/112318)
12. Nicholson PD, Matthews K, Goldreich P. 1982 Radial widths, optical depths, and eccentricities of the Uranian rings. *Astron. J.* **87**, 433. (doi:10.1086/113117)
13. Porco C, Danielson GE, Goldreich P, Holberg JB, Lane AL. 1984 Saturn’s nonaxisymmetric ring edges at 1.95 Rs and 2.27 Rs. *Icarus* **60**, 17–28. (doi:10.1016/0019-1035(84)90135-0)
14. Porco C, Nicholson PD, Borderies N, Danielson GE, Goldreich P, Holdberg JB, Lane AL. 1984 The eccentric Saturnian ringlets at 1.29Rs and 1.45Rs. *Icarus* **60**, 1–16. (doi:10.1016/0019-1035(84)90134-9)
15. French RG, Elliot JL, Levine SE. 1986 Structure of the Uranian Rings. *Icarus* **67**, 134–163. (doi:10.1016/0019-1035(86)90181-8)
16. Gomes-Júnior AR, Morgado BE, Benedetti-Rossi G, Bouffleur RC, Rommel FL, Banda-Huarcá MV, Kilic Y, Braga-Ribas F, Sicardy B. 2022 *SORA*: Stellar occultation reduction and analysis. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **511**, 1167–1181. (doi:10.1093/mnras/stac032)
17. Archinal BA *et al.* 2018 Report of the IAU Working Group on Cartographic Coordinates and Rotational Elements: 2015. *Celest. Mech. Dyn. Astron.* **130**. (doi:10.1007/s10569-017-9805-5)

18. Longaretti PY. 1989 Uranian ring dynamics: An analysis of multimode motions. *Icarus* **82**, 281–287. (doi:[10.1016/0019-1035\(89\)90039-0](https://doi.org/10.1016/0019-1035(89)90039-0))
19. Sicardy B, Leiva R, Renner S, Roques F, El Moutamid M, Santos-Sanz P, Desmars J. 2018 Ring dynamics around non-axisymmetric bodies with application to Chariklo and Haumea. *Nat. Astron.* **3**, 146–153. (doi:[10.1038/s41550-018-0616-8](https://doi.org/10.1038/s41550-018-0616-8))
20. Sicardy B. 2020 Resonances in Nonaxisymmetric Gravitational Potentials. *Astron. J.* **159**, 102. (doi:[10.3847/1538-3881/ab6d06](https://doi.org/10.3847/1538-3881/ab6d06))
21. French RG *et al.* 2023 The complex shape of the outer edge of Saturn’s B ring, as observed in Cassini occultation *data*. *Icarus* **405**, 115678. (doi:[10.1016/j.icarus.2023.115678](https://doi.org/10.1016/j.icarus.2023.115678))
22. Salo H, Sicardy B. 2024 Collisional confinement of 1:3 resonance ringlets around non-spherical bodies. *Eur. Planet. Sci. Congr. EPSC2024*–534. (doi:[10.5194/epsc2024-534](https://doi.org/10.5194/epsc2024-534))
23. Fornasier S, Lazzaro D, Alvarez-Candal A, Snodgrass C, Tozzi GP, Carvano JM, Jiménez-Teja Y, Silva JS, Bramich DM. 2014 The Centaur 10199 Chariklo: investigation into rotational period, absolute magnitude, and cometary activity. *Astron. Astrophys.* **568**, L11. (doi:[10.1051/0004-6361/201424439](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201424439))
24. Leiva R *et al.* 2017 Size and Shape of Chariklo from Multi-epoch Stellar Occultations. *Astron. J.* **154**, 159. (doi:[10.3847/1538-3881/aa8956](https://doi.org/10.3847/1538-3881/aa8956))