



Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática

Bacharelado em Matemática

Relacionando o Grupo Fundamental e a Homologia Simplicial.

Wendy Díaz Valdés

Uberlândia-MG
2018

Wendy Díaz Valdés

Relacionando o Grupo Fundamental e a Homologia Simplicial.

Trabalho de conclusão de curso apresentado à Coordenação do Curso de Bacharelado em Matemática como requisito parcial para obtenção do grau de Bacharel em Matemática.

Orientador: Ligia Laís Fêmina

Uberlândia-MG

2018



Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática

Coordenação do Curso de Bacharelado em Matemática

A banca examinadora, conforme abaixo assinado, certifica a adequação deste trabalho de conclusão de curso para obtenção do grau de Bacharel em Matemática.

Uberlândia, 19 de Dezembro de 2018

BANCA EXAMINADORA

Ligia Laís Fêmina

Ligia Laís Fêmina

Luis Renato Gonçalves Dias

Luis Renato Gonçalves Dias

Marcus Augusto Bronzi

Marcus Augusto Bronzi

Uberlândia-MG

2018

AGRADECIMENTOS

Este trabalho foi realizado com o apoio direto ou indireto de várias pessoas, às quais sou profundamente grata.

A minha orientadora, Ligia Laís Fêmina, agradeço pela orientação prestada, pelo seu incentivo, disponibilidade e apoio demonstrados.

Ao meu namorado por ter caminhado ao meu lado, pela paciência, compreensão, especialmente por apresentar sempre um sorriso quando sacrificava os finais de semana e os feriados em prol da realização deste trabalho.

Por último, tenho consciência que sozinha esse trabalho não seria possível, dirijo um agradecimento especial a minha mãe, por ser modelo de coragem, pelo seu apoio incondicional, incentivo e paciência demonstrados. Além, de sua total ajuda na superação dos obstáculos, que ao longo desta caminhada foram surgindo. A ela dedico este trabalho.

RESUMO

Este trabalho de conclusão de curso tem como finalidade abordar com mais profundidade e detalhamento a ideia geométrica da teoria de homologia simplicial e grupo fundamental, proporcionando uma visão ampla da importância dessas teorias. O principal objetivo desse trabalho é entender o Teorema de Hurewicz, que fornece uma relação entre o grupo fundamental e a homologia simplicial.

Palavras-chave: Grupo Fundamental. Homologia Simplicial. Teorema de Hurewicz .

ABSTRACT

This work of conclusion of course has as purpose to approach with more depth and detail the geometric idea of the theory of simplicial homology and fundamental group, providing a broad vision of the importance of these theories. The main objective of this work is to understand the Hurewicz Theorem, which provides a relation between the fundamental group and the simplicial homology.

Keywords: Fundamental Group. Simplicial homology. Hurewicz's theorem.

SUMÁRIO

Lista de Figuras	I
1 Preliminares	3
1.1 Topologia	3
1.2 Álgebra	4
2 Homologia Simplicial	7
2.1 Definição e propriedades da homologia	7
2.2 Grupos de Homologia Simplicial do Toro	11
2.3 Grupos de Homologia Simplicial do Plano Projetivo	13
2.4 Grupos de Homologia Simplicial do garrafa de Klein	15
2.5 Ideia geométrica da homologia	17
3 Grupo Fundamental	23
3.1 Homotopia	23
3.2 Definição do grupo fundamental	26
3.3 Ideia geométrica do grupo fundamental	28
4 Relação entre homologia e grupo fundamental	31
Referências Bibliográficas	35

LISTA DE FIGURAS

2.1	Simplexos	7
2.2	Exemplos	8
2.3	Superfície triangularizada	8
2.4	Simplexos orientados	9
2.5	Triangularização do toro	12
2.6	Transformação do toro	12
2.7	Triangularização do plano projetivo	13
2.8	Transformação do plano projetivo	13
2.9	Triangularização da garrafa de Klein	15
2.10	Transformação da garrafa de Klein	16
2.11	Esfera	18
2.12	Espaço X	18
2.13	Espaço Y	19
2.14	Espaço W	20
2.15	Toro	20
2.16	Poliedro K	20
2.17	Triangularização da faixa de Möbius	21
3.1	Aplicações homotópicas	23
3.2	Homotopia entre f e g	24
3.3	Caminhos homotópicos	25
3.4	Caminhos	25
3.5	Produto de caminhos	26
3.6	Isomorfismo	27
3.7	Espaço Z	29
3.8	Espaço U	29
3.9	Circunferências tangentes	30
4.1	f como bordo de um 2-simplexo	32
4.2	Homotopia F	32
4.3	Par de simplexos	32
4.4	Imagem do produto de caminhos pela h	32
4.5	Bitoro	34
4.6	$\alpha_2 - \alpha'_2 \sim \gamma_1$	34

INTRODUÇÃO

A topologia algébrica é um ramo bastante interessante da matemática que está na intersecção da álgebra e da geometria e possui aplicações em diversas áreas da matemática.

A topologia algébrica descreve a estrutura de um espaço topológico por associação com um sistema algébrico, normalmente um grupo ou uma sequência de grupos. Desse modo, a topologia algébrica consiste em resolver problemas topológicos através de métodos puramente algébricos e um conceito importante é o de homologia simplicial, ([2], 1978).

A teoria de homologia é um assunto importante na topologia algébrica, pois fornece um método de associar a cada espaço topológico uma categoria de grupos (ou, mais geralmente, módulos), chamados de grupo de homologia desse espaço, de modo que espaços homeomorfos possuem grupos de homologia isomorfos, ([5], 2012).

A homotopia é a ideia mais importante da topologia algébrica e o grupo fundamental é provavelmente o invariante algébrico mais simples associado a essa ideia, ([4], 1998).

O grupo fundamental cria uma imagem algébrica do espaço de laços em um espaço X , esse grupo é denotado por $\pi_1(X, x_0)$. Esses grupos são difíceis de calcular. Nesse sentido, relacionar os grupos de homologia simplicial com os grupos de homotopia se torna uma alternativa mais viável para facilitar tais cálculos.

Este trabalho de conclusão de curso tem como finalidade abordar com mais profundidade e detalhamento a ideia geométrica da teoria de homologia simplicial e grupo fundamental, proporcionando uma visão ampla da importância dessas teorias. Além disso, será apresentado o Teorema de Hurewicz, que fornece uma relação entre o grupo fundamental e a homologia simplicial.

No capítulo um, são apresentados alguns resultados essenciais para o desenvolvimento dos capítulos posteriores. A principal referência utilizada é [2].

No capítulo dois, apresentamos a teoria de homologia simplicial. Para melhor entendimento, calculamos detalhadamente os grupos de homologia simplicial do toro, do plano projetivo e da garrafa de Klein. As principais referências desse capítulo são [2], [3] e [6].

No capítulo três, estudamos o grupo fundamental, que é um grupo associado a qualquer espaço topológico que fornece uma maneira de determinar quando dois caminhos, começando e terminando em um mesmo ponto, podem ser continuamente deformados um no outro. As principais referências utilizadas nesse capítulo são [2] e [5].

No capítulo quatro, expomos o Teorema de Hurewicz, que relaciona o grupo fundamental e a homologia no nível 1. As principais referências são [1] e [3].

1. PRELIMINARES

Neste capítulo, relatamos alguns resultados de topologia e álgebra de fundamental importância para o entendimento do trabalho. A principal referência utilizada é [2].

1.1 TOPOLOGIA

Definição 1. *Uma topologia em um conjunto X é uma coleção τ de subconjuntos de X , chamados de subconjuntos abertos (segundo a topologia τ), satisfazendo as seguintes condições:*

1. $\emptyset$ e X são abertos;
2. a união de uma família qualquer de subconjuntos abertos é um subconjunto aberto;
3. a interseção de uma família finita de subconjuntos abertos é um subconjunto aberto.

Um espaço topológico é um par (X, τ) , onde X é um conjunto e τ é uma topologia em X .

Uma base para uma topologia τ é um subconjunto B de τ , tal que cada elemento de τ é uma união de elementos de B .

Um conjunto é fechado se seu complementar é aberto.

Definição 2. *A topologia do subespaço para um subconjunto A de um espaço topológico X , consiste em todos os subconjuntos $O \cap A$, onde O é aberto em X . Um conjunto A com a topologia do subespaço é um subespaço de X .*

Definição 3. *Um espaço topológico X é conexo se não existem $A \subset X$ e $B \subset X$, abertos, disjuntos e não vazios, tais que $X = A \cup B$. Caso contrário, X é dito desconexo.*

Definição 4. *Uma componente conexa M de um espaço topológico X é um subconjunto conexo maximal de X , isto é, se $Y \subset X$ é conexo e $M \subset Y$ então, ou $M = Y$ ou $Y = X$.*

Definição 5. *Sejam X e Y espaços topológicos. Para que uma aplicação $f: X \rightarrow Y$ seja contínua, é necessário e suficiente que a imagem inversa de $f^{-1}(A)$ de todo subconjunto aberto $A \subset Y$ seja um subconjunto aberto de X .*

Definição 6. *Um homeomorfismo $h: X \rightarrow Y$ é uma aplicação contínua e bijetiva de X sobre Y , cuja inversa $h^{-1}: Y \rightarrow X$ também é contínua.*

Definição 7. Um caminho em um espaço topológico X é uma aplicação contínua $\alpha: I \rightarrow X$, onde I é o intervalo fechado $[0, 1]$.

Definição 8. Um espaço topológico X é conexo por caminhos quando, dados dois pontos x, y de X , existe um caminho contínuo $\alpha: I \rightarrow X$ com $\alpha(0) = x$ e $\alpha(1) = y$.

Proposição 1. Todo espaço conexo por caminhos é conexo.

Definição 9. Seja X um espaço topológico e $x \in X$ qualquer. Então a componente conexa por caminhos de x é a reunião de todos os subconjuntos conexos por caminhos de X , que contém x .

1.2 ÁLGEBRA

Definição 10. Uma operação binária em um conjunto A é uma função $f: A \times A \rightarrow A$. Para quaisquer $a, b \in A$, utilizamos a notação ab ou $a \cdot b$ como multiplicação e $a + b$ como a soma desses elementos.

Definição 11. Um grupo é um conjunto G provido de uma operação binária em G , satisfazendo as seguintes propriedades:

1. $a(bc) = (ab)c$, para todo $a, b, c \in G$;
2. existe elemento identidade e , tal que $ae = ea = a$, para todo $a \in G$;
3. para todo $a \in G$, existe elemento inverso a^{-1} , tal que $aa^{-1} = a^{-1}a = e$.

Na notação do grupo aditivo, o elemento identidade será denotado por 0 e seu inverso por $-a$. Um grupo que possui somente o elemento identidade é chamado de grupo trivial.

Definição 12. Um subconjunto A de G é um subgrupo de G provido da mesma operação de G . Se A é um subgrupo e $g \in G$ o conjunto

$$gA = \{ga \mid a \in A\}$$

é chamado de classes laterais à esquerda de A por g . Quando a operação for a soma escreveremos $g + A$ e se for a multiplicação escreveremos gA . As classes laterais à direita são definidas analogamente.

Proposição 2. As classes laterais à esquerda gA e hA de um subgrupo A são disjuntas ou idênticas.

Definição 13. Um grupo G é comutativo ou abeliano se $ab = ba$ para todo $a, b \in G$.

Definição 14. Um homomorfismo $f: G \longrightarrow H$ de um grupo G para outro grupo H é uma função tal que

$$f(ab) = f(a)f(b), \quad a, b \in G.$$

O conjunto

$$\ker f = \{a \in G(a) \mid f(a) = e_H\}$$

é o núcleo de f , onde e_H é o elemento identidade de H . Um isomorfismo é um homomorfismo bijetivo, em este caso dizemos que os grupos são isomorfos e escrevemos $G \simeq H$.

Definição 15. Um subgrupo A de G é normal se $g^{-1}ag \in A$ para todo $g \in G$ e $a \in A$.

Proposição 3. O núcleo de um homomorfismo $f: G \longrightarrow H$ é o subgrupo normal de G . O homomorfismo é bijetivo se, e somente se o núcleo de f contém somente o elemento identidade de G .

Proposição 4. Se A é um subgrupo normal de G . A família $\frac{G}{A}$ de todas as classes laterais (esquerdas) de A é um grupo provido da operação

$$gA \cdot hA = ghA.$$

O grupo $\frac{G}{A}$ é chamado de grupo quociente de G módulo A .

Proposição 5. (O Primeiro Teorema do Homomorfismo). Seja $f: G \longrightarrow H$ um homomorfismo sobrejetor do grupo G para o grupo H com núcleo K , então H é isomorfo ao grupo quociente $\frac{G}{K}$.

Definição 16. Um comutador em um grupo G é um elemento da forma $aba^{-1}b^{-1}$. O subgrupo comutador de G é o menor subgrupo contendo todos os comutadores de G . Equivalentemente, o subgrupo comutador consiste em produtos finitos de comutadores de G .

Proposição 6. (a) O subgrupo comutador F de um grupo G é normal.
(b) O subgrupo comutador é o menor subgrupo de G para o qual $\frac{G}{F}$ é abeliano.

Definição 17. Se g é um elemento de um grupo G , o conjunto de todos os geradores $g, g^{-1}, gg = g^2, g^{-1}g^{-1} = g^{-2}, \dots$ forma um subgrupo

$$[g] = \{g^n \mid n \text{ é um inteiro}\}$$

chamado o subgrupo gerado por g . Se G tem um elemento g para o qual $[g] = G$, então G é um grupo cíclico com gerador g .

O grupo cíclico mais comum é o grupo dos inteiros $\mathbb{Z}$, onde 1 e -1 são os geradores.

Definição 18. Um conjunto de geradores para um grupo G é um subconjunto S de G , tal que cada elemento de G é um produto de potências dos elementos de S . Um grupo que tem um conjunto finito de geradores é chamado de finitamente gerado.

Definição 19. A soma direta $G \oplus H$ é o conjunto $G \times H$ com a operação $\oplus$ definida por

$$(g_1, h_1) \oplus (g_2, h_2) = (g_1 + g_2, h_1 + h_2)$$

para todo $g_1, g_2 \in G$ e para todo $h_1, h_2 \in H$, utilizando a notação aditiva.

Definição 20. Um grupo isomorfo a uma soma direta finita de cópias do grupo $\mathbb{Z}$ é chamado de grupo abeliano livre. Este grupo com n geradores é isomorfo à soma direta $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}$ (n termos).

2. HOMOLOGIA SIMPLICIAL

Neste capítulo, faremos um breve estudo sobre a teoria de homologia simplicial. A homologia simplicial surge como uma maneira de estudar os espaços topológicos, cujos componentes estruturais são n -simplexos. Tal ferramenta é calculada em espaços homeomorfos a um poliedro, tal homeomorfismo se refere a uma triangularização do espaço dado. Muitos espaços topológicos de interesse podem ser triangularizados, em especial o toro, o plano projetivo e a garrafa de Klein. Para melhor entendimento, calculamos detalhadamente os grupos de homologia simplicial do toro, do plano projetivo e da garrafa de Klein. As principais referências desse capítulo são [2], [3] e [6].

2.1 DEFINIÇÃO E PROPRIEDADES DA HOMOLOGIA

Definição 21. Um conjunto $A = \{a_0, a_1, \dots, a_k\}$ de $k + 1$ pontos em $\mathbb{R}^n$ é geometricamente independente quando os vetores $a_1 - a_0, a_2 - a_0, \dots, a_k - a_0$ são linearmente independentes.

Definição 22. O conjunto de todos os pontos $x \in \mathbb{R}^n$, que são gerados pelo conjunto de pontos geometricamente independente $\{a_0, \dots, a_k\}$, para os quais existem números reais não negativos $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k$ tal que $x = \sum_{i=0}^k \lambda_i a_i$ e $\sum_{i=0}^k \lambda_i = 1$, é chamado de **k -simplexo**, cuja notação é σ^k .

O **0-simplexo** é simplesmente um conjunto unitário, **1-simplexo** é um segmento de reta fechado, **2-simplexo** é um triângulo (interior e arestas), **3-simplexo** é um tetraedro (interior e arestas). Um **0-simplexo aberto** é o conjunto unitário, **1-simplexo aberto** é um segmento de linha com os pontos finais removidos, **2-simplexo aberto** é o interior de um triângulo, **3-simplexo aberto** é o interior de um tetraedro.

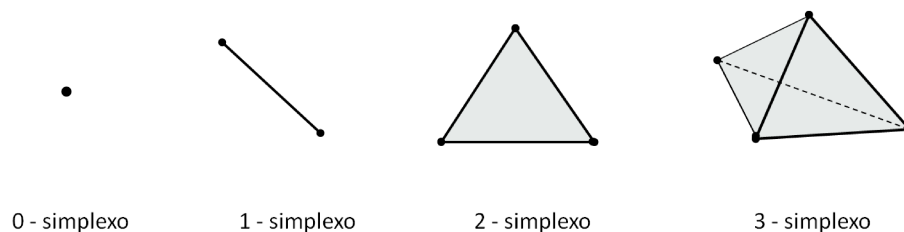


Figura 2.1: Simplexos

Definição 23. Dizer que um simplexo σ^k é uma face de um simplexo σ^n , $k \leq n$, significa que cada vértice de σ^k é um vértice de σ^n . Se σ^n é o simplexo com vértices $a_0, a_1, \dots, a_n$, escrevemos $\sigma^n = \langle a_0 \dots a_n \rangle$

Definição 24. Dois simplexos σ^m e σ^n são **propriamente unidos**, se $\sigma^m \cap \sigma^n$ é vazio ou $\sigma^m \cap \sigma^n$ é uma face de ambos.

Na figura 2.2, alguns exemplos de simplexos propriamente unidos e simplexos que não satisfazem essa definição.

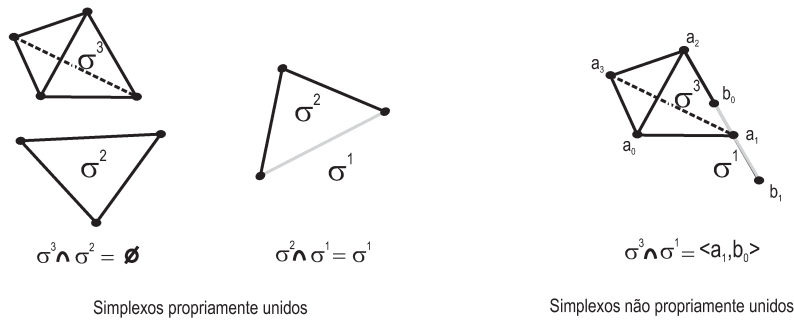


Figura 2.2: Exemplos

Definição 25. Um *complexo simplicial* é uma família finita K de simplexos geométricos os quais são **propriamente unidos** e tem a propriedade de que cada face de um elemento de K é também um elemento de K . A *dimensão* de K é o maior índice positivo r tal que K tenha um r -simplexo. A união de elementos de K com a topologia do subespaço topológico Euclidiano é denotado por $|K|$ e é chamado de **poliedro** associado a K .

Definição 26. A *triangularização* de um espaço topológico X consiste num complexo simplicial K e um homeomorfismo $h : |K| \rightarrow X$.

Geometricamente, triangularizar uma superfície é cobri-la de formas triangulares, as quais ou tem uma face toda em comum, ou um vértice, ou uma aresta. Além disso, a triangularização de uma superfície não é única.

A figura 2.3 mostra um exemplo de uma superfície triangularizada.

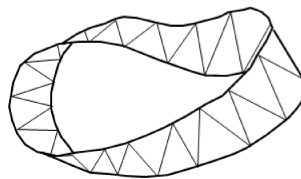


Figura 2.3: Superfície triangularizada

Definição 27. Um n -simplexo orientado, $n \geq 1$, é obtido de um n -simplexo $\sigma^n = \langle a_0 \dots a_n \rangle$ escolhendo a ordem para esses vértices. A classe equivalente de permutações pares para escolha da ordem, determina o simplexo orientado positivamente $+\sigma^n$, enquanto a classe equivalente das permutações ímpares determina o simplexo orientado negativamente. Um complexo simplicial orientado é obtido de um complexo simplicial atribuindo uma orientação para cada simplexo. Se os vértices $a_0, \dots, a_p$ de um complexo K são os vértices de um p -simplexo σ^p , então o símbolo $+\langle a_0 a_1 \dots a_p \rangle$ denota a classe de permutações pares para indicar a ordem $a_0, \dots, a_p$ e $-\langle a_0 a_1 \dots a_p \rangle$ denota a classe de permutações ímpares.

Na Figura 2.4, temos 1-simplexos e 2-simplexos orientados.

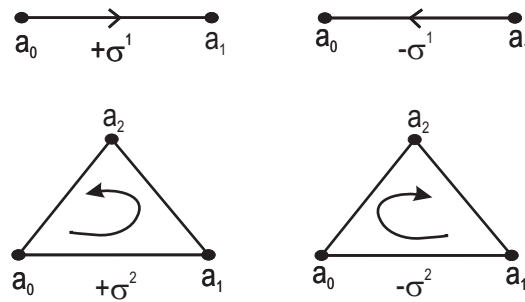


Figura 2.4: Simplexos orientados

Definição 28. Seja K um complexo geométrico orientado com simplexos σ^{p+1} e σ^p cuja dimensões diferem por 1. Associamos em cada par (σ^{p+1}, σ^p) um número de incidência $[\sigma^{p+1}, \sigma^p]$ definido como: Se σ^p não é uma face de σ^{p+1} , então $[\sigma^{p+1}, \sigma^p] = 0$. Suponha que σ^p é uma face de σ^{p+1} . Ordene os vértices $a_0, \dots, a_p$ de σ^p tal que $+\sigma^p = +\langle a_0 \dots a_p \rangle$. Seja v o vértice de σ^{p+1} , o qual não é vértice de σ^p . Então $+\sigma^{p+1} = \pm \langle va_0 \dots a_p \rangle$. Se $+\sigma^{p+1} = +\langle va_0 \dots a_p \rangle$, então $[\sigma^{p+1}, \sigma^p] = 1$. Se $+\sigma^{p+1} = -\langle va_0 \dots a_p \rangle$, então $[\sigma^{p+1}, \sigma^p] = -1$.

Exemplo 1. Se $+\sigma^2 = +\langle a_0 a_1 a_2 \rangle$, $+\sigma^1 = \langle a_0 a_1 \rangle$ e $+\tau^1 = \langle a_0 a_2 \rangle$, então $[\sigma^2, \sigma^1] = 1$ e $[\sigma^2, \tau^1] = -1$.

Definição 29. Seja K um complexo simplicial orientado. Se p é um número inteiro positivo, a p -dimensional cadeia, ou p -cadeia, é uma função c_p que leva a família de p -simplexos orientados de K para os números inteiros tal que, para cada p -simplexo σ^p , $c_p(-\sigma^p) = -c_p(+\sigma^p)$.

Com a operação adição induzida pelos inteiros, a família de p -cadeias forma um grupo chamado de grupo p -dimensional cadeia de K . Esse grupo é denotado por $C_p(K)$.

O grupo cadeia $C_p(K)$ é isomorfo à soma direta de grupos $\mathbb{Z}$. Assim se K tem α_p p -simplexos, então $C_p(K)$ é isomorfo à soma direta de α_p cópias de $\mathbb{Z}$. Um isomorfismo é dado pela correspondência

$$\sum_{i=1}^{\alpha_p} g_i \cdot \sigma_i^p \longleftrightarrow (g_1, g_2, \dots, g_{\alpha_p}).$$

Definição 30. Se $g.\sigma^p$ é uma p -cadeia elementar com $p \geq 1$, o **bordo** de $g.\sigma^p$ denotado por $\partial(g.\sigma^p)$ é definido por

$$\partial_p(g.\sigma^p) = \sum [\sigma^p, \sigma_i^{p-1}] g.\sigma_i^{p-1}, \quad \sigma_i^{p-1} \in K.$$

O operador bordo ∂ é estendido por linearidade para um homomorfismo

$$\partial_p : C_p(K) \rightarrow C_{p-1}(K).$$

Em outras palavras, se $c_p = \sum g_i.\sigma_i^p$ é uma p -cadeia arbitrária, então definimos

$$\partial_p(c_p) = \sum \partial_p(g_i.\sigma_i^p).$$

O bordo de uma 0-cadeia é definido como sendo zero.

Teorema 1 ([2], Teorema 2.1). Se K é um complexo orientado e $p \geq 2$, então a composição $\partial_{p-1} \circ \partial_p : C_p(K) \rightarrow C_{p-2}(K)$ no diagrama $C_p(K) \xrightarrow{\partial_p} C_{p-1}(K) \xrightarrow{\partial_{p-1}} C_{p-2}(K)$ é um homomorfismo trivial.

Definição 31. Seja K um complexo orientado.

Seja $p \geq 0$, um **p-ciclo** é uma p -cadeia z_p tal que $\partial_p(z_p) = 0$. O núcleo do homomorfismo $\partial_p : C_p(K) \rightarrow C_{p-1}(K)$ é um subgrupo de $C_p(K)$ e é a família de p -ciclos. Esse subgrupo é denotado por $Z_p(K)$, e é chamado de grupo ciclo p -dimensional de K .

Como definimos o bordo de uma 0-cadeia como sendo 0, temos 0-ciclo como sendo sinônimo de 0-cadeia, ou seja, o grupo $Z_0(K)$ de 0-ciclos é o grupo $C_0(K)$ de 0-cadeias.

Seja $p \geq 0$, uma p -cadeia b_p é um **p-bordo** em K , se existe uma $(p+1)$ -cadeia c_{p+1} tal que $\partial(c_{p+1}) = b_p$. A imagem de $\partial_{p+1}(C_{p+1}(K))$ é um subgrupo de $C_p(K)$ e é a família de p -bordos. Esse subgrupo é denominado de p -dimensional grupo-bordo de K e é denotado por $B_p(K)$.

Se n é a dimensão de K , então não existe p -cadeias em K para $p > n$. Nesse caso, temos que $C_p(K)$ é o grupo trivial $\{0\}$. Note que não existe $(n+1)$ -cadeias em K tal que $C_{n+1}(K) = \{0\}$ e portanto $B_n(K) = \{0\}$.

Teorema 2 ([2], teorema 2.2). Se K é um complexo orientado, então $B_p(K) \subset Z_p(K)$ para cada inteiro p tal que $0 \leq p \leq n$, onde n é a dimensão de K .

Definição 32. Dados dois p -ciclos w_p e z_p num complexo K , dizemos que w_p e z_p são **homólogos**, ou seja, $w_p \sim z_p$, se existe uma $(p+1)$ -cadeia c_{p+1} tal que $\partial(c_{p+1}) = w_p - z_p$. Em particular, se um p -ciclo t_p é bordo de uma $(p+1)$ -cadeia, dizemos que t_p é homólogo a zero, isto é, $t_p \sim 0$.

Essa relação de homologia definida anteriormente para p -ciclos é uma relação de equivalência. Assim, as classes de homologia de $Z_p(K)$, são $[z_p] = \{w_p \in Z_p(K) : w_p \sim z_p\}$. As classes laterais são: $z_p + B_p(K) = \{z_p + \partial_{p+1}(c_{p+1}) : \partial_{p+1}(c_{p+1}) \in B_p(K)\}$.

Logo, as classes homólogas são membros do grupo quociente $\frac{Z_p(K)}{B_p(K)}$.

Definição 33. *Seja $p \geq 0$ e K é um complexo orientado, o grupo de homologia p -dimensional de K é o grupo quociente $H_p(K) = \frac{Z_p(K)}{B_p(K)}$.*

Definição 34. *Seja C um grupo n -dimensional gerado por $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ e também gerado por $C = \{v_1, \dots, v_n\}$. Então existe uma única família de inteiros α_{ij} de maneira que*

$$\begin{aligned} v_1 &= \alpha_{11}u_1 + \dots + \alpha_{n1}u_n \\ \vdots &\quad \quad \quad \vdots \\ v_n &= \alpha_{1n}u_1 + \dots + \alpha_{nn}u_n, \end{aligned}$$

ou simplesmente,

$$v_j = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij}u_i \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

A matriz quadrada de ordem n a seguir

$$P = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

chama-se **matriz mudança de B para C** .

Naturalmente, a matriz mudança de B para C deve ser inversível, e sua inversa é a matriz mudança de C para B . Note que como as coordenadas são inteiros, tal matriz para ser inversível deverá ter determinante 1 ou -1 .

Nas próximas seções, apresentamos os cálculos detalhados dos grupos de homologia simplicial do toro, do plano projetivo e da garrafa de Klein.

2.2 GRUPOS DE HOMOLOGIA SIMPLICIAL DO TORO

Considere T , o toro com a triangularização composta por um 0-simplexo v , três 1-simplexos a , b e c , e dois 2-simplexos U e L orientados como ilustrados na Figura 2.5.

Na Figura 2.6, é possível visualizar a transformação do retângulo orientado no espaço T .

Note que foi adicionado o 1-simplexo c no retângulo para satisfazer o conceito de triangularização.

A sequência de cadeias de T é dada seguinte forma:

$$0 \longrightarrow C_2(T) \longrightarrow C_1(T) \longrightarrow C_0(T) \longrightarrow 0,$$

que é equivalente a

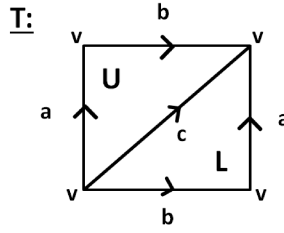


Figura 2.5: Triangularização do toro

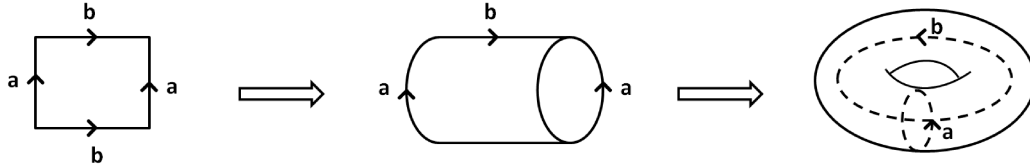


Figura 2.6: Transformação do toro

$$0 \longrightarrow \langle U, L \rangle \xrightarrow{\partial_2} \langle a, b, c \rangle \xrightarrow{\partial_1} \langle v \rangle \xrightarrow{\partial_0} 0.$$

Primeiramente, como o operador ∂_0 é nulo, segue que $Z_0(T) = \langle v \rangle$.

Note que $\partial_1(a) = \partial_1(b) = \partial_1(c) = v - v = 0$. Logo, $B_0(T) = \{0\}$.

Assim,

$$H_0(T) = \frac{Z_0(T)}{B_0(T)} = \frac{\langle v \rangle}{\{0\}} = \langle v \rangle \approx \mathbb{Z}.$$

Como ∂_1 é o operador nulo, segue que $Z_1(T) = \langle a, b, c \rangle$.

Consideremos a mudança de geradores de $\{a, b, c\}$ para $\{a, b, a + b - c\}$, a qual pode ser vista através da matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

cujos determinante é -1 . Dessa forma, $Z_1(T) = \langle a, b, a + b - c \rangle$.

Agora, $\partial_2(U) = \partial_2(L) = a + b - c$, ou seja, $B_1(T) = \langle a + b - c \rangle$.

Logo,

$$H_1(T) = \frac{Z_1(T)}{B_1(T)} = \frac{\langle a, b, a + b - c \rangle}{\langle a + b - c \rangle} = \langle a, b \rangle \approx \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.$$

Como não há 3 -simplexo, temos que $B_2(T) = \{0\}$. Resta calcular o núcleo de ∂_2 :

$$\begin{aligned} \partial_2(g_1U + g_2L) = 0 &\iff g_1(a + b - c) + g_2(a + b - c) = 0 \\ &\iff g_2 = -g_1 \\ &\iff g_1U - g_1L \in Z_2(T). \end{aligned}$$

Dessa forma, o $Z_2(T)$ é um grupo cíclico infinito gerado por $U - L$, ou seja,

$$H_2(T) = \frac{Z_2(T)}{B_2(T)} = \frac{\langle U - L \rangle}{\{0\}} \approx \mathbb{Z}.$$

Portanto,

$$H_n(T) \approx \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & \text{para } n = 1 \\ \mathbb{Z}, & \text{para } n = 0, 2 \\ 0, & \text{para } n \geq 3. \end{cases}$$

2.3 GRUPOS DE HOMOLOGIA SIMPLICIAL DO PLANO PROJETIVO

Considere a triangularização do plano projetivo $\mathbb{R}P^2$, constituída de dois 0-simplexos v e w , três 1-simplexos a , b e c , e dois 2-simplexos U e L , conforme Figura 2.7.

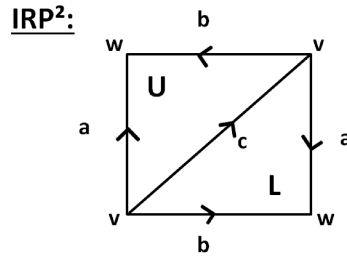


Figura 2.7: Triangularização do plano projetivo

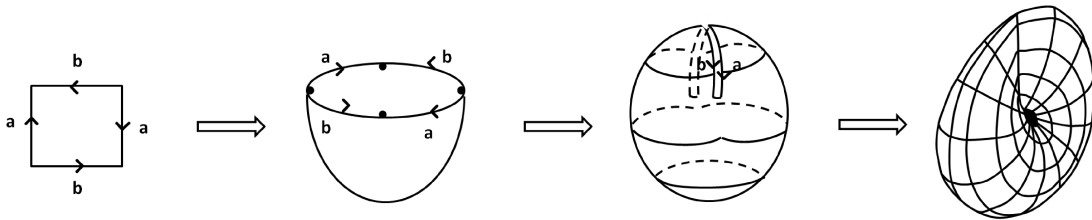


Figura 2.8: Transformação do plano projetivo

Na Figura 2.8, temos a transformação do retângulo orientado no plano projetivo. Novamente, foi adicionado o segmento c no retângulo para satisfazer o conceito de triangularização. A sequência de cadeia de $\mathbb{R}P^2$ é dada por:

$$0 \longrightarrow C_2(\mathbb{R}P^2) \longrightarrow C_1(\mathbb{R}P^2) \longrightarrow C_0(\mathbb{R}P^2) \longrightarrow 0,$$

a qual é equivalente a

$$0 \longrightarrow \langle U, L \rangle \xrightarrow{\partial_2} \langle a, b, c \rangle \xrightarrow{\partial_1} \langle v, w \rangle \xrightarrow{\partial_0} 0.$$

O operador ∂_0 é nulo, então $Z_0(\mathbb{R}P^2) = \langle v, w \rangle$.

Como $\partial_1(a) = \partial_1(b) = w - v$ e $\partial_1(c) = 0$, obtemos $B_0(\mathbb{R}P^2) = \langle w - v \rangle$.

Fazendo mudança de geradores $\{v, w\}$ para $\{v, w - v\}$, visualizada na matriz de determinante 1,

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

obtemos

$$H_0(\mathbb{R}P^2) = \frac{Z_0(\mathbb{R}P^2)}{B_0(\mathbb{R}P^2)} = \frac{\langle v, w - v \rangle}{\langle w - v \rangle} = \langle v \rangle \approx \mathbb{Z}.$$

Calculemos $Z_1(\mathbb{R}P^2)$:

$$\begin{aligned} \partial_1(g_1a + g_2b + g_3c) = 0 &\iff g_1\partial_1(a) + g_2\partial_1(b) + g_3\partial_1(c) = 0 \\ &\iff (g_1 + g_2) \cdot (w - v) = 0 \\ &\iff g_1 = -g_2 \\ &\iff Z_1(\mathbb{R}P^2) = \langle a - b, c \rangle. \end{aligned}$$

Considere a mudança de geradores de $\{a - b, c\}$ para $\{a - b + c, c\}$, representada na matriz de determinante 1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Desse modo, $Z_1(\mathbb{R}P^2) = \langle a - b + c, c \rangle$.

Resta calcular a imagem de ∂_2 .

Fazemos a mudança de geradores $\{U, L\}$ para $\{L, -U + L\}$, exibida na matriz de determinante 1:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Observe que podemos calcular o operador bordo ∂_2 em $C_2(\mathbb{R}P^2) = \langle L, -U + L \rangle$, ou seja, $\partial_2(L) = a - b + c$ e $\partial_2(-U + L) = -\partial_2(U) + \partial_2(L) = 2c$. Logo, $B_1(\mathbb{R}P^2) = \langle a - b + c, 2c \rangle$.

Assim,

$$H_1(\mathbb{R}P^2) = \frac{Z_1(\mathbb{R}P^2)}{B_1(\mathbb{R}P^2)} = \frac{\langle a - b + c, c \rangle}{\langle a - b + c, 2c \rangle} = \frac{\langle c \rangle}{\langle 2c \rangle} \approx \mathbb{Z}_2.$$

Como não há 3 - *simplexo*, temos que $B_2(\mathbb{R}P^2) = \{0\}$. Resta calcular o núcleo de ∂_2 :

$$\begin{aligned}
\partial_2(g_1U + g_2L) = 0 &\iff g_1(a - b - c) + g_2(a - b + c) = 0 \\
&\iff \begin{cases} (a - b)(g_1 + g_2) = 0 \\ c(g_2 - g_1) = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} g_2 - g_1 = 0 \\ g_2 + g_1 = 0 \end{cases} \quad (\text{pois } a - b \text{ e } c \text{ s\~ao geradores}) \\
&\iff g_1 = g_2 = 0.
\end{aligned}$$

Portanto, $Z_2(\mathbb{R}P^2) = \{0\}$.

Assim,

$$H_2(\mathbb{R}P^2) = \frac{Z_2(\mathbb{R}P^2)}{B_2(\mathbb{R}P^2)} = \frac{\{0\}}{\{0\}} = \{0\}.$$

Ent\~ao

$$H_n(\mathbb{R}P^2) \approx \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{para } n = 0 \\ \mathbb{Z}_2 & \text{para } n = 1 \\ 0 & \text{para } n \geq 2. \end{cases}$$

2.4 GRUPOS DE HOMOLOGIA SIMPLICIAL DO GARRAFA DE KLEIN

Considere K , a garrafa de Klein com a triangulariza\~ao composta por um 0-simplexo v , tr\~es 1-simplexos a , b e c , e dois 2-simplexos U e L , ilustrado na Figura 2.9.

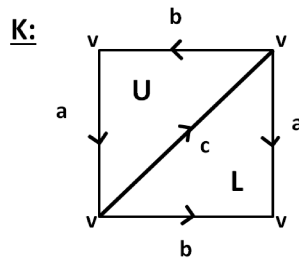


Figura 2.9: Triangulariza\~ao da garrafa de Klein

Na Figura 2.10, vemos a transforma\~ao do ret\~angulo orientando na garrafa de Klein. A seq\u00eancia de cadeia de K fica da seguinte forma:

$$0 \longrightarrow C_2(K) \longrightarrow C_1(K) \longrightarrow C_0(K) \longrightarrow 0,$$

equivalente a

$$0 \longrightarrow \langle U, L \rangle \xrightarrow{\partial_2} \langle a, b, c \rangle \xrightarrow{\partial_1} \langle v \rangle \xrightarrow{\partial_0} 0.$$

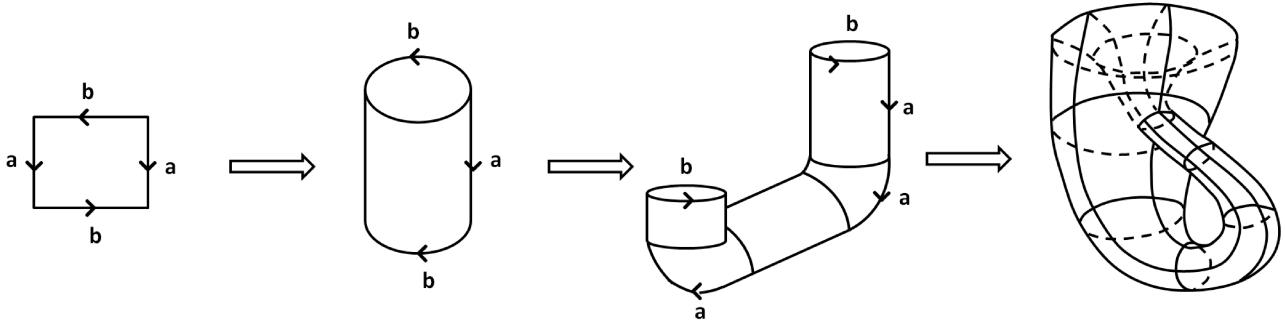


Figura 2.10: Transformação da garrafa de Klein

Temos que $Z_0(K) = \langle v \rangle$, uma vez que ∂_0 é o operador nulo.

Como a imagem do operador bordo ∂_1 é nula, temos

$$H_0(K) = \frac{Z_0(K)}{B_0(K)} = \frac{\langle v \rangle}{\{0\}} = \langle v \rangle \approx \mathbb{Z}.$$

Claramente, $Z_1(K) = \langle a, b, c \rangle$.

Considere a mudança de geradores $\{a, b, c\}$ para $\{a + b + c, b, c\}$, que pode ser visualizada na matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

cujo determinante é 1.

Dessa forma, $Z_1(K) = \langle a + b + c, b, c \rangle$.

Resta calcularmos a imagem do operador bordo ∂_2 . Observe que calculamos ∂_2 nos geradores de $C_2(K) = \langle U, L \rangle$.

Fazendo a mudança de geradores $\{U, L\}$ para $\{U, U - L\}$, representada na matriz de determinante -1 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dessa forma, calculamos o operador bordo em $C_2(K) = \langle U, U - L \rangle$, ou seja, $\partial(U) = a + b + c$ e $\partial(U - L) = 2b$.

Assim,

$$H_1(K) = \frac{Z_1(K)}{B_1(K)} = \frac{\langle a + b + c, b, c \rangle}{\langle a + b + c, 2b \rangle} = \frac{\langle b, c \rangle}{\langle 2b \rangle} = \langle c \rangle \oplus \frac{\langle b \rangle}{2\langle b \rangle} \approx \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2.$$

Finalmente, como o operador bordo ∂_3 é nulo, resta calcularmos o núcleo do operador bordo ∂_2 :

$$\begin{aligned}
\partial_2(g_1U + g_2L) = 0 &\iff g_1(a + b + c) + g_2(a - b + c) = 0 \\
&\iff \begin{cases} (a + c)(g_1 + g_2) = 0 \\ b(g_1 - g_2) = 0 \end{cases} \quad (\text{pois } a + c \text{ e } b \text{ s\~ao geradores}) \\
&\iff \begin{cases} g_1 - g_2 = 0 \\ g_2 + g_1 = 0 \end{cases} \\
&\iff g_1 = g_2 = 0 \\
&\iff Z_2(K) = \{0\}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$H_2(K) = \frac{Z_2(K)}{B_2(K)} = \frac{\{0\}}{\{0\}} = \{0\}.$$

Portanto,

$$H_n(K) \approx \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{para } n = 0 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 & \text{para } n = 1 \\ 0 & \text{para } n \geq 2. \end{cases}$$

2.5 IDEIA GEOMÉTRICA DA HOMOLOGIA

Geometricamente, a estrutura do grupo $H_0(X)$ é a soma das componentes conexas por caminho desse espaço, como pode ser verificado no seguinte teorema.

Teorema 3. *Seja K um complexo com r componentes conexas por caminhos, então $H_0(K)$ é isomorfo à soma direta das r cópias do grupo dos inteiros $\mathbb{Z}$.*

Demonstração: Seja K' uma componente conexa por caminhos de K e $\langle a' \rangle$ um 0-simplexo em K' . Dado qualquer 0-simplexo $\langle b \rangle$ em K' , existe uma sequência de 1-simplexos

$$\langle ba_0 \rangle, \langle a_0a_1 \rangle, \langle a_1a_2 \rangle, \dots, \langle a_{p-1}a_p \rangle$$

de b para a' tal que cada dois 1-simplexos sucessivos tenham um vértice comum. Seja g um inteiro, definimos uma 1-cadeia c_1 na sequência de 1-simplexo atribuindo g ou $-g$ a cada simplexo (dependendo da orientação), tal que $\partial(c_1)$ é $g \cdot \langle b \rangle - g \cdot \langle a' \rangle$ ou $g \cdot \langle b \rangle + g \cdot \langle a' \rangle$. Assim, qualquer 0-cadeia elementar $g \cdot \langle b \rangle$ é homólogo a uma das 0-cadeias $g \cdot \langle a' \rangle$ ou $-g \cdot \langle a' \rangle$. Dessa forma, qualquer 0-cadeia em K' é homóloga a uma 0-cadeia elementar $h \cdot \langle a' \rangle$ onde h é algum inteiro. Aplicando este resultado a cada componente conexa $K_1, \dots, K_r$ de K , existe um vértice a^i de K_i tal que qualquer 0-ciclo em K_i é homólogo a uma 0-cadeia da forma $h_i \cdot \langle a^i \rangle$, onde h_i

é um inteiro. Então, dado qualquer 0-ciclo c_0 em K , existem inteiros $h_1, \dots, h_r$ tais que

$$c_0 \sim \sum_{i=1}^r h_i \cdot \langle a^i \rangle.$$

Suponha que duas dessas 0-cadeias $\sum h_i \cdot \langle a^i \rangle$ e $\sum g_i \cdot \langle a^i \rangle$ representam a mesma classe de homologia. Então

$$\sum (g_i - h_i) \cdot \langle a^i \rangle = \partial \langle c_1 \rangle$$

para alguma 1-cadeia c_1 . Uma vez que a^i e a^j pertencem a diferentes componentes conexas quando $i \neq j$, então a equação anterior é impossível a menos que $g_i = h_i$ para cada i . Assim, cada classe de homologia $[c_0]$ em $H_0(K)$ tem um representante único da forma $\sum h_i \cdot \langle a^i \rangle$. A função

$$\sum h_i \cdot \langle a^i \rangle g \longrightarrow (h_1, \dots, h_r)$$

é o isomorfismo exigido entre $H_0(K)$ e a soma direta de r cópias de $\mathbb{Z}$. $\square$

Exemplo 2. A esfera é um espaço conexo por caminhos, logo $H_0(S^2) = \mathbb{Z}$.

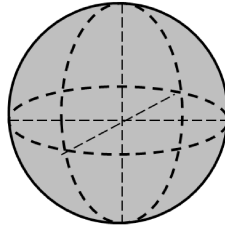


Figura 2.11: Esfera

Exemplo 3. Considere o espaço X como sendo a união disjunta de três esferas, então segue que $H_0(X) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

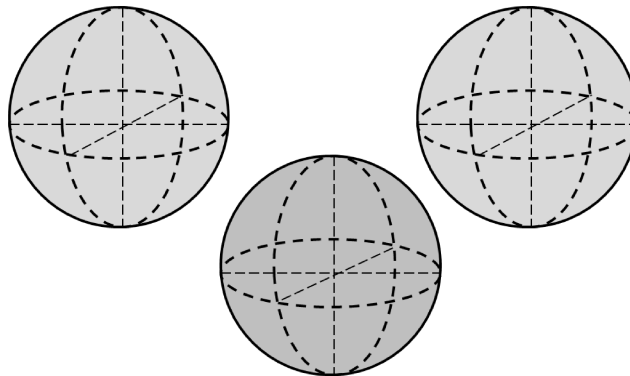


Figura 2.12: Espaço X

Já a estrutura dos grupos $H_n(X)$, com $n \geq 1$, fornece informação sobre o número e os tipos de buracos n -dimensionais em X . Por exemplo, seja Y o espaço formado de quatro caminhos δ_1 , δ_2 , δ_3 e δ_4 ligando os pontos A e B , conforme mostra a figura. Podemos obter outros caminhos

em X fazendo justaposição dos caminhos $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ e δ_4 com os caminhos inversos $-\delta_1, -\delta_2, -\delta_3$ e $-\delta_4$.

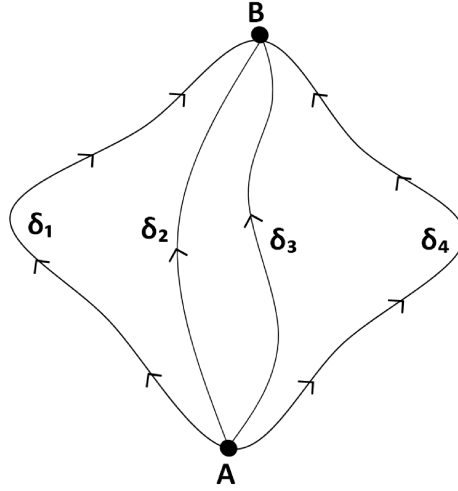


Figura 2.13: Espaço Y

Um caminho em Y é denominado 1-simplexo. Em especial, quando o caminho sai de um vértice e no final volta no mesmo vértice, chamamos de 1-ciclo. Podemos visualizar os 1-ciclos, como os caminhos que fecham um buraco ou são bordo de um subespaço de dimensão 2, que é um 2-simplexo.

Por exemplo, $\delta_1 - \delta_2$ e $\delta_2 - \delta_3$ são 1-ciclos. Todo 1-ciclo que não é bordo de um 2-simplexo, fornece um elemento não nulo em homologia. Isto significa que o 1-ciclo circunda um buraco 1-dimensional do espaço.

No figura, temos três 1-ciclos que são geradores de $H_1(Y)$. Ou seja,

$$H_1(Y) = \langle \delta_1 - \delta_2, \delta_2 - \delta_3, \delta_3 - \delta_4 \rangle \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.$$

Então, $H_1(Y)$ tem 3 geradores e Y tem 3 buracos 1-dimensionais.

Como não há buracos de dimensão maior do que 1, temos que

$$H_n(Y) = \{0\}, n \geq 2.$$

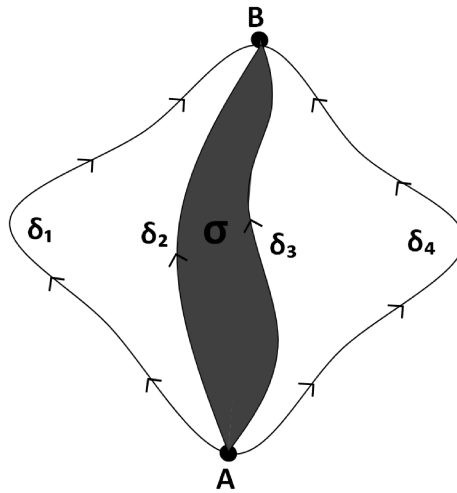
Considere agora o espaço W como na figura 2.14.

Neste espaço, temos dois 1-ciclos, $\delta_1 - \delta_2$ e $\delta_3 - \delta_4$ que não são bordos de 2-simplexos e assim fornecem os geradores de $H_1(W)$. O 1-ciclo $\delta_2 - \delta_3$ é bordo do 2-simplexo σ . Assim, esse ciclo fornece a classe nula em $H_1(W)$ e temos

$$H_1(W) = \langle \delta_1 - \delta_2, \delta_3 - \delta_4 \rangle \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.$$

Como W não tem buracos de dimensões maiores do que 1, temos que

$$H_n(W) = \{0\}, n \geq 2.$$

Figura 2.14: Espaço W

Seguindo o raciocínio do exemplo anterior, podemos calcular os grupos de homologia de outros espaços, uma vez que os mesmos são os buracos dos espaços nas diferentes dimensões.

A seguir, apresentamos alguns exemplos de cálculos de grupos de homologia, considerando a ideia geométrica abordada.

Exemplo 4. Observe que no toro há dois buracos 1-dimensionais, determinados por a e b , e um 2-dimensional que seria a parte oca do toro.

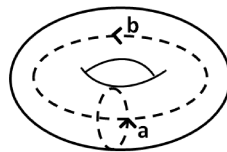
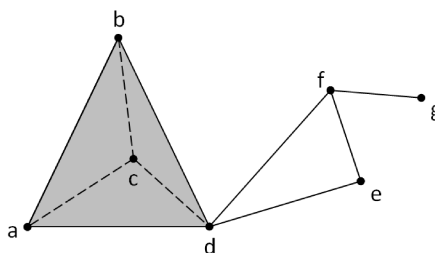


Figura 2.15: Toro

Desse modo, o grupo de homologia do toro é $H_1(T) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, $H_2(T) = \mathbb{Z}$ e $H_k(T) = \{0\}$ para $k > 2$.

Exemplo 5. Considere a configuração mostrada na figura 2.16. O interior do tetraedro e o interior do triângulo $\langle def \rangle$ não são incluídos. Esse espaço é um poliedro K .

Figura 2.16: Poliedro K

Observe que

$$\begin{aligned}\partial_2(\langle abc \rangle + \langle acd \rangle) &= \langle ab \rangle + \langle bc \rangle + \langle ca \rangle + \langle ac \rangle + \langle cd \rangle + \langle da \rangle \\ &= \langle ab \rangle + \langle bc \rangle + \langle cd \rangle + \langle da \rangle.\end{aligned}$$

Vamos verificar que $\partial_1 \circ \partial_2$ é um operador trivial.

$$\partial_1(\langle ab \rangle + \langle bc \rangle + \langle cd \rangle + \langle da \rangle) = \langle b \rangle - \langle a \rangle + \langle c \rangle - \langle b \rangle + \langle d \rangle - \langle c \rangle + \langle a \rangle - \langle d \rangle = 0$$

Assim, todo bordo é um ciclo.

Intuitivamente, um ciclo é uma cadeia cujos termos fecham um buraco ou formam um bordo de uma cadeia de dimensão maior. Nós investigamos os “buracos” no poliedro para determinar os ciclos que não são bordos.

Considere a 2-cadeia $\langle abc \rangle + \langle bcd \rangle + \langle acd \rangle + \langle abd \rangle$, o bordo da 2-cadeia é:

$$\partial_2(\langle abc \rangle + \langle bcd \rangle + \langle acd \rangle + \langle abd \rangle) = 0.$$

Logo, é um 2-ciclo e não é um bordo já que o interior do tetraedro não está incluído.

Considere $z = \langle df \rangle + \langle fe \rangle + \langle de \rangle$,

$$\partial_1(z) = \langle f \rangle - \langle d \rangle + \langle e \rangle - \langle f \rangle + \langle e \rangle - \langle d \rangle = 0.$$

Portanto, z é 1-ciclo e não é bordo.

E qualquer outro 1-ciclo é um bordo ou a soma de z e um bordo. Assim qualquer 1-ciclo é homólogo a zero ou homólogo ao ciclo fundamental 1-ciclo z . Isso indica a presença de 2 buracos no poliedro, um limitado por 2-ciclo e outro pelo 1-ciclo z . Além disso, K possui uma única componente conexa. Portanto, $H_i(K) = \mathbb{Z}, i = 0, 1, 2$.

Exemplo 6. Seja M a triangulação da faixa de Möbius mostrada na figura 2.17 com a orientação $a_0 < a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$.

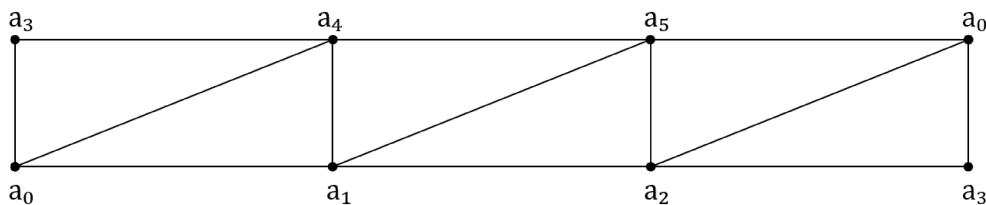


Figura 2.17: Triangulação da faixa de Möbius

Não há 3-simplexos em M , então $B_2(M) = \{0\}$. Suponha que

$$w = g_0 \langle a_0 a_3 a_4 \rangle + g_1 \langle a_0 a_1 a_4 \rangle + g_2 \langle a_1 a_4 a_5 \rangle + g_3 \langle a_1 a_2 a_5 \rangle + g_4 \langle a_0 a_2 a_5 \rangle + g_5 \langle a_0 a_2 a_3 \rangle$$

é um 2-ciclo.

Calculando o bordo de w :

$$\begin{aligned}\partial_2(w) = & (g_0 + g_5)\langle a_0a_3 \rangle + g_0\langle a_3a_4 \rangle + (-g_0 - g_1)\langle a_4a_0 \rangle + g_1\langle a_0a_1 \rangle + (g_1 + g_2)\langle a_1a_4 \rangle + (-g_2 - g_3)\langle a_1a_5 \rangle \\ & + g_2\langle a_4a_5 \rangle + g_3\langle a_1a_2 \rangle + (g_3 + g_4)\langle a_2a_5 \rangle + (g_4 + g_5)\langle a_0a_2 \rangle - g_4\langle a_0a_5 \rangle - g_5\langle a_3a_0 \rangle.\end{aligned}$$

Para w ser 2-ciclo, temos que $\partial_2(w) = 0$ se, e somente se, $g_0 = g_1 = g_2 = g_3 = g_4 = g_5 = 0$.

Assim, $Z_2(M) = \{0\}$. Portanto, $H_2(M) = \frac{Z_2(M)}{B_2(M)} = \{0\}$.

Considere as seguintes 1-cadeias: $z = 1\langle a_0a_1 \rangle + 1\langle a_1a_2 \rangle + 1\langle a_2a_3 \rangle - 1\langle a_0a_3 \rangle$ e $z' = 1\langle a_0a_3 \rangle + 1\langle a_3a_4 \rangle + 1\langle a_4a_5 \rangle - 1\langle a_0a_5 \rangle$.

Calculando os bordos, temos que z e z' são 1-ciclos. Usando a intuição, também vemos que são 1-ciclos, pois z e z' fazem um ciclo completo começam e terminam em a_0 .

Entretanto, $z - z'$ deve ser fronteira de alguma 2-cadeia.

Com um pouco de cálculo, descobrimos que

$$z - z' = \partial_2(1\langle a_0a_1a_4 \rangle + 1\langle a_1a_2a_5 \rangle + 1\langle a_0a_2a_3 \rangle - 1\langle a_0a_2a_5 \rangle - 1\langle a_1a_4a_5 \rangle - 1\langle a_0a_3a_4 \rangle)$$

Logo, $z \sim z'$.

Com um cálculo similar verificamos, que qualquer 1-ciclo é homólogo a um múltiplo de z .

Portanto, $H_1(M) = \{[gz] : g \in \mathbb{Z}\}$, então $H_1(M) \cong \mathbb{Z}$. Isso indica que o poliedro $|M|$ tem um buraco limitado por 1-simplexos.

Para determinar $H_0(M)$, observe que qualquer 0-cadeia $1\langle a_i \rangle$ e $1\langle a_j \rangle$ (i, j variando de 0 a 5) são homólogos. Por exemplo, $\partial_1(1\langle a_0a_4 \rangle + 1\langle a_4a_5 \rangle) = 1\langle a_5 \rangle - 1\langle a_0 \rangle$. Logo, $H_0(M) = \{[g\langle a_0 \rangle] : g \in \mathbb{Z}\}$, então $H_0(M) \cong \mathbb{Z}$. Note que a homologia no nível zero indica que $|M|$ tem apenas uma componente conexa por caminho.

3. GRUPO FUNDAMENTAL

Henri Poincaré definiu o grupo fundamental em 1895 em seu artigo *Analysis situs*, esse conceito surgiu na teoria das superfícies de Riemann, uma obra dos autores Bernhard Riemann, Henri Poincaré e Felix Klein. Na topologia algébrica, o grupo fundamental é um grupo associado a qualquer espaço topológico que fornece uma maneira de determinar quando dois caminhos, começando e terminando em um mesmo ponto, podem ser continuamente deformados um no outro. Geometricamente, esse grupo registra informações sobre os “buracos” de dimensão um do espaço topológico. As principais referências desse capítulo são [2] e [5].

3.1 HOMOTOPIA

Definição 35. *Sejam X, Y espaços topológicos e $I = [0, 1]$. Duas aplicações contínuas $f, g: X \rightarrow Y$ são homotópicas quando existe uma aplicação contínua $H: X \times I \rightarrow Y$ tal que*

$$H(x, 0) = f(x) \quad \text{e} \quad H(x, 1) = g(x),$$

para todo $x \in X$.

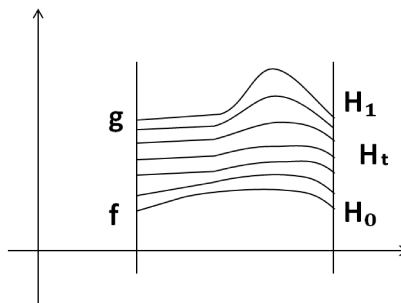


Figura 3.1: Aplicações homotópicas

A aplicação H é dita uma homotopia entre f e g e, representada por $f \simeq g$. Esta relação chamada de relação de homotopia é uma relação de equivalência, ou seja, cumpre com as propriedades de reflexividade, simetria e transitividade.

- Reflexiva: Para toda $f: X \rightarrow Y$ contínua, a aplicação $H: X \times I \rightarrow Y$ dada por $H(x, t) = f(x)$, é uma homotopia entre f e f .
- Simétrica: Seja $H: X \times I \rightarrow Y$ uma homotopia entre f e g . Definindo $K: X \times I \rightarrow Y$ por $K(x, t) = H(x, 1 - t)$ obtemos uma homotopia entre g e f .

- Transitiva: Sejam $H : X \times I \rightarrow Y$ uma homotopia entre f e g e a aplicação $K : X \times I \rightarrow Y$ uma homotopia entre g e h , então definimos $L : X \times I \rightarrow Y$ como

$$L(x, t) = \begin{cases} H(x, 2t) & \text{se } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ K(x, 2t - 1) & \text{se } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Então a aplicação L é uma homotopia entre f e h .

Se $f \simeq g$ e g é uma aplicação constante, dizemos que f é homotopicamente nula.

As classes de equivalência segundo a relação de homotopia são chamadas classes de homotopia. Indicaremos a classe de homotopia de uma aplicação contínua $f : X \rightarrow Y$ pelo símbolo $[f]$.

Exemplo 7. Seja $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ a esfera unitária n -dimensional. Dadas duas aplicações contínuas $f, g : X \rightarrow S^n$, se $f(x) \neq -g(x)$ para todo $x \in X$, isto é, $f(x)$ e $g(x)$ nunca são pontos antípodas, então $f \simeq g$.

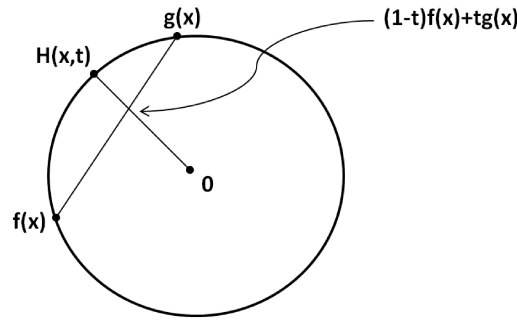


Figura 3.2: Homotopia entre f e g

De fato, nestas condições, vale $(1 - t)f(x) + tg(x) \neq 0$ para todo $t \in I$ e todo $x \in X$, pois $(1 - t)f(x) + tg(x) = 0$, temos $t = \frac{1}{2}$ e $f(x) = -g(x)$. Mas, por hipótese, $f(x) \neq -g(x)$, para todo $x \in X$.

Logo, obtemos uma homotopia $H : X \times I \rightarrow S^n$, entre f e g , definindo

$$H(x, t) = \frac{(1 - t)f(x) + tg(x)}{|(1 - t)f(x) + tg(x)|}.$$

Na figura 3.2, quando t varia entre 0 e 1, $H(x, t)$ descreve o arco de círculo máximo que liga $f(x)$ e $g(x)$.

Definição 36. Um caminho num espaço topológico X é uma aplicação contínua $\alpha : [x_0, x_1] \rightarrow X$, onde $[x_0, x_1]$ é um intervalo fechado em $\mathbb{R}$. Se $\alpha(x_0) = x$ e $\alpha(x_1) = y$, então α é um caminho de x para y e x, y são denominados ponto inicial e final, respectivamente.

Definição 37. Definimos o caminho inverso de $\alpha : I \rightarrow X$ como o caminho $\alpha^{-1} : I \rightarrow X$, dado por $\alpha^{-1}(s) = \alpha(1 - s)$, $0 \leq s \leq 1$.

Definição 38 (Homotopia por caminhos). *Dois caminhos $a, b: I \rightarrow X$ são ditos caminhos homotópicos se possuem as mesmas extremidades, isto é, $a(0) = b(0) = x_0$ e $a(1) = b(1) = x_1$, e se existe uma aplicação contínua $H: I \times I \rightarrow X$ tal que, quaisquer que sejam $s, t \in I$, temos*

$$H(s, 0) = a(s); \quad H(s, 1) = b(s), \quad H(0, t) = x_0; \quad H(1, t) = x_1.$$

A aplicação contínua H é dita uma homotopia de caminhos entre a e b .

Se a e b são caminhos homotópicos, denotamos por $a \cong b$.

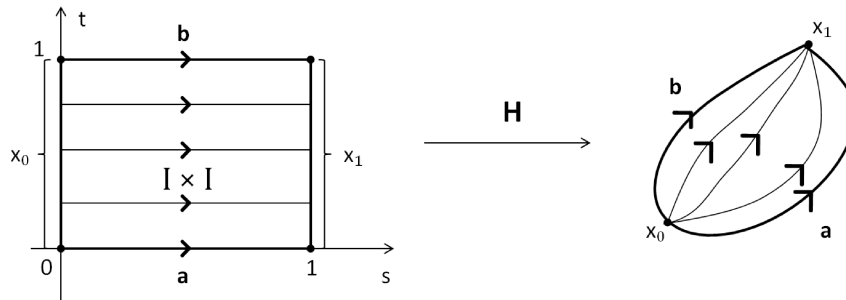


Figura 3.3: Caminhos homotópicos

Geometricamente, dois caminhos fechados em um espaço são homotópicos, desde que cada um deles pode ser “continuamente deformado no outro”. Na figura 3.3, por exemplo, os caminhos C_2 e C_3 são homotópicos e C_1 é homotópico a um caminho constante. O caminho C_1 não é homotópico à C_2 ou C_3 , pois nem C_2 nem o C_3 pode ser deformados através do orifício que eles encerram.

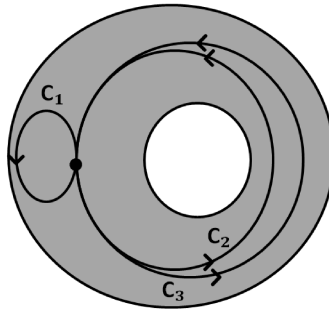


Figura 3.4: Caminhos

Indicaremos por $\alpha = [a]$ a classe de homotopia do caminho $\alpha: I \rightarrow X$, ou seja, o conjunto de todos os caminhos em X que possuem as mesmas extremidades que α e que são homotópicos a α com extremos fixos durante a homotopia.

Lema 1. [O lema da continuidade] *Seja X um espaço topológico com subconjuntos fechados A e B tal que $A \cup B = X$. Sejam $f: A \rightarrow Y$ e $g: B \rightarrow Y$ aplicações contínuas para um espaço Y tal que $f(x) = g(x)$ para cada x em $A \cap B$. Então, a aplicação $h: X \rightarrow Y$ definida por*

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in A \\ g(x) & \text{se } x \in B \end{cases}$$

é contínua.

Demonstração: Seja C um subconjunto fechado de Y . Temos que $h^{-1}(C) = f^{-1}(C) \cup g^{-1}(C)$. Como f é contínua, $f^{-1}(C)$ é fechado em A e, assim, fechado em X . Analogamente, $g^{-1}(C)$ é fechado em B e, portanto, fechado em X . A união $h^{-1}(C)$ é, então, fechado em X . $\square$

Definição 39. Sejam $a, b: [s_0, s_1] \rightarrow X$ caminhos em X tais que $a(s_1) = b(s_0)$. Definimos o produto $a * b$ de a e b como sendo o caminho que consiste em percorrer primeiro a e depois b .



Figura 3.5: Produto de caminhos

Tal caminho é dado pela aplicação $a * b: I \rightarrow X$, definida por

$$a * b(s) = \begin{cases} a(2s - s_0) & \text{se } s_0 \leq s \leq \frac{s_0 + s_1}{2} \\ b(2s - s_1) & \text{se } \frac{s_0 + s_1}{2} \leq s \leq s_1. \end{cases}$$

Esta aplicação $a * b$ está bem definida. Além disso, pelo lema da continuidade 1, esta aplicação é contínua.

Considere os caminhos $a, b, s: I \rightarrow X$, os quais terminam onde o outro começa. Seja $\alpha = [a]$, $\beta = [b]$ e $\gamma = [c]$ as respectivas classes de homotopia, onde $x = \alpha(0)$ o ponto inicial de α , $y = \alpha(1)$ o ponto final, e_x, e_y são os caminhos constantes desses pontos e $\varepsilon_x = [e_x]$, $\varepsilon_y = [e_y]$ as classes de homotopia dessas constantes. Nessas condições, temos que a operação $*$ satisfaz as seguintes propriedades:

1. Associatividade: $\alpha * (\beta * \gamma) = (\alpha * \beta) * \gamma$;
2. Identidade à direita e à esquerda: $e_x * \alpha = \alpha = \alpha * e_y$.
3. $\alpha^{-1} * \alpha = e_y$.
4. $\alpha * \alpha^{-1} = e_x$.

A demonstração destas propriedades se encontram em [5], proposição 3.

3.2 DEFINIÇÃO DO GRUPO FUNDAMENTAL

Definição 40. Um laço é um caminho que tem ponto inicial e final iguais.

O conjunto das classes de homotopia de caminhos nem sempre forma um grupo com a operação $*$, uma vez que o produto de duas classes de homotopia de caminhos nem sempre está definido. Tal impossibilidade é resolvida fixando um ponto $x_0 \in X$ e considerando o conjunto das classes de homotopia dos laços com ponto base x_0 , garantindo assim que o produto $\alpha * \beta$ esteja bem definido. Este grupo é chamado grupo fundamental de X .

Definição 41 (Grupo fundamental). *Considere a família de laços em X com o ponto de base x_0 . O conjunto das classes de homotopia é denotado por $\pi_1(X, x_0)$. Se $[a]$ e $[b]$ pertencerem a $\pi_1(X, x_0)$, então o produto $[a] \circ [b]$ é definido da seguinte maneira:*

$$[a] \circ [b] = [a * b].$$

Assim, o produto de duas classes de homotopia é a classe determinada pelo caminho produto de seus elementos representativos. Esta operação, está bem definida. E $\pi_1(X, x_0)$ é chamado o grupo fundamental de X em x_0 .

Proposição 7. *Se x_0 e x_1 pertencem à mesma componente conexa por caminhos de X , então $\pi_1(X, x_0)$ e $\pi_1(X, x_1)$ são isomorfos. Mais precisamente, cada classe de homotopia γ de caminhos que ligam x_0 a x_1 induz um isomorfismo $\bar{\gamma}: \pi_1(X, x_1) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$, dado por $\bar{\gamma}(\alpha) = \gamma * \alpha * \gamma^{-1}$.*

Demonstração: Seja γ uma classe de homotopia de caminhos que ligam x_0 a x_1 . Se $\alpha \in \pi_1(X, x_1)$, então $\gamma * \alpha * \gamma^{-1} \in \pi_1(X, x_0)$. Mostremos que, para $\alpha, \beta \in \pi_1(X, x_1)$, $\bar{\gamma}$ é um homomorfismo.

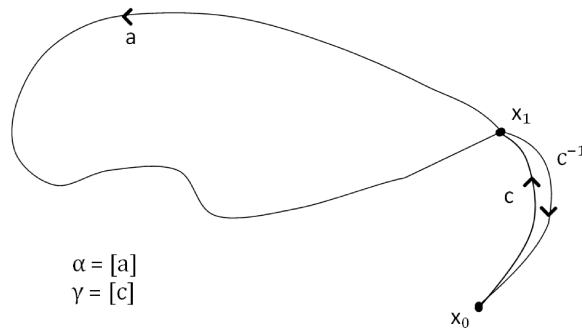


Figura 3.6: Isomorfismo

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}(\alpha) * \bar{\gamma}(\beta) &= (\gamma * \alpha * \gamma^{-1}) * (\gamma * \beta * \gamma^{-1}) \\ &= \gamma * (\alpha * \beta) * \gamma^{-1} \\ &= \bar{\gamma}(\alpha * \beta). \end{aligned}$$

Para mostrar que $\bar{\gamma}$ é um isomorfismo, devemos provar que $(\bar{\gamma})^{-1}$ é o inverso de $\bar{\gamma}$. De fato, para cada $\delta \in \pi_1(X, x_0)$, temos

$$\begin{aligned} (\bar{\gamma})^{-1}(\delta) &= \gamma^{-1} * \delta * (\gamma^{-1})^{-1} = \gamma^{-1} * \delta * \gamma, \\ \bar{\gamma}((\bar{\gamma})^{-1}(\delta)) &= \gamma * (\gamma^{-1} * \delta * \gamma) * \gamma^{-1} = \delta. \end{aligned}$$

Analogamente, mostra-se que $(\bar{\gamma})^{-1}(\bar{\gamma}(\alpha)) = \alpha$, para cada $\alpha \in \pi_1(X, x_1)$. □

Corolário 1. *Se X é conexo por caminhos, então, para quaisquer pontos base $x_0, x_1 \in X$, os grupos fundamentais $\pi_1(X, x_0)$ e $\pi_1(X, x_1)$ são isomorfos.*

Proposição 8. *O grupo fundamental da S^1 é isomorfo a $\mathbb{Z}$.*

Demonstração: [2], teorema 4.7. □

Proposição 9. *Sejam X e Y espaços topológicos, com $x_0 \in X$ e $y_0 \in Y$, então $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \oplus \pi_1(Y, y_0)$.*

Demonstração: [2], teorema 4.9. □

Exemplo 8. *Como o toro T é isomorfo a $S^1 \times S^1$, obtemos o grupo fundamental do toro através das proposições 8 e 9:*

$$\pi_1(T) \cong \pi_1(S^1) \times \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

O cálculo do grupo fundamental não é simples e necessita de ferramentas, como o Teorema de Van-Kampen, o qual não abordaremos nesse trabalho. Entretanto, na próxima seção veremos a ideia geométrica do grupo fundamental, o que possibilitará alguns exemplos.

3.3 IDEIA GEOMÉTRICA DO GRUPO FUNDAMENTAL

Como foi feito anteriormente, para uma melhor compreensão da ideia do grupo fundamental apresentamos a interpretação geométrica, uma vez que há necessidade de muitos pré-requisitos algébricos para o entendimento da definição do mesmo.

Geometricamente, o grupo fundamental π_1 de um espaço X pode ser definido de modo que seus elementos são “laços” em X , onde $x_0 \in X$ é o ponto de partida e o ponto de chegada de tais laços.

Os laços determinam um mesmo elemento no grupo fundamental se um pode ser deformado continuamente no outro, dentro do espaço X .

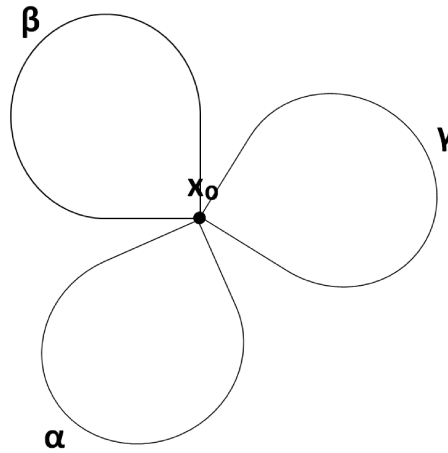
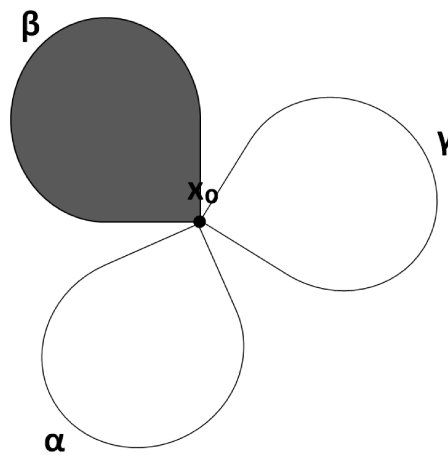
Dizemos que um espaço é simplesmente conexo, se todo laço pode ser deformado continuamente num ponto.

O grupo fundamental mede o quão longe um espaço está de ser simplesmente conexo. Isto é, quão longe um espaço está de que todo laço em X determine um mesmo elemento do grupo, o laço trivial, ou seja, o ponto x_0 .

Se um laço não pode ser deformado continuamente em um ponto é porque há um buraco no seu interior e π_1 mede o comportamento desses buracos, que chamamos de buracos 1-dimensionais.

Por exemplo, seja o espaço Z composto por α , β e γ , três curvas com ponto x_0 em comum, e U o espaço composto por essas três curvas, mas neste caso a curva β está preenchida como na figura.

Considere ν_1 , ν_2 e ν_3 os laços que percorrem uma única vez as curvas α , β e γ , respectivamente. Considere também que $[\nu_1] = \mu_1$ e $[\nu_2] = \mu_2$ e $[\nu_3] = \mu_3$, onde $[\nu_1]$, $[\nu_2]$ e $[\nu_3]$ são as

Figura 3.7: Espaço Z Figura 3.8: Espaço U

classes de ν_1 , ν_2 e ν_3 , respectivamente. Cada produto de potências de μ_1 , μ_2 e μ_3 fornece um elemento distinto de $\pi_1(Z)$.

Por exemplo, em Z , temos que o produto $\nu_1^2 \nu_2^4 \nu_3 \nu_1^{-3} \nu_2 \nu_3^2$ é o laço que dá duas voltas ao redor de α , quatro voltas ao redor de β , uma volta ao redor de γ , três voltas ao redor de α no sentido oposto, uma volta ao redor de β e duas voltas ao redor de γ . Temos então que $\mu_1^2 \mu_2^4 \mu_3 \mu_1^{-3} \mu_2 \mu_3^2 = [\nu_1^2 \nu_2^4 \nu_3 \nu_1^{-3} \nu_2 \nu_3^2]$.

O conjunto de todas as sequências como esta, consistindo de potências de μ_1 , μ_2 e μ_3 forma um grupo não abeliano, denotado por $\mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ e chamado de grupo livre com três geradores μ_1 , μ_2 e μ_3 .

Note que o número de geradores do grupo fundamental está relacionado ao número de buracos 1-dimensionais de Z .

Já em U , como o β está preenchido, ele pode ser deformado continuamente no ponto x_0 , ou seja, o laço trivial. Logo, o grupo $\pi_1(U)$ é gerado pelas classes da curva α e γ , ou seja, $\pi_1(U) \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$.

Exemplo 9. Se X é um espaço com um único ponto, então o grupo fundamental de X é trivial.

Exemplo 10. Se $X = \mathbb{R}^n, n \geq 1$, então o grupo fundamental de X é trivial, uma vez que X pode ser deformado continuamente no laço trivial.

Exemplo 11. Se $X = S^n, n \geq 2$, então o grupo fundamental de X é trivial, uma vez que X pode ser deformado continuamente no laço trivial.

Exemplo 12. Se X é a união de duas circunferências tangentes, então o grupo fundamental de X é $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$, uma vez o número de buracos 1-dimensionais de X é dois.

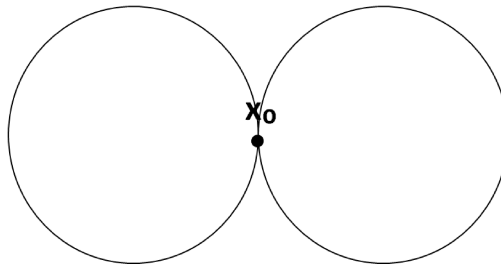


Figura 3.9: Circunferências tangentes

4. RELAÇÃO ENTRE HOMOLOGIA E GRUPO FUNDAMENTAL

Pelo que foi exposto nos capítulos anteriores, é natural perguntar-se sobre a existência de uma relação entre o grupo fundamental e a homologia no nível 1, uma vez que ambos estão relacionados com os buracos 1-dimensionais do espaço topológico. Neste capítulo expomos o Teorema de Hurewicz, que responde essa pergunta. As principais referências para esse capítulo são [1] e [3].

Teorema 4. (*Teorema de Hurewicz*) *Ao considerar laços como 1-ciclo simplicial, obtemos um homomorfismo*

$$h: \pi_1(X, x_0) \longrightarrow H_1(X).$$

Se X for conexo por caminho, então h é sobrejetor e tem por núcleo o subgrupo comutador de $\pi_1(X)$, assim h induz um isomorfismo da abelianização de $\pi_1(X)$ em $H_1(X)$.

Demonstração: Para a prova é necessário verificar as seguintes condições:

- i) h está bem definido;
- ii) h é um homomorfismo;
- iii) h é sobrejetor e o núcleo de h o subgrupo comutador de $\pi_1(X)$.

Nessa demonstração a notação $f \simeq g$ é a relação de homotopia entre os laços f e g com ponto base x_0 . Considerando f e g como cadeias, $f \sim g$ é a notação para f é homólogo a g , isto é, $f - g$ é o bordo de alguma 2-cadeia.

Note que:

1. Se f é um caminho constante, então $f \sim 0$, ou seja, f é um ciclo. De fato, como a homologia no nível um de um ponto é zero, f deve então ser um bordo. Na figura 4.1, vemos explicitamente que f é o bordo de um 2-simplexo constante σ , com a mesma imagem que f , já que

$$\partial\sigma = \sigma[v_1, v_2] - \sigma[v_0, v_2] + \sigma[v_0, v_1] = f - f + f = f$$

2. Se $f \simeq g$ então $f \sim g$. Para ver isso, considere uma homotopia $F: I \times I \longrightarrow X$ de f para g (figura 4.1). Isto produz um par de 2-simplexos: σ_1 e σ_2 em X como mostrado na figura 4.1. Assim

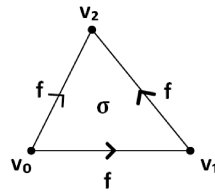
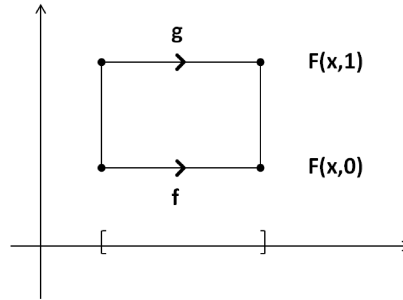
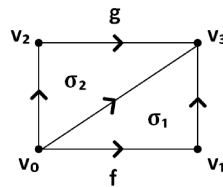
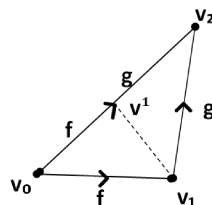
Figura 4.1: f como bordo de um 2-simplexoFigura 4.2: Homotopia F 

Figura 4.3: Par de simplexos

$$\partial(\sigma_1 - \sigma_2) = [v_0, v_1] + [v_1, v_3] + [v_0, v_3] - [v_2, v_3] - [v_0, v_2] - [v_0, v_3] = f + [v_1, v_3] - g - [v_0, v_2] = f - g,$$

pois $[v_1, v_3]$ e $[v_0, v_2]$ são caminhos constantes e pelo item 1) são homólogos a zero. Logo, $f - g$ é um bordo, ou seja, $f \sim g$.

3. Considere $f * g$ o produto dos caminhos f e g . Temos que $f * g \sim f + g$. Seja v^1 ponto médio de $[v_0, v_2]$, como na figura. Segue que

Figura 4.4: Imagem do produto de caminhos pela h

$$\partial\sigma = g - f * g + f$$

4. $\bar{f} \sim -f$, onde $\bar{f}$ é o caminho inverso de f . Temos que

$$f + \bar{f} \sim f * \bar{f} \sim 0,$$

consequência dos itens anteriores.

Após essas observações, prosseguiremos com a demonstração do teorema:

i) h está bem definido;

Note que se $f = g$, segue que $f \simeq g$ e pelo item 2, obtemos $f \sim g$.

ii) h é um homomorfismo;

De fato,

$$h[f * g] = f * g \sim f + g = h(f) + h(g),$$

consequência do item (3).

iii) h é sobrejetor e o núcleo de h o subgrupo comutador de $\pi_1(X)$.

Sobrejetor: Seja $\sigma = \sum_i n_i \sigma_i$ um 1-ciclo. Podemos reorganizar σ_i para que cada n_i seja ± 1 , embora isso naturalmente deixe $\sigma_i = \sigma_j$ para $i \neq j$. Além disso, possivelmente revertendo alguns σ_i , podemos supor que todos os n_i são 1. Assim, sem perda de generalidade, podemos tomar

$$\sigma = \sum_i \sigma_i$$

Se houver algum σ_i que não seja um laço, deve existir um σ_j na soma tal que o produto $\sigma_i * \sigma_j$ é definido, ou então o bordo de σ seria não trivial. Mas, $\sigma_i * \sigma_j$ é homólogo a $\sigma_i + \sigma_j$, como mostramos ao verificar que h é um homomorfismo. Portanto, podemos substituir $\sigma_i + \sigma_j$ pelo elemento único $\sigma_i * \sigma_j$, sem alterar a classe de homologia de σ . Sem perda de generalidade, então, podemos assumir que todos os σ_i são laços.

Agora seja γ_i qualquer caminho desde o ponto base x_0 até o ponto base de σ_i (considerado como um laço), que existe porque X é conexo por caminhos. Então $\gamma_i * \sigma_i * \bar{\gamma}_i$ é homólogo a $\gamma_i + \sigma_i + \bar{\gamma}_i$, pois h é um homomorfismo, que é homólogo a $\gamma_i + \sigma_i - \gamma_i = \sigma_i$ desde que $\bar{\gamma}_i$ é homólogo a $-\gamma_i$. Assim, substituindo σ por um ciclo homólogo, podemos supor que todos os σ_i são laços baseados em x_0 . Finalmente, como a soma é homóloga à composição, podemos tomar $\sum_i \sigma_i$ como um único 1-simplexo simplicial sem alterar a classe de homologia. Em particular, este 1-simplexo é um laço em x_0 , que significa que sua imagem pela h é σ , que é o que precisávamos.

Núcleo: Primeiro, seja $\gamma * \gamma' * \bar{\gamma} * \bar{\gamma}'$ um elemento no subgrupo comutador de π_1 . Então sua imagem por h é $\gamma + \gamma' - \gamma - \gamma'$. Mas $H_1(X)$ é abeliano, então essa soma é zero. Logo, o subgrupo comutador de π_1 está contido no núcleo de h .

Para mostrar a outra inclusão são necessários elementos teóricos avançados que não foram abordados nesse trabalho, para maiores detalhes consultar [3]. $\square$

Exemplo 13. Considere X o espaço composto por dois círculos tangentes em um ponto, então

pelo exemplo 12 e pelo Teorema de Hurewicz obtemos

$$\pi_1(X) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z} \implies H_1(X) = \pi_1(X)_{ab} = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.$$

Exemplo 14. Considere o espaço X representado a seguir.

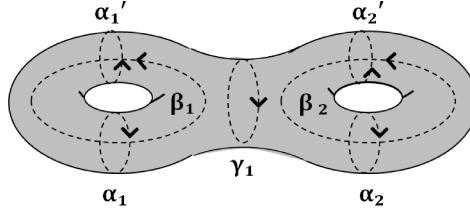


Figura 4.5: Bitoro

Na dimensão 1, o grupo de homologia é gerado pelos ciclos α_1 , β_1 , α_2 e β_2 . Assim,

$$H_1(X) = \langle \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2 \rangle \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.$$

Note que o ciclo γ_1 não é gerador do grupo, já que $\alpha_2 - \alpha_2' \sim \gamma_1$, como mostrado na figura.

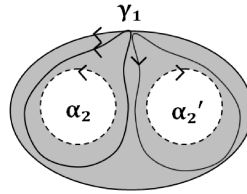


Figura 4.6: $\alpha_2 - \alpha_2' \sim \gamma_1$

Além disso, α_2 e α_2' representam a mesma classe de homologia. Logo, $\alpha_2' \sim \alpha_2$, então $\gamma_1 \sim \alpha_2 - \alpha_2' \sim 0$. Dessa forma, a abelianização do grupo fundamental de X é $\mathbb{Z}^4 = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] COSTA, J. C. R. R.; ANDRADE, M. G. C.: *Algumas considerações sobre homotopia e homologia*. Revista Eletrônica Paulista de Matemática, 2(2):18–31, 2013. http://www2.fc.unesp.br/revistacqd/v2n2/v2n2_art2.pdf.
- [2] Croom, F.H.: *Basic Concepts of Algebraic Topology*. Springer-Verlag, 1978.
- [3] Hatcher, A.: *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2002.
- [4] Lima, E. L.: *Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento*. IMPA, 1998.
- [5] Lima, E. L.: *Homologia Básica*. IMPA, 2012.
- [6] VALDES, W. D. ; FÊMINA, L.L.: *Calculando detalhadamente os grupos de homologia simplicial do toro, do plano projetivo e da garrafa de Klein*. MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA EM FOCO, 6(1):47–56, 2018. <http://www.seer.ufu.br/index.php/matematicaeestatisticaemfoco/article/view/41383/22273>.