

DANTON BUTICOSIHZ MÜLLER

**COMPARAÇÃO DE MÉTODOS ESPECTRAIS PARA
ANÁLISE DE FADIGA**



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

2025

DANTON BUTICOSIHZ MÜLLER

**COMPARAÇÃO DE MÉTODOS ESPECTRAIS PARA ANÁLISE DE
FADIGA**

Projeto de Conclusão de Curso apresentado
ao Curso de Graduação em Engenharia
Aeronáutica da Universidade Federal de
Uberlândia, como parte dos requisitos para a
obtenção do título de BACHAREL em
ENGENHARIA AERONÁUTICA.

Orientador: Prof. Dr. Giuliano Gardolinski

UBERLÂNDIA - MG

2025

RESUMO

A fadiga desempenha um papel fundamental na concepção de peças mecânicas. Embora a análise de fadiga seja bem compreendida para carregamentos de amplitude constante, o mesmo não ocorre para carregamentos aleatórios. O principal objetivo deste trabalho é analisar e comparar diferentes métodos espectrais de simulação de fadiga para carregamentos aleatórios, tanto entre si quanto com os resultados obtidos no domínio temporal. Além disso, busca-se verificar a influência do expoente k da lei de Basquin, assim como do fator de largura de banda na performance dos métodos espectrais. Para atingir esses objetivos, densidades espectrais de potência (DEP) de tensões foram geradas numericamente, servindo como entradas para cálculos de fadiga espectral. Cerca de 20 métodos foram empregados neste estudo, envolvendo DEPs unimodais e bimodais. Em síntese, os resultados mostram que a abordagem espectral, embora complexa, oferece um potencial significativo em termos de eficiência temporal e de recursos, quando comparada aos métodos tradicionais. Certos métodos espectrais, como o método de Dirlik, Bands e Huang-Moan conseguem fornecer boas estimativas independentemente do caso estudado. No entanto, o mesmo não ocorre para outros métodos, como a aproximação Narrow-Band e o método de Lalanne, que apresentam bons resultados apenas para sinais de banda estreita. Além disso, os resultados encontrados indicam que o erro tende a ser mais conservador à medida que a largura de banda aumenta, enquanto o erro absoluto é menor para valores mais baixos do expoente k .

Palavras-chaves: Análise de Fadiga Espectral, Carregamentos Aleatórios, Lei de Basquin, Dano, Densidade Espectral de Potência.

ABSTRACT

Fatigue plays a fundamental role in the design of mechanical components. While fatigue analysis is well-understood for constant amplitude loadings, the same does not hold true for random loadings. The main objective of this work is to analyze² and compare different spectral methods for fatigue simulation under random loading, both among themselves and with the results obtained in the time domain. Additionally, the study seeks to verify the influence of the exponent k in Basquin's law, as well as the bandwidth factor on the performance of spectral methods. To achieve these objectives, stress Power Spectral Densities (PSDs) were numerically generated, serving as inputs for spectral fatigue calculations. Approximately 20 methods were employed in this study, involving unimodal and bimodal PSDs. In summary, the results show that the spectral approach, although complex, offers significant potential in terms of time and resource efficiency when compared to traditional methods. Certain spectral methods, such as the methods of Dirlik, Bands, and Huang-Moan, provide good estimates regardless of the case studied. However, the same is not true for other methods, like the Narrow-Band approximation and Lalanne's method, which yield good results only for narrow-band signals. Furthermore, the findings indicate that the error tends to be more conservative as the bandwidth increases, while the absolute error is smaller for lower values of the exponent k .

Keywords: Spectral Fatigue Analysis, Random Loading, Basquin's Law, Damage, Power Spectral Density.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de manifestar minha profunda gratidão à Universidade Federal de Uberlândia (UFU) e à École Nationale Supérieure de Mécanique et d'Aérotechnique (ENSMA), bem como aos seus estimados professores, cujas valiosas contribuições acadêmicas e orientações foram fundamentais ao longo deste percurso.

Agradeço igualmente às instituições onde realizei estágios, pelas oportunidades concedidas e pelas experiências práticas proporcionadas, que enriqueceram significativamente minha formação profissional e colaboraram para o aprimoramento de meus conhecimentos.

Por fim, expresso meu sincero reconhecimento aos meus pais, pelo apoio incondicional e encorajamento constante, e a todos os colegas e amigos, cuja companhia e incentivo foram indispensáveis para a realização deste trabalho.

SUMÁRIO

1	Introdução.....	1
1.1	Objetivos.....	2
2	Estudo Bibliográfico	3
2.1	Dimensionamento da vida útil em fadiga.....	3
2.1.1	Curva de resistência ou Diagrama de Wöhler.....	4
2.2	Caracterização do sinal.....	7
2.3	Cálculo de fadiga no domínio temporal	10
2.4	Cálculo de fadiga no domínio espectral.....	12
2.4.1	Os casos não-gaussianos.....	24
2.4.2	Implementação dos métodos espectrais em softwares de engenharia..	25
3	Metodologia	26
3.1	Ferramenta para criação dos dados de entrada.....	26
3.2	Ferramenta para geração do sinal temporal.....	26
3.3	Ferramenta para cálculo da fadiga no domínio temporal.....	28
3.4	Ferramenta para cálculo de fadiga no domínio espectral	29
3.5	Comparação dos resultados dos domínios espectral e temporal.....	30
4	Resultados e Discussões.....	31
4.1	Propriedades materiais	31
4.2	Dados de entrada gerados.....	32
4.3	Resultados para os casos unimodais	35
4.4	Resultados para os casos bimodais	44
4.5	Análise global dos resultados.....	48
5	Conclusões	50
5.1	Trabalhos futuros	51
6	Referências Bibliográficas.....	52
7	Anexo 1	57
8	Anexo 2	60

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Diagrama de Wöhler, amplitude de tensão em função do número de ciclos à ruptura (HENAFF; MOREL, 2005).	5
Figura 2 : Diferentes representações das correlações entre uma tensão média e uma amplitude de tensão corrigida (HENAFF; MOREL, 2005).	6
Figura 3: Ilustração de uma abordagem determinística e probabilista para a construção da curva de Wöhler (MUÑIZ-CALVENTE et al., 2022).	7
Figura 4: Ilustração de um sinal de banda estreita e um sinal de banda larga e sua influência no formato da DEP.	10
Figura 5: Ilustração do método de contagem de ciclos Rainflow com os ciclos e boca de histerese tensão-deformação correspondente.	11
Figura 6 : Método do cálculo do dano no domínio temporal (ROGNON, 2013).	12
Figura 7: Diagrama com os métodos espectrais analisados neste estudo.	14
Figura 8: Função de densidade de probabilidade de ciclos do método de Steinberg.	16
Figura 9: Exemplificação da rotina de geração de sinais temporais.	27
Figura 10: Exemplificação da rotina de geração de uma DEP.	27
Figura 11: Esquematização da rotina para traçar um diagrama quantil-quantil (plot Q-Q). ..	28
Figura 12: Cálculo de fadiga no domínio temporal.	29
Figura 13: Cálculo da fadiga no domínio da frequência.	30
Figura 14: DEPs unimodais geradas numericamente utilizadas neste estudo.	32
Figura 15: DEPs bimodais geradas numericamente utilizadas neste estudo.	32
Figura 16: DEP original em azul e DEPs retraçadas a partir de sinais temporais de diferentes períodos (outras cores).	33
Figura 17: Gráfico Q-Q para um sinal temporal de 100s.	34
Figura 18 : Evolução da duração de vida em fadiga média em função do número de realizações temporais.	35
Figura 19: Erros relativos dos resultados obtidos pelo método de Steinberg, para diferentes valores de k e γ , em comparação com os resultados do domínio do tempo.	36
Figura 20: Erros relativos dos resultados obtidos pelos métodos do trabalho de Rice (1954) para DEPs unimodais com o valor de $k = 3,3$	37
Figura 21: Erros relativos dos resultados obtidos pelos métodos do trabalho de Rice (1954) para DEPs unimodais com o valor de $k = 7,3$	37

Figura 22: Erros relativos dos resultados obtidos pelos métodos do trabalho de Rice (1954) para DEPs unimodais com o valor de $k = 11,8$	38
Figura 23: Erros relativos dos resultados obtidos pelos métodos baseados na contagem Rainflow para DEPs unimodais com o valor de $k = 3,3$	39
Figura 24: Erros relativos dos resultados obtidos pelos métodos baseados na contagem Rainflow para DEPs unimodais com o valor de $k = 7,3$	39
Figura 25: Erros relativos dos resultados obtidos pelos métodos baseados na contagem Rainflow para DEPs unimodais com o valor de $k = 11,8$	40
Figura 26: Erros relativos dos resultados obtidos pelos métodos combinados para DEPs unimodais com o valor de $k = 3,3$	41
Figura 27: Erros relativos dos resultados obtidos pelos métodos combinados para DEPs unimodais com o valor de $k = 7,3$	41
Figura 28: Erros relativos dos resultados obtidos pelos métodos combinados para DEPs unimodais com o valor de $k = 11,8$	42
Figura 29: Comparação entre os métodos melhores resultados para as DEPs unimodais. .	43
Figura 30: Comparação dos erros das DEPs unimodais para métodos disponíveis em softwares de engenharia.	44
Figura 31: Erros relativos dos resultados obtidos pelos métodos adaptados para casos bimodais para DEPs bimodais com o valor de $k = 3,3$	45
Figura 32: Erros relativos dos resultados obtidos pelos métodos adaptados para casos bimodais para DEPs bimodais com o valor de $k = 7,3$	45
Figura 33: Erros relativos dos resultados obtidos pelos métodos adaptados para casos bimodais para DEPs bimodais com o valor de $k = 11,8$	46
Figura 34: Erros relativos dos resultados obtidos pelos demais métodos para DEPs bimodais com o valor de $k = 3,3$	47
Figura 35: Erros relativos dos resultados obtidos pelos demais métodos para DEPs bimodais com o valor de $k = 7,3$	47
Figura 36: Erros relativos dos resultados obtidos pelos demais métodos para DEPs bimodais com o valor de $k = 11,8$	48

1 Introdução

As indústrias e o setor da engenharia no geral devem responder a uma demanda crescente de consumidores em matéria de durabilidade e confiabilidade, enquanto mantendo os custos baixos. Ser capaz de otimizar a utilização de um material é então um processo crucial nesta demanda.

Um aspecto que não pode ser negligenciado na concepção de peças mecânicas é a ruptura dessas peças quando solicitadas repetidamente ao longo do tempo. Este fenômeno é chamado de fadiga. Esse termo é empregado para descrever os processos de dano e ruptura dos materiais quando submetidos a carregamentos cíclicos (HENAFF; MOREL, 2005). A fadiga é, portanto, um processo localizado que, sob a ação de tensões ou deformações variáveis no tempo, altera as propriedades locais de um material, podendo provocar a formação de fissuras e, eventualmente, a ruptura da peça.

Estima-se que 80 % das falhas mecânicas de peças em uso devem-se à fadiga (HOSSEINI et al., 2018). As primeiras catástrofes atribuídas à fadiga de materiais remontam ao início da Revolução Industrial, quando o uso de ferro e aço em estruturas e máquinas cresceu rapidamente. O desastre ferroviário de Versailles, na França, ocorrido em 1842, causado pela ruptura de um eixo de trem devido à fadiga levou ao aprofundamento dos estudos sobre o tema. Esse e outros eventos impulsionaram os estudos sobre o comportamento dos materiais sob cargas cíclicas, levando ao desenvolvimento de testes de fadiga e ao estabelecimento de normas para evitar falhas catastróficas em projetos modernos.

Para então aumentar a segurança e reduzir os custos de fabricação, é preciso dominar o dimensionamento em fadiga. No entanto, ensaios experimentais em fadiga são longos e caros, logo a simulação numérica passa a ser uma aliada no dimensionamento em fadiga.

A abordagem tradicional de simulação numérica em fadiga consiste em realizar uma simulação no domínio do tempo. Apesar dessa abordagem funcionar relativamente bem para carregamentos com amplitudes constante, ou mesmo para blocos de amplitude constante, ela não consegue performar tão bem para carregamentos em que a amplitude do carregamento varia fortemente com o tempo. Esse tipo de abordagem produz um valor de

dano de fadiga associado à uma única realização temporal de um processo estocástico¹. Logo, várias simulações são necessárias para obter um valor médio do ganho. Isso resulta em um alto custo computacional.

A análise espectral de fadiga (domínio da frequência) é uma alternativa, pois ela permite definir uma função de densidade de probabilidade de ciclos, no lugar de extrair diversas realizações temporais. O problema é que essa função não é fácil de ser estabelecida e diferentes métodos existem. Este estudo analisará então esses métodos.

1.1 Objetivos

Este trabalho tem como objetivo comparar diferentes métodos espectrais de análise de fadiga entre eles e entre os resultados de referência, obtidos no domínio temporal. A meta é analisar como dois diferentes parâmetros, o coeficiente k da lei de Basquin e o fator de irregularidade γ , influenciam na performance desses métodos. Ademais, DEPs unimodais e bimodais são utilizadas neste estudo, a fim de melhor entender a influência do formato da DEP nos resultados.

Os objetivos específicos deste estudo são:

1. Desenvolver uma ferramenta capaz de extrair um sinal temporal a partir de uma Densidade Espectral de Potência (DEP) e traçar uma DEP a partir do sinal temporal.
2. Criar uma ferramenta para analisar e caracterizar um sinal aleatório.
3. Determinar a duração de vida útil em fadiga no domínio do tempo e da frequência para diferentes DEPs de tensão geradas numericamente.
4. Comparar e analisar os resultados do domínio da frequência e do tempo.

¹ Sequência de variáveis aleatórias.

2 Estudo Bibliográfico

Este capítulo apresenta inicialmente o processo de caracterização de um material para análise de fadiga. A curva de Wöhler é introduzida, juntamente com as leis que permitem sua modelagem matemática, com atenção especial à lei de Basquin. Em seguida, é fornecida uma breve explicação sobre as DEPs, com destaque para algumas de suas propriedades estatísticas. As regras para o cálculo do dano no domínio do tempo são em seguida apresentadas. Em seguida, os métodos para cálculo de fadiga no domínio espectral são explorados. Por fim, são discutidos estudos comparativos realizados por outros autores.

2.1 Dimensionamento da vida útil em fadiga

O dimensionamento de vida em fadiga consiste em determinar o número máximo de ciclos, para um carregamento dinâmico dado, aos quais uma peça pode ser submetida antes de se romper. A vida útil (ou duração de vida - DDV) em fadiga é composta por duas fases: iniciação e propagação de trinca. Assim, a DDV pode ser definida como a soma do número de ciclos de solitação N_a necessários para aparição de uma trinca e o número de ciclos N_p requeridos para que esta trinca se propague até um tamanho crítico previamente definido. Então, o número final de ciclos N_f é definido como sendo a soma $N_a + N_p$. No entanto, a duração de vida em fadiga é no geral governada ou pela fase de aparição ou pela fase de propagação, a depender do material (SALVATI, 2024).

Toda peça é suscetível de conter defeitos (inclusões, cavidades, falhas de superfície etc.), bem como zonas de concentração de tensão que representam potenciais locais para a iniciação de trincas. Na prática, deve-se, portanto, considerar não apenas a possibilidade de iniciação de uma trinca, mas também o crescimento de defeitos preexistentes.

Assim, existem dois métodos principais para análise de fadiga. O primeiro considera a vida total, englobando tanto as etapas de iniciação quanto de propagação de trincas, utilizando a abordagem tensão/deformação-vida ($\sigma/\epsilon-N$), esta é a abordagem utilizada neste estudo. A segunda abordagem é conhecida como tolerância a danos e se baseia na mecânica da fratura, estimando o número de ciclos necessários para que a maior trinca não detectada cresça até levar à falha. Em princípio, ela é mais conservadora que a abordagem $\sigma/\epsilon-N$ (HOSSEINI et al., 2018), mas os métodos espectrais para a análise de fadiga não se baseiam nesta abordagem.

2.1.1 Curva de resistência ou Diagrama de Wöhler

A curva de resistência é traçada empiricamente, a fim de estabelecer uma relação entre tensão (σ) ou deformação (ϵ) e número de ciclos à ruptura (N_f) para um material. Para tal, um corpo de teste padronizado é submetido à uma carga cíclica de amplitude de tensão σ_a pré-determinada e uma tensão média nula ($\sigma_m = 0$), por fim o número de ciclos para a ruptura N_f do corpo de teste é anotado. O ensaio é repetido n vezes com amplitudes de tensão σ_a diferentes até se construir uma curva de resistência (curva σ/ϵ -N), também chamada de diagrama de Wöhler. A tensão média é definida pela Equação 1. A amplitude de tensão é definida pela Equação 2. Nessas duas equações σ_{max} e σ_{min} representam respectivamente a tensão máxima e mínima de cada ciclo. Apesar deste estudo descrever esses conceitos a partir da tensão σ , o mesmo poderia ser feito a partir da deformação ϵ .

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} \quad (1)$$

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2} \quad (2)$$

O diagrama de Wöhler, ilustrado na Figura 1, possui três domínios característicos: a região de fadiga oligocíclica na qual, sob alta tensão, a falha ocorre após um baixo número de ciclos. Seguida pela zona de fadiga policíclica (resistência limitada), em que a vida útil aumenta rapidamente à medida que a tensão aplicada diminui. Nessa zona, não ocorre nenhuma deformação plástica macroscópica apreciável. Por fim, há a zona de resistência ilimitada, em que o dano pode ser considerado nulo, em geral quando $N > 10^6$. A assíntota que define essa zona determina o limite de fadiga, valor de amplitude de tensão a partir do qual não há danos ao material.

O diagrama de Wöhler é uma curva totalmente empírica. Logo, um modelo matemático é necessário para o cálculo de fadiga. Várias leis são propostas para essa finalidade, no geral elas servem a modalizar a zona de resistência limitada. Trabalhar na zona de fadiga oligocíclica não é desejado, pois a ruptura ocorre muito cedo. No entanto dimensionar uma peça na zona de resistência ilimitada significa, em alguns casos, superdimensioná-la.

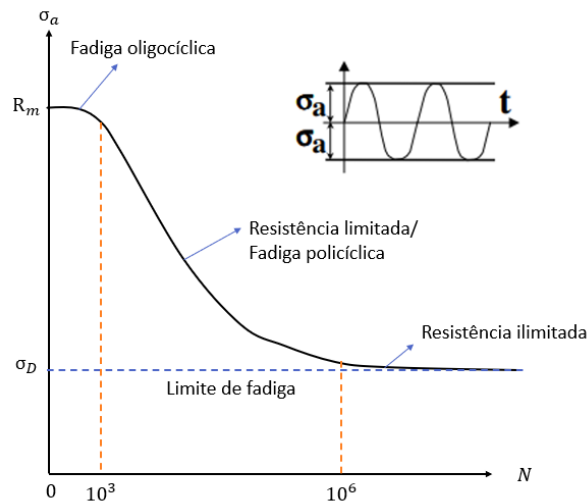


Figura 1: Diagrama de Wöhler, amplitude de tensão em função do número de ciclos à ruptura (HENAFF; MOREL, 2005).

A Tabela 1 apresenta leis que permitem modelar numericamente, com algumas restrições, a curva de Wöhler.

Tabela 1 : Leis para o cálculo de fadiga.

Modelo	Formulação
Basquin (BASQUIN, 1910)	$\log N = C - k \log \sigma_a$
Stromeyer (STROMEYER; DALBY, 1997)	$\log N = C - k \log(\sigma_a - \sigma_D)$
Weibull (WEIBULL, 1949)	$\log(N + D_0) = C - k \log\left(\frac{\sigma_a - \sigma_D}{\Delta\sigma_{ST} - \sigma_D}\right)$
Bastenaire (BASTENAIRE, 1972)	$(\log N - B)(\Delta\sigma - \Delta\sigma_0) = A \exp[-C(\sigma_a - \sigma_D)]$
Manson-Coffin (MANSON, 1965)	$\log N = C - k \log \Delta\epsilon$

Nessas fórmulas, o parâmetro N é o número de ciclos, σ_a a amplitude da tensão, C e k são parâmetros do material. C é a constante de fadiga e k é o expoente de fadiga. Nas leis de Stromeyer, Weibull e Bastenaire, σ_D corresponde ao limite de tensão abaixo do qual não há propagação de trinca. Na lei de Weibull, D_0 é um parâmetro de contabilização do dano inicial, geralmente chamado de dano inicial ou número virtual inicial de ciclos, que pode ser adicionado para levar em conta o histórico de carga anterior. $\Delta\sigma_{ST}$ é a tensão de fadiga padronizada ou de referência, geralmente determinada experimentalmente. Na lei de Bastenaire, A e B são constantes que dependem do material e de determinadas condições de teste. Por fim, a lei de Manson-Coffin usa a faixa de deformação $\Delta\epsilon$ para determinar a curva de fadiga, que é mais adequada para levar em conta a influência da deformação plástica na vida útil da fadiga.

Kun et al., (2008) exploraram a "universalidade" por trás da lei de Basquin, mostrando que, apesar da diversidade de materiais e condições de carga, a lei mantém uma robustez universal. Isso reforça sua aplicabilidade no projeto e na análise da vida em fadiga, mesmo para materiais compostos complexos.

D'Antuono (2019) propõe uma relação entre a lei de Weibull e a lei de Basquin para amostras entalhadas e lisas sob amplitude constante. A lei de Weibull é usada para suavizar a curva de Basquin, obtendo resultados mais conservadores e próximos dos resultados experimentais.

Weber, Koziol e Starke (2023) desenvolveram um novo procedimento (para um aço) que mistura o modelo de Basquin (para descrever a parte elástica do dano) e o modelo de Manson Coffin (para descrever a parte plástica) a fim de reduzir o número de testes necessários para gerar uma curva de Wöhler (curva $\sigma - N$) a partir de quatro amostras. No entanto, os autores argumentam que são necessários mais testes para validação do modelo proposto.

A lei de Basquin é a mais amplamente utilizada. Essa lei prevê sempre uma carga média nula. Esse não é o caso, em geral, das solicitações aleatórias. Para tal, algumas correlações podem ser utilizadas para contornar esse problema: notadamente a linha de Goodman, a linha de Söderberg e a parábola de Gerber, apresentadas na Figura 2. Essas correlações vinculam a tensão média com uma amplitude de tensão correspondente. A relação de Goodman é a mais utilizada, sendo apresentada na Equação 3 (para um fator de carga $R = \sigma_{max}/\sigma_{min} = -1$).

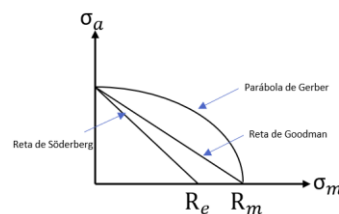


Figura 2 : Diferentes representações das correlações entre uma tensão média e uma amplitude de tensão corrigida (HENAFF; MOREL, 2005).

$$\sigma_{a,corr} = \sigma_a \left[1 - \left(\frac{\sigma_m}{R_m} \right) \right]^{-1} \quad (3)$$

Sendo a lei de Basquin uma lei empírica, seus parâmetros são determinados por análise de regressão com base em dados experimentais. Contudo, o caráter probabilístico

desses ensaios não pode ser negligenciado. A Figura 3 ilustra resultados experimentais típicos, tanto determinísticos (curva sólida), quanto probabilísticos (curva tracejada). Os pontos azuis (X) representam os resultados experimentais a partir dos quais as curvas foram derivadas. Já os pontos vermelhos (círculos) representam as amostras que não se romperam, mesmo após atingirem o número máximo de ciclos de carga no ensaio. Ou seja, uma das fontes de erro para a determinação da duração de vida em fadiga provém da própria caracterização do material.

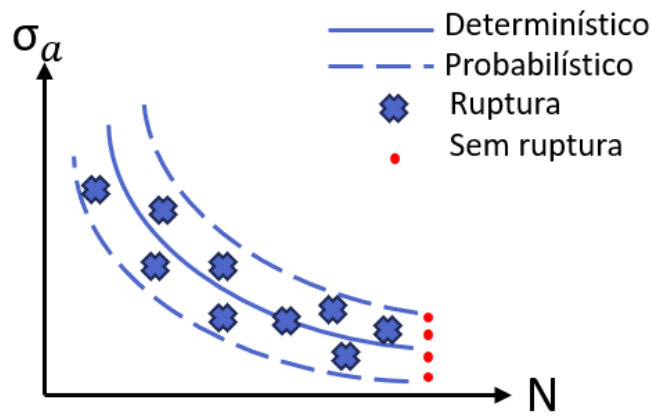


Figura 3: Ilustração de uma abordagem determinística e probabilista para a construção da curva de Wöhler (MUÑIZ-CALVENTE et al., 2022).

2.2 Caracterização do sinal

A carga dinâmica periódica, usualmente estudada, permite prever o valor do sinal em t e em $t + \Delta t$. Nas cargas dinâmicas aleatórias/não-periódicas, não é possível prever o valor do sinal em um determinado instante. Esse é o tipo de carregamento observado nos estudos de vibrações aleatórias. Alguns exemplos de sinais não periódicos são: terremotos, carro em uma estrada, ondas no mar etc. Os parágrafos a seguir trazem conceitos importantes para a caracterização de um sinal.

A esperança matemática (média) de um sinal é definida na Equação 4.

$$x_m = \frac{1}{2T} \int_0^T x(t) dt \quad (4)$$

Em que T é o período do sinal analisado. O valor eficaz ou raiz do quadrado médio (*RMS : root mean square*) é definido pela Equação 5 e permite ter uma ideia da magnitude do sinal.

$$RMS_x^2 = \frac{1}{T} \int_0^T [x(t) - x_m]^2 dt \quad (5)$$

Como o objetivo é trabalhar no domínio da frequência, é preciso de uma ferramenta matemática que permita passar do domínio do tempo para o domínio da frequência. A transformada de Fourier permite fazer essa transformação. No contexto de um processo aleatório estacionário $x(t)$, a transformada de Fourier não pode ser definida, pois não existe devido a dois fatores: a quantidade é, por natureza, aleatória e potencialmente infinita. Contudo, considera-se a aproximação de que o sinal aleatório estacionário é periódico com período T , fora desse período seu valor é nulo. A Equação 6 apresenta a transformada de Fourier truncada, que resolve o problema mencionado.

$$X(f, T) = \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) e^{-i2\pi ft} dt \quad (6)$$

A densidade espectral de potência (DEP) é dada na Equação 7. Ela relaciona o valor quadrático médio do sinal para cada frequência.

$$\Phi_{xx}(f) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} E[|X(f, T)|^2] \quad (7)$$

A DEP caracteriza totalmente um processo estocástico quando este é estacionário, ergódico e gaussiano. A estacionaridade implica que as propriedades estatísticas do processo não variam ao longo do tempo. A ergodicidade indica que as propriedades estatísticas calculadas a partir de uma única realização temporal do processo são representativas do conjunto de todas as possíveis realizações, ou seja, as médias temporais coincidem com as médias estatísticas. A distribuição gaussiana garante que os valores sejam distribuídos simetricamente em torno da média, formando uma curva em forma de sino.

O momento espectral λ_m de ordem m de um processo aleatório estacionário é definido na Equação 8.

$$\lambda_m = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(f) |f|^m df \quad (8)$$

As relações das Equações 9 - 11 podem ser estabelecidas para um processo de média nula.

$$RMS_x^2 = \lambda_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(f) |f|^0 df \quad (9)$$

$$RMS_x^2 = \lambda_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(f) |f|^2 df \quad (10)$$

$$RMS_x^2 = \lambda_4 = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(f) |f|^4 df \quad (11)$$

O fator de largura de banda de um processo é definido na Equação 12. Ele será útil para cálculos de fadiga no domínio espectral.

$$\alpha_m = \frac{\lambda_m}{\sqrt{\lambda_0 \lambda_{2m}}} \quad (12)$$

O número médio de cruzamentos do eixo das abscissas com inclinação positiva de um sinal por unidade de tempo é definido na Equação 13. O número médio de picos (extremos do ciclo) por unidade de tempo são definidos na Equação 14.

$$v_0 = \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_0}} \quad (13)$$

$$v_p = \sqrt{\frac{\lambda_4}{\lambda_2}} \quad (14)$$

O uso da DEP permite definir o sinal como sendo de banda larga ou curta. Essa caracterização está diretamente relacionada ao fator de irregularidade, que estabelece uma relação entre o número de cruzamentos de zero no sinal (N_0) e o número de pico (N_p) contidos no sinal. Essa caracterização é importante nos métodos de cálculo de fadiga espectral. A Figura 4 ilustra um sinal com banda estreita e banda larga e a sua influência no formato da DEP.

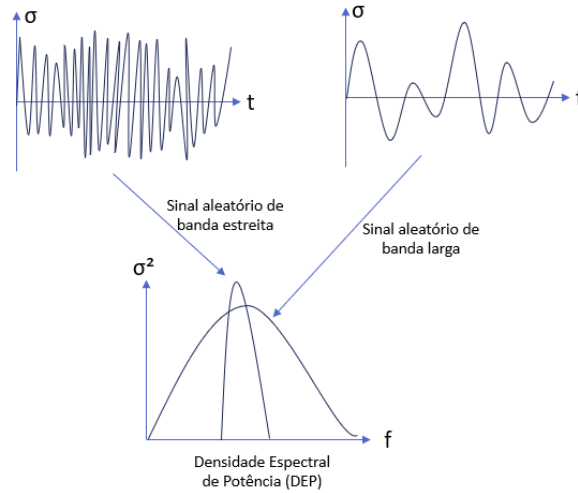


Figura 4: Ilustração de um sinal de banda estreita e um sinal de banda larga e sua influência no formato da DEP.

A Equação 15 permite definir o fator de irregularidade γ (LEE, 2005; WIRSCHING; LIGHT, 1980). Quando γ tende a zero, o sinal é dito de banda estreita. Quando γ tende a um, o sinal é dito de banda larga.

$$\gamma = \sqrt{1 - \left(\frac{v_0}{v_p}\right)^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_2}{\sqrt{\lambda_0 \lambda_4}}\right)^2} = \sqrt{1 - \alpha_2^2} \quad (15)$$

2.3 Cálculo de fadiga no domínio temporal

A primeira etapa para o cálculo de fadiga é conseguir determinar o número de ciclos de cada carregamento. Para carregamentos com amplitude constante ou blocos de amplitudes constante, esse processo é intuitivo. No entanto, para carregamentos dinâmicos mais complexos, o método de contagem Rainflow é usualmente utilizado, por ser recomendado por Amzallag et al. (1994), o que resultou na norma AFNOR A03-406 da União Europeia. Esse método define os loops de histerese de tensão deformação, como visto na Figura 5.

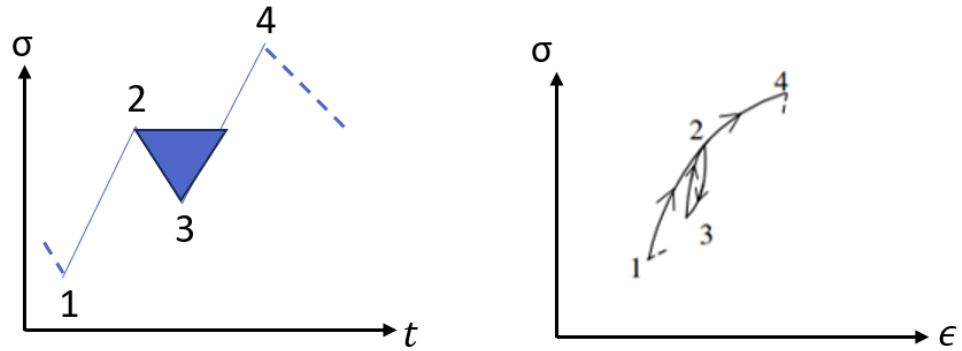


Figura 5: Ilustração do método de contagem de ciclos Rainflow com os ciclos e boca de histerese tensão-deformação correspondente.

O sinal é reduzido a uma sequência de mínimos e extremos locais. Na contagem de quatro pontos, a condição para extrair um ciclo é : $\Delta\sigma_2 \leq \Delta\sigma_1$ e $\Delta\sigma_2 \leq \Delta\sigma_3$. Sendo $\Delta\sigma_1 = |\sigma_2 - \sigma_1|$, $\Delta\sigma_2 = |\sigma_3 - \sigma_2|$ e $\Delta\sigma_3 = |\sigma_4 - \sigma_3|$. O ciclo é representado pelos extremos σ_2 e σ_3 é armazenado. Portanto, sua amplitude é e seu valor médio σ_m . Então, os pontos σ_3 e σ_2 são removidos e o valor σ_1 é conectado ao valor σ_4 . O processamento é repetido a partir do ponto 1. O método AFNOR propõe a formação de um sinal conectando o resíduo a ele mesmo e repetindo o procedimento uma última vez. Essa operação não deve ser negligenciada, pois o resíduo sempre tem o maior máximo e o menor mínimo e, conseqüentemente, causa o maior dano ao material.

São várias as regras para quantificar o dano por fadiga. Algumas dessas diferentes regras de cálculo de dano por fadiga são apresentadas na Tabela 2. A regra de Miner é a mais antiga e a mais utilizada. Ela se baseia na relação entre os ciclos aplicados n_i e o número de ciclos até a falha N_i sob carga i . A principal crítica a esse método é que ele não leva em conta a ordem de carregamento e a interação entre as cargas. Na prática a história de carregamento influencia o processo de danificação do material (SALVATI, 2024).

Tabela 2: Regras para o cálculo de dano por fadiga.

Regra para cálculo de dano por fadiga	Formulação
Miner (MINER, 1945)	$D = \sum_{i=1}^k n_i / N_i$
Marco-Starkey (MARCO; STARKEY, 2022)	$D = \sum_{i=1}^k (n_i / N_i)^{x_i}$
Leis (LEIS, 1988)	$D = \frac{4\sigma'_f}{E} (2N_f)^{2b} + 4\sigma'_f \epsilon'_f (2N_f)^{b_1+c_1}$
Niu (NIU; LI; LEE, 1987)	$D = (n/N)^{1/(n'+\alpha)}$
Chaboche-Lesne (CHABOCHE; LESNE, 1988)	$D = 1 - \left[1 - (n/N)^{1/(1-\alpha)} \right]^{1/(1-\beta)}$

A regra de Niu propõe um modelo de energia que depende das interações entre os ciclos, para ser usado no caso de endurecimento cíclico. Uma nova abordagem é usar modelos de danos contínuos. O modelo de Chaboche-Lesne é não linear, sendo capaz de considerar os efeitos da tensão média, sendo β uma constante do material e α uma função do estado de tensão.

O cálculo no domínio temporal representa somente uma única realização do processo estocástico. O dano de todo o processo aleatório é dado então pela esperança do dano calculado para cada uma das realizações temporais. A Figura 6 ilustra essa problemática.

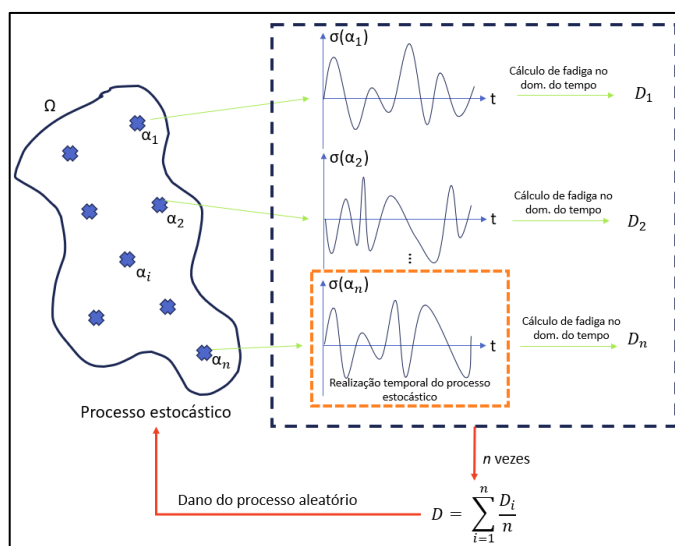


Figura 6 : Método do cálculo do dano no domínio temporal (ROGNON, 2013).

O cálculo de danos por fadiga para um carregamento aleatório no domínio temporal tem dois obstáculos: para cada amplitude de carregamento de uma única realização temporal do processo estocástico, uma iteração é necessária. O segundo problema é que este cálculo deve ser repetido n vezes até que o valor médio represente corretamente o dano do processo estocástico e não somente de um grupo específico de ocorrências deste processo. Este é um cálculo com um custo computacional significativo.

2.4 Cálculo de fadiga no domínio espectral

Uma solução para contornar o problema supracitado é utilizar uma entrada que represente todo o processo estocástico. Este dado de entrada é a DEP, que está no domínio

da frequência. No entanto, é preciso uma nova maneira para calcular o dano por fadiga a partir de uma DEP. Os métodos apresentados neste capítulo permitem fazer esse cálculo usando como dado de entrada a DEP de tensão.

Na teoria da vibração aleatória, cada ciclo extraído é um evento aleatório com sua própria probabilidade de ocorrência. Cada ciclo, portanto, produz um dano (D), que, a partir da equação de Basquin e da regra de Miner, pode ser escrito como na Equação 16, em que σ_a é a amplitude da tensão, C e k são os parâmetros materiais da lei de Basquin

$$D = \frac{\sigma_a^k}{C} \quad (16)$$

Isso leva a uma esperança do dano $E[D]$ definida pela Equação 17.

$$E[D] = C^{-1} v_a \int_0^{+\infty} \sigma^k P_a(\sigma) d\sigma \quad (17)$$

Em que v_a define o número de ciclos por unidade de tempo $P_a(\sigma)$ é a função de densidade de probabilidade de ciclos do processo estocástico estacionário gaussiano $\sigma(t)$. A Equação 18 define a vida útil.

$$DDV = \frac{1}{E[D]} \quad (18)$$

A formulação da função de densidade de probabilidade de ciclos não é intuitiva. Vários métodos existem na literatura. Eles são agrupados na Tabela 3. Esses métodos podem ser agrupados de diferentes maneiras. Em geral, os autores propõem o agrupamento em: métodos baseados no trabalho de (RICE, 1944) com e sem fatores corretivos, métodos que tentam replicar a contagem Rainflow usando aproximações empíricas (simulações de Monte Carlo) e métodos que combinam diferentes distribuições da aproximação Narrow-Band ou ainda diferentes abordagens por tipo de ciclo (alta e baixa frequência) (ROGNON, 2013; ZORMAN; SLAVIČ; BOLTEŽAR, 2023). O método de Steinberg não se encaixa em nenhuma dessas classificações. A **Error! Reference source not found.** apresenta esses métodos.

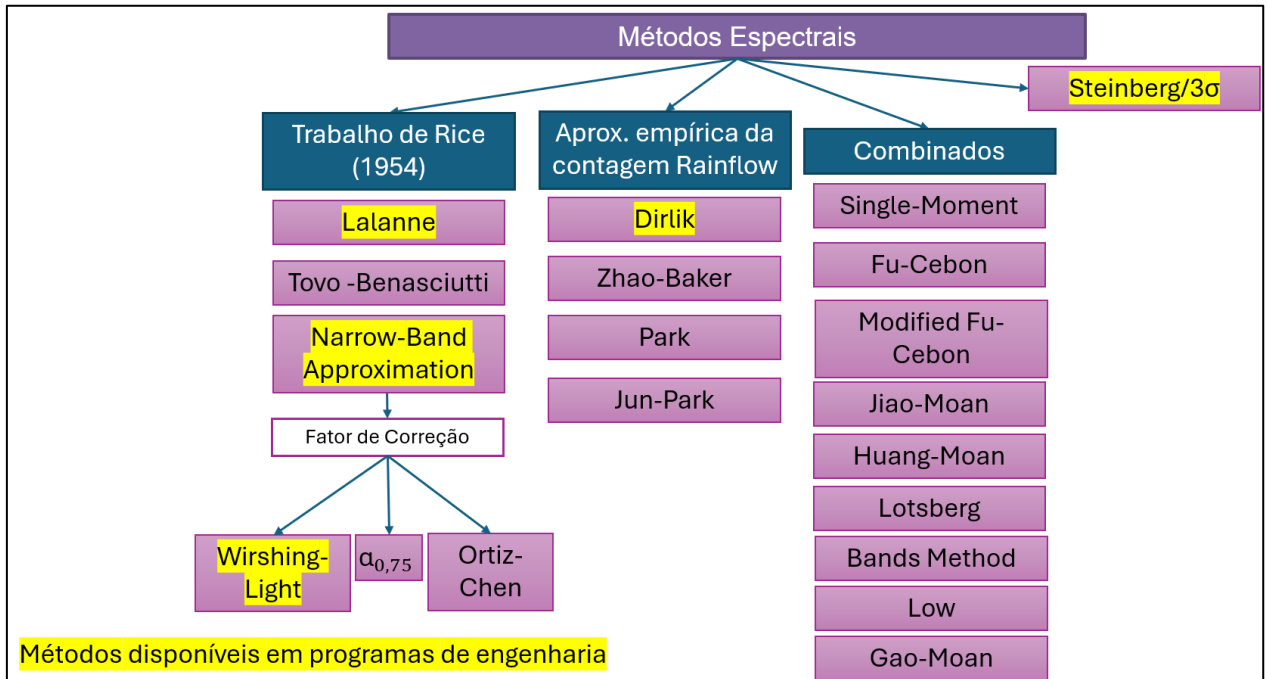


Figura 7: Diagrama com os métodos espectrais analisados neste estudo.

A Tabela 3 lista esses métodos e suas respectivas funções de densidade de probabilidade de ciclos $P(\sigma)$. A explicação das variáveis de cada método é feita em seguinte.

Tabela 3: Funções de densidade de probabilidade de ciclos segundo diferentes autores.

Método	Formulação da função de densidade de probabilidade de ciclos $P(\sigma)$
Steinberg (STEINBERG, 2000)	$P_a^{ST}(\sigma) = \begin{cases} 0,638 \text{ em } 2\sqrt{\lambda_0} \\ 0,271 \text{ em } 4\sqrt{\lambda_0} \\ 0,043 \text{ em } 6\sqrt{\lambda_0} \end{cases}$
<i>Métodos baseados nos trabalhos de Rice</i>	
Lalanne (LALANNE, 2009)	$P_a^{LL}(\sigma) = \sqrt{\frac{1-\gamma^2}{2\pi\lambda_0}} \exp\left(\frac{-\sigma^2}{2\lambda_0(1-\gamma^2)}\right) + \frac{\gamma\sigma}{2\lambda_0} \exp\left(\frac{-\sigma^2}{2\lambda_0}\right) \left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{\gamma\sigma}{\sqrt{2\lambda_0(1-\gamma^2)}}\right)\right]$
Narrow-Band (Rayleigh) (MILES, 1954)	$P_a^{NB}(\sigma) = \frac{\sigma}{\lambda_0} \exp\left(\frac{-\sigma^2}{2\lambda_0}\right)$
Wirsching-Light (WIRSCHING; LIGHT, 1980a)	$P_a^{WL}(\sigma) = v_{WL} P_a^{NB}(\sigma)$
Ortiz-Chen (ORTIZ; CHEN, 1987)	$P_a^{OC}(\sigma) = v_{OC} P_a^{NB}(\sigma)$
Alfa0.75 ($\alpha_{0.75}$) (LUTES et al., 1984)	$P_a^{0.75}(\sigma) = \alpha_{0.75} P_a^{NB}(\sigma)$

Tovo-Benasciutti (BENASCIUTTI; TOVO, 2005)	$P_a^{TB}(\sigma) = hP_a^{NB}(\sigma) + (1 - h)\frac{\sigma}{\lambda_0\gamma^2}\exp\left(-\frac{\sigma^2}{2\lambda_0\gamma^2}\right)$
<i>Métodos baseados na aproximação empírica da contagem Rainflow</i>	
Dirlik (DIRLIK, 1985)	$P_a^{DIR}(Z) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_0}}\left[\frac{D_1}{Q_D}\exp\left(-\frac{Z}{Q_D}\right) + \frac{D_2Z}{R^2}\exp\left(-\frac{Z^2}{2R^2}\right) + D_3Z\exp\left(-\frac{Z^2}{2}\right)\right]$
Zhao-Baker (ZHAO; BAKER, 1992)	$P_a^{ZB}(\sigma) = wk_a k_b \sigma^{k_b-1} \exp(-k_a \sigma^{k_b}) + (1 - w)\sigma \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}\right)$
Park (PARK; CHOUNG; KIM, 2014)	$P_a^{PK}(Z) = c_{R_1} \frac{Z}{\sigma_{R_1}^2} \exp\left(-\frac{Z^2}{2\sigma_{R_1}^2}\right) + c_{R_2} Z \exp\left(-\frac{Z^2}{2}\right) + c_G \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma_G} \exp\left(-\frac{Z^2}{2\sigma_G^2}\right)$
Jun-Park (JUN; PARK, 2020)	$P_a^{JP}(Z) = Q_c \left[J_1 \frac{1}{\sigma_E} \exp\left(-\frac{Z}{\sigma_E}\right) + J_2 \frac{Z}{\sigma_R^2} \exp\left(-\frac{Z^2}{\sigma_R^2}\right) + J_3 \exp\left(-\frac{Z^2}{2}\right) + J_4 \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma_H} \exp\left(-\frac{Z^2}{2\sigma_H^2}\right) \right]$
<i>Métodos combinados</i>	
Single-Moment (LARSEN; LUTES, 1991)	$P_a^{SM}(\sigma) = \lambda_0^{-(k+1)/2} \lambda_2^{-1/2} \lambda_{2/k}^{k/2} P_a^{NB}(\sigma)$
Fu-cebon Modified Fu-Cebon Jiao-moan (BENASCIUTTI; TOVO, 2006)	$P_a^L(\sigma) = p_{RHF}(\sigma) * p_{RLF}(\sigma) = \int_0^\infty p_{RHF}(r) p_{RLF}(s - r) dr$ $= \lambda_{0,LF} \sigma e^{-\frac{\sigma^2}{2\lambda_{0,LF}}} + \lambda_{0,HF} s e^{-\frac{\sigma^2}{2\lambda_{0,HF}}} + \sqrt{2\pi\lambda_{0,LF}(\sigma^2 - 1)} e^{-\frac{\sigma^2}{2}}$ $\left[\Phi\left(\sqrt{\frac{\lambda_{0,LF}}{\lambda_{0,HF}}}\sigma\right) + \Phi\left(\sqrt{\frac{\lambda_{0,HF}}{\lambda_{0,LF}}}\sigma\right) - 1 \right]$

O método de **Steinberg** (STEINBERG, 2000) formula uma hipótese muito simples, baseada em uma distribuição de Gauss. É o único método que não propõe uma função densidade de probabilidade ciclos contínuos. Este método propõe que há 68,3% de probabilidade de que um ciclo tenha um valor de tensão igual a 2 vezes o valor RMS, 27,1% de chance de que um ciclo tenha um valor de tensão igual a 4 vezes o valor RMS e 4,3% de chance de que o valor seja igual a 6 vezes o valor RMS. Ou seja, ela divide os valores em um, dois ou três desvios padrões. Essa distribuição é ilustrada na Figura 8.

Lalanne (2009) propõe que a função de densidade de probabilidade de ciclos pode ser expressa como uma função de densidade de probabilidade de picos. Para tal, o autor utiliza uma soma ponderada de uma distribuição Rayleigh e de uma distribuição Gauss,

usando o fator de irregularidade e o momento espectral de ordem zero (λ_0 , conferir Equação 9).

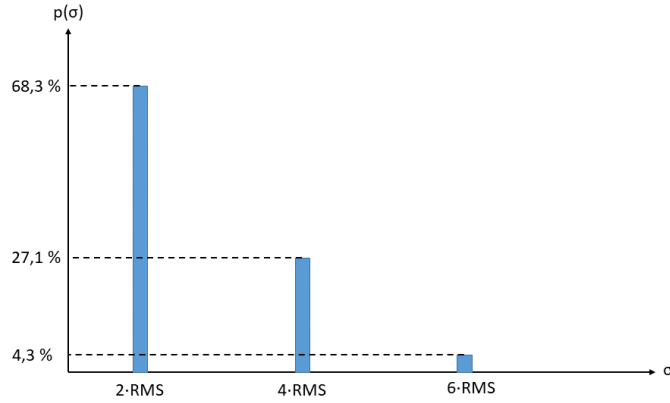


Figura 8: Função de densidade de probabilidade de ciclos do método de Steinberg.

No método de **aproximação Narrow-Band**, mais adequado para DEPs de banda estreita, Miles (1954) supõe que a distribuição dos picos se assemelha a distribuição de ciclos, e essa tende a uma distribuição Rayleigh. A função gama Γ é definida como se vê na Equação 19.

$$\Gamma(x) = 2 \int_0^{+\infty} t^{(2x-1)} e^{(-t^2)} dt \quad (19)$$

Wirsching e Light (1980) propõem um fator de correção para a aproximação de banda estreita, pois creem que a distribuição de Rayleigh do método Narrow-Band é muito conservadora, penalizando o modelo. Usando simulações de Monte Carlo os autores fornecem a fórmula de v_{WL} (Equação 20) em que k é o expoente da lei de Basquin e γ o fator de irregularidade.

$$v_{WL} = (0.926 - 0.033k) + [1 - (0.926 - 0.033k)] \left(1 - \sqrt{1 - \gamma^2}\right)^{1.587k - 2.323} \quad (20)$$

O fator de correção v_{OC} para a aproximação de banda estreita proposta por **Ortiz e Chen** (1987) é mostrado na Equação 21.

$$v_{OC} = \frac{1}{\gamma} \left[\frac{\lambda_0 \lambda_{2/k}}{\lambda_0 \lambda_{2+2/k}} \right]^{k/2} \quad (21)$$

Lutes et al. (1984) observaram a influência de determinados parâmetros de largura de banda. O fator de largura de banda i é definido na Equação 12. No **método Alfa0.75**, o índice usado é $i = 0,75$.

Benasciutti e Tovo (2005) determinam a densidade de probabilidade de ciclos da contagem Rainflow com base nas densidades de probabilidade de picos e vales, levando em conta que esses valores representam dois limites para a contagem Rainflow. O coeficiente h é descrito de duas diferentes maneiras pelos autores, como vista na Equação 22.

$$h = \begin{cases} h_{TB1} = \min \left\{ \frac{\alpha_1 - \gamma}{1 - \alpha_1}, 1 \right\} \\ h_{TB2} = \frac{(\alpha_1 - \gamma)[1.112(1 + \alpha_1\gamma - (\alpha_1 + \gamma)) \exp(2.11\gamma) + (\alpha_1 - \gamma)]}{(\gamma - 1)^2} \end{cases} \quad (22)$$

Dirlik (1985) propõe determinar a densidade de probabilidade dos ciclos a partir de uma aproximação empírica da contagem de ciclos Rainflow, a partir de muitas simulações de Monte Carlo com diferentes formas de DEP e fatores de irregularidade. A função é uma combinação de uma distribuição exponencial, uma distribuição Rayleigh e uma distribuição Gaussiana. Os parâmetros de sua formulação são definidos na Equação 23.

$$\begin{aligned} Z &= \frac{\sigma}{\lambda_0}; x_m = \frac{\lambda_1}{\lambda_0} \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_4}}; D_1 = \frac{2(x_m - \gamma^2)}{1 + \gamma^2} \\ R &= \frac{\gamma - x_m - D_1^2}{1 - \gamma - D_1 - D_1^2}; D_2 = \frac{1 - \gamma - D_1 - D_1^2}{1 - R} \\ D_3 &= 1 - D_1 - D_2; Q_D = \frac{1.25(\gamma - D_3 - D_2R)}{D_1} \end{aligned} \quad (23)$$

Zhao e Baker (1992) propõem uma mistura entre a distribuição Rayleigh e a distribuição Weibull, usando parâmetros empíricos como Dirlik. Em que k_a e k_b são parâmetros da distribuição de Weibull e w é um parâmetro de ponderação. Esses parâmetros são definidos na Equação 24.

$$\begin{cases} w = \frac{1 - \gamma}{1 - \Gamma\left(1 + 1/k_b\right) k_a^{-1/k_b}} \\ k_a = 8 - 7\gamma \\ k_b = \begin{cases} 1.1 & \text{si } \gamma \leq 0.9 \\ 1.1 + 9(\gamma - 0.9) & \text{si } \gamma > 0.9 \end{cases} \end{cases} \quad (24)$$

O **método de Park** (PARK; CHOUNG; KIM, 2014) de combina três distribuições: Rayleigh, Standart Rayleigh e demi-Gaussiana e também se vale de simulações de Monte-Carlo. O coeficiente Z é o mesmo da formulação de Dirlik. Os coeficientes são descritos na Equação 25.

$$\begin{aligned}
 c_{R_1} &= \frac{\alpha_{0.95}\alpha_{1.97} - \alpha_{0.54}\alpha_{0.93}\alpha_{1.95}}{\sigma_{R_1}^2(1 - \sigma_{R_1})} \\
 c_{R_2} &= \frac{-\sigma_{R_1}\alpha_{0.95}\alpha_{1.97} - \alpha_{0.54}\alpha_{0.93}\alpha_{1.95}}{1 - \sigma_{R_1}} \\
 \sigma_{R_1} &= \alpha_2 \\
 \sigma_G &= \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(1.5)}{c_G\Gamma(1)} (\alpha_2 - c_{R_1}\sigma_{R_1} - c_{R_2}) \\
 c_G &= 1 - c_{R_1} - c_{R_2}
 \end{aligned} \tag{25}$$

Jun e Park (2020) acrescentam um novo termo exponencial, adicionando um fator de correção em relação ao método de Park. O fator de correção é mostrado na Equação e os coeficientes na Equação 27.

$$\begin{aligned}
 Q_c(\alpha_1, \alpha_2) &= 0.903 - 0.28(\alpha_1 - \alpha_2) + 4.448(\alpha_1 - \alpha_2)^2 - 15.739(\alpha_1 - \alpha_2)^3 \\
 &\quad + 19.57(\alpha_1 - \alpha_2)^4 - 8.054(\alpha_1 - \alpha_2)^5 + 1.013\alpha_2 - 4.178\alpha_2^2 + 8.362\alpha_2^3 \\
 &\quad - 7.993\alpha_2^4 + 2.886\alpha_5
 \end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned}
 \mu_k &= \frac{m_k + 0.01}{\sqrt{m_{0.01}m_{2k} + 0.01}} \\
 M_{RR}(1) &\approx \rho\mu_1^{0.96}, \quad M_{RR}(2) \approx \rho\mu_1^{-0.02}, \quad M_{RR}(3) \approx \rho\mu_{0.52}, \quad M_{RR}(4) \approx \rho\mu_{0.55} \\
 J_1 &= \frac{2(\alpha_1\alpha_2 - \alpha_2^2)}{1 + \alpha_2^2}, \quad J_2 = \frac{M_{RR}(2) - M_{RR}(3)}{\sigma_R^2(1 - \sigma_R)}, \quad J_3 = -\sigma_R \frac{M_{RR}(2) + M_{RR}(3)}{1 - \sigma_R} \\
 J_4 &= 1 - J_1 - J_2 - J_3, \quad \sigma_E = \frac{1}{A_1 D_1} (M_{RR}(1) - J_2\sigma_R - J_3 - B_1 J_4 \sigma_H), \\
 \sigma_R &= \alpha_2, \quad \sigma_H = \frac{1}{B_1 D_4} (M_{RR}(1) - J_1^2 - J_2\sigma_R - J_3) \\
 \rho &= \alpha_1^{1.1} \alpha_2^{0.9}, A_n = \frac{\Gamma(1+n)}{\sqrt{2^n\pi}\Gamma(1+n/2)}; B_n = \frac{\Gamma((1+n)/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(1+n/2)}.
 \end{aligned} \tag{27}$$

O método **Single Moment** (LARSEN; LUTES, 1991) propõe uma formulação de dano empírico que usa um único momento espectral de ordem fracionária $k/2$ (conferir a Equação 8). A função é determinada a partir de várias simulações de Monte Carlo. A função Γ é definida como Equação 19. Como ela usa apenas um momento espectral, tem um custo computacional menor do que outros métodos.

Em princípio, os métodos **Fu-Cebon** (FU; CEBON, 2000), **Modified Fu-Cebon** (BENASCIUTTI; TOVO, 2006) e **Jiao-Moan** (JIAO; MOAN, 1990) usam a mesma fórmula

para a densidade de probabilidade de ciclos. O que muda é o parâmetro que define o número de ciclos por segundo. Seu desenvolvimento é complexo e não está descrito neste trabalho, mas pode ser consultado em sua integralidade no trabalho de (BENASCIUTTI; TOVO, 2006).

A Tabela 4 lista as equações do valor esperado (esperança matemática) de dano para vários métodos. Alguns métodos têm uma equação fechada para o valor esperado do dano, e elas também são mostradas. Outros métodos apresentados nesta tabela, mas não na anterior, se valem da função densidade de probabilidade de ciclos de outros métodos.

Tabela 4: Valor esperado do dano para diferentes métodos espectrais.

Método	Formulação do valor esperado do dano E[D]
Steinberg	$E[D^{ST}] = C^{-1}v_p[0,638 \times (2\sqrt{\lambda_0})^k + 0,271 \times (4\sqrt{\lambda_0})^k + 0,043 \times (6\sqrt{\lambda_0})^k]$
<i>Métodos baseados nos trabalhos de Rice</i>	
Lalanne (LALANNE, 2009)	$E[D^{LL}] = C^{-1}v_p \int_0^{+\infty} \sigma^k P_a^{Lal}(\sigma) d\sigma$
Narrow-Band (Rayleigh) (MILES, 1954)	$E[D^{NB}] = C^{-1}v_0 \int_0^{+\infty} \sigma^k P_a^{NB}(\sigma) d\sigma = C^{-1}v_a 2^{k/2} \left(1 + \frac{k}{2}\right) \lambda_0^{(k-1)} \lambda_2^{1/2}$
Wirsching-Light (WIRSCHING; LIGHT, 1980)	$E[D^{WL}] = C^{-1}v_0 \int_0^{+\infty} \sigma^k P_a^{WL}(\sigma) d\sigma = v_{WL} E[D^{NB}]$
Ortiz-Chen (ORTIZ; CHEN, 1987)	$E[D^{OC}] = C^{-1}v_0 \int_0^{+\infty} \sigma^k P_a^{oc}(\sigma) d\sigma = v_{OC} E[D^{NB}]$
$\alpha_{0.75}$	$E[D^{0.75}] = C^{-1}v_0 \int_0^{+\infty} \sigma^k P_a^{0.75}(\sigma) d\sigma = \alpha_{0.75} E[D^{NB}]$
Tovo-Benasciutti (BENASCIUTTI; TOVO, 2005)	$[D^{TB}] = C^{-1}v_p \int_0^{+\infty} \sigma^k P_a^{TB}(\sigma) d\sigma = hE[D^{NB}] + (1-h) \frac{\sigma}{\lambda_0 \gamma^2} \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2\lambda_0 \gamma^2}\right)$
<i>Métodos baseados na aproximação empírica da contagem Rainflow</i>	
Dirlik (DIRLIK, 1985)	$E[D^{DK}] = C^{-1}v_p \int_0^{+\infty} \sigma^k P_a^{Dir}(\sigma) d\sigma$ $= v_p C^{-1} \lambda_0^{k/2} D_1 Q^k \Gamma(1+k) + (\sqrt{2})^k \Gamma\left(1 + \frac{k}{2}\right) (D_2 R ^k + D_3)$
Zhao-Baker (ZHAO; BAKER, 1992)	$E[D^{ZB}] = C^{-1}v_p \int_0^{+\infty} \sigma^k P_a^{ZB}(\sigma) d\sigma = d^{ZB}$ $= v_p C^{-1} m_0^{k/2} \left[w \alpha^{-\frac{k}{\beta}} \Gamma\left(1 + \frac{k}{\beta}\right) + (1-w) 2^{k/2} \Gamma\left(1 + \frac{k}{2}\right) \right]$
Park (PARK; CHOUNG; KIM, 2014)	$E[D^{PK}] = v_p C^{-1} (\sqrt{2\lambda_0})^k \left[\frac{C_G}{\sqrt{\pi}} \sigma_G^k \Gamma\left(1 + \frac{k}{2}\right) + c_{R1} \sigma_{R1}^k \Gamma\left(1 + \frac{k}{2}\right) + c_{R2} \Gamma\left(1 + \frac{k}{2}\right) \right]$

Jun-Park (JUN; PARK, 2020)	$E[D^{JP}] = Q_c v_p C^{-1} (\sqrt{2\lambda_0})^k \left[\frac{D_1}{\sqrt{2k}} \sigma_E^k \Gamma(1+k) + D_2 \sigma_R^k \Gamma\left(1 + \frac{k}{2}\right) + D_3 \Gamma\left(1 + \frac{k}{2}\right) + \frac{D_4}{\sqrt{\pi}} \sigma_H^k \Gamma\left(1 + \frac{k}{2}\right) \right]$
Métodos Combinados	
Single-Moment (LARSEN; LUTES, 1991)	$E[D^{SM}] = \frac{2^{k/2} T}{2\pi C} \Gamma\left(1 + \frac{k}{2}\right) (\lambda_{2/k})^{k/2}$
Lotsberg (LOTSBERG, 2005)	$E[D^{LB}] = E[D^{NB}]_{HF} \left(1 - \frac{v_{0,LF}}{v_{0,HF}}\right) + v_{0,LF} \left(\left(\frac{E[D^{NB}]_{HF}}{v_{0,HF}} \right)^{1/k} + \left(\frac{[D^{NB}]_{HF}}{v_{0,LF}} \right)^{1/k} \right)^k$
Sakai-Okamura (SAKAI; OKAMURA, 1995)	$E[D^{SO}] = \frac{2^{k/2}}{2\pi C} \Gamma\left(1 + \frac{k}{2}\right) \left[\frac{\lambda_{0,LF}^{(k-1)/2}}{\lambda_{12,LF}} + \frac{\lambda_{0,HF}^{(k-1)/2}}{\lambda_{12,HF}} \right]$
Jiao-Maon (JIAO; MOAN, 1990)	$E[D^{JM}] = \left(\frac{v_{0,LF}}{v_0} \right)^{k+2} \lambda_{0,LF}^{3/2} \left[1 - \left(\frac{\lambda_{0,HF}}{\lambda_{0,LF}} \right) + \sqrt{\pi} \lambda_{0,LF} \lambda_{0,HF} \frac{k \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{k}{2}\right)} \right] + \frac{v_{0,HF}}{v_0} \lambda_{0,HF}$
Hung-Moan (HUANG; MOAN, 2006)	$E[D^{HM}] = \frac{\left(2 \left(\frac{E[D^{NB}]_{LF}}{v_{0,LF}} \right)^{\frac{2}{k}} \right)^{\frac{k-2}{2}} \left((v_{0,LF})^2 \left(\frac{E[D^{NB}]_{LF}}{v_{0,LF}} \right)^{\frac{2}{k}} + (v_{0,LF})^2 \left(\frac{E[D^{NB}]_{HF}}{v_{0,HF}} \right)^{\frac{2}{k}} \right)^{\frac{3}{2}}}{\left((v_{0,LF})^2 \left(\frac{E[D^{NB}]_{LF}}{v_{0,LF}} \right)^{\frac{2}{k}} + (v_{0,LF})^2 \left(\frac{E[D^{NB}]_{HF}}{v_{0,HF}} \right)^{\frac{2}{k}} \right)^{\frac{1}{2}}}$
Bands Method (BRACCESI; CIANETTI; TOMASSINI, 2015)	$E[D^{BM}] = v_0 C^{-1} (\sqrt{2\lambda_{0,ref}})^k \Gamma\left(1 + \frac{k}{2}\right)$
Fu-Cebon (FU; CEBON, 2000)	$E[D^{FC}] = 2\pi K \left[\int_0^{\sigma_m} e^{\frac{a_1(\sigma)}{2}} I(\sigma) d\sigma + (a_2 - a_1) (\sqrt{2\pi}) r \Gamma\left(1 + \frac{k}{2}\right) I(\sigma) \right]$
Modified Fu- Cebon (BENASCIUTTI; TOVO, 2006)	$E[D^{MFC}] = V_p T \int_0^\infty \frac{\sigma^k}{K_{S_1}} P_a^L(\sigma) d\sigma + (V_{o,2} - V_{o,p}) T \int_0^\infty \frac{\sigma^k}{K_{S_2}} P_a^{NB}(\sigma) d\sigma$
Low (LOW, 2014)	$E[D^L] = \frac{L(\sigma_X^2, \beta, k)}{\sqrt{1 - \sigma_X^2 + \beta^2 \sigma_X^2}} E[D^{NB}]$
Low bimodal (LOW, 2010)	$E[D^{LB}] = \frac{v_{p,LF}}{C} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\pi [R_I(r_{LF}, r_{HF}, \psi)]^k p_\psi(\psi) p_{R_{HF}}(r_{HF}) p_{R_{LF}}(r_{LF}) d\psi dr_{HF} dr_{LF}$
Gao-Moan	$E[D^{GM}] = D^H + D^P + D^Q$

Para os chamados métodos "combinados", a separação entre baixa frequência (LF) e alta frequência (HF) é explicada no artigo de Tovo-Benasciutti (BENASCIUTTI; TOVO, 2006). Alguns desses métodos foram desenvolvidos para DEPs bimodais, no entanto a aplicação desses métodos não é restrita a elas. O desenvolvimento e explicação dos parâmetros dos métodos de Low e Low bimodal são feitos em (LOW, 2010, 2014), o desenvolvimento do Método de Gao-Moan é feito em (GAO; MOAN, 2008).

O método de Steinberg é em geral não analisado por autores que se propõe a comparar os métodos espectrais para fadiga, devido a sua simplicidade em comparação com outros métodos. No entanto, sua fácil compreensão e implementação resultam na sua utilização em todos os principais softwares de análise de fadiga. Alguns estudos mostram que esse método é no geral não-conservador, tendo erros significativos quando comparado aos outros métodos (HALFPENNY; KIHLM, 2010; RINGEVAL; HUANG, 2012).

De acordo com Pitoiset (2001), o método Single-Moment fornece resultados mais próximos de uma simulação de Monte Carlo no domínio do tempo em comparação com os métodos da aproximação Narrow-Band, de Ortiz-Chen e das formulações de Wirsching-Light.

Benasciutti (2004) compara os seguintes métodos: Narrow-Band, Wirsching-Light, Zhao-Baker, Dirlik, Tovo-Benasciutti e Alfa0.75. Suas simulações revelam que a abordagem Wirsching-Light, apesar de ser uma das mais simples, é muito conservadora. A aproximação Narrow-Band também não apresenta bons resultados. No entanto, os métodos de Dirlik, Zhao-Baker e Tovo-Benasciutti mostram um resultado que é bastante consistente com o dano calculado no domínio temporal (para $k = 3$). O método Tovo-Benasciutti se aproxima do método Dirlik, que é reconhecido como tendo uma das melhores previsões.

Mršnik, Slavič e Boltežar (2013) utilizaram algum desses métodos para vibrações no setor automotivo. O método Zhao-Baker apresentou os melhores resultados, embora tenha superestimado ligeiramente a vida útil. Seus resultados são seguidos pelos dos métodos Tovo-Benasciutti e Dirlik.

Halfpenny e Kihm (2010) compararam os métodos de aproximação Narrow-Band, Dirlik, Lanne e Steinberg para vibrações em componentes mecânicos. Os autores obtiveram resultados robustos e consistentes com os métodos Dirlik. O método de aproximação Narrow-Band e o método Lanne produziram resultados insatisfatórios para sinais de banda larga (como esperado) e resultados consistentes para sinais de banda estreita. Por outro lado, o método de Steinberg produziu resultados não conservadores para

sinais de banda estreita, embora tenha produzido estimativas consistentes para sinais de banda larga.

Rognon (2013) em sua tese, comparou os métodos de aproximação Narrow-Band, Lalanne, Dirlik e Tovo-Benasciutti com uma simulação Monte-Carlo para o mesmo conjunto de dados. O autor afirma que o método de Tovo-Benasciutti produz um erro relativo de menos de 15%. O método de aproximação Narrow-Band atinge erros da ordem de 65% para um fator de irregularidade alto, que diminui, de forma consistente com o método, quando o valor do fator de irregularidade diminui. O autor também observa um fenômeno conhecido como sino de Dirlik, para determinadas configurações de simulação, que afeta negativamente os resultados. O método de Lalanne apresenta erros da ordem de 25%.

A Tabela 5 compila esses e outros estudos comparativos de métodos espectrais para diferentes tipos de sinais. A coluna "métodos recomendados" reflete os métodos com menos erros em cada estudo, considerados relevantes pelos respectivos autores.

Tabela 5: Compilação de diferentes estudos comparativos sobre métodos espectrais para análise de fadiga.

Autor(es)	Métodos analisados	Métodos Recomendados	Comentários
(MRŠNIK; SLAVIČ; BOLTEŽAR, 2013)	Aproximação Narrow-Band	Zhao-Baker	Dados experimentais reais obtidos durante um experimento com um vibrador eletrodinâmico. Valores de k (expoente da lei de Basquin) em torno de 3.
	Dirlik	Tovo-Benasciutti	
	Gao-Moan	Dirlik	
	Petrucci-Zucarelli		
	Tovo-Benasciutti		
	Wirshing-Light		
	Zhao-Baker		
	Alfa0.75		
(BENASCIUTTI; TOVO, 2006)	Dirlik	Dirlik	Valores de k de 3,32, 7,3 e 11,76. Quanto maior o valor de k , maior o erro.
	Tovo-Benasciutti	Tovo-Benasciutti	
	Wirsching-Light	Zhao-Baker	
	Zhao-Baker		
	Alfa0.75		
(LARSEN; IRVINE, 2015)	Aproximação Narrow-Band	Single Moment	Análise realizada para valores de k entre 7 e 12 (alto valores de k).
	Dirlik	Alfa0.75	
	Ortiz-Chen		
	Single Moment		
	Tovo-Benasciutti		
	Wirsching-Light		

	Alfa0.75		
(QUIGLEY et al., 2016)	Dirlik	Ortiz-Chen	O erro tende a aumentar à medida que k aumenta. Os métodos selecionados têm um erro médio menor do que o método Dirlik à medida que k aumenta.
	Lalanne	Alfa0.75	
	Ortiz-Chen	Single Moment	
	Single Moment	Dirlik	
	Tovo-Benasciutti	Tovo-Benasciutti	
	Wirsching-Light		
	Zhao-Baker		
	Alfa0.75		
(ZORMAN; SLAVIČ; BOLTEŽAR, 2023)	Aproximação Narrow-Band	Ortiz-Chen	Valores de k de 3, 7 e 12. Vários tipos de DSP gerados digitalmente foram implementados.
	Wirsching-Light	Alfa0.75	
	Ortiz-Chen	Tovo-Benasciutti	
	Tovo-Benasciutti	Dirlik	
	Dirlik	Zhao-Baker	
	Zhao-Baker	Park	
	Park	Jun-Park	
	Jun-Park	Huang-Moan	
	Jiao-Maon		
	Single Moment		
	Gao-Moan		
	Fu-Cebon		
	Low		
(ROGNON, 2013)	Aproximação Narrow-Band	Dirlik	Os três métodos selecionados são aqueles com os menores erros relativos (em comparação com uma simulação transiente), levando em conta a variação de vários parâmetros: o fator de irregularidade γ (de 0 a 1) e k (3, 5, 7,5 e 12).
	Dirlik	Tovo-Benasciutti	
	Lalanne	Zhao-Baker	
	Ortiz-Chen		
	Single Moment		
	Tovo-Benasciutti		
	Wirsching-Light		
	Alfa0.75		

Não há um método universal para a simulação numérica de fadiga que leve em contas todos os tipos de carregamentos e que forneça resultados confiáveis em um tempo razoável e sem a necessidade de um grande poder de processamento. Embora a análise no domínio de tempo seja mais fácil de compreender e forneça resultados de referência, ela apresenta dois grandes desafios: há uma alta utilização de recursos computacionais, e seus resultados não representam todo o processo estocástico, mas sim uma realização desse processo.

Nesse sentido, a DEP é a solução encontrada para contornar esse problema. Além de reduzir o tempo de cálculo, ela é capaz de representar todo o processo estocástico. No entanto, os métodos de cálculo de danos no domínio espectral são diversos e sua compreensão não é fácil. Há também a necessidade de fazer determinadas suposições, como gaussianidade, ergodicidade e estacionaridade.

A maioria dos estudos compara um número limitado de métodos. No entanto, o método de Dirlik é o mais amplamente reconhecido, assim como o método de Tovo-Benasciutti e aproximação Narrow-Band, para DEPs de banda estreita. De maneira geral, os estudos também mostram a influência de dois parâmetros nos resultados: a largura de banda (representado pelo fator de irregularidade γ) e o expoente da lei de Basquin k .

2.4.1 Os casos não-gaussianos

Todos esses métodos são desenvolvidos para carregamentos gaussianos. Um dos principais desafios nas análises no domínio espectral é a rara verificação de que o sistema é gaussiano. Como mencionado, essa hipótese não condiz com sistemas reais que possuem não-linearidades, ou seja, o sinal gaussiano é transformado em não-gaussiano, ou os próprios carregamentos são não-gaussianos (BENASCIUTTI, 2004). A gaussianidade pode ser verificada tanto por um gráfico de probabilidade normal (gráfico Q-Q), quanto por medidas como a assimetria (skewness) e a curtose.

A literatura sobre simulação de vida útil em fadiga para carregamentos aleatórios não-gaussianos indica que uma violação da hipótese de gaussianidade pode resultar em um aumento na taxa de dano por fadiga (BENASCIUTTI, 2004; LI et al., 2021; NIEŚŁONY et al., 2016). Consequentemente, o uso de métodos espectrais válidos para um caso gaussiano pode levar a uma subestimação da taxa de dano por fadiga, o que resulta em uma superestimação da vida útil. Li et al. (2021) realizam uma comparação da vida útil em fadiga de turbinas eólicas submetidas a carregamentos externos gaussianos e não-gaussianos. Para uma mesma velocidade média de ventos, a vida útil em fadiga de uma turbina submetida a um carregamento não-gaussiano pode ser de 5% a 10% mais curta em relação a uma turbina submetida a um carregamento gaussiano.

2.4.2 Implementação dos métodos espectrais em softwares de engenharia

Apesar da existência de inúmeros métodos espectrais para análise de fadiga, sua implementação nos softwares de análise de engenharia é limitada. A Tabela 6 mostra os métodos disponíveis em diferentes softwares.

Tabela 6: Disponibilidade de métodos de análise de fadiga espectral em diferentes softwares de engenharia.

	Aproximação Narrow-Band	Steinberg	Wirshing-Light	Lalanne	Dirlik
SolidWorks (SOLIDWORKS, 2024)	✓	✓	✓	-	-
Ansys (ANSYS, 2024)	✓	✓	✓	-	-
Altair (ALTAIR, 2024)	✓	✓	-	✓	✓

Somente os métodos de aproximação Narrow-Band e Steinberg são presentes nos três softwares mais utilizados. No entanto, como visto anteriormente, o método de Steinberg é muito simples e pouco sofisticado quando comparado aos outros métodos e a aproximação Narrow-Band foi desenvolvida para sinais de entrada com banda estreita.

3 Metodologia

A metodologia deste trabalho é dividida em quatro estágios distintos, explicados a seguir. A primeira etapa consiste em produzir DEPs de tensão com diferentes formatos (mas com mesmo valor eficaz de tensão) e extrair sinais temporais correspondentes destas DEPs. A segunda etapa é calcular a fadiga no domínio temporal, a fim de que estes resultados sirvam como referência para comparação com os resultados no domínio espectral.

A terceira etapa é fazer o cálculo de fadiga no domínio espectral utilizando os métodos descritos. A quarta e última etapa é confrontar os resultados do domínio temporal com os resultados de cada método do domínio espectral. Rotinas Python (com o auxílio do pacote FLife) são utilizadas para este estudo.

3.1 Ferramenta para criação dos dados de entrada

A metodologia para criação numérica de DEPs de tensão neste estudo segue a proposta por Mršnik, Slavič e Boltežar (2013) em seu trabalho. Como o objetivo é analisar a influência da largura da DEP, a DEP é inicialmente estreita e se expande em ambas as direções a cada iteração (resultando no aumento do fator de irregularidade γ). Nove espectros unimodais e cinco espectros bimodais são gerados.

3.2 Ferramenta para geração do sinal temporal

Esta ferramenta tem como objetivo gerar um certo número de realizações temporais de um sinal gaussiano, estacionário e ergódico a partir de uma DEP fornecida. Além da DEP, também é preciso fornecer o tempo total de cada realização temporal. Essa rotina é exemplificada na Figura 9.

A fim de verificar e validar a extração do sinal temporal, uma nova DEP é traçada a partir do sinal temporal gerado, para tal uma rotina esquematizada na Figura 10 é utilizada. O objetivo é que a DEP traçada a partir do sinal temporal gerado corresponda à DEP de entrada. Há uma influência do tempo total do sinal temporal na representatividade da DEP de entrada. Uma análise visual é feita para escolher o período do sinal temporal a ser extraído.

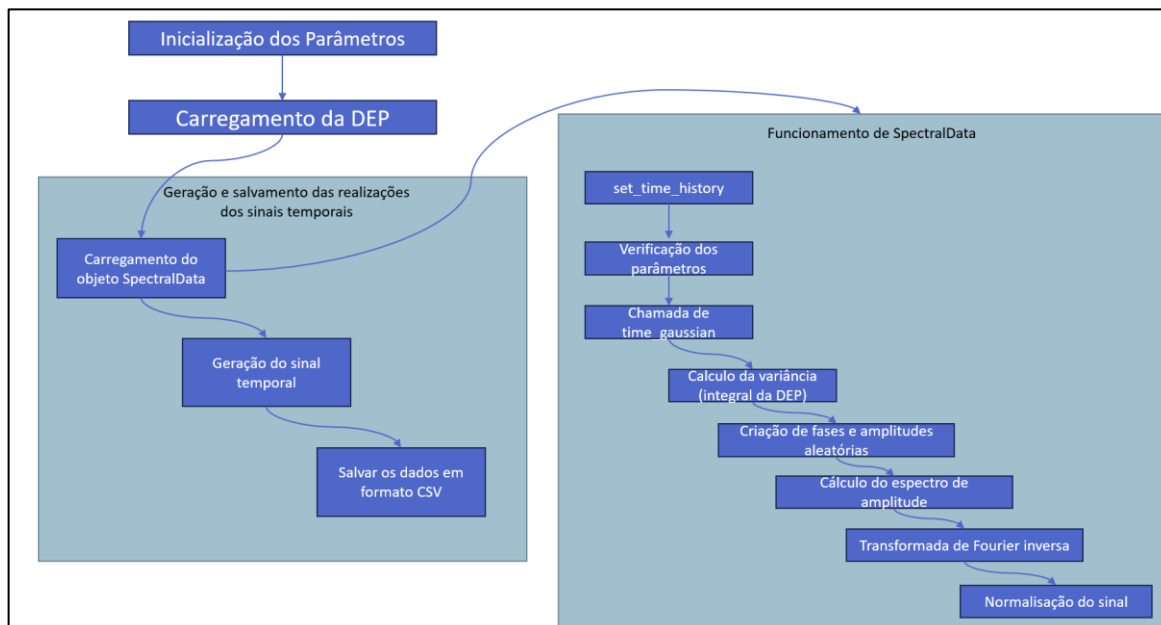


Figura 9: Exemplificação da rotina de geração de sinais temporais.

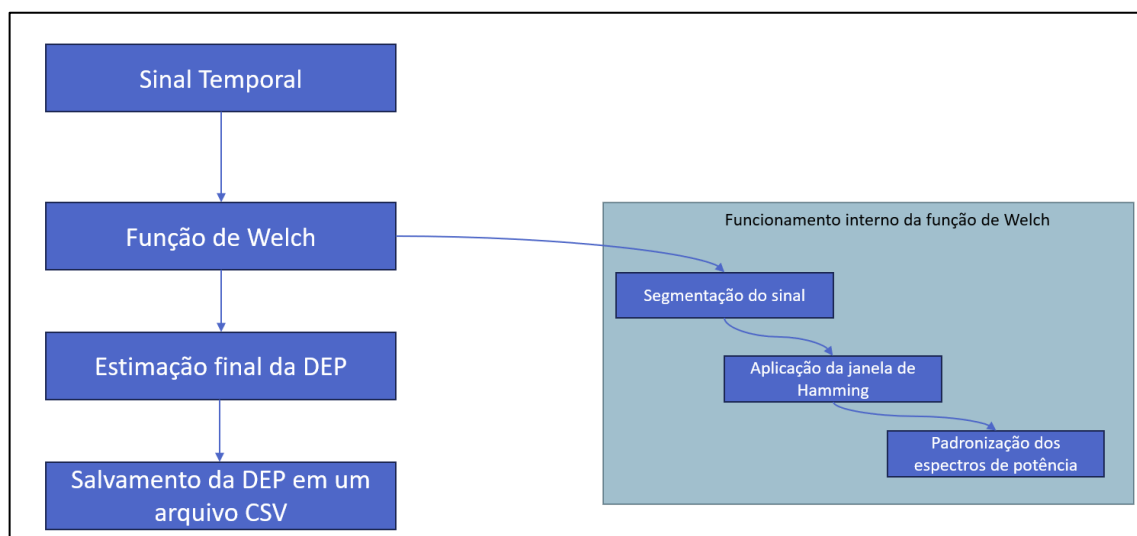


Figura 10: Exemplificação da rotina de geração de uma DEP.

Por fim, uma rotina verifica as propriedades estatísticas do sinal temporal gerado. Um diagrama quantil-quantil (Q-Q plot) é traçado para compara a distribuição de dados do sinal temporal com uma distribuição teórica gaussiana. Se os pontos no gráfico QQ estiverem principalmente ao longo da linha diagonal, isso indica que os dados seguem uma distribuição normal. A rotina é esquematizada na Figura 11.

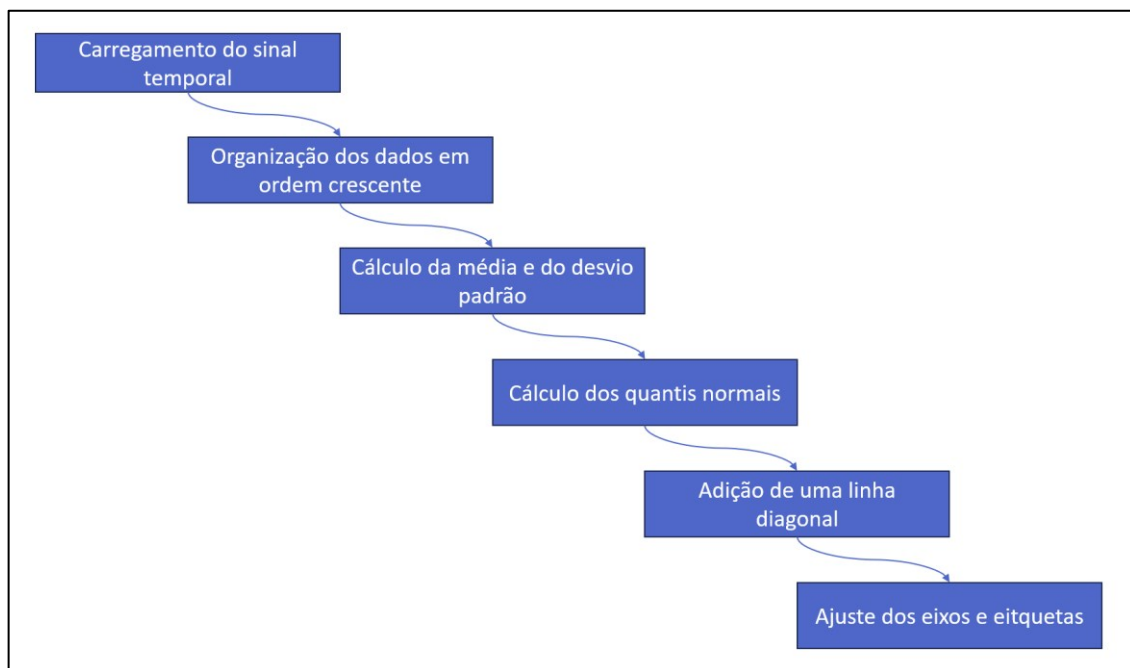


Figura 11: Esquemática da rotina para traçar um diagrama quantil-quantil (plot Q-Q).

A estacionaridade e a ergodicidade são hipóteses mais difíceis a serem verificadas. Como maneira de tentar verificar essas hipóteses, o valor máximo gerado no domínio temporal não pode exceder oito vezes o valor eficaz de tensão, isso limita o aparecimento de valores extremos que podem alterar a média local.

3.3 Ferramenta para cálculo da fadiga no domínio temporal

A partir do sinal temporal extraído da DEP de tensão, os ciclos são contados utilizando o algoritmo de contagem Rainflow. A correlação de Goodman é aplicada nos ciclos em que a média não é nula. A lei de Basquin é utilizada para computar o número de ciclos a ruptura. Por fim, a regra de Miner fornece o dano calculado. Este processo é exemplificado na Figura 12.

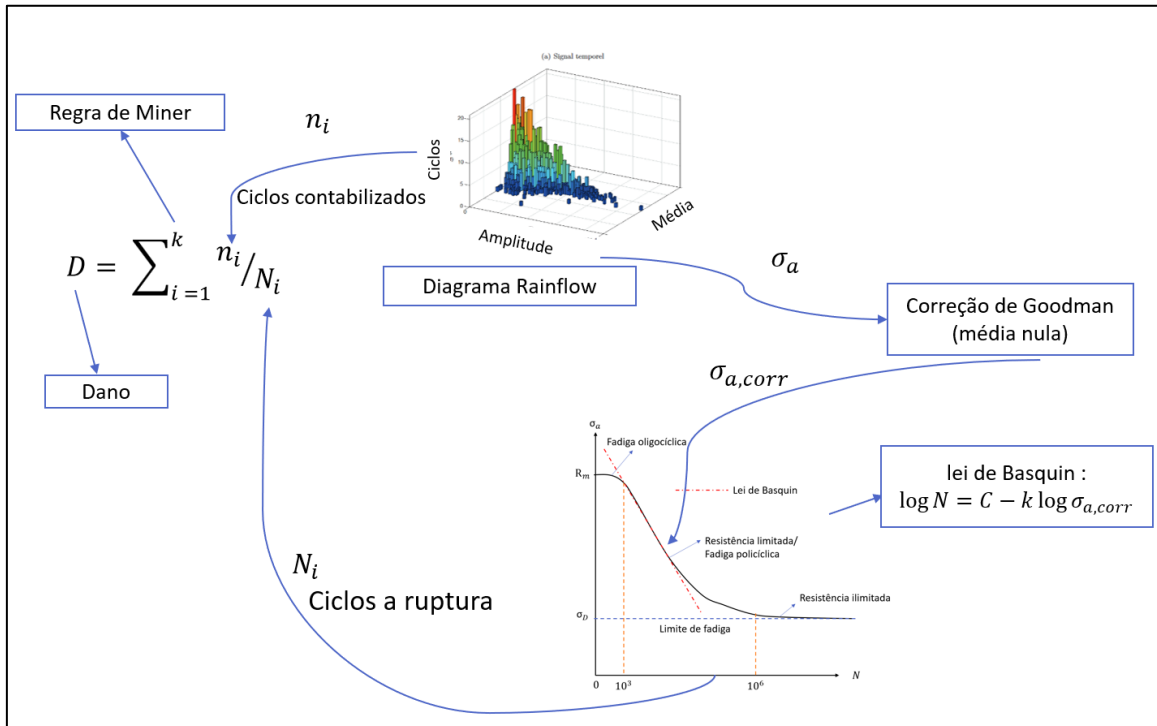


Figura 12: Cálculo de fadiga no domínio temporal.

Este processo é realizado para cada ocorrência temporal do processo estocástico. Uma curva do valor de dano calculado em função do número de realizações temporais é traçada. O objetivo é determinar a partir de quantas realizações temporais o resultado converge no domínio temporal.

3.4 Ferramenta para cálculo de fadiga no domínio espectral

No domínio espectral, a DEP de tensão é utilizada como base para o cálculo de vários parâmetros, notadamente os momentos espectrais. A partir disso, as equações apresentadas na Tabela 4 são resolvidas e o resultado para cada método e para cada DEP é armazenado. A Figura 13 ilustra esse processo.

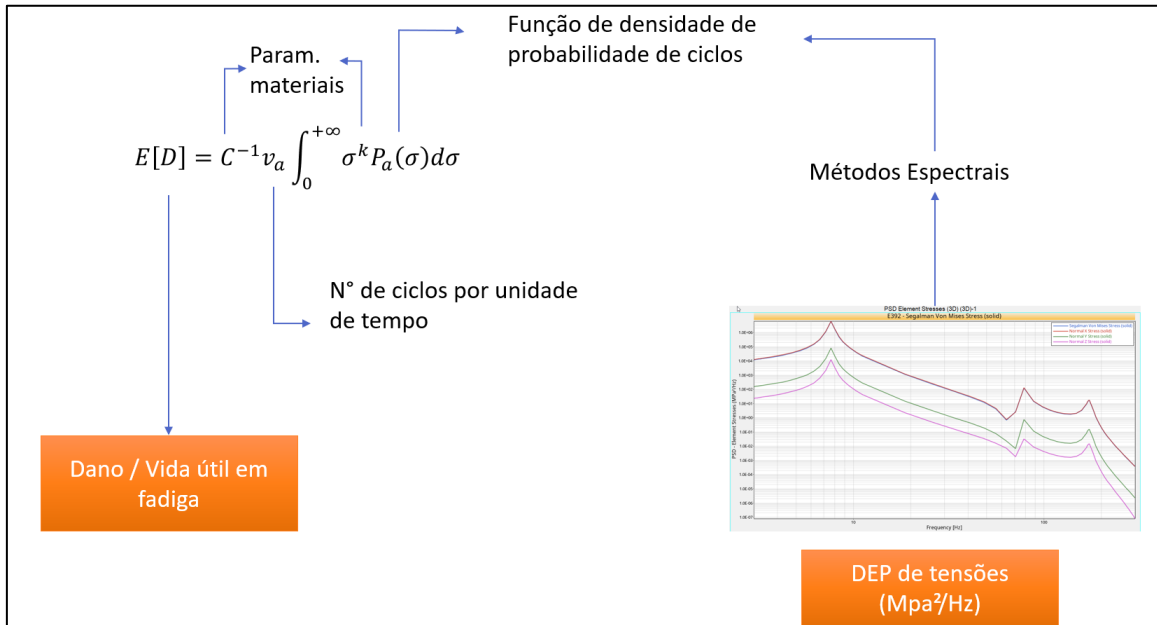


Figura 13: Cálculo da fadiga no domínio da frequência.

3.5 Comparação dos resultados dos domínios espectral e temporal

Com os resultados dos domínios espectral e temporal, o conceito de vida útil (inverso do dano) é usado. O erro é então definido na Equação 28. O adjetivo conservador é usado quando o método espectral prevê uma vida útil (DDV) mais curta do que a prevista pela simulação no domínio temporal, ou seja um erro de sinal negativo.

$$\varepsilon = \frac{1/d_{freq} - 1/d_{temp}}{1/d_{temp}} = \frac{DDV_{freq} - DDV_{temp}}{DDV_{temp}} \quad (28)$$

Em que d_{freq} é o dano calculado para cada um dos métodos espectrais e d_{temp} é o dano calculado no domínio do tempo.

4 Resultados e Discussões

O objetivo deste capítulo é apresentar os resultados das simulações realizadas. Primeiramente, são exibidas as DEPs geradas numericamente. Em seguida, é realizada a validação da rotina responsável por extrair os sinais temporais de referência das DEPs geradas. Por fim, os resultados da comparação entre os métodos espectrais e os resultados do domínio temporal são discutidos, considerando as DEPs unimodais e bimodais, com destaque para a influência do parâmetro k da lei de Basquin e o fator de irregularidade γ .

4.1 Propriedades materiais

Os materiais utilizados neste estudo são modelados pela Lei de Basquin. O coeficiente da lei de Basquin C e o expoente da lei de Basquin k são descritos na Tabela 7.

Tabela 7: Propriedades da lei de Basquin para os materiais estudados (MRŠNIK; SLAVIČ; BOLTEŽAR, 2013).

Material	C (MPa ^{k})	k
Aço	$1,934 \times 10^{12}$	3,324
Alumínio	$6,835 \times 10^{19}$	7,300
Aço Mola	$1,413 \times 10^{37}$	11,760

A lei de Basquin foi a única utilizada pois ela é a base de todas os métodos espectrais descritos neste trabalho. Mesmo que autores como Rognon (2013) tenham proposto métodos que não se baseiem na Lei de Basquin, eles ainda têm um uso muito restrito. Vale mencionar, que a lei de Basquin utiliza uma modelização da ruptura a partir da tensão, isso limita o modelo a uma utilização somente no domínio elástico.

Outro ponto a ser levado em conta é que a lei de Basquin só descreve matematicamente a parte de resistência limitada (fadiga policíclica) da curva de Wöhler. Sua extrapolação deve ser feita com cuidado. Como este estudo é puramente numérico, este é um erro que não é observado diretamente.

4.2 Dados de entrada gerados

A Figura 14 mostra as DEPs unimodais analisadas neste estudo. Todas são centradas na frequência de 50 Hz e possuem um valor eficaz de tensão de 20 MPa. O que as difere é a largura de banda, expressada numericamente pelo fator de irregularidade γ (Cf. Equação 15).

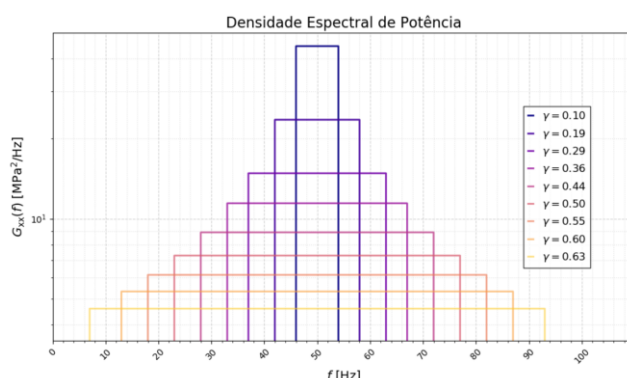


Figura 14: DEPs unimodais geradas numericamente utilizadas neste estudo.

A Figura 15 apresenta as DEPs bimodais utilizadas neste estudos. A frequência central do primeiro modo é de 10 Hz (baixa frequência) e a frequência central do segundo modo é em 50 Hz (alta frequência). O valor eficaz de tensão continua sendo de 20 MPa. A variância (área sob a curva) do segundo modo é a metade da variância do primeiro modo. O estudo de Zorman, Slavič e Boltežar (2023) analisa a razão entre a baixa e alta frequência, assim como a razão entre as variâncias dos dois modos. Este estudo foca somente na variação da largura do sinal (nos dois modos).

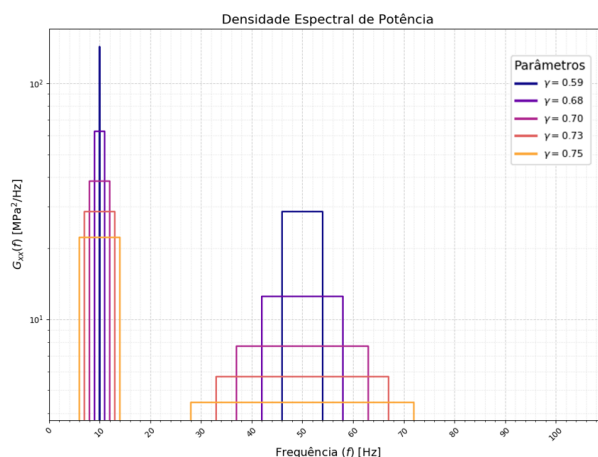


Figura 15: DEPs bimodais geradas numericamente utilizadas neste estudo.

Após definir as DEPs de tensão que servem como entrada para os modelos espectrais de análise de fadiga, prossegue-se para a validação das rotinas que geram sinais temporais a partir dessas DEPs. Inicialmente, é necessário determinar o período total do sinal temporal a ser gerado. Sinais com períodos curtos resultam em tempos de cálculo menores, mas podem comprometer a capacidade de representar adequadamente as DEPs.

O primeiro processo de validação consiste em definir o período do sinal temporal com base em uma análise visual. A Figura 16 apresenta a DEP original (linha azul) e outras DEPs (linhas de outras cores) geradas a partir de sinais temporais com diferentes períodos extraídos da DEP original. O objetivo é identificar o menor período em que a DEP gerada se assemelha suficientemente à DEP original. O momento espectral de ordem 0 λ_0 (que representa a variância) da DEP original é de 400 MPa².

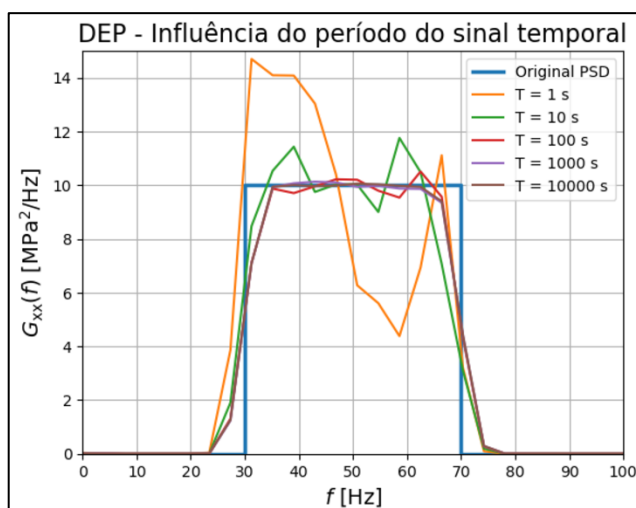


Figura 16: DEP original em azul e DEPs retraçadas a partir de sinais temporais de diferentes períodos (outras cores).

A Tabela 8 mostra o valor da variância para cada uma das DEPs traçadas e o erro relativo à DEP original.

Tabela 8: Erros relativos à variância para DEPs retraçadas a partir de sinais temporais de diferentes períodos T

T [S]	λ_0 [MPa ²]	Erro (%)
1	421,45	5,36
10	405,56	1,39
100	400,23	0,06
1000	399,76	0,06
10000	400,20	0,05

Fica claro, a partir da Figura 16, que períodos de 1 e 10 segundos não são bem representativos. Escolheu-se $T = 100$ s pois considera-se já ter uma boa representação visual da DEP e o erro dos valores da variância é da ordem de 0,06 %.

Os gráficos quantil – quantil na

Figura 17 permitem validar a hipótese da Gaussianidade para $T = 100$ s. A validação da hipótese de estacionaridade e a ergodicidade é dada em limitando o valor máximo gerado do sinal temporal como sendo não superior a oito vezes o valor eficaz de tensão.

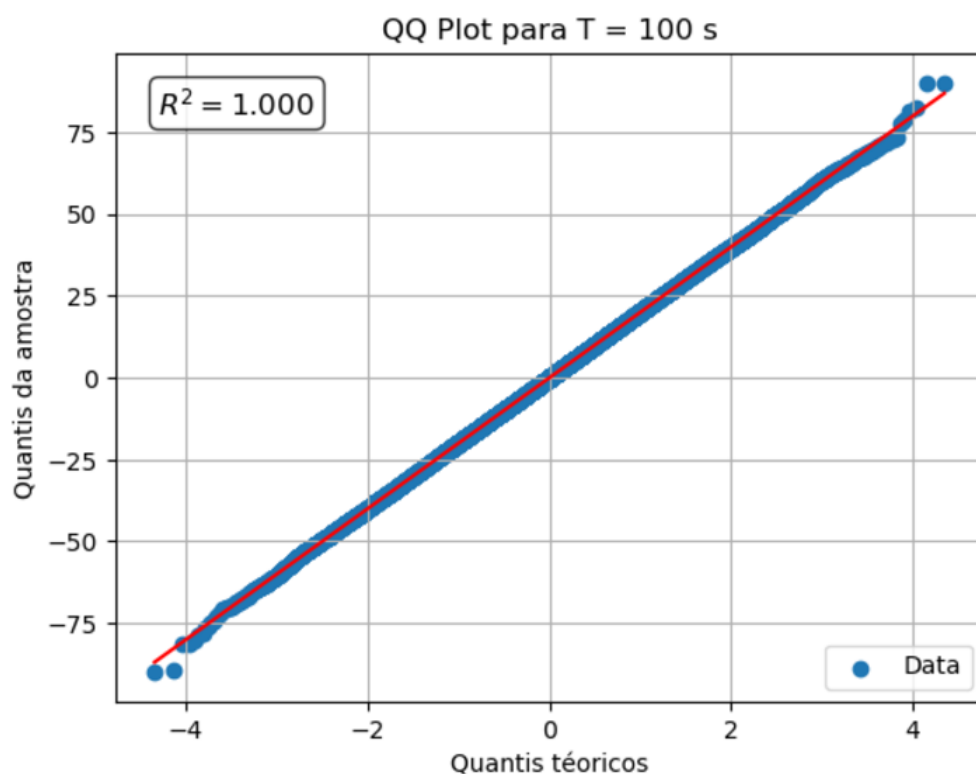


Figura 17: Gráfico Q-Q para um sinal temporal de 100s.

Antes ainda de iniciar os cálculos comparativos é preciso determinar o número de realizações temporais de período $T = 100$ s a partir do qual a esperança do dano começa a convergir. A Figura 18 mostra a duração de vida em fadiga média (inverso do dano médio) em função do número de realizações temporais de período $T = 100$ s realizadas. Para este estudo o valor de 100 realizações temporais foi escolhido, pois já é possível observar a convergência do valor da esperança da duração de vida em fadiga.

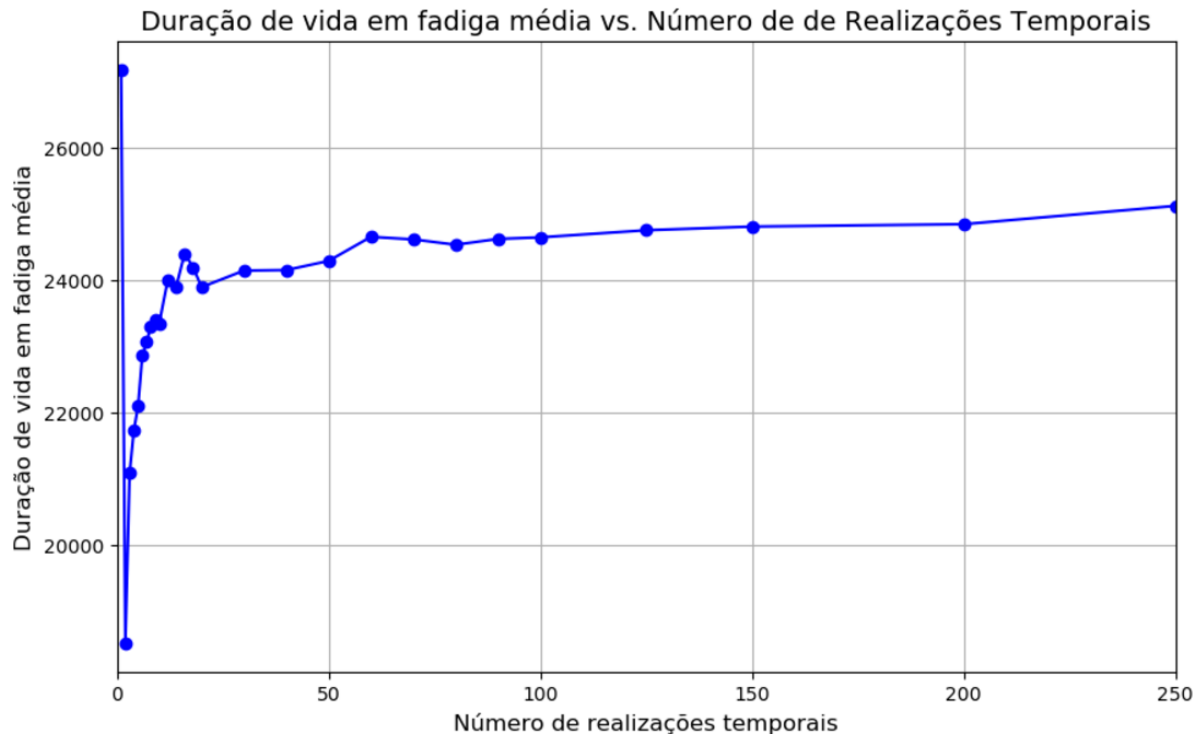


Figura 18 : Evolução da duração de vida em fadiga média em função do número de realizações temporais.

4.3 Resultados para os casos unimodais

Os resultados brutos encontram-se no Anexo 1. O resultado do método de Steinberg é apresentado na Figura 19. A principal métrica é o erro percentual em relação aos resultados de uma simulação no domínio do tempo. Valores próximos de 0 % indicam maior exatidão. Erros negativos representam métodos conservadores (o que pode resultar em um superdimensionamento), enquanto erros positivos indicam métodos não-conservadores (risco de falha antes do previsto). Essas análises consideram variações nos valores do expoente k da lei de Basquin e da largura de banda da DEP, representada pelo fator de irregularidade λ .

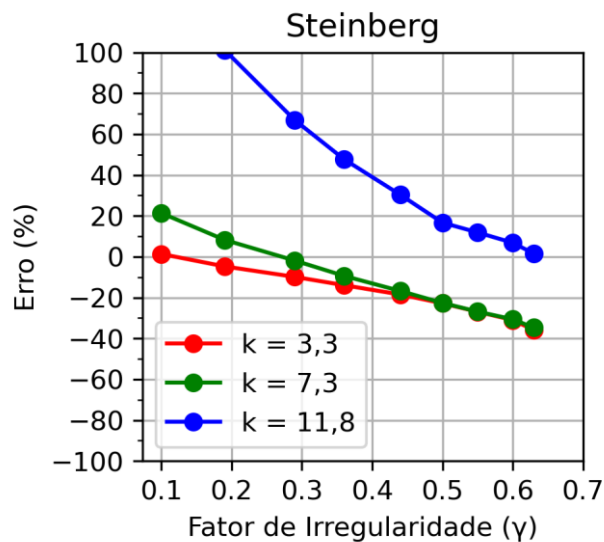


Figura 19: Erros relativos dos resultados obtidos pelo método de Steinberg, para diferentes valores de k e γ , em comparação com os resultados do domínio do tempo.

Para $k = 3,3$ e $k = 7,3$ e $\gamma < 0,50$ o método de Steinberg apresenta um bom resultado, com erros absolutos menores que 20 %. Para outros valores de γ , o método tem resultados muito conservadores. Para $k = 11,8$, o método é não-conservador para todos os valores de γ analisados, mas o erro tende a diminuir à medida que γ aumenta.

Os gráficos apresentados nas Figuras 20, 21 e 23 comparam os resultados para os métodos espectrais baseados nos trabalhos de Rice (1944) usados para análise de fadiga. De forma geral, o erro absoluto aumenta conforme o valor de k aumenta. À exceção do método de Tovo-Benasciutti 2 e de Bands, os resultados tendem a ser mais conservadores à medida que γ aumenta. Ou seja, DEPs de banda mais largas tendem a gerar resultados mais conservadores.

O método Narrow-Band serve como referência inicial e pode ser comparado diretamente com os métodos Wirsching-Light, Alfa0.75 e Ortiz-Chen, já que esses propõem coeficientes de correção ao método de aproximação Narrow-Band. O método de aproximação Narrow-Band teve resultados muito similares aos métodos de Tovo-Benasciutti 1 e Lalanne, estes estão sobrepostos nos gráficos. Eles tendem a ter melhores resultados quando o sinal analisado é de banda estreita ($\gamma \rightarrow 0$), contudo cabe ressaltar que os melhores resultados se deram quando γ assumiu valores entre 0,20 e 0,30. Para o menor fator de irregularidade analisado ($\gamma = 0,10$), os resultados são, em geral, não-conservadores. Para $k = 3,3$ os erros são sempre menores que 10%. Para $k = 7,3$ e $k = 11,8$ o erro é mais significativo, mas tende a ser conservador à medida que γ aumenta.

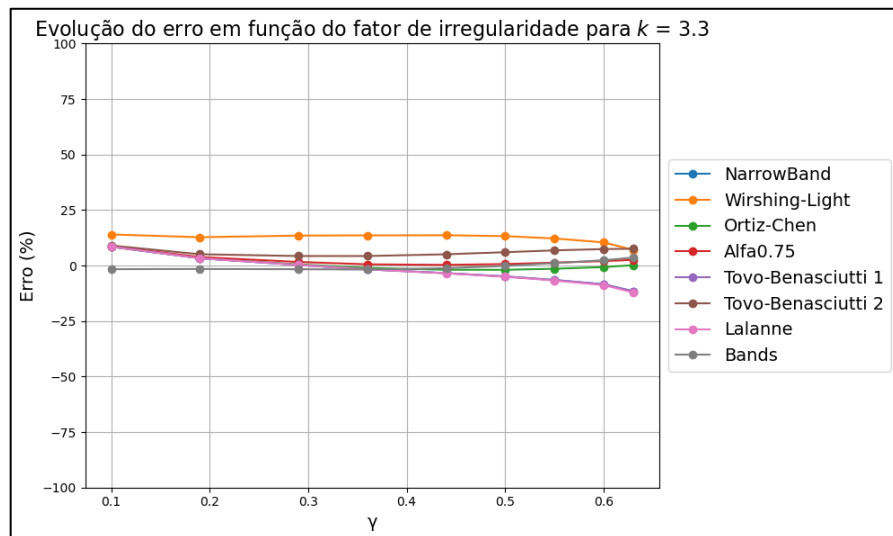


Figura 20: Erros relativos dos resultados obtidos pelos métodos do trabalho de Rice (1954) para DEPs unimodais com o valor de $k = 3,3$.

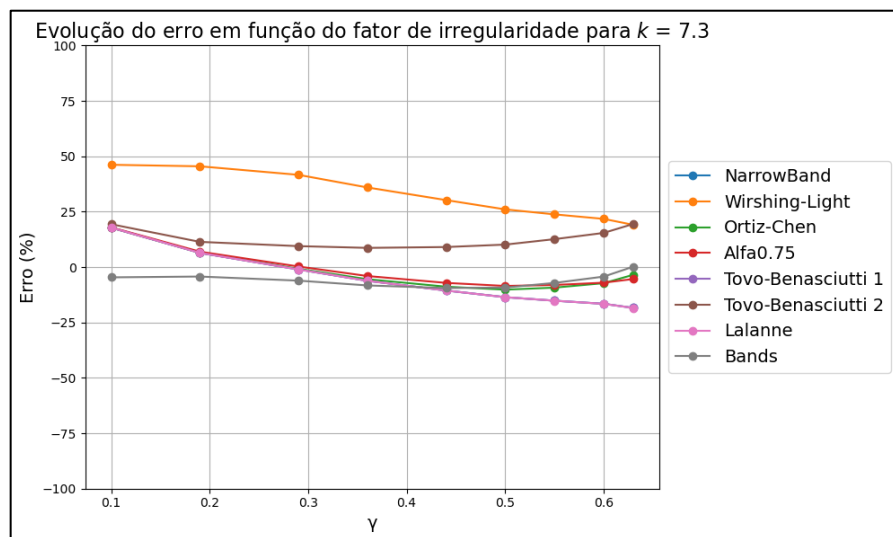


Figura 21: Erros relativos dos resultados obtidos pelos métodos do trabalho de Rice (1954) para DEPs unimodais com o valor de $k = 7,3$.

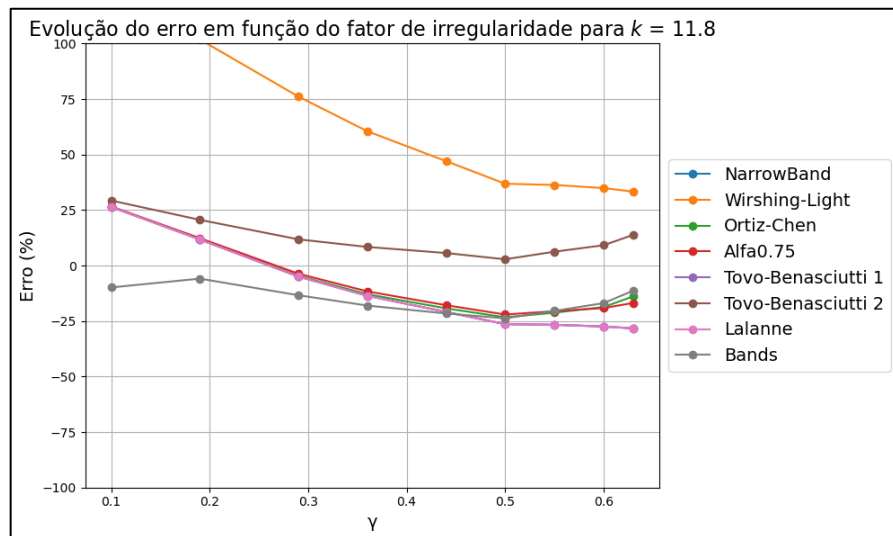


Figura 22: Erros relativos dos resultados obtidos pelos métodos do trabalho de Rice (1954) para DEPs unimodais com o valor de $k = 11,8$.

Apesar do método de Wirsching-Light propor um fator de correção no método de aproximação Narrow-Band, este foi o método que apresentou maiores desvios em comparação com o sinal temporal. Seus resultados são fortemente não-conservadores e ultrapassam um erro de 100 % para $k = 11,8$ e um sinal de banda estreita.

Já os métodos Alfa0.75 e de Ortiz-Chen propõem fatores de correções que funcionam bem para os sinais analisados, tendo resultados semelhantes, levemente conservadores. Para $k = 3,3$ o erro é inferior a 10 % para todos os valores de γ analisados.

Os dois métodos de Tovo-Benasciutti apresentam resultados similares para um valor de γ entre 0,10 e 0,19. O método 1 parece ser mais conservador em comparação ao método 2, quando $\gamma > 0,19$. No entanto, o método 2, apesar de ser não-conservador, apresenta um menor valor de erro absoluto. Por fim, o método Lalanne apresenta comportamento similar ao método de Tovo-Benasciutti 1, esses dois tendo resultados muito semelhantes ao método de aproximação NarrowBand, conforme mencionado.

O método de Bands surpreende por produzir resultados com erros quase nulos para $k = 3,3$ e para todos os fatores de largura de banda e, ao contrário da maioria dos métodos, ele é conservador mesmo para $\gamma = 0,10$. Os resultados são levemente mais conservadores para os valores de k mais elevados.

Os gráficos apresentados nas Figuras 23, 24 e 25 comparam os resultados para os métodos espectrais baseados na aproximação empírica da contagem Rainflow. Em um primeiro momento, cabe ressaltar que o mesmo fenômeno visto nos métodos anteriores

acontece aqui: os menores erros absolutos também ocorrem para o menor valor de k e para valores de γ muito pequenos todos os métodos são não conservadores.

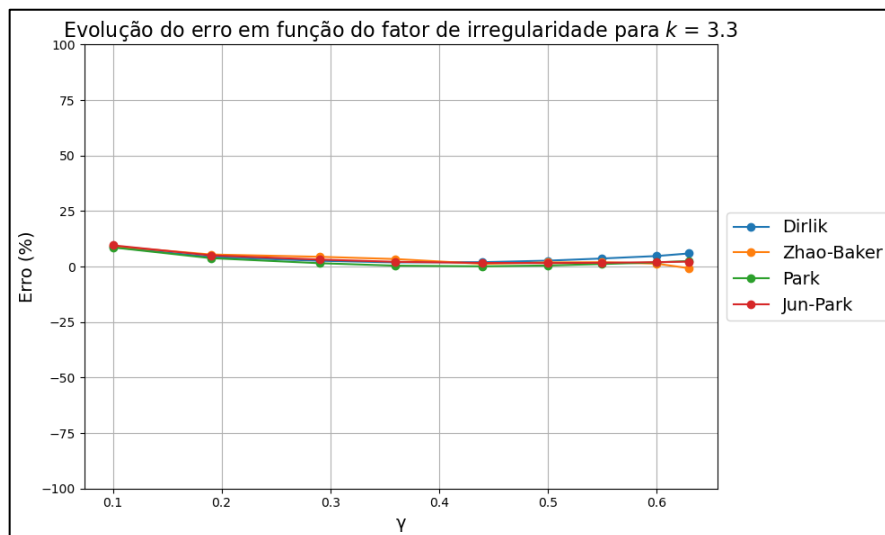


Figura 23: Erros relativos dos resultados obtidos pelos métodos baseados na contagem Rainflow para DEPs unimodais com o valor de $k = 3,3$.

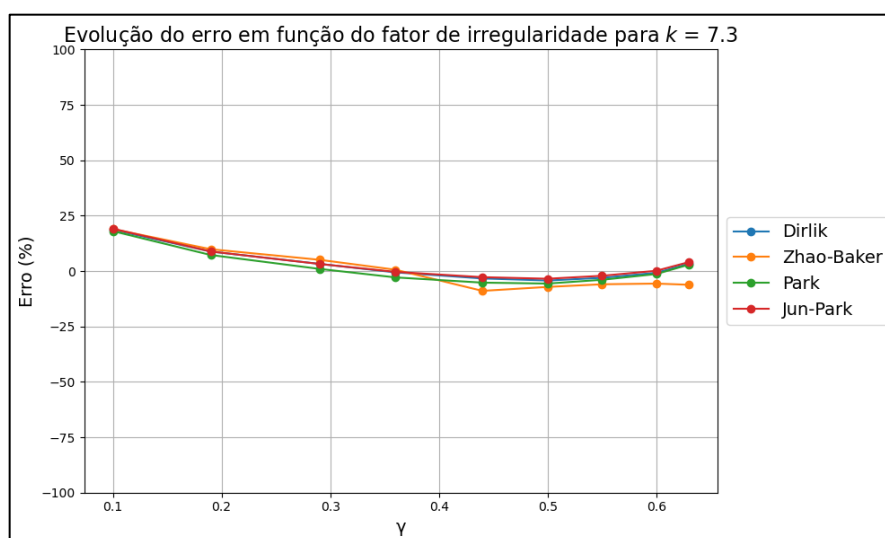


Figura 24: Erros relativos dos resultados obtidos pelos métodos baseados na contagem Rainflow para DEPs unimodais com o valor de $k = 7,3$.

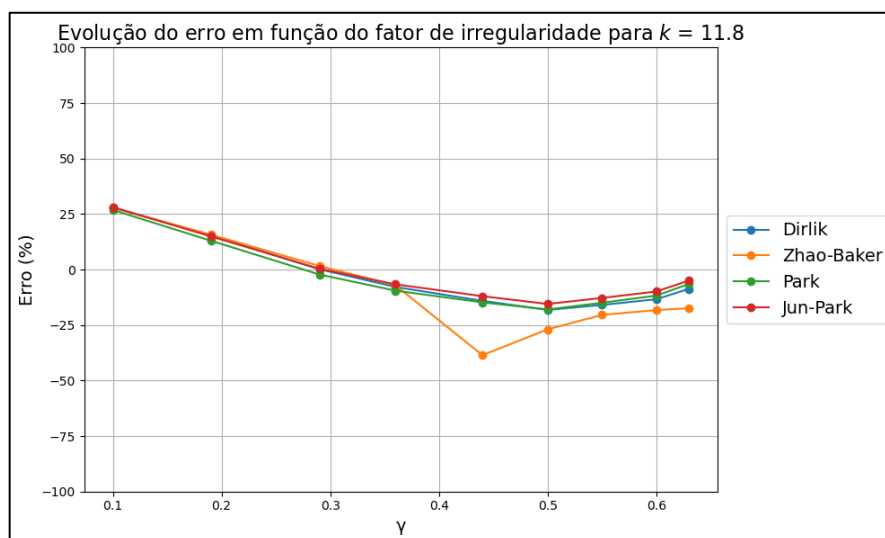


Figura 25: Erros relativos dos resultados obtidos pelos métodos baseados na contagem Rainflow para DEPs unimodais com o valor de $k = 11,8$.

Em paralelo com os métodos previamente analisados, os valores de erros para $k = 3,3$ são os menores absolutos. Para $k = 7,3$, o valor do erro absoluto também é pequeno. No entanto, mesmo que no geral o erro para $k = 11,8$ seja maior do que para outros valores de k , os erros destes métodos são menores, em geral, do que os calculados para métodos baseados no trabalho de Rice (1944).

Os métodos de Dirlik, Park e Jun-Park apresentam o mesmo comportamento. Erro próximo a 0 % para todos os k quando $\gamma = 0.29$ e erros próximos de zero quando $\gamma > 0.29$ e $k = 3,3$ e $7,3$. Os erros são menores que $|20 \text{ \%}|$ para esses métodos mesmo quando $k = 11,8$. No entanto, o método de Zhao Baker não segue essa tendência, apresentado alguns erros da ordem de $-40 \text{ \%}$ para $k = 11,8$ e $\gamma = 0,44$.

As Figuras 26, 27 e 28 apresentam os resultados para os métodos combinados. Fica claro que alguns deles não são adaptados para lidarem com sinais utilizados neste estudo, em especial: os métodos de Lotsberg, Sakai-Okamura, Low bimodal e Gao-Moan. Estes métodos foram desenvolvidos para DEPs bimodais. No entanto, os métodos de Jiao-Moan, Fu-Cebon, modified Fu-Cebon e Huang-Moan também foram pensados para DEPs bimodais, mas ainda assim produzem resultados interessantes para DEPs unimodais.

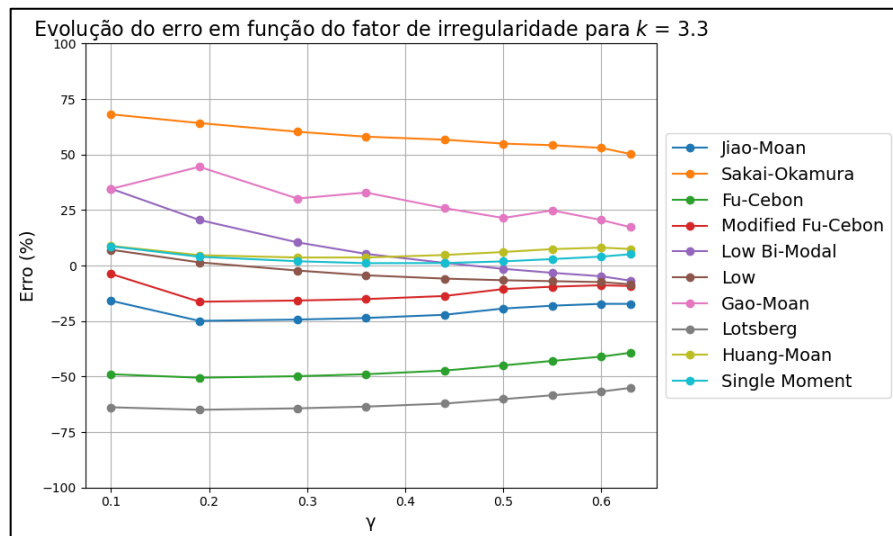


Figura 26: Erros relativos dos resultados obtidos pelos métodos combinados para DEPs unimodais com o valor de $k = 3,3$.

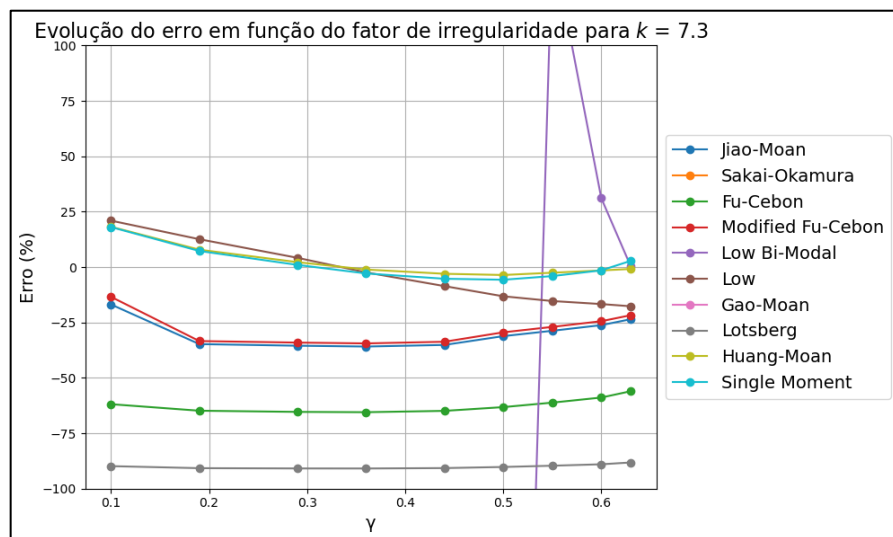


Figura 27: Erros relativos dos resultados obtidos pelos métodos combinados para DEPs unimodais com o valor de $k = 7,3$.

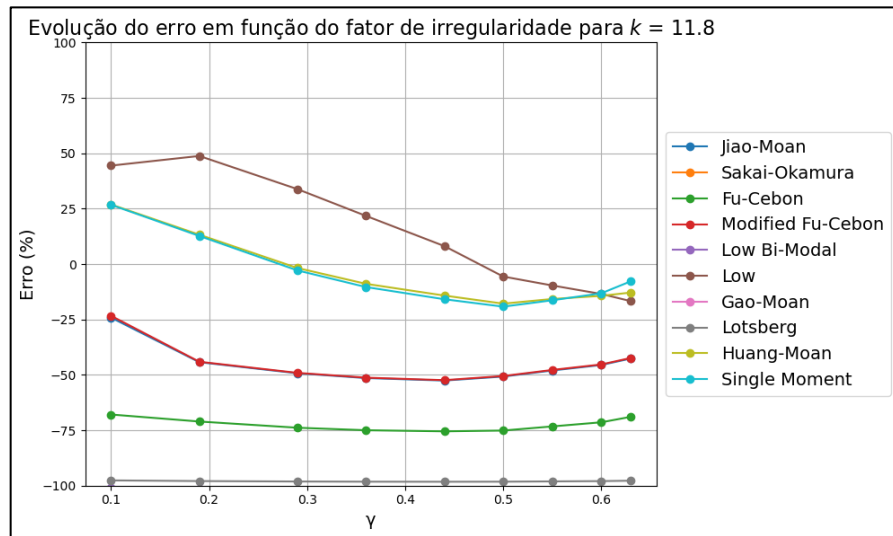


Figura 28: Erros relativos dos resultados obtidos pelos métodos combinados para DEPs unimodais com o valor de $k = 11,8$.

O método Single-Moment gera resultados semelhantes àqueles observados nas análises prévias, tendo um erro sempre inferior à 20% para $k = 3,3$ e $k = 7,3$. O método de Jiao-Moan apresenta erros elevados, mas, diferentemente dos outros métodos, produz resultados conservadores mesmos para valores de γ baixos. O método de Huang-Moan, para $\gamma > 0,29$, produz resultados com erro quase nulo para $k = 7,3$, resultados levemente não conservadores para $k = 3,3$ e conservadores para $k = 11,3$.

O método de Low Bimodal produz resultados coerentes para $k = 3,3$. Para $k = 7,3$ e $k = 11,8$ não há resultados satisfatórios. O método de Low produz resultados conformes, seguindo a tendência dos resultados de outros métodos. O método de Fu-Cebon é muito conservador, sendo a sua versão modificada menos conservadora.

Para as DEPs unimodais, pode-se eleger os métodos de Dirlik, Park, Jun-Park e Bands como sendo os mais adequados, pois apresentaram a maior quantidade de erros absolutos inferiores à 10%. Os erros destes métodos são apresentados na Figura 29. Com a exceção do método de Bands, todos os outros compartilham-se de maneira bem similar. O método de Bands difere-se dos demais por apresentar resultados mais conservadores, mesmo para valores de $\gamma < 0,3$. Nota-se que as curvas em azul ($k = 11,8$) apresentam o comportamento mais extremo, ou seja, têm a tendência de terem o maior erro absoluto. E para $k = 3,3$, os resultados são semelhantes usando qualquer um dos métodos. Há um leve aumento no valor do erro quando $\gamma < 0,5$.

A Figura 30 mostra os erros para os métodos presentes em softwares de Engenharia. Fica claro a melhor performance do método de Dirlik, seguido pelo método de Lalanne e Narrow-Band, esses dois tendo resultados muito similares. O método de Steinberg, mais simples, apresenta um resultado tolerável para $k = 3,3$ e $k = 7,3$. Nota-se que os erros tendem a diminuir com o aumento do fator de irregularidade.

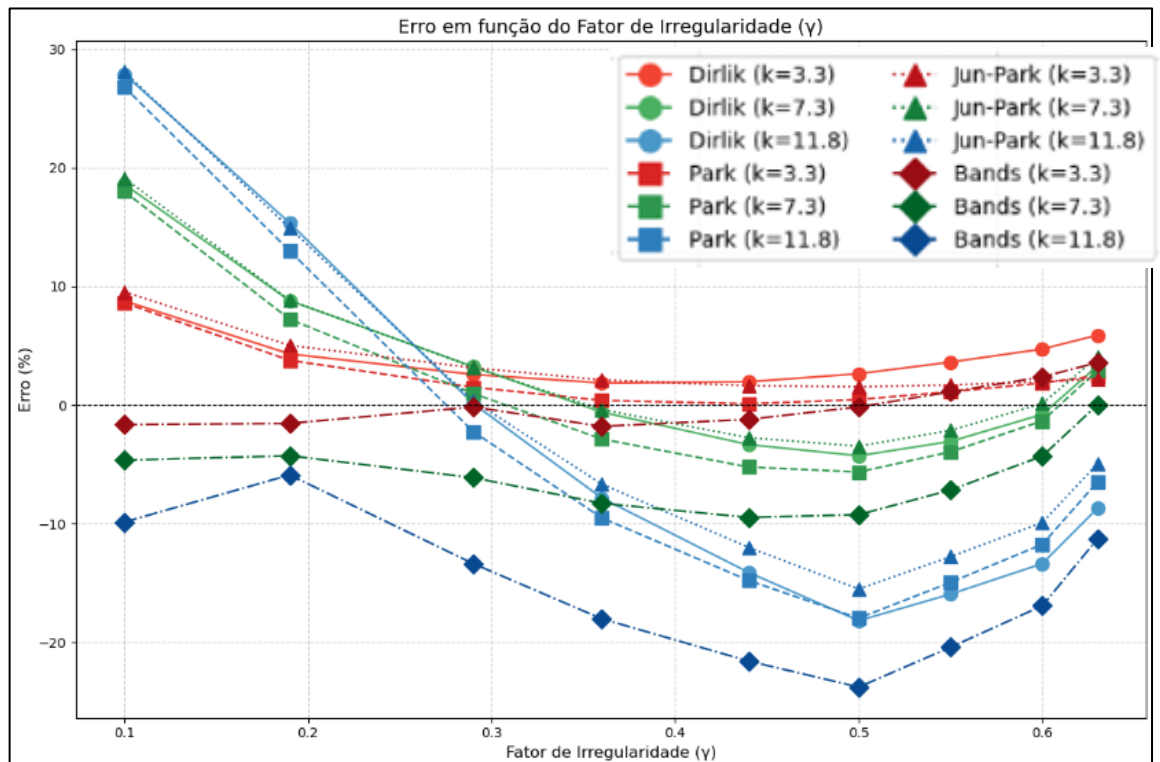


Figura 29: Comparação entre os métodos melhores resultados para as DEPs unimodais.

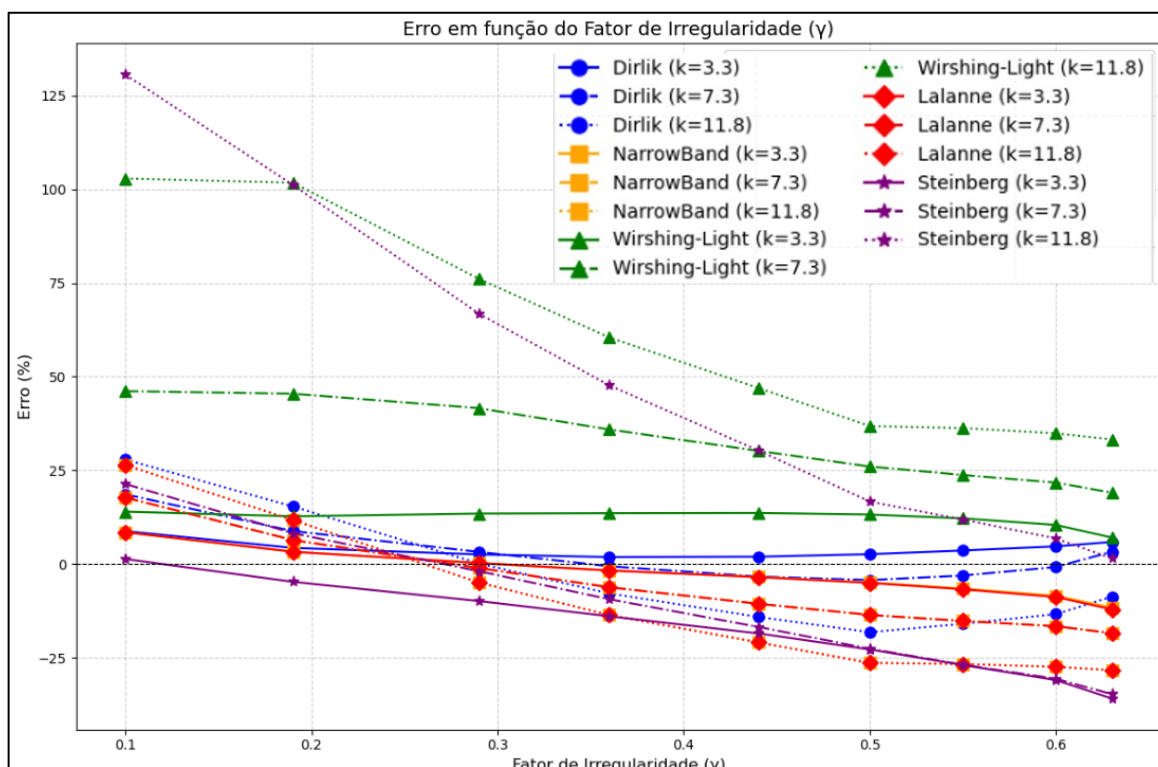


Figura 30: Comparação dos erros das DEPs unimodais para métodos disponíveis em softwares de engenharia.

4.4 Resultados para os casos bimodais

O Anexo 2 apresenta os resultados absolutos para as DEPs bimodais. As Figuras 31, 32 e 33 apresentam os erros para as DEPs bimodais analisadas utilizando métodos que propunham a divisão da DEP em alta e baixa frequência.

O método de Jiao-Moan, para o mesmo fator de irregularidade da DEP unimodal, é conservador, enquanto neste contexto, é não-conservador. O método de Lotsberg apresenta erros absolutos menores em comparação à DEP unimodal para $k = 3,3$, com uma redução de aproximadamente 40 % para o mesmo fator de irregularidade. Os métodos Low e Low bimodal exibem erros absolutos pequenos e tendem a ser levemente conservadores, demonstrando desempenho muito superior em DEPs bimodais.

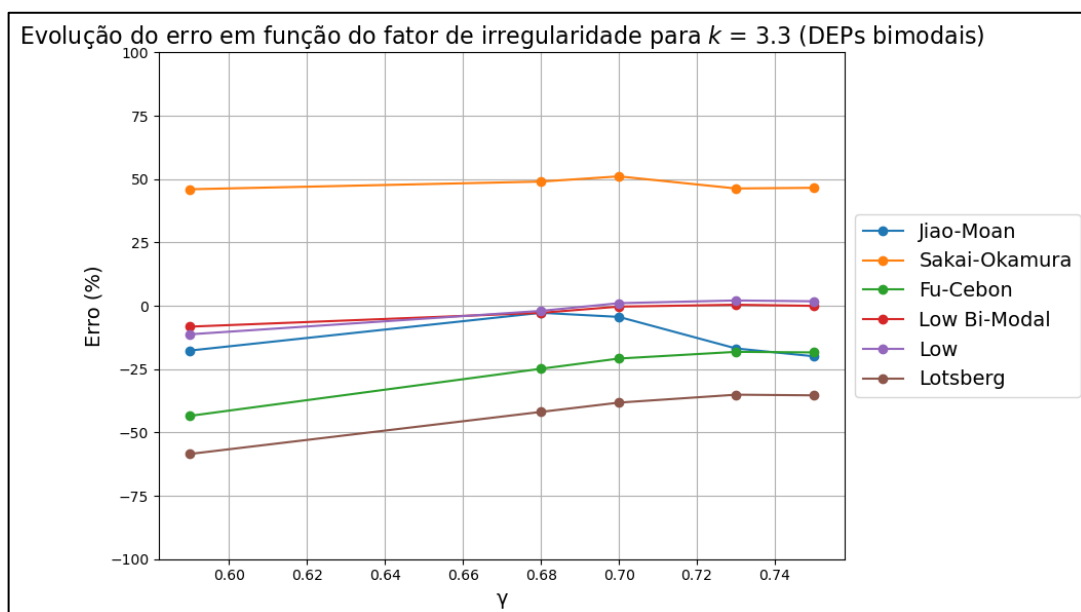


Figura 31: Erros relativos dos resultados obtidos pelos métodos adaptados para casos bimodais para DEPs bimodais com o valor de $k = 3,3$.

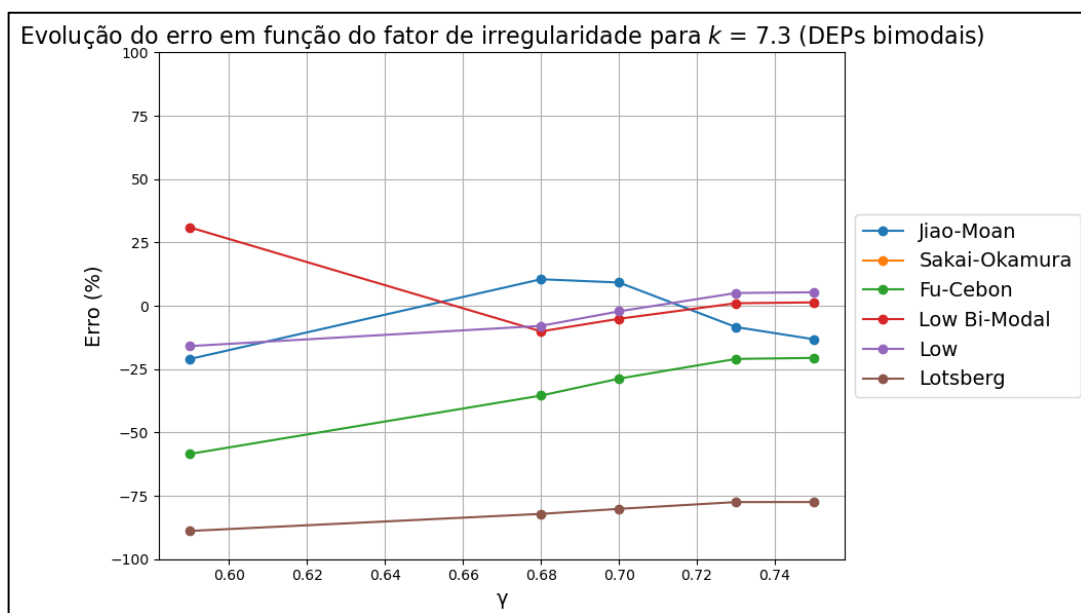


Figura 32: Erros relativos dos resultados obtidos pelos métodos adaptados para casos bimodais para DEPs bimodais com o valor de $k = 7,3$.

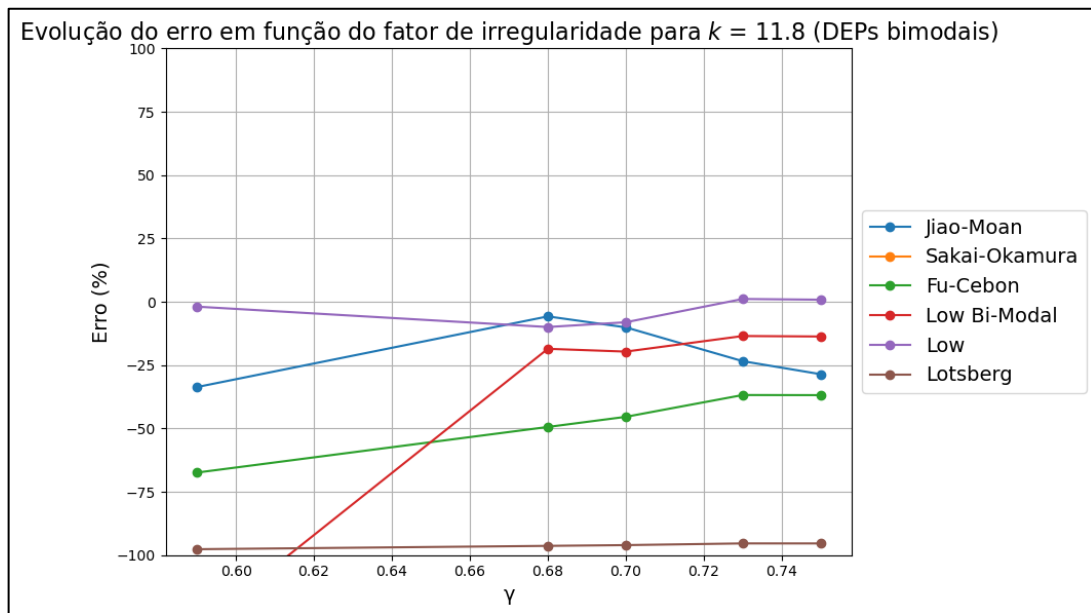


Figura 33: Erros relativos dos resultados obtidos pelos métodos adaptados para casos bimodais para DEPs bimodais com o valor de $k = 11,8$.

Para os métodos de Fu-Cebon e Modified Fu-Cebon, o erro aumentou em 20 % em comparação com os resultados da DEP unimodal. Contudo, isso resultou em erros absolutos menores e menos conservadores para o método de Fu-Cebon, enquanto o método Modified Fu-Cebon gerou resultados não conservadores. O método de Huang-Moan apresentou bom desempenho, com erros comparáveis aos observados em uma DEP unimodal. Já o método de Sakai-Okamura mostrou uma redução de erro de cerca de 20 %, embora o erro permaneça superior a 100% para $k = 7,3$ e $k = 11,8$.

As Figuras 34, 35 e 36 mostram os erros dos demais métodos para DEPs bimodais. Ao comparar um mesmo fator de irregularidade da DEP unimodal com o da DEP bimodal, observa-se que, de modo geral, o erro tende a aumentar. Isso indica que os métodos se tornam menos conservadores ou até mesmo mais não-conservadores. O aumento do erro situa-se, em média, entre 10 % e 20 %. Uma exceção marcante é o método de aproximação Narrow-Band, que apresentou um erro muito próximo ao obtido para uma DEP unimodal. O método de Gao-Moan também demonstrou resultados significativamente mais satisfatórios em DEPs bimodais. Além disso, o valor de k parece exercer menor influência nos resultados das DEPs bimodais, embora, de forma geral, erros absolutos tendam a ser maiores para valores mais elevados de k .

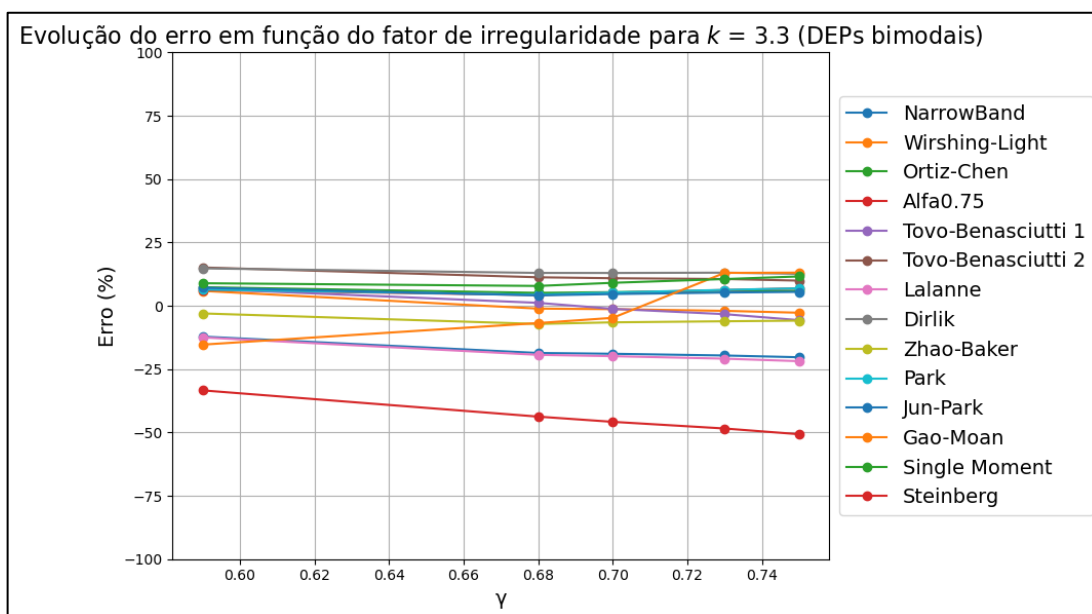


Figura 34: Erros relativos dos resultados obtidos pelos demais métodos para DEPs bimodais com o valor de $k = 3,3$.

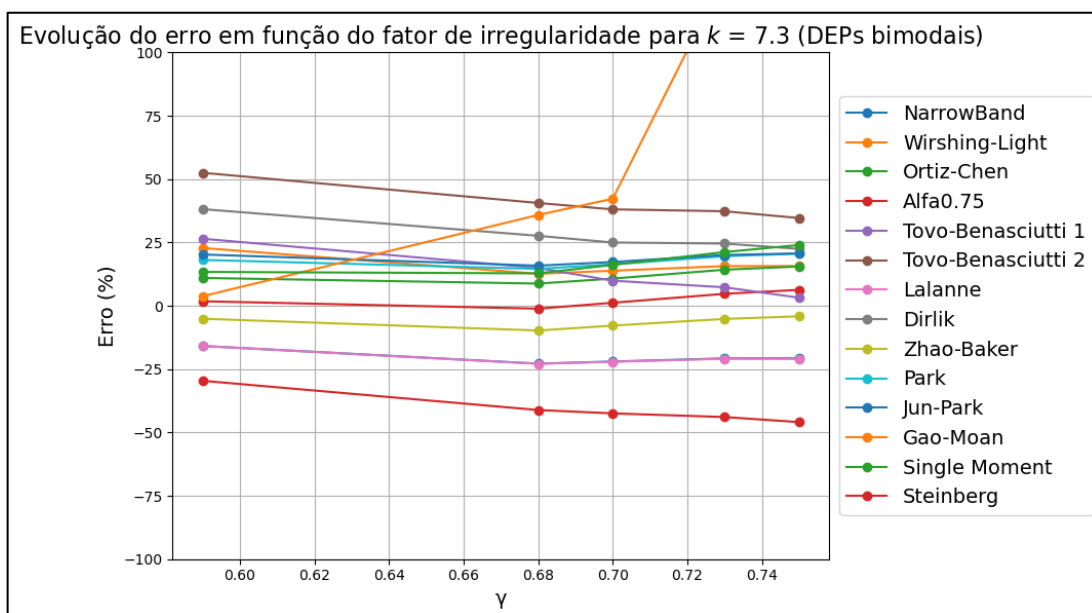


Figura 35: Erros relativos dos resultados obtidos pelos demais métodos para DEPs bimodais com o valor de $k = 7,3$.

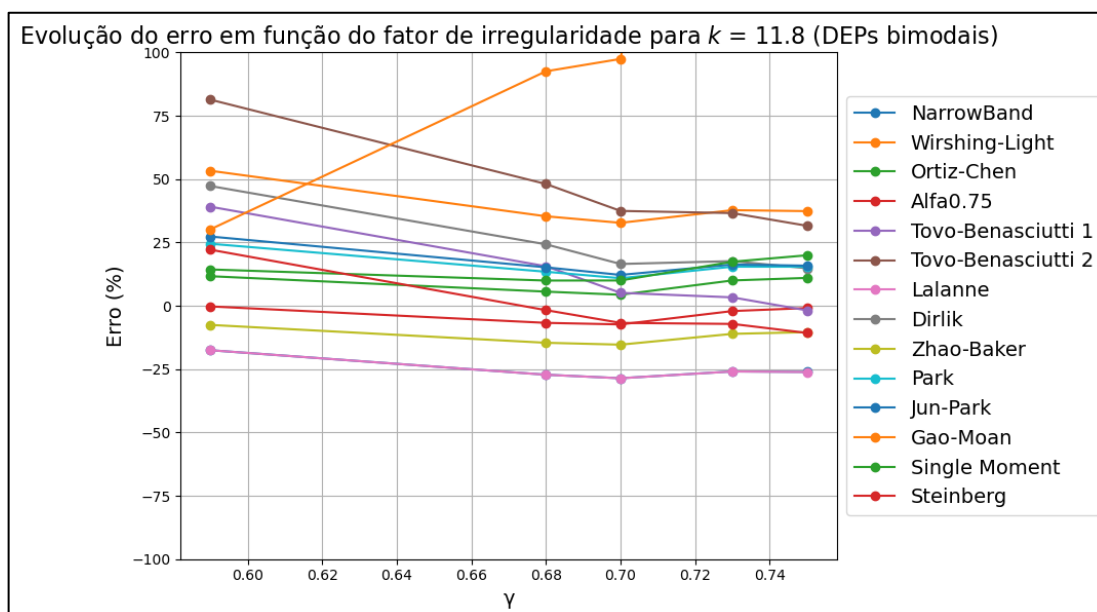


Figura 36: Erros relativos dos resultados obtidos pelos demais métodos para DEPs bimodais com o valor de $k = 11,8$.

4.5 Análise global dos resultados

A tendência global encontrada é que os valores absolutos do erro tendem a aumentar à medida que k aumenta, assim como os métodos tendem a ter resultados mais conservadores com o aumento do fator de irregularidade γ .

A formulação mais simples do método do Steinberg produz resultados satisfatórios para certas configurações. Este resultado confirma que, por vezes, não é preciso recorrer a formulações mais complexas, que resultam em maior custo computacional. Quanto ao método de Wirshing-Light, presente em softwares de engenharia, cabe ressaltar que ele só produz resultados não-conservadores, produzindo erros maiores que 20% para $k = 7,3$ e $k = 11,8$ nas DEPs unimodais. Para as DEPs bimodais e $k = 3,3$, o erro é quase nulo, o que pode ser interessante neste contexto.

O método de Narrow-Band possui limitações intrínsecas ao seu desenvolvimento, resultando em resultados muito conservadores para fatores de irregularidade alto. Por fim, o método de Dirlik, entre os métodos disponíveis em softwares de engenharia, parece ser o mais adaptado para todos os tipos de cenários.

Para $k = 3,3$, os resultados são coerentes com aqueles encontrados por Benasciutti e Tovo (2006), Mršnik, Slavič e Boltežar (2013), Rognon (2013) e Zorman, Slavič, Boltežar (2023). O aumento do erro absoluto associado ao aumento do fator de irregularidade (γ)

também foi observado por Rognon (2013), Quigley et al. (2016) e Zorman, Slavič e Boltežar (2023).

Larsen e Irvini (2015) estudaram a performance dos métodos espectrais para valores de k iguais a 7 e 12, concluindo que o método de Alfa0.75 e o método Single Moment foram os únicos que apresentaram resultados satisfatórios para $k = 12$. Esses dois métodos apresentaram erros da ordem de 20% neste estudo. No entanto, para fatores de irregularidade da ordem de 10 % ($\gamma = 0,1$), esses métodos apresentaram erros não-conservadores superiores a 20%. Situação similar ocorre para os métodos de Dirlik (analisado pelos autores), Tovo-Benasciutti 2, Huang-Moan, Park e Jun-Park. Contudo, os métodos de Park e Jun-Park parecem apresentar performances ainda mais satisfatórias, pois o erro absoluto diminui para valores de $\gamma > 0,55$ e $k = 11,8$.

Outro fator a ser considerado é que o método Narrow-Band apresentou seus menores erros para fatores de irregularidade de $\gamma = 0,19$, 0,29 e 0,36 (DEPs unimodais). Esses valores correspondem a uma banda estreita, e os resultados são coerentes com os trabalhos de Mršnik, Slavič e Boltežar (2013), Rognon (2013), Larsen e Irvine (2015) e Zorman, Slavič e Boltežar, (2023). No entanto, para $\gamma = 0,10$ (banda muito estreita), os erros estão na mesma ordem que os observados por outros métodos, algo semelhante pode ser visto no trabalho de Larsen e Irvine (2015).

O método Dirlik, extensivamente analisado e recomendado em diversos estudos (BENASCIUTTI; TOVO, 2006, 2006; MRŠNIK; SLAVIČ; BOLTEŽAR, 2013; QUIGLEY et al., 2016) apresenta erros menores que 10 % para $k = 3,3$ e $k = 7,3$, com um valor de $\gamma > 0,19$. Ele é conservador, prevendo resultados seguros, mas sem excessos, o que evita o superdimensionamento da estrutura. Segundo Rognon (2013), um fator a ser levado em conta é a sino de Dirlik que em alguns casos pode impactar negativamente os resultados.

O método de Zhao Baker, nas DEPs unimodais, apresenta resultados satisfatórios para $k = 3,3$ e 7,3, mas para $\gamma = 0,44$ e $k = 11,8$, o erro atinge rapidamente – 40 %, o que não parece ser coerente com o encontrado por Benasciutti e Tovo (2006) e Zorman, Slavič e Boltežar (2023).

5 Conclusões

Mesmo que a abordagem no domínio do tempo seja mais fácil de compreender, isso não significa que seja a mais simples de implementar numericamente. Outras leis materiais para a fadiga existem, mas suas implementações em métodos espectrais são muito raras ou até inexistentes. Neste estudo, todas as simulações foram realizadas considerando a lei de Basquin (em termos de tensão). A plasticidade, por exemplo, não foi considerada, pois era necessário descrever o comportamento em fadiga em função da deformação, e não a partir da tensão.

Apesar deste estudo se concentrar na análise de determinadas DEPs de tensão, em um software de engenharia seria necessário realizar os cálculos para cada elemento finito, pois cada um teria sua própria DEP de tensão. O formato da DEP de tensão é influenciado pela função de resposta em frequência, ou seja, pelos modos de vibração da peça. Cada componente pode ser afetado por um ou mais modos, o que implica na existência de uma variedade de tipos de DEPs dentro de um mesmo sistema. Além disso, em um mesmo projeto, podem ser utilizados diferentes materiais, o que também afeta a escolha do método de análise espectral mais apropriado. Por isso o interesse em buscar um método global.

As simulações no domínio temporal validam os resultados obtidos no domínio espectral, embora essa abordagem nem sempre seja prática. Os diferentes métodos espectrais apresentam desempenhos variados dependendo das características da DEP. O método de Dirlik, por exemplo, fornece resultados consistentes, independentemente da forma da DEP, enquanto outros métodos, como os de Lallane e Narrow Band, são mais adequados para DEP de banda estreita. Embora o método de Steinberg seja mais fácil de compreender, ele apresenta muitos erros, e nesta pesquisa, revelou-se pouco conservador. Os métodos de Ortiz-Chen e Alfa0.75 dão bastante citados em outros estudos e apresentam uma performance satisfatória neste estudo.

Por fim, cita-se também que certos métodos que não são amplamente observados na literatura, mas parecem obter resultados promissores para DEPs unimodais: Park, Jun-Park, Huang-Moan e Bands. Para DEPs bimodais, os resultados do método de Low e Huang-Moan são os mais promissórios. De modo geral, pode-se recomendar os modos de Dirlik, Huang-Moan, Bands, Alfa0.75 e Ortiz-Chen como sendo os métodos que apresentaram os melhores resultados para todas as diferentes configurações analisadas. Por fim, pode-se dizer, no geral, que os erros absolutos tendem a serem maiores para os maiores valores de k e o aumento do fator de irregularidade γ está ligado a uma diminuição

do valor do erro, havendo uma transição entre resultados não-conservadores para resultados conservadores.

5.1 Trabalhos futuros

Expandir o estudo da fadiga no domínio espectral para casos multiaxiais e desenvolver uma abordagem que permita tratar situações com características não gaussianas, implementando o Espectro de Dano por Fadiga, seria benéfico. A análise multiaxial é crucial para refletir melhor as condições reais de operação de componentes mecânicos sujeitos a tensões em várias direções, aumentando a precisão dos resultados.

Por outro lado, a inclusão de casos não gaussianos ampliaria a aplicabilidade do método, já que muitas condições reais de carregamento não seguem distribuições gaussianas. Essa implementação poderia fornecer percepções mais detalhadas sobre a distribuição do dano e melhorar a confiabilidade das projeções de vida útil, especialmente em contextos em que o comportamento do material é altamente dependente de características estatísticas complexas dos carregamentos aplicados.

Desenvolver um modelo que utilize uma lei de comportamento em fadiga levando em conta a plasticidade, como a de Manson-Coffin, permitiria uma estimativa mais realista da vida útil dos componentes, especialmente em regimes de altos níveis de deformação. Essa abordagem possibilitaria uma melhor representação dos efeitos de acumulação de dano devido a ciclos de carga severos, contribuindo para um projeto mais robusto e seguro de estruturas sujeitas a fadiga.

Por fim, considera-se o uso da inteligência artificial para selecionar o método espectral mais adequado a um determinado modelo. Essa abordagem permitiria automatizar e otimizar o processo de escolha, especialmente em sistemas com diversos elementos finitos e com uma grande variedade de DEPs.

6 Referências Bibliográficas

- ALTAIR. **Random Response Fatigue Analysis**. concept. Disponível em: <https://2021.help.altair.com/2021.1/hwsolvers/os/topics/solvers/os/analysis_random_response_fatigue_c.htm>. Acesso em: 7 dez. 2024.
- AMZALLAG, C. et al. Standardization of the rainflow counting method for fatigue analysis. **International Journal of Fatigue**, v. 16, n. 4, p. 287–293, jun. 1994.
- ANSYS. **19.11.3.2. Fatigue Result Methods for Random Vibration (Spectral) Fatigue**. Disponível em: <https://ansyshelp.ansys.com/public/Views/Secured/corp/v242/en/wb_sim/ds_spectral_fatigue_methods.html>. Acesso em: 7 dez. 2024.
- BASQUIN, O. H. **The Exponential Law of Endurance**. [s.l.] ASTM, 1910.
- BASTENAIRE, F. A. **New method for the statistical evaluation of constant stress amplitude fatigue-test results**. [s.l.] ASTM, 1972.
- BENASCIUTTI, D. **Fatigue analysis of random loadings**. Ferrara: University of Ferrara, 2004.
- BENASCIUTTI, D.; TOVO, R. Spectral methods for lifetime prediction under wide-band stationary random processes. **International Journal of Fatigue**, Cumulative Fatigue Damage Conference - University of Seville 2003. v. 27, n. 8, p. 867–877, 1 ago. 2005.
- BENASCIUTTI, D.; TOVO, R. Comparison of spectral methods for fatigue analysis of broad-band Gaussian random processes. **Probabilistic Engineering Mechanics**, v. 21, n. 4, p. 287–299, 1 out. 2006.
- BRACCESI, C.; CIANETTI, F.; TOMASSINI, L. Random fatigue. A new frequency domain criterion for the damage evaluation of mechanical components. **International Journal of Fatigue**, v. 70, p. 417–427, 1 jan. 2015.
- CHABOCHE, J. L.; LESNE, P. M. A Non-Linear Continuous Fatigue Damage Model. **Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures**, v. 11, n. 1, p. 1–17, 1988.
- D'ANTUONO, P. An analytical relation between the Weibull and Basquin laws for smooth and notched specimens and application to constant amplitude fatigue. **Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures**, v. 43, 4 dez. 2019.
- DIRLIK, T. Application of computer in fatigue analysis. 1 jan. 1985.
- FU, T.-T.; CEBON, D. Predicting fatigue lives for bi-modal stress spectral densities. **International Journal of Fatigue**, v. 22, n. 1, p. 11–21, 1 jan. 2000.

- GAO, Z.; MOAN, T. Frequency-domain fatigue analysis of wide-band stationary Gaussian processes using a trimodal spectral formulation. **International Journal of Fatigue**, v. 30, n. 10, p. 1944–1955, 1 out. 2008.
- HALFPENNY, D. A.; KIHM, M. F. **RAINFLOW CYCLE COUNTING AND ACOUSTIC FATIGUE ANALYSIS TECHNIQUES FOR RANDOM LOADING**. 2010. Disponível em: <<https://www.semanticscholar.org/paper/RAINFLOW-CYCLE-COUNTING-AND-ACOUSTIC-FATIGUE-FOR-Halfpenny-Kihm/e33151b5b15f84e1a7a449fef5b33fb25e7c2465>>. Acesso em: 18 abr. 2024
- HENAFF, G.; MOREL, F. **Fatigue des structures: Endurance, critères de dimensionnement, propagation des fissures, rupture**. [s.l.] ELLIPSES, 2005.
- HOSSEINI, Z. S. et al. On the theoretical modeling of fatigue crack growth. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, v. 121, p. 341–362, 1 dez. 2018.
- HUANG, W.; MOAN, T. **Fatigue Under Combined High and Low Frequency Loads**. Volume 3: Safety and Reliability; Materials Technology; Douglas Faulkner Symposium on Reliability and Ultimate Strength of Marine Structures. **Anais...** Em: 25TH INTERNATIONAL CONFERENCE ON OFFSHORE MECHANICS AND ARCTIC ENGINEERING. Hamburg, Germany: ASMEDC, 1 jan. 2006. Disponível em: <<https://asmedigitalcollection.asme.org/OMAE/proceedings/OMAE2006/47489/149/320447>>. Acesso em: 29 jul. 2024
- JIAO, G.; MOAN, T. Probabilistic analysis of fatigue due to Gaussian load processes. **Probabilistic Engineering Mechanics**, v. 5, n. 2, p. 76–83, 1 jun. 1990.
- JUN, S.-H.; PARK, J.-B. Development of a novel fatigue damage model for Gaussian wide band stress responses using numerical approximation methods. **International Journal of Naval Architecture and Ocean Engineering**, v. 12, p. 755–767, 1 jan. 2020.
- KUN, F. et al. Universality behind Basquin's law of fatigue. **Physical Review Letters**, v. 100, n. 9, p. 094301, 4 mar. 2008.
- LALANNE, C. **Fatigue Damage**. 2ème ed. [s.l.: s.n.]. v. 4
- LARSEN, C. E.; IRVINE, T. A Review of Spectral Methods for Variable Amplitude Fatigue Prediction and New Results. **Procedia Engineering**, 3rd International Conference on Material and Component Performance under Variable Amplitude Loading, VAL 2015. v. 101, p. 243–250, 1 jan. 2015.
- LARSEN, C. E.; LUTES, L. D. **Predicting the Fatigue Life of Offshore Structures by the Single-Moment Spectral Method**. (I. Elishakoff, Y. K. Lin, Eds.) Stochastic Structural Dynamics 2. **Anais...** Berlin, Heidelberg: Springer, 1991.

- LEE, Y.-L. **Fatigue Testing and Analysis: Theory and Practice**. [s.l.] Butterworth-Heinemann, 2005.
- LEIS, B. N. A Nonlinear History-Dependent Damage Model for Low Cycle Fatigue. 1 jan. 1988.
- LI, B. et al. Fatigue Assessment of Monopile Supported Offshore Wind Turbine under Non-Gaussian Wind Field. **Shock and Vibration**, v. 2021, p. e6467617, 4 ago. 2021.
- LOTSBERG, I. **Background for Revision of DNV-RP-C203 Fatigue Analysis of Offshore Steel Structure**. 24th International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering: Volume 3. **Anais...** Em: ASME 2005 24TH INTERNATIONAL CONFERENCE ON OFFSHORE MECHANICS AND ARCTIC ENGINEERING. Halkidiki, Greece: ASMEDC, 1 jan. 2005. Disponível em: <<https://asmedigitalcollection.asme.org/OMAE/proceedings/OMAE2005/41979/297/303556>>. Acesso em: 15 jan. 2025
- LOW, Y. M. A method for accurate estimation of the fatigue damage induced by bimodal processes. **Probabilistic Engineering Mechanics**, v. 25, n. 1, p. 75–85, jan. 2010.
- LOW, Y. M. A simple surrogate model for the rainflow fatigue damage arising from processes with bimodal spectra. **Marine Structures**, v. 38, p. 72–88, out. 2014.
- LUTES, L. D. et al. Stochastic Fatigue Damage Accumulation. **Journal of Structural Engineering**, v. 110, n. 11, p. 2585–2601, 1 nov. 1984.
- MANSON, S. S. Fatigue: A complex subject—Some simple approximations. **Experimental Mechanics**, v. 5, n. 4, p. 193–226, 1 jul. 1965.
- MARCO, S. M.; STARKEY, W. L. A Concept of Fatigue Damage. **Transactions of the American Society of Mechanical Engineers**, v. 76, n. 4, p. 627–632, 1 jul. 2022.
- MILES, J. W. On Structural Fatigue Under Random Loading. **Journal of the Aeronautical Sciences**, v. 21, n. 11, p. 753–762, nov. 1954.
- MINER, M. A. Cumulative Damage in Fatigue. **Journal of Applied Mechanics**, v. 12, n. 3, p. A159–A164, 1945.
- MRŠNIK, M.; SLAVIČ, J.; BOLTEŽAR, M. Frequency-domain methods for a vibration-fatigue-life estimation – Application to real data. **International Journal of Fatigue**, v. 47, p. 8–17, 1 fev. 2013.
- MUÑIZ-CALVENTE, M. et al. A comparative review of time- and frequency-domain methods for fatigue damage assessment. **International Journal of Fatigue**, v. 163, p. 107069, 1 out. 2022.

- NIESŁONY, A. et al. The Use of Spectral Method for Fatigue Life Assessment for Non-Gaussian Random Loads. **Acta Mechanica et Automatica**, v. 10, n. 2, p. 100–103, 1 jun. 2016.
- NIU, X.; LI, G.; LEE, H. Hardening law and fatigue damage of a cyclic hardening metal. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 26, n. 2, p. 163–170, jan. 1987.
- ORTIZ, K.; CHEN, N. **Fatigue damage prediction for stationary wide-band processes**. . Em: 5TH INT. CONF. ON APPLICATION OF STATISTICS AND PROBABILITY IN SOIL AND STRUCTURAL ENGINEERING. Vancouver: 1987.
- PARK, J.-B.; CHOUNG, J.; KIM, K.-S. A new fatigue prediction model for marine structures subject to wide band stress process. **Ocean Engineering**, v. 76, p. 144–151, jan. 2014.
- PITOISET, X. **Méthodes spectrales pour une analyse en fatigue des structures métalliques sous chargements aléatoires multiaxiaux - PDF Free Download**. Bruxelles: Université Libre de Bruxelles, 2001.
- QUIGLEY, J. P. et al. Review and Assessment of Frequency-Based Fatigue Damage Models. **SAE International Journal of Materials and Manufacturing**, v. 9, n. 3, p. 565–577, 5 abr. 2016.
- RICE, S. O. Mathematical Analysis of Random Noise. **Bell System Technical Journal**, v. 23, n. 3, p. 282–332, jul. 1944.
- RINGEVAL, A.; HUANG, Y. **Random Vibration Fatigue Analysis with LS-DYNA**. . Em: 12TH INTERNATIONAL LS-DYNA USERS CONFERENCE. 2012.
- ROGNON, H. **Comportement en fatigue sous environnement vibratoire: prise en compte de la plasticité au sein des méthodes spectrales**. phdthesis—[s.l.] Ecole Centrale Paris, 22 jan. 2013.
- SAKAI, S.; OKAMURA, H. On the Distribution of Rainflow Range for Gaussian Random Processes with Bimodal PSD. **JSME international journal. Ser. A, Mechanics and material engineering**, v. 38, n. 4, p. 440–445, 1995.
- SALVATI, E. Evaluating fatigue onset in metallic materials: Problem, current focus and future perspectives. **International Journal of Fatigue**, v. 188, p. 108487, 1 nov. 2024.
- SOLIDWORKS. **Fatigue for Random Vibration Loading - 2022 - SOLIDWORKS Help**. Disponível em: <https://help.solidworks.com/2024/english/SolidWorks/cworks/c_frequency_domain_fatigue_analysis.htm?verRedirect=1>. Acesso em: 7 dez. 2024.
- STEINBERG, D. S. **Vibration analysis for electronic equipment**. [s.l.] Wiley-Interscience, 2000.

- STROMEYER, C. E.; DALBY, W. E. The determination of fatigue limits under alternating stress conditions. **Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character**, v. 90, n. 620, p. 411–425, jan. 1997.
- WEBER, F.; KOZIOL, J.; STARKE, P. StressLife: A Short-Time Approach for the Determination of a Trend S-N Curve in and beyond the HCF Regime for the Steels 20MnMoNi5-5 and SAE 1045. **Materials**, v. 16, n. 11, p. 3914, 23 maio 2023.
- WEIBULL, W. **A statistical representation of fatigue failures in solids**. [s.l.: s.n.].
- WIRSCHING, P. H.; LIGHT, M. C. Fatigue under Wide Band Random Stresses. **Journal of the Structural Division**, v. 106, n. 7, p. 1593–1607, 1 jul. 1980.
- ZHAO, W.; BAKER, M. J. On the probability density function of rainflow stress range for stationary Gaussian processes. **International Journal of Fatigue**, v. 14, n. 2, p. 121–135, 1 mar. 1992.
- ZORMAN, A.; SLAVIČ, J.; BOLTEŽAR, M. Vibration fatigue by spectral methods—A review with open-source support. **Mechanical Systems and Signal Processing**, v. 190, p. 110149, 1 maio 2023.

7 Anexo 1

Tabela 9: Resultados para as DEPs unimodais.

	$\gamma = 0,1$	$\gamma = 0.19$	$\gamma = 0.29$	$\gamma = 0.36$	$\gamma = 0.44$	$\gamma = 0.50$	$\gamma = 0.55$	$\gamma = 0.60$	$\gamma = 0.63$
k	NarrowBand								
3,3	8,48%	3,29%	0,26%	-1,71%	-3,43%	-4,92%	-6,52%	-8,47%	-11,59%
7,3	17,77%	6,40%	-1,07%	-6,20%	-10,60%	-13,60%	-15,18%	-16,59%	-18,43%
11,8	26,44%	11,74%	-4,95%	-13,62%	-20,91%	-26,40%	-26,69%	-27,45%	-28,31%
k	Wirshing-Light								
3,3	13,99%	12,75%	13,48%	13,58%	13,64%	13,23%	12,19%	10,42%	7,07%
7,3	46,15%	45,46%	41,61%	35,92%	30,21%	26,02%	23,77%	21,73%	19,05%
11,8	102,93%	101,82%	76,11%	60,49%	47,01%	36,83%	36,29%	34,88%	33,27%
k	Ortiz-Chen								
3,3	8,48%	3,33%	0,50%	-1,09%	-1,91%	-1,93%	-1,45%	-0,70%	0,15%
7,3	17,77%	6,45%	-0,79%	-5,48%	-8,86%	-10,20%	-9,29%	-7,28%	-3,50%
11,8	26,44%	11,79%	-4,67%	-12,92%	-19,29%	-23,32%	-21,23%	-18,69%	-13,89%
k	Alfa0.75								
3,3	8,63%	3,82%	1,61%	0,54%	0,29%	0,66%	1,30%	1,99%	2,54%
7,3	17,93%	6,95%	0,25%	-4,05%	-7,15%	-8,53%	-8,09%	-7,06%	-5,40%
11,8	26,61%	12,32%	-3,68%	-11,64%	-17,87%	-22,08%	-20,55%	-19,16%	-16,85%
k	Tovo-Benasciutti 1								
3,3	8,48%	3,29%	0,26%	-1,71%	-3,43%	-4,92%	-6,52%	-8,47%	-11,59%
7,3	17,77%	6,40%	-1,07%	-6,20%	-10,60%	-13,60%	-15,18%	-16,59%	-18,43%
11,8	26,44%	11,74%	-4,95%	-13,62%	-20,91%	-26,40%	-26,69%	-27,45%	-28,31%
k	Tovo-Benasciutti 2								
3,3	9,01%	5,08%	4,28%	4,28%	5,06%	6,00%	6,83%	7,41%	7,56%
7,3	19,32%	11,36%	9,44%	8,65%	9,03%	10,13%	12,58%	15,40%	19,44%
11,8	29,28%	20,57%	11,80%	8,37%	5,62%	2,81%	6,23%	9,14%	13,83%
k	Lalanne								
3,3	8,48%	3,29%	0,26%	-1,73%	-3,49%	-5,04%	-6,75%	-8,82%	-12,11%
7,3	17,77%	6,40%	-1,07%	-6,20%	-10,60%	-13,60%	-15,19%	-16,61%	-18,47%
11,8	26,44%	11,74%	-4,95%	-13,62%	-20,91%	-26,40%	-26,69%	-27,45%	-28,31%
k	Dirlik								
3,3	8,78%	4,31%	2,58%	1,86%	1,96%	2,64%	3,62%	4,72%	5,89%
7,3	18,61%	8,80%	3,24%	-0,60%	-3,34%	-4,28%	-3,07%	-0,79%	3,30%
11,8	27,90%	15,36%	0,12%	-7,84%	-14,12%	-18,19%	-15,95%	-13,38%	-8,71%
k	Zhao-Baker								
3,3	9,15%	5,42%	4,39%	3,37%	1,22%	1,86%	1,95%	1,30%	-0,76%
7,3	18,94%	9,85%	5,08%	0,59%	-8,95%	-7,16%	-5,97%	-5,66%	-6,20%
11,8	27,82%	15,74%	1,61%	-7,13%	-38,57%	-26,95%	-20,43%	-18,27%	-17,42%
k	Park								

3,3	8,61%	3,77%	1,50%	0,39%	0,10%	0,46%	1,12%	1,85%	2,48%
7,3	18,01%	7,24%	0,97%	-2,87%	-5,23%	-5,65%	-3,95%	-1,34%	2,90%
11,8	26,82%	13,00%	-2,24%	-9,52%	-14,80%	-17,98%	-14,96%	-11,75%	-6,49%
k	Jun-Park								
3,3	9,55%	5,03%	3,14%	2,12%	1,63%	1,54%	1,69%	1,97%	2,21%
7,3	19,12%	8,83%	3,20%	-0,38%	-2,76%	-3,47%	-2,14%	0,13%	4,04%
11,8	28,10%	14,93%	0,36%	-6,67%	-12,01%	-15,52%	-12,79%	-9,91%	-4,96%
k	Jiao-Moan								
3,3	-15,87%	-24,93%	-24,34%	-23,63%	-22,18%	-19,37%	-18,10%	-17,25%	-17,27%
7,3	-16,90%	-34,77%	-35,50%	-35,87%	-35,15%	-31,18%	-28,76%	-26,22%	-23,55%
11,8	-24,17%	-44,28%	-49,28%	-51,45%	-52,57%	-50,76%	-48,03%	-45,55%	-42,64%
k	Sakai-Okamura								
3,3	68,10%	64,17%	60,25%	58,03%	56,68%	54,91%	54,19%	52,98%	50,19%
7,3	532,13%	571,57%	529,40%	500,66%	477,93%	448,63%	445,85%	444,32%	441,47%
11,8	2388,78%	3198,27%	2743,17%	2504,38%	2308,86%	2043,08%	2068,06%	2078,86%	2092,72%
k	Fu-Cebon								
3,3	-48,96%	-50,52%	-49,84%	-48,96%	-47,33%	-44,99%	-42,96%	-41,05%	-39,28%
7,3	-61,89%	-64,83%	-65,36%	-65,50%	-64,90%	-63,21%	-61,18%	-58,89%	-56,04%
11,8	-67,90%	-71,06%	-73,86%	-74,99%	-75,49%	-75,13%	-73,27%	-71,41%	-68,95%
k	Modified Fu-Cebon								
3,3	-3,79%	-16,30%	-15,76%	-15,12%	-13,73%	-10,61%	-9,53%	-8,89%	-9,23%
7,3	-13,46%	-33,40%	-34,09%	-34,46%	-33,71%	-29,46%	-27,01%	-24,44%	-21,74%
11,8	-23,37%	-44,09%	-49,10%	-51,27%	-52,39%	-50,53%	-47,79%	-45,31%	-42,39%
k	Low Bi-Modal								
3,3	34,59%	20,52%	10,44%	5,25%	1,20%	-1,48%	-3,29%	-4,83%	-6,83%
7,3	-	-	-	-	-	-	146,06%	31,09%	0,38%
11,8	-	-	-	-	-	-	-	-	-
k	Low								
3,3	7,10%	1,42%	-2,26%	-4,40%	-5,89%	-6,63%	-7,04%	-7,46%	-8,45%
7,3	20,93%	12,56%	4,17%	-2,41%	-8,60%	-13,19%	-15,34%	-16,70%	-17,69%
11,8	44,42%	48,77%	33,82%	21,73%	8,09%	-5,64%	-9,67%	-13,50%	-16,73%
k	Gao-Moan								
3,3	34,52%	44,46%	30,18%	32,87%	25,86%	21,42%	24,82%	20,50%	17,24%
7,3	144,44%	192,66%	136,83%	149,37%	122,28%	107,26%	127,71%	117,61%	117,08%
11,8	364,59%	531,13%	340,90%	369,06%	289,16%	242,98%	303,33%	281,00%	285,81%
k	Lotsberg								
3,3	-63,84%	-64,98%	-64,32%	-63,55%	-62,17%	-60,18%	-58,44%	-56,76%	-55,10%
7,3	-89,84%	-90,76%	-90,88%	-90,90%	-90,72%	-90,22%	-89,65%	-89,00%	-88,19%
11,8	-97,63%	-97,93%	-98,13%	-98,21%	-98,24%	-98,21%	-98,08%	-97,95%	-97,77%
k	Huang-Moan								
3,3	8,85%	4,67%	3,61%	3,62%	4,74%	6,10%	7,39%	8,06%	7,45%

7,3	18,17%	7,83%	2,22%	-1,12%	-3,04%	-3,59%	-2,56%	-1,53%	-0,86%
11, 8	26,87%	13,24%	-1,78%	-8,93%	-14,23%	-17,87%	-15,77%	-14,35%	-12,87%
<i>k</i>	Single Moment								
3,3	8,66%	3,95%	1,93%	1,06%	1,12%	1,86%	2,91%	4,02%	5,09%
7,3	18,02%	7,25%	0,97%	-2,89%	-5,28%	-5,73%	-4,08%	-1,49%	2,79%
11, 8	26,72%	12,68%	-2,87%	-10,38%	-15,89%	-19,22%	-16,35%	-13,20%	-7,81%
<i>k</i>	Bands								
3,3	-1,65%	-1,55%	-1,66%	-1,80%	-1,21%	-0,16%	1,11%	2,37%	3,58%
7,3	-4,65%	-4,28%	-6,13%	-8,29%	-9,48%	-9,25%	-7,17%	-4,31%	0,17%
11, 8	-9,87%	-5,90%	-13,38%	-18,03%	-21,60%	-23,79%	-20,43%	-16,93%	-11,30%
<i>k</i>	Steinberg								
3,3	-99,99%	-	-	-	-	-	-	-	-
	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%
7,3	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%
11, 8	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%

8 Anexo 2

Tabela 10: Resultados para as DEPs bimodais.

	$\gamma = 0,59$	$\gamma = 0,68$	$\gamma = 0,70$	$\gamma = 0,73$	$\gamma = 0,75$
k	NarrowBand				
3,3	-12,17%	-18,64%	-18,95%	-19,63%	-20,32%
7,3	-15,86%	-22,84%	-22,02%	-20,77%	-20,76%
11,8	-17,55%	-27,21%	-28,60%	-25,91%	-26,12%
k	Wirshing-Light				
3,3	5,87%	-1,13%	-1,34%	-2,01%	-2,75%
7,3	22,80%	12,62%	13,83%	15,65%	15,66%
11,8	53,27%	35,31%	32,73%	37,73%	37,35%
k	Ortiz-Chen				
3,3	7,33%	5,09%	5,37%	5,86%	5,90%
7,3	10,98%	8,75%	10,72%	14,23%	15,51%
11,8	11,66%	5,58%	4,35%	9,99%	10,99%
k	Alfa0.75				
3,3	6,24%	4,24%	5,15%	6,21%	6,87%
7,3	1,78%	-1,15%	1,18%	4,71%	6,27%
11,8	-0,26%	-6,75%	-7,36%	-2,09%	-0,91%
k	Tovo-Benasciutti 1				
3,3	6,71%	1,15%	-1,22%	-3,31%	-5,68%
7,3	26,46%	14,92%	9,89%	7,28%	3,19%
11,8	39,08%	15,59%	5,10%	3,31%	-1,82%
k	Tovo-Benasciutti 2				
3,3	15,11%	11,24%	10,87%	10,56%	9,92%
7,3	52,48%	40,57%	38,04%	37,30%	34,61%
11,8	81,33%	48,05%	37,43%	36,57%	31,57%
k	Lalanne				
3,3	-12,49%	-19,37%	-19,90%	-20,88%	-21,87%
7,3	-15,87%	-22,91%	-22,12%	-20,93%	-20,99%
11,8	-17,55%	-27,22%	-28,61%	-25,93%	-26,15%
k	Dirlik				
3,3	14,76%	12,96%	12,94%	13,06%	12,60%
7,3	38,14%	27,61%	24,96%	24,55%	22,43%
11,8	47,25%	24,24%	16,49%	17,62%	14,80%
k	Zhao-Baker				
3,3	-3,03%	-7,18%	-6,54%	-6,12%	-5,87%
7,3	-5,11%	-9,77%	-7,83%	-5,19%	-4,16%
11,8	-7,56%	-14,61%	-15,35%	-11,09%	-10,42%
k	Park				
3,3	6,39%	4,35%	5,24%	6,26%	6,89%
7,3	18,10%	14,54%	16,34%	19,55%	20,57%
11,8	24,47%	13,42%	10,87%	15,42%	15,40%

<i>k</i>	Jun-Park				
3,3	7,11%	4,09%	4,61%	5,22%	5,48%
7,3	20,23%	15,83%	17,27%	20,05%	20,66%
11,8	27,32%	15,17%	12,17%	16,28%	15,82%
<i>k</i>	Jiao-Moan				
3,3	-17,67%	-2,78%	-4,40%	-16,84%	-19,94%
7,3	-20,99%	10,46%	9,17%	-8,41%	-13,23%
11,8	-33,66%	-5,78%	-10,10%	-23,45%	-28,59%
<i>k</i>	Sakai-Okamura				
3,3	45,98%	49,01%	51,06%	46,29%	46,55%
7,3	437,82%	449,69%	469,45%	421,66%	438,58%
11,8	2275,77%	2278,03%	2311,40%	1947,27%	2065,03%
<i>k</i>	Fu-Cebon				
3,3	-43,44%	-24,86%	-20,83%	-18,19%	-18,41%
7,3	-58,46%	-35,45%	-28,76%	-20,98%	-20,59%
11,8	-67,41%	-49,41%	-45,41%	-36,81%	-36,85%
<i>k</i>	Modified Fu-Cebon				
3,3	-9,43%	4,40%	2,71%	-9,53%	-12,76%
7,3	-18,99%	12,88%	11,52%	-5,99%	-11,02%
11,8	-33,34%	-5,38%	-9,72%	-23,02%	-28,21%
<i>k</i>	Low Bi-Modal				
3,3	-8,24%	-2,79%	-0,34%	0,41%	-0,04%
7,3	30,90%	-10,11%	-5,14%	1,00%	1,33%
11,8	-128,80%	-18,57%	-19,67%	-13,52%	-13,71%
<i>k</i>	Low				
3,3	-11,26%	-2,02%	1,02%	2,09%	1,77%
7,3	-15,91%	-7,94%	-2,20%	5,03%	5,32%
11,8	-1,93%	-9,97%	-8,09%	1,10%	0,81%
<i>k</i>	Gao-Moan				
3,3	-15,34%	-6,83%	-4,77%	12,97%	13,08%
7,3	3,75%	35,83%	42,23%	130,00%	126,30%
11,8	30,16%	92,54%	97,41%	330,33%	301,68%
<i>k</i>	Lotsberg				
3,3	-58,47%	-41,89%	-38,22%	-35,10%	-35,35%
7,3	-88,87%	-82,14%	-80,16%	-77,48%	-77,46%
11,8	-97,66%	-96,34%	-96,04%	-95,37%	-95,38%
<i>k</i>	Huang-Moan				
3,3	3,29%	7,96%	8,90%	6,39%	6,16%
7,3	-1,05%	2,39%	4,79%	4,89%	5,57%
11,8	-3,04%	-3,41%	-4,06%	-1,92%	-1,56%
<i>k</i>	Single Moment				
3,3	8,89%	7,82%	9,06%	10,54%	11,57%
7,3	13,35%	12,79%	16,13%	21,19%	23,98%
11,8	14,33%	9,95%	9,98%	17,38%	19,92%

k	Bands				
3,3	0,33%	3,53%	6,21%	8,27%	9,70%
7,3	-3,01%	4,95%	10,96%	17,06%	20,60%
11,8	-9,83%	-1,22%	2,86%	11,60%	15,24%
k	Steinberg				
3,3	-33,39%	-43,75%	-45,81%	-48,44%	-50,70%
7,3	-29,60%	-41,15%	-42,47%	-43,92%	-45,91%
11,8	22,12%	-1,73%	-6,76%	-7,17%	-10,72%