

**BRUNO CÉSAR SILVA
YURI DE ASSIS OLIVEIRA**

**ANÁLISES TEÓRICO-NUMÉRICAS DE ELEMENTOS
ESTRUTURAIS AERONÁUTICOS DE PAREDES
FINAS CONSTITUÍDOS POR MATERIAIS
COMPÓSITOS**



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA AERONÁUTICA**

2019

**BRUNO CÉSAR SILVA
YURI DE ASSIS OLIVEIRA**

**ANÁLISES TEÓRICO-NUMÉRICAS DE ELEMENTOS ESTRUTURAIS
AERONÁUTICOS DE PAREDES FINAS CONSTITUÍDOS POR
MATERIAIS COMPÓSITOS**

Projeto de Conclusão de Curso
apresentado ao Corpo Docente do Curso
de Graduação em Engenharia
Aeronáutica da Universidade Federal de
Uberlândia, como parte dos requisitos
para obtenção do título de **BACHAREL
EM ENGENHARIA AERONÁUTICA.**

Orientadora: Profa. Dra. Núbia dos Santos
Saad

UBERLÂNDIA – MG

2019

**BRUNO CÉSAR SILVA
YURI DE ASSIS OLIVEIRA**

**ANÁLISES TEÓRICO-NUMÉRICAS DE ELEMENTOS ESTRUTURAIS
AERONÁUTICOS DE PAREDES FINAS CONSTITUÍDOS POR
MATERIAIS COMPÓSITOS**

Projeto de Conclusão de Curso
Aprovado pelo corpo docente do Curso
de Graduação em Engenharia
Aeronáutica da Universidade Federal de
Uberlândia.

Banca Examinadora:

Profa. Dra. Núbia dos Santos Saad – FEMEC/UFU – Orientadora

Prof. Dr. Tobias Souza Moraes – FEMEC/UFU

Eng. MSc. Jefferson Gomes do Nascimento – FEMEC/UFU (doutorando)

Uberlândia, 13 de julho de 2019.

DECICATÓRIAS

Bruno César Silva:

Dedico esse trabalho aos meus pais, Maria Zenilda e Alexandre de Oliveira, pelo apoio que recebi ao longo dos anos de graduação em Engenharia por sempre me ajudar a superar as diversas dificuldades e desafios. Dedico aos meus amigos, colegas de curso que se mostraram parceiros no decorrer dos semestres superando juntos às adversidades. Dedico à Prof. Dra. Núbia dos Santos Saad por ter sido fonte inspiradora deste trabalho e professora do curso de Engenharia Aeronáutica.

Yuri de Assis Oliveira:

Dedico este trabalho exclusivamente à minha mãe, Ilza Dias de Assis. E o motivo da exclusividade se dá por não existir outro ser no universo que foi (e é) tão importante e tão marcante em minha vida quanto ela. É a pessoa a quem sou mais grato, e a pessoa que mais merece todo o meu esforço e todo o meu amor. Dedico este trabalho para você, pois sem você eu não seria um décimo do que sou hoje, e tudo o que faço é para te deixar orgulhosa. Obrigado por ser esta mãe perfeita.

AGRADECIMENTOS

Bruno César Silva:

Agradeço a Deus, por me suportar psicologicamente em todas as dificuldades encontradas ao longo do Curso, na minha vida acadêmica, para que eu pudesse superar os obstáculos e chegar até o fim deste enorme desafio que é a Engenharia. Gratidão, meu Pai.

Eu gostaria de endereçar meus sinceros agradecimentos às pessoas que me ajudaram e de alguma forma contribuíram para o sucesso e conclusão do Curso de Graduação em Engenharia Aeronáutica na Universidade Federal de Uberlândia nos últimos anos.

Agradeço à Prof. Dra. Núbia dos Santos Saad por ter despertado em mim o interesse pelos estudos em materiais compósitos desde os laboratórios da disciplina de Estruturas Aeronáuticas I até a conclusão deste trabalho. Por ter sido fonte de inspiração, motivação e determinação para mim e muitos colegas de faculdade.

Agradeço à comunidade francesa pelo acolhimento durante minha estadia na França no período de intercâmbio. À senhora Brigitte Finel, minha orientadora de estágio e professora da École Nationale d'Ingénieurs de Metz. Ao senhor Freddy Guilloteau, o responsável pelo Departamento de Pesquisa da S2C Industrias que me ajudou ao longo do projeto de estágio por quem tenho profundo respeito e admiração. À senhora Latifa Rezg, diretora do departamento de Relações Internacionais da ENIM, instituição que nos acolheu tão bem. Ao meu amigo Joseph, pela parceria, pelas conversas e ajuda com a língua francesa. Aos meus companheiros da equipe AS Pouilly Metz Volley-Ball pelas emoções em quadras vividas, em especial ao capitão Bruno, meu xará, que acreditou no meu potencial desde o primeiro treino.

Agradeço aos professores das Faculdades de Engenharia Mecânica (FEMEC), Faculdade de Matemática (FAMAT), Faculdade de Computação (FACOM), Instituto de Física (INFIS), Instituto de Química (IQUFU) pelos ensinamentos ao longo da graduação. Parte dessa conquista só foi possível pela capacidade de transmitir conhecimento dos professores.

Agradeço ao meu grupo de amigos RAINBOWFIVE pelos companheiros nos anos iniciais e amizade que vou levar pra vida. À Denise Dias por ter sido durante todos os dias minha fonte de inspiração para estudar e buscar cada vez mais o

conhecimento. Agradeço aos colegas de intercâmbio que fizeram dessa experiência de vida, única: Luiza Gelbeck, Anna Julia Maciel, Rafaella Dantas, Yuri Renni, Bianca Freire, André Vianna, Rudimar Reis, Gustavo Resende e Marcos Vinicius. Agradeço toda a comunidade de xadrez de Uberlândia pelos ensinamentos, em especial ao Mestre Nacional Antonio José Nery pelas aulas na UFU, ao presidente do Clube de Xadrez Claudio Roberto por propagar o esporte nessa cidade, e à minha amiga Micellyna Lima pelas partidas de xadrez e bons momentos vividos dentro e fora da universidade. Aos americanos que me ajudaram muito no desenvolvimento da língua inglesa e contato com outras culturas: Alex Elias, Pria Mahadevan e Christin Aucapina. Ao Igor Felice, meu amigo, veterano e com quem dividi apartamento um bom período. Ao Marcelo Henrique por ter sido meu amigo-irmão durante os últimos anos.

Agradeço ao meu pai pelo financiamento e apoio durante todos os anos morando e estudando em Uberlândia. Agradeço à minha mãe, pela paciência, por cada ligação, por cada incentivo e atitude que tomou para tornar esse nosso sonho realidade.

Agradeço à Companhia de Bebidas das Américas (Ambev) por ter me contratado, incentivado e me promovido no último ano de faculdade. Isso mostra o quanto somos valorizados em uma empresa feita sobretudo por pessoas. Aos colegas de trabalho com quem aprendi e desenvolvi habilidades que a universidade não contempla.

Yuri de Assis Oliveira:

Durante todo o meu percurso de graduação, a única palavra que me vem à mente é gratidão. E esta palavra forte é endereçada a todas as pessoas que me ajudaram de alguma forma a superar obstáculos, quebrar barreiras e conquistar o que hoje estou conquistando. Gostaria de começar meus sinceros agradecimentos aos meus pais Cleiton Costa Silva e Ilza Dias de Assis, aos meus avós Manoel Dias de Assis e Jovina Dias e ao meu irmão Igor Dias de Assis, por sempre me fornecerem apoio psicológico, financeiro e afetivo, provendo todo tipo de suporte durante toda a minha jornada de vida, principalmente nos anos caóticos de minha graduação.

Agradeço à Prof. Dra. Núbia dos Santos Saad que fez parte fundamental na construção de meus conhecimentos e gerando interesse em mim na área de Materiais Compósitos. Pessoa esta que vem me acompanhando desde a disciplina de Estruturas de Aeronaves I, passando por Estágio Supervisionado no Laboratório de Mecânica de Estruturas Prof. José Eduardo Tannús Reis (LMEst) e que agora tive o maior prazer em tê-la como orientadora deste Projeto de

Conclusão de Curso. Uma alma generosa, amiga, companheira e que esteve disposta a dar seu tempo e seus ouvidos para tudo o que tangeu minha vida pessoal e profissional.

Agradeço também à Prof. Dra. Ana Marta de Souza que, de forma análoga, também fez parte fundamental em minha vida durante minha graduação. Ministrou Mecânica de Fluidos I de forma majestosa, aumentando minha curiosidade e empenho na área e foi uma excelente orientadora de Iniciação Científica no projeto de Motores de Combustão Interna no Laboratório de Mecânica dos Fluidos (MFLab).

Agradeço ao meu grupo de amigos da RainbowFive (Bruno César, Jorge Augusto, Saulo César e Vinícius Gonzaga) pelos oito maravilhosos anos de amizade e companheirismo. Os quais foram essenciais nas horas mais difíceis e que me deram apoio e suporte de uma forma que não consigo expressar em palavras.

Agradeço ao Bruno Lacerda, Júlio Wilson, Ricardo Nogueira e Yuri Beleli pelos momentos de clareza, profunda amizade e companheirismo, pelos momentos de distração, pelas conversas, bebedeiras, carinhos e amores, que me ajudaram, cada qual em seu momento, a superar fases extremamente difíceis de vida. Pessoas que guardo um profundo amor e compaixão e que levarei para o resto da minha vida.

Agradeço ao Pablo Menezes pelo carinho, amor e reciprocidade dedicados a mim este ano. Uma pessoa fundamental em minha vida, e a que mais me deu forças para completar esta fase caótica e trabalhosa com êxito. Forneceu-me paz e tranquilidade de espírito, e sem todo este apoio e parceria eu seria incapaz de alcançar os picos de grandeza que me cercam neste momento.

SILVA, B.C.; OLIVEIRA, Y.A. **Análises Teórico-Numéricas de Elementos Estruturais Aeronáuticos de Paredes Finas Constituídos por Materiais Compósitos**. 2019. 83 f. Projeto de Conclusão de Curso – Curso de Graduação em Engenharia Aeronáutica, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG.

RESUMO

As indústrias aeronáutica e aeroespacial são as grandes impulsionadoras do desenvolvimento dos materiais compósitos, pois necessitam de componentes que combinem elevadas rigidez e resistência com baixa densidade que atendam aos requisitos de segurança em serviço. É indubitável a importância do aprendizado acerca do cálculo de elementos estruturais aeronáuticos constituídos por materiais compósitos, ao aluno de graduação em Engenharia Aeronáutica. Este trabalho apresenta contribuição para o ensino-aprendizagem de elementos estruturais constituídos por materiais compósitos, aos alunos que se graduam em Engenharia Aeronáutica pela UFU, pois tais conteúdos não fazem parte de disciplinas obrigatórias do Projeto Pedagógico deste Curso. É feita uma abordagem sobre a composição e características dos materiais compósitos, bem como suas propriedades e comportamentos mecânicos, com apresentação detalhada de resolução de diversos exercícios de forma teórica e numérica, via software NASTRAN®, que utiliza o Método dos Elementos Finitos em análises estruturais. É apresentado um procedimento em passo-a-passo para a modelagem numérica de elementos de paredes finas, sob solicitação de cargas que geram tensões normais e cisalhantes, e comparação os resultados teóricos e numéricos cujos desvios foram muito satisfatórios. Com isso, os autores dão oportunidade ao estudante que tenha interesse pelo tema, realizar estudo autônomo, e agregar conhecimentos sobre materiais compósitos e sua aplicação em elementos estruturais de paredes finas, utilizados em aeronaves.

Palavras-chave: materiais compósitos, modelagem numérica, paredes finas.

SILVA, B.C.; OLIVEIRA, Y.A. **Theoretical-Numerical Analysis of Aeronautical Structural Elements of Thin Walls Composed of Composite Materials**. 2019. 83 p. Term Paper – Bachelor of Aeronautical Engineering, Federal University of Uberlândia, Uberlândia, MG.

ABSTRACT

The aeronautic and aerospace industries are major drivers of the development of composite materials as they require components that combine high rigidity and low density resistance that meet in-service safety requirements. It is undoubtedly the importance of learning about the calculation of aeronautical structural elements composed of composite materials, to the undergraduate student in Aeronautical Engineering. This work presents a contribution to the teaching and learning of structural elements composed of composite materials, to students who graduate in Aeronautical Engineering from UFU, since such contents are not part of the compulsory subjects of the Pedagogical Project of this Course. It is made an approach on the composition and characteristics of the composite materials, as well as their mechanical properties and behaviors, with detailed presentation of several theoretical and numerical exercises, through NASTRAN[®] software, which uses the Finite Element Method in structural analysis. A step-by-step procedure is presented for the numerical modeling of thin-walled elements, on request of loads that generate normal and shear stresses, and comparison of theoretical and numerical results whose deviations were very satisfactory. With this, the authors give an opportunity to the student who has an interest in the subject, to perform autonomous study, and to add knowledge about composite materials and their application in thin-walled structural elements, used in aircraft.

Keywords: composite materials, numerical modeling, thin walls.

SUMÁRIO

C A P Í T U L O I – INTRODUÇÃO.....	1
C A P Í T U L O II – REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	3
2.1 Introdução	3
2.2 Materiais Compósitos	3
2.2.1 Fibra.....	4
2.2.2 Matriz.....	4
2.3 Compósitos Laminados.	5
2.3.1 Constantes Elásticas de uma Lâmina Compósita.....	5
2.4 Vigas Compósitas de Paredes Finas.....	10
2.4.1 Carga Axial (P)	11
2.4.2 Momento de Flexão (M).....	12
2.4.3 Carga Cisalhante (S)	14
2.4.4 Momento de Torção (T).....	15
C A P Í T U L O III –MATERIAIS E MÉTODOS	17
C A P Í T U L O IV – DESENVOLVIMENTO TEÓRICO-ANALÍTICO DE APLICAÇÕES	18
4.1 Apresentação.....	18
4.2 Aplicações com Resolução Teórico-Analítica.....	18
C A P Í T U L O V – DESENVOLVIMENTO NUMÉRICO DE APLICAÇÕES.....	45
5.1 Momento de Flexão (M).....	45
5.2 Carga Cisalhante (S)	55
5.3 Torção (T)	63
C A P Í T U L O VI – ANÁLISE DE RESULTADOS E DISCUSSÕES.....	71
C A P Í T U L O VII – CONCLUSÕES	72
C A P Í T U L O VIII – REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	73

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

As indústrias aeronáutica e aeroespacial são as grandes impulsionadoras do desenvolvimento dos materiais compósitos, pois necessitam de componentes que combinem elevadas rigidez e resistência com baixa densidade que atendam aos requisitos de segurança em serviço.

É indubitável a importância do aprendizado acerca do cálculo de elementos estruturais aeronáuticos constituídos por materiais compósitos, ao aluno de graduação em Engenharia Aeronáutica.

Os autores deste trabalho tiveram despertada a importância de somar contribuição aos estudantes Curso de graduação que realizam, no âmbito da Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia. Haja vista que o conteúdo sobre aplicação de materiais compósitos em estruturas de aeronaves não está contemplado em disciplinas obrigatórias prescritas pelo Projeto Pedagógico deste curso, ambos se preocuparam em que seus conhecimentos adquiridos por escolha própria, tanto do curso de componente curricular optativo, como por estudos independentes, sob a supervisão da professora orientadora deste Projeto de Conclusão de Curso sejam disseminados, ao domínio público.

Registram-se, no propósito supracitado, dois aspectos que merecem destaque: primeiro, que se trata de uma colaboração que corresponde a um início, que desperte em outros alunos, o incremento de ações nesta vertente, ou seja, com a humildade de que não se abarque em completude, mas que corresponda a alguns passos iniciais; segundo, que se espera que, com a reforma curricular do Curso de Graduação em Engenharia Aeronáutica da UFU, tais conteúdos se tornem obrigatórios, mas, se espera também, que esta semente aqui germinada sirva de potencial auxílio aos alunos, independentemente de o escopo ser pertinente a componente obrigatório ou não.

Os alunos-autores se valem de aplicações didáticas para o ensino-aprendizagem de paredes finas compósitas propostas pelo Megson (2013) para apresentarem as

resoluções teóricas, bem como numéricas, via software NASTRAN®, apresentando um passo-a-passo instrucional das modelagens numéricas realizadas, notadamente a estudantes, com visualização das telas e comandos utilizados nesta plataforma de cálculo estrutural via Método dos Elementos Finitos.

Destaca-se a abordagem abrangendo as quatro possibilidades de esforços possíveis de ocorrerem em seções de elementos estruturais aeronáuticos de paredes finas: carga axial, momento de flexão, carga cisalhante, momento de torção, com análise de tensões e também deslocamentos e taxa de torção.

São mostrados os desvios dos resultados obtidos com as formulações apresentadas por Megson (2013), e aquisitados via programa computacional NASTRAN®, donde se conclui serem pequenos, validando as análises numéricas efetuadas.

CAPÍTULO II

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 Introdução

Neste capítulo, é apresentada uma abordagem de **Materiais Compósitos**, em nível de sua composição, segundo Gay (2015); como **Compósitos Laminados**, com análise de suas propriedades mecânicas; e também o cálculo de **Elementos Estruturais Compósitos de Paredes Finas**, sob as possíveis solicitações. A segunda abordagem é fundamentada em Megson (2013) e Gay (2015), e a terceira, em Megson (2013).

2.2 Materiais Compósitos

As indústrias aeronáutica e espacial são as grandes impulsionadoras do desenvolvimento destes materiais, pois necessitam de componentes que combinem elevadas rigidez e resistência com baixa densidade que atendam aos requisitos de segurança em serviço. Assim, esse setor da indústria nucleou o surgimento de compósitos de plásticos reforçados com fibras de alta resistência, também denominados compósitos estruturais.

Os compósitos são considerados materiais heterogêneos e multifásicos, onde um dos componentes fornece a resistência ao esforço (fibras) enquanto o outro é o meio de transferência da força (matriz). Eles podem ser obtidos de diferentes técnicas de processamento, como por exemplo: laminação manual, moldagem por compressão a quente, bobinagem, moldagem por transferência de resina e pultrusão, entre outras técnicas.

Entre as características dos compósitos poliméricos destacam-se a sua maior resistência específica, ou seja, sua elevada resistência aliada a uma economia de massa, quando comparados aos materiais convencionais, além das suas atraentes resistências à corrosão e à fadiga, expansão térmica controlada, moldagem de peças em formatos complexos e orientação das fibras em direções desejadas. Estes tipos de compósitos reforçados com fibras unidirecionais ou tecidos oferecem uma

combinação de resistência e módulo superior aos materiais metálicos tradicionais. Além disso, devido ao baixo peso dos compósitos poliméricos, as suas relações resistência-peso e módulo-peso são notadamente superiores às dos materiais metálicos.

A ligação entre fibras e matrizes é criada durante a fase de fabricação do material compósito. Isso tem influência fundamental nas propriedades mecânicas do material compósito.

2.2.1 Fibra

As fibras consistem de várias centenas ou milhares de filamentos, cada um deles com um diâmetro compreendido entre 5 e 15 μ m, o que lhes permite ser processável em máquinas têxteis. Por exemplo, no caso da fibra de vidro, dois produtos de fibra semiacabados são obtidos.

Essas fibras são comercializadas nas seguintes formas:

- **Fibras Curtas**, com comprimentos da ordem de uma fração de milímetro a alguns centímetros. Estes são feltros, *mats* e fibras curtas usadas na moldagem por injeção.
- **Fibras Longas**, que são cortadas durante o tempo de fabricação do material compósito, são usadas como são ou tecidas.

Os principais materiais de fibra incluem: vidro, Aramida ou KEVLAR® (muito leve), Carbono (alto módulo ou alta resistência), Boro (alto módulo ou alta resistência), Carboneto de Silício (resistente a altas temperaturas), Polietileno de alta densidade, fibras naturais (linho, cânhamo, sisal, etc.).

2.2.2 Matriz

Muitos materiais são usados como matriz dos compósitos:

- **Matriz Polimérica**: Podem ser resinas termoplásticas (Polipropileno [PP], Polifenileno Sulfona [PPS], Poliamida [PA], Poliéter Éter Cetona [PEEK], etc.); ou resinas termofixas (poliésteres, fenólicos, melaminas, silicones, poliuretanos, epóxis).
- **Matriz Mineral**: Carboneto de Silício, Carbono. Eles podem ser usados em altas temperaturas.
- **Matriz Metálica**: ligas de Alumínio, ligas de Titânio.

2.3 Compósitos Laminados

Uma proporção cada vez maior de estruturas de aeronaves modernas, fabricada mundialmente, corresponde a materiais compósitos. Esses consistem em lâminas nas quais o enrijecimento rígido e de alta resistência, por exemplo, a fibra de carbono, é embutida em uma matriz como epóxi, poliéster, etc.

O uso de um conjunto de placas pode influenciar o peso sobre as estruturas metálicas convencionais. Eles também têm a vantagem de que a direção dos filamentos em uma estrutura de várias lâminas pode ser alinhada com a direção das principais cargas em um determinado ponto, resultando em um projeto mais eficiente.

Assim, a primeira abordagem é a análise micromecânica, de materiais compósitos, em que os materiais constituintes, ou seja, as fibras e a resina (a matriz) são consideradas separadamente. As propriedades do compósito irão então mudar de um ponto para outro em uma determinada direção, dependendo se a fibra ou a resina está sendo examinada.

Na segunda abordagem, a macromecânica, o material compósito é considerado como um todo, de modo que as propriedades não mudem de um ponto para o outro na direção de uma diretiva. Geralmente, o projeto e a análise de materiais compósitos baseiam-se na abordagem macro e não na micro.

2.3.1 Constantes Elásticas de uma Lâmina Compósita

Neste item são apresentadas as análises das propriedades de lâminas compósitas, considerando seu comportamento estrutural sob tensão e deformação em regime elástico-linear.

As determinações das propriedades dessas lâminas são apresentadas por Megson (2013), sob uma ótica bastante didática, que permite o entendimento com facilidade por parte do aluno. As análises são feitas considerando a direção longitudinal das fibras compósitas (l) bem como transversal (t).

- **Módulo de Elasticidade Longitudinal E_l :**

Na Figura 1, uma placa de alumínio contendo um único filamento é submetida a um esforço σ_1 , na direção longitudinal que produz uma deformação Δl .

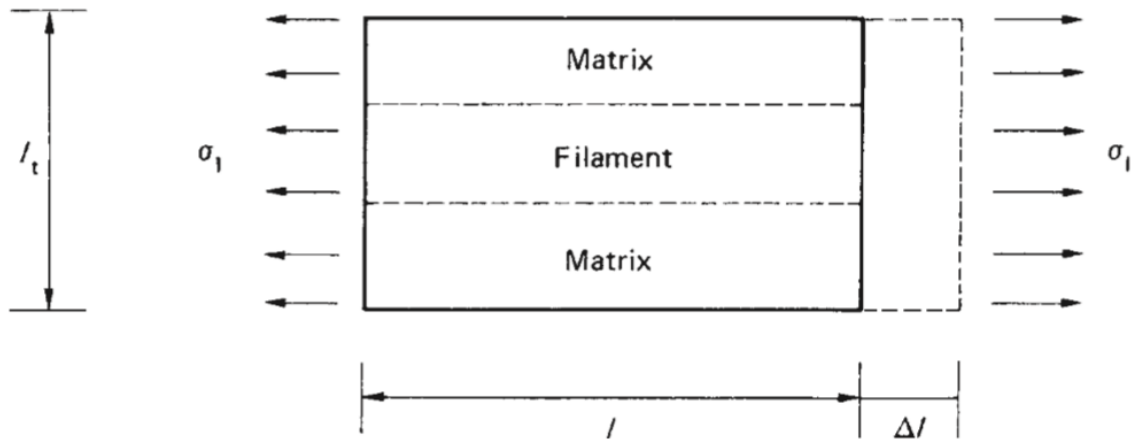


Figura 1 – Esquema das solicitações e deslocamento na direção longitudinal (l) do elemento laminar composto. Fonte: Megson (2013).

É assumido que a seção plana permaneça plana constante durante a deformação, e, assim, a deformação ε_l correspondente a tensão σ_l é dada por:

$$\varepsilon_l = \frac{\Delta l}{l} ; \quad (1)$$

e

$$\sigma_l = E_l \varepsilon_l, \quad (2)$$

em que E_l é o módulo de elasticidade da lâmina na direção do filamento.

Além disso, usando os índices f e m para designar os parâmetros mecânicos das fibras e matrizes, têm-se:

$$\sigma_f = E_f \varepsilon_l; \quad \text{e} \quad \sigma_m = E_m \varepsilon_l. \quad (3)$$

Se A é a área total da seção transversal da lâmina esquematizada na Figura 1, A_f é a área da seção transversal correspondente a fibras, e A_m é a área correspondente à matriz, então, para equilíbrio na direção das fibras, escreve-se:

$$\sigma_l A = \sigma_f A_f + \sigma_m A_m .$$

Substituindo as Equações (1) a (3) na expressão supracitada, tem-se:

$$E_l \varepsilon_l A = E_f \varepsilon_l A_f + E_m \varepsilon_l A_m .$$

Assim, equaciona-se o Módulo de Elasticidade compósito, na direção longitudinal (E_l):

$$E_l = E_f \frac{A_f}{A} + E_m \frac{A_m}{A}. \quad (4)$$

Escrevendo $A_f/A = v_f$ e $A_m/A = v_m$, sendo v_f e v_m denominados frações de área, que correspondem também a frações de volume do material compósito em análise, tem-se, também, a seguinte expressão para a determinação do Módulo de Elasticidade compósito, na direção longitudinal (E_l):

$$E_l = E_f v_f + E_m v_m. \quad (5)$$

- **Módulo de Elasticidade Transversal E_t :**

Outra propriedade de interesse do compósito é o Modulo de Elasticidade na direção Transversal (E_t).

Na Figura 2, a extensão total na direção transversal é produzida por σ_t e é dada por:

$$\varepsilon_t l_t = \varepsilon_m l_m + \varepsilon_f l_f,$$

ou

$$\frac{\sigma_t}{E_t} l_t = \frac{\sigma_t}{E_m} l_m + \frac{\sigma_t}{E_f} l_f.$$

Remanejando, escreve-se a expressão para a obtenção do Módulo de Elasticidade compósito, na direção longitudinal (E_t):

$$E_t = \frac{E_m E_f}{v_m E_f + v_f E_m}. \quad (6)$$

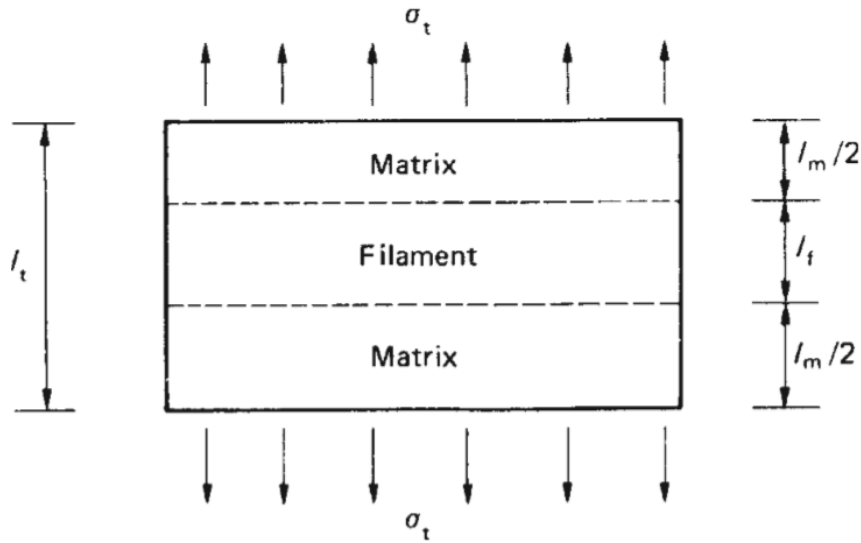


Figura 2 – Esquema das solicitações e deslocamento na direção transversal (t) do elemento laminar composto. Fonte: Megson (2013).

- **Módulo de Cisalhamento G_{lt} (ou G_{tl}):**

Segunda Gay (2015), para se obter o módulo de rigidez ao cisalhamento pode se utilizar a seguinte expressão:

$$G_{lt} = G_m \left[\frac{1}{(1 - V_f) + \frac{G_m}{G_{flt}} V_f} \right]. \quad (7)$$

- **Coefficiente de Poisson ν_{lt} :**

O coeficiente de Poisson representa a variação ocorrida transversalmente quando ocorre uma carga de tração longitudinal. De acordo com Megson (2013), esta propriedade mecânica do material composto pode ser obtida a partir da expressão:

$$\nu_{lt} = \nu_m V_m + \nu_f V_f. \quad (8)$$

- **Coefficiente de Poisson ν_{tl} :**

Segundo Gay (2015), essa quinta constante elástica pode ser obtida a partir das outras quatro, através da relação válida para materiais anisotrópicos, sendo para caso: $x \equiv t$ e $y \equiv l$:

$$\nu_{xy} = \nu_{yx} \frac{E_x}{E_y} \quad (9)$$

- **Módulo de Elasticidade para uma inclinação qualquer E_x :**

É possível avaliar o módulo de elasticidade para uma direção que faça um ângulo de θ em relação ao eixo das fibras a partir da expressão apresentada pela Equação 10, Gay (2015).

Por ocasião da orientação das fibras, de maneira inclinada em relação a uma direção de interesse de se analisar o comportamento estrutural de determinado elemento compósito, nessa direção, denominada, por exemplo de x , tal cálculo se faz necessário, para corrigir o módulo de elasticidade do material compósito.

Nota-se que este módulo diminui rapidamente quando x se afasta da direção da fibra.

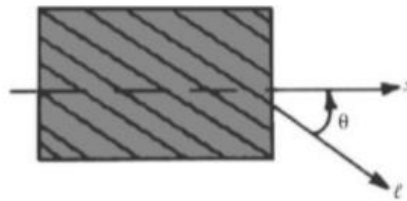


Figura 3 – Visualização da inclinação das fibras compósitas em relação a uma direção de interesse x em projeto. Fonte: Gay (2015).

$$E_x = \frac{1}{\frac{c^4}{E_l} + \frac{s^4}{E_t} + 2c^2s^2 \left(\frac{1}{2G_{lt}} - \frac{\nu_{lt}}{E_l} \right)}, \quad (10)$$

Sendo c e s os valores do *coseno* e do *seno* do ângulo θ , respectivamente.

- **Formas especialmente ortotrópicas**

A Figura abaixo mostra um elemento de uma camada especialmente ortotrópica. Os eixos de referência da tela são longitudinal (sufixo l) e transversal (sufixo t). É claro que estes eixos não têm o mesmo significado para uma camada tecida como para uma camada unidirecional, mas os eixos de referência devem ser especificados e estes são tão convenientes como qualquer outro. Também especificamos os eixos

de carga, x e y , que, para uma camada especialmente ortotrópica, coincidem com os eixos de referência da camada.

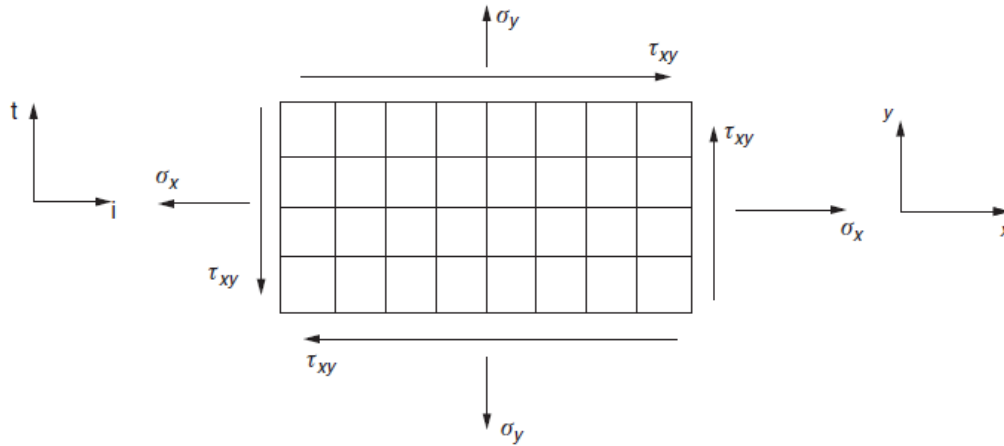


Figura 4 – Representação das tensões positivas segundo a teoria da elasticidade.
Fonte: Megson (2007).

Suponha que a camada seja submetida a tensões diretas σ_x e σ_y , cisalhamento e tensões de cisalhamento complementares τ_{xy} e que as constantes elásticas para a camada são El , Et , $Gl t (= Gtl)$, ν_{lt} e ν_{tl} . Note que, ao contrário de um material isotrópico, o módulo de cisalhamento $Gl t$ não está relacionado com as outras constantes elásticas. Assim, as deformações nas direções longitudinal e transversal são dadas por:

$$s_{11} = \frac{1}{El} \quad s_{12} = -\frac{\nu_{tl}}{Et} \quad s_{22} = \frac{1}{Et} \quad s_{33} = \frac{1}{Gl t}$$

$$\varepsilon_l = \frac{\sigma_x}{E_l} - \frac{\nu_{tl}\sigma_y}{E_t}$$

$$\varepsilon_t = \frac{\sigma_y}{E_t} - \frac{\nu_{lt}\sigma_x}{E_l}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

2.4 Vigas Compósitas de Paredes Finas

Observa-se que alguns componentes estruturais em diversas aeronaves modernas são fabricados a partir de materiais compósitos. Esses componentes são geralmente constituídos na forma de laminados.

Com referência a Megson (2013) faz-se, aqui, uma abordagem sobre o cálculo de tensões normais e de cisalhamento, e de deslocamentos que ocorrem em elementos estruturais de paredes finas, com seção transversal aberta e fechada, sujeitos aos

seguintes esforços: carga axial (P), momento fletor (M), carga cisalhante (S) e momento de torção (T).

A convecção considerada por Megson (2013), para os sinais positivos dos esforços em análise é representada pela Figura 5. Destaca-se que os eixos globais do elemento estrutural são expressos com letras maiúsculas XYZ e os locais do laminado compósito, com minúsculas xy .

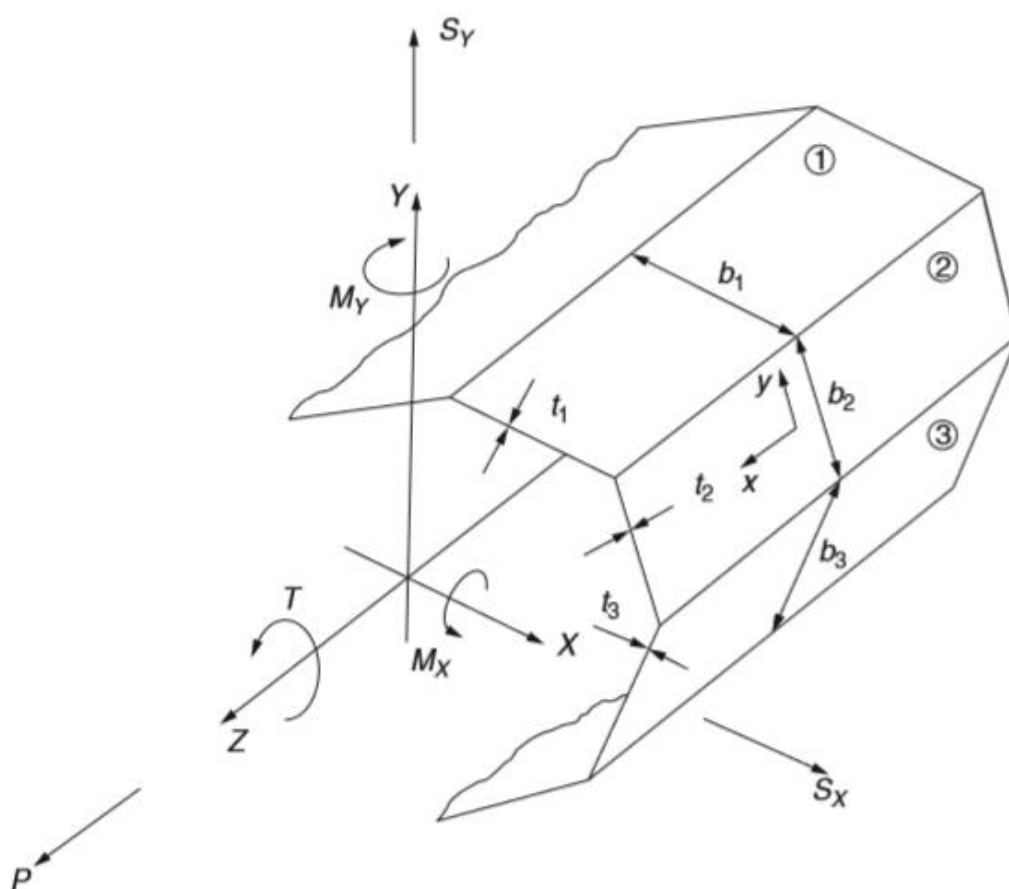


Figura 5 – Convenção positiva de sinais dos esforços atuantes em elementos estruturais compósitos de paredes finas. Fonte: Megson (2013).

2.4.1 Carga Axial (P)

Considere-se uma seção transversal de elemento estrutural sob carga axial de compressão ou de tração denominada P . Suponha-se que a porção da carga axial P , absorvida pelo i -ésimo laminado, seja P_i .

A deformação longitudinal $\varepsilon_{x,i}$ ocorrida no laminado compósito é igual à deformação longitudinal ε_z ocorrida na viga, uma vez que uma das suposições básicas desta análise, é que as seções planas permanecem planas após a carga ser aplicada.

Sendo assim, escreve-se:

$$P_i = \varepsilon_z b_i t_i E_{x,i} ,$$

sendo:

- b_i : largura de cada trecho de parede compósita do elemento estrutural;
- t_i : espessura correspondente a cada parede compósita.

A carga axial total P sobre a seção transversal de um elemento estrutural, constituída por n lâminas, pode ser obtida pela seguinte expressão:

$$P = \varepsilon_z \sum_{i=1}^n b_i t_i E_{x,i} .$$

Portanto, a deformação linear específica longitudinal (ε_z) que ocorre na viga é obtida por:

$$\varepsilon_z = P / \sum_{i=1}^n b_i t_i E_{x,i} .$$

Observe que o módulo de elasticidade da lâmina corresponde à orientação local x , podendo este estar inclinado com relação aos eixos compósitos. Assim, havendo inclinação (θ) entre o eixo x e a direção longitudinal compósita, o valor do módulo de elasticidade da lâmina ($E_{x,i}$) será obtido a partir da Equação (10) tratada anteriormente.

2.4.2 Momento de Flexão (M)

Megson (2013) deduz a expressão genérica para a obtenção de tensões normais atuantes na seção transversal de uma viga de paredes finas, constituída por material isotrópico, sob momentos de flexão M_x e M_y :

$$\sigma_z = \left(\frac{M_y I_{xx} - M_x I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} \right) x + \left(\frac{M_x I_{yy} - M_y I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} \right) y ,$$

onde:

$$M_x = \frac{E \operatorname{sen} \alpha}{\rho} \int_A xy \, dA + \frac{E \cos \alpha}{\rho} \int_A y^2 \, dA ,$$

$$M_y = \frac{E \operatorname{sen} \alpha}{\rho} \int_A x^2 \, dA + \frac{E \cos \alpha}{\rho} \int_A xy \, dA .$$

Sendo as paredes finas constituídas por materiais compósitos, em que o módulo de elasticidade E não é o mesmo em todo o elemento estrutural, serão incorporados os módulos de elasticidade $E_{Z,i} \equiv E_{x,i}$ das lâminas que compõem cada elemento bidimensional de paredes finas, na direção longitudinal Z do elemento linear (viga, por exemplo) sob flexão (constata-se que o referido autor apresenta os eixos coordenados compósitos globais com letras maiúsculas):

$$M_x = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\rho} \int_A E_{Z,i} XY \, dA + \frac{\cos \alpha}{\rho} \int_A E_{Z,i} Y^2 \, dA ,$$

$$M_y = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\rho} \int_A E_{Z,i} X^2 \, dA + \frac{\cos \alpha}{\rho} \int_A E_{Z,i} XY \, dA .$$

Assim, os momentos de inércia serão calculados com os módulos de elasticidade compósitos $E_{Z,i} \equiv E_{x,i}$ introjetados às respectivas formulações:

$$I'_{XX} = \int_A E_{Z,i} Y^2 \, dA ; \quad I'_{YY} = \int_A E_{Z,i} X^2 \, dA ; \quad I'_{XY} = \int_A E_{Z,i} XY \, dA .$$

Explicitando as frações para serem substituídas na expressão da tensão normal:

$$M_x = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\rho} I'_{XY} + \frac{\cos \alpha}{\rho} I'_{XX} ,$$

$$M_y = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\rho} I'_{YY} + \frac{\cos \alpha}{\rho} I'_{XY} .$$

Finalmente, escreve-se a expressão para a determinação da tensão normal que solicita a seção transversal compósita de paredes finas, solicitada por momento de flexão:

$$\sigma_z = E_{Z,i} \left[\left(\frac{M_y I'_{XX} - M_x I'_{XY}}{I'_{XX} I'_{YY} - I'^2_{XY}} \right) X + \left(\frac{M_x I'_{YY} - M_y I'_{XY}}{I'_{XX} I'_{YY} - I'^2_{XY}} \right) Y \right] .$$

Tal expressão é válida para paredes abertas ou fechadas, revelando que ao se calcular a tensão normal de um ponto ou trecho na seção, além das coordenadas X e Y , há que se considerar o módulo de elasticidade da parede fina compósita $E_{Z,i} \equiv E_{x,i}$ referente ao local em que se está determinando o valor da tensão normal, na seção transversal sob análise.

2.4.3 Carga Cisalhante (S)

○ Viga com seção transversal aberta

Megson (2013) obtém a expressão genérica para o fluxo de cisalhamento (q_s) para a seção transversal aberta de uma viga de paredes finas, constituída por material isotrópico, solicitada por forças cortantes S_x e S_y , conforme:

$$q_s = - \left(\frac{S_x I_{xx} - S_y I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} \right) \int_0^s t_x ds - \left(\frac{S_y I_{yy} - S_x I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} \right) \int_0^s t_y ds .$$

No entanto, em se tratando de materiais compósitos, semelhantemente ao que foi realizado para a flexão, serão incorporados, nessa expressão, os módulos de elasticidade, já tratados, bem como o índice em letras maiúsculas, com alusão aos eixos coordenados globais da estrutura compósita:

$$q_s = -E_{Z,i} \left[\left(\frac{S_x I'_{xx} - S_y I'_{xy}}{I'_{xx} I'_{yy} - I'^2_{xy}} \right) \int_0^s t_i X ds + \left(\frac{S_y I'_{yy} - S_x I'_{xy}}{I'_{xx} I'_{yy} - I'^2_{xy}} \right) \int_0^s t_i Y ds \right] .$$

○ Viga com seção transversal fechada

Analogamente, obtém-se a expressão para a viga com seção transversal fechada:

$$q_s = -E_{Z,i} \left[\left(\frac{S_x I'_{xx} - S_y I'_{xy}}{I'_{xx} I'_{yy} - I'^2_{xy}} \right) \int_0^s t_i X ds + \left(\frac{S_y I'_{yy} - S_x I'_{xy}}{I'_{xx} I'_{yy} - I'^2_{xy}} \right) \int_0^s t_i Y ds \right] + q_{s,0} ,$$

para a qual o fluxo cisalhante $q_{s,0}$ é obtido por (equacionamento de momentos das cargas cisalhantes e dos fluxos cisalhantes gerados por estas, em qualquer ponto que se escolha, contido no plano correspondente ao da seção transversal em análise):

$$S_x \eta_0 - S_y \xi_0 = \oint p q_b ds + 2A q_{s,0} ,$$

sendo:

- η_0 : distância entre a carga cisalhante S_X e o ponto escolhido para montar a expressão do momento;
- ξ_0 : distância entre a carga cisalhante S_Y e o ponto escolhido para montar a expressão do momento;
- q_b : fluxo da seção transversal fechada, considerada aberta, por corte realizado na mesma, denominado q *basic*. Vide detalhamentos em Megson (2013);
- p : distância de cada parede em que se calcula o fluxo, até o ponto eleito para a determinação do momento. Vide detalhamentos em Megson (2013);
- A : área interna à seção transversal fechada de paredes finas.

2.4.4 Momento de Torção (T)

Em Megson (2013), foram deduzidas as expressões para a obtenção do fluxo de cisalhamento (q), da taxa de torção ($d\theta/dz$) e do empenamento (w) para a seção transversal de uma viga de paredes finas, constituída por material isotrópico, solicitada pelo momento de torção T_Z .

Em se tratando de material compósito ocorrerá a inserção do módulo de cisalhamento do mesmo.

A seguir são apresentadas todas as formulações extraídas desta literatura em apreço, tanto para seções transversais de paredes finas fechadas como abertas.

○ **Viga com seção transversal fechada**

○ **Fluxo de cisalhamento:**

$$q = \frac{T}{2A},$$

○ **Taxa de torção:**

$$\frac{d\theta}{dz} = \frac{T}{4A^2} \oint \frac{ds}{G_{XY,i} t_i},$$

sendo:

- $G_{XY,i}$ = módulo de cisalhamento no trecho de parede fina considerado;
- t_i = espessura da parede fina em alusão.

○ **Rigidez torcional:**

$$GJ = \frac{4A^2}{\oint \frac{ds}{G_{XY,i} t_i}}$$

○ **Empenamento:**

$$w_s - w_0 = \frac{T}{2A} \left(\int_0^s \frac{ds}{G_{XY,i} t_i} - \frac{A_{0s}}{A} \oint \frac{ds}{G_{XY,i} t_i} \right),$$

sendo:

- w_s = empenamento em qualquer ponto da seção transversal (obs.: destaca-se que empenamento é deslocamento perpendicular à seção transversal, ou seja, com relação à direção Z);
- w_0 = empenamento em um ponto inicial em que se conheça tal valor, para depois percorrer a seção transversal fechada;
- A_{0s} = área da seção transversal correspondente apenas ao trecho percorrido para o cálculo do empenamento, desde o ponto inicial até o ponto de interesse para o cálculo deste empenamento.

○ **Vigas com Seção Transversal Aberta**

○ **Taxa de torção**

$$T = \left(\frac{1}{3} \int_{estr.} G_{XY,i} t_i^3 ds \right) \frac{d\theta}{dZ},$$

○ **Rigidez torcional**

$$GJ = \sum_{i=1}^n G_{XY,i} \frac{st_i^3}{3} = \frac{1}{3} \int_{sect} G_{XY,i} t_i^3 ds$$

○ **Tensão de cisalhamento:**

$$\tau = G_{XY,i} t_i \frac{d\theta}{dZ},$$

○ **Empenamento:**

$$w_s = -2A_R \frac{d\theta}{dZ}.$$

CAPÍTULO III

MATERIAIS E MÉTODOS

A partir da abordagem teórica apresentada, são analisadas diversas aplicações tanto no tocante a lâminas compósitas, para obtenção das propriedades mecânicas, como de problemas que abarcam a existência das quatro possibilidades de solicitação da seção transversal compósita de paredes finas: carga axial, momento de flexão, carga cisalhante e momento de torção.

São detalhadamente apresentadas as resoluções teórico-analíticas supracitadas e é registrado um passo-a-passo com instrução de como o aluno modela cada situação de elemento estrutural de paredes finas, constituído por material compósito.

Para as situações modeladas, faz-se uma comparação dos resultados teóricos e numéricos.

CAPÍTULO IV

DESENVOLVIMENTO TEÓRICO-ANALÍTICO DE APLICAÇÕES

4.1 Apresentação

Elencam-se, neste capítulo, diversas aplicações didáticas que possibilitem ao estudante depreender bem os conceitos teóricos abordados no capítulo precedente.

São perfilados diversos problemas extraídos de Megson (2013), com apresentação de resolução pormenorizada e completa, que oportunize o estudo independente e individual discente. Os autores buscam uma espécie de interação remota com o aluno, semelhante a roteiros de estudos não presenciais, de ensino à distância.

A propósito, há que se registrar que ambos os autores acreditam que possam também contribuir neste sentido, haja vista a tendência de que parcelas de componentes dos Cursos de Engenharias sejam, em um futuro a médio prazo, propostas para serem desenvolvidas com Educação à Distância, realidade atual de algumas instituições de ensino superior.

4.2 Aplicações com Resolução Teórico-Analítica

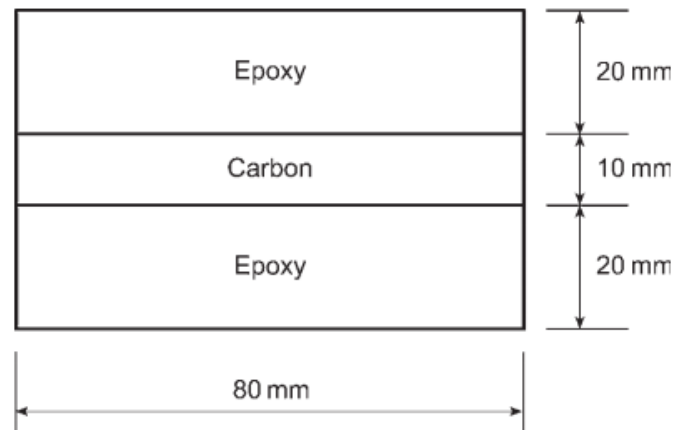
A seguir são apresentadas resoluções detalhadas de aplicações sobre estruturas compósitas laminadas extraídas de Megson (2013).

EXEMPLO 25.1

[Constantes elásticas de uma lâmina simples]

Uma barra laminada cuja seção transversal é mostrada na figura abaixo possui 500 mm de comprimento e compreende a uma matriz de resina epóxi reforçada por um filamento de carbono tendo módulos de elasticidade longitudinais iguais a 5000 N/mm² e 200000 N/mm² respectivamente. Os valores correspondentes do

coeficiente de *Poisson* são 0,2 e 0,3. Se a barra for submetida a uma carga de tração axial de 100 kN, determine o alongamento da barra e a redução de sua espessura. Calcule também as tensões que solicitam a resina epóxi e o filamento de carbono.



Resolução:

Com o auxílio da Equação (4):

$$E_l = E_f \frac{A_f}{A} + E_m \frac{A_m}{A},$$

é calculado o Módulo de Elasticidade Longitudinal, em direção às fibras:

$$E_l = 200000 \times \frac{80 \times 10}{80 \times 50} + 5000 \times \frac{80 \times 40}{80 \times 50},$$

isto é:

$$E_l = 44000 \text{ N/mm}^2.$$

A tensão normal, σ_l , na direção longitudinal é dada por:

$$\sigma_l = \frac{100 \times 10^3}{80 \times 50} = 25,0 \text{ N/mm}^2.$$

Portanto, a deformação longitudinal ocorrida é:

$$\varepsilon_l = \frac{\sigma_l}{E_l} = \frac{25,0}{44000} = 5,68 \times 10^{-4} \text{ mm/mm}.$$

O alongamento, Δ_l , da barra é então:

$$\Delta_l = \varepsilon_l \times L = 5,68 \times 10^{-4} \times 500 ,$$

ou seja:

$$\Delta_l = 0,284 \text{ mm} .$$

O coeficiente de *Poisson* é obtido pela Equação (8):

$$\nu_{lt} = \nu_m V_m + \nu_f V_f ,$$

$$\nu_{lt} = \frac{80 \times 40}{80 \times 50} \times 0,2 + \frac{80 \times 10}{80 \times 50} \times 0,3 = 0,22 .$$

A deformação na barra em relação à sua espessura é, então:

$$\varepsilon_l = -0,22 \times 5,68 \times 10^{-4} = -1,25 \times 10^{-4} \text{ mm/mm} .$$

A redução na espessura, Δ_t , é obtida por:

$$\Delta_t = 1,25 \times 10^{-4} \times 50 ,$$

ou seja:

$$\Delta_t = 0,006 \text{ mm} .$$

As tensões que ocorrem na matriz e nas fibras, epóxi e de carbono, respectivamente, podem ser obtidas evocando a Equação (3):

$$\sigma_f = E_f \varepsilon_l; \quad \text{e} \quad \sigma_m = E_m \varepsilon_l .$$

Assim, obtêm-se:

$$\sigma_m(\text{epóxi}) = 500 \times 5,68 \times 10^{-4} = 2,84 \text{ N/mm}^2 ,$$

$$\sigma_f(\text{carbono}) = 200000 \times 5,68 \times 10^{-4} = 113,6 \text{ N/mm}^2 .$$

EXEMPLO 25.2

[Relações tensão-deformação para uma camada ortotrópica]

Uma lâmina compósita está sujeita a uma tensão normal longitudinal e transversal de 50 e 25 N/mm², respectivamente, junto com uma tensão cisalhante

de 40 N/mm². As constantes elásticas da fibra são $E_l = 120000$ N/mm², $E_t = 80000$ N/mm², $G_{lt} = 5000$ N/mm² e $\nu_{lt} = 0,3$. Calcule as deformações normais nas direções longitudinal e transversal e a tensão cisalhante na fibra.

Resolução:

O valor do coeficiente de Poisson, ν_{tl} , é calculado de acordo com a Equação (9):

$$\nu_{tl} = \nu_{lt} \frac{E_t}{E_l}, \quad (9)$$

$$\nu_{tl} = \nu_{lt} \frac{E_t}{E_l} = 0,3 \times \frac{80000}{120000} = 0,2.$$

Portanto, das Equações abaixo:

$$\begin{aligned} \varepsilon_l &= \frac{\sigma_x}{E_l} - \frac{\nu_{tl}\sigma_y}{E_t} \\ \varepsilon_t &= \frac{\sigma_y}{E_t} - \frac{\nu_{lt}\sigma_x}{E_l} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \end{aligned}$$

$$\varepsilon_l = \frac{50}{120000} - \frac{0,2 \times 25}{80000} = 3,54 \times 10^{-4},$$

$$\varepsilon_t = \frac{25}{80000} - \frac{0,3 \times 50}{120000} = 1,88 \times 10^{-4},$$

e da Equação (6.3):

$$\gamma_{lt} = \frac{40}{5000} = 80,0 \times 10^{-4}.$$

EXEMPLO 25.3

[Relações tensão-deformação para uma camada ortotrópica]

Uma fibra comumente ortotrópica é submetida a tensões normais de 60 N/mm² paralela ao eixo de referência x e 40 N/mm² perpendicular ao eixo de referência x . Se as fibras longitudinais estão inclinadas em um ângulo de 45° em relação ao eixo x e as constantes elásticas forem $E_l = 150000$ N/mm², $E_t = 90000$ N/mm², $G_{lt} = 5000$ N/mm² e $\nu_{lt} = 0,3$. Calcule as deformações normais paralelas às direções x e y e a deformação por cisalhamento referente aos eixos xy .

Resolução:

Nota-se que não existe tensão cisalhante aplicada, então é desnecessário calcular os termos da terceira coluna da matriz das equações abaixo. Logo:

$$s_{11} = \frac{1}{E_l} \quad s_{12} = -\frac{\nu_{tl}}{E_t} \quad s_{22} = \frac{1}{E_t} \quad s_{33} = \frac{1}{G_{lt}}$$

$$s_{11} = \frac{1}{E_l} = \frac{1}{150000} = 6,7 \times 10^{-6};$$

$$s_{22} = \frac{1}{E_t} = \frac{1}{90000} = 11,1 \times 10^{-6};$$

$$s_{12} = -\frac{\nu_{lt}}{E_l} = \frac{0,3}{150000} = -2,0 \times 10^{-6};$$

$$s_{33} = \frac{1}{G_{lt}} = \frac{1}{5000} = 200 \times 10^{-6}.$$

Além disso:

$$\cos \theta = \sin \theta = \cos 45^\circ = \sin 45^\circ = 1/\sqrt{2},$$

de modo que:

$$m^2 = 0,5 = n^2, \quad m^4 = n^4 = 0,25, \quad m^2 n^2 = 0,25, \quad etc.$$

Substituindo estes valores nas Equações abaixo tem-se:

$$\begin{aligned} \varepsilon_l &= \frac{\sigma_x}{E_l} - \frac{\nu_{tl}\sigma_y}{E_t} \\ \varepsilon_t &= \frac{\sigma_y}{E_t} - \frac{\nu_{lt}\sigma_x}{E_l} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \end{aligned}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 53,45 & -46,55 & - \\ -46,55 & 53,45 & - \\ -2,2 & -2,2 & - \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 60 \\ 40 \\ 0 \end{Bmatrix},$$

o que resulta em:

$$\varepsilon_x = 1345 \times 10^{-6},$$

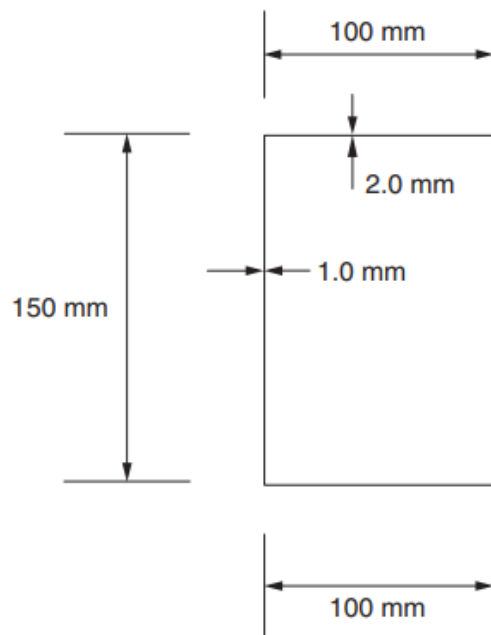
$$\varepsilon_y = -655 \times 10^{-6},$$

$$\gamma_{xy} = -220 \times 10^{-6}.$$

EXEMPLO 25.4

[Vigas mistas de paredes finas]

Uma viga possui a seção transversal simétrica e é constituída por paredes finas compósitas, como mostra a figura a seguir. Os laminados das mesas são idênticos e possuem um módulo de Young, E_z , de 60000 N/mm² enquanto o trecho vertical da seção possui um módulo de Young, E_z , de 20000 N/mm². Se a viga está sujeita a uma carga axial de 40 kN determine o carregamento axial em cada trecho linear da seção transversal.



Resolução:

Para cada flange, escreve-se:

$$b_i t_i E_{Z,i} = 100 \times 0,2 \times 60000 = 12 \times 10^6.$$

E para o trecho vertical, tem-se:

$$b_i t_i E_{Z,i} = 150 \times 1,0 \times 20000 = 3 \times 10^6.$$

Portanto:

$$\sum_{i=1}^n b_i t_i E_{Z,i} = 2 \times 12 \times 10^6 + 3 \times 10^6 = 27 \times 10^6.$$

Então, da expressão:

$$\varepsilon_Z = P / \sum_{i=1}^n b_i t_i E_{x,i} ,$$

obtem-se:

$$\varepsilon_Z = \frac{40 \times 10^3}{27 \times 10^6} = 1,48 \times 10^{-3}.$$

E, finalmente, a partir da expressão:

$$P_i = \varepsilon_Z b_i t_i E_{Z,i} ,$$

chega-se a:

$$P(\text{mesas}) = 1,48 \times 10^{-3} \times 12 \times 10^6 = 17760 \text{ N} = 17,76 \text{ kN} ;$$

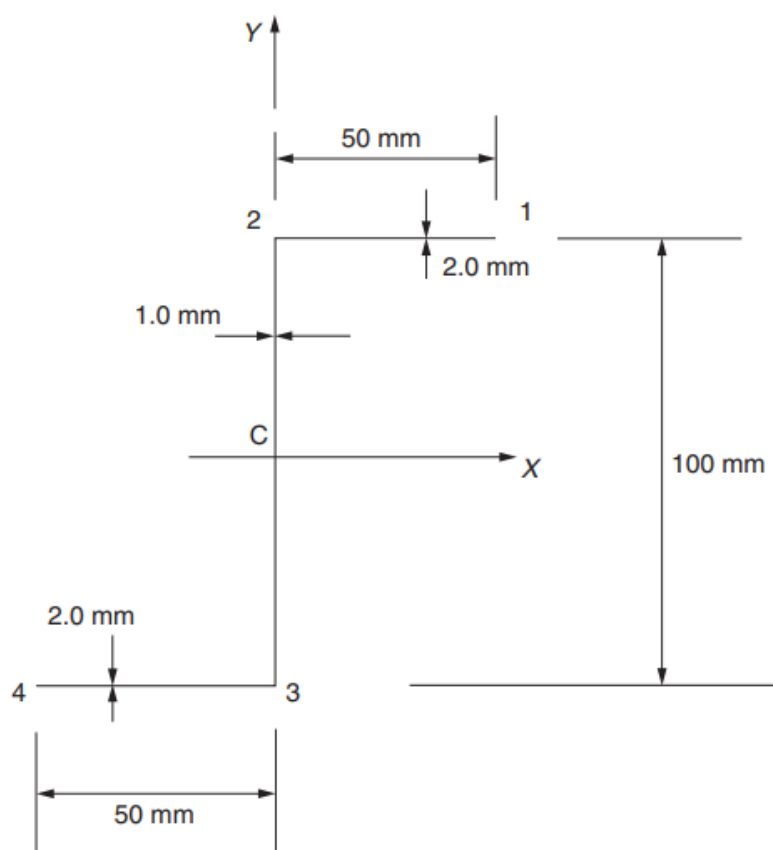
$$P(\text{trecho vertical}) = 1,48 \times 10^{-3} \times 3 \times 10^6 = 4440 \text{ N} = 4,44 \text{ kN} .$$

Percebe-se que $2 \times 17,76 + 4,44 = 39,96 \text{ kN}$, e a discrepância de $0,04 \text{ kN}$ deve-se a arredondamentos.

EXEMPLO 25.5

[Vigas mistas de paredes finas]

Uma viga de parede fina possui a seção transversal em compósito apresentada na figura abaixo e está sujeita a um momento fletor de 1 kN/m aplicado no plano vertical. Se os valores dos módulos de *Young* para os laminados das mesas são 50000 N/mm^2 cada e para o trecho vertical é 15000 N/mm^2 determine o valor máximo da tensão normal que ocorre na seção transversal da viga.

**Resolução:**

A partir das expressões analisadas, para o cálculo das propriedades de inércia, escrevem-se:

$$I'_{XX} = \int_A E_{Z,i} Y^2 dA ; \quad I'_{YY} = \int_A E_{Z,i} X^2 dA ; \quad I'_{XY} = \int_A E_{Z,i} XY dA .$$

Considerando o somatório discretizado para cada trecho retangular que compõe a seção transversal, têm-se:

$$I'_{XX} = 2 \times 50000 \times 2,0 \times 50^2 + 15000 \times 1,0 \times \frac{100^3}{12} = 2,63 \times 10^{10} \text{ Nmm}^2;$$

$$I'_{YY} = 50000 \times 2,0 \times \frac{100^3}{12} = 0,83 \times 10^{10} \text{ Nmm}^2;$$

$$I'_{XY} = 50000 \times 50 \times 2 \times (-25) \times (-50) + 50000 \times 50 \times 2,0 \times (25) \times (50) = 1,25 \times 10^{10} \text{ N mm}^2.$$

Além disso, desde que $M_X = 1 \text{ kNm}$ e $M_Y = 0$, a expressão:

$$\sigma_Z = E_{Z,i} \left[\left(\frac{M_Y I'_{XX} - M_X I'_{XY}}{I'_{XX} I'_{YY} - I'^2_{XY}} \right) X + \left(\frac{M_X I'_{YY} - M_Y I'_{XY}}{I'_{XX} I'_{YY} - I'^2_{XY}} \right) Y \right]$$

se torna:

$$\sigma_Z = E_{Z,i} \left[\frac{-1 \times 10^6 \times 2,5 \times 10^{10}}{10^{20}(2,63 \times 0,83 - 1,25^2)} X + \frac{1 \times 10^6 \times 0,83 \times 10^{10}}{10^{20}(2,63 \times 0,83 - 1,25^2)} Y \right],$$

isto é:

$$\sigma_Z = E_{Z,i} (-2,015 \times 10^{-4} X + 1,338 \times 10^{-4} Y).$$

Na mesa superior 12, $E_{Z,i} = 50000 \text{ N/mm}^2$ e $Y = 50 \text{ mm}$ de modo que a expressão acima se torna:

$$\sigma_Z = -10,075 X + 334,5$$

e

$$\sigma_{Z,max} = 334,5 \text{ N/mm}^2,$$

então:

$$\sigma_{Z,1} = -10,075 \times 50 + 334,5 = -169,25 \text{ N/mm}^2$$

e

$$\sigma_{Z,2} = +169,25 \text{ N/mm}^2.$$

No trecho vertical 23, $E_{Z,i} = 15000 \text{ N/mm}^2$ e $X = 0$. A tensão normal, desta feita, fica redigida como:

$$\sigma_Z = 2,07 Y ;$$

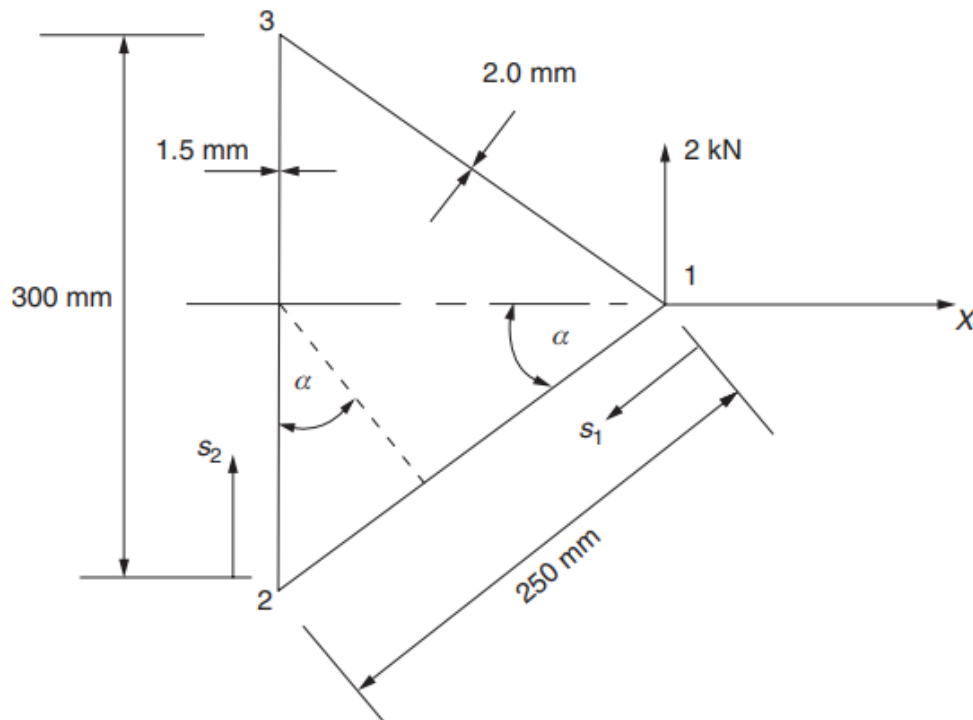
e

$$\sigma_{Z,2} = 100,35 \text{ N/mm}^2.$$

A distribuição restante segue da antissimetria de modo que a máxima tensão normal na seção transversal da viga seja $\pm 334,5 \text{ N/mm}^2$.

EXEMPLO 25.6**[Vigas mistas de paredes finas]**

A seção compósita triangular da viga de parede fina apresentada na figura abaixo possui um carregamento cisalhante vertical de 2 kN aplicado no seu ápice. Se os trechos 12 e 13 têm um módulo de *Young* laminado de 45000 N/mm² enquanto que o do trecho vertical 23 é 20000 N/mm² determine a distribuição do fluxo de cisalhamento na seção.

**Resolução:**

O eixo X é um eixo de simetria de modo que $I'_{XY} = 0$ e, sendo $S_X = 0$, a expressão:

$$q_s = -E_{Z,i} \left[\left(\frac{S_X I'_{XX} - S_Y I'_{XY}}{I'_{XX} I'_{YY} - I'^2_{XY}} \right) \int_0^s t_i X ds + \left(\frac{S_Y I'_{YY} - S_X I'_{XX}}{I'_{XX} I'_{YY} - I'^2_{XY}} \right) \int_0^s t_i Y ds \right] + q_{s,0}$$

se reduz a:

$$q_s = -E_{Z,i} \frac{S_Y}{I'_{XX}} \int_0^s t Y ds + q_{s,0}.$$

O momento de inércia I'_{XX} em relação ao eixo x :

$$I'_{xx} = \frac{2 \times 45000 \times 2,0 \times 250^3 (150/250)^2}{12} + \frac{20000 \times 1,5 \times 300^3}{12} =$$

$$= 15,2 \times 10^{10} \text{ N mm}^2 .$$

Cortando a seção transversal no ponto 1, tem-se:

$$q_{b,12} = -\frac{45000 \times 2 \times 10^3}{15,2 \times 10^{10}} \int_0^{s_1} 2,0(-s_1 \sin \alpha) ds_1 ,$$

na qual $\sin \alpha = 150/250 = 0,6$. Portanto:

$$q_{b,12} = 3,6 \times 10^{-4} s_1^2 ,$$

de modo que:

$$q_{b,2} = 22,2 \text{ N/mm} .$$

Além disso:

$$q_{b,23} = -\frac{20000 \times 2 \times 10^3}{15,2 \times 10^{10}} \int_0^{s_2} 1,5(-150 + s_2) ds_2 + 22,2 ,$$

do qual:

$$q_{b,23} = 0,06 s_2 - 1,95 \times 10^{-4} s_2^2 + 22,2 .$$

Equacionando os momentos sobre o ponto médio do trecho 23 (ou sobre o ponto 1) tem-se:

$$2 \times 10^3 \times 250 \cos \alpha = -2 \int_0^{250} q_{b,12} 150 \cos \alpha ds_2 + 2 \times \frac{300}{2} \times (250 \cos \alpha) q_{s,0} ,$$

o que resulta em:

$$q_{s,0} = 14,2 \text{ N/mm (sentido antihorário)} .$$

A distribuição do fluxo de cisalhamento é, então:

$$q_{s,12} = 3,6 \times 10^{-4} s_1^2 - 14,2 .$$

Assim:

$$q_{s,12}(s_1 = 0) = -14,2 \text{ N/mm} ;$$

$$q_{s,12}(s_1 = 250) = 8,3 \text{ N/mm} ;$$

$$q_{23} = -1,95 \times 10^{-4} s_2^2 + 0,06 s_2 + 8,0 ;$$

$$q_{s,23}(s_2 = 0) = 8 \text{ N/mm} ;$$

$$q_{s,23}(s_2 = 300) = 8 \text{ N/mm} .$$

Para encontrar a tensão cisalhante máxima têm-se:

$$\frac{dq_{s,23}}{ds_2} = \frac{0,06}{2(1,95)} = 150 \text{ mm} ;$$

$$q_{s,23}(s_2 = 150) = 11,83 \text{ N/mm} ;$$

$$\tau_{max} = \frac{q}{t} = \frac{11,83}{1,5} = 7,88 \text{ N/mm}^2 ;$$

$$\tau_1 = -\frac{14,2}{2} = 7,1 \text{ N/mm}^2 ;$$

$$\tau_2 = \frac{8}{1,5} = 5,3 \text{ N/mm}^2 ;$$

$$\tau_3 = \frac{-8}{1,5} = -5,3 \text{ N/mm}^2 ;$$

$$\tau_{23} (s_2 = 150) = \frac{11,83}{1,5} = 7,88 \text{ N/mm}^2 ;$$

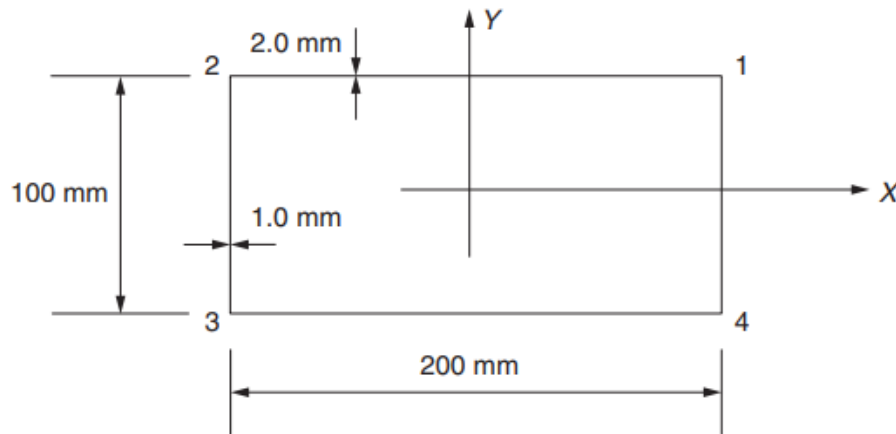
$$\tau_{13} = \tau_{12} (s_2 = 125) = \frac{-9,2}{2} = -4,58 \text{ N/mm}^2 .$$

EXEMPLO 25.7

[Vigas mistas de paredes finas]

A seção retangular, de compósito e parede fina, da viga apresentada na figura abaixo está sujeita a um momento de torção de 10 kN m. Se o módulo de

cisalhamento dos trechos horizontais é 20000 N/mm^2 e dos trechos verticais é 35000 N/mm^2 determine a distribuição do fluxo de cisalhamento na seção e empenamento.



Resolução:

A distribuição do fluxo de cisalhamento pode ser obtida a partir da expressão:

$$q = \frac{T}{2A},$$

resultando em:

$$q = \frac{10 \times 10^6}{2 \times 200 \times 100} = 250 \text{ N/mm}.$$

A distribuição de empenamento é dada pela equação:

$$w_s - w_0 = \frac{T}{2A} \left(\int_0^s \frac{ds}{G_{XY,i} t_i} - \frac{A_{0s}}{A} \oint \frac{ds}{G_{XY,i} t_i} \right),$$

na qual:

$$\oint \frac{ds}{G_{XY,i} t_i} = \frac{2 \times 200}{20000 \times 2,0} + \frac{2 \times 100}{35000 \times 1,0} = 0,0157.$$

Assim, tem-se:

$$w_s - w_0 = 250 \left(\int_0^s \frac{ds}{G_{XY,i} t_i} - \frac{A_{0s}}{200 \times 100} \times 0,0157 \right),$$

ou seja:

$$w_2 - w_0 = 250 \left(\int_0^s \frac{ds}{G_{XY,i} t_i} - 0,785 \times 10^{-6} A_{0s} \right).$$

Viu-se no Exemplo 18.2, que a distribuição do empenamento numa viga de seção retangular de parede fina é linear com valores nulos no ponto médio dos trechos horizontais e verticais. A mesma situação se aplica neste exemplo no qual é apenas necessário calcular o valor do empenamento no vértice 1. Então:

$$w_1 = 250 \left(\frac{50}{35000 \times 1,0} - 0,785 \times 10^{-6} \times 100 \times 50 \right),$$

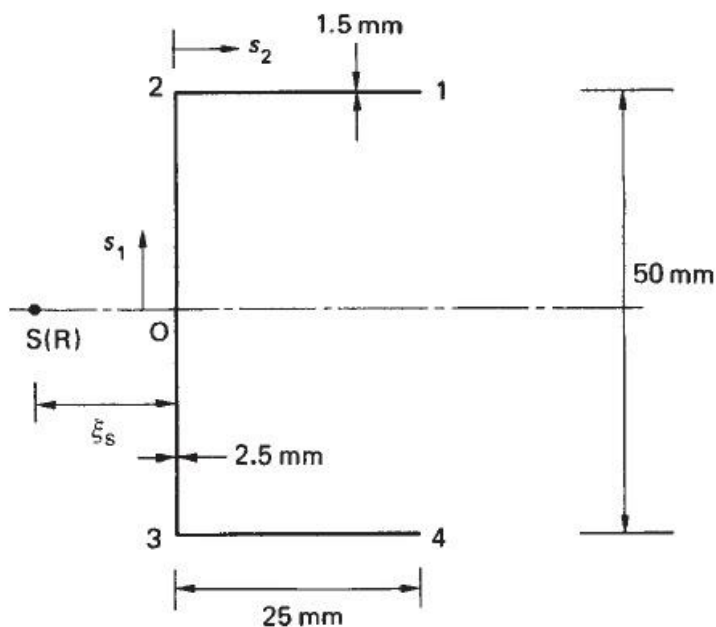
que resulta em:

$$W_1 = -0,62 \text{ mm}.$$

A distribuição restante segue da simetria.

EXEMPLO 25.8**[Vigas mistas de paredes finas]**

A seção transversal em compósito possui as dimensões apresentadas na figura abaixo e está sujeita a um torque de 10 Nm. Se as mesas possuem um módulo de cisalhamento laminado de 20000 N/mm² e o do trecho horizontal é 15000 N/mm² determine a tensão cisalhante máxima na seção da viga e a distribuição do empenamento assumindo que a viga é forçada a torcer em torno de um eixo através do ponto médio do trecho vertical.

**Resolução:**

A rigidez torcional da seção é obtida com:

$$GJ = \sum_{i=1}^n G_{XY,i} \frac{st_i^3}{3} = \frac{1}{3} \int_{sect} G_{XY,i} t_i^3 ds,$$

resultando em:

$$GJ = 2 \times 20000 \times 25 \times \frac{1,5^3}{3} + 15000 \times 50 \times \frac{2,5^3}{3} = 5,03 \times 10^6 \text{ N mm}^2.$$

Então, a taxa de torção é obtida por:

$$\frac{d\theta}{dZ} = \frac{10 \times 10^3}{5,03 \times 10^6} = 1,99 \times 10^{-3}.$$

E, assim a tensão cisalhante máxima é calculada por:

$$\tau = G_{XY,i} t_i \frac{d\theta}{dZ},$$

ou seja:

$$\tau_{max}(12) = 20000 \times 1,5 \times 1,99 \times 10^{-3} = 59,7 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau_{max}(23) = 15000 \times 2,5 \times 1,99 \times 10^{-3} = 74,6 \text{ N/mm}^2.$$

Portanto o máximo valor de tensão cisalhante ocorre no trecho vertical e vale 74,6 N/mm².

A seção é obrigada a torcer em torno de um eixo através do ponto médio do trecho vertical de modo que w é zero em todo o trecho vertical. Então:

$$w_s = -2A_R \frac{d\theta}{dZ},$$

$$w_1 = -2 \times \frac{1}{2} \times 25 \times 25 \times 1,99 \times 10^{-3} = -1,24 \text{ mm}.$$

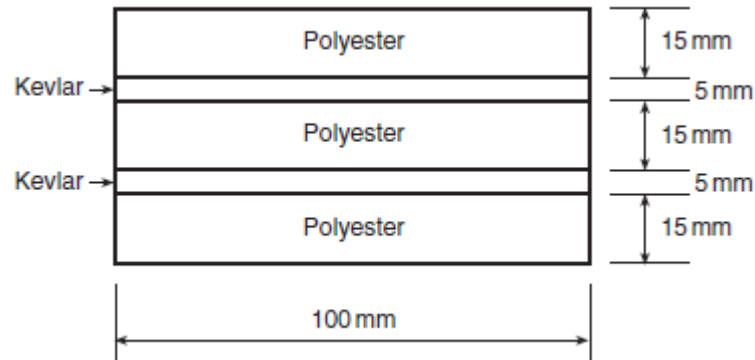
O empenamento é linear ao longo da mesa 12, e o empenamento ao longo da alma 23 segue pela simetria.

Nota-se que se o eixo de torção não tivesse sido especificado, a posição do centro de cisalhamento da seção teria que ter sido encontrada usando o método descrito anteriormente.

PROBLEMA 25.1

Uma barra cuja seção transversal é mostrada na figura abaixo, compreende uma matriz de poliéster e filamentos de KEVLAR. Os respectivos módulos de elasticidade são 3000 e 140000 N/mm² com os correspondentes coeficientes de *Poisson* de 0,16 e 0,28. Se a barra tiver 1 m de comprimento e for submetida a uma carga axial de compressão de 500 kN, determine o encurtamento da barra,

o aumento de sua espessura e as tensões normais que solicitam o poliéster e o KEVLAR.



Resolução:

O Módulo de Elasticidade Longitudinal é dado pela Equação (4):

$$E_l = E_f \frac{A_f}{A} + E_m \frac{A_m}{A},$$

ou seja:

$$E_l = 140000 \times \frac{100 \times 10}{100 \times 55} + 3000 \times \frac{100 \times 45}{100 \times 55}.$$

$$E_l = 27909,1 \text{ N/mm}^2.$$

A tensão na direção longitudinal é dada por:

$$\sigma_l = \frac{500 \times 10^3}{100 \times 55} = 90,9 \text{ N/mm}^2.$$

Portanto, a deformação longitudinal é:

$$\varepsilon_l = \frac{90,9}{27909,1} = 3,26 \times 10^{-3} \text{ mm/mm},$$

e, assim:

$$\Delta l = 3,26 \times 10^{-3} \times 1 \times 10^3 = 3,26 \text{ mm}.$$

O coeficiente de *Poisson* principal para a barra é obtida usando a abaixo

$$v_{lt} = v_m V_m + v_f V_f.$$

temos:

$$v_{lt} = \frac{100 \times 45}{100 \times 55} \times 0,16 + \frac{100 \times 10}{100 \times 55} \times 0,28 = 0,18.$$

Daí a deformação ocorrida através da espessura é:

$$\varepsilon_t = 0,18 \times 3,26 \times 10^{-3} = 5,87 \times 10^{-4} \text{ mm/mm},$$

de modo que o aumento na espessura da barra é:

$$\Delta t = 5,87 \times 10^{-4} \times 55 = 0,032 \text{ mm}.$$

As tensões no poliéster e no KEVLAR são encontradas evocando a Equação (3):

$$\sigma_f = E_f \varepsilon_l; \quad \text{e} \quad \sigma_m = E_m \varepsilon_l.$$

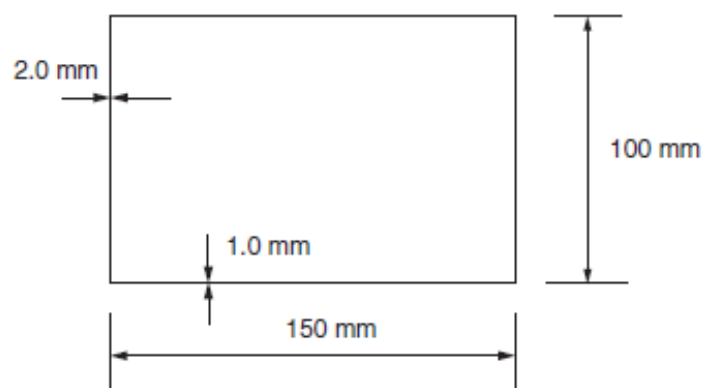
Consequentemente, têm-se:

$$\sigma_m (\text{poliéster}) = 3000 \times 3,26 \times 10^{-3} = 9,78 \text{ N/mm}^2;$$

$$\sigma_f (\text{Kevlar}) = 140000 \times 3,26 \times 10^{-3} = 456,4 \text{ N/mm}^2.$$

PROBLEMA 25.2

Uma viga-caixão tem a seção transversal composta por paredes finas conforme mostra a figura abaixo. Os laminados horizontais são idênticos e têm um módulo de *Young* de 20000 N/mm², enquanto os verticais possuem módulo de *Young* de 60000 N/mm². Se a viga for submetida a uma carga axial de 40 kN, determine a força axial em cada laminado.



Resolução:

Para cada laminado horizontal, escreve-se:

$$b_i t_i E_{Z,i} = 150 \times 1,0 \times 20000 = 3 \times 10^6.$$

E para cada laminado vertical, calcula-se:

$$b_i t_i E_{Z,i} = 100 \times 2,0 \times 60000 = 12 \times 10^6.$$

Assim, tem-se:

$$\sum_{i=1}^n b_i t_i E_{Z,i} = 2 \times 3 \times 10^6 + 2 \times 12 \times 10^6 = 30 \times 10^6.$$

Com a expressão a seguir, calcula-se a deformação longitudinal:

$$\varepsilon_z = P / \sum_{i=1}^n b_i t_i E_{x,i} , \text{ ou seja,}$$

$$\varepsilon_z = \frac{40 \times 30^3}{30 \times 10^6} = 1,33 \times 10^{-3}$$

Assim,

$$P(\text{mesas}) = 1,33 \times 10^{-3} \times 3 \times 10^6 = 4000 \text{ N} = 4 \text{ kN} ,$$

$$P(\text{almas}) = 1,33 \times 10^{-3} \times 12 \times 10^6 = 16000 \text{ N} = 16 \text{ kN}.$$

PROBLEMA 25.3

Se na viga caixão de parede fina da figura acima for aplicado momento de flexão de 1 kN m em um plano vertical, determine a tensão direta máxima na seção transversal.

Resolução:

Desde que $I_{xy}' = 0$ e $M_y = 0$, a Equação abaixo

$$\sigma_z = E_{Z,i} \left[\left(\frac{M_x I'_{xx} - M_y I'_{xy}}{I'_{xx} I'_{yy} - I'^2_{xy}} \right) X + \left(\frac{M_x I'_{yy} - M_y I'_{xy}}{I'_{xx} I'_{yy} - I'^2_{xy}} \right) Y \right]$$

se reduz a

$$\sigma_z = E_{z,i} \frac{M_x}{I_{xx}} Y$$

Onde

$$I'_{xx} = 2 \times 60000 \times \frac{2.0 \times 100^3}{12} + 2 \times 20000 \times 1.0 \times 150 \times 50^2$$

$$I'_{xx} = 3.5 \times 10^{10} \text{ N mm}^2$$

Então,

$$\sigma_z = E_{z,i} \times \frac{1 \times 10^6}{3.5 \times 10^{10}} Y = 2.86 \times 10^{-5} E_{z,i} Y$$

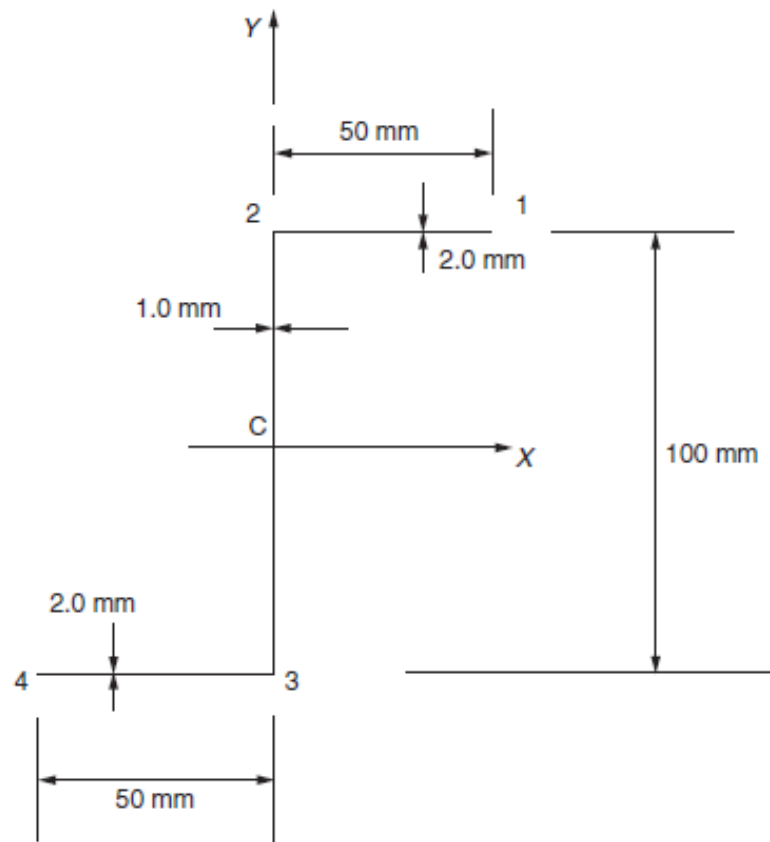
A tensão será máxima quando Y é um máximo. $E_{z,i}$ para os laminados horizontais maior do que para as laminados verticais, portanto

$$\sigma_z(\text{max}) = \pm 2.86 \times 10^{-5} \times 60000 \times 50$$

$$\sigma_z(\text{max}) = \pm 85.8 \text{ N/mm}^2$$

PROBLEMA 25.4

Se na viga abaixo for submetida a um momento de fletor de 0,5 kN m aplicado em um plano horizontal, calcule o valor máximo de tensão direta na seção da viga.

**Resolução:**

Do Exemplo 25.5, temos

$$I'_{XX} = 2.63 \times 10^{10} \text{ N mm}^2$$

$$I'_{YY} = 0.83 \times 10^{10} \text{ N mm}^2$$

$$I'_{XY} = 2.50 \times 10^{10} \text{ N mm}^2$$

E também, $M_x = 0$ e $M_y = 0.5 \text{ kN m}$ então a Equação

$$\sigma_z = E_{z,i} \left[\left(\frac{M_y I'_{XX} - M_x I'_{XY}}{I'_{XX} I'_{YY} - I'^2_{XY}} \right) X + \left(\frac{M_x I'_{YY} - M_y I'_{XY}}{I'_{XX} I'_{YY} - I'^2_{XY}} \right) Y \right]$$

torna-se:

$$\sigma_z = E_{z,i} (-3.23 \times 10^{-5} X + 3.07 \times 10^{-5} Y)$$

Na parte superior, $E_{z,i} = 50000 \text{ N/mm}^2$ e $Y = 50 \text{ mm}$, Assim, a equação acima torna-se

$$\sigma_z = -1,62X + 76.75$$

No ponto 1, onde $X = 50\text{mm}$

$$\sigma_{Z,1} = -4.3 \text{ N/mm}^2$$

No ponto 2, onde $X = 0\text{mm}$

$$\sigma_{Z,2} = 76.8 \text{ N/mm}^2$$

No laminado vertical, $E_{Z,i} = 15000 \text{ N/mm}^2$, $X=0$ então:

$$\sigma_Z = 0.46 \text{ N/mm}^2$$

Em 2,

$$\sigma_{Z,2} = -0.46 \times 50 = 23.0 \text{ N/mm}^2$$

Logo, a tensão máxima é 76.8 N/mm^2

PROBLEMA 25.5

A seção da viga compósita de parede fina do Exemplo 25.5 possui um carregamento cisalhante vertical de 2 kN aplicado no plano da seção vertical. Determine a distribuição do fluxo de cisalhamento.

Resolução:

Do Exemplo 25.5, temos

$$I'_{XX} = 2.63 \times 10^{10} \text{ N mm}^2$$

$$I'_{YY} = 0.83 \times 10^{10} \text{ N mm}^2$$

$$I'_{XY} = 2.50 \times 10^{10} \text{ N mm}^2$$

Nesse caso, $S_X = 0$, $S_Y = 2 \text{ kN}$ de modo que a equação abaixo

$$q_s = -\left(\frac{S_x I_{xx} - S_y I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2}\right) \int_0^s t_x ds - \left(\frac{S_y I_{yy} - S_x I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2}\right) \int_0^s t_y ds$$

se torna

$$q_s = -E_{Z,i} \left(1.15 \times 10^7 \int_0^s t_i X ds - 0.382 \times 10^{-7} \int_0^s t_i Y ds \right) \quad (i)$$

No trecho horizontal superior, $X = 50 - s_1$, $Y = 50 \text{ mm}$, $E_{Z,i} = 50\,000 \text{ N/mm}^2$. A Eq. (i) então se torna

$$q_{12} = -11.5 \times 10^{-3} \int_0^{s_1} (50 - s_1) ds_1 + 190 \times 10^{-3} \int_0^{s_1} ds_1$$

Que resulta em

$$q_{12} = 0.00575s_1^2 - 0.385s_1$$

Quando $s_1 = 50$ mm $q_2 = -4.875$ N/mm

No trecho vertical, $X = 0, Y = 50 - s_2, E_{z,i} = 15000$ N/mm². A Eq. (i) então se torna

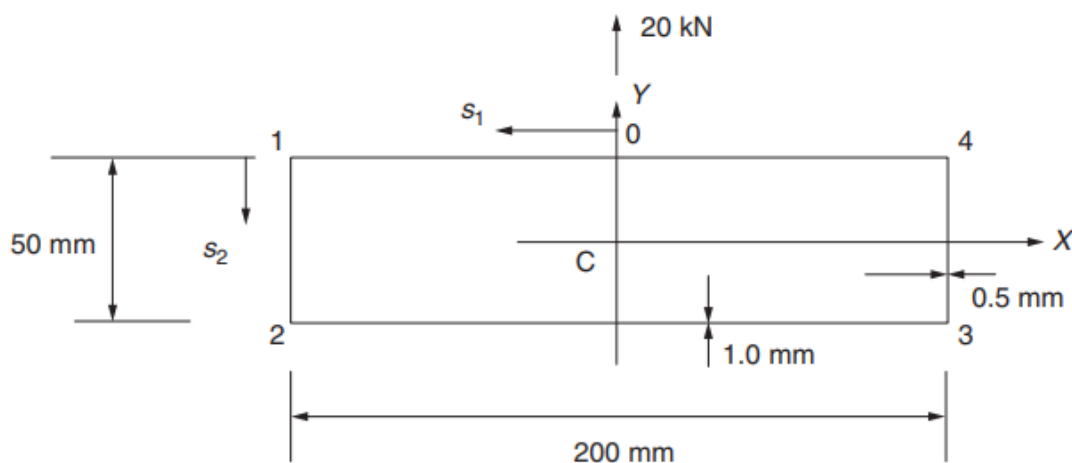
$$q_{23} = 5.73 \times 10^{-4} \int_0^{s_2} (50 - s_2) ds_2 - 4.875$$

De modo que

$$q_{23} = 0.0287s_2 - 2.865s_2^2 - 4.875$$

PROBLEMA 25.6

A seção compósita fechada, de parede fina, apresentada a seguir, está sujeita a um carregamento cisalhante vertical de 20 kN aplicado através do centro de simetria. Se as propriedades elásticas do laminado são: para os trechos horizontais: $E_{z,i} = 54100$ N/mm²; para os trechos verticais: $E_{z,i} = 17700$ N/mm²; determine a distribuição do fluxo de cisalhamento em toda a parede fina que compõe essa seção transversal.



Resolução:

Referindo-se à figura a cima, se a origem de s é escolhida no eixo vertical de simetria, $q_{s,0}$, em 0, é zero.

Além disso, desde que $S_X = 0$ e $I'_{XY} = 0$, a equação de uma viga com seção transversal fechada

$$q_s = -E_{Z,i} \left[\left(\frac{S_X I'_{XX} - S_Y I'_{XY}}{I'_{XX} I'_{YY} - I'^2_{XY}} \right) \int_0^s t_i X ds + \left(\frac{S_Y I'_{YY} - S_X I'_{XY}}{I'_{XX} I'_{YY} - I'^2_{XY}} \right) \int_0^s t_i Y ds \right] + q_{s,0}$$

se reduz a

$$q_s = -E_{Z,i} \frac{S_Y}{I'_{XX}} \int_0^s t Y ds$$

No qual

$$I'_{XX} = 2(54100 \times 200 \times 25^2) + 2 \left(17700 \times \frac{0.5 \times 50^3}{12} \right)$$

Isto é

$$I'_{XX} = 13.7 \times 10^9 \text{ N mm}^2$$

Então

$$q_{01} = -54100 \times \frac{20 \times 10^3}{13.7 \times 10^9} \int_0^{s_1} 1.0 \times 25 ds_1$$

Isto é

$$q_{01} = -1.98 s_1$$

De modo que

$$q_1 = -1.98 \times 100 = -198 \text{ N/mm}$$

Além disso

$$q_{12} = -17700 \times \frac{20 \times 10^3}{13.7 \times 10^9} \int_0^{s_2} 0.5(25 - s_2) ds_2 - 198$$

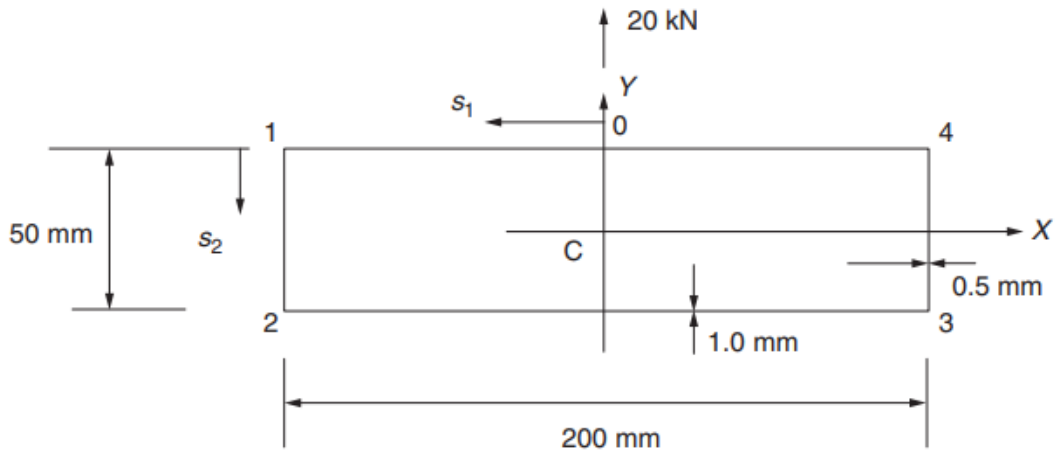
Que resulta em

$$q_{12} = 6.5 \times 10^{-3} s_2^2 - 0.325 s_2 - 198$$

A distribuição restante segue da simetria.

PROBLEMA 25.7

A seção da viga apresentada abaixo está sujeita a um torque anti-horário de 1 kNm. Se o módulo de cisalhamento laminado dos trechos horizontais é 20700 N/mm² e o dos trechos verticais é 36400 N/mm² determine a máxima tensão cisalhante na seção, sua taxa de torção e a distribuição do empenamento.



Resolução:

O fluxo de cisalhamento pode ser obtido da equação abaixo,

$$q = \frac{T}{2A}$$

isto é

$$q = \frac{1 \times 10^6}{2 \times 200 \times 50} = 50 \text{ N/mm}$$

A máxima tensão cisalhante irá ocorrer nos trechos verticais e é

$$\tau_{\max} = \frac{50}{0.5} = 100 \text{ N/mm}^2$$

Da equação da rigidez torcional

$$GJ = \frac{4A^2}{\oint \frac{ds}{G_{xy,i} t_i}}$$

$$GJ = 4 \times (50 \times 200)^2 / [2 \times 200 / (20700 \times 1.0) + 2 \times 50 / (36400 \times 0.5)]$$

Isto é

$$GJ = 1.6 \times 10^{10} \text{ N mm}^2$$

Então

$$\frac{d\theta}{dz} = \frac{T}{GJ} = \frac{1 \times 10^6}{1.6 \times 10^{10}} = 6.25 \times 10^{-5} \text{ rad/mm}$$

Finalmente, da Eq. (25.47)

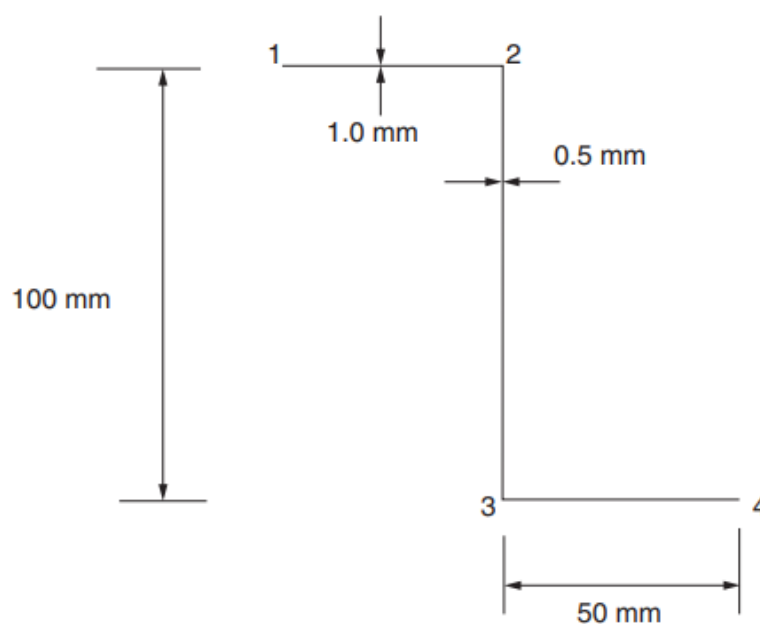
$$W_4 = \frac{1 \times 10^6}{2 \times 200 \times 50} \left[\frac{100}{20700 \times 1.0} - \frac{\frac{1}{2} \times 100 \times 50}{50 \times 200} \left(\frac{2 \times 200}{20700 \times 1.0} + \frac{2 \times 50}{36400 \times 0.5} \right) \right]$$

Isto é

$$W_4 = -0.086 \text{ mm}$$

PROBLEMA 25.8

A seção de uma viga de compósito e parede fina mostrada na figura abaixo tem o módulo de cisalhamento laminado de 16300 N/mm^2 para as flanges e 20900 N/mm^2 para o trecho vertical. Se a viga está sujeita a um torque de 0.5 kN mm determine a taxa de torção na seção, a máxima tensão cisalhante e o valor de empenamento no ponto 1.



Resolução:

Da equação rigidez torcional para uma viga de seção aberta

$$GJ = \sum_{i=1}^n G_{XY,i} \frac{st_i^3}{3} = \frac{1}{3} \int_{sect} G_{XY,i} t_i^3 ds$$

temos,

$$GJ = 2 \times 16300 \times 50 \times \frac{1^3}{3} + 20900 \times 100 \times \frac{0.5^3}{3} = 6.3 \times 10^5 \text{ N mm}^2$$

Então, de taxa de torção de uma viga de seção aberta

$$T = \left(\frac{1}{3} \int_{estr.} G_{XY,i} t_i^3 ds \right) \frac{d\theta}{dZ}$$

temos,

$$\frac{d\theta}{dz} = \frac{0.5 \times 10^3}{6.3 \times 10^3} = 0.8 \times 10^{-3} \text{ rad/mm}$$

Da de taxa de cisalhamento

$$\tau = G_{XY,i} t_i \frac{d\theta}{dZ}$$

temos,

$$\tau_{\max}(\text{flanges}) = \pm 2 \times 16300 \times \frac{1.0}{2} \times 0.8 \times 10^{-3}$$

Isto é

$$\tau_{\max}(\text{flanges}) = \pm 13.0 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau_{\max}(\text{trecho vertical}) = \pm 2 \times 20900 \times \frac{0.5}{2} \times 0.8 \times 10^{-3}$$

Isto é

$$\tau_{\max}(\text{trecho vertical}) = \pm 8.4 \text{ N/mm}^2$$

Portanto

$$\tau_{\max} = \pm 13.0 \text{ N/mm}^2$$

O empenamento em 1 é, pela equação

$$w_s = -2A_R \frac{d\theta}{dZ}$$

$$W_1 = -2 \times \frac{1}{2} \times 50 \times 50 \times 0.8 \times 10^{-3} = -2.0 \text{ mm}$$

CAPÍTULO V

DESENVOLVIMENTO NUMÉRICO DE APLICAÇÕES

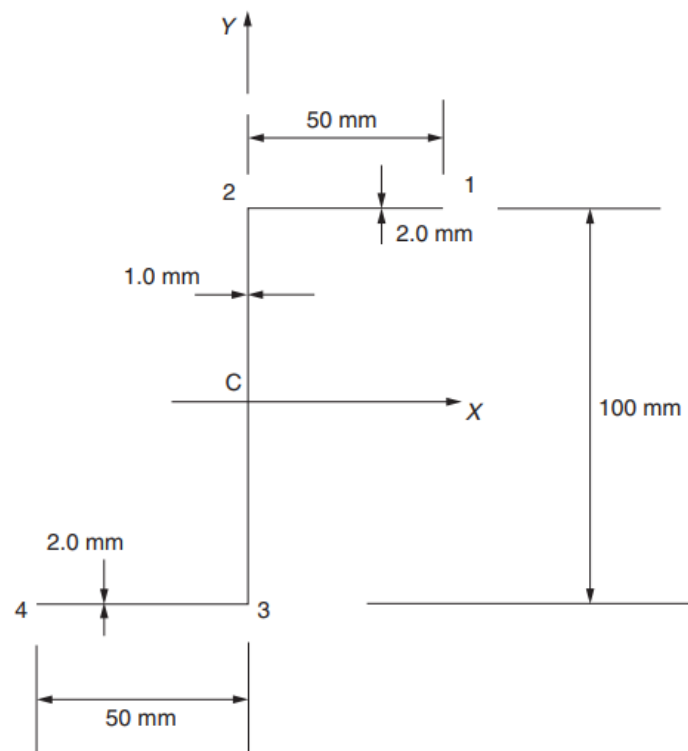
Este capítulo contempla o passo-a-passo, contendo os procedimentos detalhados para a realização da modelagem para três aplicações que tratam das diferentes situações de solicitações: momento de flexão, carga cisalhante e momento de torção, a saber, respectivamente: **Exemplo 25.5** e **Problemas 25.6** e **25.7**.

5.1 Momento de Flexão (M)

EXEMPLO 25.5

[Vigas mistas de paredes finas]

Uma viga de parede fina possui a seção transversal em compósito apresentada na figura abaixo e está sujeita a um momento fletor de 1 kN/m aplicado no plano vertical. Se os valores dos módulos de *Young* para os laminados das mesas são 50000 N/mm² cada e para o trecho vertical é 15000 N/mm² determine o valor máximo da tensão normal que ocorre na seção transversal da viga.



Segue o passo-a-passo para a modelagem referente à resolução desta aplicação, via software NASTRAN®:

1) Geometria

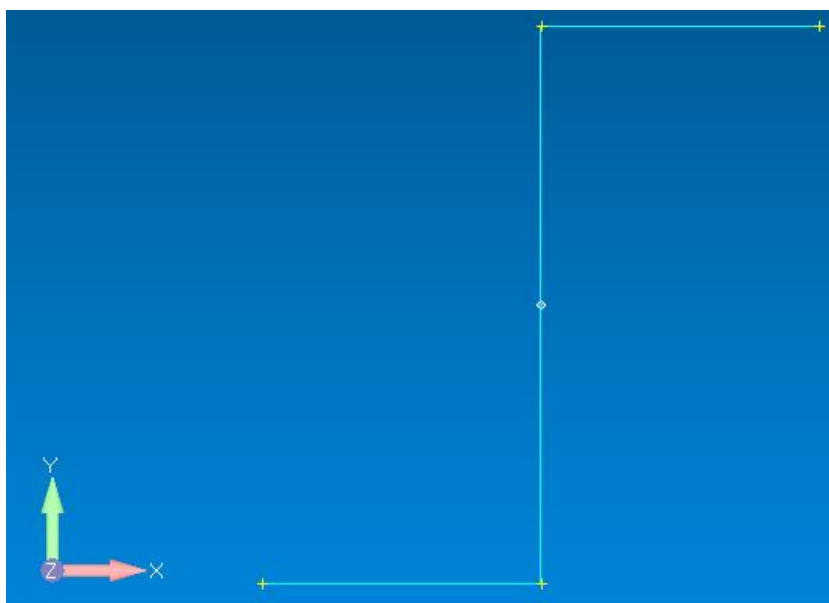
Para criar a seção transversal da peça em análise.

Geometry → Curve Line → Project Points

L1: [P1 (50,50,0); P2 (0,50,0)];

L2: [P2 (0,50,0); P3 (0,-50,0)];

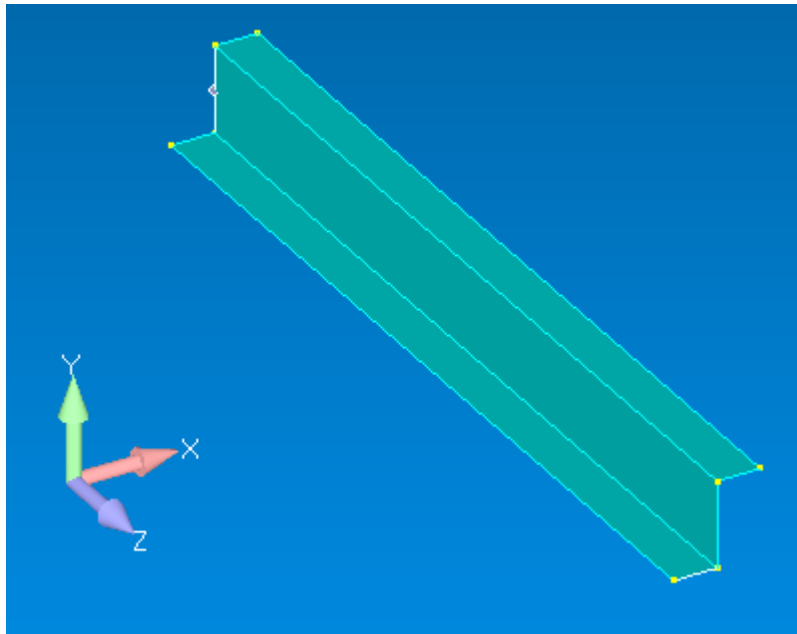
L3: [P3 (0,-50,0); P4 (-50,-50,0)]



Para criar o corpo da peça no eixo Z.

Geometry → Surface → Extrude → Selecione L1, L2 e L3

Base (0,0,0) e Tip (0, 0, 1000).



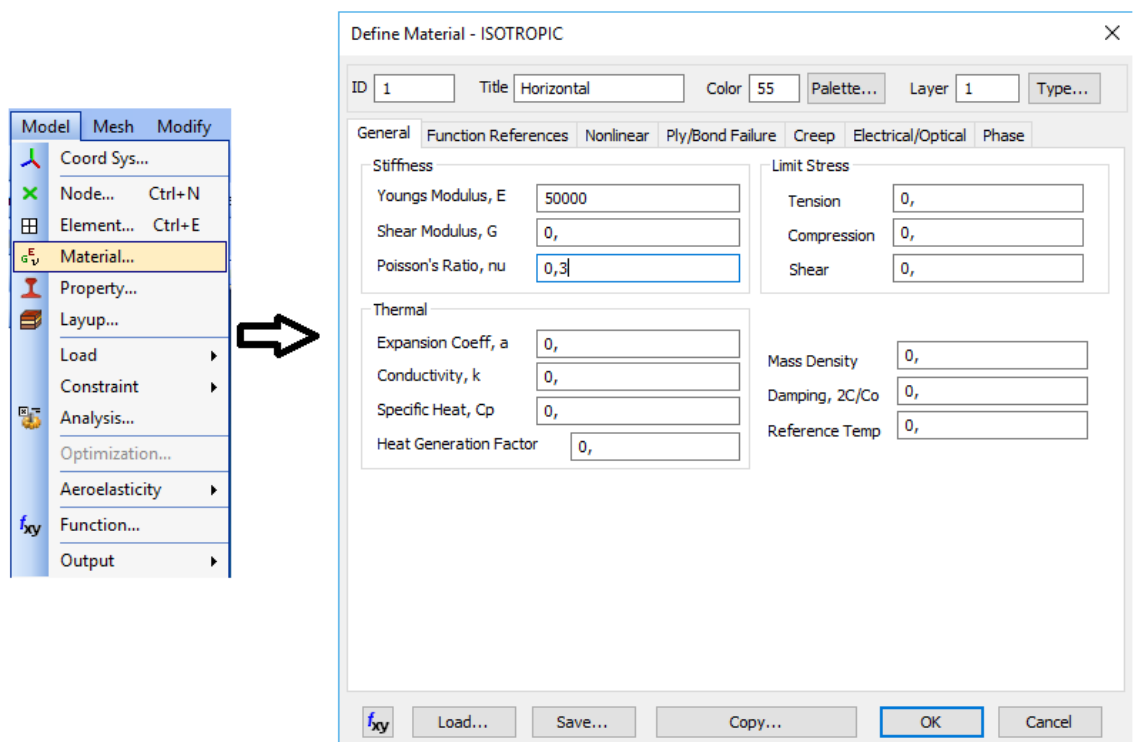
2) Material

Para criar o material referenciado no exercício

Model → Material → Title (Horizontal)

$E=50000 \text{ N/mm}^2$

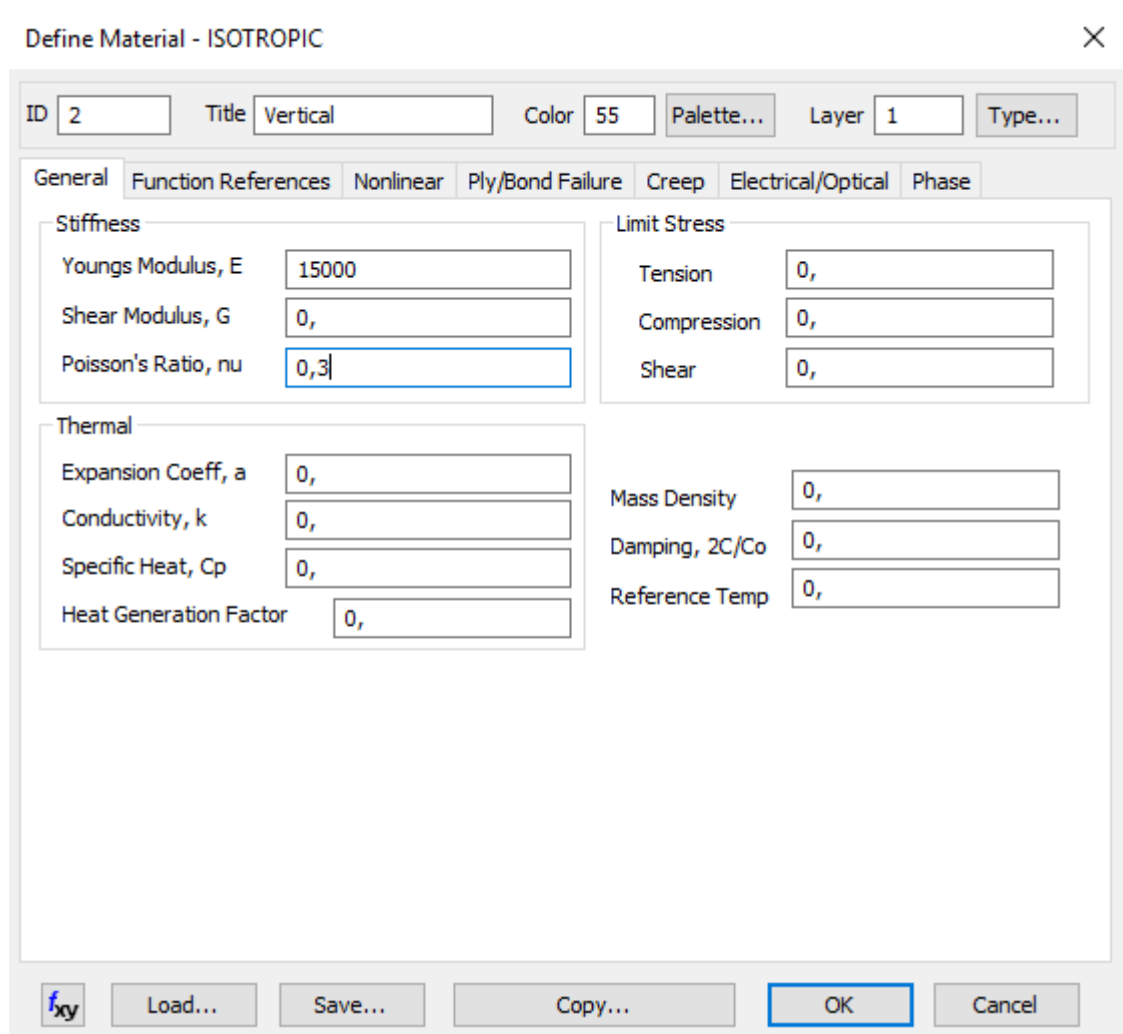
$\nu = 0,3$



Model → Material → Title (Vertical)

$E=15000 \text{ N/mm}^2$

$\nu = 0,3$



The image shows a software dialog box titled "Define Material - ISOTROPIC". At the top, there are input fields for "ID" (value: 2), "Title" (value: Vertical), "Color" (value: 55), a "Palette..." button, "Layer" (value: 1), and a "Type..." button. Below these are several tabs: "General", "Function References", "Nonlinear", "Ply/Bond Failure", "Creep", "Electrical/Optical", and "Phase". The "General" tab is selected and contains two main sections: "Stiffness" and "Thermal". The "Stiffness" section has input fields for "Youngs Modulus, E" (15000), "Shear Modulus, G" (0,), and "Poisson's Ratio, nu" (0,3). The "Thermal" section has input fields for "Expansion Coeff, a" (0,), "Conductivity, k" (0,), "Specific Heat, Cp" (0,), and "Heat Generation Factor" (0,). To the right of these sections is a "Limit Stress" section with input fields for "Tension" (0,), "Compression" (0,), and "Shear" (0,). Below the "Limit Stress" section are input fields for "Mass Density" (0,), "Damping, 2C/Co" (0,), and "Reference Temp" (0,). At the bottom of the dialog are buttons for "fxy", "Load...", "Save...", "Copy...", "OK", and "Cancel".

Property	Value
ID	2
Title	Vertical
Color	55
Layer	1
Youngs Modulus, E	15000
Shear Modulus, G	0,
Poisson's Ratio, nu	0,3
Expansion Coeff, a	0,
Conductivity, k	0,
Specific Heat, Cp	0,
Heat Generation Factor	0,
Tension	0,
Compression	0,
Shear	0,
Mass Density	0,
Damping, 2C/Co	0,
Reference Temp	0,

3) Propriedades

Model → Property → Title (Prop_Horizontal)

Thicknesses = 2

Element/Property type → Plate → OK

Define Property - PLATE Element Type

ID Title Material 

Color Layer

Property Values

Thicknesses, Tavg or T1

blank or T2

blank or T3

blank or T4

Nonstructural mass/area

Additional Options

Bend Stiffness, $12I/T^{**3}$

TShear/Mem Thickness, ts/t

Bending

Transverse Shear

Memb-Bend Coupling

☐ Mean Dilatational Formulation

Stress Recovery (Default=T/2)

☐ Top Fiber

☐ Bottom Fiber

Model → Property → Title (Prop_Vertical)

Thicknesses = 1

Element/Property type → Plate → OK

Define Property - PLATE Element Type

ID Title Material 

Color Layer

Property Values

Thicknesses, Tavg or T1

blank or T2

blank or T3

blank or T4

Nonstructural mass/area

Additional Options

Bend Stiffness, $12I/T^{**3}$

TShear/Mem Thickness, ts/t

Bending

Transverse Shear

Memb-Bend Coupling

☐ Mean Dilatational Formulation

Stress Recovery (Default=T/2)

☐ Top Fiber

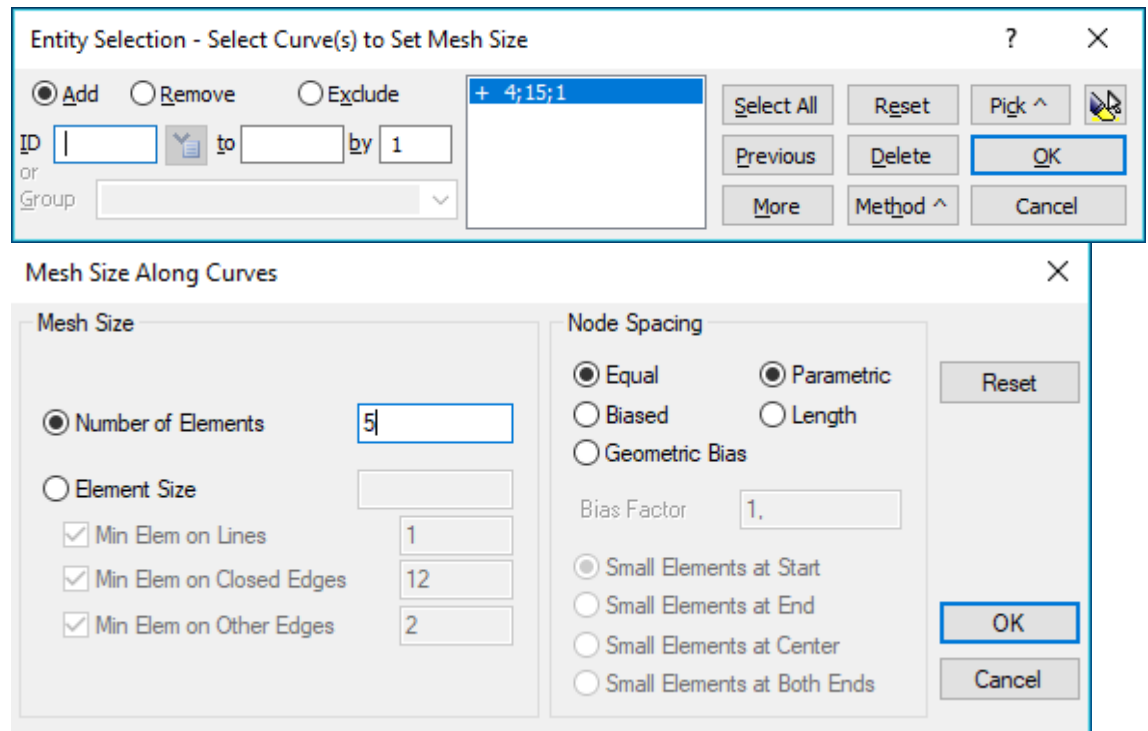
☐ Bottom Fiber

4) Malhar a estrutura

Mesh → Mesh control → Size along curve

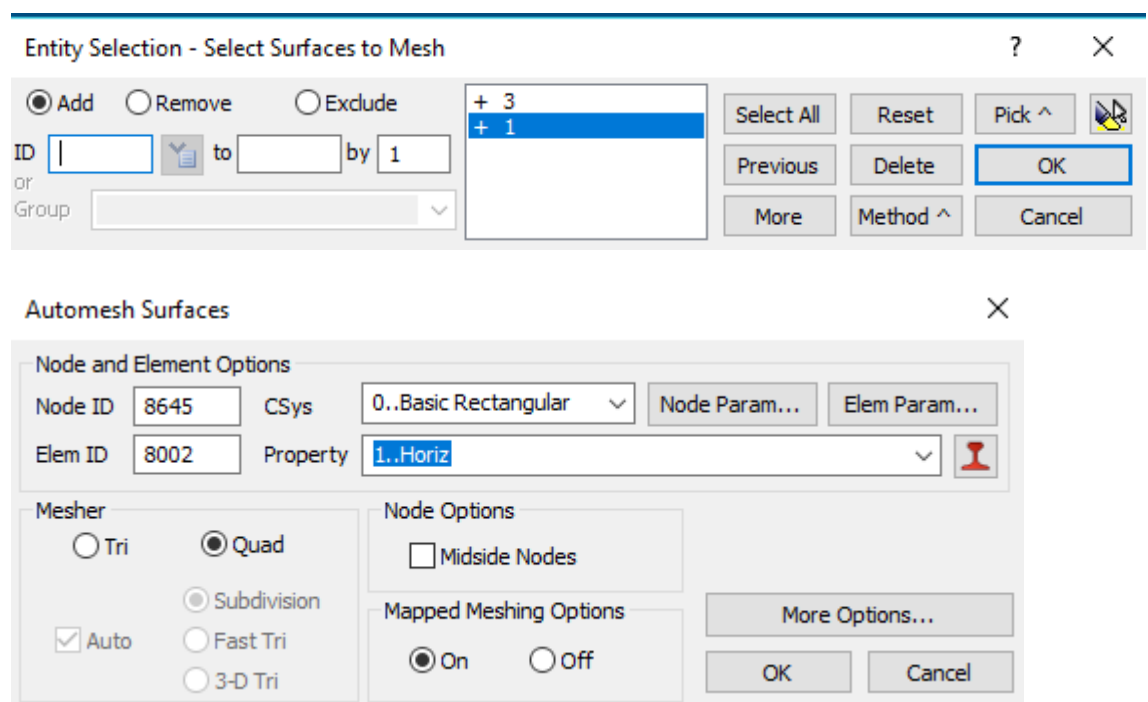
Selecione todas as curvas [select all] → Ok

Element size: 5 → Ok

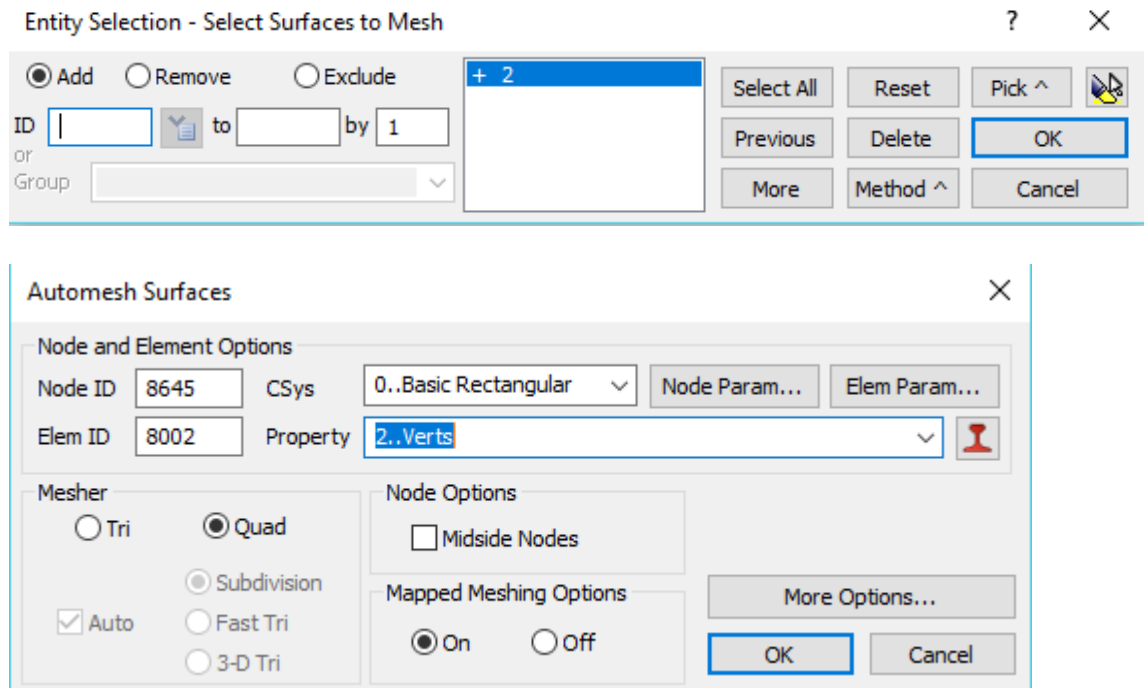


Mesh → Geometry → surface → Selecionar as horizontais → Ok

Automesh surfaces → Property → 1. Prop_Horizontal → Ok



Mesh → Geometry → Surface → Selecionar a vertical → Ok
 Automesh surfaces → Property → 1. Prop_Vertical → Ok



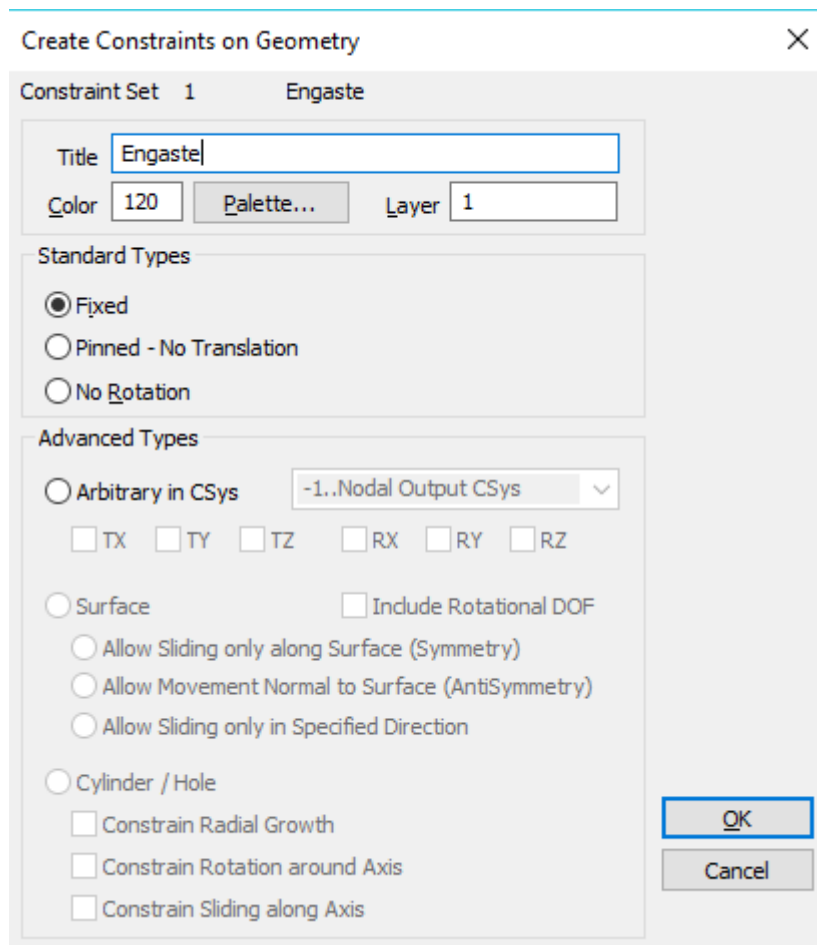
5) Condição de Contorno

Engastes

Model → Constraint → On Curve → Title (Engaste) → Ok

Selecionar as curvas L1, L2 e L3 em uma das extremidades da peça → Ok

Title (Engaste) → Fixed → Ok

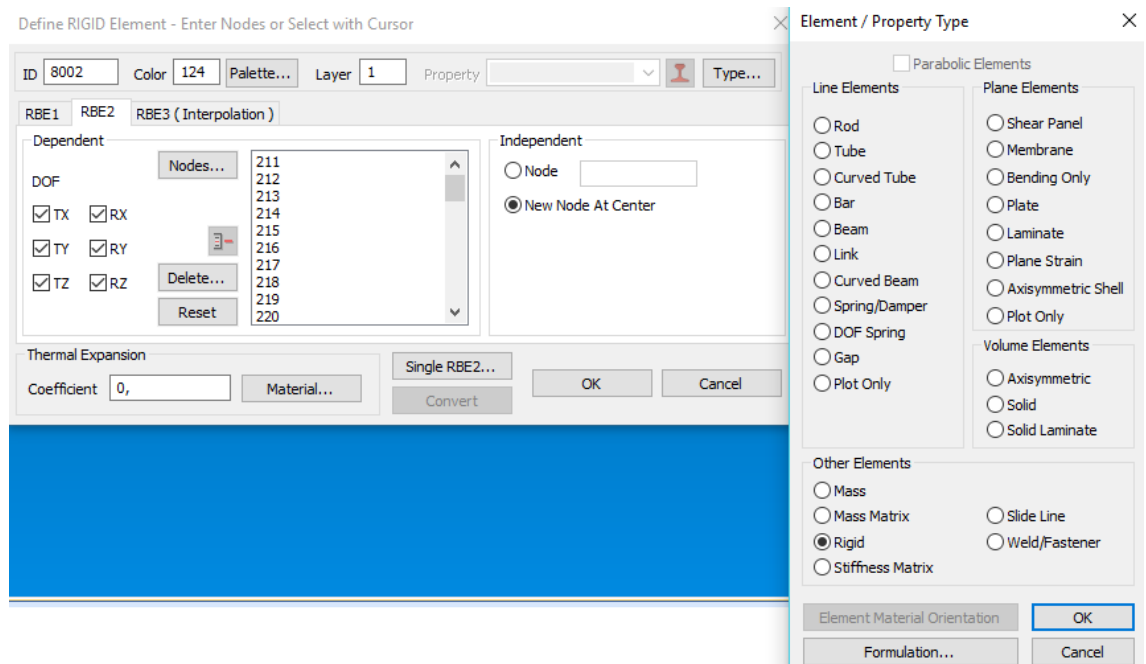


Força

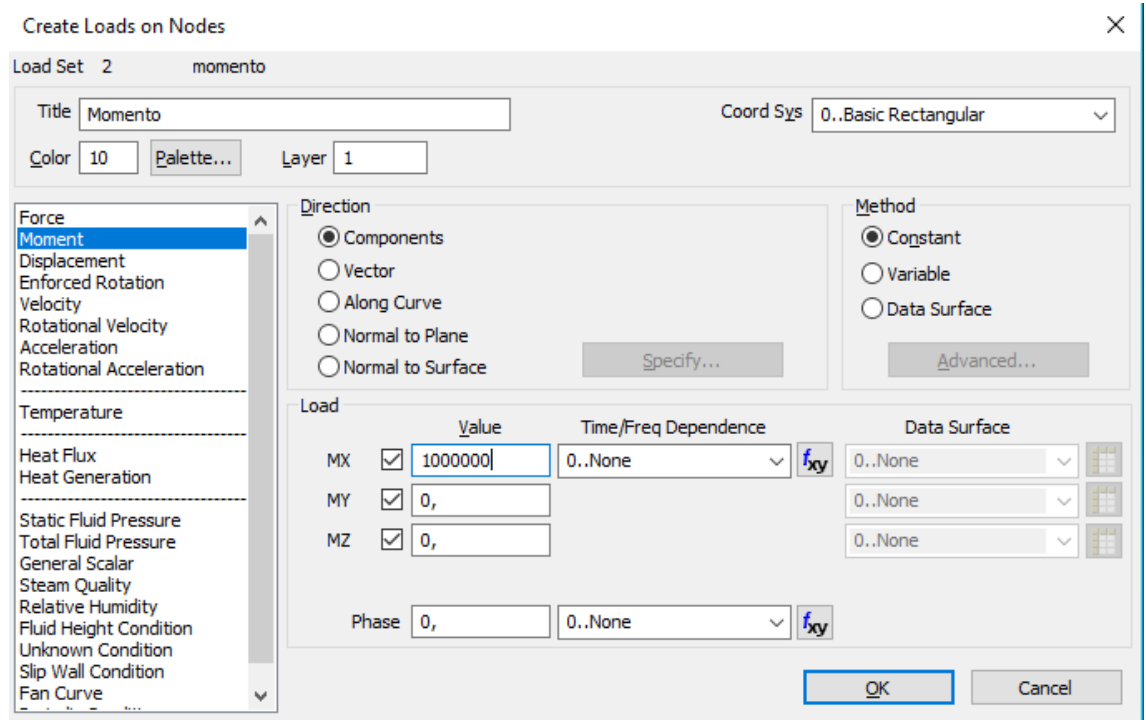
Model → Element → Type → Other Elements → Rigid → Ok

RBE2 → Dependent → Nodes → Methods → On Curve → Selecionar a outra extremidade da peça.

Independent → New Node At Center → Ok



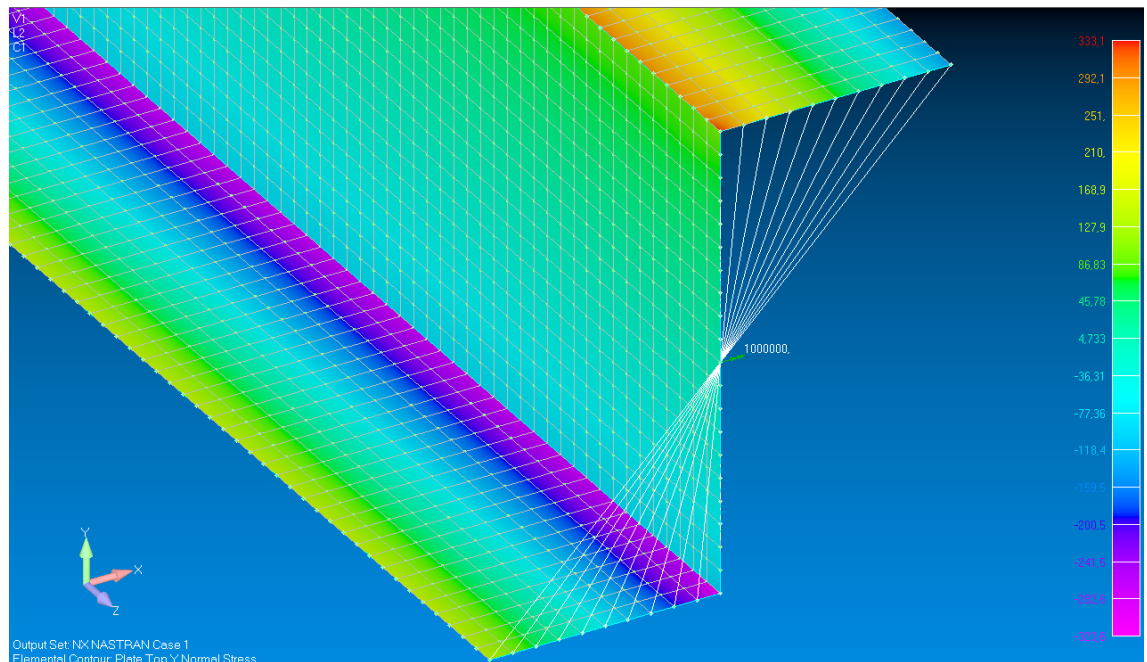
Model → Load → Nodal → Title (Momento) → Selecionar o elemento independente criado no passo anterior no centro da seção transversal.
 Create Loads On Nodes → Title (Momento) → Direction → Components
 MX: 1000000 Nmm



6) Analise

Model → Analysis → New → Title (Analise) → 8 x Next →
 Nastran Output Requests → Elemental → Force, Stress e Strain → Ok
 Clique em Analyze

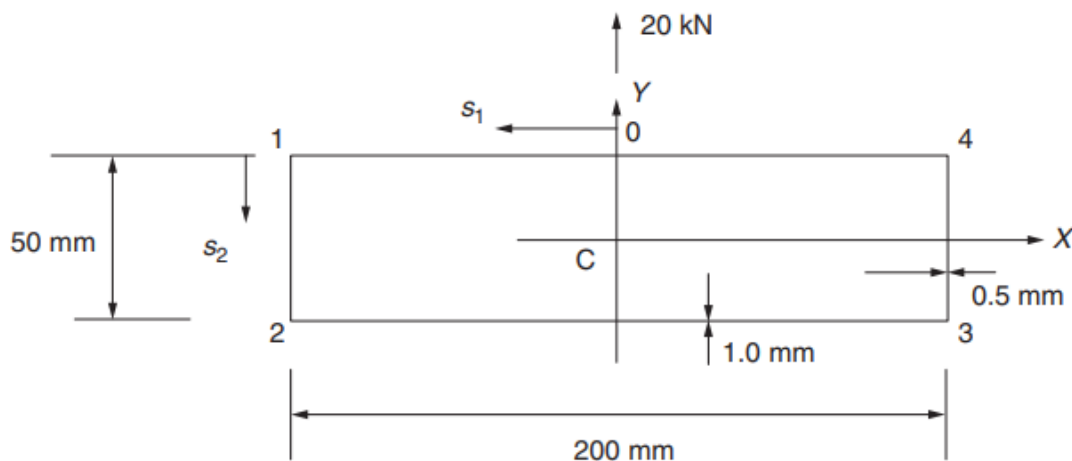
7) Model Info → Results → All Results → 1..NX NASTRAN Case 1



5.2 Carga Cisalhante (S)

PROBLEMA 25.6

A seção compósita fechada, de parede fina, apresentada a seguir, está sujeita a um carregamento cisalhante vertical de 20 kN aplicado através do centro de simetria. Se as propriedades elásticas do laminado são: para os trechos horizontais: $E_{Z,i} = 54100 \text{ N/mm}^2$; para os trechos verticais: $E_{Z,i} = 17700 \text{ N/mm}^2$; determine a distribuição do fluxo de cisalhamento em toda a parede fina que compõe essa seção transversal.



Segue o passo-a-passo para a modelagem referente à resolução desta aplicação, via software NASTRAN®:

1) Geometria

Para criar a seção transversal da peça em análise.

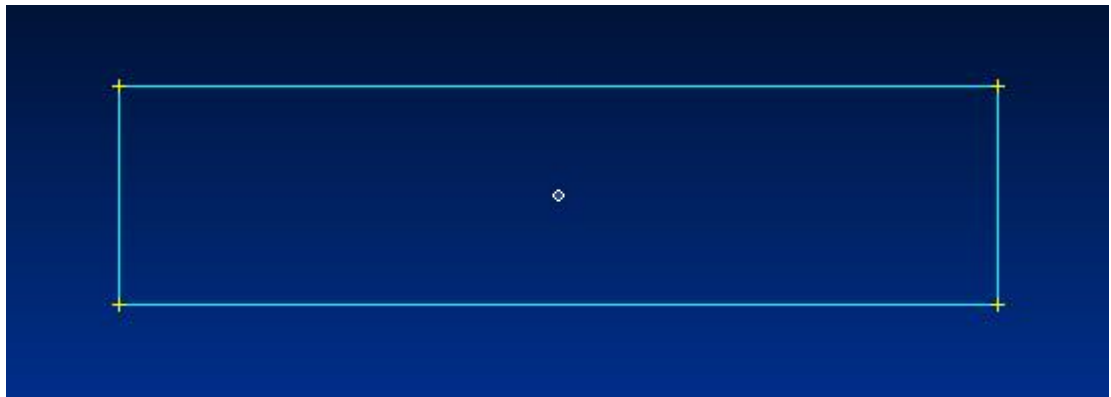
Geometry → Curve Line → Project Points

L1: [P1 (-100,25,0); P2 (100,25,0)];

L2: [P2 (100,25,0); P3 (100,-25,0)];

L3: [P3 (100,-25,0); P4 (-100,-25,0)];

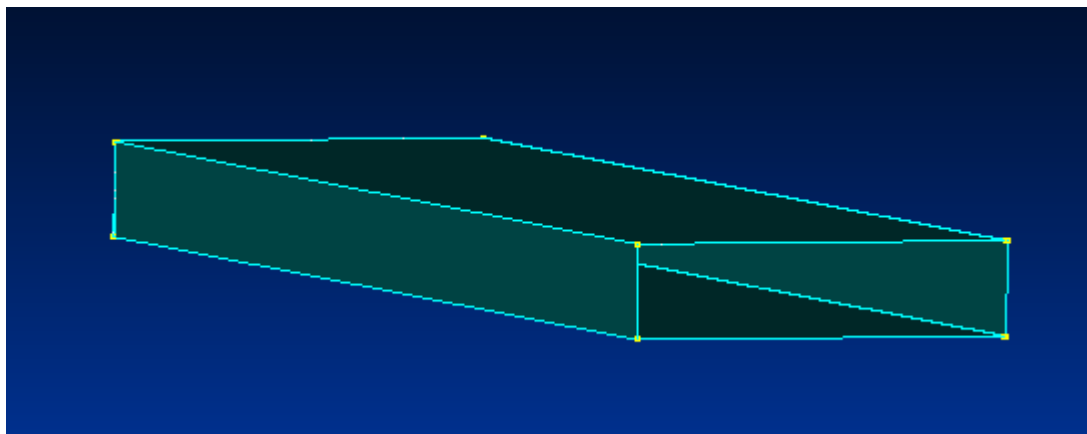
L4: [P4 (-100,-25,0); P1 (-100,25,0)]



Para criar o corpo da peça no eixo Z.

Geometry → Surface → Extrude → Selecione L1, L2 e L3

Base (0,0,0) e Tip (0, 0, 1000).



2) Material

Para criar o material referenciado no exercício

Model → Material → Title (Horizontal)

$G=207000 \text{ N/mm}^2$

$\nu = 0,3$

Define Material - ISOTROPIC

ID 1 Title horizontal Color 55 Palette... Layer 1 Type...

General Function References Nonlinear Ply/Bond Failure Creep Electrical/Optical Phase

Stiffness

Youngs Modulus, E 54100

Shear Modulus, G 0

Poisson's Ratio, ν 0,3

Thermal

Expansion Coeff, α 0,

Conductivity, k 0,

Specific Heat, C_p 0,

Heat Generation Factor 0,

Limit Stress

Tension 0,

Compression 0,

Shear 0,

Mass Density 0,

Damping, $2C/Co$ 0,

Reference Temp 0,

fxy Load... Save... Copy... OK Cancel

Model → Material → Title (Vertical)

$G=36400 \text{ N/mm}^2$

$\nu = 0,3$

Define Material - ISOTROPIC

ID 2 Title Vertical Color 55 Palette... Layer 1 Type...

General Function References Nonlinear Ply/Bond Failure Creep Electrical/Optical Phase

Stiffness

Youngs Modulus, E 17700

Shear Modulus, G

Poisson's Ratio, ν 0,3

Thermal

Expansion Coeff, α 0,

Conductivity, k 0,

Specific Heat, C_p 0,

Heat Generation Factor 0,

Limit Stress

Tension 0,

Compression 0,

Shear 0,

Mass Density 0,

Damping, $2C/Co$ 0,

Reference Temp 0,

fxy Load... Save... Copy... OK Cancel

3) Propriedades

Model → Property → Title (Prop_Horizontal)

Thicknesses = 1

Element/Property type → Plate → OK

Define Property - PLATE Element Type

ID 1 Title Prop_Horizontal Material 1..Horizontal

Color 110 Palette... Layer 1 Elem/Property Type...

Property Values

Thicknesses, Tavg or T1 1,

blank or T2 0,

blank or T3 0,

blank or T4 0,

Nonstructural mass/area 0,

Additional Options

Bend Stiffness, $12I/T^{**3}$ 0,

TShear/Mem Thickness, ts/t 0,

Bending 0..Plate Material

Transverse Shear 0..Plate Material

Memb-Bend Coupling 0..None - Ignore

☐ Mean Dilatational Formulation

NEI Nastran Tension Only...

Stress Recovery (Default=T/2)

☐ Top Fiber 0,

☐ Bottom Fiber 0,

Load... Save... OK

Copy... Cancel

Model → Property → Title (Prop_Vertical)

Thicknesses = 0.5

Element/Property type → Plate → OK

Define Property - PLATE Element Type

ID 2 Title Prop_Vertical Material 2..Vertical

Color 110 Palette... Layer 1 Elem/Property Type...

Property Values

Thicknesses, Tavg or T1 0,5

blank or T2 0,

blank or T3 0,

blank or T4 0,

Nonstructural mass/area 0,

Additional Options

Bend Stiffness, $12I/T^{**3}$ 0,

TShear/Mem Thickness, ts/t 0,

Bending 0..Plate Material

Transverse Shear 0..Plate Material

Memb-Bend Coupling 0..None - Ignore

☐ Mean Dilatational Formulation

NEI Nastran Tension Only...

Stress Recovery (Default=T/2)

☐ Top Fiber 0,

☐ Bottom Fiber 0,

Load... Save... OK

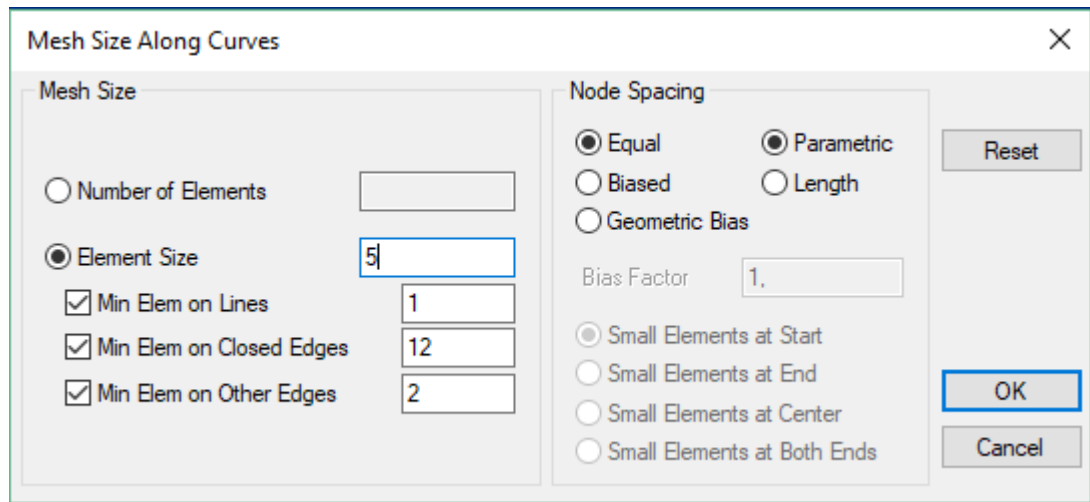
Copy... Cancel

4) Malhar a estrutura

Mesh → Mesh control → Size along curve

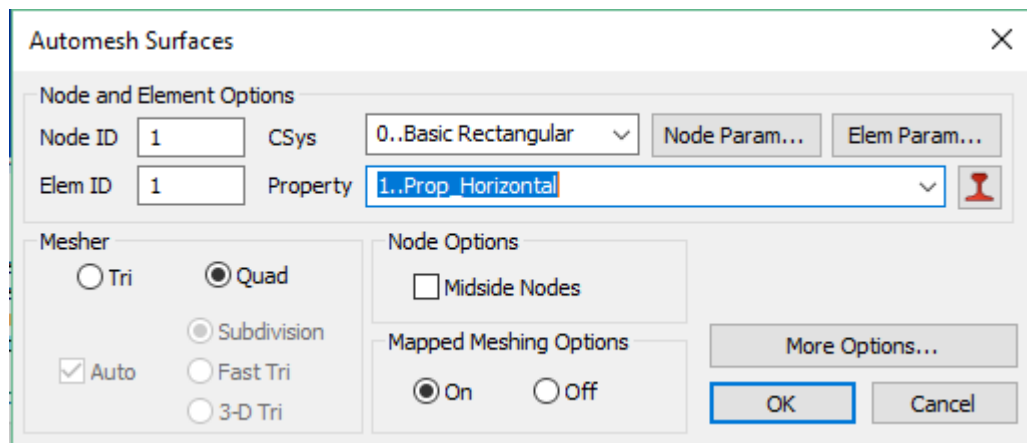
Selecione todas as curvas [select all] → Ok

Element size: 5 → Ok



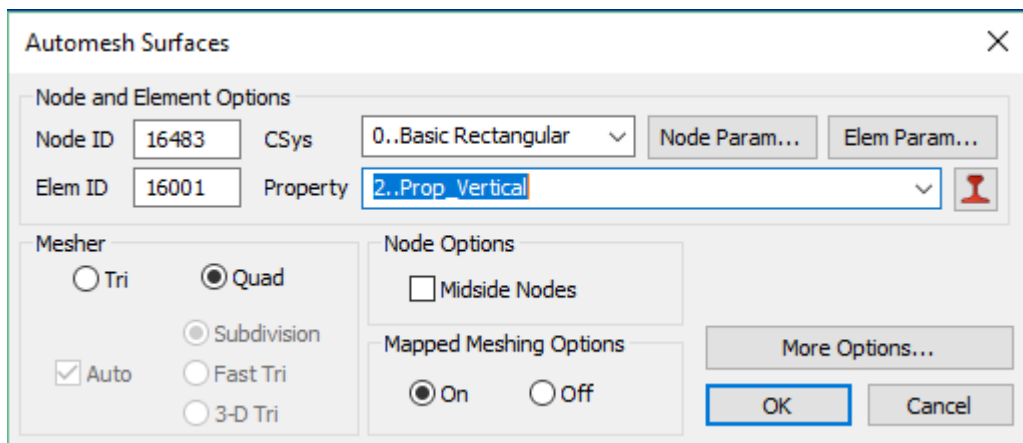
Mesh → Geometry → surface → Selecionar as horizontais → Ok

Automesh surfaces → Property → 1. Prop_Horizontal → Ok



Mesh → Geometry → Surface → Selecionar a vertical → Ok

Automesh surfaces → Property → 1. Prop_Vertical → Ok



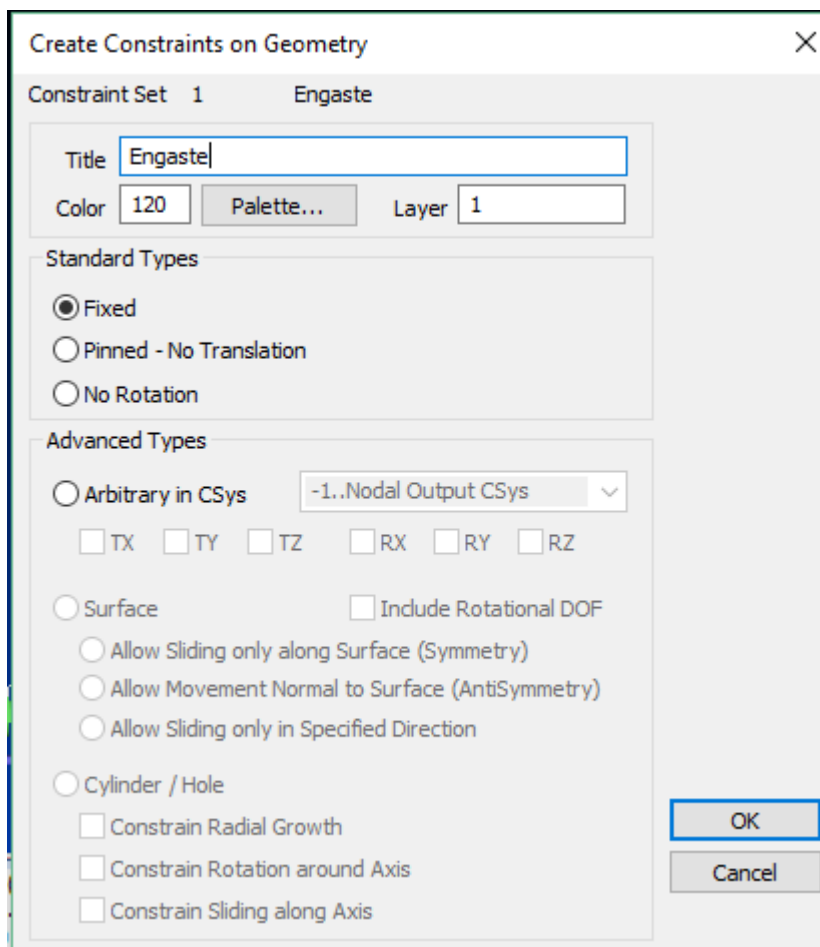
5) Condição de Contorno

Engastes

Model → Constraint → On Curve → Title (Engaste) → Ok

Selecionar as curvas L1, L2 e L3 em uma das extremidades da peça → Ok

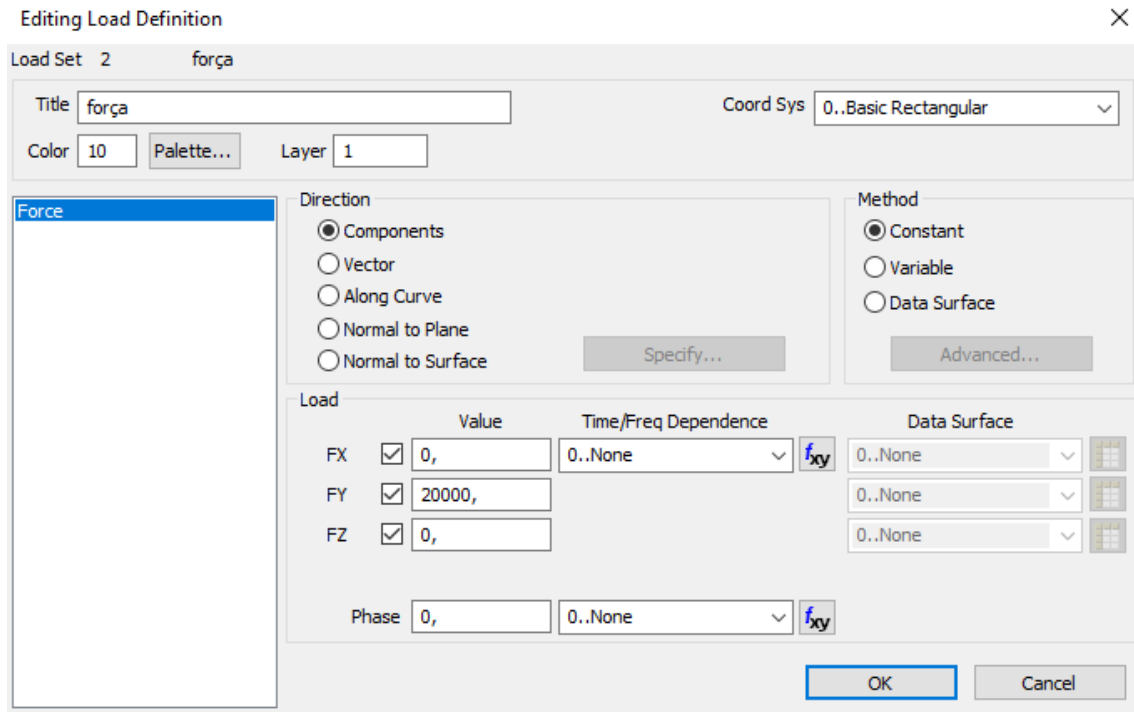
Title (Engaste) → Fixed → Ok



Força

Model → Load → Nodal → Title (Força) → Selecionar a aresta vertical da direita

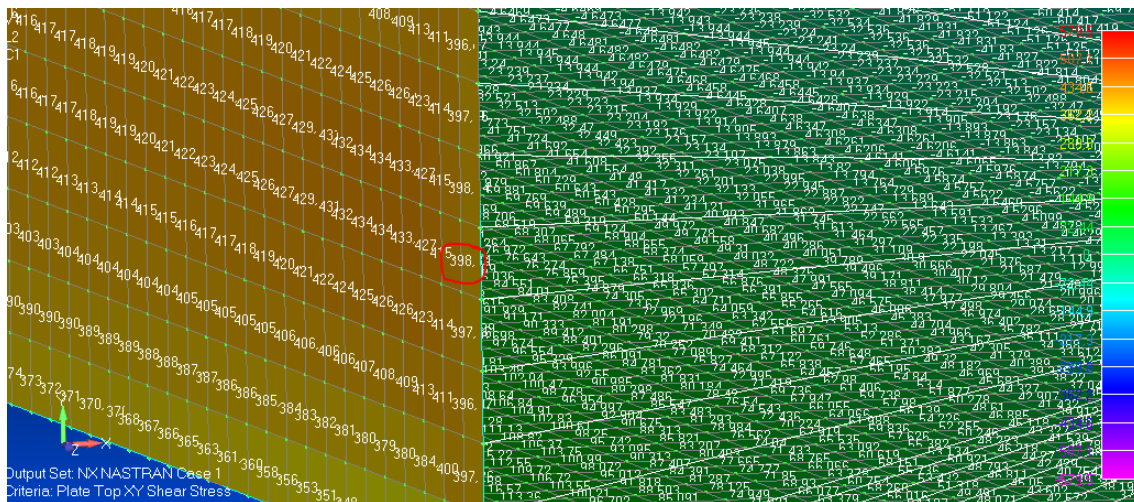
Create Loads On Nodes → Title (Força) → Direction → Components
FY: 20000 N



6) Analise

Model → Analysis → New → Title (Analise) → 8 x Next →
Nastran Output Requests → Elemental → Force, Stress e Strain → Ok
Clique em Analyze

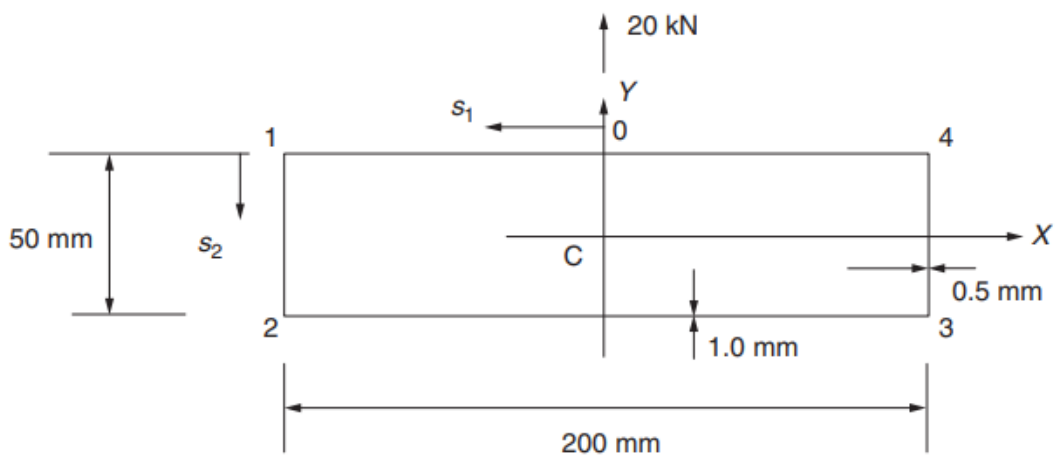
7) Model Info → Results → All Results → 1..NX NASTRAN Case 1



5.3 Torção (T)

PROBLEMA 25.7

A seção da viga apresentada abaixo está sujeita a um torque anti-horário de 1 kNm. Se o módulo de cisalhamento laminado dos trechos horizontais é 20700 N/mm² e o dos trechos verticais é 36400 N/mm² determine a máxima tensão cisalhante na seção, sua taxa de torção e a distribuição do empenamento.



Segue o passo-a-passo para a modelagem referente à resolução desta aplicação, via software NASTRAN®:

1) Geometria

Para criar a seção transversal da peça em análise.

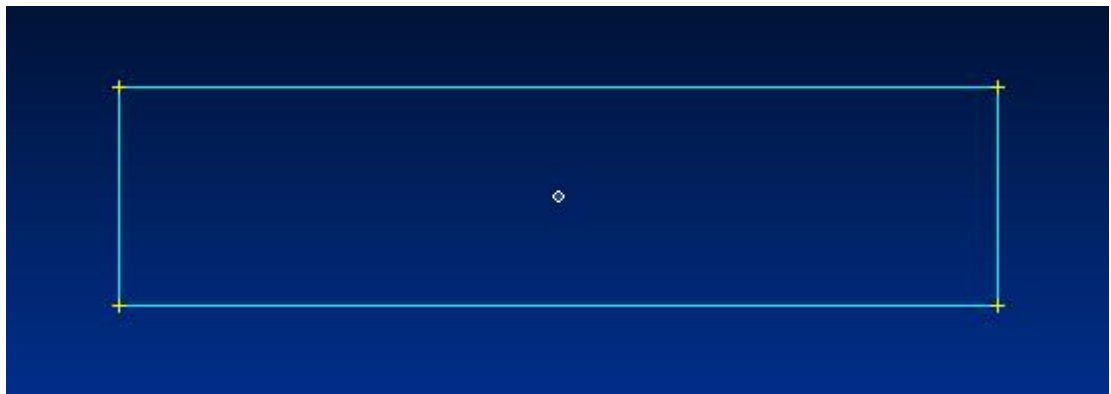
Geometry → Curve Line → Project Points

L1: [P1 (-100,25,0); P2 (100,25,0)];

L2: [P2 (100,25,0); P3 (100,-25,0)];

L3: [P3 (100,-25,0); P4 (-100,-25,0)];

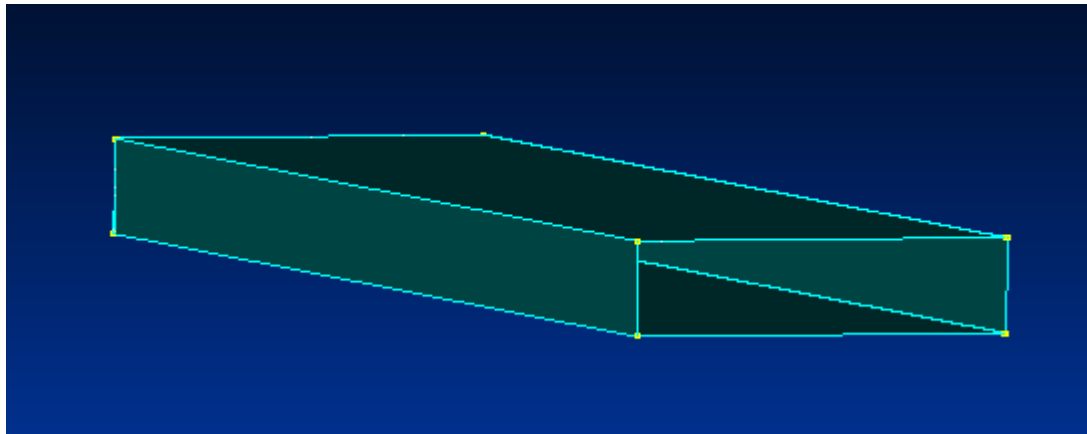
L4: [P4 (-100,-25,0); P1 (-100,25,0)]



Para criar o corpo da peça no eixo Z.

Geometry → Surface → Extrude → Selecione L1, L2 e L3

Base (0,0,0) e Tip (0, 0, 1000).



2) Material

Para criar o material referenciado no exercício

Model → Material → Title (Horizontal)

$G=207000 \text{ N/mm}^2$

$\nu = 0,3$

Define Material - ISOTROPIC

ID 1 Title Horizontal Color 55 Palette... Layer 1 Type...

General Function References Nonlinear Ply/Bond Failure Creep Electrical/Optical Phase

Stiffness

Youngs Modulus, E 0

Shear Modulus, G 20700

Poisson's Ratio, nu 0,3

Limit Stress

Tension 0,

Compression 0,

Shear 0,

Thermal

Expansion Coeff, a 0,

Conductivity, k 0,

Specific Heat, Cp 0,

Heat Generation Factor 0,

Mass Density 0,

Damping, 2C/Co 0,

Reference Temp 0,

fy Load... Save... Copy... OK Cancel

Model → Material → Title (Vertical)

$G=36400 \text{ N/mm}^2$

$\nu = 0,3$

Define Material - ISOTROPIC

ID 2 Title Vertical Color 55 Palette... Layer 1 Type...

General Function References Nonlinear Ply/Bond Failure Creep Electrical/Optical Phase

Stiffness

Youngs Modulus, E 0

Shear Modulus, G 36400

Poisson's Ratio, nu 0,3

Limit Stress

Tension 0,

Compression 0,

Shear 0,

Thermal

Expansion Coeff, a 0,

Conductivity, k 0,

Specific Heat, Cp 0,

Heat Generation Factor 0,

Mass Density 0,

Damping, 2C/Co 0,

Reference Temp 0,

fy Load... Save... Copy... OK Cancel

3) Propriedades

Model → Property → Title (Prop_Horizontal)

Ticknesses = 1

Element/Property type → Plate → OK

Define Property - PLATE Element Type

ID 1 Title Prop_Horizontal Material 1..Horizontal

Color 110 Palette... Layer 1 Elem/Property Type...

Property Values

Thicknesses, Tavg or T1 1,

blank or T2 0,

blank or T3 0,

blank or T4 0,

Nonstructural mass/area 0,

Additional Options

Bend Stiffness, $12I/T^{**3}$ 0,

TShear/Mem Thickness, ts/t 0,

Bending 0..Plate Material

Transverse Shear 0..Plate Material

Memb-Bend Coupling 0..None - Ignore

☐ Mean Dilatational Formulation

NEI Nastran Tension Only...

Stress Recovery (Default=T/2)

☐ Top Fiber 0,

☐ Bottom Fiber 0,

Load... Save... OK

Copy... Cancel

Model → Property → Title (Prop_Vertical)

Thicknesses = 0.5

Element/Property type → Plate → OK

Define Property - PLATE Element Type

ID 2 Title Prop_Vertical Material 2..Vertical

Color 110 Palette... Layer 1 Elem/Property Type...

Property Values

Thicknesses, Tavg or T1 0,5,

blank or T2 0,

blank or T3 0,

blank or T4 0,

Nonstructural mass/area 0,

Additional Options

Bend Stiffness, $12I/T^{**3}$ 0,

TShear/Mem Thickness, ts/t 0,

Bending 0..Plate Material

Transverse Shear 0..Plate Material

Memb-Bend Coupling 0..None - Ignore

☐ Mean Dilatational Formulation

NEI Nastran Tension Only...

Stress Recovery (Default=T/2)

☐ Top Fiber 0,

☐ Bottom Fiber 0,

Load... Save... OK

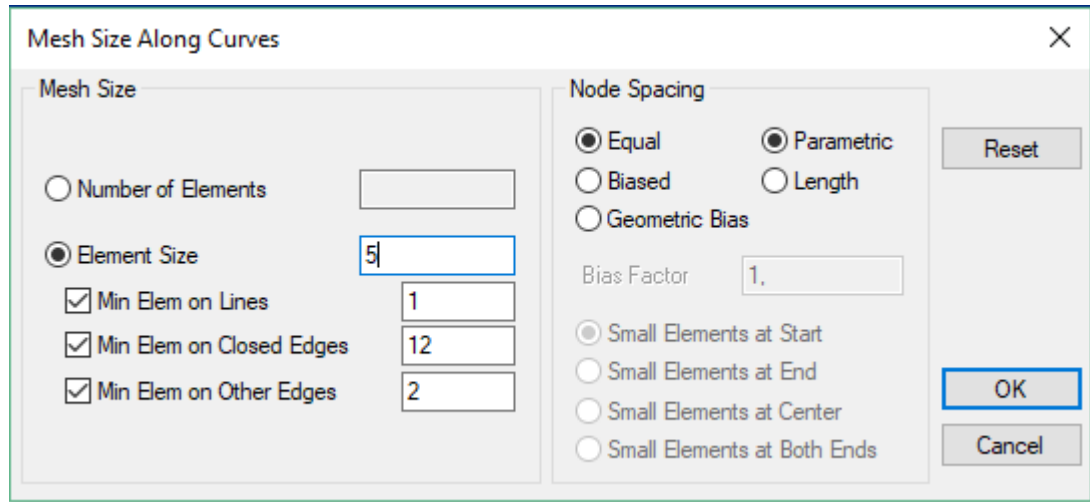
Copy... Cancel

4) Malhar a estrutura

Mesh → Mesh control → Size along curve

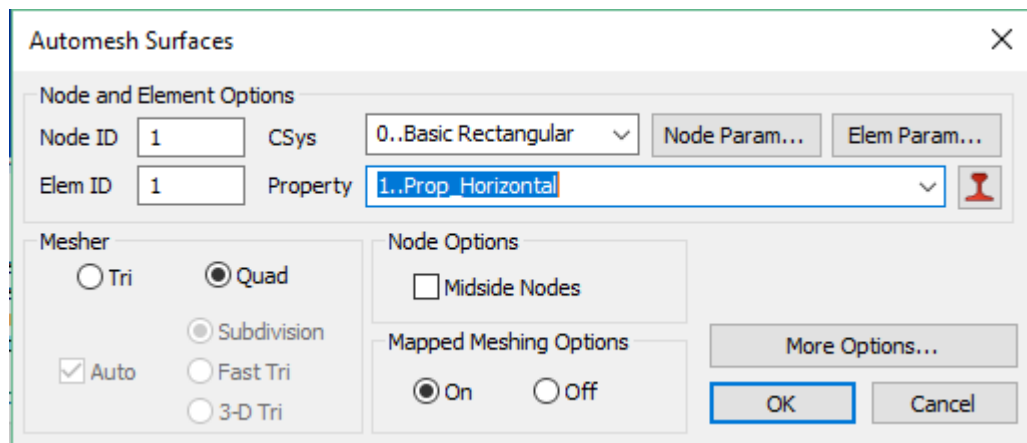
Selecione todas as curvas [select all] → Ok

Element size: 5 → Ok



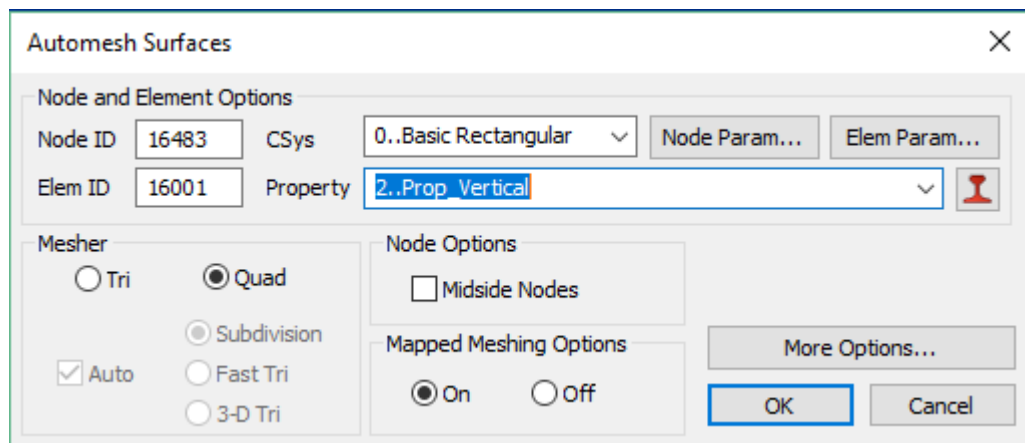
Mesh → Geometry → surface → Selecionar as horizontais → Ok

Automesh surfaces → Property → 1. Prop_Horizontal → Ok



Mesh → Geometry → Surface → Selecionar a vertical → Ok

Automesh surfaces → Property → 1. Prop_Vertical → Ok



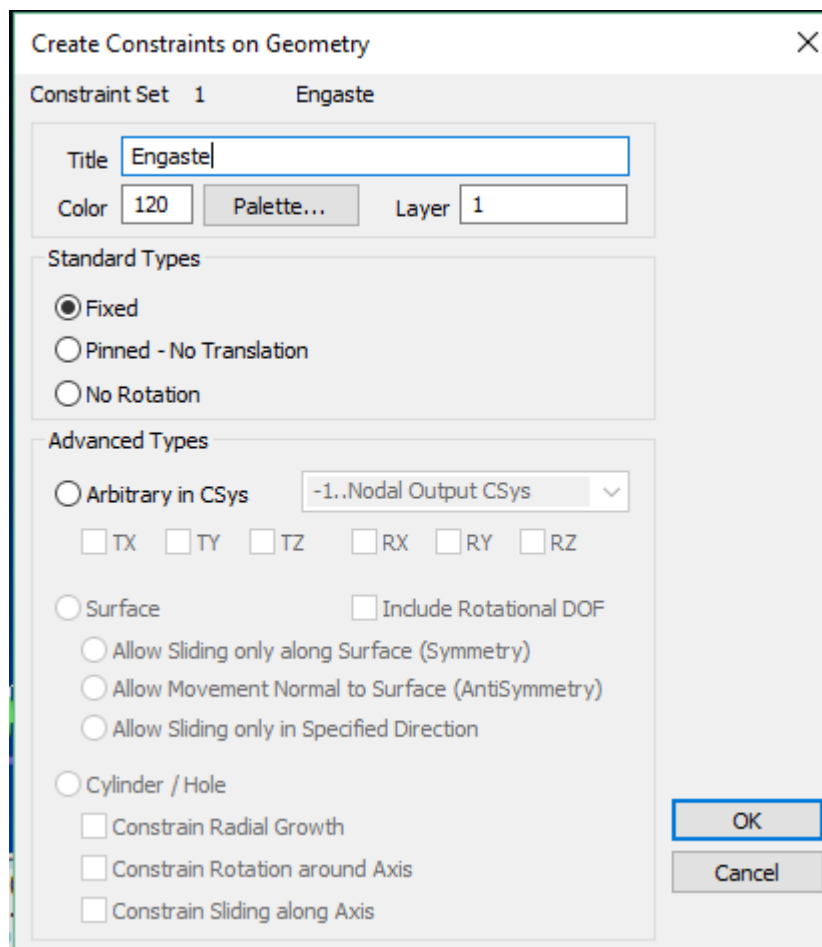
5) Condição de Contorno

Engastes

Model → Constraint → On Curve → Title (Engaste) → Ok

Selecionar as curvas L1, L2 e L3 em uma das extremidades da peça → Ok

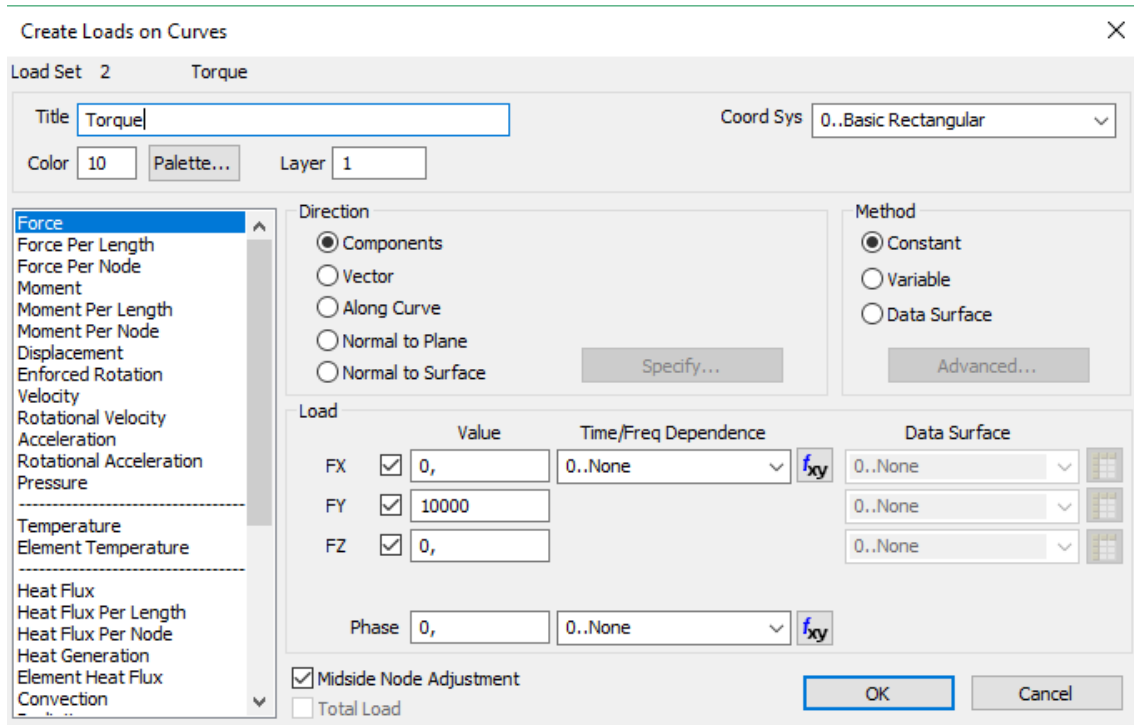
Title (Engaste) → Fixed → Ok



Força

Model → Load → Nodal → Title (Força) → Selecionar a aresta vertical da direita

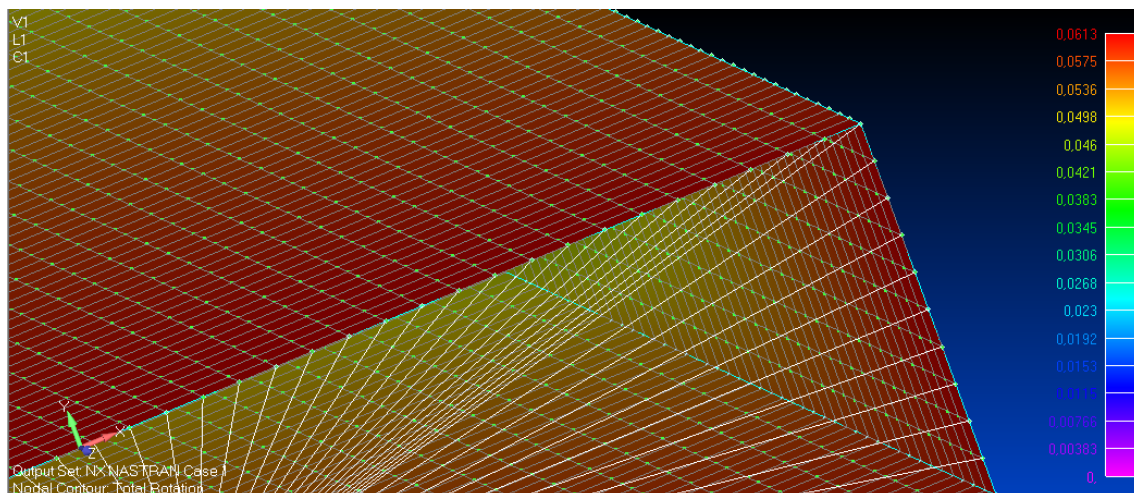
Create Loads On Nodes → Title (Força) → Direction → Components
FY: 10000 N



6) Analise

Model → Analysis → New → Title (Analise) → 8 x Next →
Nastran Output Requests → Elemental → Force, Stress e Strain → Ok
Clique em Analyze

7) Model Info → Results → All Results → 1..NX NASTRAN Case 1



CAPÍTULO VI

ANÁLISE DE RESULTADOS E DISCUSSÕES

Sumarizam-se neste capítulo, os resultados obtidos a partir das análises teórica e numérica realizadas.

Na Tabela 6.1 são apresentadas as aplicações com os respectivos resultados obtidos e os desvios mensurados das duas naturezas de análises realizadas.

Considerando os valores pequenos dos desvios, ressalta-se que as análises numéricas apresentadas pelos autores deste trabalho são validadas.

	Aplicação	Parâmetro	Resultados		Erro %
			Analítico	Númerico	
Flexão	Ex. 25.5	Tensão normal (σ)	334,5 (N/mm ²)	333,1 (N/mm ²)	0,42%
Cisalhamento	P. 25.6	Tensão cisalhante (τ)	396 (N/mm ²)	398 (N/mm ²)	0,50%
Torção	P. 25.7	Taxa de torção ($d\theta/dz$)	$6,25 \times 10^{-5}$ (rad/mm)	$6,13 \times 10^{-5}$ (rad/mm)	1,96%

CAPÍTULO VII

CONCLUSÕES

Acredita-se que com a publicação das páginas que constituem este trabalho, os engenheiros-autores do mesmo estejam contribuindo com o ensino-aprendizado de outros estudantes que se interessem pelo entendimento acerca do cálculo de propriedades e da análise do comportamento de estruturas constituídas por material compósito. Aqui se faz a abordagem de paredes finas aeronáuticas, e se acredita no aumento cada vez maior da utilização dos materiais compósitos na indústria da aviação.

Com o enfoque instrucional didático, acredita-se que os detalhes tanto para cálculos como para modelagens dos exercícios desenvolvidos contribuam com o aprendizado de estudantes e sirva também como instrumento para docentes, como proposições de atividades realizadas extramuros, para confirmação e consolidação do entendimento de conteúdos apresentados em sala de aula.

Com certeza, o ganho dos autores deste trabalho foi substancial, no sentido de aprofundarem seu aprendizado em conteúdos vistos na Academia, despertando interesse maior pela aplicação de materiais compósitos, haja vista a melhor compreensão de suas propriedades e das formulações depreendidas com a investigação realizada.

Sugere-se, como estudos consequentes, a realização de análises estruturais com idealização estrutural por *Booms*, conforme apresentado por Megson (2013), para materiais isotrópicos, e estudado pelos alunos do Curso em apreço, com a realização da disciplina Estruturas de Aeronaves II.

Finalmente, registra-se que, com a realização deste Projeto de Conclusão de Curso, os autores adquiriram importantes conhecimentos que agregam competências valiosas ao seu aprendizado específico com relação à análise de propriedades mecânicas, tensões e deslocamentos, de elementos estruturais constituídos por materiais compósitos, colaborando para a ampliação do seu potencial a desafios que se descortinem em sua futura atuação profissional como Engenheiro Aeronáutico.

CAPÍTULO VIII

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

GAY, D. **Composite Materials – Design and Applications**. NY: CRC Press, Taylor & Francis Group, 2015. 598p.

MEGSON, T.H.G. **Aircraft Structures for Engineering Students**. 5th.ed. UK: Butterworth-Heinemman, 2013. 859p.