

Universidade Federal de Uberlândia

Instituto Ciência Exatas e Naturais do Pontal

Curso de Matemática

Trabalho de Conclusão de Curso

Transformações r -normal associadas

por

Lucas Augusto Vaz Secco

Bacharelado em Matemática - Ituiutaba - MG

**Orientadora: Profa. Dra. Tânia Maria Machado de
Carvalho**

Transformações r -normal associadas

Este exemplar corresponde à redação final da Monografia devidamente corrigida e defendida por **Lucas Augusto Vaz Secco** e aprovada pela comissão julgadora.

Ituiutaba, 05 de julho de 2019.

Profa. Dra. Tânia M. M. de Carvalho

Banca examinadora:

Prof. Dra. Tânia Maria Machado de
Carvalho.

Prof. Dr. Marcelo Gonçalves Oliveira
Vieira.

Prof. Dra. Patrícia Borges dos Santos

Monografia apresentado no Instituto de Ciências Exatas e Naturais do Pontal, UFU como requisito parcial para obtenção do título de **Bacharel em Matemática**.

A minha Orientadora

Tânia

AGRADECIMENTOS

Dedido este trabalho em primeiro lugar a Deus, que me deu saúde e forças para superar todos os momentos difíceis que me deparei ao longo desta graduação e aos meus pais por serem essenciais na minha vida e a toda minha família e amigos por me incentivarem a ser uma pessoa melhor e não desistir dos meus sonhos.

A minha orientadora, Professora Doutora Tânia Maria Machado de Carvalho, agradeço muito por toda sua ajuda, conselhos e apoio constante com o seu conhecimento, e permanente disponibilidade. Obrigado pelo seus ensinamentos e puxões de orelha e pela oportunidade em mostrar-me um pouco do seu conhecimento.

Ao grupo da Turminha da Bicuda e amigos, agradeço pela suas amizade, por serem essas pessoas incríveis que tive o privilégio de conhecer, e vou guardar sempre no meu coração, por me incentivar a não desistir e sempre dando conselhos em momentos ruins e bons. Só tenho a dizer meu muito obrigado.

Agradeço também a todos os professores do curso que fizeram parte desta trilha tortuosa, mas com o final feliz, que de alguma forma contribuíram para este trabalho.

A todos os funcionários da Universidade Federal de Uberlândia, tanto da parte administrativa como os terceirizados, por proporcionarem um ambiente agradável.

RESUMO

O presente trabalho teve como motivação inicial a investigação de uma conjectura de que toda evoluta α de uma curva γ pudesse ser obtida da seguinte forma: consideram-se duas retas fixas r e s , concorrentes, uma curva λ e dois pontos Q e R de interseção entre a reta t tangente à curva λ em um ponto P qualquer e as retas r e s , respectivamente. Define-se uma aplicação cujo traço determina uma outra curva α dada pelo lugar geométrico dos pontos de interseção entre a reta normal à curva λ em P e a reta perpendicular a r pelo ponto Q . Mostra-se que esta conjectura é verdadeira para o par de curvas tractriz $\times$ catenária, porém não é verdadeira para todo par de evolutas e involutas. No entanto, as investigações realizadas possibilitaram formalizar alguns resultados que acredita-se serem inéditos. Assim, são definidos os conceitos de *r-normal associação* e *rs-associação* entre duas curvas planas. Para isto, considera-se a situação anteriormente descrita, com as retas r e s coincidindo com os dois eixos coordenados de $\mathbb{R}^2$. Por outro lado, define-se uma outra aplicação cujo traço é uma curva α determinada pelo lugar geométrico dos pontos de interseção entre a reta perpendicular à reta r pelo ponto Q e a reta perpendicular a s pelo ponto R . Quando r coincide com o eixo Oy e s coincide com o eixo Ox o par de curvas (λ, α) será dito ser um par *xy-associado*. São exibidos exemplos relevantes de pares de curvas satisfazendo os conceitos de transformação *y-normal associada* e transformação *x-normal associada*, tais como catenária $\times$ tractriz; parábola $\times$ circunferência; astroide $\times$ cinturoide. Conjectura-se que o par astroide $\times$ circunferência seja o único par de curvas que é simultaneamente *y-normal associado*, *x normal associado* e *xy-associado*.

LISTA DE FIGURAS

1.1	Hipérbole determinada pela equação $x^2 - y^2 = 1$	13
1.2	Cosseno hiperbólico (à esquerda) e seno hiperbólico (à direita).	14
1.3	Curva tractriz. a medida do seguimento que une P a Q é constante. . . .	16
1.4	Corda na forma de uma catenária.	20
1.5	Catenária como evoluta de uma tractriz.	24
1.6	Astroide e cinturoide. Astroide e Pseudo-ovalode. Astroide e circunferência.	24
2.1	Tractriz e sua evoluta, uma catenária (à esquerda). Elipse e sua evoluta, um astroide (à direita).	34
3.1	Esboço das aplicações: y -normal associada (à esquerda), x -normal associada (ao centro) e xy -associada (à direita).	46
3.2	A reta tangente em P e a reta constante Q_u	49
3.3	Esboço de uma transformação y -normal associada.	51
3.4	O par y -normal associado tractriz $\times$ catenária.	54
3.5	O par y -normal associado circunferência $\times$ parábola.	56
3.6	Pares y -normal associados: cinturoide e astroide; pseudo-ovalode e astroide; circunferência.	58
3.7	Reta constante R_u	59
3.8	Esboço de uma transformação x -normal associada.	61
3.9	Uma tractriz e a respectiva curva $\bar{\alpha}$	62

3.10	Pares x -normal associados: pseudo-ovalóide e astroide; cinturoide e astroide; circunferência e astroide.	63
3.11	Esboço de uma curva xy -associada.	66
3.12	Pares xy -associados: elipse e astroide com $a < b$; elipse e astroide com $a > b$; circunferência e astroide ($a = b$).	68
3.13	Uma tratriz e a respectiva curva $\bar{\phi}(u)$	69
3.14	Uma circunferência com centro no eixo Ox tangente ao eixo Oy e a respectiva $\bar{\phi}(u)$	70
3.15	Deformação de uma tratriz em uma catenária.	75
3.16	Deformação de uma catenária em uma tratriz.	76
3.17	Deformação de uma circunferência de raio r , tangente ao eixo Oy , com centro no eixo Ox em uma a parábola.	78
3.18	Deformação de uma parábola em uma circunferência de raio r , tangente ao eixo Oy , com centro no eixo Ox	78
3.19	y -deformação de um astroide em um cinturoide	79
3.20	y -deformação de um cinturoide em um astroide	79
3.21	x -normal deformação da curva tratriz de equação (3.18) na curva $\bar{\alpha}(u)$ de equação (3.44)	83
3.22	Curvas intermediárias da deformação da curva $\alpha(u)$ em uma tratriz.	83
3.23	Deformação de uma circunferência na respectiva curva $\alpha(u)$	84
3.24	Deformação da curva $\alpha(u)$ em uma circunferência.	85
3.25	Deformação de um astroide em uma elipse para $a = 1.50$, $b = 2.50$	88
3.26	Deformação de um astroide em uma circunferência para $a = b = 2.50$	89

CONTEÚDO

Agradecimentos	i
Resumo	ii
Introdução	1
1 Curvas Planas e Espaciais	5
1.1 Curvas Regulares	5
1.1.1 Cuvas parametrizadas	5
1.1.2 Comprimento de arco	7
1.2 Curvas Planas	8
1.2.1 Equações de Frenet e Curvatura	8
1.3 Funções Hiperbólicas	12
1.4 Algumas curvas planas	15
1.4.1 A curva tractriz	16
1.4.2 A curva catenária	20
1.5 Curvas no espaço tridimensional	25
1.5.1 Torção e triedro de Frenet	25
2 Um importante resultado envolvendo os conceitos de evolutas e involutas	33
2.1 Evolutas de curvas Planas	33
2.2 Teoria de contato	34

2.3	Evolutas de curvas espaciais	39
3	As transformações r-normal associadas	45
3.1	Família de curvas y -normal associadas	46
3.1.1	Exemplos de pares y -normal associados	51
3.2	Família de curvas x -normal associadas	58
3.3	Família de curvas xy -associadas	65
3.3.1	Exemplos de pares xy -associados	67
3.4	y -normal deformação e x -normal deformação	71
3.4.1	y -normal deformação	71
3.4.2	x -normal deformação	79
3.5	xy -deformação	85
3.6	Conclusão	89
	Bibliografia	90

INTRODUÇÃO

Durante os séculos XVI, XVII e XVIII, grandes matemáticos se ocuparam com problemas matemáticos decorrentes de problemas de natureza física: Christiann Huygens (1629 - 1695), Galileu Galilei (1564 - 1643), Isaac Newton (1643 - 1727), os irmãos Johann Bernoulli (1667 - 1674) e James Bernoulli (1654 - 1705), entre outros. Os questionamentos derivados dos problemas físicos contribuíram com o surgimento de muitas das áreas da matemática que conhecemos hoje, e, especialmente, levaram à criação das bases para o desenvolvimento das teorias de curvas e superfícies [2], [4]. Um problema de natureza física que levou a um grande desenvolvimento da matemática foi o problema de obter a curva plana cujo traço descrevesse o formato da posição de equilíbrio de um fio homogêneo, flexível, pesado, suspenso por duas extremidades determinadas por dois pontos fixos, submetido exclusivamente à força da gravidade. Este problema foi proposto por Galileu Galilei, que acreditava que a solução do problema seria uma parábola. Em 1646, o físico Huygens mostrou que a conjectura de Galilei era falsa, mas não exibiu uma solução. Em 1690, Jakob Bernoulli relançou o problema, propondo a solução do problema como um desafio à comunidade científica. Em 1691 foram publicadas três provas da solução, obtidas por Gottfried Wilhelm Leibniz, Cristiaan Huygens e Johann Bernoulli, todas mostrando que a curva solução seria uma curva denominada *catenária*, do latim *catena*, que significa *cadeia ou corrente* [6].

Outra curva que merece destaque na categoria de curvas que tiveram grande importância no desenvolvimento da matemática, é a *tractriz*. Esta curva surgiu quando o arquiteto francês Claude Perrault (1633 - 1688) propôs ao matemático Leibniz, em 1690,

o problema de determinar a trajetória descrita pelo seu relógio de bolso enquanto a corrente do mesmo (de comprimento fixo) mantinha-se esticada e sua extremidade percorria uma linha reta. A curva que soluciona este problema é chamada de *tractriz*, do latim *trahere*, que significa arrastar. A tractriz é conhecida também como *curva de perseguição*, e tem a propriedade de que, em cada ponto, o segmento da reta tangente, compreendido entre a curva e a reta fixa, é constante.

Nesta categoria poderíamos citar ainda outras curvas famosas, tais como as *ciclóides*, as *epiciclóides* e a *hipociclóides*. A *ciclóide* é uma curva definida como o lugar geométrico dos pontos P de uma circunferência de raio r , a qual rola sem deslizar, com velocidade constante, ao longo de uma reta situada em um mesmo plano que o círculo. Esta curva ficou conhecida na história da matemática por *Helena de geometria* (referência a Helena de Tróia). Na mesma situação descrita anteriormente, tomando-se o ponto P sobre uma reta qualquer passando pelo centro da circunferência (ao invés de sobre a circunferência) obtém-se as *trocóides*, também denominadas *ciclóides encurtadas* ou *ciclóides alongadas*, dependendo se P é ponto interno ou externo ao círculo, respectivamente. As *hipociclóides* e *epiciclóides* são curvas cíclicas, definidas por um ponto de uma circunferência de raio r que rola, sem deslizar, dentro ou fora de um círculo diretor de raio R , respectivamente. A cardióide é uma epiciclóide com $r = R$ e a astróide, também chamada *tetracúspide*, *cubociclóide* ou *paraciclo*, é uma *hipociclóide* obtida quando $r = \frac{R}{4}$.

Citamos ainda as cônicas, a estrofoide de Diocles, a lemniscata de Bernoulli, a espiral de Arquimedes, a espiral de Bernoulli (Espirais Logarítmicas) e o folium de Descartes, entre muitas outras.

Neste trabalho estamos particularmente interessados na tractriz, na catenária, na astróide e nas cônicas. É dada especial importância à tractriz e à catenária pelo fato de que a evoluta de uma tractriz é uma catenária. Os conceitos de evolutas e involutas de curvas planas foram de grande relevância para os resultados ora apresentados, uma vez que a proposta da pesquisa surgiu por uma conjectura da orientadora de que uma certa catenária deveria apresentar a propriedade de ser obtida, geometricamente, por meio do lugar geométrico dos pontos do plano determinados pela interseção da reta normal a uma tractriz, em um ponto, com a reta constante determinada pela ordenada do ponto de interseção da reta tangente à tractriz com o eixo coordenado Oy . A primeira etapa do projeto consistiu na comprovação da veracidade da conjectura, por meio de computações algébricas, donde surgiu a questão imediata de verificar se esta deveria ser uma proprie-

dade de pares de curvas λ e α tais que α fosse a evoluta de λ . Por meio de contra-exemplos verificou-se que esta nova conjectura não era verdadeira, e desta forma, decidiu-se formalizar a propriedade proposta. Desta forma, o objetivo central do presente trabalho é introduzir o conceito de transformação r -normal associada a uma curva λ . Mais precisamente, são introduzidas três novas classes de pares de curvas, os quais denominamos por pares y -normal associados, x -normal associados e xy -associados. Acreditamos tratar-se de resultados inéditos, ainda não explorados. São exibidos exemplos a fim de demonstrar que pares de curvas clássicas como tractriz $\times$ catenária; parábola $\times$ circunferência e astroide $\times$ cinturoide/pseudo-ovaloide, são exemplos que ilustram a teoria apresentada. Observe-se que, as curvas denominadas aqui por cinturoides/pseudo-ovaloides, também não aparecem explicitadas nos textos correntes e estão sendo introduzidas no presente trabalho.

Os pares de curvas y -normal associados e x -normal associados, aqui introduzidos, são pares de curvas (λ, α) que devem satisfazer a propriedade de que a curva α é obtida como o lugar geométrico dos pontos de interseção entre a reta normal a λ em u e as retas perpendiculares aos eixos coordenados Oy (ou Ox) por Q (ou R , respectivamente), onde Q e R são os respectivos pontos de interseção da reta tangente à curva λ em um ponto P que varia ao longo da curva. Os pares de curvas xy -associados são pares de curvas (λ, α) que devem satisfazer a propriedade de que a curva α é obtida como o lugar geométrico dos pontos de interseção entre as retas perpendiculares aos eixos coordenados Oy e Ox por Q ou R , onde Q e R são os respectivos pontos de interseção da tangente à curva λ em um ponto P variando ao longo da curva.

O trabalho está dividido da seguinte maneira:

- No capítulo 1, é exibido um breve resumo da teoria local das curvas planas e espaciais, isto é, é estudado o comportamento de curvas na vizinhança de um ponto. Ao final do capítulo, como exemplos de curvas planas, são exibidas as deduções das equações da catenária e da tractriz e também são introduzidas as curvas *cinturoides* e *pseudo-ovaloides*. O teoria apresentada neste capítulo basearam-se nas referências [8], [3], [7] e [9]
- No capítulo 2, são realizados estudos referentes às propriedades das evolutas e involutas de curvas planas e espaciais. Este capítulo será composto por três seções. A primeira seção é destinada à introdução dos conceitos de evolutas e involutas de cur-

vas planas. Na segunda seção é apresentada uma introdução à teoria do contato de curvas planas e espaciais, a ser utilizada na terceira seção, a qual trata de evolutas e involutas de curvas espaciais. Nesta seção é apresentado um importante resultado baseado na comparação entre duas definições de evolutas espaciais, demonstrando que elas não podem ser equivalentes. Este resultado foi apresentado e publicado nos anais da IX SEMAP (Semana de Matemática do Pontal). Os textos apresentados neste capítulo basearam-se nas referências [8], [3], [1] e [5].

- O capítulo 3, é composto por quatro seções, de forma que, na primeira seção é apresentada a classe de pares de curvas *y-normal associadas*, na segunda seção é apresentada a classe de pares de curvas *x-normal associadas* e na terceira seção é formalizada a classe de pares de curvas *xy-associadas*. Na quarta e última seção mostra-se que, se um par de curvas (λ, α) é um par *y-normal associado* ou *x-normal associado*, então a curva λ pode ser continuamente deformada na curva α e vice-versa por meio de uma determinada transformação. Mostra-se ainda que se um par de curvas (λ, ϕ) é um par *xy-associado* então λ pode ser continuamente deformada na curva σ e vice-versa. Em todas as seções são exibidos exemplos de pares de curvas (λ, α) satisfazendo a teoria apresentada.

CAPÍTULO 1

CURVAS PLANAS E ESPACIAIS

1.1 Curvas Regulares

1.1.1 Curvas parametrizadas

Uma curva pode ser descrita como um lugar geométrico, ou seja, um conjunto de pontos que partilham uma determinada propriedade, tanto no plano como no espaço. Do ponto de vista físico, uma curva pode ser considerada como um percurso percorrido por uma partícula em movimento, cujas coordenadas de seus pontos são funções de um parâmetro independente.

Ao longo do presente trabalho, a menos de menções ao contrário, I indicará um intervalo aberto da reta real.

Definição 1. *Uma curva parametrizada é uma aplicação contínua,*

$$\begin{aligned}\alpha : I \subset \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^n, \\ t &\mapsto (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)).\end{aligned}$$

As funções $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$, são denominadas funções coordenadas da curva α . A variável $t \in I$ é denominada parâmetro da curva, e o subconjunto de $\mathbb{R}^n$ determinado pelos pontos $\{\alpha(t); t \in I\}$, é chamado traço da curva α .

Definição 2. Uma curva $\alpha : \bar{I} = [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $\alpha(a) = \alpha(b)$ é dita fechada. Se α é fechada e o seu traço não se auto-intercepta em qualquer outro ponto, então diz-se que α é uma curva fechada simples.

Uma curva parametrizada diferenciável em $I \subset \mathbb{R}$ é uma curva parametrizada determinada por uma aplicação diferenciável $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, de classe C^∞ .

Definição 3. Seja A um conjunto de índices. Uma curva $\alpha : \bar{I} = [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é dita diferenciável por partes em $I = (a, b)$ se existir uma partição finita de $\bar{I}$ em subintervalos $\bar{I}_k, k \in A$, tal que a restrição de α a cada subintervalo aberto I_k seja diferenciável.

Definição 4. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma curva parametrizada diferenciável que, a cada $t \in I$, associa $\alpha(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$. O vetor $\alpha'(t) = (x'_1(t), x'_2(t), \dots, x'_n(t))$ é chamado vetor tangente a α em t .

Definição 5. Uma curva parametrizada diferenciável $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é dita regular se $\forall t \in I, \alpha'(t) \neq 0$.

Definição 6. Uma curva $\alpha : \bar{I} = [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é dita regular por partes (ou suave por partes) em $I = (a, b)$ se existir uma partição finita de $\bar{I}$ em subintervalos $\bar{I}_k, k \in A$, tal que a restrição de α a cada subintervalo aberto I_k seja regular.

Definição 7. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma curva regular. A reta tangente a α em $t_0 \in I$, é a reta que passa pelo ponto $\alpha(t_0)$ na direção do vetor $\alpha'(t_0)$, ou seja, é a reta dada pela função

$$g(s) = \alpha(t_0) + s\alpha'(t_0), \quad s \in \mathbb{R}.$$

Dada uma curva regular, α podemos obter infinitas curvas regulares que têm o mesmo traço de α .

Definição 8. Sejam I e J intervalos abertos de $\mathbb{R}$, $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma curva regular e $h : J \rightarrow I$ uma função diferenciável de classe C^∞ , cuja derivada de primeira ordem não se anula em todos os pontos de J e tal que $h(J) = I$. Então, a função composta

$$\beta = \alpha \circ h : J \rightarrow \mathbb{R}^n$$

é uma curva regular, que tem o mesmo traço de α , chamada reparametrização de α por h e a função h é denominada mudança de parâmetro.

Observação 1. (i) Uma mudança de parâmetro h é uma função estritamente crescente ou decrescente, logo é bijetora.

(ii) A orientação de uma curva plana é sentido de percurso do traço de α .

1.1.2 Comprimento de arco

Definição 9. Uma curva regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ é dita parametrizada por comprimento de arco se, para cada $t_0, t_1 \in I$, $t_0 \leq t_1$, o comprimento de arco da curva α de t_0 a t_1 é igual a $t_1 - t_0$. Ou seja,

$$\int_{t_0}^{t_1} |\alpha'(t)| dt = t_1 - t_0.$$

Proposição 1. Uma curva regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ está parametrizada por comprimento de arco se, e somente se, para todo $t \in I$, $|\alpha'(t)| = 1$.

Demonstração. Suponhamos que α está parametrizada por comprimento de arco e fixamos $t_0 \in I$. Consideramos a função $s : I \rightarrow \mathbb{R}$, que para cada $t \in I$, associa $s(t) = \int_{t_0}^t |\alpha'(r)| dr$.

Se $t_0 \leq t$, então, por hipótese $s(t) = \int_{t_0}^t |\alpha'(r)| dr = t - t_0$.

Se $t \leq t_0$, então $s(t) = -\int_{t_0}^t |\alpha'(r)| dr = -(t_0 - t) = (t - t_0)$, portanto, para todo $t \in I$, $s(t) = t - t_0$ e $s'(t) = 1$. Como $s'(t) = |\alpha'(t)|$, então, $|\alpha'(t)| = 1$, $\forall t \in I$.

Reciprocamente, se $|\alpha'(t)| = 1, \forall t \in I$, então $\int_{t_0}^t |\alpha'(r)| dr = \int_{t_0}^t 1 dr = t - t_0$.

□

A seguir, veremos que qualquer curva regular pode ser reparametrizada por comprimento de arco.

Proposição 2. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma curva regular e $s : I \rightarrow s(I) \subset \mathbb{R}$ a função comprimento de arco de α a partir de t_0 . Então existe a função inversa h de s , definida no intervalo aberto $J = s(I)$, e $\beta = \alpha \circ h$ é uma reparametrização de α , onde β está parametrizada por comprimento de arco.

Demonstração. Seja α uma curva regular, portanto

$$s'(t) = |\alpha'(t)| > 0,$$

ou seja, s é uma função estritamente crescente. Portanto existe uma função $h : J \rightarrow I$ tal que h é a função inversa de s . Para todo $t \in I$, temos

$$h(s(t)) = t. \tag{1.1}$$

Derivando a Equação 1.1 em relação a t , obtém-se

$$\frac{dh}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = 1,$$

portanto,

$$\frac{dh}{ds} = \frac{1}{\frac{ds}{dt}} = \frac{1}{s'(t)} = \frac{1}{|\alpha'(t)|} > 0.$$

Segue que

$$\beta(s) = \alpha \circ h(s), \quad s \in J \quad (1.2)$$

é uma reparametrização de α , e derivando a Equação 1.2 em relação a s , obtém-se

$$\left| \frac{d\beta}{ds} \right| = \left| \frac{d\alpha}{dh} \cdot \frac{dh}{ds} \right| = \left| \frac{d\alpha}{dt} \cdot \frac{dh}{ds} \right| = \left| \alpha'(t) \frac{1}{\alpha'(t)} \right| = 1$$

portanto, pela Proposição 1, β está parametrizada por comprimento de arco. $\square$

1.2 Curvas Planas

1.2.1 Equações de Frenet e Curvatura

Vimos na seção anterior que toda curva regular no plano admite uma reparametrização por comprimento de arco.

Definição 10. *Considere uma curva regular $\alpha(s) = (x(s), y(s))$, $s \in I$, parametrizada por comprimento de arco s e seja $\alpha'(s)$ um vetor unitário, o qual denotamos por $t(s)$, ou seja,*

$$t(s) = (x'(s), y'(s)).$$

Seja $n(s)$ um vetor unitário ortogonal a $t(s)$, tal que, a base ortogonal de $\mathbb{R}^2$ formada por $t(s)$ e $n(s)$ tem a mesma orientação que a base canônica de $\mathbb{R}^2$, ou seja,

$$n(s) = (-y'(s), x'(s)).$$

O conjunto de vetores $t(s)$ e $n(s)$ é chamado de *referencial de Frenet* da curva α em s . Sejam $t(s)$ e $n(s)$ funções de $I \rightarrow \mathbb{R}^2$, diferenciáveis de classe C^∞ , $\forall s \in I$. Os vetores $t'(s)$ e $n'(s)$, podem ser escritos como combinação linear de $t(s)$ e $n(s)$. Como $t(s)$ é unitário, então

$$(\langle t(s), t(s) \rangle)' = (1)' \Rightarrow \langle t'(s), t(s) \rangle + \langle t(s), t'(s) \rangle = 0 \Rightarrow 2\langle t'(s), t(s) \rangle = 0 \Rightarrow \langle t'(s), t(s) \rangle = 0,$$

onde o símbolo ' indica a derivada em relação a s .

Temos que $t'(s)$ é ortogonal a $t(s)$, e portanto, $t'(s)$ é múltiplo escalar de $n(s)$. Daí, para cada valor do parâmetro s , existe um fator de proporcionalidade entre $t'(s)$ e $n(s)$, o qual será denotado por $k(s)$. O número real $k(s)$ é chamado de *curvatura* de α em s , ou seja,

$$t'(s) = k(s)n(s) \quad (1.3)$$

então

$$\begin{aligned} \langle t'(s), n(s) \rangle &= \langle k(s)n(s), n(s) \rangle = k(s)\langle n(s), n(s) \rangle = k(s) \\ \Rightarrow k(s) &= \langle \alpha''(s), n(s) \rangle = \langle (x''(s), y''(s)), (-y'(s), x'(s)) \rangle \\ &= -x''(s)y'(s) + y''(s)x'(s) \end{aligned}$$

Aqui utilizou-se do fato que, $n(s)$ é unitário, então

$$\langle n(s), n(s) \rangle = |n(s)| = 1. \quad (1.4)$$

Analogamente, segue de (1.4) que $n'(s)$ é ortogonal a $n(s)$, então $n'(s)$ é proporcional a $t(s)$, logo existe $\bar{k}(s) \in \mathbb{R}$ tal que $n'(s) = \bar{k}(s)t(s)$, daí

$$\begin{aligned} \langle n'(s), t(s) \rangle &= \langle \bar{k}(s)t(s), t(s) \rangle = \bar{k}(s)\langle t(s), t(s) \rangle \\ \Rightarrow \bar{k}(s) &= \langle n'(s), t(s) \rangle = -y''(s)x'(s) + x''(s)y'(s) = \\ &= -\langle t'(s), n(s) \rangle = -k(s). \end{aligned}$$

Portanto,

$$n'(s) = -k(s)t(s).$$

Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular, parametrizada por comprimento de arco s , então o referencial de Frenet $t(s)$ e $n(s)$ satisfaz as equações

$$\begin{aligned} t'(s) &= k(s)n(s), \\ n'(s) &= -k(s)t(s). \end{aligned}$$

as quais são denominadas *fórmulas de Frenet* da curva plana α em $s \in I$.

No que segue será mostrado que a função $|k(s)| = |\alpha''(s)|$ indica a velocidade com que os vetores tangentes à curva α mudam de direção. Para isto tome s_0 fixo e $\alpha'(s_0)$ e $\alpha'(s_0+h)$ vetores tangentes em s_0 e s_0+h , respectivamente.

Denote por $\theta(h)$ o ângulo entre $\alpha'(s_0)$ e $\alpha'(s_0+h)$. Com $0 \leq \theta(h) \leq \pi$

$$\cos \theta(h) = \langle \alpha'(s_0), \alpha'(s_0+h) \rangle$$

Aqui utilizou-se o fato de que α é parametrizada por comprimento de arco, ou seja, $|\alpha'(s_0)| = 1$, e $|\alpha'(s_0+h)| = 1$.

Por outro lado,

$$\begin{aligned} |\alpha'(s_0+h) - \alpha'(s_0)|^2 &= |\alpha'(s_0+h)|^2 + |\alpha'(s_0)|^2 - 2\langle \alpha'(s_0+h), \alpha'(s_0) \rangle = 2(1 - \cos \theta(h)) \\ &= 4 \left(\sin^2 \left(\frac{\theta(h)}{2} \right) \right). \end{aligned}$$

Passando ao limite quando h tende a zero, obtém-se

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|\alpha'(s_0+h) - \alpha'(s_0)|}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \sin \left(\frac{\theta(h)}{2} \right)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\theta(h)}{2}}{\frac{\theta(h)}{2}} \frac{2 \sin \left(\frac{\theta(h)}{2} \right)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\theta(h)}{h} \frac{\sin \left(\frac{\theta(h)}{2} \right)}{\frac{\theta(h)}{2}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\theta(h)}{h}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Aqui utilizou-se o limite fundamental, $\frac{\sin \left(\frac{\theta(h)}{2} \right)}{\frac{\theta(h)}{2}} = 1$. Conclui-se de (1.5) que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\theta(h)}{h}$ é a taxa de variação do ângulo entre os vetores tangentes. Além disso, pela definição de derivada em um ponto $s_0 \in I$, temos que, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|\alpha'(s_0+h) - \alpha'(s_0)|}{h} = |\alpha''(s_0)| = |k(s_0)|$. Logo, $|k(s)|$ indica a velocidade com que as retas tangentes à curva α mudam de direção.

Em seguida, iremos considerar o referencial de Frenet e a curvatura de uma curva regular para parâmetros $r \in I$ diferentes do parâmetro comprimento de arco.

Definição 11. *Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular de parâmetro qualquer $r \in I$. Consideremos $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma reparametrização de α por comprimento de arco s , ou seja, $\beta(s(r)) = \alpha(r)$. Sejam $t(s)$ e $n(s)$ o referencial de Frenet de $\beta(s)$ e $k(s)$ a curvatura de $\beta(s)$, então diremos que $t(r) = t(s(r))$, $n(r) = n(s(r))$, é o referencial de Frenet de α e $k(r) = k(s(r))$ é a curvatura de α .*

Proposição 3. *Seja $\alpha(r) = (x(r), y(r))$, $r \in I$, uma curva regular então,*

$$t(r) = \frac{(x'(r), y'(r))}{\sqrt{(x'(r))^2 + (y'(r))^2}}; \quad n(r) = \frac{(-y'(r), x'(r))}{\sqrt{(x'(r))^2 + (y'(r))^2}}; \quad k(r) = \frac{-x''(r)y'(r) + x'(r)y''(r)}{(x'(r)^2 + y'(r)^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Demonstração. Seja $\beta(s)$ uma reparametrização de α por comprimento de arco, então

$$\beta(s(r)) = \alpha(r). \quad (1.6)$$

Derivando a Equação (1.6) em relação a r , obtém-se

$$\frac{d\beta}{ds} \cdot \frac{ds}{dr} = \alpha'(r). \quad (1.7)$$

Derivando a Equação (1.7) em relação a r , obtém-se

$$\frac{d^2\beta}{ds^2} \left(\frac{ds}{dr} \right)^2 + \frac{d\beta}{ds} \frac{d^2s}{dr^2} = \alpha''(r), \quad (1.8)$$

com,

$$\frac{ds}{dr} = |\alpha'(r)|. \quad (1.9)$$

Portanto, derivando (1.9) em relação a s , obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{d^2s}{dr^2} &= \frac{d}{dt}(|\alpha'(r)|) = \frac{d}{dt} \left(\langle \alpha'(r), \alpha'(r) \rangle^{\frac{1}{2}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\langle \alpha'(r), \alpha'(r) \rangle \right)^{-\frac{1}{2}} \left[\langle \alpha''(r), \alpha'(r) \rangle + \langle \alpha'(r), \alpha''(r) \rangle \right] \\ &= \frac{\langle \alpha'(r), \alpha''(r) \rangle}{|\alpha'(r)|}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Considerando $\alpha(r) = (x(r), y(r))$, segue das Equações (1.7) e (1.8) que

$$t(r) = \frac{\alpha'(r)}{|\alpha'(r)|} = \frac{(x'(r), y'(r))}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}}.$$

Pela definição de vetor normal, temos

$$n(r) = \frac{(-y'(r), x'(r))}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}}.$$

Como,

$$k(s(r)) = \left\langle \frac{d^2\beta}{ds^2}(s(r)), n(r) \right\rangle. \quad (1.11)$$

Segue da Equação (1.8) que

$$\frac{d^2\beta}{ds^2} = \frac{\alpha''(r) - \frac{d\beta}{ds} \frac{d^2s}{dr^2}}{\left(\frac{ds}{dr}\right)^2}. \quad (1.12)$$

Substituindo a Equação (1.12) na Equação (1.11), obtém-se

$$\left\langle \frac{\alpha''(r) - \frac{d\beta}{ds} \frac{d^2s}{dr^2}}{\left(\frac{ds}{dr}\right)^2}, n(r) \right\rangle. \quad (1.13)$$

Substituindo as Equações (1.7), (1.9) e (1.10) na Equação (1.13), obtém-se

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\alpha''(r) - \frac{\alpha'(r)}{|\alpha'(r)|} \frac{\langle \alpha'(r), \alpha''(r) \rangle}{|\alpha'(r)|}}{|\alpha'(r)|^2}, n(r) \right\rangle &= \left\langle \frac{\alpha''(r)}{|\alpha'(r)|^2} - \frac{\alpha'(r) \langle \alpha'(r), \alpha''(r) \rangle}{|\alpha'(r)|^4}, \frac{(-y'(r), x'(r))}{|\alpha'(r)|} \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\alpha''(r)}{|\alpha'(r)|^2}, \frac{(-y'(r), x'(r))}{|\alpha'(r)|} \right\rangle - \frac{\langle \alpha'(r), \alpha''(r) \rangle}{|\alpha'(r)|^5} \langle \alpha'(r), n(r) \rangle \\ &= \left\langle \frac{(x''(r), y''(r))}{|\alpha'(r)|^2}, \frac{(-y'(r), x'(r))}{|\alpha'(r)|} \right\rangle = \frac{-x''(r)y'(r) + y''(r)x'(r)}{|\alpha'(r)|^3}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$k(s(r)) = \frac{-x''(r)y'(r) + y''(r)x'(r)}{|\alpha'(r)|^3}.$$

Aqui utilizou-se do fato de que, $\alpha'(r) = t(r)$ e $n(r)$ são ortogonais, portanto $\langle \alpha'(r), n(r) \rangle = 0$, logo, $\frac{\langle \alpha'(r), \alpha''(r) \rangle}{|\alpha'(r)|^5} \langle \alpha'(r), n(r) \rangle = 0$.

□

1.3 Funções Hiperbólicas

Esta seção tem por objetivo explicitar algumas relações trigonométricas hiperbólicas as quais serão utilizadas no último capítulo.

As funções hiperbólicas são determinadas de forma análoga às funções trigonométricas. Seja h uma hipérbole de centro na origem e com semi-eixo real de medida 1, sobre o eixo Ox . Considere o setor ABE de área $\frac{\phi}{2}$, com AB no eixo Bx da hipérbole determinada pela equação $x^2 - y^2 = 1$, exibida na Figura 1.1, isto é, o setor que determina o ângulo ϕ . Para definirmos as funções seno hiperbólico e cosseno hiperbólico traçamos uma reta

perpendicular ao eixo Ox pelo ponto A , determinando o ponto C dado pela interseção desta reta com o eixo Ox .

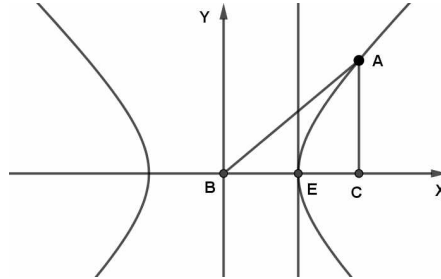


Figura 1.1: Hipérbole determinada pela equação $x^2 - y^2 = 1$.

Note que os pontos BAC determinam um triângulo retângulo. Desta forma, as funções seno hiperbólico e cosseno hiperbólico, são dadas por:

$$\sinh(\phi) = \frac{CA}{BE} \text{ e } \cosh(\phi) = \frac{BC}{BE}.$$

Como BE é a medida do semi-eixo real, então

$$BE = 1, \tag{1.14}$$

logo,

$$\sinh(\phi) = CA \text{ e } \cosh(\phi) = BC.$$

Por outro lado pode-se relacionar as funções hiperbólicas e exponenciais escrevendo $\sinh(\phi)$ e $\cosh(\phi)$, em função de e^ϕ e $e^{-\phi}$ da seguinte forma

$$\sinh(\phi) = \frac{e^\phi - e^{-\phi}}{2}; \quad \cosh(\phi) = \frac{e^\phi + e^{-\phi}}{2} \tag{1.15}$$

As funções hiperbólicas não são funções periódicas como as trigonométricas.

Em coordenadas cartesianas, os gráficos das funções $\cosh(\phi)$ e $\sinh(\phi)$ podem ser visualizados na Figura 1.2.

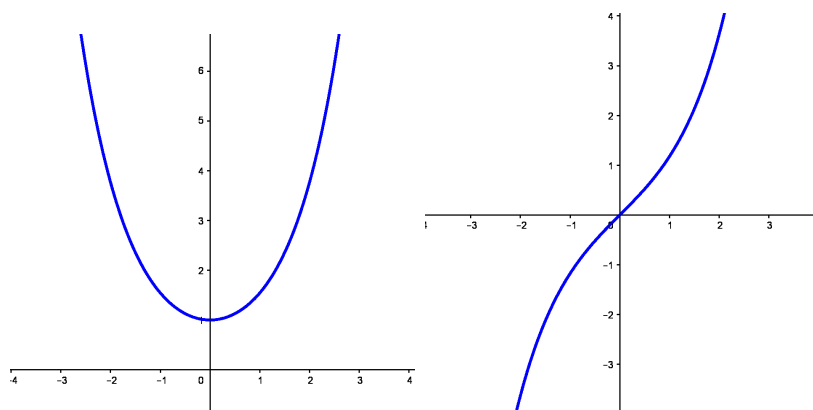


Figura 1.2: Cosseno hiperbólico (à esquerda) e seno hiperbólico (à direita).

A partir das funções seno hiperbólico e cosseno hiperbólico pode-se definir as funções tangentes, cossecante, secante e cotangente hiperbólicas, respectivamente, da seguinte forma,

$$\begin{aligned}\tanh(\phi) &= \frac{\sinh(\phi)}{\cosh(\phi)}; \\ \operatorname{sech}(\phi) &= \frac{1}{\cosh(\phi)}; \\ \operatorname{csch}(\phi) &= \frac{1}{\sinh(\phi)}; \\ \operatorname{coth}(\phi) &= \frac{\cosh(\phi)}{\sinh(\phi)}\end{aligned}$$

Usando as relações entre $\sinh(\phi)$ e $\cosh(\phi)$, podemos reescrever as funções tangentes, cossecante, secante e cotangente hiperbólicas, respectivamente em função e^ϕ e $e^{-\phi}$.

$$\begin{aligned}\tanh(\phi) &= \frac{\sinh(\phi)}{\cosh(\phi)} = \frac{\frac{e^\phi - e^{-\phi}}{2}}{\frac{e^\phi + e^{-\phi}}{2}} = \frac{e^\phi - e^{-\phi}}{e^\phi + e^{-\phi}}; \\ \operatorname{coth}(\phi) &= \frac{\cosh(\phi)}{\sinh(\phi)} = \frac{\frac{e^\phi + e^{-\phi}}{2}}{\frac{e^\phi - e^{-\phi}}{2}} = \frac{e^\phi + e^{-\phi}}{e^\phi - e^{-\phi}} \\ \operatorname{sech}(\phi) &= \frac{1}{\cosh(\phi)} = \frac{1}{\frac{e^\phi + e^{-\phi}}{2}} = \frac{2}{e^\phi + e^{-\phi}} \\ \operatorname{csch}(\phi) &= \frac{1}{\sinh(\phi)} = \frac{1}{\frac{e^\phi - e^{-\phi}}{2}} = \frac{2}{e^\phi - e^{-\phi}}\end{aligned}$$

Proposição 4. $\cosh^2(\phi) - \sinh^2(\phi) = 1$

Demonstração. Tomando as coordenadas $x = BC$ e $y = CA$ e substituindo na equação da hipérbole dada por $x^2 - y^2 = 1$, obtém-se

$$(BC)^2 - (CA)^2 = \cosh^2(\theta) - \sinh^2(\theta) = 1 \quad (1.16)$$

Portanto $\cosh^2(\phi) - \sinh^2(\phi) = 1$. □

Proposição 5. $1 - \tanh^2(\phi) = \operatorname{sech}^2(\phi)$

Demonstração. Dividindo a Equação (1.16) por $\cosh^2(\phi)$, obtém-se

$$\frac{\cosh^2(\phi)}{\cosh^2(\phi)} - \frac{\sinh^2(\phi)}{\cosh^2(\phi)} = \frac{1}{\cosh^2(\phi)}$$

$$\Rightarrow 1 - \tanh^2(\phi) = \operatorname{sech}^2(\phi).$$

□

Proposição 6. $\coth^2(\phi) - 1 = \operatorname{csch}^2(\phi)$

Demonstração. Dividindo a Equação (1.16) por $\sinh^2(\phi)$, obtém-se

$$\frac{\cosh^2(\phi)}{\sinh^2(\phi)} - \frac{\sinh^2(\phi)}{\sinh^2(\phi)} = \frac{1}{\sinh^2(\phi)}$$

$$\Rightarrow \coth^2(\phi) - 1 = \operatorname{csch}^2(\phi).$$

□

1.4 Algumas curvas planas

No que segue serão apresentados alguns exemplos de curvas planas clássicas, as quais terão relevância nos capítulos posteriores.

1.4.1 A curva tractriz

O arquiteto francês Claude Perrault propôs ao matemático Leibniz, em 1690, o problema de determinar a trajetória descrita pelo seu relógio de bolso enquanto a sua corrente, de comprimento fixo, mantinha-se esticada e sua extremidade percorria uma linha reta. A curva que soluciona este problema é chamada de *tractriz* (Figura 1.3, do latim *trahere*, que significa arrastar. A tractriz é conhecida também como *curva de perseguição*, e tem a propriedade de que, em cada ponto, o segmento da reta tangente, compreendido entre a curva e a reta fixa, é constante.

Para obter a equação de uma tractriz devemos levar em conta as seguintes informações:

1. Em todo ponto $Q(x, y)$ da tractriz, a reta $\overline{QP}$ é tangente em Q , onde $P(x_1, 0)$ é o ponto no qual a tangente intercepta a reta fixa, que, no nosso caso, será o eixo Ox .
1. A distância de $P = (x_1, 0)$ até $Q = (x, y)$ é constante igual a a .
1. A cúspide $P_0 = (0, a)$ é um ponto da tractriz.

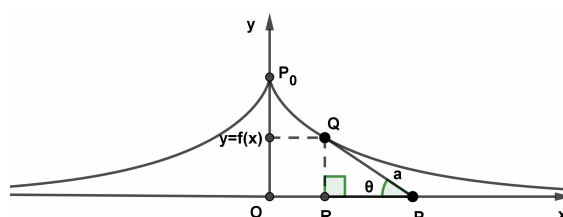


Figura 1.3: Curva tractriz. a medida do seguimento que une P a Q é constante.

Queremos determinar uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cujo traço é uma tractriz. Seja $\{y \in \mathbb{R}; y = f(x)\}$ o conjunto imagem da função f , então, para cada $x \in \mathbb{R}$, o coeficiente angular da reta r tangente ao gráfico $(x, f(x))$ da função f é dado pela derivada $f'(x)$.

Assim, a reta r passa pelos pontos $P = (x_1, 0)$ e $Q = (x, y)$ e é dada por

$$\begin{aligned} y &= m(x - x_1), \text{ com } m = f'(x) \\ \Rightarrow y &= f'(x)(x - x_1). \end{aligned} \quad (1.17)$$

Denotando por R o pé da perpendicular baixada de Q até o eixo Ox e aplicando o Teorema de Pítagoras ao triângulo retângulo PQR , obtém-se,

$$x - x_1 = \pm \sqrt{a^2 - y^2}, \quad (1.18)$$

onde o sinal $(-)$ indica o sentido de percurso positivo do ponto P ao longo da curva, e o sinal $(+)$ indica o sentido de percurso oposto. Substituindo a Equação (1.18) na Equação (1.17), obtém-se

$$y = \pm f'(x) \sqrt{a^2 - y^2}.$$

Portanto a função f será solução do Problema de valor inicial (P.V.I.)

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \pm \frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}}. \\ y(0) = a \end{cases} \quad (1.19)$$

Resolvendo o PVI (1.19) pelo método de separação de variáveis, obtém-se

$$dx = \pm \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y} dy.$$

Integrando ambos os membros em relação a x , segue que

$$x = \pm \int \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y} dy.$$

Efetuada a mudança de variável

$$y = a \sin(\theta), \quad (1.20)$$

tem-se $dy = a \cos(\theta) d\theta$. Segue então que

$$\begin{aligned} x &= \pm \int \frac{\sqrt{a^2 - a^2 \sin^2(\theta)}}{a \sin(\theta)} a \cos(\theta) d\theta \\ &= \pm \int \frac{\sqrt{a^2(1 - \sin^2(\theta))}}{\sin(\theta)} \cos(\theta) d\theta \\ &= \pm \int \frac{\sqrt{a^2 \cos^2(\theta)}}{\sin(\theta)} \cos(\theta) d\theta \\ &= \pm \int \frac{a \cos(\theta)}{\sin(\theta)} \cos(\theta) d\theta \\ &= \pm a \int \frac{\cos^2(\theta)}{\sin(\theta)} d\theta \\ &= \pm a \int \frac{1 - \sin^2(\theta)}{\sin(\theta)} d\theta \\ &\Rightarrow \pm a \left[\int \frac{1}{\sin(\theta)} d\theta - \int \sin(\theta) d\theta \right] \end{aligned} \quad (1.21)$$

Da relação $\sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\theta}{2}\right) = 2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$, segue que

$$\frac{1}{\sin(\theta)} = \frac{1}{2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}, \quad (1.22)$$

assim, multiplicando a Equação (1.22) por $\frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}$, obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin(\theta)} &= \frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \\ &= \frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \frac{1}{2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \\ &= \frac{1}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)} \frac{1}{2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Mas, observe que,

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) &= \\ &= \frac{d \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{d\theta \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \\ &= \frac{\frac{1}{2}}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \\ &= \frac{1}{2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Portanto, substituindo (1.24) em (1.23), obtém-se,

$$\frac{1}{\sin(\theta)} = \frac{1}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)} \frac{d}{d\theta} \left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \right).$$

Daí,

$$\frac{1}{\sin(\theta)} = \frac{d}{d\theta} \ln\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \right), \quad (1.25)$$

substituindo (1.25) em (1.21), segue que,

$$\begin{aligned} x &= \pm a \left[\int \frac{d}{d\theta} \ln\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) d\theta - \int \sin(\theta) d\theta \right], \text{ portanto,} \\ x &= \pm a \left[\ln\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) + \cos(\theta) \right] + k, \text{ onde } k \text{ é constante.} \end{aligned} \quad (1.26)$$

Para determinar o valor da constante k em (1.26), utiliza-se a condição inicial $y(0) = a$, vemos que $x = 0$ ocorre se, e somente se, $\theta = \frac{\pi}{2}$ e $k = 0$. Desta forma, utilizando (1.20), o P.V.I (1.19) pode ser reescrito da seguinte maneira,

$$\begin{cases} x = \pm a \left[\ln \left(\tan \left(\frac{\theta}{2} \right) \right) + \cos(\theta) \right], \\ y = a \sin(\theta). \end{cases} \quad (1.27)$$

Outra parametrização da tractriz pode ser obtida prosseguindo com as coordenadas cartesianas em (1.20) (ver [?]), até obter a seguinte expressão:

$$x = a \ln \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} \right) - \sqrt{a^2 - y^2}, \quad (1.28)$$

Neste ponto efetua-se a mudança de variável $y = a \operatorname{sech}(\theta) = \frac{a}{\cosh(\theta)}$ e utiliza-se as funções hiperbólicas apresentadas na expressão (1.15), obtém-se que,

$$\begin{aligned} x &= a \cdot \ln \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{\cosh^2(\theta)}}}{\frac{a}{\cosh(\theta)}} \right) - \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{\cosh^2(\theta)}} \\ &= a \cdot \ln \left(\frac{a + \frac{a\sqrt{\cosh^2(\theta) - 1}}{\cosh(\theta)}}{\frac{a}{\cosh(\theta)}} \right) - a \frac{\sqrt{\cosh^2(\theta) - 1}}{\cosh(\theta)} \\ &= a \cdot \ln \left(\cosh(\theta) + \sinh(\theta) \right) - a \cdot \tanh(\theta) \\ &= a \cdot \ln \left(\frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2} + \frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2} \right) - a \cdot \tanh(\theta) \\ &= a \cdot \ln(e^\theta) - a \cdot \tanh(\theta) \\ &= a \cdot \theta - a \cdot \tanh(\theta) \\ &= a \left(\theta - \tanh(\theta) \right) \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{cases} x = \pm a[\theta - \tanh(\theta)] \\ y = \frac{a}{\cosh(\theta)}, \end{cases}$$

é a equação de uma tractriz assintotada pelo eixo Ox .

No que segue, ao longo do presente trabalho, será utilizada a equação de uma tractriz assintotada pelo eixo Oy , escrita na forma:

$$\begin{cases} x = \frac{a}{\cosh(\theta)} \\ y = \pm a[\theta - \tanh(\theta)]. \end{cases} \quad (1.29)$$

1.4.2 A curva catenária

O problema da catenária consiste em determinar uma curva plana cujo traço tenha o formato da curva que descreve a forma de equilíbrio de um fio homogêneo, flexível, pesado, suspenso pelas extremidades determinadas por dois pontos fixos, submetido exclusivamente à força da gravidade. Este problema foi proposto por Galileu Galilei, que acreditava que a solução do problema seria uma parábola. Em 1646, o físico Huygens mostrou que a conjectura de Galilei era falsa. Em 1690, Jakob Bernoulli relançou o problema, propondo um desafio à comunidade científica. Em 1691 foram publicadas três provas da solução do problema, obtidas por Leibniz, Cristiaan Huygens e Johann Bernoulli, todas mostrando que a curva solução seria uma curva denominada catenária, representada na Figura (1.4).

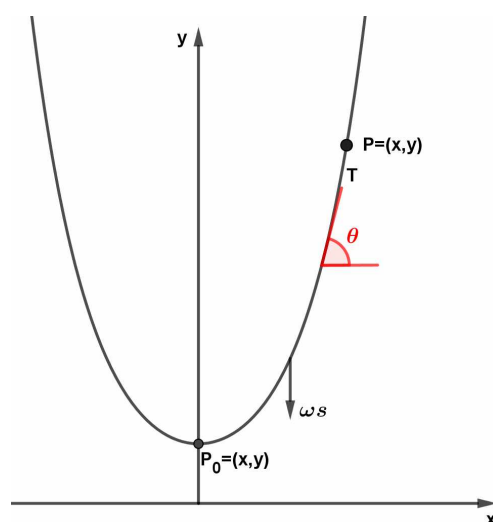


Figura 1.4: Corda na forma de uma catenária.

No que segue será deduzida a equação da catenária.

Observe a Figura (1.4). Suponha que a parte da corda entre P_0 e P está em equilíbrio estático sob ação de três forças: a tensão T_0 em $P_0(x_0, y_0)$; a tensão T que age na direção da tangente em um ponto $P(x, y)$ qualquer da curva, devido à flexibilidade da corda, e, por último, o peso $\omega \cdot s$ da corda, onde ω é a densidade da corda e $s = s(x)$ é a função comprimento de arco, aplicada de P a P_0 .

Denote por θ o ângulo determinado pela reta tangente à curva no ponto $P(x, y)$ e o

eixo coordenado Ox . Como a corda está em equilíbrio estático obtém-se,

$$\begin{aligned} T \sin(\theta) &= \omega s(x) \\ T \cos(\theta) &= T_0 \Rightarrow T = \frac{T_0}{\cos(\theta)} \\ \frac{T_0}{\cos(\theta)} \sin(\theta) &= \omega s(x) \Rightarrow \tan(\theta) = \frac{\omega s}{T_0} \end{aligned}$$

Seja $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função cuja imagem determina o traço da catenária. É fácil ver, pelo formato do traço (ver Figura 1.4), que λ deve ser uma função par e, para cada x , tem-se $\lambda'(x) = \tan(\theta) = \frac{\omega}{T_0} s(x)$, onde

$$s(x) = \int_0^x \sqrt{1 + (\lambda'(t))^2} dt,$$

denota a função comprimento de arco aplicada ao “arco” P_0P , da curva λ . então

$$\lambda'(x) = \frac{\omega}{T_0} \int_0^x \sqrt{1 + (\lambda'(t))^2} dt,$$

e portanto,

$$\lambda''(x) = \frac{\omega}{T_0} \sqrt{1 + (\lambda'(x))^2}. \quad (1.30)$$

Fazendo as mudanças de variáveis $r = \lambda'(x)$ e $k = \frac{\omega}{T_0}$, obtém-se de (1.30) que

$$\frac{dr}{dx} = k \sqrt{1 + r^2},$$

então

$$\frac{1}{\sqrt{1 + r^2}} dr = k dx,$$

integrando ambos os lados em relação a x , obtém-se

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 + r^2}} dr = \int k dx \quad (1.31)$$

Efetuada as mudanças de variáveis $r = \tan(t)$ e $r^2 = \tan^2(t)$ e $dr = \sec^2(t)dt$ em (1.31), segue que

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2(t)}} \sec^2(t) dt &= \int \frac{1}{\sec(t)} \sec^2(t) dt \\ &= \int \sec(t) dt \\ &= \int \sec(t) \frac{\sec(t) + \tan(t)}{\sec(t) + \tan(t)} dt \\ &= \int \frac{\sec^2(t) + \sec(t) \tan(t)}{\sec(t) + \tan(t)} dt \end{aligned} \quad (1.32)$$

Denotando,

$$\sec(t) + \tan(t) = z, \quad (1.33)$$

então

$$\frac{dz}{dt} = \sec^2(t) + \sec(t) \tan(t) \Rightarrow dt = \frac{dz}{\sec^2(t) + \sec(t) \tan(t)}. \quad (1.34)$$

Substituindo as Equações (1.33) e (1.34) na Equação (1.32), obtém-se

$$\int \frac{1}{z} dz = \ln|z| + c. \quad (1.35)$$

Utilizando novamente (1.33), obtém-se que a solução de (1.32) é dada por

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2(t)}} \sec^2(t) dt = \ln|\sec(t) + \tan(t)| + c$$

Segue da mudança de variável $r = \tan(t)$ que $t = \arctan(r)$, assim,

$$\ln|\sec(t) + \tan(t)| + c = \ln|\sec(\arctan(r)) + \tan(\arctan(r))| + c. \quad (1.36)$$

Substituindo a relação trigonométrica $\sec(t) = \sqrt{1 + \tan^2(t)}$ na Equação (1.36), pode-se reescrever a solução de (1.32) da seguinte forma

$$\ln|r + \sqrt{1 + r^2}| + c = \ln|\lambda'(x) + \sqrt{1 + (\lambda'(x))^2}| + c. \quad (1.37)$$

Substituindo a Equação (1.37) na Equação (1.31), obtém-se

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{1 + r^2}} dr &= \int k dx \\ \Rightarrow \ln|\lambda'(x) + \sqrt{1 + (\lambda'(x))^2}| + c &= \int k dx \\ \Rightarrow \ln|\lambda'(x) + \sqrt{1 + (\lambda'(x))^2}| + c_1 &= kx + c_2 \\ \Rightarrow \ln|\lambda'(x) + \sqrt{1 + (\lambda'(x))^2}| &= kx \\ \Rightarrow e^{\ln|\lambda'(x) + \sqrt{1 + (\lambda'(x))^2}|} &= e^{kx} \\ \Rightarrow \lambda'(x) + \sqrt{1 + (\lambda'(x))^2} &= e^{kx}. \end{aligned} \quad (1.38)$$

Da regra da cadeia segue que a derivada de uma função par é uma função ímpar (ver Observação (2)), assim, como λ é uma função par, então $\lambda'(x)$ é uma função ímpar. Desta forma,

$$\lambda'(-x) + \sqrt{1 + (\lambda'(-x))^2} = e^{-kx} \Leftrightarrow -\lambda'(x) + \sqrt{1 + (\lambda'(x))^2} = e^{-kx}, \quad (1.39)$$

subtraindo a Equação (1.38) da Equação (1.39), obtém-se

$$\begin{aligned}
 \lambda'(x) + \sqrt{1 + (\lambda'(x))^2} - (-\lambda'(x) + \sqrt{1 + (\lambda'(x))^2}) &= e^{kx} - e^{-kx} \Rightarrow \\
 \lambda'(x) + \sqrt{1 + (\lambda'(x))^2} + \lambda'(x) - \sqrt{1 + (\lambda'(x))^2} &= e^{kx} - e^{-kx} \Rightarrow \\
 \lambda'(x) + \lambda'(x) &= e^{kx} - e^{-kx} \Rightarrow \\
 2\lambda'(x) &= e^{kx} - e^{-kx} \Rightarrow \\
 \lambda'(x) &= \frac{e^{kx} - e^{-kx}}{2} = \sinh(kx) \Rightarrow \\
 \int \lambda'(x) dx &= \int \sinh(kx) dx \Rightarrow \\
 \lambda(x) &= \frac{1}{k} \cosh(kx),
 \end{aligned}$$

tomando $k = 1/a$, obtém-se

$$\lambda(x) = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right). \quad (1.40)$$

Desta forma, a curva procurada é a catenária dada pela Equação (1.40). Observe que, quando $a = 1$ o traço da curva é nada mais do que o gráfico da função *coseno hiperbólico*.

Observação 2. *Seja $\lambda(x) = \lambda(-x)$ (λ é uma função par), aplicando a regra da cadeia, segue que*

$$\lambda'(x) = (\lambda'(-x))(-1) \Leftrightarrow \lambda'(x) = -\lambda'(-x),$$

portanto $\lambda'(x)$ é uma função ímpar.

Na Seção 2.1 do Capítulo 2 será realizado um estudo a respeito de evolutas e involutas de curvas planas. Dentro deste contexto será visto que a curva catenária é a evoluta de uma tractriz. Por este motivo estas curvas terão grande relevância no desenvolvimento dos resultados apresentados no Capítulo 3. Na Figura (1.5) estão representadas a tractriz de equação (1.29) e a catenária de equação (1.40).

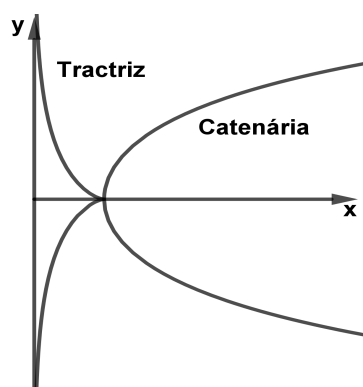


Figura 1.5: Catenária como evoluta de uma tractriz.

Cinturoides e pseudo-ovaloides

Introduzimos agora uma família de curvas $\psi(u)$, $u \in I$ obtidas pelas equação (1.41), quando variam-se os coeficientes a e b .

$$\psi(u) = \left(\frac{\cos(u) \left(a^2 \cos^2(u) + b^2 \sin^2(u) \right)}{a}, b \sin(u) \right), a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}; \quad (1.41)$$

Como pode ser visualizado na Figura (1.6), o traço da curva muda de acordo com a variação dos coeficientes a e b . Como não foram encontradas na literatura menções a respeito destas curvas, denotaremos por *cinturoide* a curva dada pela Equação (1.41), tal que $a < b$, e por *pseudo-ovalode* a curva dada pela mesma equação quando $a > b$.

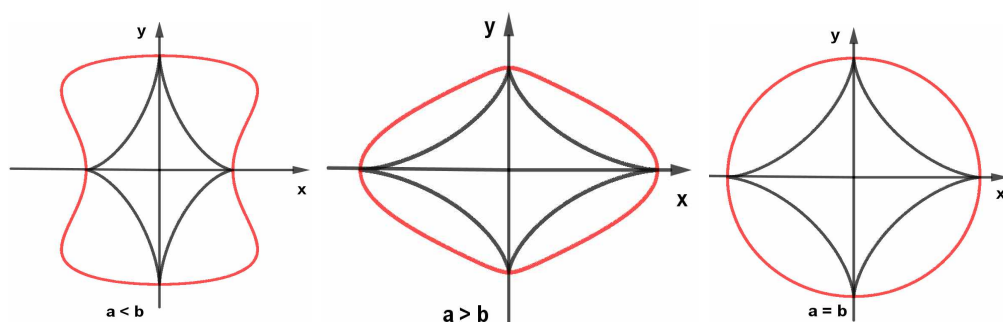


Figura 1.6: Astroide e cinturoide. Astroide e Pseudo-ovalode. Astroide e circunferência.

As curvas cinturoides e pseudo-ovaloides são curvas fechadas e simétricas tanto em relação ao eixo Oy quanto em relação ao eixo Ox e tais que, para valores de a e b , fixados,

o astroide de equação $(a \cos^3(u), b \sin^3(u))$, $u \in I$, está inscrito em ambas as famílias de curvas. É fácil ver que quando $a = b$ a curva é reduzida à circunferência $(a \cos(u), a \sin(u))$ centrada na origem de raio a . Na Figura (1.6), à esquerda, estão representados o cinturoide e o astroide obtidos quando $a = 1.50$ e $b = 2.50$. Ao centro estão o pseudo-ovaloide e o astroide obtidos quando $a = 2.50$ e $b = 1.50$. À direita está representada a circunferência obtida quando $a = b = 2.50$.

Viu-se que, nas equações (1.41) temos três possibilidades: $a < b$; $a = b$ e $a > b$. Observe que todas as curvas obtidas são simétricas em relação ao eixo Ox e ao eixo Oy simultaneamente, assim, podemos dizer que são curvas centradas na origem, e portanto, faz sentido definir os segmentos que unem os pontos de interseção de ambas as curvas com os eixos coordenados como sendo os *eixos* da curva. Assim, se $a \neq b$ temos um *eixo maior* e um *eixo menor*.

Desta feita, se $a < b$, a Equação (1.41) determina uma *cinturoide* com *eixo maior* sobre o eixo Oy , ou uma *pseudo-ovaloide* com *eixo maior* sobre o eixo Ox se $a > b$.

Tomando agora a parametrização

$$\Phi(u) = \left(a \cos(u), \frac{\sin(u)(b^2 \sin^2(u) + a^2 \cos^2(u))}{b} \right), b \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad (1.42)$$

obtém-se que, se $a < b$, a Equação (1.42) determina uma *pseudo-ovaloide* com *eixo maior* sobre o eixo Oy , ou uma *cinturoide* com *eixo maior* sobre o eixo Ox , se $a > b$. É fácil ver que quando $a = b$ tem-se $\psi(u) = \Phi(u)$ e, nesse caso, ambas as curvas são reduzidas à circunferência $(a \cos(u), a \sin(u))$ centrada na origem de raio a .

1.5 Curvas no espaço tridimensional

1.5.1 Torção e triedro de Frenet

Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular parametrizada por comprimento de arco, então a curvatura de α em $s \in I$ é o número real $k(s) = |\alpha''(s)|$. *Grosso modo* pode-se dizer que $k(s)$ mede a velocidade com que a reta tangente muda de direção.

Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular parametrizada por comprimento de arco, como $|\alpha'(s)| = 1$, então

$$\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle = 1. \quad (1.43)$$

Derivando a Equação (1.43) em relação à variável s , obtém-se

$$\langle \alpha''(s), \alpha'(s) \rangle = 0.$$

Portanto $\alpha''(s)$ é ortogonal a $\alpha'(s)$. Logo, para todo $s \in I$, onde $k(s) \neq 0$, tem-se que, $\alpha''(s) \neq 0$, desta forma, como α é uma curva regular, podemos definir um vetor unitário na direção de $\alpha''(s)$, para todo $s \in I$.

Definição 12. *Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular parametrizada por comprimento de arco, tal que $k(s) > 0$. O vetor unitário*

$$n(s) = \frac{\alpha''(s)}{k(s)}, \quad (1.44)$$

é denominado vetor normal a α em s . Observe que $|n(s)| = \frac{|\alpha''(s)|}{|k(s)|} = \frac{|k(s)|}{|k(s)|} = 1$.

Definição 13. *Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular. A reta normal a α em $s_0 \in I$, é a reta que passa por $\alpha(s_0)$ na direção de $n(s_0)$, ou seja, é a reta dada pela função*

$$h(r) = \alpha(s_0) + r n(s_0), \quad r \in \mathbb{R}.$$

Como $t(s)$ e $n(s)$ são vetores ortogonais, então, tomando um terceiro vetor $b(s)$, ortogonal a $t(s)$ e $n(s)$, fica determinada uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$, $\{t(s), n(s), b(s)\}$. O vetor $b(s)$ é denominado vetor binormal da curva α em s .

Como $t'(s) = \alpha''(s)$, então, segue de (1.44) que $t'(s) = k(s)n(s)$, $\forall s \in I$.

Definição 14. *Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular parametrizada por comprimento de arco, tal que, $k(s) > 0$. Temos que,*

$$b(s) = t(s) \times n(s). \quad (1.45)$$

O referencial ortonormal $\{t(s), n(s), b(s)\}$ é chamado de *triedro de Frenet* da curva α em s . Percebemos que $b'(s)$ é paralelo a $n(s)$. De fato, derivando a Equação (1.45) em relação a s , obtém-se

$$\begin{aligned} b'(s) &= t'(s) \times n(s) + t(s) \times n'(s) \\ &= t(s) \times n'(s). \end{aligned}$$

Aqui utilizou-se do fato de que $t'(s)$ e $n(s)$ são vetores paralelos, conseqüentemente o produto vetorial $t'(s) \times n(s) = 0$.

Portanto $b'(s)$ é ortogonal a $t(s)$ e como $|b(s)| = 1$, então $\langle b(s), b(s) \rangle = 1$. Derivando ambos os membros em relação a s , obtém-se, $\langle b'(s), b(s) \rangle = 0$.

Portanto, $b'(s)$ é ortogonal a $b(s)$ e $b'(s)$ é ortogonal a $t(s)$, logo, $b'(s)$ é paralelo a $n(s)$. Assim, para cada $s \in I$ existe um número real $\tau(s)$ tal que,

$$b'(s) = \tau(s)n(s). \quad (1.46)$$

O número real $\tau(s)$ é denominado torção da curva α em s .

Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma curva regular parametrizada por comprimento de arco, tal que, $k(s) > 0$, $\forall s \in I$, então o triedro de Frenet da curva α em s , é um referencial ortonormal de $\mathbb{R}^3$. Portanto, podemos obter os vetores $\{t'(s), n'(s), b'(s)\}$, como combinação linear de $t(s), n(s)$ e $b(s)$. Já vimos das Equações (1.44) e (1.46) que

$$t'(s) = k(s)n(s) \text{ e } b'(s) = \tau(s)n(s).$$

Por outro lado sabemos que $n(s) = b(s) \times t(s)$. Derivando esta equação em relação a s , obtém-se:

$$n'(s) = b'(s) \times t(s) + b(s) \times t'(s) \quad (1.47)$$

Substituindo as Equações (1.44) e (1.46) na Equação (1.47), obtém-se

$$\begin{aligned} n'(s) &= \tau(s)n(s) \times t(s) + b(s) \times k(s)n(s) \\ &= \tau(s)(n(s) \times t(s)) + k(s)(b(s) \times n(s)) \\ &= -\tau(s)b(s) - k(s)t(s). \end{aligned}$$

Logo,

$$n'(s) = -\tau(s)b(s) - k(s)t(s). \quad (1.48)$$

Aqui utilizou-se o fato de que, $n(s) \times t(s) = -b(s)$ e $b(s) \times n(s) = -t(s)$.

Definição 15. *Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular, parametrizada por comprimento de arco, tal que, $k(s) > 0$, $\forall s \in I$. O triedro de Frenet da curva α em s é definido por, $t(s) = \alpha'(s)$, $n(s) = \frac{\alpha''(s)}{k(s)}$, $b(s) = t(s) \times n(s)$, de forma que*

$$\begin{aligned}
t'(s) &= k(s)n(s), \\
n'(s) &= -\tau(s)b(s) - k(s)t(s), \\
b'(s) &= \tau(s)n(s).
\end{aligned}
\tag{1.49}$$

As Equações (1.49) são denominadas *fórmulas de Frenet da curva α em s* .

O triedro de Frenet e a curvatura foram definidos para uma curva regular parametrizada por comprimento de arco, porém, podem ocorrer situações nas quais seja difícil obter uma reparametrização por comprimento de arco. A Proposição 7, a seguir, permite obter a curvatura e a torção de uma curva regular com parâmetro qualquer.

Proposição 7. *Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular de parâmetro t e $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma reparametrização de α por comprimento de arco, isto é, $\beta(s(t)) = \alpha(t)$, $\forall t \in I$. Seja $k(s) > 0$ e $\tau(s)$ a curvatura e a torção de β em $s \in J$, então,*

$$\begin{aligned}
k(s(t)) &= \frac{|\alpha'(t) \times \alpha''(t)|}{|\alpha'(t)|^3} \\
\tau(s(t)) &= \frac{\langle \alpha'(t) \times \alpha'''(t), \alpha''(t) \rangle}{|\alpha'(t) \times \alpha''(t)|^2}.
\end{aligned}$$

Demonstração. Considera-se,

$$\beta(s(t)) = \alpha(t) \tag{1.50}$$

derivando a expressão (1.50) em relação a t , obtém-se pela regra da cadeia

$$\frac{d\beta}{ds} \frac{ds}{dt} = \alpha'(t). \tag{1.51}$$

Derivando mais uma vez expressão (1.51) em relação a t obtém-se

$$\frac{d^2\beta}{ds^2} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 + \frac{d\beta}{ds} \frac{d^2s}{dt^2} = \alpha''(t), \tag{1.52}$$

como, o comprimento de arco é dado por $s(t) = \int_{t_0}^t |\alpha'(t)| dt$, segue que

$$\frac{ds}{dt} = |\alpha'(t)|. \tag{1.53}$$

Derivando (1.53) em relação a t ,

$$\begin{aligned}\frac{d^2 s}{dt^2} &= \frac{d}{dt}(|\alpha'(t)|) = \frac{d}{dt}(\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle^{(-\frac{1}{2})} \left[\langle \alpha'(t), \alpha''(t) \rangle + \langle \alpha''(t), \alpha'(t) \rangle \right] \\ &= \frac{\langle \alpha''(t), \alpha'(t) \rangle}{|\alpha'(t)|}.\end{aligned}\tag{1.54}$$

Segue das Equações (1.51) e (1.52) que

$$\begin{aligned}\alpha'(t) \times \alpha''(t) &= \frac{d\beta}{ds} \frac{ds}{dt} \times \left(\frac{d^2\beta}{ds^2} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 + \frac{d\beta}{ds} \frac{d^2s}{dt^2} \right) \\ &= \left(\frac{ds}{dt} \right)^3 \left(\frac{d\beta}{ds} \times \frac{d^2\beta}{ds^2} \right) + \frac{ds}{dt} \frac{d^2s}{dt^2} \left(\frac{d\beta}{ds} \times \frac{d\beta}{ds} \right) \\ &= \left(\frac{ds}{dt} \right)^3 \left(\frac{d\beta}{ds} \times \frac{d^2\beta}{ds^2} \right).\end{aligned}$$

Aqui utilizou-se do fato que, $\left(\frac{d\beta}{ds} \times \frac{d\beta}{ds} \right) = 0$.

Como β está parametrizada por comprimento de arco, então $\left| \frac{d\beta}{ds} \right| = 1$ e portanto $\left\langle \frac{d\beta}{ds}, \frac{d^2\beta}{ds^2} \right\rangle = 0$, ou seja, $\frac{d\beta}{ds}$ é ortogonal a $\frac{d^2\beta}{ds^2}$, daí,

$$|\alpha'(t) \times \alpha''(t)| = \left| \frac{ds}{dt} \right|^3 \left| \frac{d\beta}{ds} \right| \left| \frac{d^2\beta}{ds^2} \right|,\tag{1.55}$$

e

$$\left| \frac{d^2\beta}{ds^2} \right| = \frac{|\alpha'(t) \times \alpha''(t)|}{\left| \frac{ds}{dt} \right|^3}\tag{1.56}$$

Sendo que na Equação (1.55) utilizou-se do fato que $\left| \left(\frac{d\beta}{ds} \times \frac{d^2\beta}{ds^2} \right) \right| = \left| \frac{d\beta}{ds} \right| \left| \frac{d^2\beta}{ds^2} \right| \sin(\theta) = \left| \frac{d^2\beta}{ds^2} \right|$, para $\theta = \frac{\pi}{2}$ e $\left| \frac{d\beta}{ds} \right| = 1$. Como,

$$k(s(t)) = \left| \frac{d^2\beta}{ds^2} \right|.\tag{1.57}$$

Segue de (1.55) que

$$k(s(t)) = \frac{|\alpha'(t) \times \alpha''(t)|}{|\alpha'(t)|^3}.\tag{1.58}$$

Com a finalidade de obter a expressão da torção, vamos utilizar os vetores normal e binormal da curva β , os quais são dados por,

$$n(s(t)) = \frac{1}{k(s(t))} \frac{d^2\beta}{ds^2}, \quad (1.59)$$

$$b(s(t)) = \frac{d\beta}{ds} \times n(s(t)). \quad (1.60)$$

Pelas Equações (1.51) e (1.53), obtém-se que

$$\begin{aligned} \frac{d\beta}{ds} \frac{ds}{dt} &= \alpha'(t) \\ \Rightarrow \frac{d\beta}{ds} &= \frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|}. \end{aligned} \quad (1.61)$$

Pelas Equações (1.52), (1.54) e (1.61), obtém-se que

$$\begin{aligned} \alpha''(t) &= \frac{d^2\beta}{ds^2} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 + \frac{d\beta}{ds} \frac{d^2s}{dt^2}, \text{ então} \\ \frac{d^2\beta}{ds^2} &= \frac{\alpha''(t) - \frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|} \frac{\langle \alpha'(t), \alpha''(t) \rangle}{|\alpha'(t)|}}{|\alpha'(t)|^2} \\ &= \frac{\frac{\alpha''(t)|\alpha'(t)|^2 - \alpha'(t)\langle \alpha'(t), \alpha''(t) \rangle}{|\alpha'(t)|^2}}{|\alpha'(t)|^2} \\ &= \frac{\alpha''(t)|\alpha'(t)|^2 - \alpha'(t)\langle \alpha'(t), \alpha''(t) \rangle}{|\alpha'(t)|^4} \end{aligned} \quad (1.62)$$

Substituindo as Equações (1.58) e (1.62) na Equação (1.59), obtém-se

$$\begin{aligned} n(s(t)) &= \frac{1}{\frac{|\alpha'(t) \times \alpha''(t)|}{|\alpha'(t)|^3}} \frac{\alpha''(t)|\alpha'(t)|^2 - \alpha'(t)\langle \alpha'(t), \alpha''(t) \rangle}{|\alpha'(t)|^4} \\ &= \frac{|\alpha'(t)|^3}{|\alpha'(t) \times \alpha''(t)|} \frac{\alpha''(t)|\alpha'(t)|^2 - \alpha'(t)\langle \alpha'(t), \alpha''(t) \rangle}{|\alpha'(t)|^4} \\ &= \frac{\alpha''(t)|\alpha'(t)|^2 - \alpha'(t)\langle \alpha'(t), \alpha''(t) \rangle}{|\alpha'(t)||\alpha'(t) \times \alpha''(t)|} \end{aligned} \quad (1.63)$$

Substituindo as Equações (1.61) e (1.63) na Equação (1.60), obtém-se

$$\begin{aligned} b(s(t)) &= \frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|} \times \left(\frac{|\alpha'(t)|^2 \alpha''(t) - \alpha'(t)\langle \alpha''(t) \times \alpha'(t) \rangle}{|\alpha'(t)||\alpha'(t) \times \alpha''(t)|} \right) \\ &= \frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|} \times \frac{|\alpha'(t)|^2 \alpha''(t)}{|\alpha'(t)||\alpha'(t) \times \alpha''(t)|} - \frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|} \times \frac{\alpha'(t)\langle \alpha''(t), \alpha'(t) \rangle}{|\alpha'(t)||\alpha'(t) \times \alpha''(t)|} \\ &= \frac{|\alpha'(t)|^2}{|\alpha'(t)|^2 |\alpha'(t) \times \alpha''(t)|} (\alpha'(t) \times \alpha''(t)) - \frac{\langle \alpha'(t), \alpha''(t) \rangle}{|\alpha'(t)|^2 |\alpha'(t) \times \alpha''(t)|} (\alpha'(t) \times \alpha'(t)) \\ &= \frac{\alpha'(t) \times \alpha''(t)}{|\alpha'(t) \times \alpha''(t)|}, \end{aligned} \quad (1.64)$$

na equação (1.64) utilizou-se que $\alpha'(t) \times \alpha'(t) = 0$.

Derivando a expressão (1.64) em relação t , e utilizando que $\frac{ds}{dt} = |\alpha'(t)|$, obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{db}{ds} \frac{ds}{dt} &= \frac{\frac{d}{dt} [\alpha'(t) \times \alpha''(t)] \cdot |\alpha'(t) \times \alpha''(t)| - \frac{d}{dt} [|\alpha'(t) \times \alpha''(t)|] \cdot \alpha'(t) \times \alpha''(t)}{|\alpha'(t) \times \alpha''(t)|^2} \\ \frac{db}{ds} &= \frac{1}{|\alpha'(t)|} \left(\frac{\frac{d}{dt} (\alpha'(t) \times \alpha''(t)) \cdot |\alpha'(t) \times \alpha''(t)|}{|\alpha'(t) \times \alpha''(t)|^2} - \frac{\frac{d}{dt} (|\alpha'(t) \times \alpha''(t)|) \cdot \alpha'(t) \times \alpha''(t)}{|\alpha'(t) \times \alpha''(t)|^2} \right) \\ &= \frac{1}{|\alpha'(t)|} \left(\frac{\alpha''(t) \times \alpha''(t) + \alpha'(t) \times \alpha'''(t)}{|\alpha'(t) \times \alpha''(t)|} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\frac{d}{dt} (\langle \alpha'(t) \times \alpha''(t), \alpha'(t) \times \alpha''(t) \rangle)^{\frac{1}{2}}}{|\alpha'(t) \times \alpha''(t)|^2} (\alpha'(t) \times \alpha''(t)) \right), \end{aligned} \quad (1.65)$$

para prosseguir vamos precisar da seguinte observação:

Observação 3.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\langle \alpha'(t) \times \alpha''(t), \alpha'(t) \times \alpha''(t) \rangle)^{\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2} \langle \alpha'(t) \times \alpha''(t), \alpha'(t) \times \alpha''(t) \rangle^{-\frac{1}{2}} - \\ &\quad - \left(\langle \alpha''(t) \times \alpha''(t) + \alpha'(t) \times \alpha'''(t), \alpha'(t) \times \alpha''(t) \rangle + \right. \\ &\quad \left. + \langle \alpha'(t) \times \alpha''(t), \alpha''(t) \times \alpha''(t) + \alpha'(t) \times \alpha'''(t) \rangle \right) \\ &= \frac{2 \langle \alpha'(t) \times \alpha'''(t), \alpha'(t) \times \alpha''(t) \rangle}{2 \langle \alpha'(t) \times \alpha''(t), \alpha'(t) \times \alpha''(t) \rangle^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{\langle \alpha'(t) \times \alpha'''(t), \alpha'(t) \times \alpha''(t) \rangle}{|\alpha'(t) \times \alpha''(t)|}. \end{aligned} \quad (1.66)$$

Assim, aplicando (1.66) em (1.65), obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{db}{ds} &= \frac{\alpha'(t) \times \alpha'''(t)}{|\alpha'(t)| |\alpha'(t) \times \alpha''(t)|} - \frac{\frac{\langle \alpha'(t) \times \alpha'''(t), \alpha'(t) \times \alpha''(t) \rangle}{|\alpha'(t) \times \alpha''(t)|} \alpha'(t) \times \alpha''(t)}{|\alpha'(t)| |\alpha'(t) \times \alpha''(t)|^2} \\ &= \frac{\alpha'(t) \times \alpha'''(t)}{|\alpha'(t)| |\alpha'(t) \times \alpha''(t)|} - \frac{\langle \alpha'(t) \times \alpha'''(t), \alpha'(t) \times \alpha''(t) \rangle \alpha'(t) \times \alpha''(t)}{|\alpha'(t)| |\alpha'(t) \times \alpha''(t)|^3}. \end{aligned} \quad (1.67)$$

Como,

$$\tau(s(t)) = \left\langle \frac{db}{ds}(s(t)), n(s(t)) \right\rangle. \quad (1.68)$$

Substituindo as Equações (1.63) e (1.67) na Equação (1.68), obtém-se

$$\begin{aligned}
 \tau(s(t)) &= \left\langle \frac{\alpha'(t) \times \alpha'''(t)}{|\alpha'(t)| |\alpha'(t) \times \alpha''(t)|} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\langle \alpha'(t) \times \alpha'''(t), \alpha'(t) \times \alpha''(t) \rangle \left(\alpha'(t) \times \alpha''(t) \right)}{|\alpha'(t)| |\alpha'(t) \times \alpha''(t)|^3}, \frac{|\alpha'(t)|^2 \alpha''(t) - \alpha'(t) \langle \alpha''(t) \times \alpha'(t) \rangle}{|\alpha'(t)| |\alpha'(t) \times \alpha''(t)|} \right\rangle \\
 &= \frac{1}{|\alpha'(t)|^2 |\alpha'(t) \times \alpha''(t)|^2} \left\langle \alpha'(t) \times \alpha'''(t), \alpha''(t) |\alpha'(t)|^2 - \alpha'(t) \langle \alpha'(t) \times \alpha''(t) \rangle \right\rangle - \\
 &\quad - \frac{\langle \alpha'(t) \times \alpha'''(t), \alpha'(t) \times \alpha''(t) \rangle}{|\alpha'(t)|^2 |\alpha'(t) \times \alpha''(t)|^4} \left\langle \alpha'(t) \times \alpha''(t), \alpha''(t) |\alpha'(t)|^2 - \alpha'(t) \langle \alpha''(t), \alpha'(t) \rangle \right\rangle \\
 &= \frac{1}{|\alpha'(t) \times \alpha''(t)|^2} \langle \alpha'(t) \times \alpha'''(t), \alpha''(t) \rangle - \frac{\langle \alpha''(t) \times \alpha'(t) \rangle}{|\alpha'(t)|^2 |\alpha'(t) \times \alpha''(t)|^2} \langle \alpha'(t) \times \alpha''(t), \alpha'(t) \rangle - \\
 &\quad - \frac{\langle \alpha'(t) \times \alpha'''(t), \alpha'(t) \times \alpha''(t) \rangle}{|\alpha'(t) \times \alpha''(t)|^4} \langle \alpha'(t) \times \alpha''(t), \alpha''(t) \rangle + \\
 &\quad + \frac{\langle \alpha'(t) \times \alpha'''(t), \alpha'(t) \times \alpha''(t) \rangle \langle \alpha''(t) \times \alpha'(t) \rangle}{|\alpha'(t) \times \alpha''(t)|^4} \langle \alpha'(t) \times \alpha''(t), \alpha'(t) \rangle.
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\tau(s(t)) = \frac{\langle \alpha'(t) \times \alpha'''(t), \alpha''(t) \rangle}{|\alpha'(t) \times \alpha''(t)|^2}. \quad (1.69)$$

Aqui utilizou-se do fato de que, por uma propriedade do produto misto, $\langle \alpha'(t) \times \alpha''(t), \alpha'(t) \rangle = 0$, $\langle \alpha'(t) \times \alpha''(t), \alpha''(t) \rangle = 0$

As expressões $k(s(t))$ e $\tau(s(t))$, obtidas, são respectivamente, a curvatura e a torção da curva espacial α em $t \in I$.

□

CAPÍTULO 2

UM IMPORTANTE RESULTADO ENVOLVENDO OS CONCEITOS DE EVOLUTAS E INVOLUTAS

2.1 Evolutas de curvas Planas

Seja $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma parametrização por comprimento de arco de uma curva α de curvatura $k(s) \neq 0$. Para cada $s \in I$, o número real $\rho(s) = \frac{1}{|k(s)|}$ é denominado *raio de curvatura* da curva α em s e a função $C(s) = \alpha(s) + \frac{1}{k(s)}n(s)$, é denominada *centro de curvatura* de α em s . O círculo de raio $\rho(s)$ e centro $C(s)$ é denominado *círculo osculador* da curva α em s .

Como $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, está parametrizada por comprimento de arco e $k(s) \neq 0$, utilizando o fato de que a curvatura de uma circunferência é dada por $k(s) = \frac{1}{r}$, onde r é o raio da circunferência, é fácil ver que o raio de curvatura do círculo osculador à curva α em s é dado por $\rho(s) = \frac{1}{\frac{1}{r}} = r$.

Observe que se uma reta η é tangente ao círculo osculador no parâmetro $s = s_0$, então $\eta(s)$ é a reta que passa por $\alpha(s_0)$ e é perpendicular ao vetor $C(s_0) - \alpha(s_0) = \frac{1}{k(s_0)}n(s_0)$. Portanto η tem, necessariamente, que ser paralela a $t(s_0) = \alpha'(s_0)$. Isto garante que η é a reta tangente ao círculo osculador de α em $s = s_0$. Desta forma, pode-se afirmar que a

curva α e o círculo osculador de α em s_0 compartilham a mesma reta tangente em $\alpha(s_0)$. Conforme o parâmetro s varia em I , o centro de curvatura

$$C(s) = \alpha(s) + \frac{1}{k(s)}n(s),$$

do círculo osculador, descreve uma curva β . Podemos então formalizar a seguinte definição:

Definição 16. *Uma involuta (ou evolvente) de uma curva plana regular β é uma curva que é ortogonal às retas tangentes de β em cada valor do parâmetro s . Portanto, se β é uma evoluta de α , então α é uma involuta de β .*

Segue da definição 16 que a evoluta de uma tractriz α de equação (1.29) é uma catenária β de equação (1.40), estas curvas terão grande relevância no desenvolvimento dos resultados no Capítulo 3. Outro exemplo é o caso da elipse, cuja evoluta é um astroide representados na Figura (2.1)

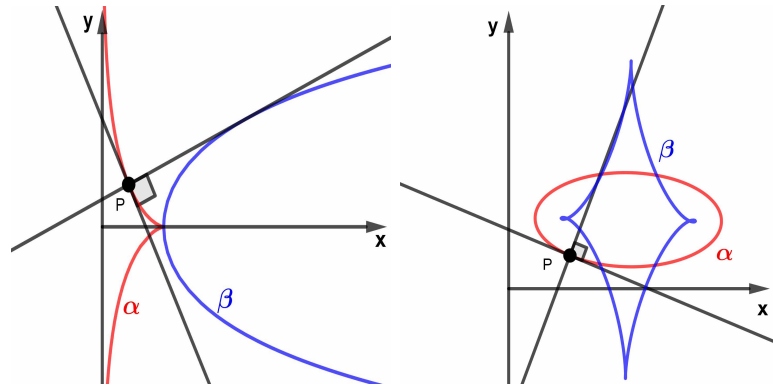


Figura 2.1: Tractriz e sua evoluta, uma catenária (à esquerda). Elipse e sua evoluta, um astroide (à direita).

O objetivo da próxima seção é introduzir alguns elementos da *teoria de contato de curvas*, com vistas a mostrar que os conceitos de evolutas e involutas de curvas espaciais diferem dos conceitos de evolutas e involutas de curvas planas.

2.2 Teoria de contato

Definição 17. *Sejam I e J dois intervalos da reta real e seja $r_0 \in I \cap J$. Sejam $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ duas curvas regulares tal que $\alpha(r_0) = \beta(r_0)$ e seja $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n \geq 1$.*

Diz-se que α e β têm contato de ordem n em $r = r_0$ se as derivadas de α e β , de ordem menor ou igual que n , coincidem em r_0 e as derivadas de ordem $n + 1$ são distintas em r_0 .

Lema 2.1. *Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular parametrizada por comprimento de arco, tome $s_0 \in I$. Seja c um ponto de $\mathbb{R}^2$, distinto de $\alpha(s_0)$ tal que $r = |\alpha(s_0) - c| > 0$ e seja $\gamma = \{q \in \mathbb{R}^2, \text{ tal que } |q - c| = r\}$.*

(i) *O circunferência γ tem contato de ordem pelo menos 1 com $\alpha(s)$ no ponto $\alpha(s_0)$ se, e somente se, o centro c encontra-se sobre a reta perpendicular a $\alpha'(s_0)$ em $\alpha(s_0)$.*

(ii) *Suponha que $k(s_0) \neq 0$. Então γ tem contato de ordem 2 com $\alpha(s)$ em $\alpha(s_0)$ se, e somente se, $c = \alpha(s_0) + \frac{1}{k(s_0)}t(s_0)$, e nesse caso $r = \frac{1}{|k(s_0)|}$.*

Demonstração. Suponha,

$$g(s) = |\alpha(s) - c|^2 = \langle \alpha(s) - c, \alpha(s) - c \rangle. \quad (2.1)$$

Derivando a Equação (2.1) em relação a s e aplicando no ponto s_0 , obtém-se,

$$g'(s_0) = 2\langle \alpha'(s_0), \alpha(s_0) - c \rangle = 2\langle t(s_0), \alpha(s_0) - c \rangle. \quad (2.2)$$

Segue de (2.2) que, $g'(s_0) = 0$ se, e somente se, $\langle \alpha'(s_0), \alpha(s_0) - c \rangle = 0$, isto é, que $\alpha(s_0)$ é ortogonal a $g(s)$ em $s = s_0$. Isso demonstra o item (i).

Segue do item (i), que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha(s_0) - c = \lambda t(s_0)$.

Calculando a segunda derivada da Equação (2.1) em relação a s e aplicando no ponto s_0 , obtém-se,

$$g''(s_0) = 2\langle \alpha''(s_0), \alpha(s_0) - c \rangle + 2\langle \alpha'(s_0), \alpha'(s_0) \rangle \quad (2.3)$$

Substituindo $\alpha'(s_0) = t(s_0)$, $\langle t(s_0), t(s_0) \rangle = 1$ e $\langle \alpha''(s_0), t(s_0) \rangle = k(s_0)$ em (2.3), obtém-se

$$\begin{aligned} g''(s_0) &= 2\left(\langle \alpha''(s_0), \lambda t(s_0) \rangle + \langle t(s_0), t(s_0) \rangle\right) \\ g''(s_0) &= 2(\lambda k(s_0) + 1) \end{aligned}$$

Portanto, $g''(s_0) = 2(1 + k(s_0)\lambda)$, de modo que, $g''(s_0) = 0$ se, e somente se, $\lambda = -\frac{1}{k(s_0)}$. Desta forma $r = |q - c| = |\lambda t(s_0)| = |\lambda| = \left| -\frac{1}{k(s_0)} \right| = \frac{1}{|k(s_0)|}$, provando o item (ii).

□

Corolário 1. *Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular, seja $t_0 \in I$, tal que $k(t_0) \neq 0$. Então o círculo osculador de $\alpha(t)$ no ponto $\alpha(t_0)$ é o único círculo que tem contato de ordem pelo menos 2 com $\alpha(t)$ em $\alpha(t_0)$.*

A seguir será apresentado um resultado que trata do *contato de curvas espaciais cujo traço está contido em uma esfera osculatrix*. O Teorema 2.2 a seguir, determina condições para que uma curva tenha contato de ordem pelo menos 3 com uma esfera.

Teorema 2.2. *Seja $I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada por comprimento de arco, seja $s_0 \in I$. Seja c um ponto de $\mathbb{R}^3$, distinto de $\alpha(s_0)$ tal que $r = |\alpha(s_0) - c| > 0$. Suponha que $k(s)$ e $\tau(s)$ sejam respectivamente a curvatura e a torção de α e seja $\gamma = \{q \in \mathbb{R}^3 ; |q - c| = r\}$, nessas condições tem-se:*

- (a) *A esfera γ tem contato de ordem pelo menos 1 com $\alpha(s)$ no ponto $\alpha(s_0)$ se, e somente se, o centro c está contido em uma reta perpendicular a $\alpha'(s_0)$ em $\alpha(s_0)$.*
- (b) *Suponha que $k(s_0) \neq 0$. Então γ tem contato de ordem pelo menos 2 com $\alpha(s)$ em $\alpha(s_0)$ se, e somente se,*

$$c = \alpha(s_0) + \frac{1}{k(s_0)}n(s_0) - \mu b(s_0), \forall \mu \in \mathbb{R}.$$

- (c) *suponha que $k(s_0) \neq 0$ e $\tau(s_0) \neq 0$. Então γ tem contato de ordem pelo menos 3 com $\alpha(s)$ em $\alpha(s_0)$ se, e somente se,*

$$c(s_0) = \alpha(s_0) + \frac{1}{k(s_0)}n(s_0) - \frac{k'(s_0)}{k^2(s_0)\tau(s_0)}b(s_0). \quad (2.4)$$

Demonstração. Suponha que $g(s) = |\alpha(s) - c|^2$. Pelo item (a) do lema 2.1. Obtém-se,

$$g'(s) = 2\langle \alpha'(s), \alpha(s) - c \rangle = 2\langle t(s), \alpha(s) - c \rangle,$$

de modo que $g'(s_0) = 0$ se, e somente se, $\langle \alpha'(s_0), \alpha(s) - c \rangle = 0$, o que prova o item (a). Segue de (a) que existem ϕ e $\mu \in \mathbb{R}$, tais que

$$\alpha(s_0) - c = \phi n(s_0) + \mu b(s_0). \quad (2.5)$$

Segue do item (ii) do lema 2.1, que

$$\begin{aligned} g''(s) &= 2 \left[|t(s)|^2 + t'(s)(\alpha(s) - c) \right], \\ \Rightarrow \frac{g''(s)}{2} &= 1 + k(s)n(s)[\alpha(s) - c], \end{aligned}$$

daí para $s = s_0$, obtém-se,

$$\begin{aligned} \frac{g''(s_0)}{2} &= 1 + \langle k(s_0)n(s_0), \alpha(s_0) - c \rangle \\ &= 1 + k(s_0)\langle n(s_0), \phi n(s_0) + \mu b(s_0) \rangle \\ &= 1 + \phi k(s_0) + \mu k(s_0)\langle n(s_0), b(s_0) \rangle \\ &= 1 + \phi k(s_0). \end{aligned}$$

Aqui utilizou-se do fato que $\|n(s_0)\| = 1$ e também que $n(s_0)$ é ortogonal a $b(s_0)$. Portanto, $g''(s_0) = 0$ se, e somente se, $\phi = -\frac{1}{k(s_0)}$.

Portanto, segue de (2.5) que

$$c = \alpha(s_0) - \phi n(s_0) - \mu b(s_0) = \alpha(s_0) + \frac{1}{k(s_0)}n(s_0) - \mu b(s_0),$$

e isso prova o item (b).

Para provar o item (c) usaremos o Lema 2.1. Temos que

$$\frac{g''(s)}{2} = 1 + \langle k(s)n(s), \alpha(s) - c \rangle, \quad (2.6)$$

assim, derivando a Equação (2.6) em relação a s , utilizando as fórmulas de Frenet e aplicando no ponto s_0 , obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{g'''(s)}{2} &= \langle k'(s)n(s) + k(s)n'(s), \alpha(s) - c \rangle + \langle k(s)n(s), \alpha'(s) \rangle \\ &= \langle k'(s)n(s) + k(s)(k(s)t(s) + \tau(s)b(s)), \alpha(s) - c \rangle + \langle k(s)n(s), t(s) \rangle \\ &= \langle k'(s)n(s) + k^2(s)t(s) + k(s)\tau(s)b(s), \alpha(s) - c \rangle, \end{aligned}$$

e portanto,

$$\frac{g'''(s_0)}{2} = \langle k'(s_0)n(s_0) + k^2(s_0)t(s_0) + k(s_0)\tau(s_0)b(s_0), \alpha(s_0) - c \rangle. \quad (2.7)$$

Do item (b) do teorema 2.2 segue que,

$$c(s_0) = \alpha(s_0) + \frac{1}{k(s_0)}n(s_0) - \mu b(s_0) \Leftrightarrow \alpha(s_0) - c = -\frac{1}{k(s_0)}n(s_0) + \mu b(s_0). \quad (2.8)$$

Substituindo (2.8) na Equação (2.7), obtém-se

$$\begin{aligned}
 g'''(s_0) &= 2 \left\langle k'(s_0)n(s_0) + k^2(s_0)t(s_0) + k(s_0)\tau(s_0)b(s_0), \frac{-n(s_0)}{k(s_0)} + \mu b(s_0) \right\rangle \\
 &= -2 \left(\frac{k'(s_0)n^2(s_0)}{k(s_0)} + \mu k'(s_0) \langle n(s_0), b(s_0) \rangle - \frac{k^2(s_0)}{k(s_0)} \langle t(s_0), n(s_0) \rangle \right. \\
 &\quad \left. + \mu k^2(s_0) \langle t(s_0), b(s_0) \rangle - \frac{k(s_0)\tau(s_0)}{k(s_0)} \langle b(s_0), n(s_0) \rangle + \mu k(s_0)\tau(s_0)b^2(s_0) \right) \\
 &= 2 \left(-\frac{k'(s_0)}{k(s_0)} + \mu k(s_0)\tau(s_0) \right),
 \end{aligned}$$

portanto, $\frac{g'''(s_0)}{2} = -\frac{k'(s_0)}{n(s_0)} + \mu k(s_0)\tau(s_0)$. Então $g'''(s_0) = 0$ se, e somente se,

$$\mu = \frac{k'(s_0)}{k^2(s_0)\tau(s_0)}, \quad (2.9)$$

o que prova (2.4). $\square$

Definição 18. *Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular, seja $t_0 \in I$ tal que $k(t_0) \neq 0$ e $\tau(t_0) \neq 0$. Nestas condições, segue do Teorema 2.2 que a esfera oscultriz de $\alpha(t)$ em $\alpha(t_0)$ a única esfera que tem contato de ordem pelo menos 3 com $\alpha(t)$ no ponto $\alpha(t_0)$.*

Corolário 2. *Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, uma curva regular, cuja torção e curvatura sejam não nulas em t_0 . Então a esfera oscultriz em $\alpha(t_0)$ é uma esfera de raio*

$$r = \sqrt{\frac{1}{k^2(t_0)} + \frac{[k'(t_0)]^2}{\tau^2(t_0)k^4(t_0)}} \quad (2.10)$$

e centro,

$$c(t_0) = \alpha(t_0) + \frac{1}{k(t_0)}n(t_0) - \frac{k'(t_0)}{|\alpha'(t_0)|k^2(t_0)\tau(t_0)}b(t_0). \quad (2.11)$$

Observação 4. *Nas condições do Corolário 2, se α é uma curva parametrizada por comprimento de arco, então, segue da equação (2.11) que o centro da esfera oscultriz a α em s_0 é dada por*

$$\begin{aligned}
 c(s_0) &= \alpha(s_0) + \frac{1}{k(s_0)}n(s_0) - \frac{k'(s_0)}{k(s_0)^2\tau(s_0)}b(s_0) \\
 &= \alpha(s_0) + \rho(s_0)n(s_0) - \frac{\rho'(s_0)}{\tau(s_0)}b(s_0), \text{ onde } \rho = \frac{1}{k(s_0)}.
 \end{aligned} \quad (2.12)$$

Demonstração. Seja $\beta(s)$, parametrizada por comprimento de arco e $\alpha(t)$ uma reparametrização de $\beta(s)$, tal que $\alpha(t) = \beta(s(t))$. Então $k(\beta(s(t))) = k(\alpha(t)) = k(t)$. Pela regra da cadeia obtemos que

$$k'(\beta(s(t)))\beta'(s(t))s'(t) = k'(\alpha(t)) = k'(t)$$

Como s é o parâmetro comprimento de arco, então $s(t) = \int_{t_0}^t |\alpha'(r)|dr$, e portanto, $\frac{ds}{dt} = |\alpha'(t)|$. Assim,

$$k'(\beta(s(t))) = \frac{k'(t)}{|\alpha'(t)|}. \quad (2.13)$$

Desta forma, a substituição de (2.13) na Equação (2.4) do item(c) do Teorema 2.2, garante a igualdade (2.11). A observação do Corolário 2 segue do fato de que $|\alpha'(t)| = 1$. $\square$

2.3 Evolutas de curvas espaciais

Foi visto na seção anterior que, no plano, a evoluta β de uma curva α , de curvatura não nula, é a curva determinada pelos centros dos círculos osculadores da curva α . Foi visto também que, se $\beta(s), s \in I$ é uma involuta de $\alpha(s)$ então a reta tangente à involuta β intercepta perpendicularmente a reta tangente à curva α , em qualquer valor do parâmetro s .

Nesta seção será demonstrado que não é possível generalizar o conceito de evolutas no que se refere a estas duas propriedades, ou seja, será mostrado que, definindo a evoluta de uma curva $\alpha \in \mathbb{R}^3$, de torção não nula, como o lugar geométrico dos centros de esferas osculatrizes (centros de curvaturas esféricas), a propriedade referente à ortogonalidade entre as retas tangentes não pode ser aplicada. Da mesma forma, tomando a definição de evoluta a partir da ortogonalidade entre a reta tangente à involuta e a reta tangente à evoluta em cada valor do parâmetro, a propriedade dos centros de curvaturas esféricas não pode ser aplicada. Desta forma, na presente seção, serão apresentadas duas definições de evolutas no espaço, sendo que a primeira delas está de acordo com a teoria apresentada em [8] e a segunda baseia-se na teoria apresentada em [1].

O fato exposto no parágrafo anterior torna o estudo das evolutas no espaço bem mais complexo do que o estudo de evolutas no plano. Será visto a seguir que, para que a

propriedade de ortogonalidade entre as tangentes à evoluta e à involuta seja preservada, é necessário que a evoluta de uma curva seja definida à partir da definição de sua involuta.

Primeira definição de evolutas espaciais

Os conceitos apresentados a seguir baseiam-se na referência [8].

Definição 19. *Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular. Uma involuta de α é uma curva $\bar{\alpha}(s)$ tal que, $\forall s \in I$, $\bar{\alpha}(s)$ intercepta a reta tangente a α ortogonalmente, em cada valor do parâmetro s .*

Segue da Definição 19 que, uma vez escolhida a curva α , existem infinitas involutas satisfazendo a definição. Desta forma, a seguir será obtida a família das involutas de uma curva α .

Sem perda de generalidade, podemos supor que a curva $\alpha(s)$ está parametrizada por comprimento de arco. Pela Definição 19, para cada $s \in I$, $\bar{\alpha}(s)$ pertence a uma reta tangente a α em s . Assim,

$$\bar{\alpha}(s) = \alpha(s) + \lambda(s)\alpha'(s), \quad (2.14)$$

onde $\lambda(s)$ é uma função real a valores reais. Derivando a Equação (2.14) em relação a s e usando a notação $\alpha'(s) = t(s)$, obtém-se,

$$\bar{\alpha}'(s) = t(s) + \lambda'(s)t(s) + \lambda(s)t'(s).$$

Do fato de que $\bar{\alpha}'(s)$ é ortogonal a $t(s)$, segue que $\langle t(s), t(s) \rangle + \langle \lambda'(s)t(s), t(s) \rangle + \langle \lambda t'(s), t(s) \rangle = 0$, ou seja, $1 + \lambda'(s) = 0$, e conseqüentemente,

$$\lambda'(s) = -1 \quad (2.15)$$

Aqui utilizou-se que $|t(s)| = 1$ e, portanto, $t'(s)$ é ortogonal a $t(s)$.

Integrando ambos os membros da Equação (2.15) em relação a s , obtém-se,

$$\lambda(s) = -s + c, c \in \mathbb{R}.$$

Logo, $\lambda(s) = c - s$, e portanto, segue de 2.14 que a involuta de α é dada por

$$\bar{\alpha}(s) = \alpha(s) + (c - s)t(s). \quad (2.16)$$

Desta forma, variando c no conjunto dos números reais, a Equação (2.16) descreve uma família infinita de involutas de α .

Definição 20. Se $\bar{\alpha}$ é uma involuta de α , então a curva α é uma evoluta de $\bar{\alpha}$.

No que segue será mostrado que a partir das definições 19 e 20 é possível, conhecendo-se uma involuta $\bar{\alpha}$, deduzir uma expressão para a família de evolutas de $\bar{\alpha}$.

De fato, seja $\bar{\alpha}$ uma curva parametrizada por comprimento de arco, com curvatura $\bar{k}(s)$ não nula e considere $\bar{t}, \bar{n}, \bar{b}$, o triedro de Frenet de $\bar{\alpha}$. Pretende-se obter uma curva α tal que α seja uma evoluta de $\bar{\alpha}$. Segue da Definição 20 que, para que α seja uma evoluta de $\bar{\alpha}$ é necessário que $\bar{\alpha}$ seja uma involuta de α . Também, segue da Definição 19 que para cada s , o segmento de reta determinado por $\alpha(s)$ e $\bar{\alpha}(s)$ é ortogonal a $\bar{\alpha}$ em s , ou seja, este segmento está contido no plano determinado por $\bar{n}(s)$ e $\bar{b}(s)$ (plano binormal à curva $\bar{\alpha}$ em s) e, além disso, a reta suporte deste segmento é tangente a α em s . Desta forma,

$$\alpha(s) = \bar{\alpha}(s) + \lambda(s)\bar{n}(s) + \mu(s)\bar{b}(s). \quad (2.17)$$

Derivando (2.17) em relação a s e usando as fórmulas de Frenet (1.49) para determinar $\lambda(s)$ e $\mu(s)$, obtém-se,

$$\begin{aligned} \alpha'(s) &= \bar{\alpha}'(s) + \lambda'(s)\bar{n}(s) + \lambda(s)\bar{n}'(s) + \mu'(s)\bar{b}(s) + \mu(s)\bar{b}'(s) \\ &= \bar{t}(s) + \lambda'(s)\bar{n}(s) - \lambda(s)\bar{k}(s)\bar{t}(s) - \lambda(s)\bar{\tau}(s)\bar{b}(s) + \mu'(s)\bar{b}(s) + \mu(s)\bar{\tau}(s)\bar{n}(s) \\ &= [1 - \lambda(s)\bar{k}(s)]\bar{t}(s) + [\lambda'(s) + \mu(s)\bar{\tau}(s)]\bar{n}(s) + [\mu'(s) - \lambda(s)\bar{\tau}(s)]\bar{b}(s), \end{aligned}$$

assim,

$$t(s) = \alpha'(s) = [1 - \lambda(s)\bar{k}(s)]\bar{t}(s) + [\lambda'(s) + \mu(s)\bar{\tau}(s)]\bar{n}(s) + [\mu'(s) - \lambda(s)\bar{\tau}(s)]\bar{b}(s). \quad (2.18)$$

Observe que $t(s)$ é paralelo a $\lambda(s)\bar{n}(s) + \mu(s)\bar{b}(s)$, logo, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $t(s) = c[\lambda(s)\bar{n}(s) + \mu(s)\bar{b}(s)]$. Daí, segue de 2.18 que,

$$[1 - \lambda(s)\bar{k}(s)]\bar{t}(s) + [\lambda'(s) + \mu(s)\bar{\tau}(s)]\bar{n}(s) + [\mu'(s) - \lambda(s)\bar{\tau}(s)]\bar{b}(s) = [\lambda(s)\bar{n}(s) + \mu(s)\bar{b}(s)]c. \quad (2.19)$$

Da igualdade vetorial, segue que,

$$1 - \lambda(s)\bar{k}(s) = 0, \quad (2.20)$$

$$\lambda'(s) + \mu(s)\bar{\tau}(s) = c\lambda(s), \quad (2.21)$$

$$\mu'(s) - \lambda(s)\bar{\tau}(s) = c\mu(s), \quad c \in \mathbb{R}. \quad (2.22)$$

Portanto, segue de (2.20), (2.21) e (2.22) que,

$$\lambda(s) = \frac{1}{\bar{k}(s)} \text{ e } c = \frac{\lambda'(s) + \mu(s)\bar{\tau}(s)}{\lambda(s)} = \frac{\mu'(s) - \lambda(s)\bar{\tau}(s)}{\mu(s)}$$

Daí, $(\lambda'(s) + \mu(s)\bar{\tau}(s))\mu(s) = (\mu'(s) - \lambda(s)\bar{\tau}(s))\lambda(s)$, ou seja,

$$\lambda'(s)\mu(s) + \mu^2(s)\bar{\tau}(s) = \mu'(s)\lambda(s) - \lambda^2(s)\bar{\tau}(s). \quad (2.23)$$

Antes de prosseguir vamos mostrar que

$$\frac{\mu'(s)\lambda(s) - \lambda'(s)\mu(s)}{\mu^2(s) + \lambda^2(s)} = -\frac{d}{ds} \left(\arctan \left(\frac{\lambda(s)}{\mu(s)} \right) \right). \quad (2.24)$$

De fato,

$$\begin{aligned} -\frac{d}{ds} \left(\arctan \left(\frac{\lambda(s)}{\mu(s)} \right) \right) &= -\frac{1}{1 + \left(\frac{\lambda(s)}{\mu(s)} \right)^2} \left(\frac{\lambda(s)}{\mu(s)} \right)' \\ &= -\frac{\frac{\lambda'(s)\mu(s) - \mu'(s)\lambda(s)}{\mu^2(s)}}{\frac{\mu^2(s) + \lambda^2(s)}{\mu^2(s)}} = -\frac{\lambda'(s)\mu(s) - \mu'(s)\lambda(s)}{\mu^2(s) + \lambda^2(s)}. \end{aligned}$$

Isolando $\bar{\tau}(s)$ na Equação (2.23) obtém-se,

$$\bar{\tau}(s) = \frac{\mu'(s)\lambda(s) - \lambda'(s)\mu(s)}{\mu^2(s) + \lambda^2(s)}.$$

Logo, segue de (2.24) que

$$\bar{\tau}(s) = \frac{\mu'(s)\lambda(s) - \lambda'(s)\mu(s)}{\mu^2(s) + \lambda^2(s)} = -\frac{d}{ds} \left(\arctan \left(\frac{\lambda(s)}{\mu(s)} \right) \right). \quad (2.25)$$

Integrando a Equação (2.25) em relação a s obtém-se que,

$$\begin{aligned} \int \bar{\tau}(s)ds &= -\int \frac{d}{ds} \arctan \left(\frac{\lambda(s)}{\mu(s)} \right) ds \Leftrightarrow \int \bar{\tau}(s)ds + c = -\arctan \left(\frac{\lambda(s)}{\mu(s)} \right) \\ \Leftrightarrow \frac{\lambda(s)}{\mu(s)} &= -\tan \left(\int \bar{\tau}(s)ds + c \right) \Leftrightarrow \mu(s) = -\lambda(s) \frac{1}{\tan \left(\int \bar{\tau}(s)ds + c \right)} \\ \Leftrightarrow \mu(s) &= -\frac{1}{\bar{k}(s)} \cot \left(\int \bar{\tau}(s)ds + c \right), \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Substituindo (2.26) na Equação (2.17), e restringindo convenientemente o domínio, obtém-se que

$$\alpha(s) = \bar{\alpha}(s) + \frac{1}{\bar{k}(s)}\bar{n}(s) - \frac{1}{\bar{k}(s)} \cot \left(\int \bar{\tau}(s)ds + c \right) \bar{b}(s). \quad (2.27)$$

Fazendo a constante c variar no conjunto dos números reais, obtém-se uma família infinita de evolutas de $\bar{\alpha}$ dadas pela expressão (2.27).

Segunda definição de evolutas de curvas espaciais

Os conceitos apresentados a seguir estão baseados na referência [1].

Definição 21. *Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular com curvatura e torção não nulas. A evoluta de α é a curva descrita pelos centros das esferas osculatrizes a α quando t percorre o intervalo I , cuja equação é*

$$C(t) = \alpha(t) + \frac{1}{k(t)}n(t) - \frac{k'(t)}{|\alpha'(t)|k^2(t)\tau(t)}b(t). \quad (2.28)$$

Se α é uma curva parametrizada por comprimento de arco então a evoluta de α é dada pela Equação 2.12.

Comparação entre as definições 20 e 21

O objetivo a seguir, é demonstrar que as definições 20 (a qual segue da Definição 19) e 21 não são equivalentes, uma vez que, do ponto de vista matemático, admitindo-se a Definição 21, perde-se a propriedade de ortogonalidade entre a reta tangente à involuta e a tangente à evoluta em cada valor do parâmetro. Para verificar que isto de fato ocorre, basta comparar a Equação (2.27), a qual descreve a expressão de uma evoluta obtida pela Definição 20, com a Equação (2.12), a qual define a expressão da evoluta a partir dos centros das esferas osculatrizes da curva. Para isto vamos reescrever as duas equações denotando por α uma curva cuja evoluta é β_1 na Definição 20 e β_2 na Definição 21. Desta forma obtemos de (2.27) e (2.12), respectivamente, as seguintes equações para uma involuta de α

$$\begin{aligned} \beta_1(s) &= \alpha(s) + \frac{1}{k_\alpha(s)}n_\alpha(s) - \frac{1}{k_\alpha(s)} \cot \left(\int \tau_\alpha(s)ds + c \right) b_\alpha(s). \\ \beta_2(s) &= \alpha(s) + \rho(s)n_\alpha(s) - \frac{\rho'_\alpha(s)}{\tau_\alpha(s)}b_\alpha(s). \end{aligned} \quad (2.29)$$

Derivando a a equação (2.29) em relação a s , obtém-se,

$$\beta'_2(s) = \alpha'(s) + \rho'(s)n_\alpha(s) + \rho(s)n'_\alpha(s) - \left[\frac{\rho''_\alpha(s)\tau_\alpha(s) - \rho'_\alpha(s)\tau'_\alpha(s)}{\tau_\alpha^2(s)}b_\alpha(s) + \frac{\rho'_\alpha(s)}{\tau_\alpha(s)}b'_\alpha(s) \right]. \quad (2.30)$$

Observe que, supondo $\tau_\alpha(s) \neq 0$, para que β_2 seja uma evoluta de α no sentido da Definição 20 seria necessário que $\langle \beta'_2(s), \alpha'(s) \rangle = 0$, $\forall s \in I$. No entanto, aplicando as fórmulas de Frenet (1.49) na Equação (2.30), obtém-se

$$\begin{aligned} \beta'_2(s) = & t_s(s) + \rho'_\alpha(s)n_\alpha(s) - \rho_\alpha(s)\left(\tau_\alpha(s)b_\alpha(s) - k_\alpha(s)t_\alpha(s)\right) - \\ & - \left[\frac{\rho''_\alpha(s)\tau_\alpha(s) - \rho'_\alpha(s)\tau'_\alpha(s)}{\tau_\alpha^2(s)} b_\alpha(s) + \rho'_\alpha(s)n_\alpha(s) \right] \end{aligned} \quad (2.31)$$

Segue da Equação (2.31) que,

$$\begin{aligned} \langle \beta'_2(s), \alpha'(s) \rangle = & \langle t_\alpha(s), t_\alpha(s) \rangle + \rho'_\alpha(s)\langle n_\alpha(s), t_\alpha(s) \rangle - \rho_\alpha(s)(\tau_\alpha(s)\langle b_\alpha(s), t_\alpha(s) \rangle - \\ & - k_\alpha(s)\langle t_\alpha(s), t_\alpha(s) \rangle) - \left[\frac{\rho''_\alpha(s)\tau_\alpha(s) - \rho'_\alpha(s)\tau'_\alpha(s)}{\tau_\alpha^2(s)} \langle b_\alpha(s), t_\alpha(s) \rangle - \right. \\ & \left. - \rho'_\alpha(s)\langle n_\alpha(s), t_\alpha(s) \rangle \right] = 1 - \rho_\alpha(s)k_\alpha(s). \end{aligned} \quad (2.32)$$

Portanto, $\langle \beta'_2(s), \alpha'(s) \rangle = 1 + \rho_\alpha(s)k_\alpha(s) \neq 0$, pois $\rho_\alpha(s)k_\alpha(s) \geq 0$. Segue ainda da Equação (2.31) que,

$$\begin{aligned} \langle \beta'_2(s), n_\alpha(s) \rangle = & \langle t_\alpha(s), n_\alpha(s) \rangle + \rho'_\alpha(s)\langle n_\alpha(s), n_\alpha(s) \rangle - \rho_\alpha(s)(\tau_\alpha(s)\langle b_\alpha(s), n_\alpha(s) \rangle - \\ & - k_\alpha(s)\langle t_\alpha(s), n_\alpha(s) \rangle) - \left[\frac{\rho''_\alpha(s)\tau_\alpha(s) - \rho'_\alpha(s)\tau'_\alpha(s)}{\tau_\alpha^2(s)} \langle b_\alpha(s), n_\alpha(s) \rangle - \right. \\ & \left. - \rho'_\alpha(s)\langle n_\alpha(s), n_\alpha(s) \rangle \right] = \rho'_\alpha(s) - \rho'_\alpha(s) = 0. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Portanto, $\langle \beta'_2(s), n_\alpha(s) \rangle = 0$.

Utilizou-se nas Equações (2.32) e (2.33) o fato de que $\alpha'(s) = t_\alpha(s)$, $|t_\alpha(s)| = 1$, $|n_\alpha(s)| = 1$, $\langle n_\alpha(s), t_\alpha(s) \rangle = 0$, $\langle b_\alpha(s), n_\alpha(s) \rangle = 0$, $\langle n_\alpha(s), b_\alpha(s) \rangle = 0$.

Isto implica que, para qualquer valor do parâmetro s , o vetor normal à curva α é perpendicular ao vetor tangente à curva β_2 , e portanto, o vetor tangente a $\beta_2(s)$ em s não pode ser perpendicular ao vetor tangente a α em s , $\forall s \in I$, o que contradiz a definição 19 (e portanto contraria a Definição 20).

Conclui-se portanto, que, muito embora as duas definições sejam válidas, cada uma delas generaliza um aspecto distinto da definição de *evolutas de curvas planas*, devendo o leitor estar atento a este fato para que não venha a incorrer em erros.

CAPÍTULO 3

AS TRANSFORMAÇÕES R -NORMAL ASSOCIADAS

Neste capítulo introduzimos o conceito de transformações r -normal associadas, que são, falando a grosso modo, aplicações que, a cada ponto P de uma curva λ , associa uma outra curva α , determinada pelo lugar geométrico dos pontos de interseção entre a reta normal à curva λ e a reta perpendicular a uma reta r (fixa), passando pelo ponto de interseção da tangente em P , com a reta r . Por simplicidade, são apresentados somente resultados concernentes aos casos em que a reta r coincide com o eixo Oy e o eixo Ox , respectivamente (ver Figura 3.5).

São exibidos exemplos relevantes de pares de curvas satisfazendo os conceitos de *transformação y -normal associada* e *transformação x -normal associada*, tais como tractriz $\times$ catenária; circunferência $\times$ parábola; astroide $\times$ cinturoide. O par tractriz $\times$ catenária é de grande importância para os resultados aqui apresentados, pois, como foi visto no Capítulo 2, a catenária é a *evoluta* da tractriz (e portanto, a tractriz é uma involuta da catenária), sendo esta a primeira motivação do presente trabalho, visto que a conjectura original do projeto foi a de que todo par involuta $\times$ evoluta pudesse satisfazer a propriedade de y -normal deformação. Esta conjectura não se mostrou verdadeira, porém, até agora, o único par encontrado, de curvas (λ, α) (nesta ordem) tal que α é simultaneamente a evoluta e uma y -normal deformação da curva λ , foi o par tractriz $\times$ catenária.

Neste capítulo é apresentada ainda uma segunda transformação que a cada ponto P de uma curva λ , associa uma outra curva α determinada pelo lugar geométrico dos pontos de interseção entre a reta perpendicular a uma reta r (fixa), no ponto de interseção da tangente em P com a reta r e a reta perpendicular a uma reta s (fixa), pelo ponto de interseção da tangente em P , com a reta s , com r e s sendo retas concorrentes. Neste caso também será adotada a restrição aos eixos coordenados.

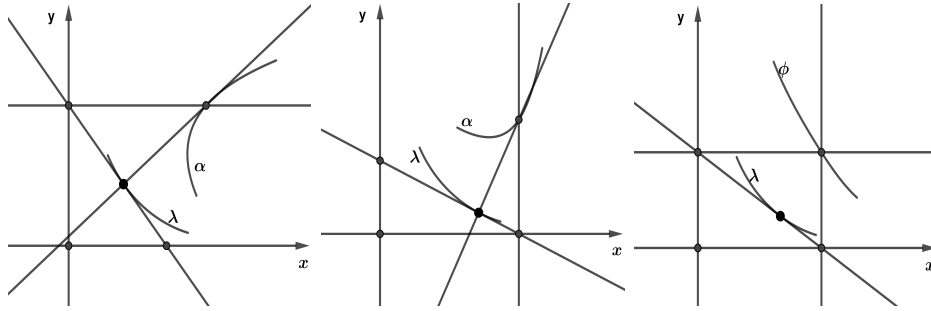


Figura 3.1: Esboço das aplicações: y-normal associada (à esquerda), x-normal associada (ao centro) e xy-associada (à direita).

Uma observação a se fazer é que ao longo do trabalho não serão consideradas curvas cujas retas tangentes não interceptem ou não sejam coincidentes com os eixos coordenados.

3.1 Família de curvas y-normal associadas

Ao longo deste capítulo I indicará um intervalo aberto de $\mathbb{R}$ e $\lambda : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva contínua, diferenciável e regular, ou quando for o caso, diferenciável e regular por partes em I , tal que

$$\lambda(u) = (x(u), y(u)), \quad \forall u \in I. \quad (3.1)$$

Vamos relembrar aqui a Definição 6:

Definição 22. *Seja A um conjunto de índices. Uma curva $\lambda : \bar{I} = [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é dita regular por partes em $I = (a, b)$ se existir uma partição finita de $\bar{I}$ em subintervalos $\bar{I}_k, k \in A$, tal que a restrição de λ a cada subintervalo aberto I_k seja regular.*

Isto é, λ será uma curva regular, exceto eventualmente nos pontos $u_k \in I$ tais que $\lambda(u_k)$ são tipo cúspide. No que segue, por simplicidade de notação, conceitos tais como vetor tangente, vetor normal e outros que demandam diferenciabilidade da função, serão definidos no intervalo aberto I , mesmo que a curva possa ser diferenciável por partes, significando que a definição é válida em todos os pontos de I , a menos, eventualmente, em finitos pontos isolados de não diferenciabilidade.

Derivando a Equação (3.1) em relação a $u \in I$, obtemos o vetor tangente a λ em u , obtém-se

$$\lambda'(u) = (x'(u), y'(u)). \quad (3.2)$$

O vetor normal à curva λ , no parâmetro u , é dado por

$$n(u) = (-y'(u), x'(u)), \quad \forall u \in I. \quad (3.3)$$

Pela Definição 7, temos que a *reta tangente à curva* λ no ponto $u = u_0$ é uma reta dada pela equação,

$$\begin{aligned} g(t) &= \lambda(u_0) + t\lambda'(u_0) \\ &= (x(u_0) + t x'(u_0), y(u_0) + t y'(u_0)), \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Fazendo u variar em I é possível determinar a família de todas as retas tangentes a λ da seguinte forma:

Seja $g_u : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma família de parametrizações que a cada $u \in I$, fixado, e a cada $t_u \in \mathbb{R}$ associa a curva $g_u(t_u)$ dada por

$$g_u(t_u) = Q_u \in Oy, \quad (3.5)$$

onde o índice u indica que t_u é o parâmetro da curva g_u para cada u fixado em I .

Pela Definição 13, temos que a *reta normal à curva* λ no ponto $u = u_0$ é uma reta dada pela equação,

$$\begin{aligned} h(t) &= \lambda(u_0) + tn(u_0) \\ &= (x(u_0) - t y'(u_0), y(u_0) + t x'(u_0)), \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

fazendo u variar em I é possível determinar a família de todas as retas normais a λ da seguinte forma:

Seja $h_u : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma função, que a cada $u \in I$, fixado, e a cada $t_u \in \mathbb{R}$, associa a curva $h_u(t_u)$ dada por

$$\begin{aligned} h_u(t_u) &= \lambda(u) + t_u n(u) \\ &= (x(u) - t_u y'(u), y(u) + t_u x'(u)), \quad t_u \in \mathbb{R} \text{ e } u \in I, \text{ fixado.} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Observação 5. *No que se segue, o intervalo considerado, será dada pelo conjunto dos pontos $t \in \mathbb{R}$, tais que a reta tangente $g(t)$ intercepta o eixo Oy .*

Seja Q_0 a interseção da reta tangente à curva λ em $u = u_0$ com o eixo Oy , isto é, $Q_0 = (0, y_{Q_0})$, em $u = u_0$. Daí, segue de (3.5) que, para todo $u \in I$, o ponto Q_u de interseção da reta tangente a λ em u com eixo Oy deve satisfazer

$$\begin{cases} 0 = x(u) + t_u x'(u), \\ y_{Q_u} = y(u) + t_u y'(u), \quad t_u \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (3.8)$$

Observe que para cada valor de $u \in I$, fixado, é obtido um ponto $Q_u = (0, y_{Q_u})$.

Desta forma, para cada u fixado, segue da primeira linha do sistema (3.8) que $x'(u) = 0$, se, e somente se, $x(u) = 0$ (pontos onde a curva λ corta o eixo Oy). Assim, para valores de $u \in I$ tais que $x'(u) \neq 0$, obtém-se

$$x(u) + t_u x'(u) = 0 \Leftrightarrow t_u = -\frac{x(u)}{x'(u)}. \quad (3.9)$$

Substituindo a Equação (3.9), na segunda linha do sistema (3.8), obtém-se para cada $u \in I$,

$$y_{Q_u} = y(u) - \left(\frac{x(u)}{x'(u)} \right) y'(u),$$

ou seja,

$$y_{Q_u} = \frac{y(u)x'(u) - x(u)y'(u)}{x'(u)} = \frac{\langle \lambda(u), n(u) \rangle}{x'(u)}, \quad x'(u) \neq 0. \quad (3.10)$$

Seja $r_u : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, uma função a valores reais, cuja imagem $r_u = r_u(t_u)$ depende do parâmetro t_u da reta normal h_u . Para $x'(u) \neq 0$, cada reta constante dada pela parametrização (r_u, y_{Q_u}) , com $r_u \in \mathbb{R}$ fica bem definida. Como pode-se visualizar na Figura 3.2

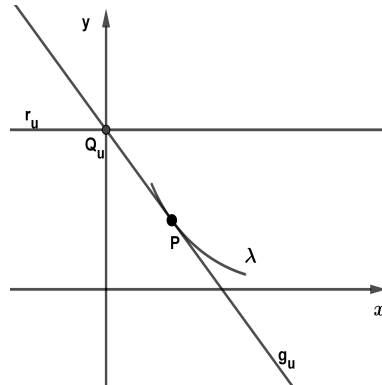


Figura 3.2: A reta tangente em P e a reta constante Q_u .

No que segue, vamos obter a expressão da curva determinada pelo lugar geométrico dos pontos de interseção entre a reta $h_u(t_u)$ e a reta (r_u, y_{Q_u}) (y_{Q_u} fixo para cada valor de u). Como pode-se visualizar na Figura 3.3.

Seja P_u o ponto dado pela interseção da reta normal $h_u(t_u)$, obtida em (3.7), com a reta (r_u, y_{Q_u}) , em cada valor do parâmetro $u \in I$. Então,

$$P_u = h_u(t_u) = (r_u, y_{Q_u})$$

se, e somente se,

$$\begin{cases} x(u) - t_u y'(u) = r_u; \\ y(u) + t_u x'(u) = \frac{y(u)x'(u) - x(u)y'(u)}{x'(u)}, \end{cases} \quad (3.11)$$

Da segunda equação do sistema (3.11), obtém-se que

$$\begin{aligned} y(u) + t_u x'(u) &= \frac{y(u)x'(u) - x(u)y'(u)}{x'(u)} \\ \Rightarrow t_u &= -\frac{x(u)y'(u)}{(x'(u))^2}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

para cada $u \in I$, fixado.

Substituindo (3.12) na primeira equação do sistema (3.11), obtém-se que

$$r_u = \frac{x(u) \left((x'(u))^2 + (y'(u))^2 \right)}{(x'(u))^2} \quad (3.13)$$

para cada $u \in I$, fixado. Observe que, se o parâmetro $u = s \in I$ da curva λ é o comprimento de arco, então $(x'(s))^2 + (y'(s))^2 = 1$, e nesse caso, $r_s = \frac{x(s)}{(x'(s))^2}$.

A curva procurada é uma curva $\alpha(u)$ cuja ordenada coincide com a ordenada y_{h_u} da reta normal h_u para cada valor do parâmetro u . Assim, substituindo (3.12) na ordenada da reta normal (3.6), fazendo u variar em I e utilizando (3.13) obtém-se uma aplicação $\bar{\alpha} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, com $\bar{\alpha}(u) = (r_u, y_{h_u})$ dada por,

$$\begin{aligned}\bar{\alpha}(u) &= (r_u, y_{h_u}) \\ &= \left(\frac{x(u)((x'(u))^2 + (y'(u))^2)}{(x'(u))^2}, y(u) + \left(-\frac{x(u)y'(u)}{(x'(u))^2} \right) x'(u) \right) \\ &= \left(x(u) + \frac{x(u)(y'(u))^2}{(x'(u))^2}, y(u) - \frac{x(u)y'(u)x'(u)}{(x'(u))^2} \right)\end{aligned}\quad (3.14)$$

Observe que $\bar{\alpha}$ é a restrição de uma curva parametrizada α a cada subintervalo aberto $I_k \subset I$. Além disso, para todo $u \in I$ tal que $x'(u) \neq 0$, a expressão (3.14) pode ser reescrita na forma

$$\bar{\alpha}(u) = \lambda(u) - \frac{x(u)y'(u)}{(x'(u))^2} n(u). \quad (3.15)$$

Observação 6. *É fácil ver que $\bar{\alpha}(u)$ fica bem definida em todo ponto de I , nos quais a curva $\lambda(u)$ não intercepta o eixo Ox .*

Se λ é regular em I , considerando que os pontos nos quais a curva $\lambda(u)$ intercepta o eixo Oy são exatamente os pontos Q_u , a curva $\alpha(u)$ fica bem definida para todo $u \in I$ se tomarmos

$$\alpha(u) = \begin{cases} \bar{\alpha}(u), & \text{se } (x(u), y(u)) \neq (0, y_{Q_u}); \\ \lambda_u, & \text{se } \lambda(u) = Q_u. \end{cases} \quad (3.16)$$

Portanto, o traço da curva α dada em (3.16) é o lugar geométrico dos pontos de interseção entre a reta normal à curva λ e a reta (r_u, y_{Q_u}) obtida quando u varia em I .

Observe que se α for parametrizada por comprimento de arco tem-se $(x'(s))^2 + (y'(s))^2 = 1$ e a expressão (3.14) se reduz a,

$$\alpha(s) = \begin{cases} \left(\frac{x(s)}{(x'(s))^2}, \frac{\langle \lambda(s), n(s) \rangle}{x'(s)} \right), & \text{se } (x(s), y(s)) \neq (0, y_{Q_s}), \\ \lambda_s, & \text{se } \lambda(s) = Q_s, \end{cases} \quad \forall s \in I.$$

Observação 7. *Observe que quando λ for regular por partes em I , é necessário ainda, definir a função nos pontos de não-regularidade. Assim, sejam $u_k, k \in A$, tais que $\lambda(u_k) =$*

$P_k; u_k \in I$, os pontos de não-regularidade de λ em I , então

$$\alpha(u) = \begin{cases} \bar{\alpha}(u) & \text{se } (x(u), y(u)) \neq (0, y_{Q_u}) \text{ e } u \neq u_k; \\ \lambda_u, & \text{se } \lambda(u) = Q_u; \\ P_k & \text{se } u = u_k. \end{cases} \quad (3.17)$$

Desta forma, de agora em diante, sempre que não houver risco de ambiguidade, tanto nos casos (3.16), quanto nos casos (3.17), nos referiremos à curva associada a uma curva λ simplesmente por α .

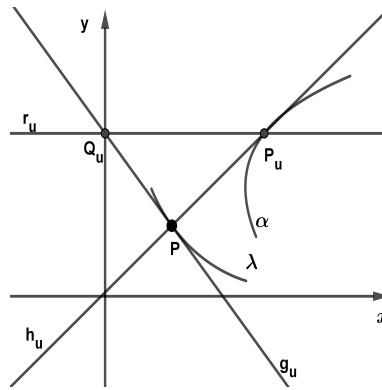


Figura 3.3: Esboço de uma transformação y -normal associada.

Definição 23. Seja $\lambda(u)$ uma curva plana definida em um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$. Seja $Q_u = (0, y_{Q_u})$ o ponto de interseção da reta tangente à curva λ , em $u \in I$, com o eixo Oy . Uma curva $\alpha(u)$ definida em I e satisfazendo (3.17) é denominada curva y -normal associada à curva λ .

Definição 24. Se uma curva α é uma curva y -normal associada a uma curva λ , então a curva λ é denominada a curva y -fletora da curva α . Nesse caso o par (λ, α) é denominado um par y -normal associado.

3.1.1 Exemplos de pares y -normal associados

Exemplo 1. O par y -normal associado *tractriz* $\times$ *catenária*

O par (λ, α) tal que $\lambda(u) = \left(\frac{r}{\cosh(u)}, r(u - \tanh(u)) \right)$ (*tractriz*) e $\alpha(u)$ tal que $\bar{\alpha}(u) = (r \cosh(u), ru)$ (*catenária*), com $r, u \in \mathbb{R}$, $r > 0$ fixado, é um par y -normal associado. De

fato, seja $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ a curva dada por

$$\lambda(u) = (x(u), y(u)) = \left(\frac{r}{\cosh(u)}, r(u - \tanh(u)) \right). \quad (3.18)$$

Derivando a Equação (3.18) em relação a u , obtém-se

$$\begin{aligned} \lambda'(u) &= \left(\frac{-r \sinh(u)}{\cosh^2(u)}, r(1 - \operatorname{sech}^2(u)) \right) \\ &= \left(-\frac{r \tanh(u)}{\cosh(u)}, r \tanh^2(u) \right) \end{aligned} \quad (3.19)$$

Aqui utilizou-se o fato de que,

$$\frac{d}{du}(\tanh(u)) = \frac{d}{du} \left(\frac{\sinh(u)}{\cosh(u)} \right) = \frac{\cosh^2(u) - \sinh^2(u)}{\cosh^2(u)} = \frac{1}{\cosh^2(u)} = \operatorname{sech}^2(u)$$

e

$$1 - \operatorname{sech}^2(u) = 1 - \frac{1}{\cosh^2(u)} = \frac{\cosh^2(u) - 1}{\cosh^2(u)} = \frac{\sinh^2(u)}{\cosh^2(u)} = \tanh^2(u).$$

O vetor normal à curva λ , no parâmetro u , é dado por

$$n(u) = \left(-r \tanh^2(u), -\frac{r \tanh(u)}{\cosh(u)} \right) \quad (3.20)$$

Utilizando as expressões (3.15) e (3.17), de uma curva y -normal associada $\alpha(u)$, segue

das Equações (3.18), (3.19) e (3.20) que

$$\begin{aligned}
 \bar{\alpha}(u) &= \left(\frac{r}{\cosh(u)}, r(u - \tanh(u)) \right) - \frac{\left(\frac{r}{\cosh(u)} \right) r \tanh^2(u)}{\frac{r^2 \tanh^2(u)}{\cosh^2(u)}} \left(-r \tanh^2(u), -\frac{r \tanh(u)}{\cosh(u)} \right) \\
 &= \left(\frac{r}{\cosh(u)}, r(u - \tanh(u)) \right) - (-r \tanh^2(u) \cosh(u), r \tanh(u)) \\
 &= \left(\frac{r}{\cosh(u)} + r \tanh^2(u) \cosh(u), r(u - \tanh(u)) + r \tanh(u) \right) \\
 &= \left(\frac{r + r \tanh^2(u) \cosh^2(u)}{\cosh(u)}, ru + r \tanh(u) - r \tanh(u) \right) \\
 &= \left(\frac{\cosh(u)(r + r \sinh^2(u))}{\cosh^2(u)}, ru \right) \\
 &= \left(\frac{r + r \sinh^2(u)}{\cosh(u)}, ru \right) \\
 &= \left(\frac{r(1 + \sinh^2(u))}{\cosh(u)}, ru \right) \\
 &= \left(\frac{r \cosh^2(u)}{\cosh(u)}, ru \right) \\
 &= (r \cosh(u), ru).
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

Aqui utilizou-se que $\tanh^2(u) \cosh^2(u) = \sinh^2(u)$ e $1 + \sinh^2(u) = \cosh^2(u)$.

Desta forma a tractriz de equação (3.18) é uma curva y -fletora da catenária de equação (3.21), e portanto, a catenária de equação (3.21) é uma curva y -normal associada à tractriz (3.18).

O par $(\lambda(u), \alpha(u))$ pode ser visualizado na Figura (3.4). Observe-se que para este par de curvas a propriedade de y -normal associação coincide com a propriedade de evoluta da curva λ , que é a ortogonalidade entre a reta normal à tractriz e a reta tangente à catenária, em cada $u \in I$.

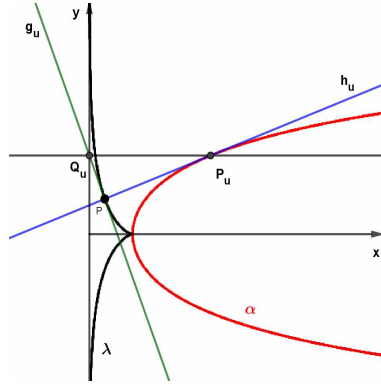


Figura 3.4: O par y -normal associado tractriz $\times$ catenária.

Exemplo 2. O par y -normal associado circunferência $\times$ parábola

O par (λ, α) tal que $\lambda(u) = (r + r \cos(u), r \sin(u))$ e $\alpha(u)$ tal que $\bar{\alpha}(u) = \left(\frac{r(\cos(u)+1)}{\sin^2(u)}, \frac{r(\cos(u)+1)}{\sin(u)} \right)$, com $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, $u \in (0, 2\pi)$, fixado, é um par y -normal associado. De fato, seja $\lambda : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva dada pela expressão

$$\lambda(u) = (r + r \cos(u), r \sin(u)), \forall r \in \mathbb{R}. \quad (3.22)$$

É fácil ver que (3.22) determina uma circunferência de raio r , tangente ao eixo Oy , com centro no eixo Ox .

Derivando a Equação (3.22) em relação a u , obtém-se

$$\lambda'(u) = (-r \sin(u), r \cos(u)). \quad (3.23)$$

O vetor normal à curva λ , no parâmetro u , é dado por

$$n(u) = (-r \cos(u), -r \sin(u)). \quad (3.24)$$

Utilizando as expressões (3.15) e (3.16) de uma curva y -normal associada $\alpha(u)$, segue de (3.22), (3.23) e (3.24) que,

$$\begin{aligned}
\bar{\alpha}(u) &= (r + r \cos(u), r \sin(u)) - \frac{(r + r \cos(u))r \cos(u)}{r^2 \sin^2(u)}(-r \cos(u), -r \sin(u)) \\
&= (r + r \cos(u), r \sin(u)) - \frac{r^2(\cos(u) + \cos^2(u))}{r^2 \sin^2(u)}(-r \cos(u), -r \sin(u)) \\
&= (r + r \cos(u), r \sin(u)) + \left(\frac{r \cos^2(u)(1 + \cos(u))}{\sin^2(u)}, \frac{r \cos(u) \sin(u)(1 + \cos(u))}{\sin^2(u)} \right) \\
&= \left(r(1 + \cos(u)) + \frac{r \cos^2(u)(1 + \cos(u))}{\sin^2(u)}, r \sin(u) + \frac{r \cos(u)(1 + \cos(u))}{\sin(u)} \right) \\
&= \left(\frac{r(1 + \cos(u))(\sin^2(u) + \cos^2(u))}{\sin^2(u)}, \frac{r(\sin^2(u) + \cos^2(u)) + r \cos(u)}{\sin(u)} \right) \\
&= \left(\frac{r(1 + \cos(u))}{\sin^2(u)}, \frac{r(1 + \cos(u))}{\sin(u)} \right) \tag{3.25}
\end{aligned}$$

Mostraremos que a Equação (3.25) é uma reparametrização da parábola $(y - y_1)^2 = 2r(x - x_1)$, onde r é a distância do foco à diretriz, e $(x_1, y_1) = \left(\frac{r}{2}, 0\right)$ é o vértice.

$$(y - y_1)^2 = 2r(x - x_1) \Leftrightarrow x = \frac{y^2 + r^2}{2r}. \tag{3.26}$$

Fazendo a mudança de variável $y = t$, obtém-se $x = \frac{t^2 + r^2}{2r}$. Assim a curva $\beta(t) = \left(\frac{t^2 + r^2}{2r}, t\right); t \in \mathbb{R}$ é uma parametrização de uma parábola com o eixo sobre o eixo Ox e vértice $\left(\frac{r}{2}, 0\right)$. De fato, tomando $t : (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $t(u) = \frac{r \cos(u) + r}{\sin(u)}$ e substituindo

em $x = \frac{t^2+r^2}{2r}$, obtém-se,

$$\begin{aligned}
 \beta(u) &= \left(\frac{\left(\frac{r \cos(u)+r}{\sin(u)} \right)^2 + r^2}{2r}, \frac{r \cos(u) + r}{\sin(u)} \right) \\
 &= \left(\frac{\frac{r^2 \cos^2(u) + 2r^2 \cos(u) + r^2}{\sin^2(u)} + r^2}{2r}, \frac{r \cos(u) + r}{\sin(u)} \right) \\
 &= \left(\frac{r^2 \cos^2(u) + 2r^2 \cos(u) + r^2 + \sin^2(u)r^2}{2r \sin^2(u)}, \frac{r \cos(u) + r}{\sin(u)} \right) \\
 &= \left(\frac{r^2(\cos^2(u) + \sin^2(u)) + 2r^2 \cos(u) + r^2}{2r \sin^2(u)}, \frac{r \cos(u) + r}{\sin(u)} \right) \\
 &= \left(\frac{2r^2 + 2r^2 \cos(u)}{2r \sin^2(u)}, \frac{r \cos(u) + r}{\sin(u)} \right) \\
 &= \left(\frac{r(\cos(u) + 1)}{\sin^2(u)}, \frac{r(\cos(u) + 1)}{\sin(u)} \right),
 \end{aligned}$$

portanto,

$$\beta(u) = \left(\frac{r(\cos(u) + 1)}{\sin^2(u)}, \frac{r(\cos(u) + 1)}{\sin(u)} \right), \text{ onde } \beta(u) = \beta(t(u)). \quad (3.27)$$

Observe que (3.27) coincide com a expressão de $\bar{\alpha}$ obtida em (3.25). Desta forma, (3.27) é uma reparametrização da parábola (3.26). Portanto, a circunferência de equação (3.22) é uma curva y -fletora da parábola de equação (3.25), e conseqüentemente, a **parábola** de equação (3.25) é uma curva y -normal associada à circunferência descrita pela equação (3.22).

O par $(\lambda(u), \alpha(u))$ pode ser visualizado na Figura 3.5.

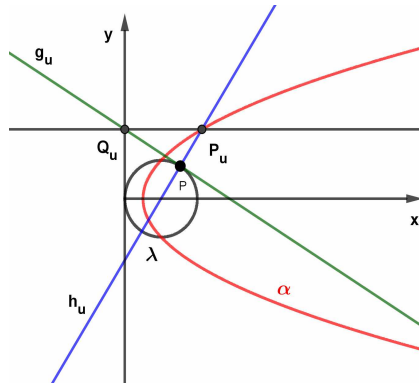


Figura 3.5: O par y -normal associado circunferência $\times$ parábola.

Exemplo 3. *Os pares y-normal associados: astroide $\times$ cinturoide e astroide $\times$ pseudo-ovaloide*

O par (λ, α) tal que $\lambda(u) = (a \cos^3(u), b \sin^3(u))$ e $\alpha(u)$ tal que,
 $\bar{\alpha}(u) = \left(\frac{\cos(u)(a^2 \cos^2(u) + b^2 \sin^2(u))}{a}, b \sin(u) \right)$, (astroide/cinturoide, vistos na Seção 1.4.1 do Capítulo 1), é um par y-normal associado. De fato, seja $\lambda : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva dada pela expressão

$$\lambda(u) = (a \cos^3(u), b \sin^3(u)), \quad \forall a \neq 0 \text{ e } b \neq 0. \quad (3.28)$$

Derivando a Equação (3.28) em relação a u , obtém-se

$$\lambda'(u) = (-3a \cos^2(u) \sin(u), 3b \sin^2(u) \cos(u)), \quad \forall a \neq 0 \text{ e } b \neq 0. \quad (3.29)$$

o vetor normal a curva λ , no parâmetro u , é dado por

$$n(u) = \left(-3b \sin^2(u) \cos(u), -3a \cos^2(u) \sin(u) \right), \quad \forall a \neq 0 \text{ e } b \neq 0. \quad (3.30)$$

Utilizando as expressões (3.15) e (3.17) de uma curva y-normal associada $\alpha(u)$, segue de (3.28), (3.29) e (3.30) que,

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}(u) &= \left(a \cos^3(u), b \sin^3(u) - \frac{a \cos^3(u)(3b \sin^2(u) \cos(u))}{9a^2 \cos^4(u) \sin^2(u)} n(u) \right) \\ &= (a \cos^3(u), b \sin^3(u)) - \frac{3ab \cos^4(u) \sin^2(u)}{9a^2 \cos^4(u) \sin^2(u)} \left(-3b \sin^2(u) \cos(u), -3a \cos^2(u) \sin(u) \right) \\ &= (a \cos^3(u), b \sin^3(u)) - \left(-\frac{b^2 \sin^2(u) \cos(u)}{a}, -b \cos^2(u) \sin(u) \right) \\ &= \left(a \cos^3(u) + \frac{b^2 \sin^2(u) \cos(u)}{a}, b \sin^3(u) + b \cos^2(u) \sin(u) \right) \\ &= \left(\frac{\cos(u)(a^2 \cos^2(u) + b^2 \sin^2(u))}{a}, b \sin(u) \right) \end{aligned} \quad (3.31)$$

Observe que a solução (3.31) é exatamente a equação paramétrica de um cinturoide, se $a < b$ ou de um pseudo-ovaloide, se $a > b$ descritos na Seção 1.4.1 do Capítulo 1 (ver Figura (1.6)). Desta forma o astroide de equação (3.28) é uma curva y-fletora do cinturoide/pseudo-ovaloide de equação (3.31), e portanto, o cinturoide/pseudo-ovaloide de equação (1.41) é uma curva y-normal associada ao astroide (3.28).

O par $(\lambda(u), \alpha(u))$ pode ser visualizado na Figura 3.6, onde estão representados o cinturoide e o astroide obtidos quando $a = 1.50$ e $b = 2.50$ (à esquerda); o pseudo-ovalóide e o astroide obtidos quando $a = 2.50$ e $b = 1.50$ (ao centro) e a circunferência obtida quando $a = b = 2.50$ (à direita).

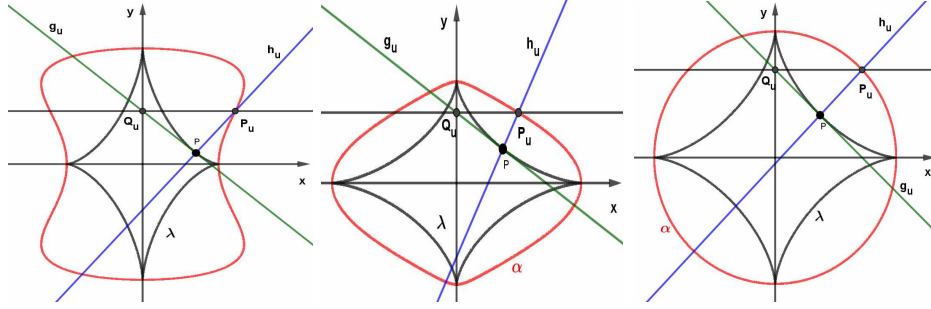


Figura 3.6: Pares y-normal associados: cinturoide e astroide; pseudo-ovalóide e astroide; circunferência.

3.2 Família de curvas x-normal associadas

Seja I um intervalo aberto de $\mathbb{R}$ e seja $\lambda : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva diferenciável, regular por partes em I , tal que

$$\lambda(u) = (x(u), y(u)), \quad \forall u \in I. \quad (3.32)$$

Considere as expressões de $\lambda'(u)$, $n(u)$, $g(t)$, $g_u(t_u)$, $h(t)$ e $h_u(t_u)$ dadas em (3.2), (3.3), (3.4), (3.5) e (3.6), (3.7) respectivamente.

Observação 8. No que se segue, o intervalo considerado, será dado pelo conjunto dos pontos $t \in \mathbb{R}$, tais que a reta tangente $g(t)$ intercepta o eixo Ox .

Seja R_0 a interseção da reta tangente à curva λ , em $u = u_0$ com o eixo Ox , isto é, $R_0 = (x_{R_0}, 0)$, em $u = u_0$. Daí, segue de (3.5) que, para todo $u \in I$, o ponto R_u de interseção da reta tangente a λ em u com eixo Ox deve satisfazer

$$\begin{cases} x_{R_u} = x(u) + t_u x'(u) \\ 0 = y(u) + t_u y'(u), \quad t_u \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (3.33)$$

Observe que para cada valor de $u \in I$ é obtido um ponto $R_u = (x_{R_u}, 0)$. Segue da segunda linha do sistema (3.33), que $y'(u) = 0$, se, e somente se, $y(u) = 0$ (pontos onde a curva λ corta o eixo Ox). Assim, para valores de u tais que $y'(u) \neq 0$, obtém-se

$$y(u) + t_u y'(u) = 0 \Leftrightarrow t_u = -\frac{y(u)}{y'(u)}. \quad (3.34)$$

Substituindo a Equação (3.34) na primeira linha do sistema (3.33), obtém-se que, para cada $u \in I$

$$x_{R_u} = x(u) + \left(-\frac{y(u)}{y'(u)}\right) x'(u). \quad (3.35)$$

Ou seja,

$$x_{R_u} = \frac{x(u)y'(u) - y(u)x'(u)}{y'(u)} = -\frac{\langle \lambda(u), n(u) \rangle}{y'(u)}, \quad y'(u) \neq 0. \quad (3.36)$$

Seja $r_u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, uma função real a valores reais, cuja imagem $r_u = r_u(t_u)$ depende do parâmetro t_u da reta normal h_u . Para cada u tal que $y'(u) \neq 0$, cada reta constante dada pela reparametrização (x_{R_u}, r_u) , com $r_u \in \mathbb{R}$ fica bem definida. Como pode-se visualizar na Figura 3.7.

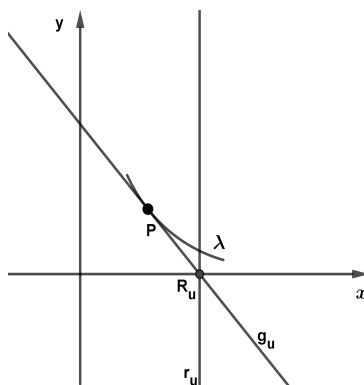


Figura 3.7: Reta constante R_u .

No que segue, vamos obter a expressão da curva determinada pelo lugar geométrico dos pontos de interseção entre a reta $h_u(t_u)$ e a reta (x_{R_u}, r_u) (x_{R_u} fixado para cada valor de u). Como pode-se visualizar na Figura 3.8

Seja P_u o ponto dado pela interseção da reta normal $h_u(t_u)$, obtida em (3.7), com a reta (x_{R_u}, r_u) , em cada valor do parâmetro u . Então,

$$P_u = h_u(t_u) = (x_{R_u}, r_u)$$

se, e somente se,

$$\begin{cases} x(u) - t_u y'(u) = \frac{x(u)y'(u) - y(u)x'(u)}{y'(u)} \\ y(u) + t_u x'(u) = r_u. \end{cases} \quad (3.37)$$

Da primeira linha do sistema (3.37), se $y'(u) \neq 0$, obtém-se que

$$\begin{aligned} x(u) - t_u y'(u) &= x(u) - \frac{y(u)x'(u)}{y'(u)} \\ \Rightarrow t_u &= \frac{y(u)x'(u)}{(y'(u))^2}, \end{aligned} \quad (3.38)$$

para cada $u \in I$, fixado.

Substituindo (3.38) na segunda linha do sistema (3.37), obtém-se que

$$r_u = \frac{y(u)((y'(u))^2 + (x'(u))^2)}{(y'(u))^2}, \quad (3.39)$$

para cada $u \in I$, fixado. Observe que, se o parâmetro $u = s \in I$, da curva λ , é o comprimento de arco, então $(x'(u))^2 + (y'(u))^2 = 1$, e nesse caso, $r_s = \frac{y(u)}{(y'(u))^2}$.

A curva procurada é uma curva $\alpha(u)$ cuja a abscissa coincide com a abscissa x_{R_u} para cada valor do parâmetro u . Assim, substituindo (3.38) na abscissa da reta normal (3.7), fazendo u variar em I e utilizando (3.39) obtém-se a aplicação $\bar{\alpha}(u) = (r_u, x_{h_u})$.

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}(u) &= \left(x(u) - \frac{y(u)x'(u)}{(y'(u))^2}y'(u), y(u) + \frac{y(u)x'(u)}{(y'(u))^2}(x'(u))^2 \right) \\ &= \left(\frac{x(u)y'(u) - y(u)x'(u)}{y'(u)}, \frac{y(u)((y'(u))^2 + (x'(u))^2)}{(y'(u))^2} \right) \end{aligned} \quad (3.40)$$

Observe que para cada u tal que $y'(u) \neq 0$, a expressão (3.40) pode ser escrita como

$$\bar{\alpha}(u) = \lambda(u) + \frac{y(u)x'(u)}{(y'(u))^2}n(u). \quad (3.41)$$

Observação 9. *É fácil ver que $\bar{\alpha}$ fica bem definida em todo ponto de I , nos quais a curva $\lambda(u)$ não intercepta o eixo Oy .*

Considerando que os pontos nos quais a curva $\lambda(u)$ intercepta o eixo Ox são exatamente os pontos R_u , a curva $\alpha(u)$ fica bem definida para todo $u \in I$ se tomarmos.

$$\alpha(u) = \begin{cases} \bar{\alpha}(u), & \text{se } (x(u), y(u)) \neq (x_{R_u}, 0), u \in I, \\ \lambda_u, & \text{se } \lambda(u) = R_u. \end{cases} \quad (3.42)$$

Portanto, o traço da curva α dada em (3.42) é o lugar geometrico dos pontos de interseção entre a reta normal à curva λ e a reta (x_{R_u}, r_u) obtida quando u varia em I .

Observe que se α está parametrizada por comprimento de arco tem-se $(x'(u))^2 + (y'(u))^2 = 1$ e a expressão (3.40) se reduz a,

$$\alpha(s) = \begin{cases} \left(-\frac{\langle \lambda(s), n(s) \rangle}{y'(s)}, \frac{y(s)}{(y'(s))^2} \right), & \text{se } (x(s), y(s)) \neq (x_{R_s}, 0), \quad s \in I, \\ \lambda_s, & \text{se } \lambda(s) = R_s. \end{cases}$$

Observação 10. Observe que quando λ for regular por partes em I , é necessário ainda, definir a função nos pontos de não-regularidade. Assim, sejam $u_k, k \in A$, tais que $\lambda(u_k) = P_k; u_k \in I$, os pontos de não-regularidade de λ em I , então

$$\alpha(u) = \begin{cases} \bar{\alpha}(u), & \text{se } (x(u), y(u)) \neq (x_{R_u}, 0) \text{ e } u \neq u_k; \\ \lambda_u, & \text{se } \lambda(u) = R_u; \\ P_k & \text{se } u = u_k. \end{cases} \quad (3.43)$$

Desta forma, de agora em diante, sempre que não houver risco de ambiguidade, tanto nos casos (3.42), quanto nos casos (3.43), nos referiremos à curva associada a uma curva λ simplesmente por α .

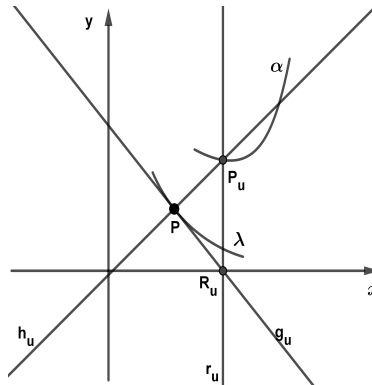


Figura 3.8: Esboço de uma transformação x -normal associada.

Definição 25. Seja $\lambda(u)$ uma curva plana definida em um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$. Seja $R_u = (x_{R_u}, 0)$ o ponto de interseção da reta tangente à curva λ , em $u \in I$, com o eixo Ox . Uma curva $\alpha(u)$ definida em I e satisfazendo (3.43) é denominada x -normal associada à curva λ .

Definição 26. Se α é uma curva x -normal associada a uma curva λ , então a curva λ é denominada a curva x -fletora da curva α . Nesse caso o par (λ, α) é denominado um par x -normal associado.

Afirmção 3.1. Um par x -normal associado não é necessariamente y -normal associado.

Para demonstrar a Afirmção 3.1 basta ver o caso em que λ é a tractriz dada em (3.18), cuja curva y -normal associada é a catenária de equação (3.21). No Exemplo 4, a seguir, fica evidente que a curva x -normal associada à esta tractriz não é uma catenária.

Exemplo 4. O par x -normal associado tractriz $\times$ curva $\bar{\alpha}(u)$.

O par (λ, α) tal que $\lambda(u) = \left(\frac{r}{\cosh(u)}, r(u - \tanh(u)) \right)$ e $\bar{\alpha}(u) = \left(\frac{ru}{\sinh(u)}, \coth^2(u)r(u - \tanh(u)) \right)$, com $r, u \in \mathbb{R}$, $r > 0$ fixado, é um par x -normal associado.

Das equações do Exemplo 1, (3.18), (3.19), (3.20) e utilizando as expressões (3.41) e (3.42), segue que

$$\bar{\alpha}(u) = \left(\frac{ru}{\sinh(u)}, r(u - \tanh(u)) \coth^2(u) \right), \quad (3.44)$$

é uma curva x -normal associada à curva $\lambda(u)$.

Desta forma, a tractriz de equação (3.18) é uma curva x -fletora da curva $\bar{\alpha}(u)$ de equação (3.44), e portanto, a curva $\bar{\alpha}(u)$ de equação (3.44) é uma curva x -normal associada à tractriz de equação (3.18). O par $(\lambda(u), \alpha(u))$ pode ser visualizado na Figura 3.9. É fácil ver que a curva α não é uma catenária.

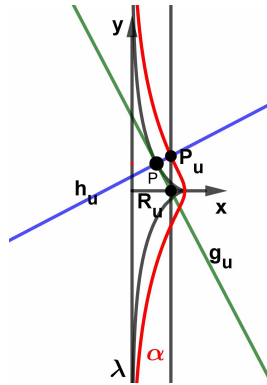


Figura 3.9: Uma tractriz e a respectiva curva $\bar{\alpha}$.

Exemplo 5. O par x -normal associado astroide $\times$ pseudo-ovalode/cinturoide.

O par (λ, α) tal que $\lambda(u) = (a \cos^3(u), b \sin^3(u))$ (astroide de equação (3.28)) e $\alpha(u) = \left(a \cos(u), \frac{\sin(u)(b^2 \sin^2(u) + a^2 \cos^2(u))}{b} \right)$, com $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (pseudo-ovalode/cinturoide de equação (1.41)), é um par x -normal associado.

Basta verificar que partir das equações do Exemplo 3, (3.28), (3.29) e (3.30), e utilizando as expressões (3.41) e (3.42), obtém-se a curva x -normal associada $\alpha(u)$ dada por,

$$\alpha(u) = \left(a \cos(u), \frac{\sin(u)(b^2 \sin^2(u) + a^2 \cos^2(u))}{b} \right) \quad (3.45)$$

Desta forma o astroide de equação (3.28) é o traço de uma curva x -fletora do cinturoide de expressões (3.45) e (1.41), e portanto, o cinturoide de expressões (3.45) e (1.41) é uma curva x -normal associada ao astroide de equação (3.28). O par $(\lambda(u), \alpha(u))$ pode ser visualizado na Figura 3.10, onde à esquerda estão representados o pseudo-ovalode e o astroide obtidos quando $a = 1.50$ e $b = 2.50$; ao centro o cinturoide e o astroide obtidos quando $a = 2.50$ e $b = 1.50$ e à direita a circunferência e o astroide obtidos quando $a = b = 2.50$. As computações algébricas ficam a cargo do leitor.

Este exemplo é interessante devido ao fato de que, tomando λ como sendo o astroide de equação (3.28), para $a < b$ obtém-se como curva y -normal associada um cinturoide e como curva x -normal associada um pseudo-ovalode (veja o Exemplo 3). Por outro lado, tomando $a > b$, obtém-se como curva y -normal associada um pseudo-ovalode e como curva x -normal associada um cinturoide.

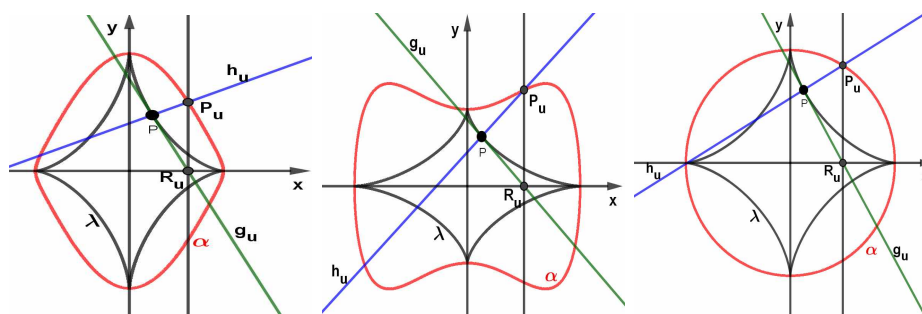


Figura 3.10: Pares x -normal associados: pseudo-ovalode e astroide; cinturoide e astroide; circunferência e astroide.

Um importante resultado

Afirmção 3.2. *Se (ξ, η) é um par y -normal associado (respectivamente, x -normal associado), o par (η, ξ) , não é necessariamente y -normal associado (respectivamente, x -normal associado).*

Demonstração. Para demonstrar a Afirmção 3.2 basta exibir um contra exemplo. Tome o par (η, ξ) onde $\eta(u) = (r \cosh(u), ru)$ e $\xi(u) = \left(\frac{r}{\cosh(u)}, r(u - \tanh(u))\right)$ Catenária e tractriz, respectivamente. Vamos mostrar que a curva y -normal associada à catenária $\eta(u)$ não é a tractriz $\xi(u)$.

De fato, utilizando as expressões (3.15) e (3.16) para $\lambda(u) = \eta(u)$. Segue que

$$\begin{aligned}
 \bar{\alpha}(u) &= (r \cosh(u), ru) - \frac{r^2 \cosh(u)}{r^2 \sinh^2(u)}(-r, r \sinh(u)) \\
 &= (r \cosh(u), ru) - \left(-\frac{r \cosh(u)}{\sinh^2(u)}, \frac{r \cosh(u)}{\sinh(u)}\right) \\
 &= \left(r \cosh(u) + \frac{r \cosh(u)}{\sinh^2(u)}, ru - \frac{r \cosh(u)}{\sinh(u)}\right) \\
 &= \left(\frac{r \cosh(u)(\sinh^2(u) + 1)}{\sinh^2(u)}, \frac{r(u \sinh(u) - \cosh(u))}{\sinh(u)}\right) \\
 &= \left(\frac{r \cosh^3(u)}{\sinh^2(u)}, \frac{r(u \sinh(u) - \cosh(u))}{\sinh(u)}\right)
 \end{aligned} \tag{3.46}$$

Observe que a expressão (3.46) difere da expressão da curva $\xi(u)$, pois

$$\begin{aligned}
 \frac{r}{\cosh(u)} &= \frac{r \cosh^3(u)}{\sinh^2(u)} \\
 &\Leftrightarrow \sinh^2(u) = \cosh^4(u) \\
 &\Leftrightarrow \cosh^2(u) = \tanh^2(u), \quad \forall u \in I - \{0\},
 \end{aligned}$$

como a expressão, $\cosh^2(u) \neq \tanh^2(u)$, $\forall u \in I$ então $\eta(u) \neq \xi(u)$. Ou seja, a curva ξ não é uma curva y -normal associada à curva η . $\square$

3.3 Família de curvas xy -associadas

Seja I um intervalo aberto de $\mathbb{R}$ e seja $\lambda : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva diferenciável, regular por partes em I , tal que

$$\lambda(u) = (x(u), y(u)), \quad \forall u \in I. \quad (3.47)$$

Observação 11. *No que se segue, o intervalo considerado, será dado pelo conjunto de pontos $t \in \mathbb{R}$, tais que a reta tangente $g(t)$ intercepta os eixos Ox e Oy .*

Seja R_0 a interseção da reta tangente à curva λ , em $u = u_0$ com o eixo Ox , isto é, $R_0 = (x_{R_0}, 0)$. Daí, segue de (3.36) que, para todo $u \in I$, a abscissa do ponto R_u de interseção da reta tangente a λ em u com eixo Ox deve satisfazer

$$x_{R_u} = x(u) + \left(-\frac{y(u)}{y'(u)} \right) x'(u),$$

ou seja,

$$x_{R_u} = \frac{x(u)y'(u) - y(u)x'(u)}{y'(u)} = -\frac{\langle \lambda(u), n(u) \rangle}{y'(u)}, \quad y'(u) \neq 0. \quad (3.48)$$

Seja Q_0 a interseção da reta tangente à curva λ em $u = u_0$ com o eixo Oy , isto é, $Q_0 = (0, y_{Q_0})$, em $u = u_0$. Daí, segue de (3.5) que, para todo $u \in I$, a abscissa do ponto Q_u de interseção da reta tangente a λ em u com eixo Oy deve satisfazer

$$y_{Q_u} = y(u) - \left(\frac{x(u)}{x'(u)} \right) y'(u),$$

ou seja,

$$y_{Q_u} = \frac{y(u)x'(u) - x(u)y'(u)}{x'(u)} = \frac{\langle \lambda(u), n(u) \rangle}{x'(u)}, \quad x'(u) \neq 0. \quad (3.49)$$

Para cada $u \in I$ vamos obter a expressão da curva determinada pelo lugar geométrico dos pontos de interseção entre as retas constantes $r(u) = (x_{R_u}, 0)$ e $s(u) = (0, y_{Q_u})$. Como pode-se visualizar na Figura 3.11 A curva procurada é uma curva $\phi(u)$ cuja abscissa coincide com x_{R_u} e a ordenada coincide com y_{Q_u} , para cada valor do parâmetro u . Desta forma, a aplicação $\bar{\phi}(u) = (x_{R_u}, y_{Q_u})$ é dada por,

$$\begin{aligned}\bar{\phi}(u) &= \left(\frac{x(u)y'(u) - y(u)x'(u)}{y'(u)}, \frac{y(u)x'(u) - x(u)y'(u)}{x'(u)} \right) \\ &= \left(-\frac{\langle \lambda(u), n(u) \rangle}{y'(u)}, \frac{\langle \lambda(u), n(u) \rangle}{x'(u)} \right)\end{aligned}\quad (3.50)$$

Observação 12. Observe que se λ é uma curva regular por partes em I , então $(x'(u), y'(u)) \neq 0$, onde 0 é vetor identicamente nulo de $\mathbb{R}^2$. Porém, podem ocorrer os casos $(0, y'(u))$ e $(x'(u), 0)$. Note que pelas observações 6 e 9 estas duas situações só podem ocorrer nos pontos em que a curva intercepta os eixos Oy e Ox , respectivamente. Daí, tomando $u_k, k \in A$, tais que $\lambda(u_k) = P_k; u_k \in I$, os pontos de não-regularidade de λ em I , então a curva $\phi(u)$ fica bem definida para todo $u \in I$, se tomarmos

$$\Phi(u) = \begin{cases} \bar{\phi}(u), & \text{se } (x(u), y(u)) \neq (0, y_{Q_u}) \text{ ou } (x(u), y(u)) \neq (x_{R_u}, 0), \\ \lambda_u, & \text{se } \lambda(u) = Q_u \text{ ou } \lambda_u, \text{ se } \lambda(u) = R_u. \\ P_k, & \text{se } u = u_k. \end{cases}\quad (3.51)$$

Definição 27. Seja $\lambda(u)$ uma curva plana, regular por partes em um intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Sejam $R_u = (x_{R_u}, 0)$ e $Q_u = (0, y_{Q_u})$ os pontos de interseção da reta tangente à curva λ , em $u \in I$, com os eixos Ox e Oy , respectivamente. Uma curva $\phi(u)$ definida em I satisfazendo (3.51) é denominada curva xy -associada à curva λ .

Definição 28. Se ϕ é uma curva xy -associada a uma curva λ , então a curva λ é denominada xy -fletora da curva ϕ . Nesse caso o par (λ, ϕ) é denominado um par xy -associado.

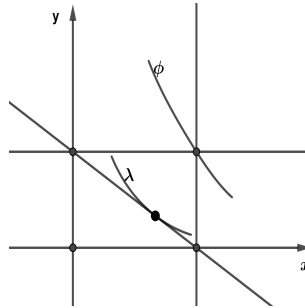


Figura 3.11: Esboço de uma curva xy -associada.

3.3.1 Exemplos de pares xy -associados

Exemplo 6. *O par xy -associado astroide $\times$ elipse.*

O par (λ, ϕ) tal que $\lambda(u) = (a \cos^3(u), b \sin^3(u))$ astroide e $\bar{\phi}(u) = (a \cos(u), b \sin(u))$, com $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (elipse), é um par xy -associado.

Segue das equações do Exemplo 3, (3.28), (3.29), (3.30), e utilizando as expressões (3.50) e (3.51), que

$$\begin{aligned}
 \bar{\phi}(u) &= \left(\frac{a \cos^3(u)(3b \sin^2(u) \cos(u)) - b \sin^3(u)(-3a \cos^2(u) \sin(u))}{3b \sin^2(u) \cos(u)}, \right. \\
 &\quad \left. \frac{b \sin^3(u)(-3a \cos^2(u) \sin(u)) - a \cos^3(u)(3b \sin^2(u) \cos(u))}{-3a \cos^2(u) \sin(u)} \right) \\
 &= \left(\frac{3ab \cos^4(u) \sin^2(u) + 3ab \sin^4(u) \cos^2(u)}{3b \sin^2(u) \cos(u)}, \right. \\
 &\quad \left. \frac{-3ab \sin^4(u) \cos(u) - 3ab \cos^4(u) \sin^2(u)}{-3a \cos^2(u) \sin(u)} \right) \\
 &= \left(\frac{3b \sin^2(u) \cos(u) (a \cos^3(u) + a \sin^2(u) \cos(u))}{3b \sin^2(u) \cos(u)}, \right. \\
 &\quad \left. \frac{-3a \cos^2(u) \sin(u) (b \sin^3(u) + b \cos^2(u) \sin(u))}{-3a \cos^2(u) \sin(u)} \right) \\
 &= \left(a \cos(u) (\cos^2(u) + \sin^2(u)), b \sin(u) (\sin^2(u) + \cos^2(u)) \right) \\
 &= (a \cos(u), b \sin(u))
 \end{aligned} \tag{3.52}$$

Desta forma, o astroide de equação (3.28) é uma curva xy -fletora da elipse $\bar{\phi}(u)$ de equação (3.52). O par $(\lambda(u), \phi(u))$ pode ser visualizado na Figura 3.12, onde à esquerda estão representados a elipse e o astroide obtidos quando $a = 1.50$ e $b = 2.50$; ao centro a elipse e o astroide obtidos quando $a = 2.50$ e $b = 1.50$ e à direita a circunferência e o astroide obtidos quando $a = b = 2.50$.

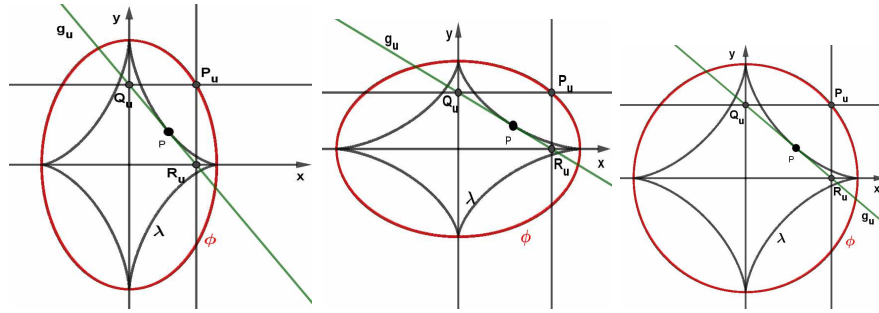


Figura 3.12: Pares xy-associados: elipse e astroide com $a < b$; elipse e astroide com $a > b$; circunferência e astroide ($a = b$).

Tendo em vista o Exemplo 6 e denotando por *diâmetro maior* e *diâmetro menor* os segmentos unindo os pontos de cúspide (simétricos em relação ao centro) de um astroide, podemos enunciar as seguintes proposições:

Proposição 8. *A curva cujo traço é um astroide de diâmetro maior a e diâmetro menor b , inscrito em uma elipse de eixo maior a e eixo menor b , é a curva xy-fletora da referida elipse.*

Proposição 9. *Um par de curvas λ, ϕ onde λ é um astroide de diâmetros $a = b$ e Φ uma circunferência de raio a é simultâneamente y-normal associado, x-normal associado e xy-associado.*

A demonstração segue dos Exemplos 3, 5 e 6.

Exemplo 7. *um par (λ, ϕ) tal que $\lambda(u) = \left(\frac{r}{\cosh(u)}, r(u - \tanh(u))\right)$ e $\bar{\phi}(u) = \left(\frac{ru}{\sinh(u)}, ru\right)$, com $r, u \in \mathbb{R}$, $r > 0$ fixado, é um par xy-associado.*

Segue das equações (3.18), (3.19), (3.20) do Exemplo 1, e das as expressões (3.50) e

(3.51), que

$$\begin{aligned}
 \bar{\phi}(u) &= \left(\frac{\frac{r}{\cosh(u)}(r \tanh^2(u))^2 - (ru - r \tanh(u)) \left(-\frac{\tanh(u)r}{\cosh(u)} \right)}{r \tanh^2(u)}, \right. \\
 &\quad \left. \frac{(ru - r \tanh(u)) \left(-\frac{\tanh(u)r}{\cosh(u)} \right) - \frac{r}{\cosh(u)} r \tanh^2(u)}{\left(-\frac{\tanh(u)r}{\cosh(u)} \right)} \right) \\
 &= \left(\frac{\frac{r^2 \tanh^2(u)}{\cosh(u)} + \frac{r^2 u \tanh(u) - r^2 \tanh^2(u)}{\cosh(u)}}{r \tanh^2(u)}, \frac{\frac{-r^2 u \tanh(u) + r^2 \tanh^2(u)}{\cosh(u)} - \frac{r^2 \tanh^2(u)}{\cosh(u)}}{\left(-\frac{\tanh(u)r}{\cosh(u)} \right)} \right) \\
 &= \left(\frac{r^2 u \tanh(u)}{r \cosh(u) \tanh^2(u)}, -\frac{r^2 u \tanh(u)}{\cosh(u)} \left(-\frac{\cosh(u)}{\tanh(u)r} \right) \right) \\
 &= \left(\frac{ru}{\cosh(u) \tanh(u)}, ru \right) \\
 &= \left(\frac{ru}{\sinh(u)}, ru \right)
 \end{aligned} \tag{3.53}$$

Desta forma, a tractriz de equação (3.18) é uma curva xy -associada à curva $\bar{\phi}(u)$ de equação (3.53). O par $(\lambda(u), \phi(u))$ pode ser visualizado na Figura 3.13.

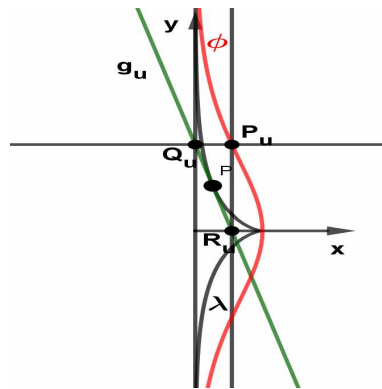


Figura 3.13: Uma tractriz e a respectiva curva $\bar{\phi}(u)$.

Exemplo 8. O par (λ, ϕ) tal que $\lambda(u) = ((r + r \cos(u)), r \sin(u))$ e

$\bar{\phi}(u) = \left(\frac{r(\cos(u)+1)}{\cos(u)}, \frac{r(\cos(u)+1)}{\sin(u)} \right)$, com $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$ fixado, é um par xy -associado.

Segue das equações do Exemplo 2, (3.22), (3.23), (3.24), e utilizando as expressões

(3.50) e (3.51), que

$$\begin{aligned}
 \bar{\phi}(u) &= \left(\frac{(r + r \cos(u))(r \cos(u)) - (r \sin(u))(-r \sin(u))}{r \cos(u)}, \right. \\
 &\quad \left. \frac{r \sin(u)(-r \sin(u)) - (r + r \cos(u))r \cos(u)}{-r \sin(u)} \right) \\
 &= \left(\frac{r^2 \cos(u) + r^2 \cos^2(u) + r^2 \sin^2(u)}{r \cos(u)}, \frac{-r^2 \sin^2(u) - r^2 \cos(u) - r^2 \cos^2(u)}{-r \sin(u)} \right) \\
 &= \left(\frac{r^2 (\cos(u) + (\cos^2(u) + \sin^2(u)))}{r \cos(u)}, \frac{-r^2 (\cos(u) + (\sin^2(u) + \cos^2(u)))}{-r \sin(u)} \right) \\
 &= \left(\frac{r(\cos(u) + 1)}{\cos(u)}, \frac{r(\cos(u) + 1)}{\sin(u)} \right), \tag{3.54}
 \end{aligned}$$

tal que $u \neq (1+k)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{N}$. Desta forma, a circunferência de equação (3.22), restrita aos intervalos considerados, é uma curva xy -associada à curva $\bar{\phi}(u)$ de equação (3.54). O par $(\lambda(u), \phi(u))$ pode ser visualizado na Figura 3.14.

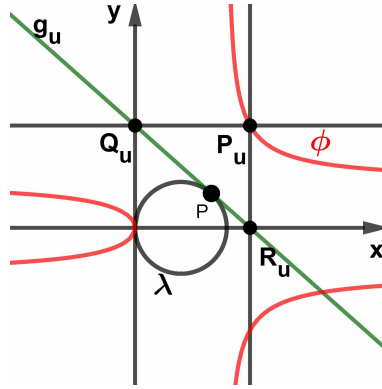


Figura 3.14: Uma circunferência com centro no eixo Ox tangente ao eixo Oy e a respectiva $\bar{\phi}(u)$.

Observação 13. Como pode ser observado na Figura (3.14), pode ocorrer que uma curva α , y -normal associada (respec, x -normal associada) ou uma curva ϕ xy -associada de uma curva λ , não seja contínua em todo o domínio da curva λ .

Por isso é importante definir convenientemente os intervalos de continuidade da curva α (ou ϕ).

3.4 y -normal deformação e x -normal deformação

Nesta seção, será mostrado que, se um par de curvas (λ, α) é um par y -normal associado (respec, x -normal associado), então a curva λ pode, restringindo-se convenientemente os domínios de λ e α , ser deformada na curva α e vice-versa, de uma forma muito especial.

3.4.1 y -normal deformação

É fato conhecido que uma curva contínua em $\mathbb{R}^2$ pode ser continuamente deformada em qualquer outra curva contínua de $\mathbb{R}^2$. Porém, estamos interessados em definir uma deformação em particular, a qual é obtida por uma ação perpendicular, à curva, em cada ponto, de forma que esta ação depende também de uma direção ortogonal ao eixo Oy (Ox , respec.).

Seja $\lambda : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, uma curva regular por partes em I .

Defina duas famílias de aplicações $\omega, \gamma : \{I\} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ que a cada valor de $u \in I$, associa as curvas $\omega_u, \gamma_u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, tais que

$$\omega_u(n) = \begin{cases} \bar{\omega}_u(n) & \text{se } (x(u), y(u)) \neq (0, y_{Q_u}) \text{ e } u \neq u_k; \\ \lambda_u, & \text{se } \lambda(u) = Q_u; \\ P_k & \text{se } u = u_k, \end{cases} \quad (3.55)$$

e

$$\gamma_u(n) = \begin{cases} \bar{\gamma}_u(n) & \text{se } (x(u), y(u)) \neq (0, y_{Q_u}); \text{ e } u \neq u_k; \\ \lambda_u, & \text{se } \lambda(u) = Q_u; \\ P_k & \text{se } u = u_k, \end{cases} \quad (3.56)$$

onde $u_k, k \in A$, tais que $\lambda(u_k) = P_k$; $u_k \in I$, são os possíveis pontos de não-regularidade de λ em I , e $\bar{\omega}_u(n)$ e $\bar{\gamma}_u(n)$ satisfazem,

$$\bar{\omega}_u(n) = \lambda(u) - \frac{(2^n - 1) x(u) y'(u)}{2^n (x'(u))^2} n(u). \quad (3.57)$$

e

$$\bar{\gamma}_u(n) = \lambda(u) - \frac{1}{2^n} \frac{x(u) y'(u)}{(x'(u))^2} n(u). \quad (3.58)$$

Aqui $(x(u), y(u))$ são as funções coordenadas da função λ e $(x'(u), y'(u))$ são as componentes do vetor tangente à curva λ em $u \in I$.

Observe que, calculando $\lim_{n \rightarrow 0} \bar{\omega}_u(n)$, obtém-se a curva $\lambda(u)$ dada em (3.1). De fato,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow 0} \bar{\omega}_u(n) &= \lim_{n \rightarrow 0} \left(\lambda(u) - \frac{(2^n - 1)}{2^n} \frac{x(u)y'(u)}{(x'(u))^2} n(u) \right) \\ &= (x(u), y(u)) = \lambda(u). \end{aligned} \quad (3.59)$$

Aqui utilizou-se que $\lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{2^n} = 1$.

Note que no caso em que a curva λ intercepta o eixo Oy no ponto $(0, y_{Q_u})$, cada curva da família $\bar{\omega}_u(n)$ também intercepta o eixo Oy neste mesmo ponto (ver Figura (??)).

Agora, fazendo o processo inverso, isto é, calculando $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\omega}_u(n)$, obtém-se a curva α dada por (3.16). De fato,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\omega}_u(n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lambda(u) - \frac{(2^n - 1)}{2^n} \frac{x(u)y'(u)}{(x'(u))^2} n(u) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lambda(u) - \frac{2^n x(u)y'(u)}{2^n (x'(u))^2} n(u) + \frac{1}{2^n} \frac{x(u)y'(u)}{(x'(u))^2} n(u) \right) \\ &= \lambda(u) - \frac{x(u)y'(u)}{(x'(u))^2} n(u) = \bar{\alpha}(u). \end{aligned} \quad (3.60)$$

Aqui utilizou-se que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$.

Por outro lado, calculando $\lim_{n \rightarrow 0} \bar{\gamma}_u(n)$, obtém-se a curva $\bar{\alpha}$ dada em (3.15). De fato,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow 0} \bar{\gamma}_u(n) &= \lim_{n \rightarrow 0} \left(\lambda(u) - \frac{1}{2^n} \frac{x(u)y'(u)}{(x'(u))^2} n(u) \right) \\ &= \lambda(u) - \frac{x(u)y'(u)}{(x'(u))^2} n(u) = \bar{\alpha}(u), \end{aligned} \quad (3.61)$$

$\forall u$, tal que, $x'(u) \neq 0$.

Aqui utilizou-se que $\lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{2^n} = 1$.

Quando a curva λ está parametrizada por comprimento de arco, tem-se $\lim_{n \rightarrow 0} \bar{\gamma}_u(n)$ é dado por

$$\lim_{n \rightarrow 0} \bar{\gamma}_u(n) = \bar{\alpha}(s) = \left(\frac{x(s)}{(x'(s))^2}, \frac{\langle \lambda(s), n(s) \rangle}{x'(s)} \right),$$

$\forall s$, tal que, $x'(s) \neq 0$.

Agora, calculando $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\gamma}_u(n)$, obtém-se a curva $\lambda(u)$ dada em (3.1). De fato,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\gamma}_u(n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lambda(u) - \frac{1}{2^n} \frac{x(u)y'(u)}{(x'(u))^2} n(u) \right) \\ &= (x(u), y(u)) = \lambda(u). \end{aligned} \quad (3.62)$$

Aqui utilizou-se que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$.

Definição 29. *Sejam $\lambda, \alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ duas curvas regulares por partes definidas em um aberto I de $\mathbb{R}$ tais que $\lambda(u) = (x(u), y(u))$, $u \in I$. Sejam $\omega, \gamma : \{I\} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, duas famílias de curvas tais que, para cada $n \in \mathbb{R}$ tem-se $\lim_{n \rightarrow 0} \bar{\omega}_u(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\gamma}_u(n) = \lambda(u)$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\omega}_u(n) = \lim_{n \rightarrow 0} \bar{\gamma}_u(n) = \bar{\alpha}(u)$, onde as curvas $\omega_u(n)$ satisfazem (3.55) e as curvas $\gamma_u(n)$ satisfazem (3.56). Nessas condições, diz-se que existe uma y -normal deformação entre as curvas λ e α .*

Diante do exposto até aqui, podemos enunciar a seguinte Proposição:

Proposição 10. *Se duas curvas planas λ e α formam um par y -normal associado, então existe uma y -normal deformação entre as curvas λ e α .*

Demonstração. Segue imediato de (3.59), (3.60), (3.61) e (3.62). $\square$

A seguir a Proposição 10 será verificada para os pares y -normal associados: tractriz $\times$ catenária, circunferência $\times$ parábola e astroide $\times$ cinturoide.

Exemplo 9. *y -normal deformação de uma tractriz em uma catenária. Utilizando a Equação (3.57) segue que,*

$$\bar{\omega}_u(n) = \lambda(u) - \frac{(2^n - 1)x(u)y'(u)}{2^n(x'(u))^2} n(u)$$

Utilizando as equações (3.18), (3.19) e (3.20), as quais fornecem, respectivamente a equação de uma tractriz e as funções coordenadas dos vetores tangente e normal à tractriz no parâmetro u , obtém-se

$$\bar{\omega}_u(u) = \left(\frac{r}{\cosh(u)}, r(u - \tanh(u)) \right) - \frac{(2^n - 1) \left(\frac{r}{\cosh(u)} \right) r \tanh^2(u)}{2^n \frac{r^2 \tanh^2(u)}{\cosh^2(u)}} n(u) \quad (3.63)$$

Agora, calculando $\lim_{n \rightarrow 0} \bar{\omega}_u(n)$, obtém-se

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow 0} \bar{\omega}_u(n) \\ &= \lim_{n \rightarrow 0} \left(\left(\frac{r}{\cosh(u)}, r(u - \tanh(u)) \right) - \frac{(2^n - 1) \left(\frac{r}{\cosh(u)} \right) r \tanh^2(u)}{2^n \frac{r^2 \tanh^2(u)}{\cosh^2(u)}} n(u) \right) \\ &= \left(\frac{r}{\cosh(u)}, r(u - \tanh(u)) \right). \end{aligned}$$

Por outro lado, calculando $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\omega}_u(n)$, obtém-se uma catenária de equação (3.21).

De fato,

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\omega}_u(n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{r}{\cosh(u)}, r(u - \tanh(u)) \right) - \frac{(2^n - 1) \left(\frac{r}{\cosh(u)} \right) r \tanh^2(u)}{2^n \frac{r^2 \tanh^2(u)}{\cosh^2(u)}} n(u) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{r}{\cosh(u)}, r(u - \tanh(u)) \right) - \frac{2^n r^2 \tanh^2(u)}{\cosh(u)} \frac{\cosh^2(u)}{2^n r^2 \tanh^2(u)} n(u) + \right. \\ & \quad \left. + \frac{r^2 \tanh^2(u)}{\cosh(u)} \frac{\cosh(u)}{r^2 \tanh^2(u)} \frac{1}{2^n} n(u) \right) \\ &= \left(\left(\frac{r}{\cosh(u)}, r(u - \tanh(u)) \right) - \cosh(u) \left(-r \tanh^2(u), -\frac{r \tanh(u)}{\cosh(u)} \right) \right) \\ &= \left(\frac{r}{\cosh(u)} + r \tanh^2(u) \cosh(u), ru - r \tanh(u) + r \tanh(u) \right) \\ &= \left(\frac{r + r \tanh^2(u) \cosh^2(u)}{\cosh(u)}, ru \right) \\ &= \left(\frac{r(1 + \sinh^2(u))}{\cosh(u)}, ru \right) \\ &= (r \cosh(u), ru), \end{aligned}$$

Aqui utilizou-se que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$, $\tanh^2(u) \cosh^2(u) = \sinh^2(u)$ e $1 + \sinh^2(u) = \cosh^2(u)$.

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\bar{\gamma}_u(n) &= \lambda(u) - \frac{1}{2^n} \frac{x(u)y'(u)}{(x'(u))^2} n(u) \\ &= \left(\frac{r(2^n + \sinh^2(u))}{2^n \cosh(u)}, \frac{r(2^n u - (2^n - 1) \tanh(u))}{2^n} \right) \\ &= \left(\frac{r}{\cosh(u)} + \frac{r(\sinh^2(u))}{2^n \cosh(u)}, ru - \frac{r((2^n - 1) \tanh(u))}{2^n} \right)\end{aligned}$$

Daí

$$\lim_{n \rightarrow 0} \bar{\gamma}_u(n) = (r \cosh(u), ru)$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\gamma}_u(n) = \left(\frac{r}{\cosh(u)}, r(u - \tanh(u)) \right).$$

Assim, calculando $\lim_{n \rightarrow 0} \bar{\gamma}_u(n)$, obtém-se a catenária de equação (3.21) e calculando $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\gamma}_u(n)$, obtém-se a tractriz de equação (3.18). As curvas intermediárias da deformação, obtidas pela variação do número real positivo n estão representadas nas Figuras (3.15) e (3.16). Portanto, existe uma y -normal deformação entre a catenária de equação (3.21) e a tractriz de equação (3.18).

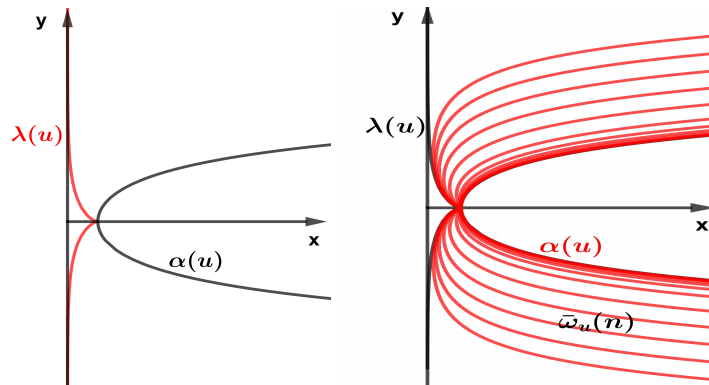


Figura 3.15: Deformação de uma tractriz em uma catenária.

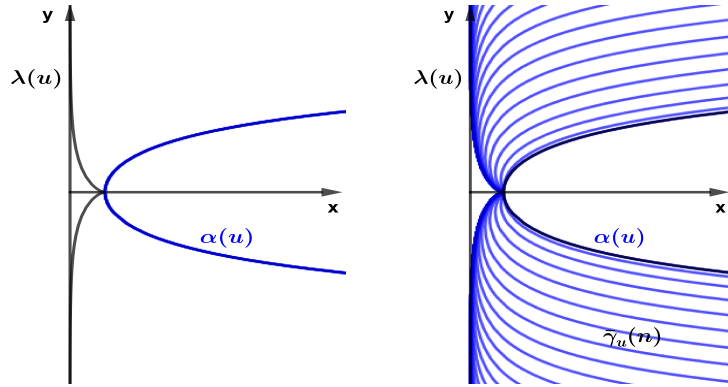


Figura 3.16: Deformação de uma catenária em uma tractriz.

Exemplo 10. Verificação da Proposição 10 para o par y -normal associado circunferência (3.22) $\times$ parábola (3.27).

Utilizando a Equação (3.57) segue que,

$$\bar{\omega}_u(n) = \lambda(u) - \frac{(2^n - 1)}{2^n} \frac{x(u)y'(u)}{(x'(u))^2} n(u).$$

Utilizando as equações (3.22), (3.23) e (3.24), respectivamente, a equação de uma circunferência e as funções coordenadas dos vetores tangente e normal à circunferência no parâmetro u , obtém-se a família de curvas

$$\bar{\omega}_u(n) = \left(r + r \cos(u), r \sin(u) \right) - \frac{(2^n - 1)(r + r \cos(u))r \cos(u)}{2^n r^2 \sin^2(u)} \left(-r \cos(u), -r \sin(u) \right) \quad (3.64)$$

Calculando $\lim_{n \rightarrow 0} \bar{\omega}_u(n)$, obtém-se que $\lim_{n \rightarrow 0} \bar{\omega}_u(n) = (r + r \cos(u), r \sin(u))$.

Por outro lado, calculando $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\omega}_u(n)$, obtém-se

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\omega}_u(n) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(r + r \cos(u)) (2^n \sin^2(u) + (2^n - 1) \cos^2(u))}{2^n \sin^2(u)}, \right. \\
& \quad \left. \frac{r (2^n \sin^2(u) + (2^n - 1) (\cos(u) + \cos^2(u)))}{2^n \sin(u)} \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left((r + r \cos(u)) + \frac{\cos^2(u)(r + r \cos(u))}{\sin^2(u)} - \frac{\cos^2(u)(r + r \cos(u))}{\sin^2(u)} \frac{1}{2^n}, \right. \\
& \quad \left. r \sin(u) + \frac{r(\cos(u) + \cos^2(u))}{\sin(u)} - \frac{r(\cos(u) + \cos^2(u))}{\sin(u)} \frac{1}{2^n} \right) \\
&= \left((r + r \cos(u)) + \frac{\cos^2(u)(r + r \cos(u))}{\sin^2(u)}, r \sin(u) + \frac{r(\cos(u) + \cos^2(u))}{\sin(u)} \right) \\
&= \left(\frac{(r + r \cos(u)) (\sin^2(u) + \cos^2(u))}{\sin^2(u)}, \frac{r \cos(u) + r (\sin^2(u) + \cos^2(u))}{\sin(u)} \right) \\
&= \left(\frac{r(\cos(u) + 1)}{\sin^2(u)}, \frac{r(\cos(u) + 1)}{\sin(u)} \right)
\end{aligned}$$

Aqui utilizou-se o fato de que, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$ e $\sin^2(u) + \cos^2(u) = 1$.

De forma análoga, tomando a família $\bar{\gamma}_u(n)$, dada por

$$\bar{\gamma}_u(n) = \lambda(u) - \frac{1}{2^n} \frac{x(u)y'(u)}{(x'(u))^2} n(u),$$

e utilizando as equações (3.22), (3.23) e (3.24), respectivamente, a equação de uma circunferência e as funções coordenadas dos vetores tangente e normal à circunferência no parâmetro u , obtém-se

$$\bar{\gamma}_u(n) = \left(\frac{(r + r \cos(u)) [2^n \sin^2(u) + \cos^2(u)]}{2^n \sin^2(u)}, \frac{2^n r \sin^2(u) + r \cos(u) + r \cos^2(u)}{2^n \sin(u)} \right). \quad (3.65)$$

Daí,

$$\lim_{n \rightarrow 0} \bar{\gamma}_u(n) = \left(\frac{r(\cos(u) + 1)}{\sin^2(u)}, \frac{r(\cos(u) + 1)}{\sin(u)} \right).$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\gamma}_u(n) = (r + r \cos(u), r \sin(u)).$$

Mostra-se que calculando $\lim_{n \rightarrow 0} \bar{\gamma}_u(n)$, obtém-se a parábola de equação (3.25) e calculando $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\gamma}_u(n)$, obtém-se uma circunferência de raio r , tangente ao eixo Oy , com centro no eixo Ox de equação (3.22). Veja Figura 3.18. As curvas intermediárias da deformação, obtidas pela variação do número real positivo n estão representadas em vermelho na Figura 3.17 e em azul na 3.18.

Portanto, existe uma y -normal deformação entre a parábola de equação (3.25) e a circunferência de equação (3.22). As curvas intermediárias da deformação, obtidas pela variação do número real positivo n estão representadas nas Figuras (3.17) e (3.18).

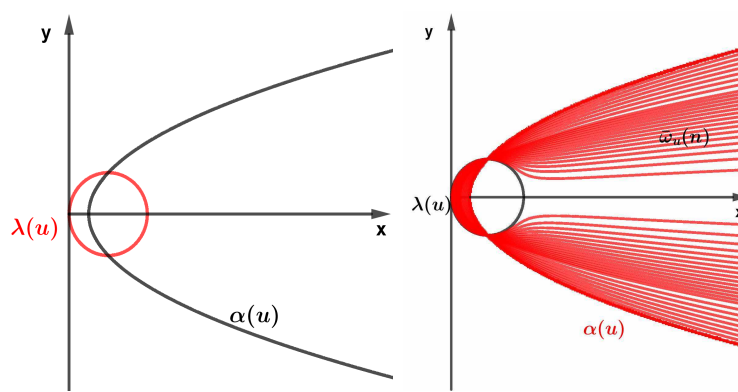


Figura 3.17: Deformação de uma circunferência de raio r , tangente ao eixo Oy , com centro no eixo Ox em uma a parábola.

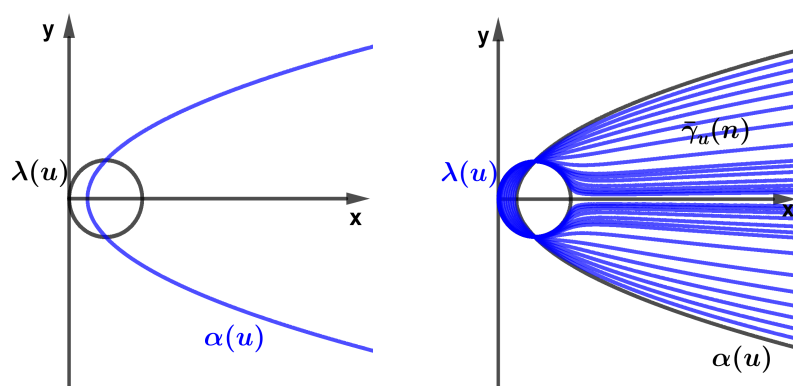
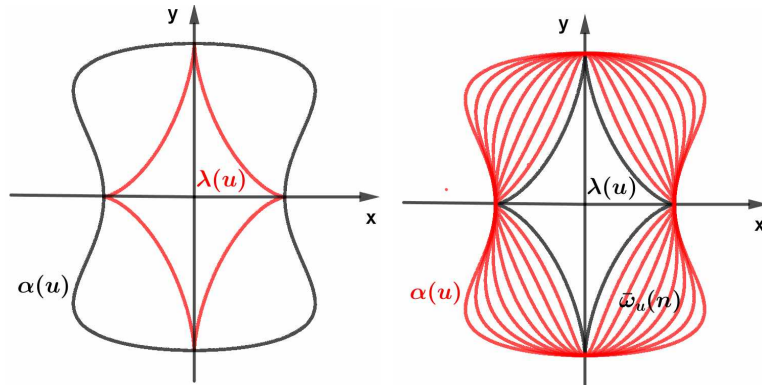
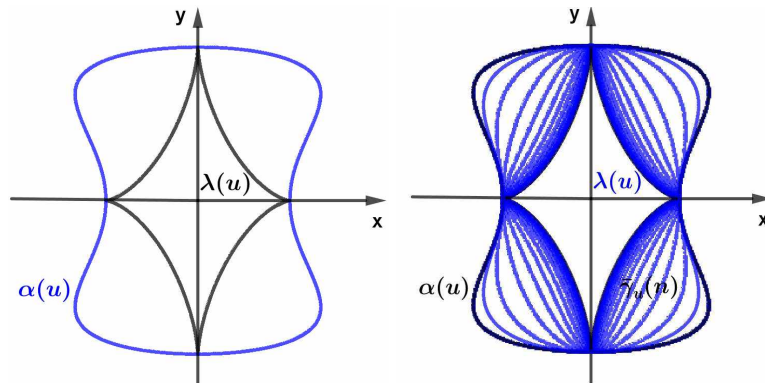


Figura 3.18: Deformação de uma parábola em uma circunferência de raio r , tangente ao eixo Oy , com centro no eixo Ox .

Na Figura (3.19) pode-se ver que calculando $\lim_{n \rightarrow 0} \bar{\omega}_u(n)$, obtém-se uma asteroide e calculando $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\omega}_u(n)$, obtém-se o cinturoide. As curvas intermediárias da deformação, obtidas pela variação do número real positivo n estão representadas em vermelho.

Figura 3.19: y -deformação de um astroide em um cinturoide

Na Figura (3.19) pode-se ver que calculando $\lim_{n \rightarrow 0} \bar{\gamma}_u(n)$, obtém-se o cinturoide e calculando $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\gamma}_u(n)$, obtém-se a astroide. As curvas intermediárias da deformação, obtidas pela variação do número real positivo n estão representadas em azul.

Figura 3.20: y -deformação de um cinturoide em um astroide

3.4.2 x -normal deformação

Seja $\lambda : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, uma curva regular por partes em $u \in I$.

Defina duas famílias de aplicações $\nu, \zeta : \{I\} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ que a cada valor de $u \in I$, associa as curvas $\nu_u, \zeta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, tais que

$$\nu_u(n) = \begin{cases} \bar{\nu}_u(n) & \text{se } (x(u), y(u)) \neq (x_{R_u}, o) \text{ e } u \neq u_k; \\ R_u & \text{se } (x(u), y(u)) = (x_{R_u}, 0); \\ P_k & \text{se } u = u_k, \end{cases} \quad (3.66)$$

e

$$\zeta_u(n) = \begin{cases} \bar{\zeta}_u(n) & \text{se } (x(u), y(u)) \neq (x_{R_u}, o) \text{ e } u \neq u_k; \\ R_u & \text{se } (x(u), y(u)) = (x_{R_u}, 0); \\ P_k & \text{se } u = u_k, \end{cases} \quad (3.67)$$

onde cada $u_k, k \in A$, é tal que $\lambda(u_k) = P_k; u_k \in I$, são os possíveis pontos de não-regularidade de λ em I , e $\nu_u(n)$ e $\zeta_u(n)$ satisfazem,

$$\bar{\nu}_u(n) = \lambda(u) + \frac{(2^n - 1)}{2^n} \frac{y(u)x'(u)}{(y'(u))^2} n(u) \quad (3.68)$$

e

$$\bar{\zeta}_u(n) = \lambda(u) - \frac{1}{2^n} \frac{x(u)y'(u)}{(y'(u))^2} n(u). \quad (3.69)$$

Aqui $(x(u), y(u))$ são as funções coordenadas da função λ e $(x'(u), y'(u))$ são as componentes do vetor tangente à curva λ em $u \in I$.

Observe que, calculando $\lim_{n \rightarrow 0} \bar{\nu}_u(n)$, obtém-se a curva $\lambda(u)$ dada em (3.1). De fato,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow 0} \bar{\nu}_u(n) &= \lim_{n \rightarrow 0} \left(\lambda(u) - \frac{(2^n - 1)}{2^n} \frac{x(u)y'(u)}{(y'(u))^2} n(u) \right) \\ &= (x(u), y(u)) = \lambda(u). \end{aligned} \quad (3.70)$$

Aqui utilizou-se que $\lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{2^n} = 1$.

Note que no caso em que a curva λ intercepta o eixo Ox no ponto (x_{R_u}, o) , cada curva da família $\bar{\nu}_u(n)$ também intercepta o eixo Ox neste mesmo ponto (ver Figura (??)).

Agora, fazendo o processo inverso, isto é, calculando $\lim_{n \rightarrow \infty} \nu_u(n)$, obtém-se a curva $\bar{\alpha}$ dada por (3.40). De fato,

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\nu}_u(n) &= \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lambda + \frac{(2^n - 1) y(u) x'(u)}{2^n (y'(u))^2} n(u) \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lambda + \frac{2^n y(u) x'(u)}{2^n (y'(u))^2} n(u) - \frac{y(u) x'(u)}{(y'(u))^2} \frac{1}{2^n} n(u) \right) \\
&= \lambda + \frac{y(u) x'(u)}{(y'(u))^2} n(u) = \left(\frac{y'(u) x(u) - y(u) x'(u)}{y'(u)}, \frac{y(u) ((y'(u))^2 + (x'(u))^2)}{(y'(u))^2} \right) \\
&= \bar{\alpha}(u)
\end{aligned} \tag{3.71}$$

Aqui utilizou-se que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$.

Por outro lado, calculando $\lim_{n \rightarrow 0} \bar{\zeta}_u(n)$, obtém-se a curva $\bar{\alpha}(u)$ dada por (3.40). De fato

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow 0} \bar{\zeta}_u(n) &= \lim_{n \rightarrow 0} \left(\lambda + \frac{1}{2^n} \frac{y(u) x'(u)}{(y'(u))^2} n(u) \right) \\
&= \lambda + \frac{y(u) x'(u)}{(y'(u))^2} n(u) = \bar{\alpha}(u)
\end{aligned} \tag{3.72}$$

$\forall u \in I$, tal que $y'(u) \neq 0$.

Por outro lado, fazendo o processo inverso, isto é, calculando $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\zeta}_u(n)$, obtém-se à curva λ dada por (3.47). De fato

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\zeta}_u(n) &= \left(\lambda + \frac{1}{2^n} \frac{y(u) x'(u)}{(y'(u))^2} n(u) \right) \\
&= (x(u), y(u)) = \lambda(u)
\end{aligned} \tag{3.73}$$

Aqui utilizou-se do fato de que, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$.

Definição 30. *Sejam $\lambda, \alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ duas curvas, regulares por partes, definidas em um aberto I de $\mathbb{R}$ tais que $\lambda(u) = (x(u), y(u))$, $u \in I$. Sejam $\nu, \zeta : \{I\} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, duas famílias de curvas tais que, para cada $n \in \mathbb{R}$ tem-se $\lim_{n \rightarrow 0} \bar{\nu}_u(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\zeta}_u(n) = \lambda(u)$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\nu}_u(n) = \lim_{n \rightarrow 0} \bar{\zeta}_u(n) = \bar{\alpha}(u)$, onde as curvas $\nu_u(n)$ satisfazem (3.66) e as curvas $\zeta_u(n)$ satisfazem (3.67). Nessas condições, diz-se que existe uma x -normal deformação entre as curvas λ e α .*

Diante do exposto até aqui, podemos enunciar a seguinte Proposição:

Proposição 11. *Se duas curvas planas λ e α formam um par x -normal associado, então existe uma x -normal deformação entre as curvas λ e α .*

Demonstração. Segue imediato de (3.70), (3.71), (3.72) e (3.73). $\square$

A seguir serão esboçados alguns exemplos de x -normal deformação.

Exemplos de x -normal deformação

Exemplo 11. x -normal deformação de uma tractriz em uma curva $\alpha(u)$. Utilizando a Equação (3.68) segue que,

$$\bar{\nu}_u(n) = \lambda(u) + \frac{(2^n - 1) y(u) x'(u)}{2^n (y'(u))^2} n(u)$$

Utilizando as equações (3.18), (3.19) e (3.20), as quais fornecem, respectivamente a equação de uma tractriz e as funções coordenadas dos vetores tangente e normal à tractriz no parâmetro u , obtém-se

$$\bar{\nu}_u(n) = \left(\frac{r(2^n u - u + \tanh(u))}{2^n \sinh(u)}, \frac{(ru - r \tanh(u))(2^n \cosh^2(u) - 1)}{2^n \sinh^2(u)} \right) \quad (3.74)$$

Por outro lado, da Expressão de $\bar{\zeta}_u(n)$, segue que

$$\begin{aligned} \bar{\zeta}_u(n) &= \lambda(u) + \frac{1}{2^n} \frac{y(u) x'(u)}{(y'(u))^2} n(u) \\ &= \left(\frac{r((2^n - 1) \tanh(u) + u)}{2^n \sinh(u)}, \frac{(ru - r \tanh(u))(2^n \sinh^2(u) + 1)}{2^n \sinh^2(u)} \right) \end{aligned}$$

Efetuando cálculos análogos aos dos exemplos anteriores mostra-se que, computando $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\zeta}_u(n)$ e $\lim_{n \rightarrow 0} \bar{\nu}_u(n)$, obtém-se a curva tractriz dada por (3.18) e computando $\lim_{n \rightarrow 0} \bar{\zeta}_u(n)$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\nu}_u(n)$, obtém-se a curva $\alpha(u)$ de equação (3.44).

Pela Definição 30, existe uma x -normal deformação entre essa tractriz e a curva $\bar{\alpha}(u)$, e portanto, pela Proposição 11, existe uma família de curvas $\bar{\nu}_u(n)$, definidas pelas equações (3.74), a qual é obtida por uma x -normal deformação entre a curva tractriz de equação (3.18) na curva $\bar{\alpha}(u)$ de equação (3.44). As curvas intermediárias da deformação, obtidas pela variação do número real positivo n , estão representadas nas Figuras (3.21) e (3.22).

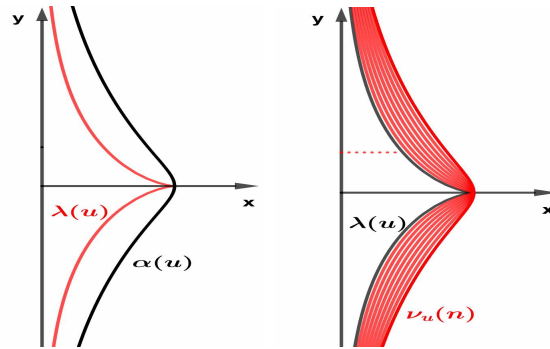


Figura 3.21: x -normal deformação da curva tractriz de equação (3.18) na curva $\bar{\alpha}(u)$ de equação (3.44)

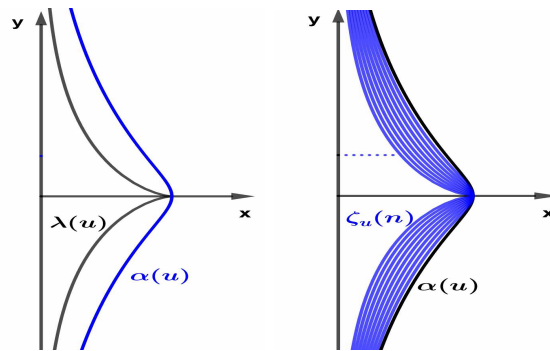


Figura 3.22: Curvas intermediárias da deformação da curva $\alpha(u)$ em uma tractriz.

Exemplo 12. x -normal deformação de uma circunferência em uma curva $\alpha(u)$. Seja λ a circunferência de equação (3.22) e α dada pela equação

$$\alpha(u) = \left(\frac{r(\cos(u) + 1)}{\cos(u)}, \frac{r \sin(u)}{\cos^2(u)} \right) \quad (3.75)$$

onde λ e α são x -normal associadas. Sejam $\bar{\nu}_u(n)$ e $\bar{\zeta}_u(n)$ dadas pelas Equações (3.68) e (3.69), respectivamente, então

$$\bar{\nu}_u(n) = \lambda(u) + \frac{(2^n - 1)}{2^n} \frac{y(u)x'(u)}{(y'(u))^2} n(u)$$

e

$$\bar{\zeta}_u(n) = \lambda(u) + \frac{1}{2^n} \frac{y(u)x'(u)}{(y'(u))^2} n(u)$$

Utilizando as equações (3.22), (3.23) e (3.24), as quais fornecem, respectivamente a equação de uma circunferência e as funções coordenadas dos vetores tangente e normal à tractriz no parâmetro u , obtém-se

$$\bar{\nu}_u(n) = \left(\frac{r \left(2^n \cos(u) + 2^n - \sinh^2(u) \right)}{2^n \cos(u)}, \frac{r \sin(u) \left(2^n - \sin^2(u) \right)}{2^n \cos^2(u)} \right) \quad (3.76)$$

e

$$\bar{\zeta}_u(n) = \left(\frac{r \left(2^n (\cos(u) + \cos^2(u)) + \sin^2(u) \right)}{2^n \cos(u)}, \frac{r \sin(u) \left(2^n \cos^2(u) + \sin^2(u) \right)}{2^n \cos^2(u)} \right) \quad (3.77)$$

Segue da Proposição 10 que existe uma x -deformação entre as duas curvas. As curvas intermediárias da deformação, obtidas pela variação do número real positivo n estão representadas nas Figuras (3.23) e (3.24). Na Figura (3.23) temos uma circunferência obtida pelo $\lim_{n \rightarrow 0} \nu_u(n)$, e a respectiva a curva $\alpha(u)$ obtida calculando $\lim_{n \rightarrow \infty} \nu_u(n)$. As curvas intermediárias da deformação, obtidas pela variação do número real positivo n estão representadas em vermelho.

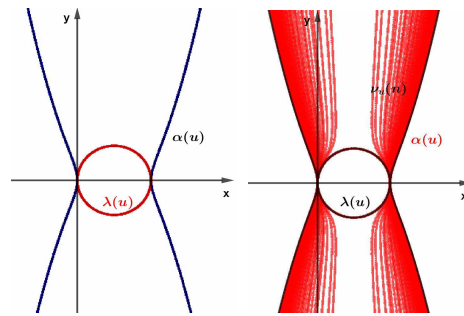
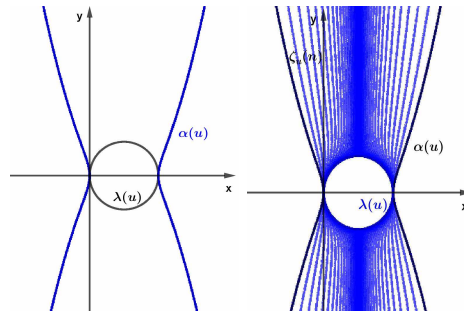


Figura 3.23: Deformação de uma circunferência na respectiva curva $\alpha(u)$.

Na Figura (3.24) temos a curva $\alpha(u)$ obtida calculando-se $\lim_{n \rightarrow 0} \zeta_u(n)$ e uma circunferência obtida quando se calcula o $\lim_{n \rightarrow \infty} \zeta_u(n)$. As curvas intermediárias da deformação, obtidas pela variação do número real positivo n estão representadas em azul

Figura 3.24: Deformação da curva $\alpha(u)$ em uma circunferência.

3.5 xy-deformação

Seja $\lambda : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, uma curva regular, $\forall u \in I$.

Defina uma família de aplicação $\sigma : \{I\} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ que a cada valor $u \in I$, associa uma função $\sigma_u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, tal que,

$$\sigma_u(n) = \begin{cases} \bar{\sigma}_u(n) & \text{se } (x(u), y(u)) \neq (0, y_{Q_u}) \text{ ou } (x(u), y(u)) \neq (x_{R_u}, 0); \\ Q_u & \text{se } (x(u), y(u)) = (0, y_{Q_u}) \text{ ou } (x(u), y(u)) = (x_{R_u}, 0); \\ P_k & \text{se } u = u_k, \end{cases} \quad (3.78)$$

$u = u_k$ são os possíveis pontos de não-regularidade de λ em I , e $\bar{\sigma}_u(n)$ satisfaz,

$$\bar{\sigma}_u(n) = \left(\frac{2^n x(u) y'(u) - (2^n - 1) y(u) x'(u)}{2^n y'(u)}, \frac{2^n x'(u) y(u) - (2^n - 1) x(u) y'(u)}{2^n x'(u)} \right) \quad (3.79)$$

onde $(x(u), y(u))$ são funções coordenadas da função λ , $(x'(u), y'(u))$ e $(-y'(u), x'(u))$ são componentes dos vetores tangente e normal, respectivamente, à curva λ em $u \in I$.

Observe que calculando $\lim_{n \rightarrow 0} \bar{\sigma}_u(n)$, obtém-se a curva $\lambda(u)$ dada por (3.47). De fato

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow 0} \bar{\sigma}_u(n) &= \\ &= \lim_{n \rightarrow 0} \left(\frac{2^n x(u) y'(u) - (2^n - 1) y(u) x'(u)}{2^n y'(u)}, \frac{2^n x'(u) y(u) - (2^n - 1) x(u) y'(u)}{2^n x'(u)} \right) \\ &= (x(u), y(u)) = \lambda(u) \end{aligned}$$

Aqui utilizou-se do fato de $\lim_{n \rightarrow 0} 2^n = 1$.

Por outro lado, fazendo o processo inverso, isto é, calculando $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\sigma}_u(n)$, obtém-se a curva $\bar{\phi}(u)$ dada por (3.50). De fato,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\sigma}_u(n) &= \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2^n x(u)y'(u) - (2^n - 1)y(u)x'(u)}{2^n y'(u)}, \frac{2^n x'(u)y(u) - (2^n - 1)x(u)y'(u)}{2^n x'(u)} \right) \\ &= \left(\frac{x(u)y'(u) - y(u)x'(u)}{y'(u)}, \frac{y(u)x'(u) - x(u)y'(u)}{x'(u)} \right) = \bar{\phi}(u) \end{aligned}$$

Definição 31. *Sejam $\lambda, \phi : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ duas curvas regulares por partes, definidas em um aberto $I \subset \mathbb{R}$ que $\lambda(u) = (x(u), y(u))$, $u \in I$. Seja $\sigma : \{I\} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, uma família de curvas tal que, para cada $n \in \mathbb{R}$ tem-se $\lim_{n \rightarrow 0} \bar{\sigma}_u(n) = \lambda(u)$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\sigma}_u(n) = \bar{\phi}(u)$, onde as curvas $\bar{\sigma}(u)$ satisfazem (3.78). Nessas condições, a aplicação $\sigma : \{I\} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ é denominada uma xy -deformação entre as curvas λ e ϕ .*

Exemplos de xy -deformação

Exemplo 13. xy -deformação entre um asteroide e uma elipse. Utilizando a Equação (3.79) segue que,

$$\bar{\sigma}_u(n) = \left(\frac{2^n x(u)y'(u) - (2^n - 1)y(u)x'(u)}{2^n y'(u)}, \frac{2^n x'(u)y(u) - (2^n - 1)x(u)y'(u)}{2^n x'(u)} \right).$$

Utilizando as equações (3.28), (3.29) e (3.30), as quais fornecem, respectivamente, a equação de uma asteroide e as funções coordenadas dos vetores tangente e normal à asteroide no parâmetro u , obtém-se

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}_u(n) &= \left(\frac{2^n a \cos^3(u)(3b \sin^2(u) \cos(u)) - (2^n - 1)a \sin^3(u)(-3a \cos^2(u) \sin(u))}{2^n(3b \sin^2(u) \cos(u))} \right. \\
&\quad \left. \frac{2^n(-3a \cos^2(u) \sin(u))b \sin^3(u) - (2^n - 1)a \cos^3(u)(3b \sin^2(u) \cos(u))}{2^n(-3a \cos^2(u) \sin(u))} \right) \\
&= \left(\frac{2^n 3ab \cos^4(u) \sin^2(u) + (2^n - 1)3ab \sin^4(u) \cos^2(u)}{2^n 3b \sin^2(u) \cos(u)}, \right. \\
&\quad \left. \frac{-2^n 3ab \sin^4(u) \cos^2(u) - (2^n - 1)3ab \cos^4(u) \sin^2(u)}{-2^n 3a \cos^2(u) \sin(u)} \right) \\
&= \left(\frac{3b \sin^2(u) \cos(u)[2^n a \cos^3(u) + (2^n - 1)a \sin^2(u) \cos(u)]}{2^n 3b \sin^2(u) \cos(u)}, \right. \\
&\quad \left. \frac{-3a \cos^2(u) \sin(u)[2^n b \sin^3(u) + (2^n - 1)b \cos^2(u) \sin(u)]}{2^n 3b \sin^2(u) \cos(u)} \right) \\
&= \left(\frac{2^n a \cos^2(u) + (2^n - 1)a \sin^2(u) \cos(u)}{2^n}, \frac{2^n b \sin^3(u) + (2^n - 1)b \cos^2(u) \sin(u)}{2^n} \right) \\
&= \left(\frac{2^n a \cos(u) \left(\cos^2(u) + \sin^2(u) \right) - a \sin^2(u) \cos(u)}{2^n}, \right. \\
&\quad \left. \frac{2^n b \sin(u) \left(\sin^2(u) + \cos^2(u) \right) - b \cos^2(u) \sin(u)}{2^n} \right) \\
&= \left(\frac{a \cos(u) \left(2^n - \sin^2(u) \right)}{2^n}, \frac{b \sin(u) \left(2^n - \cos^2(u) \right)}{2^n} \right). \tag{3.80}
\end{aligned}$$

Agora, calculando $\lim_{n \rightarrow 0} \bar{\sigma}_u(n)$, obtém-se

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow 0} \bar{\sigma}_u(n) &= \\
&= \lim_{n \rightarrow 0} \left(\frac{a \cos(u) \left(2^n - \sin^2(u) \right)}{2^n}, \frac{b \sin(u) \left(2^n - \cos^2(u) \right)}{2^n} \right) \\
&= \left(a \cos(u) \left(1 - \sin^2(u) \right), b \sin(u) \left(1 - \cos^2(u) \right) \right) \\
&= (a \cos^3(u), b \sin^3(u))
\end{aligned}$$

Aqui utilizou-se o fato de que, $\lim_{n \rightarrow 0} 2^n = 1$, $1 - \sin^2(u) = \cos^2(u)$ e $1 - \cos^2(u) = \sin^2(u)$.

Por outro lado, calculando $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\sigma}_u(n)$, obtém-se

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\sigma}_u(n) &= \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a \cos(u) (2^n - \sin^2(u))}{2^n}, \frac{b \sin(u) (2^n - \cos^2(u))}{2^n} \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2^n a \cos(u)}{2^n} - a \sin^2(u) \cos(u) \frac{1}{2^n}, \frac{2^n b \sin(u)}{2^n} - b \cos^2(u) \sin(u) \frac{1}{2^n} \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(a \cos(u) - a \sin^2(u) \cos(u) \frac{1}{2^n}, b \sin(u) - b \cos^2(u) \sin(u) \frac{1}{2^n} \right) \\
&= (a \cos(u), b \sin(u)).
\end{aligned}$$

Aqui utilizou-se do fato que, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$.

Desta forma, a família de curvas $\bar{\sigma}_u(u)$ de equação (3.80) define uma xy -deformação entre o astroide de equação (3.28) e a elipse de equação (3.52). As curvas intermediárias da deformação podem ser visualizadas na Figura 3.25.

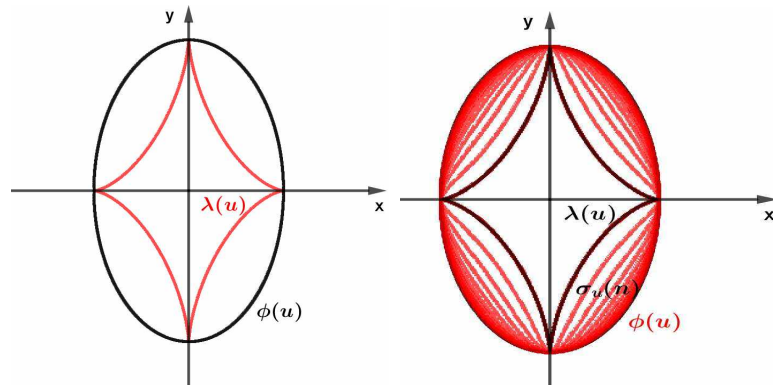


Figura 3.25: Deformação de um astroide em uma elipse para $a = 1.50$, $b = 2.50$.

Em particular, se $a = b$, então a curva xy -associada ao astroide é uma circunferência de raio r e centro na origem, e as curvas intermediárias da deformação podem ser visualizadas na Figura 3.26

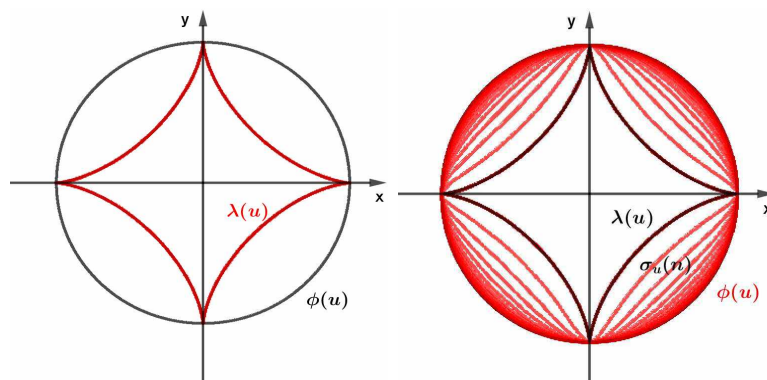


Figura 3.26: Deformação de um astroide em uma circunferência para $a = b = 2.50$.

3.6 Conclusão

A relevância desta monografia situa-se na obtenção de resultados originais, não encontradas na literatura. Os resultados aqui apresentados abrem uma gama de sugestões de trabalhos futuros. Uma delas é averiguar se é possível estender os conceitos aplicados no capítulo 3 para o espaço tridimensional e para outros espaços não-euclidianos. Outra sugestão é o refinamento dos resultados no que tange ao relacionamento entre as curvaturas e outras propriedades geométricas dos referidos pares de curvas ora apresentados. Deixamos ainda aqui a conjectura de que o par astroide $\times$ circunferência (circunscrita ao astroide) é o único par de curvas que é simultaneamente y -normal associado, x -normal associado e xy associado.

BIBLIOGRAFIA

- [1] ABBENA, Elsa; SALAMON, Simon; GRAY, Alfred, **Modern differential geometry of curves and surfaces with Mathematica**. Chapman and Hall/CRC, 2017
- [2] BOYER, U. C. M. C. B., **História da matemática**. Editora Bluche, 2012.
- [3] CARMO, Manfredo Perdigão do, **Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies**. 5 a . ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.
- [4] EVES, H., **Introdução à história da matemática**. Editora da Unicamp, 2004.
- [5] SECCO, Lucas.A.V , **Evolutas espaciais e centros de curvaturas esféricos**. Disponível em: < <http://www.semap.facip.ufu.br/node/89>> Acesso em: 18 junho 2019.
- [6] MAOR, E., **e: A história de um número**. Editora Record, 2004.
- [7] MARTINS, Ricardo Miranda, **Tráctriz e Catenária: modelos e métodos matemáticos**. Disponível em:<<https://www.ime.unicamp.br/~rmiranda/wordpress/wp-content/uploads/2015/12/Tractriz.pdf>> Acesso em: 18 junho 2019.
- [8] TENENBLAT, Ketí, **Introdução à Geometria Diferencial**. 2. ed. São Paulo: Edgard Blucher. 2008.

- [9] RODRIGUES, Kennedy Félix, **Ângulos Hiperbólicos e Funções Hiperbólicas**. 2014. 68 p. Dissertação Mestrado profissional em matemática - Universidade Federal de Sergipe, Sergipe, 2014.