

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE ENGENHARIA QUÍMICA
CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA QUÍMICA



**Determinação de Equações Constitutivas no Processo de Secagem
usando Evolução Diferencial**

Autor: Háysila Lourrane Silva

Uberlândia - MG

2017

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE ENGENHARIA QUÍMICA
CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA QUÍMICA

**Determinação de Equações Constitutivas no Processo de Secagem
usando Evolução Diferencial**

Háysila Lourrane Silva

**Monografia de Graduação apresentada à
Universidade Federal de Uberlândia como
parte dos requisitos necessários para a
aprovação na disciplina de Projeto de
Graduação do curso de Engenharia Química.**

Uberlândia - MG

2017

MEMBROS DA BANCA EXAMINADORA DA MONOGRAFIA DA DISCIPLINA
PROJETO DE GRADUAÇÃO DE HÁYSILA LOURRANE SILVA APRESENTADA À
UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA, EM 07 DE DEZEMBRO DE 2017.

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. Fran Sérgio Lobato

Orientador - FEQUI/UFU

MSc. Flávia Marques Fagundes

PPGEQ/UFU

Prof. Dr. Fábio de Oliveira Arouca

FEQUI/UFU

À minha mãe que possibilitou que essa jornada pudesse ser realizada, sendo um grande exemplo me inspirando e me incentivando. Minha gratidão a tudo o que ela fez por mim é eterna. Ao meu padrasto Nazareno que me ajudou desde o início do curso, sempre demonstrando respeito, admiração e compreensão. Ao meu tio William que me auxiliou em diversos momentos que tive necessidade. Às minhas primas Solange Eterna e Leide Maria que me receberam durante meus estudos em suas casas com muito carinho. A toda minha família e amigos que sempre me motivaram a seguir em frente independente das dificuldades diárias. Muito obrigada.

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador Prof. Dr. Fran Sérgio Lobato, por sua disponibilidade, acompanhamento exercido durante o trabalho, por todo esclarecimento que foi pacientemente realizado, profissionalismo, parceria, apoio emocional e amizade durante o processo.

Também agradeço os comentários e discussões acerca do trabalho do Prof. Edu Barbosa Arruda, do Departamento de Engenharia Química da Universidade Federal do Triângulo Mineiro e da Profa. Dra. Nor Azni Shahari, da Faculdade de Computação e Ciências Matemáticas, da *Universiti Teknologi MARA Negeri Sembilan*, da Malásia.

Take these broken wings and learn to fly. All your life
you were only waiting for this moment to arise (PAUL
MCCARTNEY, 1968).

Sumário

Lista de Figuras.....	i
Lista de Símbolos.....	ii
1. INTRODUÇÃO	13
2. MODELAGEM MATEMÁTICA DO PROCESSO DE SECAGEM E RESOLUÇÃO NUMÉRICA	15
2.1 Modelagem Matemática do Problema de Interesse	15
2.2 Resolução Numérica do Problema de Interesse	17
3. EVOLUÇÃO DIFERENCIAL E PROBLEMA INVERSO	20
3.1 Problema de Otimização: Formulação Matemática e Classificação	20
3.2 Algoritmo de Evolução Diferencial	22
3.3 Problemas Inversos	23
4. RESULTADOS E DISCUSSÃO	24
4.1 Análise de Sensibilidade.....	24
4.1.1 - Influência do Número de Biot.....	24
4.1.2 - Influência do Parâmetro λ	25
4.1.3 - Influência do Número de Lewis	26
4.1.4 - Influência da Umidade Inicial	27
4.1.5 - Influência do Parâmetro Φ	27
4.2 - Problema Inverso	28
5. CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS	33
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	35

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 - Processo de secagem de um modelo uni-dimensional.....	15
Figura 3.1 - Classificação dos Métodos de Otimização.	21
Figura 3.2 - Problemas Diretos e Inversos	23
Figura 4.1 - Influência do número de Biot.	25
Figura 4.2 - Influência do parâmetro λ	25
Figura 4.3 - Influência do número de Lewis.	26
Figura 4.4 - Influência da umidade inicial.....	27
Figura 4.5 - Influência do parâmetro Φ	28
Figura 4.6 - Distribuições de umidade e temperatura no centro para $\sigma=0\%$	31
Figura 4.7 - Distribuições de umidade e temperatura no centro para $\sigma=5\%$	31
Figura 4.8 - Distribuições de umidade e temperatura no centro para $\sigma=10\%$	31

LISTA DE SÍMBOLOS

A	Parâmetro adimensional da Equação 4.1, [-]
B	Parâmetro adimensional da Equação 4.1, [-]
Bi	Número de Biot, [-]
C	Parâmetro adimensional da Equação 4.1, [-]
C_{air}	Umidade do ar, [ML ⁻³]
CR	Probabilidade de cruzamento, [-]
C_{sup}	Umidade na superfície do sólido, [ML ⁻³]
D	Difusividade mássica, [TL ⁻²]
f	Equação constitutiva da Equação 2.16, [-]
F	Taxa de perturbação, [-]
FO	Função objetivo, [-]
g	Restrições de desigualdade, [-]
p	Restrições de igualdade, [-]
h	Coefficiente de transferência de calor, [Mθ ⁻¹ T ⁻³]
H_v	Calor de vaporização, [L ² T ⁻²]
h_m	Coefficiente de transferência de massa, [LT ⁻¹]
J	Funcional, [-]
K	Condutividade térmica, [MLθ ⁻¹ T ⁻³]
L	Comprimento da superfície em análise, [L]
L_0	Comprimento inicial da superfície, [L]
L_e	Número de Lewis, [-]
m	Número de funções objetivo, [-]
M	Umidade do sólido dimensional, [ML ⁻³]
M_0	Umidade inicial do sólido, [ML ⁻³]
n	Número de variáveis de projeto, [-]
N	Número de pontos de discretização, [-]
NP	Tamanho da população, [-]

r	Número aleatório, [-]
t	Tempo, [T]
T	Temperatura dimensional, [θ]
T_{air}	Temperatura do ar, [θ]
T_0	Temperatura inicial do sólido, [θ]
T_{sup}	Temperatura na superfície do sólido, [θ]
W	Umidade adimensional, [-]
W^{sim}	Umidade adimensional simulada, [-]
W^{exp}	Umidade adimensional experimental, [-]
x	Coordenada espacial, [-]
X	Vetor de variáveis de projeto, [-]
X^L	Limite inferior das variáveis de projeto, [-]
X^U	Limite superior das variáveis de projeto, [-]
Z_{exact}	Vetor de incógnitas, [-]
ξ	Comprimento adimensional, [-]
θ	Temperatura adimensional, [-]
τ	Tempo adimensional, [-]
ρ_s	Densidade do sólido, [ML ⁻³]
α	Difusividade térmica, [L ² T ⁻¹]
σ	Desvio padrão experimental, [-]
Φ	Função Adimensional/Constitutiva, [-]
ϕ	Parâmetro da Equação 2.16, [-]
λ	Função Adimensional/Constitutiva, [-]
θ_{sup}	Temperatura adimensional para $\xi=1$, [-]
θ^{sim}	Temperatura adimensional simulada, [-]
θ^{exp}	Temperatura adimensional experimental, [-]
$\mathcal{Q}^{sim}$	Distribuição de umidade ou temperatura simulada, [-]
$\mathcal{Q}^{exp}$	Distribuição de umidade ou temperatura experimental, [-]

RESUMO

O processo de secagem configura-se como uma das mais interessantes e importantes áreas da engenharia química. Basicamente, este consiste na transferência de umidade (água) contida em um material para um fluido (ar de secagem). Matematicamente, este processo consiste de modelos de balanços de massa (para a representação da umidade), de balanços de energia (para a representação da temperatura), associado a equações constitutivas de modo que este processo possa ser simulado. Para fins de simulação e análise, a determinação destas equações constitutivas, a partir de pontos experimentais, tem grande importância. Diante do que foi apresentado, a presente proposta teve como objetivo formular e resolver um problema inverso para fins da determinação dos parâmetros em equações constitutivas no processo de secagem. Para essa finalidade, foram considerados dados experimentais sintéticos e o algoritmo de Evolução Diferencial. Foram avaliadas as influências do número de Biot (Bi), do número de Lewis (Le), da umidade inicial (M_0) e dos parâmetros λ e Φ . Os números de Biot e Lewis e os parâmetros λ e Φ foram os que mais influenciaram nas distribuições analisadas. Na resolução do problema inverso foi possível constatar que o algoritmo de Evolução Diferencial foi capaz de obter os parâmetros do modelo para $\sigma=0\%$ e boas estimativas para os parâmetros quando $\sigma=5\%$ e $\sigma=10\%$.

Palavras-Chave: Modelagem matemática, problema inverso, Evolução Diferencial.

ABSTRACT

The drying process is one of most interesting and important of chemical engineering. Basically, this consists of moisture transfer (water) contained in a material to a fluid (drying air). Mathematically, this process consists of mass and energy balances, associated to constitutive equations. To simulate and analyze this process, it is necessary the determination of these constitutive equations considering experimental data. In this contribution, an inverse problem, proposed to determine the parameters of constitutive equations considering synthetic experimental data, is formulated and solved. To solve this optimization problem, the Differential Evolution (DE) algorithm is used. In addition, the influence of non-dimensional parameters (Biot' number, Lewis' number, initial moisture and λ and Φ parameters) in moisture and temperature profiles also is evaluated. The results showed that the moisture and temperature profiles were more influenced by Biot, Lewis, λ and Φ parameters. Considering noiseless data ($\sigma = 0$), DE was able to estimate the parameters satisfactorily as shown by the values obtained for the objective function. On the other hand, when noise is considered ($\sigma = 5\%$ and $\sigma = 10\%$), DE was able to obtain good estimates.

Keywords: Mathematical modeling, inverse problem, Differential Evolution.

1. INTRODUÇÃO

A secagem configura-se como um dos procedimentos mais antigos relacionados à engenharia que se tem conhecimento, com aplicações datadas desde os primórdios dos tempos. Em se tratando dos alimentos, seu objetivo primordial é a conservação de produtos visto que a sua aplicação diminui a atividade de água e, conseqüentemente, a atuação de microrganismos responsáveis por sua degradação (CELESTINO, 2010; TADINI *et al.*, 2016). Além desta vantagem, também é possível citar a praticidade no transporte do sólido seco (carregamento, descarregamento, transporte pneumático); na estocagem; na redução dos custos associados ao transporte de matérias-primas e ao cumprimento de especificações de mercado (EIK, 2008). Cabe ressaltar que, durante a secagem é comum ocorrer mudanças nas propriedades físicas, químicas e biológicas dos produtos. Assim, faz-se necessário o conhecimento desses efeitos visto que influenciam na transferência de massa e energia (LIMA, 2003).

Em linhas gerais, o processo de secagem pode ser realizado de forma natural ou artificial. A secagem natural consiste em expor o produto à radiação solar sob determinadas condições (geralmente baixa umidade do ar, altas temperaturas e ventos moderados). Por outro lado, a secagem artificial é estudada considerando o controle da umidade relativa, da temperatura e da velocidade do ar (SILVA, 2004).

A secagem é um tema de pesquisa abrangente e de alta complexidade, pois envolve trocas simultâneas de calor, massa e momento. Vários parâmetros afetam este processo, sendo muitos deles dependentes da estrutura do sólido e podem apresentar variações para um mesmo produto que tenha sido feito por processos diferentes ou até mesmo em lotes diferentes do mesmo processo (ARRUDA, 2008).

Do ponto de vista matemático, este processo consiste de modelos diferenciais que representam os balanços de massa, energia e movimento, associados a equações algébricas constitutivas (KEEY, 1975). Nestes modelos, as variáveis dependentes, independentes e os parâmetros relacionam-se através de informações fundamentadas em modelos fenomenológicos ou em relações puramente empíricas.

Para auxiliar a simulação e posterior análise, o modelo que representa este fenômeno pode ser adimensionalizado. Isto implica na redução do número de parâmetros através da definição de grupos adimensionais, bem como auxilia na resolução numérica destas equações (SHAHARI, 2012). Além disso, para fins da simulação destes modelos faz-se necessário a

determinação de equações constitutivas (relações entre as variáveis dependentes e independentes do processo) de modo que o balanço de informações (número de graus de liberdade) feche e o processo possa ser simulado e analisado.

Para essa finalidade, os parâmetros que caracterizam estas equações constitutivas podem ser determinados através da formulação e resolução de um problema inverso (que para este caso é um típico problema de estimação de parâmetros). Assim, para a formulação deste problema inverso é necessário o conhecimento de dados experimentais e do uso de uma ferramenta de otimização.

Na literatura, os problemas inversos podem ser revolvidos considerando dois tipos de abordagens, a saber, os métodos de otimização clássicos e os métodos de otimização heurísticos. A primeira classe de métodos consiste do uso de informações sobre o gradiente da função objetivo e das restrições para a determinação de um candidato a solução do problema de otimização. Já a segunda classe não é fundamentada no uso de informações sobre derivadas, mas sim se baseia em processos de seleção natural, analogias com processos físicos ou biológicos ou em procedimentos puramente estruturais.

Dentre estes métodos heurísticos, destaca-se o algoritmo de Evolução Diferencial proposto por STORN; PRICE (1995), devido ao grande número de aplicações que podem ser encontrados em diferentes campos da ciência e áreas afins. Em linhas gerais, este tem como fundamentação o uso de operações vetoriais para a geração de uma população de candidatos a solução do problema de otimização. Assim, a partir da aplicação contínua deste procedimento, a população de candidatos pode ser atualizada de modo que a melhor solução possível possa ser obtida ao final deste processo evolutivo.

Diante do que foi apresentado, o presente trabalho teve como objetivos: *i)* avaliar o efeito de grupos adimensionais nas distribuições de umidade e temperatura no processo de secagem da batata e *ii)* formular e resolver um problema inverso considerando dados experimentais sintéticos e o algoritmo de Evolução Diferencial. Este trabalho está estruturado como segue. O segundo capítulo apresenta a descrição matemático do problema de interesse, a definição dos grupos adimensionais considerados e a metodologia empregada para a resolução numérica deste. No terceiro capítulo tem-se uma breve revisão sobre a formulação do problema de otimização, o algoritmo de Evolução Diferencial e problemas inversos. No quarto capítulo são apresentados os resultados obtidos. As conclusões e perspectivas para trabalhos futuros são apresentadas no último capítulo.

2. MODELAGEM MATEMÁTICA DO PROCESSO DE SECAGEM E RESOLUÇÃO NUMÉRICA

2.1 Modelagem Matemática do Problema de Interesse

Considerou-se a transferência de massa e calor que ocorria em uma fatia fina (de largura $2L$) de um alimento em que, inicialmente, a umidade e a temperatura eram uniformes, conforme apresentado na Figura 2.1 (SHAHARI, 2012; SHAHARI; HIBBERD, 2012, 2013).

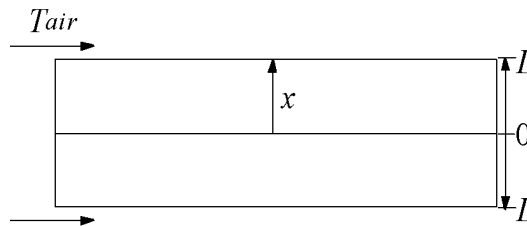


Figura 2.1 - Processo de secagem de um modelo uni-dimensional
Fonte: (SHAHARI; HIBBERD, 2012).

Matematicamente, o modelo de equações diferenciais que representa o processo de transferência de massa e calor em uma única fase proposto por SHAHARI; HIBBERD (2013) é apresentado pelas equações 2.1 e 2.2:

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial M}{\partial x} \right), \quad (t \geq 0, 0 \leq x \leq L) \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha \frac{\partial T}{\partial x} \right), \quad (t \geq 0, 0 \leq x \leq L) \quad (2.2)$$

onde M é a umidade, T é a temperatura, t é o tempo, x é a coordenada espacial, ρ_s é a densidade do sólido, D é a difusividade mássica, α é a difusividade térmica, e L é o comprimento total da superfície considerada na análise.

Para este modelo são consideradas as seguintes condições (inicial e de contorno).

$$M=M_0, \quad T=T_0, \quad L=L_0, \quad (t=0, 0 \leq x \leq L) \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad (t \geq 0, x = 0) \quad (2.4)$$

$$-\rho_s D \frac{\partial M}{\partial x} = h_m (C_{\text{sup}} - C_{\text{air}}), \quad (t \geq 0, x = L) \quad (2.5)$$

$$K \frac{\partial T}{\partial x} = H (T_{\text{air}} - T_{\text{sup}}) + H_v D \rho_s \frac{\partial M}{\partial x}, \quad (t \geq 0, x = L) \quad (2.6)$$

em que M_0 , T_0 e L_0 representam as condições iniciais associadas a M , T e L , respectivamente. H e h_m representam os coeficientes de transferência de calor e massa, respectivamente. C_{air} e C_{sup} representam as umidades do ar e da superfície do sólido, respectivamente. T_{air} e T_{sup} representam as temperaturas do ar e da superfície do sólido, respectivamente, K é a condutividade térmica e H_v é o calor de vaporização.

Neste modelo, a primeira condição (Equação 2.3) representa a condição inicial considerada para a integração do sistema diferencial. Já a Equação 2.4 diz que os fluxos de massa e calor em $x=0$ para qualquer instante de tempo devem ser iguais a zero (condição de simetria). Já as Equações 2.5 e 2.6 descrevem que todo o fluxo de calor que chega na superfície $x=L$ é transferido por convecção, sendo que para a última equação também considera-se o efeito da vaporização.

Conforme comentado anteriormente, a adimensionalização é uma técnica de grande interesse em engenharia devido às vantagens inerentes desta abordagem (facilidade de análise do modelo adimensionalizado e resolução do sistema diferencial original). Neste contexto, para fins de adimensionalização do modelo original considera-se que a difusividade é constante e os seguintes grupos adimensionais (SHAHARI; HIBBERD, 2013):

$$\tau = \frac{Dt}{L_0^2} \quad (2.7)$$

$$\xi = \frac{x}{L_0} \quad (2.8)$$

$$W = \frac{M}{M_0} \quad (2.9)$$

$$\theta = \frac{T - T_0}{T_{air} - T_0} \quad (2.10)$$

em que τ é a variável adimensional para o tempo, ξ é a variável adimensional para o comprimento, W é a variável adimensional para a umidade e θ é a variável adimensional para a temperatura.

A partir da manipulação algébrica do modelo original considerando os grupos adimensionais apresentados, obtêm-se o seguinte modelo definido pelas equações 2.11 e 2.12:

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial W}{\partial \xi} \right), \quad (\tau \geq 0, 0 \leq \xi \leq 1) \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = L_e \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right), \quad (\tau \geq 0, 0 \leq \xi \leq 1) \quad (2.12)$$

onde L_e é o número de Lewis (α/D). Analogamente, as condições iniciais e de contorno são apresentadas em função destes grupos adimensionais. Assim, a partir de manipulações algébricas chegou-se ao seguinte conjunto de condições iniciais para a umidade e para a temperatura apresentados nas equações 2.13 e 2.14.

$$W = 1, \quad (\tau = 0, 0 \leq \xi \leq 1) \quad (2.13)$$

$$\theta = 0, \quad (\tau = 0, 0 \leq \xi \leq 1) \quad (2.14)$$

Já as condições de contorno são dadas pelas equações 2.15, 2.16 e 2.17.

$$\frac{\partial W}{\partial \xi} = \frac{\partial \theta}{\partial \xi} = 0, \quad (\tau \geq 0, \xi = 0) \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial W}{\partial \xi} = -\Phi \left(\phi(\theta_{\text{sup}}) f(W) - 1 \right), \quad (\tau \geq 0, \xi = 1) \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \xi} = Bi(1 - \theta_{\text{sup}}) + \frac{M_0}{L_e} \lambda \frac{\partial W}{\partial \xi}, \quad (\tau \geq 0, \xi = 1) \quad (2.17)$$

onde θ_{sup} representa a temperatura correspondente a condição $\xi=1$. Φ , Bi (Número de Biot) e λ são grupos adimensionais dados, respectivamente, pelas equações 2.18, 2.19 e 2.20.

$$\Phi = \frac{h_m L_0 C_{\text{air}}}{\rho_s D M_0} \quad (2.18)$$

$$Bi = \frac{H L_0}{K} \quad (2.19)$$

$$\lambda = \frac{H_v}{C_p (T_{\text{air}} - T_0)} \quad (2.20)$$

Cabe ressaltar que ϕ e f apresentados na Equação 2.16 representam funções adimensionais que dependem da temperatura na superfície do sólido e da umidade do produto a ser seco, respectivamente.

2.2 Resolução Numérica do Problema de Interesse

Para a resolução do sistema de equações diferenciais apresentado na seção anterior, foi considerado o Método das Linhas (PINTO; LAGE, 2001). Basicamente, essa abordagem numérica consiste na transformação das equações diferenciais parciais originais em um sistema de equações diferenciais ordinárias através da discretização de apenas uma das variáveis independentes (geralmente a variável geométrica) dos modelos originais. Neste

caso, definindo-se o domínio discretizado em termos da variável espacial, o novo sistema de equações foi integrado em relação à variável temporal. Assim, pode-se dizer que, em cada ponto discretizado na variável espacial, o sistema foi integrado, isto é; para cada ponto discretizado acompanha-se a evolução temporal de um dado ponto do domínio da variável espacial (sensor numérico).

Para o sistema em análise, as derivadas parciais de segunda ordem com relação à variável espacial ξ foram aproximadas considerando as fórmulas de diferenças finitas. Para essa finalidade, foram consideradas as seguintes aproximações para as variáveis W_i e θ_i :

$$\frac{\partial^2 W_i}{\partial \xi^2} = \frac{W_{i-1} - 2W_i + W_{i+1}}{\Delta \xi^2} \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial^2 \theta_i}{\partial \xi^2} = \frac{\theta_{i-1} - 2\theta_i + \theta_{i+1}}{\Delta \xi^2} \quad (2.22)$$

Considerando as aproximações acima, o modelo original foi reescrito em termos do ponto genérico i ($i=1, \dots, N$, em que N é o número de pontos de discretização, isto é, o número de equações diferenciais que devem ser resolvidas):

$$\frac{dW_i}{d\tau} = \frac{W_{i-1} - 2W_i + W_{i+1}}{\Delta \xi^2} \quad (2.23)$$

$$\frac{d\theta_i}{d\tau} = L_e \left(\frac{\theta_{i-1} - 2\theta_i + \theta_{i+1}}{\Delta \xi^2} \right) \quad (2.24)$$

Analogamente, a condição inicial e as condições de contorno também foram reescritas em função de fórmulas de diferenças finitas apropriadas para os pontos $\xi=0$ e $\xi=1$:

$$W_1 = 1 \quad (2.25)$$

$$\theta_1 = 0 \quad (2.26)$$

Já as condições de contorno são dadas por:

$$\frac{W_2 - W_1}{\Delta \xi} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{\Delta \xi} = 0 \quad (2.27)$$

$$\frac{W_N - W_{N-1}}{\Delta \xi} = -\Phi(\phi(\theta_N).f(W_N)-1) \quad (2.28)$$

$$\frac{\theta_N - \theta_{N-1}}{\Delta \xi} = Bi(1 - \theta_N) + \frac{M_0}{L_e} \lambda \left(\frac{(3W_N - 4W_{N-1} + W_{N-2})}{2\Delta \xi} \right) \quad (2.29)$$

Com o sistema diferencial de primeira ordem definido, bem com todos os parâmetros, o mesmo pode ser resolvido numericamente considerando o Método de Runge-Kutta-Fehlberg (RUGGIERO, 1996).

3. EVOLUÇÃO DIFERENCIAL E PROBLEMA INVERSO

Apresentada a modelagem matemática do processo na sua forma adimensional e a metodologia para a sua resolução, esta seção consiste de uma breve descrição do algoritmo de Evolução Diferencial e de problemas inversos.

3.1 Problema de Otimização: Formulação Matemática e Classificação

Matematicamente, o problema de otimização consiste em minimizar e/ou maximizar um vetor de funções objetivo, sujeitas ou não, a restrições de igualdade, desigualdade e restrições laterais. Este pode ser escrito conforme as equações 3.1, 3.2, 3.3 e 3.4 (VANDERPLAATS, 1999).

$$\min(\text{ou } \max) FO(X), X = [X_1, X_2, \dots, X_n]^T \quad (3.1)$$

sujeito a:

$$p_L(X) = 0, L = 1, 2, \dots, k \quad (3.2)$$

$$g_j(X) \geq 0, j = 1, 2, \dots, J \quad (3.3)$$

$$X_i^L \leq X \leq X_i^U, i = 1, 2, \dots, n \quad (3.4)$$

onde FO representa a função objetivo, g e p são vetores que representam as restrições de desigualdade e igualdade, respectivamente e X^L e X^U os limites inferior e superior do vetor de variáveis de projeto X . O vetor de funções objetivo e as funções de restrições podem ser funções lineares ou não lineares em relação às variáveis de projeto, implícitas ou explícitas, calculadas por técnicas analíticas ou numéricas.

Como descrito no capítulo de introdução, os métodos de otimização são classificados em duas classes: a Determinística (ou Clássica) e a Não-Determinística (Técnicas Inspiradas na Natureza ou Heurística ou Evolutiva ou Natural), conforme observado na Figura 3.1 de DEB (2001).

Os Métodos Clássicos são fundamentados em princípios do Cálculo Diferencial e Integral, ou seja, fazem uso de informações sobre o gradiente da função objetivo e das restrições para a determinação da direção de busca do ótimo. De forma geral, pode-se dizer

que estes possuem como grande vantagem, rápida taxa de convergência quando uma “boa” estimativa inicial para o projeto for fornecida, o que implica em um pequeno número de avaliações da função objetivo. Contudo, estes métodos têm uma inabilidade intrínseca em lidar com mínimos locais. Como tais métodos investem todo esforço em um único ponto do espaço de projeto, ao se depararem com mínimos locais não conseguem avançar, convergindo prematuramente para um mínimo local (VANDERPLAATS, 1999).

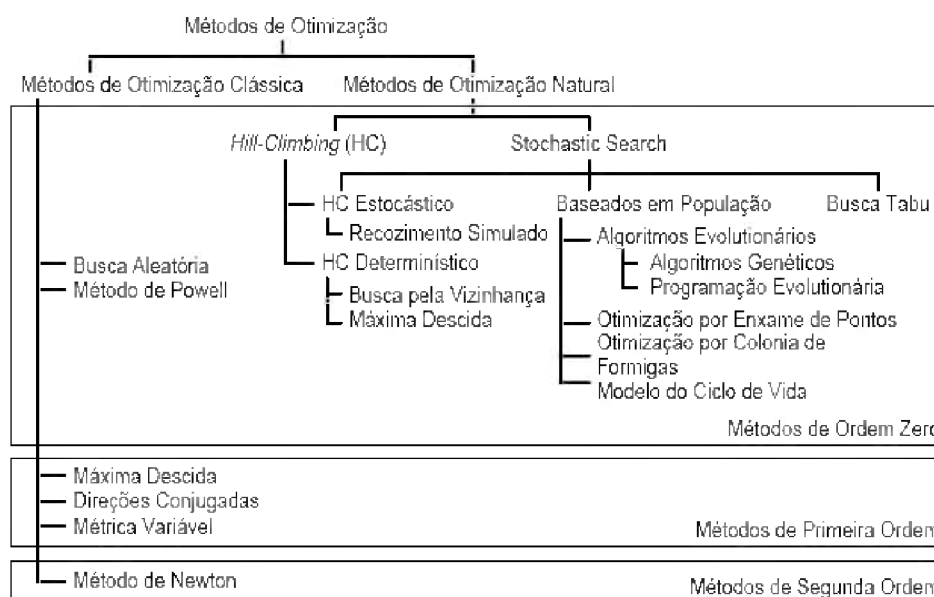


Figura 3.1 - Classificação dos Métodos de Otimização.

Já as técnicas inspiradas na natureza são inspiradas em fenômenos naturais, físicos, químicos, biológicos ou em abordagens puramente estruturais (HAUPT; HAUPT, 2004; DEB, 2001; LOBATO, 2008). Nessa metodologia, a função objetivo é avaliada várias vezes, sendo possível trabalhar com vários pontos do espaço de projeto ao mesmo tempo (população de pontos candidatos à solução do problema de otimização) em uma iteração (geração), o que naturalmente eleva o custo computacional destes métodos (DEB, 2001; LOBATO, 2008). Entretanto, esta dificuldade é compensada pela menor probabilidade que estes métodos têm de se deixarem prender em mínimos locais, isto é, são reconhecidamente métodos de busca global (DEB, 2001).

A seguir será apresentada o principal representante da classe de métodos estruturais, a saber, o algoritmo de Evolução Diferencial.

3.2 Algoritmo de Evolução Diferencial

O algoritmo de ED, desenvolvido por STORN; PRICE (1995), configura-se como uma das principais abordagens estruturais empregadas para a resolução dos problemas de otimização. O seu sucesso se deve a sua simplicidade conceitual, por ser de fácil aplicabilidade e pela quantidade de estudos de casos distintos já estudados pela literatura especializada. Em linhas gerais, esta poderosa ferramenta de otimização consiste na realização de operações vetoriais para a geração de uma população de candidatos a solução do problema. Neste caso, a diferença ponderada entre dois indivíduos (genitores secundários) é adicionada a um terceiro indivíduo (genitor principal). O indivíduo gerado através deste esquema é avaliado pela função objetivo e pode inclusive substituir indivíduos mal sucedidos nas gerações seguintes. O procedimento geral adotado neste algoritmo de otimização é dado pelas seguintes etapas (STORN *et al.*, 2005):

- Inicialmente, gera-se uma população inicial com NP soluções factíveis (tamanho da população), isto é; cada variável de projeto satisfaz o domínio definido pelo usuário (a solução do problema deverá ser encontrada dentro deste domínio);
- Seleciona-se um indivíduo (genitor principal), de forma aleatória, para ser substituído. Dois outros diferentes indivíduos (genitores secundários) são selecionados para realizarem a subtração vetorial;
- Adiciona-se ao valor atual do indivíduo o resultado desta operação, sendo esta ponderada por um parâmetro, a saber, a taxa de perturbação (F), também definida pelo usuário. Este procedimento representa o operador de cruzamento no algoritmo;
- A partir desta operação, modifica-se o valor do indivíduo selecionado, a depender do valor da probabilidade de cruzamento (CR) definida pelo usuário;
- Se o vetor resultante apresenta um melhor valor em termos da função objetivo, este substitui o candidato previamente escolhido, caso contrário, o candidato previamente escolhido é mantido na população;
- Este procedimento é repetido de forma que uma nova população, formada por novos e indivíduos remanescentes da população anterior, formam a nova população do algoritmo;
- Para finalizar o algoritmo, adota-se como critério de parada o número máximo de gerações. Cabe ressaltar que outras estratégias para finalizar o processo evolutivo também podem ser adotadas.

Com relação à escolha dos parâmetros deste algoritmo, STORN; PRICE (1995) aconselham o uso dos seguintes valores: número de indivíduos da população como sendo um valor entre 5 e 10 vezes o número de variáveis de projeto, taxa de perturbação F entre 0,2 e 2,0 e probabilidade de cruzamento CR entre 0,1 e 1,0. Já o número de gerações deve ser avaliado para cada estudo de caso.

3.3 Problemas Inversos

Os problemas abordados em engenharia e áreas afins podem ser classificados em dois grandes grupos: os problemas diretos e os problemas inversos. A distinção entre o que seja um problema direto ou inverso para um dado fenômeno está ligada à interpretação das entradas e saídas do sistema em estudo como mostrado na Figura 3.2.

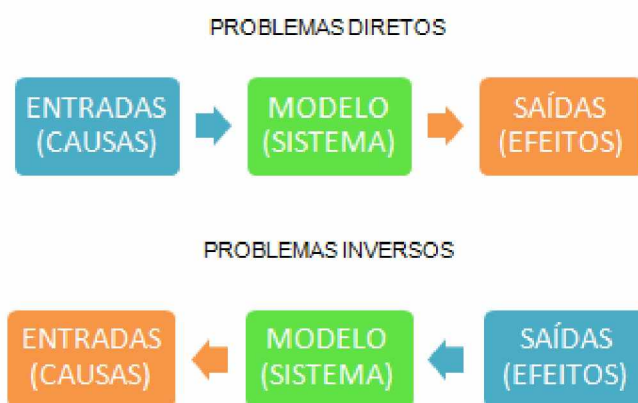


Figura 2.2 - Problemas Diretos e Inversos
Fonte: SILVA-NETO, MOURA-NETO (2005).

Os problemas diretos são aqueles que, conhecido uma determinada entrada, o seu efeito é obtido a partir da resolução do modelo que o representa. Como exemplo, conhecendo-se o modelo e os parâmetros de um secador, pode-se simular as distribuições de umidade e temperatura. Já no problema inverso deseja-se determinar características do modelo e/ou os parâmetros do sistema, uma vez conhecidas tanto a entrada como a saída. Como exemplo deste tipo de problema pode-se citar a determinação dos parâmetros das equações constitutivas através do uso de dados experimentais.

O estudo e a aplicabilidade dos problemas inversos é de grande importância pois, só é possível simular o modelo considerando diferentes condições de operação, se for conhecido os parâmetros que caracterizam este modelo.

4. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Nesta seção são apresentados os resultados obtidos considerando duas análises, a saber, a influência dos parâmetros do modelo adimensionalizado na distribuição de massa e temperatura do secador e os resultados obtidos com a formulação e resolução do problema inverso considerando dados experimentais sintéticos e o algoritmo de Evolução Diferencial.

4.1 Análise de Sensibilidade

Nas sessões que seguem são apresentadas as análises para alguns parâmetros do modelo, a saber, Bi , L_e , λ , M_0 e Φ . Para essa finalidade, considerou-se as equações constitutivas adimensionais 4.1 e 4.2 para a secagem da batata (WANG; BRENNAN, 1995):

$$\phi(\theta_{\text{sup}}) = 0,0364\theta_{\text{sup}}^2 + 0,0108\theta_{\text{sup}} + 0,0119 \quad (4.1)$$

$$f(W) = \frac{2,1667}{C_{\text{air}}} \left(\frac{(WM_0)^{2,38}}{0,062^{2,38} + (WM_0)^{2,38}} \right) \quad (4.2)$$

Em todas as simulações, para a resolução do sistema de equações diferenciais foi considerado o Método de Runge-Kutta-Fehlberg. Após simulações preliminares considerando diferentes valores para os pontos de discretização (N), constatou-se que valores acima de 50 pontos não resultaram em mudanças significativas nas distribuições de umidade e temperatura. Assim, em todas as simulações que se seguem foram considerados 50 pontos de discretização, isto é, o modelo final é constituído por 50 equações diferenciais.

4.1.1 - Influência do Número de Biot

Para analisar a influência do número de Biot - Bi ([0,1 0,5 1 5 10 50]) nas distribuições de umidade e temperatura adimensionais considerou-se os seguintes parâmetros fixos: $L_e=5$; $\lambda=0,5$; $M_0=0,8$ e $\Phi=0,65$ (SHAHARI; HIBBERD, 2013). A figura 4.1 apresenta a influência deste parâmetro nas distribuições de umidade e de temperatura adimensionais, considerando as variáveis dependentes calculadas no centro do material ($\xi=0$).

Na figura 4.1 observa-se em ambos os perfis de distribuição de massa e temperatura que o incremento deste parâmetro implica no aumento da velocidade na qual o estado

estacionário é encontrado. Fisicamente, o aumento do número de Biot implica no aumento do coeficiente de transferência convectivo de calor na superfície do sólido ou na redução da condutância do sólido.

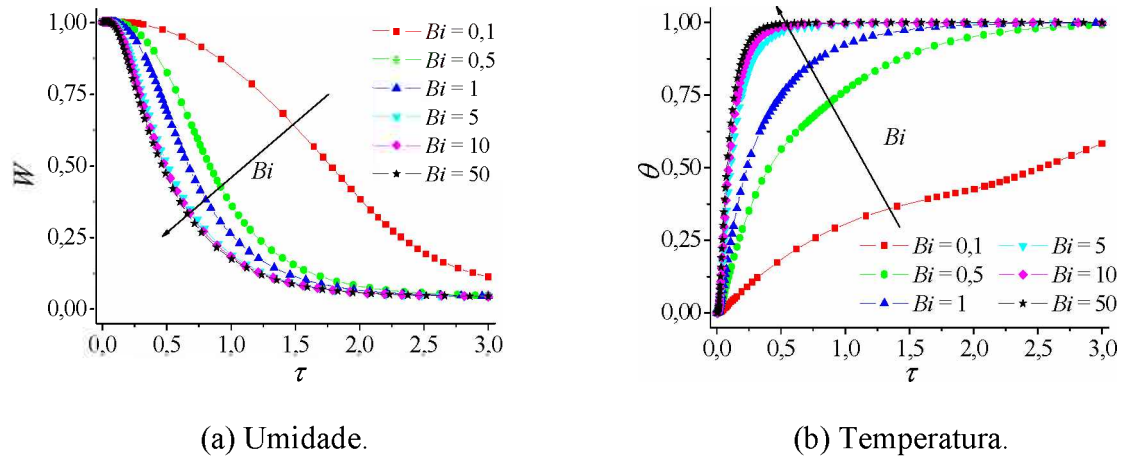


Figura 3.1 - Influência do número de Biot.

4.1.2 - Influência do Parâmetro λ

Para analisar a influência do parâmetro λ ([0 0,1 0,5 1 5 10]) nas distribuições de umidade e temperatura adimensionais considerou-se os seguintes parâmetros: $L_e=5$; $Bi=0,3$; $M_0=0,8$; $\Phi=0,65$ (SHAHARI; HIBBERD, 2013). A figura 4.2 apresenta a influência deste parâmetro nas distribuições de massa e temperatura, simulados considerando como referência o centro do material ($\xi=0$).

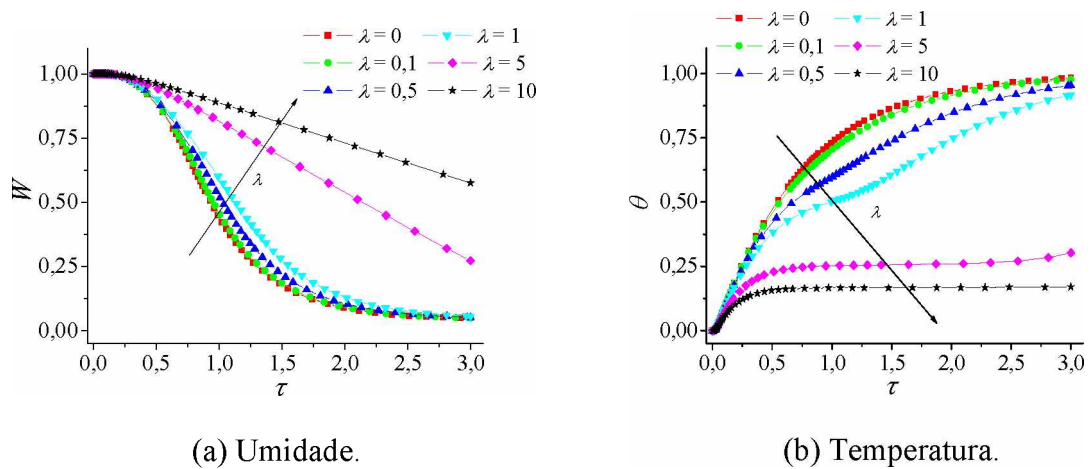


Figura 4.2 - Influência do parâmetro λ .

A partir da avaliação das figuras 4.2.a e 4.2.b observa-se que menores valores deste parâmetro favorecem a obtenção da condição de estado estacionário ($W=0$ e $\theta=1$). Do ponto de vista matemático, para o caso limite em que λ é igual a zero, o sistema torna-se desacoplado, isto é; cada balanço pode ser resolvido de forma independente, como demonstrado por SHAHARI (2012).

4.1.3 - Influência do Número de Lewis

Para analisar a influência do número de Lewis - Le ([5 10 20 50 100 150]) nas distribuições de umidade e temperatura adimensionais simulados considerou-se os seguintes parâmetros: $Bi=0,3$; $\lambda=0,5$; $M_0=0,8$ e $\Phi=0,65$ (SHAHARI; HIBBERD, 2013). A figura 4.3 apresenta a influência deste parâmetro nas distribuições de umidade e de temperatura adimensionais no centro do material ($\xi=0$).

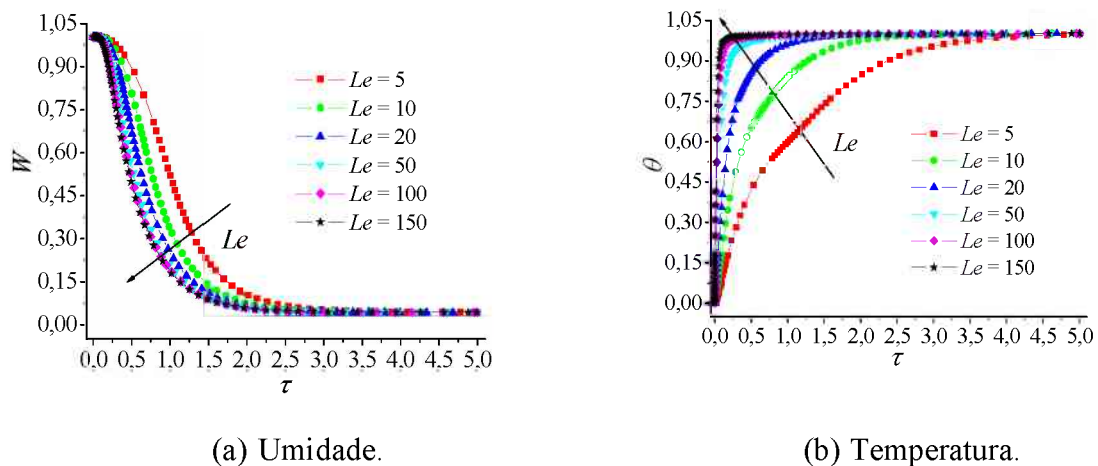


Figura 4.3 - Influência do número de Lewis.

Como pode ser observado na figura 4.3, o aumento do número de Lewis implica no aumento da velocidade em que a condição de estado estacionário é encontrada, isto é; o aumento deste parâmetro favorece os mecanismos de transferência de massa e energia no que tange o estado estacionário. Fisicamente, conforme ressaltado por SHAHARI (2012), se o valor deste parâmetro aumenta, as temperaturas no interior e na superfície do sólido se igualam.

4.1.4 - Influência da Umidade Inicial

A análise da influência da umidade inicial – M_0 ([0,4 0,5 0,6 0,7 0,8 0,9]) nas distribuições de umidade e temperatura adimensionais considerou-se os seguintes parâmetros (SHAHARI; HIBBERD, 2013): $Bi=0,3$; $\lambda=0,5$; $L_e=5$ e $\Phi=0,52/M_0$. A figura 4.4 apresenta a influência deste parâmetro nos perfis de umidade e temperatura adimensionais no centro do material ($\zeta=0$).

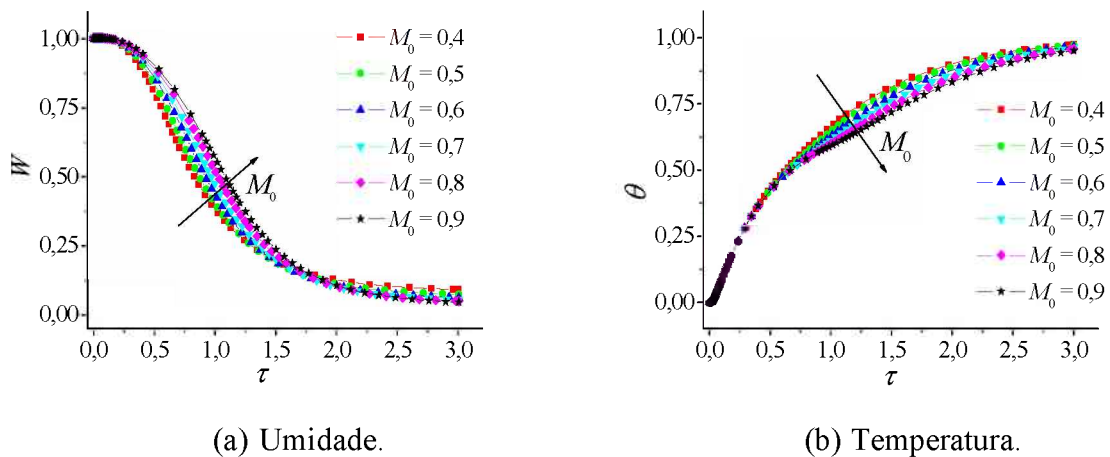


Figura 4.4 - Influência da umidade inicial.

Conforme constatado nas figuras 4.4.a e 4.4.b, para tempos superiores a 0,5; observa-se pequenas variações crescentes e decrescentes nos perfis de umidade e variações decrescentes para os perfis de temperatura. Em relação aos outros parâmetros estudados, percebe-se uma menor influência da umidade inicial nas distribuições de umidade e temperatura adimensionais.

4.1.5 - Influência do Parâmetro Φ

Para analisar a influência do parâmetro Φ nas distribuições de umidade e temperatura adimensionais considerou-se $\Phi=[0,32 \ 0,64 \ 1,60 \ 3,20 \ 4,80 \ 6,41]$, bem como os seguintes parâmetros (SHAHARI; HIBBERD, 2013): $Bi=0,3$; $\lambda=0,5$; $M_0=0,8$ e $L_e=5$. A figura 4.5 apresenta a influência deste parâmetro nestas distribuições.

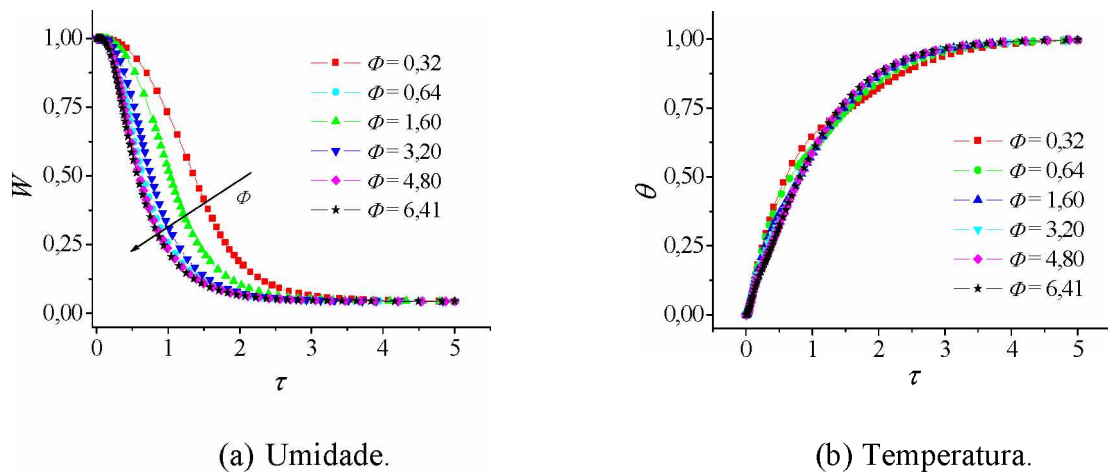


Figura 4.5 - Influência do parâmetro Φ .

Avaliando-se as distribuições de umidade, observou-se que o aumento deste parâmetro favorece a obtenção da condição de estado estacionário mais rapidamente. Por outro lado, este mesmo comportamento não pôde ser observado quando se avaliou as distribuições de temperatura, já que não podem ser observadas mudanças significativas nestes perfis em relação à esse parâmetro. Isto se deve ao fato deste parâmetro relacionar informações referentes ao balanço de massa. Assim, naturalmente, espera-se que este parâmetro influencie muito mais os perfis de umidade do que os perfis de temperatura.

4.2 - Problema Inverso

Nesta seção, o problema inverso proposto para fins da determinação dos parâmetros considerados nas equações constitutivas é formulado matematicamente, bem como é apresentado a caracterização dos dados experimentais sintéticos e os parâmetros considerados pelo algoritmo de Evolução Diferencial.

O problema inverso proposto neste trabalho consiste na determinação dos parâmetros da Equação 4.1 através da minimização do funcional J definido pelo somatório das diferenças entre os valores calculados e experimentais, conforme a equação 5.1:

$$J = \sum_{i=1}^n (W^{sim} - W^{exp})^2 + \sum_{i=1}^n (\theta^{sim} - \theta^{exp})^2 \quad (5.1)$$

em que W^{sim} e θ^{sim} representam os valores da umidade e temperatura adimensionais simuladas e W^{exp} e θ^{exp} representam os valores da umidade e temperatura adimensionais experimentais, e

n é o número de pontos experimentais considerados. Neste caso, deseja-se obter o valor mínimo para o funcional J através da determinação dos parâmetros A , B e C , da equação 4.1:

$$\phi(\theta_{\text{sup}}) = A\theta_{\text{sup}}^2 + B\theta_{\text{sup}} + C \quad (4.1)$$

Como este trabalho é teórico-computacional, não se dispõe de dados experimentais. Assim, para fins da formulação do problema inverso, considera-se dados experimentais sintéticos, conforme a equação 4.2:

$$\Omega_i^{\text{exp}} = \Omega_i^{\text{sim}}(Z_{\text{exact}}) + \sigma r_i \quad (4.2)$$

em que Ω^{sim} representa a distribuição de umidade (ou temperatura) conhecendo-se o vetor de incógnitas (Z_{exact}) do problema de otimização (variáveis de projeto), σ representa a estimativa para o desvio padrão “experimental” (para representar os erros de medida) e r_i é um número aleatório na faixa $[-1, 1]$.

Neste sentido, admitindo que os seguintes parâmetros do equacionamento que representa o processo de secagem da batata são conhecidos ($Bi=0,3$; $L_e=5$; $\Phi=0,65$; $\lambda=0,5$; $C_{\text{air}}=0,025$; $M_0=0,8$; $A=0,0364$; $B=0,0106$ e $C=0,0120$), o mesmo pode ser simulado e as distribuições de umidade e temperatura são obtidas. De posse destes valores, e a partir da definição do desvio padrão, geram-se dados experimentais, e estes são conhecidos como “dados experimentais sintéticos”.

Para o problema inverso proposto considera-se que todos os parâmetros do equacionamento são conhecidos, exceto os parâmetros A , B e C da Equação 4.2. Assim, com os dados experimentais sintéticos, pode-se aplicar o algoritmo de Evolução Diferencial para a obtenção destes parâmetros. Para esta finalidade, define-se os seguintes parâmetros do algoritmo: 25 indivíduos na população, 250 gerações, taxa de perturbação e probabilidade de cruzamento iguais a 0,8 e estratégia DE/rand/1/bin (STORN; PRICE, 1995). Para estes parâmetros deve ser mencionado que são necessárias $25+25 \times 250$ avaliações da função objetivo em cada uma das 20 execuções do algoritmo (para a obtenção dos valores – melhor, médio e pior – que serão apresentados nas tabelas a seguir). Além disso, considera-se a seguinte faixa para as variáveis de projeto: $0,00546 \leq A \leq 0,0637$; $0,00159 \leq B \leq 0,01855$ e $0,0018 \leq C \leq 0,021$. Cabe ressaltar que estas faixas foram definidas a partir dos valores reais considerados para a geração dos pontos experimentais sintéticos e apresentados na Equação 4.1.

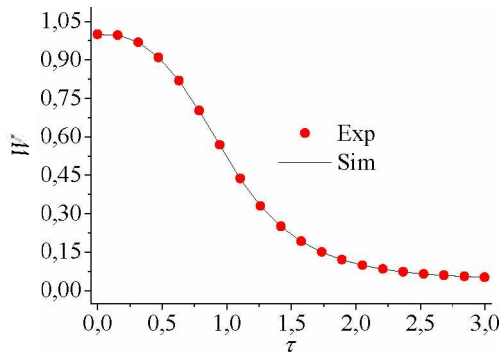
A Tabela 4.1 apresenta os melhores, os piores e os resultados médios obtidos considerando três estudos de caso, a saber, o primeiro com desvio padrão igual a zero (sem erros nas medidas), e o segundo e o terceiro com desvios padrão iguais a 5 e 10% (erros de medida), respectivamente.

Tabela 4.1 - Resultados obtidos para os três estudos de casos considerados usando o algoritmo de Evolução Diferencial.

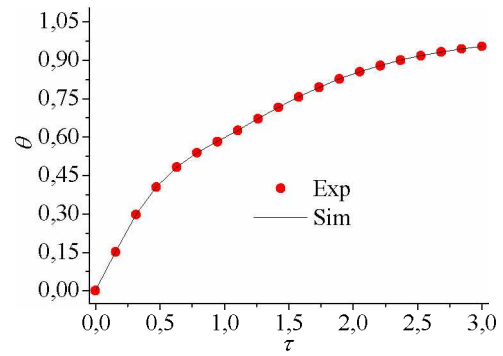
Ruído		$A.10^{02}$	$B.10^{02}$	$C.10^{02}$	J (Equação (5.1))
0 %	Pior	3,6399	1,0601	1,2000	$9,4249 \times 10^{-16}$
	Médio	3,6399	1,0601	1,2000	$2,3246 \times 10^{-16}$
	Melhor	3,6399	1,0601	1,2000	$2,1912 \times 10^{-16}$
5 %	Pior	2,7444	1,3366	1,2944	$3,5575 \times 10^{-02}$
	Médio	2,7425	1,3352	1,2935	$3,2555 \times 10^{-02}$
	Melhor	2,7432	1,3356	1,2903	$3,1567 \times 10^{-02}$
10 %	Pior	1,7566	1,4658	1,4443	$1,9479 \times 10^{-01}$
	Médio	1,7244	1,4337	1,4944	$1,3542 \times 10^{-01}$
	Melhor	1,7177	1,4267	1,4669	$1,2512 \times 10^{-01}$
Real	-	3,6400	1,0600	1,2000	-

Nesta tabela, quando nenhum ruído é considerado ($\sigma = 0\%$), o algoritmo de Evolução Diferencial foi capaz de estimar os parâmetros das equações constitutivas satisfatoriamente, como pode ser observado no valor do funcional J . Por outro lado, quando ruído é considerado ($\sigma = 5$ e 10%) boas estimativas para estes parâmetros são obtidas. Este resultado já era esperado, já que a inserção de ruído aos dados experimentais sintéticos faz com que o valor das variáveis de projeto se distancie do valor “real” considerado ($A=0,0364$; $B=0,0106$ e $C=0,0120$) para a geração dos dados experimentais sintéticos. Assim, quanto maior este valor, mais deteriorado é o valor do funcional J em relação ao valor “real”.

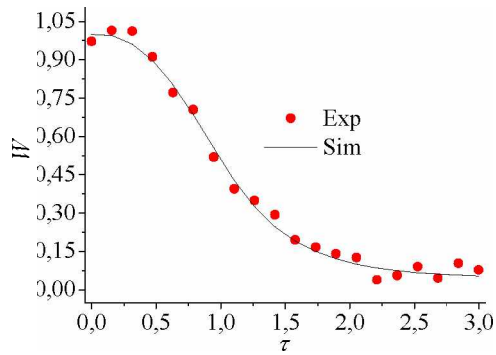
As Figuras 4.6, 4.7 e 4.8 apresentam as distribuições de umidade e temperatura experimentais (Exp) e simuladas (Sim) em $\xi=0$ (centro) considerando as melhores soluções (ver a Tabela 4.1) e diferentes valores para o ruído ($\sigma=0$, 5 e 10%), respectivamente.



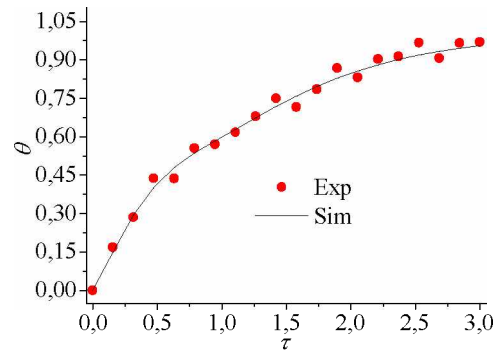
(a) Umidade.



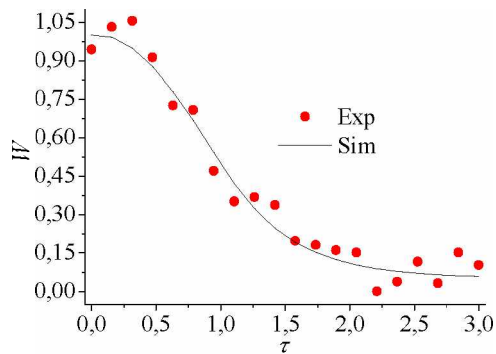
(b) Temperatura.

Figura 4.6 - Distribuições de umidade e temperatura no centro para $\sigma=0\%$.

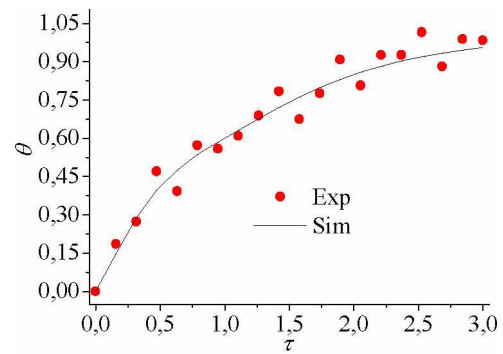
(a) Umidade.



(b) Temperatura.

Figura 4.7 - Distribuições de umidade e temperatura no centro para $\sigma=5\%$.

(a) Umidade.



(b) Temperatura.

Figura 4.8 - Distribuições de umidade e temperatura no centro para $\sigma=10\%$.

De forma geral, nestas figuras observa-se que uma boa correspondência entre os dados experimentais e simulados para os casos onde o ruído é considerado e a coincidência dos

valores para o caso sem ruído. Isto demonstra a qualidade do ajuste obtido pelo algoritmo de Evolução Diferencial.

5. CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

O presente trabalho teve por objetivo avaliar a influência de alguns grupos adimensionais nas distribuições de umidade e temperatura adimensionais no processo de secagem da batata e formular e resolver um problema inverso considerando dados experimentais sintéticos e o algoritmo de Evolução Diferencial. Para a simulação do modelo, foi aplicado o Método das Linhas. Assim, o problema original (diferencial parcial com duas variáveis independentes) foi transformado em um equivalente (diferencial ordinário com uma única variável independente) a partir do uso de fórmulas de diferenças finitas.

Em se tratando da análise dimensional, foram avaliados a influência do número de Biot (Bi), do número de Lewis (L_e), da umidade inicial (M_0) e dos parâmetros λ e Φ . De forma geral, constatou-se que cada um dos parâmetros influencia de forma variada nas distribuições de umidade e temperatura adimensionais, sendo que Bi , L_e e os parâmetros λ e Φ foram os que mais influenciaram as distribuições analisadas.

Já para o problema inverso, foi possível constatar que o algoritmo de Evolução Diferencial foi capaz de obter os parâmetros do modelo para $\sigma=0\%$ e estimativas satisfatórias para os parâmetros quando $\sigma=5\%$ e $\sigma=10\%$. Observa-se que o aumento deste ruído, deteriora o valor da função objetivo.

Como proposta de trabalho futuro pretende-se avaliar o efeito do encolhimento nas distribuições obtidas considerando dados experimentais reais.

Finalmente, cabe ressaltar que o presente trabalho originou duas publicações em anais de eventos, a saber:

- Háysila Lourrane Silva, Fran Sérgio Lobato e Nor Azni Shahari, “**INFLUÊNCIA DE GRUPOS ADIMENSIONAIS NOS PERFIS DE UMIDADE E TEMPERATURA NO PROCESSO DE SECAGEM DE ALIMENTOS**”, XXII Jornada em Engenharia Química e IV Semana da Pós-Graduação em Engenharia Química, Faculdade de Engenharia Química, Universidade Federal de Uberlândia, 25-29 de Setembro de 2017, Uberlândia-MG.
- Háysila Lourrane Silva, Fran Sérgio Lobato, Edu Barbosa Arruda, Nor Azni Shahari, “**DETERMINATION OF CONSTITUTIVE EQUATIONS IN A SINGLE PHASE HEAT AND MASS MODEL USING DIFFERENTIAL EVOLUTION**”, XX Encontro Nacional de Modelagem Computacional e VIII Encontro de Ciência e

Tecnologia de Materiais, 16 a 19 de Outubro de 2017, Instituto Politécnico, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Nova Friburgo-RJ.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ARRUDA, E.B. Comparação do desempenho do secador roto fluidizado com o secador rotatório convencional: secagem de fertilizantes. Uberlândia, UFU, 2008. 176p.
- CELESTINO, S.M.C. Princípios de Secagem de Alimentos. Planaltina, DF: Embrapa Cerrados, 2010. 51p.
- DEB, K. Multi-objective Optimization using Evolutionary Algorithms. Wiley International Series in Systems and Optimization, 2001. 498p.
- EIK, N.M. Avaliação de pré-tratamentos e aplicação de coberturas comestíveis na secagem de frutas. Campinas, UNICAMP, 2008. 151p.
- HAUPT, R.L.; HAUPT, S.E. Practical Genetic Algorithms. 2. ed. New York, Wiley-Interscience, 2004.
- KEEY, R.B. Drying: principles and practice. Oxford: Pergamon, 1975.
- LIMA, L.A.; SILVA, J.B.; LIMA, A.G.B. Transferência de calor e massa durante a secagem de sólidos com forma arbitrária: Uma abordagem concentrada. Jaboticabal, 2003.
- LOBATO, F.S. Otimização Multi-objetivo para o Projeto de Sistemas de Engenharia. Uberlândia, UFU, 2008. 354p.
- PINTO, J.C.; LAGE, P.L.C. Métodos Numéricos em Problemas de Engenharia Química. 1 ed. Rio de Janeiro, 2001. E-Book.
- RUGGIERO, M.A.G.; LOPES, V.L.R. Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais. 2. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 1996.
- SHAHARI, N.A. Mathematical Modelling of Drying Food Products: Application to Tropical Fruits. Malaysia, University of Nottingham, 2012. 229p.
- SHAHARI, N.A.; HIBBERD, S. Mathematical Modelling of Shrinkage Effect During Drying of Food. IEEE Colloquium on Humanities, Science & Engineering Research (CHUSER 2012), December 3-4, Kota Kinabalu, Sabah, Malaysia, 2012.
- SHAHARI, N.A.; HIBBERD, S. Analysis of Single Phase Moisture and Heat Model of Food Drying. 4th International Conference of Mathematical Models in Engineering and Computer Science (Brosov, Romania), (2013), 137p.
- SILVA, J.C. Secagem de grãos. Rev. Grãos Brasil: Da Semente ao Consumo, Maringá, Ano III, n. 14, p. 10 -14, 2004.
- SILVA-NETO, A.J.; MOURA-NETO, F.D. Problemas Inversos: Conceitos Fundamentais e Aplicações. Rio de Janeiro, Ed. UERJ, 2005. 168p.

STORN, R.; PRICE, K. Differential Evolution: A Simple Evolution Strategy for Fast Optimization. Dr. Dobb's Journal 22, p. 18-24, 1997.

STORN, R.; PRICE, K.; LAMPINEN, J.A. Differential Evolution: A Practical Approach to Global Optimization. 1.ed. Springer - Natural Computing Series, 2005. 539p.

TADINI, C.C. et al. Operações unitárias na indústria de alimentos. Ed. LTC, vol. 2, 2016. 652p.

WANG, N.; BRENNAN, J. Changes in structure, density and porosity of potato during dehydration. Journal of Food Engineering 24, p. 61-76, 1995.

VANDERPLAATS, G.N. Numerical Optimization Techniques for Engineering Design. Vanderplaats Research and Development, Inc., 3rd ed. 1999.

