



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA  
BACHARELADO EM MATEMÁTICA

Programação Linear: Estudo teórico e aplicações do  
Método Simplex na resolução de problemas de  
otimização

CARLOS DANIEL PEREIRA DE OLIVEIRA

ITUIUTABA-MG

2023

CARLOS DANIEL PEREIRA DE OLIVEIRA

Programação Linear: Estudo teórico e aplicações do  
Método Simplex na resolução de problemas de  
otimização

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Ciências Exatas e Naturais do Pontal UFU como parte das exigências para a obtenção do título de **Bacharel em Matemática**.

**Orientador(a): Prof(a). Dr(a). Vanda Maria Luchesi.**

ITUIUTABA-MG

2023

Em primeiro lugar dedico à Deus, pela benção de todos os dias, saúde e sabedoria para a realização deste trabalho. Também expresso minha eterna gratidão à minha mãe Raquel Pereira de Souza, pela contribuição seja diretamente ou indiretamente neste trabalho, sendo base principal para o alcance deste objetivo acadêmico.

## AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a Deus por guiar meus passos, pela sabedoria e força para superar desafios e alcançar esta conquista em minha vida acadêmica.

Agradeço à minha mãe, Raquel Pereira de Souza, pelo alicerce, inspiração e pelo apoio incondicional. Sem a sua presença nada disso seria possível.

Também dedico à minha orientadora, Professora Doutora Vanda Maria Luchesi, pessoa e amiga fantástica. Obrigado pela orientação dedicada, paciência e apoio para comigo durante toda a realização deste trabalho.

Não posso deixar de mencionar a minha sincera gratidão ao professor Rogério Fernando Pires, pelo auxílio dado. Serei eternamente grato pelo que fez por mim.

Agradeço também aos meus amigos de faculdade, em especial à todos do Curso de Matemática.

Agradeço à banca examinadora composta pela minha orientadora Dra. Vanda Maria Luchesi, a Dra. Milena Brandão e ao Dr. José Laércio Doricio. Muito obrigado pelos dois últimos doutores citados terem aceitado a participar e pelas contribuições feitas no trabalho referido.

"O sucesso é a soma de pequenos esforços - repetidos dia sim, e no outro dia também". - Robert Collier

## RESUMO

Este trabalho propõe o estudo teórico dos principais resultados (definições, teoremas, proposições e lemas) fundamentais para a área de programação linear, focando especialmente em seus algoritmos e propriedades de otimalidade. Nesse sentido, serão apresentados quatro métodos principais para resolução de problemas de programação linear, pelos quais são conhecidos como: gráfico, Simplex, Simplex duas fases e Simplex Big M. Além disso, com o intuito de aplicar os métodos estudados mostraremos uma implementação computacional dos algoritmos gerados e a ferramenta empregada será o software Octave GNU.

**Palavras-chave:** Programação Linear. Método gráfico. Método Simplex.

## ABSTRACT

This work proposes the theoretical study of the main results (definitions, theorems, propositions and lemmas) fundamental to the area of linear programming, focusing especially on its algorithms and optimality properties. In this sense, four main methods for solving linear programming problems will be presented, which are known as: graphic, Simplex, Simplex two phases and Simplex Big M. Furthermore, with the aim of applying the methods studied, we will show a computational implementation of the algorithms generated and the tool used will be the Octave GNU software.

**Keywords:** Linear Programming. Graphichs method. Simplex method.

## Lista de Figuras

|   |                                                                       |    |
|---|-----------------------------------------------------------------------|----|
| 1 | Vértices do poliedro, reproduzida da referência [12]. . . . .         | 10 |
| 2 | Conjunto viável do PPL. . . . .                                       | 25 |
| 3 | Dados de Entrada na Janela de Comandos do software Octave GNU . . . . | 42 |
| 4 | Conjunto Convexo e Conjunto Não Convexo . . . . .                     | 48 |

## Lista de Tabelas

|    |                                                            |    |
|----|------------------------------------------------------------|----|
| 1  | Primeiro Quadro Simplex do exemplo 3.2. . . . .            | 29 |
| 2  | Segundo Quadro Simplex do Exemplo 3.2. . . . .             | 30 |
| 3  | Primeiro Quadro simplex da Fase I do exemplo 3.3. . . . .  | 33 |
| 4  | Segundo Quadro simplex da Fase I do exemplo 3.3. . . . .   | 33 |
| 5  | Terceiro Quadro simplex da Fase I do exemplo 3.3. . . . .  | 34 |
| 6  | Primeiro Quadro simplex da Fase II do exemplo 3.3. . . . . | 34 |
| 7  | Segundo Quadro simplex da Fase II do exemplo 3.3. . . . .  | 34 |
| 8  | Primeiro Quadro Método Big M do exemplo 3.4. . . . .       | 37 |
| 9  | Segundo Quadro Método Big M do exemplo 3.4. . . . .        | 37 |
| 10 | Terceiro Quadro Método Big M do exemplo 3.4. . . . .       | 37 |
| 11 | Quarto Quadro Método Big M do exemplo 3.4. . . . .         | 37 |
| 12 | Quinto Quadro Método Big M do exemplo 3.4. . . . .         | 38 |

## Lista de Notações

Aqui incluímos uma lista de notações utilizadas ao longo deste trabalho:

$\mathbb{N}$  – o conjunto dos números naturais;

$\mathbb{R}$  – o conjunto dos números reais;

$\mathbb{R}_+$  – o conjunto dos números reais não-negativos;

$\mathbb{R}^n$  – o espaço vetorial euclidiano de dimensão  $n$  (com produto interno euclidiano e a a norma correspondente);

$\mathbb{R}_+^n$  – o ortante não negativo do  $\mathbb{R}^n$ ;

$\mathbb{R}(m, n)$  – o espaço vetorial de matrizes de dimensão  $m \times n$  com entradas reais;

$x_1, \dots, x_n$  – coordenadas do elemento  $x \in \mathbb{R}^n$  na base canônica do espaço  $\mathbb{R}^n$ ;

$x_I$  – o elemento do espaço  $\mathbb{R}^{|I|}$  composto por coordenadas  $x_i$ ,  $i \in I$ , do elemento  $x \in \mathbb{R}^n$ ;

$A_1, \dots, A_m$  – linhas da matriz  $A \in \mathbb{R}(m, n)$ ;

$A^1, \dots, A^n$  – colunas da matriz  $A \in \mathbb{R}(m, n)$ ;

$\langle c, x \rangle$  – produto interno euclidiano usual entre  $x$  e  $y$ , onde  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , ou seja,  $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$ ;

$x_k = (x_1, \dots, x_k, \dots)$  – uma sequência infinita de pontos de  $\mathbb{R}^n$ , onde  $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}$ ;

$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$  – a sequência  $x_k$  converge a  $x$ ;

$X - Y$  – a diferença entre o conjunto  $X \subset \mathbb{R}^n$  e o conjunto  $Y \subset \mathbb{R}^n$  e o conjunto  $Y \subset \mathbb{R}^n$ , ou seja,  $X - Y = \{x \in X \mid x \notin Y\}$ ;

$\inf \langle c, x \rangle$  – infímo do produto interno de  $c \in \mathbb{R}$  e  $x \in \mathbb{R}^n$ ;

$Ax$  – a multiplicação da matriz  $A$  e do elemento  $x$  (ou a imagem de  $x$  pelo operador linear  $A$ );

$A^\top$  – a matriz transposta da matriz  $A$ ;

Posto  $A$  – o posto da matriz  $A$  (ou do operador linear  $A$ );

$\wp(I)$  – conjunto das partes de  $I$ ;

$c^\top$  – vetor transposto de  $c$ , com  $c = (c_1, c_2, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$ ;

# Sumário

|          |                                                               |           |
|----------|---------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introdução</b>                                             | <b>3</b>  |
| <b>2</b> | <b>Programação Linear: Conceitos Essenciais</b>               | <b>7</b>  |
| 2.1      | Geometria de um Problema envolvendo PL . . . . .              | 9         |
| 2.2      | Dualidade em Programação Linear . . . . .                     | 19        |
| <b>3</b> | <b>Métodos</b>                                                | <b>23</b> |
| 3.1      | Método gráfico . . . . .                                      | 23        |
| 3.2      | Método Simplex . . . . .                                      | 26        |
| 3.2.1    | Variáveis artificiais . . . . .                               | 30        |
| 3.2.2    | Método Simplex das duas fases . . . . .                       | 31        |
| 3.2.3    | Método Simplex Big M (M grande) . . . . .                     | 34        |
| 3.2.4    | Resolução de Problemas de otimização via GNU Octave . . . . . | 38        |
| <b>4</b> | <b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>                                   | <b>44</b> |
| <b>5</b> | <b>REFERÊNCIAS</b>                                            | <b>45</b> |
| <b>6</b> | <b>Apêndice</b>                                               | <b>48</b> |
| <b>7</b> | <b>Anexo: Algoritmo usado na resolução dos problemas</b>      | <b>54</b> |

# 1 Introdução

A **Programação Linear** - PL enquanto ciência é uma área da Matemática amplamente empregada na otimização de problemas reais. As suas atuações são vistas em várias áreas, tais como: administração da produção, controle de estoque, logística, economia e entre outras. Os **Problemas de Programação Linear** - PPL são modelados e estruturalmente segue a seguinte configuração:

$$\min f(x) \text{ sujeito a } x \in D, \quad (1)$$

onde  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é chamada **função objetivo** (FO ou FOB) dada por  $f(x) = \langle c, x \rangle$ , com  $c \in \mathbb{R}^n$  e  $D \subset \Omega$  é denominada **conjunto viável**. Em suma, a tarefa de Programação Linear é minimizar ou maximizar uma função objetivo linear, restrita às limitações (**restrições**) expressas em um sistema linear de equações e/ou inequações  $D$ , com o adicional de que as variáveis devem ser não negativas. Para facilitar o estudo, podemos utilizar a seguinte forma padrão para representar um PPL:

$$\begin{aligned} \min f(x) &= \langle c, x \rangle \\ \text{Sujeito a: } Ax &= b \\ x &\geq 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Observe que a função objetivo  $f$  é linear e as restrições do problema estão na matriz  $A \in \mathbb{R}(m, n)$ , enquanto o vetor custo relativo  $c \in \mathbb{R}^n$  é um vetor linha, o vetor solução  $x \in \mathbb{R}^n$  um vetor coluna e  $b \in \mathbb{R}^m$ , com  $b_i \geq 0$ .

No contexto de PL, as restrições impostas serão do tipo inequações ( $\geq$  ou  $\leq$ ), equações ou até mesmo ambas. No entanto, sempre é possível redigir um PL na forma padrão.

Para transformar um problema no formato padrão basta seguir os cinco passos abaixo:

## 1. desigualdades

A presença de uma desigualdade ou inequação nas restrições de um problema pode ser convertida numa equação por meio da adição ou subtração de variáveis não-negativas, chamadas de **variáveis de folga**.

As restrições podem estar configuradas em dois formatos:

$$Ax \leq b \quad \text{ou} \quad Ax \geq b, \quad \text{com } b \geq 0$$

$$Ax + x_{n+1} = b \quad \text{ou} \quad Ax - x_{n+1} = b, \quad \text{com } x_i \geq 0, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n+1.$$

**2. termo independente  $b_i < 0$**

Se  $b_i \leq 0$  na  $i$ -ésima restrição, multiplicamos essa restrição pelo coeficiente  $-1$  para tornar  $b_i \geq 0$ .

**3. variáveis livres**

As variáveis que podem assumir valores positivos, negativos ou nulos são chamadas de **variáveis livres**. Para representar uma variável livre  $x_k$ , basta substituí-la pela diferença de duas variáveis não-negativas, isto é  $x_k = x_k' - x_k''$ ,  $x_k', x_k'' \geq 0$ .

**4. variável não positiva**

Se tivermos uma variável  $x_k \leq 0$ , podemos substituí-la no problema pela sua simétrica, ou seja,  $-x_k$ .

**5. problema de maximização**

Para problemas de maximização, podemos empregar a simetria, convertendo-o em um problema de minimização. Basta trocar a função objetivo original  $f(x)$  por  $\tilde{f}(x) = -f(x)$ .

Oficialmente, por [2] o conceito de Programação Linear foi pioneiramente explorado pelo matemático e físico francês Jean Baptiste Joseph Fourier (1768 – 1830) no ano de 1826, onde realizou estudos sobre um método para a resolução de problemas envolvendo inequações lineares e que ficou conhecido como *eliminação Fourier-Motzkin*. Este estudo levou a publicação de um método baseado em reduções de vértices de um poliedro, culminando assim um pouco mais distante na concepção do Método Simplex.

Em meados de 1939, o matemático e economista Leonid Kantorovich desenvolveu uma formulação de programação linear. Foi aplicado durante o período de Segunda Guerra Mundial, com o objetivo de planejar gastos e retornos, sendo possível reduzir os custos do exército. Nessa mesma época, o economista holandês TC Koopmans foi responsável por fazer a formulação de problemas clássicos relacionados à economia em algoritmos de Programação Linear.

De acordo com Bazaraa et al. [2], os primeiros problemas de programação linear são remetidos ao matemático George Dantzig e foram obtidos por volta de 1947 enquanto ele trabalhava para a Força Aérea dos Estados Unidos. A terminologia “programação linear” foi cunhada pelo matemático e economista T. C. Koopmans em 1948.

Em 1947, George Dantzig apresenta o método Simplex e Neuman apresenta a teoria da dualidade. O Simplex, desenvolvido pelo cientista matemático norte-americano Dantzig em 1947, constitui uma abordagem primordial para a resolução de problemas de Programação Linear.

A estratégia do Simplex consiste na análise do espaço viável de soluções para transitar eficientemente entre soluções viáveis, alcançando a solução ótima. Seu método fornece uma maneira sistemática de resolver problemas de Programação Linear em um número finito de iterações, otimizando consistentemente a função objetivo. No decorrer do trabalho, destacaremos melhor as ideias do Simplex.

Outro marco precursor na utilização de abordagens semelhantes foi em meados dos anos 1930, quando George Joseph Stigler abordou o desafio de determinar uma dieta ótima para o exército dos Estados Unidos. Nesse contexto, a ideia era equilibrar eficiência econômica e requisitos nutricionais. O problema, que permanece relevante, é frequentemente utilizado para desenvolver novas dietas e avançar pesquisas científicas.

## **ESTRUTURA E ALGUNS COMENTÁRIOS DOS TÓPICOS ABORDADOS**

Este trabalho está organizado do seguinte modo:

- No capítulo 1, apresentamos uma breve introdução ao conceito de Programação Linear, bem como alguns comentários de contexto histórico.
- No capítulo 2, damos ênfase para a base teórica da Programação Linear, destacando os conceitos-chave.
- No capítulo 3, abordamos os quatro principais métodos para a resolução de um Problema de Programação Linear: gráfico, Simplex, duas fases e Big M. Ao decorrer da explanação de cada um deles, discutiremos alguns exemplos triviais de PPL.

Resolveremos-os um através dos métodos gráfico e simplex minuciosamente e veremos que os resultados obtidos são iguais, mostrando que as soluções encontradas correspondem aos vértices do método gráfico. Também compararemos um PPL envolvendo o Método Simplex duas fases com a resolução obtida por meio do software Octave, verificando que são iguais.

- No capítulo 4, faremos as considerações finais a respeito deste trabalho.

Escolhemos, dentre os métodos de resolução de problemas de otimização linear, dedicar este trabalho a um dos principais algoritmos concebidos no século XX, conhecido como *Método Simplex*. Historicamente, o Método Simplex foi o primeiro método computacional para otimização de problemas matemáticos com restrições, e é bastante atual, pois aparece como subproblemas em vários algoritmos de uso geral.

Para implementar a resolução numérica das aplicações do método Simplex escolhemos utilizar o GNU Octave, um software livre, que fornece uma interface de linha de comando conveniente para resolver numericamente problemas lineares e não lineares e para realizar outros experimentos numéricos usando uma linguagem que é principalmente compatível com Matlab. O Octave possui ferramentas extensas para resolver problemas comuns de álgebra linear numérica, encontrar as raízes de equações não lineares, integrar funções ordinárias, manipular polinômios e integrar equações diferenciais ordinárias e equações algébricas diferenciais. É facilmente extensível e personalizável por meio de funções definidas pelo usuário escritas na própria linguagem do Octave ou usando módulos carregados dinamicamente escritos em C++, C, Fortran ou outras linguagens.

## 2 Programação Linear: Conceitos Essenciais

Neste capítulo inicial apresentamos os principais conceitos e teoremas relacionados à Programação Linear, e seguimos as notações das referências (exceto para alguns casos) [12] e [13].

**Definição 2.1 (Problema Geral de Otimização Linear)** *Convencionadamente, o Problema Geral de Otimização Linear pode ser descrito como um problema de minimização de uma função objetivo linear acoplado às restrições também lineares, conforme explicitado abaixo:*

$$\min \langle c_1, x_1 \rangle + \langle c_2, x_2 \rangle \text{ sujeito a } (x_1, x_2) \in D, \quad (3)$$

$$D = \left\{ (x_1, x_2) \in \Omega \left| \begin{array}{l} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 = b_1, \\ A_{21}x_1 + A_{22}x_2 \geq b_2. \end{array} \right. \right\}, \quad (4)$$

onde  $c_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$ ,  $c_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$ ,  $A_{11} \in \mathbb{R}(l, n_1)$ ,  $A_{12} \in \mathbb{R}(l, n_2)$ ,  $A_{21} \in \mathbb{R}(m, n_1)$ ,  $A_{22} \in \mathbb{R}(m, n_2)$ ,  $b_1 \in \mathbb{R}^l$ ,  $\Omega = \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}_+^{n_2}$ . O conjunto  $D$  é chamado **conjunto viável** (também conhecido como região viável) e é o conjunto dos pontos que satisfazem as restrições do problema. Os pontos  $x \in D$  são denominados **soluções viáveis**. A função  $f$  é chamada **função objetivo** do problema.

**Observação 2.1**  $x_2 \geq 0$  restrição abstrata conveniente neste contexto.

**Definição 2.2 (Problema Canônico de Otimização)** *Um Problema de Programação Linear é dito estar na forma canônica se a função objetivo é de minimização e todas as restrições são equações lineares. Em linguagem matemática, isso é traduzido da seguinte maneira:*

$$\min \langle c, x \rangle \text{ sujeito a } x \in D = \{x \in \Omega \mid Ax = b\}, \quad (5)$$

onde  $c = c_2 \in \mathbb{R}^n$ ,  $A = A_{12} \in \mathbb{R}(l, n)$ ,  $b = b_1 \in \mathbb{R}^l$ ,  $\Omega = \mathbb{R}_+^n$ .

Podemos transformar o Problema Geral no Problema Canônico introduzindo as variáveis adicionais

$$\min \langle c_1, u^1 - u^2 \rangle + \langle c_2, x_2 \rangle \text{ sujeito a } (u^1, u^2, x_2, y) \in \tilde{D},$$

$$\tilde{D} = \left\{ (u^1, u^2, x_2, y \in \tilde{\Omega} \mid \begin{array}{l} A_{11}(u^1 - u^2) + A_{12}x_2 = b_1, \\ A_{21}(u^1 - u^2) + A_{22}x_2 - y = b_2. \end{array} \right\},$$

onde  $\tilde{\Omega} = \mathbb{R}_+^{n_1} \times \mathbb{R}_+^{n_1} \times \mathbb{R}_+^{n_2} \times \mathbb{R}_+^{n_2}$ .

**Observação 2.2** *Existe uma correspondência biunívoca entre os conjuntos viáveis dados pelas equações 4 e 5.*

**Definição 2.3 (Hiperplano e Semi-espço)** *Seja  $a \in \mathbb{R}^n$  um vetor não-nulo e  $b \in \mathbb{R}$  um escalar.*

- *O conjunto  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid a^\top x = b\}$  é chamado de hiperplano.*
- *O conjunto  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid a^\top x \geq b\}$  é chamado de semi-espço.*

Dados um conjunto  $D \subset \mathbb{R}^n$  e uma função  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $D \subset \Omega$ . Consideremos o problema definido por (1). Daí, surgem as seguintes definições abaixo:

**Definição 2.4** *Dizemos que um ponto  $\bar{x} \in D$  é*

1. *minimizador global de (1), se*

$$f(\bar{x}) \leq f(x) \quad \forall x \in D; \tag{6}$$

2. *minimizador local de (1), se existe alguma vizinhança  $U$  de  $\bar{x}$  tal que*

$$f(\bar{x}) \leq f(x) \quad \forall x \in D \cap U. \tag{7}$$

Da definição acima, percebemos que todo minimizador global é um minimizador local, embora a recíproca não ocorra. Se para todo  $x \neq \bar{x}$  a desigualdade (6) ou (7) é estrita,  $\bar{x}$  será chamado **minimizador estrito** (global ou local, respectivamente).

**Definição 2.5 (Valor ótimo)** *Dizemos que  $\bar{v} \in [-\infty, +\infty]$  definido por*

$$\bar{v} = \inf \{f(x) \mid x \in D\}$$

*é o valor ótimo do problema (1), onde entendemos que  $\bar{v} = +\infty$  se  $D = \emptyset$ .*

Uma função pode admitir vários minimizadores locais, mas é natural que o valor ótimo (global) do problema seja sempre o mesmo.

Quando na definição temos  $v = +\infty$  ou  $v = -\infty$ , o problema (1) não possui solução global. No primeiro caso,  $D = \emptyset$ . No segundo caso,  $f$  é ilimitada inferiormente no conjunto  $D \neq \emptyset$ . Mas mesmo quando  $\bar{v}$  é finito, o minimizador global pode não existir. Um exemplo que retrata isso seria minimizar  $f(x) = e^x$  em  $\mathbb{R}$ .

## 2.1 Geometria de um Problema envolvendo PL

No contexto de programação linear o conjunto viável, ou seja, o conjunto de soluções de um sistema de equações e inequações é um poliedro. A seguir destacamos os principais elementos e propriedade do conjunto viável de um problema com PL. Sem perda de generalidade, podemos reescrever o conjunto viável  $D$  da seguinte maneira:

$$D = \{x \in \Omega \mid A_1x = b_1, A_2x \geq b_2\}.$$

Dado  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $I(x) = \{i = 1, \dots, m \mid \langle (A_2)_i, x \rangle = (b_2)_i\}$  é o conjunto de índices das restrições ativas em  $x$ , onde  $(A_2)_1, \dots, (A_2)_m$  são as linhas da Matriz  $A_2$ . Como  $D$  é um poliedro, para o estudo do conjunto viável precisamos das seguintes definições:

**Definição 2.6 (Vértice)** *Um ponto  $\hat{x} \in D$  é um **vértice** se as linhas da matriz  $A_1$  e as linhas da Matriz  $A_2$  indexadas por  $i \in I(\hat{x})$ , formam em  $\mathbb{R}^n$  um sistema de posto  $n$ .*

**Definição 2.7** *Considere  $D$  um poliedro qualquer. Dizemos que  $x \in D$  é um vértice de  $D$  se existe algum vetor  $c \in \mathbb{R}^n$  tal que  $c^\top x < c^\top y$ ,  $\forall y \in D$ , com  $y \neq x$ .*

**Definição 2.8 (Tipos de vértice)** *Se o número de elementos deste sistema é igual a  $n$ , então o vértice  $\hat{x}$  é um **vértice não-degenerado**. Já se o número de elementos é maior que  $n$ , então o vértice  $\hat{x}$  é dito **vértice degenerado**.*

Na figura 1,  $D \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n = 2$ , definido pelas desigualdades  $\langle B_i, x \rangle \geq b_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ . Podemos verificar que:

1. O vertice  $x_1$  é degenerado:  $I(x_1) = \{2, 3, 4\}$  e os vetores  $B_2, B_3, B_4$  formam uma matriz de posto  $2 = n$ ;

2. O vertice  $x_2$  é degenerado:  $I(x_2) = \{1, 3, 4\}$  e os vetores  $B_1, B_3, B_4$  também formam uma matriz de posto  $2 = n$ ;
3. O vertice  $x_3$  é não-degenerado:  $I(x_3) = \{1, 2\}$  e os vetores  $B_1$  e  $B_2$  formam uma matriz de posto  $2 = n$ ;
4. O ponto  $y$  não é um vértice:  $I(y) = \{2\}$  e  $B_2$  é uma matriz de posto  $1 < n = 2$ .

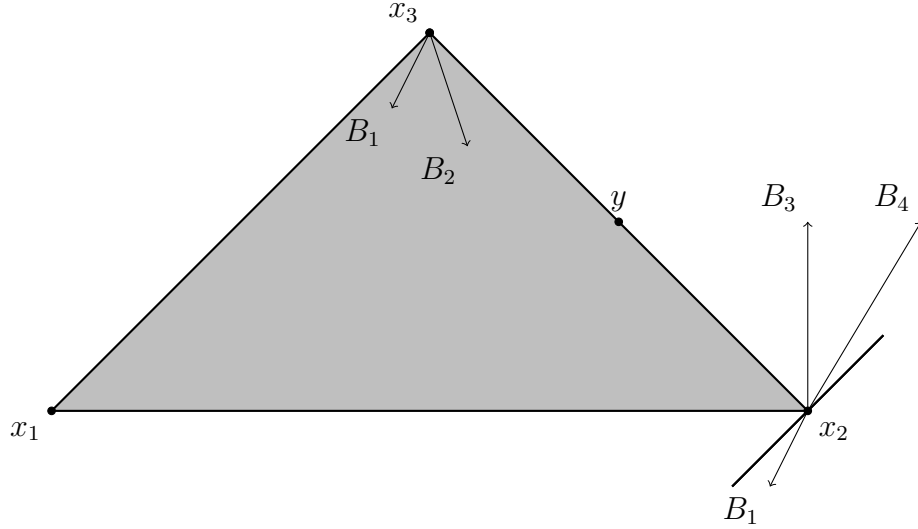


Figura 1: Vértices do poliedro, reproduzida da referência [12].

**Observação 2.3 (Condição suficiente para vértice)** Dizemos que  $\hat{x} \in D$  é vértice do poliedro se  $\hat{x}$  é a única solução do sistema linear

$$A_1 x = b_1, \quad \langle (A_2)_i, x \rangle, \quad i \in I(\hat{x}),$$

onde  $A_1 \in \mathbb{R}(l, n)$ ,  $A_2 \in \mathbb{R}(m, n)$  e  $D = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A_1 x = b_1, A_2 x \geq b_2\}$ .

**Proposição 2.1 (Finitude de um poliedro)** O número de vértices de um conjunto poliedral qualquer é finito.

**Demonstração:** Seja  $D = \{x \in \Omega \mid Ax = b\} \subset \mathbb{R}^n$  um poliedro arbitrário.

Consideremos todos os elementos do conjunto  $\wp(I)$ , onde  $I = \{1, \dots, m\}$  e  $\wp(I)$  é o conjunto das partes de  $I$ . Se a matriz  $B_I$  tem posto  $n$ , o sistema de equações lineares  $B_I x = b_I$  possui uma única solução que é um vértice (segundo a observação (2.3)). Portanto, o número de vértices não pode ser maior do que o número de diferentes conjuntos de restrições ativas. Logo, o número de vértices é finito, como queríamos provar.  $\square$

**Teorema 2.1 (Teorema dos vértices do poliedro canônico)** Para  $A \in \mathbb{R}(l, n)$ , e  $b \in \mathbb{R}^l$  quaisquer, o ponto  $\hat{x} \in D = \{x \in \Omega = \mathbb{R}_+^n \mid Ax = b\}$  é um vértice do poliedro canônico se, e somente se, as colunas  $A^j$ ,  $j \in J(\hat{x})$ , da matriz  $A$  são linearmente independentes. Se o conjunto  $J(\hat{x})$  tem  $l$  elementos então o vértice  $\hat{x}$  é não degenerado, e se o número de elementos de  $J(\hat{x})$  é menor que  $l$ , o vértice é degenerado.

**Demonstração:** A demonstração segue da definição 6.10 de Posto de uma Matriz  $A \in \mathbb{R}(l, n)$  e do Teorema do Posto 6.2 do apêndice deste trabalho.  $\square$

**Teorema 2.2** *Todo poliedro é fechado.*

**Demonstração:** Considere um poliedro  $D = \{x \in \Omega \mid Ax = b\}$ . Sejam  $x_n \in D$  uma sequência de pontos em  $D$  e suponha que seja convergente, isto é,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ . Agora, basta mostrar que  $x \in D$ . Para cada índice  $k$ , temos  $x_k \in D$  e, portanto,  $Ax_k = b$ . Logo,  $Ax = A(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = \lim_{k \rightarrow \infty} (Ax_k) = b$ , então  $x \in D$ .  $\square$

**Observação 2.4** *Seja  $D$  o conjunto viável de um PPL. Temos os seguintes casos possíveis:*

1. *Se  $D = \emptyset$ , então o PPL não tem solução viável e não possui solução ótima.*
2. *Se  $D \neq \emptyset$  é limitado, então o PPL tem solução ótima.*
3. *Se  $D \neq \emptyset$  é ilimitado (superiormente e inferiormente), temos duas subdivisões:*
  - (a)  *$f$  possui solução ótima em  $D$ . Neste caso, o PPL possui solução ótima.*
  - (b)  *$f$  não possui solução ótima em  $D$ , isto é,  $f$  pode crescer ou decrescer indefinidamente. Neste caso, o PPL não possui solução ótima.*

**Teorema 2.3** *O conjunto  $D$ , que representa as soluções viáveis de um modelo de Programação Linear, possui a propriedade de ser convexo.*

**Demonstração:** Queremos provar que  $D$  é convexo, isto é, dados dois pontos distintos  $x_1, x_2 \in D$ , o segmento de reta que os liga está inteiramente em  $D$ . Em linguagem matemática, pode ser traduzido por, [11]:

$$x_1, x_2 \in D \implies x = \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2, \quad 0 \leq \alpha \leq 1.$$

Sejam  $x_1, x_2 \in D$ , duas soluções viáveis de  $D$ , com  $x_1 \neq x_2$ . Segue que:

$$Ax_1 = b, \quad x_1 \geq 0$$

e

$$Ax_2 = b, \quad x_2 \geq 0$$

escrevendo:

$$x = \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2, \quad 0 \leq \alpha \leq 1.$$

Obtemos  $x \in D$ , pois:

1.  $Ax = A[\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2] = \alpha Ax_1 + (1 - \alpha)Ax_2 = \alpha b + (1 - \alpha)b = b.$
2.  $x \geq 0$ , visto que  $x_1 \geq 0$ ,  $x_2 \geq 0$ ,  $0 \leq \alpha \leq 1$  e  $x = \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2 \geq 0$ .

Portanto,  $D$  é um conjunto convexo. Como queríamos mostrar.  $\square$

**Definição 2.9 (Base de um vértice)** Considere o poliedro canônico  $D$  dado em (5) e um vértice  $\hat{x}$  de  $D$ . Chamamos **base do vértice**  $\hat{x}$  qualquer conjunto de  $l$  colunas linearmente independentes da matriz  $A$  que contém todas as colunas  $A^j$ ,  $j \in J(\hat{x})$ .

Ou seja,  $B = \{A^j, j \in J\}$ , onde  $J \subset \{1, \dots, n\}$ , é uma base do vértice  $\hat{x}$  se  $B$  é uma base do  $\mathbb{R}^l$  e se  $J(\hat{x}) \subset J$ .

**Definição 2.10** Seja  $A_{m \times n}$  uma matriz, com  $\text{Posto } A = m$ . Uma base associada à uma matriz é um conjunto de  $m$  vetores coluna  $a_j$  de  $A$  linearmente independentes. Os vetores  $a_j$  que formam a base são denominados **vetores base** de  $A$  e o conjunto de seus índices é chamado **conjunto de índices base** de  $A$ .

**Definição 2.11 (Variáveis básicas e não básicas)** As  $m$  variáveis correspondentes às  $m$  colunas da submatriz  $B_{m \times m}$  são chamadas de **variáveis básicas**. As demais são **variáveis não básicas**.

**Definição 2.12 (Solução básica viável)** Uma **solução básica** é qualquer solução  $x$  que satisfaz as restrições do problema obtido fixando as variáveis não básicas iguais a zero. E dizemos que  $x$  é uma **solução básica viável** se é tal que  $x \geq 0$ .

Em outras palavras, dada  $B$  uma base associada a uma matriz  $A$ . O vetor composto de  $x_B = B^{-1}b$  e  $x_R = 0$  é chamado de **solução básica**.

**Definição 2.13 (Ponto extremo)** *Seja  $D \neq \emptyset$  um poliedro. Um vetor  $x \in D$  é um **ponto extremo** de  $D$  se não existem dois vetores  $y \in D$  e  $z \in D$  com  $y, z \neq x$ , e um número real  $0 \leq \alpha \leq 1$  tal que  $x = \alpha y + (1 - \alpha)z$ .*

**Teorema 2.4** *Se  $x \in \mathbb{R}^n$  é uma solução básica viável do sistema  $Ax = b$  então  $x$  é ponto extremo do conjunto de soluções viáveis, ou seja,  $x$  é um extremo do conjunto  $D$ .*

**Demonstração:** Seja  $D$  o conjunto formado pelos pontos  $x$  tais que, [11]:

$$Ax = b$$

$$x \geq 0.$$

Suponha  $x \in \mathbb{R}^n$  uma solução viável arbitrária, e sem perda de generalidade, que as  $m$  primeiras variáveis são as variáveis básicas.

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

com todas as componentes  $x_i \geq 0$ .

Se  $x$  não é um ponto extremo do conjunto convexo  $D$ , então segue que  $x$  pode ser obtido por uma combinação convexa de outros dois pontos  $y \in D$  e  $z \in D$ , com  $y \neq z$ .

$$x = \alpha y + (1 - \alpha)z$$

$$0 \leq \alpha \leq 1.$$

Como  $y, z \in D$ , então:

$$Ay = b$$

$$Az = b$$

com  $y \geq 0, z \geq 0$ .

A partir da relação  $x = \alpha y + (1 - \alpha)z$ , obtemos as seguintes relações:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \alpha y_1 + (1 - \alpha)z_1, \\
x_2 &= \alpha y_2 + (1 - \alpha)z_2, \\
&\vdots \\
x_m &= \alpha y_m + (1 - \alpha)z_m, \\
0 &= \alpha y_{m+1} + (1 - \alpha)z_{m+1}, \\
&\vdots \\
0 &= \alpha y_n + (1 - \alpha)z_n.
\end{aligned}$$

Das relações  $0 \leq \alpha \leq 1$  e  $z \geq 0$  as últimas  $(n - m)$  relações do conjunto acima descrito só podem ser satisfeitas em um dos seguintes casos:

1.  $0 < \alpha < 1$  e  $y_{m+i} = z_{m+i} = 0$  para  $i = 1, \dots, n - m$ .

Como  $y$  e  $z$  são soluções básicas do sistema calculadas com as mesmas variáveis básicas, então  $x = y = z$ .

2.  $\alpha = 0$  e  $z_{m+1} = 0$  para  $i = 1, \dots, n - m$ .

Por raciocínio análogo ao caso anterior, deduzimos que  $x = z$ . Além disso, como  $\alpha = 0$ , segue-se que  $x = y = z$ .

3.  $\alpha = 1$  e  $y_{m+1} = 0$  para  $i = 1, \dots, n - m$ .

Por motivos análogos conclui-se que  $x = y = z$ . Assim, não existem soluções viáveis  $y, z \in D$ , com  $y, z \neq x$ , solução básica  $x$  que atendam à relação  $x = \alpha y + (1 - \alpha)z$ . Portanto,  $x$  é um ponto extremo do conjunto convexo  $D$ .  $\square$

**Teorema 2.5** *Sejam  $D \subset \mathbb{R}^n$ , com  $D \neq \emptyset$  um poliedro e  $\hat{x} \in D$ . Então, as afirmações seguintes são equivalentes:*

1.  $\hat{x}$  é um vértice;
2.  $\hat{x}$  é um ponto extremo;
3.  $\hat{x}$  é uma solução básica viável.

**Demonstração:** Essa demonstração segue a referência [2]. Devemos provar que (1)  $\implies$  (2), (2)  $\implies$  (3) e (3)  $\implies$  (1).

Sem perda de generalidade, suponha que o poliedro  $D$  seja descrito por inequações do tipo  $a_i^\top x \geq b_i$  e igualdades  $a_i^\top x = b_i$ , onde  $a_i \in \mathbb{R}^n$  são as linhas da matriz  $A = [a_{ij}]$ .

(1)  $\implies$  (2) Se  $\hat{x} \in D$  é vértice então existe algum vetor  $c \in \mathbb{R}^n$  tal que  $c^\top \hat{x} < c^\top y, \forall y \in D$ , com  $y \neq \hat{x}$ . Se  $y, z \in D$ ,  $y, z \neq \hat{x}$ , e  $0 \leq \alpha \leq 1$ , então  $c^\top \hat{x} < c^\top y$  e  $c^\top \hat{x} < c^\top z$ , o que implica que  $c^\top \hat{x} < c^\top (\alpha y + (1 - \alpha)z)$  e, portanto,  $\hat{x} \neq \alpha y + (1 - \alpha)z$ . Logo, assim,  $\hat{x}$  não pode ser expresso como combinação convexa de outros dois elementos de  $D$  e, daí segue que é um ponto extremo.

(2)  $\implies$  (3) Suponha por contradição, que  $\hat{x} \in D$  não seja uma solução básica viável. Mostraremos que  $\hat{x}$  não é um ponto extremo de  $D$ . Seja  $I = \{i \mid a_i^\top \hat{x} = b_i\}$ . Como  $\hat{x}$  não é uma solução básica viável, não existem  $n$  vetores linearmente independentes. Assim, os vetores  $a_i$ ,  $i \in I$ , estão em um subespaço próprio de  $\mathbb{R}^n$ , e existe algum vetor não nulo  $d \in \mathbb{R}^n$  tal que  $a_i^\top d = 0, \forall i \in I$ . Seja  $\epsilon > 0$  e suponha que  $y = \hat{x} + \epsilon d$  e  $z = \hat{x} - \epsilon d$ . Note que  $a_i^\top y = a_i^\top \hat{x} = b_i$ ,  $i \in I$ . Além disso, para  $i \notin I$ , temos  $a_i^\top \hat{x} > b_i$  e, desde que  $\epsilon$  seja suficientemente pequeno, temos  $\epsilon |a_i^\top d| < a_i^\top \hat{x} - b_i$ ,  $\forall i \notin I$ . Assim, quando  $\epsilon$  é pequeno o suficiente,  $y \in D$  e, por um argumento análogo ao anterior, conclui-se que  $z \in D$ . Note que  $y + z = 2\hat{x} \implies \hat{x} = (y + z)/2$ , o que implica que  $\hat{x}$  não é um ponto extremo, como queríamos mostrar.

(3)  $\implies$  (1) Sejam  $\hat{x}$  uma solução básica viável e  $I = \{i \mid a_i^\top \hat{x} = b_i\}$ . Seja  $c = \sum_{i \in I} a_i$ . Temos então

$$c^\top \hat{x} = \sum_{i \in I} a_i^\top \hat{x} = \sum_{i \in I} b_i.$$

Além disso, para qualquer  $x \in D$  e qualquer  $i$ , temos  $a_i^\top x \geq b_i$ , e

$$c^\top x = \sum_{i \in I} a_i^\top x \geq \sum_{i \in I} b_i.$$

Isto mostra que  $\hat{x}$  é uma solução ótima para o problema de minimização  $c^\top x$  sobre o conjunto  $D$ . Além disso, a igualdade é válida se, e somente se,  $a_i^\top x = b_i$ ,  $\forall i \in I$ . Como  $\hat{x}$  é uma solução básica viável, existem  $n$  restrições linearmente independentes que estão ativas em  $\hat{x}$ , e  $\hat{x}$  é a solução única do sistema de equações  $a_i^\top x = b_i$ ,  $i \in I$ . Segue-se que

$\hat{x}$  é o único minimizador de  $c^\top x$  sobre o conjunto  $D$  e, portanto,  $\hat{x}$  é um vértice de  $D$ .  $\square$

Como um vetor é uma solução básica viável se, e somente se, for um ponto extremo, e como a ideia de ponto extremo não se refere a nenhuma representação particular de um poliedro, concluímos que a propriedade de ser uma solução básica viável também é independente da representação usada.

**Teorema 2.6 (Existência de vértices de um conjunto poliedral)** *Seja o poliedro  $D$  dado por*

$$D = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A_1 x = b_1, A_2 x \geq b\}, \quad (8)$$

onde  $A_1 = A_{11} \in \mathbb{R}(l, m)$ ,  $A_2 = A_{21} \in \mathbb{R}(m, n)$ ,  $b_1 \in \mathbb{R}^l$  e  $b_2 \in \mathbb{R}^m$ . O poliedro  $D$  possui pelo menos um vértice se, e somente se,  $D \neq \emptyset$  e a matriz

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$$

tem posto  $n$ . Mais ainda, se  $\text{Posto } A = n$ , então para todo ponto  $x \in D$  existe um vértice  $\hat{x}$  tal que  $I(x) \subset I(\hat{x})$ .

**Demonstração:** Seja  $x \in D$  arbitrário. Defina os conjuntos  $I = I(x)$ ,  $J = \{1, 2, \dots, m\} - I$ . Se as linhas da matriz  $A_1$  e as linhas  $(A_2)_i$ ,  $i \in I$ , formam em  $\mathbb{R}^n$  um sistema de posto  $n$ , então por definição  $x$  é um vértice de  $D$ .

Sem perda de generalidade, seja  $\text{posto } A = r$ , com  $r < n$ . Logo, existe um vetor não nulo  $d \in \mathbb{R}^n$  tal que

$$A_1 d = 0, \quad \langle (A_2)_i, d \rangle = 0 \quad \forall i \in I. \quad (9)$$

Se  $\langle (A_2)_i, d \rangle = 0$ ,  $\forall i \in J$ , temos que  $Ad = 0$ , o que contraria a hipótese de que  $\text{Posto } A = n$ . Portanto, existe um índice  $i \in J$  tal que  $\langle (A_2)_i, d \rangle \neq 0$ . De novo, sem nenhuma perda de generalidade, seja  $\langle (A_2)_i, d \rangle < 0$ .

Para todo  $t \geq 0$ , consideremos pontos da forma  $x(t) = x + td$ . De (9), temos

$$A_1 x(t) = A_1 x + t A_1 d = b_1,$$

$$\langle (A_2)_i, x(t) \rangle = \langle (A_2)_i, x \rangle + t \langle (A_2)_i, d \rangle = (b_2)_i, \quad \forall i \in J. \quad (10)$$

Portanto,  $x(t) \in D$  se, e somente se,

$$\langle (A_2)_i, x(t) \rangle = \langle (A_2)_i, x \rangle + t \langle (A_2)_i, d \rangle \geq (b_2)_i, \quad \forall i \in J.$$

Definimos

$$t_1 = \max\{t \in \mathbb{R}_+ \mid x(t) \in D\}.$$

Repare que, existe um índice  $i_1 \in J$  tal que  $\langle (A_2)_{i_1}, d \rangle < 0$  e

$$0 < t_1 = \frac{(b_2)_{i_1} - \langle (A_2)_{i_1}, x \rangle}{\langle (A_2)_{i_1}, d \rangle}. \quad (11)$$

Definimos  $x_1 = x(t_1)$ ,  $I_1 = I(x_1)$ . De (10) segue a inclusão

$$I \subset I_1. \quad (12)$$

De (11) obtemos

$$\langle (A_2)_{i_1}, x_1 \rangle = \langle (A_2)_{i_1}, x \rangle + \frac{(b_2)_{i_1} - \langle (A_2)_{i_1}, x \rangle}{\langle (A_2)_{i_1}, d \rangle} \langle (A_2)_{i_1}, d \rangle = (b_2)_{i_1},$$

ou seja,  $i_1 \in I_1$ . Se vale

$$(A_2)_{i_1} = A_1^\top y + \sum_{i \in I} \beta_i (A_2)_i$$

para alguns  $y \in \mathbb{R}^l$  e  $\beta_i$ ,  $i \in I$ , de (9) segue a contradição

$$0 < \langle (A_2)_{i_1}, d \rangle = \langle y, A_1 d \rangle + \sum_{i \in I} \beta_i \langle (A_2)_i, d \rangle = 0.$$

Concluimos então que as linhas da matriz  $A_1$  e  $(A_2)_i$ ,  $i \in I_1$ , formam em  $\mathbb{R}^n$  um sistema de posto  $r_1 > r$ .

Se  $r_1 = n$ , então  $x_1$  é um vértice e, levando em conta (12), isto conclui a demonstração. Se  $r_1 < n$ , podemos repetir a construção acima, trocando o ponto  $x$  por  $x_1$ . Repetindo a construção uma quantidade  $s$  vezes, obtemos pontos  $x, x_1, x_2, \dots, x_s \in D$ , satisfazendo

$$I(x) \subset I(x_1) \subset I(x_2) \subset \dots \subset I(x_s),$$

$$r < r_1 < r_2 < \dots < r_s,$$

onde  $r_k$  é o posto de linhas da matriz  $A_1$ , complementados por  $(A_2)_i, i \in I(x_k)$ ,  $k = 1, 2, \dots, s$ . É claro que para algum número  $s$  obteremos  $r_s = n$ , o que significa que  $\hat{x} = x_s$  é um vértice e  $I(x) \subset I(x_s)$ .

Se queremos encontrar todos os vértices de um poliedro  $D$  da forma (8), podemos seguir o esquema seguinte. Para todo conjunto  $I \subset \{1, \dots, m\}$  com  $(n - l)$ -elementos, resolvemos o sistema linear

$$A_1 x = b_1, \quad \langle (A_2)_i, x \rangle = (b_2)_i, \quad i \in I.$$

Se a solução existe, é única, e pertence a  $D$ , então ela é um vértice de  $D$ . Caso contrário, consideramos outro conjunto  $I$ .

O conjunto viável do problema canônico dado em (5) é chamado **poliedro canônico**. Para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ , denotamos

$$J(x) = \{j = 1, \dots, n \mid x_j \geq 0\}.$$

Indicamos por  $A^1, \dots, A^n$  as colunas da matriz  $A$ . □

**Teorema 2.7 (Teorema de existência de vértices do poliedro canônico)** *Para  $A \in \mathbb{R}(l, n)$ , e  $b \in \mathbb{R}^l$  quaisquer, o poliedro canônico  $D$  dado em (5) (com  $\Omega = \mathbb{R}_+^n$ ) possui ao menos um vértice. Mais ainda, para todo ponto  $x \in D$  existe um vértice  $\hat{x}$  do poliedro  $D$  tal que  $J(x) \supset J(\hat{x})$ .*

**Demonstração:** Reescrevendo o poliedro  $D$  da seguinte forma:

$$D = \{x \in \Omega \mid A_1 x = b_1, A_2 x \geq b_2\}.$$

Pela demonstração do teorema 2.6, se queremos encontrar todos os vértices de um poliedro  $D$  dado pela eq. 20 basta resolver o sistema linear

$$A_1 x = b_1, \quad \langle (A_2)_i, x \rangle, \quad i \in I,$$

para todo conjunto  $I \subset \{1, \dots, m\}$  com  $(n - l)$ -elementos. Se a solução existe, é única, e pertence a  $D$ . Caso contrário, consideramos outro conjunto  $I$ . □

## 2.2 Dualidade em Programação Linear

Para cada Problema de Programação Linear, existe um outro problema associado, chamado problema dual. Ele apresenta muitas propriedades importantes, dentre uma delas é a obtenção da solução ótima do problema original dado. Portanto, nesta seção serão apresentados os conceitos essenciais para demonstrar o teorema de grande relevância que conecta soluções ótimas do par de problemas primal e dual. A necessidade de sua abordagem se fundamenta no fato de que às vezes é mais fácil trabalhar com o problema Dual do que com o Problema Primal.

Convencionalmente, considere um problema de programação linear, em forma canônica:

$$\min \langle c, x \rangle \quad \text{sujeito a} \quad x \in D = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \geq b\}, \quad (13)$$

onde  $A \in \mathbb{R}(m, n)$ ,  $c \in \mathbb{R}^n$  e  $b \in \mathbb{R}^m$ . O problema definido em (13) é chamado **problema Primal** (problema original).

Então defina um outro problema de formato geral

$$\max \langle b, \mu \rangle \quad \text{sujeito a} \quad \mu \in \Delta = \{\mu \in \mathbb{R}_+^m \mid A^\top \mu \leq c\}. \quad (14)$$

O referido problema dado por (14) é chamado **problema Dual**.

Observamos que o problema primal tem  $n$  variáveis e  $m$  restrições, enquanto que o dual tem  $m$  variáveis e  $n$  restrições. Ressaltando que a natureza de todos os resultados que envolvem a dualidade a serem apresentados independe do formato do problema primal.

**Definição 2.14 (Dualidade fraca)** *Seja um Problema de Programação Linear, onde se tenha os problemas primal e dual definidos em (13) e (14). Chama-se **dualidade fraca** quando a seguinte propriedade é satisfeita:*

$$\langle c, x \rangle = \langle A^\top \mu, x \rangle = \langle \mu, Ax \rangle \geq \langle b, \mu \rangle, \quad \forall x \in D \text{ e } \mu \in \Delta,$$

onde usamos que  $A^\top \mu = c$ ,  $\mu \geq 0$  e  $Ax \geq b$ .

**Observação 2.5** *O problema dual do problema (3), (4) (onde  $\Omega = \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}_+^{n_2}$ ) pode ser representado como:*

$$\max \langle b_1, \lambda \rangle + \langle b_2, \mu \rangle \quad \text{sujeito a } (\lambda, \mu) \in \Delta,$$

$$\Delta = \left\{ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}_+^m \mid \begin{array}{l} A_{11}^\top \lambda + A_{12}^\top \mu = c_1, \\ A_{21}^\top \lambda + A_{22}^\top \mu \leq c_2. \end{array} \right\}. \quad (15)$$

Se o dual dado por (14) for expresso em formato de (3) e (4), e escrever o dual dele seguindo (13), (14), este novo problema corresponde ao formato (5) (para obter exatamente (5), é preciso converter maximização em minimização trocando o sinal da função objetivo). Isso também é válido para o problema geral (3), (4). Em outras palavras, dualizando o problema duas vezes resulta no problema da estrutura original.

**Lema 2.1** *O dual do dual é o primal.*

**Teorema 2.8 (Condições de Karush-Kuhn-Tucker)** *Sejam  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  funções diferenciáveis no ponto  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ , e seja  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$  uma função diferenciável numa vizinhança do ponto  $\bar{x}$ , com derivada contínua neste ponto. Seja  $\bar{x}$  um minimizador local do problema.*

*Tem-se que existem  $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^l$  e  $\bar{\mu} \in \mathbb{R}_+^m$  tais que*

$$L'_x(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) = 0, \quad (16)$$

$$\bar{\mu}_i g_i(\bar{x}) = 0, \quad i = 1, \dots, m. \quad (17)$$

*Então  $(\bar{\lambda}, \bar{\mu}) \in \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}_+^m$  que satisfaz as propriedades (16)-(17) é único.*

**Demonstração:** A demonstração pode ser encontrada na referência [12]. □

**Teorema 2.9** *Seja  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  um ponto estacionário do problema (1). Sejam  $f$  e  $g$  funções convexas e  $h$  uma função afim. Então  $\bar{x}$  é um minimizador do problema (1).*

**Demonstração:** A demonstração pode ser encontrada na referência [12]. □

**Teorema 2.10** *O ponto  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in D$  é uma solução do problema primal dado por (3) e (4), se, e somente se, existe  $(\bar{\lambda}, \bar{\mu}) \in \Delta$  satisfazendo (5). Neste caso,  $(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$  é uma solução do problema dual.*

**Teorema 2.11** *Um ponto  $\bar{x}$  é uma solução do problema primal dado por (13) se, e somente se, existe um ponto  $\bar{\mu}$  que é viável para o problema dual e tal que  $\langle c, \bar{x} \rangle = \langle b, \bar{\mu} \rangle$ , ou seja, os valores das funções objetivo dos dois problemas são iguais.*

**Demonstração:** Pelos Teoremas (2.8) e (2.9),  $\bar{x}$  é uma solução de (13) se, e somente se, existe  $\bar{\mu} \in \mathbb{R}_+^m$  tal que

$$x - A^\top \bar{\mu} = 0, \quad b - A\bar{x} \leq 0, \quad \langle \bar{\mu}, b - A\bar{x} \rangle = 0.$$

Note que  $\bar{\mu} \in \Delta$ . Repare também que

$$\langle \bar{\mu}, b - A\bar{x} \rangle = \langle \bar{\mu}, b \rangle + \langle \bar{\mu}, -A\bar{x} \rangle = \langle b, \bar{\mu} \rangle - \langle \bar{\mu}, A\bar{x} \rangle = \langle b, \bar{\mu} \rangle - \langle A^\top \bar{\mu}, A\bar{x} \rangle = \langle b, \bar{\mu} \rangle - \langle c, \bar{x} \rangle.$$

Daí, segue que

$$\langle \bar{\mu}, b - A\bar{x} \rangle = 0 \iff \langle b, \bar{\mu} \rangle - \langle c, \bar{x} \rangle = 0 \iff \langle b, \bar{\mu} \rangle = \langle c, \bar{x} \rangle.$$

□

**Teorema 2.12 (Dualidade em programação linear)** *Para o par de problemas primal e dual definidos por (13) e (14), temos as seguintes três possibilidades:*

1. *Ambos os problemas têm o conjunto viável vazio, ou seja,  $D = \emptyset$  e  $\Delta = 0$ .*
2. *A função objetivo de um dos problemas é ilimitada (inferiormente para (13), superiormente para (14)) no conjunto viável correspondente não-vazio. Neste caso, o outro problema tem o seu conjunto viável vazio.*
3. *A função objetivo de um dos problemas é limitada (inferiormente para (13), superiormente para (14)) no conjunto viável correspondente não-vazio. Neste caso, ambos problemas têm solução e seus valores ótimos coincidem.*

**Teorema 2.13 (Teorema da Alternativa de Motzkin)** *Para quaisquer matrizes  $A_i \in \mathbb{R}(m_i, n)$ ,  $i = 0, 1, 2$ ,  $A_0 \neq 0$ , um, e somente um dos seguintes dois sistemas possui solução:*

1.  $A_0 x > 0, \quad A_1 x = 0, \quad A_2 x \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^n.$

$$2. A_0^\top y^0 + A_1^\top y^1 + A_2^\top y^2 = 0, (y^0, y^1, y^2) \in (\mathbb{R}_+^{m_0}) \times \mathbb{R}^{m_1} \times \mathbb{R}_+^{m_2}.$$

**Demonstração:** A demonstração pode ser encontrada na referência [12].  $\square$

**Teorema 2.14 (Existência de Soluções para um Problema de Programação Linear)**

*Se o conjunto viável de um PL é não vazio e o valor ótimo é finito, então o problema possui uma solução.*

**Demonstração:** Consideremos o Problema Canônico dado em (5). Sejam  $D \neq \emptyset$  e

$$\bar{v} = \inf_{x \in D} \langle c, x \rangle < +\infty.$$

O sistema  $Ax = b, \langle c, x \rangle = \bar{v}, x \geq 0$  em relação a  $x \in \mathbb{R}^n$  não tem solução  $\iff Ax - tb = 0, \langle c, x \rangle - t\bar{v} = 0$  em relação a  $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  não tem solução. Pelo Teorema da Alternativa de Motzkin existe  $(y, \tau) \in \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}$  tal que  $A^\top y + \tau c \geq 0, \langle b, y \rangle + \tau \bar{v} < 0$ .

- Pela 1ª inequação, para todo  $x \in D$ , e como  $x \geq 0$  temos

$$\langle A^\top y, x \rangle + \tau \langle c, x \rangle \geq 0.$$

- Utilizando a 2ª inequação,

$$\tau \langle c, x \rangle \geq -\langle A^\top y, x \rangle = -\langle y, Ax \rangle = -\langle y, b \rangle > \tau \bar{v}.$$

Portanto, temos

$$\inf_{x \in D} \tau \langle c, x \rangle > \tau \bar{v} = \tau \inf_{x \in D} \langle c, x \rangle,$$

o que é uma contradição, para qualquer valor de  $\tau$ .  $\square$

**Teorema 2.15 (Teorema de Condições de Otimalidade em um PL)** *Sejam  $c \in \mathbb{R}^n$ ,  $A_1 \in \mathbb{R}(l, n)$ ,  $A_2 \in \mathbb{R}(m, n)$ ,  $b_1 \in \mathbb{R}^l$ ,  $b_2 \in \mathbb{R}^m$ . O ponto  $x \in D$  é uma solução de (5) com  $\Omega = \mathbb{R}_+^n$  se, e somente se, existem  $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^l$ ,  $\bar{\mu} \in \mathbb{R}_+^m$  tais que*

$$A_1^\top \bar{\lambda} + A_2^\top \bar{\mu} = c \tag{18}$$

$$\langle \bar{\mu}, A_2^\top \bar{x} - b \rangle = 0, \quad \langle A_1^\top \bar{\lambda} - c, \bar{x} \rangle = 0. \tag{19}$$

## 3 Métodos

Nesta seção abordaremos quatro métodos muito aplicados para a resolução de problemas de Programação Linear, sendo eles: métodos gráfico, Simplex, Simplex duas fases e Simplex Big M. Eles são importantes para a compreensão da parte teórica e aparecem como subproblemas em vários algoritmos de uso geral.

### 3.1 Método gráfico

Em disciplinas de Programação Linear, o primeiro método apresentado é o Método gráfico (ou Método de Solução gráfica), já que é de fácil e simples entendimento. No entanto, apresenta obstáculos em termos de sua aplicabilidade prática, pois sua eficácia é visível somente em cenários que envolvem até três variáveis de decisão, sendo voltada principalmente para problemas com duas variáveis de decisão.

Podemos destacar três contextos viáveis na parte resolutiva de um Problema de Programação Linear utilizando como recurso, o método gráfico.

- Se o conjunto viável é ilimitado (isto é, infinitas soluções) e a função objetivo cresce ou diminui indefinidamente na direção desejável, temos o conjunto solução igual a vazio e, portanto, impossível;
- A solução ótima está em um dos vértices do conjunto viável;
- A solução ótima é um ponto no segmento de um dos lados do conjunto viável, implicando que há infinitas soluções, onde podem ser vistas como combinações lineares de vértices do poliedro.

### ESQUEMA DE RESOLUÇÃO DO MÉTODO GRÁFICO

1. A etapa inicial reside em identificar o conjunto viável do problema.
2. A próxima etapa é reconhecer a direção na qual a função objetivo (a função que se deseja minimizar ou maximizar) aumenta ou diminui.
3. Encontre o vetor gradiente da função objetivo.
4. Trace as curvas de nível da função objetivo.
5. Na etapa final, para encontrar a solução ótima movimente na direção contrária ou a mesma indicada pelo vetor gradiente (para problemas de minimização ou maximização, respectivamente) dentro do conjunto viável até atingir o ponto que otimiza a função objetivo.

**Exemplo 3.1** Considere o seguinte problema com duas variáveis de decisão:

$$\text{Minimizar } f(x, y) = x - y$$

$$\text{Sujeito a: } \begin{cases} x + 2y \leq 4 & (\text{restrição I}) \\ x + y \leq 3 & (\text{restrição II}) \\ x, y \geq 0 & (\text{Condição de não-negatividade das variáveis}) \end{cases}$$

Primeiramente, analisaremos a região viável de soluções do problema. Repare que a região é delimitada pelo 1º quadrante do plano cartesiano  $x$  e  $y$ , pois  $x \geq 0$  e  $y \geq 0$ .

Quanto à restrição de desigualdade  $x + 2y \leq 4$ , a priori desprezaremos o sinal de desigualdade e façamos a análise apenas pela devida equação linear  $x + 2y = 4$ , logo temos:

- Para  $x = 0 \implies y = 2$ .
- Para  $y = 0 \implies x = 4$ .
- Para  $(0, 0) \implies 0 \leq 4$  e, portanto, a região viável até agora contempla o semiplano contendo  $(0, 0)$  e abaixo de  $x + 2y = 4$ .

Assim, os pontos  $(0, 2)$  e  $(4, 0)$  pertencem a reta.

Quanto à restrição de desigualdade  $x + y \leq 3$ , realizaremos a mesma análise feita anteriormente, temos:

- Para  $x = 0 \implies y = 3$ .
- Para  $y = 0 \implies x = 3$ .
- Para  $(0,0) \implies 0 \leq 3$  e, portanto, a região viável até agora contempla o semiplano contendo  $(0,0)$  e abaixo da reta  $x + y = 3$ .

Como a função  $f(x)$  será minimizada, então a reta descrita pela função objetivo  $f(x) = x - y$  deverá ser movida paralelamente na direção oposta que aponta o vetor gradiente

$$\nabla f(x) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) = (1, -1)$$

e, portanto, a solução ótima do problema é atingida no vértice  $(0,2)$ .

Logo, o valor ótimo do problema é  $f(0,2) = 0 - 2 = -2$ .

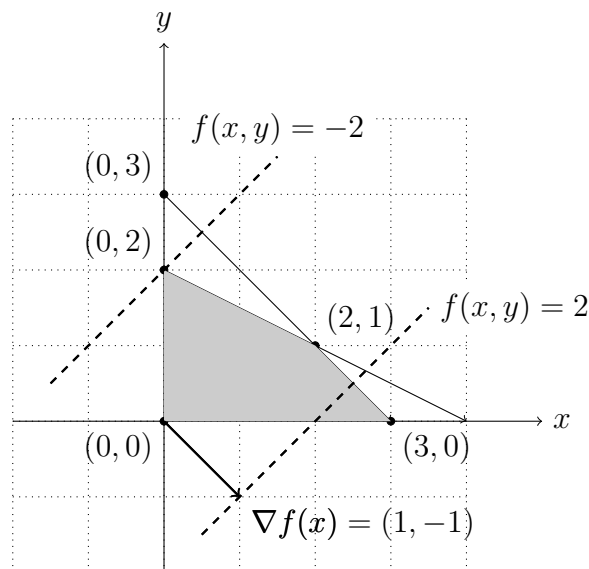


Figura 2: Conjunto viável do PPL.

### 3.2 Método Simplex

"O simplex é um algoritmo que se utiliza de um ferramental baseado na Álgebra Linear para determinar, por um método iterativo, a solução ótima de um Problema de Programação Linear (PPL). Sua concepção básica é simples e, por isso mesmo, eficiente. "(GOLBGARBG, 2004)

O Método Simplex é um método de convergência, onde percorre pelos vértices do poliedro de maneira ordenada e inteligente cuja finalidade é determinar uma solução ótima para o problema real. A estratégia aplicada consiste que a cada iteração, realiza-se as operações elementares sobre as linhas da tabela do Simplex, movendo assim de uma **Solução Básica Viável** - SBV para outra SBV que diminua o valor da função objetivo, até que isto não seja mais possível. Caso o problema tenha solução ótima, isso se dará numa quantidade finita de passos.

De acordo com [11] o algoritmo Simplex parte de uma solução viável do sistema de equações que constituem as restrições do PPL, e a partir dessa solução inicial vai identificando novas soluções viáveis de valor não pior que anterior.

O método simplex será apresentado para o problema canônico

$$\min \langle c, x \rangle \quad \text{sujeito a } x \in D = \{x \in \Omega \mid Ax = b\}, \quad (20)$$

onde  $c \in \mathbb{R}^n$ ,  $A \in \mathbb{R}(l, n)$ ,  $b \in \mathbb{R}^l$ ,  $\Omega = \mathbb{R}_+^n$ . Isso não torna o problema particular, visto que todo problema de programação linear pode ser expresso neste formato.

## ESQUEMA DE RESOLUÇÃO DO MÉTODO SIMPLEX

1. Representar o problema para os formatos padrão e básico (**Observação:** Geralmente, as variáveis de folga não são suficientes para levar ao problema à sua forma básica (matriz identidade) e, assim, é preciso de outra estratégia que nos permita deixá-la em tal formato e isso será estudado nos próximos métodos.).
2. Encontrar uma solução básica viável inicial.
3. Verificar se a solução atual é ótima. Se for, pare. Caso contrário, siga para a próxima etapa.
4. Determinar a variável não básica que deve entrar na base. Após isso, determinar a variável básica que deve sair da base.
5. Atualizar o sistema à fim de determinar a nova solução básica viável, e retorne para a terceira etapa.

**Observação 3.1** *Estruturadamente, há duas operações elementares sobre as linhas do problema:*

- *Multiplicar todos os coeficientes de uma linha por uma constante não-nula.*
- *Substituir uma linha por outra, obtida a partir de uma combinação linear de duas linhas do problema.*

Como  $B = \{A^j, j \in J\}$ , onde  $J \subset \{1, \dots, n\}$ ,  $j \in J(\hat{x})$  é uma base de  $\mathbb{R}^l$ , as colunas da matriz  $A$  são univocamente representadas no seguinte formato:

$$A^i = \sum_{j \in J} \gamma_{ji} A^j, \quad i = 1, \dots, n, \quad (21)$$

onde os números  $\gamma_{ji} \in \mathbb{R}$ ,  $j \in J$ ,  $i = 1, \dots, n$ , são chamados de **coeficientes de substituição**. Definindo

$$\delta_i = c_i - \sum_{j \in J} c_j \gamma_{ji}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (22)$$

onde os quais são denominados **estimativas de substituição**.

**Teorema 3.1 (Critério de otimalidade no Método do Simplex)** *Sejam  $x \in D$  um vértice do poliedro canônico  $D$  dado em (20) e  $B = \{A^j, j \in J\}$  uma base deste vértice,  $J \subset \{1, \dots, n\}$ , onde  $A \in \mathbb{R}(l, n)$  e  $b \in \mathbb{R}^l$ .*

*Se as estimativas de substituição, definidas em (21) e (22), satisfazem*

$$\delta_i \geq 0 \quad \forall i \notin J, \quad (23)$$

*então  $x$  é uma solução do problema (20).*

**Demonstração:** Consideremos o dual do problema (20), i. e.,

$$\max \langle b, \lambda \rangle \quad \text{sujeito a } \lambda \in \Delta = \{\lambda \in \mathbb{R}^l \mid A^\top \lambda \leq c\}. \quad (24)$$

Segundo o Teorema (2.10), para provar a afirmação basta construir um ponto  $\lambda \in \Delta$  tal que

$$\langle c, x \rangle = \langle b, \lambda \rangle. \quad (25)$$

Como  $B$  é uma base de  $\mathbb{R}^l$ , existe um único  $\lambda \in \mathbb{R}^l$  que satisfaz o sistema linear

$$\langle A^j, \lambda \rangle = c_j, \quad j \in J. \quad (26)$$

Para este  $\lambda$ , levando em consideração (21)–(23), temos  $\forall i \notin J$  o seguinte:

$$\langle A^i, \lambda \rangle = \sum_{j \in J} \langle A^j, \lambda \rangle \gamma_{ji} = \sum_{j \in J} c_j \gamma_{ji} = c_i - \delta_i \leq c_i.$$

Juntamente, com (26) isso mostra que  $\lambda \in \Delta$ .

Como  $B$  é uma base do vértice  $x$ , segue que  $J(x) \subset J$ , i. e.,  $x_j = 0 \quad \forall j \notin J$ . Logo, de (26) e da inclusão  $x \in D$ , obtemos

$$\langle c, x \rangle = \sum_{j=1}^n \langle A^j, \lambda \rangle x_j = \left\langle \sum_{j=1}^n A^j x_j, \lambda \right\rangle = \langle Ax, \lambda \rangle = \langle b, \lambda \rangle,$$

i.e., vale (25). □

**Exemplo 3.2** Considere o mesmo problema dado em (3.1).

Minimizar  $f(x, y) = x - y$

$$\text{Sujeito a: } \begin{cases} x + 2y \leq 4 & (\text{restrição I}) \\ x + y \leq 3 & (\text{restrição II}) \\ x, y \geq 0 & (\text{Condição de não-negatividade das variáveis}) \end{cases}$$

Resolvendo o problema de programação linear:

Adicionando as variáveis de folga  $w, z$ , onde  $w, z \geq 0$  obtemos:

$$x + 2y + w + 0z = 4$$

$$x + y + 0w + 1z = 3$$

Então, convertamos o PPL na forma padrão. Repare que, está na forma básica, já que a matriz  $A$  possui uma submatriz identidade e, daí, temos as variáveis básicas (variáveis que pertencem a base) são  $w$  e  $z$ . Assim, a solução básica viável inicial é  $x = (0, 0, 4, 3)$  e o valor da função objetivo é dado por  $f(x) = 0$ .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Método Simplex:**

**1ª Iteração : Determinar uma solução básica viável inicial.**

| VB  | $x$ | $y$ | $w$ | $z$ | $b$    |
|-----|-----|-----|-----|-----|--------|
| $w$ | 1   | 2   | 1   | 0   | 4      |
| $z$ | 1   | 1   | 0   | 1   | 3      |
| FO  | 1   | -1  | 0   | 0   | $f(x)$ |

Tabela 1: Primeiro Quadro Simplex do exemplo 3.2.

**A solução básica viável é ótima? Caso não seja, determinar qual variável sai e entra na base.**

Note que uma das variáveis não básicas (VNB), no caso,  $y$  tem coeficiente negativo, então a solução não é ótima.

**Quem sai e quem entra da base?**

A variável  $y$  entrará na base. Agora, quanto à variável de saída é necessário analisar o mínimo, como se verifica a seguir:

$$\theta = \min \left\{ \frac{4}{2}, \frac{3}{1} \right\} = \min\{2, 1\} = 1.$$

Assim,  $w$  sai da base.

Logo, a coluna pivô é a coluna de  $y$  e o elemento pivô é 2. A coluna de  $y$  deve ser transformada na coluna de  $w$ .

1. Normalize a linha pivô. Chamando a linha de  $L_1'$ , faça a linha  $L_1$  dada dividida por 2;
2. Na segunda linha, chamando-a de  $L_2'$ , faça a diferença entre a linha  $L_2$  pela linha de referência  $L_1'$ , ao qual foi determinada no estágio inicial;
3. Na linha  $L_3'$ , faça a soma entre a linha  $L_3$  com a linha de referência  $L_1'$ .

| VB  | $x$           | $y$ | $w$            | $z$ | $b$        |
|-----|---------------|-----|----------------|-----|------------|
| $y$ | $\frac{1}{2}$ | 1   | $\frac{1}{2}$  | 0   | 2          |
| $z$ | $\frac{1}{2}$ | 0   | $\frac{-1}{2}$ | 1   | 1          |
| FO  | $\frac{3}{2}$ | 0   | $\frac{1}{2}$  | 0   | $f(x) + 2$ |

Tabela 2: Segundo Quadro Simplex do Exemplo 3.2.

Como todos os coeficientes de VNB da função objetivo são não negativos, isto é,  $c_1 = \frac{3}{2} > 0$  e  $c_3 = \frac{1}{2} > 0$ , não podemos diminuir ainda mais o valor da função objetivo com alterações nas variáveis não básicas e, daí temos que a solução básica viável é ótima.

Portanto, a solução ótima é dada por  $x^* = (0, 2, 0, 1)$  e  $f(x^*) = f(0, 2, 0, 1) = -2$ , o que corrobora com a solução feita pelo Método gráfico.

### 3.2.1 Variáveis artificiais

Há muitos Problemas de Programação Linear, onde a escolha de uma solução básica viável para rodar o Algoritmo Simplex não é óbvia. De forma genérica, isso ocorre quando pelo menos uma das restrições de desigualdade é do tipo  $(=)$  ou  $(\geq)$ . Quando isso ocorre, devemos acrescentar em algumas restrições variáveis que tenham valor igual a zero, cuja finalidade está na busca de uma solução inicial e que a introdução torne os cálculos mais

fáceis. Daremos o nome de **variáveis artificiais** para às variáveis que obedecem a mesma natureza das variáveis originais, isto é, respeitam à condição de não-negatividade.

A seguir, abordaremos dois métodos baseados na aplicação de variáveis artificiais: Método Simplex das duas fases e Simplex Big M.

### 3.2.2 Método Simplex das duas fases

O Método das Duas Fases surge com o impedimento de uma matriz base canônica. Ela é estruturada para resolver primeiro (Fase I) um problema de minimização onde a função objetivo é a soma das variáveis artificiais e pode haver um acréscimo de restrições no problema. Ao passo que a fase I é concluída, dispõe-se de uma solução básica do problema inicial podendo assim começar a fase II, retirando as variáveis artificiais e considerando a função objetivo inicial. A seguir será apresentado um algoritmo para o método estudado.

#### Fase I

1. Transforme o problema na forma padrão. (A forma padrão adotada foi apresentada no início deste trabalho.)
2. Se a forma padrão do problema não induz ao formato básico, então devem ser introduzidos as variáveis artificiais. Representaremos as variáveis artificiais por  $w_1, w_2, \dots, w_n \geq 0$ .

3. Nesta etapa, devemos resolver o PPL por meio do Simplex referente à função objetivo artificial

$$f(w) = w_1 + w_2 + \dots + w_n.$$

e as novas restrições. O objetivo é minimizar a sua soma, de modo que todas as variáveis artificiais sejam iguais a zero.

4. Se  $f(w)$  é igual a zero, então todas as variáveis artificiais são nulas, pois  $f(w) = w_1 + w_2 + \dots + w_n$ . Assim, podemos eliminar as colunas e linhas relativas às variáveis artificiais e seguir para a Fase II, já que dispomos de uma solução viável para o problema original. Caso contrário, ou seja, se  $f(w)$  não é nula, então não há solução para o problema.

## Fase II

A Fase II corresponde à resolução propriamente dita do problema original usando a função objetivo original e as restrições também originais.

**Exemplo 3.3** Considere o PPL a seguir:

$$\text{Minimizar } f(x) = x_1 + 2x_2$$

$$\text{Sujeito a: } \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \geq 5 & (\text{restrição I}) \\ x_1 + x_2 \leq 4 & (\text{restrição II}) \\ x_1, x_2 \geq 0 & (\text{Condição de não-negatividade}) \end{cases}$$

Convertendo o problema no formato padrão, obtemos:

$$\text{Minimizar } f(x) = x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4$$

$$\text{Sujeito a: } \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 + 0x_4 = 5 \\ x_1 + x_2 + 0x_3 + x_4 = 4 \\ x_i \geq 0, \forall i = 1, 2, 3, 4 \end{cases}$$

onde  $x_3 \geq 0$ ,  $x_4 \geq 0$  são variáveis de folga.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Observe que não existe uma matriz básica trivial (matriz identidade). Logo, devemos adicionar uma variável artificial na primeira linha de restrição do problema.

$$3x_1 + 4x_2 - x_3 + 0x_4 + w = 5$$

$$x_1 + x_2 + 0x_3 + x_4 + 0w = 4$$

Então, aplicando o Método de Duas Fases, a fase I consiste em solucionar o seguinte problema:

Minimizar  $f(w) = w$

$$\text{Sujeito a: } \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 + 0x_4 + w = 5 \\ x_1 + x_2 + 0x_3 + x_4 + 0w = 4 \\ x_i \geq 0, w \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, 4. \end{cases}$$

Assim, temos

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$x_4$  e  $w$  são variáveis básicas e  $x_1, x_2, x_3$  são variáveis não básicas ( $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ ).

### Fase I:

| VB    | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $w$ | $b$    |
|-------|-------|-------|-------|-------|-----|--------|
| $w$   | 3     | 4     | -1    | 0     | 1   | 5      |
| $x_4$ | 1     | 1     | 0     | 1     | 0   | 4      |
| FA    | 0     | 0     | 0     | 0     | 1   | $f(w)$ |
| FO    | 1     | 2     | 0     | 0     | 0   | $f(x)$ |

Tabela 3: Primeiro Quadro simplex da Fase I do exemplo 3.3.

Temos que a variável artificial  $w$  não é nula, e, portanto, devemos manusear de modo que, seja nula. Para isso, faça a diferença entre a linha referente a função artificial e a primeira linha do quadro.

| VB    | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $w$ | $b$        |
|-------|-------|-------|-------|-------|-----|------------|
| $w$   | 3     | 4     | -1    | 0     | 1   | 5          |
| $x_4$ | 1     | 1     | 0     | 1     | 0   | 4          |
| FA    | -3    | -4    | 1     | 0     | 0   | $f(w) - 5$ |
| FO    | 1     | 2     | 0     | 0     | 0   | $f(x)$     |

Tabela 4: Segundo Quadro simplex da Fase I do exemplo 3.3.

Agora, podemos começar o algoritmo Simplex. Note que existem VNB com coeficientes negativos, logo, a solução não é ótima.

Neste caso, como o coeficiente de  $x_2 = -4 < x_1 = -3 \leq 0$ , então  $x_2$  é a nova variável básica.

$$\theta = \min \left\{ \frac{5}{4}, \frac{4}{1} \right\} = \min \left\{ \frac{5}{4}, 4 \right\} = \frac{5}{4}.$$

| VB    | $x_1$          | $x_2$ | $x_3$          | $x_4$ | $w$            | $b$                  |
|-------|----------------|-------|----------------|-------|----------------|----------------------|
| $x_2$ | $\frac{3}{4}$  | 1     | $\frac{-1}{4}$ | 0     | $\frac{1}{4}$  | $\frac{5}{4}$        |
| $x_4$ | $\frac{1}{4}$  | 0     | $\frac{1}{4}$  | 1     | $\frac{-1}{4}$ | $\frac{11}{4}$       |
| FA    | 0              | 0     | 0              | 0     | 1              | $f(w)$               |
| FO    | $\frac{-1}{2}$ | 0     | $\frac{1}{2}$  | 0     | $\frac{-1}{2}$ | $f(x) - \frac{5}{2}$ |

Tabela 5: Terceiro Quadro simplex da Fase I do exemplo 3.3.

Assim,  $w$  sai da base, veja tabela 3.3.

Note que a função artificial é nula, logo podemos ir para a Fase II, onde serão eliminadas a linha e coluna da variável artificial.

### Fase II:

| VB    | $x_1$          | $x_2$ | $x_3$          | $x_4$ | $b$                  |
|-------|----------------|-------|----------------|-------|----------------------|
| $x_2$ | $\frac{3}{4}$  | 1     | $\frac{-1}{4}$ | 0     | $\frac{5}{4}$        |
| $x_4$ | $\frac{1}{4}$  | 0     | $\frac{1}{4}$  | 1     | $\frac{11}{4}$       |
| FO    | $\frac{-1}{2}$ | 0     | $\frac{1}{2}$  | 0     | $f(x) - \frac{5}{2}$ |

Tabela 6: Primeiro Quadro simplex da Fase II do exemplo 3.3.

Como  $x_1 < 0$  e é VNB, isso significa que, a solução não é ótima. Repetindo o processo anterior, temos que  $x_2$  saíra e  $x_1$  entrará na base.

| VB    | $x_1$ | $x_2$          | $x_3$          | $x_4$ | $b$           |
|-------|-------|----------------|----------------|-------|---------------|
| $x_1$ | 1     | $\frac{4}{3}$  | $\frac{-1}{3}$ | 0     | $\frac{5}{3}$ |
| $x_4$ | 0     | $\frac{-1}{3}$ | $\frac{1}{3}$  | 1     | $\frac{7}{3}$ |
| FO    | 0     | $\frac{2}{3}$  | $\frac{1}{3}$  | 0     | $f(x)$        |

Tabela 7: Segundo Quadro simplex da Fase II do exemplo 3.3.

Portanto, conforme a tabela 3.3, a solução ótima do PPL é dado por  $x^* = (\frac{5}{3}, 0, 0, \frac{7}{3})$  e o valor ótimo do problema é  $f(x^*) = \frac{5}{3}$ .

### 3.2.3 Método Simplex Big M (M grande)

O método Simplex Big M (também conhecido como M grande) possui como princípio impor os custos extremamente altos nas variáveis artificiais. Na resolução do sistema pelo método Simplex, automaticamente haverá tendência para as variáveis artificiais saírem da base, ou seja, deixarem de ser variáveis básicas e, desta forma, retornaríamos ao problema original.

### PASSOS ELEMENTARES DO MÉTODO SIMPLEX BIG M

1. Represente o PPL na forma padrão.
2. Adicione variáveis não negativas nas restrições do tipo  $(\geq)$  e  $(=)$  (como vimos, essas variáveis são denominadas variáveis artificiais) e alterar as correspondentes restrições. Devemos fazer com que as variáveis artificiais sejam iguais a zero na solução final. Isso se obtém designando uma grande penalidade por unidade dessas variáveis na função objetivo. As penalidades serão representadas por  $-M$  para problemas de maximização e por  $+M$  nos problemas de minimização, onde  $M$  é tão grande quando se queira.
3. Adotaremos a função objetivo de maximização.
4. Utilize as variáveis artificiais para a primeira solução básica.
5. Siga os mesmos passos do método Simplex.

**Observação 3.2** *As variáveis artificiais somente provêem uma ferramenta matemática a fim de obtenção de uma solução básica inicial. O efeito dessas variáveis na solução final é cancelado pela alta penalidade na função objetivo.*

**Exemplo 3.4** *Seja o problema de programação linear abaixo:*

*Minimizar  $f(x) = 4x_1 + x_2$*

$$\text{Sujeito a: } \begin{cases} 3x_1 + x_2 = 3 & (\text{restrição I}) \\ 4x_1 + 3x_2 \geq 6 & (\text{restrição II}) \\ x_1 + 2x_2 \leq 3 & (\text{restrição III}) \\ x_1, x_2 \geq 0 & (\text{Condição de não-negatividade}) \end{cases}$$

Minimizar  $f(x) = 4x_1 + x_2$

$$\text{Sujeito a:} \begin{cases} 3x_1 + x_2 = 3 & (\text{restrição I}) \\ 4x_1 + 3x_2 \geq 6 & (\text{restrição II}) \\ x_1 + 2x_2 \leq 3 & (\text{restrição III}) \\ x_1, x_2 \geq 0 & (\text{Condição de não-negatividade}) \end{cases}$$

Transformando o PPL canônico no formato padrão:

Minimizar  $f(x) = 4x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4$

$$\text{Sujeito a:} \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 3 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 0x_4 = 6 \\ x_1 + 2x_2 + 0x_3 + x_4 = 3 \\ x_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, 4. \end{cases}$$

Repare que o problema não está na forma básica, conforme se verifica na matriz a seguir, faltam duas colunas da matriz identidade:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para obter uma matriz básica, acrescente as variáveis artificiais  $w_1, w_2 \geq 0$  na primeira e segunda restrições, conforme abaixo:

$$3x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 + w_1 + 0w_2 = 3$$

$$4x_1 + 3x_2 - x_3 + 0x_4 + 0w_1 + w_2 = 6$$

$$x_1 + 2x_2 + 0x_3 + x_4 + 0w_1 + 0w_2 = 3$$

$$x_i \geq 0, w_1 \geq 0, w_2 \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, 4.$$

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Os quadros do Método Big M serão apresentados em seguida. Deixaremos as contas a cargo do leitor.

| VB    | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $w_1$ | $w_2$ | $b$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----|
| $w_1$ | 3     | 1     | 0     | 0     | 1     | 0     | 3   |
| $w_2$ | 4     | 3     | -1    | 0     | 0     | 1     | 6   |
| $x_4$ | 1     | 2     | 0     | 1     | 0     | 0     | 3   |
| FO    | -4    | -1    | 0     | 0     | $-M$  | $-M$  | 0   |

Tabela 8: Primeiro Quadro Método Big M do exemplo 3.4.

| VB    | $x_1$     | $x_2$     | $x_3$ | $x_4$ | $w_1$ | $w_2$ | $b$  |
|-------|-----------|-----------|-------|-------|-------|-------|------|
| $w_1$ | 3         | 1         | 0     | 0     | 1     | 0     | 3    |
| $w_2$ | 4         | 3         | -1    | 0     | 0     | 1     | 6    |
| $x_4$ | 1         | 2         | 0     | 1     | 0     | 0     | 3    |
| FO    | $-4 + 7M$ | $-1 + 4M$ | $-M$  | 0     | 0     | 0     | $9M$ |

Tabela 9: Segundo Quadro Método Big M do exemplo 3.4.

| VB    | $x_1$ | $x_2$            | $x_3$ | $x_4$ | $w_1$            | $w_2$ | $b$    |
|-------|-------|------------------|-------|-------|------------------|-------|--------|
| $x_1$ | 1     | $\frac{1}{3}$    | 0     | 0     | $\frac{1}{3}$    | 0     | 1      |
| $w_2$ | 0     | $\frac{5}{3}$    | -1    | 0     | $\frac{-4}{3}$   | 1     | 2      |
| $x_4$ | 0     | $\frac{5}{3}$    | 0     | 1     | $\frac{-1}{3}$   | 0     | 2      |
| FO    | 0     | $\frac{1+5M}{3}$ | $-M$  | 0     | $\frac{4-7M}{3}$ | 0     | $4+2M$ |

Tabela 10: Terceiro Quadro Método Big M do exemplo 3.4.

| VB    | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$          | $x_4$ | $w_1$            | $w_2$             | $b$            |
|-------|-------|-------|----------------|-------|------------------|-------------------|----------------|
| $x_1$ | 1     | 0     | $\frac{1}{5}$  | 0     | $\frac{3}{5}$    | $\frac{-1}{5}$    | $\frac{3}{5}$  |
| $x_2$ | 0     | 1     | $\frac{-3}{5}$ | 0     | $\frac{-4}{5}$   | $\frac{3}{5}$     | $\frac{6}{5}$  |
| $x_4$ | 0     | 0     | 1              | 1     | 1                | -1                | 0              |
| FO    | 0     | 0     | $\frac{1}{5}$  | 0     | $\frac{8-5M}{5}$ | $\frac{-1-5M}{5}$ | $\frac{18}{5}$ |

Tabela 11: Quarto Quadro Método Big M do exemplo 3.4.

Portanto, a solução ótima do problema é  $x^* = (\frac{3}{5}, \frac{6}{5})$ , cujo  $f(x^*) = \frac{18}{5}$ .

| VB    | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$          | $w_1$            | $w_2$ | $b$            |
|-------|-------|-------|-------|----------------|------------------|-------|----------------|
| $x_1$ | 1     | 0     | 0     | $\frac{-1}{5}$ | $\frac{2}{5}$    | 0     | $\frac{3}{5}$  |
| $x_2$ | 0     | 1     | 0     | $\frac{3}{5}$  | $\frac{-1}{5}$   | 0     | $\frac{6}{5}$  |
| $x_4$ | 0     | 0     | 1     | 1              | 1                | -1    | 0              |
| FO    | 0     | 0     | 0     | $\frac{-1}{5}$ | $\frac{7-5M}{5}$ | -M    | $\frac{18}{5}$ |

Tabela 12: Quinto Quadro Método Big M do exemplo 3.4.

### 3.2.4 Resolução de Problemas de otimização via GNU Octave

O Octave foi escrito por John W. Eaton e seus colaboradores (por volta de 1988) para ser um software complementar para um livro de graduação sobre projeto de reatores químicos escrito por James B. Rawlings da Universidade de Wisconsin-Madison e John G. Ekerdt da Universidade do Texas. Atualmente, o Octave é mais do que apenas mais um pacote de material didático e vem sendo utilizado no ensino, na pesquisa e em aplicações comerciais.

A seguir, neste trabalho, apresentaremos o passo a passo da resolução de um problema de otimização via GNU Octave.

**Exemplo 3.5** *Considere o problema apresentado em 3.3:*

*Minimizar  $f(x) = x_1 + 2x_2$*

$$\text{Sujeito a: } \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \geq 5 & (\text{restrição I}) \\ x_1 + x_2 \leq 4 & (\text{restrição II}) \\ x_1, x_2 \geq 0 & (\text{Condição de não-negatividade}) \end{cases}$$

*O problema 3.3 foi resolvido através do Software Octave, utilizando o seguinte algoritmo de minimização, [1].*

### Algoritmo do Método Simplex para Minimização

Dados de Entrada:  $(m, n, c, A, b) \leftarrow$  Problema na Forma Padrão.

Saída:

$Pare = 1$  (solução ótima)

$x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*), Z^* = cx^* \leftarrow$  Solução ótima e valor ótimo da função objetivo

$I^*, J^* \leftarrow$  conjunto das variáveis básicas e não básicas na Solução ótima

$Pare = 2$  (Problema inviável)

$Pare = 3$  (Problema ilimitado)

Início

### **FASE I**

Se for disponível uma partição I e J nas variáveis do problema, de modo que a solução básica associada seja viável, então faça:

$FASE = 2$

Senão escreva o problema artificial, introduzindo as variáveis artificiais  $x_{n+1}, \dots, x_{n+m}$ .

Faça:

$I = \{x_{n+1}, \dots, x_{n+m}\}$  e  $J = \{x_1, \dots, x_n\} \leftarrow$  conjuntos das variáveis básicas e não básicas, respectivamente.

Introduza colunas da matriz identidade para as variáveis artificiais e  $W(x_1, \dots, x_{n+m}) = x_{n+1} + \dots + x_{n+m} \leftarrow$  função objetivo artificial

Passo I (forma canônica)

Se  $FASE = 1$ , use a função objetivo artificial:  $W(x_1, \dots, x_{n+m})$

Senão ( $FASE = 2$ ), use a função objetivo original:  $Z(x_1, \dots, x_n)$

Aplique o método de Gauss-Jordan de modo que as colunas das variáveis em I (variáveis básicas) sejam transformadas na matriz identidade e os coeficientes destas variáveis na função objetivo sejam nulas.

Os dados do problema na forma canônica são indicados por:  $\hat{a}_{ij}, \hat{b}_{ij}, \hat{c}_{ij}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n$ . (Se  $FASE = 1$  então  $j = 1, \dots, n + m$ .)

$it = 1$

$PAVE = 0$

Enquanto  $PAVE = 0$ , faça:

Início

Passo 2 (Teste de otimalidade/determinação da variável de entrada na base)

Determine  $\hat{c}_k = \min\{\hat{c}_j, x_j \in J\}$

Se  $\hat{c}_k \geq 0$  e  $FASE = 2$ , então a solução atual é ótima obtida em  $it$  iterações.

Faça :  $x_B^* = B$ ,  $x_N^* = 0$ ,  $I^*I$ ,  $J^* = J$  e  $Z^* = cx^*$

$PARE = 1$  e interrompa o algoritmo.

Se  $\hat{c}_k \geq 0$  e  $FASE = 1$ , então a solução atual é ótima para o problema artificial. A  $FASE I$  foi resolvida em  $it$  iterações, faça:

Se  $W(x) = 0$ , então elimine as variáveis artificiais em  $J$ ,  $FASE = 2$  e vá para o Passo 1

Senão ( $W(x) > 0$ ), o problema original é inviável, faça:

$PARE = 2$  e interrompa o algoritmo.

Se  $\hat{c}_k < 0$ , então a variável  $x_k \in J$  entra na base.

Passo 3 (Identificação do problema ilimitado/determinação da variável a sair da base) Se  $\hat{a}_{ik} \leq 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ , então o problema é ilimitado, não existe solução ótima, faça:

$PARE = 3$  e interrompa o algoritmo.

Senão, determine o índice  $l$  tal que:

$$\frac{\hat{b}_l}{\hat{a}_{lk}} = \min \left\{ \frac{\hat{b}_i}{\hat{a}_{ik}}, \hat{a}_{ik} > 0, i = 1, \dots, m \right\} \leftarrow$$

a variável  $x_l$  sai da base

Passo 4 (Atualização)

Faça:

$$I = I - \{x_l\} + \{x_k\} \text{ e } J = J - \{x_k\} + \{x_l\}$$

Atualize o quadro simplex com a nova base, tomando-se como pivô o elemento  $\hat{a}_{lk}$

$$it = it + 1$$

Fim

Fim

The screenshot shows the GNU Octave interface with three tabs: 'DuasFases.m', 'simplex2p.m', and 'nma\_simplex.m'. The 'simplex2p.m' tab is active, displaying the following code:

```

1 type = 'min';
2 c = [1 2];
3 A = [1 1; 3 4];
4 rel = '<= >=';
5 b = [4; 5];
6 drawfr(c, A, rel, b)
7 simplex2p(type, c, A, rel, b)

```

Figura 3: Dados de Entrada na Janela de Comandos do software Octave GNU

Quadro inicial

A =

|    |    |    |   |   |    |
|----|----|----|---|---|----|
| 1  | 1  | 1  | 1 | 0 | 4  |
| 3  | 4  | 0  | 0 | 1 | 5  |
| 1  | 2  | 0  | 0 | 0 | 0  |
| -4 | -5 | -1 | 0 | 0 | -9 |

pivot linha → 2 pivot coluna → 1

Quadro Simplex 1

A =

|        |         |        |        |         |         |
|--------|---------|--------|--------|---------|---------|
| 0      | -0.3333 | 1.0000 | 1.0000 | -0.3333 | 2.3333  |
| 1.0000 | 1.3333  | 0      | 0      | 0.3333  | 1.6667  |
| 0      | 0.6667  | 0      | 0      | -0.3333 | -1.6667 |

|   |        |         |   |        |         |
|---|--------|---------|---|--------|---------|
| 0 | 0.3333 | -1.0000 | 0 | 1.3333 | -2.3333 |
|---|--------|---------|---|--------|---------|

pivot linha-> 1 pivot coluna-> 3

Quadro Simplex 2

A =

|        |         |        |        |         |         |
|--------|---------|--------|--------|---------|---------|
| 0      | -0.3333 | 1.0000 | 1.0000 | -0.3333 | 2.3333  |
| 1.0000 | 1.3333  | 0      | 0      | 0.3333  | 1.6667  |
| 0      | 0.6667  | 0      | 0      | -0.3333 | -1.6667 |
| 0      | -0.0000 | 0      | 1.0000 | 1.0000  | 0       |

Fim da Fase 1

\*\*\*\*\*

Quadro Simplex 1

A =

|        |         |        |         |
|--------|---------|--------|---------|
| 0      | -0.3333 | 1.0000 | 2.3333  |
| 1.0000 | 1.3333  | 0      | 1.6667  |
| 0      | 0.6667  | 0      | -1.6667 |

Fim da Fase 2

\*\*\*\*\*

O problema tem uma solucao otima

Valores da variaveis:

x(1)= 1.666667

x(2)= 0.000000

Valor da funcao objetivo:

z= 1.666667

>>

## 4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho permitiu o estudo de várias ferramentas matemáticas para estudar o tema Programação Linear. Vale destacar o estudo teórico utilizando uma linguagem algébrica e analítica preparando para estudos futuros da matemática que abrange a teoria de programação linear e a possibilidade de um estudo amplo na teoria de Programação não Linear em uma futura Pós-Graduação. Além disso, a parte de programação e resolução de problemas essenciais para a visualização e aplicação da resolução de problemas de otimização linear complementa a abordagem dos estudos teóricos. Um dos temas de estudo que talvez mereça maior aprofundamento e não ocorreu como programado é o tema Análise de sensibilidade. A análise de sensibilidade, frequentemente chamada também de análise pós-otimização é um assunto de suma importância prática, pois há inúmeras situações reais onde se verificam alterações no problema inicialmente formulado. Logo, possivelmente em trabalhos futuros, seja de Mestrado ou de Doutorado daremos ênfase e nos voltaremos ao estudo pormenorizado a respeito do tema.

## 5 REFERÊNCIAS

### Referências

- [1] ARENALES, S.; DAREZZO, A. **Cálculo Numérico: aprendizagem com apoio de software.** São Paulo: Thomson, 2007.
- [2] BAZARAA, M. S.; JARVIS J. J.; SHERALI, H. D. **Linear Programming and Network Flows.** John Wiley & Sons, 2010.
- [3] BERTSIMAS, D.; TSITSIKLIS, J. N. **Introduction to Linear Optimization.** Athena Scientific, 1997.
- [4] BOLDRINI, J. L.; COSTA, S. I. R.; RIBEIRO, V. L.; WETZLER, H. G. **Álgebra Linear,** Harper-Row, São Paulo.
- [5] CARVALHO; Q. C. O. M. **Introdução à Otimização: Métodos Unidimensionais e Métodos de Newton.** Orientadora: Dra. Evaneide Alves Carneiro. 2018. TCC (Graduação) - Curso de Bacharelado em Matemática, Universidade Federal de Uberlândia, Ituiutaba, 2018.
- [6] CHAPMAN, Stephen J. **Programação em MATLAB para engenheiros.** 2 ed., São Paulo, 2010.
- [7] LIMA, E. L. **Análise Real,** vol. 1, 8. edição, Coleção Matemática Universitária, IMPA, 2004.
- [8] FIGUEIREDO, L. **Planejamento e programação de um projeto de construção civil.** Orientador: Prof. Dr. Miguel Cezar Santoro. 2009. TCC - Curso de Engenharia de Produção, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2009.
- [9] FREITAS, E. C. **Programação Linear: da teoria à aplicação em sala de aula.** Orientadora: Prof(a). Dr(a). Elisa Regina dos Santos. 2021. Dissertação - Curso de Matemática, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2021.
- [10] GERALD, C. F.; WHEATLEY, P. O. **Applied numerical analysis.** 7. ed. Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company, 1984.

- [11] GOLDBARG, M. C.; LUNA, H. P. **Otimização combinatória e programação linear**. 2 ed., rev. atual. Rio de Janeiro: Elsevier, 2005.
- [12] IZMAILOV, A.; SOLODOV, M. V. **Otimização: Condições de Otimalidade, Elementos de Análise Convexa e de Dualidade**. 2. ed., Rio de Janeiro, Editora IMPA, 2012.
- [13] IZMAILOV, A.; SOLODOV, M. V. **Otimização: Métodos Computacionais**. 2. ed., Rio de Janeiro, Editora IMPA, 2012.
- [14] LIMA, E. L. Álgebra Linear. 4. ed. Rio de Janeiro, IMPA, CNPq, 2000.
- [15] OTTO, S. R., DENIER, J. P. **An introduction to Programming and Numerical Methods in MATLAB**. Springer, 2005.
- [16] PIRES, E. M; MOTA, J. O.; FAGUNDES, M. V. C. **Previsão de demanda, modelagem e simulação produtiva: implicações para a gestão d99e uma indústria de construção civil de Vitória da Conquista - BA**.
- [17] QUEIROZ, M. G. **Otimização Global e o Problema de Designação de Fluxos e Capacidades**. Orientadora: Prof. Dr. Carlos Humes Júnior. 1997. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado em Matemática, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1997.
- [18] TONIN; E. D. **O uso da programação linear para a otimização do lucro no transporte de soja**. Orientadora: Prof. Dr. Joselene Marques. 2021. 49f. TCC (Graduação) - Curso de Licenciatura em Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Cornélio Procópio, 2021.
- [19] ZACHI, J. M. **Problemas de Programação Linear: uma proposta de resolução geométrica para o Ensino Médio com o uso do GeoGebra**. Orientadora: Profa. Dra. Arianne Luzia dos Santos. 2016. Mestrado - Curso de Matemática, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro, 2016.
- [20] Apostila Introdução ao Octave, acesso em JULHO/2021. Disponível em: <http://www.castilho.prof.ufu.br/cn/octave.pdf>

[21] **Tutorial 6 - Linear Programming with Matlab.** Edward Neuman, Department of Mathematics, Southern Illinois University at Carbondale. acesso em NOV./2023. Disponível em: <https://www.math.siu.edu/matlab/tutorial6.pdf>

## 6 Apêndice

Neste capítulo, apresentaremos conceitos básicos que foram empregados ao longo do texto.

**Definição 6.1 (Restrições Lineares)** *As restrições lineares são conjuntos formados por inequações ou igualdades lineares, ou seja, as incógnitas (em PPL conhecidas como variáveis de decisão) são submetidas a somente a multiplicações por um escalar.*

**Definição 6.2 (Poliedro)** *Um poliedro é todo conjunto que pode ser expresso como uma intersecção de hiperplanos e/ou semi-espacos, i. e., quando se apresenta da forma  $D = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \geq b\}$ , onde  $A \in \mathbb{R}(m, n)$  é uma matriz de ordem  $m \times n$  e  $b \in \mathbb{R}^m$  um vetor de  $m$  entradas reais.*

**Definição 6.3 (Conjunto convexo)** *Um conjunto  $X \subset \mathbb{R}^n$  é dito **convexo** quando para quaisquer pares de vetores  $x, y \in X$  e  $0 \leq \alpha \leq 1$  temos  $\alpha x + (1 - \alpha)y \in X$ .*

*Pelo ponto de vista geométrico, significa que para dois vetores arbitrários que os pertencam, o segmento de reta que os conecta está inteiramente contido no próprio conjunto.*

*O ponto  $\alpha x + (1 - \alpha)y$ , onde  $0 \leq \alpha \leq 1$ , é chamada **combinação convexa** de  $x$  e  $y$  (com parâmetro  $\alpha$ ).*

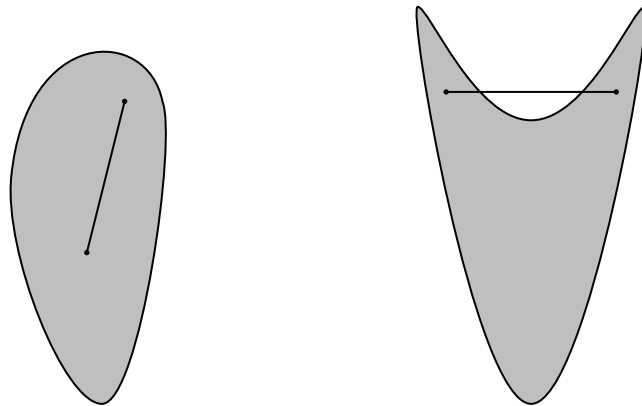


Figura 4: Conjunto Convexo e Conjunto Não Convexo

**Definição 6.4 (Espaço Vetorial)** *Um **espaço vetorial** real  $V \neq \emptyset$  é um conjunto, cujos elementos são chamados **vetores** definido por um par de operações, adição e a multiplicação por escalar:*

$$+ : V \times V \rightarrow V$$

$$(u, v) \mapsto +(u, v) = u + v \in V$$

$$\cdot : \mathbb{R} \times V \rightarrow V$$

$$(\alpha, u) \mapsto \cdot(\alpha, u) = \alpha \cdot u \in V$$

Essas operações devem atender, para quaisquer  $u, v, w \in V$  e  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , as condições a seguir, as quais são também conhecidas como axiomas de espaço vetorial:

1. **comutatividade:**  $u + v = v + u$ ;
2. **associatividade:**  $(u + v) + w = u + (v + w)$ ;
3. **vetor nulo:** existe um vetor  $0 \in V$ , denominado vetor nulo, ou vetor zero, tal que  $v + 0 = 0 + v = v$ ;
4. **inverso aditivo:** para cada vetor  $v \in V$  existe um vetor  $-v \in V$ , chamado o inverso aditivo, ou o simétrico de  $v$ , tal que  $-v + v = v + (-v) = 0$ ;
5. **associatividade para a multiplicação:**  $(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$ ;
6. **distributividade em relação a soma de escalares:**  $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$ ;
7. **distributividade em relação a soma de vetores:**  $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$ ;
8. **multiplicação por 1:**  $1 \cdot v = v$ .

**Definição 6.5 (Base de um Espaço Vetorial)** Sejam  $V \neq \emptyset$  um espaço vetorial sobre o corpo  $\mathbb{R}$  e  $B \subset V$  um subconjunto de  $V$ . É dito que  $B$  é uma **base** de  $V$  quando é linearmente independente e gera  $V$ . Logo, todo vetor  $v \in V$  é descrito de maneira única, como combinação linear  $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m$  de elementos  $v_1, \dots, v_m$  da base  $B$ . Além disso, se  $B = \{v_1, \dots, v_m\}$  é uma base de  $V$  e  $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m$ , então os números  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  chamam-se as coordenadas do vetor  $v$  na base  $B$ .

**Definição 6.6 (Produto interno)** Seja  $V \neq \emptyset$  um espaço vetorial real. Uma aplicação  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  que relaciona a cada par de vetores  $x$  e  $y$  a um número real, indicado por  $\langle x, y \rangle$ , é chamada de produto interno com respeito a  $V$  se  $\forall x, y, z \in V$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$  cumpre as seguintes propriedades:

1. **Não negatividade:**  $\langle x, x \rangle \geq 0$  e  
 $\langle x, x \rangle = 0$  se  $x = 0$ .
2. **Homogeneidade:**  $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$ .
3. **Aditividade:**  $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ .
4. **Comutatividade:**  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ .

**Definição 6.7 (Dependência linear)** *Sejam  $X \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto arbitrário e  $v_1, v_2, \dots, v_n$  vetores de  $X$ . Dizemos que os  $n$  vetores  $v_1, v_2, \dots, v_n$  são **linearmente independentes** (abreviatura: *L. I.*) quando nenhum dos vetores puderem ser expressos como uma combinação linear dos demais. Traduzindo isso para linguagem matemática, temos:*

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0, \quad \text{então } \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0.$$

*Caso contrário, diremos que os  $n$  vetores são **linearmente dependentes** (abreviatura: *L. D.*).*

**Definição 6.8 (Gradiente)** *Seja  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de  $n$  variáveis reais a valores reais. O **vetor gradiente** de  $f$ , indicado por  $\nabla f(x)$  ou  $\text{grad } f$  pode ser entendido como um vetor cujas suas componentes são as derivadas parciais, isto é,*

$$\nabla f(x) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right).$$

**Teorema 6.1 (Vetor gradiente e crescimento de uma função)** *Suponha que  $f$  seja uma função diferenciável de  $n$  variáveis. O valor máximo que  $f$  assume ocorre quando tem a mesma direção e sentido do vetor gradiente  $\nabla f(x)$ .*

**Definição 6.9 (Matriz)** *Uma matriz, enquanto entidade matemática, é conceituada como uma estrutura ordenada e organizada, caracterizada pela disposição de elementos em linhas e colunas que guardam números, letras, símbolos e outras representações. As matrizes são representadas por letras arábicas maiúsculas e seus elementos por letras arábicas minúsculas.*

*Seja  $A$  uma matriz com  $m$  linhas e  $n$  colunas. Dizemos que a **ordem da matriz**  $A$  é  $m \times n$ . Dada uma linha  $i$  e uma coluna  $j$  de uma matriz  $A$ , o elemento na posição  $(i, j)$  será denotado por  $a_{ij}$ .*

**Definição 6.10 (Posto de uma matriz)** *Seja  $A \in \mathbb{R}(m, n)$  uma matriz quadrada ( $m = n$ ) com entradas reais. O posto de uma matriz  $A$ , indicado por  $\text{Posto } A$ , é o número máximo de linhas (ou colunas) que são linearmente independentes.*

**Teorema 6.2** *Para toda matriz  $A \in M(m, n)$ , o posto segundo linhas e o posto segundo colunas são iguais.*

**Demonstração:** Seja  $\text{Posto } A = p$  o posto segundo linhas da matriz  $A \in M(m, n)$ . Então existem  $p$  vetores  $w_k = (b_{1k}, \dots, b_{mk}) \in \mathbb{R}^m$  tais que cada uma das colunas  $v_j = (a_{1j}, \dots, a_{mj})$ ,  $1 \leq j \leq n$ , é combinação linear de  $w_1, \dots, w_p$ :

$$v_j = \sum_{k=1}^p c_{kj} w_k, \quad 1 \leq j \leq n. \quad (27)$$

Tomando a  $i$ -ésima coordenada de cada um dos membros de (27), vemos que

$$a_j = \sum_{k=1}^p c_{kj} b_{ik} = \sum_{k=1}^p b_{ik} c_{kj}, \quad (28)$$

para quaisquer  $i, j$ , com  $1 \leq i \leq m$  e  $1 \leq j \leq n$ . Considerando agora os vetores-linha  $u_i = (a_{i1}, \dots, a_{in})$  da matriz  $A$ , juntamente com os vetores  $z_k = (c_{k1}, \dots, c_{kn})$ ,  $1 \leq k \leq p$ , observamos que a igualdade entre o primeiro e o terceiro membro de (28) significa que, para todo  $i = 1, \dots, m$  tem-se

$$u_i = \sum_{k=1}^p b_{ik} z_k, \quad 1 \leq i \leq m.$$

Assim, os vetores-linha de  $A$  são combinações lineares de  $z_1, \dots, z_p$ , portanto o posto de  $A$  segundo linhas é  $\leq p$ . Aplicando este resultado à matriz  $A^\top$  (chamada a *transposta* de  $A$ ), que tem como linhas as colunas de  $A$  e como colunas as linhas de  $A$ , concluímos que o posto de  $A$  segundo colunas é menor do que ou igual ao posto segundo linhas. Portanto, isto conclui a demonstração.  $\square$

**Definição 6.11 (Conjunto limitado)** *Seja  $X \subset \mathbb{R}$  um subconjunto não-vazio. Dizemos que  $X$  é limitado se existe  $M \in \mathbb{R}$ ,  $M > 0$ , tal que  $X \subset (-M, M)$ , ou seja, todo elemento  $x \in X$  satisfaz  $-M < x < M$ .*

**Definição 6.12 (Conjunto limitado superiormente e inferiormente)** *Seja  $X \subset \mathbb{R}$  um subconjunto não-vazio. Dizemos que  $X$  é **limitado superiormente** se existe  $M \in \mathbb{R}$*

tal que  $x \leq M$ ,  $\forall x \in X$ . Dizemos que  $X$  é **limitado inferiormente** se existe  $m \in \mathbb{R}$  tal que  $m \leq x$ ,  $\forall x \in X$ . Os números  $M$  e  $m$  são denominados, cota superior e inferior com respeito a  $X$ , respectivamente.

**Definição 6.13 (Ínfimo)** Consideremos  $X \subset \mathbb{R}$  e  $a \in \mathbb{R}$ . Dizemos que o número real  $a$  é **ínfimo** de  $X$  se  $a \geq x$ ,  $\forall x \in X$ , i. e., dentre todas as cotas inferiores com respeito ao conjunto  $X$ ,  $a$  é a maior. O ínfimo é denotado por  $a = \inf X$ .

**Definição 6.14 (Conjunto fechado)** Dizemos que um conjunto  $X \subset \mathbb{R}^n$  é **fechado** quando goza da seguinte propriedade: se  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$  é uma sequência de elementos de  $X$  que converge para algum  $x \in \mathbb{R}^n$ , então  $x \in X$ .

**Definição 6.15 (Conjunto compacto)** Um subconjunto  $X \subset \mathbb{R}$  é dito **compacto**, quando possui a propriedade de ser simultaneamente, limitado e fechado em  $\mathbb{R}$ .

**Teorema 6.3 (Imagem contínua de compacto é compacto)** Sejam  $D \subset \mathbb{R}$  um conjunto compacto e  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua. Então, a imagem  $f(D)$  da função  $f$  é um conjunto compacto.

**Demonstração:** Seja  $y_n \in f(D)$  uma sequência em  $f(D)$ . Para cada  $n \geq 1$ , existe  $x_n \in D$  tal que  $f(x_n) = y_n$ . Como  $D$  é compacto, em particular, a sequência  $(x_n)$  é limitada, logo admite uma subsequência  $(x_{n_k})$  convergente, isto é, converge para algum  $x$ , ou seja,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n_k} = x$ . Como  $D$  é fechado, segue então que  $x \in D$ . Sendo  $f$  uma função contínua, obtemos  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_{n_k} = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(x) = y \in f(D)$ . Mostramos, assim, que toda sequência em  $f(D)$  possui uma subsequência que converge para algum ponto de  $f(D)$ . Isso implica de imediato que  $f(D)$  é fechado, pois qualquer ponto de acumulação  $L$  de  $f(D)$  é limite de uma sequência de pontos em  $f(D)$ . Note que esta sequência admite uma subsequência que converge para um ponto de  $f(D)$ , necessariamente igual a  $L$ . Logo, todo ponto de acumulação  $L$  de  $f(D)$  é um elemento de  $f(D)$ .  $\square$

**Teorema 6.4 (Teorema de Bolzano-Weierstrass)** Toda sequência limitada possui uma subsequência convergente.

**Demonstração:** A demonstração do teorema pode ser encontrada na referência [7].  $\square$

**Teorema 6.5 (Teorema de Weierstrass)** Sejam  $D \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto compacto não-vazio e  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua. Então, os problemas de minimizar e de maximizar  $f$  em  $D$  têm soluções globais.

**Demonstração:** Mostraremos a existência de um minimizador.

Como a imagem de um conjunto compacto por uma função contínua é compacta,  $\{v \in \mathbb{R} \mid v = f(x) \text{ para algum } x \in D\}$  é compacto. Em particular, este conjunto é limitado inferiormente, ou seja,

$$-\infty < \bar{v} = \inf_{x \in D} f(x).$$

Pela definição de ínfimo, para todo  $k \in \mathbb{N}$  existe um  $x_k \in D$  tal que

$$\bar{v} \leq f(x_k) \leq \bar{v} + \frac{1}{k}.$$

Passando ao limite quando  $k \rightarrow \infty$ , temos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{v} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \bar{v} + \frac{1}{k}$$

$$\bar{v} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) \leq \bar{v}.$$

Portanto, pelo Teorema do Sanduíche, concluímos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = \bar{v}.$$

Como  $(x_k) \subset D$  e  $D$  é compacto, segue-se que a sequência  $(x_k)$  é limitada. Logo, ela possui uma subsequência  $(x_{k_j})$  que converge a um ponto de  $D$ :

$$\lim_{j \rightarrow \infty} f(x_{k_j}) = \bar{x} \in D.$$

Pela continuidade de  $f$ ,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} f(x_{k_j}) = f(\bar{x}).$$

Logo, temos que  $f(\bar{x}) = \bar{v}$ , ou seja,  $f$  assume o valor mínimo em  $D$  no ponto  $\bar{x} \in D$ . Em outras palavras,  $\bar{x}$  é um minimizador global do problema.  $\square$

## 7 Anexo: Algoritmo usado na resolução dos problemas

Este algoritmo foi desenvolvido por Edward Neuman do Departamento de Matemática da Universidade do Sudeste de Illinois (edneuman@math.siu.edu) e pode ser encontrado no link da referência [21].

```
function simplex2p(type, c, A, rel, b)
% Metodo de duas fases para resolver o problema de LP
% min(ou max)  $z = c*x$ 
% Sujeito a  $Ax \text{ rel } b$ 
%  $x \geq 0$ 
% O tipo de parametro de entrada contem
%informacoes sobre o tipo do LP
% problema a ser resolvido. Para o problema de
%minimizacao  $\text{type} = \text{'min'}$  e
% para o problema de maximizacao  $\text{tipo} = \text{'max'}$ .
% O parametro de entrada "rel" uma string contendo
%os sinais de relacao.
% Por exemplo, se  $\text{rel} = \text{'<=>'}$ , entao o sistema de
%restricoes consiste
% de uma desigualdade  $\leq$ , uma equacao e uma
%desigualdade  $\geq$ .
clc
if (type == 'min')
    mm = 0;
else
    mm = 1;
    c = -c;
end
b = b(:);
c = c(:)';
[m, n] = size(A);
n1 = n;
les = 0;
```

```

neq = 0;
red = 0;
if length(c) < n
    c = [c zeros(1,n-length(c))];
end
for i=1:m
    if(rel(i) == '<')
        A = [A vr(m,i)];
        les = les + 1;
    elseif(rel(i) == '>')
        A = [A -vr(m,i)];
    else
        neq = neq + 1;
    end
end
ncol = length(A);
if les == m
    c = [c zeros(1,ncol-length(c))];
    A = [A;c];
    A = [A [b;0]];
    [subs, A, z, p1] = loop(A, n1+1:ncol, mm, 1, 1);
    disp('_End_of_Phase_1')
    disp('_*****')
else
    A = [A eye(m) b];
    if m > 1
        w = -sum(A(1:m,1:ncol));
    else
        w = -A(1,1:ncol);
    end

    c = [c zeros(1,length(A)-length(c))];

```

```

A = [A;c];
A = [A;[w zeros(1,m) -sum(b)]];
subs = ncol+1:ncol+m;
av = subs;
[subs, A, z, p1] = loop(A, subs, mm, 2, 1);
if p1 == 'y'
disp('End of Phase_1')
disp('*****')
end
nc = ncol + m + 1;
x = zeros(nc-1,1);
x(subs) = A(1:m,nc);
xa = x(av);
com = intersect(subs,av);
if (any(xa) ~= 0)
disp(sprintf('\n\nEmpty_feasible_region\n'))
return
else
if isempty(com)
red = 1;
end
end
A = A(1:m+1,1:nc);
A = [A(1:m+1,1:ncol) A(1:m+1,nc)];
[subs, A, z, p1] = loop(A, subs, mm, 1, 2);
if p1 == 'y'
disp('End of Phase_2')
disp('*****')
end
end
end
if (z == inf | z == -inf)
return

```

```

end
[m, n] = size(A);
x = zeros(n,1);
x(subs) = A(1:m-1,n);
x = x(1:n1);
if mm == 0
    z = -A(m,n);
else
    z = A(m,n);
end
disp(sprintf('\n\nProblem_has_a_finite_optimal_solution\n'))
disp(sprintf('\n_Values_of_the_legitimate_variables:\n'))
for i=1:n1
    disp(sprintf('_x(%d)=_%f_',i,x(i)))
end
disp(sprintf('\n_Objective_value_at_the_optimal_point:\n'))
disp(sprintf('_z=_%f',z))
t = find(A(m,1:n-1) == 0);
if length(t) > m-1
    str = 'Problem_has_infinitely_many_solutions';
    msgbox(str, 'Warning_Window', 'warn')
end
if red == 1
    disp(sprintf('\n_Constraint_system_is_redundant\n\n'))
end

```