

Juliano Gonçalves Oler

Cálculo II



UNIVERSIDADE FEDERAL
DE UBERLÂNDIA

2013

Oler, Juliano Gonçalves

Cálculo II / Juliano Gonçalves Oler.

Uberlândia, MG : UFU, 2013, 171p.

Licenciatura em Matemática

1. Cálculo II.

Reitor

Elmiro Santos Resende

Coordenador UAB/CEAD/UFU

Maria Teresa Menezes Freitas

Conselho Editorial

Carlos Rinaldi-UFMT

Carmen Lucia Brancaglion Passos-UFScar

Célia Zorzo Barcelos-UFU

Ivete Martins Pinto-FURG

João Frederico Costa Azevedo Meyer-UNICAMP

Marisa Pinheiro Mourão-UFU

Edição

Centro de Educação a Distância

Comissão Editorial-CEAD/UFU

Diagramação

Juliano Gonçalves Oler

PRESIDENTE DA REPÚBLICA
Dilma Vana Rousseff

MINISTRO DA EDUCAÇÃO
Aloizio Mercadante

UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL
DIRETORIA DE EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA/CAPES
João Carlos Teatini de Souza Clímaco

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA - UFU
REITOR
Elmiro Santos Resende

VICE-REITOR
Eduardo Nunes Guimarães

CENTRO DE EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA
DIRETORA E REPRESENTANTE UAB/UFU
Maria Teresa Menezes Freitas

SUPLENTE UAB/UFU
José Benedito de Almeida Júnior

FACULDADE DE MATEMÁTICA -FAMAT - UFU
DIRETOR
Luís Antônio Benedetti

COORDENADORA DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA - PARFOR
Fabiana Fiorezi de Marco Matos

ASSESSORA DA DIRETORIA
Sarah Mendonça de Araújo

EQUIPE MULTIDISCIPLINAR
Alberto Dumont Aves Oliveira
Dirceu Nogueira de Sales Duarte Jr.
Gustavo Bruno do Vale
João Victor da Silva Alves
Otaviano Ferreira Guimarães

EQUIPE DO CENTRO DE EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA DA UFU - CEaD/UFU

ASSESSORA DA DIRETORIA

Sarah Mendonça de Araújo

EQUIPE MULTIDISCIPLINAR

Alberto Dumont Alves Oliveira
Dirceu Nogueira de Sales Duarte Júnior
Fabiano Goulart
Gustavo Bruno do Vale
João Victor da Silva Alves
Otaviano Ferreira Guimarães

SETOR DE FORMAÇÃO CONTINUADA

Marisa Pinheiro Mourão

REVISORA

Paula Godoi Arbex

ESTAGIÁRIOS

Ana Caroline Marques Costa
Antonio Mourão
Cristhian Zanforlin Lousa
Daniel Kenji Nishiyama
Heldson Luiz da Silva
Janaína Batista do Nascimento
Julian Degutis de Freitas Garcia
Thainá Aparecida Azevedo Tosta
Thamara Tofeti Lima

Sobre o curso	7
Módulo 1 - Integral indefinida: técnicas de integração	11
Introdução	11
Integrais imediatas	14
Integrais elementares: soma e produto por escalar	18
Integrais e a regra da cadeia	29
Integrais e a regra do produto	38
Resolvendo integrais através de substituições trigonométricas	46
Integrais de funções racionais: método das frações parciais	58
Teste seus conhecimentos	66
Respostas dos testes	68
Módulo 2 - Séries Numéricas	71
Introdução	71
Sequências Numéricas	74
Séries Infinitas	82
Séries de termos positivos	97
Critério de convergência de séries alternadas	101
Séries absolutamente convergentes	103
Teste seus conhecimentos	108
Respostas dos testes	110
Módulo 3 - A Integral Definida	111
Introdução	111
Somadas de Riemann	113
A integral definida	120
O Teorema Fundamental do Cálculo	127
Cálculo de áreas	137
Teste seus conhecimentos	144
Respostas dos testes	147
Módulo 4 - Integrais Impróprias	149
Integrais Impróprias	149
Teste seus conhecimentos	169
Respostas dos testes	170
Referências Bibliográficas	171

A Matemática é uma ciência que nasceu da necessidade que o homem tinha de resolver problemas, e vem se desenvolvendo e aprimorando ao longo dos tempos. Produz técnicas analíticas que são empregadas por engenheiros e outros profissionais na criação, desenvolvimento e aprimoramento tecnológico de vários produtos. O mundo como o conhecemos hoje não seria possível sem a Matemática. Não teríamos carros, aviões, celulares, computadores, televisões, aparelhos médicos etc. Assim, essa nobre ciência é uma parte essencial das engrenagens que fazem a sociedade evoluir. O profissional da área de Matemática é, então, um elemento fundamental para o desenvolvimento tecnológico e, portanto, socioeconômico de qualquer sociedade.

Nesse contexto, é de suma importância o processo de formação de profissionais que vão atuar na área de Matemática. Essa tarefa é desempenhada pelas instituições de ensino superior. O processo de formação em um curso superior de Matemática envolve a aquisição de vários conhecimentos. Para facilitar a assimilação destes, o curso é dividido em várias disciplinas. Uma dessas disciplinas é a de **Cálculo II**, que, em essência, objetiva apresentar ao aluno uma visão geral da Matemática, além familiarizá-lo com a linguagem, conceitos e ideias relacionadas ao estudo das técnicas de integração e séries numéricas. Essa disciplina visa, ainda, apresentar ao estudante aplicações do cálculo diferencial e integral, com a formulação e solução de problemas do mundo real. Para facilitar o entendimento, tal disciplina é dividida em quatro módulos:

- Integral indefinida: técnicas de integração;
- Séries Numéricas;
- A Integral Definida;
- Integrais Impróprias.

A duração de cada módulo é de quinze dias. O texto básico da disciplina é contemplado com exercícios estrategicamente posicionados, de tal forma que o conteúdo previamente estudado fique bem assimilado em seus conceitos mais básicos.

Quanto à metodologia, o curso terá seguinte base: estudo da teoria do livro texto, com o treino através dos exercícios nele contidos, e atividades dentro do Ambiente Virtual de Aprendizagem (AVA), as quais serão passadas para os alunos dentro do período de vigência de cada módulo, e farão parte do processo de avaliação, assim como as provas presenciais.

Quanto ao sistema de avaliação, serão distribuídos 100 pontos, sendo 60 pontos relativos às provas escritas em modo presencial e 40 pontos nas atividades passadas pelo Ambiente Virtual de Aprendizagem (AVA).

As listas de exercícios que serão disponibilizadas no AVA deverão ser entregues em datas que também serão apresentadas no AVA, para que os tutores possam corrigir.

Desejamos ao caro aluno um ótimo curso, e torcemos para que venha atingir com sucesso os objetivos da disciplina.

Informações

Prezado(a) aluno,

Ao longo deste guia impresso você encontrará alguns “ ícones” que lhe ajudarão a identificar as atividades.

Fique atento ao significado de cada um deles, pois isso facilitará a sua leitura e seus estudos.



Áudio



Vídeo



Leituras
Indicadas



Multimídia



Atividades
Guia Impresso



Atividades
Ambiente Virtual



Saiba Mais



Pare e Pense



Pesquisando
na rede



Referências

Destacamos alguns termos no texto do Guia cujos sentidos serão importantes para sua compreensão. Para permitir sua iniciativa e pesquisa, não criamos um glossário, mas se houver dificuldade, interaja no Fórum de Dúvidas.

Cabe, ainda, mencionar que os exemplos e exercícios presentes nesse material foram retirados dos livros texto que constam na bibliografia.

Módulo 1

Integral indefinida: técnicas de integração

Introdução

No curso de Cálculo I foi introduzido o conceito de derivada e estudadas suas propriedades. Vale a pena recordarmos que a derivada é uma propriedade local. Visto que, ao calcularmos a derivada de uma função f , o fazemos com relação a um dado ponto p pertencente ao domínio da função estudada.



Pergunta. Seja $y = f(x)$ uma função real. Você se recorda de como representamos a derivada da função f ?

Se $y = f(x)$ é uma função real, ou seja, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, é usual representarmos a derivada de f por:

$$\left\{ \begin{array}{l} y' \\ f'(x) \\ \frac{df}{dx} \end{array} \right. \Rightarrow \text{para as três notações, lê-se derivada da função } f(x) \text{ com relação a } x.$$



Pergunta. Acabamos de recordar a representação da derivada de uma função $y = f(x)$. Agora, você seria capaz de relembrar como definimos tal conceito?

Definimos a derivada de uma função $y = f(x)$ no ponto p , como sendo o limite:

$$f'(p) = \lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}.$$

Dessa forma, sempre que o limite existir podemos calcular a derivada da função f no ponto p . Sendo o valor assumido pelo limite, a derivada da função calculada no ponto mencionado.



Pergunta. Você se recorda das principais derivadas estudadas no curso de cálculo I?

Resumidamente, as principais derivadas estudadas do curso de cálculo I, são:

1. Se f é a **função constante**, ou seja, $f(x) = c$, onde c é uma constante (c é um número real que não depende da variável x), então a derivada da função f , em relação a x , é dada por $f'(x) = 0$.
2. Se f é a **função identidade**, isto é, $f(x) = x$, então a derivada da função f , em relação à variável x , é dada por $f'(x) = 1$.
3. Se f é a **função potência**, isto é, $f(x) = x^\alpha$ (α um número real não nulo), então a derivada da função f , em relação à variável x , é dada por $f'(x) = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$.
4. Se f é a **função exponencial na base a** ($a > 0$, $a \neq 1$), isto é, $f(x) = a^x$, então a derivada da função f , em relação à variável x , é dada por $f'(x) = \ln(a) \cdot a^x$.
5. Se f é a **função exponencial**, isto é, $f(x) = e^x$ (e é o número de Euler, em homenagem ao matemático suíço Leonhard Euler, cujo valor é aproximadamente 2,7), então a derivada da função f , em relação à variável x , é dada por $f'(x) = e^x$.
6. Se f é a **função logaritmo na base a** ($a > 0$, $a \neq 1$), isto é, $f(x) = \log_a(x)$, então a derivada da função f , em relação à variável x , é dada por $f'(x) = \frac{1}{x} \log_a(e)$.
7. Se f é a **função logaritmo na base e** , isto é, $f(x) = \ln(x)$, então a derivada da função f , em relação à variável x , é dada por $f'(x) = \frac{1}{x}$.
8. Se f é a **função seno**, isto é, $f(x) = \text{sen}(x)$, então a derivada da função f , em relação à variável x , é dada por $f'(x) = \cos(x)$.
9. Se f é a **função cosseno**, isto é, $f(x) = \cos(x)$, então a derivada da função f , em relação à variável x , é dada por $f'(x) = -\text{sen}(x)$.
10. Se f é a **função tangente**, isto é, $f(x) = \text{tg}(x)$, então a derivada da função f , em relação à variável x , é dada por $f'(x) = \sec^2(x)$.

11. Se f é a **função cotangente**, isto é, $f(x) = \cotg(x)$, então a derivada da função f , em relação à variável x , é dada por $f'(x) = -\operatorname{cosec}^2(x)$.
12. Se f é a **função secante**, isto é, $f(x) = \sec(x)$, então a derivada da função f , em relação à variável x , é dada por $f'(x) = \sec(x) \cdot \operatorname{tg}(x)$.
13. Se f é a **função cossecante**, isto é, $f(x) = \operatorname{cosec}(x)$, então a derivada da função f , em relação à variável x , é dada por $f'(x) = -\operatorname{cosec}(x) \cdot \cotg(x)$.
14. Se f é a **função arco seno**, isto é, $f(x) = \operatorname{arc\,sen}(x)$, então a derivada da função f , em relação à variável x , é dada por $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
15. Se f é a **função arco cosseno**, isto é, $f(x) = \operatorname{arc\,cos}(x)$, então a derivada da função f , em relação à variável x , é dada por $f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.
16. Se f é a **função arco tangente**, isto é, $f(x) = \operatorname{arc\,tg}(x)$, então a derivada da função f , em relação à variável x , é dada por $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
17. Se f é a **função seno hiperbólico**, isto é, $f(x) = \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, então a derivada da função f , em relação à variável x , é dada por $f'(x) = \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.
18. Se f é a **função cosseno hiperbólico**, isto é, $f(x) = \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, então a derivada da função f , em relação à variável x , é dada por $f'(x) = \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.
19. Se f é a **função tangente hiperbólico**, isto é, $f(x) = \operatorname{tgh}(x)$, então a derivada da função f , em relação à variável x , é dada por $f'(x) = \operatorname{sech}^2(x)$.
20. Se f é a **função cotangente hiperbólico**, isto é, $f(x) = \operatorname{cotgh}(x)$, então a derivada da função f , em relação à variável x , é dada por $f'(x) = -\operatorname{cosech}^2(x)$.
21. Se f é a **função secante hiperbólico**, isto é, $f(x) = \operatorname{sech}(x)$, então a derivada da função f , em relação à variável x , é dada por $f'(x) = -\operatorname{sech}(x) \cdot \operatorname{tgh}(x)$.
22. Se f é a **função cossecante hiperbólico**, isto é, $f(x) = \operatorname{cosech}(x)$, então a derivada da função f , em relação à variável x , é dada por $f'(x) = -\operatorname{cosech}(x) \cdot \operatorname{cotgh}(x)$.

Integrais imediatas



Pare e Pense. Professor, por que estamos recordando o conceito de derivada sendo que neste módulo queremos estudar integrais?

Suponha que, em um dia comum de aula, o professor de cálculo adiantou-se alguns minutos e deixou escrito no quadro a igualdade:

$$f'(x) = \cos(x).$$

À medida que os alunos foram chegando para a aula, observaram na lousa a igualdade e imediatamente perceberam qual função o professor estava procurando.

Observe que a igualdade $f'(x) = \cos(x)$ nos reporta para a seguinte pergunta:

Qual função devo derivar para obter a função cosseno?

Como vimos anteriormente, se $f(x) = \sin(x)$, então $f'(x) = \cos(x)$ e, portanto, a resposta para a pergunta é:

$$f(x) = \sin(x).$$

Neste caso, dizemos que a função $f(x) = \sin(x)$ é chamada de **primitiva** ou **antiderivada** da função $f(x) = \cos(x)$.



Observação. Sempre que existir uma função $F(x)$ tal que

$$F'(x) = f(x)$$

para todo x pertencente a um intervalo I , dizemos que a função F é uma **primitiva** ou **anti-derivada** da função f .



Pergunta. Professor, as funções que estudamos no cálculo possuem uma única primitiva?

Não é verdade que um função possui uma única primitiva. Por exemplo, acabamos de ver que a função $F(x) = \text{sen}(x)$ é uma primitiva da função $f(x) = \cos(x)$. Porém as funções:

$$G(x) = \text{sen}(x) + 10$$

$$H(x) = \text{sen}(x) + \pi$$

$$S(x) = \text{sen}(x) + \sqrt{2}$$

também são primitivas da função $f(x) = \cos(x)$, visto que

$$G'(x) = \frac{d}{dx}(\text{sen}(x) + 10) = \frac{d}{dx}(\text{sen}(x)) + \frac{d}{dx}(10) = \text{sen}'(x) + 0 = \text{sen}'(x) = \cos(x)$$

$$H'(x) = \frac{d(\text{sen}(x) + \pi)}{dx} = \frac{d}{dx}(\text{sen}(x)) + \frac{d}{dx}(\pi) = \text{sen}'(x) + 0 = \text{sen}'(x) = \cos(x)$$

$$S'(x) = \frac{d(\text{sen}(x) + \sqrt{2})}{dx} = \frac{d}{dx}(\text{sen}(x)) + \frac{d}{dx}(\sqrt{2}) = \text{sen}'(x) + 0 = \text{sen}'(x) = \cos(x).$$

Observe que, na segunda igualdade, estamos utilizando que a derivada da soma de duas funções é a soma das derivadas. Já na terceira igualdade, estamos aplicando que a derivada de uma constante é igual a zero.

Assim, de um modo geral, podemos concluir que a família de funções

$$F_c(x) = \text{sen}(x) + c$$

formam um conjunto infinito $\mathcal{A} = (\{F_c(x)\}_{c \in \mathbb{R}})$, onde cada elemento é uma primitiva da função $f(x) = \cos(x)$.



Observação. Não existe uma única primitiva para uma dada função f , mais precisamente, se F é uma primitiva da função f , então $F_c(x) = F(x) + c$, também é uma primitiva de f , para todo $c \in \mathbb{R}$.

Já vimos que uma função f pode ter várias primitivas F . Por outro lado, de acordo com a lista de funções deriváveis que recordamos anteriormente, é possível afirmar que a maior parte das funções estudadas no curso de Cálculo I possui pelo menos uma primitiva.



Pergunta. Quando derivamos, o processo para se encontrar a derivada é chamado de derivação. Há um nome para o processo para se encontrar a primitiva de uma função? Existe uma notação que nos permita identificar o processo para se obter uma primitiva?

Damos o nome de **integração** ao processo realizado para se encontrar uma primitiva de uma dada função. Simbolicamente, quando estamos calculando uma primitiva, utilizamos:

$$\int f(x) dx : \text{integral de } f \text{ com relação a } x.$$

Mais precisamente, o símbolo $\int f(x) dx$ nos diz:

“ qual a família de funções $F(x)$, devo derivar com relação a x , para obter a função $f(x)$ ”.

Decompondo $\int f(x) dx$, temos:

$$\begin{array}{ll} \int & : \text{ sinal de integração} \\ f(x) & : \text{ função integrando} \\ f(x) dx & : \text{ integrando} \\ dx & : \text{ identifica a variável de integração.} \end{array}$$



Observação. Se f é uma função que possui primitiva F , então:

$$\int f(x) dx = F(x) + c \text{ se, e somente, se } F'(x) = f(x).$$

Utilizando a lista de funções diferenciáveis, podemos calcular imediatamente as integrais:

TABELA DE INTEGRAIS IMEDIATAS

(1) $\int dx = x + c$	(2) $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c (\alpha \neq -1)$
(3) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + c$	(4) $\int e^x dx = e^x + c$
(5) $\int \frac{1}{x} dx = \ln(x) + c$	(6) $\int \sin(x) dx = -\cos(x) + c$
(7) $\int \cos(x) dx = \sin(x) + c$	(8) $\int \sec^2(x) dx = \tan(x) + c$
(9) $\int \operatorname{cosec}^2(x) dx = -\cotg(x) + c$	(10) $\int \sec(x) \cdot \tan(x) dx = \sec(x) + c$
(11) $\int \operatorname{cosec}(x) \cdot \cotg(x) dx = -\operatorname{cosec}(x) + c$	(12) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\arcsin(x) + c$
(13) $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) + c$	(14) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx = \operatorname{arcsec}(x) + c$
(15) $\int \sinh(x) dx = \cosh(x) + c$	(16) $\int \cosh(x) dx = \sinh(x) + c$
(17) $\int \operatorname{sech}^2(x) dx = \operatorname{tgh}(x) + c$	(18) $\int \operatorname{cosech}^2(x) dx = -\operatorname{cotgh}(x) + c$
(19) $\int \operatorname{sech}(x) \cdot \operatorname{tgh}(x) dx = -\operatorname{sech}(x) + c$	(20) $\int \operatorname{cosech}(x) \cdot \operatorname{cotgh}(x) dx = -\operatorname{cosech}(x) + c$

Integrais elementares: soma e produto por escalar



Pergunta. Professor, sabendo calcular as integrais $\int x^3 dx$ e $\int \cos(x) dx$, é possível calcular a integral $\int (x^3 + \cos(x)) dx$?

Utilizando a tabela das integrais imediatas, percebemos que:

$$\int x^3 dx = \frac{1}{4}x^4 + c_1 \text{ e } \int \cos(x) dx = \sin(x) + c_2. \quad (1.1)$$

Por outro lado, sabemos que, para resolver a integral $\int (x^3 + \cos(x)) dx$, devemos encontrar uma certa função $F(x)$ tal que

$$F'(x) = x^3 + \cos(x).$$

Claramente a função procurada é:

$$\frac{1}{4}x^4 + \sin(x) + c,$$

visto que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{4}x^4 + \sin(x) + c \right) &= \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{4}x^4 \right) + \frac{d}{dx}(\sin(x)) + \frac{d}{dx}(c) \\ &= \frac{1}{4} \cdot 4 \cdot x^3 + \cos(x) + 0 \\ &= x^3 + \cos(x). \end{aligned}$$

Dessa forma, temos que:

$$\int (x^3 + \cos(x)) dx = \frac{1}{4}x^4 + \sin(x) + c. \quad (1.2)$$

Relacionando as igualdades (1.1) e (1.2), obtemos:

$$\int (x^3 + \cos(x)) dx = \int x^3 dx + \int \cos(x) dx.$$



Pergunta. O resultado que acabamos de verificar é uma particularidade das funções $f(x) = x^3$ e $g(x) = \cos(x)$, ou é válido para quaisquer funções deriváveis?

O resultado obtido utilizando as funções $f(x) = x^3$ e $g(x) = \cos(x)$ pode ser estendido a qualquer função derivável.

Considere $F(x)$ e $G(x)$ primitivas das funções $f(x)$ e $g(x)$, respectivamente. Dessa forma, temos que:

$$\int f(x) dx = F(x) + c_1 \text{ e } \int g(x) dx = G(x) + c_2. \quad (1.3)$$

Afirmamos que a função

$$H(x) = F(x) + G(x) + c_1 + c_2$$

é uma primitiva da função

$$h(x) = f(x) + g(x).$$

De fato,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(H(x)) &= \frac{d}{dx}(F(x) + G(x) + c_1 + c_2) \quad \text{Por definição } H(x) = F(x) + G(x) + c_1 + c_2. \\ &= \frac{d}{dx}(F(x)) + \frac{d}{dx}(G(x)) + \frac{d}{dx}(c_1 + c_2) \quad \text{Derivada da soma é a soma das derivadas.} \\ &= F'(x) + G'(x) \quad \text{Troca de notação: } \frac{d}{dx}(F(x)) = F'(x) \text{ e } \frac{d}{dx}(G(x)) = G'(x) \text{ e} \\ &\quad \text{derivada de uma constante é zero: } \frac{d}{dx}(c_1 + c_2) = 0. \\ &= f(x) + g(x) \quad F(x) \text{ e } G(x) \text{ são primitivas das funções } f(x) \text{ e } g(x). \\ &= h(x) \quad \text{Por definição } h(x) = f(x) + g(x). \end{aligned}$$

Assim, verificamos que a afirmação é verdadeira, isto é:

$$\frac{d}{dx}(H(x)) = h(x). \quad (1.4)$$

Combinando (1.3) (1.4), temos:

$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx.$$

Após a análise anterior, temos o seguinte resultado:



Observação. Sejam $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funções reais com primitivas $F(x)$ e $G(x)$, respectivamente. Então:

$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx,$$

ou seja,

“a integral da soma de funções é sempre a soma das integrais”.



Pergunta. Professor, sabendo calcular a integral $\int \sec^2(x) dx$ é possível calcular a integral $\int \left(\frac{\pi}{4} \cdot \sec^2(x)\right) dx$?

Utilizando a tabela das integrais imediatas, percebemos que:

$$\int \sec^2(x) dx = \operatorname{tg}(x) + c_1. \quad (1.5)$$

Agora, se a constante que está multiplicando a função $f(x) = \sec^2(x)$ fosse um número inteiro, por exemplo 3, poderíamos transformar a integral

$$\int 3 \cdot \sec^2(x) dx$$

em somas e calculá-la, ou seja,

$$\begin{aligned} \int 3 \cdot \sec^2(x) dx &= \int (\sec^2(x) + \sec^2(x) + \sec^2(x)) dx \\ &= \int \sec^2(x) dx + \int \sec^2(x) dx + \int \sec^2(x) dx \quad \text{Integral da soma é a soma das integrais.} \\ &= (\operatorname{tg}(x) + c_1) + (\operatorname{tg}(x) + c_1) + (\operatorname{tg}(x) + c_1) \quad \text{Estamos utilizando a igualdade (1.5).} \\ &= 3 \cdot \operatorname{tg}(x) + c. \quad \text{Por simplicidade estamos considerando } c = 3c_1. \end{aligned}$$

Dessa forma, concluímos que:

$$\int 3 \cdot \sec^2(x) dx = 3 \cdot \operatorname{tg}(x) + c.$$

Por outro lado, se o número que multiplica a função $f(x) = \sec^2(x)$ não for um número inteiro, por exemplo $\frac{\pi}{4}$, não podemos resolver utilizando a propriedade da soma de integrais. Contudo, sabemos que, para resolver a integral $\frac{\pi}{4} \cdot \sec^2(x)$, devemos encontrar uma função $F(x)$, tal que:

$$F'(x) = \frac{\pi}{4} \cdot \sec^2(x).$$

Claramente, a função procurada é:

$$\frac{\pi}{4} \cdot \operatorname{tg}(x) + c,$$

visto que:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\frac{\pi}{4} \cdot \operatorname{tg}(x) + c \right) &= \frac{d}{dx} \left(\frac{\pi}{4} \cdot \operatorname{tg}(x) \right) + \frac{d}{dx}(c) && \text{Derivada da soma de funções é soma das derivadas.} \\ &= \frac{d}{dx} \left(\frac{\pi}{4} \cdot \operatorname{tg}(x) \right) && \text{Derivada de uma constante é zero.} \\ &= \frac{\pi}{4} \cdot \frac{d}{dx}(\operatorname{tg}(x)) && \text{Derivada do produto de uma constante por uma função} \\ &&& \text{é o produto da constante pela derivada da função.} \\ &= \frac{\pi}{4} \cdot \sec^2(x). && \text{Derivada da função tangente é } \sec^2(x). \end{aligned}$$

Dessa forma, temos que

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\pi}{4} \cdot \operatorname{tg}(x) + c \right) = \frac{\pi}{4} \cdot \sec^2(x) \quad (1.6)$$

Relacionando as igualdades (1.5) e (1.6), obtemos:

$$\int \frac{\pi}{4} \cdot \sec^2(x) dx = \frac{\pi}{4} \cdot \operatorname{tg}(x) + c.$$



Pergunta. O resultado que acabamos de verificar é uma particularidade da função $f(x) = \sec^2(x)$, ou é válido para quaisquer funções deriváveis que estejam multiplicadas por uma constante?

O resultado que acabamos de verificar utilizando a função $f(x) = \sec^2(x)$, pode ser estendido a qualquer função derivável.

Considere $F(x)$ uma primitiva da função $f(x)$ e considere K um número real não nulo. Dessa forma, temos que:

$$\int f(x) dx = F(x) + c \quad (1.7)$$

Afirmamos que a função

$$H(x) = K \cdot F(x) + c$$

é uma primitiva da função

$$h(x) = K \cdot f(x).$$

De fato,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(H(x)) &= \frac{d}{dx}(K \cdot F(x) + c) && \text{Por definição } H(x) = K \cdot F(x) + c. \\ &= \frac{d}{dx}(K \cdot F(x)) + \frac{d}{dx}(c) && \text{Derivada da soma é a soma das derivadas.} \\ &= \frac{d}{dx}(K \cdot F(x)) && \text{Derivada de uma constante é zero.} \\ &= K \cdot \frac{d}{dx}(F(x)) && \text{Derivada do produto de uma constante por uma função} \\ &&& \text{é o produto da constante pela derivada da função.} \\ &= K \cdot F'(x) && \text{Troca de notação: } \frac{d}{dx}(F(x)) = F'(x). \\ &= K \cdot f(x) && F(x) \text{ é primitiva da função } f(x). \\ &= h(x) && \text{Por definição } h(x) = K \cdot f(x). \end{aligned}$$

Assim, verificamos que a afirmação é verdadeira, isto é:

$$\frac{d}{dx}(H(x)) = h(x). \quad (1.8)$$

Combinando (1.7) (1.8), temos:

$$\int (K \cdot f(x)) dx = K \cdot \int f(x) dx.$$

Após a análise anterior, temos o seguinte resultado:



Observação. Seja $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, com primitiva $F(x)$ e considere K um número real. Então:

$$\int (K \cdot f(x)) dx = K \cdot \int f(x) dx,$$

ou seja,

“a integral do produto de uma constante por uma função é o produto da constante pela integral”.

Aplique seus conhecimentos



Atividades
Texto Básico

Teste. Calcule a integral $\int (2x^2 - 3)^2 dx$.

Solução.

O objetivo é utilizar as técnicas:

$$\int (K \cdot f(x)) dx = K \cdot \int f(x) dx \text{ e } \int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx.$$

Assim sendo,

$$\int (2x^2 - 3)^2 dx = \int (4x^4 - 12x^2 + 9) dx \quad \text{Primeiramente, devolvemos o binômio, isto é, } (2x^2 - 3)^2 = 4x^4 - 12x^2 + 9.$$

$$= \int 4x^4 dx + \int -12x^2 dx + \int 9 dx \quad \text{Integral da soma é a soma das integrais.}$$

$$= 4 \left(\int x^4 dx \right) - 12 \left(\int x^2 dx \right) + 9 \left(\int dx \right) \quad \text{Integral do produto de uma constante por uma função}$$

é o produto da constante pela integral.

$$\begin{aligned}
\int (2x^2 - 3)^2 dx &= 4 \left(\frac{x^5}{5} + c_1 \right) - 12 \int x^2 dx + 9 \int dx && \text{Pela tabela das integrais imediatas: } \int x^4 dx = \frac{x^5}{5} + c_1. \\
&= 4 \left(\frac{x^5}{5} + c_1 \right) - 12 \left(\frac{x^3}{3} + c_2 \right) + 9 \int dx && \text{Pela tabela das integrais imediatas: } \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c_2. \\
&= 4 \left(\frac{x^5}{5} + c_1 \right) - 12 \left(\frac{x^3}{3} + c_2 \right) + 9(x + c_3) && \text{Pela tabela das integrais imediatas: } \int dx = x + c_3. \\
&= \frac{4}{5}x^5 + 4c_1 - \frac{12}{3}x^3 - 12c_2 + 9x + 9c_3 && \text{Desenvolvendo os produtos.} \\
&= \left(\frac{4}{5}x^5 - \frac{12}{3}x^3 + 9x \right) + (4c_1 - 12c_2 + 9c_3) && \text{Separando as variáveis das constantes.} \\
&= \left(\frac{4}{5}x^5 - \frac{12}{3}x^3 + 9x \right) + c && \text{Por simplicidade consideramos: } c = (4c_1 - 12c_2 + 9c_3).
\end{aligned}$$

Dessa forma, concluímos que:

$$\int (2x^2 - 3)^2 dx = \frac{4}{5}x^5 - 4x^3 + 9x + c.$$



Atividades
Texto Básico

Teste. Calcule a integral $\int \left(9t^2 + \frac{1}{\sqrt{t^3}} \right) dt$.

Solução.

O objetivo é utilizar as técnicas:

$$\int (K \cdot f(x)) dx = K \cdot \int f(x) dx \text{ e } \int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx.$$

Assim sendo,

$$\begin{aligned}\int \left(9t^2 + \frac{1}{\sqrt{t^3}} \right) dt &= \int 9t^2 dt + \int \frac{1}{\sqrt{t^3}} dt && \text{Integral da soma é a soma das integrais.} \\&= 9 \left(\int t^2 dt \right) + \int \frac{1}{\sqrt{t^3}} dt && \text{Integral do produto de uma constante por uma função} \\&&& \text{é o produto da constante pela integral.} \\&= 9 \left(\frac{t^3}{3} + c_1 \right) + \int \frac{1}{\sqrt{t^3}} dt && \text{Pela tabela das integrais imediatas: } \int t^2 dx = \frac{t^3}{3} + c_1. \\&= 9 \left(\frac{t^3}{3} + c_1 \right) + \int \frac{1}{(t^3)^{\frac{1}{2}}} dt && \text{Recorde que } \sqrt{t^3} = (t^3)^{\frac{1}{2}}. \\&= 9 \left(\frac{t^3}{3} + c_1 \right) + \int (t^3)^{-\frac{1}{2}} dt && \text{Recorde que } \frac{1}{(t^3)^{\frac{1}{2}}} = (t^3)^{-\frac{1}{2}}. \\&= 9 \left(\frac{t^3}{3} + c_1 \right) + \int t^{-\frac{3}{2}} dt && \text{Recorde que } (t^3)^{-\frac{1}{2}} = t^{-\frac{3}{2}}. \\&= 9 \left(\frac{t^3}{3} + c_1 \right) + \left(\frac{t^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} + c_2 \right) && \text{Pela tabela das integrais imediatas: } \int t^{-\frac{3}{2}} dt = \frac{t^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} + c_2. \\ \int \left(9t^2 + \frac{1}{\sqrt{t^3}} \right) dt &= 9 \left(\frac{t^3}{3} + c_1 \right) - \left(2t^{-\frac{1}{2}} + c_2 \right) && \text{Note que: } \frac{t^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} = -2t^{-\frac{1}{2}}. \\&= \left(\frac{9}{3}t^3 - 2t^{-\frac{1}{2}} \right) + (9c_1 - c_2) && \text{Separando as variáveis das constantes.} \\&= \left(\frac{9}{3}t^3 - 2t^{-\frac{1}{2}} \right) + c && \text{Por simplicidade estamos considerando } c = (9c_1 - c_2).\end{aligned}$$

Dessa forma, concluímos que:

$$\int \left(9t^2 + \frac{1}{\sqrt{t^3}} \right) dt = \left(3t^3 - 2t^{-\frac{1}{2}} \right) + c.$$



Teste. Calcule a integral $\int \frac{\text{sen}(x)}{\cos^2(x)} dx$.

Solução.

O objetivo é utilizar as técnicas:

$$\int (K \cdot f(x)) dx = K \cdot \int f(x) dx \text{ e } \int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx.$$

Assim sendo,

$$\begin{aligned} \int \frac{\text{sen}(x)}{\cos^2(x)} dx &= \int \left(\text{sen}(x) \cdot \frac{1}{\cos^2(x)} \right) dx && \text{Observe que } \frac{\text{sen}(x)}{\cos^2(x)} = \left(\text{sen}(x) \cdot \frac{1}{\cos^2(x)} \right) \\ &= \int \text{sen}(x) \cdot \left(\frac{1}{\cos(x)} \cdot \frac{1}{\cos(x)} \right) dx && \text{Note que } \frac{1}{\cos^2(x)} = \left(\frac{1}{\cos(x)} \cdot \frac{1}{\cos(x)} \right) \\ &= \int \frac{1}{\cos(x)} \cdot \left(\text{sen}(x) \cdot \frac{1}{\cos(x)} \right) dx && \text{Apenas reorganizamos a ordem do produto} \\ \int \frac{\text{sen}(x)}{\cos^2(x)} dx &= \int \frac{1}{\cos(x)} \cdot \text{tg}(x) dx && \text{Perceba que } \left(\text{sen}(x) \cdot \frac{1}{\cos(x)} \right) = \frac{\text{sen}(x)}{\cos(x)} = \text{tg}(x) \\ &= \int (\sec(x) \cdot \text{tg}(x)) dx && \text{Recorde que } \sec(x) = \frac{1}{\cos(x)} \\ &= \sec(x) + c && \text{Pela tabela das integrais imediatas: } \int (\sec(x) \cdot \text{tg}(x)) dx = \sec(x) + c. \end{aligned}$$

Dessa forma, concluímos que:

$$\int \frac{\text{sen}(x)}{\cos^2(x)} dx = \sec(x) + c.$$



Teste. Calcule a integral $\int \frac{\ln(x)}{x \ln(x^2)} dx$.

Solução.

O objetivo é utilizar as técnicas:

$$\int (K \cdot f(x)) dx = K \cdot \int f(x) dx \text{ e } \int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx.$$

Assim sendo,

$$\int \frac{\ln(x)}{x \ln(x^2)} dx = \int \frac{\ln(x)}{2x \ln(x)} dx \quad \text{Aplicando a propriedade do logaritmo: } \ln(x^2) = 2 \ln(x).$$

$$= \int \frac{1}{2x} dx \quad \text{Simplificando o logaritmo na integral: } \int \frac{\ln(x)}{2x \ln(x)} dx = \int \frac{1}{2x} dx.$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{x} dx \quad \text{a integral do produto de uma constante por uma função é o produto.}$$

$$\text{da constante pela integral: } \int \frac{1}{2x} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x} dx.$$

$$= \frac{1}{2} \ln(|x|) + c \quad \text{Pela tabela das integrais imediatas: } \int \frac{1}{x} dx = \ln(|x|) + c.$$

Dessa forma, concluímos que:

$$\int \frac{\ln(x)}{x \ln(x^2)} dx = \frac{1}{2} \ln(|x|) + c.$$



Teste. Calcule a integral $\int (e^x - e^{-x}) dx$.

Solução.

O objetivo é utilizar as técnicas:

$$\int (K \cdot f(x)) dx = K \cdot \int f(x) dx \text{ e } \int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx.$$

Assim sendo,

$$\begin{aligned}\int (e^x - e^{-x}) dx &= \int \frac{2(e^x - e^{-x})}{2} dx && \text{Multiplicando e dividindo o integrando por 2 não alteramos o resultado.} \\&= 2 \int \frac{(e^x - e^{-x})}{2} dx && \begin{array}{l} \text{a integral do produto de uma constante por uma função é o produto} \\ \text{da constante pela integral: } \int \frac{2(e^x - e^{-x})}{2} dx = 2 \int \frac{(e^x - e^{-x})}{2} dx. \end{array} \\&= 2 \int \sinh(x) dx && \text{Recorde que: } \frac{(e^x - e^{-x})}{2} = \sinh(x). \\&= 2(\cosh(x) + c_1) && \text{Pela tabela das integrais imediatas: } \int \sinh(x) dx = \cosh(x) + c. \\&= 2 \cosh(x) + 2c_1 && \text{Apenas distribuimos o produto.} \\&= 2 \cosh(x) + c && \text{Por simplicidade denotamos } c = 2c_1.\end{aligned}$$

Dessa forma, concluímos que:

$$\int (e^x - e^{-x}) dx = 2 \cosh(x) + c.$$

Integrais e a regra da cadeia

Considere a função $f(x) = \frac{(2x^2 + 2x - 3)^{11}}{22}$.



Pergunta. Como é calculada a derivada da função f ?

A derivada de função f é calculada utilizando a regra da cadeia, ou seja:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \left(\frac{(2x^2 + 2x - 3)^{11}}{22} \right) &= \frac{1}{22} \cdot \frac{d}{dx} ((2x^2 + 2x - 3)^{11}) && \text{A derivada do produto de uma constante por uma função} \\ &= \frac{1}{22} \cdot \left(11 \cdot (2x^2 + 2x - 3)^{10} \cdot \frac{d}{dx} (2x^2 + 2x - 3) \right) && \begin{array}{l} \text{é o produto da constante pela derivada da função.} \\ \text{Estamos aplicando a regra da cadeia} \end{array} \\ &= \frac{1}{22} \cdot (11 \cdot (2x^2 + 2x - 3)^{10} \cdot (4x + 2)) && \text{Note que } \frac{d}{dx} (2x^2 + 2x - 3) = 4x + 2 \\ &= \frac{1}{22} \cdot (11 \cdot (2x^2 + 2x - 3)^{10} \cdot 2 \cdot (2x + 1)) && \text{Visto que } 4x + 2 = 2 \cdot (2x + 1) \\ &= (2x^2 + 2x - 3)^{10} \cdot (2x + 1) && \text{Uma vez que } \frac{1}{22} \cdot (11 \cdot (2x^2 + 2x - 3)^{10} \cdot 2 \cdot (2x + 1))\end{aligned}$$

Dessa forma, temos que a derivada da função f é

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{(2x^2 + 2x - 3)^{11}}{22} \right) = (2x^2 + 2x - 3)^{10} \cdot (2x + 1).$$



Pare e Pense. Considere a pergunta inversa: “qual função foi derivada para obter a expressão $(2x^2 + 2x - 3)^{10} \cdot (2x + 1)$ ”, isto é, queremos determinar a integral

$$\int (2x^2 + 2x - 3)^{10} \cdot (2x + 1) dx = ?$$

Através das contas que fizemos anteriormente, já sabíamos qual a função que responde a pergunta:

$$\int (2x^2 + 2x - 3)^{10} \cdot (2x + 1) dx = \left(\frac{(2x^2 + 2x - 3)^{11}}{22} \right) + c,$$

uma vez que

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{(2x^2 + 2x - 3)^{11}}{22} \right) = (2x^2 + 2x - 3)^{10} \cdot (2x + 1).$$



Pergunta. Professor, a pergunta foi fácil de responder, pois já hávamos derivado a função antes. Como devo proceder quando desconheço a função que foi derivada?

Observe que $f(x) = \left(\frac{(2x^2 + 2x - 3)^{11}}{22} \right)$ pode ser vista como sendo a composta das funções

$$g(x) = \frac{1}{22}x^{11} \text{ e } h(x) = 2x^2 + 2x - 3,$$

visto que

$$(g \circ h)(x) = g(h(x)) = g(2x^2 + 2x - 3) \quad \text{Estamos utilizando a definição } h(x) = 2x^2 + 2x - 3$$

$$= \frac{1}{22} \cdot (2x^2 + 2x - 3)^{11} \quad \text{Estamos utilizando a definição } g(x) = \frac{1}{22}x^{11}.$$



Observação. Quando a integral a ser calculada envolve a derivada de uma função composta, devemos realizar uma mudança de coordenadas na integral, visando “desfazer a composição” e obter na maioria das vezes uma integral imediata.

Vejamos como este processo ocorre na prática. Por exemplo, ao calcularmos a integral

$$\int (2x^2 + 2x - 3)^{10} \cdot (2x + 1) dx$$

podemos fazer a mudança de coordenadas:

$$u = 2x^2 + 2x - 3.$$



Pergunta. Professor, por que foi escolhida a função $u = 2x^2 + 2x - 3$ e não a função $u = 2x + 1$?

A escolha da troca $u = 2x^2 + 2x - 3$ foi em função da parcela $2x + 1$, pois

$$\frac{d}{dx}(u) = \frac{d}{dx}(2x^2 + 2x - 3) = 4x + 2 = 2(2x + 1)$$

ou seja, a derivada da função $2x^2 + 2x - 3$ é exatamente a função $2(2x + 1)$.

Agora, simbolicamente, temos:

$$\frac{du}{dx} = 2(2x + 1) \Rightarrow \frac{1}{2} du = (2x + 1) dx.$$

Realizando a mudança na integral, obtemos:

$$\begin{aligned} \int (2x^2 + 2x - 3)^{10} \cdot (2x + 1) dx &= \int u^{10} \frac{1}{2} du && \text{Note que } u = 2x^2 + 2x - 3 \text{ e } \frac{1}{2} du = (2x + 1) dx \\ &= \frac{1}{2} \left(\int u^{10} du \right) && \text{a integral do produto de uma constante por uma função} \\ &&& \text{é o produto da constante pela integral.} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{u^{11}}{11} + c_1 \right) && \text{Utilizando a tabela de integrais imediatas, temos } \int u^{10} du = \frac{u^{10+1}}{10+1} + c. \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{u^{11}}{11} + \frac{1}{2} \cdot c_1 && \text{Distribuímos o produto.} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{u^{11}}{11} + c && \text{Por simplicidade consideramos } \frac{1}{2} \cdot c_1. \\ &= \frac{(2x^2 + 2x - 3)^{11}}{22} + c && \text{Recorde que } u = 2x^2 + 2x - 3. \end{aligned}$$



Pergunta. Professor, como devemos proceder de um modo geral, quando a integral envolver a derivada de uma função composta?

Nestes casos, sempre devemos procurar uma substituição conveniente. Vejamos na prática como isso funciona. Seja f um função integrável, isto é, existe uma função $F(x)$, satisfazendo $F'(x) = f(x)$. Além disso, considere g um função derivável, tal que $(F \circ g)(x)$ e $(f \circ g)(x)$ estejam bem definidas, ou seja, estamos considerando uma função g cuja a composta com F e f seja possível.

Dessa forma, a integral

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx$$

pode ser calculada utilizando a mudança de variável

$$u = g(x) \text{ e } du = g'(x)dx$$

visto que

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int f(u) \cdot du = F(u) + c.$$

Agora, sendo $u = g(x)$, obtemos:

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = F(g(x)) + c.$$



Observação. Seja f um função integrável, isto é, existe $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$ e considere g um função derivável tal que $(F \circ g)(x)$ e $(f \circ g)(x)$ estejam bem definidas. Então:

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = F(g(x)) + c,$$

utilizando a mudança de coordenadas

$$u = g(x),$$

onde

$$\frac{du}{dx} = g'(x) \Rightarrow du = g'(x)dx$$

Aplique seus conhecimentos



Atividades
Texto Básico

Teste. Calcule a integral $\int \frac{x}{\sqrt[5]{x^2-1}} dx$.

Solução.

A integral $\int \frac{x}{\sqrt[5]{x^2-1}} dx$ pode ser resolvida utilizando uma mudança de coordenadas adequada. Por exemplo, fazendo

$$u = x^2 - 1,$$

obtemos

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2 - 1) = 2x$$

o que implica que

$$\frac{du}{dx} = 2x$$

$\Downarrow$

$$du = 2x \cdot dx.$$

$\Downarrow$

$$\frac{1}{2} du = x \cdot dx.$$

Agora, calculando a integral, temos:

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{\sqrt[5]{x^2-1}} dx &= \int \frac{1}{\sqrt[5]{x^2-1}} x \cdot dx \\ &= \int \frac{1}{\sqrt[5]{u}} \frac{1}{2} du \quad \text{Estamos realizando a substituição } u = x^2 - 1 \text{ e } \frac{1}{2} du = x \cdot dx \\ &= \frac{1}{2} \left(\int \frac{1}{\sqrt[5]{u}} du \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\int \frac{1}{u^{\frac{1}{5}}} du \right) \quad \text{Considerando } \sqrt[5]{u} = u^{\frac{1}{5}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{\sqrt[5]{x^2-1}} dx &= \frac{1}{2} \left(\int u^{-\frac{1}{5}} du \right) && \text{Considerando } \frac{1}{u^{\frac{1}{5}}} = u^{-\frac{1}{5}} \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{u^{\frac{4}{5}}}{\frac{4}{5}} + c_1 \right) && \text{Aplicando a tabela de integrais imediatas temos: } \int u^{-\frac{1}{5}} du = \frac{u^{1-\frac{1}{5}}}{1-\frac{1}{5}} + c_1 \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{5}{4} u^{\frac{4}{5}} + c_1 \right) && \text{Note que } \frac{u^{\frac{4}{5}}}{\frac{4}{5}} = \frac{5}{4} u^{\frac{4}{5}} \\
&= \frac{5}{8} u^{\frac{4}{5}} + c && \text{Por simplicidade estamos considerando } c = \frac{1}{2} c_1 \\
&= \frac{5}{8} (x^2 - 1)^{\frac{4}{5}} + c && \text{Recorde que } u = x^2 - 1.
\end{aligned}$$

Logo, concluímos que

$$\int \frac{x}{\sqrt[5]{x^2-1}} dx = \frac{5}{8} (x^2 - 1)^{\frac{4}{5}} + c.$$



Atividades
Texto Básico

Teste. Calcule a integral $\int \frac{e^{\frac{1}{x}} + 2}{x^2} dx$.

Solução.

A integral $\int \frac{e^{\frac{1}{x}} + 2}{x^2} dx$ pode ser resolvida utilizando uma mudança de coordenadas adequada. Por exemplo, fazendo

$$u = \frac{1}{x} = x^{-1},$$

obtemos

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(x^{-1}) = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

o que implica que

$$\frac{du}{dx} = -\frac{1}{x^2}$$

$\Downarrow$

$$du = -\frac{1}{x^2} \cdot dx.$$

$\Downarrow$

$$-du = \frac{1}{x^2} \cdot dx.$$

Agora, calculando a integral, temos:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{e^{\frac{1}{x}} + 2}{x^2} dx &= \int (e^{\frac{1}{x}} + 2) \cdot \frac{1}{x^2} dx \\
 &= \int (e^u + 2) (-du) \quad \text{Estamos realizando a substituição } u = \frac{1}{x} \Rightarrow du = -\frac{1}{x^2} \cdot dx \\
 &= - \left(\int e^u + 2 du \right) \\
 &= - \int e^u du - \int 2 du \quad \text{Integral da soma é a soma das integrais} \\
 &= -e^u + c_1 - 2u + c_2 \quad \text{Utilizando a tabela de integrais imediatas temos: } \int e^u du = e^u + c_1 \text{ e } \int 2 du = 2u + c_2. \\
 &= -e^u - 2u + c \quad \text{Por simplicidade estamos utilizando } c = c_1 + c_2. \\
 &= -e^{\frac{1}{x}} - \frac{2}{x} + c \quad \text{Recorde que } u = \frac{1}{x}.
 \end{aligned}$$

Logo, concluímos que

$$\int \frac{e^{\frac{1}{x}} + 2}{x^2} dx = -e^{\frac{1}{x}} - \frac{2}{x} + c.$$



Atividades
Texto Básico

Teste. Calcule a integral $\int \sin(5\theta - \pi) d\theta$.

Solução.

A integral $\int \sin(5\theta - \pi) d\theta$ pode ser resolvida utilizando uma mudança de coordenadas adequada. Por exemplo, fazendo

$$u = 5\theta - \pi,$$

obtemos

$$\frac{du}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}(5\theta - \pi) = 5$$

o que implica que

$$\frac{du}{dx} = 5$$

$$\Downarrow$$

$$du = 5 \cdot dx.$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{5} du = dx.$$

Agora, calculando a integral, temos:

$$\begin{aligned} \int \sin(5\theta - \pi) d\theta &= \int \sin(u) \frac{1}{5} du && \text{Estamos realizando a substituição } u = 5\theta - \pi \text{ e } dx = \frac{1}{5} \cdot du \\ &= \frac{1}{5} \int \sin(u) du \\ &= \frac{1}{5} (-\cos(u) + c_1) && \text{Utilizando a tabela de integrais imediatas temos: } \int \sin(u) du = -\cos(u) + c_1 \\ &= -\frac{1}{5} \cos(u) - \frac{1}{5} c_1 && \text{Apenas distribuimos o produto.} \\ &= -\frac{1}{5} \cos(u) + c && \text{Por simplicidade estamos considerando } c = -\frac{1}{5} c_1. \\ &= -\frac{1}{5} \cos(5\theta - \pi) + c && \text{Recorde que } u = 5\theta - \pi. \end{aligned}$$

Logo, concluímos que

$$\int \sin(5\theta - \pi) d\theta = -\frac{1}{5} \cos(5\theta - \pi) + c.$$



Atividades
Texto Básico

Teste. Calcule a integral $\int \frac{1}{\ln(t^t)} dt$.

Solução.

Primeiramente, observe que:

$$\int \frac{1}{\ln(t^t)} dt = \int \frac{1}{t \ln(t)} dt = \int \frac{1}{\ln(t)} \cdot \frac{1}{t} dt \quad \text{Estamos utilizando a propriedade do logaritmo: } \ln(t^t) = t \ln(t).$$

A integral $\int \frac{1}{t \ln(t)} dt$ pode ser resolvida utilizando uma mudança de coordenadas adequada. Por exemplo, fazendo

$$u = \ln(t),$$

obtemos

$$\frac{du}{dt} = \frac{d}{dt}(\ln(t)) = \frac{1}{t}$$

o que implica que

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{1}{t} \\ \Downarrow \\ du &= \frac{1}{t} \cdot dt. \end{aligned}$$

Agora, calculando a integral, temos:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\ln(t)} \cdot \frac{1}{t} dt &= \int \frac{1}{u} du && \text{Estamos realizando a substituição } u = \ln(t) \text{ e } du = \frac{1}{t} dt \\ &= \ln(|u|) + c && \text{Utilizando a tabela de integrais imediatas temos: } \int \frac{1}{u} du = \ln(|u|) + c \\ &= \ln(|\ln(t)|) + c && \text{Recorde que } u = \ln(t). \end{aligned}$$

Logo, concluímos que

$$\int \frac{1}{\ln(t)} \cdot \frac{1}{t} dt = \ln(|\ln(t)|) + c.$$

Integrais e a regra do produto



Pare e Pense. Vamos considerar a seguinte pergunta: “qual função foi derivada para obter a expressão $x \cdot \text{sen}(x)$?” Na verdade, queremos determinar a integral

$$\int x \cdot \text{sen}(x) dx = ?$$

Pelo fato de $\frac{d}{dx}(\text{sen}(x)) = \cos(x)$, é comum acreditarmos que:

$$\int x \cdot \text{sen}(x) dx = x \cdot \cos(x) + c.$$

Porém, ao contrário do que a maior parte dos alunos pensa, $\int x \cdot \text{sen}(x) dx$ não é a função $f(x) = x \cdot \cos(x)$. A derivada da função f é calculada utilizando a regra do produto, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}(x \cdot \cos(x)) && \text{Apenas mudamos de notação} \\ &= \frac{d}{dx}(x) \cdot \cos(x) + x \cdot \frac{d}{dx}(\cos(x)) && \text{Estamos aplicando a regra do produto para derivadas} \\ &= \cos(x) - x \cdot \text{sen}(x). && \text{Note que, } \frac{d}{dx}(x) = 1 \text{ e } \frac{d}{dx}(\cos(x)) = -\text{sen}(x) \end{aligned}$$

Assim, temos que a derivada da função f é:

$$\frac{d}{dx}(x \cdot \cos(x)) = \cos(x) - x \cdot \text{sen}(x). \quad (1.9)$$

Dessa forma, concluímos:

$$\int x \cdot \text{sen}(x) dx \neq x \cdot \cos(x).$$

Poderíamos também tentar resolver a integral $\int x \cdot \text{sen}(x) dx$ através do processo de substituição, a saber:

$$u = x \text{ ou } u = \text{sen}(x).$$

Ao utilizarmos a mudança de variável $u = x$, voltaremos ao mesmo problema, porém agora na variável u , isto é,

$$\int x \cdot \text{sen}(x) dx = \int u \cdot \text{sen}(u) du,$$

visto que $\frac{d}{dx}(u) = 1$.

Por outro lado, ao utilizarmos a mudança de variável $u = \text{sen}(x)$ voltaremos a um problema semelhante, porém agora com a função cosseno, isto é,

$$\int x \cdot \text{sen}(x) dx = \int \frac{\arcsen(u) \cdot u}{\cos(x)} du,$$

visto que

$$u = \text{sen}(x) \Rightarrow \frac{du}{dx} = \cos(x) \text{ e } x = \arcsen(u).$$

Esta substituição não nos ajudou em nada. Na verdade, complicou o problema, pois antes havia somente a variável x e agora o integrando depende de x e u . Assim, podemos concluir que a técnica de substituição não se aplica no caso da integral $\int x \cdot \text{sen}(x) dx$.



Pergunta. Professor, por essa não esperávamos. Como determinaremos $\int x \cdot \text{sen}(x) dx$?

Considere a função $h(x) = -x \cdot \cos(x) + \text{sen}(x)$. A derivada de f é calculada utilizando a regra do produto juntamente com a regra da soma, ou seja:

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{d}{dx} (-x \cdot \cos(x) + \text{sen}(x)) \\ &= -\frac{d}{dx} (x \cdot \cos(x)) + \frac{d}{dx} (\text{sen}(x)) \quad \text{A derivada da soma é a soma das derivadas.} \\ &= -\frac{d}{dx} (x \cdot \cos(x)) + \cos(x) \quad \frac{d}{dx} (\text{sen}(x)) = \cos(x). \\ &= -(1 \cdot \cos(x) - x \cdot \text{sen}(x)) + \cos(x) \quad \frac{d}{dx} (x \cdot \cos(x)) = 1 \cdot \cos(x) - x \cdot \text{sen}(x) \text{ (regra do produto).} \\ &= -\cos(x) + x \cdot \text{sen}(x) + \cos(x) \quad \text{Apenas distribuímos o sinal (-)} \\ &= \cancel{-\cos(x)} + x \cdot \text{sen}(x) + \cancel{\cos(x)}. \\ &= x \cdot \text{sen}(x). \end{aligned}$$

Dessa forma, temos que a derivada da função f é

$$\frac{d}{dx}(-x \cdot \cos(x) + \sin(x)) = x \cdot \sin(x)$$

e, conseqüentemente, concluímos que:

$$\int x \cdot \sin(x) dx = -x \cdot \cos(x) + \sin(x) + c.$$



Pergunta. Professor, essa pergunta não é fácil de responder. Como devo proceder para encontrar a função $h(x) = -x \cdot \cos(x) + \sin(x) + c$?

A função h não foi construída no “chute”. Existe uma técnica para obtê-la. Note que:

$$h(x) = -x \cdot \cos(x) + \sin(x) \quad \text{Definição da função } h.$$

$$= x \cdot (-\cos(x)) + 1 \cdot \sin(x) \quad \text{Apenas reescrevemos a expressão de } h, \text{ de forma conveniente.}$$

$$= f(x) \cdot g(x) + 1 \cdot \sin(x) \quad \text{Estamos considerando } f(x) = x \text{ e } g(x) = -\cos(x).$$

$$= f(x) \cdot g(x) + \int f'(x) \cdot g(x) dx \quad \text{Se } f(x) = x \text{ e } g(x) = -\cos(x), \text{ então } f'(x) = 1 \text{ e } \int -\cos x dx = \sin(x).$$

Por outro lado, também podemos reescrever a expressão da integral da seguinte forma:

$$\int x \cdot \sin(x) dx = \int f(x) \cdot g'(x) dx.$$

Combinando as informações, concluímos que:

$$\int f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) + \int g(x) \cdot f'(x) dx. \quad (1.10)$$

Na prática, quando o integrando for um produto de funções no qual a integral não possa ser calculada de forma direta ou através de um simples substituição, temos que considerar uma das funções que compõem o produto, como sendo a “derivada de uma função conhecida” e utilizar a técnica aplicada em (1.10), para resolver a integral. Esta técnica é chamada de “Integração por Partes”.

Observe que podemos reescrever a igualdade (1.10), da seguinte forma:

$$\int u \, dv = u \cdot v - \int v \, du,$$

onde

$$u = f(x) \Rightarrow \frac{du}{dx} = f'(x) \Rightarrow du = f'(x) dx$$

$$v = g(x) \Rightarrow \frac{dv}{dx} = g'(x) \Rightarrow dv = g'(x) dx.$$

Mais precisamente,

$$\int \underbrace{f(x)}_u \cdot \underbrace{g'(x)}_{dv} dx = \underbrace{f(x)}_u \cdot \underbrace{g(x)}_v + \int \underbrace{g(x)}_v \cdot \underbrace{f'(x)}_{du} dx.$$

Esta é a notação, mais utilizada nos livros de cálculo usuais.

Observação. Se f e g são duas funções deriváveis, então

$$\int f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) + \int g(x) \cdot f'(x) dx,$$

mais precisamente,

$$\int u \, dv = u \cdot v - \int v \, du,$$

utilizando a mudança de variáveis

$$u = f(x) \text{ e } dv = g'(x) dx.$$

DICA: Considere dv sempre a função mais fácil de integrar, uma vez que:

$$dv = g'(x) dx \Rightarrow \frac{dv}{dx} = g'(x) \Rightarrow v = \int g'(x) dx.$$



Aplique seus conhecimentos



Atividades
Texto Básico

Teste. Calcule a integral $\int x \cdot \ln(x) dx$.

Solução.

Para aplicar a técnica de integração por partes, vamos considerar

$$u = \ln(x) \text{ e } dv = x \cdot dx,$$

pelo fato de a integral $\int x dx$ ser simples de se calcular.

Assim,

$$u = \ln(x) \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(\ln(x))$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow du = \frac{1}{x} dx.$$

Por outro lado,

$$dv = x dx \Rightarrow \frac{dv}{dx} = x$$

$$\Rightarrow v = \int x dx$$

$$\Rightarrow v = \frac{x^2}{2}.$$

Agora, utilizando as expressões

$$u = \ln(x) \text{ e } du = \frac{1}{x} dx$$

$$v = \frac{x^2}{2} \text{ e } dv = x dx$$

podemos aplicar a técnica de integração por partes, isto é,

$$\begin{aligned}
\int x \cdot \ln(x) dx &= \int \underbrace{\ln(x)}_u \cdot \underbrace{x dx}_{dv} && \text{Apenas reescrevemos para aplicar a técnica de integração por partes} \\
&= u \cdot v - \int v du && \text{Técnica de integração por partes} \\
&= \frac{x^2 \cdot \ln(x)}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx && u = \ln(x), du = \frac{1}{x} dx, v = \frac{x^2}{2} \text{ e } dv = x dx \\
&= \frac{x^2 \cdot \ln(x)}{2} - \int \frac{x}{2} dx && \int x^2 \cdot \frac{1}{x} dx = \int x dx \\
&= \frac{x^2 \cdot \ln(x)}{2} - \frac{x^2}{4} + c. && \int x dx = \frac{x^2}{2} + c
\end{aligned}$$

Portanto, concluímos que

$$\int x \cdot \ln(x) dx = \frac{x^2 \cdot \ln(x)}{2} - \frac{x^2}{4} + c.$$



Atividades
Texto Básico

Teste. Calcule a integral $\int \cos^3(x) dx$.

Solução.

Note que:

$$\int \cos^3(x) dx = \int \cos^2(x) \cdot \cos(x) dx.$$

Para aplicar a técnica de integração por partes, vamos considerar

$$u = \cos^2(x) \text{ e } dv = \cos(x) dx$$

pelo fato de a integral $\int \cos(x) dx$ ser simples de se calcular.

Assim,

$$u = \cos^2(x) \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(\cos^2(x))$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dx} = 2 \cdot \cos(x) \cdot (-\operatorname{sen}(x)) \quad \text{Aplicamos a regra da cadeia}$$

$$\Rightarrow du = -2 \cdot \cos(x) \cdot \operatorname{sen}(x) dx.$$

Por outro lado,

$$dv = \cos(x) dx \Rightarrow \frac{dv}{dx} = \cos(x)$$

$$\Rightarrow v = \int \cos(x) dx$$

$$\Rightarrow v = \operatorname{sen}(x).$$

Agora, utilizando as expressões

$$u = \cos^2(x) \quad \text{e} \quad du = -2 \cdot \cos(x) \cdot \operatorname{sen}(x) dx$$

$$v = \operatorname{sen}(x) \quad \text{e} \quad dv = \cos(x) dx$$

podemos aplicar a técnica de integração por partes, isto é,

$$\int \cos^3(x) dx = \int \underbrace{\cos^2(x)}_u \cdot \underbrace{\cos(x)}_{dv} dx \quad \text{Apenas reescrevemos para aplicar a técnica de integração por partes}$$

$$= u \cdot v - \int v du \quad \text{Técnica de integração por partes}$$

$$= \cos^2(x) \cdot \operatorname{sen}(x) - \int \operatorname{sen}(x) \cdot (-2 \cdot \cos(x) \cdot \operatorname{sen}(x)) dx \quad u = \cos^2(x), du = -2 \cdot \cos(x) \cdot \operatorname{sen}(x) dx,$$

$$v = \operatorname{sen}(x) \text{ e } dv = \cos(x) dx$$

$$= \cos^2(x) \cdot \operatorname{sen}(x) + 2 \int \operatorname{sen}^2(x) \cdot \cos(x) dx \quad \text{Integral do produto de uma constante por uma função é o produto da}$$

constante pela integral.

Agora, a integral $\int \sin^2(x) \cdot \cos(x) dx$ pode ser calculada por substituição. Considerando,

$$s = \sin(x) \Rightarrow \frac{ds}{dx} = \frac{d}{dx}(\sin(x)) = \cos(x)$$

$$\Rightarrow \frac{ds}{dx} = \cos(x)$$

$$\Rightarrow dx = \frac{1}{\cos(x)} ds.$$

Assim sendo:

$$\int \sin^2(x) \cdot \cos(x) dx = \int s^2 \cdot \cos(x) \cdot \frac{1}{\cos(x)} ds \quad \text{Realizamos a substituição } s = \sin(x)$$

$$= \int s^2 \cdot \cancel{\cos(x)} \cdot \frac{1}{\cancel{\cos(x)}} ds$$

$$= \int s^2 ds = \frac{s^3}{3} + c$$

$$= \frac{\sin^3(x)}{3} + c \quad \text{Lembrando que } s = \sin(x)$$

Voltando à integral, $\int \cos^3(x) dx$, temos que

$$\int \cos^3(x) dx = \cos^2(x) \cdot \sin(x) + 2 \int \sin^2(x) \cdot \cos(x) dx$$

$$= \cos^2(x) \cdot \sin(x) + 2 \frac{\sin^3(x)}{3} + c.$$

Portanto, concluímos que

$$\int \cos^3(x) dx = \cos^2(x) \cdot \sin(x) + 2 \frac{\sin^3(x)}{3} + c.$$

Resolvendo integrais através de substituições trigonométricas

Existem algumas integrais que são resolvidas utilizando uma mudança de variáveis convencionais, como vimos nas seções anteriores. Por exemplo, considere a integral

$$\int \frac{1}{x^2 \cdot \sqrt{x^2 - 9}} dx.$$

Num primeiro momento, pensamos ser possível resolvê-la através de um simples substituição, a saber:

$$s = x^2 - 9.$$

Se $s = x^2 - 9$, então

$$s = x^2 - 9 \Rightarrow \frac{ds}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2 - 9)$$

$$\Rightarrow \frac{ds}{dx} = 2x \quad \text{Observe que } \frac{d}{dx}(x^2 - 9) = 2x$$

$$\Rightarrow ds = 2x \cdot dx$$

$$\Rightarrow dx = \frac{1}{2x} \cdot ds.$$

Aplicando a substituição, obtemos:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2 \cdot \sqrt{x^2 - 9}} dx &= \int \frac{1}{x^2 \cdot \sqrt{s}} \frac{1}{2x} \cdot ds \\ &= \int \frac{1}{2x^3 \cdot \sqrt{s}} ds. \end{aligned}$$

A integral resultante da substituição por $s = x^2 - 9$ é mais complicada que a integral original. O que mostra que esse não é o caminho. Por outro lado, podemos também tentar a substituição $r = \frac{1}{x^2}$.

Se $r = \frac{1}{x^2}$, então

$$x = \sqrt{\frac{1}{r}} \text{ ou } x = -\sqrt{\frac{1}{r}},$$

que não nos ajuda em nada.

Como uma última tentativa, podemos tentar utilizar integral por partes, visto que a integral em questão pode ser vista como sendo um produto de duas função, como segue:

$$\int \frac{1}{x^2 \cdot \sqrt{x^2 - 9}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 9}} \cdot \frac{1}{x^2} dx.$$

Aplicando a integração por partes, temos:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-9}} \cdot \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2-9}} - \int \frac{-1}{\sqrt{(x^2-9)^3}} dx,$$

considerando

$$u = \frac{1}{\sqrt{x^2-9}} \text{ e } dv = \frac{1}{x^2} dx.$$

Utilizando a integração por partes, obtemos uma integral bem mais complicada.



Pergunta. Professor, esta integral é possível de se calcular?

É possível calcular a integral $\int \frac{1}{x^2 \cdot \sqrt{x^2-9}} dx$, porém devemos realizar a seguinte substituição:

$$x = 3 \cdot \sec(\theta) \quad (\text{secante}), \text{ com } 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} \text{ ou } \pi \leq \theta < \frac{3\pi}{2}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\theta} &= \frac{d}{d\theta}(3 \cdot \sec(\theta)) \\ &= 3 \cdot \frac{d}{d\theta}(\sec(\theta)) \\ &= 3 \cdot \sec(\theta) \cdot \operatorname{tg}(\theta). \end{aligned}$$

O que implica que:

$$dx = 3 \cdot \sec(\theta) \cdot \operatorname{tg}(\theta) \cdot d\theta.$$

Por outro lado, temos:

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 - 9} &= \sqrt{(3 \cdot \sec(\theta))^2 - 9} && \text{Estamos utilizando } x = 3 \cdot \sec(\theta) \\&= \sqrt{9 \cdot \sec^2(\theta) - 9} && \text{Desenvolvemos o quadrado} \\&= \sqrt{9(\sec^2(\theta) - 1)} && \text{Colocamos o 9 em evidência} \\&= \sqrt{9} \cdot \sqrt{\sec^2(\theta) - 1} && \text{Raiz do produto é o produto das raízes} \\&= 3 \cdot \sqrt{\sec^2(\theta) - 1} \\&= 3 \cdot \sqrt{\operatorname{tg}^2(\theta)} && \text{Recorde que } \sec^2(\theta) - 1 = \operatorname{tg}^2(\theta) \\&= 3 \cdot \operatorname{tg}(\theta) && \text{Extraímos a raiz.}\end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\sqrt{x^2 - 9} = 3 \cdot \operatorname{tg}(\theta).$$

Após a substituição $x = \sec(\theta)$, podemos reescrever a integral da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2 \cdot \sqrt{x^2 - 9}} dx &= \int \frac{1}{9 \cdot \sec^2(\theta) \cdot 3 \cdot \operatorname{tg}(\theta)} 3 \cdot \sec(\theta) \cdot \operatorname{tg}(\theta) \cdot d\theta && \sqrt{x^2 - 9} = 3 \cdot \operatorname{tg}(\theta) \text{ e } dx = 3 \cdot \sec(\theta) \cdot \operatorname{tg}(\theta) \cdot d\theta \\&= \int \frac{1}{9 \cdot \sec(\theta) \cdot \cancel{\sec(\theta)} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{\operatorname{tg}(\theta)}} \cancel{3} \cdot \cancel{\sec(\theta)} \cdot \cancel{\operatorname{tg}(\theta)} \cdot d\theta \\&= \int \frac{1}{9 \cdot \sec(\theta)} d\theta \\&= \frac{1}{9} \cdot \int \cos(\theta) d\theta && \sec(\theta) = \frac{1}{\cos(\theta)} \\&= \frac{1}{9} \cdot \sin(\theta) + c && \text{Estamos utilizando a tabela de integrais imediatas}\end{aligned}$$

Logo, temos que:

$$\int \frac{1}{x^2 \cdot \sqrt{x^2 - 9}} dx = \frac{1}{9} \cdot \sin(\theta) + c. \quad (1.11)$$

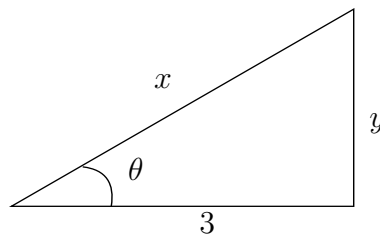
Agora, resta saber o valor de θ em função de x para finalizarmos o cálculo da integral. Note que:

$$x = 3 \cdot \sec(\theta) \Rightarrow \sec(\theta) = \frac{x}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cos(\theta)} = \frac{x}{3}$$

$$\Rightarrow \cos(\theta) = \frac{3}{x}.$$

Agora, se $\cos(\theta) = \frac{3}{x}$, então temos o triângulo:



Assim,

$$y^2 + 9 = x^2 \Rightarrow y = \sqrt{x^2 - 9}$$

e, portanto, podemos calcular $\sin(\theta)$ através da expressão:

$$\sin(\theta) = \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x}. \quad (1.12)$$

Combinando as expressões (1.11) e (1.12), obtemos:

$$\int \frac{1}{x^2 \cdot \sqrt{x^2 - 9}} dx = \frac{1}{9} \cdot \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x} + c.$$



Observação. Quando a integral não puder ser resolvida utilizando os métodos de substituição, ou pelo método de integração por partes, e o integrando possuir a expressão

$$\sqrt{x^2 - a^2},$$

devemos sempre realizar a mudança de variáveis

$$x = a \cdot \sec(\theta),$$

Vamos agora estudar a integral
onde

$$0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} \text{ ou } \pi \leq \theta < \frac{3\pi}{2}.$$

Assim, como no exemplo anteriormente estudado, o método de substituição e de integral por partes não servem para resolver esta integral. É possível calcular a integral $\int \sqrt{9 - x^2} dx$ através

da substituição:

$$x = 3 \cdot \text{sen}(\theta), \quad \text{com } -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\theta} &= \frac{d}{d\theta}(3 \cdot \text{sen}(\theta)) \\ &= 3 \cdot \frac{d}{d\theta}(\text{sen}(\theta)) \\ &= 3 \cdot \cos(\theta). \end{aligned}$$

O que implica que:

$$dx = 3 \cdot \cos(\theta) \cdot d\theta.$$

Por outro lado, temos:

$$\begin{aligned} \sqrt{9 - x^2} &= \sqrt{9 - (3 \cdot \text{sen}(\theta))^2} && \text{Estamos utilizando } x = 3 \cdot \text{sen}(\theta) \\ &= \sqrt{9 - 9 \cdot \text{sen}^2(\theta)} && \text{Desenvolvemos o quadrado} \\ &= \sqrt{9 \cdot (1 - \text{sen}^2(\theta))} && \text{Colocamos o 9 em evidência} \\ &= \sqrt{9} \cdot \sqrt{1 - \text{sen}^2(\theta)} && \text{Raiz do produto é o produto das raízes} \\ &= 3 \cdot \sqrt{1 - \text{sen}^2(\theta)} \\ &= 3 \cdot \sqrt{\cos^2(\theta)} && \text{Recorde que } 1 - \text{sen}^2(\theta) = \cos^2(\theta) \\ &= 3 \cdot \cos(\theta) && \text{Extraímos a raiz.} \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\sqrt{9 - x^2} = 3 \cdot \cos(\theta).$$

Após a substituição $x = \text{sen}(\theta)$ podemos reescrever a integral da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{9 - x^2} dx &= \int 3 \cdot \cos(\theta) \cdot 3 \cdot \cos(\theta) d\theta && \sqrt{9 - x^2} = 3 \cdot \cos(\theta) \text{ e } dx = 3 \cdot \cos(\theta) \cdot d\theta \\ &= 9 \cdot \int \cos^2(\theta) d\theta, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\int \sqrt{9 - x^2} dx = 9 \cdot \int \cos^2(\theta) d\theta + c. \quad (1.13)$$

Para resolver a integral em θ , vamos utilizar a relação:

$$\cos^2(\theta) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \cos(2\theta).$$

Assim sendo,

$$\begin{aligned} \int \cos^2(\theta) d\theta &= \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \cos(2\theta) \right) d\theta \\ &= \int \frac{1}{2} d\theta + \int \left(\frac{1}{2} \cdot \cos(2\theta) \right) d\theta \quad \text{Integral da soma é a soma das integrais} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \int d\theta + \frac{1}{2} \cdot \int \cos(2\theta) d\theta \quad \int c \cdot f(x) dx = c \cdot \left(\int f(x) dx \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \theta + \frac{1}{2} \cdot \int \cos(2\theta) d\theta \quad \int d\theta = \theta + c, \end{aligned}$$

isto é,

$$\int \cos^2(\theta) d\theta = \frac{1}{2} \cdot \theta + \frac{1}{2} \cdot \int \cos(2\theta) d\theta \quad (1.14)$$

Já integral $\int \cos(2\theta) d\theta$, deve ser calculada utilizando o método de substituição. Considere:

$$s = 2\theta \Rightarrow \frac{ds}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}(2\theta)$$

$$\Rightarrow \frac{ds}{d\theta} = 2$$

$$\Rightarrow ds = 2 \cdot d\theta$$

$$\Rightarrow d\theta = \frac{1}{2} \cdot ds.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\int \cos(2\theta) d\theta &= \int \cos(s) \cdot \frac{1}{2} \cdot ds && \text{Fizemos a substituição } s = 2 \cdot \theta \\&= \frac{1}{2} \cdot \int \cos(s) \cdot ds && \int c \cdot f(x) dx = c \cdot \left(\int f(x) dx \right) \\&= \frac{1}{2} \cdot \text{sen}(s) + c && \int \cos(s) ds = \text{sen}(s) + c \\&= \frac{1}{2} \cdot \text{sen}(2\theta) + c && \text{Visto que } s = 2\theta\end{aligned}$$

ou seja,

$$\int \cos(2\theta) d\theta = \frac{1}{2} \cdot \text{sen}(2\theta) + c \quad (1.15)$$

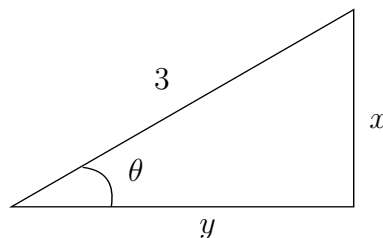
Combinando as informações (1.13), (1.14) e (1.15), obtemos

$$\int \sqrt{9 - x^2} dx = \frac{9}{2} \cdot \theta + \frac{9}{4} \cdot \text{sen}(2\theta) + c \quad (1.16)$$

Resta determinarmos o valor de $\text{sen}(2\theta)$ e de θ em função de x para finalizarmos o cálculo da integral. Note que:

$$x = 3 \cdot \text{sen}(\theta) \Rightarrow \text{sen}(\theta) = \frac{x}{3}.$$

Agora, se $\text{sen}(\theta) = \frac{x}{3}$, então temos o triângulo:



Assim,

$$y^2 + x^2 = 9 \Rightarrow y = \sqrt{9 - x^2}$$

e, portanto,

$$\cos(\theta) = \frac{\sqrt{9 - x^2}}{3}. \quad (1.17)$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned}\sin(2\theta) &= 2 \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\theta) \\ &= 2 \cdot \frac{x}{3} \cdot \frac{\sqrt{9-x^2}}{3} \\ &= \frac{2}{9} \cdot x \cdot \sqrt{9-x^2},\end{aligned}$$

isto é,

$$\sin(2\theta) = \frac{2}{9} \cdot x \cdot \sqrt{9-x^2}. \quad (1.18)$$

Por outro lado,

$$\sin(\theta) = \frac{x}{3} \Rightarrow \theta = \arcsin\left(\frac{x}{3}\right) \quad (1.19)$$

Combinando as expressões (1.16), (1.18) e (1.19), obtemos:

$$\int \sqrt{9-x^2} dx = \frac{9}{2} \cdot \arcsin\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{1}{2} \cdot x \cdot \sqrt{9-x^2} + c.$$

Observação. Quando a integral não puder ser resolvida utilizando os métodos de substituição e/ou pelo método de integração por partes, e o integrando possuir a expressão

$$\sqrt{a^2 - x^2},$$

devemos sempre realizar a mudança de variáveis

$$x = a \cdot \sin(\theta),$$

onde

$$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Para finalizar os estudos envolvendo cálculo de integrais através de substituições trigonométricas, considere a integral:

$$\int \frac{1}{x^2 \cdot \sqrt{x^2 + 9}} dx. \quad (1.20)$$

Para calcular esta integral, devemos realizar a seguinte substituição:

$$x = 3 \cdot \operatorname{tg}(\theta), \quad \text{com } -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\frac{dx}{d\theta} &= \frac{d}{d\theta}(3 \cdot \operatorname{tg}(\theta)) \\ &= 3 \cdot \frac{d}{d\theta}(\operatorname{tg}(\theta)) \\ &= 3 \cdot \sec^2(\theta),\end{aligned}$$

isto é,

$$dx = 3 \cdot \sec^2(\theta) d\theta. \quad (1.21)$$

Por outro lado, temos:

$$\begin{aligned}x^2 \cdot \sqrt{x^2 + 9} &= (3 \cdot \operatorname{tg}(\theta))^2 \sqrt{(3 \cdot \operatorname{tg}(\theta))^2 + 9} && \text{Estamos utilizando } x = 3 \cdot \operatorname{tg}(\theta) \\ &= 9 \cdot \operatorname{tg}^2(\theta) \cdot \sqrt{9 \cdot \operatorname{tg}^2(\theta) + 9} && \text{Desenvolvemos o quadrado} \\ &= 9 \cdot \operatorname{tg}^2(\theta) \cdot \sqrt{9(\operatorname{tg}^2(\theta) + 1)} && \text{Colocamos o 9 em evidência} \\ &= 9 \cdot \operatorname{tg}^2(\theta) \cdot \sqrt{9} \cdot \sqrt{\operatorname{tg}^2(\theta) + 1} && \text{Raiz do produto é o produto das raízes} \\ &= 27 \cdot \operatorname{tg}^2(\theta) \cdot \sqrt{\operatorname{tg}^2(\theta) + 1} \\ &= 27 \cdot \operatorname{tg}^2(\theta) \cdot \sqrt{\sec^2(\theta)} && \text{Recorde que } \sec^2(\theta) = \operatorname{tg}^2(\theta) + 1 \\ &= 27 \cdot \operatorname{tg}^2(\theta) \cdot \sec(\theta), && \text{Extraímos a raiz}\end{aligned}$$

ou seja,

$$x^2 \cdot \sqrt{x^2 + 9} = 27 \cdot \operatorname{tg}^2(\theta) \cdot \sec(\theta). \quad (1.22)$$

Combinando as expressões (1.20), (1.21) e (1.22), podemos reescrever a integral da seguinte

forma:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{x^2 \cdot \sqrt{x^2 + 9}} dx &= \int \frac{1}{27 \cdot \operatorname{tg}^2(\theta) \cdot \sec(\theta)} (3 \cdot \sec^2(\theta)) d\theta && x^2 \cdot \sqrt{x^2 + 9} = 27 \cdot \operatorname{tg}^2(\theta) \cdot \sec(\theta) \text{ e } dx = 3 \cdot \sec^2(\theta) \cdot d\theta \\
 &= \int -\frac{1}{9} \cdot \frac{\sec(\theta) \cdot \sec(\theta)}{\operatorname{tg}^2(\theta) \cdot \sec(\theta)} d\theta && \text{Apenas reorganizamos o radicando} \\
 &= -\frac{1}{9} \cdot \int \frac{\sec(\theta) \cdot \sec(\theta)}{\operatorname{tg}^2(\theta) \cdot \sec(\theta)} d\theta && \int c \cdot f(x), dx = c \cdot \int f(x), dx \\
 &= -\frac{1}{9} \cdot \int \frac{\sec(\theta) \cdot \cancel{\sec(\theta)}}{\operatorname{tg}^2(\theta) \cdot \cancel{\sec(\theta)}} d\theta && \int c \cdot f(x), dx = c \cdot \int f(x), dx \\
 &= -\frac{1}{9} \cdot \int \frac{\sec(\theta)}{\operatorname{tg}^2(\theta)} d\theta \\
 &= -\frac{1}{9} \cdot \int \frac{\cos(\theta)}{\operatorname{sen}^2(\theta)} d\theta && \operatorname{tg}^2(\theta) = \frac{\operatorname{sen}^2(\theta)}{\cos^2(\theta)} \text{ e } \sec(\theta) = \frac{1}{\cos(\theta)},
 \end{aligned}$$

isto é,

$$\int \frac{1}{x^2 \cdot \sqrt{x^2 + 9}} dx = -\frac{1}{9} \cdot \int \frac{\cos(\theta)}{\operatorname{sen}^2(\theta)} d\theta. \quad (1.23)$$

A integral em θ pode ser resolvida através da substituição:

$$s = \operatorname{sen}(\theta)$$

Note que:

$$\begin{aligned}
 \frac{ds}{d\theta} &= \frac{d}{d\theta}(\operatorname{sen}(\theta)) \Rightarrow \frac{ds}{d\theta} = \cos(\theta) \\
 &\Rightarrow ds = \cos(\theta) d\theta \\
 &\Rightarrow d\theta = \frac{1}{\cos(\theta)} ds.
 \end{aligned} \quad (1.24)$$

Relacionando (1.23) e (1.24), segue que:

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{9} \cdot \int \frac{\cos(\theta)}{\sin^2(\theta)} d\theta &= -\frac{1}{9} \cdot \int \frac{1}{\sin^2(\theta)} \cdot \cos(\theta) d\theta \\
 &= -\frac{1}{9} \cdot \int \frac{1}{\sin^2(\theta)} \cdot \cos(\theta) \cdot \frac{1}{\cos(\theta)} ds \quad d\theta = \frac{1}{\cos(\theta)} ds \\
 &= -\frac{1}{9} \cdot \int \frac{1}{\sin^2(\theta)} \cdot \cancel{\cos(\theta)} \cdot \frac{1}{\cancel{\cos(\theta)}} ds \quad d\theta = \frac{1}{\cos(\theta)} ds \\
 &= -\frac{1}{9} \cdot \int \frac{1}{\sin^2(\theta)} ds \quad s = \sin(\theta) \\
 &= -\frac{1}{9} \cdot \int \frac{1}{s^2} ds \\
 &= -\frac{1}{9} \cdot \int s^{-2} ds \\
 &= -\frac{1}{9} \cdot \frac{s^{-1}}{-1} + c \quad \int s^{-2} ds = \frac{s^{-1}}{-1} + c \\
 &= -\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{s} + c \\
 &= -\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{\sin(\theta)} + c \quad s = \sin(\theta),
 \end{aligned}$$

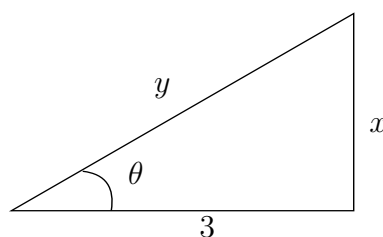
ou seja,

$$\int \frac{1}{x^2 \cdot \sqrt{x^2 + 9}} dx = -\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{\sin(\theta)} + c. \quad (1.25)$$

Agora, resta saber o valor de $\sin(\theta)$ em função de x para finalizarmos o cálculo da integral. Note que:

$$x = 3 \cdot \operatorname{tg}(\theta) \Rightarrow \operatorname{tg}(\theta) = \frac{x}{3}.$$

Agora, se $\operatorname{tg}(\theta) = \frac{x}{3}$, então temos o triângulo:



Assim,

$$y^2 = x^2 + 9 \Rightarrow y = \sqrt{x^2 + 9}$$

e, portanto, podemos calcular $\text{sen}(\theta)$, através da expressão:

$$\text{sen}(\theta) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}}. \quad (1.26)$$

Combinando as expressões (1.25) e (1.26), obtemos:

$$\int \frac{1}{x^2 \cdot \sqrt{x^2 + 9}} dx = -\frac{1}{9} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{x} + c.$$



Observação. Quando a integral não puder ser resolvida utilizando os métodos de substituição e/ou pelo método de integração por partes, e o integrando possuir a expressão

$$\sqrt{x^2 + a^2},$$

devemos sempre realizar a mudança de variáveis

$$x = a \cdot \text{tg}(\theta),$$

onde

$$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}.$$

Integrais de funções racionais: método das frações parciais



Pergunta. Professor, o que são funções racionais?

Prezado aluno, funções racionais são funções formadas pelo quociente de dois polinômios, isto é, é toda função da forma:

$$f(x) = \frac{p_1(x)}{p_2(x)},$$

com $p_1(x)$ e $p_2(x)$ polinômios.

Considere a seguinte função:

$$f(x) = \frac{x + 5}{x^2 + 3x + 2}.$$

Claramente, f é uma função racional, visto que

$$p_1(x) = x + 5 \text{ e } p_2(x) = x^2 + 3x + 2$$

são polinômios.

SITUAÇÃO 1

“O polinômio que está no denominador da função racional, possui apenas raízes distintas”



Pergunta. Professor, como calculamos $\int \frac{x + 5}{x^2 + 3x + 2} dx$, uma vez que uma simples substituição não funciona?

A substituição plausível seria $u = x^2 + 3x + 2$, visto que a derivada de u é um polinômio de grau 1 e teríamos chance de simplificar o numerador da função racional. Porém, sendo

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2 + 3x + 2) = 2x + 3$$



$$du = (2x + 3)dx$$

não é possível simplificar o numerador da função racional.

Como a integral se comporta bem com a soma, ou seja,

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

nosso objetivo será transformar toda função racional em uma soma e depois calcular a integral.

Por exemplo, considere a integral:

$$\int \frac{x + 5}{x^2 + 3x + 2} dx.$$



Pergunta. Como podemos transformar a função racional em uma soma integrável?

Esse processo vai depender do número de raízes do polinômio que se encontra no denominador da função racional.

Note que:

$$x^2 + 3x + 2 = (x + 1) \cdot (x + 2)$$

pois, $x = -1$ e $x = -2$ são raízes do polinômio $x^2 + 3x + 2$.

Por outro lado, o polinômio $x + 5$ possui grau 1. Com essas informações, vamos buscar constantes A e B , tais que:

$$\frac{x + 5}{x^2 + 3x + 2} = \frac{A}{(x + 1)} + \frac{B}{(x + 2)}. \quad (1.27)$$

Assim sendo, segue que:

$$\frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x+2)} = \frac{A \cdot (x+2) + B \cdot (x+1)}{(x+1) \cdot (x+2)} \quad \text{Estamos calculando o m.m.c entre os polinômios } (x+1) \text{ e } (x+2).$$

$$= \frac{Ax + 2A + Bx + B}{(x+1) \cdot (x+2)} \quad \text{Desenvolvemos os produtos.}$$

$$= \frac{x \cdot (A+B) + (2A+B)}{(x+1) \cdot (x+2)} \quad \text{Agrupamos os fatores que possuem } x.$$

$$= \frac{x \cdot (A+B) + (2A+B)}{x^2 + 3x + 2} \quad \text{Estamos utilizando que } x^2 + 3x + 2 = (x+1) \cdot (x+2).$$

$$\frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x+2)} = \frac{x \cdot (A+B) + (2A+B)}{x^2 + 3x + 2} \quad (1.28)$$

Segue de (1.27) e (1.28) que:

$$\frac{x+5}{x^2+3x+2} = \frac{x \cdot (A+B) + (2A+B)}{x^2+3x+2}.$$

Agora, como os denominadores são iguais, a igualdade acontece se

$$x+5 = x \cdot (A+B) + (2A+B).$$

A igualdade destacada é uma igualdade entre dois polinômios de grau 1. Que só pode ocorrer se:

$$\begin{cases} A+B=1 \\ 2A+B=5. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos:

$$A=4 \text{ e } B=-3.$$

De (1.27), segue que

$$\frac{x+5}{x^2+3x+2} = \frac{4}{(x+1)} - \frac{3}{(x+2)}$$

Dessa forma:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x+5}{x^2+3x+2} dx &= \int \left(\frac{4}{(x+1)} - \frac{3}{(x+2)} \right) dx \\
 &= \int \frac{4}{(x+1)} dx - \int \frac{3}{(x+2)} dx \\
 &= 4 \cdot \int \frac{1}{(x+1)} dx - 3 \cdot \int \frac{1}{(x+2)} dx \\
 &= 4 \cdot \ln(|x+1|) - 3 \cdot \ln(|x+2|) + c
 \end{aligned}$$

Basta resolver as integrais utilizando as substituições $u = x+1$ e $v = x+2$



Observação. Seja $f(x) = \frac{p_1(x)}{p_2(x)}$ uma função racional. Sempre que o polinômio que está no denominador possuir raízes distintas, isto é,

$$p_2(x) = (x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_k) \quad p_2 \text{ possui } k \text{ raízes distintas.}$$

então podemos escrever a função f na forma:

$$f(x) = \frac{A_1}{(x - x_1)} + \dots + \frac{A_k}{(x - x_k)}.$$

SITUAÇÃO 2

“O polinômio que está no denominador da função racional possui raízes repetidas”

Vamos agora estudar o caso em que polinômio que está no denominador possui uma raiz repetida. Por exemplo, considere a integral:

$$\int \frac{x+5}{(x+1)^2 \cdot (x+2)} dx.$$

Observe que o denominador da função racional acima corresponde ao polinômio $x^3 + 4x^2 + 5x + 2$, cuja raízes são $x = -1$ (raiz dupla) e $x = -2$ (raiz simples). Repetindo os mesmos argumentos, vamos buscar constantes A , B_1 e B_2 tais que:

$$\frac{x+5}{(x+1)^2 \cdot (x+2)} = \frac{A}{(x+2)} + \frac{B_1}{(x+1)^2} + \frac{B_2}{(x+1)}. \quad (1.29)$$

Note que o termo correspondente de raiz dupla (parcela $(x+1)^2$) contribui com duas parcelas na formação das frações parciais, a saber,

$$\frac{B_1}{(x+1)^2} \text{ e } \frac{B_2}{(x+1)}.$$

Assim sendo, segue que:

$$\begin{aligned} \frac{A}{(x+2)} + \frac{B_1}{(x+1)^2} + \frac{B_2}{(x+1)} &= \frac{A \cdot (x+1)^2 + B_1 \cdot (x+2) + B_2 \cdot (x+1) \cdot (x+2)}{(x+1)^2 \cdot (x+2)} \\ &= \frac{A \cdot (x^2 + 2x + 1) + B_1 \cdot (x+2) + B_2 \cdot (x^2 + 3x + 2)}{(x+1)^2 \cdot (x+2)} \\ &= \frac{(A+B_2)x^2 + (2A+B_1+3B_2)x + (A+2B_1+2B_2)}{(x+1)^2 \cdot (x+2)}, \end{aligned}$$

Estamos calculando o m.m.c entre os polinômios $(x+1)$, $(x+1)^2$ e $(x+2)$.
Desenvolvemos as potências.
Agrupamos os fatores que possuem x .

ou seja,

$$\frac{A}{(x+2)} + \frac{B_1}{(x+1)^2} + \frac{B_2}{(x+1)} = \frac{(A+B_2)x^2 + (2A+B_1+3B_2)x + (A+2B_1+2B_2)}{(x+1)^2 \cdot (x+2)} \quad (1.30)$$

Segue de (1.29) e (1.30), que:

$$\frac{x+5}{(x+1)^2 \cdot (x+2)} = \frac{(A+B_2)x^2 + (2A+B_1+3B_2)x + (A+2B_1+2B_2)}{(x+1)^2 \cdot (x+2)}.$$

Agora, como os denominadores são iguais, a igualdade acontece se

$$x+5 = (A+B_2)x^2 + (2A+B_1+3B_2)x + (A+2B_1+2B_2).$$

A igualdade destacada é uma igualdade entre dois polinômios, que só pode ocorrer se:

$$\begin{cases} A+B_2=0 \\ 2A+B_1+3B_2=1 \\ A+2B_1+2B_2=5. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos:

$$A=3, B_1=4 \text{ e } B_2=-3.$$

De (1.29), segue que

$$\frac{x+5}{(x+1)^2 \cdot (x+2)} = \frac{3}{(x+2)} + \frac{4}{(x+1)^2} - \frac{3}{(x+1)}$$

Dessa forma:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x+5}{(x+1)^2 \cdot (x+2)} dx &= \int \left(\frac{3}{(x+2)} + \frac{4}{(x+1)^2} - \frac{3}{(x+1)} \right) dx \\
 &= \int \frac{3}{(x+2)} dx + \int \frac{4}{(x+1)^2} dx - \int \frac{3}{(x+1)} dx \\
 &= 3 \cdot \int \frac{1}{(x+2)} dx + 4 \cdot \int \frac{1}{(x+1)^2} dx - 3 \cdot \int \frac{1}{(x+1)} dx \\
 &= 3 \cdot \ln(|x+2|) - 4 \cdot \frac{1}{x+1} - 3 \cdot \ln(|x+1|) + c
 \end{aligned}$$

Basta resolver as integrais utilizando as substituições $u = x + 1$ e $v = x + 2$



Observação. Seja $f(x) = \frac{p_1(x)}{p_2(x)}$ uma função racional. Sempre que o polinômio que está no denominador possuir raízes repetidas, isto é, um fator do tipo $(x - x_j)^k$ (x_j é k vezes raiz do denominador), cada fator $(x - x_j)^k$ contribui com k parcelas de frações parciais, da forma:

$$\frac{B_1}{(x - x_1)^k} + \frac{B_2}{(x - x_j)^{k-1}} + \cdots + \frac{B_{k-1}}{(x - x_j)^2} + \frac{B_k}{(x - x_j)}.$$

SITUAÇÃO 3

“O polinômio que está no denominador da função racional possui um polinômio de grau 2 que NÃO possui raízes reais, isto é, é um fator irredutível ”

Vamos agora estudar o caso em que o polinômio que está no denominador é um polinômio de grau 2, que não possui raízes reais. Por exemplo, considere a integral:

$$\int \frac{x+5}{(x^2+1) \cdot (x+2)} dx.$$

Observe que o denominador da função racional acima, apresenta a parcela $x^2 + 1$, que não possui raízes reais (delta é negativo). Repetindo os mesmos argumentos, vamos buscar constantes A , B_1 e B_2 tais que:

$$\frac{x+5}{(x^2+1) \cdot (x+2)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B_1x + B_2}{x^2+1}. \quad (1.31)$$

Observe que, o termo correspondente à parcela $x^2 + 1$ possui no numerador um polinômio de grau 1 do tipo $B_1x + B_2$, a saber

$$\frac{B_1x + B_2}{x^2 + 1}.$$

Assim sendo, segue que:

$$\begin{aligned} \frac{A}{x+2} + \frac{B_1x + B_2}{x^2 + 1} &= \frac{A \cdot (x^2 + 1) + (x+2) \cdot (B_1x + B_2)}{(x+2) \cdot (x^2 + 1)} \\ &= \frac{(A + B_1)x^2 + (B_2 + 2B_1)x + (A + 2B_2)}{(x+2) \cdot (x^2 + 1)}, \end{aligned}$$

Estamos calculando o m.m.c entre os polinômios $(x+2)$ e $x^2 + 1$.

Agrupamos os fatores que possuem x .

ou seja,

$$\frac{A}{x+2} + \frac{B_1x + B_2}{x^2 + 1} = \frac{(A + B_1)x^2 + (B_2 + 2B_1)x + (A + 2B_2)}{(x+2) \cdot (x^2 + 1)}. \quad (1.32)$$

Segue de (1.31) e (1.32), que:

$$\frac{x+5}{(x+2) \cdot (x^2 + 1)} = \frac{(A + B_1)x^2 + (B_2 + 2B_1)x + (A + 2B_2)}{(x+2) \cdot (x^2 + 1)}.$$

Agora, como os denominadores são iguais, a igualdade acontece se

$$x + 5 = (A + B_1)x^2 + (B_2 + 2B_1)x + (A + 2B_2).$$

A igualdade destacada, é uma igualdade entre dois polinômios. Que só pode ocorrer se:

$$\begin{cases} A + B_1 = 0 \\ B_2 + 2B_1 = 1 \\ A + 2B_2 = 5. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos:

$$A = \frac{3}{5}, B_1 = -\frac{3}{5} \text{ e } B_2 = \frac{11}{5}.$$

De (1.31), segue que

$$\begin{aligned} \frac{x+5}{(x+2) \cdot (x^2 + 1)} &= \frac{\frac{3}{5}}{(x+2)} + \frac{-\frac{3}{5}x + \frac{11}{5}}{x^2 + 1} \\ &= \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{(x+2)} - \frac{3}{5} \cdot \frac{x}{x^2 + 1} + \frac{11}{5} \cdot \frac{1}{x^2 + 1}. \end{aligned}$$

Dessa forma:

$$\begin{aligned}\int \frac{x+5}{(x+2) \cdot (x^2+1)} dx &= \int \left(\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{(x+2)} - \frac{3}{5} \cdot \frac{x}{x^2+1} + \frac{11}{5} \cdot \frac{1}{x^2+1} \right) dx \\ &= \frac{3}{5} \cdot \int \frac{1}{(x+2)} dx - \frac{3}{5} \cdot \int \frac{x}{x^2+1} dx + \frac{11}{5} \cdot \int \frac{1}{x^2+1} dx.\end{aligned}$$

Note que:

$$\int \frac{1}{(x+2)} dx = \ln(|x+2|) + c \quad \text{Basta fazer a substituição } u = x+2$$

$$\int \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \cdot \ln(|x^2+1|) + c \quad \text{Basta fazer a substituição } u = x^2+1$$

$$\int \frac{1}{x^2+1} dx = \arctg(x) + c \quad \text{Verificar lista de integrais imediatas}$$

Logo,

$$\int \frac{x+5}{(x+2) \cdot (x^2+1)} dx = \frac{3}{5} \cdot \ln(|x+2|) - \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \ln(|x^2+1|) + \frac{11}{5} \cdot \arctg(x) + c.$$



Observação. Seja $f(x) = \frac{p_1(x)}{p_2(x)}$ uma função racional. Sempre que o polinômio que está no denominador possuir um termo de segundo grau $x^2 + bx + c$ irredutível, este fator contribui com uma parcela de frações parciais, da forma:

$$\frac{B_1x + B_2}{x^2 + bx + c}.$$

Teste seus conhecimentos

INTEGRAIS ELEMENTARES

1. Calcule as integrais indefinidas e na sequência derive as primitivas obtidas.

$$a) \int \frac{x^2}{x^2 + 1} dx; \quad b) \int \sqrt{\frac{4}{x^4 - x^2}} dx; \quad c) \int \left(\frac{e^x}{2} + \sqrt{x} + \frac{1}{x} \right) dx;$$

$$d) \int \sec^2(x) \cdot (\cos^3(x) + 1) dx; \quad e) \int \frac{\sec^2(x)}{\operatorname{cosec}(x)} dx.$$

2. Encontrar uma primitiva F , da função $f(x) = x^{\frac{2}{3}} + x$, tal que $F(1) = 1$.

3. Encontrar uma primitiva da função $f(x) = x^{-2} + 1$ que se anule no ponto $x = 2$.

4. Sabendo que a função f satisfaz a igualdade

$$\int f(x) dx = \operatorname{sen}(x) - x \cos(x) - \frac{1}{2}x^2 + c,$$

determine $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

5. Determine uma função f tal que $f'(x) + \operatorname{sen}(x) = 0$ e $f(0) = 2$.

INTEGRAIS: MÉTODO DA SUBSTITUIÇÃO

6. Encontre uma primitiva para as integrais.

$$a) \int \sqrt{x^2 + 2x^4} dx; \quad b) \int \frac{e^x}{e^x + 4} dx; \quad c) \int \operatorname{tg}(x) \cdot \sec^2(x) dx;$$

$$d) \int \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos^5(x)} dx; \quad e) \int e^x \cdot \cos(2e^x) dx; \quad f) \int \frac{2\sec^2(x)}{3 + 2\operatorname{tg}(x)} dx.$$

INTEGRAÇÃO POR PARTES

7. Encontre uma primitiva para as integrais.

$$a) \int x^2 \cdot \operatorname{sen}(x) dx; \quad b) \int t \cdot e^{4t} dt; \quad c) \int x \cdot \ln(3x) dx;$$

$$d) \int e^x \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right) dx; \quad e) \int \ln(x) dx; \quad f) \int \operatorname{cosec}^3(x) dx.$$

INTEGRAÇÃO POR SUBSTITUIÇÃO TRIGONOMÉTRICA

8. Encontre uma primitiva para as integrais.

$$a) \int \frac{\sqrt{9-x^2}}{2x^2} dx; \quad b) \int \frac{x^2}{3\sqrt{x^2+4}} dx; \quad c) \int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-16}} dx; .$$

INTEGRAÇÃO DE FUNÇÕES RACIONAIS

9. Encontre uma primitiva para as integrais.

$$a) \int \frac{x-2}{x^3-3x^2-x+3} dx; \quad b) \int \frac{x-1}{x^3+x^2-4x-4} dx;$$

$$c) \int \frac{x^2+5x+4}{x^2-2x+1} dx; \quad d) \int \frac{x^2+1}{x^4-7x^3+18x^2-20x+8} dx;$$

$$e) \int \frac{x^3+2x^2+4}{2x^2+2} dx; \quad f) \int \frac{3x-1}{x^2-x+1} dx.$$

Respostas dos testes

EXERCÍCIO 1

$$a) x - \arctan(x) + c; \quad b) 2\arcsin(x) + c; \quad c) \frac{1}{2}e^t + \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3}\ln|t| + c;$$

$$d) \sin(x) + \tan(x) + c; \quad e) \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + \frac{1}{3}\ln|x| + c.$$

EXERCÍCIO 2

$$F(x) = \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{10}.$$

EXERCÍCIO 3

$$F(x) = -\frac{1}{x} + x - \frac{3}{2}.$$

EXERCÍCIO 4

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi(\sqrt{2}-2)}{8}.$$

EXERCÍCIO 5

$$f(x) = \cos(x) + 1.$$

EXERCÍCIO 6

$$a) \frac{1}{6}(1+2x^2)^{\frac{3}{2}} + c; \quad b) \ln(e^t + 4) + c; \quad c) \frac{\tan^2(x)}{2} + c;$$

$$d) \frac{1}{4}\sec^4(x) + c; \quad e) \frac{1}{2}\sin(2e^x) + c; \quad f) \ln|3+2\tan(\theta)| + c.$$

EXERCÍCIO 7

$$a) -x^2 \cos(x) + 2x \sin(x) + 2 \cos(x) + c; \quad b) \frac{e^{4t}}{4} \left(t - \frac{1}{4} \right) + c;$$

$$c) \frac{x^2}{2} \left[\ln \left(3x - \frac{1}{2} \right) \right] + c; \quad d) \frac{2}{5} e^x \left[\sin \left(\frac{x}{2} \right) + 2 \cos \left(\frac{x}{2} \right) \right] + c$$

$$e) x \ln(x) - x + c;$$

$$f) -x \cot g(x) + \ln |\sin(x)| + c.$$

EXERCÍCIO 8

$$a) \frac{1}{2} \left(-\frac{\sqrt{9-x^2}}{x} - \arcsen \left(\frac{x}{4} \right) \right) + c;$$

$$b) \frac{1}{6} x \sqrt{x^2+4} - \frac{2}{3} \ln \left| \frac{\sqrt{x^2+4}+x}{2} \right| + c;$$

$$c) \frac{1}{128} \left(-\arcsen \left(\frac{x}{4} \right) \right) + 4 \frac{\sqrt{x^2-16}}{x^2} + c.$$

EXERCÍCIO 9

$$a) \frac{1}{4} \ln |x-1| - \frac{3}{8} \ln |x+1| + \frac{1}{8} \ln |x-3| + c;$$

$$b) \frac{1}{12} \ln |x-2| + \frac{2}{3} \ln |x+1| - \frac{1}{2} \ln |x-2| + c;$$

$$c) x + 7 \ln |x-1| - \frac{10}{x-1} + c;$$

$$e) \frac{x^2}{4} + x - \frac{1}{4} \ln(x^2 + 1) + \operatorname{arc\,tg}(x) + c;$$

$$f) \frac{3}{2} \ln|x^2 - x + 1| + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2x - 1}{\sqrt{3}}\right) + c.$$

Introdução

Seu Pedro, aos seus 86 anos, considera-se um vencedor, tanto pelo tempo de vida, pelos amigos que fez, quanto pelo patrimônio que conquistou durante todos esses anos. Sem filhos e atualmente viúvo, resolveu distribuir o seu patrimônio de 2 milhões de reais às pessoas que conheceu durante sua trajetória, da seguinte forma:

“a primeira pessoa escolhida por seu Pedro, recebe 1 milhão, na condição de ficar com a metade e doar a metade restante. Assim, a segunda pessoa recebe $\frac{1}{2}$ milhão, fica com a metade e doa a metade restante, e assim sucessivamente”

Considerando $\{p_n\}$ a sequência das quantias que cada pessoa recebeu, temos:

$$p_1 = 1 \text{ milhão}, p_2 = \frac{1}{2} \text{ milhão}, p_3 = \frac{1}{4} \text{ milhão}, \dots, p_n = \frac{1}{2^{n-1}} \text{ milhão}, \dots,$$

A iniciativa tomada pelo seu Pedro será motivo de comentários por longos anos.



Pare e Pense. Qual foi a quantia total doada pelo seu Pedro?

Para responder esta pergunta, devemos resolver a seguinte conta:

$$S_n = 1 \text{ milhão} + \frac{1}{2} \text{ milhão} + \frac{1}{4} \text{ de milhão} + \frac{1}{8} \text{ de milhão} + \frac{1}{16} \text{ de milhão} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \text{ de milhão} + \dots$$



Pergunta. Professor, esta história está muito maluca. Pelo que estou vendo, esta soma parece não ter fim, mas, como o patrimônio do seu Pedro é finito, creio que algum momento terá que parar. Como isso é possível?

Caro aluno, você não está ficando louco. Como seu Pedro ficou com 1 milhão do seu patrimônio e iniciou o processo de doação com a outra metade da sua herança, devemos ter:

$$1 \text{ milhão} + \frac{1}{2} \text{ milhão} + \frac{1}{4} \text{ de milhão} + \frac{1}{8} \text{ de milhão} + \frac{1}{16} \text{ de milhão} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \text{ de milhão} + \cdots$$

||

2 milhão .



Pergunta. Professor, existe uma forma de simplificarmos a escrita da soma estudada anteriormente?

A forma de simplificarmos a escrita de somas com muitas parcelas é utilizar o **operador somatório**. Por exemplo, a soma

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

pode ser escrita, através do operador somatório, reduzidamente na forma:

$$\sum_{j=1}^1 \frac{1}{2^{j-1}} = 1$$

$$\sum_{j=1}^2 \frac{1}{2^{j-1}} = 1 + \frac{1}{2}$$

$$\sum_{j=1}^3 \frac{1}{2^{j-1}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

$$\sum_{j=1}^4 \frac{1}{2^{j-1}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$$

⋮

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{2^{j-1}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}.$$



Observação. Com respeito ao operador somatório, temos as considerações:

1. O símbolo $\sum$ nos diz que operação matemática a ser realizada é a soma;
2. O índice j é chamado de contador do somatório e é responsável por estabelecer o início e o fim da soma;
3. O símbolo $\sum_{j=1}^{n-1}$, nos diz que o índice j vai assumir todos os valores entre 1 e $n - 1$ e que para passar de um valor de j para outro devemos realizar uma soma;
4. O símbolo $\sum_{j=1}^{n-1} p_j$, diz que devemos somar todos os elementos $p_1, \dots, p_{n-1}$, isto é,

$$\sum_{j=1}^{n-1} p_j = p_1 + p_2 + \dots + p_{n-1}.$$

Sequências Numéricas

Uma sequência numérica é simplesmente uma lista, na qual existe, um primeiro elemento, um segundo elemento, um terceiro elemento, e assim por diante (sempre respeitando uma ordem) sem interrupção. Em matemática uma lista finita não é considerado uma sequência.



Pergunta. Professor, como definimos matematicamente uma sequência numérica?

Uma **sequência numérica** é definida como sendo a função:

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto f(n) = a_n. \end{aligned}$$

É comum, representarmos uma sequência, através dos símbolos:

$$\{f(n)\}, \quad \{a_n\}, \quad (a_n).$$

O termo $\{a_n\}$ é chamado de **termo geral da sequência**.

Vamos ilustrar a definição anterior, através de um exemplo. Considere a sequência:

$$\{a_n\} = \frac{1}{n}.$$

Computando alguns termos, temos:

$$n = 1 \quad \rightarrow \quad a_1 = 1$$

$$n = 2 \quad \rightarrow \quad a_2 = \frac{1}{2} = 0,5000$$

$$n = 3 \quad \rightarrow \quad a_3 = \frac{1}{3} = 0,3333$$

$$n = 4 \quad \rightarrow \quad a_4 = \frac{1}{4} = 0,2500$$

$$n = 5 \quad \rightarrow \quad a_5 = \frac{1}{5} = 0,2000$$

$$n = 6 \quad \rightarrow \quad a_6 = \frac{1}{6} = 0,1666$$

$$n = 7 \quad \rightarrow \quad a_7 = \frac{1}{7} = 0,1428$$

$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$

$$n = 1000 \quad \rightarrow \quad a_{1000} = \frac{1}{1000} = 0,0010$$

$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$

Claramente, é visível que a medida que n aumenta, o termo geral da sequência $\{a_n\} = \frac{1}{n}$ se aproxima da zero.



Pergunta. Professor, matematicamente como podemos entender as expressões “a medida que n cresce” a sequência se “aproxima de zero”?

A frase, “a medida que n aumenta, a sequência $\{a_n\} = \frac{1}{n}$ se aproxima da zero” pode ser entendida matematicamente através da noção de limite pela expressão:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$



Pergunta. Professor, sempre é possível determinarmos o número para o qual a sequência está se aproximando?

Nem sempre é possível determinarmos o número para o qual a sequência está se aproximando. Quando for possível determinarmos tal número (**sempre que o limite existir**), dizemos que a sequência é **convergente**. Agora, se o limite não existir, dizemos que a sequência é **divergente**.



Pare e Pense. Professor, como formalizamos a noção de convergência de uma sequência?

Utilizando a definição de limite, podemos dizer que uma sequência $\{a_n\}$, converge para um número real L , sempre que:

para todo $\epsilon > 0$ existir um número natural $N > 0$, tal que se $n > N$, então $|a_n - L| < \epsilon$.



$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L.$$



Pare e Pense. Professor, como formalizamos a noção de divergência de uma sequência?

Utilizando a definição de limite, podemos dizer que uma sequência $\{a_n\}$, diverge, sempre que:

para todo número $\epsilon > 0$ existir um número natural $N > 0$, tal que se $n > N$, então $a_n > \epsilon$.



$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty.$$



Observação. Toda sequência convergente, converge para um único número real.

Vejamos, por que este resultado é verdadeiro. Seja $\{a_n\}$ uma sequência convergente. Considere que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L_1 \text{ e } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L_2.$$

Para provarmos o resultado devemos mostrar que $L_1 = L_2$. Fixe, ϵ um número positivo qualquer. Então, por definição, podemos encontrar um número N_1 , tal que

$$|a_n - L_1| < \epsilon$$

sempre que $n > N_1$. Por outro lado, também podemos encontrar um número N_2 , tal que

$$|a_n - L_2| < \epsilon$$

sempre que $n > N_2$.

Agora, tome $N = \max(N_1, N_2)$. Então, as desigualdades anteriores, ocorrem simultaneamente, isto é:

$$|a_N - L_1| < \epsilon \text{ e } |a_N - L_2| < \epsilon.$$

Sendo assim, obtemos:

$$\begin{aligned} |L_1 - L_2| &= |L_1 - a_N + a_N - L_2| && \text{Apenas somamos e subtraímos } a_N \\ &\leq |L_1 - a_N| + |a_N - L_2| && \text{Estamos utilizando a desigualdade triangular} \\ &= \epsilon + \epsilon && \text{Ambas as parcelas são menores que } \epsilon \\ &= 2\epsilon. \end{aligned}$$

Agora, como ϵ pode ser qualquer número positivo, concluímos que $L_1 = L_2$.



Pergunta. Professor, quando é possível determinarmos o limite de uma sequência?

Através do estudo do comportamento dos termos, podemos ter informações sobre a convergência ou divergência da sequência. Dizemos que uma sequência $\{a_n\}$ é **limitada** se existe

um número real M , com a propriedade:

$$|a_n| \leq M.$$

Uma sequência é **não decrescente** se os termos se comportam da seguinte forma:

$$s_1 \leq s_2 \leq s_3 \leq \cdots \leq s_n \leq s_{n+1} \leq \cdots.$$

Por outro lado, dizemos que uma sequência é **não crescente** se os termos se comportam da seguinte forma:

$$s_1 \geq s_2 \geq s_3 \geq \cdots \geq s_n \geq s_{n+1} \geq \cdots.$$

Uma sequência que é não decrescente ou não crescente é chamada de **monótona**.



Pare e Pense. Como vamos utilizar, os conceitos anteriormente enunciados para determinarmos o limite de uma sequência?

Sequências monótonas são menos complicadas de se estudar do que as sequências que apresentam crescimentos e decrescimentos. A questão da convergência para uma sequência monótona é particularmente simples. Podemos imaginar que os termos da sequência podem aumentar ou diminuir indefinidamente até um limite (**caso as sequências sejam limitadas**). Por outro lado, pode ocorrer dos termos divergirem para $\pm\infty$. É impossível imaginar uma terceira possibilidade. Expressamos isso, através do seguinte teorema:



Observação. Suponha que $\{a_n\}$ seja uma sequência monótona. Então, $\{a_n\}$ é convergente se, e somente, se $\{a_n\}$ é limitada.

Para provarmos este resultado, vamos considerar por simplicidade que $\{a_n\}$ seja crescente. O caso em que $\{a_n\}$ é decrescente é análogo.

Note que se a sequência $\{a_n\}$ for ilimitada, claramente será divergente, isto é,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty.$$

Agora, se $\{a_n\}$ é limitada, vamos mostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup\{a_n\} \quad \text{Por definição } \sup\{a_n\} \text{ é a menor cota superior do conjunto dos elementos de } \{a_n\}.$$

De fato,

$$a_n \leq \sup\{a_n\} \text{ para todo } n.$$

Se $b < \sup\{a_n\}$ deve existir um termo a_N , tal que

$$a_N > b.$$

Fixe $\epsilon > 0$. Sempre podemos encontrar um número positivo N , tal que

$$a_n > a_N > \sup\{a_n\} - \epsilon$$

para todo $n \geq N$.

Por outro lado, já sabemos que $a_n \leq \sup\{a_n\}$. Combinando as informações, obtemos:

$$\sup\{a_n\} - \epsilon < a_n \leq \sup\{a_n\} < \sup\{a_n\} + \epsilon$$

o que implica questão

$$\sup\{a_n\} - \epsilon < a_n < \sup\{a_n\} + \epsilon \Rightarrow |a_n - \sup\{a_n\}| < \epsilon,$$

para todo $n \geq N$.

Segue da definição de convergência de uma sequência que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} = \sup\{a_n\}.$$

Aplicando o teorema, obtemos que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0.$$



Pare e Pense. Professor, como aplicamos este teorema?

Por exemplo, vamos mostrar que a sequência $a_n = \frac{1}{n^2}$ converge para zero. Claramente, a sequência $\{a_n\}$ é decrescente. Além disso, como todos os termos da sequência são positivos, podemos concluir que:

$$\sup\{a_n\} = 0.$$

Séries Infinitas

Considere a sequência $\{a_n\}$. O conjunto

$$\mathcal{S} = \{a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}.$$

representa todos os termos da sequência $\{a_n\}$. A partir desses termos, podemos construir uma nova sequência realizando pequenas somas, ou seja,

$$S_1 = a_1;$$

$$S_2 = \sum_{j=1}^2 a_j = a_1 + a_2$$

$$S_3 = \sum_{j=1}^3 a_j = a_1 + a_2 + a_3$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$S_n = \sum_{j=1}^n a_j = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

$$S_{n+1} = \sum_{j=1}^{n+1} a_j = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + a_{n+1}$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$



- Observação.** 1. Seja $\{a_n\}$ uma sequência de números reais. A **série infinita** associada a $\{a_n\}$, denotada por $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$, é definida por $\sum_{j=1}^{\infty} a_j = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$.
2. Cada número a_j é chamado de **termo da série infinita** e cada número S_j é denominado **soma parcial da série infinita**.
3. Quando o limite $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ for um número real, dizemos que a série infinita é **convergente**. Caso o limite não exista, ou seja infinito, dizemos que a série é **divergente**.

Aplique seus conhecimentos



Atividades

Texto Básico

Teste. Considere a sequência $\{a_n\} = \{n\}$ e defina a série infinita $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$. Determine a lei de formação da sequência de somas parciais da série dada e estude sua convergência.

Solução.

Os dez primeiros termos da sequência $\{a_n\}$ são:

$$a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, a_4 = 4, a_5 = 5, a_6 = 6, a_7 = 7, a_8 = 8, a_9 = 9, a_{10} = 10.$$

Vamos agora determinar a lei de formação da sequência das somas parciais:

$$S_1 = 1;$$

$$S_2 = 1 + 2;$$

$$S_3 = 1 + 2 + 3$$

$$S_4 = 1 + 2 + 3 + 4$$

$$S_5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$$

$$S_6 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$$

$$S_7 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7$$

$$S_8 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8$$

$$S_9 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9$$

$$S_{10} = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10.$$

Note que

$$S_1 = 1 = \frac{1 \cdot (1 + 1)}{2};$$

$$S_2 = 3 = \frac{2 \cdot (2 + 1)}{2};$$

$$S_3 = 6 = \frac{3 \cdot (3 + 1)}{2};$$

$$S_4 = 10 = \frac{4 \cdot (4 + 1)}{2};$$

$$S_5 = 15 = \frac{5 \cdot (5 + 1)}{2};$$

$$S_6 = 21 = \frac{6 \cdot (6 + 1)}{2};$$

$$S_7 = 28 = \frac{7 \cdot (7 + 1)}{2};$$

$$S_8 = 36 = \frac{8 \cdot (8 + 1)}{2};$$

$$S_9 = 45 = \frac{9 \cdot (9 + 1)}{2};$$

$$S_{10} = 55 = \frac{10 \cdot (10 + 1)}{2}.$$

Assim, concluímos que

$$S_n = \frac{n \cdot (n + 1)}{2}.$$

A convergência da série $\sum_{j=1}^{\infty} j$ é estudada através do limite das somas parciais, ou seja,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{\infty} j &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n \cdot (n+1)}{2} \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + n}{2} \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2} \\
&= \infty + \infty.
\end{aligned}$$

Portanto, concluímos que a série $\sum_{j=1}^{\infty} j$ é divergente.



Atividades
Texto Básico

Teste. Considere a sequência $\{a_n\} = \{n^2\}$ e defina a série infinita $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$. Determine a lei de formação da sequência de somas parciais da série dada e estude sua convergência.

Solução.

Os dez primeiros termos da sequência $\{a_n\}$ são:

$$a_1 = 1, a_2 = 4, a_3 = 9, a_4 = 16, a_5 = 25, a_6 = 36, a_7 = 49, a_8 = 64, a_9 = 81, a_{10} = 100.$$

Vamos, agora, determinar a lei de formação da sequência das somas parciais:

$$S_1 = 1;$$

$$S_2 = 1 + 4;$$

$$S_3 = 1 + 4 + 9$$

$$S_4 = 1 + 4 + 9 + 16$$

$$S_5 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25$$

$$S_6 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36$$

$$S_7 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49$$

$$S_8 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 + 64$$

$$S_9 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 + 64 + 81$$

$$S_{10} = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 + 64 + 81 + 100.$$

Note que,

$$S_1 = 1 = \frac{1 \cdot (1 + 1) \cdot (2 \cdot 1 + 1)}{6};$$

$$S_2 = 5 = \frac{2 \cdot (2 + 1) \cdot (2 \cdot 2 + 1)}{6};$$

$$S_3 = 14 = \frac{3 \cdot (3 + 1) \cdot (2 \cdot 3 + 1)}{6};$$

$$S_4 = 30 = \frac{4 \cdot (4 + 1) \cdot (2 \cdot 4 + 1)}{6};$$

$$S_5 = 55 = \frac{5 \cdot (5 + 1) \cdot (2 \cdot 5 + 1)}{6};$$

$$S_6 = 91 = \frac{6 \cdot (6 + 1) \cdot (2 \cdot 6 + 1)}{6};$$

$$S_7 = 140 = \frac{7 \cdot (7 + 1) \cdot (2 \cdot 7 + 1)}{6};$$

$$S_8 = 204 = \frac{8 \cdot (8 + 1) \cdot (2 \cdot 8 + 1)}{6};$$

$$S_9 = 285 = \frac{9 \cdot (9 + 1) \cdot (2 \cdot 9 + 1)}{6};$$

$$S_{10} = 385 = \frac{10 \cdot (10 + 1) \cdot (2 \cdot 10 + 1)}{6}.$$

Assim, concluímos que

$$S_n = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}.$$

A convergência da série $\sum_{j=1}^{\infty} j^2$ é estudada através do limite das somas parciais, ou seja,

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{\infty} j^2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} \right) \\&= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{6} \right) \cdot \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{6} \right) \cdot \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{6} \right) \\&= \infty.\end{aligned}$$

Portanto, concluímos que a série $\sum_{j=1}^{\infty} j^2$ é divergente.



Atividades
Texto Básico

Teste. Determine a série infinita que gerou a seguinte sequência de somas parciais:

$$\left\{ \frac{2n}{3n+1} \right\}.$$

Solução.

Por definição, temos que

$$S_n = a_1 + \cdots + a_{n-1} + a_n \text{ e } S_{n-1} = a_1 + \cdots + a_{n-1}.$$

Assim sendo,

$$\begin{aligned} S_n - S_{n-1} &= a_1 + \cdots + a_{n-1} + a_n - (a_1 + \cdots + a_{n-1}) \\ &= a_1 + \cdots + a_{n-1} + a_n - a_1 - \cdots - a_{n-1} \\ &= \cancel{a_1} + \cdots + \cancel{a_{n-1}} + a_n - \cancel{a_1} - \cdots - \cancel{a_{n-1}} \\ &= a_n. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2n}{3n+1} - \frac{2(n-1)}{3(n-1)+1} \\ &= \frac{2n \cdot (3n-2) - (2n-2) \cdot (3n+1)}{(3n+1) \cdot (3n-1)} \\ &= \frac{6n^2 - 4n - 6n^2 - 2n + 6n + 2}{(3n+1) \cdot (3n-2)} \\ &= \frac{\cancel{6n^2} - \cancel{4n} - \cancel{6n^2} - \cancel{2n} + \cancel{6n} + 2}{(3n+1) \cdot (3n-2)} \\ &= \frac{2}{(3n+1) \cdot (3n-2)}. \end{aligned}$$

Portanto, a série procurada é

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(3n+1) \cdot (3n-2)}.$$

Vimos até o momento que não é uma tarefa fácil estudar a convergência de uma série. O próximo resultado, nos dá um critério para decidirmos se a série diverge, porém não nos dá pistas da convergência.



Observação. Se a série $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ é convergente, então $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Este resultado não é útil para determinarmos o limite da série, porém é uma forte ferramenta para estudarmos a divergência, uma vez que, se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$, então a série diverge.

Prova.

Como a série $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ é convergente, então existe um número real S tal que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S,$$

onde S_n é a sequência formada pelas somas parciais da série.

Por outro lado, vimos no exemplo que:

$$a_n = S_n - S_{n-1}.$$

Assim sendo, combinando as informações, temos:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} \quad \text{Limite da soma é a soma dos limites} \\ &= S - S = 0. \quad \text{Unicidade do Limite} \end{aligned}$$

Concluimos, assim, a prova do resultado.

Aplique seus conhecimentos



Atividades
Texto Básico

Teste. Mostre que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6n^2 + 4n + 2}{n^2 + 1}$ é divergente.

Solução.

Pelo resultado que acabamos de ver, basta verificar se o limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^2 + 4n + 2}{n^2 + 1}$$

é diferente de zero.

De fato,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^2 + 4n + 2}{n^2 + 1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2(6 + \frac{4}{n} + \frac{2}{n^2})}{n^2(1 + \frac{1}{n^2})} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\cancel{n^2}(6 + \frac{4}{n} + \frac{2}{n^2})}{\cancel{n^2}(1 + \frac{1}{n^2})} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{6 + \frac{4}{n} + \frac{2}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}} \right) \\ &= 6. \end{aligned}$$

Como, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^2 + 4n + 2}{n^2 + 1} = 6$, temos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6n^2 + 4n + 2}{n^2 + 1}$ é divergente.



Atividades
Texto Básico

Teste. Mostre que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(\frac{2n}{n+1} \right)$ é divergente.

Solução.

Pelo resultado que acabamos de ver, basta verificar se o limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{2n}{n+1} \right)$$

é diferente de zero.

De fato,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{2n}{n+1} \right) = \ln \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n+1} \right) \quad \text{O logaritmo é uma função contínua}$$

$$= \ln \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n(1 + \frac{1}{n})} \right)$$

$$= \ln \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\cancel{n}}{\cancel{n}(1 + \frac{1}{n})} \right)$$

$$= \ln \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{1 + \frac{1}{n}} \right)$$

$$= \ln(2).$$

Como, $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{2n}{n+1} \right) = \ln(2)$, temos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(\frac{2n}{n+1} \right)$ é divergente.



Observação. Professor, considere a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, então a série é convergente?

A volta do resultado anterior não é verdade. Uma soma infinita na qual o limite do termo geral é zero, porém a série não é convergente, é a série harmônica.



Observação. A série cuja soma é

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

é chamada de **série harmônica**. Note que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, porém a **série harmônica é divergente**.

Prova.

Suponha que a série harmônica é convergente, isto é, existe um número real S , tal que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S.$$

Por outro lado, temos que

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdots + \frac{1}{n} \text{ e } S_{2n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2n}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} S_{2n} - S_n &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \\ &> \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n} \quad n > 1 \\ &= n \cdot \frac{1}{2n} \quad \text{Existem } n \text{ parcelas de } \frac{1}{2n} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Dessa forma, concluímos que

$$S_{2n} - S_n > \frac{1}{2}.$$

Agora, aplicando o limite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (S_{2n} - S_n) > \frac{1}{2}$$

$\Downarrow$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} - \lim_{n \rightarrow \infty} S_n > \frac{1}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$0 = S - S > \frac{1}{2} \quad \text{Unicidade do limite}$$

temos uma contradição. A contradição surgiu ao considerarmos que a série harmônica é convergente. Portanto, a série harmônica não é convergente.

Na sequência dos nossos estudos, vamos estudar as séries geométricas. A série que utilizamos para descrever as doações do seu Pedro é um exemplo de série geométrica.



Observação. Uma série infinita é dita **geométrica** se apresenta uma soma da forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a \cdot r^{n-1} = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} + \dots$$

O número real r é chamado de **razão**.

Nosso objetivo é estudar a convergência da série geométrica. A sequência de somas parciais da série geométrica é dada por:

$$\begin{aligned} S_n &= a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} \\ &= a(1 + r + r^2 + \dots + r^{n-1}). \end{aligned}$$

Por outro lado, sabemos que:

$$1 - r^n = (1 - r) \cdot (1 + r + r^2 + \dots + r^{n-1}).$$

Combinando as informações, temos

$$1 - r^n = (1 - r) \cdot \frac{S_n}{a}$$

$\Downarrow$

$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}.$$

Agora, o estudo da convergência da série geométrica depende da convergência da sequência $\{S_n\}$.

CASO I: $|r| < 1$

Note que, se $|r| < 1$, então $-1 < r < 1$. Assim, $r = \frac{1}{c}$, onde $c > 1$. Logo,

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} \\&= \frac{a}{1 - r} \cdot \left(\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - r^n) \right) \\&= \frac{a}{1 - r} \cdot \left(1 - \lim_{n \rightarrow \infty} r^n \right) \\&= \frac{a}{1 - r} \cdot \left(1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{c^n} \right) \\&= \frac{a}{1 - r} \cdot (1 - 0) \\&= \frac{a}{1 - r}.\end{aligned}$$

Portanto, se $|r| < 1$, então a série geométrica é convergente e:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a \cdot r^{n-1} = \frac{a}{1 - r}.$$

CASO II: $|r| \geq 1$

Note que, se $|r| \geq 1$, então $r \geq 1$ ou $r \leq -1$. Assim sendo, temos:

1. Se $r = 1$, então $S_n = a + a_1 + a_1^2 + \cdots + a_1^{n-1} = na$. Claramente,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty,$$

o que mostra que a série geométrica é divergente.

2. Se $r = -1$, então $S_n = a + a(-1) + a(-1)^2 + \cdots + a(-1)^{n-1}$. Claramente,

$$S_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ é par} \\ a & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

o que mostra que a série geométrica é divergente, pois converge para dois limites.

3. Se $|r| > 1$, então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} ar^{n-1} = \infty,$$

o que mostra que a série geométrica é divergente.



Observação. Em resumo, temos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a \cdot r^{n-1} : \begin{cases} \text{convergente para } \frac{a}{1-r} & \text{se } |r| < 1 \\ \text{divergente} & \text{se } |r| \geq 1. \end{cases}$$

Aplique seus conhecimentos



Atividades
Texto Básico

Teste. Estude a série $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

Solução.

A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ descreve a soma da herança que seu Pedro dividiu. Como vimos, a série do seu Pedro é uma série geométrica de razão $r = \frac{1}{2}$ e $a = 1$.
Sendo $|r| < 1$, temos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$$



Atividades
Texto Básico

Teste. O número $0,79797979\ldots$ é irracional?

Solução.

Note que o número $0,79797979\ldots$ pode ser reescrito da seguinte forma:

$$0,79797979\ldots = \frac{79}{100} + \frac{79}{10000} + \frac{79}{1000000} + \cdots + \frac{79}{100^n} + \cdots$$

O lado direito da igualdade acima é uma série geométrica, com $a = \frac{79}{100}$ e razão $r = \frac{1}{100}$. Assim sendo, temos

$$0,79797979\ldots = \frac{\frac{79}{100}}{1 - \frac{1}{100}}$$

$$= \frac{\frac{79}{100}}{\frac{99}{100}}$$

$$= \frac{79}{99},$$

o que mostra que o número $0,797979\ldots$ não é um número irracional, mas sim um número racional.

Séries de termos positivos



Observação. Dizemos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é um **série de termos positivos** se $a_n > 0$ para todo n .



Pare e Pense. Professor, se na série todos os termos são positivos e estamos sempre somando, existe a possibilidade de esta série ser convergente?

O pensamento está correto, até um certo ponto. É verdade que estamos somando indefinidamente fatores positivos, e o sentimento natural é de que este número está também crescendo indefinidamente. Sendo assim, a única forma de a série ser convergente é quando existe um limitante superior para esta soma. O próximo resultado diz exatamente isso.



Observação. Uma série infinita de termos positivos é convergente se, e somente se, sua sequência de somas parciais tiver um limitante superior.

Verificar a existência de um limitante superior para as somas parciais de uma série não é uma tarefa simples. Neste sentido, existem alguns critérios que podemos utilizar para analisar a convergência de uma série. Neste texto, vamos estudar o Teste da Comparação e o Teste da Integral.



TESTE DA COMPARAÇÃO

Sejam $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ séries de termos positivos.

1. Se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ for uma série convergente e $a_n \leq b_n$, para todo n inteiro positivo, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ também é convergente.
2. Se $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ for uma série divergente e $c_n \leq a_n$, para todo n inteiro positivo, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ também é divergente.

Na prática é melhor utilizar o teste da comparação no limite.



TESTE DA COMPARAÇÃO NO LIMITE

Sejam $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ duas séries de termos positivos.

1. Se $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c > 0$, nada podemos dizer sobre a convergência das séries.
2. Se $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é convergente, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ também será convergente.
3. Se $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é divergente, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ também será divergente.



TESTE DA INTEGRAL

Seja f uma função contínua, decrescente e com valores positivos para todo $x \geq 1$.

1. Se a integral imprópria $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ é convergente, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ também será convergente.

2. Se a integral imprópria $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ é divergente, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ também será divergente.

Aplique seus conhecimentos



Atividades
Texto Básico

Teste. Determine se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$ é convergente.

Solução.

Podemos comparar a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$ com a série geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$, de razão $r = \frac{1}{2}$ e $a = 1$.

Assim sendo, temos que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}}.$$

Vamos aplicar o teste da comparação no limite, ou seja, calcular o limite;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n2^n}}{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Logo, pelo teste da comparação no limite, como a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ é convergente e o limite é igual a zero, concluímos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$ é convergente.

Teste. Determine se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$ é convergente.

Solução.

Considere

$$f(x) = \frac{1}{2x+1}.$$

Vamos verificar se f satisfaz as hipóteses do teste da integral. Note que f é contínua para todo $x \in \mathbb{R} - \{-\frac{1}{2}\}$ e, portanto, é contínua para todo $x \geq 1$. O que verifica a primeira hipótese do teste da integral. Nosso objetivo agora, mostrar que f é decrescente, para todo $x \geq 1$. Esta análise será feita com auxílio da derivada da função f . Note que:

$$f'(x) = -\frac{2}{(2x+1)^2}.$$

Como a derivada é negativa para todo $x \in \mathbb{R} - \{-\frac{1}{2}\}$, podemos afirmar que f é decrescente para todo $x \geq 1$. Assim, verificamos a segunda hipótese do teste da integral.

Para finalizar, perceba que a função f também não assume valores negativos para todo $x \geq 1$. Calculando a integral, temos:

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{1}{2x+1} dx &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{1}{2x+1} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} (F(t) - F(1)), \text{ onde } F(x) = \frac{1}{2} \ln(2x+1) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \ln(2t+1) - \left(\frac{1}{2} \ln(2+1) \right) \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \ln(2t+1) - \frac{1}{2} \ln(3) \right) \\ &= \infty. \end{aligned}$$

Como a integral é divergente, segue pelo teste da integral que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$ também é divergente.

Critério de convergência de séries alternadas

Na seção anterior estudamos séries formadas apenas por fatores positivos. Nesta seção, estudaremos séries com fatores tanto positivos, bem como negativos.

Observação. Considere $a_n > 0$ para todo natural n . Uma série alternada é toda soma do tipo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \cdots + (-1)^n a_n + \cdots$$

TESTE DA SÉRIE ALTERNADA

Seja $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ uma série alternada, satisfazendo $a_n > 0$ e $a_{n+1} < a_n$, para todo natural n . Se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, a série alternada é convergente.

Aplique seus conhecimentos



Atividades
Texto Básico

Teste. Determine se a série alternada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3}{n^2 + 1}$ é convergente ou divergente.

Solução.

Seja $a_n = \frac{3}{n^2 + 1}$. Para aplicarmos o teste da série alternada, devemos verificar primeiramente que $a_n > 0$. Esta informação é clara a partir da expressão de a_n . Resta provarmos que $a_{n+1} < a_n$, equivalentemente, e verificarmos que $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$.

De fato:

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\frac{3}{(n+1)^2+1}}{\frac{3}{n^2+1}} \\ &= \frac{n^2+1}{(n+1)^2+1}.\end{aligned}$$

Sendo

$$\begin{aligned}n^2 &< (n+1)^2 \\ \Downarrow \\ n^2+1 &< (n+1)^2+1 \\ \Downarrow \\ \frac{n^2+1}{(n+1)^2+1} &< 1.\end{aligned}$$

Combinando as informações, temos que:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1.$$

Sendo $a_n > 0$ e $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, podemos aplicar o teste da série alternada. Assim,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n^2+1} = 0.$$

Logo, o teste nos diz que a série alternada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3}{n^2+1}$ é convergente.

Séries absolutamente convergentes

Caro aluno, até este ponto já estudamos séries de termos positivos, e séries de termos positivos e negativos. Resta-nos, então, analisarmos o comportamento de uma série se considerarmos o módulo de cada termo da soma infinita.



1. Dizemos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente se a série $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ for convergente.
2. Toda série absolutamente convergente é convergente.
3. Uma série que é convergente, porém não é absolutamente convergente, é denominada condicionalmente convergente.



TESTE DA RAZÃO

Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série infinita de termos não nulos.

1. Se $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$, nada podemos dizer sobre a convergência da série.
2. Se $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L < 1$ a série dada é absolutamente convergente.
3. Se $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L > 1$ ou $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \infty$ a série dada é divergente.

Aplique seus conhecimentos



Atividades
Texto Básico

Teste. Estude a série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{3^n}$

Solução.

Para fazer este estudo, vamos aplicar o teste da razão. Observe que:

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \left| \frac{(-1)^{n+1} \frac{(n+1)^2}{3^{n+1}}}{(-1)^n \frac{n^2}{3^n}} \right| \\ &= \left| \frac{(-1)^{n+1} \cdot (n+1)^2 \cdot 3^n}{(-1)^n \cdot 3^{n+1} \cdot n^2} \right| \\ &= \left| \frac{(-1) \cdot (-1)^n \cdot (n+1)^2 \cdot 3^n}{(-1)^n \cdot 3 \cdot 3^n \cdot n^2} \right| \\ \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \left| \frac{(-1) \cdot \cancel{(-1)^n} \cdot (n+1)^2 \cdot \cancel{3^n}}{\cancel{(-1)^n} \cdot 3 \cdot \cancel{3^n} \cdot n^2} \right| \\ &= \left| \frac{(-1) \cdot (n+1)^2}{3 \cdot n^2} \right| \\ &= \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{n+1}{n} \right)^2 \\ &= \frac{1}{3} \cdot \left(1 + \frac{1}{n} \right)^2. \end{aligned}$$

Assim,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \cdot \left(1 + \frac{1}{n} \right)^2 = \frac{1}{3}.$$

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1}{3}$ segue pelo teste da razão que a série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{3^n}$ é convergente.

Prova dos testes

TESTE DA COMPARAÇÃO

PARTE I

Seja S_n a sequência que representa as somas parciais da série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Se $0 \leq a_n \leq b_n$, para todo n , então

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k \leq \sum_{k=1}^n b_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

Como $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é convergente e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é uma série de termos positivos, temos que a sequência S_n é crescente e limitada superiormente.

Agora, como toda sequência monótona e limitada é convergente, temos que S_n é uma sequência convergente.

Portanto, segue por definição que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente.

PARTE II

Suponha por contradição que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ seja convergente. Considerando T_n a sequência que representa as somas parciais da série $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, então temos que $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \infty$, isto é, T_n é uma sequência ilimitada.

Considerando S_n a sequência que representa as somas parciais da série $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ e utilizando, o fato de que $c_n \leq a_n$ obtemos:

$$T_n = \sum_{k=1}^n c_k \leq \sum_{k=1}^n a_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

O que é uma contradição, pelo fato de T_n ser uma sequência ilimitada. A contradição surgiu ao afirmarmos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ era convergente.

TESTE DA COMPARAÇÃO NO LIMITE

PARTE I

Se o limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, então podemos encontrar números positivos M e N , tais que

$$\frac{a_n}{b_n} < M$$

para todo $n \geq N$.

Sendo assim, temos que:

$$a_n < M \cdot b_n$$

para todo $n \geq N$.

Agora, aplicando o teste da comparação, temos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente, visto que a série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é convergente.

PARTE II

Se o limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$, então podemos encontrar números positivos ϵ e N , tais que

$$\frac{a_n}{b_n} > \epsilon$$

para todo $n \geq N$.

Sendo assim, temos que:

$$a_n > \epsilon \cdot b_n$$

para todo $n \geq N$.

Agora, aplicando o teste da comparação, temos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente, visto que a série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é divergente.

TESTE DA INTEGRAL

Como a função f é decrescente, temos que:

$$\int_n^{n+1} f(x) dx \leq f(n) \leq \int_{n-1}^n f(x) dx.$$

Aplicando, a desigualdade anterior para $n = 2, 3, 4, \dots, n$, segue que:

$$\int_n^{n+1} f(x) dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \leq f(1) + \int_1^n f(x) dx$$

Sendo assim, concluímos da desigualdade anterior que se o limite da integral for finito então a soma parcial será limitada. Por outro lado, se o limite da integral for ilimitado, então a soma parcial também será ilimitada.

TESTE DA SÉRIE ALTERNADA

Seja S_n a sequência que representa as somas parciais da série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Como os termos da sequência a_n são não negativos e decrescentes, obtemos:

$$a_1 - a_2 = S_2 \leq S_4 \leq S_6 \leq \dots \leq S_5 \leq S_3 \leq S_1 = a_1.$$

Essas subsequências formam duas sequências monótonas e limitadas, cujo limites existem, a saber:

$$\{S_{2n}\} \text{ e } \{S_{2n-1}\}.$$

Agora, como

$$S_{2n} - S_{2n-1} = -a_{2n} \text{ e } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

concluímos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

existe.

TESTE DA RAZÃO

Basta repetir os mesmos argumentos utilizados na prova do teste da comparação no limite.

Teste seus conhecimentos

SÉRIES INFINITAS

1. Determine os cinco primeiros termos da sequência de somas parciais $\{S_n\}$ e obtenha uma fórmula para S_n em termos de n . Para cada série, estude a convergência. Se a série for convergente, calcule sua soma.

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}; \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right); \quad c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{5^{n-1}}.$$

2. Determine a série que produz a sequência de somas parciais dada e discuta a convergência.

$$a) \left\{ \frac{2n}{3n+1} \right\}; \quad b) \left\{ \frac{1}{3^n} \right\}; \quad d) \{\ln(2n+1)\}.$$

SÉRIES DE TERMOS POSITIVOS

3. Discuta a convergência da série.

TESTE DA COMPARAÇÃO

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{2n^2+5}; \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2(n)}{3^n}; \quad c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+4n}}; \quad d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+2)!}.$$

TESTE DA INTEGRAL

$$e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2-4}; \quad f) \sum_{n=1}^{\infty} e^{-5n}; \quad g) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n}; \quad h) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctg(n)}{n^2+1};$$

CRITÉRIO DE CONVERGÊNCIA DE SÉRIES ALTERNADAS

4. Discuta a convergência da série.

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln(n)}; \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{n^3+2}; \quad c) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n^2}; \quad d) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n}{n^2}.$$

SÉRIES ABSOLUTAMENTE CONVERGENTE

5. Verifique se a série é absolutamente convergente, condicionalmente convergente ou divergente.

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^n; \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^n}{n!}; \quad c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}; \quad d) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{2^{n+1}}.$$

Respostas dos testes

EXERCÍCIO 1

$$a) S_n \frac{n}{2n+1} \text{ e } \frac{1}{2}; \quad b) S_n = -\ln(n+1) \text{ e divergente}; \quad c) S_n = \frac{5}{2} \left(1 - \frac{1}{5^n}\right) \text{ e } \frac{5}{2}.$$

EXERCÍCIO 2

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(3n-2)(3n-1)} \text{ e } \frac{2}{3}; \quad b) \frac{1}{3} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n} \text{ e } 0; \quad c) \sum_{n=2}^{\infty} \ln \left(\frac{2n+1}{2n-1} \right) \text{ e divergente}.$$

EXERCÍCIO 3

a) divergente; b) convergente; c) divergente d) convergente;

e) convergente; f) convergente; g) divergente h) convergente.

EXERCÍCIO 4

a) convergente; b) convergente; c) convergente d) divergente.

EXERCÍCIO 5

a) Absolutamente convergente; b) Absolutamente convergente;

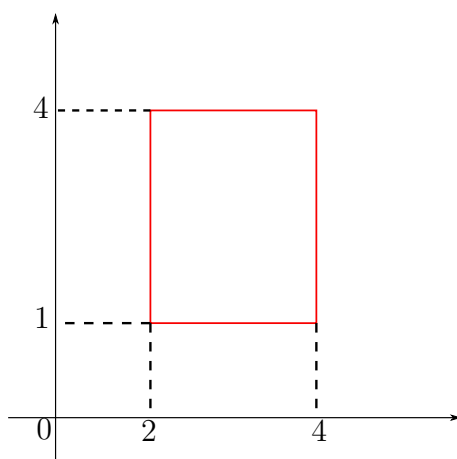
c) Absolutamente convergente d) divergente.

Módulo 3

A Integral Definida

Introdução

Considere a figura.



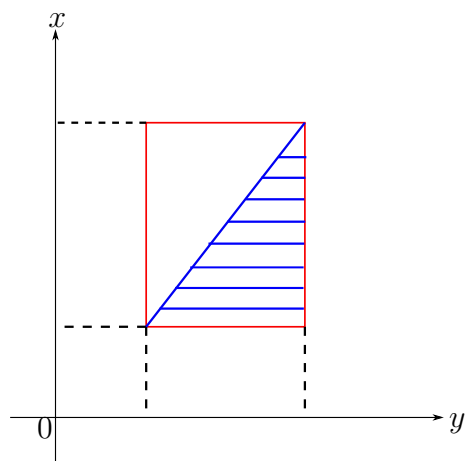
Calcular a área do retângulo desenhado é muito simples, basta determinarmos a base (denotada por b) e a altura (denotada por h) do retângulo e efetuar o cálculo:

$$\begin{aligned} A &= b \times h \\ &= 2 \times 3 \\ &= 6 \text{ unidades de medida.} \end{aligned}$$



Pergunta. Professor, o que você pretende com uma propriedade tão simples como essa?

Através desse conceito simples, é possível calcular a área de várias figuras planas. Por exemplo, para calcularmos a área de um triângulo, necessitamos das suas dimensões. Porém, a princípio não temos estas informações. O que sabemos é que tal triângulo está contido no retângulo, como mostra a figura.

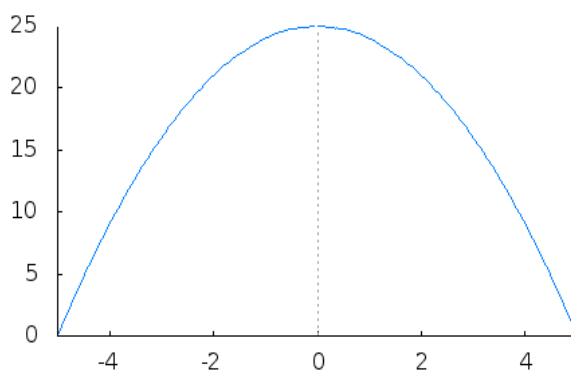


Dessa forma, temos que a área do triângulo será:

$$\begin{aligned}
 A_{\text{Área triângulo}} &= \frac{A_{\text{Área Retângulo}}}{2} \\
 &= \frac{6}{2} \\
 &= 3 \text{ unidades de medida.}
 \end{aligned}$$

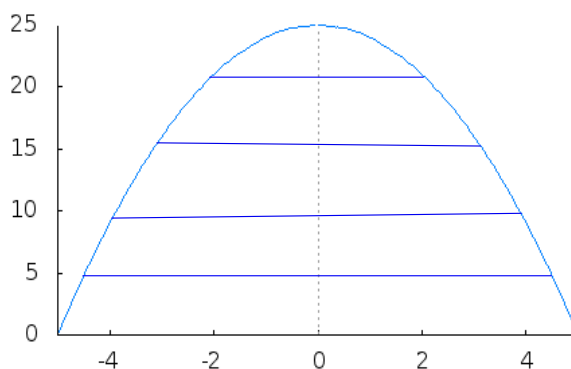
Somas de Riemann

Considere a função $f(x) = -x^2 + 25$. O gráfico de f no intervalo $[-5, 5]$ está representado na figura.

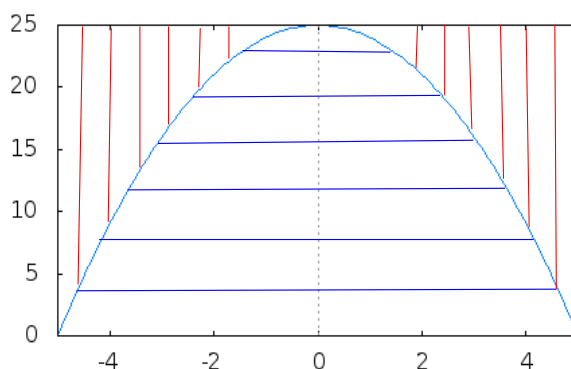


Pare e Pense. Podemos aproximar a área entre o gráfico da função f e o eixo x por retângulos?

Primeiramente, a área procurada é:



Note que podemos aproximar a área procurada por um único retângulo. Claramente, esta aproximação está longe de retratar a área procurada, pois estamos contabilizando uma parcela da área do retângulo que não nos interessa (região em vermelho).

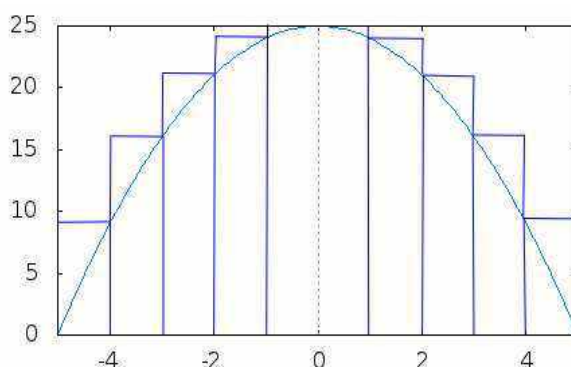


Assim, considerando A_c a área delimitada pela curva, temos

$$A_c < A_{\text{Área do retângulo}} = 10 \times 25 = 250 \text{ u.m.}$$

À medida que aumentamos a quantidade de retângulos, estamos ficando mais próximos da área real procurada. Estrategicamente, vamos escolher os retângulos cuja base sejam os intervalos:

$$[-5, -4], [-4, -3], [-3, -2], [-2, -1], [-1, 0], [0, 1], [1, 2], [2, 3], [3, 4], [4, 5].$$



Ao somarmos todas as áreas dos retângulos, estaremos mais próximos do valor que representa a área procurada, isto é,

$$\begin{aligned} A_c &< |-4 - (-5)| \cdot f(-4) + |-3 - (-4)| \cdot f(-3) + |-2 - (-3)| \cdot f(-2) + |-1 - (-2)| \cdot f(-1) \\ &+ |0 - (-1)| \cdot f(0) + |1 - 0| \cdot f(0) + |2 - 1| \cdot f(1) + |3 - 2| \cdot f(2) + |4 - 3| \cdot f(3) + |5 - 4| \cdot f(4) \\ &= 1 \cdot 9 + 1 \cdot 16 + 1 \cdot 21 + 1 \cdot 24 + 1 \cdot 25 + 1 \cdot 25 + 1 \cdot 24 + 1 \cdot 21 + 1 \cdot 16 + 1 \cdot 9 \\ &= 2 \cdot 9 + 2 \cdot 16 + 2 \cdot 21 + 2 \cdot 24 + 2 \cdot 25 \\ &= 190 \text{ u.m.}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$A_c < 190 < A_{\text{Área do retângulo}}.$$

Fica evidente que, ao aproximarmos a área entre o gráfico de f e o eixo x pelos retângulos de bases sobre os intervalos $[-5, -4], [-4, -3], [-3, -2], [-2, -1], [-1, 0], [0, 1], [1, 2], [2, 3], [3, 4], [4, 5]$, estamos dividindo o intervalo $[-5, 5]$ em dez intervalos todos de tamanho 1, cujos extremos são:

$$x_0 = -5, x_1 = -4, x_2 = -3, x_3 = -2, x_4 = -1, x_5 = 0, x_6 = 1, x_7 = 2, x_8 = 3, x_9 = 4, x_{10} = 5.$$

Observação. O conjunto de pontos $\mathcal{P} = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ é chamado de **Partição** do intervalo $[-5, 5]$ e o divide nos seguintes subintervalos $[-5, -4], [-4, -3], [-3, -2], [-2, -1], [-1, 0], [0, 1], [1, 2], [2, 3], [3, 4], [4, 5]$. De um modo geral, uma **Partição** $\mathcal{P}$ do intervalo $[a, b]$ é um conjunto finito

$$\mathcal{P} = \{a = x_0, x_1, \dots, x_j, \dots, x_k = b\},$$

onde

$$x_0 < x_1 < \dots < x_{j-1} < x_j < \dots < x_k$$

e divide $[a, b]$ nos intervalos

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{j-1}, x_j], \dots, [x_{k-1}, x_k].$$

Observe que, “quanto menor for a base dos retângulos” mais próximos estaremos da área procurada. A expressão em destaque sugere que façamos a base de cada retângulo ficar suficientemente pequeno (estamos falando de limite) para, assim, obtermos uma boa aproximação para a área procurada.

A área que a função f forma com o eixo das abscissas compreende o intervalo $[-5, 5]$, cujo tamanho é $\Delta x = 10$. Porém, dividindo este intervalo em k pedaços, todos de tamanho $\frac{10}{k}$, temos os seguintes extremos:

$$x_0 = -5;$$

$$x_1 = -5 + \frac{10 \cdot 1}{k};$$

$$x_2 = -5 + \frac{10}{k} + \frac{10}{k} = -5 + \frac{20}{k} = -5 + \frac{10 \cdot 2}{k};$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$x_j = -5 + \frac{10j}{k}$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$x_k = -5 + \frac{10k}{k} = -5 + 10 = 5.$$

Neste caso, para cada intervalo construído, sempre teremos:

$$\Delta x = |x_j - x_{j-1}| = \frac{10}{k}.$$

Assim sendo, temos que a soma de todos os retângulos é dada por:

$$\begin{aligned}
 R_k &= f(x_1) \cdot |x_1 - x_0| + f(x_2) \cdot |x_2 - x_1| + \cdots + f(x_k) \cdot |x_k - x_{k-1}| \\
 &= \sum_{j=1}^k f(x_j) \cdot |x_j - x_{j-1}| \\
 &= \sum_{j=1}^k f(x_j) \cdot \frac{10}{k} \quad \Delta x = |x_j - x_{j-1}| = \frac{10}{k} \\
 &= \sum_{j=1}^k f\left(-5 + \frac{10j}{k}\right) \cdot \frac{10}{k},
 \end{aligned}$$

ou seja,

$$R_k = \sum_{j=1}^k f\left(-5 + \frac{10j}{k}\right) \cdot \frac{10}{k}. \quad (3.1)$$

Agora, como

$$\begin{aligned}
 f\left(-5 + \frac{10j}{k}\right) &= -\left(-5 + \frac{10j}{k}\right)^2 + 25 \quad \text{Definição da função } f \\
 &= -\left(25 - \frac{100j}{k} + \frac{100j^2}{k^2}\right) + 25 \quad \text{Desenvolvemos o quadrado} \\
 &= -25 + \frac{100j}{k} - \frac{100j^2}{k^2} + 25 \quad \text{Regra de sinal} \\
 &= \cancel{-25} + \frac{100j}{k} - \frac{100j^2}{k^2} + \cancel{25} \\
 &= \frac{100j}{k} - \frac{100j^2}{k^2},
 \end{aligned}$$

temos que:

$$f\left(-5 + \frac{10j}{k}\right) = \frac{100j}{k} - \frac{100j^2}{k^2}. \quad (3.2)$$

Combinando as igualdades (3.1) e (3.2), obtemos:

$$\begin{aligned}
 R_k &= \sum_{j=1}^k \left(\frac{100j}{k} - \frac{100j^2}{k^2} \right) \cdot \frac{10}{k} \\
 &= \sum_{j=1}^k \left(\frac{1000j}{k^2} - \frac{1000j^2}{k^3} \right) \\
 &= \frac{1000}{k^2} \cdot \sum_{j=1}^k j - \frac{1000}{k^3} \cdot \sum_{j=1}^k j^2,
 \end{aligned}$$

ou seja,

$$R_k = \frac{1000}{k^2} \cdot \sum_{j=1}^k j - \frac{1000}{k^3} \cdot \sum_{j=1}^k j^2$$

Sendo,

$$\sum_{j=1}^k j = \frac{k(k+1)}{2} \text{ e } \sum_{j=1}^k j^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6},$$

segue que

$$\begin{aligned}
 R_k &= \frac{1000}{k^2} \cdot \frac{k(k+1)}{2} - \frac{1000}{k^3} \cdot \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} \\
 &= \frac{1000}{k^2} \cdot \frac{k(k+1)}{2} - \frac{1000}{k^3} \cdot \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} \\
 &= 500 \cdot \frac{(k+1)}{k} - \frac{500}{3} \cdot \frac{(k+1)(2k+1)}{k^2} \\
 &= 500 \cdot \frac{(k+1)}{k} - \frac{500}{3} \cdot \frac{2k^2 + 3k + 1}{k^2}.
 \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 A_c &= \lim_{k \rightarrow \infty} R_k \\
 &= 500 \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{k+1}{k} \right) - \frac{500}{3} \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{2k^2 + 3k + 1}{k^2} \right) \\
 &= 500 \cdot 1 - \frac{500}{3} \cdot 2 \\
 &= \frac{500}{3},
 \end{aligned}$$

visto que

$$\begin{aligned}\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{k+1}{k} \right) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{k}{k} + \frac{1}{k} \right) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{k} \right) \\ &= 1\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{2k^2 + 3k + 1}{k^2} \right) &= \lim_{k \rightarrow \infty} k^2 \cdot \left(\frac{2 + \frac{3}{k} + \frac{1}{k^2}}{k^2} \right) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \cancel{k^2} \cdot \left(\frac{2 + \frac{3}{k} + \frac{1}{k^2}}{\cancel{k^2}} \right) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{3}{k} + \frac{1}{k^2} \right) \\ &= 2.\end{aligned}$$

Portanto, concluímos que a área procurada é

$$A_c = \frac{500}{3} \text{ u.m.}$$



Pare e Pense. Professor, inicialmente fizemos uma aproximação da área entre o gráfico da função f e o eixo das abscissas, através de retângulos que ultrapassavam a área desejada (aproximação por excesso). Poderíamos ter feito o mesmo estudo através de uma aproximação por falta?

Claramente esta aproximação poderia ser feita. Bastaria ter considerado nos cálculos que acabamos de fazer, retângulos cuja altura fosse a imagem do ponto inicial de cada intervalo estudado.



Pergunta. Se podemos utilizar o ponto inicial e final dos intervalos da partição, para determinarmos as somas por falta e excesso, então qual devo escolher?

Utilizando a unicidade do limite, não importa se estamos utilizando o ponto final ou inicial de um intervalo da partição. Na verdade, na prática por simplicidade, podemos utilizar o ponto médio m_j de cada intervalo $[x_{j-1}, x_j]$ da partição. Mais precisamente, sendo A a área sob o gráfico de uma função f , temos:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k f(x_{j-1}) \Delta x = A = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k f(x_j) \Delta x$$

$$\parallel$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k f(m_j) \Delta x$$

onde $\Delta x = x_j - x_{j-1}$.



Observação. Sejam f uma função positiva definida em um intervalo $[a, b]$,

$$\mathcal{P} = \{a = x_0, x_1, \dots, x_j, \dots, x_k = b\},$$

uma partição do intervalo $[a, b]$, nos intervalos

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{j-1}, x_j], \dots, [x_{k-1}, x_k],$$

$\Delta x = \frac{b-a}{k}$ e considere m_j o ponto médio de cada intervalo $[x_{j-1}, x_j]$. A soma

$$\sum_{j=1}^k f(m_j) \Delta x = f(m_1)[x_1 - x_0] + \dots + f(m_k)[x_k - x_{k-1}]$$

é chamada de **Soma de Riemann da função f relativa à partição $\mathcal{P}$** .

A integral definida

Na seção anterior, vimos que, ao calcular a área compreendida entre o gráfico da função $f(x) = -x^2 + 5$ e o eixo das abscissas, nos deparamos com o limite,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k f(m_j) \Delta x,$$

ao tentarmos aproximar a área da função f , tanto por retângulos superiores, bem como por retângulos inferiores ao traço de f . Este limite, quando existe, é chamado de **integral definida de f** e tem papel de destaque entre as ferramentas utilizadas dentro do cálculo diferencial e integral.



Observação. Seja f uma função definida no intervalo $[a, b]$. A **integral definida de f** , denotada por $\int_a^b f(x) dx$, é definida, quando o limite existir, por:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k f(m_j) \Delta x,$$

sendo m_j o ponto médio dos intervalos $[x_{j-1}, x_j]$ que compõem a partição $\mathcal{P} = \{a = x_0, x_1, \dots, x_j, \dots, x_k = b\}$ de $[a, b]$.

Quando $\int_a^b f(x) dx$ existe, dizemos que **f é integrável em $[a, b]$** .

O intervalo $[a, b]$ é chamado de **intervalo de integração** e os extremos de $[a, b]$ são denominados **extremos de integração**.

A integral de f independe de x , isto é,

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(s) ds = \int_a^b f(u) du = \int_a^b f(v) dv.$$

A integral $\int_a^b f(x) dx$ representa a área compreendida entre o gráfico de f e o eixo das abscissas.

No que segue, vamos considerar que f e g são funções integráveis no intervalo $[a, b]$, que c é uma constante que não depende da variável x e que p é um ponto pertencente ao intervalo $[a, b]$, isto é, $a \leq p \leq b$. Como $\int_a^b f(x) dx$ é definida como sendo um limite, podemos concluir as seguintes propriedades:



Observação. $\int_a^a f(x) dx = 0$.

Prova.

$$\begin{aligned}\int_a^a f(x) dx &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k f(m_j) \Delta x \\&= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k \left[f(m_j) \cdot \left(\frac{a-a}{k} \right) \right] \quad \Delta x = \frac{b-a}{k} \text{ e } b=a \\&= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k [f(m_j) \cdot 0] \\&= 0 \cdot \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k f(m_j) \right) \\&= 0.\end{aligned}$$



Observação. $\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$.

Prova.

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) dx &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k f(m_j) \Delta x \\&= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k \left[f(m_j) \cdot \left(\frac{b-a}{k} \right) \right] \quad \Delta x = \frac{b-a}{k} \\&= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k \left[f(m_j) \cdot \left(\frac{(-1)(a-b)}{k} \right) \right] \quad \text{Colocamos } (-1) \text{ em evidência} \\&= (-1) \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k \left[f(m_j) \cdot \left(\frac{a-b}{k} \right) \right] \right) \\&= (-1) \int_b^a f(x) dx \quad \text{Definição de integral definida.}\end{aligned}$$



Observação. $\int_a^b c dx = c \cdot (b-a).$

Prova.

Sendo f uma função constante não há a necessidade de dividirmos o intervalo $[a, b]$ em k parcelas para termos uma boa aproximação do gráfico da função, pois a melhor aproximação será o retângulo de altura c . Assim sendo, temos que $\Delta x = b - a$ e a integral $\int_a^b c dx$ será a área do retângulo de base $b - a$ e altura c , ou seja,

$$\int_a^b c dx = c \cdot (b-a).$$



Observação. $\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$

Prova.

$$\begin{aligned}
 \int_a^b (f(x) + g(x)) dx &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k (f(m_j) + g(m_j)) \Delta x \\
 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k (f(m_j) \Delta x + g(m_j) \Delta x) \quad \text{Distribuímos o produto} \\
 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k f(m_j) \Delta x + \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k g(m_j) \Delta x \quad \text{Limite da soma é a soma dos limites} \\
 &= \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \quad \text{Definição de integral definida}
 \end{aligned}$$



Observação. $\int_a^b (c \cdot f(x)) dx = c \cdot \int_a^b f(x) dx.$

Prova.

$$\begin{aligned}
 \int_a^b (c \cdot f(x)) dx &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k (c \cdot f(m_j)) \Delta x \quad \text{Definição de integral definida} \\
 &= c \cdot \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k f(m_j) \Delta x \right) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} c \cdot f(x) = c \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} f(x) \\
 &= c \cdot \int_a^b f(x) dx \quad \text{Definição de integral definida}
 \end{aligned}$$



Observação. $\int_a^b f(x) dx = \int_a^p f(x) dx + \int_p^b f(x) dx.$

Prova.

$$\begin{aligned}
 \int_a^b f(x) dx &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k \left[f(m_j) \cdot \left(\frac{b-a}{k} \right) \right] && \text{Definição de integral definida} \\
 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k \left[f(m_j) \cdot \left(\frac{b-p+p-a}{k} \right) \right] && \text{Somamos e subtraímos } p \\
 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k \left[f(m_j) \cdot \left(\frac{b-p}{k} + \frac{p-a}{k} \right) \right] && \text{Separamos a soma} \\
 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k \left(f(m_j) \cdot \frac{b-p}{k} + f(m_j) \cdot \frac{p-a}{k} \right) && \text{Distribuímos o produto} \\
 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k f(m_j) \cdot \left(\frac{b-p}{k} \right) + \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k f(m_j) \cdot \left(\frac{p-a}{k} \right) && \text{Limite da soma é a soma dos limites} \\
 &= \int_a^p f(x) dx + \int_p^b f(x) dx && \text{Definição de integral definida}
 \end{aligned}$$



Observação. $\int_a^b f(x) dx \geq 0$, sempre que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$.

Prova.

Note que:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k f(m_j) \cdot \Delta x \quad \text{Definição de integral definida}$$

Agora, como $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$, temos que $f(m_j) \geq 0$, visto que $m_j \in [a, b]$. Por outro lado, sabemos que $\Delta x = \frac{b-a}{k} > 0$. Assim,

$$\sum_{j=1}^k f(m_j) \cdot \Delta x \geq 0,$$

o que mostra que

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k f(m_j) \cdot \Delta x \geq 0.$$



Observação. $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$, sempre que $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$.

Prova.

Note que:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k f(m_j) \cdot \Delta x \quad \text{Definição de integral definida}$$

$$\int_a^b g(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k g(m_j) \cdot \Delta x \quad \text{Definição de integral definida.}$$

Agora, como $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$, temos que $f(m_j) \geq g(m_j)$, visto que $m_j \in [a, b]$. Assim,

$$\sum_{j=1}^k f(m_j) \cdot \Delta x \geq \sum_{j=1}^k g(m_j) \cdot \Delta x,$$

o que mostra que

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k f(m_j) \cdot \Delta x \geq \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k g(m_j) \cdot \Delta x = \int_a^b g(x) dx$$



Observação. $m \cdot (b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M \cdot (b - a)$, sempre que $m \leq f(x) \leq M$ para todo $x \in [a, b]$.

Prova.

Note que, pela propriedade anterior temos:

$$m \leq f(x) \Rightarrow \int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx$$

$$f(x) \leq M \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx$$

Estamos utilizando a propriedade: $\int_a^b dx = c \cdot (b - a)$, $c \in \mathbb{R}$

Agora, como

$$\int_a^b m dx = m(b - a) \text{ e } \int_a^b M dx = M(b - a)$$

concluimos a prova.

O Teorema Fundamental do Cálculo

Vimos na seção anterior, que não é uma tarefa fácil determinarmos a integral de uma função f , utilizando o limite das somas de Riemann.

O Teorema Fundamental do Cálculo nos mostra como simplificar estes cálculos através de uma primitiva F da função f .

Sempre vamos utilizar a notação **T.F.C.**, para nos referir ao Teorema Fundamental do Cálculo. Então, vamos ao enunciado desta ferramenta poderosa.



Observação. Seja f uma função contínua e considere F uma primitiva da função f , isto é, $F'(x) = f(x)$. Então,

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$



Observação. Note que, em vez de termos que calcular o terrível limite das somas de Riemann, basta determinarmos uma primitiva da aplicação f , e aplicarmos esta primitiva nos extremos de integração. Vejamos como este teorema é utilizado na prática.

Prova (Teorema Fundamental do Cálculo).

O ponto principal da prova do T.F.C, é mostrar que a função

$$G(x) = \int_a^x f(t) dt$$

é uma primitiva da função f no intervalo $[a, b]$.

Inicialmente, vamos assumir que esta afirmação é verdadeira e provarmos o T.F.C. Depois, voltamos e provamos tal resultado.

Se $F(x)$ é uma primitiva da função f , temos que:

$$F(x) = G(x) + c. \quad \text{Este resultado foi provado no início do Módulo I}$$

Assim sendo, temos que:

$$\begin{aligned}F(b) - F(a) &= G(b) + c - (G(a) + c) \\&= G(b) + c - G(a) - c \\&= G(b) + \cancel{c} - G(a) - \cancel{c} \\&= G(b) - G(a) \\&= G(b) \quad G(a) = 0, \text{ visto que } G(a) = \int_a^a f(t) dt = 0 \\&= \int_a^b f(t) dt \quad G(b) = \int_a^b f(t) dt,\end{aligned}$$

ou seja,

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t) dt$$

o que mostra o T.F.C.

Agora, precisamos mostrar que a função

$$G(x) = \int_a^x f(t) dt$$

é uma primitiva da função f , no intervalo $[a, b]$.

Para este fim, necessitamos provar que:

$$G'(x) = f(x), \text{ ou seja } \frac{d}{dx} \left(\int_a^x f(t) dt \right) = f(x).$$

Utilizando a definição de derivada, temos:

$$\begin{aligned}
 G'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{G(x+h) - G(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_a^{x+h} f(t) dt + \int_x^a f(t) dt}{h} \quad \int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_x^{x+h} f(t) dt}{h} \quad \int_a^b f(x) dx = \int_a^p f(x) dx + \int_p^b f(x) dx,
 \end{aligned}$$

ou seja,

$$G'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_x^{x+h} f(t) dt}{h}. \quad (3.3)$$

Agora, como f é contínua em $[x, x+h]$. Sendo $[x, x+h]$ um intervalo fechado, segue pelo Teorema dos Valores Extremos, que existem pontos $p, P \in [x, x+h]$, tais que:

$$f(p) \leq f(x) \leq f(P).$$

Assim, temos que:

$$\begin{aligned}
 f(p) \cdot h &\leq \int_x^{x+h} f(t) dt \leq f(P) \cdot h \\
 &\Downarrow \\
 f(p) &\leq \frac{\int_x^{x+h} f(t) dt}{h} \leq f(P) \quad \text{Dividimos a desigualdade por } h. \\
 &\Downarrow \\
 \lim_{h \rightarrow 0} f(p) &\leq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_x^{x+h} f(t) dt}{h} \leq \lim_{h \rightarrow 0} f(P) \\
 &\Downarrow \\
 f(x) &\leq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_x^{x+h} f(t) dt}{h} \leq f(x)
 \end{aligned}$$

Quando $h \rightarrow 0 \Rightarrow (p \rightarrow x \text{ e } P \rightarrow x)$. Além disso, $\lim_{h \rightarrow 0} f(p) = \lim_{p \rightarrow x} f(p) = f(x)$ e $\lim_{h \rightarrow 0} f(P) = \lim_{P \rightarrow x} f(P) = f(x)$.

$\Downarrow$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_x^{x+h} f(t) dt}{h} = f(x). \quad (3.4)$$

Estamos aplicando o Teorema do Confronto.

Combinando as informações (3.3) e (3.4), obtemos:

$$G'(x) = f(x),$$

o que conclui a prova do Teorema Fundamental do Cálculo.

No curso de Cálculo I, foi visto o T.V.M (Teorema do Valor Médio). O T.V.M, tem o seguinte enunciado:

Seja f uma função definida em um intervalo fechado $[a, b]$ e diferenciável no intervalo aberto (a, b) . Então, existe um ponto $p \in (a, b)$ tal que:

$$f'(p) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Para integrais, temos um resultado semelhante, o chamado Teorema do Valor Médio para integrais, cujo enunciado é descrito a seguir:

TEOREMA DO VALOR MÉDIO PARA INTEGRAIS

Seja f contínua em $[a, b]$. Então, existe pelo menos um ponto p no intervalo (a, b) , satisfazendo:

$$\int_a^b f(x) dx = (b - a) \cdot f(p).$$

Prova.

Vamos utilizar a função auxiliar: $g(x) = \int_a^x f(t) dt$. Observe que g é uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e derivável no intervalo aberto (a, b) . Aplicando o T.V.M, temos que existe um ponto $p \in (a, b)$ tal que:

$$g'(p) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a}$$

$\Downarrow$

$$f(p) = \frac{\int_a^b f(t) dt}{b - a}$$

$$g'(p) = f(p), g(b) = \int_a^b f(t) dt \text{ e } g(a) = \int_a^a f(t) dt = 0$$

⇓

$$\int_a^b f(x) dx = (b - a) \cdot f(p),$$

o que conclui a prova do Teorema do Valor Médio para Integrais.

Aplique seus conhecimentos



Atividades
Texto Básico

Teste. Calcule a integral $\int_{-5}^5 (-x^2 + 25) dx$.

Solução.

A integral da função $f(x) = -x^2 + 25$ foi calculada anteriormente utilizando as somas de Riemann. Vamos agora resolvê-la, utilizando T.F.C.

Note que, uma primitiva da função f é dada por:

$$\begin{aligned}\int (-x^2 + 25) dx &= \int (-x^2) dx + \int 25 dx && \int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx \\&= -\int x^2 dx + 25 \cdot \int dx && \int c \cdot f(x) dx = c \cdot \int f(x) dx \\&= -\left(\frac{x^{2+1}}{2+1}\right) + 25 \cdot x + c \\&= -\frac{x^3}{3} + 25 \cdot x + c,\end{aligned}$$

isto é, uma primitiva da função f é

$$F(x) = -\frac{x^3}{3} + 25 \cdot x.$$

Observe que foi descartada a constante c , pois o Teorema Fundamental do Cálculo diz que devemos utilizar uma primitiva da função f então, por comodidade, consideramos a mais simples.

Dessa forma, aplicando o T.F.C, obtemos:

$$\begin{aligned}
 \int_{-5}^5 (-x^2 + 25) dx &= F(5) - F(-5) \\
 &= \left(-\frac{5^3}{3} + 25 \cdot 5 \right) - \left(\frac{-(-5)^3}{3} + 25 \cdot (-5) \right) \\
 &= -\frac{125}{3} + 125 - \left(\frac{125}{3} - 125 \right) \\
 &= -\frac{125}{3} + 125 - \frac{125}{3} + 125 \\
 &= -\frac{250}{3} + 250 \\
 &= \frac{500}{3}.
 \end{aligned}$$



Atividades
Texto Básico

Teste. Calcule a integral $\int_0^3 (2 \cdot \text{sen}(x) - e^x) dx$.

Solução.

Note que uma primitiva da função $f(x) = 2 \cdot \text{sen}(x) - e^x$ é dada por:

$$\begin{aligned}
 \int (2 \cdot \text{sen}(x) - e^x) dx &= \int 2 \cdot \text{sen}(x) dx + \int (-e^x) dx \quad \int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx \\
 &= 2 \int \text{sen}(x) dx - \int e^x dx \quad \int c \cdot f(x) dx = c \cdot \int f(x) dx \\
 &= -2\cos(x) - e^x + c,
 \end{aligned}$$

isto é, uma primitiva da função f é

$$F(x) = -2\cos(x) - e^x.$$

Observe que foi descartada a constante c , pois o Teorema Fundamental do Cálculo diz que

devemos utilizar uma primitiva da função f então, por comodidade, consideramos a mais simples.

Dessa forma, aplicando o T.F.C, obtemos:

$$\begin{aligned}\int_0^3 (2 \cdot \operatorname{sen}(x) - e^x) dx &= F(3) - F(0) \\&= -2\cos(3) - e^3 - (-2\cos(0) - e^0) \\&= -2\cos(3) - e^3 - (-2 \cdot 1 - 1) \quad \cos(0) = 1 \text{ e } e^0 = 1 \\&= -2\cos(3) - e^3 + 3.\end{aligned}$$

Logo,

$$\int (2 \cdot \operatorname{sen}(x) - e^x) dx = -2\cos(3) - e^3 + 3.$$



Observação. Vale a pena ressaltar que toda integral indefinida tem como resultado final uma função. Por outro lado, toda integral definida tem como resultado final um número (está relacionado à área).



Atividades
Texto Básico

Teste. Calcule a integral $\int_{-1}^1 x^{100} dx$.

Solução.

Note que uma primitiva da função $f(x) = x^{100}$ é dada por:

$$\begin{aligned}\int x^{100} dx &= \frac{x^{100+1}}{100+1} + c \\&= \frac{x^{101}}{101} + c,\end{aligned}$$

isto é, uma primitiva da função f é

$$F(x) = \frac{x^{101}}{101}.$$

Observe que foi descartada a constante c , pois o Teorema Fundamental do Cálculo diz que devemos utilizar uma primitiva da função f então, por comodidade, consideramos a mais simples.

Dessa forma, aplicando o T.F.C, obtemos:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 x^{100} dx &= F(1) - F(-1) \\&= \frac{1^{101}}{101} - \left(\frac{(-1)^{101}}{101} \right) \\&= \frac{1}{101} - \left(\frac{-1}{101} \right) \\ \int_{-1}^1 x^{100} dx &= \frac{1}{101} + \left(\frac{1}{101} \right) \\&= \frac{2}{101}.\end{aligned}$$

Logo,

$$\int_{-1}^1 x^{100} dx = \frac{2}{101}.$$



Atividades
Texto Básico

Teste. Seja f a função definida por $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x & \text{se } 1 < x \leq 2. \end{cases}$

Calcule a integral

$$\int_0^2 f(x) dx.$$

Solução.

Primeiramente, note que

$$\begin{aligned}\int_0^2 f(x) dx &= \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx \\&= \int_0^1 x dx + \int_1^2 (2 - x) dx,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 x dx + \int_1^2 (2 - x) dx.$$

Como no intervalo $[0, 1]$, a função f assume a expressão $f(x) = x$, uma primitiva é dada por:

$$\int x \, dx = \frac{x^2}{2} + c,$$

isto é, uma primitiva da função f é

$$F(x) = \frac{x^2}{2}.$$

Dessa forma, aplicando o T.F.C, obtemos:

$$\begin{aligned} \int_0^1 x \, dx &= F(1) - F(0) \\ &= \frac{1^2}{2} - \left(\frac{(0)^2}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} - 0 \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Logo,

$$\int_0^1 x \, dx = \frac{1}{2}.$$

Por outro lado, como no intervalo $[1, 2]$ a função f assume a expressão $f(x) = 2 - x$, uma primitiva é dada por:

$$\begin{aligned} \int (2 - x) \, dx &= \int 2 \, dx - \int x \, dx \\ &= 2x - \frac{x^2}{2} + c, \end{aligned}$$

isto é, uma primitiva da função f é

$$F(x) = 2x - \frac{x^2}{2}.$$

Assim, uma primitiva para a função f no intervalo $[0, 2]$, é dada por

$$F(x) = 2x - \frac{x^2}{2}.$$

Observe que foi descartada a constante c , pois o Teorema Fundamental do Cálculo diz que devemos utilizar uma primitiva da função f então, por comodidade, consideramos a mais simples.

Dessa forma, aplicando o T.F.C, obtemos:

$$\begin{aligned}\int_1^2 (2-x) dx &= F(2) - F(1) \\&= 2 \cdot 2 - \frac{2^2}{2} - \left(2 \cdot 1 - \frac{1^2}{2} \right) \\&= 4 - 2 - 2 + \frac{1}{2} \\&= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Portanto, concluímos que

$$\int_0^2 f(x) dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

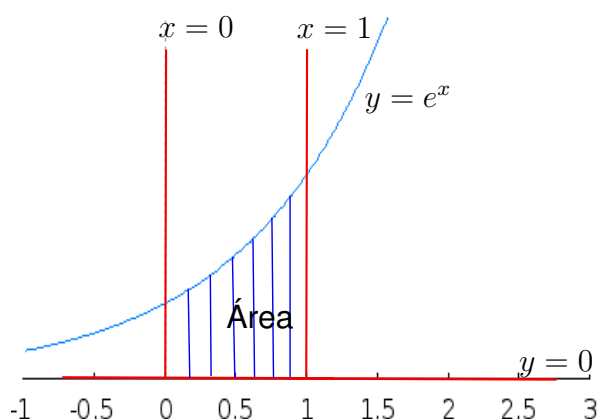
Cálculo de áreas

Utilizando o Teorema Fundamental do Cálculo, podemos simplificar o cálculo das mais diversas figuras planas.



Pergunta. Professor, é possível calcularmos a área da região do plano limitado pelas curvas:
 $y = e^x$, $x = 0$, $x = 1$ e $y = 0$?

Claramente, podemos calcular a área mencionada utilizando o T.F.C. Apenas por curiosidade a área a ser calculada está representada na figura.



Note que as retas $x = 0$ e $x = 1$ determinam o intervalo $[0, 1]$. Claramente, sob o intervalo $[0, 1]$, temos que o gráfico de $y = e^x$ é positivo, isto é, $y = e^x \geq 0$. Dessa forma, a área procurada, corresponde à área sob o gráfico de $y = e^x$ sob o intervalo $[0, 1]$. A área procurada é obtida através da integral definida:

$$\text{Área} = \int_0^1 e^x dx.$$

O T.F.C nos diz que, para resolver a integral acima, basta determinarmos uma primitiva da função $y = e^x$, que será denotada por $F(x)$ e efetuar o cálculo

$$\int_0^1 e^x dx = F(1) - F(0).$$

Utilizando a tabela de integrais imediatas, temos que uma primitiva para a função exponencial é:

$$F(x) = \int e^x dx = e^x + c.$$

Logo,

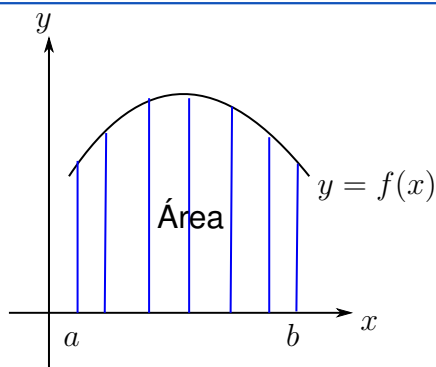
$$\begin{aligned}\text{Área} &= \int_0^1 e^x dx \\ &= F(1) - F(0) \\ &= e^1 - e^0 \\ &= e - 1.\end{aligned}$$

Portanto, considerando $e \equiv 2,7$, concluímos que:

$$\text{Área} = 2,7 - 1 = 1,7.$$



Observação. Seja f uma função positiva em um intervalo $[a, b]$, isto é, $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$. A área da região formada pelo gráfico da função f e as retas $x = a$ e $x = b$, representada na figura



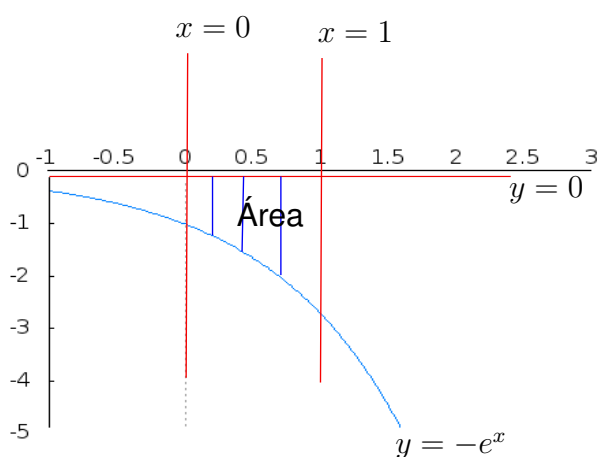
é dada por:

$$\text{Área} = \int_a^b f(x) dx.$$



Pare e Pense. Professor, como vamos calcular a área se a função f for negativa no intervalo estudado?

Por exemplo, se no cálculo da área anterior trocássemos a função $f(x) = e^x$ pela função $g(x) = -e^x$, as retas $x = 0$ e $x = 1$ continuariam determinando o intervalo $[0, 1]$.



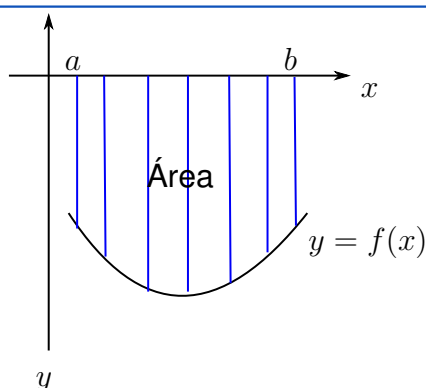
Claramente, neste novo contexto, sob o intervalo $[0, 1]$, o gráfico de $y = -e^x$ seria negativo, isto é, $y = -e^x \leq 0$. A área procurada agora passa a ser a área acima do gráfico de $y = -e^x$ e abaixo do intervalo $[0, 1]$, sendo obtida através da integral definida:

$$\begin{aligned}\text{Área} &= \left| \int_0^1 -e^x dx \right| \\ &= |-(e - 1)| \\ &= e - 1 \equiv 1,7,\end{aligned}$$

onde as barras paralelas representam o módulo de um número real.



Observação. Seja f uma função negativa em um intervalo $[a, b]$, isto é, $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a, b]$. A área da região formada pelo gráfico da função f e as retas $x = a$ e $x = b$, representada na figura



é dada por:

$$\text{Área} = \left| \int_a^b f(x) dx \right|.$$



Pare e Pense. Professor, o que ocorre se a área procurada estiver entre duas funções?

Por exemplo, considere as funções:

$$f(x) = 5 - x^2 \text{ e } g(x) = x + 3.$$

Nosso objetivo é encontrar a área delimitada pelas duas funções. Para este fim, primeiramente precisamos saber se tal área existe. Note que, se as duas curvas se cruzarem, então a área existe. Para verificar a existência de pontos de intersecção das duas funções devemos realizar os cálculos:

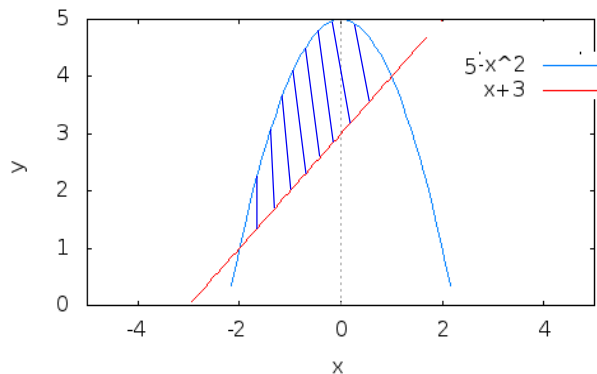
$$5 - x^2 = x + 3$$

$$\Downarrow$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$x = -2 \text{ e } x = 1.$$



Observe que, $f(x) \geq g(x)$. Assim, a área a ser calculada é formada pelas retas $x = -2$, $x = 1$ e pelos gráficos das funções f e g . Dessa forma, temos que a área pode ser obtida através da integral definida:

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_{-2}^1 (f(x) - g(x)) \, dx \\ &= \int_{-2}^1 (5 - x^2 - (x + 3)) \, dx \\ &= \int_{-2}^1 (-x^2 - x + 2) \, dx. \end{aligned}$$

O T.F.C nos diz que, para resolver a integral acima, basta determinarmos uma primitiva da função $y = -x^2 - x + 2$, que será denotada por $F(x)$, e efetuar o cálculo

$$\int_{-2}^1 (-x^2 - x + 2) \, dx = F(1) - F(-2).$$

Utilizando as propriedades das integrais, temos que uma primitiva para a função $y = -x^2 - x + 2$ é:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int (-x^2 - x + 2) \, dx \\ &= -\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x + c. \end{aligned}$$

Logo,

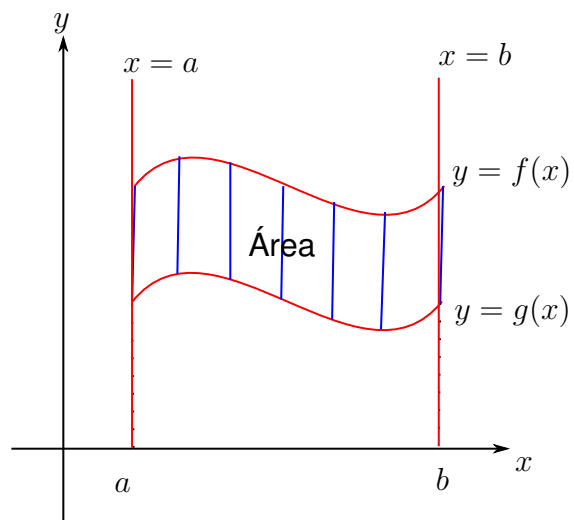
$$\begin{aligned}\text{Área} &= \int_{-2}^1 (-x^2 - x + 2) dx \\&= F(1) - F(-2) \\&= -\frac{1^3}{3} - \frac{1^2}{2} + 2 \cdot 1 - \left(-\frac{(-2)^3}{3} - \frac{(-2)^2}{2} + 2 \cdot (-2) \right) \\&= -\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 - \left(\frac{8}{3} - 2 - 4 \right) \\&= -\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 - \frac{8}{3} + 6 \\&= -\frac{9}{3} - \frac{1}{2} + 8 \\&= \frac{27}{6} = \frac{9}{2}\end{aligned}$$

Portanto, concluímos que:

$$\text{Área} = \frac{9}{2}.$$



Observação. Sejam f e g funções contínuas em um intervalo $[a, b]$, satisfazendo $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$. A área da região formada entre os gráficos das funções f e g e as retas $x = a$ e $x = b$, representada na figura



é dada por:

$$\text{Área} = \int_a^b (f(x) - g(x)) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx - \int_a^b g(x) \, dx.$$

Teste seus conhecimentos

SOMAS DE RIEMANN

1. Considere as funções.

$$a) f(x) = x^2 - 1, [0, 2]; \quad b) f(x) = -x^2, [0, 1];$$

$$c) f(x) = \sin(x) [-\pi, \pi]; \quad d) f(x) = \sin(x) + 1 [-\pi, \pi];$$

Para cada função acima:

(a) Esboce seu respectivo gráfico.

(b) Divida o intervalo em quatro subintervalos de comprimento igual.

(c) Calcule $\sum_{k=1}^4 f(p_k) \Delta x$, considerando p_k o extremo esquerdo, o ponto médio e o extremo direito.

2. Considere as funções.

$$a) f(x) = 1 - x^2, [0, 1]; \quad b) f(x) = x^2 + 1, [0, 3];$$

$$c) f(x) = x + x^2, [0, 1]; \quad d) f(x) = 2x^3 [0, 1].$$

Para cada função acima:

(a) Determine a fórmula para a soma de Riemann, dividindo o intervalo em n subintervalos iguais, utilizando o extremo direito.

(b) Calcule o limite das somas quando $n \rightarrow \infty$.

INTEGRAL DEFINIDA: TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO

3. Calcule as derivadas.

$$a) \frac{d}{dx} \left(\int_{-1}^x \sqrt{t+4} dt \right); \quad b) \frac{d}{dy} \left(\int_{-1}^y \frac{2x}{x^2+9} dx \right); \quad c) \frac{d}{d\theta} \left(\int_{-1}^{\theta} \frac{2x}{x^2+9} dx \right).$$

4. Calcule as integrais.

$$a) \int_{-3}^0 (x^2 - 4x + 7) dx; \quad b) \int_4^9 2x\sqrt{x} dx; \quad c) \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen}(x) \cdot \cos(x) dx;$$

$$d) \int_0^{2\pi} |\operatorname{sen}(x)| dx; \quad e) \int_0^4 |(x^2 - 3x + 2)| dx; \quad f) \int_{-2}^0 \frac{x^2}{(x^3 - 2)^2} dx.$$

5. Calcule:

$$a) \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(2x) \cdot \cos(5x) dx; \quad b) \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(5x) \cdot \cos(2x) dx; \quad c) \int_{-\pi}^{\pi} \cos(2x) \cdot \cos(3x) dx.$$

SUGESTÃO

Utilize as fórmulas

$$\operatorname{sen}(mx) \cdot \operatorname{sen}(nx) = \frac{1}{2} [\cos(m-n)x - \cos(m+n)x],$$

$$\operatorname{sen}(mx) \cdot \cos(nx) = \frac{1}{2} [\operatorname{sen}(m-n)x - \operatorname{sen}(m+n)x],$$

$$\cos(mx) \cdot \cos(nx) = \frac{1}{2} [\cos(m+n)x + \cos(m-n)x].$$

6. Sendo f uma função contínua em $[-a, a]$.

a) Defina quando f é uma função par;

b) Verifique que, se f é par, então $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$;

c) Defina quando f é uma função ímpar;

d) Verifique que, se f é ímpar, então $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$.

CÁLCULO DE ÁREAS

7. Determine a área da região limitada pelas curvas.

$$a) x = \frac{1}{2}, x = \sqrt{y}, y = -x + 2; \quad b) y = 1 - x^2, y = -3;$$

$$c) x = y^2, y - x = 2, y = 3; \quad d) y = e^x, x = 0, x = 1, y = 0;$$

$$e) y = \ln(x), y = 0, x = 4; \quad f) y = \sin(x), y = -\sin(x), x \in [0, 2\pi].$$

Respostas dos testes

EXERCÍCIO 2

$$a) \frac{2}{3} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{6n^2} e^{\frac{2}{3}}; \quad b) 12 + \frac{27n+9}{2n^2} e^{12};$$

$$c) \frac{5}{6} + \frac{6n+1}{6n^2} e^{\frac{5}{6}}; \quad d) \frac{1}{2} + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} e^{\frac{1}{2}}.$$

EXERCÍCIO 3

$$a) \sqrt{x+4} \quad ; \quad b) \frac{2y}{y^2+9} \quad ; \quad c) \theta \sin(\theta).$$

EXERCÍCIO 4

$$a) 48; \quad b) \frac{844}{5}; \quad c) 0; \quad d) 4; \quad e) \frac{17}{3}; \quad f) \frac{2}{15}.$$

EXERCÍCIO 5

Em todas as alternativas a integral é igual a zero.

EXERCÍCIO 7

$$a) \frac{1}{3}; \quad b) \frac{32}{3}; \quad c) \frac{115}{6}; \quad d) e - 1; \quad e) 8 \ln(2) - 3; \quad f) 8.$$

Módulo 4

Integrais Impróprias

Integrais Impróprias

Quando começamos a estudar as integrais definidas, nos deparamos com limites de somas de Riemann, que na prática não são nada fáceis de serem calculados. Porém, para nosso alívio, T.F.C nos mostra uma forma direcionada e precisa para se calcular integrais definidas.

Caro aluno, uma simples análise dos resultados que estudamos sobre integrais definidas sempre apresentavam as hipóteses:

1. Seja $[a, b]$ um intervalo fechado (limitado);
2. Seja f uma função contínua em $[a, b]$.



Pare e Pense. Tem sentido falar em integral definida se o intervalo de integração não for limitado?

Quando um ou os dois, extremos do intervalo de integração não é limitado, temos a noção de “área infinita”.

As integrais que apresentam extremos de integração infinitos são chamadas de **Integrais Impróprias**.

As integrais impróprias cujos extremos de integração são infinitos são chamadas: **Integrais Impróprias do TIPO 1**.



Observação. Seja f uma função contínua no intervalo $[a, \infty)$. Então, desde que o limite seja um número real, definimos:

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x) dx.$$

Por outro lado, se f é contínua no intervalo $(-\infty, b]$, desde que o limite seja um número real, definimos:

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^b f(x) dx.$$

Agora, quando os limites associados às integrais $\int_a^\infty f(x) dx$ e $\int_{-\infty}^b f(x) dx$ existem, então as integrais impróprias são ditas **convergentes**. Caso os limites associados não existam, as integrais impróprias são ditas **divergentes**.

Para finalizar, se $\int_{-\infty}^a f(x) dx$ e $\int_a^\infty f(x) dx$ são convergentes, então podemos definir:

$$\int_{-\infty}^\infty f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^\infty f(x) dx.$$

Aplique seus conhecimentos



Atividades
Texto Básico

Teste. Calcule a integral imprópria $\int_3^\infty \frac{1}{(x-2)^{\frac{3}{2}}} dx$.

Solução.

Segue da definição que:

$$\int_3^\infty \frac{1}{(x-2)^{\frac{3}{2}}} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_3^t \frac{1}{(x-2)^{\frac{3}{2}}} dx.$$

Agora, para cada t fixado, temos que resolver a integral:

$$\int_3^t \frac{1}{(x-2)^{\frac{3}{2}}} dx.$$

O T.F.C nos diz que, para resolver a integral acima, basta determinarmos uma primitiva da função $f(x) = \frac{1}{(x-2)^{\frac{3}{2}}}$, que será denotada por $F(x)$, e efetuar o cálculo

$$\int_3^t \frac{1}{(x-2)^{\frac{3}{2}}} dx = F(t) - F(3).$$

Uma primitiva para a função é:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \frac{1}{u^{\frac{3}{2}}} du && \text{Estamos realizando a substituição } u = x - 2 \\ &= \int u^{-\frac{3}{2}} du \\ &= \frac{u^{1-\frac{3}{2}}}{1-\frac{3}{2}} + c && \text{Estamos aplicando a tabela de integrais imediatas} \\ &= \frac{u^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + c \\ &= \frac{-2}{\sqrt{u}} + c \\ &= \frac{-2}{\sqrt{x-2}} + c && \text{Recorde que } u = x - 2. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int_3^t \frac{1}{(x-2)^{\frac{3}{2}}} dx &= F(t) - F(3) \\ &= \frac{-2}{\sqrt{t-2}} - \left(\frac{-2}{\sqrt{3-2}} \right) \\ &= 2 - \frac{2}{\sqrt{t-2}}. \end{aligned}$$

Para finalizar, temos que calcular o limite:

$$\begin{aligned}\int_3^{\infty} \frac{1}{(x-2)^{\frac{3}{2}}} dx &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_3^t \frac{1}{(x-2)^{\frac{3}{2}}} dx \\&= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{2}{\sqrt{t-2}} \right) \\&= \lim_{t \rightarrow \infty} 2 - \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{t-2}} \\&= 2 - 0 = 2.\end{aligned}$$

Portanto, concluímos que a integral imprópria $\int_3^{\infty} \frac{1}{(x-2)^{\frac{3}{2}}} dx$ é convergente.



Teste. Calcule a integral imprópria $\int_{-\infty}^0 2^x dx$.

Solução.

Segue da definição que:

$$\int_{-\infty}^0 2^x dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^0 2^x dx.$$

Agora, para cada t fixado, temos que resolver a integral:

$$\int_t^0 2^x dx.$$

O T.F.C nos diz que, para resolver a integral acima, basta determinarmos uma primitiva da função $f(x) = 2^x$, que será denotada por $F(x)$, e efetuar o cálculo

$$\int_t^0 2^x dx = F(0) - F(t).$$

Utilizando a tabela de integrais imediatas, temos que uma primitiva para a função é:

$$F(x) = \frac{2^x}{\ln(2)} + c.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\int_t^0 2^x dx &= F(0) - F(t) \\&= \frac{2^0}{\ln(2)} - \frac{2^t}{\ln(2)} \\&= \frac{1}{\ln(2)} - \frac{2^t}{\ln(2)}.\end{aligned}$$

Para finalizar, temos que calcular o limite:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^0 2^x dx &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{\ln(2)} - \frac{2^t}{\ln(2)} \right) \\&= \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{1}{\ln(2)} - \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{2^t}{\ln(2)} \\&= \frac{1}{\ln(2)} + 0 = \frac{1}{\ln(2)}.\end{aligned}$$

Portanto, concluímos que a integral imprópria $\int_{-\infty}^0 2^x dx$ é convergente.



Atividades
Texto Básico

Teste. Calcule a integral imprópria $\int_{-\infty}^{\infty} (x^3 - 3x^2) dx$.

Solução.

Segue da definição que:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} (x^3 - 3x^2) dx &= \int_{-\infty}^0 (x^3 - 3x^2) dx + \int_0^{\infty} (x^3 - 3x^2) dx \\&= \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^0 (x^3 - 3x^2) dx + \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t (x^3 - 3x^2) dx.\end{aligned}$$

Agora, para cada t fixado, temos que resolver as integrais:

$$\int_t^0 (x^3 - 3x^2) dx \text{ e } \int_0^t (x^3 - 3x^2) dx.$$

O T.F.C nos diz que, para resolver as integrais acima, basta determinarmos uma primitiva da

função $f(x) = x^3 - 3x^2$, que será denotada por $F(x)$ e efetuar os cálculos

$$\int_t^0 x^3 - 3x^2 dx = F(0) - F(t) \text{ e } \int_0^t x^3 - 3x^2 dx = F(t) - F(0).$$

Utilizando a tabela de integrais imediatas, temos que uma primitiva para a função é:

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{x^4}{4} - 3\frac{x^3}{3} + c \\ &= \frac{x^4}{4} - x^3 + c \\ &= \frac{x^4}{4} - x^3 + c. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int_t^0 x^3 - 3x^2 dx &= F(0) - F(t) \\ &= \frac{0^4}{4} - 0^3 - \left(\frac{t^4}{4} - t^3\right) \\ &= -\frac{t^4}{4} + t^3 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \int_0^t x^3 - 3x^2 dx &= F(t) - F(0) \\ &= \frac{t^4}{4} - t^3 - \left(\frac{0^4}{4} - 0^3\right) \\ &= \frac{t^4}{4} - t^3. \end{aligned}$$

Para finalizar, temos que calcular os limites:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 x^3 - 3x^2 dx &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \left(-\frac{t^4}{4} + t^3\right) \\ &= -\infty. \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} x^3 - 3x^2 dx &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{t^4}{4} - t^3\right) \\ &= \infty. \end{aligned}$$

Portanto, concluímos que a integral imprópria

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x^3 - 3x^2) dx$$

é divergente, pois as integrais

$$\int_{-\infty}^0 (x^3 - 3x^2) dx \text{ e } \int_0^{\infty} (x^3 - 3x^2) dx$$

são divergentes.



Atividades
Texto Básico

Teste. Estude a convergência da integral imprópria $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$, com $p \in \mathbb{R}$.

Solução.

CASO I: $p=1$

Quando $p = 1$, devemos estudar a convergência da integral $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$. Segue da definição que:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{1}{x} dx.$$

Agora, para cada t fixado, temos que resolver a integral:

$$\int_1^t \frac{1}{x} dx.$$

O T.F.C nos diz que, para resolver a integral acima, basta determinarmos uma primitiva da função $f(x) = \frac{1}{x}$, que será denotada por $F(x)$, e efetuar o cálculo

$$\int_1^t \frac{1}{x} dx = F(t) - F(1).$$

Uma primitiva para a função é:

$$F(x) = \ln(|x|).$$

Logo,

$$\begin{aligned}\int_1^t \frac{1}{x} dx &= F(t) - F(1) \\&= \ln(t) - \ln(1) \\&= \ln(t) \quad \text{Uma vez que, } \ln(1) = 0\end{aligned}$$

Para finalizar, temos que calcular o limite:

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{1}{x} dx &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{1}{x} dx \\&= \lim_{t \rightarrow \infty} \ln(t) \\&= \infty.\end{aligned}$$

Portanto, concluímos que se $p = 1$ a integral imprópria $\int_1^\infty \frac{1}{x} dx$ é divergente.

CASO II: $p > 1$

Quando $p > 1$, devemos estudar a convergência da integral

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx = \int_1^\infty x^{-p} dx.$$

Segue da definição que:

$$\int_1^\infty x^{-p} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t x^{-p} dx.$$

Agora, para cada t fixado, temos que resolver a integral:

$$\int_1^t x^{-p} dx.$$

O T.F.C nos diz que, para resolver a integral acima, basta determinarmos uma primitiva da função $f(x) = x^{-p}$, que será denotada por $F(x)$, e efetuar o cálculo

$$\int_1^t x^{-p} dx = F(t) - F(1).$$

Uma primitiva para a função é:

$$F(x) = \frac{x^{1-p}}{1-p}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\int_1^t x^{-p} dx &= F(t) - F(1) \\&= \frac{t^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p} \\&= \frac{1}{1-p} \cdot (t^{1-p} - 1) \\&= \frac{1}{1-p} \cdot \left(\frac{1}{t^{p-1}} - 1 \right)\end{aligned}$$

Para finalizar, temos que calcular o limite:

$$\int_1^\infty x^{-p} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{1-p} \cdot \left(\frac{1}{t^{p-1}} - 1 \right).$$

Note que:

$$p > 1 \Rightarrow p - 1 > 0.$$

Sendo assim,

$$t \rightarrow \infty \Rightarrow t^{p-1} \rightarrow \infty.$$

Para finalizar,

$$t^{p-1} \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{1}{t^{p-1}} \rightarrow 0.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\int_1^\infty x^{-p} dx &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{1-p} \cdot \left(\frac{1}{t^{p-1}} - 1 \right) \right] \\&= \frac{1}{1-p} \left[\lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{t^{p-1}} - 1 \right) \right] \\&= \frac{1}{1-p} \left[\left(\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t^{p-1}} - \lim_{t \rightarrow \infty} 1 \right) \right] \\&= \frac{1}{1-p} (0 - 1) \\&= \frac{1}{p-1}.\end{aligned}$$

Portanto, concluímos que se $p > 1$, então a integral imprópria $\int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx$ converge para o número $\frac{1}{p-1}$.

CASO III: $p < 1$

Analogamente, ao caso anterior, temos que analisar o limite:

$$\int_1^{\infty} x^{-p} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{1-p} \cdot \left(\frac{1}{t^{p-1}} - 1 \right).$$

Note que:

$$p < 1 \Rightarrow p - 1 < 0.$$

Sendo assim,

$$t \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{1}{t^{p-1}} = t^{p-1} \rightarrow \infty.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} x^{-p} dx &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{1-p} \cdot \left(\frac{1}{t^{p-1}} - 1 \right) \right] \\ &= \frac{1}{1-p} \left[\lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{t^{p-1}} - 1 \right) \right] \\ &= \frac{1}{1-p} \left[\left(\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t^{p-1}} - \lim_{t \rightarrow \infty} 1 \right) \right] \\ &= \frac{1}{1-p} (\infty - 1) \\ &= \infty. \end{aligned}$$

Portanto, concluímos que se $p < 1$, então a integral imprópria $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$ é divergente.

Na primeira parte desta seção, estudamos as integrais cujo limites de integração eram infinitos. Para finalizarmos nossos estudos, vamos, agora, analisar as integrais no qual o integrando não é contínuo no intervalo de integração. Claramente, esta descontinuidade pode ocorrer no extremo inferior, no meio ou no extremo superior do intervalo de integração.



Pare e Pense. Professor, se o integrando é descontínuo no intervalo de integração, basta particionar o intervalo nas descontinuidades e depois calcular a integral em cada parte?

Prezado aluno, temos que ter cuidado com esta análise. As integrais que apresentam descontinuidades ou no extremo inferior ou no meio ou no extremo superior de integração são chamadas **Integrais Impróprias do TIPO 2**. Abaixo, temos a definição precisa destas integrais.



Observação. Seja f contínua no intervalo $[a, b)$ e descontínua no extremo b . Então, desde que o limite seja um número real, definimos:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx.$$

Por outro lado, se f é contínua no intervalo $(a, b]$, e descontínua no extremo a , desde que o limite seja um número real, definimos:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x) dx.$$



Observação. Agora, a integral imprópria $\int_a^b f(x) dx$ é dita **convergente** quando o limite associado existir, ou seja, o limite deve ser um número real. Caso o limite não exista, dizemos que a integral imprópria é **divergente**.

Para finalizar, se f é descontínua em um ponto $p \in [a, b]$ e as integrais impróprias $\int_a^p f(x) dx$, $\int_p^b f(x) dx$ são convergentes, então podemos definir:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^p f(x) dx + \int_p^b f(x) dx.$$

Aplique seus conhecimentos



Atividades
Texto Básico

Teste. Calcule a integral imprópria $\int_{15}^{10} \frac{1}{\sqrt{x-10}} dx$.

Solução.

Uma análise inicial da função, $\int_{10}^{15} \frac{1}{\sqrt{x-10}} dx$ detecta que $x = 10$ é um ponto de descontinuidade de f no interior do intervalo de integração $[10, 15]$.

Quando o limite existe, segue da definição que:

$$\int_{10}^{15} \frac{1}{\sqrt{x-10}} dx = \lim_{t \rightarrow 10^+} \int_t^{15} \frac{1}{\sqrt{x-10}} dx.$$

Agora, para cada t fixado, temos que resolver a integral:

$$\int_t^{15} \frac{1}{\sqrt{x-10}} dx.$$

O T.F.C nos diz que, para resolver a integral acima, basta determinarmos uma primitiva da função $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-10}}$, que será denotada por $F(x)$, e efetuar o cálculo

$$\int_t^{15} \frac{1}{\sqrt{x-10}} dx = F(15) - F(t).$$

Uma primitiva para a função f é obtida através dos cálculos:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \frac{1}{\sqrt{x-10}} dx \\ &= 2\sqrt{x-10} + c. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int_t^{15} \frac{1}{\sqrt{x-10}} dx &= F(15) - F(t) \\ &= 2(\sqrt{5} - \sqrt{t-10}). \end{aligned}$$

Para finalizar, temos que calcular o limite:

$$\begin{aligned}\int_{10}^{15} \frac{1}{\sqrt{x-10}} dx &= \lim_{t \rightarrow 10^+} \int_t^{15} \frac{1}{\sqrt{x-10}} dx \\&= \lim_{t \rightarrow 0^-} 2 \left(\sqrt{5} - \sqrt{t-10} \right) \\&= \lim_{t \rightarrow 0^-} 2\sqrt{5} - \lim_{t \rightarrow 0^-} \sqrt{t-10} \\&= 2\sqrt{5} - 0 \\&= 2\sqrt{5}.\end{aligned}$$

Dessa forma, concluímos que a integral imprópria $\int_{10}^{15} \frac{1}{\sqrt{x-10}} dx$ é convergente, visto que:

$$\int_{10}^{15} \frac{1}{\sqrt{x-10}} dx = 2\sqrt{5}.$$



Atividades
Texto Básico

Teste. Calcule a integral imprópria $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sec(x) dx$.

Solução.

Uma análise inicial da função, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sec(x) dx$ detecta que $x = \frac{\pi}{2}$ é um ponto de descontinuidade de f no interior do intervalo de integração $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Quando o limite existe, segue da definição que:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sec(x) dx = \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \int_0^t \sec(x) dx.$$

Agora, para cada t fixado, temos que resolver a integral:

$$\int_0^t \sec(x) dx.$$

O T.F.C nos diz que, para resolver a integral acima, basta determinarmos uma primitiva da

função $f(x) = \sec(x)$, que será denotada por $F(x)$, e efetuar o cálculo

$$\int_0^t \sec(x) dx = F(t) - F(0).$$

Uma primitiva para a função f é obtida através dos cálculos:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \sec(x) dx \\ &= \ln(|\sec(x) + \operatorname{tg}(x)|). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int_0^t \sec(x) dx &= F(t) - F(0) \\ &= \ln(|\sec(t) + \operatorname{tg}(t)|) - \ln(|\sec(0) + \operatorname{tg}(0)|) \\ &= \ln(|\sec(t) + \operatorname{tg}(t)|) - \ln(1) \\ &= \ln(|\sec(t) + \operatorname{tg}(t)|). \end{aligned}$$

Para finalizar, temos que calcular o limite:

$$\begin{aligned} \int_0^t \sec(x) dx &= \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \int_0^t \sec(x) dx \\ &= \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \ln(|\sec(t) + \operatorname{tg}(t)|) \\ &= \infty, \end{aligned}$$

visto que:

$$t \rightarrow \frac{\pi}{2}^- \Rightarrow \begin{cases} \sec(x) \rightarrow \infty \\ \operatorname{tg}(x) \rightarrow \infty \end{cases}$$

Dessa forma, concluímos que a integral imprópria $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sec(x) dx$ é divergente, uma vez que:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sec(x) dx = \infty.$$

Teste. Calcule a integral imprópria $\int_{-2}^3 \frac{1}{x^4} dx$.

Solução.

Uma análise inicial da função, $f(x) = \frac{1}{x^4}$ detecta que $x = 0$ é um ponto de descontinuidade de f no interior do intervalo de integração $[-2, 3]$.

Quando o limite existe, segue da definição que:

$$\int_{-2}^3 \frac{1}{x^4} dx = \int_{-2}^0 \frac{1}{x^4} dx + \int_0^3 \frac{1}{x^4} dx$$

Primeiramente, vamos calcular a integral $\int_{-2}^0 \frac{1}{x^4} dx$. Sendo $\int_{-2}^0 \frac{1}{x^4} dx$ uma integral imprópria do tipo 2, temos que:

$$\int_{-2}^0 \frac{1}{x^4} dx = \lim_{t \rightarrow 0^-} \int_{-2}^t \frac{1}{x^4} dx.$$

Agora, para cada t fixado, temos que resolver a integral:

$$\int_{-2}^t \frac{1}{x^4} dx.$$

O T.F.C nos diz que, para resolver a integral acima, basta determinarmos uma primitiva da função $f(x) = \frac{1}{x^4}$, que será denotada por $F(x)$, e efetuar o cálculo

$$\int_{-2}^t \frac{1}{x^4} dx = F(t) - F(-2).$$

Uma primitiva para a função f é obtida através dos cálculos:

$$F(x) = \int \frac{1}{x^4} dx$$

$$= \int x^{-4} dx$$

$$= -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x^3} + c.$$

Da tabela de integrais imediatas temos $\int \frac{1}{x^4} dx = \frac{x^{-4+1}}{-4+1} + c$

Logo,

$$\begin{aligned}\int_{-2}^t \frac{1}{x^4} dx &= F(t) - F(-2) \\&= -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{t^3} - \left(-\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(-2)^3} \right) \\&= -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{t^3} - \frac{1}{24}.\end{aligned}$$

Para finalizar, temos que calcular o limite:

$$\begin{aligned}\int_{-2}^0 \frac{1}{x^4} dx &= \lim_{t \rightarrow 0^-} \int_{-2}^t \frac{1}{x^4} dx \\&= \lim_{t \rightarrow 0^-} \left(-\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{t^3} - \frac{1}{24} \right) \\&= -\frac{1}{3} \cdot \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{1}{t^3} - \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{1}{24} \\&= -\frac{1}{3} \cdot \infty - \frac{1}{24} \\&= -\infty.\end{aligned}$$

Dessa forma, concluímos que a integral imprópria $\int_{-2}^0 \frac{1}{x^4} dx$ é divergente, visto que

$$\int_{-2}^0 \frac{1}{x^4} dx = -\infty.$$

Agora, como $\int_{-2}^0 \frac{1}{x^4} dx$ é divergente, podemos concluir que a integral $\int_{-2}^3 \frac{1}{x^4} dx$ é divergente, não importando se a integral $\int_0^3 \frac{1}{x^4} dx$ é convergente ou divergente. Apenas por curiosidade, vamos estudar a convergência da integral $\int_0^3 \frac{1}{x^4} dx$. Sendo $\int_0^3 \frac{1}{x^4} dx$ uma integral imprópria do tipo 2, temos que:

$$\int_0^3 \frac{1}{x^4} dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_1^t \frac{1}{x^4} dx.$$

Agora, para cada t fixado, temos que resolver a integral:

$$\int_1^t \frac{1}{x^4} dx.$$

O T.F.C nos diz que, para resolver a integral acima, basta determinarmos uma primitiva da

função $f(x) = \frac{1}{x^4}$, que será denotada por $F(x)$, e efetuar o cálculo

$$\int_0^3 \frac{1}{x^4} dx = F(3) - F(t).$$

Uma primitiva para a função f já foi calculada anteriormente e é dada por:

$$F(x) = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x^3} + c.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int_0^3 \frac{1}{x^4} dx &= F(3) - F(t) \\ &= -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3^3} - \left(-\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{t^3} \right) \\ &= -\frac{1}{81} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{t^3}. \end{aligned}$$

Para finalizar, temos que calcular o limite:

$$\begin{aligned} \int_0^3 \frac{1}{x^4} dx &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^3 \frac{1}{x^4} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(-\frac{1}{24} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{t^3} \right) \\ &= -\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{24} + \frac{1}{3} \cdot \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t^3} \\ &= -\frac{1}{24} + \frac{1}{3} \cdot \infty \\ &= \infty. \end{aligned}$$

Dessa forma, concluímos que a integral imprópria $\int_{-2}^0 \frac{1}{x^4} dx$ é divergente, visto que:

$$\int_{-2}^0 \frac{1}{x^4} dx = \infty.$$

Uma análise inicial da função, $f(x) = \frac{1}{x^4}$ detecta que $x = 0$ é um ponto de descontinuidade de f no interior do intervalo de integração $[-2, 3]$.

Quando o limite existe, segue da definição que:

$$\int_{-2}^3 \frac{1}{x^4} dx = \int_{-2}^0 \frac{1}{x^4} dx + \int_0^3 \frac{1}{x^4} dx$$

Primeiramente, vamos calcular a integral $\int_{-2}^0 \frac{1}{x^4} dx$. Sendo $\int_{-2}^0 \frac{1}{x^4} dx$ uma integral imprópria do tipo 2, temos que:

$$\int_{-2}^0 \frac{1}{x^4} dx = \lim_{t \rightarrow 0^-} \int_{-2}^t \frac{1}{x^4} dx.$$

Agora, para cada t fixado, temos que resolver a integral:

$$\int_{-2}^t \frac{1}{x^4} dx.$$

O T.F.C nos diz que, para resolver a integral acima, basta determinarmos uma primitiva da função $f(x) = \frac{1}{x^4}$, que será denotada por $F(x)$, e efetuar o cálculo

$$\int_{-2}^t \frac{1}{x^4} dx = F(t) - F(-2).$$

Uma primitiva para a função f é obtida através dos cálculos:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \frac{1}{x^4} dx \\ &= \int x^{-4} dx \\ &= -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x^3} + c. \end{aligned}$$

Da tabela de integrais imediatas temos $\int \frac{1}{x^4} dx = \frac{x^{-4+1}}{-4+1} + c$

Logo,

$$\begin{aligned} \int_{-2}^t \frac{1}{x^4} dx &= F(t) - F(-2) \\ &= -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{t^3} - \left(-\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(-2)^3} \right) \\ &= -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{t^3} - \frac{1}{24}. \end{aligned}$$

Para finalizar, temos que calcular o limite:

$$\begin{aligned}\int_{-2}^0 \frac{1}{x^4} dx &= \lim_{t \rightarrow 0^-} \int_{-2}^t \frac{1}{x^4} dx \\&= \lim_{t \rightarrow 0^-} \left(-\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{t^3} - \frac{1}{24} \right) \\&= -\frac{1}{3} \cdot \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{1}{t^3} - \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{1}{24} \\&= -\frac{1}{3} \cdot \infty - \frac{1}{24} \\&= -\infty.\end{aligned}$$

Dessa forma, concluímos que a integral imprópria $\int_{-2}^0 \frac{1}{x^4} dx$ é divergente, visto que

$$\int_{-2}^0 \frac{1}{x^4} dx = -\infty.$$

Agora, como $\int_{-2}^0 \frac{1}{x^4} dx$ é divergente, podemos concluir que a integral $\int_{-2}^3 \frac{1}{x^4} dx$ é divergente, não importando se a integral $\int_0^3 \frac{1}{x^4} dx$ é convergente ou divergente. Apenas por curiosidade, vamos estudar a convergência da integral $\int_0^3 \frac{1}{x^4} dx$. Sendo $\int_0^3 \frac{1}{x^4} dx$ uma integral imprópria do tipo 2, temos que:

$$\int_0^3 \frac{1}{x^4} dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^3 \frac{1}{x^4} dx.$$

Agora, para cada t fixado, temos que resolver a integral:

$$\int_t^3 \frac{1}{x^4} dx.$$

O T.F.C nos diz que, para resolver a integral acima, basta determinarmos uma primitiva da função $f(x) = \frac{1}{x^4}$, que será denotada por $F(x)$, e efetuar o cálculo

$$\int_0^3 \frac{1}{x^4} dx = F(3) - F(t).$$

Uma primitiva para a função f já foi calculada anteriormente e é dada por:

$$F(x) = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x^3} + c.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\int_0^3 \frac{1}{x^4} dx &= F(3) - F(t) \\&= -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3^3} - \left(-\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{t^3}\right) \\&= -\frac{1}{81} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{t^3}.\end{aligned}$$

Para finalizar, temos que calcular o limite:

$$\begin{aligned}\int_0^3 \frac{1}{x^4} dx &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^3 \frac{1}{x^4} dx \\&= \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(-\frac{1}{24} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{t^3}\right) \\&= -\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{24} + \frac{1}{3} \cdot \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t^3} \\&= -\frac{1}{24} + \frac{1}{3} \cdot \infty \\&= \infty.\end{aligned}$$

Dessa forma, concluímos que a integral imprópria $\int_{-2}^0 \frac{1}{x^4} dx$ é divergente, visto que:

$$\int_{-2}^0 \frac{1}{x^4} dx = \infty.$$

Teste seus conhecimentos

INTEGRAIS IMPRÓPRIAS

1. Quais integrais são impróprios? Justifique sua resposta.

$$a) \int_1^2 \frac{x}{x-1} dx; \quad b) \int_0^\infty \frac{1}{x^2+1} dx; \quad c) \int_{-\infty}^\infty x^2 e^{-x^2} dx; \quad d) \int_{-\infty}^{\frac{\pi}{4}} \cot(x) dx;$$

$$e) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}(x) dx; \quad f) \int_0^\pi \operatorname{tg}(x) dx; \quad g) \int_{-1}^1 \frac{1}{x^2-x-2} dx; \quad h) \int_0^\infty e^{-x^2} dx.$$

2. Estude a convergência da integral.

$$a) \int_3^\infty \frac{1}{(x-2)^{\frac{3}{2}}} dx; \quad b) \int_{-\infty}^0 \frac{1}{3-4x} dx; \quad c) \int_2^\infty e^{-5x} dx;$$

$$d) \int_0^\infty \frac{x^2}{\sqrt{1-x^3}} dx; \quad e) \int_{-\infty}^\infty x e^{-x^2} dx; \quad f) \int_0^\infty \sin^2(x) dx$$

$$g) \int_0^1 \frac{3}{x^5} dx; \quad h) \int_{-2}^{14} \frac{1}{\sqrt[4]{x+2}} dx; \quad i) \int_{-2}^3 \frac{1}{x^4} dx;$$

$$j) \int_0^9 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}} dx; \quad k) \int_0^3 \frac{dx}{x^2-6x+5}; \quad l) \int_{-1}^0 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3} dx.$$

Respostas dos testes

EXERCÍCIO 1

- a) Integral imprópria; b) Integral imprópria; c) Integral imprópria
d) Integral imprópria; e) Não é integral imprópria; f) Não é integral imprópria;
g) Integral imprópria h) Integral imprópria.

EXERCÍCIO 2

- a) 2; b) Divergente; c) $\frac{1}{5}e^{-10}$
d) Divergente; e) 0 f) Divergente.

Referências Bibliográficas

- [1] BOULOS, P.: *Introdução ao Cálculo*. Vol 2. Editora Edgard Blucher Ltda, São Paulo, 1974.
- [2] EDWARDS, C. H. PENNEY, D. E.: *Cálculo com Geometria Analítica*. 3 vols. LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora, Rio de Janeiro, 1999.
- [3] GUIDORIZZI, H. L.: *Um curso de cálculo*. Vol. 1. LTC, São Paulo, 1987.
- [4] LEITHOLD, L.: *O Cálculo com Geometria Analítica*. 2 Vol. 3a Edição. Ed. Harbra, São Paulo, 1994.
- [5] MORETTIN, P. A.; BUSSAB, W. O. HAZZAN S.: *Cálculo: funções de uma e de várias variáveis*. Editora Saraiva, São Paulo:, 2003.
- [6] MUNEM, M. A. FOULIS, D. J.: *Cálculo*. 2 vols. LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora, Rio de Janeiro:, 1982.
- [7] SIMMONS, G. F.: *Cálculo com geometria analítica*. 2 vols. São Paulo: Editora Makron Books, 1987.
- [8] SWOKOWSKI, E. W.: *Cálculo com geometria analítica*. 2 vols. 2a. ed. São Paulo: Editora Makron Books., 1994.
- [9] THOMAS, G. B.: *Cálculo*. 2 volumes. Addison Wesley, São Paulo, 2002.