

KAÍQUE CÉSAR MACEDO CHAGAS

**MAPEAMENTO DOS COEFICIENTES DINÂMICOS DE
SELOS PLANOS DE MÁQUINAS ROTATIVAS**



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

2025

KAÍQUE CÉSAR MACEDO CHAGAS

**MAPEAMENTO DOS COEFICIENTES DINÂMICOS DE SELOS
PLANOS DE MÁQUINAS ROTATIVAS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para a obtenção do título de **MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA**.

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Vibrações.

Orientador: Prof. Dr. Aldemir Aparecido Cavallini
Junior

UBERLÂNDIA - MG

2025

Ficha Catalográfica Online do Sistema de Bibliotecas da UFU
com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

C433 2025	Chagas, Kaíque César Macedo. 2000- MAPEAMENTO DOS COEFICIENTES DINÂMICOS DE SELOS PLANOS DE MÁQUINAS ROTATIVAS [recurso eletrônico] / Kaíque César Macedo Chagas. - 2025. Orientador: Aldemir Aparecido Cavallini Junior. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia, Pós-graduação em Engenharia Mecânica. Modo de acesso: Internet. Disponível em: http://doi.org/10.14393/ufu.di.2025.44 Inclui bibliografia. 1. Engenharia mecânica. I. Cavallini Junior, Aldemir Aparecido ,1983-, (Orient.). II. Universidade Federal de Uberlândia. Pós-graduação em Engenharia Mecânica. III. Título. CDU: 621
--------------	--

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de acordo com o AACR2:

Gizele Cristine Nunes do Couto - CRB6/2091
Nelson Marcos Ferreira - CRB6/3074



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Engenharia
Mecânica

Av. João Naves de Ávila, nº 2121, Bloco 1M, Sala 212 - Bairro Santa Mônica, Uberlândia-
MG, CEP 38400-902
Telefone: (34) 3239-4282 - www.posmecanicaufu.com.br - secposmec@mecanica.ufu.br



ATA DE DEFESA - PÓS-GRADUAÇÃO

Programa de Pós-Graduação em:	Engenharia Mecânica				
Defesa de:	Dissertação de Mestrado Acadêmico, nº 655, PPGEM				
Data:	12/02/2025	Hora de início:	8:45	Hora de encerramento:	10:40
Matrícula do Discente:	12312EMC009				
Nome do Discente:	Kaíque César Macedo Chagas				
Título do Trabalho:	Mapeamento dos Coeficientes Dinâmicos de Selos Planos Aplicado em Máquinas Rotativas				
Área de concentração:	Mecânica dos Sólidos e Vibrações				
Linha de pesquisa:	Dinâmica de Sistemas Mecânicos				
Projeto de Pesquisa de vinculação:	Inteligência Artificial Aplicada na Criação de Modelos Representativos de Mancais Hidrodinâmicos, Selos Anulares e Máquinas Rotativas (ROSS - DIGITAL TWIN)				

Reuniu-se por videoconferência a Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, assim composta: Prof. Dr. Valder Steffen Junior - UFU; Prof. Dr. Ilmar Ferreira Santos - DTU e Prof. Dr. Aldemir Aparecido Cavallini Junior - UFU; orientador do candidato.

Iniciando os trabalhos, o presidente da mesa, Dr. Aldemir Aparecido Cavallini Junior, apresentou a Comissão Examinadora e o candidato, agradeceu a presença do público, e concedeu ao Discente a palavra para a exposição do seu trabalho. A duração da apresentação do Discente e o tempo de arguição e resposta foram conforme as normas do Programa.

A seguir, o senhor presidente concedeu a palavra, pela ordem sucessivamente, aos examinadores, que passaram a arguir o candidato. Ultimada a arguição, que se desenvolveu dentro dos termos regimentais, a Banca, em sessão secreta, atribuiu o resultado final, considerando o candidato:

Aprovado.

Esta defesa faz parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre.

O competente diploma será expedido após cumprimento dos demais requisitos, conforme as normas do Programa, a legislação pertinente e a regulamentação interna da UFU.

Nada mais havendo a tratar, foram encerrados os trabalhos. Foi lavrada a presente ata que após lida e achada conforme foi assinada pela Banca Examinadora.



Documento assinado eletronicamente por **Aldemir Aparecido Cavalini Junior, Professor(a) do Magistério Superior**, em 12/02/2025, às 10:39, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Valder Steffen Junior, Professor(a) do Magistério Superior**, em 12/02/2025, às 10:42, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Ilmar Ferreira Santos, Usuário Externo**, em 12/02/2025, às 10:42, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **6031754** e o código CRC **AC279791**.

AGRADECIMENTOS

Agradeço imensamente aos meus pais, Rildo e Maria, que mesmo em outra cidade não medem esforços para me apoiar e me incentivar em todos os âmbitos da minha vida. Sem dúvida, foram de imensurável importância na minha formação acadêmica.

Aos meus amigos e em especial à minha namorada Ana Júlia, por todo apoio. Mesmo que às vezes de forma indireta, a contribuição de vocês foi muito importante.

Ao Prof. Dr. Aldemir Aparecido Cavallini Junior pela confiança no meu trabalho, por me orientar neste trabalho de forma exemplar e estar sempre disposto a ajudar no que fosse preciso.

À todos os colegas do LMest, onde passei grande parte desses dois anos dedicados a esse trabalho. Tenho absoluta certeza de que suas contribuições foram de extrema importância para que tudo isso fosse possível.

À Universidade Federal de Uberlândia e ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, por proporcionar todo o aprendizado adquirido ao longo do curso de Mestrado Acadêmico em Engenharia Mecânica.

Por fim, ao apoio financeiro concedido pela Petróleo Brasileiro S/A (PETROBRAS) e pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES).

MACEDO CHAGAS, K. C. **MAPEAMENTO DOS COEFICIENTES DINÂMICOS DE SELOS PLANOS DE MÁQUINAS ROTATIVAS**. 2025. 104 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2025. DOI: <http://doi.org/10.14393/ufu.di.2025.44>

RESUMO

Os selos mecânicos são elementos amplamente empregados em máquinas rotativas e projetados para prevenir o vazamento de fluidos. O estudo sobre o comportamento de seus coeficientes dinâmicos é indispensável no contexto da Dinâmica de Máquinas Rotativas. Geralmente, selos são incluídos nas equações do movimento de rotores através de coeficientes de rigidez e amortecimento, influenciando diretamente a resposta de vibração e a estabilidade operacional dessas máquinas. Os coeficientes dinâmicos de selos mecânicos com geometria simples, como os selos planos, são determinados por meio de modelos matemáticos/físicos simplificados para o escoamento do fluido lubrificante do selo, conhecidos como *bulk-flow models*. Uma simplificação comumente adotada nesse tipo de modelo é considerar que a posição do centro do eixo é concêntrica ao selo, desconsiderando assim as variações significativas que ocorrem nos valores dos coeficientes dinâmicos calculados para posições excêntricas. Consequentemente, ao relacionar os deslocamentos e velocidades do centro do rotor com coeficientes de rigidez e amortecimento calculados para uma posição concêntrica, os efeitos de tais variações podem não ser representados na resposta de vibração ao desbalanceamento. Nesse sentido, o presente trabalho propõe um *bulk-flow model* para calcular os coeficientes dinâmicos de selos planos utilizando o Método dos Volumes Finitos (MVF) e sem simplificações acerca da posição do centro do rotor, desenvolvido em ambiente *Python* e integrado com a biblioteca de análise rotordinâmica *Rotordynamic Open-Source Software* (ROSS). E, além disso, avaliar o impacto das variações desses coeficientes dinâmicos com a posição do centro do rotor na resposta de vibração ao desbalanceamento de uma bomba de injeção de água através da análise comparativa entre a resposta de vibração ao desbalanceamento determinada considerando coeficientes dinâmicos calculados para uma posição concêntrica ao selo com a resposta de vibração ao desbalanceamento calculada considerando que os coeficientes dinâmicos variam de acordo com a posição do centro do rotor, utilizando para isso o mapeamento dos coeficientes dinâmicos e metamodelagem *Kriging*.

Palavras-chave: Selo Planos, Kriging, Mapeamento, Resposta de Vibração, Volumes Finitos.

MACEDO CHAGAS, K. C. **MAPPING OF THE DYNAMIC COEFFICIENTS OF ROTATING MACHINERY PLAIN SEALS**. 2025. 104 p. Dissertation (Master's Degree in Mechanical Engineering) - Federal University of Uberlândia, Uberlândia, 2025. DOI: <http://doi.org/10.14393/ufu.di.2025.44>

ABSTRACT

Mechanical seals are widely used components in rotating machinery, designed to prevent fluid leakage. The study of their dynamic coefficients is essential in the context of Rotating Machinery Dynamics. Typically, seals are incorporated into the equations of motion of rotors through stiffness and damping coefficients, directly influencing the vibration response and operational stability of these machines. The dynamic coefficients of mechanical seals with simple geometries, such as plain seals, are determined using simplified mathematical/physical models for the seal's lubricant fluid flow, known as bulk-flow models. A common simplification in such models is assuming the shaft center position is concentric with the seal, thereby neglecting significant variations in the dynamic coefficients calculated for eccentric positions. Consequently, when relating the rotor center's displacements and velocities with stiffness and damping coefficients calculated for a concentric position, the effects of these variations may not be accurately represented in the vibration response to unbalance. In this context, the present work proposes a bulk-flow model to calculate the dynamic coefficients of plain seals using the Finite Volume Method (FVM) without simplifications regarding the rotor center's position. The model is developed in a Python environment and integrated with the Rotordynamic Open-Source Software (ROSS) library. Furthermore, this work evaluates the impact of variations in these dynamic coefficients with the rotor center's position on the vibration response to unbalance of a water injection pump. This is achieved through a comparative analysis between the vibration response to unbalance determined using dynamic coefficients calculated for a position concentric with the seal and the vibration response to unbalance obtained considering dynamic coefficients varying with the rotor center's position, using for that the mapping of the dynamic coefficients and Kriging metamodels.

Keywords: Plain Seals, Kriging, Mapping, Vibration Response, Finite Volumes

LISTA DE FIGURAS

1.1	Selos mecânicos com diferentes tipos de superfície.	3
2.1	Representação esquemática de um selo plano.	8
2.2	Arranjo desencontrado utilizado para o tratamento do acoplamento PV.	10
2.3	Malha numérica - Equação da continuidade.	11
2.4	Malha numérica - Equação da conservação da quantidade de movimento na direção axial (Z).	12
2.5	Malha numérica - Equação da conservação da quantidade de movimento na direção circunferencial (θ).	15
2.6	Fluxograma - Solução numérica transiente.	21
2.7	Plano da seção transversal adimensional de um selo plano.	24
3.1	Campo de pressão - Selo plano de água proposto por Dietzen e Nordmann (1987).	28
3.2	Campo de velocidade circunferencial - Selo plano de água proposto por Dietzen e Nordmann (1987).	29
3.3	Campo de velocidade circunferencial - Selo plano de água proposto por Dietzen e Nordmann (1987).	29
3.4	Teste de independência de malha (velocidade axial média) - Selo plano de água proposto por Dietzen e Nordmann (1987).	30
3.5	Teste de independência de malha (velocidade circunferencial média) - Selo plano de água proposto por Dietzen e Nordmann (1987).	31
3.6	Teste de independência de malha (<i>leakage</i>) - Selo plano de água proposto por Dietzen e Nordmann (1987).	31
3.7	Velocidade axial média - Selo plano de água proposto por Dietzen e Nordmann (1987).	32
3.8	Erro da velocidade axial média relativo ao BFM Snyder/Santos - Selo plano de água proposto por Dietzen e Nordmann (1987).	33

3.9	<i>Leakage</i> - Selo plano de água proposto por Dietzen e Nordmann (1987).	33
3.10	Erro do <i>leakage</i> relativo ao BFM Snyder/Santos - Selo plano de água proposto por Dietzen e Nordmann (1987).	34
3.11	K_{xx} - Selo plano de água proposto por Dietzen e Nordmann (1987).	35
3.12	Erro de K_{xx} relativo ao BFM Snyder/Santos - Selo plano de água proposto por Dietzen e Nordmann (1987).	35
3.13	K_{yy} - Selo plano de água proposto por Dietzen e Nordmann (1987).	36
3.14	Erro de K_{yy} relativo ao BFM Snyder/Santos - Selo plano de água proposto por Dietzen e Nordmann (1987).	36
3.15	K_{xy} - Selo plano de água proposto por Dietzen e Nordmann (1987).	37
3.16	Erro de K_{xy} relativo ao BFM Snyder/Santos - Selo plano de água proposto por Dietzen e Nordmann (1987).	37
3.17	K_{yx} - Selo plano de água proposto por Dietzen e Nordmann (1987).	38
3.18	Erro de K_{yx} relativo ao BFM Snyder/Santos - Selo plano de água proposto por Dietzen e Nordmann (1987).	38
3.19	C_{xx} - Selo plano de água proposto por Dietzen e Nordmann (1987).	39
3.20	Erro de C_{xx} relativo ao BFM Snyder/Santos - Selo plano de água proposto por Dietzen e Nordmann (1987).	39
3.21	C_{yy} - Selo plano de água proposto por Dietzen e Nordmann (1987).	40
3.22	Erro de C_{yy} relativo ao BFM Snyder/Santos - Selo plano de água proposto por Dietzen e Nordmann (1987).	40
3.23	C_{xy} - Selo plano de água proposto por Dietzen e Nordmann (1987).	41
3.24	Erro de C_{xy} relativo ao BFM Snyder/Santos - Selo plano de água proposto por Dietzen e Nordmann (1987).	41
3.25	C_{yx} - Selo plano de água proposto por Dietzen e Nordmann (1987).	42
3.26	Erro de C_{yx} relativo ao BFM Snyder/Santos - Selo plano de água proposto por Dietzen e Nordmann (1987).	42
3.27	<i>Leakage</i> - Selo plano de água proposto por Marquette, Childs e Andres (1997).	45
3.28	Erro do <i>Leakage</i> relativo ao BFM Ha/Choe e resultados experimentais - Selo plano de água proposto por Marquette, Childs e Andres (1997).	45
3.29	K_{xx} - Selo plano de água proposto por Marquette, Childs e Andres (1997).	46

3.30	Erro de K_{xx} relativo ao BFM Ha/Choe - Selo plano de água proposto por Marquette, Childs e Andres (1997).	46
3.31	Erro de K_{xx} relativo aos resultados experimentais - Selo plano de água proposto por Marquette, Childs e Andres (1997).	47
3.32	K_{yy} - Selo plano de água proposto por Marquette, Childs e Andres (1997). . . .	47
3.33	Erro de K_{yy} relativo ao BFM Ha/Choe - Selo plano de água proposto por Marquette, Childs e Andres (1997).	48
3.34	Erro de K_{yy} relativo aos resultados experimentais - Selo plano de água proposto por Marquette, Childs e Andres (1997).	48
3.35	K_{xy} - Selo plano de água proposto por Marquette, Childs e Andres (1997). . . .	49
3.36	Erro de K_{xy} relativo ao BFM Ha/Choe - Selo plano de água proposto por Marquette, Childs e Andres (1997).	49
3.37	Erro de K_{xy} relativo aos resultados experimentais - Selo plano de água proposto por Marquette, Childs e Andres (1997).	50
3.38	K_{yx} - Selo plano de água proposto por Marquette, Childs e Andres (1997). . . .	50
3.39	Erro de K_{yx} relativo ao BFM Ha/Choe - Selo plano de água proposto por Marquette, Childs e Andres (1997).	51
3.40	Erro de K_{yx} relativo aos resultados experimentais - Selo plano de água proposto por Marquette, Childs e Andres (1997).	51
3.41	C_{xx} - Selo plano de água proposto por Marquette, Childs e Andres (1997). . . .	52
3.42	Erro de C_{xx} relativo ao BFM Ha/Choe - Selo plano de água proposto por Marquette, Childs e Andres (1997).	52
3.43	Erro de C_{xx} relativo aos resultados experimentais - Selo plano de água proposto por Marquette, Childs e Andres (1997).	53
3.44	C_{yy} - Selo plano de água proposto por Marquette, Childs e Andres (1997). . . .	53
3.45	Erro de C_{yy} relativo ao BFM Ha/Choe - Selo plano de água proposto por Marquette, Childs e Andres (1997).	54
3.46	Erro de C_{yy} relativo aos resultados experimentais - Selo plano de água proposto por Marquette, Childs e Andres (1997).	54
3.47	Mapas do coeficientes diretos de rigidez - Selo plano de água proposto por Dietzen e Nordmann (1987).	57

3.48	Mapas do coeficientes cruzados de rigidez - Selo plano de água proposto por Dietzen e Nordmann (1987).	58
3.49	Mapas do coeficientes diretos de amortecimento - Selo plano de água proposto por Dietzen e Nordmann (1987).	59
3.50	Mapas do coeficientes cruzados de amortecimento - Selo plano de água proposto por Dietzen e Nordmann (1987).	60
3.51	Mapa do <i>leakage</i> (vazamento) - Selo plano de água proposto por Dietzen e Nordmann (1987).	60
3.52	Mapas das componentes da força de sustentação - Selo plano de água proposto por Dietzen e Nordmann (1987).	61
3.53	Mapas do coeficientes diretos de rigidez - Selo plano de água proposto por Marquette, Childs e Andres (1997).	62
3.54	Mapas do coeficientes cruzados de rigidez - Selo plano de água proposto por Marquette, Childs e Andres (1997).	63
3.55	Mapas do coeficientes diretos de amortecimento - Selo plano de água proposto por Marquette, Childs e Andres (1997).	64
3.56	Mapas do coeficientes cruzados de amortecimento - Selo plano de água proposto por Marquette, Childs e Andres (1997).	65
3.57	Mapa do <i>leakage</i> (vazamento) - Selo plano de água proposto por Marquette, Childs e Andres (1997).	65
3.58	Mapas das componentes da força de sustentação - Selo plano de água proposto por Marquette, Childs e Andres (1997).	66
4.1	Modelo da bomba de injeção em elementos finitos (ROSS).	69
4.2	Comparação da resposta de vibração ao desbalanceamento - Coeficientes constantes.	74
4.3	<i>Annular seal center bushing</i> - Mapas dos coeficientes diretos de rigidez.	76
4.4	<i>Annular seal center bushing</i> - Mapas dos coeficientes cruzados de rigidez.	77
4.5	<i>Annular seal center bushing</i> - Mapas dos coeficientes diretos de amortecimento.	78
4.6	<i>Annular seal center bushing</i> - Mapas dos coeficientes cruzados de amortecimento.	79
4.7	<i>Annular seal throttle bushing</i> - Mapas dos coeficientes diretos de rigidez.	80
4.8	<i>Annular seal throttle bushing</i> - Mapas dos coeficientes cruzados de rigidez.	81

4.9	<i>Annular seal throttle bushing</i> - Mapas dos coeficientes diretos de amortecimento.	82
4.10	<i>Annular seal throttle bushing</i> - Mapas dos coeficientes cruzados de amortecimento.	83
4.11	Comparação entre mapeamento e metamodelo <i>Kriging</i> (coeficientes diretos de rigidez) - <i>Annular seal center bushing</i> .	84
4.12	Comparação entre mapeamento e metamodelo <i>Kriging</i> (coeficientes cruzados de rigidez) - <i>Annular seal center bushing</i> .	85
4.13	Comparação entre mapeamento e metamodelo <i>Kriging</i> (coeficientes diretos de amortecimento) - <i>Annular seal center bushing</i> .	86
4.14	Comparação entre mapeamento e metamodelo <i>Kriging</i> (coeficientes cruzados de amortecimento) - <i>Annular seal center bushing</i> .	87
4.15	Comparação entre mapeamento e metamodelo <i>Kriging</i> (coeficientes diretos de rigidez) - <i>Annular seal throttle bushing</i> .	88
4.16	Comparação entre mapeamento e metamodelo <i>Kriging</i> (coeficientes cruzados de rigidez) - <i>Annular seal throttle bushing</i> .	89
4.17	Comparação entre mapeamento e metamodelo <i>Kriging</i> (coeficientes diretos de amortecimento) - <i>Annular seal throttle bushing</i> .	90
4.18	Comparação entre mapeamento e metamodelo <i>Kriging</i> (coeficientes cruzados de amortecimento) - <i>Annular seal throttle bushing</i> .	91
4.19	Comparação da resposta de vibração ao desbalanceamento.	92

LISTA DE TABELAS

3.1	Parâmetros utilizados na simulação - Selo plano de água proposto por Dietzen e Nordmann (1987).	28
3.2	Valores médios dos campos de velocidade.	30
3.3	Parâmetros utilizados na simulação - Selo plano de água proposto por Marquette, Childs e Andres (1997).	44
4.1	Parâmetros geométricos e condição de operação dos mancais da bomba de injeção.	70
4.2	Coefficientes dinâmicos dos mancais da bomba de injeção.	70
4.3	Parâmetros utilizados na simulação - <i>Annular seal center bushing</i> (nó 37). . . .	72
4.4	Parâmetros utilizados na simulação - <i>Annular seal throttle bushing</i> (nó 59). . .	72
4.5	Coefficientes dinâmicos - <i>Annular seal center bushing</i> (nó 37).	73
4.6	Coefficientes dinâmicos - <i>Annular seal throttle bushing</i> (nó 59).	73

LISTA DE SÍMBOLOS

A	Termo da matriz dos coeficientes
$\mathbf{A}$	Matriz dos coeficientes não-lineares
$\bar{\mathbf{A}}$	Matriz dos coeficientes lineares
B	Termo do vetor de termos independentes
$\mathbf{B}$	Vetor de termos independentes não-lineares
$\bar{\mathbf{B}}$	Vetor de termos independentes lineares
C	Centro do volume central - MVF
$\bar{c}$	Folga radial
C_{xx}, C_{yy}	Coefficientes diretos de amortecimento
C_{xy}, C_{yx}	Coefficientes cruzados de amortecimento
δ	Fator de pré-carga no mancal
Δp	Queda de pressão no selo
ΔT	Passo de tempo adimensional
ΔX	Perturbação infinitesimal na direção X
Δx	Perturbação finita na direção x
$\Delta \dot{X}$	Velocidade de perturbação infinitesimal na direção X
$\Delta \dot{x}$	Velocidade de perturbação finita na direção x

ΔY	Perturbação infinitesimal na direção Y
Δy	Perturbação finita na direção y
$\Delta \dot{Y}$	Velocidade de perturbação infinitesimal na direção Y
$\Delta \dot{y}$	Velocidade de perturbação finita na direção y
ΔZ	Comprimento axial adimensional de um volume finito
E	Centro do volume leste - MVF
e	Rugosidade da superfície; Fronteira leste do volume central - MVF
ε	Razão de excentricidade
η	Número de <i>Courant</i>
f	Fator de fricção
F_x	Força de sustentação na direção x
F_y	Força de sustentação na direção y
Γ	Velocidade adimensional de precessão
H	Espessura do filme de fluido lubrificante adimensional
h	Espessura do filme de fluido lubrificante
H_1	Espessura do filme de fluido lubrificante adimensional expandida em Série de <i>Taylor</i>
H_X	Derivada parcial de H em relação a X
H_Y	Derivada parcial de H em relação a Y
i	Posição axial de um volume finito genérico na malha numérica
i	Notação para números complexos

j	Posição circunferencial de um volume finito genérico na malha numérica
K_{xx}, K_{yy}	Coeficientes diretos de rigidez
K_{xy}, K_{yx}	Coeficientes cruzados de rigidez
l	Comprimento do selo
μ	Viscosidade dinâmica do fluido lubrificante
N	Centro do volume norte - MVF
n	Fronteira norte do volume central - MVF
n_ε	Número de pontos do intervalo de razão de excentricidade
n_ϕ	Número de pontos do intervalo de ângulo de atitude
n_θ	Número de volumes finitos na direção circunferencial
NW	Centro do volume noroeste - MVF
nw	Quina superior esquerda do volume central - MVF
n_z	Número de volumes finitos na direção axial
ω	Velocidade de operação do rotor
P	Pressão adimensional
p	Pressão
P'	Campo de pressão adimensional candidato a solução
P_1	Pressão adimensional expandida em Série de <i>Taylor</i>
P_{exit}	Pressão adimensional na saída do selo
p_{exit}	Pressão na saída do selo

ϕ	Ângulo de atitude
P_{inlet}	Pressão adimensional na entrada do selo
p_{inlet}	Pressão na entrada do selo
P_X	Derivada parcial de P em relação a X
P_Y	Derivada parcial de P em relação a Y
R	Raio adimensional do rotor
r	Raio do rotor
$R\Delta\theta$	Comprimento circunferencial adimensional de um volume finito
RES	Vetor de resíduos
ρ	Densidade do fluido lubrificante
rs	Superfície do rotor
S	Centro do volume sul - MVF
s	Fronteira sul do volume central - MVF
SE	Centro do volume sudeste - MVF
se	Quina inferior direita do volume central - MVF
SR	<i>Swirl ratio</i>
ss	Superfície do selo
T	Tempo Adimensional
t	Tempo
τ	Tensão Cisalhante

θ	Coordenada na direção circunferencial
t_{max}	Tempo máximo de simulação
tol	Tolerância para solução do sistema não-linear de equações
tol_2	Tolerância para a solução atingir regime permanente
U	Velocidade adimensional de escoamento do fluido
u	Velocidade de escoamento do fluido
U'	Campo de velocidade adimensional candidato a solução
U_1	Velocidade adimensional de escoamento do fluido expandida em Série de <i>Taylor</i>
U_X	Derivada parcial de U em relação a X
U_Y	Derivada parcial de U em relação a Y
W	Centro do volume oeste - MVF; Carga no mancal
w	Fronteira oeste do volume central - MVF
X	Coordenada adimensional na direção horizontal do plano da seção transversal
x	Coordenada na direção horizontal do plano da seção transversal
X_c	Coordenada adimensional da posição do centro do rotor na direção X
x_c	Coordenada cartesiana da posição do centro do rotor na direção x
$\dot{X}_c$	Velocidade adimensional do centro do rotor na direção X
$\dot{x}_c$	Velocidade do centro do rotor na direção x
ξ_{exit}	Coeficiente de recuperação de pressão na saída
ξ_{inlet}	Coeficiente de perda de carga na entrada

Y	Coordenada adimensional na direção vertical do plano da seção transversal
y	Coordenada na direção vertical do plano da seção transversal
Y_c	Coordenada adimensional da posição do centro do rotor na direção Y
y_c	Coordenada cartesiana da posição do centro do rotor na direção y
$\dot{Y}_c$	Velocidade adimensional do centro do rotor na direção Y
$\dot{y}_c$	Velocidade do centro do rotor na direção y
Z	Coordenada adimensional na direção axial
z	Coordenada na direção axial

Abreviações

BFM	<i>Bulk-flow Model</i>
CFD	<i>Computational Fluids Dynamics</i>
FEMEC	Faculdade de Engenharia Mecânica
MVF	Método dos volumes finitos
LMEst	Laboratório de Mecânica de Estruturas
PETROBRAS	Petróleo Brasileiro S/A
ROSS	<i>Rotordynamics Open-Source Software</i>
UFU	Universidade Federal de Uberlândia

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS	xiii
LISTA DE TABELAS	xiv
LISTA DE SÍMBOLOS	xv
CAPÍTULO I - Introdução	1
1.1 Contextualização	1
1.2 Objetivos da dissertação	4
1.3 Organização da dissertação	5
CAPÍTULO II - <i>Bulk-flow Model</i> de um Selo Plano	6
2.1 Modelo Matemático	6
2.2 Método dos Volumes Finitos	9
2.3 Tratamento das Não-Linearidades e Solução Numérica	18
2.4 Coeficientes Dinâmicos	21
2.4.1 Método da Perturbação Infinitesimal	22
2.4.2 Método da Perturbação Finita	23
2.5 Mapeamento dos Coeficientes Dinâmicos	24
2.6 Implementação Computacional Integrada a uma Biblioteca <i>Python</i> de Análise Rotordinâmica	25
CAPÍTULO III - Validação Numérica	27
3.1 Posição Concêntrica	27
3.2 Posições Excêntricas	43
3.3 Mapas dos Coeficientes Dinâmicos	56
CAPÍTULO IV - Aplicação em Máquinas Rotativas	68

4.1	Metamodelagem <i>Kriging</i>	70
4.2	Resposta de Vibração com os Coeficientes dos Selos Constantes	71
4.3	Resposta de Vibração com os Coeficientes dos Selos Variáveis	75
CAPÍTULO V - Conclusões		94
5.1	Perspectivas Futuras	95
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS		96
APÊNDICE A - Aplicação do MVF para Volumes Laterais, Inferiores, Superiores e de Quina		99

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

1.1 Contextualização

Máquinas rotativas representam uma importante classe de equipamentos de diversos setores da indústria. O estudo de seu comportamento dinâmico é fundamental para garantir um funcionamento adequado e evitar a ocorrência de falhas (MUSZYNSKA, 2005).

O comportamento dinâmico de máquinas rotativas é representado por meio de um modelo matemático obtido a partir da integração de diversos subsistemas. Dentre esses subsistemas, estão os mancais, que podem ser incluídos no modelo matemático através de uma força de sustentação que depende de seus coeficientes de rigidez e amortecimento (CAVALINI JUNIOR, 2013).

O Laboratório de Mecânica de Estruturas “José Eduardo Tannús Reis” da Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia (LMEst-FEMEC-UFU) tem desenvolvido, nas últimas décadas, trabalhos na área de dinâmica de rotação que envolvem o estudo dos coeficientes dinâmicos de mancais.

Riul (1988) realizou uma pesquisa teórica e experimental sobre mancais hidrodinâmicos cilíndricos, empregando o método das diferenças finitas para resolver a equação de *Reynolds*. Foram calculados os coeficientes equivalentes de rigidez e amortecimento de um mancal cilíndrico. Além disso, três métodos distintos foram aplicados para determinar, de forma experimental, os coeficientes lineares. Os resultados experimentais foram confrontados com os dados obtidos nas simulações.

Barbosa (2023) avaliou em sua tese os efeitos da pressão de injeção de óleo no comportamento dinâmico de um mancal segmentado hidrodinâmico axial sujeito à lubrificação híbrida. Um modelo termohidrodinâmico foi aplicado para determinar a posição de equilíbrio. Os coeficientes de rigidez e amortecimento equivalentes do mancal foram determinados pelos métodos da perturbação e da redução em frequência para diferentes condições operacionais. Os resultados mostram que os coeficientes dinâmicos são significativamente dependentes das condições de operação do sistema para ambos os regimes de lubrificação.

Sicchieri (2024) desenvolveu em sua tese um modelo multifísico de uma unidade geradora hidroelétrica, onde os mancais hidrodinâmicos foram modelados por meio da solução da equação de *Reynolds* e da equação de conservação de energia, utilizando o Método dos Volumes Finitos. Comparações das amplitudes de vibração medidas na unidade geradora com os resultados numéricos mostraram uma boa similaridade com erros inferiores a 7 %.

Gomes (2024) em sua tese propôs um modelo termo-hidrodinâmico para mancais cilíndricos radiais. Além da validação através de resultados da literatura, o modelo foi validado experimentalmente com resultados de uma bancada projetada e construída para esse fim.

Analogamente aos mancais, os selos mecânicos também são representados por coeficientes dinâmicos (LALANNE; FERRARIS, 1998). Sendo assim, o estudo dos coeficientes de rigidez e amortecimento dos selos mecânicos é importante para a análise do comportamento dinâmico de máquinas rotativas.

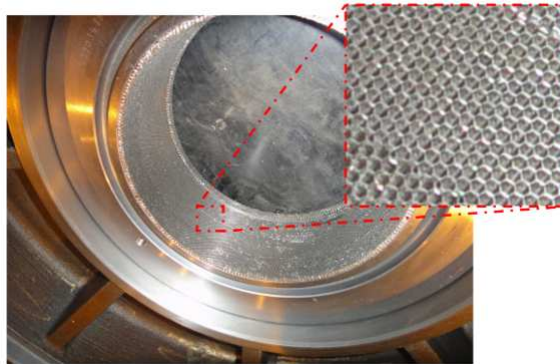
Os selos são elementos de máquinas compostos por duas superfícies principais, uma fixa e outra rotativa, separadas por uma estreita folga radial preenchida por um fluido lubrificante (FLITNEY, 2014). O movimento relativo entre essas superfícies reduz drasticamente o escoamento do fluido contido na folga, devido às forças de fricção exercidas entre o fluido e as paredes, resultando em um vazamento praticamente indetectável. A superfície fixa pode ser lisa, no caso dos selos planos, ou possuir orifícios, no caso dos selos *honeycomb* e *hole-pattern*. A Fig. 1.1 apresenta selos mecânicos com diferentes tipos de superfície.

Até meados da década de 70, por serem elementos cuja função principal é impedir vazamento de um fluido, os selos não eram incluídos na análise do comportamento dinâmico de máquinas rotativas, pois as forças produzidas por eles eram consideradas irrelevantes quando comparadas às forças relacionadas aos mancais (SILVA, 2018).

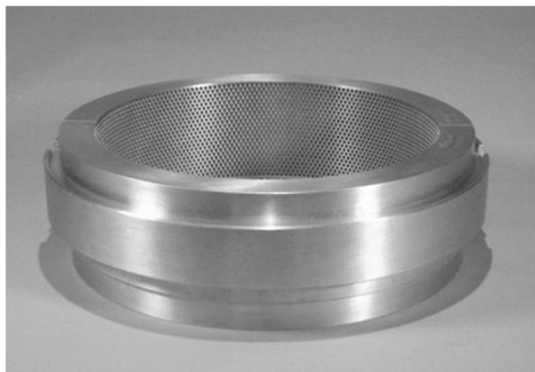
Com o objetivo de analisar o impacto dos selos na dinâmica de máquinas rotativas, surgiu o interesse no estudo de seus coeficientes dinâmicos. Diversos trabalhos nesse sentido utilizam

para isso modelos matemáticos/físicos simplificados para o escoamento do fluido lubrificante, baseados na teoria de filme fino de Hirs (1973), conhecidos como *bulk-flow models*.

Dentre as simplificações geralmente adotadas, destaca-se assumir que a posição do centro do eixo seja necessariamente concêntrica ao selo. Como consequência desse tipo de hipótese, os resultados obtidos para os coeficientes dinâmicos são válidos apenas para pequenos movimentos em torno da posição concêntrica do selo (CHILDS, 1983).



(a) Selo *Honeycomb*. Fonte: (SILVA, 2018)



(b) Selo *Hole-Pattern*. Fonte: (FLITNEY, 2014)

Figura 1.1: Selos mecânicos com diferentes tipos de superfície.

Allaire e Imlach (1986) desenvolveram um modelo aplicável a selos planos e selos labirinto. As equações de lubrificação turbulenta foram modificadas para incluir as rugosidades superficiais dos diferentes tipos de selos. Os resultados foram comparados com análises existentes, apresentando boa correlação.

Dietzen e Nordmann (1987) apresentaram um método para calcular os coeficientes de selos planos e labirintos operando em posição concêntrica a partir da solução das equações de *Navier-Stokes* em conjunto com um modelo $k - \epsilon$ de turbulência usando o Método das Diferenças Finitas.

As comparações realizadas também apresentaram bons resultados.

Arghir e Frêne (1997) apresentaram um método similar baseado na integração das equações de *Navier-Stokes*. As comparações realizadas com dados experimentais e teóricos demonstraram uma precisão razoável para selos planos e selos labirintos com um número reduzido de dentes.

Outra abordagem utilizada é por meio de simulações de CFD (*Computational Fluid Dynamics*), que não necessariamente empregam as simplificações dos *bulk-flow models*. Barbi et al. (2024) propuseram um modelo que utiliza a biblioteca de código aberto *OpenFOAM* para modelar o escoamento compressível de ar através de um selo plano e determinou seus coeficientes dinâmicos através do *Whirling Rotor Method*. As comparações com resultados experimentais e numéricos mostraram que o modelo é capaz de calcular os coeficientes dinâmicos com relativa precisão. Apesar de ser uma metodologia mais abrangente, o custo computacional associado pode ser significativamente maior, especialmente para malhas numéricas refinadas.

Nesse contexto, o presente trabalho se insere no Projeto de Pesquisa e Desenvolvimento PT-200.20.00169: "INTELIGÊNCIA ARTIFICIAL APLICADA NA CRIAÇÃO DE MODELOS REPRESENTATIVOS DE MANCAIS HIDRODINÂMICOS, SELOS ANULARES E MÁQUINAS ROTATIVAS (ROSS - DIGITAL TWIN)", promovido pela PETROBRAS - PETRÓLEO BRASILEIRO S/A em parceria com o Laboratório de Mecânica de Estruturas "José Eduardo Tannús Reis" da Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia (LMEst-FEMEC-UFU). Esse projeto tem como objetivo construir um *software web-based*, funcional no ambiente web da PETROBRAS, capaz de simular através de modelos neurais, a partir do *OpenFOAM*, mancais hidrodinâmicos e selos anulares considerando diferentes geometrias e condições de operação (SILVA et al., 2020). Além disso, esse *software* também será capaz de criar *digital twins* de máquinas rotativas a partir de dados simulados e experimentais para aplicações de sensoriamento virtual, balanceamento de rotores e análise de incertezas e confiabilidade.

1.2 Objetivos da dissertação

O presente trabalho tem como objetivo desenvolver um *bulk-flow model* para selos planos com escoamentos incompressíveis, implementado em ambiente *Python* e integrado à biblioteca de análise rotordinâmica *Rotordynamics Open-Source Software* (ROSS) (SILVA et al., 2020), disponível em <https://github.com/petrobras/ross>. O modelo matemático proposto considera a

Equação da Continuidade e as Equações da Conservação da Quantidade de Movimento aplicadas nas direções axial e circunferencial. Sua solução numérica será realizada por meio do Método dos Volumes Finitos (MVF), sem as simplificações usuais relacionadas à posição do centro do eixo. A validação do modelo será realizada por meio de comparações com resultados disponíveis na literatura.

Nesse contexto, serão analisadas as variações dos coeficientes dinâmicos de selos planos de acordo com a posição do centro do eixo, assim como o seu impacto no comportamento dinâmico de máquinas rotativas. Para isso, o modelo matemático de uma bomba de injeção de água é utilizado em uma análise comparativa entre a resposta de vibração ao desbalanceamento considerando os coeficientes de rigidez e amortecimento dos selos calculados para uma posição do centro do eixo concêntrica, com a resposta de vibração ao desbalanceamento que considera os coeficientes dinâmicos variáveis com a posição do centro do eixo. Para maior eficiência e menor tempo de processamento nesta abordagem, os coeficientes variáveis serão determinados por metamodelos *Kriging* construídos a partir de dados do mapeamento desses coeficientes dinâmicos.

1.3 Organização da dissertação

Esta dissertação é organizada em cinco capítulos, incluindo o presente capítulo responsável por contextualizar o estudo realizado e apresentar os objetivos da dissertação.

No Capítulo II é realizado o desenvolvimento de um *bulk-flow model* de selos planos com escoamentos incompressíveis.

O Capítulo III apresenta a validação numérica do modelo desenvolvido e o mapeamento dos coeficientes dinâmicos de selos planos em função da posição do centro do rotor.

O Capítulo IV mostra a aplicação do mapeamento dos coeficientes dinâmicos de selos planos em máquinas rotativas. Os resultados obtidos são apresentados e discutidos.

O Capítulo V apresenta as conclusões acerca do trabalho e destaca as perspectivas para trabalhos futuros.

CAPÍTULO II

BULK-FLOW MODEL DE UM SELO PLANO

Nesse capítulo são apresentadas as etapas do desenvolvimento de um *bulk-flow model* (BFM) para selos planos, levando em consideração a hipótese de fluido incompressível. O modelo desenvolvido também considera que a posição do centro do rotor não é necessariamente concêntrica ao selo.

2.1 Modelo Matemático

O desenvolvimento de um *bulk-flow model* requer, primeiramente, um modelo matemático representativo para selos planos que admita a incompressibilidade do fluido lubrificante. Sendo assim, para esse estudo adotou-se o modelo matemático proposto por Zhao, Allaire e Brown (1998).

O modelo matemático adotado é composto pela Equação da Continuidade e pelas Equações da Conservação da Quantidade de Movimento aplicadas, respectivamente, nas direções axial (z) e circunferencial (θ), conforme as Eqs (2.1) a (2.3).

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(hu_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(hu_z)}{\partial z} = 0 \quad (2.1)$$

$$-h \frac{\partial p}{\partial z} = \rho h \left(\frac{\partial u_z}{\partial t} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \tau_{ssz} + \tau_{rsz} \quad (2.2)$$

$$-\frac{h}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} = \rho h \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right) + \tau_{ss\theta} + \tau_{rs\theta} \quad (2.3)$$

Onde h é a espessura do filme de fluido lubrificante, u representa as velocidades nas direções de seus respectivos subíndices, r o raio do rotor, ρ a densidade do fluido lubrificante, p a pressão, t

é o tempo. τ representa as componentes das tensões cisalhantes exercidas pelas superfícies do rotor (rs) e do selo (ss) no fluido lubrificante nas direções axial e circunferencial, conforme seus respectivos subíndices. A espessura do filme de fluido lubrificante (h) e as tensões cisalhantes são dadas, respectivamente, pelas Eqs. (2.4) a (2.8).

$$h = \bar{c} - x_c \cos \theta - y_c \sin \theta \quad (2.4)$$

$$\tau_{ssz} = \frac{\rho f_{ss}}{2} u_z u_{ss} \quad (2.5)$$

$$\tau_{rsz} = \frac{\rho f_{rs}}{2} u_z u_{rs} \quad (2.6)$$

$$\tau_{ss\theta} = \frac{\rho f_{ss}}{2} u_\theta u_{ss} \quad (2.7)$$

$$\tau_{rs\theta} = \frac{\rho f_{rs}}{2} (u_\theta - \omega r) u_{rs} \quad (2.8)$$

Onde $\bar{c}$ é a folga radial entre o selo e o rotor, ω a velocidade de operação do rotor, x_c e y_c são as coordenadas cartesianas da posição do centro do rotor no plano da seção transversal e f representa os fatores de fricção das superfícies de acordo com seus subíndices. Os fatores de fricção e as velocidades relacionadas com as superfícies do selo (u_{ss}) e do rotor (u_{rs}) são calculados conforme as Eqs. (2.9) a (2.12).

$$f_{ss} = 1,375 \times 10^{-3} \left[1 + \left(\frac{10^4 e_{ss}}{h} + \frac{10^6 \mu}{2 u_{ss} h \rho} \right)^{\frac{1}{3}} \right] \quad (2.9)$$

$$f_{rs} = 1,375 \times 10^{-3} \left[1 + \left(\frac{10^4 e_{rs}}{h} + \frac{10^6 \mu}{2 u_{rs} h \rho} \right)^{\frac{1}{3}} \right] \quad (2.10)$$

$$u_{ss} = (u_z^2 + u_\theta^2)^{\frac{1}{2}} \quad (2.11)$$

$$u_{rs} = (u_z^2 + (u_\theta - r\omega)^2)^{\frac{1}{2}} \quad (2.12)$$

Onde μ é a viscosidade dinâmica do fluido lubrificante, e_{ss} e e_{rs} são, respectivamente, as rugosidades nas superfícies do selo e do rotor. Uma representação esquemática do selo é ilustrada pela Fig. 2.1.

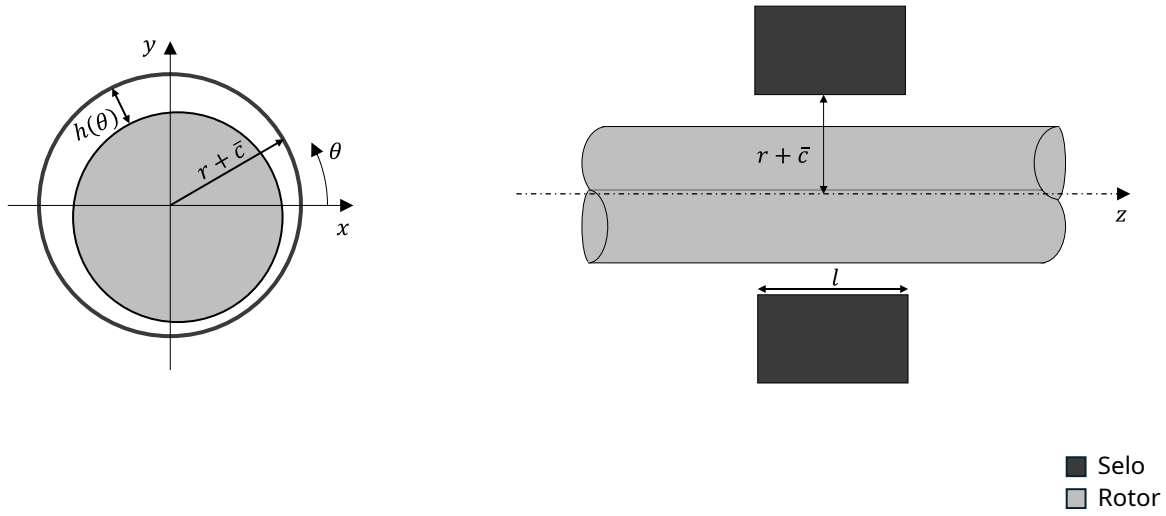


Figura 2.1: Representação esquemática de um selo plano.

Onde l é o comprimento axial do selo.

Devido às grandes diferenças entre as ordens de grandeza dos termos presentes nas equações do modelo matemático adotado, as Eqs. (2.1) a (2.3) são colocadas na forma adimensional, de acordo com as Eqs. (2.13) a (2.20).

$$H = \frac{h}{\bar{c}} \quad (2.13)$$

$$X_c = \frac{x_c}{\bar{c}} \quad (2.14)$$

$$Y_c = \frac{y_c}{\bar{c}} \quad (2.15)$$

$$T = \frac{t(\omega r)}{l} \quad (2.16)$$

$$R = \frac{r}{l} \quad (2.17)$$

$$U = \frac{u}{(\omega r)} \quad (2.18)$$

$$Z = \frac{z}{l} \quad (2.19)$$

$$P = \frac{2p}{\rho(\omega r)^2} \quad (2.20)$$

Dessa forma, obtém-se um modelo matemático cuja solução numérica resulta em um campo de pressão (P) e dois campos de velocidade (U_Z e U_θ), todos em suas formas adimensionais,

conforme as Eqs. (2.21) a (2.23).

$$\frac{\partial H}{\partial T} + \frac{1}{R} \frac{\partial(HU_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(HU_Z)}{\partial Z} = 0 \quad (2.21)$$

$$-H \frac{\partial P}{\partial Z} = 2H \left(\frac{\partial U_Z}{\partial T} + \frac{U_\theta}{R} \frac{\partial U_Z}{\partial \theta} + U_Z \frac{\partial U_Z}{\partial Z} \right) + \frac{l}{\bar{c}} (f_{ss} U_Z U_{ss} + f_{rs} U_Z U_{rs}) \quad (2.22)$$

$$-\frac{H}{R} \frac{\partial P}{\partial \theta} = 2H \left(\frac{\partial U_\theta}{\partial T} + \frac{U_\theta}{R} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + U_Z \frac{\partial U_\theta}{\partial Z} \right) + \frac{l}{\bar{c}} (f_{ss} U_\theta U_{ss} + f_{rs} (U_\theta - 1) U_{rs}) \quad (2.23)$$

As condições de contorno são apresentadas nas Eqs. (2.24) a (2.27).

$$P(0, \theta, T) = P_{inlet} - \frac{1}{2} (1 + \xi_{inlet}) U_Z^2(0, \theta) \quad (2.24)$$

$$P(1, \theta, T) = P_{exit} - \frac{1}{2} (1 - \xi_{exit}) U_Z^2(1, \theta) \quad (2.25)$$

$$U_\theta(Z, 0, T) = U_\theta(Z, 2\pi, T) \quad (2.26)$$

$$U_\theta(0, \theta, T) = SR \quad (2.27)$$

As duas primeiras condições de contorno referem-se a perda de carga na entrada e recuperação de pressão na saída do selo, respectivamente, onde P_{exit} é a pressão adimensional na saída do selo, P_{inlet} a pressão adimensional na entrada do selo, ξ_{inlet} é o coeficiente de perda de carga na entrada, ξ_{exit} é o coeficiente de recuperação de pressão na saída.

A terceira condição de contorno está relacionada à circularidade no selo. A quarta condição de contorno está associada à razão SR entre a velocidade circunferencial na entrada do selo e a velocidade circunferencial de operação do rotor (*swirl ratio*).

2.2 Método dos Volumes Finitos

Para que seja possível o mapeamento dos coeficientes dinâmicos de selos planos, a solução numérica das Eqs. (2.21) a (2.23) não deve adotar a hipótese de que a posição do centro do rotor é necessariamente concêntrica ao selo. Ou seja, um método de solução numérica sem esse tipo de hipótese simplificadora deve ser utilizado para que outras posições do centro do rotor, além da concêntrica, possam ser consideradas.

O Método dos Volumes Finitos (MVF) é utilizado para a solução numérica de equações por meio da discretização do domínio de interesse em pequenos volumes. A solução é realizada

através da integração da(s) equação(ões) de interesse ao longo dos volumes finitos resultantes da discretização do domínio. A formulação garante a conservação das propriedades físicas, como massa, momento e energia, em qualquer domínio discretizado, independentemente da densidade da malha (PATANKAR, 1980).

Como o MVF não necessita de hipóteses simplificadoras acerca da espessura do fluido lubrificante (h), sua aplicação é adequada para a solução numérica do modelo matemático proposto, possibilitando considerar qualquer posição para o centro do rotor, não apenas uma posição concêntrica ao selo.

As Eqs. (2.21) a (2.23) apresentam um acoplamento Pressão-Velocidade em um domínio bidimensional (direções Z e θ). Para o tratamento do acoplamento Pressão-Velocidade adota-se a solução simultânea com arranjo desencontrado, pois essa é a forma mais adequada para o tratamento do acoplamento Pressão-Velocidade utilizando o MVF (MALISKA, 2004).

Na Fig. 2.2 é apresentado o arranjo desencontrado utilizado para tratar o acoplamento Pressão-Velocidade e, como consequência, determinar a solução numérica do modelo matemático do selo, ou seja, os campos de pressão e velocidade.

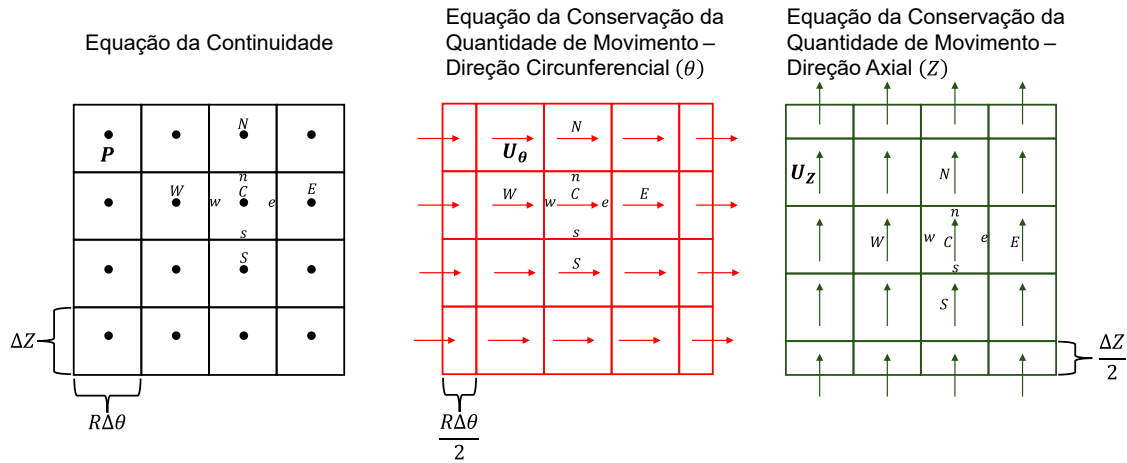


Figura 2.2: Arranjo desencontrado utilizado para o tratamento do acoplamento PV.

Nesse tipo de arranjo das malhas, ao integrar a Eq. (2.21), por exemplo, surgem velocidades nas fronteiras dos volumes finitos que coincidem com as velocidades nos centros dos volumes das malhas discretizadas para as Eqs. (2.22) e (2.23). De forma análoga, ao integrar as Eqs. (2.22) e (2.23), surgem pressões nas fronteiras dos volumes finitos que coincidem com as pressões no centro dos volumes da malha discretizada para a Eq. (2.21).

O MVF é aplicado para cada uma das equações do modelo matemático. Na Fig. 2.3 é ilustrada a malha adotada para a discretização da Equação da Continuidade de forma isolada.

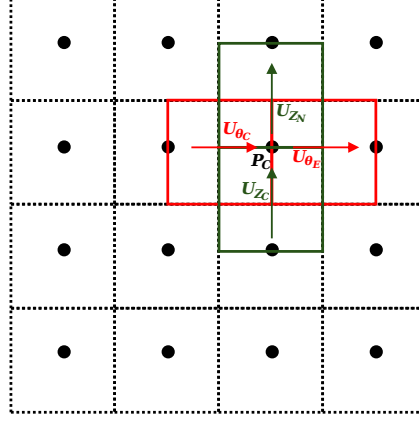


Figura 2.3: Malha numérica - Equação da continuidade.

Aplicando o MVF na Eq. (2.21):

$$\iiint_{T_0}^{T} \frac{\partial H}{\partial T} dZ Rd\theta dT + \frac{1}{R} \iiint_{T_0}^{T} \frac{\partial (HU_\theta)}{\partial \theta} dZ Rd\theta dT + \iiint_{T_0}^{T} \frac{\partial (HU_Z)}{\partial Z} dZ Rd\theta dT = 0 \quad (2.28)$$

Onde o subíndice 0 é usado para indicar um instante de tempo anterior a T . Para fins de organização e maior clareza na aplicação do MVF, a equação Eq. (2.28) será dividida nos termos I, II e III a serem desenvolvidos separadamente. Para o termo I:

$$\begin{aligned} \iiint_{T_0}^{T} \frac{\partial H}{\partial T} dZ Rd\theta dT &= \iiint_{T_0}^{T} \frac{\partial (1 - X_c \cos \theta - Y_c \sin \theta)}{\partial T} dZ Rd\theta dT \\ \iiint_{T_0}^{T} \frac{\partial (1 - X_c \cos \theta - Y_c \sin \theta)}{\partial T} dZ Rd\theta dT &= \iiint_{T_0}^{T} (-\dot{X}_c \cos \theta - \dot{Y}_c \sin \theta) dZ Rd\theta dT \quad (2.29) \\ \iiint_{T_0}^{T} (-\dot{X}_c \cos \theta - \dot{Y}_c \sin \theta) dZ Rd\theta dT &= (-\dot{X}_c \cos \theta - \dot{Y}_c \sin \theta) \cdot \Delta Z \cdot R \Delta \theta \cdot \Delta T \end{aligned}$$

Para o termo II:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} \iiint_{T_0}^{T} \frac{\partial (HU_\theta)}{\partial \theta} dZ Rd\theta dT &= [HU_\theta]_w^e \cdot \Delta Z \cdot \Delta T \\ [HU_\theta]_w^e \cdot \Delta Z \cdot \Delta T &= (H_e U_{\theta E} - H_w U_{\theta C}) \cdot \Delta Z \cdot \Delta T \end{aligned} \quad (2.30)$$

Para o termo III:

$$\int_{T_0}^T \int_{w} \int_s \frac{\partial (HU_z)}{\partial \theta} dZ R d\theta dT = [HU_z]_s^n \cdot R \Delta \theta \cdot \Delta T \quad (2.31)$$

$$[HU_z]_s^n \cdot R \Delta \theta \cdot \Delta T = (H_n U_{z_N} - H_s U_{z_C}) \cdot R \Delta \theta \cdot \Delta T$$

Reagrupando os termos I, II e III em função das variáveis de interesse:

$$A_{U_{\theta_E}} \cdot U_{\theta_E} + A_{U_{\theta_C}} \cdot U_{\theta_C} + A_{U_{z_N}} \cdot U_{z_N} + A_{U_{z_C}} \cdot U_{z_C} = B_C \quad (2.32)$$

Onde:

$$\begin{aligned} A_{U_{\theta_E}} &= H_e \cdot \Delta Z \cdot \Delta T; & A_{U_{\theta_C}} &= -H_w \cdot \Delta Z \cdot \Delta T; & A_{U_{z_N}} &= H_n \cdot R \Delta \theta \cdot \Delta T \\ A_{U_{z_C}} &= -H_s \cdot R \Delta \theta \cdot \Delta T; & B_C &= -(-\dot{X}_c \cos \theta - \dot{Y}_c \sin \theta) \cdot \Delta Z \cdot R \Delta \theta \cdot \Delta T \end{aligned} \quad (2.33)$$

Na Fig. 2.4 é ilustrada a malha adotada para a discretização da Equação da Conservação da Quantidade de Movimento na Direção Axial de forma isolada.

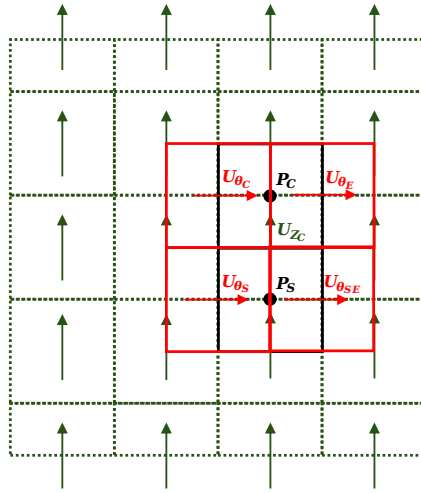


Figura 2.4: Malha numérica - Equação da conservação da quantidade de movimento na direção axial (Z).

Aplicando o MVF na Eq. (2.22):

$$\begin{aligned}
 \iiint_{T_0 \text{ w s}}^{T \text{ e n}} -H \frac{\partial P}{\partial Z} dZ R d\theta dT &= 2 \iiint_{T_0 \text{ w s}}^{T \text{ e n}} H \frac{\partial U_Z}{\partial T} dZ R d\theta dT + \\
 + 2 \iiint_{T_0 \text{ w s}}^{T \text{ e n}} H \frac{U_\theta}{R} \frac{\partial U_Z}{\partial \theta} dZ R d\theta dT &+ 2 \iiint_{T_0 \text{ w s}}^{T \text{ e n}} H \cdot U_Z \frac{\partial U_Z}{\partial Z} dZ R d\theta dT + \\
 + \frac{l}{\bar{c}} \iiint_{T_0 \text{ w s}}^{T \text{ e n}} (f_{ss} U_Z U_{ss} + f_{rs} U_Z U_{rs}) dZ R d\theta dT &
 \end{aligned} \tag{2.34}$$

Analogamente, a equação Eq. (2.34) será dividida nos termos IV, V, VI, VII e VIII a serem desenvolvidos separadamente. Para o termo IV:

$$\begin{aligned}
 \iiint_{T_0 \text{ w s}}^{T \text{ e n}} -H \frac{\partial P}{\partial Z} dZ R d\theta dT &= -H_C \cdot [P]_s^n \cdot R \Delta \theta \cdot \Delta T \\
 -H_C \cdot [P]_s^n \cdot R \Delta \theta \cdot \Delta T &= -H_C \cdot (P_C - P_S) \cdot R \Delta \theta \cdot \Delta T
 \end{aligned} \tag{2.35}$$

Para o termo V:

$$\begin{aligned}
 2 \iiint_{T_0 \text{ w s}}^{T \text{ e n}} H \frac{\partial U_Z}{\partial T} dZ R d\theta dT &= 2H_C \cdot [U_Z]_{T_0}^T \cdot \Delta Z \cdot R \Delta \theta \\
 2H_C \cdot [U_Z]_{T_0}^T \cdot \Delta Z \cdot R \Delta \theta &= 2H_C \cdot (U_{Z_C} - U_{Z_{C_0}}) \cdot \Delta Z \cdot R \Delta \theta
 \end{aligned} \tag{2.36}$$

Para o termo VI:

$$\begin{aligned}
 2 \iiint_{T_0 \text{ w s}}^{T \text{ e n}} H \frac{U_\theta}{R} \frac{\partial U_Z}{\partial \theta} dZ R d\theta dT &= 2H_C \cdot U_{\theta_{se}} \cdot [U_Z]_w^e \cdot \Delta Z \cdot \Delta T \\
 2H_C \cdot U_{\theta_{se}} \cdot [U_Z]_w^e \cdot \Delta Z \cdot \Delta T &= 2H_C \cdot (U_{\theta_{se}} \cdot U_{Z_e} - U_{\theta_{se}} \cdot U_{Z_w}) \cdot \Delta Z \cdot \Delta T
 \end{aligned} \tag{2.37}$$

Para o termo VII:

$$\begin{aligned}
 2 \iiint_{T_0 \text{ w s}}^{T \text{ e n}} H \cdot U_Z \frac{\partial U_Z}{\partial Z} dZ R d\theta dT &= 2H_C \cdot U_{Z_C} \cdot [U_Z]_s^n \cdot R \Delta \theta \cdot \Delta T \\
 2H_C \cdot U_{Z_C} \cdot [U_Z]_s^n \cdot R \Delta \theta \cdot \Delta T &= 2H_C \cdot (U_{Z_C} \cdot U_{Z_n} - U_{Z_C} \cdot U_{Z_s}) \cdot R \Delta \theta \cdot \Delta T
 \end{aligned} \tag{2.38}$$

Para o termo VIII:

$$\frac{l}{\bar{c}} \iiint_{T_0}^{T_e n} (f_{ss} U_Z U_{ss} + f_{rs} U_Z U_{rs}) dZ R d\theta dT = \frac{l}{\bar{c}} \cdot (f_{ssC} U_{ZC} U_{ssC} + f_{rsC} U_{ZC} U_{rsC}) \cdot \Delta Z \cdot R \Delta \theta \cdot \Delta T \quad (2.39)$$

Onde:

$$U_{ssC} = (U_{ZC}^2 + U_{\theta_{se}}^2)^{1/2} \quad (2.40)$$

$$U_{rsC} = (U_{ZC}^2 + (U_{\theta_{se}} - 1)^2)^{1/2} \quad (2.41)$$

As velocidades nas fronteiras norte (*n*) e sul (*s*) são aproximadas pelo esquema *upwind* que adota uma abordagem mais precisa ao determinar que a velocidade na fronteira assume o valor do ponto da malha localizado no lado montante do fluxo (PATANKAR, 1980), conforme as Eqs. (2.42) e (2.43).

$$U_{Zn} = U_{ZC} \quad (2.42)$$

$$U_{Zs} = U_{ZS} \quad (2.43)$$

Enquanto as velocidades nas quinas e nas fronteiras leste (*e*) e oeste (*w*) são aproximadas por média aritmética, conforme as Eqs. (2.44) a (2.46).

$$U_{Ze} = \frac{1}{2} \cdot (U_{ZE} + U_{ZC}) \quad (2.44)$$

$$U_{Zw} = \frac{1}{2} \cdot (U_{ZW} + U_{ZC}) \quad (2.45)$$

$$U_{\theta_{se}} = \frac{1}{4} \cdot (U_{\theta_E} + U_{\theta_{SE}} + U_{\theta_C} + U_{\theta_S}) \quad (2.46)$$

Reagrupando os termos IV, V, VI, VII e VIII em função das variáveis de interesse:

$$\begin{aligned} & A_{P_C} \cdot P_C + A_{P_S} \cdot P_S + A_{U_{ZC}} \cdot U_{ZC} + A_{U_{ZE}, U_{\theta_{se}}} \cdot U_{ZE} \cdot U_{\theta_{se}} + \\ & + A_{U_{ZW}, U_{\theta_{se}}} \cdot U_{ZW} \cdot U_{\theta_{se}} + A_{U_{ZC}^2} \cdot U_{ZC}^2 + A_{U_{ZC}, U_{ZS}} \cdot U_{ZC} \cdot U_{ZS} + \\ & + A_{U_{ZC}, U_{ssC}, f_{ssC}} \cdot U_{ZC} \cdot U_{ssC} \cdot f_{ssC} + A_{U_{ZC}, U_{rsC}, f_{rsC}} \cdot U_{ZC} \cdot U_{rsC} \cdot f_{rsC} = B_{U_{ZC}} \end{aligned} \quad (2.47)$$

Onde:

$$\begin{aligned}
 A_{P_C} &= -H_C \cdot R \Delta \theta \cdot \Delta T; & A_{P_S} &= H_C \cdot R \Delta \theta \cdot \Delta T; & A_{U_{Z_C}} &= -2H_C \cdot \Delta Z \cdot R \Delta \theta \\
 A_{U_{Z_E}, U_{\theta_{se}}} &= -H_C \cdot \Delta Z \cdot \Delta T; & A_{U_{Z_W}, U_{\theta_{se}}} &= H_C \cdot \Delta Z \cdot \Delta T; & A_{U_{Z_C}^2} &= -2H_C \cdot R \Delta \theta \cdot \Delta T; \\
 A_{U_{Z_C}, U_{Z_S}} &= 2H_C \cdot R \Delta \theta \cdot \Delta T; & A_{U_{Z_C}, U_{ss_C}, f_{ss_C}} &= A_{U_{Z_C}, U_{rs_C}, f_{rs_C}} = -\frac{l}{\bar{c}} \cdot \Delta Z \cdot R \Delta \theta \cdot \Delta T; \\
 B_{U_{Z_C}} &= -2H_C \cdot U_{Z_{C_0}} \cdot \Delta Z \cdot R \Delta \theta
 \end{aligned} \tag{2.48}$$

Na Fig. 2.5 é ilustrada a malha adotada para a discretização da Equação da Conservação da Quantidade de Movimento na Direção Circunferencial de forma isolada.

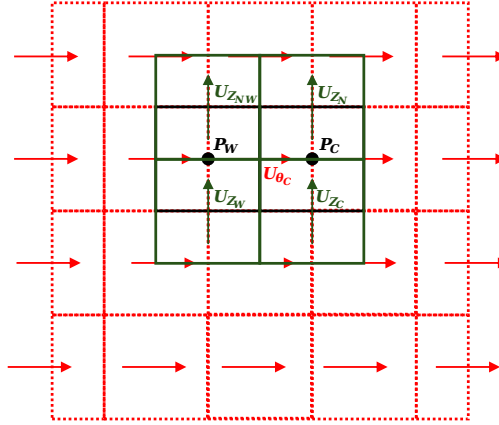


Figura 2.5: Malha numérica - Equação da conservação da quantidade de movimento na direção circunferencial (θ).

Aplicando o MVF na Eq. (2.23):

$$\begin{aligned}
 & \int_{T_0}^{T e n} \int_{w s} \int -\frac{H}{R} \frac{\partial P}{\partial \theta} dZ R d\theta dT = 2 \int_{T_0}^{T e n} \int_{w s} \int H \frac{\partial U_{\theta}}{\partial T} dZ R d\theta dT + \\
 & + 2 \int_{T_0}^{T e n} \int_{w s} \int H \frac{U_{\theta}}{R} \frac{\partial U_{\theta}}{\partial \theta} dZ R d\theta dT + 2 \int_{T_0}^{T e n} \int_{w s} \int H \cdot U_Z \frac{\partial U_{\theta}}{\partial Z} dZ R d\theta dT + \\
 & + \frac{l}{\bar{c}} \int_{T_0}^{T e n} \int_{w s} \int (f_{ss} U_{\theta} U_{ss} + f_{rs} (U_{\theta} - 1) U_{rs}) dZ R d\theta dT
 \end{aligned} \tag{2.49}$$

A equação Eq. (2.49) será dividida nos termos IX, X, XI, XII e XIII a serem desenvolvidos

separadamente. Para o termo IX:

$$\begin{aligned} \int_{T_0}^T \int_{w s} \int -\frac{H}{R} \frac{\partial P}{\partial \theta} dZ R d\theta dT &= -H_C \cdot [P]_w^e \cdot \Delta Z \cdot \Delta T \\ -H_C \cdot [P]_w^e \cdot \Delta Z \cdot \Delta T &= -H_C \cdot (P_C - P_W) \cdot \Delta Z \cdot \Delta T \end{aligned} \quad (2.50)$$

Para o termo X:

$$\begin{aligned} 2 \int_{T_0}^T \int_{w s} \int H \frac{\partial U_\theta}{\partial T} dZ R d\theta dT &= 2H_C \cdot [U_\theta]_{T_0}^T \cdot \Delta Z \cdot R \Delta \theta \\ 2H_C \cdot [U_\theta]_{T_0}^T \cdot \Delta Z \cdot R \Delta \theta &= 2H_C \cdot (U_{\theta_C} - U_{\theta_{C_0}}) \cdot \Delta Z \cdot R \Delta \theta \end{aligned} \quad (2.51)$$

Para o termo XI:

$$\begin{aligned} 2 \int_{T_0}^T \int_{w s} \int H \frac{U_\theta}{R} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} dZ R d\theta dT &= 2H_C \cdot U_{\theta_C} \cdot [U_\theta]_w^e \cdot \Delta Z \cdot \Delta T \\ 2H_C \cdot U_{\theta_C} \cdot [U_\theta]_w^e \cdot \Delta Z \cdot \Delta T &= 2H_C \cdot (U_{\theta_C} \cdot U_{\theta_e} - U_{\theta_C} \cdot U_{\theta_w}) \cdot \Delta Z \cdot \Delta T \end{aligned} \quad (2.52)$$

Para o termo XII:

$$\begin{aligned} 2 \int_{T_0}^T \int_{w s} \int H \cdot U_Z \frac{\partial U_\theta}{\partial Z} dZ R d\theta dT &= 2H_C \cdot U_{Z_{nw}} \cdot [U_\theta]_s^n \cdot R \Delta \theta \cdot \Delta T \\ 2H_C \cdot U_{Z_{nw}} \cdot [U_\theta]_s^n \cdot R \Delta \theta \cdot \Delta T &= 2H_C \cdot (U_{Z_{nw}} \cdot U_{\theta_n} - U_{Z_{nw}} \cdot U_{\theta_s}) \cdot R \Delta \theta \cdot \Delta T \end{aligned} \quad (2.53)$$

Para o termo XIII:

$$\begin{aligned} \frac{l}{\bar{c}} \int_{T_0}^T \int_{w s} \int (f_{ss} U_\theta U_{ss} + f_{rs} (U_\theta - 1) U_{rs}) dZ R d\theta dT &= \frac{l}{\bar{c}} \cdot (f_{ssC} U_{\theta_C} U_{ssC} + f_{rsC} (U_{\theta_C} - 1) U_{rsC}) \cdot \Delta Z \cdot R \Delta \theta \cdot \Delta T \end{aligned} \quad (2.54)$$

Onde:

$$U_{ssC} = (U_{Z_{nw}}^2 + U_{\theta_C}^2)^{1/2} \quad (2.55)$$

$$U_{rsC} = (U_{Z_{nw}}^2 + (U_{\theta_C} - 1)^2)^{1/2} \quad (2.56)$$

As velocidades nas fronteiras leste (*e*) e oeste (*w*) são aproximadas pelo esquema *upwind*, conforme as Eqs. (2.57) e (2.58).

$$U_{\theta_e} = U_{\theta_C} \quad (2.57)$$

$$U_{\theta_w} = U_{\theta_C} \quad (2.58)$$

Enquanto as velocidades nas quinas e nas fronteiras norte (*n*) e sul (*s*) são aproximadas por média aritmética, conforme as Eqs. (2.59) a (2.61).

$$U_{\theta_n} = \frac{1}{2} \cdot (U_{\theta_N} + U_{\theta_C}) \quad (2.59)$$

$$U_{\theta_s} = \frac{1}{2} \cdot (U_{\theta_S} + U_{\theta_C}) \quad (2.60)$$

$$U_{Z_{nw}} = \frac{1}{4} \cdot (U_{Z_W} + U_{Z_{NW}} + U_{Z_C} + U_{Z_N}) \quad (2.61)$$

Reagrupando os termos IX, X, XI, XII e XIII em função das variáveis de interesse:

$$\begin{aligned} & A_{P_C} \cdot P_C + A_{P_W} \cdot P_W + A_{U_{\theta_C}} \cdot U_{\theta_C} + A_{U_{\theta_C}^2} \cdot U_{\theta_C}^2 + A_{U_{\theta_C}, U_{\theta_W}} \cdot U_{\theta_C} \cdot U_{\theta_W} + \\ & + A_{U_{\theta_N}, U_{Z_{nw}}} \cdot U_{\theta_N} \cdot U_{Z_{nw}} + A_{U_{\theta_S}, U_{Z_{nw}}} \cdot U_{\theta_S} \cdot U_{Z_{nw}} + A_{U_{\theta_C}, U_{ss_C}, f_{ss_C}} \cdot U_{\theta_C} \cdot U_{ss_C} \cdot f_{ss_C} + \\ & + A_{U_{\theta_C}, U_{rs_C}, f_{rs_C}} \cdot U_{\theta_C} \cdot U_{rs_C} \cdot f_{rs_C} + A_{U_{rs_C}, f_{rs_C}} \cdot U_{rs_C} \cdot f_{rs_C} = B_{U_{\theta_C}} \end{aligned} \quad (2.62)$$

Onde:

$$\begin{aligned} A_{P_C} &= -H_C \cdot \Delta Z \cdot \Delta T; & A_{P_W} &= H_C \cdot \Delta Z \cdot \Delta T; & A_{U_{\theta_C}} &= -2H_C \cdot \Delta Z \cdot R\Delta\theta \\ A_{U_{\theta_C}^2} &= -2H_C \cdot \Delta Z \cdot \Delta T; & A_{U_{\theta_C}, U_{\theta_W}} &= 2H_C \cdot \Delta Z \cdot \Delta T; \\ A_{U_{\theta_N}, U_{Z_{nw}}} &= -H_C \cdot R\Delta\theta \cdot \Delta T; & A_{U_{\theta_S}, U_{Z_{nw}}} &= H_C \cdot R\Delta\theta \cdot \Delta T; \\ A_{U_{\theta_C}, U_{ss_C}, f_{ss_C}} &= A_{U_{\theta_C}, U_{rs_C}, f_{rs_C}} = -A_{U_{rs_C}, f_{rs_C}} = -\frac{l}{\bar{c}} \cdot \Delta Z \cdot R\Delta\theta \cdot \Delta T; \\ B_{U_{\theta_C}} &= -2H_C \cdot U_{\theta_{C0}} \cdot \Delta Z \cdot R\Delta\theta \end{aligned} \quad (2.63)$$

As Eqs. (2.32), (2.47) e (2.62) são válidas apenas para volumes no interior das malhas adotadas. O desenvolvimento das equações válidas para os volumes laterais, superiores, inferiores e de quina é apresentado no Apêndice A.

Após a integração das equações, obtêm-se um sistema de equações algébricas. No entanto, há mais incógnitas que equações. Nesse sentido, adota-se condições de contorno para a velocidade

axial na entrada do selo e para a velocidade circunferencial na saída do selo, descritas pelas Eqs. (2.64) e (2.65) .

$$\left. \frac{\partial U_Z}{\partial Z} \right|_{Z=0} = 0 \quad (2.64)$$

$$\left. \frac{\partial U_\theta}{\partial Z} \right|_{Z=1} = 0 \quad (2.65)$$

Além disso, a presença de diversas não-linearidades impede a solução direta do sistema de equações. Torna-se necessário então, aplicar um tratamento para lidar com as não-linearidades.

2.3 Tratamento das Não-Linearidades e Solução Numérica

O tratamento das não-linearidades é inicialmente realizado mediante manipulações matemáticas nos termos em que elas estão presentes. A manipulação consiste em reescrever os termos não-lineares como um produto de dois termos, de tal forma que pelo menos um deles seja linear, conforme as Eqs. (2.66) a (2.78).

$$A_{U_{ZE}, U_{\theta_{se}}} \cdot U_{ZE} \cdot U_{\theta_{se}} = A_{U_{ZE}} \cdot U_{ZE}; \quad A_{U_{ZE}} = A_{U_{ZE}, U_{\theta_{se}}} \cdot U_{\theta_{se}} \quad (2.66)$$

$$A_{U_{ZW}, U_{\theta_{se}}} \cdot U_{ZW} \cdot U_{\theta_{se}} = A_{U_{ZW}} \cdot U_{ZW}; \quad A_{U_{ZW}} = A_{U_{ZW}, U_{\theta_{se}}} \cdot U_{\theta_{se}} \quad (2.67)$$

$$A_{U_{ZC}^2} \cdot U_{ZC}^2 = A'_{U_{ZC}} \cdot U_{ZC}; \quad A'_{U_{ZC}} = A_{U_{ZC}^2} \cdot U_{ZC} \quad (2.68)$$

$$A_{U_{ZC}, U_{ZS}} \cdot U_{ZC} \cdot U_{ZS} = A_{U_{ZS}} \cdot U_{ZS}; \quad A_{U_{ZS}} = A_{U_{ZC}, U_{ZS}} \cdot U_{ZC} \quad (2.69)$$

$$A_{U_{ZC}, U_{SSC}, f_{SSC}} \cdot U_{ZC} \cdot U_{SSC} \cdot f_{SSC} = A''_{U_{ZC}} \cdot U_{ZC}; \quad A''_{U_{ZC}} = A_{U_{ZC}, U_{SSC}, f_{SSC}} \cdot U_{SSC} \cdot f_{SSC} \quad (2.70)$$

$$A_{U_{ZC}, U_{rSC}, f_{rSC}} \cdot U_{ZC} \cdot U_{rSC} \cdot f_{rSC} = A'''_{U_{ZC}} \cdot U_{ZC}; \quad A'''_{U_{ZC}} = A_{U_{ZC}, U_{rSC}, f_{rSC}} \cdot U_{rSC} \cdot f_{rSC} \quad (2.71)$$

$$A_{U_{\theta C}^2} \cdot U_{\theta C}^2 = A'_{U_{\theta C}} \cdot U_{\theta C}; \quad A'_{U_{\theta C}} = A_{U_{\theta C}^2} \cdot U_{\theta C} \quad (2.72)$$

$$A_{U_{\theta C}, U_{\theta W}} \cdot U_{\theta C} \cdot U_{\theta W} = A_{U_{\theta W}} \cdot U_{\theta W}; \quad A_{U_{\theta W}} = A_{U_{\theta C}, U_{\theta W}} \cdot U_{\theta C} \quad (2.73)$$

$$A_{U_{\theta N}, U_{Znw}} \cdot U_{\theta N} \cdot U_{Znw} = A_{U_{\theta N}} \cdot U_{\theta N}; \quad A_{U_{\theta N}} = A_{U_{\theta N}, U_{Znw}} \cdot U_{Znw} \quad (2.74)$$

$$A_{U_{\theta S}, U_{Znw}} \cdot U_{\theta S} \cdot U_{Znw} = A_{U_{\theta S}} \cdot U_{\theta S}; \quad A_{U_{\theta S}} = A_{U_{\theta S}, U_{Znw}} \cdot U_{Znw} \quad (2.75)$$

$$A_{U_{\theta C}, U_{SSC}, f_{SSC}} \cdot U_{\theta C} \cdot U_{SSC} \cdot f_{SSC} = A''_{U_{\theta C}} \cdot U_{\theta C}; \quad A''_{U_{\theta C}} = A_{U_{\theta C}, U_{SSC}, f_{SSC}} \cdot U_{SSC} \cdot f_{SSC} \quad (2.76)$$

$$A_{U_{\theta_C}, U_{rs_C}, fr_{s_C}} \cdot U_{\theta_C} \cdot U_{rs_C} \cdot fr_{s_C} = A'''_{U_{\theta_C}} \cdot U_{\theta_C}; \quad A'''_{U_{\theta_C}} = A_{U_{\theta_C}, U_{rs_C}, fr_{s_C}} \cdot U_{rs_C} \cdot fr_{s_C} \quad (2.77)$$

$$A_{U_{rs_C}, fr_{s_C}} \cdot U_{rs_C} \cdot fr_{s_C} = B'_{U_{\theta_C}} \quad (2.78)$$

Em seguida, esses termos são substituídos nas Eq. (2.47) e Eq. (2.62), e reorganizados, juntamente com a Eq. (2.32), na forma de um sistema de equações com coeficientes e termos independentes não-lineares, conforme a Eq. (2.79).

$$\begin{cases} A_{U_{\theta_E}} \cdot U_{\theta_E} + A_{U_{\theta_C}} \cdot U_{\theta_C} + A_{U_{Z_N}} \cdot U_{Z_N} + A_{U_{Z_C}} \cdot U_{Z_C} = B_C \\ A_{P_C} \cdot P_C + A_{P_S} \cdot P_S + \bar{A}_{U_{Z_C}} \cdot U_{Z_C} + A_{U_{Z_E}} \cdot U_{Z_E} + A_{U_{Z_W}} \cdot U_{Z_W} + A_{U_{Z_S}} \cdot U_{Z_S} = B_{U_{Z_C}} \\ A_{P_C} \cdot P_C + A_{P_W} \cdot P_W + \bar{A}_{U_{\theta_C}} \cdot U_{\theta_C} + A_{U_{\theta_W}} \cdot U_{\theta_W} + A_{U_{\theta_N}} \cdot U_{\theta_N} + A_{U_{\theta_S}} \cdot U_{\theta_S} = \bar{B}_{U_{\theta_C}} \end{cases} \quad (2.79)$$

Onde:

$$\bar{A}_{U_{Z_C}} = A_{U_{Z_C}} + A'_{U_{Z_C}} + A''_{U_{Z_C}} + A'''_{U_{Z_C}} \quad (2.80)$$

$$\bar{A}_{U_{\theta_C}} = A_{U_{\theta_C}} + A'_{U_{\theta_C}} + A''_{U_{\theta_C}} + A'''_{U_{\theta_C}} \quad (2.81)$$

$$\bar{B}_{U_{\theta_C}} = B_{U_{\theta_C}} - B'_{U_{\theta_C}} \quad (2.82)$$

O sistema de equações é escrito na sua forma matricial de forma que não haja elementos nulos na diagonal principal da matriz dos coeficientes, conforme a Eq.(2.83), cuja forma reduzida é dada pela Eq. (2.84).

$$\begin{bmatrix} A_{PU_{\theta}} & A_{PU_Z} & A_{PP} \\ A_{U_Z U_{\theta}} & A_{U_Z U_Z} & A_{U_Z P} \\ A_{U_{\theta} U_{\theta}} & A_{U_{\theta} U_Z} & A_{U_{\theta} P} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} U_{\theta} \\ U_Z \\ P \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} B \\ B_{U_Z} \\ \bar{B}_{U_{\theta}} \end{Bmatrix} \quad (2.83)$$

$$A \times \begin{Bmatrix} U_{\theta} \\ U_Z \\ P \end{Bmatrix} = B \quad (2.84)$$

A solução numérica é realizada de forma iterativa a cada passo de tempo e considera malhas numéricas retangulares criadas a partir dos números de volumes nas direções axial e circunferencial (n_Z e n_{θ}).

Embora o arranjo desencontrado seja utilizado na aplicação do MVF, a malha numérica

criada para a Equação da Conservação da Quantidade de Movimento na Direção Circunferencial, assim como a malha criada para a Equação da Continuidade, possui $n_Z \cdot n_\theta$ volumes finitos, pois os meio volumes provenientes do arranjo desencontrado são complementares devido à condição de contorno de circularidade. Já a malha numérica da Equação da Conservação da Quantidade de Movimento na Direção Axial possui $(n_Z + 1) \cdot n_\theta$ volumes finitos.

Para evitar a perda de informações das propriedades transportadas e garantir estabilidade na solução, o fluido, ao longo do escoamento, não pode percorrer uma distância maior que qualquer um dos comprimentos de um volume finito a cada passo de tempo na direção desses comprimentos (OISHI, 2004). Nesse sentido, os passos de tempo são determinados pelo número de *Courant* (η), que representa a razão entre a velocidade do escoamento do fluido lubrificante e a velocidade da malha numérica, conforme a Eq. (2.85).

$$\Delta T = \eta \cdot \min \left(\frac{\Delta Z}{\max(U_Z)}, \frac{R\Delta\theta}{\max(U_\theta)} \right) \quad (2.85)$$

Para que a condição de estabilidade seja garantida, $\eta \leq 1$.

O processo iterativo se inicia ao definir a matriz dos coeficientes e o vetor dos termos independentes, ambos não-lineares, a partir das condições iniciais, definidas pelas Eqs. (2.86) a (2.88).

$$P(Z, \theta, 0) = P_{exit} \quad (2.86)$$

$$U_Z(Z, \theta, 0) = 0 \quad (2.87)$$

$$U_\theta(Z > 0, \theta, 0) = 0 \quad (2.88)$$

Como consequência, a Eq. (2.83) torna-se um sistema linear de equações, ou seja, pode ser resolvido através da inversão da matriz da nova matriz dos coeficientes $\bar{\mathbf{A}}$ e do novo vetor de termos independentes $\bar{\mathbf{B}}$, conforme a Eq. (2.89).

$$\begin{Bmatrix} U'_\theta \\ U'_Z \\ P' \end{Bmatrix} = \bar{\mathbf{A}}^{-1} \times \bar{\mathbf{B}} \quad (2.89)$$

Os valores encontrados para U'_θ , U'_Z e P' são substituídos na Eq. (2.79) para o cálculo do

vetor de resíduos (RES), definido pelos valores absolutos das diferenças entre os respectivos lados esquerdos e diretos da Eq. (2.79). Se o valor máximo do vetor de resíduos for maior que a tolerância definida (tol), a matriz $\bar{A}$ e o vetor $\bar{B}$ são atualizados com os valores de U'_θ , U'_Z e P' e o processo se repete até a convergência.

Após a convergência para o primeiro passo de tempo, o processo iterativo é realizado novamente para os passos seguintes até que o regime permanente seja atingido ou o tempo total exceda um tempo limite predefinido (t_{max}). O critério de regime permanente utilizado considera o desvio padrão do valor máximo dos campos de velocidade e pressão nos últimos 100 passos de tempo. Caso esses valores sejam todos menores que a tolerância definida (tol_2), a solução numérica atinge o regime permanente.

Todo o procedimento adotado para a solução numérica transiente também é descrito pelo fluxograma na Fig. 2.6.

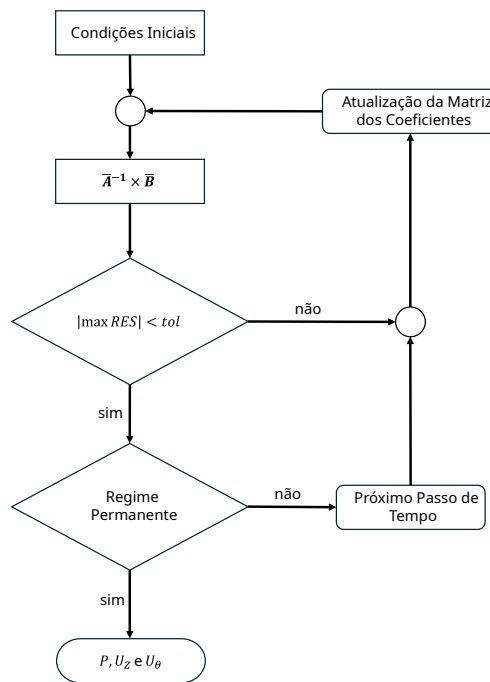


Figura 2.6: Fluxograma - Solução numérica transiente.

2.4 Coeficientes Dinâmicos

Apenas a solução das equações do modelo matemático não é suficiente para determinar os coeficientes dinâmicos do selo. Para isso, aplica-se o Método da Perturbação Infinitesimal (LUND; THOMSEN, 1978) ou o Método da Perturbação Finita para o cálculo dos coeficientes

dinâmicos.

2.4.1 Método da Perturbação Infinitesimal

O Método da Perturbação Infinitesimal calcula os coeficientes dinâmicos de mancais através de uma perturbação na posição do centro do rotor em regime permanente. A perturbação é inserida por meio da expansão da pressão p e da espessura do filme de fluido lubrificante h , presentes na equação de *Reynolds*, em Série de *Taylor* (PENG; CARPINO, 1994).

Na aplicação do método para o cálculo dos coeficientes dinâmicos de um selo, além da pressão P e da espessura do filme de fluido lubrificante H , ambas em suas formas adimensionais, também são expandidas em Série de *Taylor* as velocidades circunferencial U_θ e axial U_Z , até os termos de primeira ordem, conforme as Eqs (2.90) a (2.93).

$$P_1 = P + P_X \Delta X + P_Y \Delta Y \quad (2.90)$$

$$H_1 = H + H_X \Delta X + H_Y \Delta Y \quad (2.91)$$

$$U_{Z_1} = U_Z + U_{Z_X} \Delta X + U_{Z_Y} \Delta Y \quad (2.92)$$

$$U_{\theta_1} = U_\theta + U_{\theta_X} \Delta X + U_{\theta_Y} \Delta Y \quad (2.93)$$

Onde:

$$P_X = \frac{\partial P}{\partial X}; \quad H_X = \frac{\partial H}{\partial X}; \quad U_{Z_X} = \frac{\partial U_Z}{\partial X}; \quad U_{\theta_X} = \frac{\partial U_\theta}{\partial X}; \quad (2.94)$$

$$P_Y = \frac{\partial P}{\partial Y}; \quad H_Y = \frac{\partial H}{\partial Y}; \quad U_{Z_Y} = \frac{\partial U_Z}{\partial Y}; \quad U_{\theta_Y} = \frac{\partial U_\theta}{\partial Y};$$

Os termos com subíndice 1 representam as variáveis expandidas. X e Y são as coordenadas cartesianas adimensionais do plano da seção transversal.

Ao substituir os termos expandidos, ou seja, as Eqs. (2.90) a (2.93) nas Eqs. (2.21) a (2.23) surgem os termos $\Delta \dot{X}$ e $\Delta \dot{Y}$ devido à existência de derivadas temporais. Considerando uma órbita circular para a perturbação inserida pelo Método da Perturbação Infinitesimal, $\Delta \dot{X}$ e $\Delta \dot{Y}$ podem ser escritos em função de ΔX e ΔY , conforme as Eqs. (2.95) e (2.96):

$$\Delta \dot{X} = \Delta X \cdot \Gamma i \quad (2.95)$$

$$\Delta \dot{Y} = \Delta Y \cdot \Gamma i \quad (2.96)$$

Onde Γ é a razão entre a velocidade de precessão da perturbação em torno da posição do centro do rotor e a velocidade de operação do rotor.

Desse modo, obtém-se sistemas de equações diferenciais complexas cujas soluções são P_X , P_Y , U_{Z_X} , U_{Z_Y} , U_{θ_X} e U_{θ_Y} . A solução numérica dessas equações também é realizada utilizando o MVF, adotando-se a solução simultânea com arranjo desencontrado e desprezando-se os termos com ordem superior a 1.

Por fim, os coeficientes dinâmicos são determinados a partir da integração, ao longo do domínio discretizado, das partes reais e imaginárias das soluções das equações resultantes da aplicação do MVF, conforme as Eqs. (2.97) e (2.98).

$$\begin{bmatrix} K_{xx} & K_{xy} \\ K_{yx} & K_{yy} \end{bmatrix} = \frac{\rho l^2 (\omega r)^2}{2\bar{c}} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} \text{Re}(P_X) \cdot H_X & \text{Re}(P_Y) \cdot H_X \\ \text{Re}(P_X) \cdot H_Y & \text{Re}(P_Y) \cdot H_Y \end{bmatrix} R d\theta dZ \quad (2.97)$$

$$\begin{bmatrix} C_{xx} & C_{xy} \\ C_{yx} & C_{yy} \end{bmatrix} = \frac{\rho l^3 (\omega r)}{2\bar{c}} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} \text{Im}(P_X) \cdot H_X & \text{Im}(P_Y) \cdot H_X \\ \text{Im}(P_X) \cdot H_Y & \text{Im}(P_Y) \cdot H_Y \end{bmatrix} R d\theta dZ \quad (2.98)$$

2.4.2 Método da Perturbação Finita

O Método da Perturbação Finita determina os coeficientes dinâmicos através da imposição de pequenos deslocamentos (Δx_c e Δy_c) e velocidades ($\Delta \dot{x}_c$ e $\Delta \dot{y}_c$) ao centro do rotor, que resultam na variação das componentes da força de sustentação F_x e F_y , resultantes da integração do campo de pressão ao longo do domínio discretizado, como mostram as Eqs. (2.99) e (2.100).

$$F_x(x_c, y_c, \dot{x}_c, \dot{y}_c) = \frac{\rho l^2 (\omega r)^2}{2} \int_0^1 \int_0^{2\pi} P \cdot \cos \theta R d\theta dZ \quad (2.99)$$

$$F_y(x_c, y_c, \dot{x}_c, \dot{y}_c) = \frac{\rho l^2 (\omega r)^2}{2} \int_0^1 \int_0^{2\pi} P \cdot \sin \theta R d\theta dZ \quad (2.100)$$

A partir da variação das componentes da força de sustentação e dos deslocamentos e velocidades impostos, são calculados os coeficientes dinâmicos (QIU; TIEU, 1996), conforme as

Eqs. (2.101) e (2.102).

$$\begin{bmatrix} K_{xx} & K_{xy} \\ K_{yx} & K_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{F_x(x_c + \Delta x_c, y_c, 0, 0) - F_x(x_c - \Delta x_c, y_c, 0, 0)}{2\Delta x_c} & \frac{F_x(x_c, y_c + \Delta y_c, 0, 0) - F_x(x_c, y_c - \Delta y_c, 0, 0)}{2\Delta y_c} \\ \frac{F_y(x_c + \Delta x_c, y_c, 0, 0) - F_y(x_c - \Delta x_c, y_c, 0, 0)}{2\Delta x_c} & \frac{F_y(x_c, y_c + \Delta y_c, 0, 0) - F_y(x_c, y_c - \Delta y_c, 0, 0)}{2\Delta y_c} \end{bmatrix} \quad (2.101)$$

$$\begin{bmatrix} C_{xx} & C_{xy} \\ C_{yx} & C_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{F_x(x_c, y_c, \Delta \dot{x}_c, 0) - F_x(x_c, y_c, -\Delta \dot{x}_c, 0)}{2\Delta \dot{x}_c} & \frac{F_x(x_c, y_c, 0, \Delta \dot{y}_c) - F_x(x_c, y_c, 0, -\Delta \dot{y}_c)}{2\Delta \dot{y}_c} \\ \frac{F_y(x_c, y_c, \Delta \dot{x}_c, 0) - F_y(x_c, y_c, -\Delta \dot{x}_c, 0)}{2\Delta \dot{x}_c} & \frac{F_y(x_c, y_c, 0, \Delta \dot{y}_c) - F_y(x_c, y_c, 0, -\Delta \dot{y}_c)}{2\Delta \dot{y}_c} \end{bmatrix} \quad (2.102)$$

2.5 Mapeamento dos Coeficientes Dinâmicos

O mapeamento é realizado a partir da variação de um dos parâmetros geométricos utilizados para o cálculo dos coeficientes dinâmicos, a posição do centro do rotor no plano adimensional da seção transversal (X_c, Y_c) , que pode ser escrita em função da razão de excentricidade ε e do ângulo de atitude ϕ , conforme a Fig. 2.7 e as Eqs. (2.103) e (2.104).

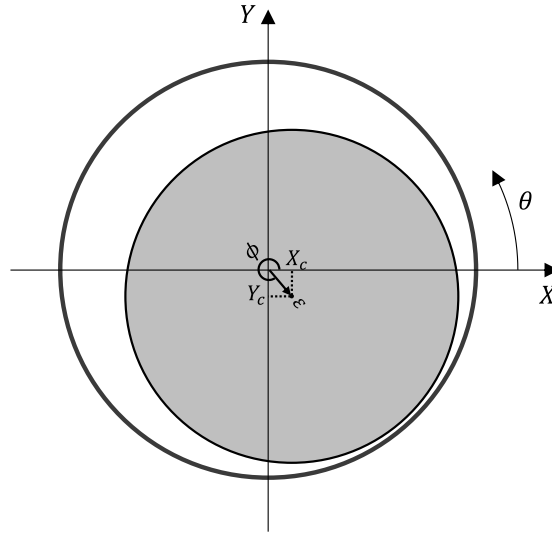


Figura 2.7: Plano da seção transversal adimensional de um selo plano.

$$X_c = \varepsilon \cos \phi \quad (2.103)$$

$$Y_c = \varepsilon \sin \phi \quad (2.104)$$

Onde $(X_c, Y_c) = (\varepsilon \cos \phi, \varepsilon \sin \phi)$. Sendo assim, para a obtenção do mapeamento, são necessários intervalos de variação tanto para a razão de excentricidade ε quanto para o ângulo de atitude ϕ , conforme as Eqs. (2.105) e (2.106):

$$0 \leq \phi \leq \phi_f < 2\pi \quad (2.105)$$

$$0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_f < 1 \quad (2.106)$$

Onde ε_f e ϕ_f são, respectivamente, a razão de excentricidade e ângulo de atitude máximos dos intervalos.

A partir dos números de pontos dos respectivos intervalos (n_ϕ e n_ε), determinam-se $n_\phi \cdot (n_\varepsilon - 1) + 1$ posições distintas para o centro do rotor, pois para $\varepsilon = 0$ as posições formadas são idênticas independentemente do valor de ϕ .

Para cada uma das posições distintas formadas, são determinados os coeficientes dinâmicos, as componentes da força de sustentação e o *leakage* (vazamento), e consequentemente, seus respectivos mapas. O *leakage* é calculado em regime permanente, conforme a Eq. (2.107).

$$leakage = \bar{c}l\rho(\omega r) \int_0^{2\pi} U_Z(1, \theta) \cdot H(1, \theta) R d\theta \quad (2.107)$$

2.6 Implementação Computacional Integrada a uma Biblioteca *Python* de Análise Rotor-dinâmica

No contexto do Projeto de Pesquisa e Desenvolvimento PT-200.20.00169: "INTELIGÊNCIA ARTIFICIAL APLICADA NA CRIAÇÃO DE MODELOS REPRESENTATIVOS DE MANCAIS HIDRODINÂMICOS, SELOS ANULARES E MÁQUINAS ROTATIVAS (ROSS - DIGITAL TWIN)", a implementação do BFM desenvolvido se dá em ambiente *Python* integrado à biblioteca *Rotordynamic Open-Source Software* (ROSS) através da classe *PlainSealFV*.

ROSS é um *software* desenvolvido usando o paradigma de código aberto no campo da rotordinâmica, licenciado e totalmente disponível em plataformas de hospedagem de código e com a possibilidade de contribuição direta pela comunidade, permitindo a construção de modelos de rotores e suas simulações numéricas (SILVA et al., 2020).

A classe *PlainSealFV* tem como objetivo principal determinar os coeficientes dinâmicos de selos planos para qualquer posição do centro do eixo a partir de parâmetros geométricos e

numéricos, condições de operação e propriedades do fluido lubrificante. Além disso, ainda é capaz de determinar campos de pressão e velocidade associados à solução numérica realizada para a obtenção dos coeficientes dinâmicos, assim como realizar o mapeamento desses coeficientes de acordo com a posição do centro do eixo.

CAPÍTULO III

VALIDAÇÃO NUMÉRICA

Nesse capítulo é apresentada a validação numérica do *bulk-flow model* (BFM) *PlainSealFV* desenvolvido através da comparação com resultados de duas referências adotadas. Também são realizados o mapeamento dos coeficientes dinâmicos dos selos utilizados para a validação de acordo com a posição do centro do eixo e uma breve análise sobre o comportamento dos coeficientes apresentados no mapeamento.

3.1 Posição Concêntrica

Para validar o modelo implementado para a posição concêntrica, utilizou-se os resultados obtidos por Snyder e Santos (2021) para o selo de plano proposto por Dietzen e Nordmann (1987), onde os coeficientes dinâmicos são comparados considerando velocidades de operação no intervalo $2000 \leq \omega \leq 6000$ [rpm].

A solução apresentada pela referência adotada também considera uma velocidade axial média de $\bar{u}_z = 16,46$ [m/s] e que as superfícies do rotor e do selo são hidraulicamente lisas. Dessa forma, realiza-se, primeiramente, uma comparação entre a velocidade axial média e o campo de velocidade axial (u_z) obtido utilizando o BFM *PlainSealFV*, para todas as velocidades de operação consideradas e rugosidades relativas ($\frac{e}{2\bar{c}}$) para as superfícies de 0,001 e 0,0001. Resultados obtidos utilizando o BFM *SEAL3* proposto por Zhao, Allaire e Brown (1998) também foram utilizados na comparação.

Os parâmetros geométricos, condições de operação e propriedades físicas do fluido lubrificante utilizados na simulação são apresentados na Tab. 3.1. Para a solução numérica, considera-se uma malha bidimensional com 30 elementos na direção axial Z, 30 elementos na direção circun-

ferencial θ , $tol = 10^{-3}$ e $tol_2 = 10^{-3}$.

Tabela 3.1: Parâmetros utilizados na simulação - Selo plano de água proposto por Dietzen e Nordmann (1987).

Símbolo	Descrição	Valor
l	Comprimento do selo	0,0235 [m]
r	Raio do rotor	0,0235 [m]
$\bar{c}$	Folga radial	2×10^{-4} [m]
(ε, ϕ)	Posição do centro do rotor	(0, 0) [-,rad]
Δp	Queda de pressão	$4,8 \times 10^5$ [Pa]
p_{exit}	Pressão na saída do selo	$1,01 \times 10^5$ [Pa]
ρ	Densidade do fluido lubrificante	996 [kg/m ³]
μ	Viscosidade dinâmica do fluido lubrificante	7×10^{-4} [Pa·s]
ξ_{inlet}	Coefficiente de perda de carga na entrada	0,1 [-]
ξ_{exit}	Coefficiente de recuperação de pressão na saída	1 [-]
Γ	Velocidade adimensional de precessão	1 [-]
η	Número de <i>Courant</i>	0,75 [-]
SR	<i>Swirl ratio</i>	0,5 [-]

Os campos de pressão e velocidade obtidos para $\omega = 4000$ [rpm] e $\frac{e}{2\bar{c}} = 0,0001$ são ilustrados nas Figs. 3.1 a 3.3.

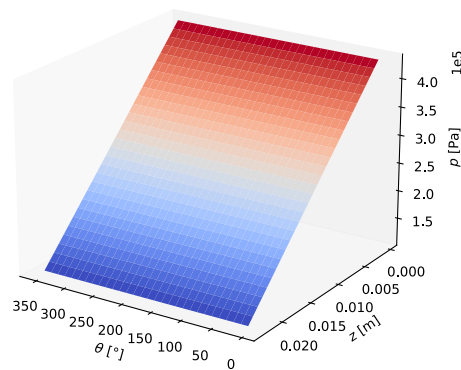


Figura 3.1: Campo de pressão - Selo plano de água proposto por Dietzen e Nordmann (1987).

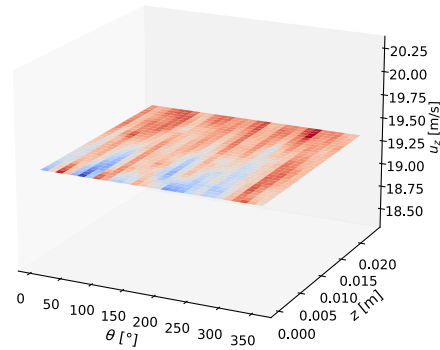


Figura 3.2: Campo de velocidade circunferencial - Selo plano de água proposto por Dietzen e Nordmann (1987).

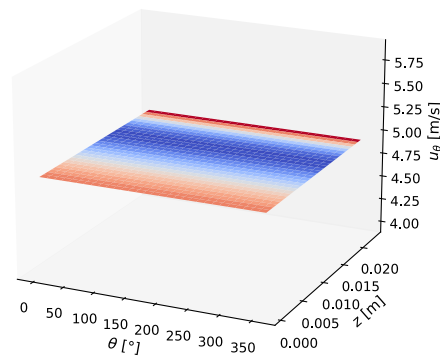


Figura 3.3: Campo de velocidade circunferencial - Selo plano de água proposto por Dietzen e Nordmann (1987).

Após o cálculo de suas médias e desvios padrão, conclui-se que para uma posição concêntrica, os valores de velocidade axial e circunferencial obtidos são constantes ao longo do domínio, conforme a Tab. 3.2.

Tabela 3.2: Valores médios dos campos de velocidade.

ω [rpm]	Média - u_z [m/s]	Desvio padrão - u_z [m/s]	Média - u_θ [m/s]	Desvio padrão - u_θ [m/s]
2000	19,466	$5,720 \times 10^{-14}$	2,461	$1,948 \times 10^{-11}$
3000	19,412	$4,394 \times 10^{-14}$	3,691	$2,447 \times 10^{-11}$
4000	19,336	$3,628 \times 10^{-14}$	4,922	$2,524 \times 10^{-11}$
4000	19,240	$2,953 \times 10^{-14}$	6,152	$2,401 \times 10^{-11}$
6000	19,125	$2,475 \times 10^{-14}$	7,383	$1,942 \times 10^{-11}$

Para testar a independência da malha numérica, comparam-se os valores do *leakage* e das velocidades axial e circunferencial médias para diferentes malhas numéricas e em todas as velocidades de operação consideradas. As Figs. 3.4 a 3.6 mostram as diferenças em relação aos valores obtidos com a malha numérica de 30 elementos na direção axial e 30 elementos na direção circunferencial. A rugosidade relativa considerada é $\frac{e}{2\bar{c}} = 0,0001$.

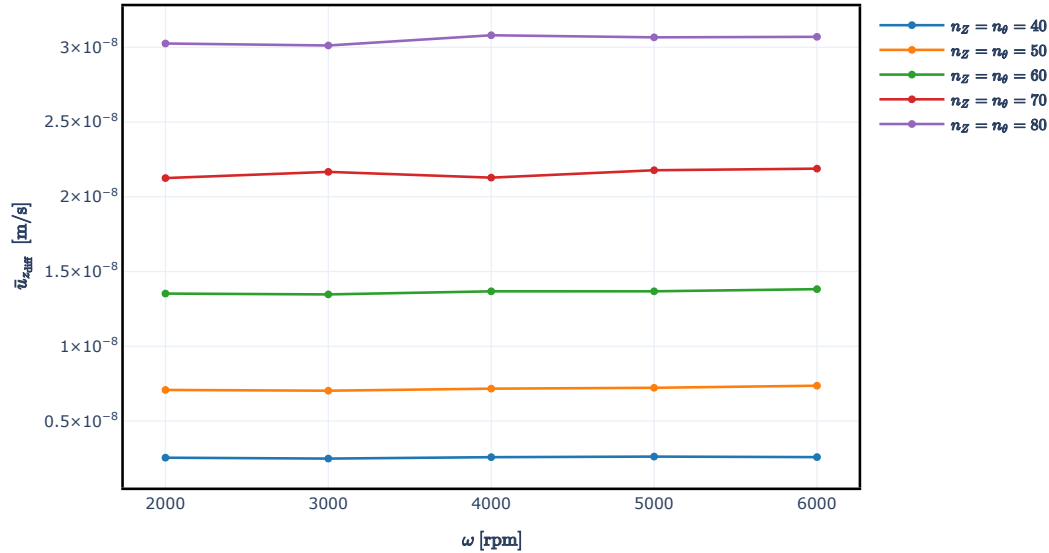


Figura 3.4: Teste de independência de malha (velocidade axial média) - Selo plano de água proposto por Dietzen e Nordmann (1987).

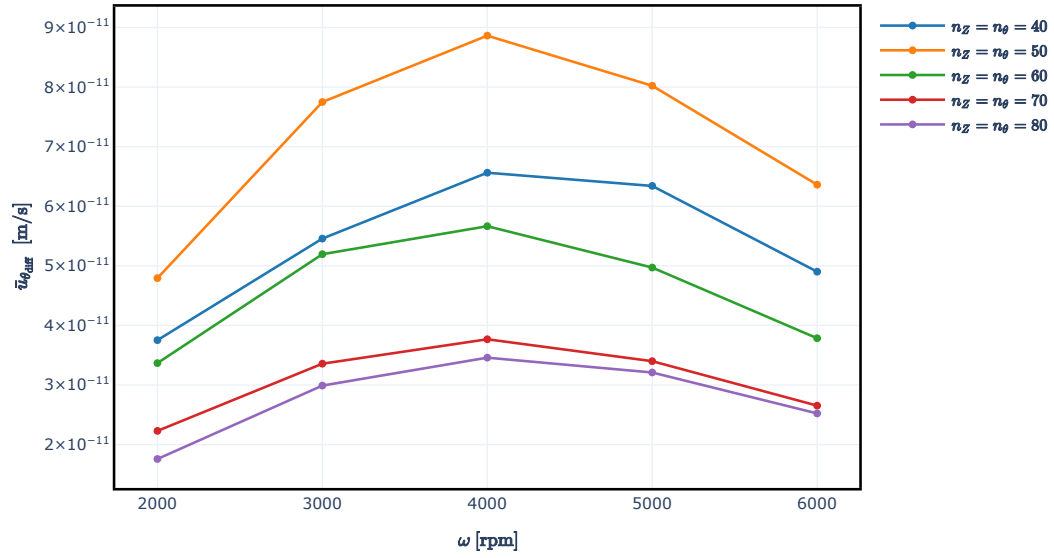


Figura 3.5: Teste de independência de malha (velocidade circunferencial média) - Selo plano de água proposto por Dietzen e Nordmann (1987).

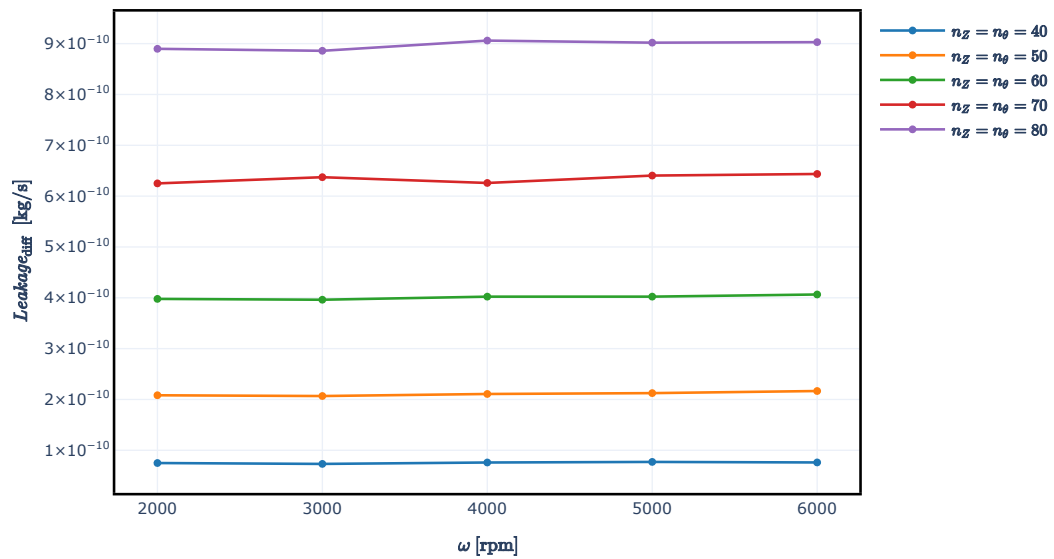


Figura 3.6: Teste de independência de malha (*leakage*) - Selo plano de água proposto por Dietzen e Nordmann (1987).

Diante das diferenças insignificantes observadas, opta-se por continuar com a malha numérica com 30 elementos na direção axial e 30 elementos na direção circunferencial adotada nas comparações propostas inicialmente. Nesse contexto, as Figs. 3.7 a 3.10 ilustram, respectivamente, as comparações entre os valores de velocidade axial média e vazamento (*leakage*).

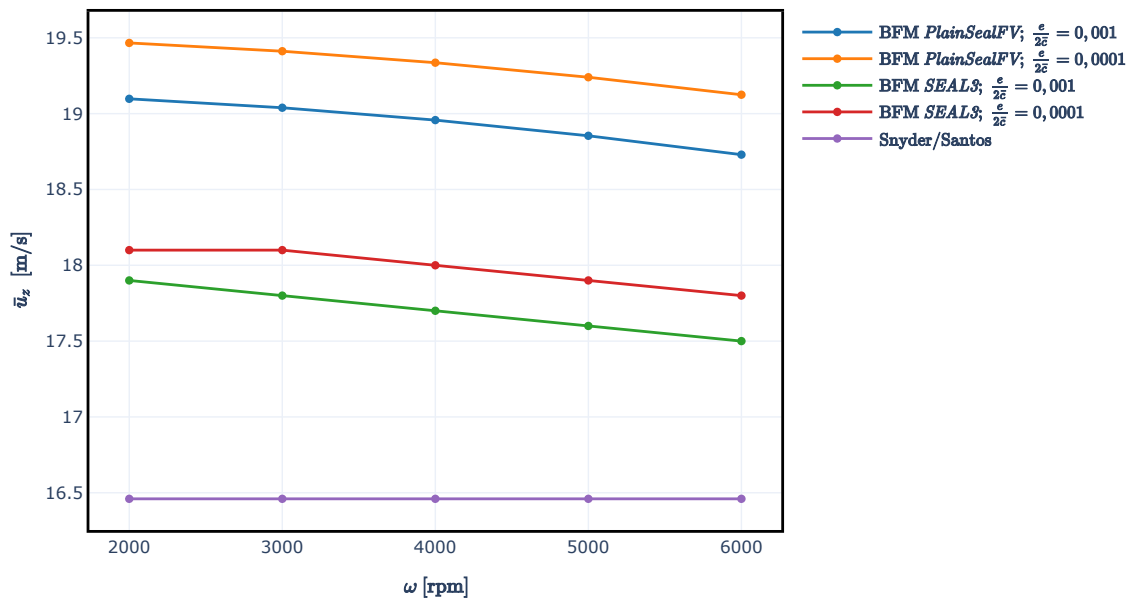


Figura 3.7: Velocidade axial média - Selo plano de água proposto por Dietzen e Nordmann (1987).

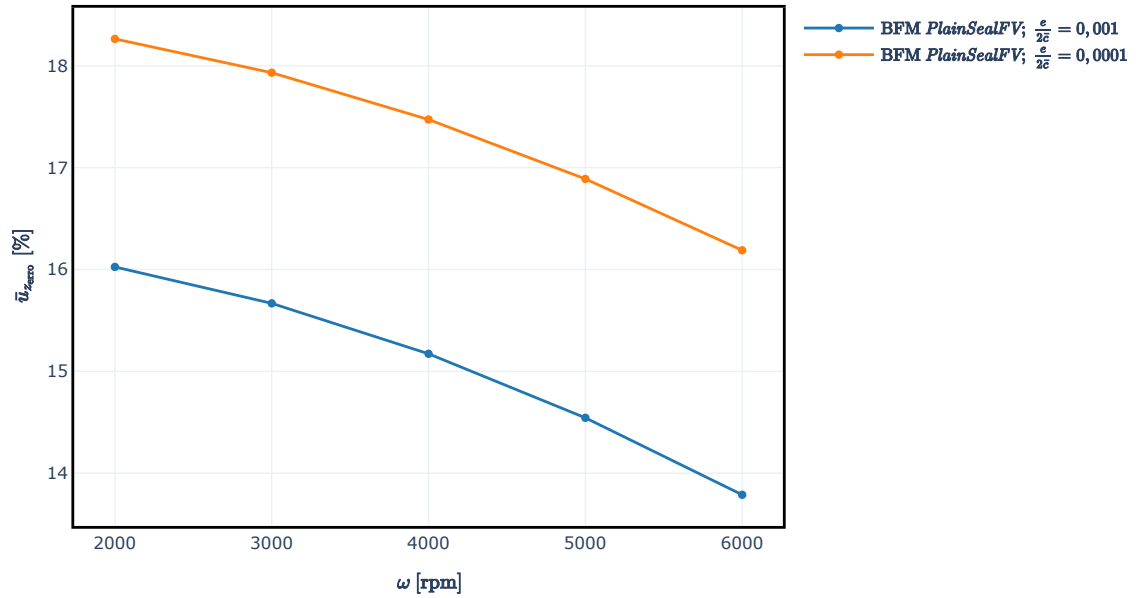


Figura 3.8: Erro da velocidade axial média relativo ao BFM Snyder/Santos - Selo plano de água proposto por Dietzen e Nordmann (1987).

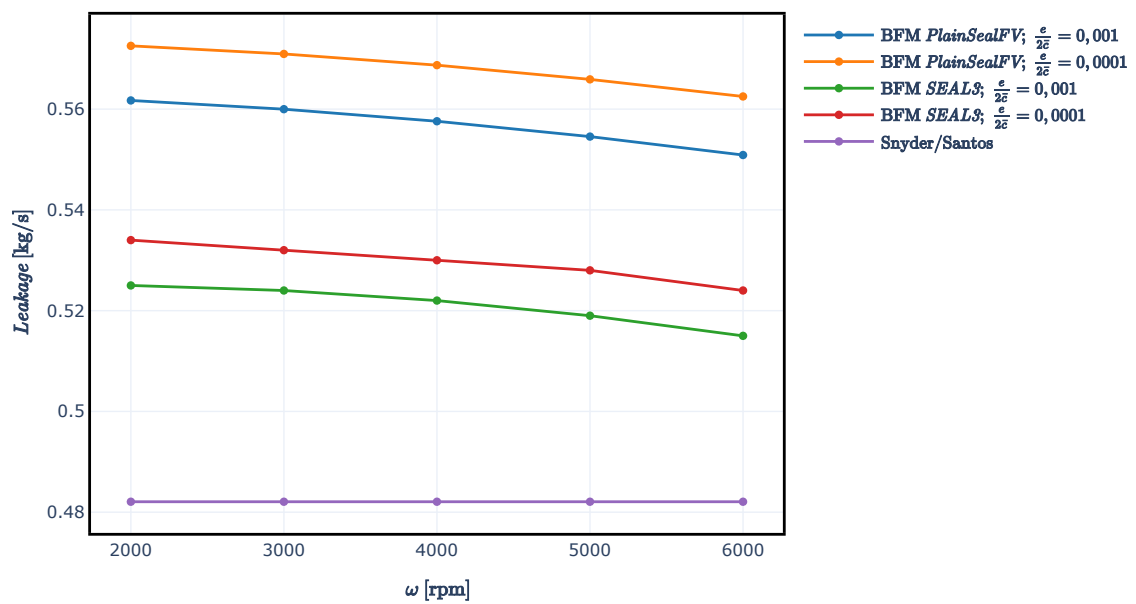


Figura 3.9: *Leakage* - Selo plano de água proposto por Dietzen e Nordmann (1987).

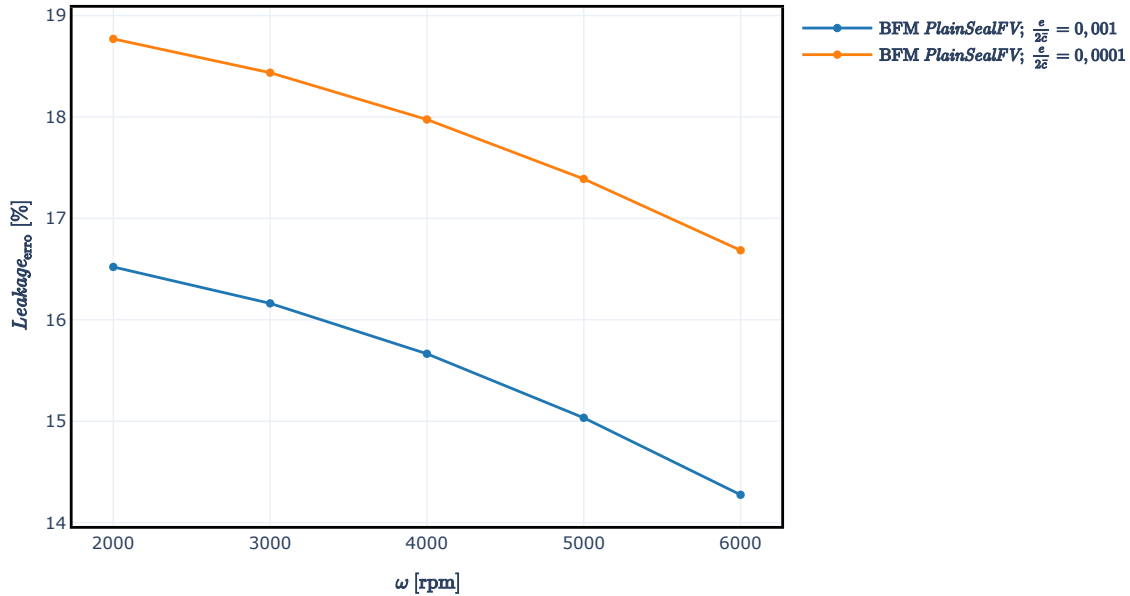


Figura 3.10: Erro do *leakage* relativo ao BFM Snyder/Santos - Selo plano de água proposto por Dietzen e Nordmann (1987).

Onde nota-se que os valores apresentados pelos BFM *PlainSealFV* e *SEAL3* se aproximam e apresentam um comportamento similar. Foram observados erros relativos entre 13,78 e 18,26 % para a velocidade axial média e erros relativos entre 14,27 e 18,77 % para o *leakage*, em relação aos valores utilizados por Snyder e Santos (2021) como parâmetros para a simulação.

Observa-se ainda que, com o aumento da velocidade de operação (ω), os valores de velocidade axial média e *leakage* tendem a convergir e minimizar o erro relativo aos valores de referência.

Comparou-se também os coeficientes de rigidez e amortecimento, porém é necessário ressaltar que todos os BFM, assim como a abordagem com CFD, utilizam métodos diferentes entre si para determinar os coeficientes dinâmicos. As comparações são apresentadas nas Figs. 3.11 a 3.26.

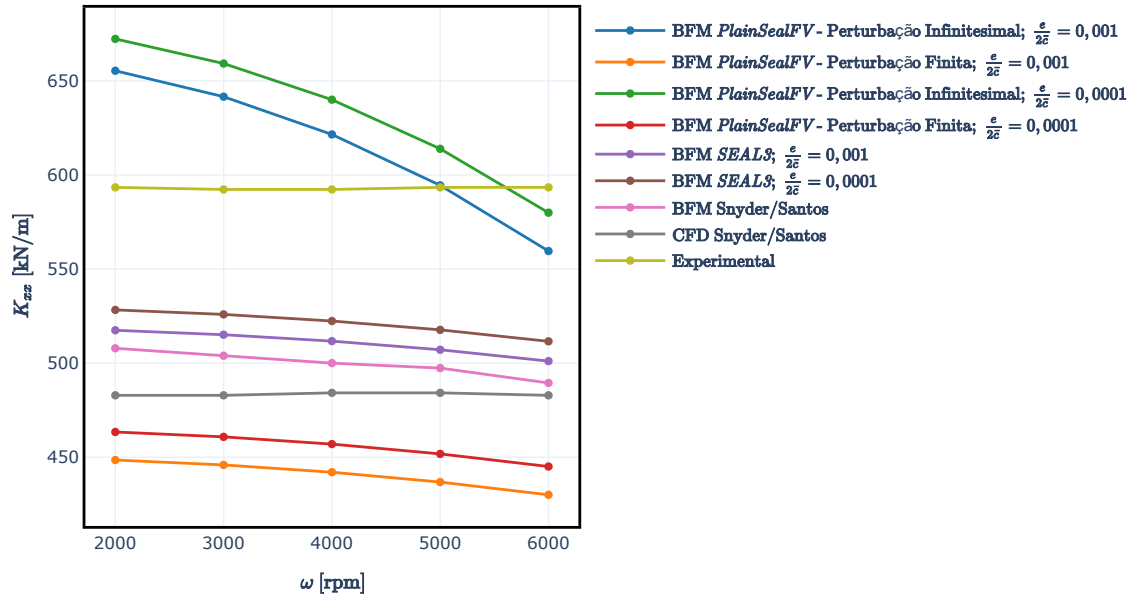


Figura 3.11: K_{xx} - Selo plano de água proposto por Dietzen e Nordmann (1987).

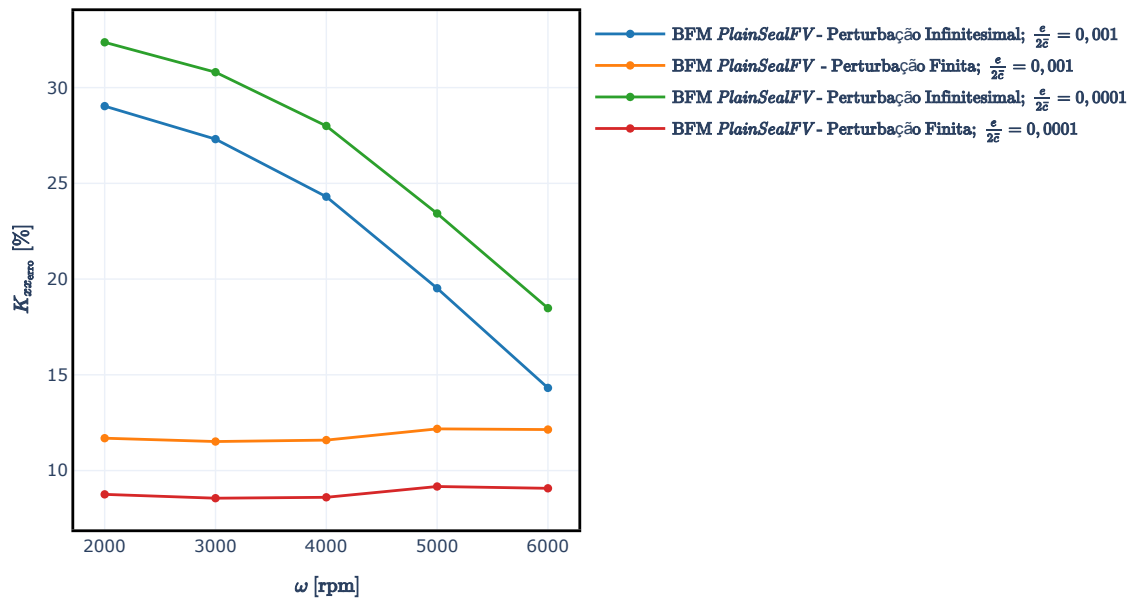


Figura 3.12: Erro de K_{xx} relativo ao BFM Snyder/Santos - Selo plano de água proposto por Dietzen e Nordmann (1987).

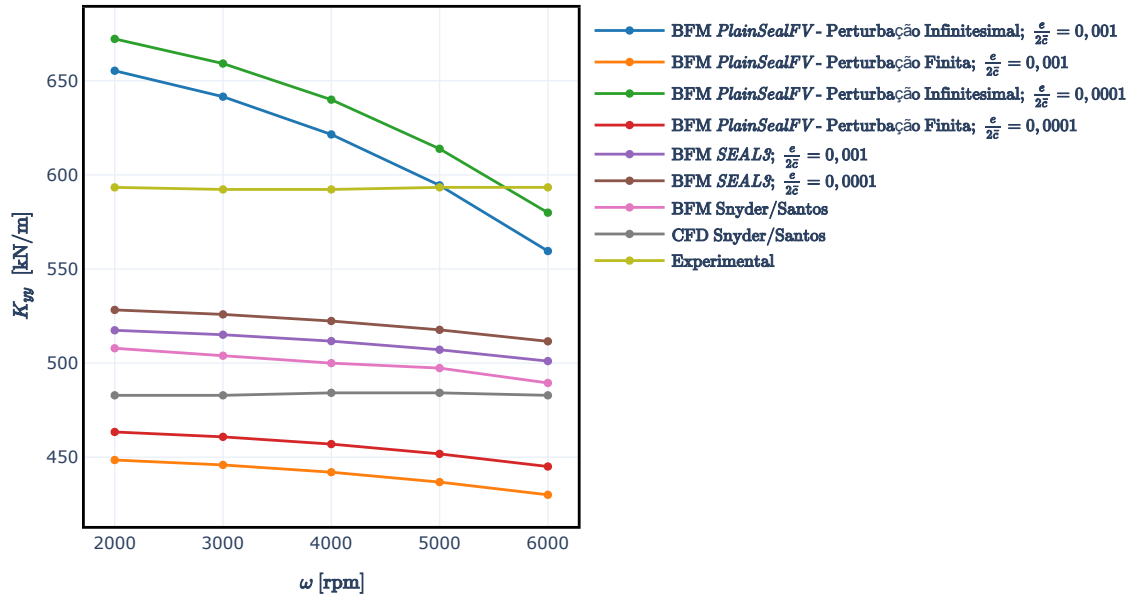


Figura 3.13: K_{yy} - Selo plano de água proposto por Dietzen e Nordmann (1987).

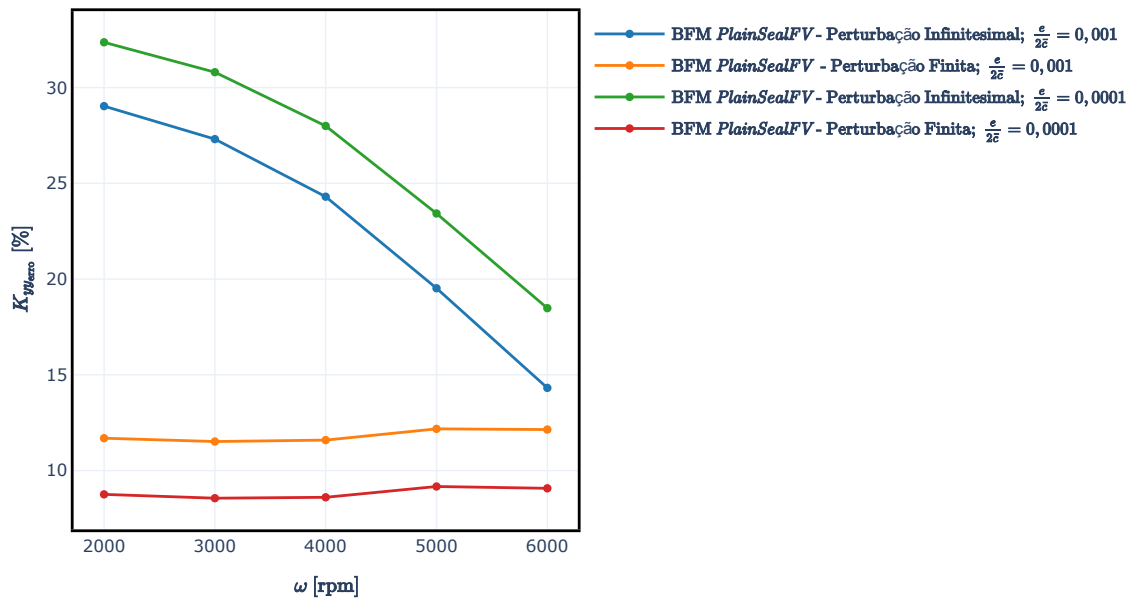


Figura 3.14: Erro de K_{yy} relativo ao BFM Snyder/Santos - Selo plano de água proposto por Dietzen e Nordmann (1987).

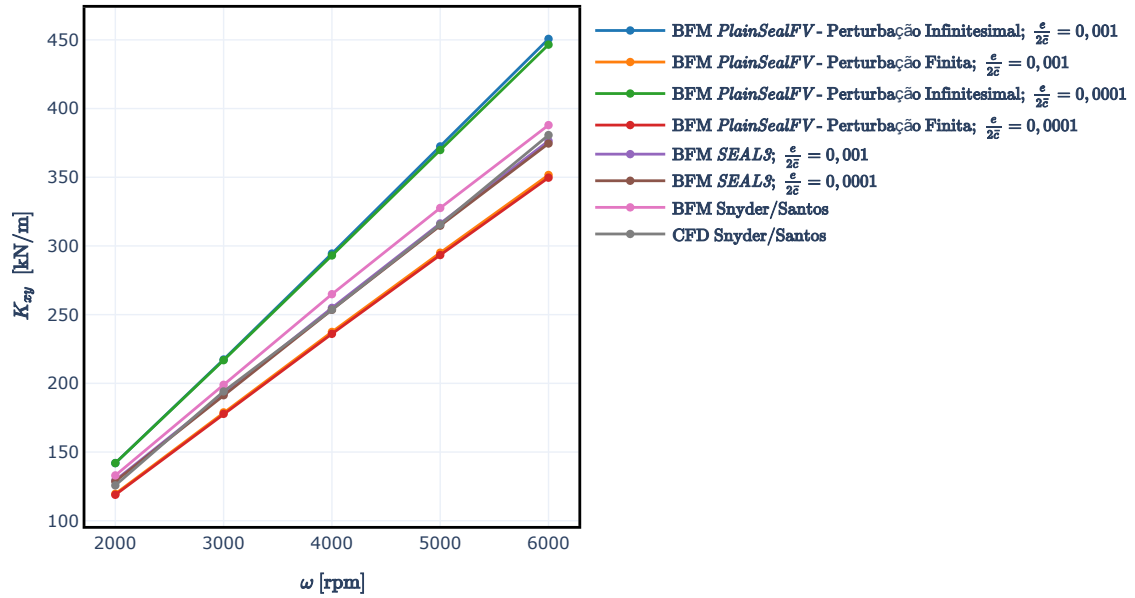


Figura 3.15: K_{xy} - Selo plano de água proposto por Dietzen e Nordmann (1987).

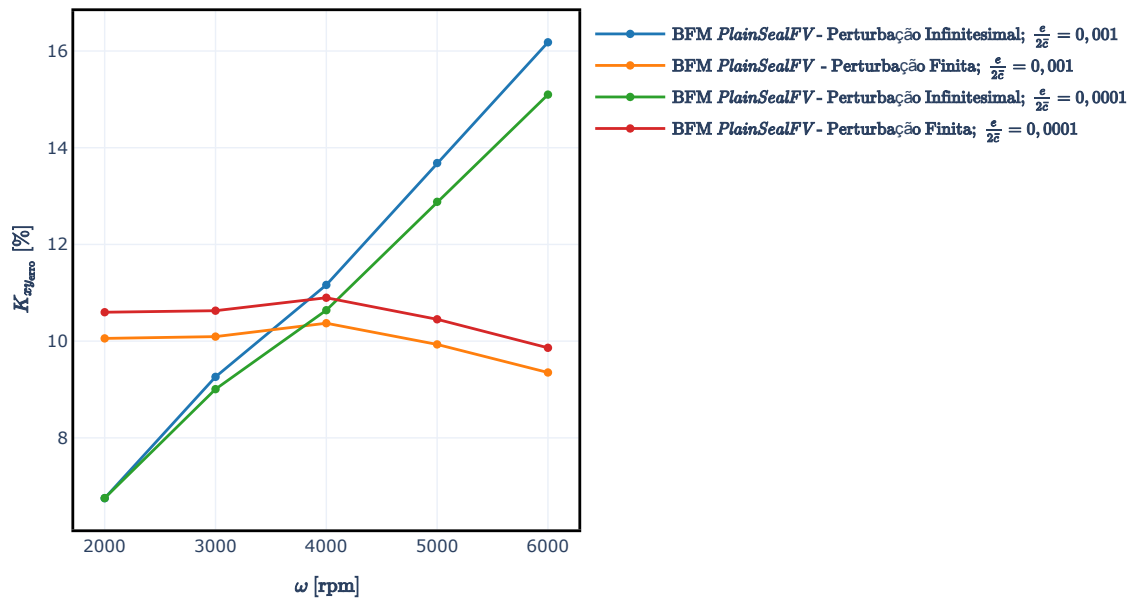


Figura 3.16: Erro de K_{xy} relativo ao BFM Snyder/Santos - Selo plano de água proposto por Dietzen e Nordmann (1987).

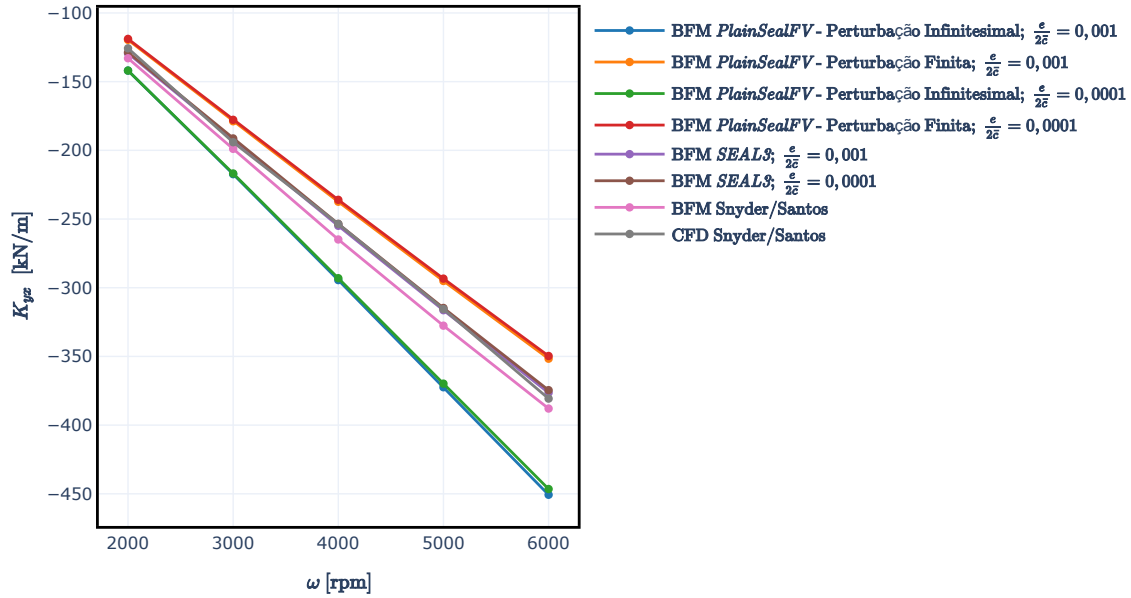


Figura 3.17: K_{yx} - Selo plano de água proposto por Dietzen e Nordmann (1987).

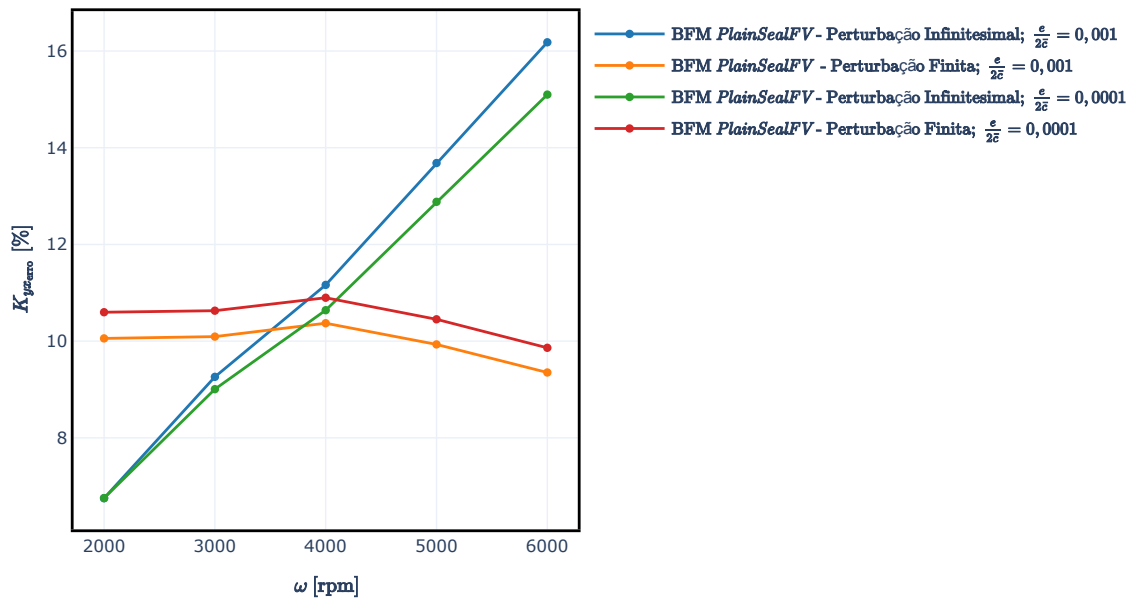


Figura 3.18: Erro de K_{yx} relativo ao BFM Snyder/Santos - Selo plano de água proposto por Dietzen e Nordmann (1987).

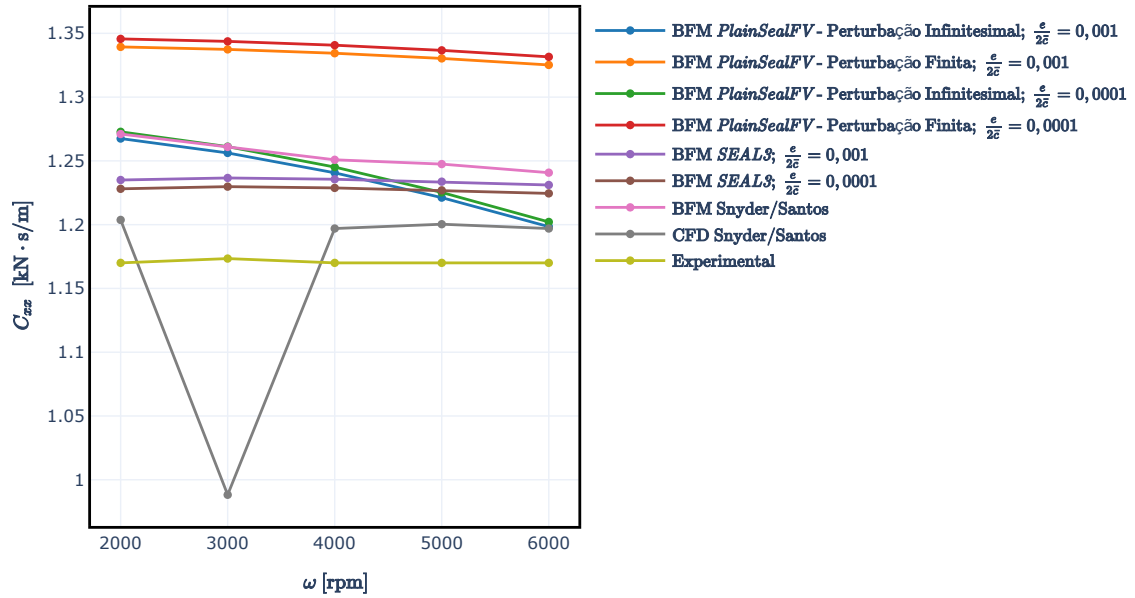


Figura 3.19: C_{xx} - Selo plano de água proposto por Dietzen e Nordmann (1987).

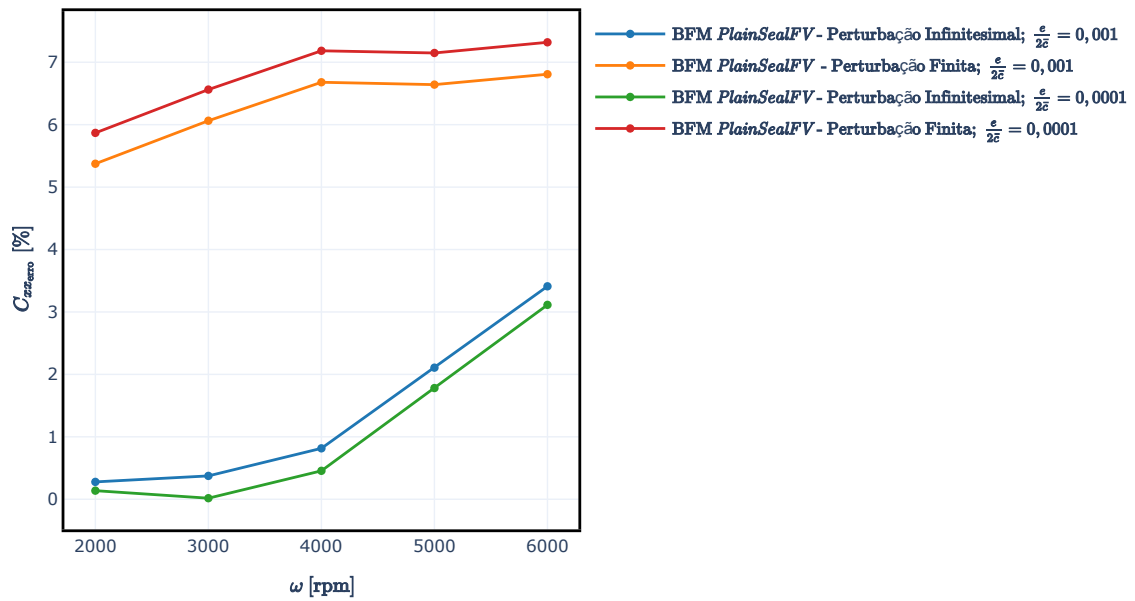


Figura 3.20: Erro de C_{xx} relativo ao BFM Snyder/Santos - Selo plano de água proposto por Dietzen e Nordmann (1987).

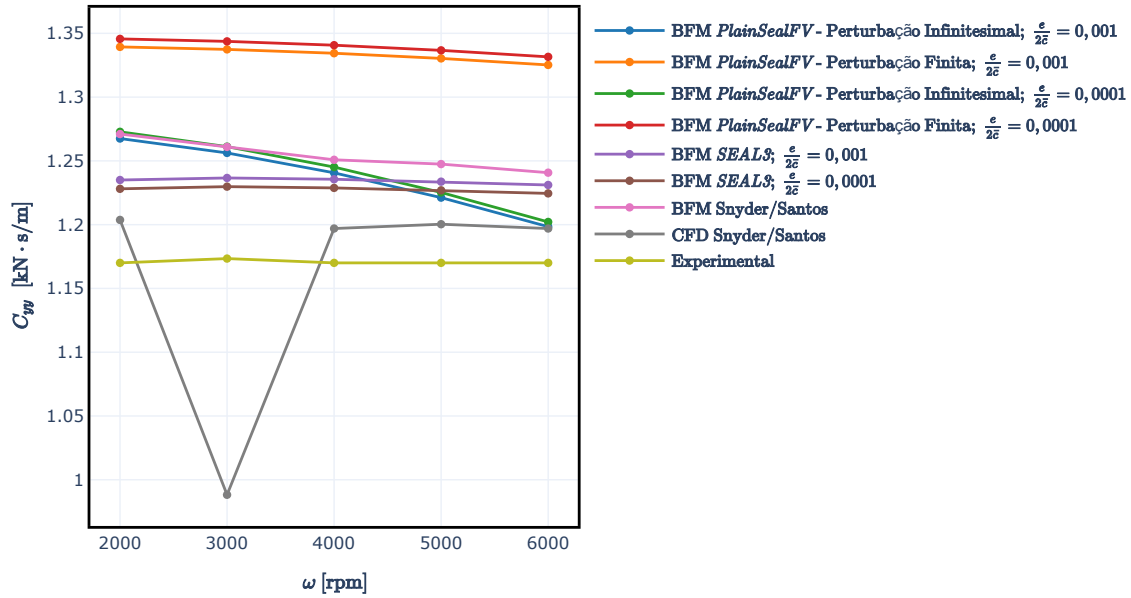


Figura 3.21: C_{yy} - Selo plano de água proposto por Dietzen e Nordmann (1987).

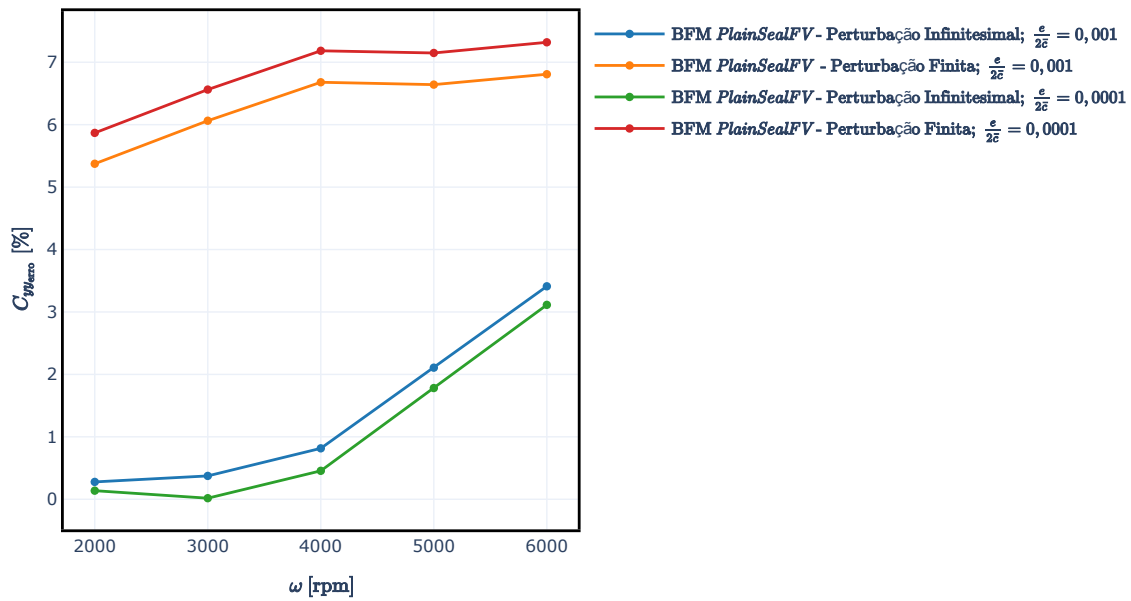


Figura 3.22: Erro de C_{yy} relativo ao BFM Snyder/Santos - Selo plano de água proposto por Dietzen e Nordmann (1987).

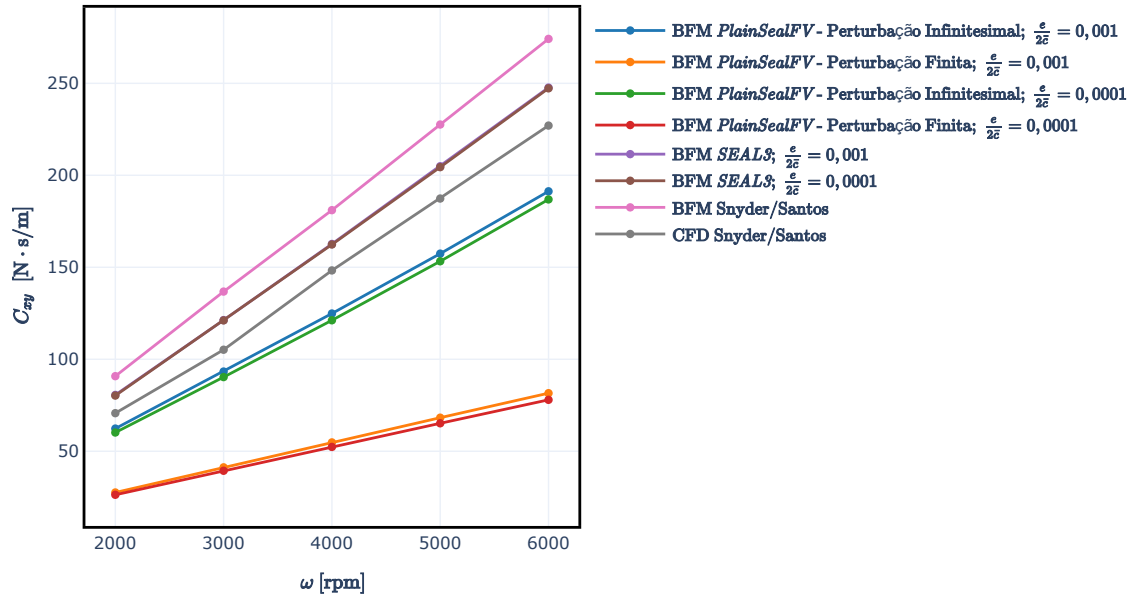


Figura 3.23: C_{xy} - Selo plano de água proposto por Dietzen e Nordmann (1987).

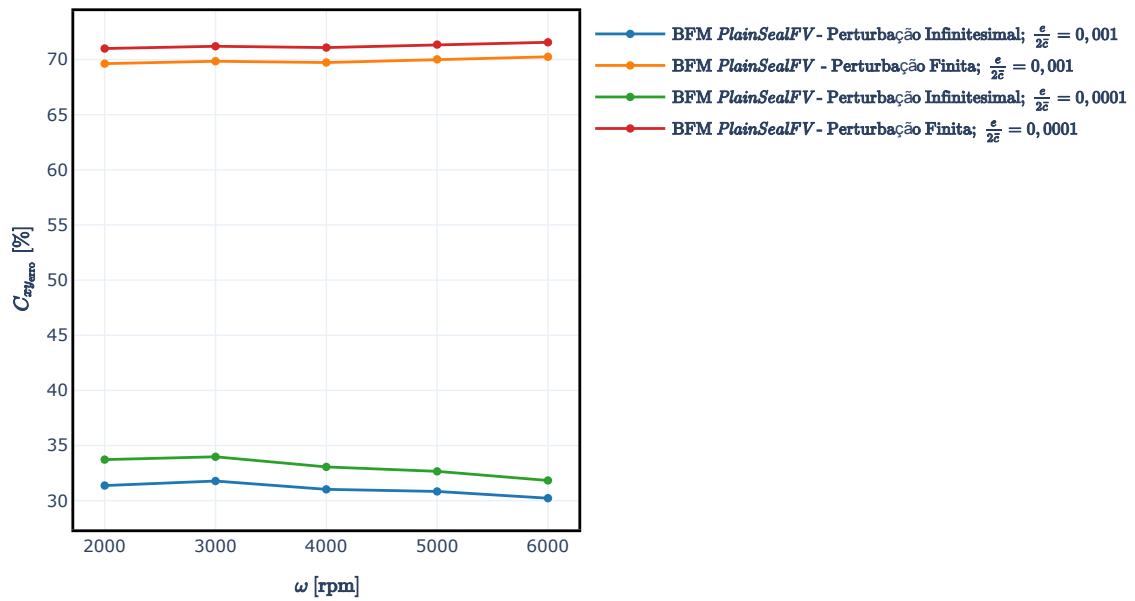


Figura 3.24: Erro de C_{xy} relativo ao BFM Snyder/Santos - Selo plano de água proposto por Dietzen e Nordmann (1987).

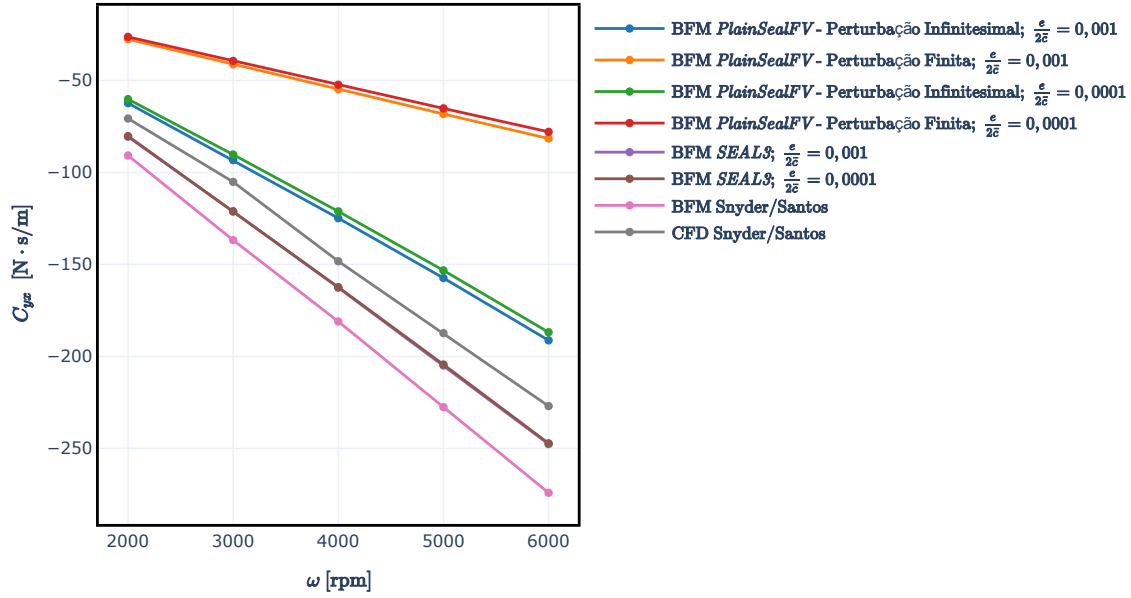


Figura 3.25: C_{yx} - Selo plano de água proposto por Dietzen e Nordmann (1987).

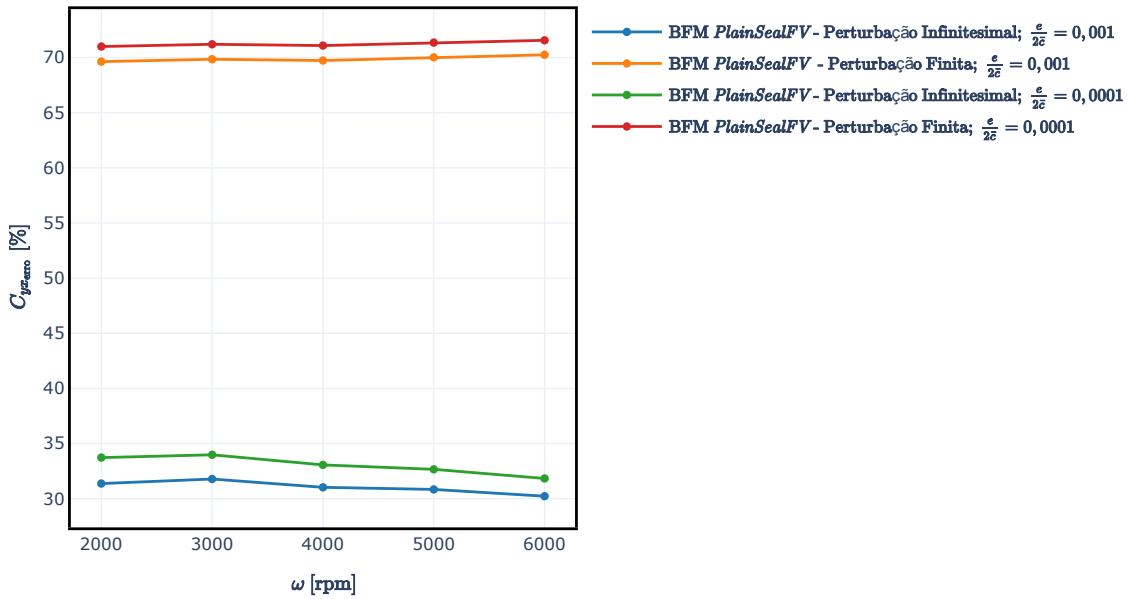


Figura 3.26: Erro de C_{yx} relativo ao BFM Snyder/Santos - Selo plano de água proposto por Dietzen e Nordmann (1987).

Os dois métodos utilizados para o cálculo dos coeficientes dinâmicos demonstraram um comportamento consistentemente semelhante ao BFM Snyder/Santos em todas as comparações realizadas.

Apesar disso, foram identificadas diferenças percentuais significativas em alguns casos específicos. O Método da Perturbação Infinitesimal, por exemplo, apresentou valores para os coeficientes diretos de rigidez que, embora bastante próximos dos experimentais, diferiram percentualmente de forma notável em relação ao BFM Snyder/Santos. No entanto, essas diferenças não alteraram a ordem de grandeza dos coeficientes, garantindo uma boa aproximação dos resultados. Adicionalmente, esse método demonstrou maior eficiência computacional, demandando menor tempo de processamento devido à necessidade de resolver um número reduzido de sistemas de equações para determinar os coeficientes dinâmicos.

Por sua vez, o Método da Perturbação Finita apresentou melhor desempenho na obtenção dos coeficientes diretos de rigidez, fornecendo valores mais próximos dos resultados de referência. No entanto, foram observadas discrepâncias significativas, tanto percentuais quanto na ordem de grandeza, para os coeficientes cruzados de amortecimento, evidenciando uma limitação do método em relação a esses parâmetros específicos.

Outro aspecto relevante identificado foi o impacto praticamente desprezível das diferentes rugosidades relativas consideradas nos resultados obtidos. No caso da posição concêntrica, os resultados fornecidos pelo modelo BFM *PlainSealFV* sugerem uma antissimetria nos coeficientes dinâmicos, descrita pelas relações $K_{xx} = K_{yy}$, $K_{xy} = -K_{yx}$, $C_{xx} = C_{yy}$ e $C_{xy} = -C_{yx}$.

Além disso, destaca-se que o BFM proposto por Snyder e Santos (2021) incorpora uma quarta equação no modelo matemático, a Equação de Conservação de Energia, o que representa uma diferença fundamental em relação aos modelos comparados. Como consequência, os erros relativos observados são influenciados por essa discrepância na formulação dos modelos matemáticos, o que pode explicar algumas das variações encontradas nos resultados.

3.2 Posições Excêntricas

A validação para posições excêntricas se dá a partir dos resultados obtidos por Ha e Choe (2012) para o selo plano abordado por Marquette, Childs e Andres (1997). Os coeficientes dinâmicos e o vazamento (*leakage*) são comparados considerando razões de excentricidade no intervalo $0 \leq \varepsilon \leq 0,5$ e um ângulo de atitude de $\phi = 0$ [rad]. A Tab. 3.3 apresenta os parâmetros

geométricos, condições de operação e propriedades físicas do fluido lubrificante utilizados na simulação. Para a solução numérica, considera-se uma malha bidimensional com 30 elementos na direção axial Z, 30 elementos na direção circunferencial θ , $tol = 10^{-3}$ e $tol_2 = 10^{-3}$.

Tabela 3.3: Parâmetros utilizados na simulação - Selo plano de água proposto por Marquette, Childs e Andres (1997).

Símbolo	Descrição	Valor
l	Comprimento do selo	0,03493 [m]
r	Raio do rotor	0,038145 [m]
$\bar{c}$	Folga radial	$1,1 \times 10^{-4}$ [m]
Δp	Queda de pressão	$6,89 \times 10^6$ [Pa]
p_{exit}	Pressão na saída do selo	$1,01 \times 10^5$ [Pa]
ω	Velocidade de operação	10200 [rpm]
ρ	Densidade do fluido lubrificante	996 [kg/m ³]
μ	Viscosidade dinâmica do fluido lubrificante	$1,13544 \times 10^{-3}$ [Pa·s]
ξ_{inlet}	Coeficiente de perda de carga na entrada	0,1 [-]
ξ_{exit}	Coeficiente de recuperação de pressão na saída	1 [-]
Γ	Velocidade adimensional de precessão	1 [-]
η	Número de <i>Courant</i>	0,75 [-]
SR	<i>Swirl ratio</i>	0 [-]

As comparações ainda consideram rugosidades relativas ($\frac{e}{2\bar{c}}$) de 0,001 e 0,0001 para as superfícies do selo e do rotor. As Fig. 3.27 a 3.46 mostram as comparações.

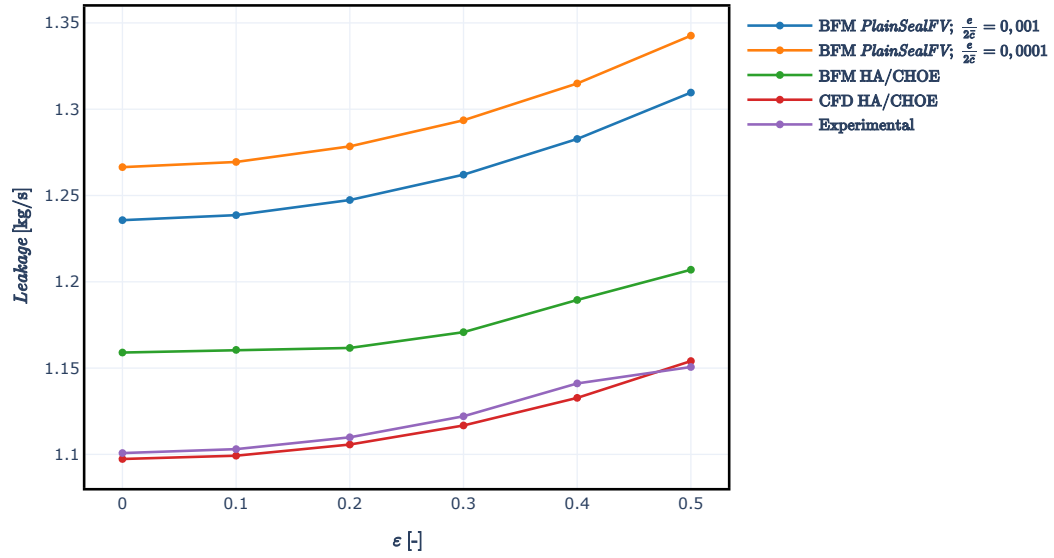


Figura 3.27: *Leakage* - Selo plano de água proposto por Marquette, Childs e Andres (1997).

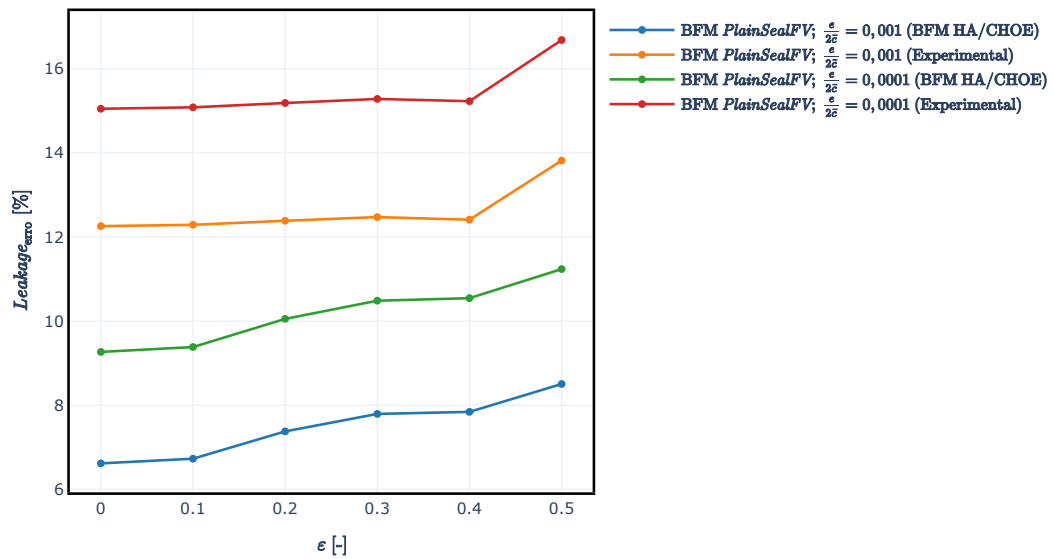


Figura 3.28: Erro do *Leakage* relativo ao BFM Ha/Choe e resultados experimentais - Selo plano de água proposto por Marquette, Childs e Andres (1997).

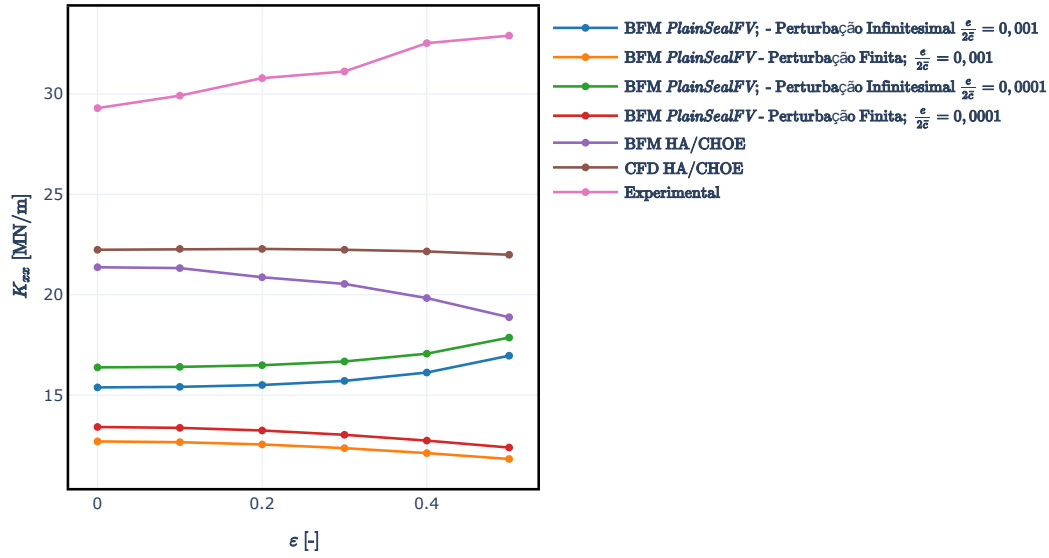


Figura 3.29: K_{xx} - Selo plano de água proposto por Marquette, Childs e Andres (1997).

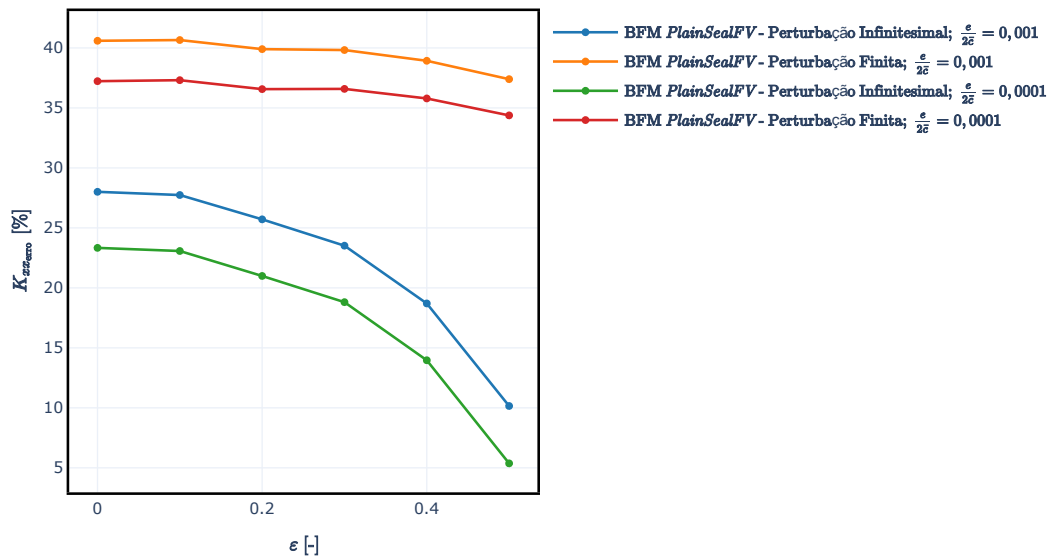


Figura 3.30: Erro de K_{xx} relativo ao BFM Ha/Choe - Selo plano de água proposto por Marquette, Childs e Andres (1997).

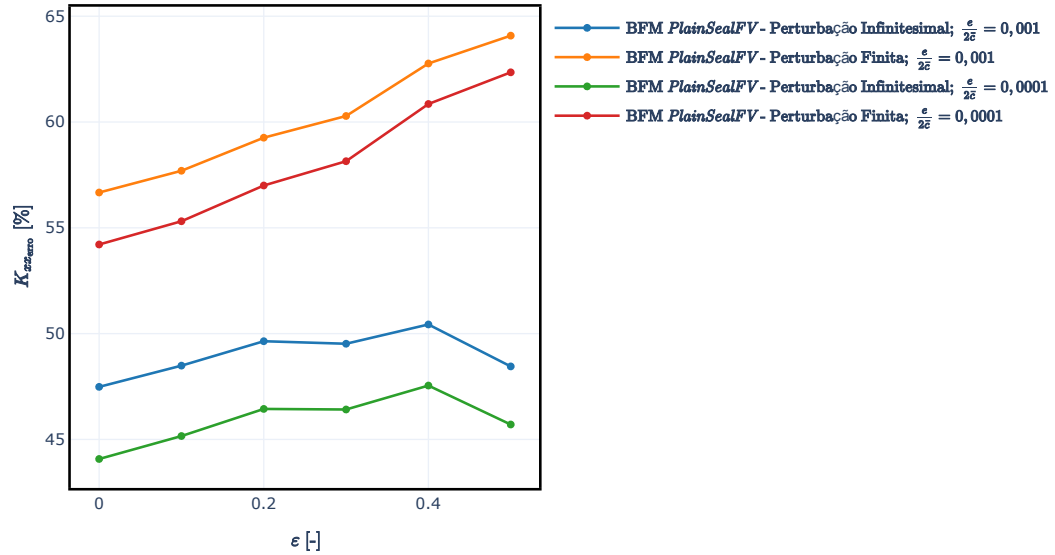


Figura 3.31: Erro de K_{xx} relativo aos resultados experimentais - Selo plano de água proposto por Marquette, Childs e Andres (1997).

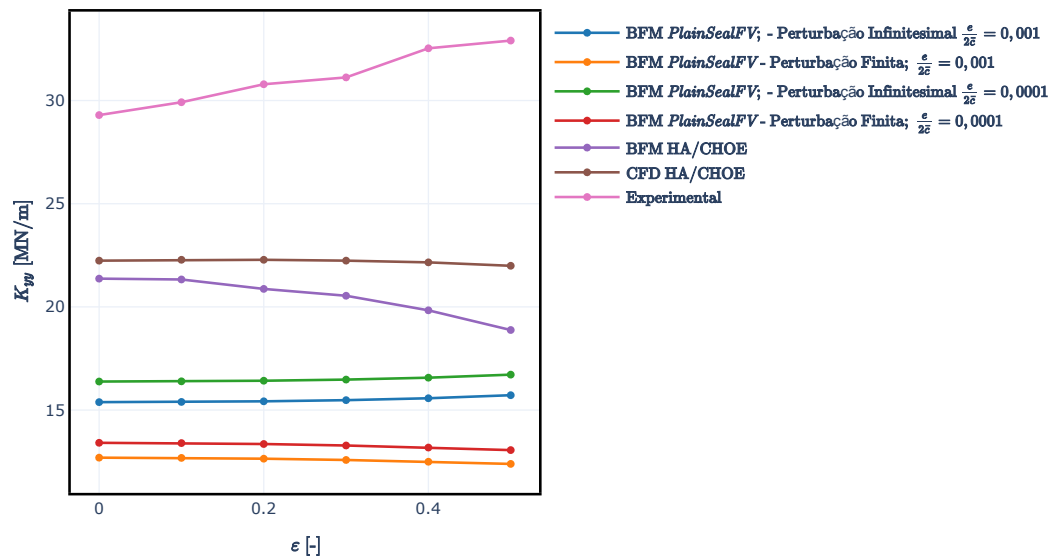


Figura 3.32: K_{yy} - Selo plano de água proposto por Marquette, Childs e Andres (1997).

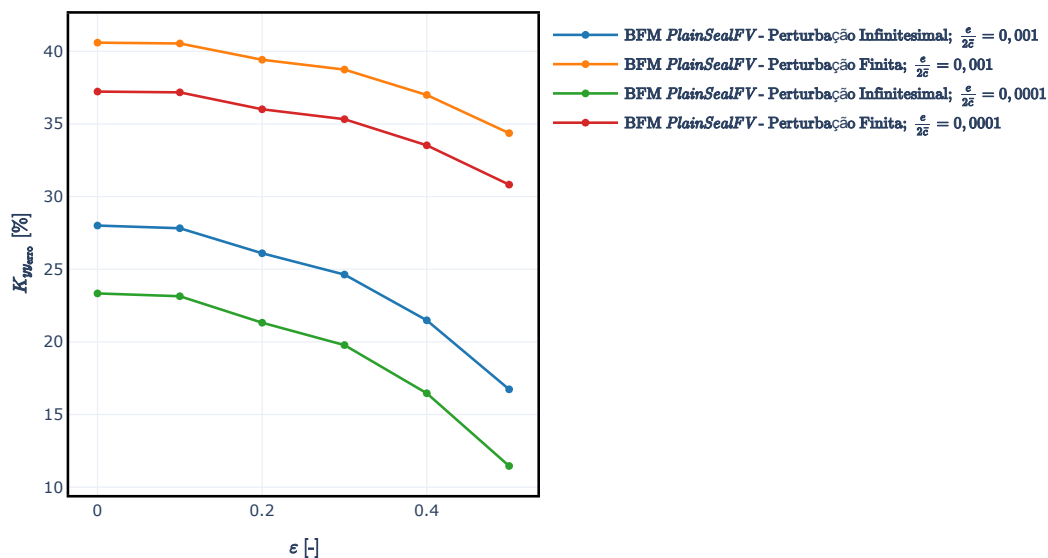


Figura 3.33: Erro de K_{yy} relativo ao BFM Ha/Choe - Selo plano de água proposto por Marquette, Childs e Andres (1997).

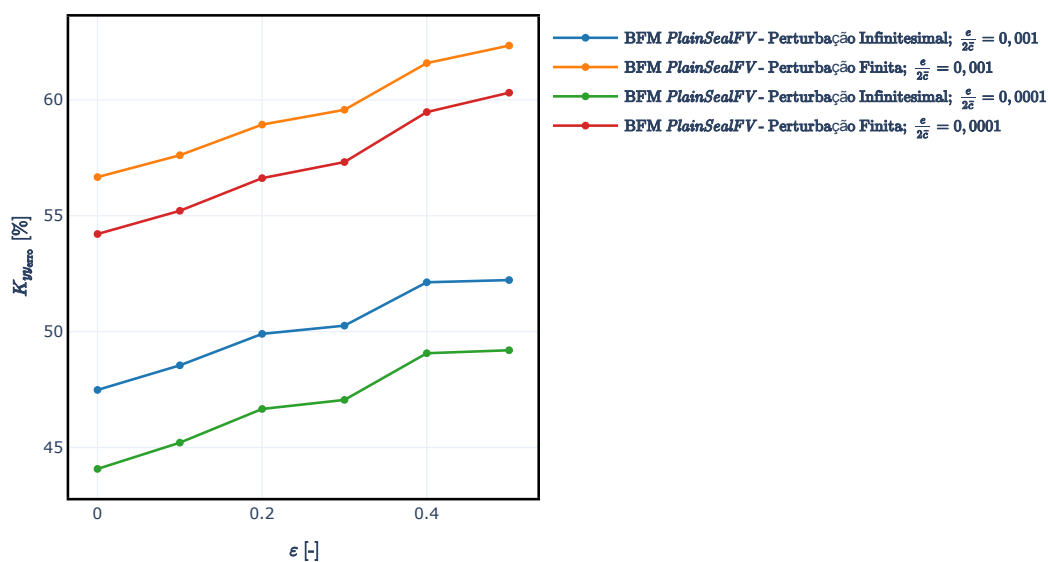


Figura 3.34: Erro de K_{yy} relativo aos resultados experimentais - Selo plano de água proposto por Marquette, Childs e Andres (1997).

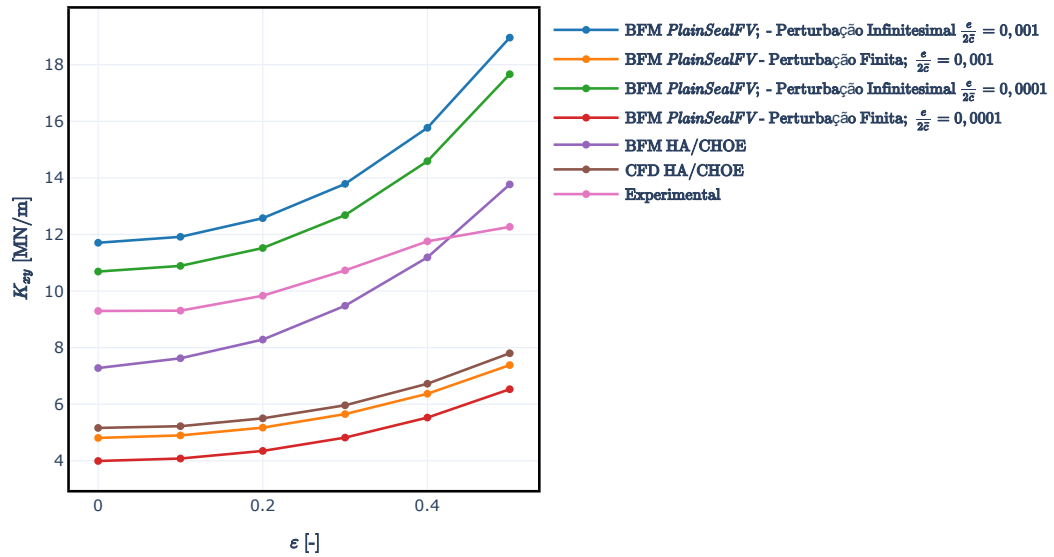


Figura 3.35: K_{xy} - Selo plano de água proposto por Marquette, Childs e Andres (1997).

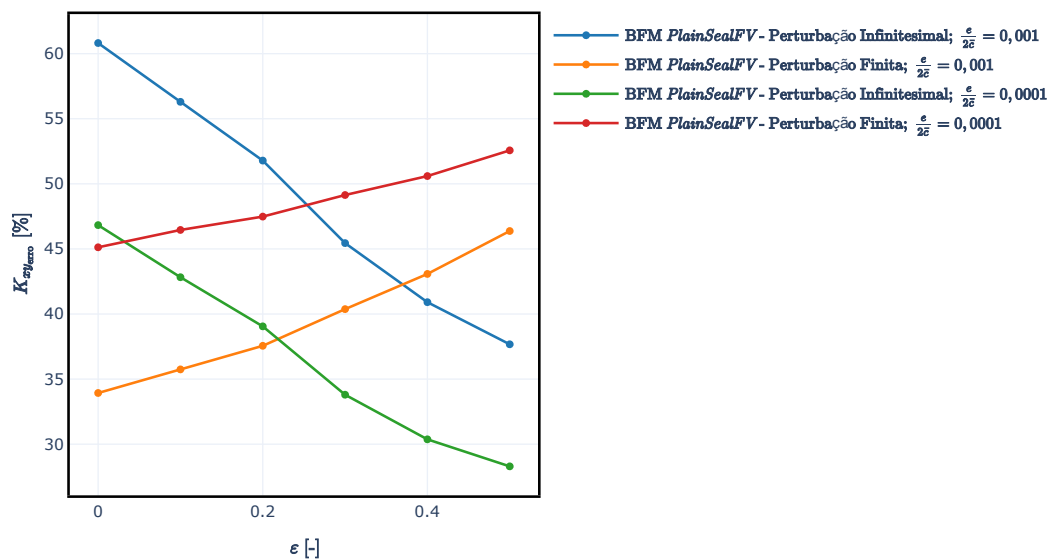


Figura 3.36: Erro de K_{xy} relativo ao BFM Ha/Choe - Selo plano de água proposto por Marquette, Childs e Andres (1997).

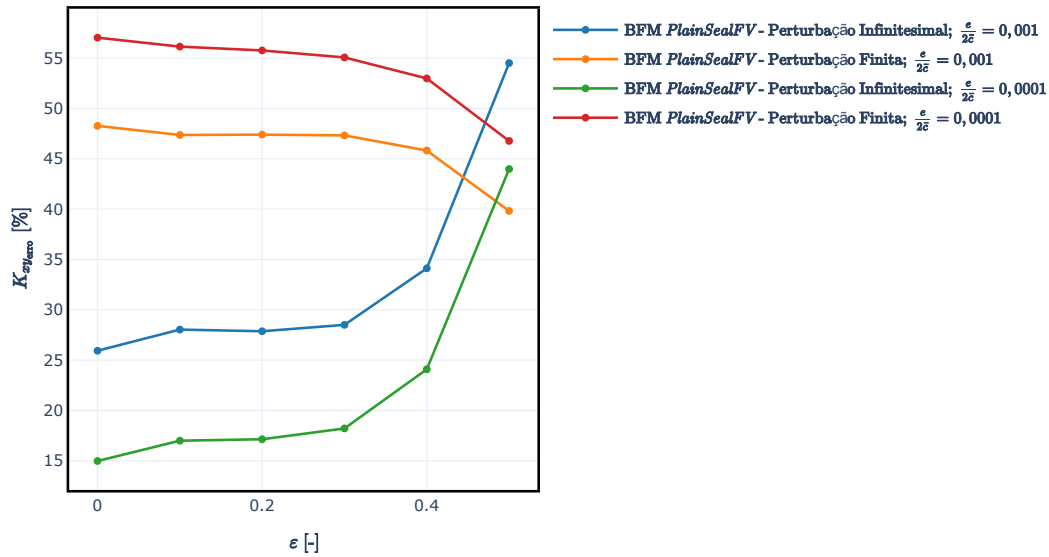


Figura 3.37: Erro de K_{xy} relativo aos resultados experimentais - Selo plano de água proposto por Marquette, Childs e Andres (1997).

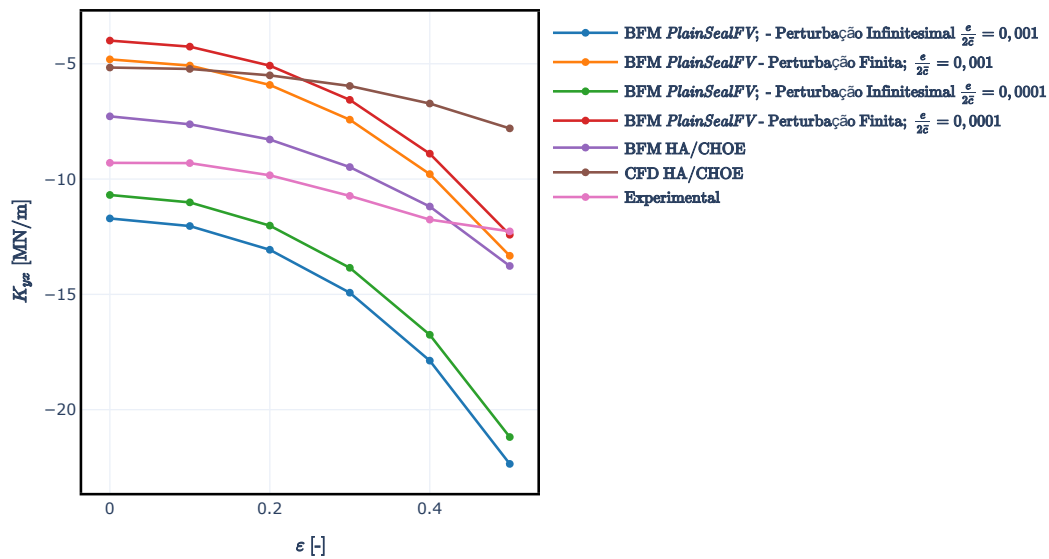


Figura 3.38: K_{yx} - Selo plano de água proposto por Marquette, Childs e Andres (1997).

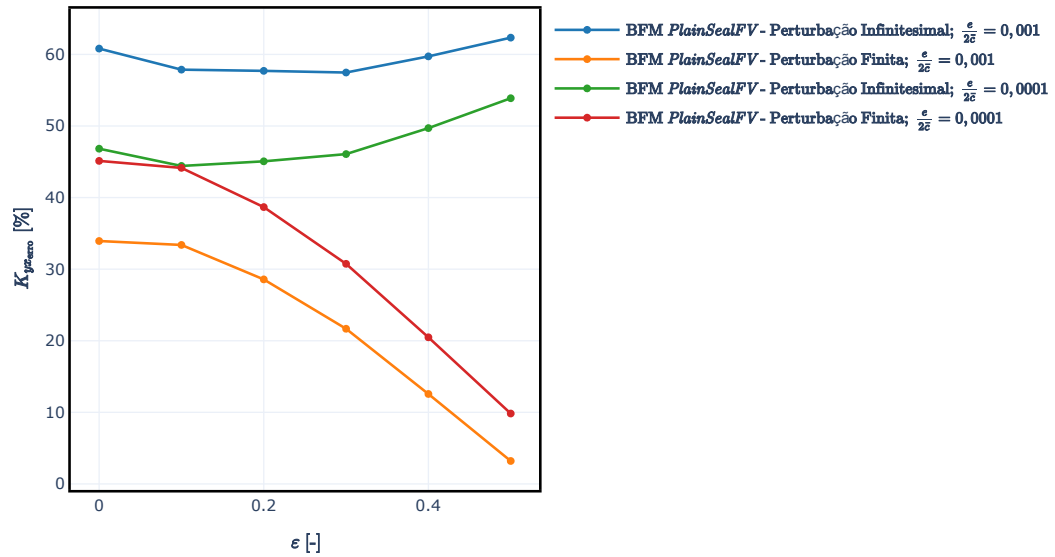


Figura 3.39: Erro de K_{yx} relativo ao BFM Ha/Choe - Selo plano de água proposto por Marquette, Childs e Andres (1997).

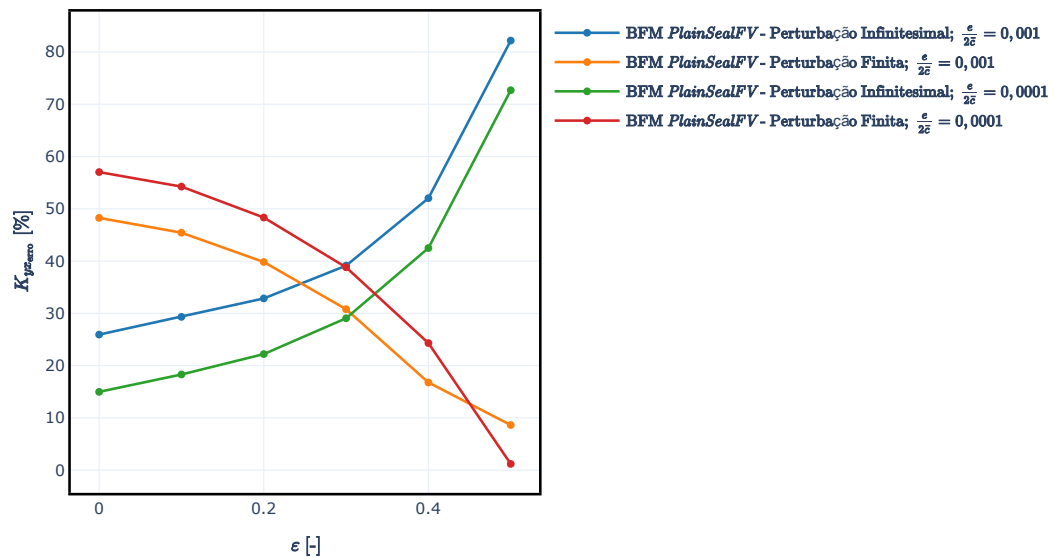


Figura 3.40: Erro de K_{yx} relativo aos resultados experimentais - Selo plano de água proposto por Marquette, Childs e Andres (1997).

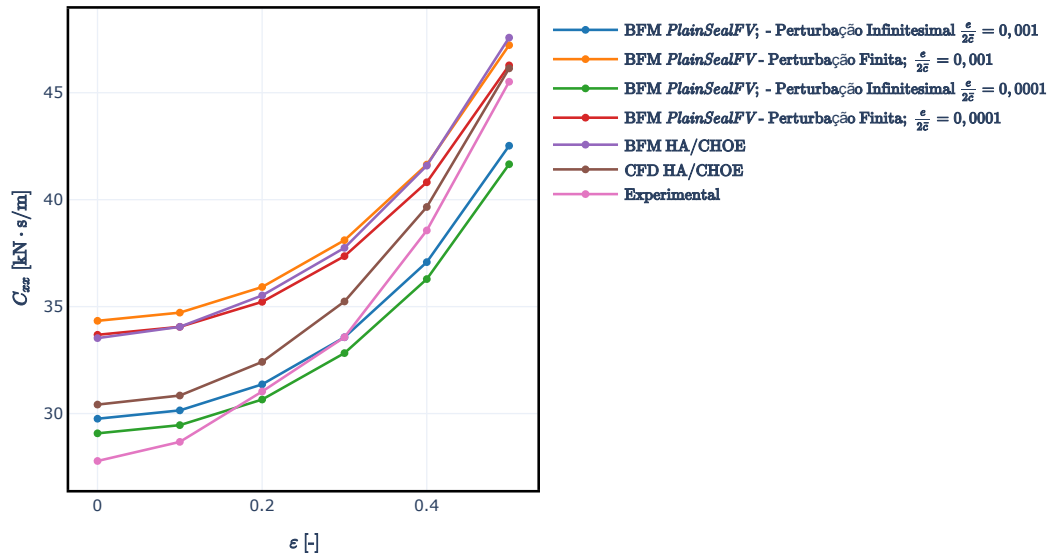


Figura 3.41: C_{xx} - Selo plano de água proposto por Marquette, Childs e Andres (1997).

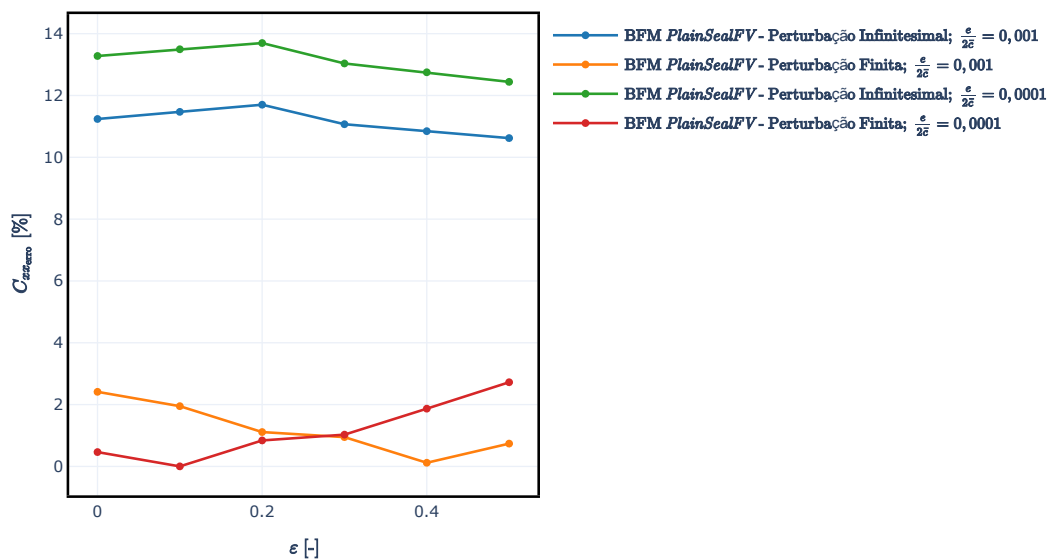


Figura 3.42: Erro de C_{xz} relativo ao BFM Ha/Choe - Selo plano de água proposto por Marquette, Childs e Andres (1997).

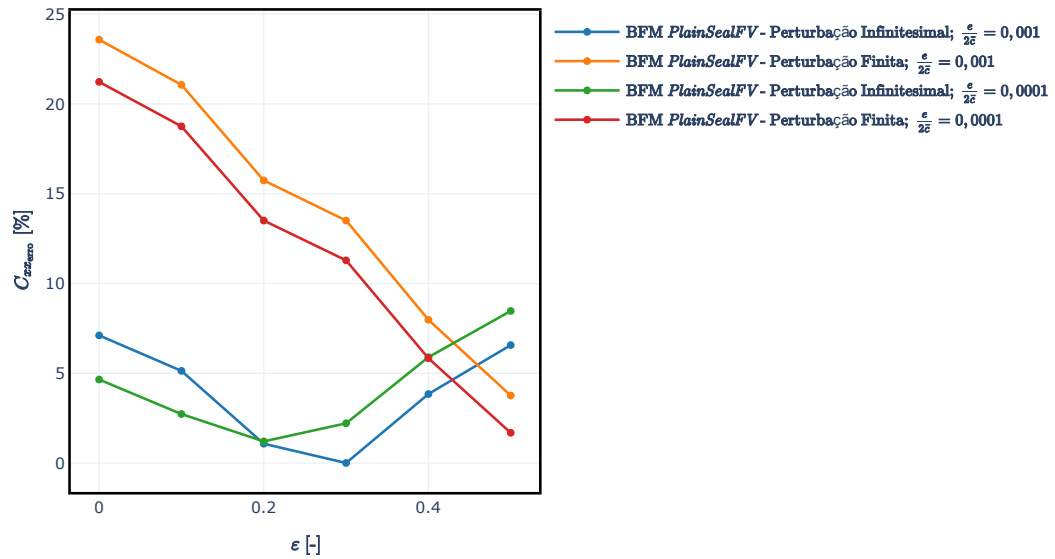


Figura 3.43: Erro de C_{xx} relativo aos resultados experimentais - Selo plano de água proposto por Marquette, Childs e Andres (1997).

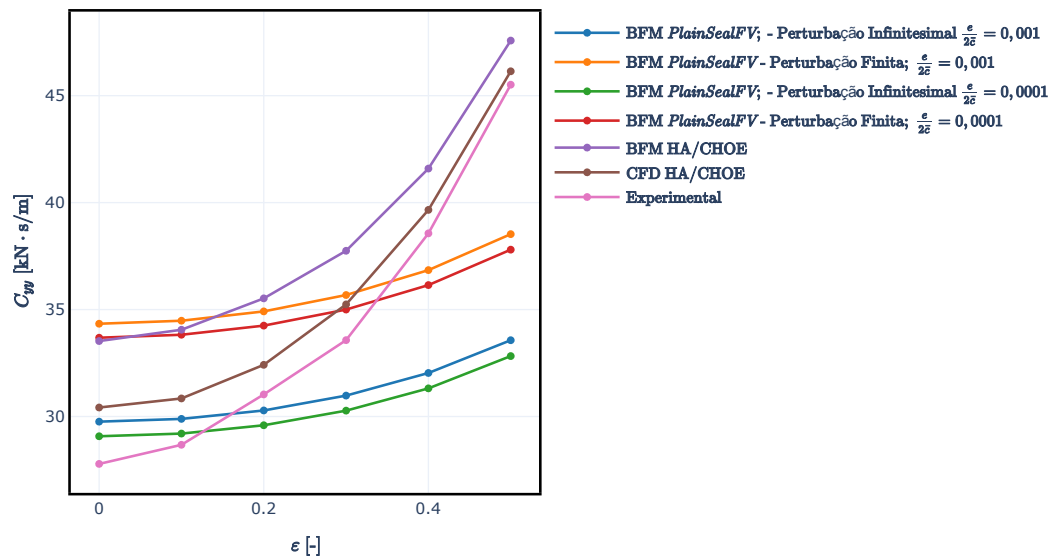


Figura 3.44: C_{yy} - Selo plano de água proposto por Marquette, Childs e Andres (1997).

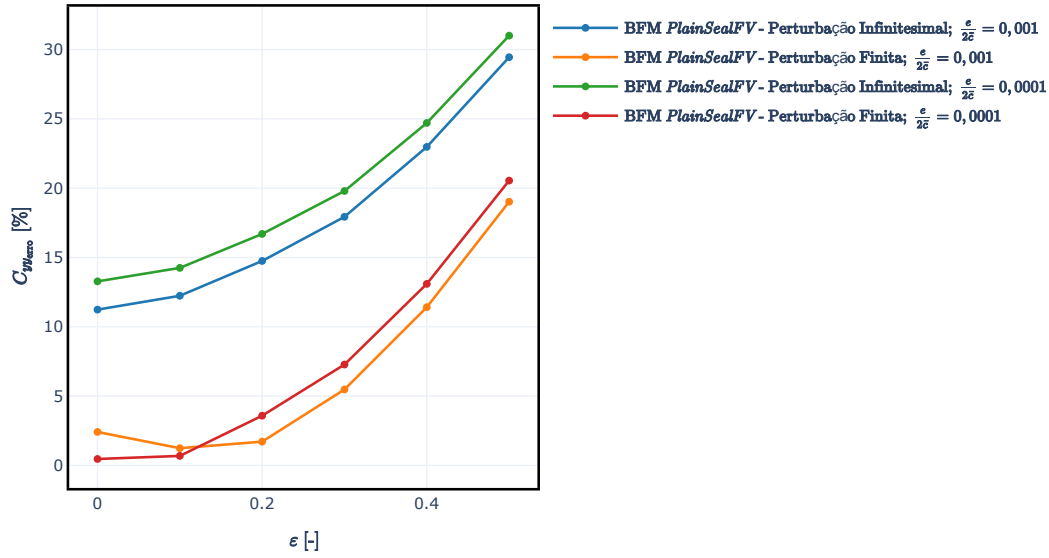


Figura 3.45: Erro de C_{yy} relativo ao BFM Ha/Choe - Selo plano de água proposto por Marquette, Childs e Andres (1997).

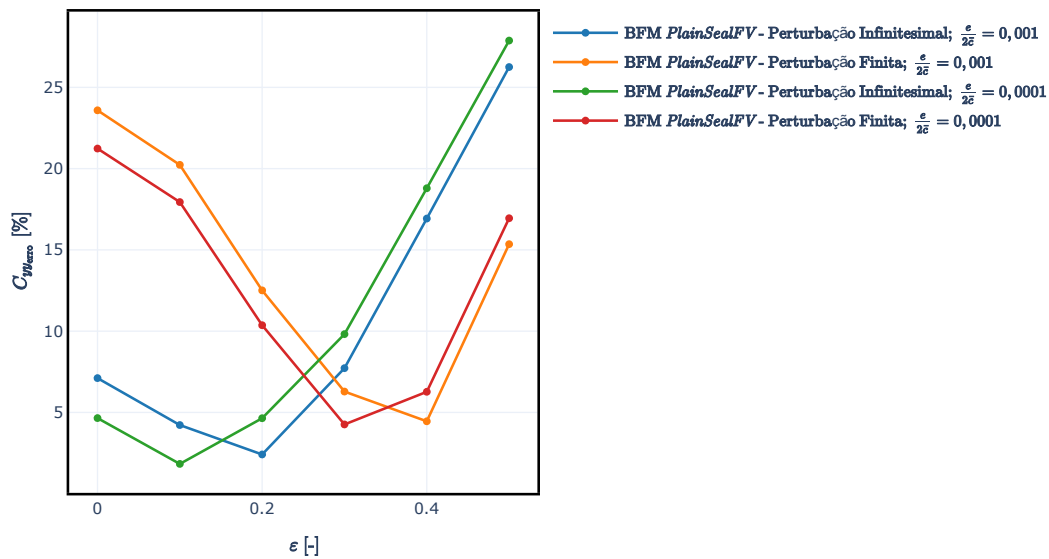


Figura 3.46: Erro de C_{yy} relativo aos resultados experimentais - Selo plano de água proposto por Marquette, Childs e Andres (1997).

De maneira semelhante ao observado para posições concêntricas, os valores obtidos para o *leakage* em posições excêntricas demonstraram boa concordância com os dados da referência adotada. Nesse contexto, observa-se que os resultados para o *leakage* estão mais próximos dos valores do modelo BFM de referência do que dos valores experimentais. Mesmo ao se considerar diferentes rugosidades relativas, o erro relativo máximo registrado foi de 16,69%.

O comportamento geral dos resultados obtidos pelos dois métodos de cálculo dos coeficientes dinâmicos adotados é amplamente condizente com o comportamento do BFM de referência. No entanto, para o Método da Perturbação Infinitesimal, observou-se uma discrepância específica nos coeficientes diretos de rigidez.

Em relação aos coeficientes de rigidez, o comportamento de antissimetria descrito por Ha e Choe (2012) não foi identificado nos resultados obtidos pelo modelo BFM *PlainSealFV*. Na análise realizada, o Método da Perturbação Infinitesimal, aplicado com uma rugosidade relativa $\frac{e}{2c} = 0,0001$, apresentou os melhores resultados comparados aos valores de referência, exceto no caso do coeficiente cruzado K_{yx} em razões de excentricidade superiores a 0,1. Os resultados obtidos pelo método da Perturbação Finita para os coeficientes cruzados também apresentaram bastante proximidade com o CFD de referência.

No caso dos coeficientes de amortecimento, o comportamento antissimétrico também não foi identificado. Os resultados comparativos foram restritos aos coeficientes diretos, uma vez que a referência adotada não disponibilizava dados para os coeficientes cruzados. Nessa análise, o Método da Perturbação Finita apresentou maior concordância com os valores do BFM de referência, enquanto o Método da Perturbação Infinitesimal demonstrou maior proximidade com os resultados experimentais disponíveis. Além disso, os erros relativos observados para os coeficientes de amortecimento foram consistentemente inferiores aos registrados para os coeficientes de rigidez, sugerindo uma maior confiabilidade desses resultados no contexto estudado.

Além disso, foram identificados indícios de um comportamento exponencial tanto para os coeficientes de rigidez quanto para os coeficientes de amortecimento com o aumento da razão de excentricidade. Esse padrão sugere que o crescimento da excentricidade impacta significativamente os valores desses coeficientes, o que pode ser um fator determinante na análise dinâmica de sistemas rotativos.

Considerando os erros relativos significativos observados nas comparações realizadas para as posições concêntricas e excêntricas, surge a necessidade de avaliar se tais discrepâncias

impactam de forma relevante a resposta de vibração ao desbalanceamento em máquinas rotativas. Essa análise é particularmente importante, dado que o principal objetivo da aplicação dos coeficientes dinâmicos calculados é realizar uma análise comparativa da resposta de vibração ao desbalanceamento em uma bomba de injeção de água. Investigar a influência desses erros no desempenho da máquina permitirá não apenas validar os métodos utilizados, mas também identificar possíveis ajustes ou refinamentos necessários para aplicações futuras.

3.3 Mapas dos Coeficientes Dinâmicos

Os coeficientes dinâmicos, o *leakage* e as componentes da força de sustentação dos selos utilizados na validação são mapeados pelo BFM *PlainSealFV* considerando $n_\phi = 20$, $n_\varepsilon = 20$, $\phi_f = 5,969$ [rad] e $\varepsilon_f = 0,9$ na construção dos intervalos de ângulo de atitude e razão de excentricidade. O método escolhido para o cálculo dos coeficientes de rigidez e amortecimento foi o Método da Perturbação Infinitesimal com $\frac{e}{2c} = 0,0001$, pois apresentou resultados mais próximos das referências e menor tempo de processamento.

Os mapas obtidos são apresentados nas Fig. 3.47 a 3.58.

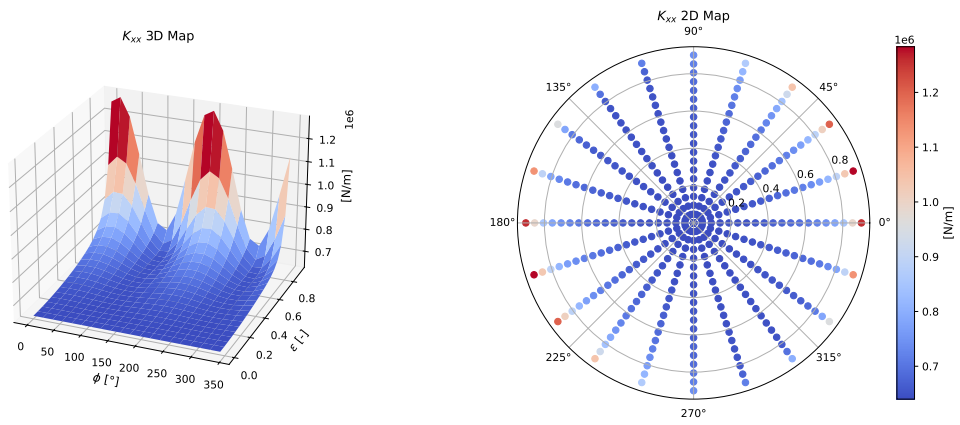
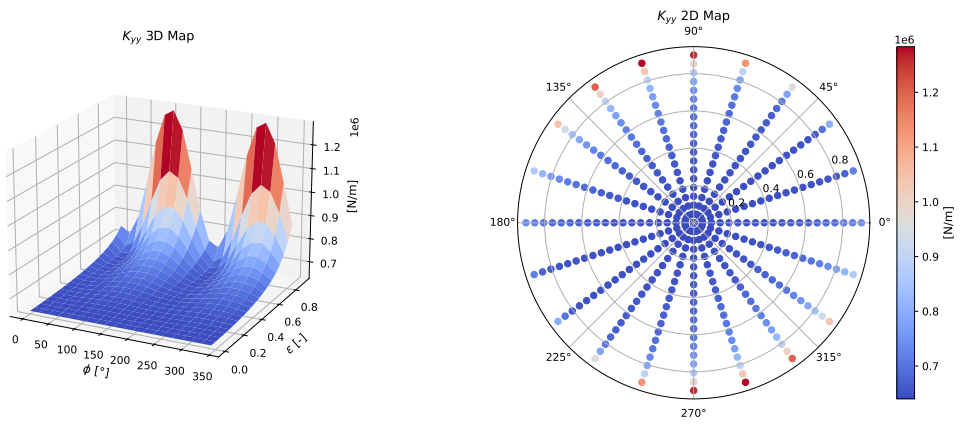
(a) K_{xx} .(b) K_{yy} .

Figura 3.47: Mapas do coeficientes diretos de rigidez - Selo plano de água proposto por Dietzen e Nordmann (1987).

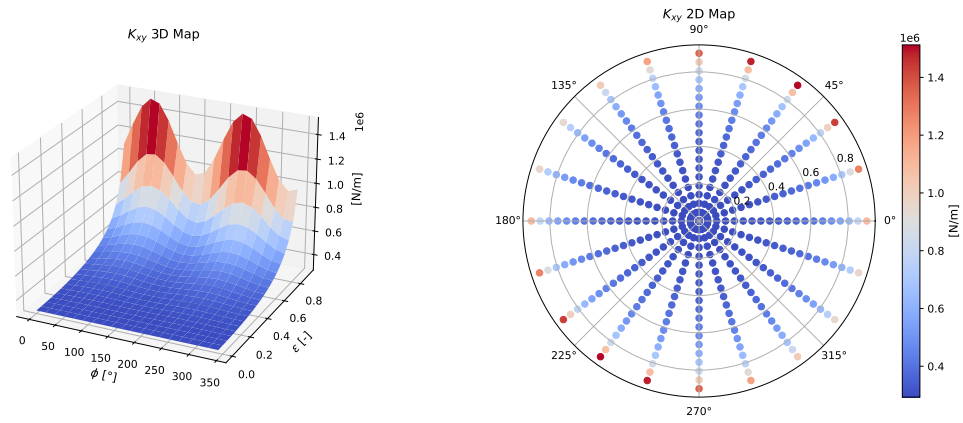
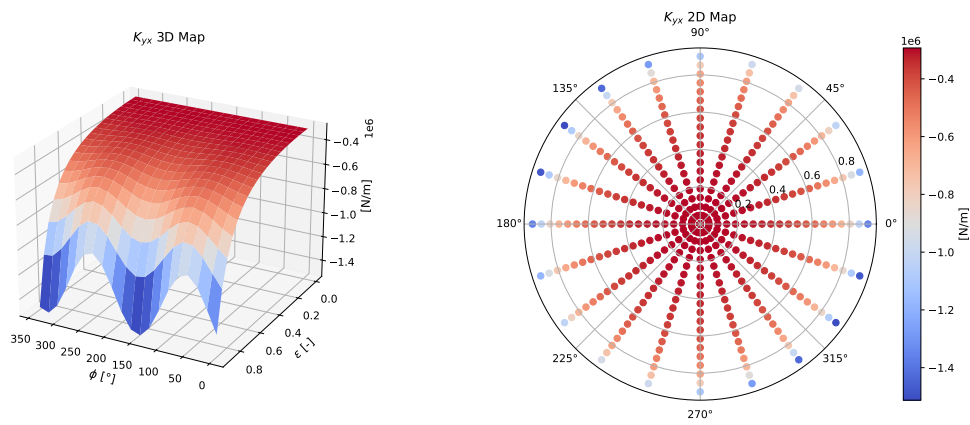
(a) K_{xy} .(b) K_{yx} .

Figura 3.48: Mapas do coeficientes cruzados de rigidez - Selo plano de água proposto por Dietzen e Nordmann (1987).

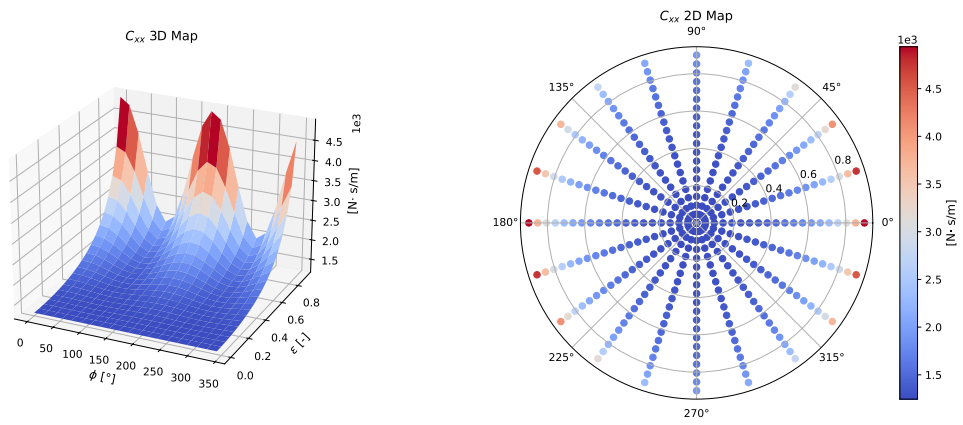
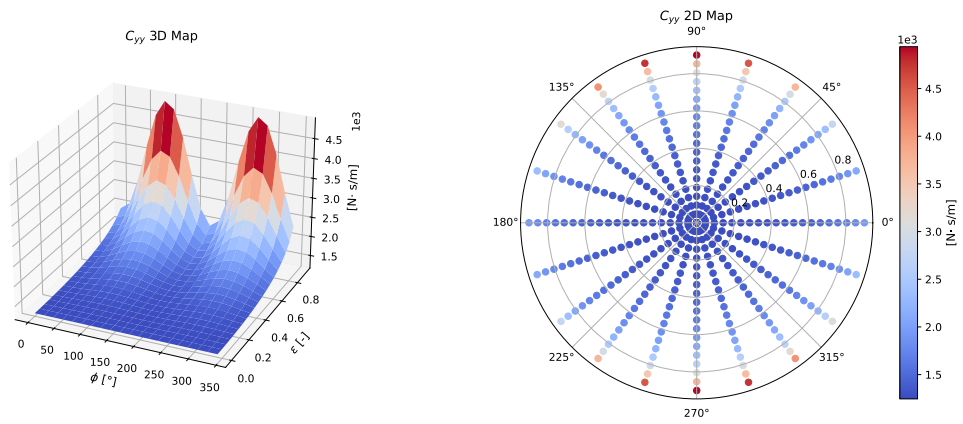
(a) C_{xx} .(b) C_{yy} .

Figura 3.49: Mapas do coeficientes diretos de amortecimento - Selo plano de água proposto por Dietzen e Nordmann (1987).

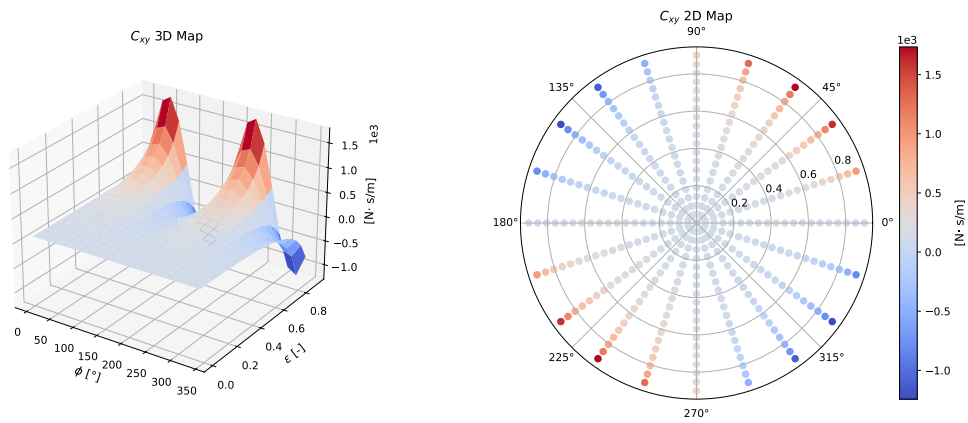
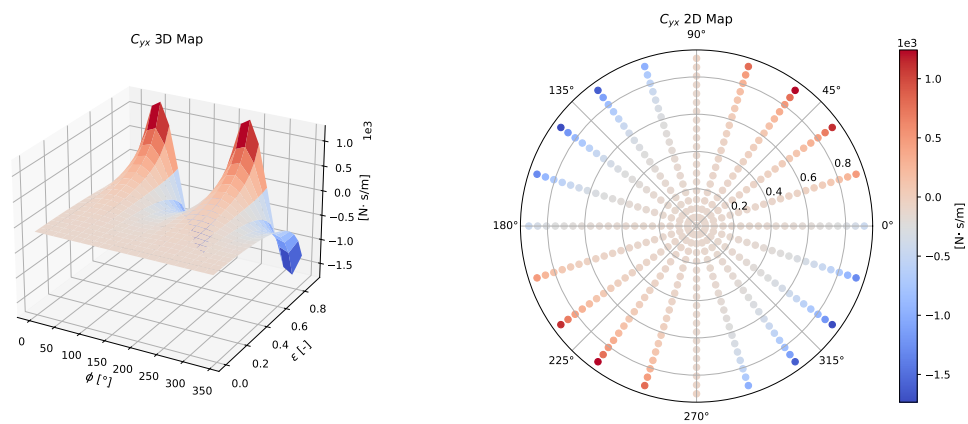
(a) C_{xy} .(b) C_{yx} .

Figura 3.50: Mapas do coeficientes cruzados de amortecimento - Selo plano de água proposto por Dietzen e Nordmann (1987).

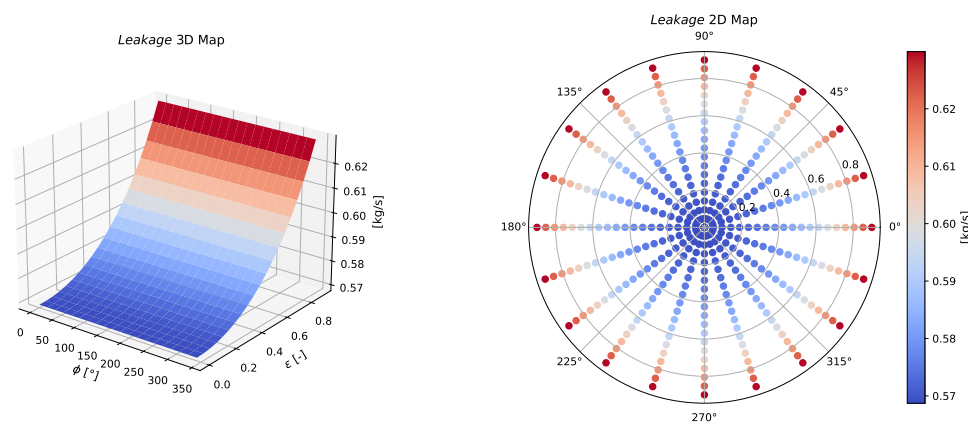


Figura 3.51: Mapa do *leakage* (vazamento) - Selo plano de água proposto por Dietzen e Nordmann (1987).

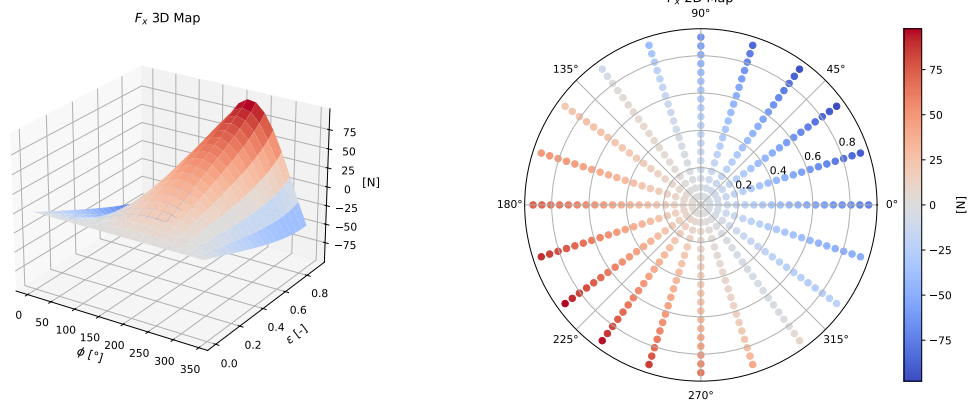
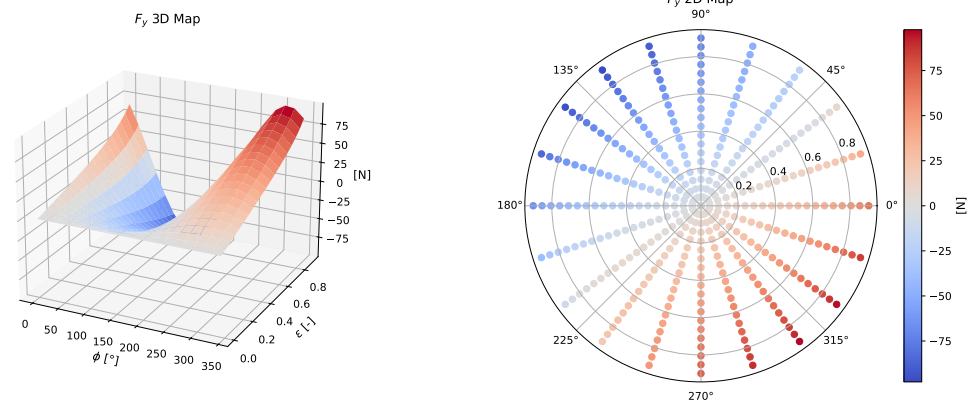
(a) F_x .(b) F_y .

Figura 3.52: Mapas das componentes da força de sustentação - Selo plano de água proposto por Dietzen e Nordmann (1987).

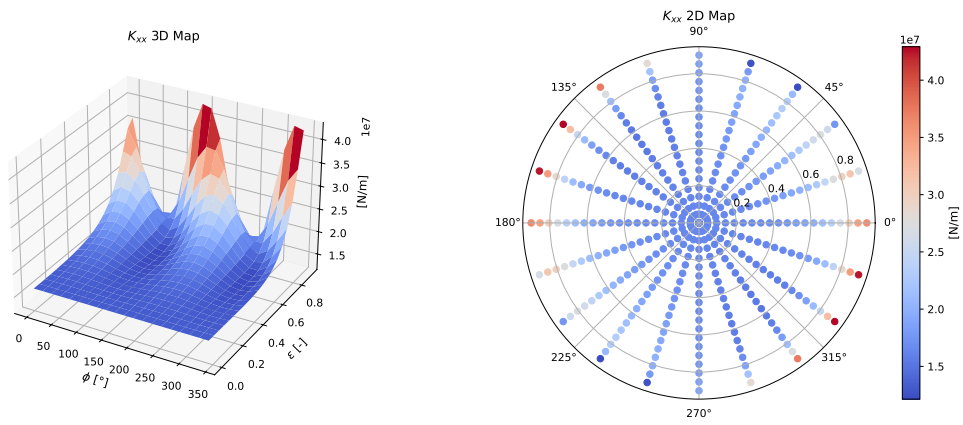
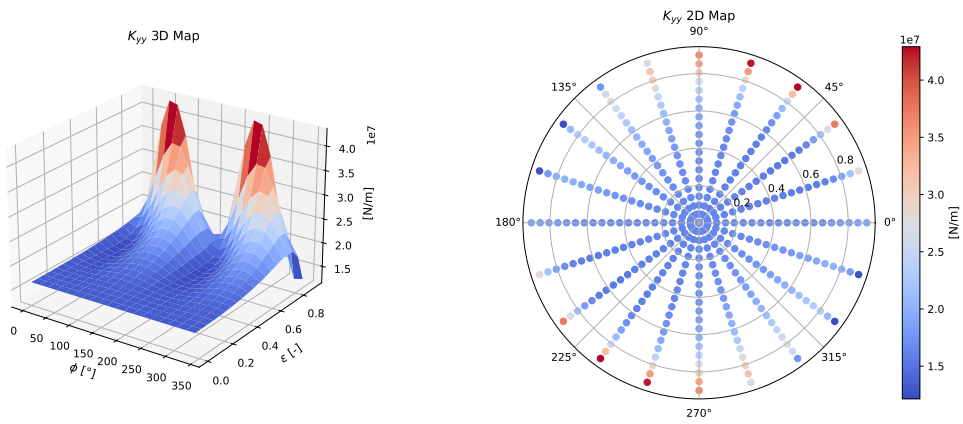
(a) K_{xx} .(b) K_{yy} .

Figura 3.53: Mapas do coeficientes diretos de rigidez - Selo plano de água proposto por Marquette, Childs e Andres (1997).

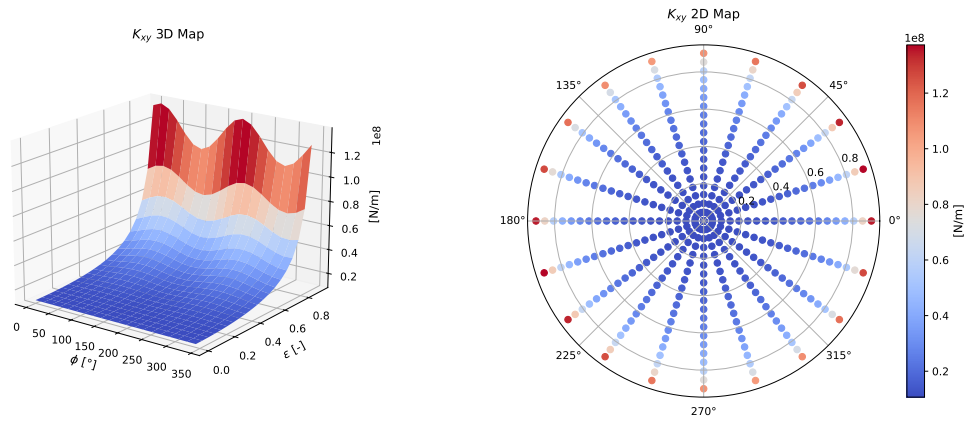
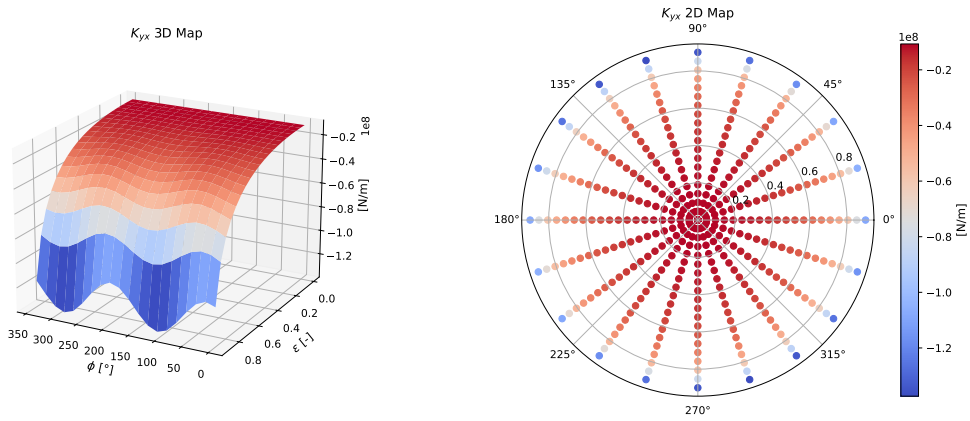
(a) K_{xy} .(b) K_{yx} .

Figura 3.54: Mapas do coeficientes cruzados de rigidez - Selo plano de água proposto por Marquette, Childs e Andres (1997).

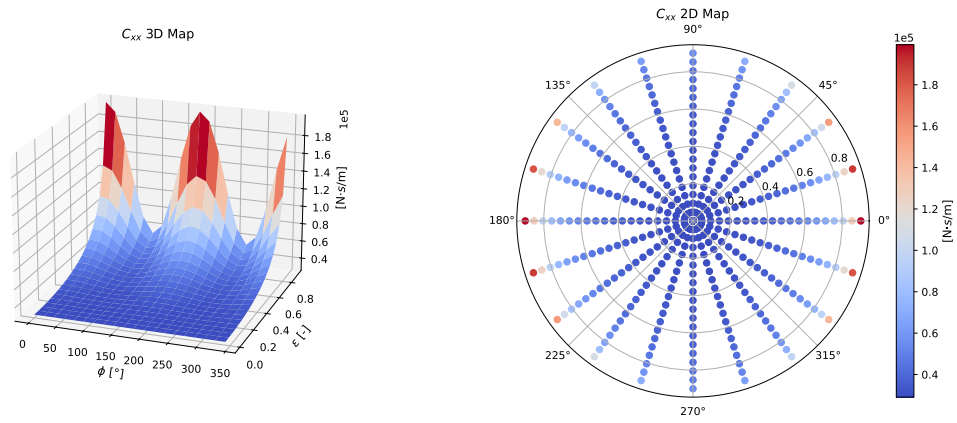
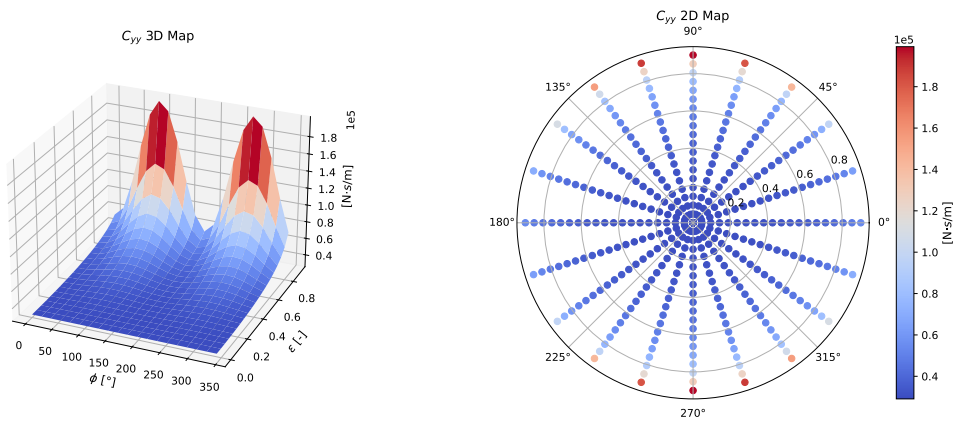
(a) C_{xx} .(b) C_{yy} .

Figura 3.55: Mapas do coeficientes diretos de amortecimento - Selo plano de água proposto por Marquette, Childs e Andres (1997).

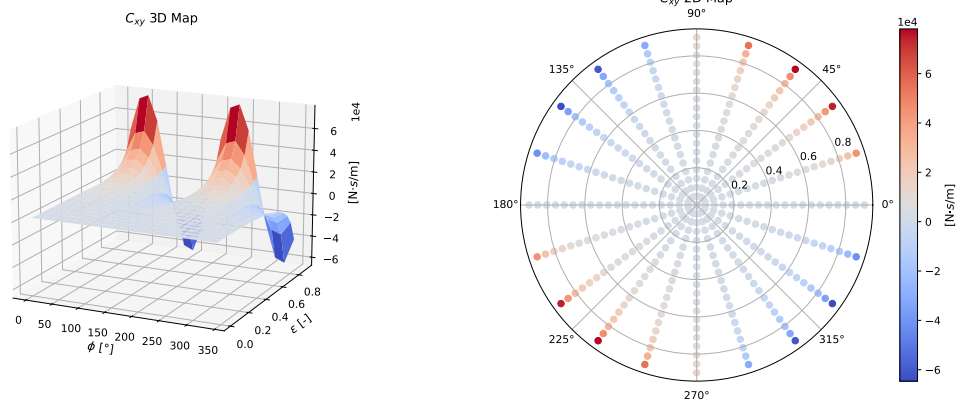
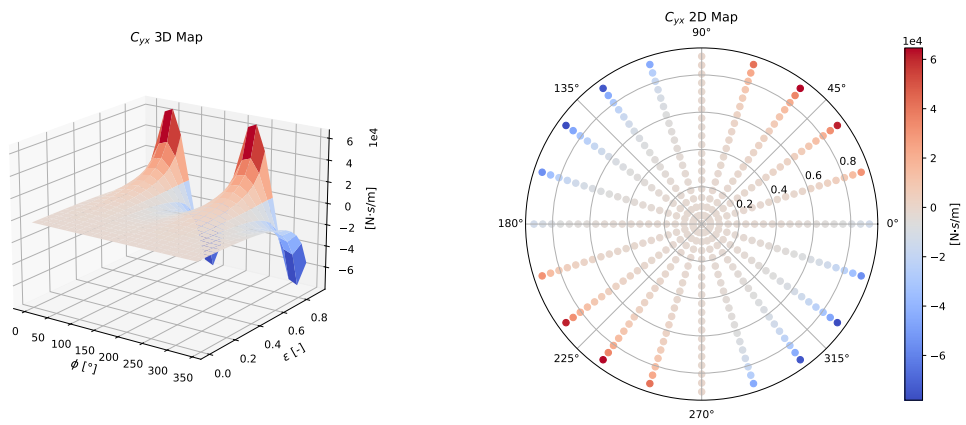
(a) C_{xy} .(b) C_{yx} .

Figura 3.56: Mapas do coeficientes cruzados de amortecimento - Selo plano de água proposto por Marquette, Childs e Andres (1997).

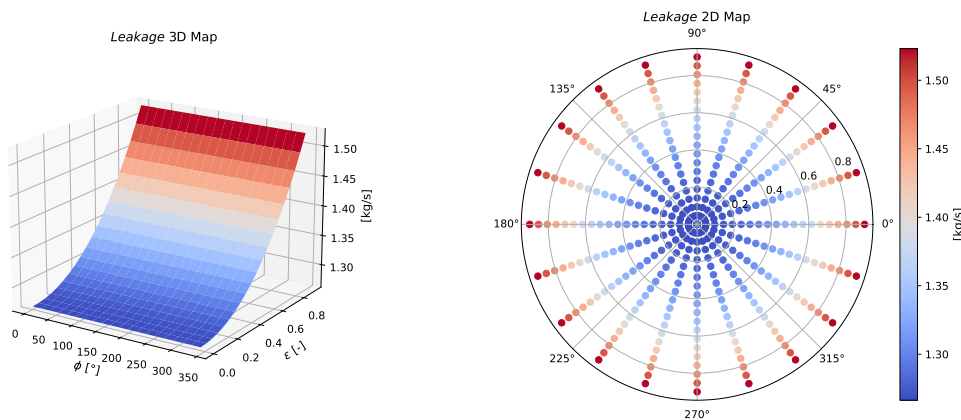


Figura 3.57: Mapa do *leakage* (vazamento) - Selo plano de água proposto por Marquette, Childs e Andres (1997).

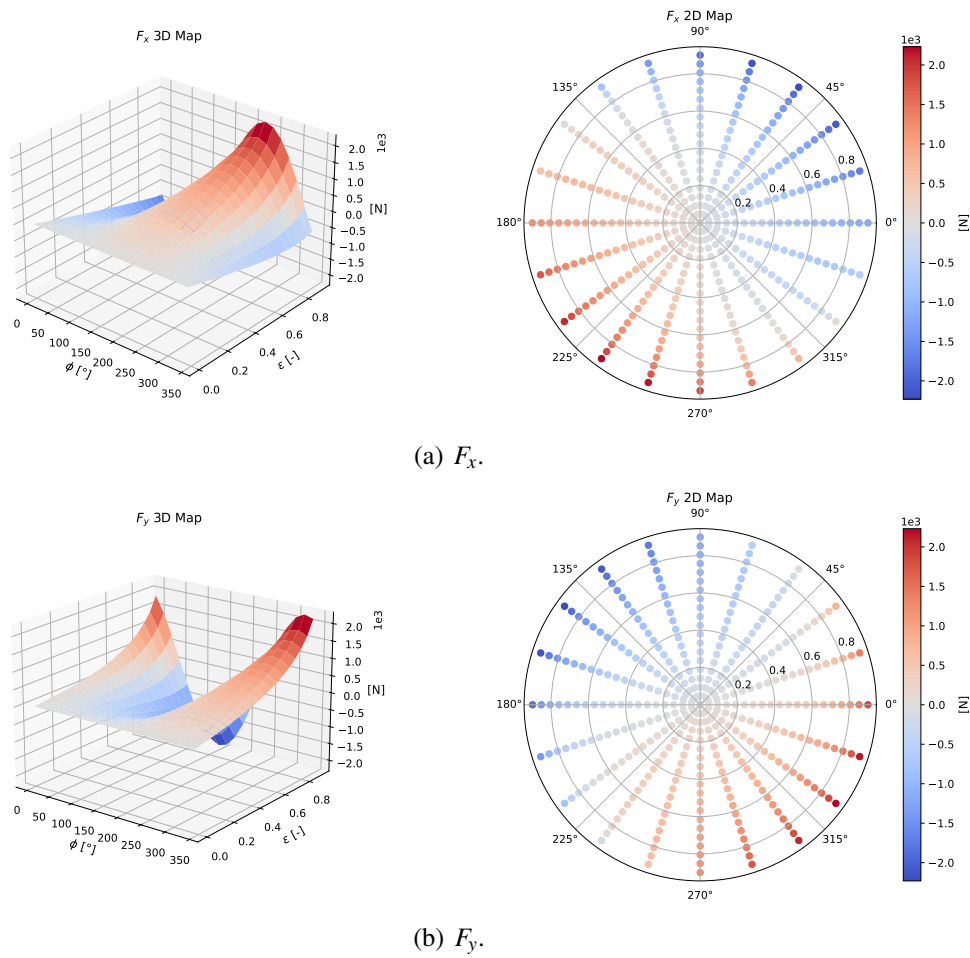


Figura 3.58: Mapas das componentes da força de sustentação - Selo plano de água proposto por Marquette, Childs e Andres (1997).

Após o mapeamento realizado, constata-se o significativo impacto que a posição do centro do rotor exerce sobre os valores dos coeficientes dinâmicos, componentes da força de sustentação e *leakage*. Em determinadas condições, esse impacto é tão expressivo que pode alterar as ordens de grandeza e até mesmo os sinais dos coeficientes dinâmicos e das componentes da força de sustentação, indicando a sensibilidade do sistema às mudanças na posição do centro do rotor.

Adicionalmente, foi confirmada a presença de um comportamento exponencial nos coeficientes dinâmicos, nas componentes da força de sustentação e no *leakage* à medida que a razão de excentricidade (ϵ) aumenta. Essa confirmação valida os indícios previamente observados e reforça a influência significativa da excentricidade sobre os parâmetros dinâmicos do sistema. Esse comportamento exponencial também pode estar diretamente relacionado à amplificação dos erros relativos observados nas comparações realizadas para os coeficientes dinâmicos em posições excêntricas.

Outro aspecto identificado no mapeamento é a existência de um comportamento periódico em relação ao ângulo de atitude (ϕ). Os coeficientes dinâmicos e as componentes da força de sustentação exibem variações cíclicas ao longo de ϕ , enquanto o *leakage* permanece constante, independentemente do ângulo de atitude, para uma mesma razão de excentricidade. Essa invariância do *leakage* com relação ao ângulo sugere que ele é governado predominantemente pela excentricidade, enquanto os coeficientes e forças são sensíveis ao ângulo de atitude.

Os resultados apresentados ressaltam a importância de avaliar o impacto das discrepâncias observadas nas comparações dos coeficientes dinâmicos sobre a resposta de vibração ao desbalanceamento em máquinas rotativas. Essa avaliação é fundamental para assegurar que os coeficientes dinâmicos utilizados na análise comparativa sejam representativos e capazes de refletir com precisão o comportamento do sistema, garantindo assim a confiabilidade dos resultados obtidos.

CAPÍTULO IV

APLICAÇÃO EM MÁQUINAS ROTATIVAS

Nesse capítulo são apresentadas uma breve revisão acerca da metamodelagem *Kriging* e a aplicação do mapeamento dos coeficientes dinâmicos de um selo plano em conjunto com metamodelos *Kriging* na resposta de vibração ao desbalanceamento. Uma análise comparativa da resposta de vibração ao desbalanceamento de uma máquina rotativa é realizada por meio de duas etapas, e os resultados obtidos são discutidos.

Na primeira etapa, considera-se os coeficientes dinâmicos dos selos constantes e calculados para uma posição do centro do rotor concêntrica ao selo. Os coeficientes são determinados tanto pelo BFM *PlainSealFV* quanto pelo BFM *SEAL3* para avaliar o impacto causado pela diferença dos coeficientes dinâmicos calculados na resposta de vibração.

Já na segunda etapa, considera-se que os coeficientes dinâmicos variam de acordo com a posição do centro do rotor e seus valores são atualizados por metamodelos *Kriging* construídos a partir de dados do mapeamento dos coeficientes dinâmicos dos selos realizado pelo BFM *PlainSealFV*.

A máquina rotativa utilizada para o estudo é uma bomba de injeção de água com arranjo de selos *back-to-back* e dados fornecidos pela PETROBRAS. Sua modelagem computacional em elementos finitos utilizando o ROSS é apresentada na Fig. 4.1. Onde os selos estão representados em verde, os impelidores e o acoplamento estão representados pelos discos em vermelho e os mancais em azul.

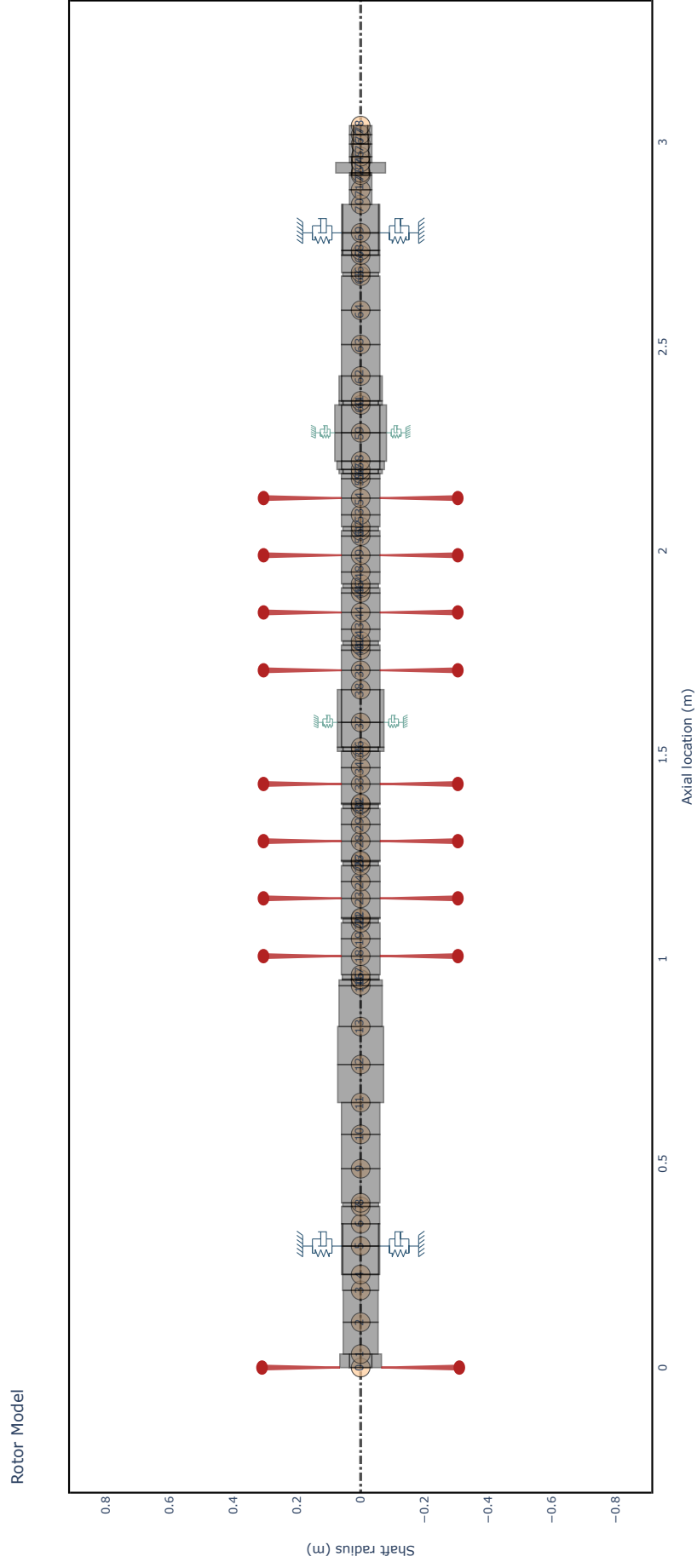


Figura 4.1: Modelo da bomba de injeção em elementos finitos (ROSS).

Os coeficientes dinâmicos dos mancais do tipo *4-lobe bearing* localizados nos nós 5 e 69 são calculados utilizando a classe *THDCylindrical* do ROSS. Os parâmetros geométricos, condições de operação e os valores dos coeficientes dinâmicos calculados são apresentados nas Tabs. 4.1 e 4.2. Em ambos os mancais, o fluido lubrificante utilizado foi o óleo *ISO VG 46*.

Tabela 4.1: Parâmetros geométricos e condição de operação dos mancais da bomba de injeção.

Símbolo	Descrição	Valor
l/d	Razão entre o comprimento e diâmetro dos mancais	0,72 [-]
r	Raio do rotor	0,059515 [m]
$\bar{c}$	Folga radial	135×10^{-6} [m]
δ	Fator de pré-carga	0,46 [-]
W_5	Carga no mancal (nó 5)	2591 [N]
W_{69}	Carga no mancal (nó 69)	1798 [N]

Tabela 4.2: Coeficientes dinâmicos dos mancais da bomba de injeção.

Coeficiente	Nó 5	Nó 69
K_{xx}	$3,9492503 \times 10^7$ [N/m]	$2,2309720 \times 10^7$ [N/m]
K_{xy}	$-2,4575042 \times 10^7$ [N/m]	$-1,3398686 \times 10^7$ [N/m]
K_{yx}	$-7,7219362 \times 10^7$ [N/m]	$-4,3215521 \times 10^7$ [N/m]
K_{yy}	$12,9190969 \times 10^7$ [N/m]	$7,4732478 \times 10^7$ [N/m]
C_{xx}	$0,65120 \times 10^5$ [N·s/m]	$0,39875 \times 10^5$ [N·s/m]
C_{xy}	$-0,52641 \times 10^5$ [N·s/m]	$-0,20496 \times 10^5$ [N·s/m]
C_{yx}	$-0,52740 \times 10^5$ [N·s/m]	$-0,20543 \times 10^5$ [N·s/m]
C_{yy}	$2,61480 \times 10^5$ [N·s/m]	$1,41545 \times 10^5$ [N·s/m]

4.1 Metamodelagem *Kriging*

Simulações complexas no contexto da engenharia, como aquelas que envolvem modelos dinâmicos, térmicos, estruturais e fluidodinâmicos, são essenciais para a previsão de comportamentos de sistemas em diversas condições operacionais. No entanto, esses modelos, especialmente os de alta fidelidade, demandam um alto custo computacional e tempo de processamento. Diante desse cenário, torna-se necessário, em alguns casos, recorrer a métodos substitutos mais eficientes, conhecidos como metamodelos.

Os metamodelos são modelos simplificados que aproximam a solução de um modelo real complexo, mas com um custo computacional consideravelmente menor. Eles são criados a partir

de amostras da solução do modelo real, frequentemente por meio de técnicas de interpolação ou regressão. Esses métodos fornecem uma forma de capturar as relações entre os parâmetros de entrada e as respostas do sistema de maneira rápida e precisa, sem a necessidade de resolver repetidamente o modelo complexo.

A metamodelagem *Kriging*, desenvolvida pelo geofísico Daniel G. Krige (1919-2013) e formalizada por Matheron (1963), destaca-se dentre os metamodelos disponíveis atualmente devido à sua flexibilidade proveniente da ampla gama de funções de correlação que podem ser escolhidas (SIMPSON et al., 2001). O Laboratório de Mecânica de Estruturas “José Eduardo Tannús Reis” da Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia (LMEst-FEMEC-UFU) tem desenvolvido trabalhos na área de dinâmica de rotação que utilizam metamodelagem *Kriging*.

Santos (2024) desenvolveu em sua dissertação de mestrado um controlador baseado em metamodelagem *Kriging* para sistemas rotativos suportados por mancais magnéticos ativos. A utilização da metamodelagem *Kriging* garantiu o posicionamento do sistema em torno de uma posição única de equilíbrio e uma amplitude de vibração dentro dos limites de operação da máquina.

Sicchieri (2019) utilizou metamodelos *Kriging* em sua dissertação de mestrado para reduzir o custo computacional associado aos modelos termo-hidrodinâmicos para mancais hidrodinâmicos. Os resultados obtidos mostraram que a metamodelagem *Kriging* é uma ferramenta poderosa para viabilizar a substituição dos modelos termo-hidrodinâmicos para mancais hidrodinâmicos de máquinas rotativas.

4.2 Resposta de Vibração com os Coeficientes dos Selos Constantes

Para a primeira etapa da análise, considera-se a posição do centro do rotor concêntrica aos selos, localizados nos nós 37 e 59. As Tabs. 4.3 e 4.4 apresentam os parâmetros geométricos e propriedades do fluido lubrificante utilizados no cálculo dos coeficientes dinâmicos de cada um dos selos.

Tabela 4.3: Parâmetros utilizados na simulação - *Annular seal center bushing* (nó 37).

Símbolo	Descrição	Valor
l	Comprimento do selo	0,13946 [m]
r	Raio do rotor	0,0728 [m]
$\bar{c}$	Folga radial	$202,5 \times 10^{-6}$ [m]
$\frac{e_{ss}}{2\bar{c}}$	Rugosidade relativa - selo	0,0001 [-]
$\frac{e_{rs}}{2\bar{c}}$	Rugosidade relativa - rotor	0,0001 [-]
(ε, ϕ)	Posição do centro do rotor	(0, 0) [-,rad]
Δp	Queda de pressão	$1,2 \times 10^7$ [Pa]
p_{exit}	Pressão na saída do selo	$1,01 \times 10^5$ [Pa]
ω	Velocidade de operação	3580 [rpm]
ρ	Densidade do fluido lubrificante	997 [kg/m ³]
μ	Viscosidade dinâmica do fluido lubrificante	$9,97 \times 10^{-4}$ [Pa·s]
ξ_{inlet}	Coefficiente de perda de carga na entrada	0,1 [-]
ξ_{exit}	Coefficiente de recuperação de pressão na saída	1 [-]
Γ	Velocidade adimensional de precessão	1 [-]
η	Número de <i>Courant</i>	0,75 [-]
SR	<i>Swirl ratio</i>	0,5 [-]

Tabela 4.4: Parâmetros utilizados na simulação - *Annular seal throttle bushing* (nó 59).

Símbolo	Descrição	Valor
l	Comprimento do selo	0,136 [m]
r	Raio do rotor	0,0808 [m]
$\bar{c}$	Folga radial	$206,3 \times 10^{-6}$ [m]
$\frac{e_{ss}}{2\bar{c}}$	Rugosidade relativa - selo	0,0001 [-]
$\frac{e_{rs}}{2\bar{c}}$	Rugosidade relativa - rotor	0,0001 [-]
(ε, ϕ)	Posição do centro do rotor	(0, 0) [-,rad]
Δp	Queda de pressão	$1,2 \times 10^7$ [Pa]
p_{exit}	Pressão na saída do selo	$1,01 \times 10^5$ [Pa]
ω	Velocidade de operação	3580 [rpm]
ρ	Densidade do fluido lubrificante	997 [kg/m ³]
μ	Viscosidade dinâmica do fluido lubrificante	$9,97 \times 10^{-4}$ [Pa·s]
ξ_{inlet}	Coefficiente de perda de carga na entrada	0,1 [-]
ξ_{exit}	Coefficiente de recuperação de pressão na saída	1 [-]
Γ	Velocidade adimensional de precessão	1 [-]
η	Número de <i>Courant</i>	0,75 [-]
SR	<i>Swirl ratio</i>	0,5 [-]

Em seguida, determina-se coeficientes dinâmicos utilizando o BFM *PlainSealFV* com o

Método da Perturbação Infinitesimal e também o BFM *SEAL3*, conforme as Tabs. 4.5 e 4.6.

Tabela 4.5: Coeficientes dinâmicos - *Annular seal center bushing* (nó 37).

Coeficiente	<i>PlainSealFV</i>	<i>SEAL3</i>
K_{xx}	$5,1215816 \times 10^7$ [N/m]	$6,8967 \times 10^7$ [N/m]
K_{xy}	$12,4067686 \times 10^7$ [N/m]	$10,344 \times 10^7$ [N/m]
K_{yx}	$-12,4067686 \times 10^7$ [N/m]	$-10,344 \times 10^7$ [N/m]
K_{yy}	$5,1215816 \times 10^7$ [N/m]	$6,8967 \times 10^7$ [N/m]
C_{xx}	$5,30696 \times 10^5$ [N·s/m]	$5,5677 \times 10^5$ [N·s/m]
C_{xy}	$0,70662 \times 10^5$ [N·s/m]	$0,71191 \times 10^5$ [N·s/m]
C_{yx}	$-0,70662 \times 10^5$ [N·s/m]	$-0,71191 \times 10^5$ [N·s/m]
C_{yy}	$5,30696 \times 10^5$ [N·s/m]	$5,5677 \times 10^5$ [N·s/m]

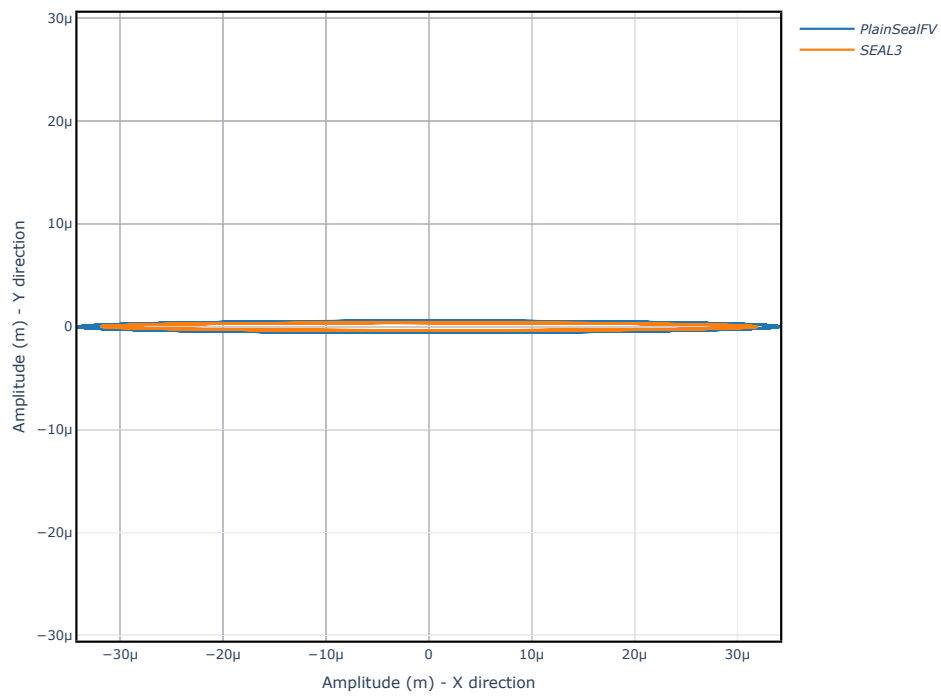
Tabela 4.6: Coeficientes dinâmicos - *Annular seal throttle bushing* (nó 59).

Coeficiente	<i>PlainSealFV</i>	<i>SEAL3</i>
K_{xx}	$6,2938988 \times 10^7$ [N/m]	$8,4364 \times 10^7$ [N/m]
K_{xy}	$14,0262531 \times 10^7$ [N/m]	$12,016 \times 10^7$ [N/m]
K_{yx}	$-14,0262531 \times 10^7$ [N/m]	$-12,016 \times 10^7$ [N/m]
K_{yy}	$6,2938988 \times 10^7$ [N/m]	$8,4364 \times 10^7$ [N/m]
C_{xx}	$5,92096 \times 10^5$ [N·s/m]	$6,4673 \times 10^5$ [N·s/m]
C_{xy}	$0,75400 \times 10^5$ [N·s/m]	$0,80637 \times 10^5$ [N·s/m]
C_{yx}	$-0,75400 \times 10^5$ [N·s/m]	$-0,80637 \times 10^5$ [N·s/m]
C_{yy}	$5,92096 \times 10^5$ [N·s/m]	$6,4673 \times 10^5$ [N·s/m]

Sendo assim, a resposta de vibração ao desbalanceamento, assim como na segunda etapa da análise comparativa, é determinada através da função *run_time_response* do ROSS.

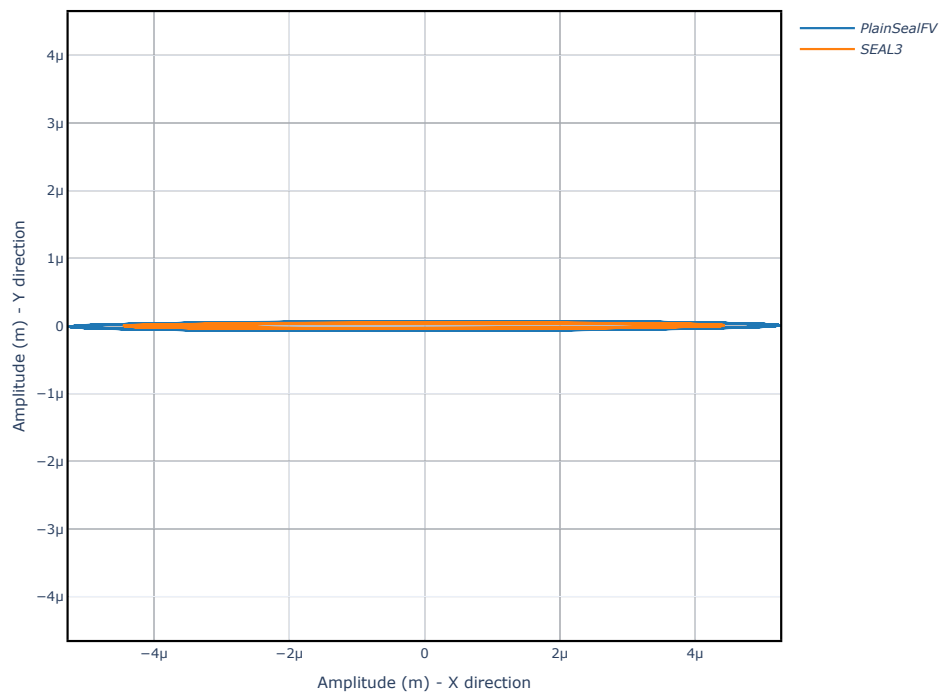
A velocidade de operação considerada é de 3580 [rpm] e o vetor de forças está relacionado ao desbalanceamento de $68 \cdot 10^{-4}$ [kg·m] imposto aos impelidores localizados nos nós 18, 23, 28, 33, 39, 44, 49 e 54. A escolha da magnitude do desbalanceamento realizou-se de forma a garantir que a amplitude máxima da resposta de vibração seja menor que a folga radial dos selos. Uma comparação nos nós dos selos é apresentada na Fig. 4.2.

Response for node 37



(a) Nó 37.

Response for node 59



(b) Nó 59.

Figura 4.2: Comparação da resposta de vibração ao desbalanceamento - Coeficientes constantes.

Diferenças expressivas foram identificadas nos valores dos coeficientes de rigidez e amortecimento calculados (Tab. 4.5 e 4.6). No entanto, as órbitas das respostas de vibração ao desbalanceamento exibiram amplitudes semelhantes e formatos idênticos. Conforme mencionado anteriormente, essa comparação foi realizada com o objetivo de avaliar se os erros observados em análises anteriores teriam um impacto significativo na resposta de vibração. Os resultados obtidos indicam que, apesar das discrepâncias nos coeficientes calculados, o impacto dessas diferenças na resposta de vibração foi insignificante, justificando que os erros previamente identificados não comprometem a representatividade das análises realizadas.

4.3 Resposta de Vibração com os Coeficientes dos Selos Variáveis

Na segunda etapa da análise comparativa, considerou-se que os selos são incluídos nas equações do movimento da bomba de injeção por meio de forças externas, conforme a Eq. (4.1), e que seus coeficientes dinâmicos variam de acordo com a posição do centro do rotor.

$$F_{seal}(t) = \begin{bmatrix} K_{xx}(x_{c0}, y_{c0}) & K_{xy}(x_{c0}, y_{c0}) \\ K_{yx}(x_{c0}, y_{c0}) & K_{yy}(x_{c0}, y_{c0}) \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} x_c - x_{c0} \\ y_c - y_{c0} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{xx}(x_c, y_c) & C_{xy}(x_c, y_c) \\ C_{yx}(x_c, y_c) & C_{yy}(x_c, y_c) \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \dot{x}_c \\ \dot{y}_c \end{Bmatrix} \quad (4.1)$$

Onde x_{c0} e y_{c0} são as coordenadas cartesianas da posição do centro do rotor no instante de tempo t_0 anterior a t . Sendo assim, os coeficientes dinâmicos dos selos são determinados de acordo com a posição do centro do rotor a cada instante de tempo no integrador numérico da função *run_time_response*.

Para tornar viável a atualização dos coeficientes de amortecimento e rigidez a cada passo de tempo do ponto de vista de custo computacional e de tempo de simulação, foram utilizados metamodelos *Kriging* criados a partir do mapeamento dos coeficientes dinâmicos. Dessa forma, realizou-se o mapeamento dos coeficientes dinâmicos dos selos para velocidades de operação de 2500, 3000, 4000 e 4500 [rpm] para o treinamento dos metamodelos *Kriging*. Os intervalos de razão de excentricidade e ângulo de atitude utilizados consideram $n_\varepsilon = 14$, $n_\phi = 60$, $\varepsilon_f = 0.9$ e $\phi_f = 6, 18$ [rad].

Os coeficientes dinâmicos também foram mapeados para velocidade de operação de 3580 [rpm] para comparação com os valores oriundos das previsões realizadas pelos metamodelos

treinados, conforme as Fig. 4.5 a 4.10.

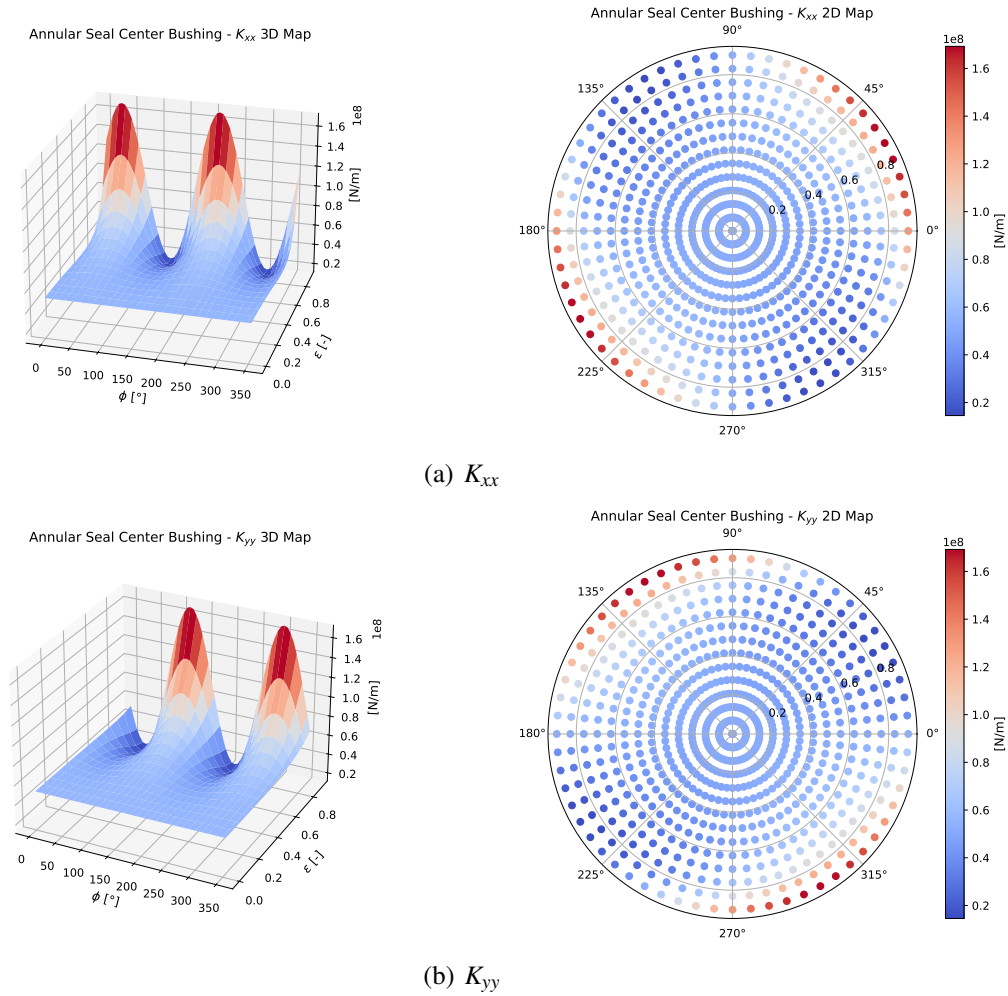


Figura 4.3: *Annular seal center bushing* - Mapas dos coeficientes diretos de rigidez.

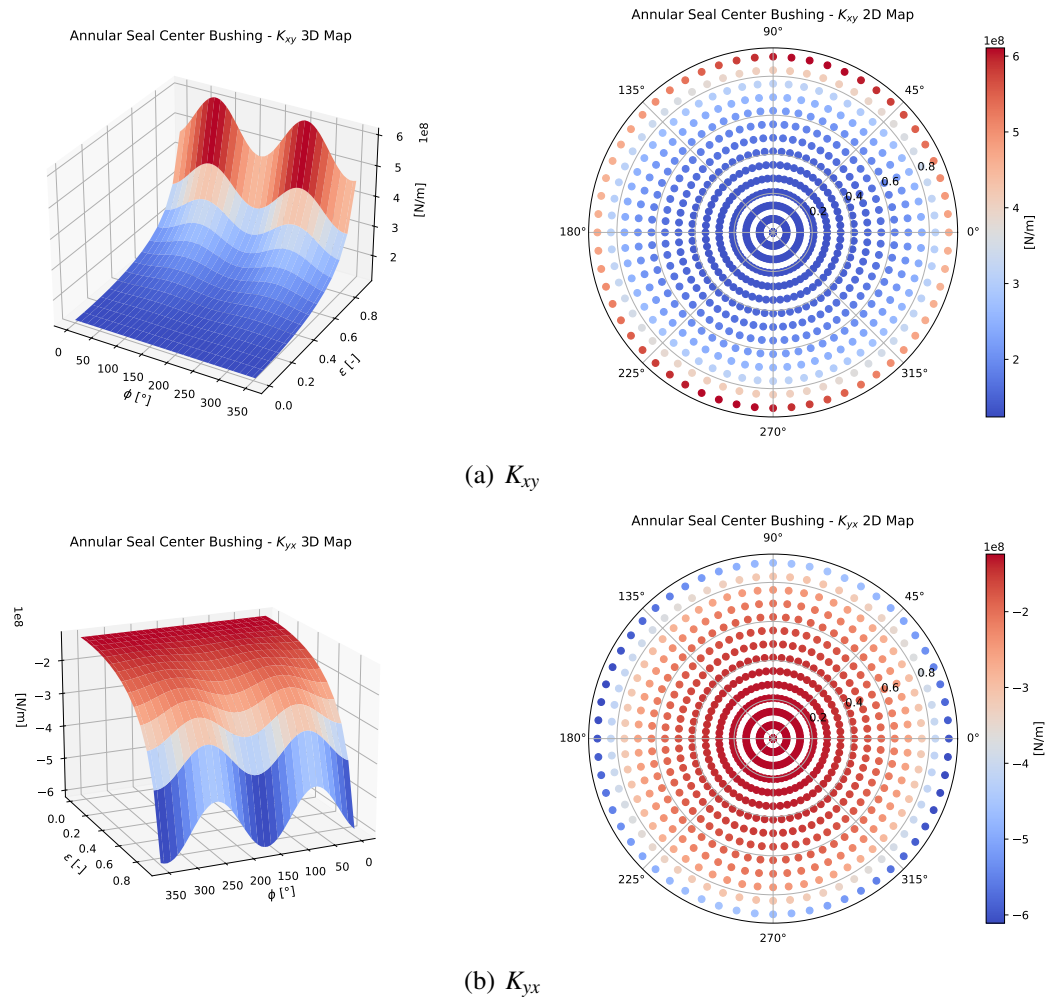


Figura 4.4: *Annular seal center bushing* - Mapas dos coeficientes cruzados de rigidez.

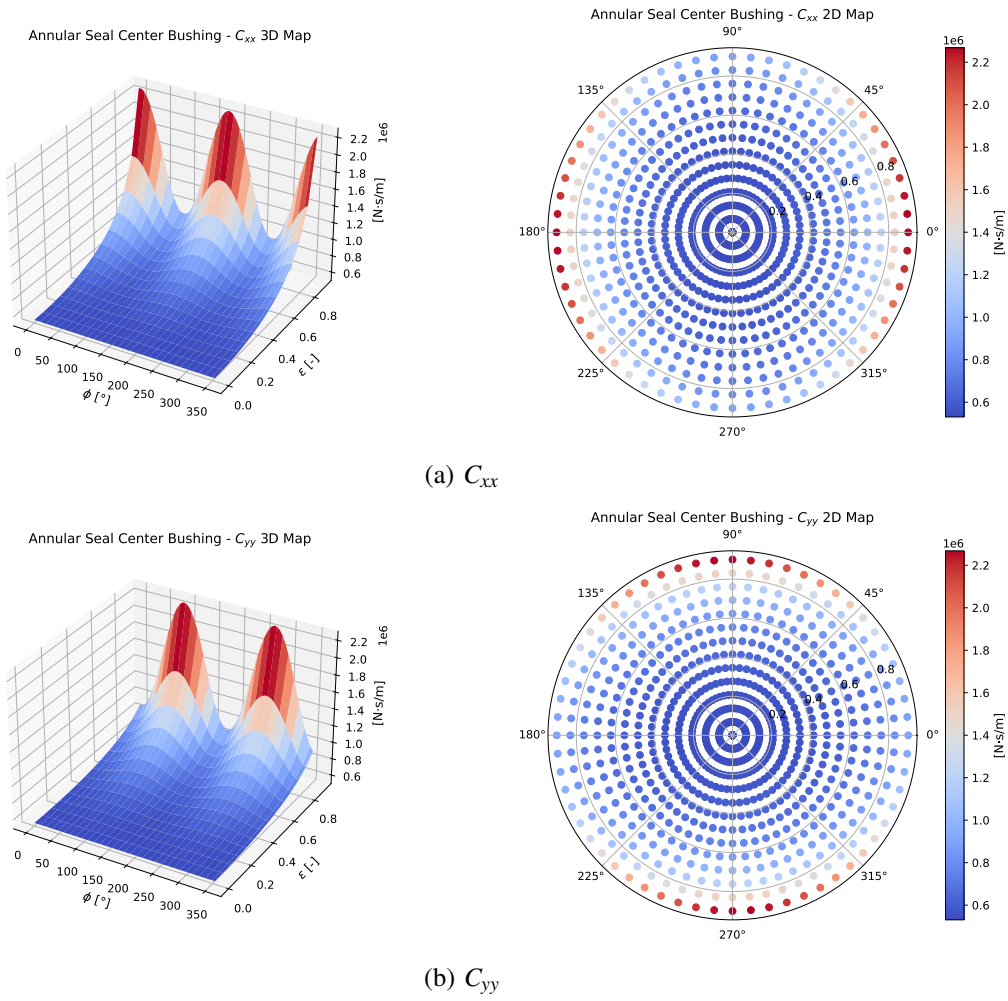


Figura 4.5: *Annular seal center bushing* - Mapas dos coeficientes diretos de amortecimento.

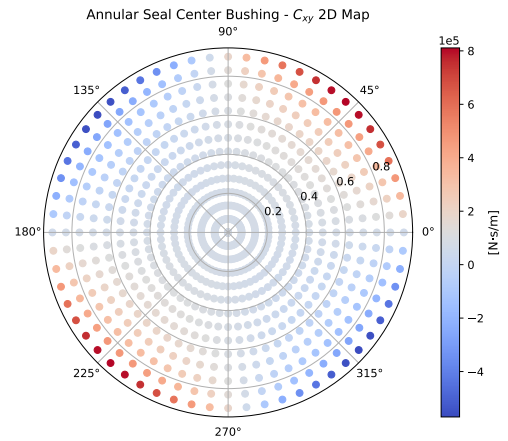
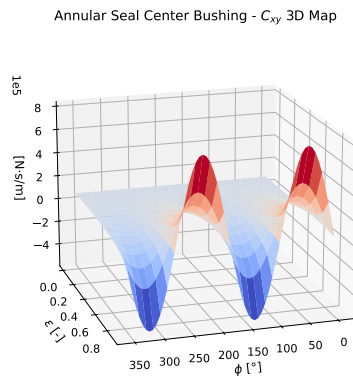
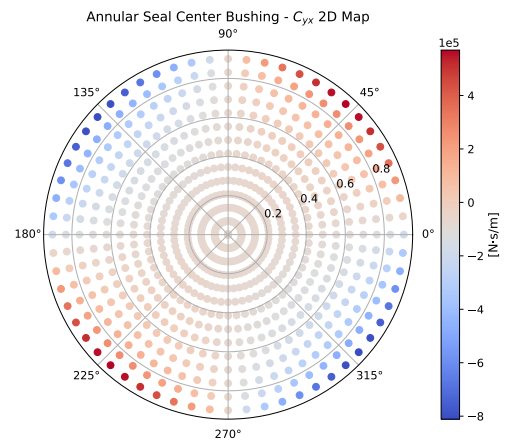
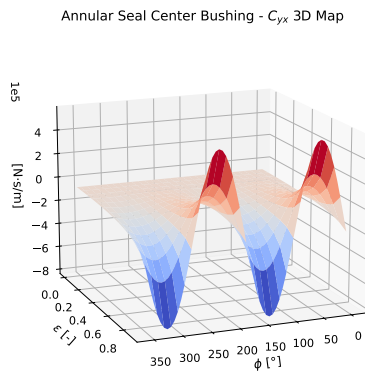
(a) C_{xy} (b) C_{yx}

Figura 4.6: *Annular seal center bushing* - Mapas dos coeficientes cruzados de amortecimento.

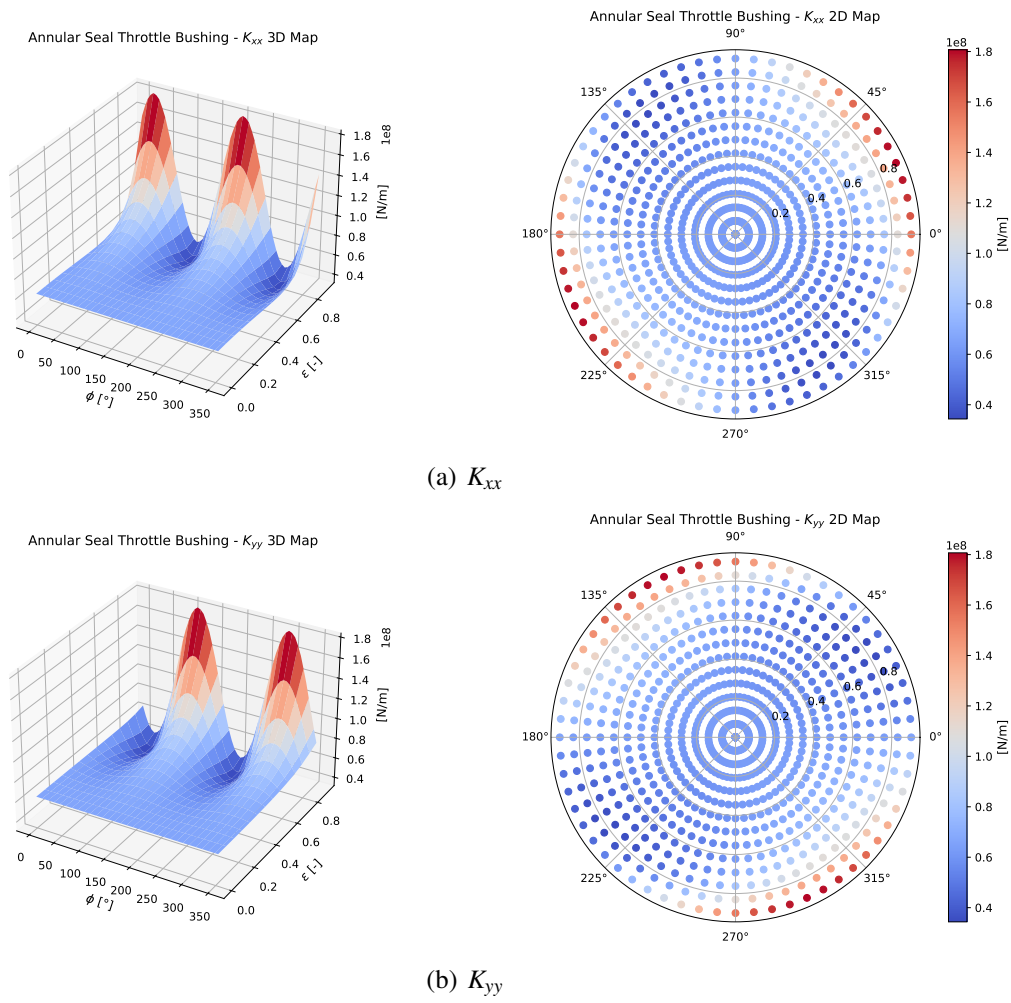


Figura 4.7: *Annular seal throttle bushing* - Mapas dos coeficientes diretos de rigidez.

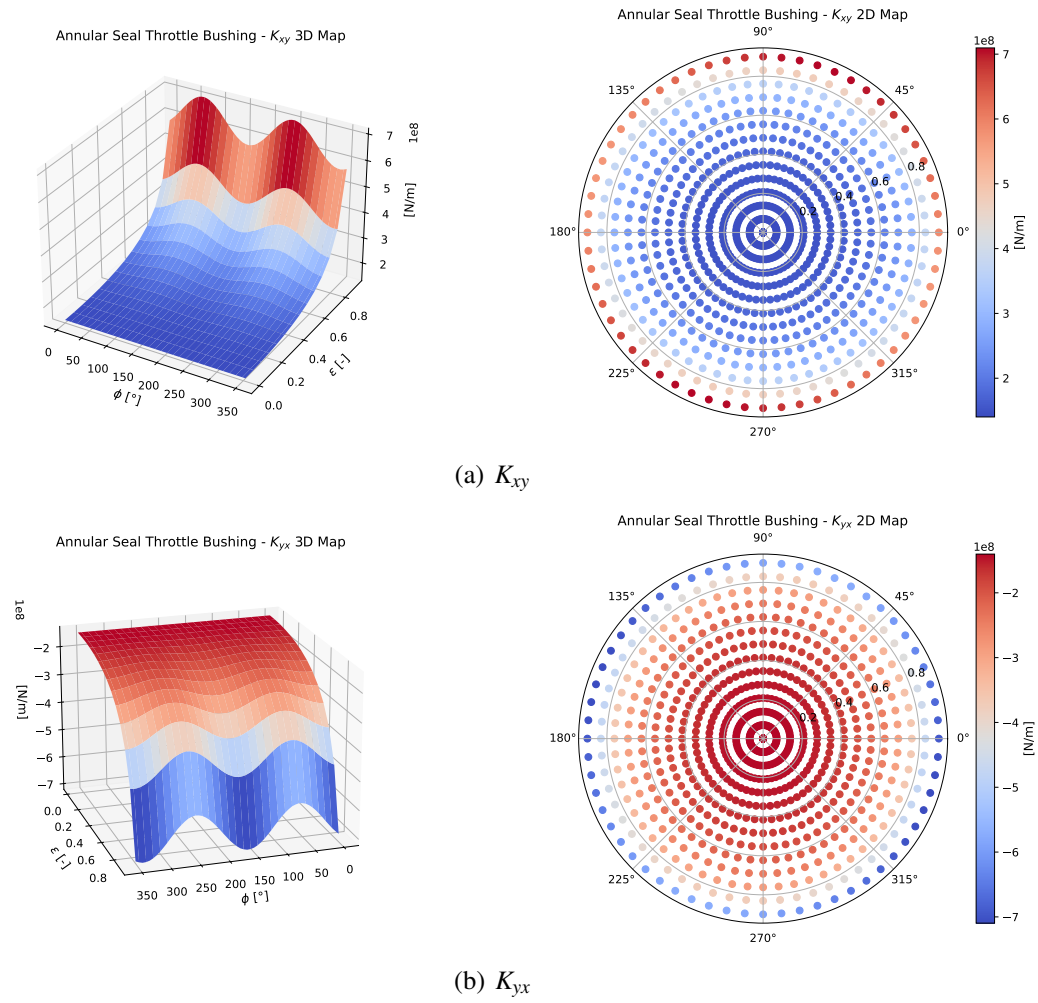


Figura 4.8: *Annular seal throttle bushing* - Mapas dos coeficientes cruzados de rigidez.

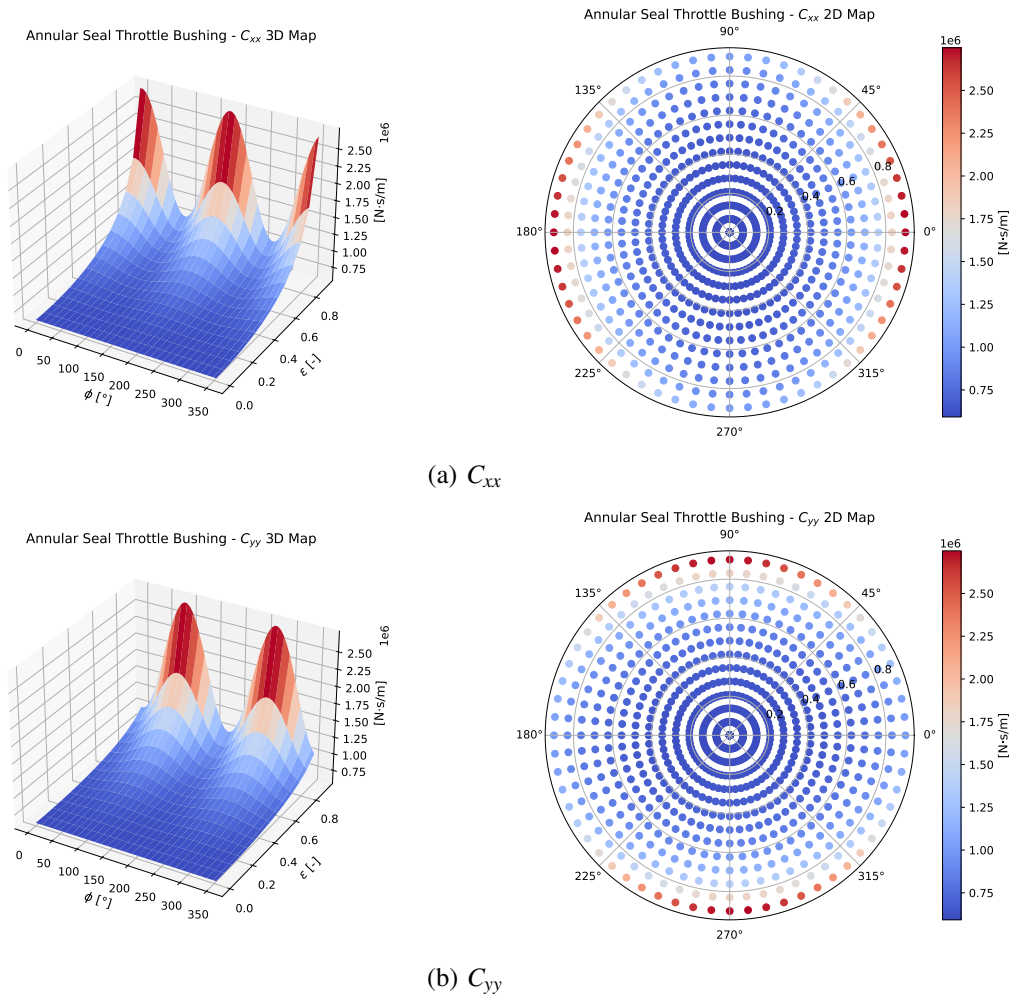


Figura 4.9: *Annular seal throttle bushing* - Mapas dos coeficientes diretos de amortecimento.

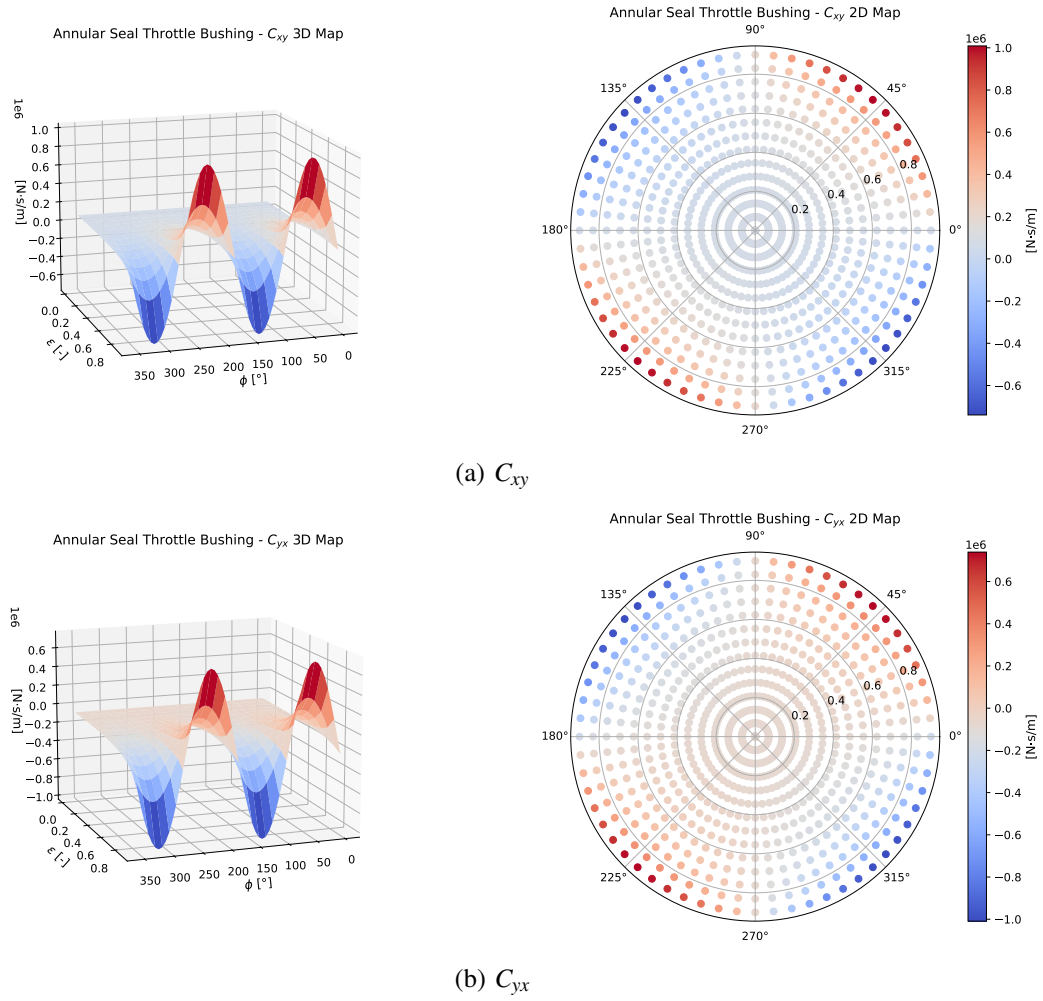


Figura 4.10: *Annular seal throttle bushing* - Mapas dos coeficientes cruzados de amortecimento.

Onde os resultados obtidos reforçam os comportamentos exponencial e periódico dos coeficientes dinâmicos com a razão de excentricidade e ângulo de atitude, respectivamente. A comparação entre os coeficientes mapeados pelo BFM *PlainSealFV* e os resultados previstos pelos metamodelos *Kriging* é ilustrada nas Fig. 4.11 a 4.18.

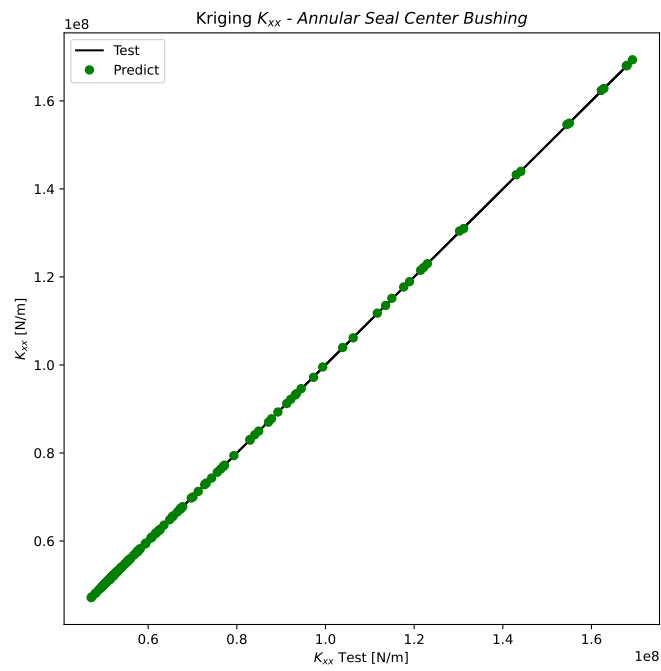
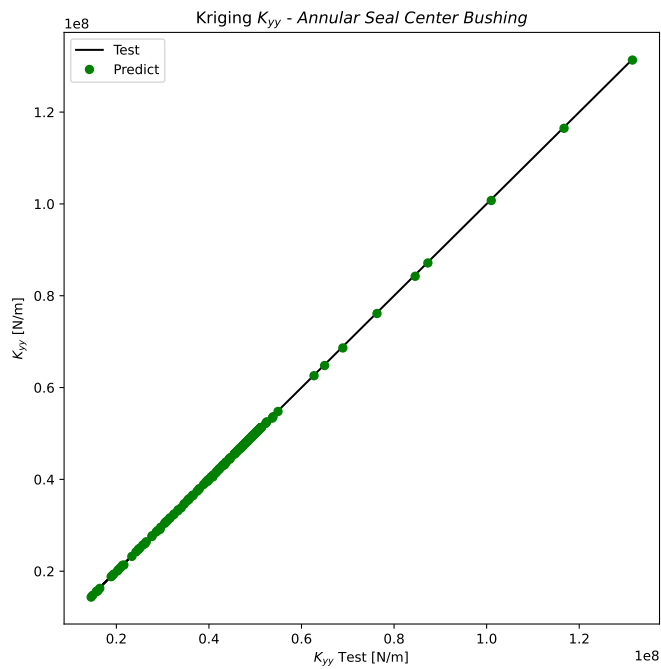
(a) K_{xx} .(b) K_{yy} .

Figura 4.11: Comparação entre mapeamento e metamodelo *Kriging* (coeficientes diretos de rigidez) - *Annular seal center bushing*.

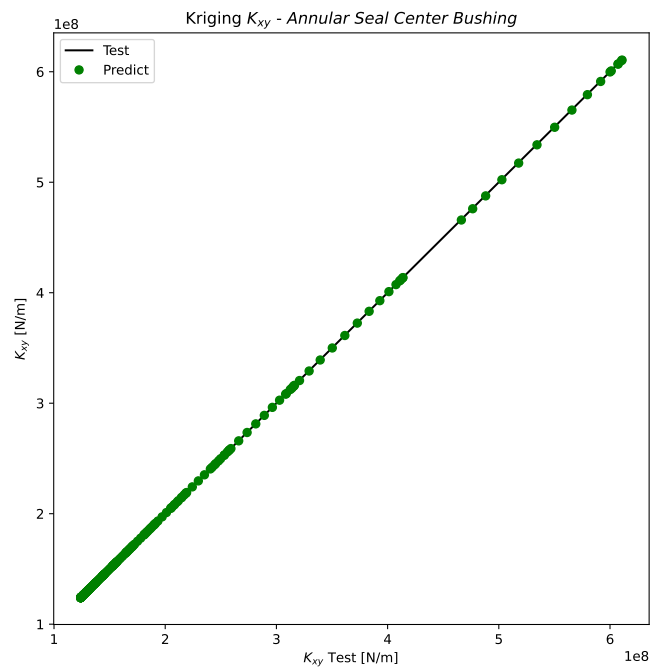
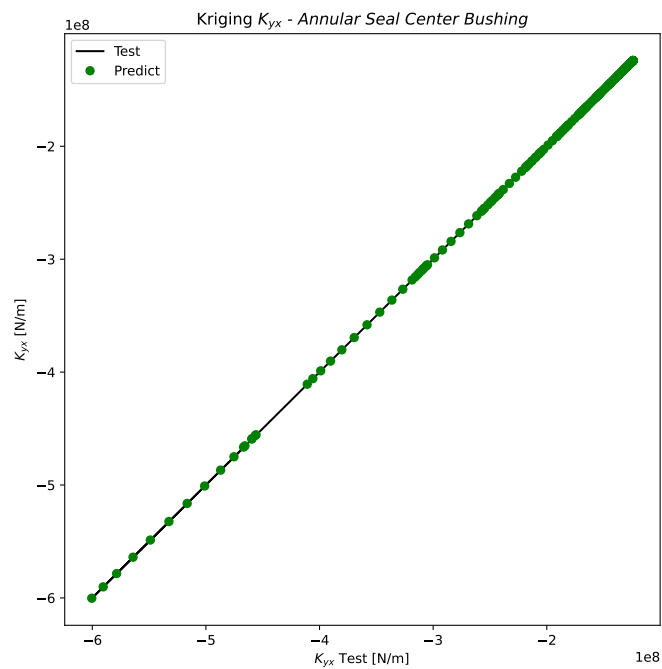
(a) K_{xy} .(b) K_{yx} .

Figura 4.12: Comparação entre mapeamento e metamodelo *Kriging* (coeficientes cruzados de rigidez) - *Annular seal center bushing*.

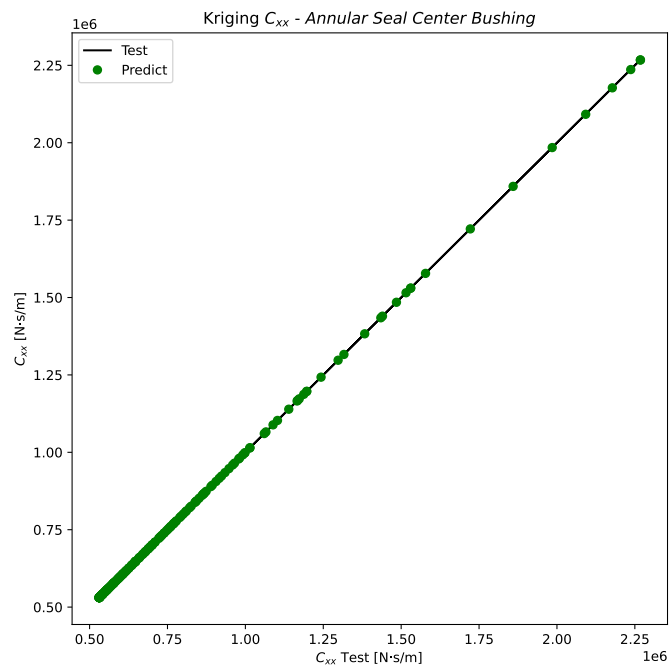
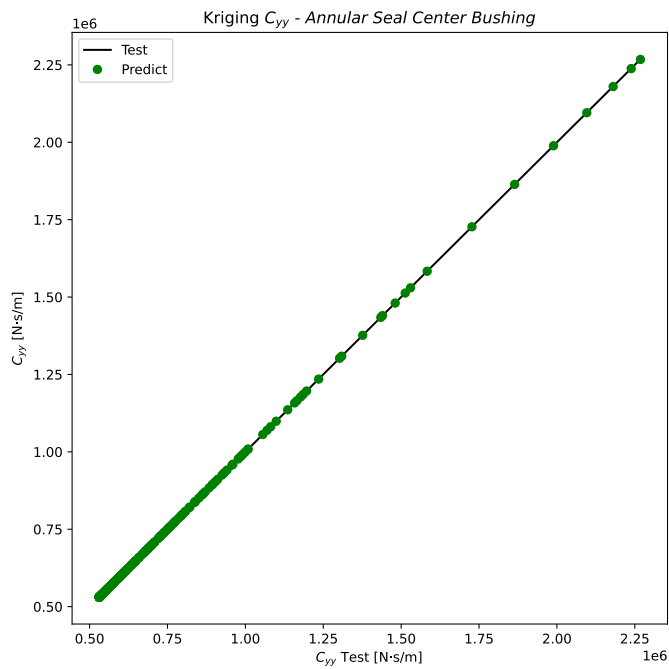
(a) C_{xx} .(b) C_{yy} .

Figura 4.13: Comparação entre mapeamento e metamodelo *Kriging* (coeficientes diretos de amortecimento) - *Annular seal center bushing*.

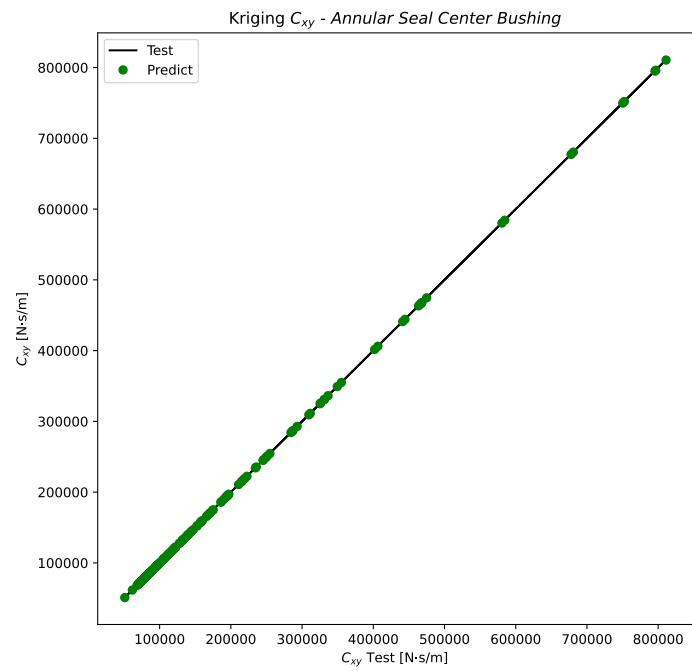
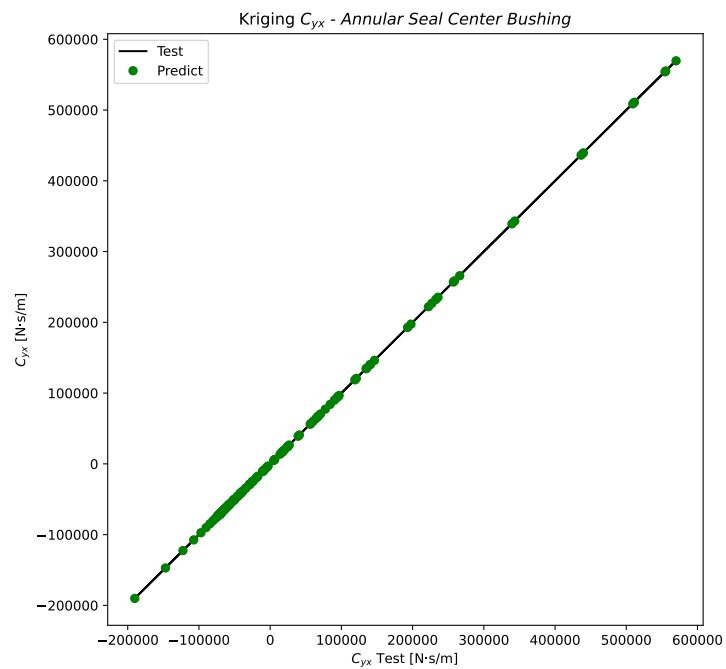
(a) C_{xy} .(b) C_{yx} .

Figura 4.14: Comparação entre mapeamento e metamodelo *Kriging* (coeficientes cruzados de amortecimento) - *Annular seal center bushing*.

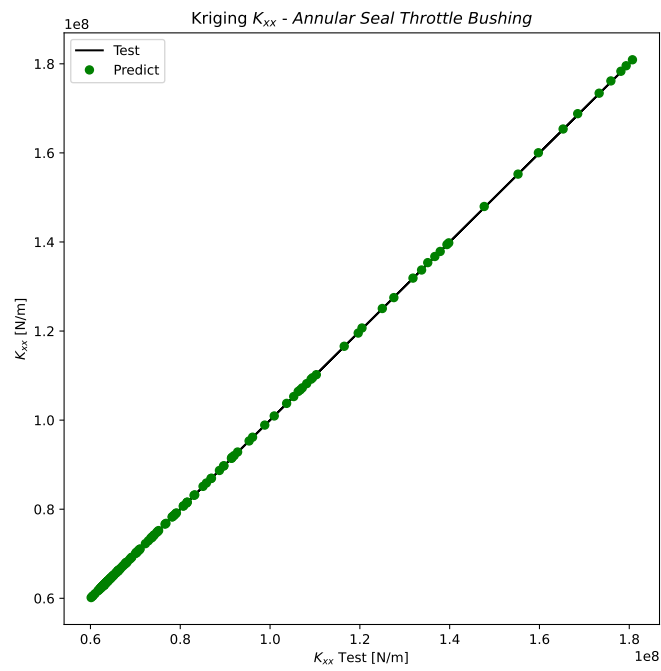
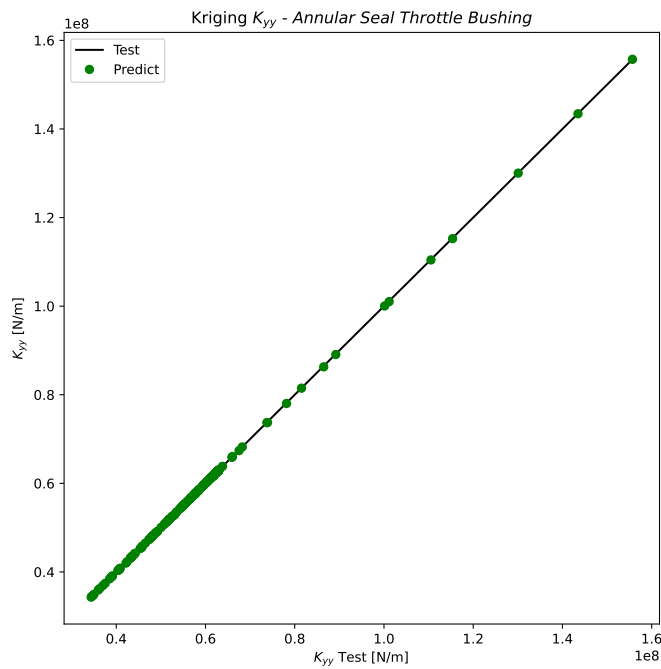
(a) K_{xx} .(b) K_{yy} .

Figura 4.15: Comparação entre mapeamento e metamodelo *Kriging* (coeficientes diretos de rigidez) - *Annular seal throttle bushing*.

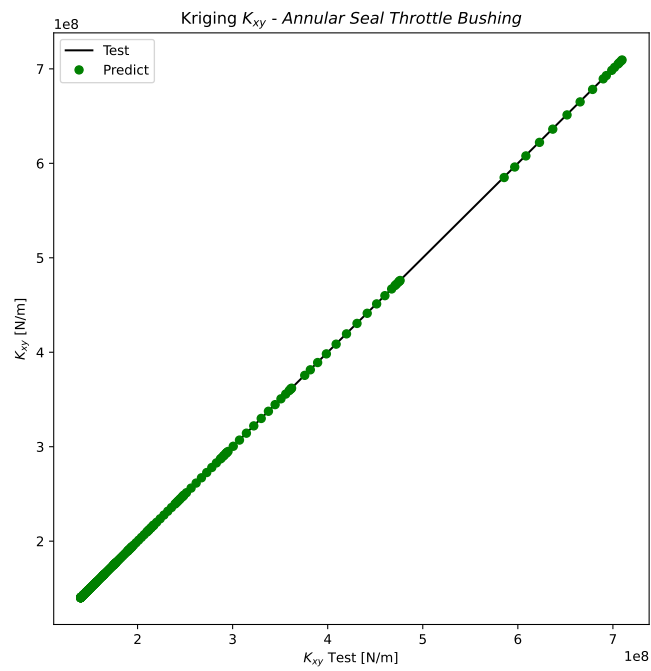
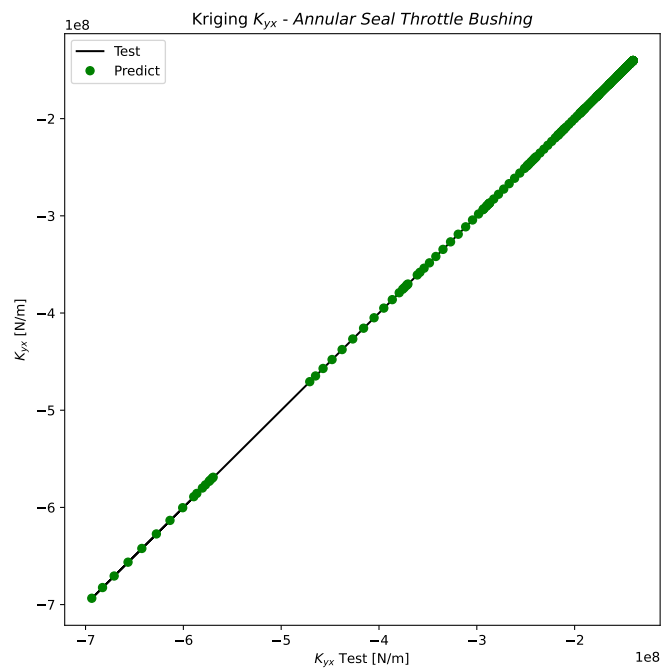
(a) K_{xy} .(b) K_{yx} .

Figura 4.16: Comparação entre mapeamento e metamodelo *Kriging* (coeficientes cruzados de rigidez) - *Annular seal throttle bushing*.

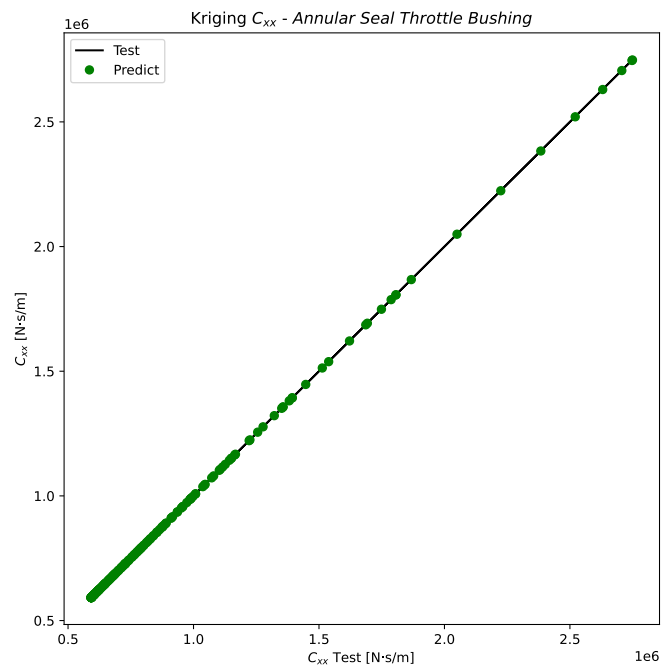
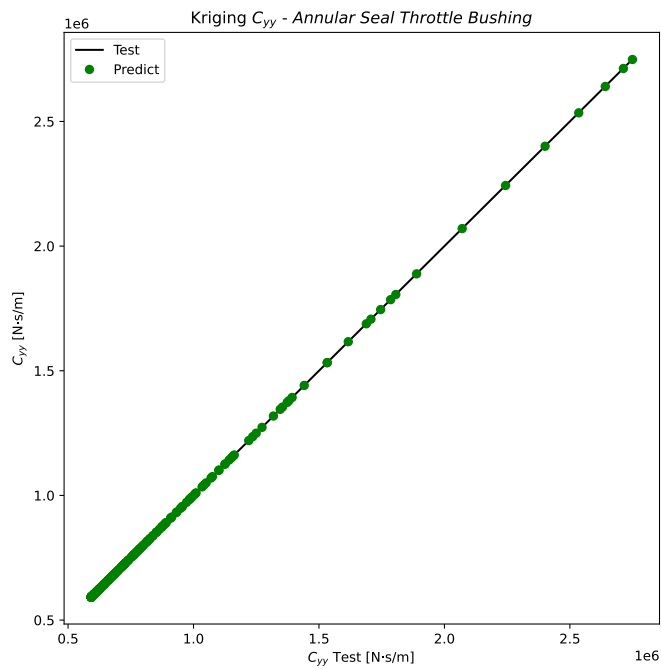
(a) C_{xx} .(b) C_{yy} .

Figura 4.17: Comparação entre mapeamento e metamodelo *Kriging* (coeficientes diretos de amortecimento) - *Annular seal throttle bushing*.

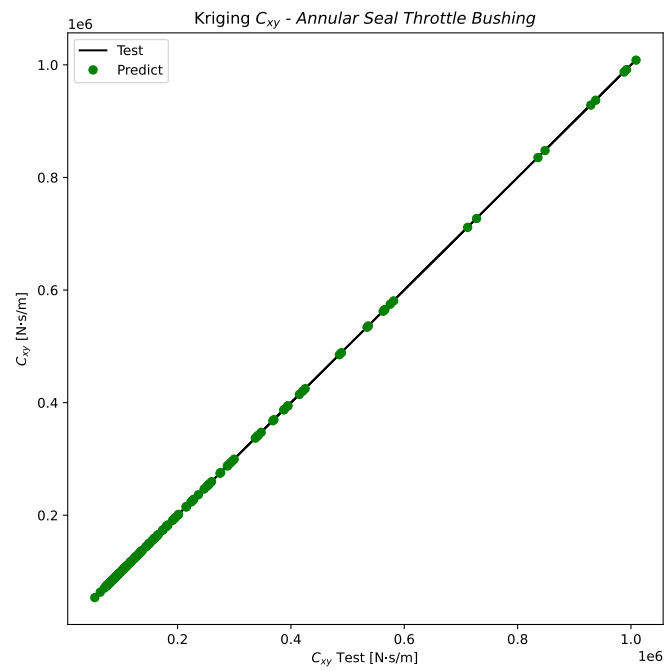
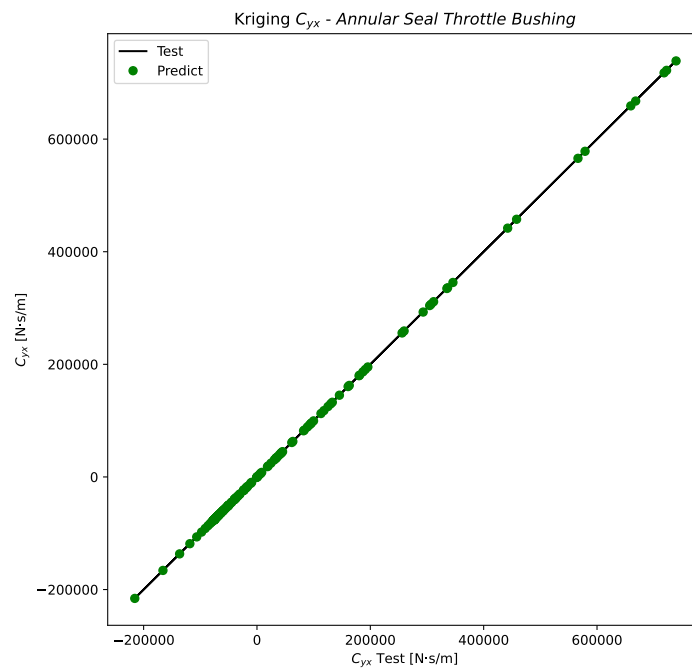
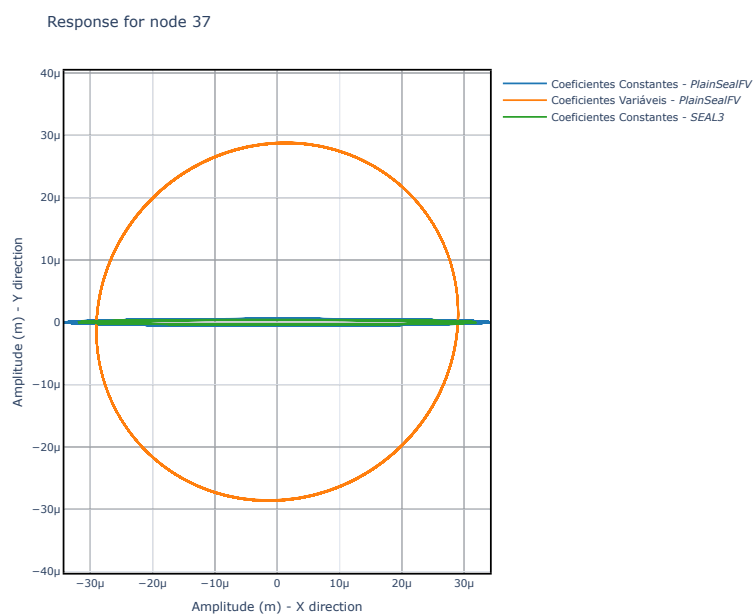
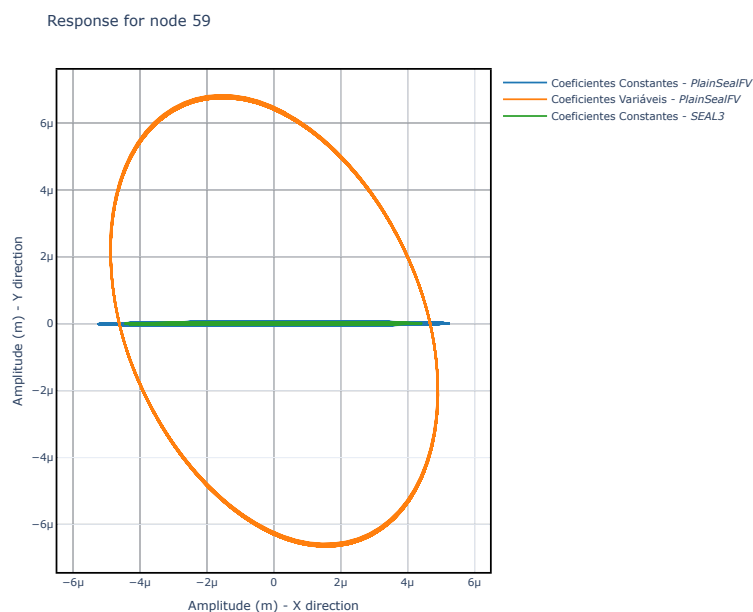
(a) C_{xy} .(b) C_{yx} .

Figura 4.18: Comparação entre mapeamento e metamodelo *Kriging* (coeficientes cruzados de amortecimento) - *Annular seal throttle bushing*.

Os resultados obtidos pelas previsões dos metamodelos apresentam valores bem próximos aos mapeados pelo BFM *PlainSealFV*. Logo, a segunda etapa da análise comparativa pode ser concluída utilizando os metamodelos na atualização dos valores dos coeficientes de rigidez e amortecimento para o cálculo das forças externas no integrador numérico. A Fig. 4.19 apresenta a comparação entre as duas abordagens adotadas acerca dos coeficientes dinâmicos dos selos.



(a) Nó 37.



(b) Nó 59.

Figura 4.19: Comparação da resposta de vibração ao desbalanceamento.

A amplitude máxima na direção horizontal mostrou pequenas variações entre as três órbitas analisadas. Em contraste, tanto o formato quanto a amplitude máxima na direção vertical foram significativamente impactados ao considerar que os coeficientes dinâmicos dos selos variam com a posição do centro do rotor.

Esses resultados numéricos evidenciam que a dependência dos coeficientes dinâmicos de selos planos em relação à posição do centro do rotor exerce um impacto significativo na resposta de vibração ao desbalanceamento em máquinas rotativas, destacando a importância de incorporar essa variabilidade nesse tipo de análise.

CAPÍTULO V

CONCLUSÕES

Nesse trabalho desenvolveu-se um *bulk-flow model*, que utiliza o Método dos Volumes Finitos para a solução numérica, capaz de determinar os coeficientes dinâmicos de selos planos para posições específicas do centro do rotor, cuja validação realizou-se através de comparações com referências adotadas.

Ao considerar que a posição do centro do rotor não é necessariamente concêntrica, notou-se o impacto significativo nos valores dos coeficientes dinâmicos e das componentes da força de sustentação, através do comportamento exponencial com o aumento da razão de excentricidade (ϵ) e do comportamento periódico com a variação do ângulo de atitude (ϕ).

Além disso, foi proposta uma nova abordagem para analisar a resposta de vibração ao desbalanceamento em máquinas rotativas, que considera a variação dos coeficientes dinâmicos dos selos com a posição do centro do rotor, a partir do mapeamento desses coeficientes para a criação de metamodelos *Kriging* para a previsão de seus valores de forma eficiente.

Embora tenham sido observadas diferenças consideráveis entre os valores dos coeficientes dinâmicos calculados no presente trabalho e os valores de referência para uma posição concêntrica, verificou-se que tais diferenças não afetaram significativamente a resposta de vibração ao desbalanceamento.

Entretanto, ao considerar a variação dos coeficientes dinâmicos em função da posição do centro do rotor, constatou-se que a resposta de vibração ao desbalanceamento apresentou alterações significativas, tanto na forma quanto na amplitude máxima da órbita descrita pelo rotor. Essa sensibilidade evidencia a relevância de analisar o comportamento dinâmico dos selos em função da posição do centro do rotor.

5.1 Perspectivas Futuras

O trabalho desenvolvido ainda pode ser aprimorado em alguns aspectos. Dentre as perspectivas para contribuições futuras, destacam-se:

- Incluir o tratamento para a compressibilidade de alguns fluidos lubrificantes no modelo matemático adotado, extendendo a aplicabilidade para selos planos que utilizam o ar como fluido lubrificante, por exemplo.
- Adicionar a Equação de Conservação de Energia no modelo matemático, tornando-o mais completo e robusto.
- Utilizar uma bancada experimental de selos para a validação da análise proposta para a resposta de vibração ao desbalanceamento.
- Considerar selos com outros tipos de geometria, como selos labirintos, *honeycomb* e *hole-pattern*.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALLAIRE, P. E.; IMLACH, J. A perturbation analysis of incompressible turbulent flow labyrinth and pumping seals. University of Virginia, 1986.
- ARGHIR, M.; FRÊNE, J. Rotordynamic coefficients of circumferentially-grooved liquid seals using the averaged navier-stokes equations. *Journal of Tribology*, v. 119, n. 3, p. 556–567, 07 1997. ISSN 0742-4787. Disponível em: <https://doi.org/10.1115/1.2833537>.
- BARBI, F.; VEDOVOTTO, J. M.; CAVALLINI JR, A. A.; SILVEIRA NETO, A.; SILVA, R. T. Numerical simulation of gas and liquid seals for rotordynamic coefficients calculations using open source software. *The Computer Journal*, COBEM, v. 27, 2024. Disponível em: <https://doi.org/10.26678/ABCM.COBEM2023.COB2023-0849>.
- BARBOSA, J. S. *Comportamento Dinâmico de Mancais Segmentados Axiais sob Regime de Lubrificação Híbrido*. 96 p. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) — Universidade Federal de Uberlândia, 2023. DOI <http://dx.doi.org/10.14393/ufu.te.2023.84>.
- CAVALINI JUNIOR, A. A. *Detecção e Identificação de Trincas Transversais Iniciais em Eixos Horizontais Flexíveis de Máquinas Rotativas*. 270 p. Tese (Doutorado em Engenharias) — Universidade Federal de Uberlândia, 2013. DOI <https://doi.org/10.14393/ufu.te.2013.87>.
- CHILDS, D. W. Dynamic analysis of turbulent annular seals based on hirs' lubrication equation. *Journal of Lubrication Technology*, v. 105, n. 3, p. 429–436, 07 1983. ISSN 0022-2305. Disponível em: <https://doi.org/10.1115/1.3254633>.
- DIETZEN, F. J.; NORDMANN, R. Calculating rotordynamic coefficients of seals by finite-difference techniques. *Journal of Tribology*, v. 109, n. 3, p. 388–394, 07 1987. ISSN 0742-4787. Disponível em: <https://doi.org/10.1115/1.3261453>.
- FLITNEY, R. *Seals and Sealing Handbook*. Butterworth-Heinemann, 2014. (Butterworth-Heinemann/ICHEME series). ISBN 9780080994130. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=-vZYAwAAQBAJ>.
- GOMES, E. Q. *Modelagem termo-hidrodinâmica de mancal cilíndrico radial submetido à condição de lubrificação variável*. 97 p. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) — Universidade Federal de Uberlândia, 2024. DOI <http://doi.org/10.14393/ufu.te.2024.548>.
- HA, T. W.; CHOE, B. S. Numerical simulation of rotordynamic coefficients for eccentric annular-type-plain-pump seal using cfd analysis. *Journal of Mechanical Science and Technology*, v. 26, n. 4, p. 1043–1048, April 2012. ISSN 1976-3824. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s12206-012-0217-x>.

HIRS, G. G. A bulk-flow theory for turbulence in lubricant films. *Journal of Lubrication Technology*, v. 95, n. 2, p. 137–145, 04 1973. ISSN 0022-2305. Disponível em: <https://doi.org/10.1115/1.3451752>.

LALANNE, M.; FERRARIS, G. *Rotordynamics Prediction in Engineering*. Wiley, 1998. ISBN 9780471972884. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=qOhSAAAAMAAJ>.

LUND, W. J.; THOMSEN, K. K. A calculation method and data for the dynamic coefficients of oil-lubricated journal bearings. *Topics in Fluid Film Bearings and Rotor Bearings System Design and Optimization*, ASME, p. 1–28, 1978.

MALISKA, C. R. *Transferencia de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional*. 2. ed. Rio de Janeiro: BR: LTCI, 2004.

MARQUETTE, O. R.; CHILDS, D. W.; ANDRES, L. S. Eccentricity effects on the rotordynamic coefficients of plain annular seals: Theory versus experiment. *Journal of Tribology*, v. 119, n. 3, p. 443–447, 07 1997. ISSN 0742-4787. Disponível em: <https://doi.org/10.1115/1.2833515>.

MATHERON, G. Principles of geostatistics. *Economic Geology*, v. 58, n. 8, p. 1246–1266, 12 1963. ISSN 0361-0128. Disponível em: <https://doi.org/10.2113/gsecongeo.58.8.1246>.

MUSZYNSKA, A. *Rotordynamics*. [S.l.]: CRC Press, 2005.

OISHI, C. M. *Análise e Implementação de Métodos Implícitos no Sistema FreeFlow2D*. Dissertação de Mestrado, São Carlos, Brasil, 2004. DOI <https://doi.org/10.11606/D.55.2004.tde-08122014-101013>.

PATANKAR, S. V. *Numerical heat transfer and fluid flow*. New York: Taylor and Francis, 1980.

PENG, J.-P.; CARPINO, M. Coulomb friction damping effects in elastically supported gas foil bearings. *Tribology Transactions*, Taylor Francis, v. 37, n. 1, p. 91–98, 1994. Disponível em: <https://doi.org/10.1080/10402009408983270>.

QIU, Z. L.; TIEU, A. K. The effect of perturbation amplitudes on eight force coefficients of journal bearings. *Tribology Transactions*, Taylor & Francis, v. 39, n. 2, p. 469–475, 1996. Disponível em: <https://doi.org/10.1080/10402009608983554>.

RIUL, J. A. *Estudo Teórico e Experimental de Mancais Hidrodinâmicos Cilíndricos*. 93 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) — Universidade Federal de Uberlândia, 1988.

SANTOS, M. C. A. de S. *Metamodelagem Kriging aplicada no controle de mancais magnéticos ativos*. 74 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) — Universidade Federal de Uberlândia, 2024. DOI <http://doi.org/10.14393/ufu.di.2023.655>.

SICCHIERI, L. C. *Metamodelagem Kriging aplicada em modelos de mancais termo-hidrodinâmicos*. 110 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) — Universidade Federal de Uberlândia, 2019. DOI <http://dx.doi.org/10.14393/ufu.di.2019.2209>.

SICCHIERI, L. C. *Modelagem multifísica de uma unidade geradora hidroelétrica*. 132 p. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) — Universidade Federal de Uberlândia, 2024. DOI <http://doi.org/10.14393/ufu.te.2024.503>.

SILVA, R. T. *Impact of damper seal coefficients in rotor dynamics : uncertainties and optimization*. 2018. Disponível em: <http://hdl.handle.net/11422/12150>.

SILVA, R. T.; MARTINS, R.; BACHMANN, G.; RANGEL, F.; MOTA, J.; VALÉRIO, J.; RITTO, T. G. Ross - rotordynamic open source software. *Journal of Open Source Software*, The Open Journal, v. 5, n. 48, p. 2120, 2020. Disponível em: <https://doi.org/10.21105/joss.02120>.

SIMPSON, T.; POPLINSKI, J.; KOCH, P.; ALLEN, J. Metamodels for computer-based engineering design: Survey and recommendations. *Engineering with Computers*, v. 17, n. 2, p. 129–150, 2001. ISSN 1435-5663. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/PL00007198>.

SNYDER, T.; SANTOS, I. F. Rotordynamic force estimation of turbulent, annular seals using openfoam®. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, v. 43, 2021. Disponível em: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:234004725>.

ZHAO, L.; ALLAIRE, P. E.; BROWN, D. Manual for computer program seal3. Heriot-Watt University, 1998.

APÊNDICE A

APLICAÇÃO DO MVF PARA VOLUMES LATERAIS, INFERIORES, SUPERIORES E DE QUINA

Nesse apêndice são desenvolvidas, a partir das condições de contorno e das Eqs. (2.32), (2.47) e (2.62), as equações válidas para volumes laterais, superiores, inferiores e de quina das malhas discretizadas para a aplicação dos MVF. Os subíndices i e j são utilizados para indicar as posições de volumes finitos genéricos nas direções axial e circumferencial, respectivamente, das malhas discretizadas.

Equação da Continuidade

Na malha numérica da Equação da Continuidade, a equação desenvolvida não é válida apenas para os volumes laterais direitos e as quinas direitas superior e inferior, onde os termos U_{θ_E} representam os $n_\theta + 1$ -ésimos volumes finitos da malha numérica da Equação da Conservação da Quantidade de Movimento na Direção Circumferencial nas suas respectivas linhas, que são complementares aos respectivos primeiros volumes finitos de cada linha. Através da condição de contorno de circularidade, esses termos são substituídos pelos primeiros volumes finitos das suas respectivas linhas, conforme a Eq. (6.1).

$$A_{U_{\theta_{i,0}}} \cdot U_{\theta_{i,0}} + A_{U_{\theta_{i,n_\theta}}} \cdot U_{\theta_{i,n_\theta}} + A_{U_{Z_{i+1,n_\theta}}} \cdot U_{Z_{i+1,n_\theta}} + A_{U_{Z_{i,n_\theta}}} \cdot U_{Z_{i,n_\theta}} = B_{i,n_\theta} \quad (6.1)$$

Equação da Conservação da Quantidade de Movimento na Direção Axial

Na malha numérica da Conservação da Quantidade de Movimento na Direção Axial, a equação é válida apenas para os volumes interiores. As equações dos volumes laterais esquerdos e direitos são obtidas aplicando a condição de contorno de circularidade de forma análoga aos volumes da Equação da Continuidade. Suas respectivas equações são dadas por:

$$A_{P_{i,0}} \cdot P_{i,0} + A_{P_{i-1,0}} \cdot P_{i-1,0} + \bar{A}_{U_{Z_{i,0}}} \cdot U_{Z_{i,0}} + A_{U_{Z_{i,1}}} \cdot U_{Z_{i,1}} + A_{U_{Z_{i,n_\theta}}} \cdot U_{Z_{i,n_\theta}} + A_{U_{Z_{i-1,0}}} \cdot U_{Z_{i-1,0}} = B_{U_{Z_{i,0}}} \quad (6.2)$$

$$A_{P_{i,n_\theta}} \cdot P_{i,n_\theta} + A_{P_{i-1,n_\theta}} \cdot P_{i-1,n_\theta} + \bar{A}_{U_{Z_{i,n_\theta}}} \cdot U_{Z_{i,n_\theta}} + A_{U_{Z_{i,0}}} \cdot U_{Z_{i,0}} + A_{U_{Z_{i,n_\theta-1}}} \cdot U_{Z_{i,n_\theta-1}} + A_{U_{Z_{i-1,n_\theta}}} \cdot U_{Z_{i-1,n_\theta}} = B_{U_{Z_{i,n_\theta}}} \quad (6.3)$$

Os volumes inferiores e superiores, incluindo as quinas, possuem metade do comprimento axial adotado para os outros elementos da malha numérica devido ao arranjo desencontrado adotado para o tratamento do acoplamento Pressão-Velocidade. Sendo assim, as Eq. (2.36), (2.37) e (2.39) devem considerar $\frac{1}{2} \cdot \Delta Z$ na aplicação do MFV.

Para os volumes inferiores, utilizam-se as condições de contorno de perda de carga na entrada, descrita pela Eq. (2.24), e de derivada da velocidade axial nula na entrada, descrita pela Eq. (2.64). Logo, o termo $[U_Z]_s^n$ da Eq. (2.38) é nulo, devido a aproximação pelo esquema *upwind*, e o termo $[P]_s^n$ da Eq. (2.35) é dado pela Eq. (6.19).

$$[P]_s^n = P_C - \left(P_i - \frac{1}{2} (1 + \xi_{inlet}) U_{Z_C}^2 \right) \quad (6.4)$$

Reagrupando os termos das Eq. (2.35) a (2.39), tem-se:

$$A_{P_C} \cdot P_C + A_{U_{Z_C}} \cdot U_{Z_C} + A_{U_{Z_E}, U_{\theta_{se}}} \cdot U_{Z_E} \cdot U_{\theta_{se}} + A_{U_{Z_W}, U_{\theta_{se}}} \cdot U_{Z_W} \cdot U_{\theta_{se}} + A_{U_{Z_C}^2} \cdot U_{Z_C}^2 + A_{U_{Z_C}, U_{ss_C}, f_{ss_C}} \cdot U_{Z_C} \cdot U_{ss_C} \cdot f_{ss_C} + A_{U_{Z_C}, U_{rs_C}, f_{rs_C}} \cdot U_{Z_C} \cdot U_{rs_C} \cdot f_{rs_C} = B_{U_{Z_C}} \quad (6.5)$$

Onde:

$$\begin{aligned}
 A_{P_C} &= -H_C \cdot R\Delta\theta \cdot \Delta T; & A_{U_{Z_C}} &= -H_C \cdot \Delta Z \cdot R\Delta\theta; & A_{U_{Z_E}, U_{\theta_{se}}} &= -\frac{1}{2} \cdot H_C \cdot \Delta Z \cdot \Delta T; \\
 A_{U_{Z_W}, U_{\theta_{se}}} &= \frac{1}{2} \cdot H_C \cdot \Delta Z \cdot \Delta T; & A_{U_{Z_C}^2} &= -\frac{1}{2} (1 + \xi_{inlet}) \cdot H_C \cdot R\Delta\theta \cdot \Delta T; \\
 A_{U_{Z_C}, U_{ss_C}, f_{ss_C}} &= A_{U_{Z_C}, U_{rs_C}, f_{rs_C}} = -\frac{l}{2\bar{c}} \cdot \Delta Z \cdot R\Delta\theta \cdot \Delta T; \\
 B_{U_{Z_C}} &= -H_C \cdot U_{Z_{C_0}} \cdot \Delta Z \cdot R\Delta\theta - P_i \cdot H_C \cdot R\Delta\theta \cdot \Delta T; & U_{\theta_{se}} &= \frac{1}{4} \cdot (U_{\theta_E} + U_{\theta_C} + 2 \cdot SR)
 \end{aligned} \tag{6.6}$$

Para os volumes das quinas inferiores esquerda e direita, além da abordagem descrita para os volumes inferiores, utiliza-se a condição de contorno de circularidade. Suas respectivas equações são dadas por:

$$\begin{aligned}
 &A_{P_{0,0}} \cdot P_{0,0} + A_{U_{Z_{0,0}}} \cdot U_{Z_{0,0}} + A_{U_{Z_{0,1}}, U_{\theta_{se0,0}}} \cdot U_{Z_{0,1}} \cdot U_{\theta_{se0,0}} + \\
 &+ A_{U_{Z_{0,n\theta}}, U_{\theta_{se0,0}}} \cdot U_{Z_{0,n\theta}} \cdot U_{\theta_{se0,0}} + A_{U_{Z_{0,0}}^2} \cdot U_{Z_{0,0}}^2 + A_{U_{Z_{0,0}}, U_{ss0,0}, f_{ss0,0}} \cdot U_{Z_{0,0}} \cdot U_{ss0,0} \cdot f_{ss0,0} + \\
 &+ A_{U_{Z_{0,0}}, U_{rs0,0}, f_{rs0,0}} \cdot U_{Z_{0,0}} \cdot U_{rs0,0} \cdot f_{rs0,0} = B_{U_{Z_{0,0}}}
 \end{aligned} \tag{6.7}$$

$$\begin{aligned}
 &A_{P_{0,n\theta}} \cdot P_{0,n\theta} + A_{U_{Z_{0,n\theta}}} \cdot U_{Z_{0,n\theta}} + A_{U_{Z_{0,0}}, U_{\theta_{se0,n\theta}}} \cdot U_{Z_{0,0}} \cdot U_{\theta_{se0,n\theta}} + \\
 &+ A_{U_{Z_{0,n\theta}-1}, U_{\theta_{se0,n\theta}}} \cdot U_{Z_{0,n\theta-1}} \cdot U_{\theta_{se0,n\theta}} + A_{U_{Z_{0,n\theta}}, U_{ss0,n\theta}, f_{ss0,n\theta}} \cdot U_{Z_{0,n\theta}} \cdot U_{ss0,n\theta} \cdot f_{ss0,n\theta} + \\
 &+ A_{U_{Z_{0,n\theta}}^2} \cdot U_{Z_{0,n\theta}}^2 + A_{U_{Z_{0,n\theta}}, U_{rs0,n\theta}, f_{rs0,n\theta}} \cdot U_{Z_{0,n\theta}} \cdot U_{rs0,n\theta} \cdot f_{rs0,n\theta} = B_{U_{Z_{0,n\theta}}}
 \end{aligned} \tag{6.8}$$

De forma similar, nos volumes superiores utiliza-se a condição de contorno de recuperação de pressão na saída, descrita pela Eq. (2.25). Logo, o termo $[P]_s^n$ da Eq. (2.35) é dado pela Eq. (6.9).

$$[P]_s^n = P_e - \frac{1}{2} (1 - \xi_{exit}) U_{Z_C}^2 - P_s \tag{6.9}$$

Reagrupando os termos das Eq. (2.35) a (2.39), tem-se:

$$\begin{aligned}
 &A_{P_S} \cdot P_S + A_{U_{Z_C}} \cdot U_{Z_C} + A_{U_{Z_E}, U_{\theta_{se}}} \cdot U_{Z_E} \cdot U_{\theta_{se}} + \\
 &+ A_{U_{Z_W}, U_{\theta_{se}}} \cdot U_{Z_W} \cdot U_{\theta_{se}} + A_{U_{Z_C}^2} \cdot U_{Z_C}^2 + A_{U_{Z_C}, U_{Z_S}} \cdot U_{Z_C} \cdot U_{Z_S} + \\
 &+ A_{U_{Z_C}, U_{ss_C}, f_{ss_C}} \cdot U_{Z_C} \cdot U_{ss_C} \cdot f_{ss_C} + A_{U_{Z_C}, U_{rs_C}, f_{rs_C}} \cdot U_{Z_C} \cdot U_{rs_C} \cdot f_{rs_C} = B_{U_{Z_C}}
 \end{aligned} \tag{6.10}$$

Onde:

$$\begin{aligned}
 A_{P_S} &= H_C \cdot R \Delta \theta \cdot \Delta T; & A_{U_{Z_C}} &= -H_C \cdot \Delta Z \cdot R \Delta \theta; & A_{U_{Z_E}, U_{\theta_{se}}} &= -\frac{1}{2} \cdot H_C \cdot \Delta Z \cdot \Delta T; \\
 A_{U_{Z_W}, U_{\theta_{se}}} &= \frac{1}{2} \cdot H_C \cdot \Delta Z \cdot \Delta T; & A_{U_{Z_C}^2} &= -H_C \cdot R \Delta \theta \cdot \Delta T + \frac{1}{2} (1 - \xi_{exit}) \cdot H_C \cdot R \Delta \theta \cdot \Delta T; \\
 A_{U_{Z_C}, U_{Z_S}} &= H_C \cdot R \Delta \theta \cdot \Delta T; & A_{U_{Z_C}, U_{ss_C}, f_{ss_C}} &= A_{U_{Z_C}, U_{rs_C}, f_{rs_C}} = -\frac{l}{2\bar{c}} \cdot \Delta Z \cdot R \Delta \theta \cdot \Delta T; \\
 B_{U_{Z_C}} &= -H_C \cdot U_{Z_{C_0}} \cdot \Delta Z \cdot R \Delta \theta + P_e \cdot H_C \cdot R \Delta \theta \cdot \Delta T; & U_{\theta_{se}} &= \frac{1}{2} \cdot (U_{\theta_{SE}} + U_{\theta_S})
 \end{aligned} \tag{6.11}$$

Utilizando a condição de contorno de circularidade para os volumes das quinas superiores esquerda e direita, tem-se:

$$\begin{aligned}
 &A_{P_{n_Z+1,0}} \cdot P_{n_Z+1,0} + A_{U_{Z_{n_Z+1,0}}} \cdot U_{Z_{n_Z+1,0}} + A_{U_{Z_{n_Z+1,1}}, U_{\theta_{se_{n_Z+1,0}}}} \cdot U_{Z_{n_Z+1,1}} \cdot U_{\theta_{se_{n_Z+1,0}}} + \\
 &\quad + A_{U_{Z_{n_Z+1,n_\theta}}, U_{\theta_{se_{n_Z+1,0}}}} \cdot U_{Z_{n_Z+1,n_\theta}} \cdot U_{\theta_{se_{n_Z+1,0}}} + A_{U_{Z_{n_Z+1,0}}^2} \cdot U_{Z_{n_Z+1,0}}^2 + \\
 &\quad + A_{U_{Z_{n_Z+1,0}}, U_{ss_{n_Z+1,0}}, f_{ss_{n_Z+1,0}}} \cdot U_{Z_{n_Z+1,0}} \cdot U_{ss_{n_Z+1,0}} \cdot f_{ss_{n_Z+1,0}} + \\
 &\quad + A_{U_{Z_{n_Z+1,0}}, U_{rs_{n_Z+1,0}}, f_{rs_{n_Z+1,0}}} \cdot U_{Z_{n_Z+1,0}} \cdot U_{rs_{n_Z+1,0}} \cdot f_{rs_{n_Z+1,0}} = B_{U_{Z_{n_Z+1,0}}}
 \end{aligned} \tag{6.12}$$

$$\begin{aligned}
 &A_{P_{n_Z,n_\theta}} \cdot P_{n_Z,n_\theta} + A_{U_{Z_{n_Z+1,n_\theta}}} \cdot U_{Z_{n_Z+1,n_\theta}} + A_{U_{Z_{n_Z+1,0}}, U_{\theta_{se_{n_Z+1,n_\theta}}}} \cdot U_{Z_{n_Z+1,0}} \cdot U_{\theta_{se_{n_Z+1,n_\theta}}} + \\
 &\quad + A_{U_{Z_{n_Z+1,n_\theta-1}}, U_{\theta_{se_{n_Z+1,n_\theta}}}} \cdot U_{Z_{n_Z+1,n_\theta-1}} \cdot U_{\theta_{se_{n_Z+1,n_\theta}}} + A_{U_{Z_{n_Z+1,n_\theta}}^2} \cdot U_{Z_{n_Z+1,n_\theta}}^2 + \\
 &\quad + A_{U_{Z_{n_Z+1,n_\theta}}, U_{ss_{n_Z+1,n_\theta}}, f_{ss_{n_Z+1,n_\theta}}} \cdot U_{Z_{n_Z+1,n_\theta}} \cdot U_{ss_{n_Z+1,n_\theta}} \cdot f_{ss_{n_Z+1,n_\theta}} + \\
 &\quad + A_{U_{Z_{n_Z+1,n_\theta}}, U_{rs_{n_Z+1,n_\theta}}, f_{rs_{n_Z+1,n_\theta}}} \cdot U_{Z_{n_Z+1,n_\theta}} \cdot U_{rs_{n_Z+1,n_\theta}} \cdot f_{rs_{n_Z+1,n_\theta}} = B_{U_{Z_{n_Z+1,n_\theta}}}
 \end{aligned} \tag{6.13}$$

Por fim, as não-linearidades são tratadas de forma similar aos volumes interiores.

Equação da Conservação da Quantidade de Movimento na Direção Circunferencial

Na malha numérica da Conservação da Quantidade de Movimento na Direção Circunferencial, a equação desenvolvida é válida apenas para os volumes interiores e laterais direitos. As equações dos volumes laterais esquerdos são obtidas aplicando a condição de contorno de circularidade de forma análoga aos volumes da Equação da Continuidade. Suas respectivas equações são dadas por:

$$\begin{aligned}
 &A_{P_{i,0}} \cdot P_{i,0} + A_{P_{i,n_\theta}} \cdot P_{i,n_\theta} + \bar{A}_{U_{\theta_{i,0}}} \cdot U_{\theta_{i,0}} + A_{U_{\theta_{i,n_\theta}}} \cdot U_{\theta_{i,n_\theta}} + \\
 &\quad + A_{U_{\theta_{i+1,0}}} \cdot U_{\theta_{i+1,0}} + A_{U_{\theta_{i-1,0}}} \cdot U_{\theta_{i-1,0}} = \bar{B}_{U_{\theta_{i,0}}}
 \end{aligned} \tag{6.14}$$

Para os volumes inferiores, incluindo a quina inferior direita, utiliza-se a condição de contorno de *swirl ratio*, descrita pela Eq. (2.27). Logo, o termo $[U_\theta]_s^n$ da Eq. (2.53) é dado pela Eq. (6.19).

$$[U_\theta]_s^n = U_{\theta_n} - SR \quad (6.15)$$

Reagrupando os termos das Eq. (2.50) a (2.54), tem-se:

$$\begin{aligned} A_{P_C} \cdot P_C + A_{P_W} \cdot P_W + A_{U_{\theta_C}} \cdot U_{\theta_C} + A_{U_{\theta_C}^2} \cdot U_{\theta_C}^2 + A_{U_{\theta_C}, U_{\theta_W}} \cdot U_{\theta_C} \cdot U_{\theta_W} + \\ + A_{U_{\theta_N}, U_{Z_{nw}}} \cdot U_{\theta_N} \cdot U_{Z_{nw}} + A_{U_{\theta_C}, U_{ss_C}, f_{ss_C}} \cdot U_{\theta_C} \cdot U_{ss_C} \cdot f_{ss_C} + \\ + A_{U_{\theta_C}, U_{rs_C}, f_{rs_C}} \cdot U_{\theta_C} \cdot U_{rs_C} \cdot f_{rs_C} + A_{U_{rs_C}, f_{rs_C}} \cdot U_{rs_C} \cdot f_{rs_C} = B_{U_{\theta_C}} \end{aligned} \quad (6.16)$$

Onde:

$$\begin{aligned} A_{P_C} = -H_C \cdot \Delta Z \cdot \Delta T; \quad A_{P_S} = H_C \cdot \Delta Z \cdot \Delta T; \quad A_{U_{\theta_C}} = -2H_C \cdot \Delta Z \cdot R\Delta\theta \\ A_{U_{\theta_C}^2} = -2H_C \cdot \Delta Z \cdot \Delta T; \quad A_{U_{\theta_C}, U_{\theta_W}} = 2H_C \cdot \Delta Z \cdot \Delta T \quad A_{U_{\theta_N}, U_{Z_{nw}}} = -H_C \cdot R\Delta\theta \cdot \Delta T; \\ A_{U_{\theta_C}, U_{ss_C}, f_{ss_C}} = A_{U_{\theta_C}, U_{rs_C}, f_{rs_C}} = -A_{U_{rs_C}, f_{rs_C}} = -\frac{l}{\bar{c}} \cdot \Delta Z \cdot R\Delta\theta \cdot \Delta T; \\ B_{U_{\theta_C}} = -2H_C \cdot U_{\theta_{C_0}} \cdot \Delta Z \cdot R\Delta\theta - SR \cdot U_{Z_{nw}} \cdot H_C \cdot R\Delta\theta \cdot \Delta T \end{aligned} \quad (6.17)$$

Para o volume da quina inferior esquerda, além da abordagem descrita para os volumes inferiores, utiliza-se a condição de contorno de circularidade. Sua equação é dada por:

$$\begin{aligned} A_{P_{0,0}} \cdot P_{0,0} + A_{P_{0,n_\theta}} \cdot P_{0,n_\theta} + A_{U_{\theta_{0,0}}} \cdot U_{\theta_{0,0}} + A_{U_{\theta_{0,0}}^2} \cdot U_{\theta_{0,0}}^2 + A_{U_{\theta_{0,0}}, U_{\theta_{0,n_\theta}}} \cdot U_{\theta_{0,0}} \cdot U_{\theta_{0,n_\theta}} + \\ + A_{U_{\theta_{1,0}}, U_{Z_{nw0,0}}} \cdot U_{\theta_{1,0}} \cdot U_{Z_{nw0,0}} + A_{U_{\theta_{0,0}}, U_{ss_{0,0}}, f_{ss_{0,0}}} \cdot U_{\theta_{0,0}} \cdot U_{ss_{0,0}} \cdot f_{ss_{0,0}} + \\ + A_{U_{\theta_{0,0}}, U_{rs_{0,0}}, f_{rs_{0,0}}} \cdot U_{\theta_{0,0}} \cdot U_{rs_{0,0}} \cdot f_{rs_{0,0}} + A_{U_{rs_{0,0}}, f_{rs_{0,0}}} \cdot U_{rs_{0,0}} \cdot f_{rs_{0,0}} = B_{U_{\theta_{0,0}}} \end{aligned} \quad (6.18)$$

De forma similar, nos volumes superiores, incluindo a quina superior direita, utiliza-se a condição de contorno de derivada nula na saída, descrita pela Eq. (2.65). Logo, o termo $[U_\theta]_s^n$ da Eq. (2.53) é dado pela Eq. (6.19).

$$[U_\theta]_s^n = U_{\theta_C} - U_{\theta_s} \quad (6.19)$$

Reagrupando os termos das Eq. (2.50) a (2.54), tem-se:

$$\begin{aligned}
 & A_{P_C} \cdot P_C + A_{P_W} \cdot P_W + A_{U_{\theta_C}} \cdot U_{\theta_C} + A_{U_{\theta_C}^2} \cdot U_{\theta_C}^2 + A_{U_{\theta_C}, U_{\theta_W}} \cdot U_{\theta_C} \cdot U_{\theta_W} + \\
 & + A_{U_{\theta_C}, U_{Z_{nw}}} \cdot U_{\theta_C} \cdot U_{Z_{nw}} + A_{U_{\theta_S}, U_{Z_{nw}}} \cdot U_{\theta_S} \cdot U_{Z_{nw}} + A_{U_{\theta_C}, U_{ss_C}, f_{ss_C}} \cdot U_{\theta_C} \cdot U_{ss_C} \cdot f_{ss_C} + \\
 & + A_{U_{\theta_C}, U_{rs_C}, f_{rs_C}} \cdot U_{\theta_C} \cdot U_{rs_C} \cdot f_{rs_C} + A_{U_{rs_C}, f_{rs_C}} \cdot U_{rs_C} \cdot f_{rs_C} = B_{U_{\theta_C}}
 \end{aligned} \tag{6.20}$$

Onde:

$$\begin{aligned}
 A_{P_C} &= -H_C \cdot \Delta Z \cdot \Delta T; & A_{P_S} &= H_C \cdot \Delta Z \cdot \Delta T; & A_{U_{\theta_C}} &= -2H_C \cdot \Delta Z \cdot R\Delta\theta \\
 A_{U_{\theta_C}^2} &= -2H_C \cdot \Delta Z \cdot \Delta T; & A_{U_{\theta_C}, U_{\theta_W}} &= 2H_C \cdot \Delta Z \cdot \Delta T; \\
 A_{U_{\theta_C}, U_{Z_{nw}}} &= -H_C \cdot R\Delta\theta \cdot \Delta T; & A_{U_{\theta_S}, U_{Z_{nw}}} &= H_C \cdot R\Delta\theta \cdot \Delta T; \\
 A_{U_{\theta_C}, U_{ss_C}, f_{ss_C}} &= A_{U_{\theta_C}, U_{rs_C}, f_{rs_C}} = -A_{U_{rs_C}, f_{rs_C}} = -\frac{l}{\bar{c}} \cdot \Delta Z \cdot R\Delta\theta \cdot \Delta T; \\
 B_{U_{\theta_C}} &= -2H_C \cdot U_{\theta_{C_0}} \cdot \Delta Z \cdot R\Delta\theta
 \end{aligned} \tag{6.21}$$

Para o volume da quina superior esquerda, além da abordagem descrita para os volumes inferiores, utiliza-se a condição de contorno de circularidade. Sua equação é dada por:

$$\begin{aligned}
 & A_{P_{nZ,0}} \cdot P_{nZ,0} + A_{P_{nZ,n\theta}} \cdot P_{nZ,n\theta} + A_{U_{\theta_{nZ,0}}} \cdot U_{\theta_{nZ,0}} + A_{U_{\theta_{nZ,0}}^2} \cdot U_{\theta_{nZ,0}}^2 + \\
 & + A_{U_{\theta_{nZ,0}}, U_{\theta_{nZ,n\theta}}} \cdot U_{\theta_{nZ,0}} \cdot U_{\theta_{nZ,n\theta}} + A_{U_{\theta_{nZ,0}}, U_{Z_{nw_{nZ,0}}}} \cdot U_{\theta_{nZ,0}} \cdot U_{Z_{nw_{nZ,0}}} + \\
 & + A_{U_{\theta_{nZ-1,0}}, U_{Z_{nw_{nZ,0}}}} \cdot U_{\theta_{nZ-1,0}} \cdot U_{Z_{nw_{nZ,0}}} + A_{U_{\theta_{nZ,0}}, U_{ss_{nZ,0}}, f_{ss_{nZ,0}}} \cdot U_{\theta_{nZ,0}} \cdot U_{ss_{nZ,0}} \cdot f_{ss_{nZ,0}} + \\
 & + A_{U_{\theta_{nZ,0}}, U_{rs_{nZ,0}}, f_{rs_{nZ,0}}} \cdot U_{\theta_{nZ,0}} \cdot U_{rs_{nZ,0}} \cdot f_{rs_{nZ,0}} + A_{U_{rs_{nZ,0}}, f_{rs_{nZ,0}}} \cdot U_{rs_{nZ,0}} \cdot f_{rs_{nZ,0}} = B_{U_{\theta_{nZ,0}}}
 \end{aligned} \tag{6.22}$$

Por fim, as não-linearidades são tratadas de forma similar aos volumes interiores.