

PRISCILA FERREIRA BARBOSA DE SOUSA

**DESENVOLVIMENTO DE UMA TÉCNICA BASEADA EM FUNÇÕES
DE GREEN E OBSERVADORES DINÂMICOS PARA APLICAÇÃO EM
PROBLEMAS INVERSOS**



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
2006**

PRISCILA FERREIRA BARBOSA DE SOUSA

**DESENVOLVIMENTO DE UMA TÉCNICA BASEADA EM FUNÇÕES
DE GREEN E OBSERVADORES DINÂMICOS PARA APLICAÇÃO EM
PROBLEMAS INVERSOS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para a obtenção do título de **MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA**.

Área de Concentração: Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos

Orientador: Prof. Dr. Gilmar Guimarães

UBERLÂNDIA - MG

2006

FICHA CATALOGRÁFICA

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

S725d Sousa, Priscila Ferreira Barbosa de, 1981-
 Desenvolvimento de uma técnica baseada em funções de Green e observadores dinâmicos para aplicação em problemas inversos / Priscila Ferreira Barbosa de Sousa. - 2006.

89 f. : il.

Orientador: Gilmar Guimarães.
Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Uberlândia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.

Inclui bibliografia.

1. Calor - Transmissão - Teses. 2. Problemas inversos (Equações diferenciais) - Teses. 3. Green, Funções de - Teses. I. Guimarães, Gilmar. II. Universidade Federal de Uberlândia. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. III. Título.

CDU: 536.24

Dedico este trabalho aos meus avós,
Oswaldo Barbosa e Orides Ferreira,
que não puderam presenciar esse
momento.

Agradecimentos

Aos meus pais, Osvaldo e Izabel, pelo amor, apoio irrestrito e incentivo sempre. Aos meus irmãos e cunhados por aguentarem os momentos de mau humor. Às minhas avós, Diva e Paschoalina, por toda oração feita. Ao meu cachorro, Max, por perdoar minha ausência, sempre abanando o rabo a me ver.

Ao orientador, mestre, amigo e tantas vezes pai, Gilmar Guimarães, não somente pela orientação e todo ensinamento, mas, sobretudo, pela amizade, companheirismo e paciência.

Aos amigos do LTCM e colegas do Programa de Pós-Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, dentre os quais posso citar Solidônio, Valério, Leonardo, Felipe, o casal mais querido (João e Karina), Gustavo, Ziza, Tati, Alessandra, Aline, Marcelo, Zé Cabelo e tantos outros.

A amiga Ana Paula, por me socorrer durante minhas atrapalhadas computacionais e principalmente pela amizade.

A coordenação do programa de pós-graduação da Universidade Federal de Uberlândia.

Ao CNPq, pela concessão da bolsa de estudo.

SUMÁRIO

Lista de símbolos.....	viii
Resumo.....	x
Abstract.....	xi
 Capítulo I	
Introdução.....	1
 Capítulo II	
Revisão bibliográfica.....	4
 Capítulo III	
Conceitos e Fundamentos.....	12
3.1. Introdução.....	12
3.2. Fundamentos da técnica baseada em observadores dinâmicos usada na solução de problemas inversos unidimensionais (procedimento proposto por Blum e Marquardt, (1997)).....	13
3.3. Obtenção da função transferência G_H para um problema 3D-transiente.....	25
3.3.1 Problema térmico original.....	25
3.3.2 Problema térmico auxiliar.....	27
 Capítulo IV	
Análise e escolha dos parâmetros de ajuste.....	31
4.1 Introdução.....	31
4.2. Relação entre as funções transferência.....	31
4.3. Parâmetros de regulação do filtro.....	34
4.4. Resultados.....	35

Capítulo V

Análise e discussão de resultados: Casos Simulados	42
5.1. <i>Introdução</i>	42
5.2. <i>Comparação entre os métodos de obtenção da função de transferência do condutor (G_H)</i>	43
5.3. <i>Resultados simulados</i>	47
5.3.1. <i>Estimativas de fluxo de calor: problema unidimensional transiente</i>	47
5.3.2 <i>Estimativas de fluxo de calor: problema bidimensional transiente</i>	52
5.3.3. <i>Estimativas de fluxo de calor: problema tridimensional transiente</i>	54

Capítulo VI

Resultados Experimentais: aplicações a modelos térmicos uni e tridimensionais ...	60
6.1 <i>Introdução</i>	60
6.2 <i>Modelo térmico unidimensional</i>	61
6.2.1. <i>Bancada experimental</i>	61
6.2.2. <i>Resultados</i>	64
6.3. <i>Modelo térmico tridimensional</i>	66
6.3.1. <i>Bancada experimental</i>	66
6.3.2. <i>Resultados estimados</i>	68

Capítulo VII

Conclusões	71
7.1. <i>Considerações finais</i>	71
7.2. <i>Sugestões para trabalhos futuros</i>	73

Referências Bibliográficas	74
---	----

LISTA DE SÍMBOLOS

LETRAS LATINAS

a_i	Coeficientes denominador	
b_i	Coeficientes numerador	
G	Função Transferência	
J	Funcional	
k	Condutividade térmica	W/mK
L	Comprimento	m
m	Grau do polinômio numerador	
n	Grau do polinômio denominador	
N	Ruído	°C
P	Direção de busca	
q	Taxa de transferência de calor	W
r	Número de tempos futuros	
r_i	Posição em coordenadas cartesianas	
rp	Ripple	
S_1	Superfície de incidência da taxa de calor	m ²
t	Tempo	s
T	Temperatura	°C
T_o	Temperatura inicial	°C
x	Direção axial	m
Y	Temperatura experimental	°C
y	Direção axial	m
z	Direção axial	m

LETRAS GREGAS

α	Difusividade térmica	m ² /s
Δt	Intervalo de medição da temperatura	s
Δx	Distância entre nós na direção x	m
ω	Frequência	rad/s
ε	Ruído aleatório	°C
θ	Diferença de Temperatura	°C
λ	Multiplicador de Lagrange	
β	Comprimento do passo de busca	
γ	Passo de busca	

Subscrito

h	Condutor obtido por funções de Green
H	Condutor
N	Ruído
Q	Sinal
L	Domínio de Laplace
Z	Domínio “z”
k	Seqüência no tempo discreto
-k	Seqüência inversa no tempo discreto
C	Frequência de corte; mecanismo de correção (G_c)
M	Medido; passo de tempo (Método seqüencial)

Sobrescrito

—	Função no Domínio de Laplace
*	Corrompido por ruído
+	Problema térmico auxiliar; Função de Green
^	Estimado

Sousa, P. F. B., Desenvolvimento de uma Técnica Baseada em Funções de Green e Observadores Dinâmicos para Aplicação em Problemas Inversos, 2006, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG.

Resumo

A maioria das técnicas usadas na solução de problemas inversos se restringe à solução de problemas unidimensionais, esbarrando em restrições computacionais e/ou matemáticas. Como alternativa na solução desse tipo de abordagem, técnicas de otimização e de filtros têm sido bastante usadas. A principal característica dos algoritmos que usam filtros é a robustez quanto à presença de ruídos experimentais, uma vez que essa interferência, que é inerente aos dados experimentais, pode ser amplificada durante o processo de estimação. A minimização dos efeitos do ruído é, portanto, fundamental na solução de problemas inversos. Neste sentido, esse trabalho apresenta um novo procedimento para o uso de observadores dinâmicos a ser aplicado na solução de problemas inversos multidimensionais em condução de calor. O novo procedimento consiste no uso de funções de Green e na definição de sistemas dinâmicos equivalentes para a obtenção da função de transferência de forma simples e direta. Tal procedimento pode ser usado indistintamente em modelos 1D, 2D ou 3D. Para avaliar a eficiência do uso da técnica baseada em funções de Green e observadores dinâmicos, testes simulados e experimentais foram realizados em modelos uni, bi e tridimensionais. Além disso, submeteu-se a técnica proposta a comparações com métodos já consolidados na solução de problemas inversos, como o método da função especificada sequencial ou técnicas de otimização como o método da seção áurea. A técnica desenvolvida se mostrou eficiente, robusta, simples quanto a sua implementação, requerendo um baixo tempo de processamento, sendo competitiva do ponto de vista de obtenção dos resultados.

Palavras Chave: Problemas inversos. Condução de calor. Observadores. Funções de Green.

Sousa, P. F. B., Development of a Technique Based on Green's Functions and Dynamic Observers to be Applied in Inverse Problems, 2006, Dissertation of Master's degree, Federal University of Uberlândia, Uberlândia, MG.

Abstract

This work proposes a new procedure for the study of inverse heat conduction problem. The dynamic observer state technique, used here, is developed to solve not only one-dimensional but also three-dimensional heat transfer problem. The inverse heat conduction problem is represented by a classical inverse definition, i.e., an unknown heat flux is imposed at a front surface of a sample. The heat flux is then estimated by using the dynamic observer techniques and temperature data simulated from "sensor" located at the sample far from the heat source. The derivation of optimal observer equations follows directly from a novel interpretation on inverse heat conduction in the frequency domain: solving the IHCP is viewed as a filter design problem in which the reconstructed heat flux is obtained by low-pass filtering of the true heat flux. The transfer function, crucial for these techniques, is obtained here using the Green function method. This procedure allows a great flexibility to the technique and represents an easy way to apply the observer method to multidimensional problem. Comparisons with the sequential specification method and golden section technique are presented in order to evaluate the technique. The technique shows to be robust and efficient. In addition, the method also has a low processing time.

Key words: Inverse problems. Heat conduction. Dynamic observers. Green's Function.

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

Problemas inversos possuem aplicações relevantes em várias áreas de atuação humana, com especial destaque para engenharia e medicina, podendo ser empregados sob diversas formas. A principal característica deste tipo de abordagem é a obtenção da solução do problema físico de maneira indireta, como por exemplo, a determinação de campos térmicos em superfícies sem acesso, a obtenção da função resposta em frequência de uma estrutura complexa ou ainda, o diagnóstico de alguma doença por tomografia computadorizada. Em todos os casos, as condições de contorno destes problemas não são conhecidas ou são de difícil acesso. Diante disso, o problema pode ser resolvido a partir de informações oriundas de sensores localizados em pontos acessíveis.

Em problemas diretos de condução de calor, se o fluxo de calor (a causa) é conhecido o campo de temperatura (o efeito) pode então ser determinado. Em contrapartida em um problema inverso estima-se a causa a partir do conhecimento do efeito em algum ponto de fácil acesso. Assim o uso de temperaturas experimentais permite a obtenção da solução do problema térmico que pode ser: a obtenção das propriedades térmicas, obtenção do fluxo de calor superficial, obtenção da fonte de calor interna ou ainda a obtenção da temperatura superficial numa face sem acesso direto.

Os problemas inversos pertencem a uma classe muito interessante e comum de problemas que são matematicamente ditos mal postos. Observa-se que matematicamente um problema é considerado bem posto se satisfizer três requisitos essenciais:

- i) Existência;
- ii) Unicidade;
- iii) Estabilidade.

A existência de uma solução para um problema inverso em condução de calor é assegurada pela física: se existe efeito consequentemente existe uma causa. Dentre suas características, os problemas inversos apresentam a possibilidade de existir mais de uma solução para o mesmo problema, o que leva a necessidade do uso de ferramentas

matemáticas baseadas em informações adicionais. Citam-se neste caso, como exemplo, o compromisso com a modelagem, por isso a unicidade da solução para problemas inversos pode ser matematicamente provada apenas para alguns casos especiais. Além disso, o problema inverso é muito sensível aos efeitos degenerativos do ruído aditivo sobre os dados de entrada, o operador ou até mesmo as limitações impostas pelo caráter iterativo do processo numérico. Consequentemente é necessário o uso de técnicas especiais para que a solução satisfaça o critério da estabilidade.

Existe na literatura uma variedade de soluções analíticas e numéricas para problemas inversos de condução de calor. Entretanto, a maioria delas se restringe a problemas uni e bidimensionais. Técnicas de otimização bem como as técnicas de filtros, que fazem uso da teoria de sistemas e controles, têm sido bastante usadas como alternativa na solução desse tipo de problema.

Uma boa técnica inversa deve ser aplicável a problemas reais com geometrias complexas e contornos desconhecidos e/ou de difícil acesso. Nesse sentido, no Capítulo 2 apresenta-se uma breve revisão de algumas das técnicas mais usadas para a solução de problemas inversos em condução de calor. Percebe-se que algumas não possuem boa estabilidade quando a presença de ruídos experimentais é de grande proporção, enquanto outras, apresentam alta complexidade matemática de implementação, requerendo alto custo e tempo computacional. Verifica-se ainda no Capítulo 2, que a técnica baseada em observadores dinâmicos apresentada por Blum e Marquardt (1997), resolve o problema inverso unidimensional normalizado propondo uma interpretação diferente no domínio da frequência apresentando como característica uma implementação simples e a possibilidade de aplicação em problemas multidimensionais. Além disso, o método baseado em observadores possui um baixo custo computacional. O objetivo deste estudo é aplicar esta técnica na solução de problemas inversos reais de condução de calor. Para o alcance desse objetivo, como um primeiro passo, é necessário o estudo da aplicabilidade da técnica em problemas com modelagem bi e tridimensional.

No Capítulo 3, primeiro introduz-se a técnica proposta por Blum e Marquardt (1997) na forma como foi concebida. Uma vez verificado que a aplicação direta da técnica na solução de problemas multidimensionais não é viável devido a restrições computacionais, desenvolve-se um novo procedimento para a aplicação a problemas 2D e 3D transientes. O procedimento se baseia na obtenção da função transferência do modelo condutor através do uso de funções de Green e da definição de sistemas dinâmicos equivalentes.

Dentre as vantagens do algoritmo proposto pode-se citar que o método incorpora parâmetros de ajuste que variam dependendo do nível de ruído presente nos dados experimentais. O Capítulo 4 apresenta os conceitos necessários para análise e escolha

desses parâmetros, uma vez que a minimização do efeito do ruído é fundamental em problemas inversos.

Uma forma de se validar a técnica baseada em funções de Green e observadores dinâmicos é através de simulações numéricas. Essas simulações são apresentadas no Capítulo 5. Neste capítulo, ainda com intuito de validação da técnica, comparações com técnicas consolidadas na solução de problemas inversos como o método da função especificada seqüencial (Beck *et al.*, 1985), e o método da seção áurea (Vanderplaats, 1991) são realizadas.

Outra forma de se validar um método é através de experimentos realizados sob condições controladas, nos quais se pode mensurar a variável a ser estimada com exatidão. No Capítulo 6 apresenta-se a comparação entre o fluxo real medido e as estimativas obtidas através do método proposto e do método da função especificada (Beck *et al.*, 1985), para dois casos experimentais, sendo um experimento unidimensional e o outro tridimensional. O método da seção áurea não é usado como critério de comparação neste capítulo por ser divergente quando existe a presença de ruídos nos dados experimentais.

No Capítulo 7 conclui-se este trabalho e propõem-se sugestões para a sua continuidade.

CAPÍTULO II

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Problemas inversos em condução de calor têm sido investigados por um grande número de pesquisadores, desde as primeiras contribuições (Stolz, 1960) até inúmeros trabalhos mais recentes. Já existem, hoje, na literatura livros clássicos que procuram abranger as diversas tendências de solução e aplicação desses problemas em engenharia, como os textos de Alifanov (1974), Tikhonov e Arsenin, (1977), Beck *et al.* (1985), Murio (1993) ou Özisik e Orlande (2000) apenas para citar alguns dos mais importantes.

Embora uma revisão bibliográfica tenha sempre a função de se estabelecer o estado da arte da pesquisa, o objetivo principal deste capítulo é a apresentação sucinta de várias técnicas existentes neste campo. Apresentam-se assim, tanto as técnicas clássicas como novas concepções na solução de problemas inversos em condução de calor através de contribuições mais recentes de diversos pesquisadores.

Na literatura, uma variedade de aproximações analíticas e numéricas são propostas para a solução dos problemas inversos em condução de calor. Baseando-se no método de mínimos quadrados e no teorema de Duhamel, Beck *et al.* (1985) desenvolveram o método da função especificada seqüencial, que é até hoje uma das técnicas de solução de problemas inversos mais usada. A técnica consiste na minimização sucessiva do erro estimado para apenas o tempo atual e alguns passos de tempo futuros.

O procedimento, proposto pela técnica seqüencial, consiste em assumir uma forma funcional da variação do fluxo de calor com o tempo. Isto é chamado de método da função especificada. Essa função pode ser uma seqüência de segmentos constantes, segmentos lineares ou assumir formas como parábolas, cúbicas ou exponenciais. Outras variações possíveis neste método são: i) estimar simultaneamente todos os parâmetros para o intervalo total ou; ii) estimar os parâmetros de forma seqüencial.

Alguns conceitos básicos para a implementação do procedimento seqüencial podem ser apresentados:

- 1 – Uma forma funcional para $q(t)$ é assumida para tempos $t_{M+1}, t_{M+2}, \dots, t_{M+r-1}$ sendo que para $t < t_M$ o fluxo de calor é conhecido;
- 2 – Uma função erro quadrático é usada para esses tempos;
- 3 – Componentes de fluxos de calor são estimados para a forma funcional assumida;
- 4 – Somente a primeira componente q_M é retida;
- 5 – M é aumentado em um passo e o procedimento é repetido.

O fluxo de calor desconhecido a ser estimado representa a modelagem do fluxo de calor para r tempos futuros. Ou seja, as componentes estimadas do fluxo de calor $q_1, q_2, q_3, \dots, q_{M-1}$ são consideradas previamente estimadas e são denotadas, $\hat{q}_1, \hat{q}_2, \hat{q}_3, \dots, \hat{q}_{M+r-1}$.

Para aumentar a estabilidade do algoritmo inverso, as componentes de fluxo de calor $q_{M+1}, q_{M+2}, \dots, q_{M+r-1}$ são assumidas iguais a $q_{M+1} = q_{M+2} = \dots = q_{M+r-1}$.

Para o algoritmo seqüencial de estimação de q_M (Beck *et al.*, 1985) as temperaturas $T_{M+1}, T_{M+2}, \dots, T_{M+r-1}$ são necessárias e calculadas com a hipótese de fluxo de calor constante. Assim, a estimação de q_M é obtida através da minimização da diferença quadrática entre as temperaturas $Y_{M+1}, Y_{M+2}, \dots, Y_{M+r-1}$ e $T_{M+1}, T_{M+2}, \dots, T_{M+r-1}$, ou seja,

$$S = \sum_{i=1}^r (Y_{M+i-1} - T_{M+i-1})^2$$

Vários pesquisadores têm usado essa técnica de forma direta ou indireta como Xianwu, *et al.* (2005), Rech *et al.* (2004), Behbahani-nia e Kowsary (2004), Kim e Daniel (2003), Shih-Ming *et al.* (2003) ou Dowding e Beck (1999). Alguns pesquisadores têm proposto adaptações desse método buscando a minimização dos problemas decorridos com a existência de erros de medição. O objetivo então é a obtenção de uma maior estabilidade para o algoritmo como propõem Shih-Ming *et al.*, (2003), Xianwu, *et al.* (2005) ou Behbahani-nia e Kowsary (2004). Como exemplo de procedimento Xianwu, *et al.* (2005) propõem um método modificado a partir da função especificada seqüencial visando estabilizar a solução para um problema inverso parabólico de condução de calor. O método usa passos computacionais de tempo que são maiores que os pequenos intervalos experimentais de amostragem, bem como passos de tempo futuros que são iguais aos intervalos de amostragem. Além das vantagens associada aos dois primeiros passos

mantidos da solução original proposta por Beck *et al.* (1985) outras podem ser observadas. Nesse sentido a técnica modificada proporciona: i) uma supressão mais rápida do erro, ii) melhora a estabilidade e precisão atuando com níveis comparáveis de dados truncados e erros nas medidas de temperatura e iii) se equipara à função especificada na solução de problemas não lineares.

Behbahani-nia e Kowsary (2004) propõem um método baseado na dupla reciprocidade de elementos de contorno juntamente com o método da função especificada sequencial para a solução de um problema inverso de condução de calor envolvendo a estimação de um fluxo de calor superficial variando no tempo e espaço. A eficiência do método é validada por uma série de testes simulados.

Outra técnica bastante usada é o método do gradiente conjugado com equação adjunta. Essa técnica baseia-se num processo de otimização com regularização iterativa, ou seja, os resultados da minimização da função objetivo tendem a se estabilizar em função do número de iterações. Esta metodologia pode ser empregada para a solução de problemas inversos lineares e não lineares como também em problemas de estimação seja de parâmetros, propriedade térmica (condutividade ou difusividade) ou de função, condição de contorno (fluxo de calor ou temperatura superficial). Em todos os casos não é necessário que se tenha conhecimento prévio sobre a forma funcional destes parâmetros.

O método do gradiente conjugado com equação adjunta pode ser resumido no seguinte algoritmo computacional:

Passo 1: Resolver o problema direto e obter $T(L, t, q^n)$;

Passo 2: A partir de $T(L, t, q^n)$ e $Y(L, t)$ resolver o problema adjunto que é construído a partir da solução de um problema auxiliar e obter $\lambda(0, t)$. O problema adjunto, por sua vez é construído pela multiplicação de uma função $\lambda(x, t)$, conhecida como multiplicador de Lagrange, na equação do problema direto e integrando-se a expressão resultante sobre o domínio espacial e temporal.

Passo 3: Conhecendo-se a solução do problema adjunto $\lambda(0, t)$, calcular $J'(t)$, que representa a primeira derivada do funcional $J(t)$ definido por

$$J(q) = \int_{t=0}^{t_f} [T(L, t; q) - Y(L, t)]^2 dt$$

Passo 4: Conhecendo-se $J'(t)$, calcular γ^n e $P^n(t)$ que representam o passo e a direção de busca do método do gradiente;

Passo 5: Fazer $\Delta q^n(t) = P^n(t)$ que é a excitação no problema de sensibilidade para obter $\Delta T(L, t, P^n)$;

Passo 6: Conhecendo-se $\Delta T(L, t, P^n)$, calcular o tamanho do passo β^n ;

Passo 7: Conhecendo-se β^n , calcular $q^{n+1}(t)$ e obter a solução do problema direto, $T(L, t, q^n)$;

Passo 8: Verificar se o critério de convergência é satisfeito, caso contrário repetir todos os passos.

Maiores detalhes desse algoritmo podem ser encontrados nos trabalhos de Alifanov (1974) ou Özisik e Orlande (2000).

Vários autores têm empregado esse método como Colaço *et al.* (2006), Loulou e Scott (2003) ou Lima *et al.* (2000).

Colaço *et al.* (2006), apresenta a técnica de gradiente conjugado com equação adjunta bem como outras técnicas inversas e de otimização, tratando das similaridades e diferenças entre esses dois tipos de abordagem e suas aplicações em problemas de transferência de calor. Usando esta técnica, Lima *et al.* (2001) estimam a taxa de transferência de calor na interface cavaco-ferramenta de um problema de usinagem enquanto Loulou e Scott (2003) propõem um algoritmo para a solução de problemas inversos tridimensionais instáveis e não lineares. Neste caso usam um método casado de regularização iterativa e gradiente conjugado. A técnica apresenta resultados satisfatórios para simulações com e sem adição de ruídos nas medidas de temperatura.

Existem ainda várias ferramentas numéricas de otimização que podem ser usadas para a solução de problemas inversos. A seção áurea é uma das técnicas mais populares para a estimação de máximos, mínimos ou zero de funções de apenas uma variável (Vanderplaats, 1984). Algumas características particulares tornam-na muito interessante dentre os processos de otimização: i) não necessita de derivadas contínuas; ii) ao contrário da aproximação polinomial possui taxa de convergência conhecida e iii) é de fácil implementação.

O método pode ser resumido por uma função F de uma variável X a ser minimizada. Assume-se que os limites inferiores e superiores em X sejam conhecidos por X_l e X_u respectivamente. Assumindo-se também que a função F seja avaliada para cada um desses limites e obtendo-se, respectivamente, F_l e F_u , a Fig. (2.1) apresenta o processo de minimização.

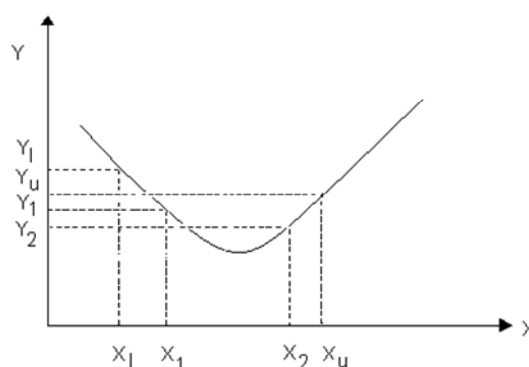


Figura 2.1. Minimização de uma função através do método da seção áurea.

Escolhendo dois pontos intermediários X_1 e X_2 , sendo $X_1 < X_2$ e avaliando estes pontos obtém-se F_1 e F_2 . Uma vez que a função F é unimodal, X_1 ou X_2 irá formar um novo limite no mínimo. Neste caso, se F_1 for maior que F_2 então X_1 será o novo limite inferior, obtendo-se assim um novo conjunto de limites, X_1 e X_u . Sendo F_2 maior que F_1 é evidente que X_2 será o novo limite superior e X_l e X_2 será o novo conjunto de limites.

Nesse exemplo, X_1 forma o novo limite inferior e a função F_3 é avaliada para um novo ponto X_3 . Comparando-se F_3 com F_2 o processo é repetido até que se obtenha o valor mínimo desejado. Citam-se Gonçalves *et al.* (2005) ou Carvalho (2006) como trabalhos que usam diretamente a seção áurea como ferramenta para a solução de problemas inversos.

Gonçalves *et al.* (2005) usam o método da seção áurea com um procedimento numérico para identificar a geometria da poça da solda em um processo de soldagem enquanto, Carvalho *et al.* (2006) apresenta uma metodologia desenvolvida para a solução de problemas inversos a ser aplicada em fornos de recozimento.

Outros métodos de otimização como os métodos heurísticos são também usados na solução de problemas inversos. Citam-se, nesses casos, os algoritmos genéticos (Goldember, 1989), (Raudensky *et al.*, 1995), (Gonçalves, *et al.*, 2000) ou a técnica de recozimento simulado (simulated annealing) (Gonçalves *et al.*, 2006), (Gonçalves, *et al.*, 2002), (Saramago *et al.*, 1999).

Algoritmos genéticos usam conceito de biologia como população, evolução, seleção e mutação para construção da ferramenta estatística. O otimizador parte então de uma população de projeto gerada ao acaso, e busca produzir projetos melhorados para a próxima geração. Raudensky *et al.* (1995) usa o algoritmo genético para resolver um problema inverso de condução de calor unidimensional a partir de dados gerados numericamente resolvendo o problema direto correspondente, o método apresenta resultados satisfatórios para problemas unidimensionais com e sem presença de ruídos nos dados de temperatura.

A técnica do *simulated annealing* baseia-se, por sua vez, na termodinâmica do resfriamento de um material que se encontra passando da fase líquida para a fase sólida. Se o material líquido começa a se resfriar lentamente e permanece por um tempo longo o suficiente próximo à temperatura de fusão, um cristal perfeito será criado, que tem o menor grau de energia interna. De outro lado se o material líquido não permanecer por um tempo longo o suficiente próximo à temperatura de mudança de fase, ou, se o processo de resfriamento não for suficientemente lento, o cristal final terá inúmeros defeitos e um alto grau de energia interna. Pode-se dizer que métodos baseados em gradientes “resfriam muito rápido”, indo rapidamente para um local ótimo que, na maioria dos casos, não é o ótimo global e sim local. Diferentemente dos métodos baseados em gradientes, o método *simulated annealing* pode se mover em qualquer direção, escapando de possíveis valores de mínimos ou máximos locais. Gonçalves *et al.* (2006) apresentam uma comparação entre duas técnicas usadas para estudar o fenômeno térmico que ocorre durante operações de soldagem. As técnicas propostas combinam métodos de otimização, como *simulated annealing* e seção áurea, e são usadas para estimar o fluxo de calor gerado pelo processo de soldagem, bem como a eficiência térmica global e a eficiência de fusão.

Mais recentemente têm-se empregado filtros para a solução de problemas inversos de transferência de calor. Citam-se neste caso os filtros de Kalman e os observadores dinâmicos de estado. Podem-se citar, por exemplo, os trabalhos de Chung (2005), Xingjian Xue (2003), Kim *et al.* (2003), Tuan *et al.* (1996), Woei-Shyong *et al.* (2000), Park e Jung (2000), Blum e Marquardt (1997), Marquardt e Auracher (1989). Estes métodos que são baseados na teoria de sistemas dinâmicos e de controle têm sido usados na reconstrução “*on-line*” de variáveis desconhecidas do sistema, como por exemplo, condições de contorno desconhecidas (*input*).

No trabalho de Tuan *et al.* (1996) encontra-se uma metodologia inversa para a solução de um problema inverso de condução de calor em tempo real. A metodologia, baseada nas técnicas de filtragem de Kalman, é desenvolvida para estimar duas distribuições de fluxo de calor distintas aplicadas a duas superfícies de contorno. Um algoritmo de mínimos quadrados em tempo real é também apresentado e fornece a relação recursiva entre o valor observado do fluxo de calor desconhecido e o valor teórico do filtro de Kalman.

Woei-Shyong *et al.* (2000) usa uma aproximação adaptativa propondo uma técnica que combina filtros de Kalman e mínimos quadrados para estimar fluxo de calor, resolvendo o problema inverso em condução a partir de dados experimentais.

Park e Jung (2000) desenvolveram um algoritmo recursivo baseado em filtros de Kalman para resolver problemas inversos em condução de calor. Entretanto a implementação direta do algoritmo em problemas com equações diferenciais parciais

multidimensionais não é indicada devido ao alto custo e tempo computacional requerido. Como solução desse problema os autores empregam o processo Karbunen-loève Galerkin que reduz as equações diferenciais parciais governantes a um número mínimo de equações diferenciais ordinárias, possibilitando a aplicação da técnica proposta em problemas multidimensionais.

Em seu trabalho, Kim *et al.* (2003) apresentam resultados preliminares a partir de um estimador adaptativo desenvolvido para estimar um fluxo de calor superficial em um problema unidimensional. O algoritmo de estimação requer apenas as temperaturas medidas na superfície isolada, o estimador é composto de filtros de Kalman conectados em paralelo.

Blum e Marquardt (1997) e Marquardt e Auracher (1999) apresentam uma solução para problemas inversos de condução de calor baseada em observadores dinâmicos. Neste caso, o problema inverso de condução de calor é interpretado com um filtro passa-baixo das componentes verdadeiras do verdadeiro sinal de fluxo, enquanto rejeita as componentes de alta frequência evitando uma excessiva amplificação do efeito do ruído na estimação. O algoritmo apresenta ótimos resultados em problemas unidimensionais. Uma abordagem mais recente é apresentada por Chung (2005), que desenvolve um algoritmo baseado em observadores para resolver problemas inversos de calor uni e bidimensionais em um processo de perfuração. Xingjian Xue (2003) compara a técnica proposta por Blum e Marquardt (1997) com várias técnicas e propõe algumas melhorias no procedimento de otimização, usando essas técnicas inversas na solução de um problema de fundição.

Pode-se observar dessa breve revisão a existência de várias técnicas para a solução de problemas inversos. Cada técnica apresentada tem, por sua vez, pontos fortes e fracos a serem destacados. O algoritmo da função especificada é de fácil implementação e baixo custo computacional. Entretanto não possui boa estabilidade quando a presença de ruídos experimentais é de grande proporção (Beck *et al.* 1985) sofrendo a influência de mínimos locais. Uma solução para a minimização desse problema é a implementação de técnicas de regularização (Beck *et al.* 1985). Outra desvantagem desse algoritmo é a alta complexidade matemática de implementação quando se pretende a estimativa de componentes de fluxo de calor com variação espacial e temporal (Blanc *et al.*, 1998), (Lima e Guimarães, 1997), (Osman *et al.*, 1997). A técnica do gradiente conjugado com equação adjunta que também apresenta instabilidades na vizinhança de mínimos locais apresenta-se como uma técnica mais adequada para a solução de problemas multidimensionais (Jarny *et al.* 1991). Uma desvantagem dessa técnica está no critério de parada do processo de otimização que requer algum conhecimento prévio dos erros experimentais contidos nos dados. Outra dificuldade reside na implementação do modelo computacional e no tempo computacional

requerido, uma vez que, não só o problema direto, mas também o problema de sensibilidade e o problema adjunto têm que ser resolvido a cada iteração.

Os algoritmos heurísticos, como o genético e o *simulated annealing*, têm a vantagem de evitar os mínimos locais, porém a um custo operacional muito alto (Gonçalves e Guimarães, 2000). Esta característica é uma das principais razões de muitos pesquisadores usarem os chamados métodos híbridos, onde a minimização se faz em duas partes: i) um método heurístico para uma primeira otimização, evitando os mínimos locais e posteriormente; ii) um método de gradiente para refinar a região de busca (Colaço *et al.*, 2006)

A principal proposta desse trabalho é o desenvolvimento de um método que leve em consideração as características térmicas do problema e que tenha um custo computacional baixo. Além disso, a técnica deve resolver problemas multidimensionais. Os algoritmos baseados em filtros digitais, como o proposto por Blum e Marquardt (1997), agregam as características citadas e são robustos o bastante para serem usados na solução de problemas com incertezas de medição significativas. Além disso, um fator importante é que esses algoritmos apresentam uma alta eficiência quanto ao custo computacional.

Entretanto, da forma como foi proposto por Blum e Marquardt (1997) o método não pode ser usado diretamente na abordagem de problemas multidimensionais. A obtenção da função de transferência para problemas multidimensionais via pacotes matemáticos acarretaria um alto custo computacional.

Esse trabalho propõe o desenvolvimento de uma técnica de observadores para a aplicação imediata em problemas multidimensionais. Propõe-se aqui um novo procedimento para a obtenção da função de transferência de forma a flexibilizar o método. Esse procedimento por sua vez, deve ser base para o desenvolvimento de técnicas que possam estimar componentes de fluxo de calor variando espacial e temporalmente. Nesse sentido, a contribuição desse trabalho reside no desenvolvimento de uma técnica de implementação simples, robusta quanto à sensibilidade aos erros experimentais, com custo computacional baixo e que seja competitiva com os métodos de otimização existentes do ponto de vista de obtenção dos resultados.

CAPÍTULO III

CONCEITOS E FUNDAMENTOS

3.1. Introdução

A Figura 3.1 apresenta um modelo térmico tridimensional transiente representado por uma amostra inicialmente a uma temperatura T_0 . A amostra é submetida a uma taxa de calor, $q(t)$, na superfície, S_1 , enquanto as demais superfícies são isoladas. O problema inverso se define devido à taxa de calor $q(t)$ ser desconhecida.

A principal característica dos problemas inversos é a obtenção da solução do problema físico de maneira indireta, como por exemplo, a determinação de uma condição de contorno transiente desconhecida e de difícil acesso. Nesse caso, o problema pode ser resolvido a partir de informações oriundas de sensores localizados em pontos acessíveis.

Assim, para a obtenção do fluxo de calor $q(t)$, Fig. 3.1, propõe-se o uso de técnicas de solução de problemas inversos.

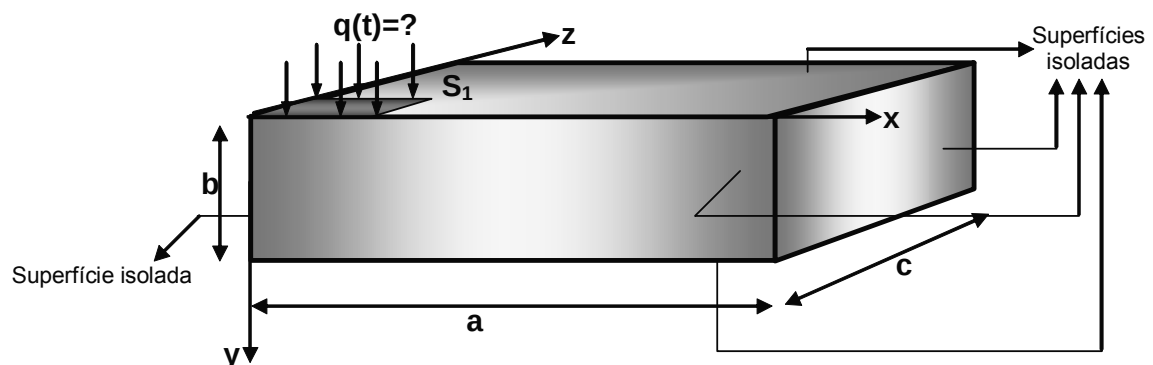


Figura 3.1. Esquema do modelo térmico tridimensional transiente.

Como já mencionado, várias técnicas para a solução de problemas inversos podem ser encontradas na literatura. A maioria, entretanto, aplica-se a problemas unidimensionais. O uso direto dessas técnicas em problemas multidimensionais, em sua grande maioria, não é simples. Uma técnica aplicada inicialmente a problemas 1D e com grande potencial para a aplicação em problemas multidimensionais é o método baseado em observadores dinâmicos descrito por Blum e Marquardt (1997).

A técnica baseada em observadores dinâmicos (Blum e Marquardt, 1997) incorpora parâmetros de ajuste que variam dependendo do nível de ruído presente nos dados experimentais. O algoritmo interpreta o problema inverso de condução de calor como um filtro passa-baixo das componentes do sinal de fluxo verdadeiro, enquanto rejeita as componentes de alta frequência evitando uma excessiva amplificação do efeito do ruído na estimação.

Observa-se que a minimização do efeito do ruído é fundamental em problemas inversos uma vez que, os erros de medição estão sempre presentes nos dados experimentais e estes são amplificados durante o processo de estimação. Outra vantagem desse algoritmo é a facilidade de implementação.

Apresenta-se na próxima seção uma descrição desse método, inicialmente proposto para a solução de problemas unidimensionais. Uma descrição completa desse método pode ser encontrada no trabalho de Blum e Marquardt (1997). Logo a seguir, propõe-se o desenvolvimento de um novo procedimento para a aplicação a problemas 3D transientes, como o exemplo apresentado na Fig. 3.1. A proposta baseia-se na obtenção da função transferência através do uso de funções de Green e da definição de sistemas dinâmicos equivalentes tendo aplicação imediata em problemas multidimensionais.

3.2. Fundamentos da técnica baseada em observadores usada na solução de problemas inversos unidimensionais (procedimento proposto por Blum e Marquardt, (1997)).

A Figura 3.2 apresenta uma amostra inicialmente a uma temperatura T_0 . O modelo térmico unidimensional transiente é representado por uma taxa de calor, $q(t)$, desconhecida e imposta a uma superfície enquanto a superfície oposta é mantida isolada.

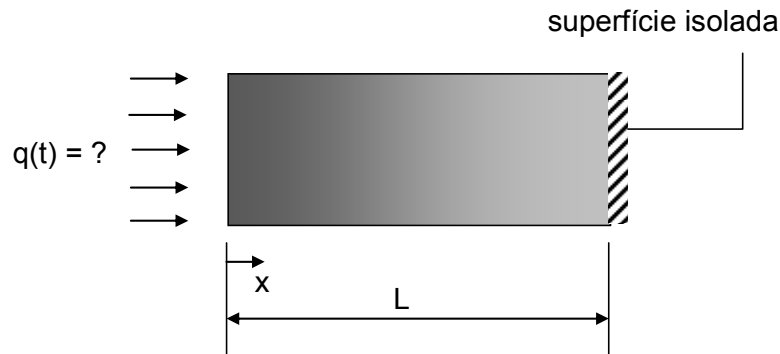


Figura 3.2. Esquema do modelo térmico unidimensional transiente.

A equação da difusão de calor que governa o problema pode ser escrita como:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \quad (3.1a)$$

sujeita às condições de contorno

$$-k \left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|_{x=0} = q(t) = ? \quad (a \text{ ser estimado}) \quad t > 0 \quad (3.1b)$$

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|_{x=L} = 0 \quad t > 0 \quad (3.1c)$$

e à condição inicial

$$\theta(x, 0) = 0 \quad 0 \leq x \leq L \quad (3.1d)$$

onde $\theta = T(x, t) - T_0$, α é a difusividade térmica e k é a condutividade térmica da amostra em estudo.

O problema dado pelas Eqs. (3.1) pode, então, ser resolvido numericamente. Entretanto, como o fluxo de calor imposto é desconhecido, Blum e Marquardt (1997) propõem a solução do problema inverso através da aplicação da transformada de Laplace na equação discretizada apenas no espaço (usando volumes finitos), como mostra a Fig. 3.3.

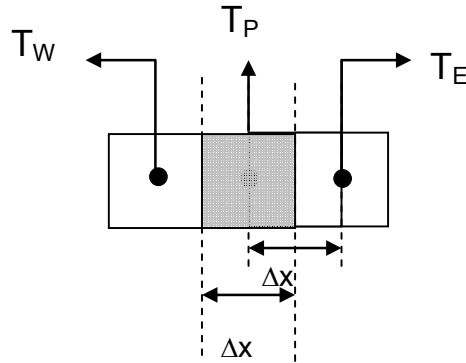


Figura 3.3. Esquema da discretização espacial usando volumes finitos (Patankar, 1980)

Assim, aplicando a discretização espacial e uniforme representada pela Fig. 3.3 na Eq. (3.1a) obtém-se

$$(T_W - T_P) + (T_E - T_P) = \frac{\Delta x^2}{\alpha} \frac{\partial T_P}{\partial t} \quad (3.2)$$

Aplicando a transformada de Laplace definida por $\mathcal{L}$ como (Özisik, 1993)

$$\mathcal{L}[F(t)] = \bar{F}(x, s) = \int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt \quad (3.3)$$

na Eq. (3.2) obtém-se

$$\bar{T}_W + \bar{T}_E - \left(2 + \frac{\Delta x^2 s}{\alpha} \right) \bar{T}_P = 0 \quad (3.4)$$

Se ainda a discretização espacial uniforme representada pela Fig. 3.3 for aplicada às condições de contorno (Eqs. 3.1b e 3.1c), pode-se escrever as equações discretizadas para cada nó em forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} \left(1 + \frac{\Delta x^2}{2\alpha} s\right) & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \ddots & \dots\dots\dots & & & \\ 0 & -1 & \left(2 + \frac{\Delta x^2}{\alpha} s\right) & -1 & 0 & 0 \\ & & \dots\dots\dots & \ddots & & \\ & & & & -1 & \left(1 + \frac{\Delta x^2}{2\alpha} s\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{T}_1 \\ \bar{T}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \bar{T}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \frac{\bar{q}(s)}{k} dx \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

O conjunto de equações dado pela Eq. (3.5) pode então ser resolvido de forma simbólica através do uso do software Matlab^R e a função transferência G_H pode ser obtida para qualquer nó como,

$$\frac{\bar{T}(x_j, s)}{\bar{q}(s)} = \frac{\sum_{i=0}^{m_H} b_{H,L,i} s^i}{\sum_{i=0}^{n_H} a_{H,L,i} s^i} = \bar{G}_H(x, s) \Leftarrow \text{Função transferência} \quad (3.6)$$

Apenas como exemplo, para uma discretização espacial de ordem $n_H=7$, a função $G_H(L, s)$ calculada na superfície oposta à taxa de calor $q(t)$ pode ser dada por

$$\bar{G}_H(L, s) = \frac{1}{0.4e^{-13}s^7 + 0.3e^{-9}s^6 + 0.8e^{-6}s^5 + 0.9e^{-3}s^4 + 0.5s^3 + 1.34e^2s^2 + 1.1e^4s}$$

Uma vez obtido $G_H(L, s)$ pode-se obter os estimadores, G_Q e G_N , que são baseados na minimização dos erros aleatórios e sistemáticos contidos na medição e no modelo térmico. Uma breve descrição do algoritmo inverso e da obtenção dessas funções é mostrada a seguir.

Obtenção dos estimadores G_Q , G_N e implementação do algoritmo inverso.

O problema térmico descrito pelas Eqs. (3.1) pode ser representado por um sistema dinâmico mostrado na Fig. 3.4 em diagrama de bloco como (Blum e Marquardt, 1997):

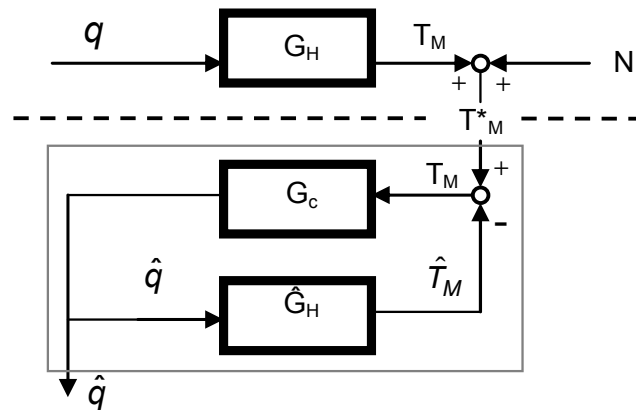


Figura 3.4. Diagrama de bloco de um sistema dinâmico (Blum e Marquardt, 1997)

Na Figura 3.4 observa-se que o problema se divide em duas partes: parte real, acima da linha tracejada, onde o fluxo de calor desconhecido q é imposto a um condutor G_H , resultando em um sinal medido T_M^* corrompido por um ruído N ; e o estimador, onde uma estimativa $\hat{q}$ do fluxo de calor real é calculada a partir da temperatura de entrada T_M^* . O algoritmo de solução determina o fluxo de calor estimado tal que a temperatura medida estimada $\hat{T}_M$ obtida através de um modelo de referência $\hat{G}_H$ (que se assume precisamente conhecido, $\hat{G}_H = G_H$) se aproxime da temperatura real medida T_M^* . Internamente, o mecanismo de correção pode ser representado pela dinâmica de realimentação (feedback) de obtenção do erro, ou seja, $(T_M^* - \hat{T}_M)$. Esse mecanismo de correção G_C pode ser pensado como um controlador que ajusta a variável manipulada $\hat{q}$ de forma a fazer com que a variável controlada $\hat{T}_M$ siga a referência T_M^* .

Logo, do diagrama de bloco observa-se que:

- i) o fluxo de calor desconhecido aplicado ao condutor G_H resulta na temperatura medida T_M^* corrompida por um ruído N ,

$$T_M^* = T_M + N = G_H q + N \quad (3.7)$$

ii) o fluxo de calor estimado $\hat{q}$ é calculado a partir de uma entrada de valores medidos de temperatura T_M^* . O estimador pode então ser representado pela função de transferência em malha fechada,

$$\hat{q} = \frac{G_C}{1 + G_C G_H} T_M^* \quad (3.8)$$

que caracteriza o comportamento do algoritmo de solução. As funções de transferência do sinal e do ruído, G_Q e G_N respectivamente, são encontradas combinando as Eqs. (3.7) e (3.8),

$$\hat{q} = \underbrace{\frac{G_C G_H}{1 + G_C G_H}}_{G_Q} q + \underbrace{\frac{G_C}{1 + G_C G_H}}_{G_N} N \quad (3.9)$$

Da Equação (3.9) obtém-se:

$$G_N = G_Q G_H^{-1} \quad \text{ou} \quad |G_N(j\omega)| = \frac{|G_Q(j\omega)|}{|G_H(j\omega)|} \quad (3.10)$$

Observa-se na Eq. (3.9) que se a estimação fosse “exata”, os valores de G_Q e G_N deveriam, respectivamente, ser 1 e 0 (um e zero). Dessa forma o fluxo de calor estimado seria exatamente igual ao real, $\hat{q} = q$. Como na prática não existe nenhum experimento livre de erros, para uma estimação ideal G_Q e G_N deveriam, respectivamente, tender a 1 e 0 (um e zero).

Na Eq. (3.10) observa-se que a função de transferência do ruído, G_N , se relaciona de forma diferente com as funções G_H e G_Q , ou seja, ela é inversamente proporcional à função de transferência do condutor, G_H , e diretamente proporcional à função de transferência do sinal, G_Q .

Como o objetivo é a redução de G_N , ($G_N \rightarrow 0$), a função de transferência do sinal deve obedecer à imposição $G_Q \ll G_H$. Caso ocorra o contrário a função G_N será amplificada impossibilitando a estimação.

A Figura 3.5 apresenta o comportamento espectral da função de transferência do condutor unidimensional, G_H , que por sua vez será responsável pela escolha da função de transferência do sinal (G_Q).

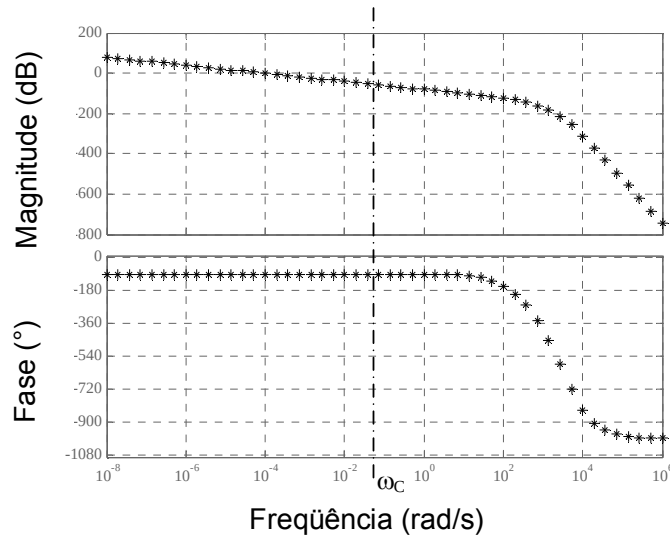


Figura 3.5. Diagrama de Bode da função transferência do condutor 1D - G_H em $x=L$.

Como G_Q deve tender a 1 (um), percebe-se que G_N pode ser amplificado apenas observando o comportamento de G_H . Ou seja, da Eq. (3.10) nota-se que, se $G_Q = 1$ então

$$|G_N| = \frac{1}{|G_H|} \text{ e, portanto, quando } G_H \text{ tender à zero, } G_N \text{ tenderá a infinito.}$$

Esse aumento indesejável pode ser evitado através da escolha de uma frequência de corte (ω_C) para G_Q , de forma a evitar valores muito baixos de G_H .

Ainda da Eq. (3.10) observa-se que, se G_Q tender a zero, a partir de ω_C , G_N não será amplificado ($G_N \rightarrow 0$) se somente se, G_Q decair mais rapidamente que G_H . Quanto mais rápido for o decaimento de $|G_Q|$ além de ω_C , menor a sensibilidade do algoritmo a ruídos.

Um aspecto importante sobre a técnica baseada em observadores dinâmicos é a forma como ela aborda a função de correção G_C . Diferente das técnicas que usam filtros e focam o projeto da função transferência de correção, G_C , o método baseado em observadores usa a estrutura de um observador, como apresentado no diagrama de blocos na Fig. 3.4, apenas como um “pensamento experimental” para demonstrar as correlações entre a função de transferência do sinal e do ruído. Desta forma a equação que se refere ao estimador e que está de acordo com as características do filtro no domínio da frequência das Eqs. (3.8) e (3.9) pode ser escrita como,

$$\bar{q}(s) = \bar{G}_N(s) \times \bar{T}_M^*(s) \quad (3.11)$$

Conclui-se que o comportamento da função de transferência do sinal se assemelha ao comportamento de um filtro passa-baixo. Assim a amplificação do ruído medido $|G_N|$ para um dado filtro passa banda do sinal da função transferência G_Q pode ser minimizado, maximizando o “roll-off” de $|G_Q|$. Entende-se por “roll-off”, a inclinação com que o freqüência cai a partir da freqüência de corte (ω_C) da função transferência G_Q .

Logo a formulação da função de transferência do sinal, G_Q , deve ser tal que satisfaça as propriedades de filtragem desejadas:

- i) comportamento passa-baixo;
- ii) curva monotônica;
- iii) queda no sinal mais acentuada possível a partir da freqüência de corte.

Os principais critérios para escolha de um filtro apropriado são:

- i) sua estrutura (recursivo ou não recursivo);
- ii) o seu tipo e;
- iii) sua ordem.

Quanto à formulação, o filtro escolhido é o recursivo (IIR), *i.e.*, a saída depende não só do valor da entrada, mas também do valor da saída anterior.

Quanto ao tipo, opta-se pelo Chebyshev tipo I, pois a resposta da magnitude da freqüência cai monotonicamente além da freqüência de corte como anteriormente requerido. No domínio de Laplace a função transferência do filtro Chebyshev tipo I assume a seguinte forma:

$$\bar{G}_Q(s) = \frac{k_{Cheb}}{(s - s_{Cheb,1})(s - s_{Cheb,2}) \cdots (s - s_{Cheb,n_Q})} \quad (3.12)$$

A ordem do polinômio de Chebyshev é determinada pelo esquema da discretização espacial do modelo e pela ordem do mesmo, e deve satisfazer a condição de $\lim_{\omega \rightarrow \infty} |G_N| = 0$.

Com o filtro escolhido, pode-se obter a função de transferência do estimador (G_N), através da relação entre a função de transferência do modelo condutor (G_H) e a função de transferência do filtro (G_Q), Eq. (3.10).

A Equação (3.11) que descreve o estimador pode ser escrita na forma,

$$\bar{G}_N(s) = \frac{\bar{\hat{q}}(s)}{\bar{T}_M^*(s)} \quad (3.13)$$

Ou literalmente expressa pela Eq. (3.14),

$$\bar{G}_N(s) = \frac{\sum_{i=0}^{m_N} b_{N,L,i} s^i}{\sum_{i=0}^{n_N} a_{N,L,i} s^i} = \frac{\bar{\hat{q}}(s)}{\bar{T}_M^*(s)} \Leftarrow \text{Função transferência} \quad (3.14)$$

Observa-se que o domínio s de Laplace, definido pela Eq. (3.14) é contínuo. Entretanto, os sinais de temperatura são medidos e representam sinais discretos. Esse conflito deve ser superado para que os dados de temperatura e fluxo possam ser manipulados. Ou seja, o domínio contínuo deve ser discretizado. Uma alternativa à aplicação direta de transformada discreta de Laplace na Eq.(3.14) é o uso da transformação bilinear. Nesse caso, o domínio s (contínuo) é transformado em um domínio z (discreto) pela definição (Proakis, J. G., Maonolakis, D. G,1996).

$$s = \frac{2}{T_d} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \Rightarrow \text{transformação bilinear}$$

assim,

$$G_N = \frac{b_{N,z,0} + b_{N,z,1}z^{-1} + \dots + b_{N,z,n_n-1}z^{-(n_n-1)} + b_{N,z,n_n}z^{-n_n}}{1 + a_{N,z,1}z^{-1} + \dots + a_{N,z,n_n-1}z^{-(n_n-1)} + a_{N,z,n_n}z^{-n_n}}$$

Ou seja,

$$G_N = \frac{\sum_{i=0}^{m_N} b_{N,z,i} z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^{n_N} a_{N,z,i} z^{-i}}, \quad \text{mas} \quad G_N = \frac{\hat{q}(z)}{T_M^*(z)} \quad (3.15)$$

logo, da Eq (3.15)

$$\hat{q}(z) = \frac{\sum_{i=0}^{m_N} b_{N,Z,i} z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^{n_N} a_{N,Z,i} z^{-i}} T_M^*(z) \quad (3.16)$$

Desenvolvendo a Eq (3.16) tem-se

$$\begin{aligned} \hat{q}(z) + \hat{q}(z) \sum_{i=1}^{n_N} a_{H,Z,i} z^{-i} &= \sum_{i=0}^{m_N} b_{H,Z,i} z^{-i} T_M^*(s) \\ \hat{q}(z) &= \sum_{i=0}^{m_N} b_{H,Z,i} z^{-i} T_M^*(z) - \sum_{i=1}^{n_N} a_{H,Z,i} z^{-i} \hat{q}(z) \end{aligned} \quad (3.17)$$

Da teoria de transformada “z” inversa, $\mathcal{Z}^{-1}$:

$$\begin{cases} \mathcal{Z}^{-1} \{U(z) z^{-i}\} = \{U(k-i)\} \\ \mathcal{Z}^{-1} \{U(z)\} = \{U(k)\} \end{cases} \quad (3.18)$$

Aplicando a Eq. (3.18) na Eq. (3.17) obtém-se a equação diferença:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}^{-1} \{\hat{q}(z)\} &= \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \sum_{i=0}^{m_N} b_{N,Z,i} z^{-i} T_M^*(z) \right\} - \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^{n_N} a_{N,Z,i} z^{-i} \hat{q}(z) \right\} \\ \hat{q}(k) &= \sum_{i=0}^{m_N} b_{N,Z,i} T_M^*(k-i) - \sum_{i=1}^{n_N} a_{N,Z,i} \hat{q}(k-i) \end{aligned} \quad (3.19)$$

Como o observador é um esquema “on-line”, *i.e.*, estima o fluxo requerido com base em medidas de temperaturas do tempo, atual e passado, isso acarreta uma mudança ou atraso de fase, interferindo nos valores estimados. Se o problema inverso for resolvido “off-line”, o atraso de fase pode ser removido, adaptando uma filtragem de trás para frente.

O atraso no domínio z (plano complexo) tem, portanto influência no domínio do tempo. Por filtragem reversa de um sinal discreto no tempo f_k ($k=1, \dots, L$), entendemos filtrar a seqüência reversa $f_k(L, \dots, 1)$ no tempo. Assim, a seqüência f_k corresponde no domínio z à seqüência $F(z)$ e a seqüência reversa, f_{-k} , corresponde ao conjugado $\bar{F}(z)$, ou seja,

$$f_k \rightarrow F(z) \quad e \quad f_{-k} \rightarrow \bar{F}(z)$$

Assim, a filtragem se dá aplicando-se os passos:

$$1^\circ \text{ passo: } q_F(z) = G_N(z)T_M^*(z);$$

$$2^\circ \text{ passo: } q_B(z) = G_Q(z)\bar{q}_F(z);$$

$$3^\circ \text{ passo: } \hat{q}(z) = \bar{q}_B(z).$$

Ou seja, o fluxo de calor $q_F(z)$ é filtrado no domínio z através de seu conjugado $\bar{q}_F(z)$ (passo 2). Um novo valor do fluxo, $q_B(z)$ obtido deve então ser revertido para a obtenção do valor estimado sem atraso $\hat{q}(z)$.

É possível mostrar que a estimativa refinada $\hat{q}(z)$ apresenta fase zero (Blum e Marquardt, 1997). Substituindo a Eq. (3.7), na equação do primeiro passo obtemos:

$$q_F = G_N(G_H q + N)$$

Passando pelo segundo passo, *i.e.*, revertendo a função q_F temos:

$$q_B = G_Q \bar{G}_N (\bar{G}_H \bar{q} + \bar{N})$$

E por fim no terceiro passo, obtem-se a estimativa alisada,

$$\hat{q} = \bar{G}_Q G_N (G_H q + N)$$

$$\hat{q} = \bar{G}_Q G_N G_H q + \bar{G}_Q G_N N \rightarrow \text{da Eq. (3.10)} \rightarrow \hat{q} = \bar{G}_Q G_Q q + \bar{G}_Q G_N N$$

$$\hat{q} = |G_Q|^2 q + \bar{G}_Q G_N N$$

Daí observa-se as características de valor real e consequentemente da fase zero da função de transferência do sinal refinada

$$\begin{aligned} |G_Q|^2 &= 1 & (\omega \leq \omega_c) \\ < |G_Q| & & (\omega > \omega_c) \end{aligned}$$

e ainda que as propriedades de amplificação do ruído,

$$\begin{aligned} |G_Q||G_N| &= |G_N| & (\omega \leq \omega_c) \\ &< |G_N| & (\omega > \omega_c) \end{aligned}$$

são melhoradas através do refinamento. O fato da função de transferência do ruído alisada ser complexa e conseqüentemente de fase diferente de zero, não tem influência na estimação.

Um procedimento análogo pode ser feito no tempo. O fluxo estimado $\hat{q}$ da Eq. (3.19) é revertido no tempo. Após a reversão ele é recalculado através da Eq. (3.20) que é equivalente ao alisamento na freqüência no domínio z (Passo 2)

$$\hat{q}'(k) = \sum_{i=0}^{m_Q} b_i \hat{q}(k-i) - \sum_{i=1}^{n_Q} a_i \hat{q}'(k-i) \Rightarrow \text{Equação diferença} \quad (3.20)$$

Desta forma é possível se estimar o fluxo desconhecido, a partir das Eqs. (3.19) e (3.20). Com os valores medidos de temperatura na posição $x=L$, faz-se uma primeira estimativa do fluxo, através da Eq. (3.19). Reverte-se a seqüência obtida no tempo e filtra-se este fluxo invertido com a Eq. (3.20). Revertendo a seqüência de fluxo filtrada, $\hat{q}'$, têm-se o fluxo estimado final.

A técnica de solução de problemas inversos baseada em observadores dinâmicos pode então, ser dividida em duas etapas distintas:

- i) obtenção da função transferência do modelo, G_H ;
- ii) obtenção dos estimadores G_Q e G_N e a implementação do algoritmo baseado em observadores.

O procedimento para a obtenção da função transferência, G_H , descrito por Blum e Marquardt (1997) tem como grande vantagem a sua facilidade de obtenção via uso de pacotes matemáticos como o Matlab^R. Entretanto, da forma como foi concebida a obtenção de G_H , seu uso torna-se um pouco restritivo, caso o modelo térmico seja multidimensional, devido ao alto tempo de processamento requerido.

A obtenção de G_H através do uso da discretização espacial e de linguagem simbólica é simples e eficaz em problemas 1D. No entanto, em aplicações tridimensionais transientes enfrenta problemas de implementação. A maior dificuldade reside na solução do sistema, que envolve inversão de matriz originalmente, à medida que o problema ganha dimensões essa matriz aumenta significativamente, visto que cada linha da matriz se refere a um nó da malha do modelo térmico. Para problemas multidimensionais a matriz teria proporções

impraticáveis visto que nestes casos a malha deve ser bastante refinada para garantir uma solução satisfatória.

Assim, como já mencionado, propõe-se uma forma alternativa para a obtenção de G_H . O novo procedimento, baseado em funções de Green permite, então, a aplicação direta do método de observadores a problemas multidimensionais. Apresenta-se a seguir esse procedimento.

3.3. Obtenção da função transferência G_H para um problema 3D-transiente

3.3.1 Problema térmico original

Seja o problema térmico tridimensional transiente representado pela Fig.3.6 e descrito pela equação da difusão de calor, Eq. (3.21):

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.21a)$$

na região R ($0 < x < a$, $0 < y < b$, $0 < z < c$) e $t > 0$, sujeito às condições de contorno:

$$\begin{aligned} -k \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} &= q_1(t) \text{ na } S_1 \text{ (} 0 \leq x \leq x_H, 0 \leq z \leq z_H \text{)} \\ -k \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} &= 0 \text{ na } S_2 \text{ (} x, z \in S \mid (x, z) \notin S_1 \text{)} \end{aligned} \quad (3.21b)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=a} = \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=c} = \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=b} = 0 \quad (3.21c)$$

e à condição inicial

$$T(x, y, z, 0) = T_0 \quad (3.21d)$$

onde S é definido por ($0 \leq x \leq a$, $0 \leq z \leq c$) e x_H e z_H são os limites da região S_1 onde a taxa de calor é aplicada conforme Fig. 3.6.

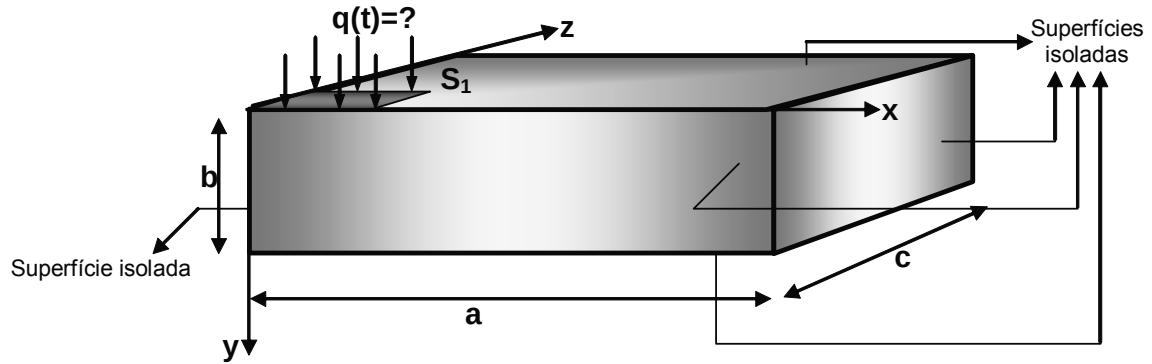


Figura 3.6. Problema original, 3D transiente.

A solução das Eqs. (3.21) pode ser dada em termos de função de Green como

$$T(x, y, z, t) = \frac{\alpha}{k} \int_{\tau=0}^t \left[\int_0^{x_h} \int_0^{z_h} G_h^+(x, y, z, t / x', y', z', \tau) \Big|_{y'=0} q_1(\tau) dx' dz' \right] d\tau \quad (3.22)$$

ou ainda

$$T(x, y, z, t) = \int_{\tau=0}^t [G_h(x, y, z, t / \tau) q_1(\tau)] d\tau \quad (3.23)$$

onde

$$G_h(x, y, z, t / \tau) = \frac{\alpha}{k} \int_0^{x_h} \int_0^{z_h} G_h^+(x, y, z, t / x', y', z', \tau) \Big|_{y'=0} dx' dz'$$

então aplicando-se a definição de convolução (Özisik, 1993), representada pelo símbolo (*), a Eq.(3.23) para uma temperatura localizada na superfície oposta da amostra, pode ser escrita como

$$T(x, y, z, t) = G_h(x, y, z, t - \tau) * q_1(\tau) \quad (3.24)$$

Se ainda, o modelo térmico da Fig. 3.6 puder ser representado por um sistema dinâmico do tipo entrada/ saída, como mostrado na Fig. 3.7, então aplicando transformada de Laplace (Özisik, 1993) em ambos os lados da Eq.(3.24) obtém-se

$$\bar{T}(x, y, z, s) = \bar{G}_h(x, y, z, s) \bar{q}_1(s) \quad (3.25)$$

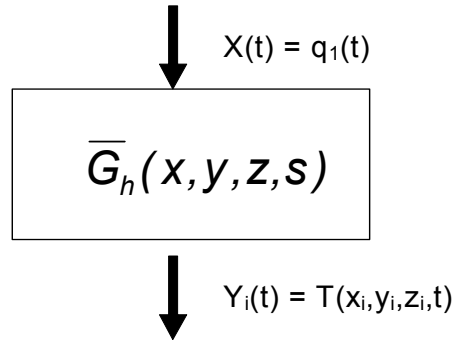


Figura 3.7. Sistema dinâmico equivalente ao modelo térmico.

Observa-se que a transformada de Laplace de uma função $F(t)$ é definida pela Eq.(3.3) e reescrita por

$$\mathcal{L}[F(t)] = \bar{F}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt'$$

A obtenção da função transferência $\bar{G}_h(x, y, z, s)$ se completa através do uso de um problema auxiliar, que possui as mesmas características físicas do problema original, porém impondo-se um sinal de entrada de valor unitário na mesma localização do fluxo de calor do problema original (S_1) e com temperatura inicial zero.

3.3.2 Problema térmico auxiliar

O problema auxiliar citado anteriormente pode ser descrito como

$$\frac{\partial^2 T^+}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T^+}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T^+}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T^+}{\partial t} \quad (3.26a)$$

na região R ($0 < x < a$, $0 < y < b$, $0 < z < c$) e $t > 0$, sujeito às condições de contorno:

$$\begin{aligned}
-k \frac{\partial T^+}{\partial y} \Big|_{y=0} &= 1 \text{ em } S_1 \ (0 \leq x \leq x_H, \ 0 \leq z \leq z_H) \\
-k \frac{\partial T^+}{\partial y} \Big|_{y=0} &= 0 \text{ em } S_2 \ (x, z \in S \mid (x, z) \notin S_1)
\end{aligned} \tag{3.26b}$$

$$\frac{\partial T^+}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial T^+}{\partial x} \Big|_{x=a} = \frac{\partial T^+}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{\partial T^+}{\partial z} \Big|_{z=c} = \frac{\partial T^+}{\partial y} \Big|_{y=b} = 0 \tag{3.26c}$$

e à condição inicial

$$T^+(x, y, z, 0) = 0 \tag{3.26d}$$

Analogamente à solução do problema térmico original pode-se obter, usando-se funções de Green, a solução do problema térmico auxiliar

$$T^+(x, y, z, t) = G_h(x, y, z, t - \tau) * 1 \tag{3.27}$$

uma vez que, $\mathcal{L}[1] = \frac{1}{s}$, obtém-se no domínio de Laplace

$$\bar{T}^+(x, y, z, s) = \bar{G}_h(x, y, z, s) \frac{1}{s} \tag{3.28}$$

Como o sistema dinâmico equivalente é linear, invariante e fisicamente realizável (Bendat e Pierson, 1986) a função resposta $\bar{G}_h(x, y, z, s)$ é a mesma qualquer que seja o conjunto entrada/saída. Logo, da Eq.(3.28) obtém-se

$$\bar{G}_h(x, y, z, s) = s \bar{T}^+(x, y, z, s) \tag{3.29}$$

Assim, para a identificação completa de $\bar{G}_h(x, y, z, s)$, resta, portanto, a obtenção de $\bar{T}^+(x, y, z, s)$ em uma determinada posição, ou seja, $\bar{T}^+(r_i, s)$, onde $r_i = (x_i, y_i, z_i)$. Propõe-se assim, nesse trabalho, um procedimento simples e eficaz para a obtenção de $T^+(r_i, s)$. Baseando-se nos princípios de correlação entre dois sinais ergóticos tipo entrada

e saída (Bendat e Pierson, 1986), como mostra a Fig. 3.8, a função resposta em frequência, $\bar{G}_h(r_i, s)$, pode ser definida em qualquer intervalo de amostragem t_a , ou seja,

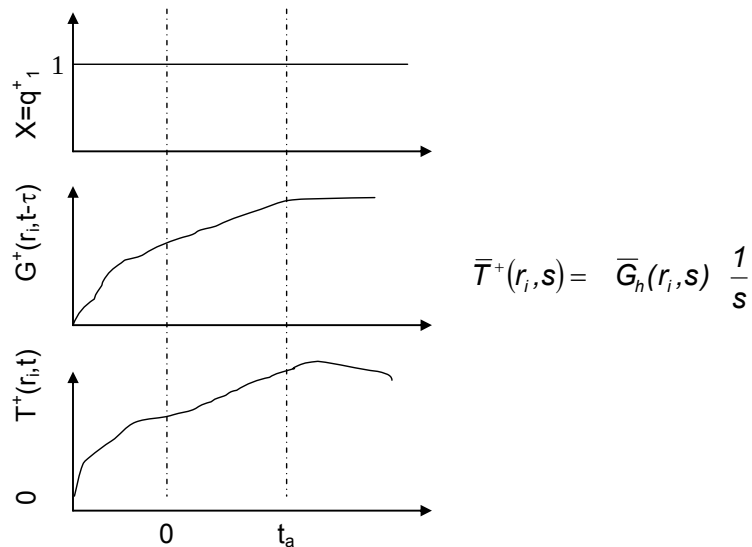


Figura 3.8. Exemplo de amostragem para o cálculo da correlação entre dois sinais dinâmicos.

e portanto, por conveniência se a função $T^+(r_i, s)$ pode ser aproximada por um polinômio no intervalo de amostragem $[0, t_a]$ então, nesse caso, pode-se escrever,

$$T^+(r_i, t) = a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \dots + \quad (3.30)$$

Tomando-se a transformada de Laplace da Eq. (3.30) obtém-se (Özisik, 1993)

$$\bar{T}^+(r_i, s) = \frac{a_1}{s} + \frac{a_2}{s^2} + \frac{a_3}{2s^3} + \frac{a_4}{6s^4} + \dots + \quad (3.31)$$

e portanto da Eq.(3.29)

$$\bar{G}_h(r_i, s) = s \bar{T}^+(r_i, s) = s \left[\frac{a_1}{s} + \frac{a_2}{s^2} + \frac{a_3}{2s^3} + \frac{a_4}{6s^4} + \dots + \right] \quad (3.32)$$

ou ainda

$$\overline{G}_h(r_i, s) = a_1 + \frac{a_2}{s} + \frac{a_3}{2s^2} + \frac{a_4}{6s^3} + \dots + \quad (3.33)$$

Algumas observações podem ser feitas sobre a obtenção da Eq. (3.33). Observa-se que da teoria de frações parciais, se $\overline{G}_h(r_i, s)$ é expresso em frações parciais, sua inversão pode ser prontamente obtida. Ainda, como a Eq. (3.33) não apresenta qualquer pólo para $s > 0$ então a sua inversão é estável o que garante robustez ao algoritmo de inversão dado pelas Eqs. (3.19 e 3.20). Pode-se ainda, com o mesmo procedimento, abordar indistintamente um problema térmico uni, bi ou tridimensional, desde que as condições de contorno não ativas sejam homogêneas e o fluxo de calor desconhecido seja imposto em uma determinada região. Apresenta-se a seguir um resumo dos passos básicos para a obtenção de $\overline{G}_h(r_i, s)$:

- i) Obtenção numérica da solução do problema (3.22), $T^+(r_i, t)$.
- ii) Obtenção do ajuste polinomial de $T^+(r_i, t)$ (coeficientes) em um intervalo de amostragem $[a, t_a]$. (Eq. 3.30)
- iii) Obtenção de $\overline{T}^+(r_i, s)$ através da aplicação da transformada de Laplace do ajuste polinomial de $T^+(r_i, t)$.
- iv) Obtenção de $\overline{G}_h(r_i, s)$, Eq. (3.33). Identificação dos coeficientes a_i

Uma vez determinada a função $\overline{G}_h(r_i, s)$ resta a obtenção das funções G_Q , G_N e a implementação do algoritmo baseado em observadores, como descrito na seção 3.2.1.1.

No capítulo a seguir detalhes do algoritmo tais como os parâmetros de ajuste, as características e comportamento do filtro escolhido e a relação entre as funções de transferência, do condutor, do ruído e do sinal.

CAPÍTULO IV

ANÁLISE E ESCOLHA DOS PARAMETROS DE AJUSTE

4.1 Introdução

A eficiência e robustez de um algoritmo são determinadas pela capacidade do mesmo de minimizar erros presentes no processo de estimação. Estes erros podem, por outro lado, ser divididos em duas componentes: i) erros determinísticos que são inerentes ao algoritmo e; ii) erros aleatórios que estão presentes na cadeia de medição.

Um bom algoritmo deve incorporar parâmetros de ajuste que variem dependendo do nível de ruído presente nos dados experimentais. O algoritmo do observador interpreta o problema inverso de condução de calor como um filtro passa-baixo das componentes do sinal de fluxo de calor verdadeiro, enquanto rejeita as componentes de alta frequência evitando excessiva amplificação do efeito do ruído de medição na estimação.

4.2. Relação entre as funções transferência

No Capítulo 3 estabeleceram-se algumas relações entre as funções de transferência do condutor (G_H), do sinal (G_Q) e do ruído (G_N). Primeiro a função de transferência do condutor deve ser precisamente conhecida, ou seja, é necessário o conhecimento do modelo térmico. A partir do modelo escolhe-se o filtro que melhor se adapta ao problema. Conhecidas as funções G_H e G_Q obtém-se a função de transferência do ruído (G_N) através da Eq. (4.1), como mostrado no Cap. 3.

$$G_N = G_Q G_H^{-1} \quad \text{ou} \quad |G_N(j\omega)| = \frac{|G_Q(j\omega)|}{|G_H(j\omega)|} \quad (4.1)$$

As funções transferências do sinal e do ruído representam a base do algoritmo baseado em observadores dinâmicos. Observa-se na Eq. (4.2) que para a obtenção de uma estimativa satisfatória, G_N deve tender a zero e G_Q tender a um ($G_N \rightarrow 0$ e $G_Q \rightarrow 1$). Dessa forma o fluxo estimado seria aproximadamente igual ao real, $\hat{q} \cong q$, como pode ser observado na equação:

$$\hat{q} = G_Q q + G_N N \quad (4.2)$$

A análise dos parâmetros de ajuste dar-se-á através da aplicação da técnica baseada em funções de Green e observadores dinâmicos em um problema térmico representado por um modelo unidimensional transiente (Fig. 4.1).

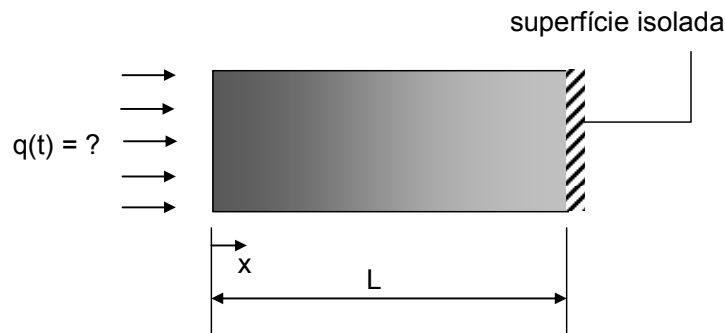


Figura 4.1. Esquema do modelo térmico unidimensional transiente.

Nesse caso, como já descrito no Cap. 3, o modelo térmico é governado pelas equações:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \quad (4.3a)$$

sujeita às condições de contorno

$$-k \left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|_{x=0} = q(t) = ? \quad (a \text{ ser estimado}) \quad t > 0 \quad (4.3b)$$

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|_{x=L} = 0 \quad t > 0 \quad (4.3c)$$

e à condição inicial

$$\theta(x,0) = 0 \quad 0 \leq x \leq L \quad (4.3d)$$

A Figura 4.2 mostra o módulo e a fase da função transferência do modelo condutor, G_H obtida por funções de Green, como apresentado no Cap. 3.

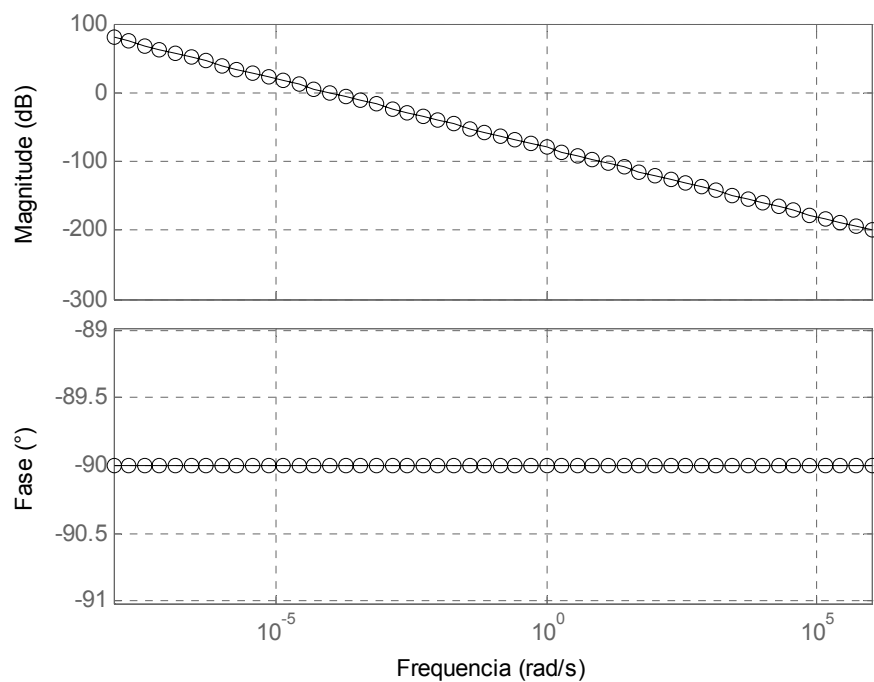


Figura 4.2. Função de transferência do condutor: módulo e fase.

Conclui-se da Eq. (4.1) que se $|G_Q| \rightarrow 1$, $|G_N|$ terá um comportamento inverso ao de $|G_H|$, ou seja, à medida que a função transferência do condutor (G_H) decresce a do ruído (G_N) aumenta. Assim é necessário se estabelecer uma frequência de corte para o filtro de forma a evitar o aumento excessivo da função transferência do ruído que, por sua vez, prejudicaria a estimação.

Além da frequência de corte outros parâmetros são necessários para a construção do filtro como o “ripple” e o grau do polinômio que devem ser cuidadosamente escolhidos, uma vez que estes parâmetros são de ajuste e interferem diretamente nos resultados estimados.

4.3. Parâmetros de regulação do filtro

Concluiu-se a partir das características necessárias de filtragem que o filtro usado seria o Chebyshev tipo I (Cap. 3). Esse tipo de filtro apresenta o comportamento requerido, ou seja, mantém a magnitude da resposta em frequência em torno do valor unitário (1) oscilando dentro de uma pequena faixa, que é denominada de *ripple*, até certa frequência de corte ω_C a partir da qual a magnitude decai rápida e monotonicamente.

A Figura 4.3 mostra três configurações diferentes de um filtro Chebyshev tipo I obtidas a partir de diferentes valores do grau do polinômio (n) e da frequência de corte (ω_C). Os três filtros são especificados como: Filtro1 (3, 0.0025, 0.3); Filtro2 (7, 0.0025, 10) e Filtro3 (15, 0.0025, 20), sendo que os valores em parênteses representam, respectivamente, grau do polinômio, ripple e frequência de corte.

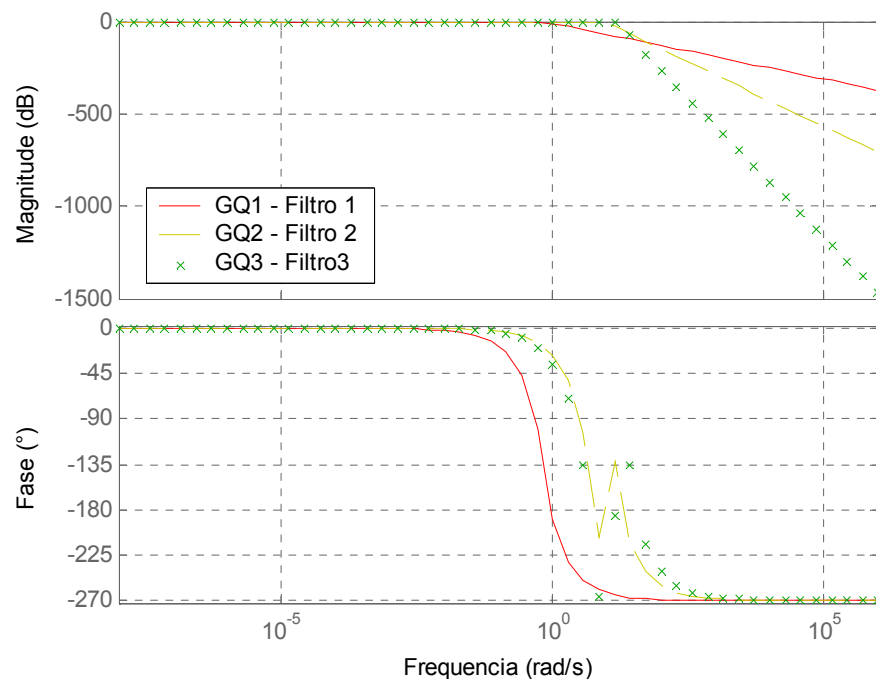


Figura 4.3. Filtros Chebyshev Tipo I.

Observa-se que a frequência de corte, ω_C , marca o ponto a partir do qual a magnitude da resposta em frequência começa a decrescer enquanto o grau do polinômio está diretamente ligado à inclinação com que essa magnitude decai, ou seja, polinômios com graus elevados proporcionam quedas mais íngremes. O *ripple* determina a oscilação permitida em torno do valor unitário. Como este valor é muito pequeno seu efeito é

imperceptível no gráfico, porém de grande importância devido à existência de ruídos nos dados de entrada.

A Figura 4.4 mostra as funções ruído (G_N) obtidas usando cada um dos diferentes filtros.

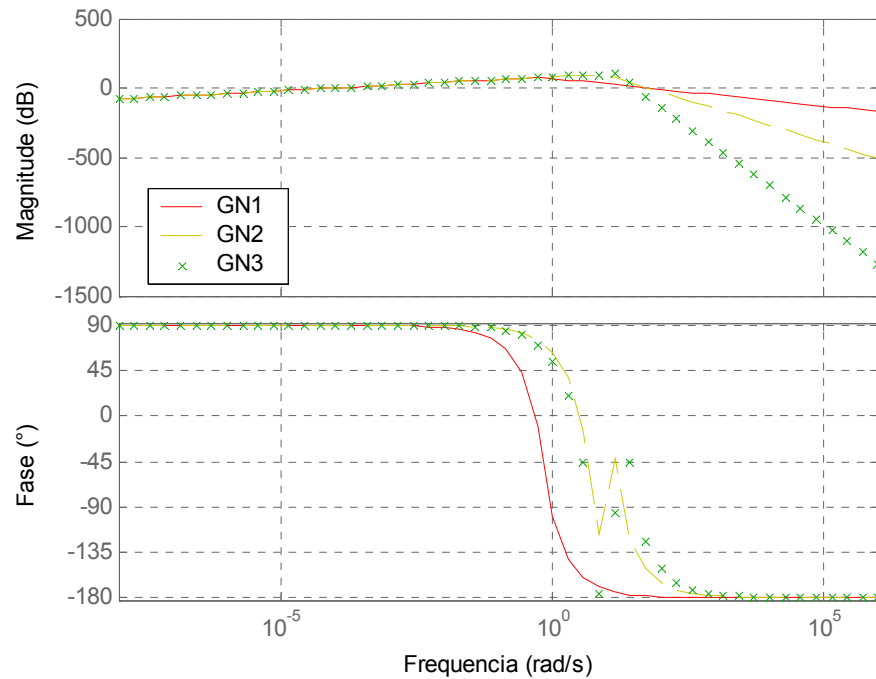


Figura 4.4. Funções de transferência do ruído: G_{N1} (Filtro1); G_{N2} (Filtro2); G_{N3} (Filtro3).

Observa-se que a alteração nas características do filtro provoca alterações equivalentes nas respectivas funções do ruído, Eq. (4.1).

4.4. Resultados

Apresentam-se, nesta seção, estimativas obtidas para um problema 1D com fluxo imposto de calor senoidal e dados de temperatura simulados com e sem ruído considerando as três configurações de filtro mostradas na seção 4.3.

Os dados de temperatura sem ruído são mostrados na Fig. 4.5 enquanto os resultados para as estimativas de fluxo de calor usando as três opções de filtro são apresentados na Fig. 4.6.

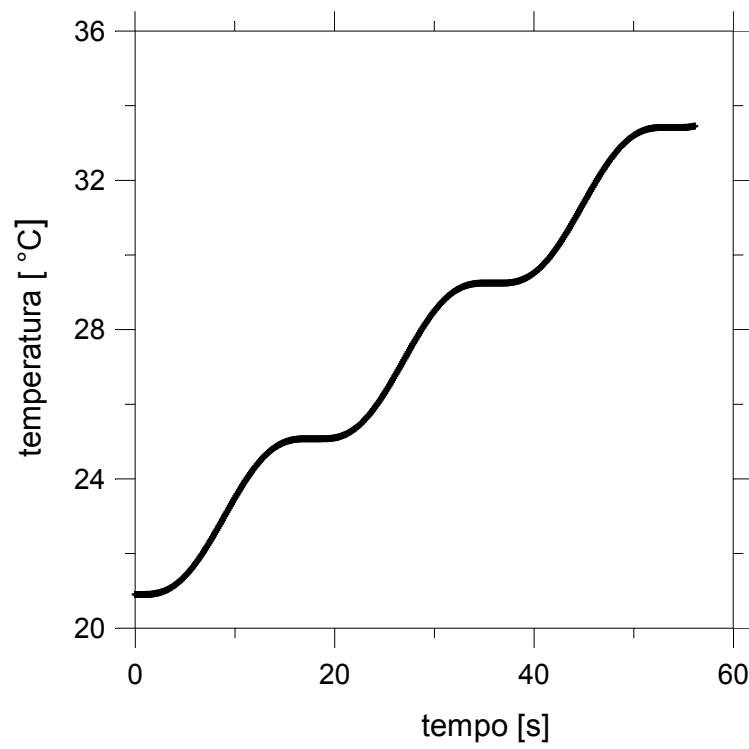


Figura 4.5. Perfil de temperatura medido em $x=L$ para o fluxo senoidal.

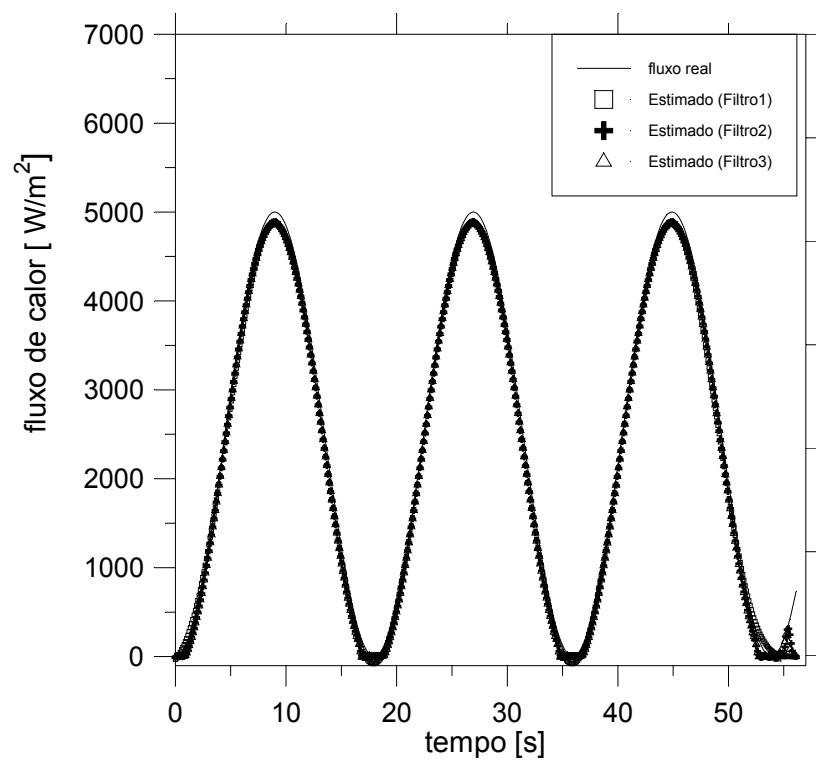


Figura 4.6. Fluxo real e estimativas obtidas usando os filtros 1, 2 e 3.

Observa-se que os resultados são satisfatórios usando-se qualquer uma das três configurações. Esse comportamento, em parte, se deve a ausência de ruído nos dados de temperatura “experimentais” acarretando uma alta estabilidade ao algoritmo e proporcionando uma ampla faixa de variação para os parâmetros.

A Figura 4.7 apresenta dois filtros que serão testados para avaliar os limites da banda de operação do algoritmo, considerando os valores de ω_c entre 0.2 e 10000 rad/s. Os filtros são especificados com os seguintes valores de n , r_p e ω_c respectivamente: Filtro4 (3,0.0025,0.2) e Filtro5 (3,0.0025,10000). Os resultados para as estimativas de fluxo usando esses filtros são apresentados na Fig. 4.7.

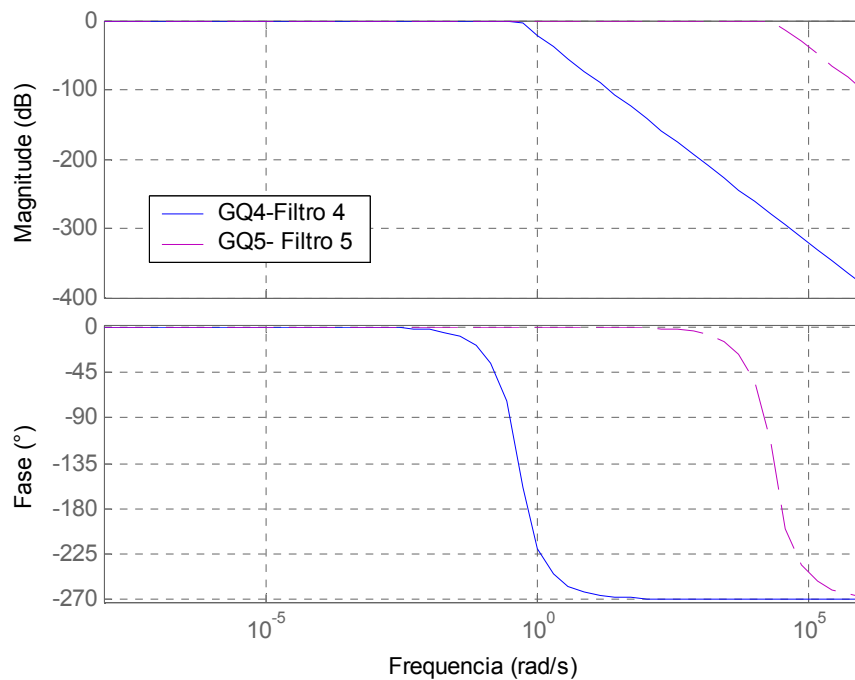


Figura 4.7. Filtros Chebyshev I: Filtro4 e Filtro5.

Percebe-se na Fig. 4.8, a seguir, que para frequências de corte abaixo de 0.3 rad/s a estimativa começa a perder a amplitude do fluxo real. No outro extremo, para uma frequência de corte 10000 rad/s, a estimação persegue o perfil do fluxo real, entretanto apresenta oscilações que são fruto da amplificação excessiva da função de transferência do ruído. Essa amplificação é mostrada na Fig. 4.9.

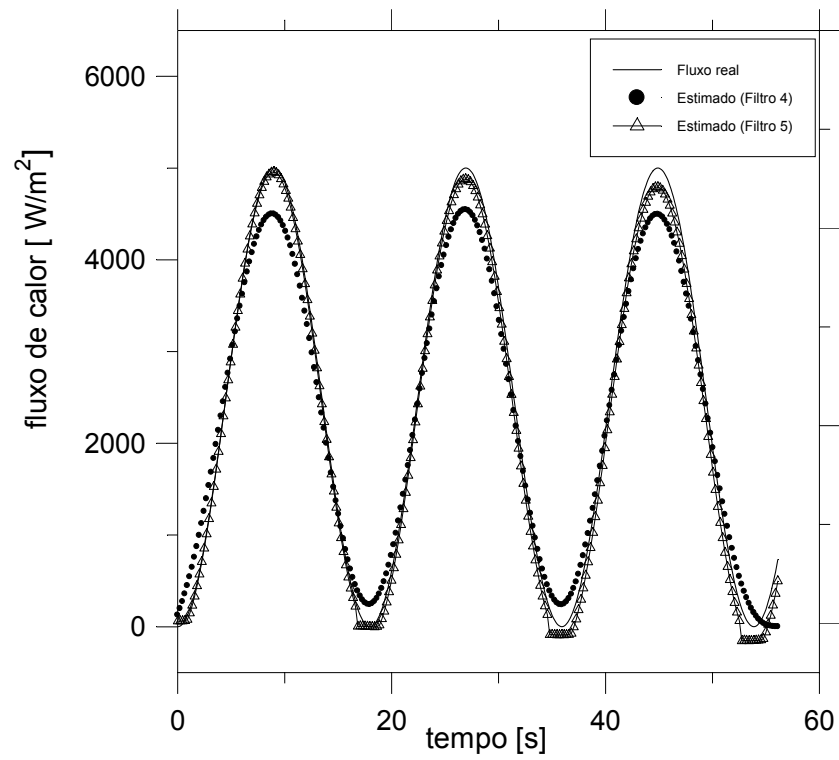


Figura 4.8. Fluxo real e estimativas obtidas usando os filtros 4 e 5.

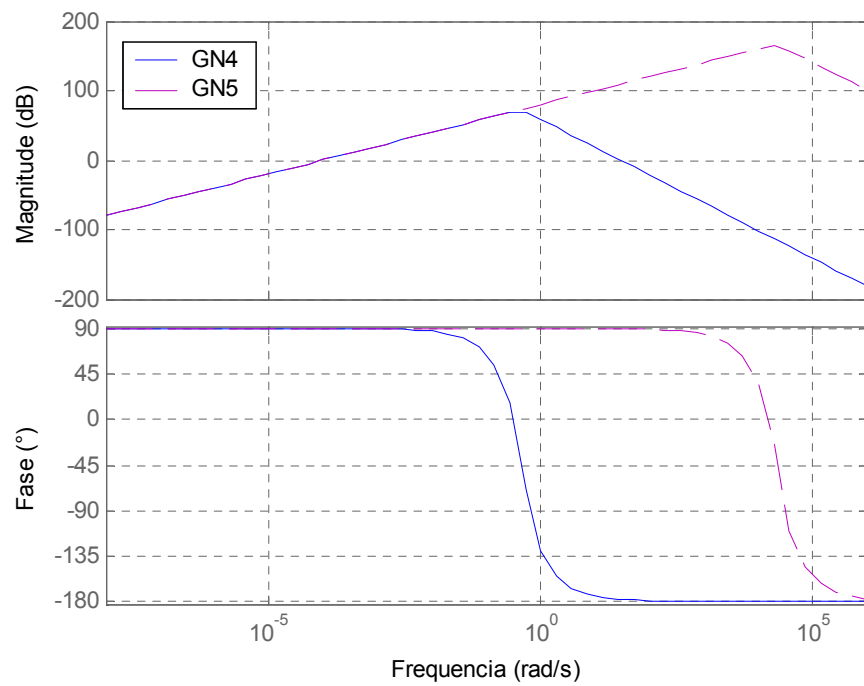


Figura 4.9. Funções de transferência do ruído: G_N4 (Filtro4); G_N5 (Filtro5)

Na seqüência, usando os filtros da Fig. 4.3, estima-se o fluxo a partir de dados de temperatura com um ruído de $\pm 1.0^{\circ}\text{C}$ o que representa 3 % da temperatura máxima, Fig. 4.10.

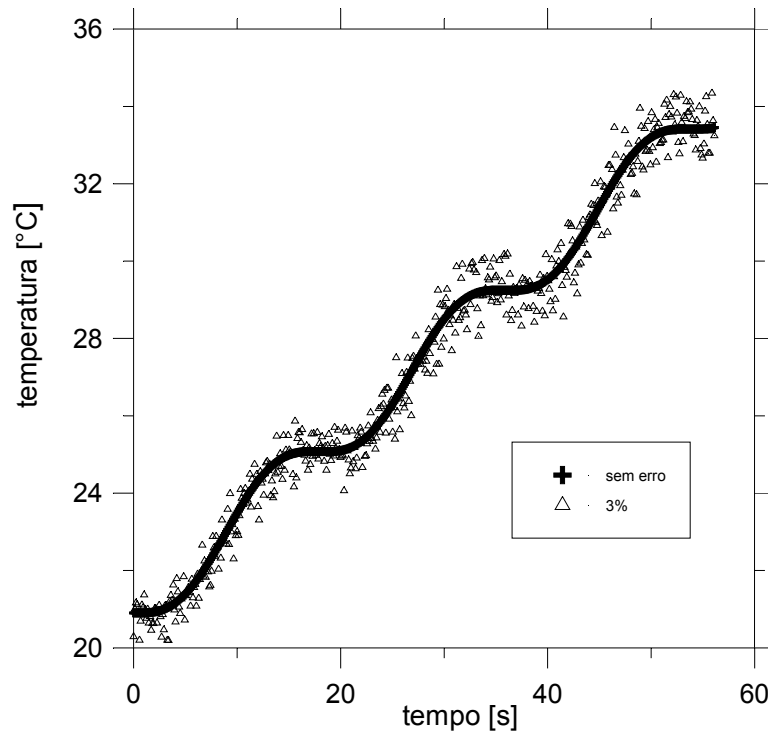


Figura 4.10. Temperaturas experimentais, simuladas numericamente para um fluxo na forma senoidal com e sem ruído.

A Figura 4.11 apresenta as estimativas e o fluxo real obtidos para as diferentes configurações de filtros mostradas na Fig. 4.3. Percebe-se que para dados experimentais com ruído, apenas o Filtro1 (3, 0.0025, 0.3); consegue uma estimativa satisfatória, isso porque as frequências de corte estabelecidas para os Filtros 2 e 3 foram altas, o que ocasionou uma amplificação excessiva da função de transferência do ruído, impossibilitando a estimação.

Como na Fig. 4.11, as três estimativas são apresentadas em conjunto, a estimativa obtida pelo Filtro 1 não pôde ser bem visualizada. Assim, a Fig. 4.12 mostra apenas a estimativa obtida usando esse filtro.

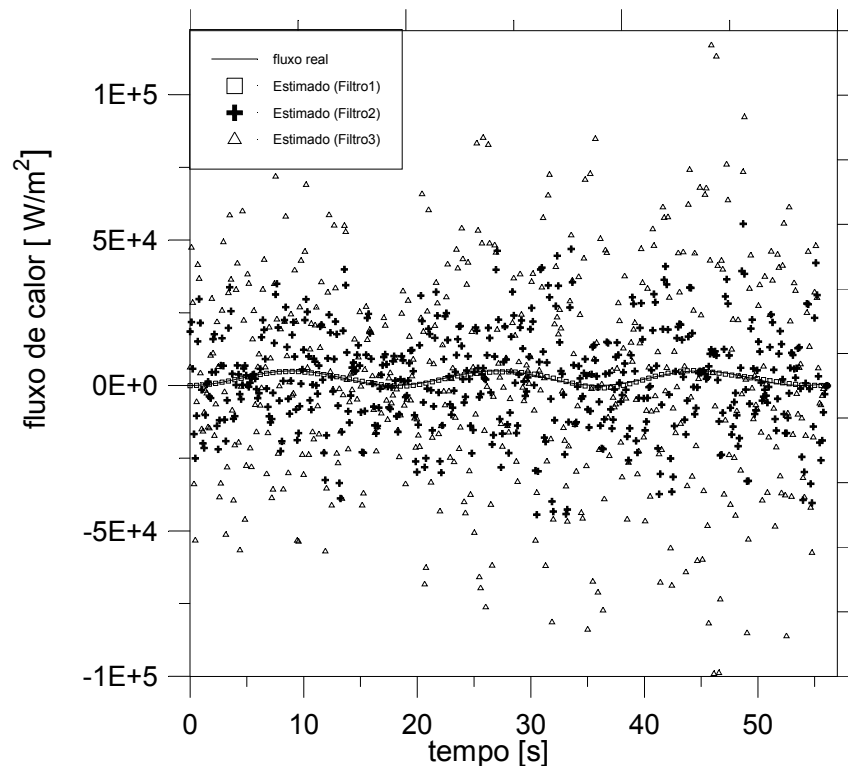


Figura 4.11. Fluxo real e estimativas obtidas usando os filtros 1, 2 e 3.

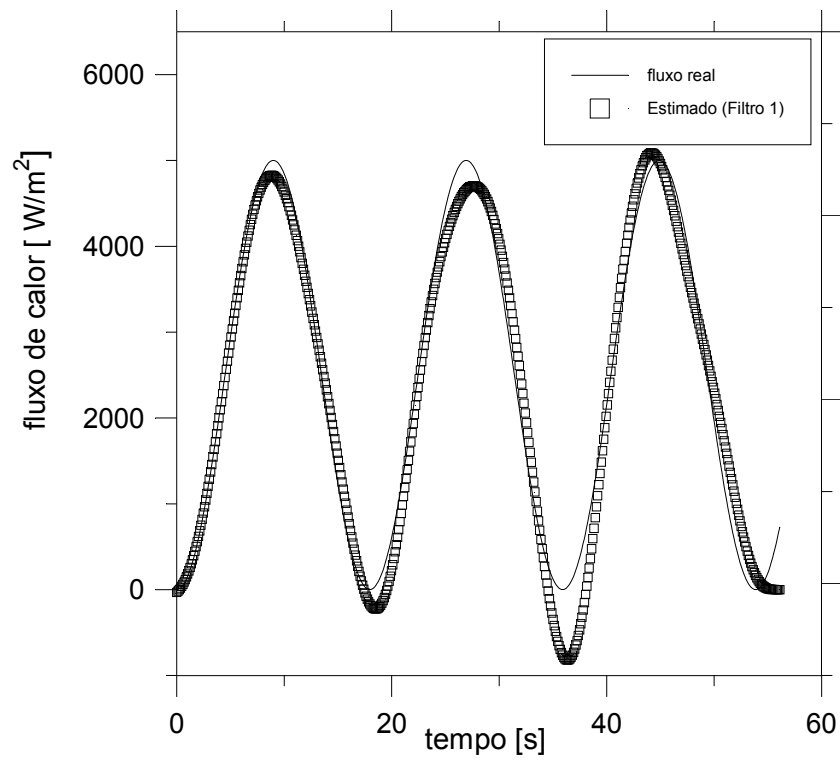


Figura 4.12. Fluxo real e estimativas obtidas usando o filtro 1.

Conclui-se que a minimização dos efeitos de ruídos nos dados de entrada é possível, porém a partir de uma banda de frequência mais restrita.

Para dados corrompidos como os dados de temperatura experimentais reais, deve-se formular um filtro com uma frequência de corte baixa, evitando ao máximo a amplificação da função de transferência do ruído. O grau do polinômio deve ser tal que a função do sinal (G_Q) decresça mais rapidamente que a função do condutor (G_H). Como G_H é uma função de segundo grau, logo a função do sinal (G_Q) deve ser de grau igual ou superior a três, dependendo da região onde se faz o corte. O *ripple* deve ser menor que a amplitude da variação imposta pelo ruído aos dados de temperatura. A partir dessas restrições pode-se otimizar a escolha do filtro que melhor se adapta a solução do problema.

No capítulo a seguir apresenta-se uma comparação, para o caso unidimensional, entre as funções de transferência obtidas para o condutor, G_H , pelo processo proposto por Blum e Marquardt (1997) e pelo processo proposto neste trabalho, bem como resultados obtidos para diferentes casos testes, abordando simulações de problemas uni, bi e tridimensionais, avaliando diferentes tipos de fluxos de calor, tanto em forma quanto em intensidade.

CAPÍTULO V

ANALISE E DISCUSSÃO DE RESULTADOS: CASOS SIMULADOS

5.1. Introdução

Neste capítulo são apresentados resultados para as estimativas de fluxo de calor usando-se dados de temperaturas simulados. Embora esse procedimento não permita a verificação de todas as variáveis envolvidas, como por o exemplo o teste do modelo térmico, é interessante do ponto de vista da análise do potencial do estimador. As temperaturas experimentais são simuladas numericamente através da solução do problema direto de difusão de calor considerando um fluxo de calor conhecido $q(t)$. Uma vez conhecido o fluxo de calor, o campo de temperatura é então calculado numericamente usando-se o método de diferenças finitas (Patankar, 1980). Neste trabalho obtém-se a solução direta de todos os modelos térmicos (uni, bi ou tridimensional transiente) usando-se o software INV3D desenvolvido no LTCM-UFU (Carvalho, 2006).

À evolução da temperatura em um determinado ponto é acrescido um ruído, ε_i . Esta temperatura é então assumida como medida “experimentalmente”, ou seja,

$$Y(r_i, t) = T(r_i, t) + \varepsilon_j. \quad (5.1)$$

Na Eq.(5.1) r_i , representa as coordenadas cartesianas para cada um dos problemas simulados (uni, bi e tridimensional).

A partir das temperaturas simuladas avaliam-se algumas situações. Primeiro comparam-se os diferentes métodos de obtenção da função de transferência do condutor (G_H): o método de Blum e Marquardt (1997) e o baseado em funções de Green proposto neste trabalho. Em um segundo momento, avalia-se a capacidade, a eficiência e a aplicabilidade da técnica baseada em funções de Green e observadores dinâmicos. Estabelece-se assim uma comparação entre esta e técnicas de otimização já consolidadas na solução de problemas unidimensionais como a estimação seqüencial com função

especificada (Beck *et al.*, 1985) e o método da seção áurea (Vanderplaats, 1991). Conclui-se o capítulo aplicando-se a técnica proposta em modelos térmicos multidimensionais.

5.2. Comparação entre os métodos de obtenção da função de transferência do condutor (G_H).

O meio em estudo simula uma amostra de cobre de $L=3$ mm de espessura com condutividade térmica $k=401$ W/mK e difusividade térmica $\alpha= 117 \cdot 10^{-6}$ m²/s submetida a duas formas diferentes de fluxo de calor: i) fluxo de calor senoidal e; ii) fluxo de calor em forma triangular.

Para o caso unidimensional, simula-se a temperatura na face oposta ao fluxo, $x = L$. A Figura 5.1 apresenta o esquema do modelo unidimensional e as Figs. 5.2 e 5.3 apresentam respectivamente, as evoluções de temperatura “medidas” (simuladas) na superfície oposta ao fluxo de calor, $Y(L,t)$, sem adição de ruído, $\varepsilon_j = 0$, considerando os dois tipos de fluxo, senoidal e triangular,

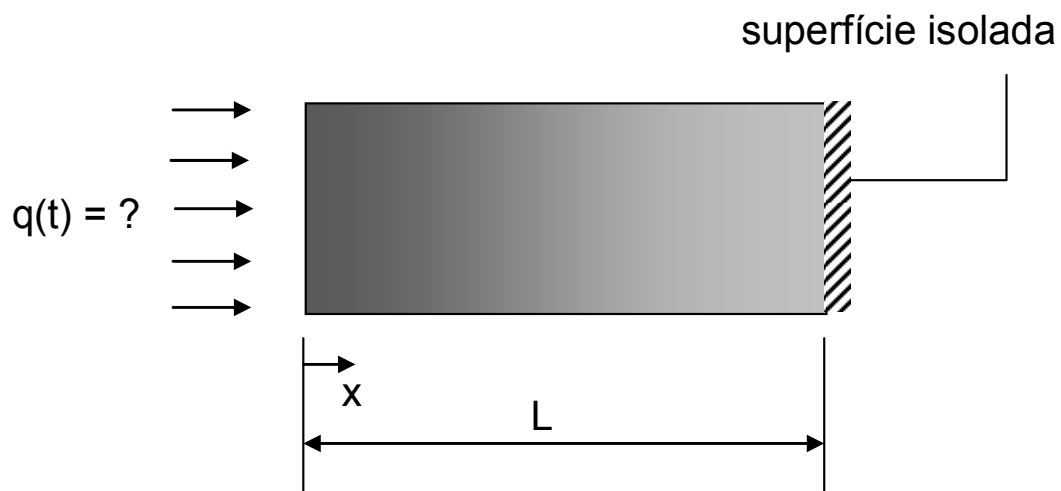


Figura 5.1. Esquema do modelo térmico unidimensional transiente.

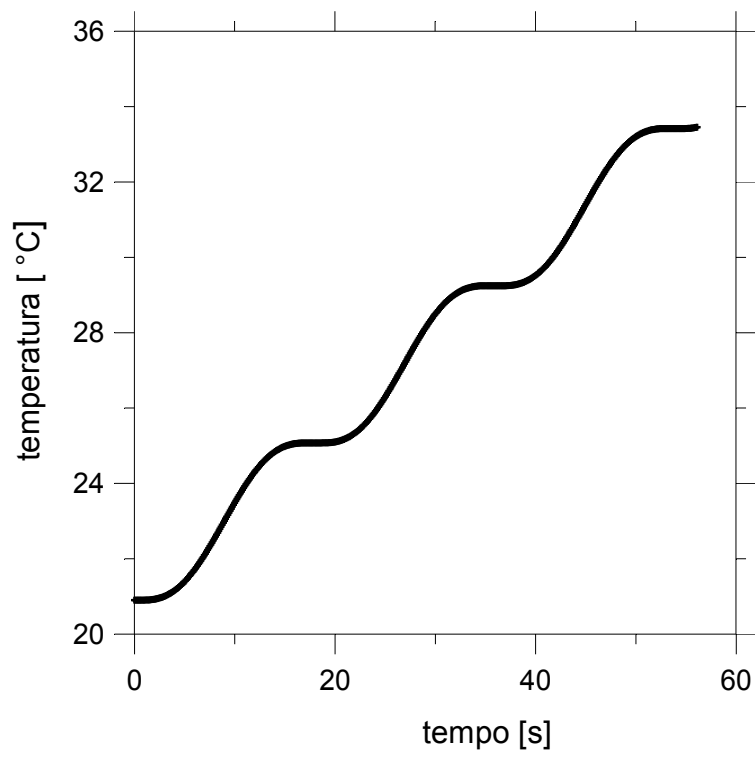


Figura 5.2. Perfil de temperatura medido em $x=L$ para o fluxo senoidal.

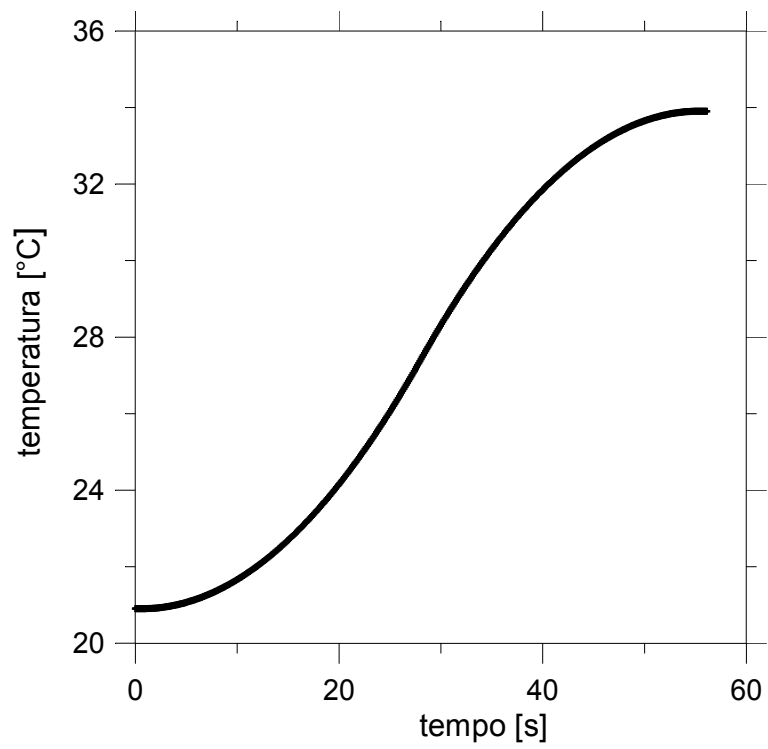


Figura 5.3. Perfil de temperatura medido em $x=L$ para o fluxo triangular.

Na Figura 5.4 apresenta-se uma comparação entre os módulos e as fases das funções G_H obtidas pelos dois procedimentos: a técnica descrita por Blum e Marquardt (1997), usando-se uma discretização espacial com 11 volumes finitos, aqui denominada de método clássico, e a proposta neste trabalho baseada em funções de Green. Percebe-se na Fig. 5.4 que o método proposto apresenta um desvio em relação ao clássico apenas para altas frequências.

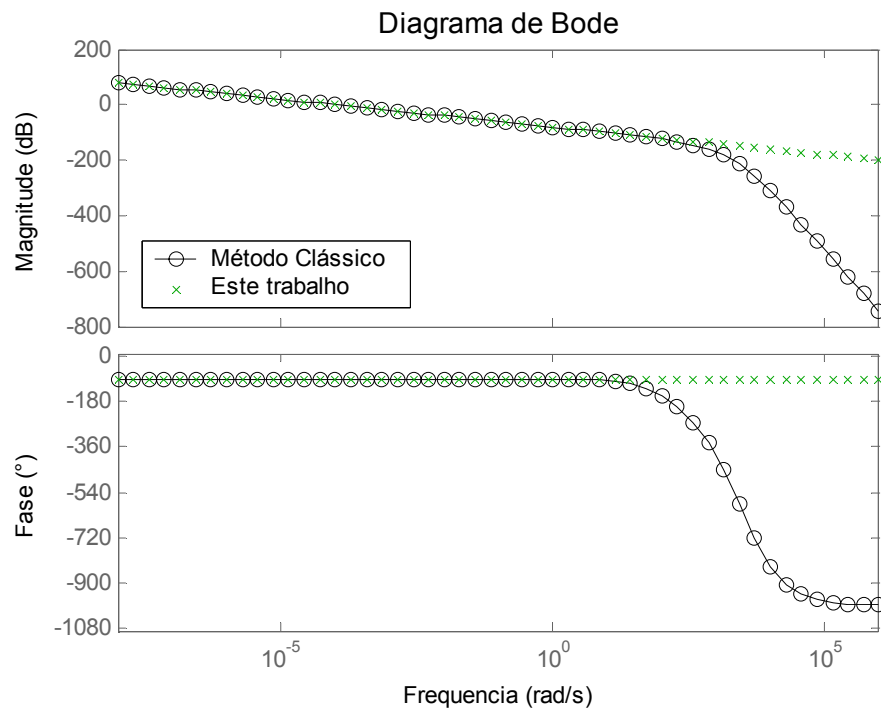


Figura 5.4. Comparação entre funções transferência (G_H).

Na sequência apresenta-se uma comparação entre o fluxo de calor real (imposto) e os fluxos de calor estimados usando-se a técnica de observadores com as diferentes funções de transferência obtidas para o condutor, mostradas na Fig. 5.4. O objetivo é verificar se o desvio apresentado para altas frequências prejudica o algoritmo. O problema térmico estudado é o mesmo mostrado na Fig.5.1, submetido aos dois tipos diferentes de fluxo de calor.

Os fluxos de calor desconhecidos são estimados a partir de medições de temperatura simuladas sem erros na face oposta ao fluxo, ou seja, em $x=L$, apresentadas nas Figs. 5.2 e 5.3. A comparação entre os resultados obtidos usando as diferentes funções G_H pode ser observada nas Figs. 5.5 e 5.6, que apresentam as estimativas e o fluxo real para os casos senoidal e triangular respectivamente.

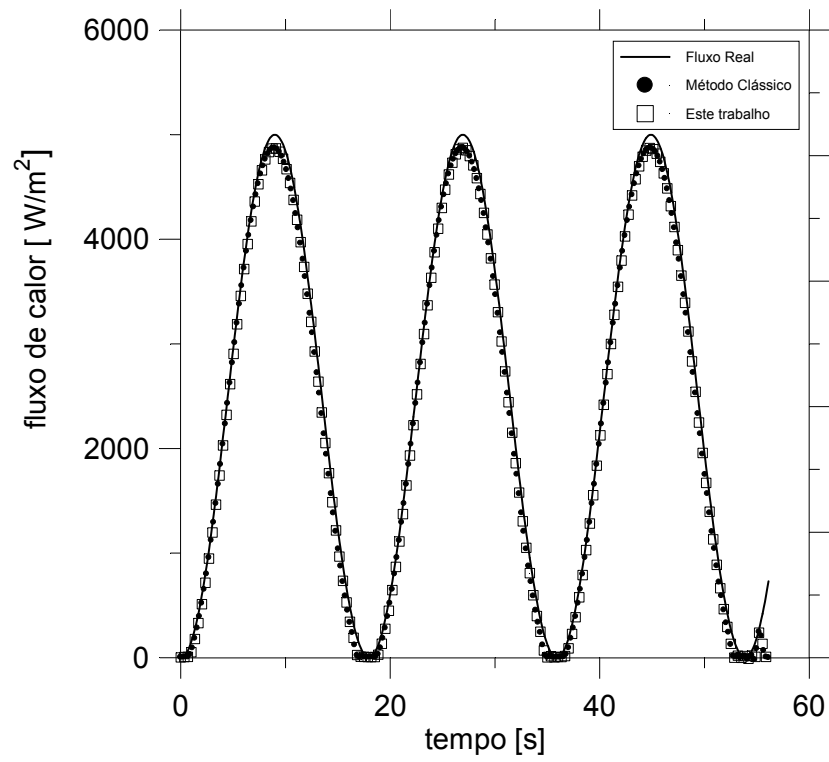


Figura 5.5. Fluxo senoidal estimado com $\varepsilon_i = \pm 0.0^\circ\text{C}$ (teste 1D)

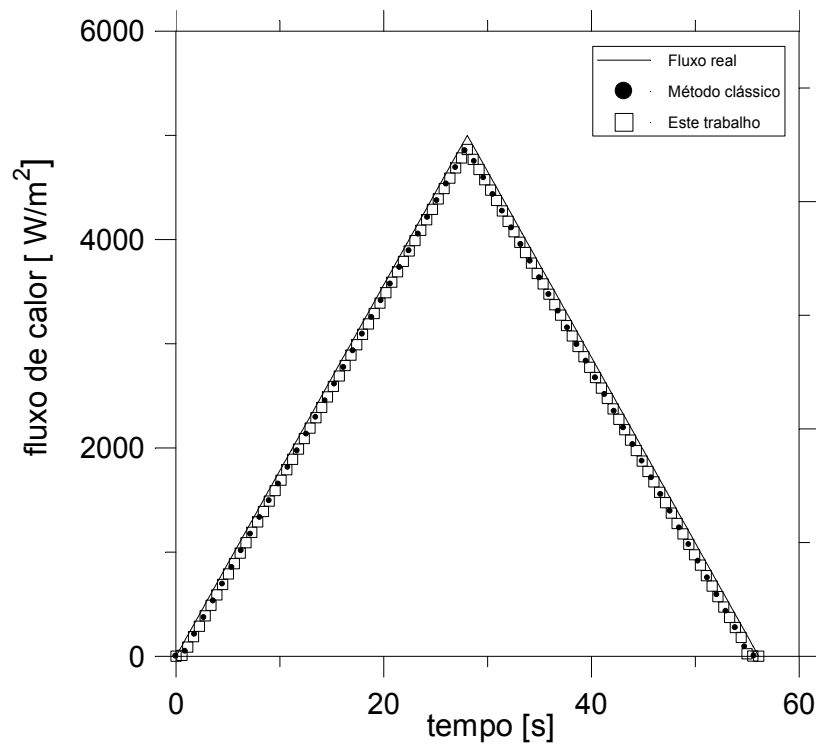


Figura 5.6. Fluxos triangular estimado com $\varepsilon_i = \pm 0.0^\circ\text{C}$ (teste 1D)

Observa-se que as duas técnicas apresentam resultados concordantes entre si e com os fluxos impostos. Isso se deve ao fato da frequência de corte usada ser menor que $w_c = 80$ rad/s. Nota-se que, para valores inferiores a essa frequência tanto o módulo como a fase das funções G_H calculadas pelos dois procedimentos têm o mesmo comportamento.

5.3. Resultados simulados

5.3.1. Estimativas de fluxo de calor: problema unidimensional transiente

Apresentam-se nesta seção uma comparação entre o fluxo de calor real (imposto) e estimado usando-se o método proposto neste trabalho e técnicas já consolidadas para solução de problemas inversos unidimensionais como o método da estimação seqüencial com função especificada (Beck *et al.*, 1985) e a seção áurea (Vanderplaats, 1991). Inicialmente a comparação é feita a partir de medições de temperatura sem erros experimentais considerando o fluxo de calor senoidal mostrado na Fig.5.2. A Figura 5.7 apresenta os resultados obtidos para cada técnica.

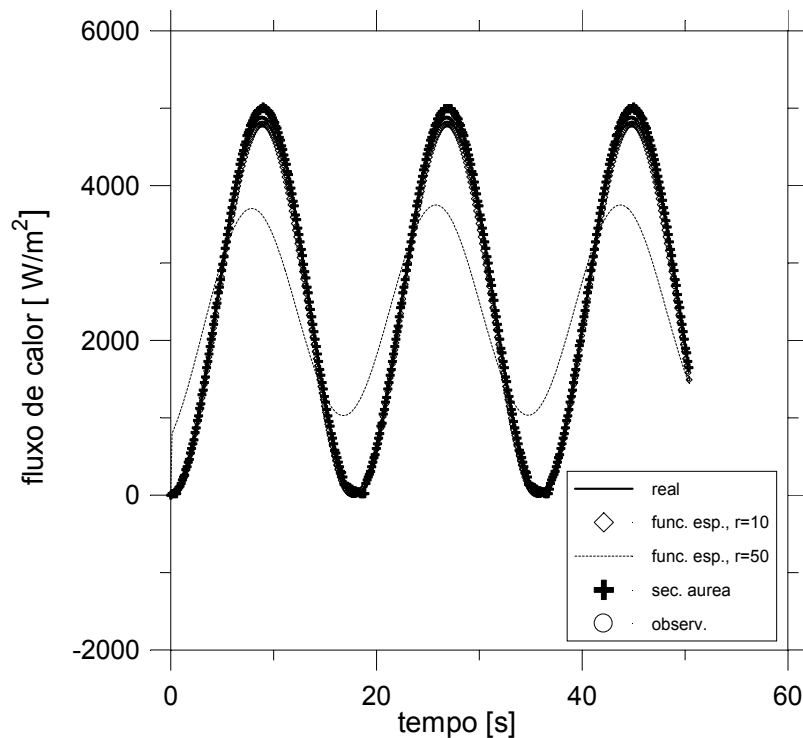


Figura 5.7. Comparação entre fluxo de calor real e fluxos estimados sem a presença de ruído.

Observa-se que, nesse caso, as três técnicas propostas apresentam resultados satisfatórios excetuando o método seqüencial com 50 tempos futuros. De fato, como já alertado por Beck *et al.*, (1985) tempos futuros maiores que 10 podem causar alguma perturbação nas estimativas caso não estejam presentes nenhum ruído nos sinais.

A seguir estimam-se os fluxos de calor na forma senoidal e triangular usando-se os três métodos citados anteriormente. Entretanto, neste caso os dados de entrada se encontram corrompidos por ruído, ou seja, são adicionadas às temperaturas “medidas” (simuladas) um ruído aleatório, como previsto nas Eq. (5.1), $\varepsilon_j \neq 0$.

As Figuras 5.8 e 5.9 apresentam as evoluções de temperatura “medidas” na superfície oposta ao fluxo de calor, considerando o fluxo de calor senoidal e o fluxo de calor triangular respectivamente. Em cada caso, as temperaturas $Y(L, t)$ são simuladas com um ruído aleatório de $\pm 0.5^\circ\text{C}$, que representa 1.5% da temperatura máxima, e um ruído de $\pm 1.0^\circ\text{C}$ que representa 3 % da temperatura máxima.

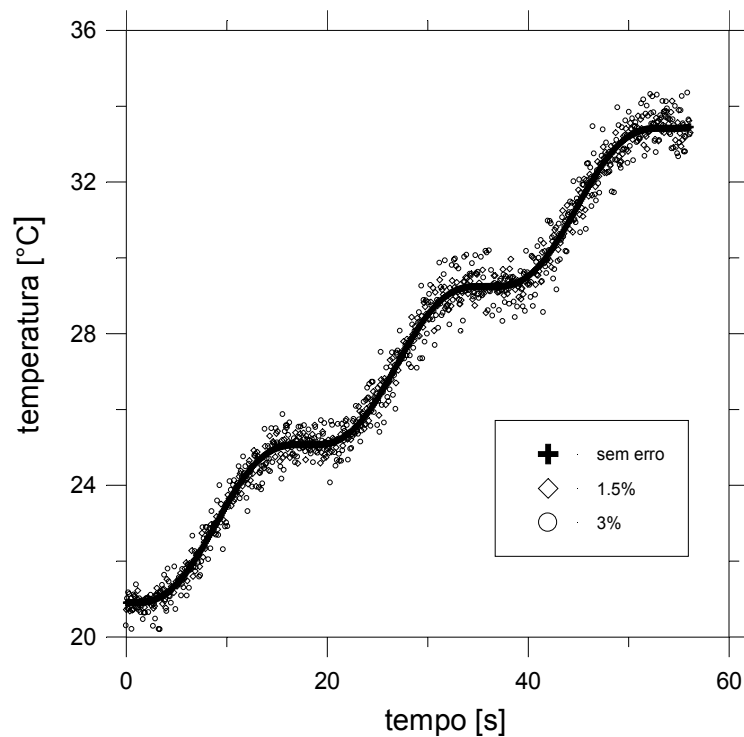


Figura 5.8. Temperaturas simuladas numericamente para um fluxo senoidal com $\varepsilon_i = 0.0$, $\pm 0.5^\circ\text{C}$ e $\pm 1.0^\circ\text{C}$, fluxo senoidal.

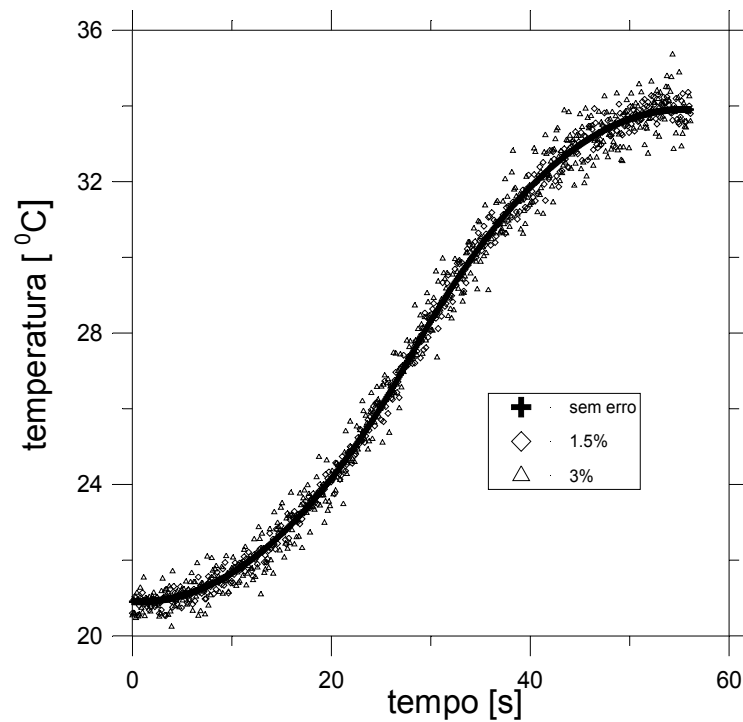


Figura 5.9. Temperaturas simuladas numericamente para um fluxo na forma triangular com $\varepsilon_i = 0.0, \pm 0.5^\circ\text{C}$ e $\pm 1.0^\circ\text{C}$.

Como citado, quando a presença de ruído torna-se significativa, valores de tempos futuros superiores a 10 para o algoritmo seqüencial (Beck *et al.*, 1985), acrescentam uma maior estabilidade, melhorando seu resultado. Esse comportamento pode ser observado na Figs. 5.10 e 5.11. Observa-se ainda nessas figuras que o método da seção áurea falha em qualquer um dos casos onde há presença de ruído nos dados de temperatura. Mesmo o método seqüencial com $r=50$ não é capaz de lidar com sucesso com dados de entrada com um nível de ruído da ordem de 1.5 ou 3% do seu sinal máximo. Nota-se, nesse caso, que a técnica baseada em funções de Green e observadores dinâmicos apresenta um excelente desempenho, qualquer que seja a situação testada, o que indica um índice de robustez interessante na estimativa de fluxos de calor.

O mesmo comportamento pode ainda ser verificado nas Figs. 5.12 e 5.13 para o fluxo de calor em forma triangular. Novamente, o método dos observadores foi o que obteve melhor desempenho, apresentando uma estimativa “lisa”, sem grandes oscilações.

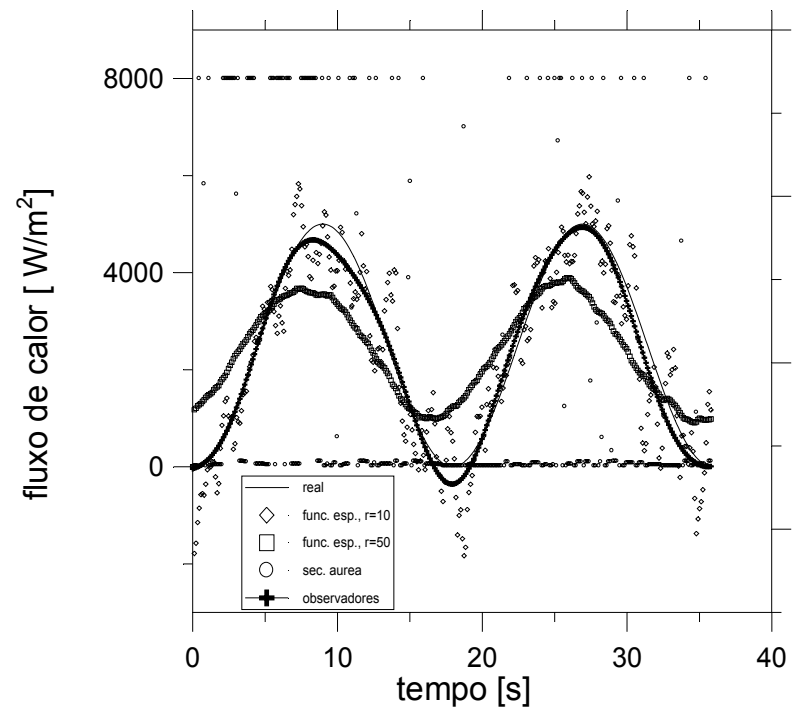


Figura 5.10. Fluxos estimados com $\varepsilon_i = \pm 0.5 \text{ } ^\circ\text{C}$

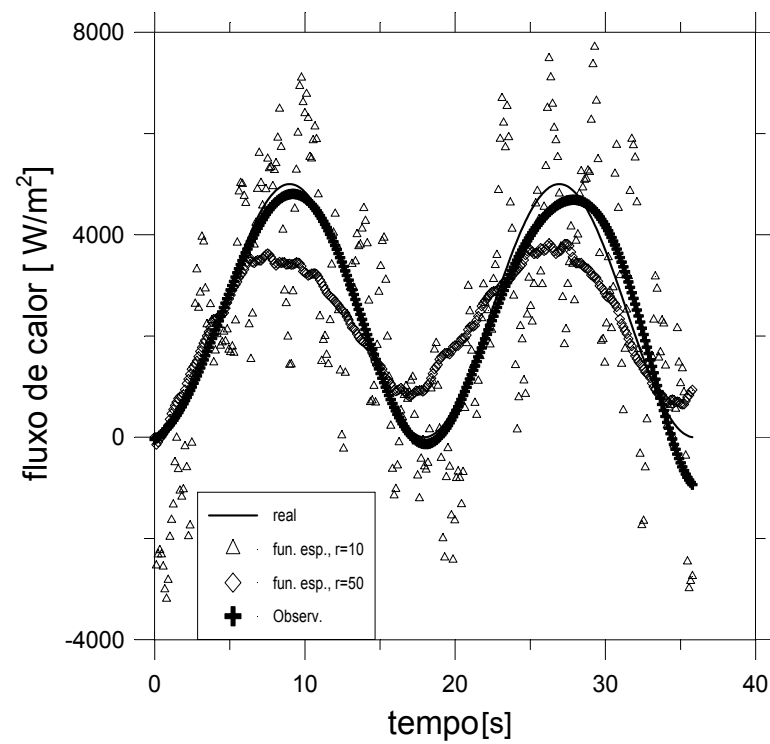


Figura 5.11. Fluxos estimados com $\varepsilon_i = \pm 1.0 \text{ } ^\circ\text{C}$

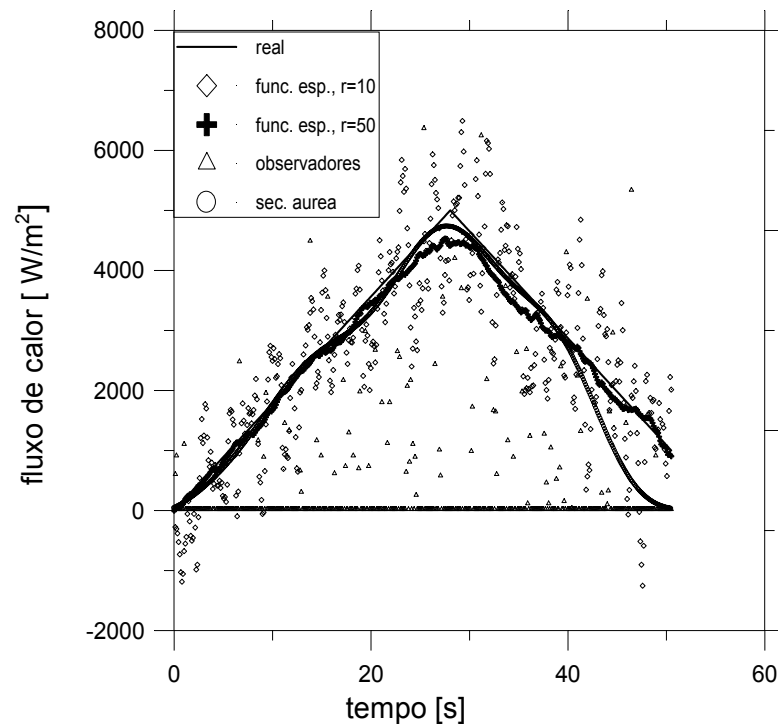


Figura 5.12. Fluxos estimados com $\varepsilon_i = \pm 0.5 \text{ } ^\circ\text{C}$

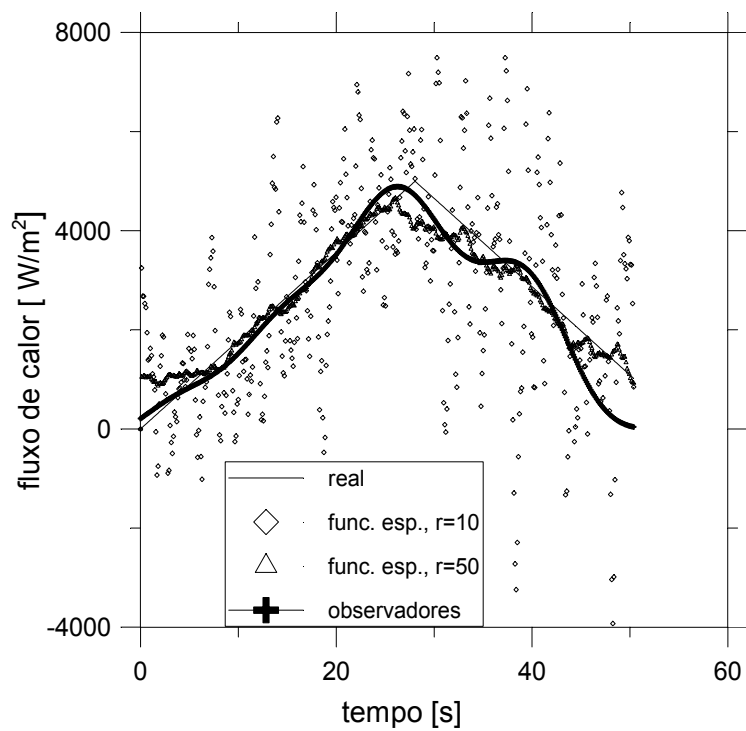


Figura 5.13. Fluxos estimados com $\varepsilon_i = \pm 1.0 \text{ } ^\circ\text{C}$

Neste caso, o método seqüencial com tempos futuros igual a 50 pode ser considerado de desempenho satisfatório. Entretanto, para erros maiores que 3%, o método seqüencial falha qualquer que seja o número de tempos futuros.

5.3.2 Estimativas de fluxo de calor: problema bidimensional transiente

Na seção 5.3.1 pôde-se comprovar a robustez da técnica baseado em funções de Green e observadores dinâmicos na solução de problemas unidimensionais. Porém o objetivo é a aplicação da técnica na solução de problemas com geometria complexa, ou seja, em problemas reais.

Como uma etapa intermediária na busca da solução de problemas físicos reais, apresenta-se nesta seção a solução de um problema simulado bidimensional. O meio simula uma amostra de cobre, portanto com as mesmas propriedades térmicas apresentadas na seção 5.2. As dimensões da amostra simulada são mostradas na Fig. 5.14, que também apresenta a posição dos termopares onde se obteve as temperaturas “medidas”, $Y(r_i, t)$.

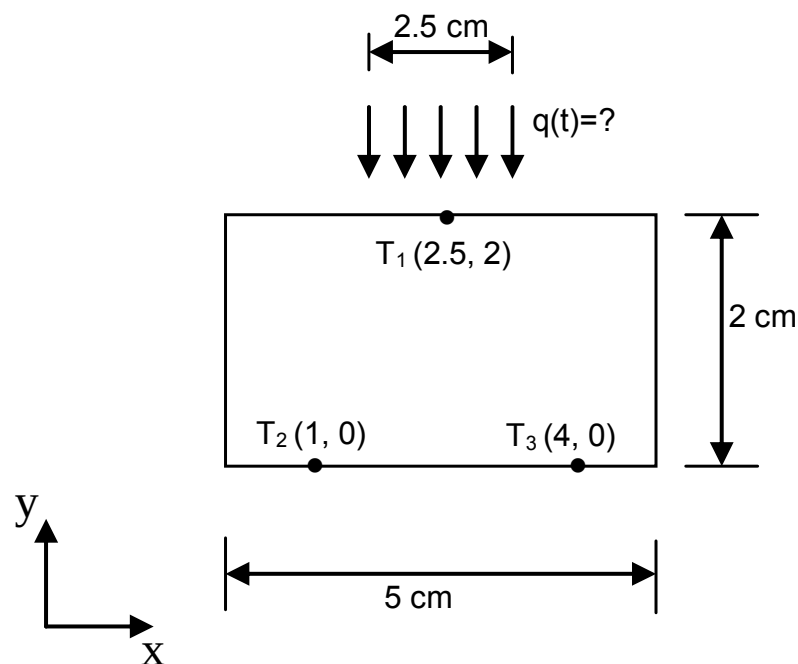


Figura 5.14. Esquema do problema bidimensional transiente

A figura 5.15 mostra as evoluções de temperaturas “medidas” para cada termopar sem adição de ruído, da Eq. (5.1), $\varepsilon_j = 0$. Observa-se que por estarem equidistantes os sensores 2 e 3, T_2 e T_3 , apresentam o mesmo perfil de temperatura. A título de observação o sensor de número 1, T_1 , é apenas didático, uma vez q é impraticável em situações reais.

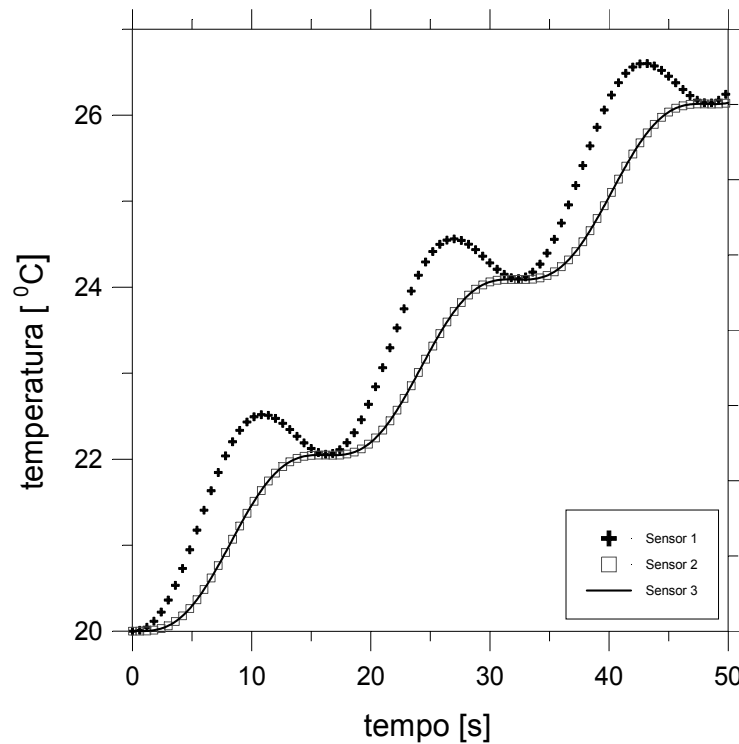


Figura 5.15. Evoluções de temperatura “medidos” em T_1 , T_2 e T_3 para o fluxo senoidal.

Para cada conjunto de dados de temperatura, mostrados na Fig. 5.15, estima-se o fluxo de calor. A Figura 5.16 apresenta as estimativas obtidas a partir do uso independente dos dados de temperatura “medidos” por cada sensor.

Observa-se que os fluxos de calor estimados com base nos dados dos sensores 2 e 3 são absolutamente concordantes e, apesar de mais distantes da fonte de calor, apresentam ótimos resultados.

Na sequência, seção 5.3.3, apresenta-se resultados para um caso teste tridimensional.

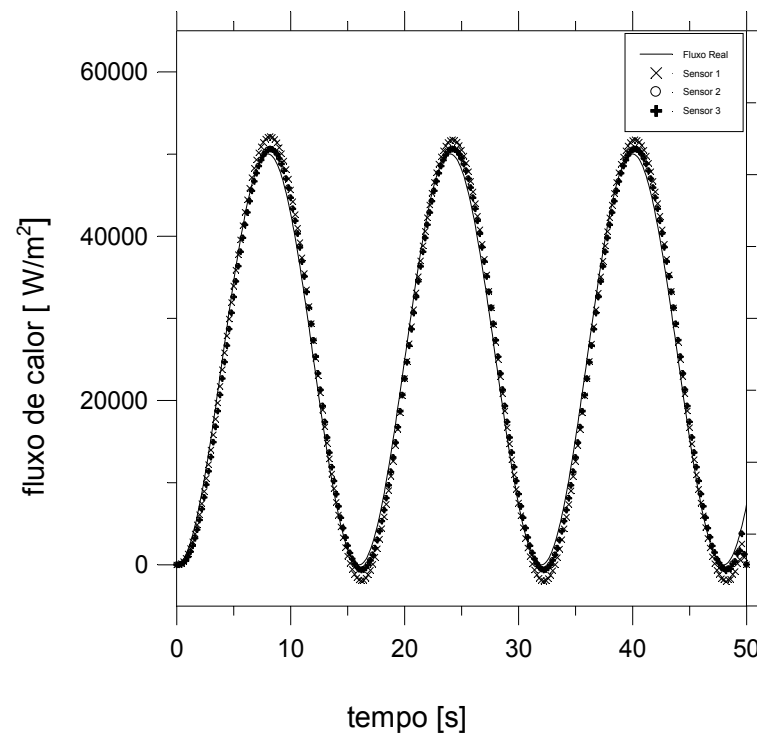


Figura 5.16. Fluxo senoidal estimado com $\varepsilon_i = \pm 0.0 \text{ } ^\circ\text{C}$ (teste 2D)

5.3.3. Estimativas de fluxo de calor: problema tridimensional transiente

Aborda-se nesta seção o desempenho da técnica na solução do problema tridimensional transiente mostrado na Fig. 5.17. O problema simula uma amostra de cobre, tendo suas dimensões e localização das temperaturas, $Y(r_i, t)$ mostradas na Fig. 5.18.

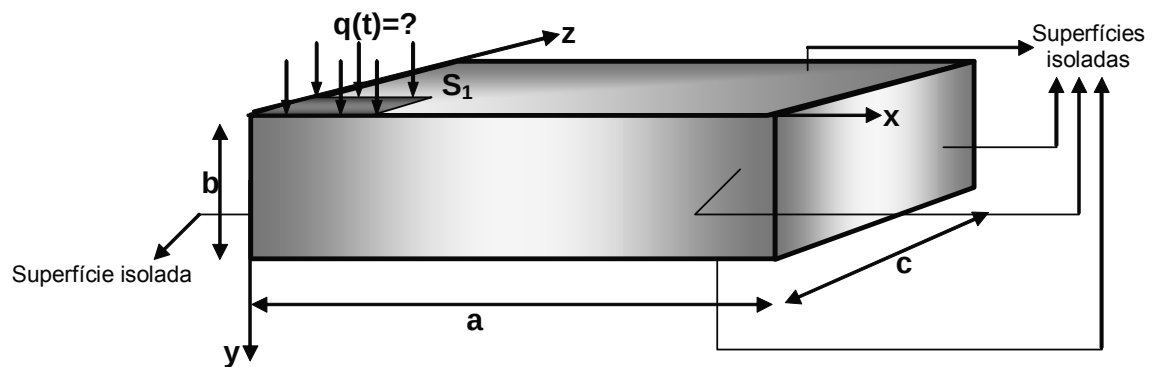


Figura 5.17. Problema tridimensional transiente

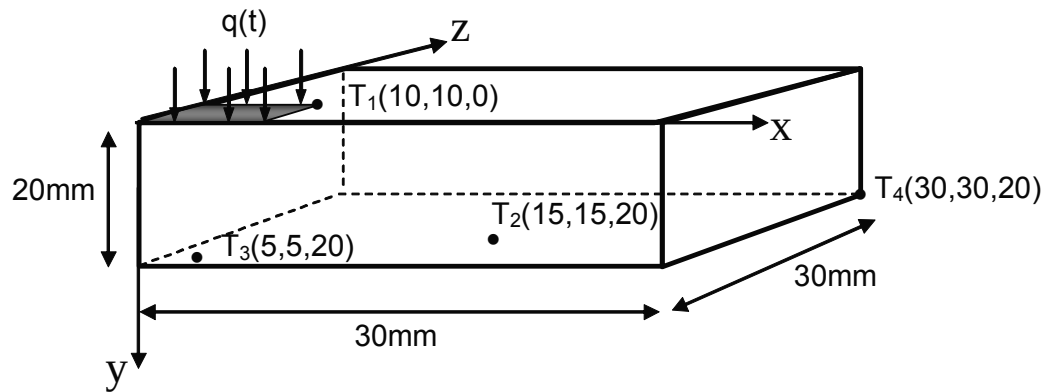


Figura 5.18. Localização das quatro temperaturas simuladas numericamente

As Figuras 5.19 e 5.20 apresentam respectivamente, as evoluções das temperaturas $Y(r_i, t)$ sem adição de erro obtidas para cada sensor simulado e para cada fluxo imposto.

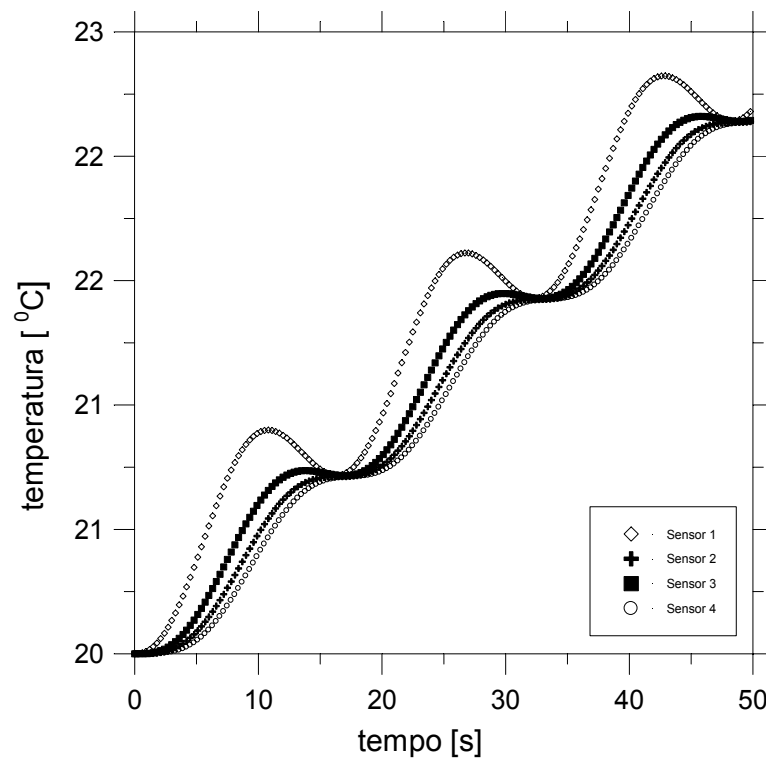


Figura 5.19. Perfis de temperaturas simulados, $\varepsilon_j = 0$, fluxo senoidal (teste 3D)

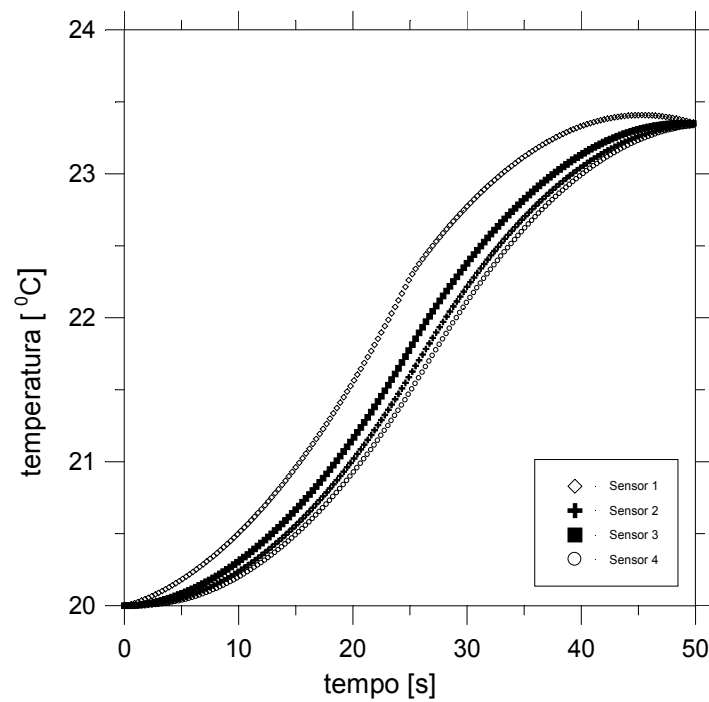


Figura 5.20. Perfis de temperaturas simulados, $\varepsilon_j = 0$, fluxo triangular (teste 3D).

As Figuras. 5.21 e 5.22 mostram as estimativas de fluxo obtidas a partir do uso independente de cada temperatura medida para os dois casos de fluxo, respectivamente.

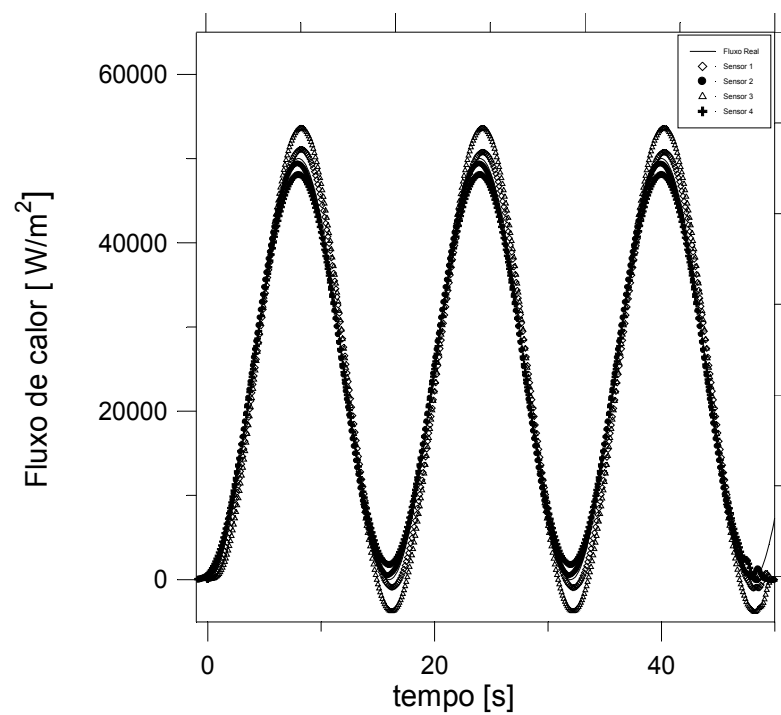


Figura 5.21. Fluxos estimados com $\varepsilon_i = 0$ para o fluxo na forma senoidal (teste 3D)

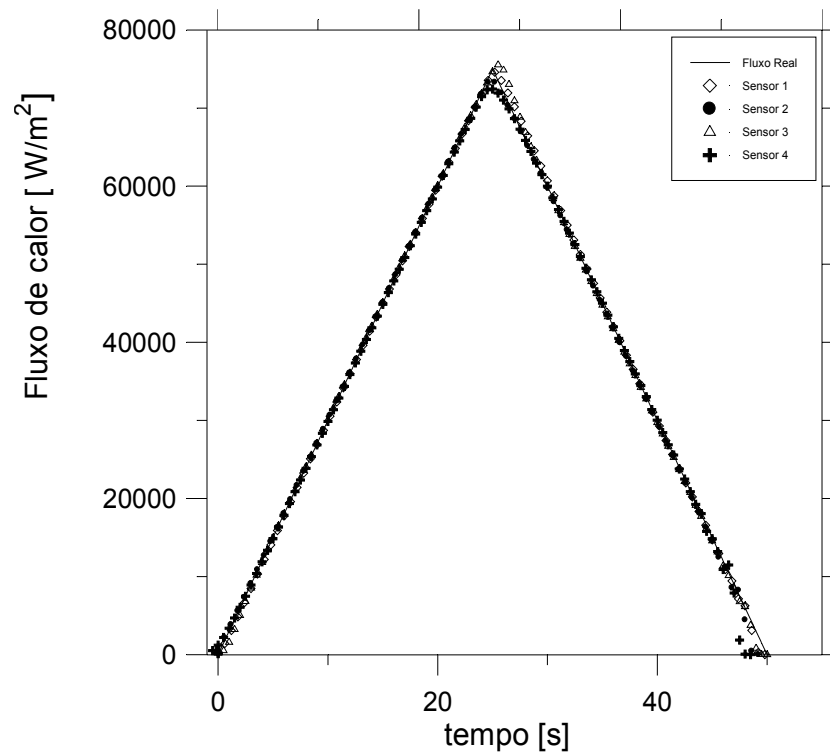


Figura 5.22. Fluxos estimados com $\varepsilon_i = 0$ para o fluxo na forma triangular (teste 3D)

As Figs. 5.23 e 5.24 mostram os perfis de temperatura com a adição de ruídos da ordem de $\pm 0.5^\circ\text{C}$ (1.5% da temperatura máxima) nos dados de temperatura originais.

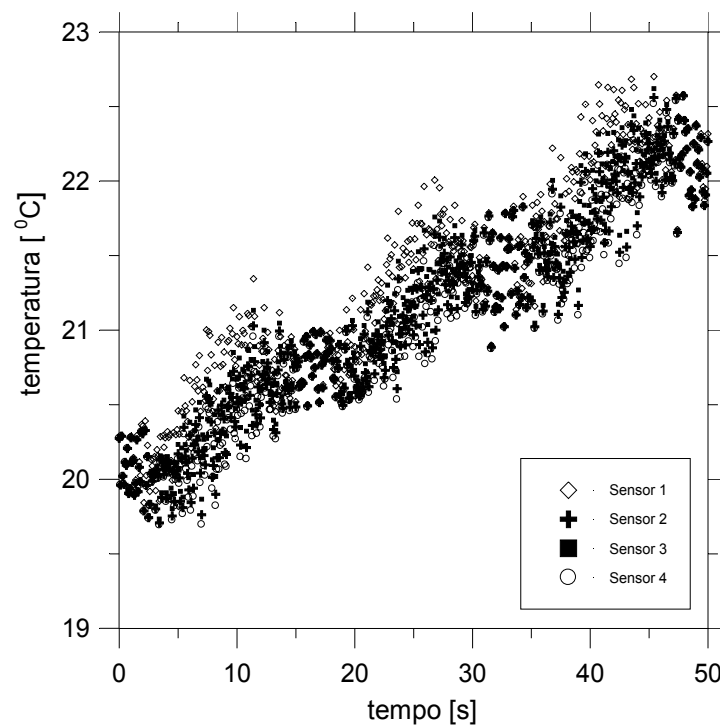


Figura 5.23. Temperaturas simuladas para um fluxo senoidal com $\varepsilon_i = \pm 0.5^\circ\text{C}$ (teste 3D).

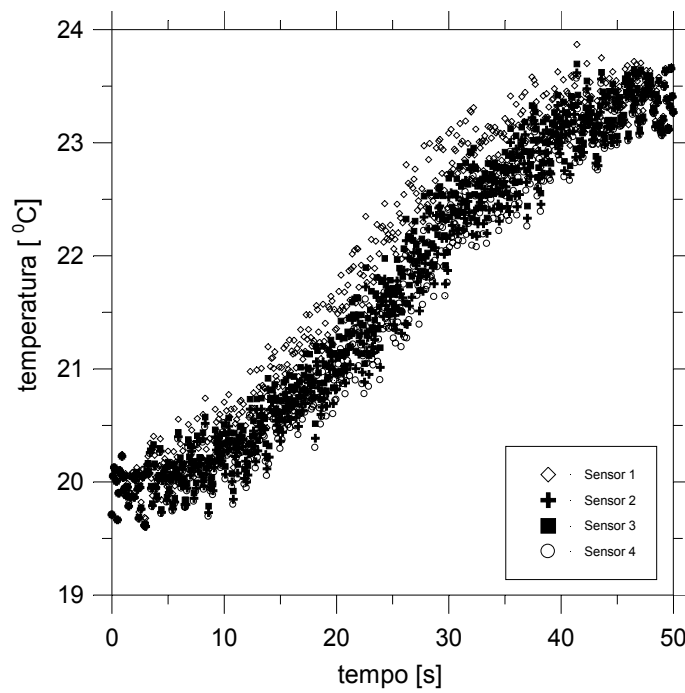


Figura 5.24. Temperaturas experimentais simuladas numericamente para um fluxo triangular com $\varepsilon_i = \pm 0.5^\circ\text{C}$ (teste 3D).

As Figuras 5.25 e 5.26 apresentam os resultados do fluxo estimado a partir do uso independente de cada temperatura para os dois casos de fluxo considerando ruído.

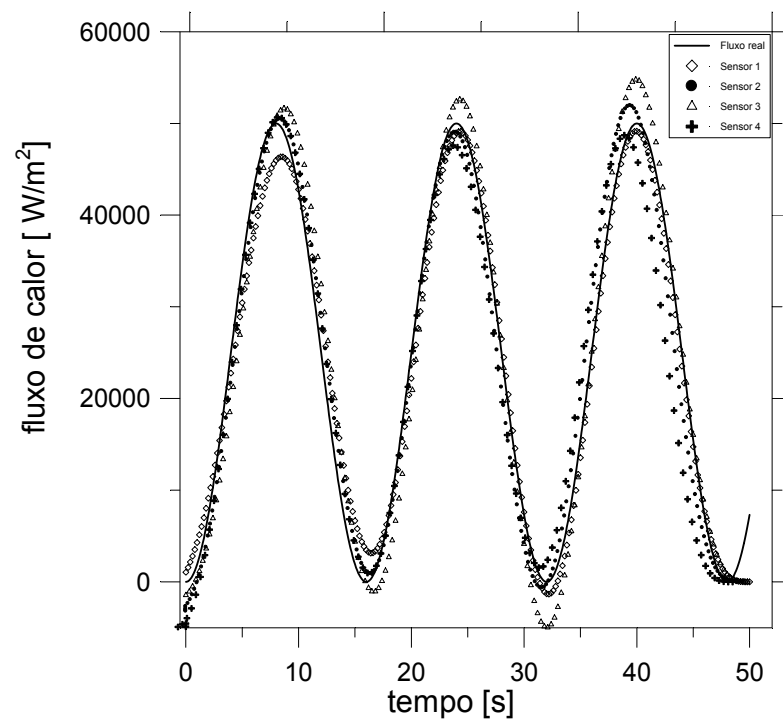


Figura 5.25. Fluxos estimados com $\varepsilon_i = \pm 0.5^\circ\text{C}$, fluxo senoidal (teste 3D)

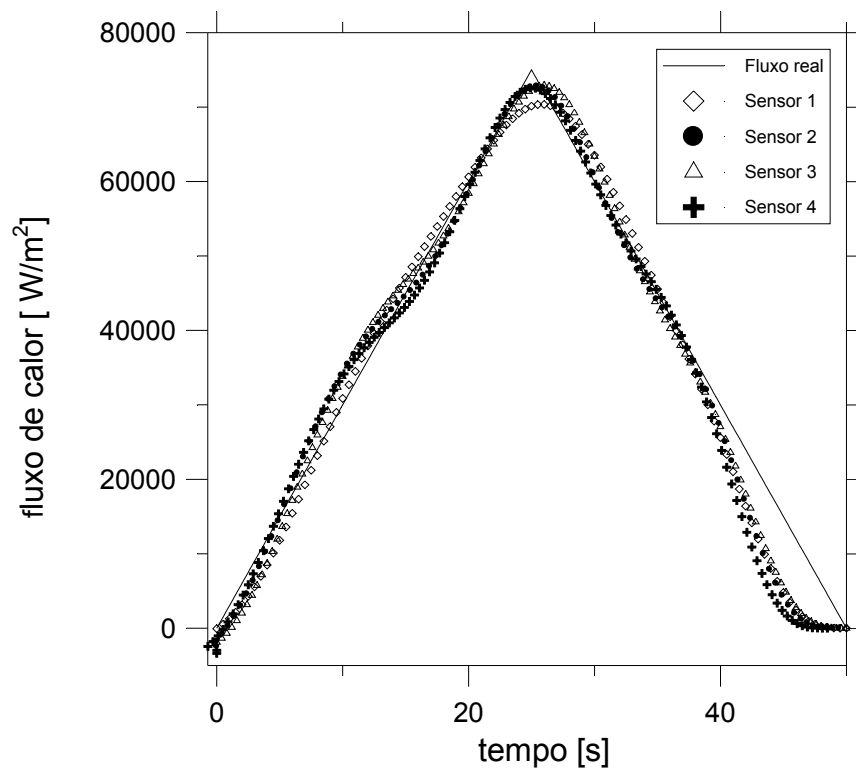


Figura 5.26. Fluxos estimados com $\varepsilon_i = \pm 0.5$ °C fluxo triangular (teste 3D)

Observa-se nas Fig. 5.25 e 5.26 que as estimativas de fluxo de calor apresentam boa concordância com os fluxos impostos. Como esperado, em ambos os casos quanto mais próximo da fonte de calor melhor são os resultados. Da Fig. 5.25 conclui-se ainda que mesmo sensores afastados e com alto nível de ruído podem recuperar satisfatoriamente o fluxo de calor imposto. Os resultados também são satisfatórios para o fluxo de calor triangular ocorrendo maiores desvios nos tempos relativos à inflexão do fluxo. Pode-se ainda considerar que o comportamento dos resultados em relação à posição dos sensores é pouco influenciado. Essa característica demonstra uma boa flexibilidade da técnica na abordagem de problemas reais com limitações de posicionamento de sensores.

CAPÍTULO VI

RESULTADOS EXPERIMENTAIS: APLICAÇÕES A MODELOS TÉRMICOS UNI E TRIDIMENSIONAIS

6.1 Introdução

Problemas inversos reais como, por exemplo, a obtenção de um fluxo térmico imposto a uma ferramenta de corte durante um processo de usinagem ou mesmo a determinação da temperatura na parede interna de uma câmara de combustão, apresentam uma restrição que é inerente a esse tipo de abordagem. Essa restrição reside na falta de conhecimento prévio da variável a ser estimada, necessária para validar o resultado obtido pela técnica de solução usada. Nesse sentido a técnica precisa ser testada e validada previamente. Parte dessas validações foi apresentada no Capítulo V, sendo complementadas neste capítulo com estimativas experimentais. O uso de dados experimentais reais fornece, assim, um bom indicativo quanto ao potencial de uso da técnica uma vez que testa não só o algoritmo de otimização, mas também sua interação com o seu respectivo modelo térmico.

Realizaram-se experimentos (1D e 3D) controlados em laboratório, nos quais foram medidos por meio de sensores térmicos (termopares e transdutores) a temperatura e o fluxo de calor em amostras metálicas. A partir dos perfis experimentais de temperatura para cada uma das situações estima-se o fluxo de calor. Obtêm-se estimativas do fluxo usando a técnica de observadores dinâmicos baseada em funções de Green e a técnica da função especificada seqüencial (Beck *et al.*, 1985). Os resultados de estimativas de fluxo de calor do método seqüencial são obtidos usando-se o software Inv3D (Carvalho, 2006). As estimativas obtidas pelas duas técnicas, são, então, comparadas ao fluxo térmico real medido pelo transdutor em cada uma das situações experimentadas.

6.2 Modelo térmico unidimensional

6.2.1. Bancada experimental

Realizou-se um experimento em condições controladas no qual foi usado uma amostra de cobre ($k=401 \text{ W/mK}$ e $\alpha= 117 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$) de dimensões $0.05 \times 0.05 \times 0.003 \text{ (m)}$, onde foram posicionados um termopar, um aquecedor elétrico e um transdutor de fluxo, os dois últimos com dimensões $0.05 \times 0.05 \text{ (m)}$ para garantir a condução de calor unidimensional.

Conectou-se o aquecedor elétrico a uma fonte de alimentação de corrente contínua (MCE) que por efeito Joule proporcionou a geração de calor. Posicionou-se o transdutor de fluxo entre o aquecedor e a amostra de cobre, de maneira que este medisse o fluxo térmico fornecido à amostra. Mediu-se o aumento da temperatura na amostra de cobre a partir de um termopar fixado na face oposta à face onde se posicionou o aquecedor e o transdutor. O termopar foi conectado a um sistema de aquisição de dados HP 75000 Series B com voltímetro E1326B comandado por PC. Os materiais usados na realização deste experimento são apresentados na Fig. 6.1.

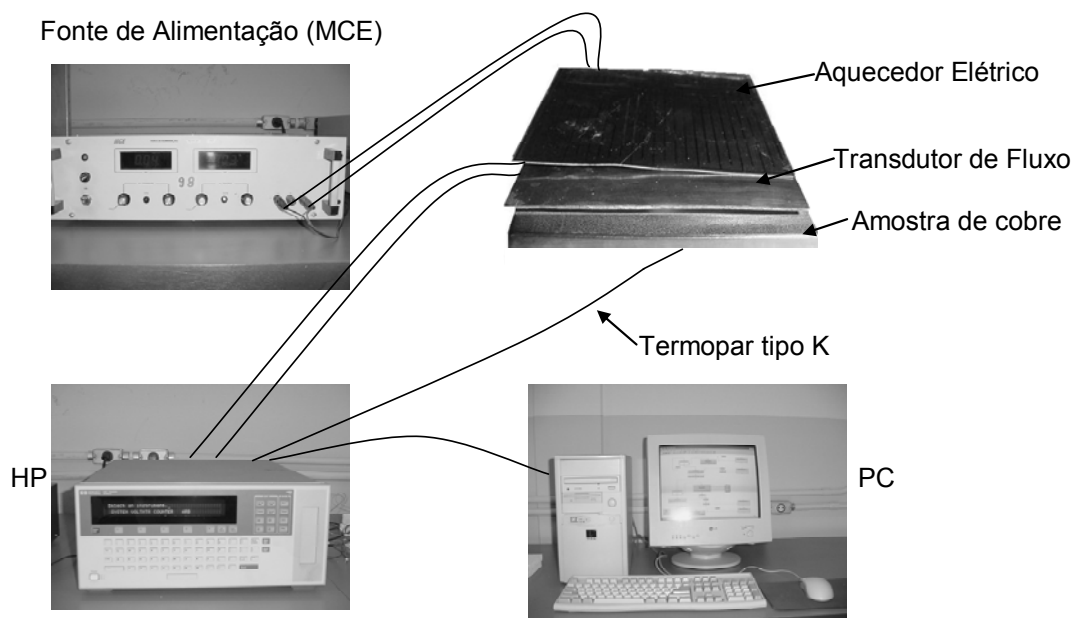


Figura 6.1. Aparato experimental contendo aquecedor, fonte de alimentação, transdutor, sistema de aquisição (HP), microcomputador (PC) e termopar fixados à amostra.

Para garantir um melhor contato térmico entre o aquecedor, o transdutor e a amostra usou-se pasta térmica entre estes elementos. Para assegurar a condição de isolamento e evitar perdas de calor que prejudicassem a condução unidimensional, esse conjunto de elementos foi cuidadosamente revestido por placas espessas de poliestireno expandido (isopor) em todas as direções. O termopar foi fixado à amostra por meio de descarga capacitiva cujo esquema é apresentado na Fig. 6.2. A partir desta técnica o termopar é soldado a amostra de cobre, minimizando problemas como o da resistência térmica de contato.

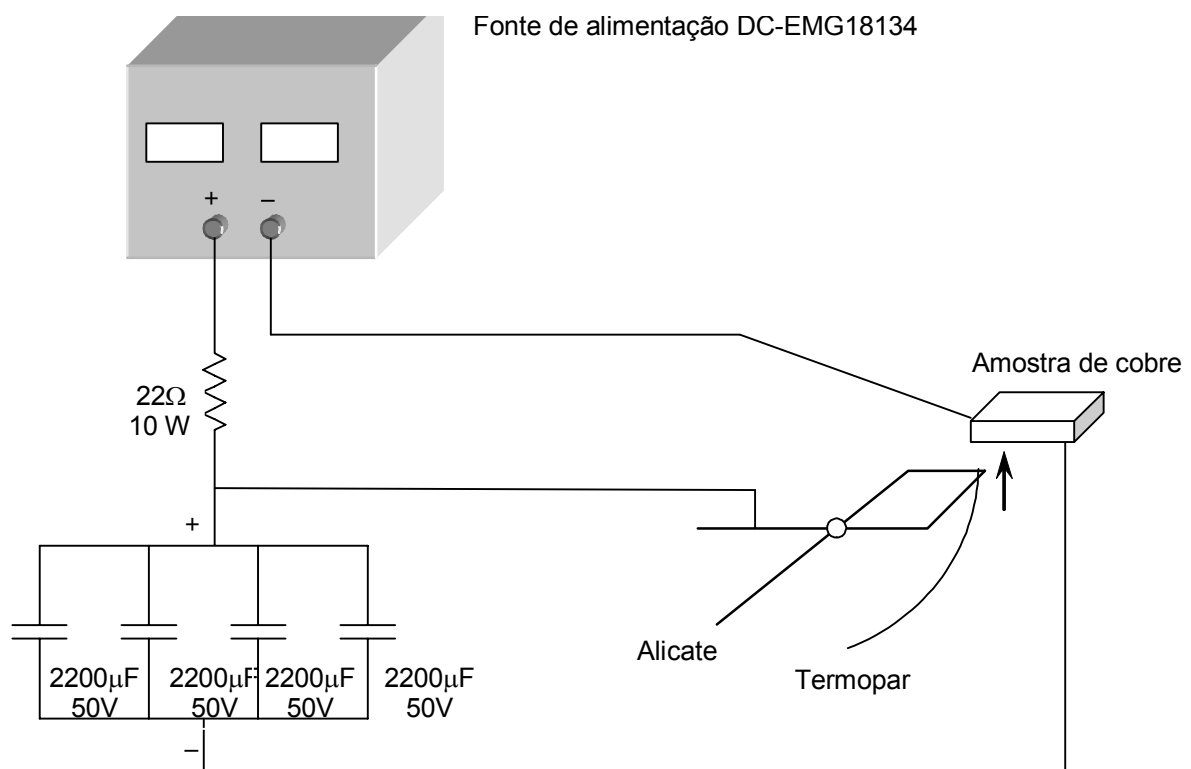


Figura 6.2. Esquema para a fixação dos termopares por descarga capacitiva na ferramenta.

A Figura 6.3 apresenta o fluxo térmico experimental entregue à amostra de cobre. O perfil de temperatura medido pelo termopar, mostrado na Fig. 6.4, será usado para estimar o fluxo.

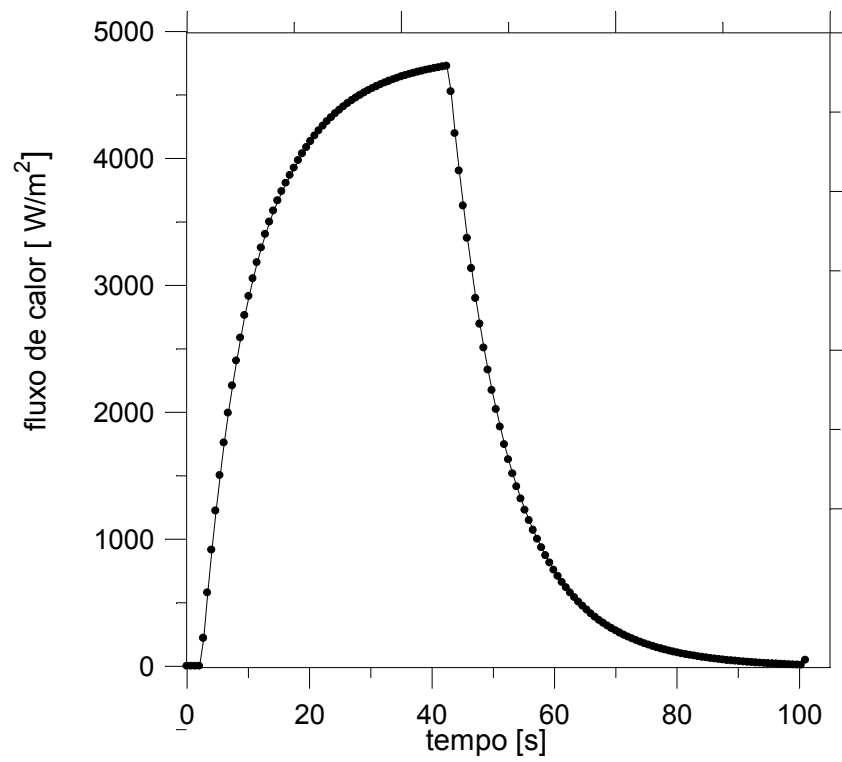


Figura 6.3. Fluxo térmico medido pelo transdutor.

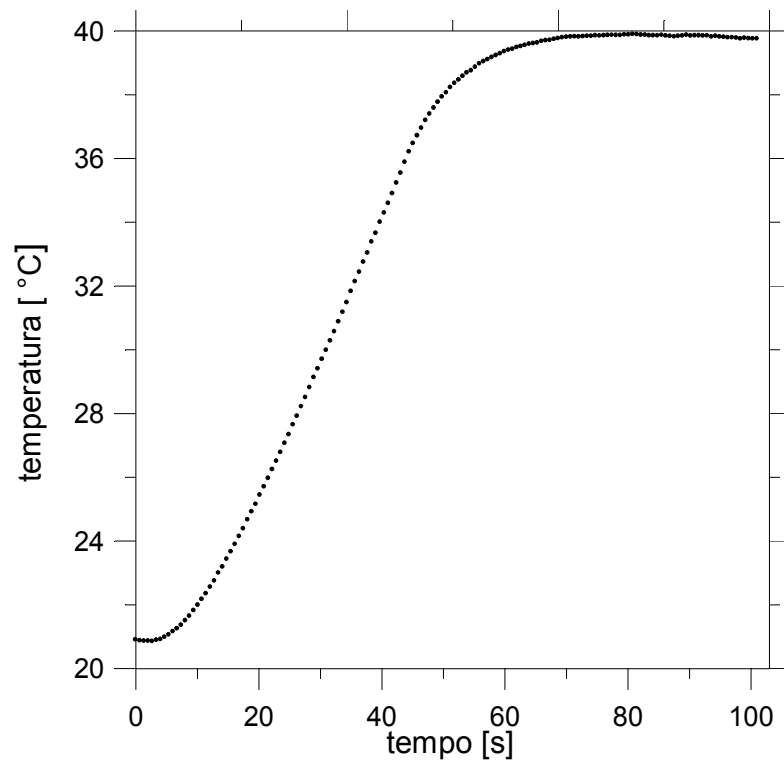


Figura 6.4. Evolução da temperatura experimental.

6.2.2. Resultados

Como já mencionado, estima-se o fluxo de calor a partir dos dados de temperatura coletados pelo sensor, mostrados na Fig. 6.4, usando a técnica proposta e a técnica da função especificada seqüencial (Beck *et al.*, 1997).

A Figura 6.5 apresenta uma comparação entre as duas estimativas e o fluxo real medido pelo transdutor de calor. Observa-se nessa figura que ambas as técnicas obtêm resultados satisfatórios, com o método da função especificada seqüencial apresentando uma estimativa um pouco mais aproximada na região de inflexão do fluxo de calor. Este resultado demonstra o potencial da técnica proposta uma vez que o método seqüencial pode ser considerado uma referência na solução de problemas térmicos unidimensionais.

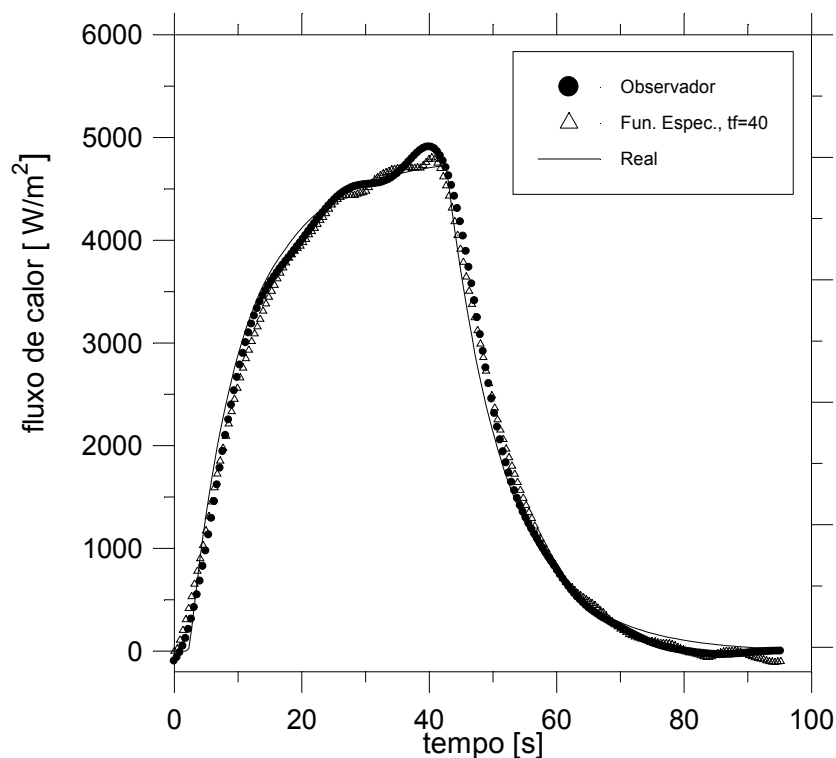


Figura 6.5. Comparação entre fluxos estimado e real.

Na Figura 6.6 apresenta-se o erro absoluto calculado a partir das duas estimativas (observador e função especificada) em relação ao fluxo real.

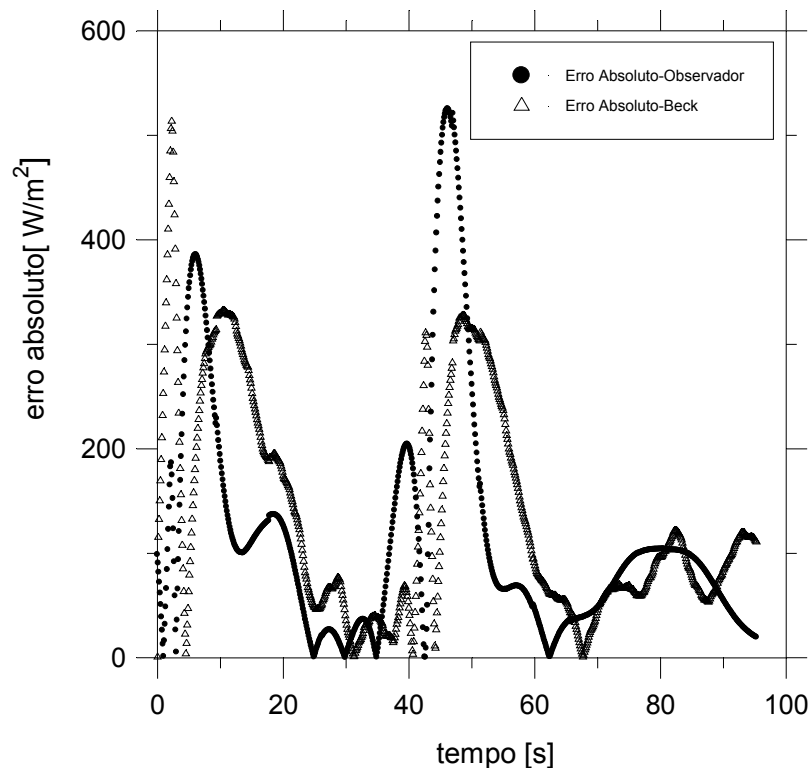


Figura 6.6. Erro absoluto entre o fluxo real e os fluxos de calor estimados

Observa-se que no ponto de inflexão, como dito antes, a estimativa obtida através do método da função especificada apresenta um erro de 6% e neste mesmo ponto o erro absoluto do fluxo real em relação à estimativa feita pelo método baseado em funções de Green e observadores dinâmicos é de 11.6%. Em contrapartida observa-se que a estimativa obtida pelo método de Beck *et al.* (1985) apresenta um erro de 11% no começo do aquecimento sendo que o método proposto, neste mesmo ponto, produz um erro de apenas 2.2%. No resfriamento observa-se o mesmo comportamento, ou seja, o método do observador mantém erros bem menores que o método da função especificada. Conclui-se a partir da Fig. 6.6 que nenhum dos algoritmos apresenta erros de tendência na solução e confirma-se o bom desempenho das técnicas de solução.

6.3. Modelo térmico tridimensional

6.3.1. Bancada experimental

Um segundo experimento foi realizado em condições controladas no qual foi usado uma ferramenta de corte de metal duro ($k=43.1 \text{ W/mK}$ e $\alpha= 14.8 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$) de dimensões $0.0127 \times 0.0127 \times 0.0047 \text{ (m)}$, onde foram posicionados um aquecedor elétrico, um transdutor de fluxo e dois termopares. Conectou-se o aquecedor elétrico a uma fonte de alimentação de corrente contínua (MCE) que por efeito Joule proporcionou a geração de calor. Posicionou-se o transdutor de fluxo entre o aquecedor e a ferramenta, de maneira que este medisse o fluxo térmico fornecido à ferramenta de corte. Mediu-se o aumento da temperatura da ferramenta a partir dos dois termopares conectados a um sistema de aquisição de dados HP 75000 Series B com voltímetro E1326B comandado por PC. Os materiais usados na realização deste experimento são apresentados na Fig. 6.7.

Usou-se pasta térmica nas junções entre aquecedor, transdutor e ferramenta garantindo um melhor contato térmico. Quanto aos termopares, estes foram fixados à ferramenta de corte por meio de descarga capacitiva conforme esquema apresentado na Fig. 6.2.

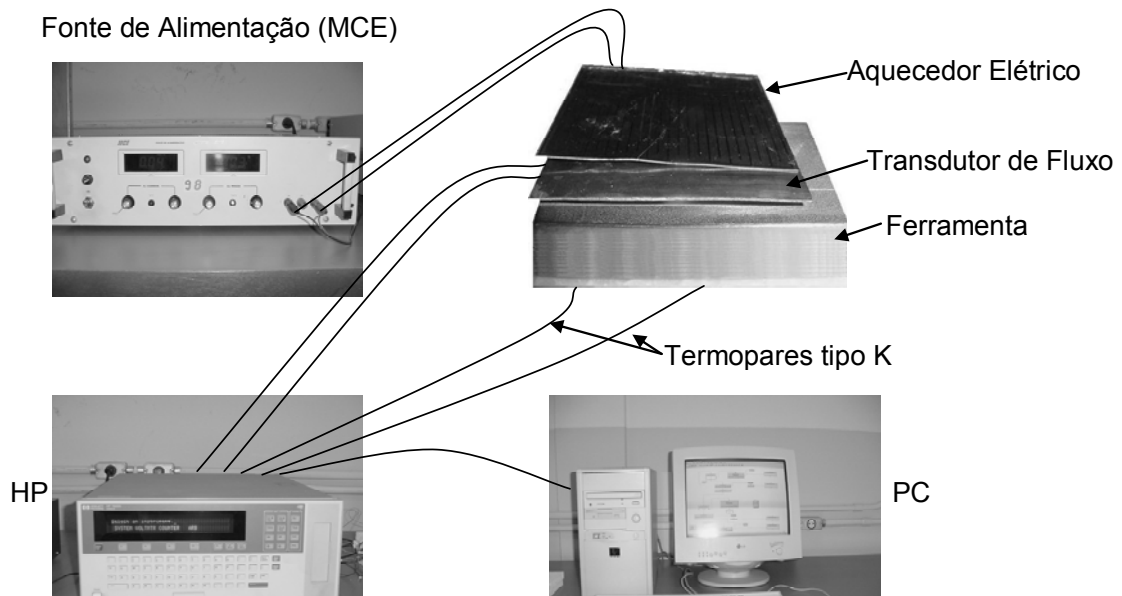


Figura 6.7. Aparato experimental contendo aquecedor, fonte de alimentação, transdutor, sistema de aquisição (HP), microcomputador (PC) e termopares fixados à ferramenta.

A Figura 6.8 apresenta o fluxo térmico experimental imposto à ferramenta de corte enquanto a Figs. 6.9 e 6.10 mostram, respectivamente, a posição dos termopares e as temperaturas medidas por ambos.

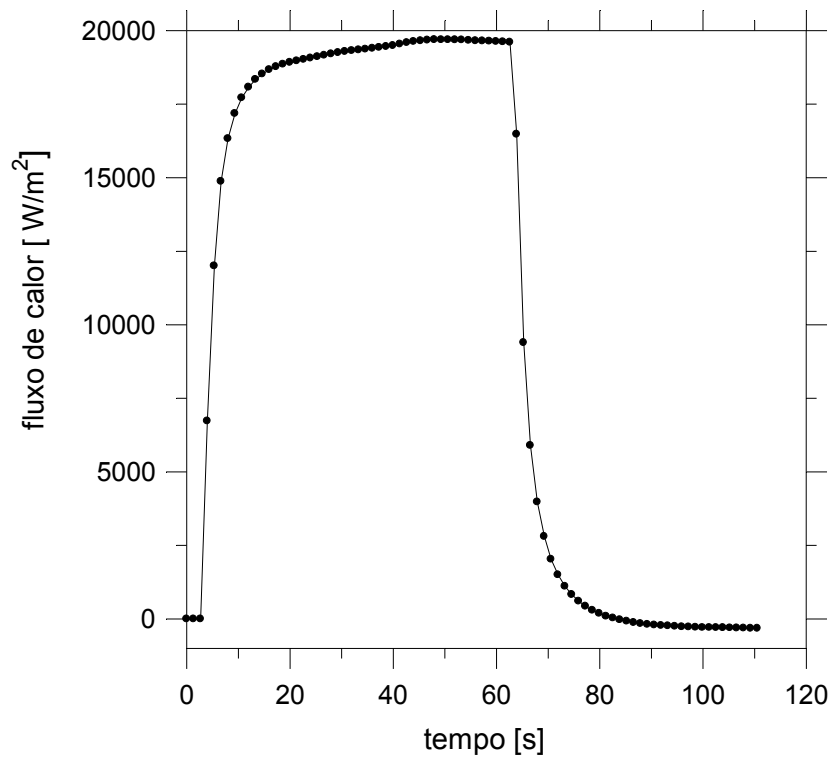


Figura 6.8. Fluxo térmico medido pelo transdutor.

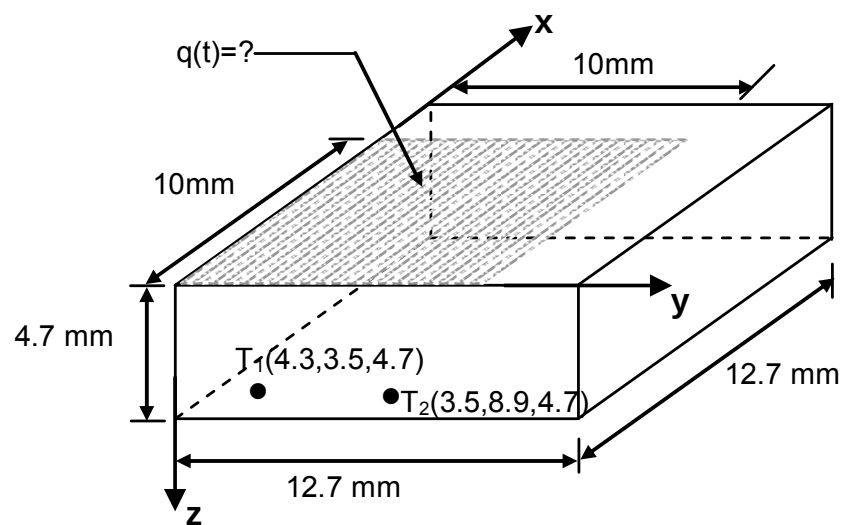


Figura 6.9. Esquema do posicionamento dos termopares.

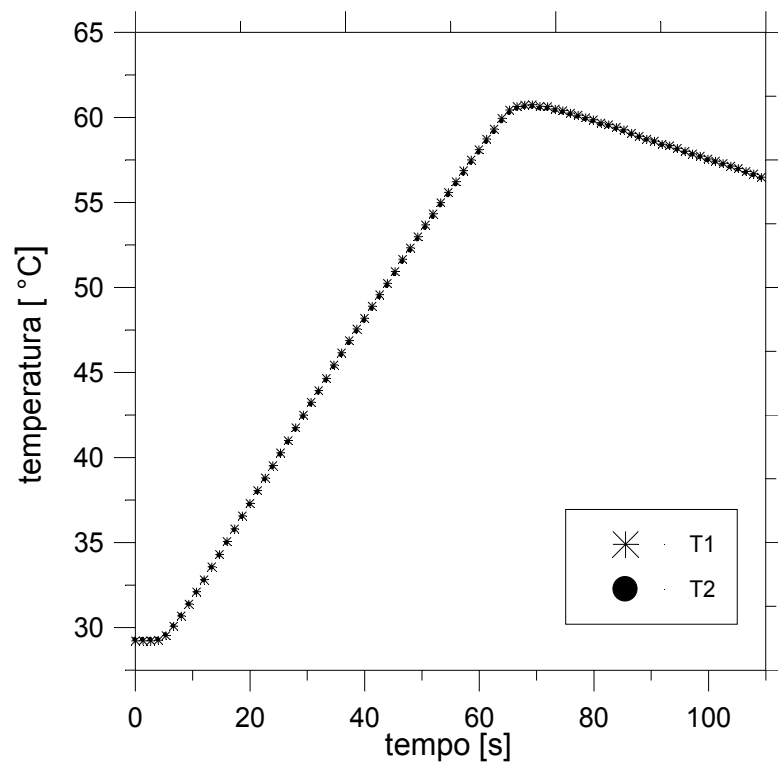


Figura 6.10. Evolução da temperatura experimental para os dois termopares.

6.3.2. Resultados estimados

Analogamente estima-se o fluxo de calor entregue a ferramenta usando as duas técnicas a partir dos dados de temperatura medidos, Fig. 6.9. Neste caso, duas estimativas do fluxo de calor são obtidas para cada perfil de temperatura experimental usando-se o método dos observadores dinâmicos. A terceira estimativa, com o método seqüencial, é realizada com os dois perfis de temperatura, simultaneamente.

As Figura 6.11 e 6.12 mostram, respectivamente, uma comparação entre as estimativas e o fluxo real e o erro absoluto considerando a estimativa obtida com o método do observador a partir do sensor 1 e a estimativa calculada pelo método da função especificada.

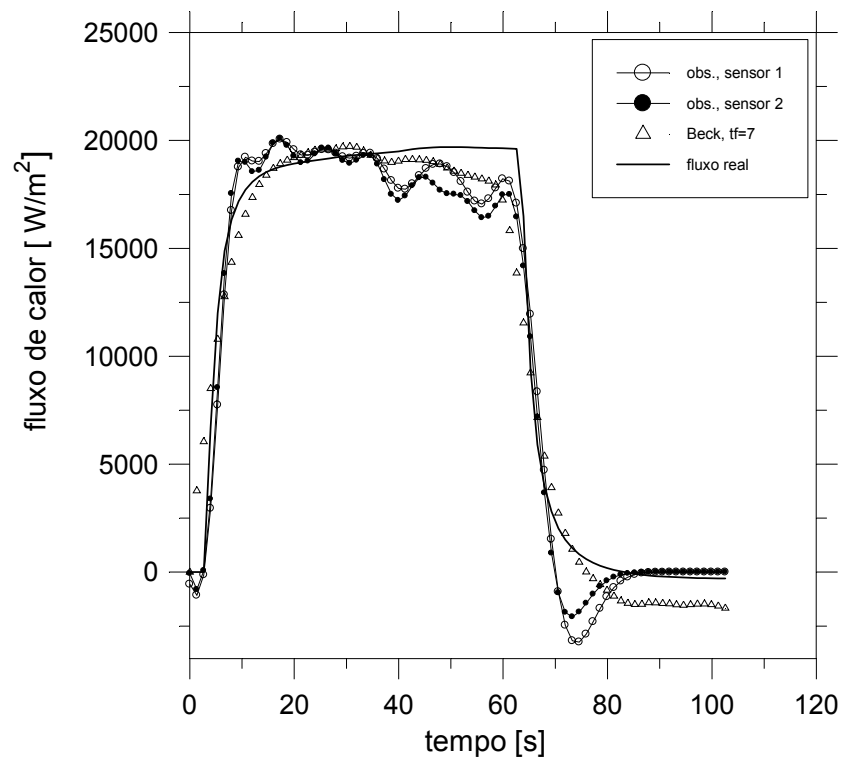


Figura 6.11. Comparação entre fluxos estimado e real.

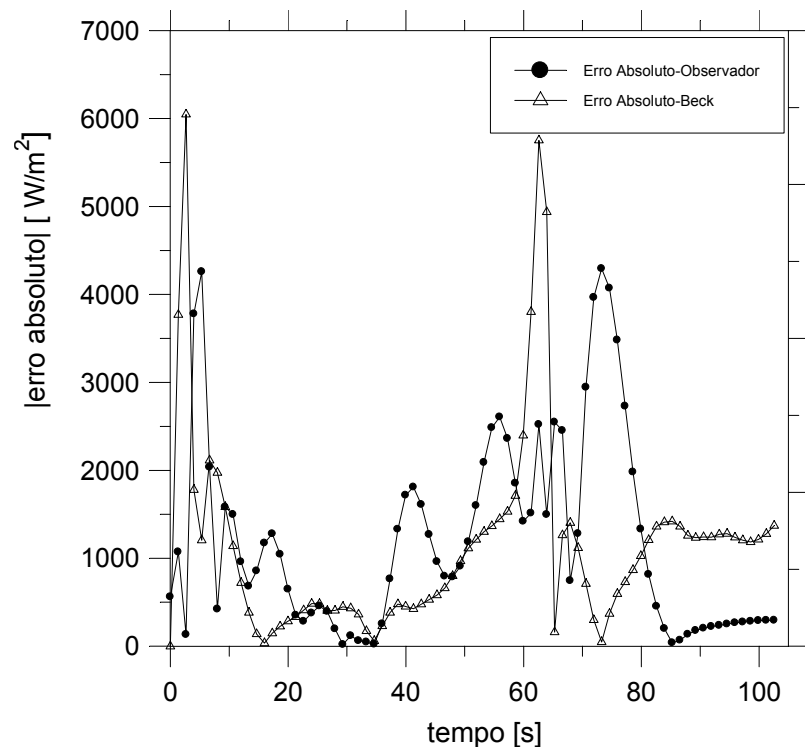


Figura 6.12. Erro absoluto entre os fluxos de calor real e estimados

Observa-se que tanto o método seqüencial com função especificada quanto a técnica proposta buscam o perfil do fluxo real entregue a ferramenta. Entretanto a estimativa obtida pelo método do observador no aquecimento apresenta um erro da ordem de 5.5%, sendo que o erro apresentado pelo método da função especificada nesta região alcança 33%. Novamente, na região de desaquecimento observa-se a mesma característica, ou seja, o método do observador apresenta um erro bem menor que o método da função especificada. Ambas as técnicas, entretanto, apresentam uma oscilação significativa na região do pico onde o fluxo é mais intenso, sendo que nesta região o método da função especificada apresenta erros absolutos menores que o método baseado em observadores dinâmicos. Por sua vez os observadores também apresentam resultados satisfatórios mantendo o erro absoluto dentro de uma faixa de 10%. A partir do comportamento das curvas de erro, mostradas na Fig. 6.12, percebe-se que nenhum dos algoritmos apresenta erros de tendência e confirma-se a competitividade entre os métodos.

O comportamento competitivo do método seqüencial em relação aos observadores dinâmicos pode ser justificado pelo baixo nível de ruído experimental presente nos dados de temperatura. Observou-se no Capítulo 5 que apenas um nível de ruído superior a uma flutuação de $\pm 0.5^{\circ}\text{C}$ na medição de temperatura prejudicaria o desempenho do método seqüencial. As temperaturas experimentais medidas com equipamentos de alta precisão e confiabilidade apresentam neste teste uma incerteza de medição da ordem de $\pm 0.1^{\circ}\text{C}$. Estes resultados validam assim o uso da técnica de observadores baseada em funções de Green mostrando seu potencial para a abordagem de modelos multidimensionais. Entretanto, algumas observações são necessárias.

O grande potencial da técnica reside na implementação simples e rápida de qualquer que seja o modelo térmico, uni, bi ou tridimensional, o seu baixo custo computacional e sua robustez relativa à presença de um alto nível ruídos e erros experimentais.

Embora ainda não tenha sido abordada neste trabalho, a possibilidade de extensão desta técnica para as estimativas de problemas térmicos com fluxos de calor transientes variando com a posição, talvez represente o seu grande potencial de uso. De fato a perspectiva do uso da técnica de observadores dinâmicos baseados em funções de Green na abordagem de problemas térmicos cujo fluxo de calor imposto varie com a posição se mostra bastante promissora e já se encontra em desenvolvimento.

CAPÍTULO VII

CONCLUSÕES

7.1. Considerações finais

Várias técnicas para a solução de problemas inversos podem ser encontradas na literatura. A maioria, entretanto, aplica-se a problemas unidimensionais. O uso direto dessas técnicas, em sua grande maioria, em problemas multidimensionais não é simples. Uma técnica aplicada inicialmente a problemas 1D e com grande potencial para a aplicação em problemas multidimensionais é o método baseado em observadores dinâmicos (Blum e Marquardt, 1997).

A técnica de Blum e Marquardt (1997) incorpora parâmetros de ajuste que variam dependendo do nível de ruído presente nos dados experimentais. O algoritmo, baseado em observadores dinâmicos, interpreta o problema inverso de condução de calor como um filtro passa-baixo das componentes do sinal de fluxo verdadeiro, enquanto rejeita as componentes de alta frequência evitando uma excessiva amplificação do efeito do ruído na estimação. Observa-se que a minimização do efeito do ruído é fundamental em problemas inversos uma vez que os erros de medição estão sempre presentes nos dados experimentais. Outra vantagem desse algoritmo é a facilidade de sua implementação.

Essa técnica de solução de problemas inversos, baseada em observadores dinâmicos, pode ser dividida em dois procedimentos distintos: i) obtenção da função transferência, G_H ; e; ii) obtenção dos estimadores G_Q e G_N e a implementação do algoritmo baseado em observadores.

Embora o procedimento para a obtenção da função transferência, G_H , descrito por Blum e Marquardt, (1997) tenha como grande vantagem a facilidade de obtenção via uso de pacotes matemáticos como o Matlab^R, seu uso torna-se um pouco restritivo caso o modelo térmico seja multidimensional devido ao tempo de processamento elevado.

Assim, um novo procedimento para a obtenção da função transferência de modelos condutores 3D transientes foi proposto. A proposta baseia-se na obtenção da função transferência através do uso de funções de Green e da definição de sistemas dinâmicos

equivalentes, tendo aplicação imediata em problemas multidimensionais. Este procedimento permite ainda a abordagem indistinta de um problema térmico uni, bi ou tridimensional, desde que as condições de contorno não ativas sejam homogêneas e o fluxo de calor desconhecido seja imposto em uma determinada região.

Realizaram-se comparações para o caso unidimensional, entre as funções de transferência obtidas para um condutor unidimensional, G_H , pelo processo proposto por Blum e Marquardt (1997) e pelo processo proposto neste trabalho. Usando a técnica baseada em funções de Green e observadores dinâmicos obtiveram-se também resultados para diferentes casos testes, abordando simulações de problemas uni, bi e tridimensionais, além de problemas reais 1D e 3D, avaliando diferentes tipos de fluxos de calor, tanto em forma quanto em intensidade. Além disso, comparações entre a técnica proposta e métodos de solução de problemas inversos como o método seqüencial com função específica ou técnicas de otimização como a seção áurea foram realizados.

Embora o uso de dados simulados não permita a verificação de todas as variáveis envolvidas, como por o exemplo o teste do modelo térmico, ela é interessante do ponto de vista da análise do potencial do estimador. Além das simulações, problemas inversos reais como, por exemplo, a obtenção de um fluxo térmico imposto a uma ferramenta de corte durante um processo de usinagem foram testados indiretamente com o uso de dados experimentais controlados em laboratório. Estes casos forneceram, por sua vez, um bom indicativo quanto ao potencial de uso da técnica. O uso de experimentos e modelos 3D testaram não só o algoritmo de otimização, mas também sua interação com o seu respectivo modelo térmico.

Detalhes do algoritmo tais como os parâmetros de ajuste, as características e comportamento do filtro escolhido e a relação entre as funções de transferência, do condutor, do ruído e do sinal, foram também apresentadas.

A técnica baseada em funções de Green e observadores dinâmicos busca a flexibilização do método clássico baseado em observadores, levando em consideração as características do modelo térmico e possibilitando a aplicação imediata em problemas de condução de calor com modelagem bi e tridimensional. Dentre as características da técnica desenvolvida cita-se que esta apresenta um baixo custo operacional, sendo robusta quanto à sensibilidade a ruídos presentes nas medições experimentais, conseguindo boas estimativas mesmo quando se trata de dados com alto índice de interferência. Além disso, a técnica apresenta um processo simples de implementação e é competitiva, se comparada às técnicas conhecidas de otimização do ponto de vista da obtenção de resultados.

7.2. Sugestões para trabalhos futuros

Como propostas a trabalho futuros seguem as seguintes sugestões:

- Extensão desta técnica para as estimativas de problemas térmicos com fluxos de calor transientes variando com a posição e com o tempo. Esta extensão representa de fato o grande potencial de uso dos observadores dinâmicos baseados em funções de Green.
- Desenvolvimento de modelos de função transferência que permita o uso simultâneo de vários sensores, aumentando assim a estabilidade do método.
- Desenvolvimento de funções de transferência baseadas em funções de Green a serem aplicadas em sistemas expostos a meios convectivos e/ou radiativos. Atualmente o procedimento proposto só pode ser aplicado em sistemas cujas condições de contorno não ativas sejam homogêneas e o fluxo de calor desconhecido seja imposto em somente uma determinada região.
- Estudo de sistemas dinâmicos não lineares e conseqüente incorporação ao algoritmo dos observadores. Aplicação da técnica a problemas reais com sistemas expostos a grandes variações de temperatura.
- Desenvolvimento de um procedimento de otimização para a obtenção de uma relação ótima dos parâmetros de ajuste.
- Extensão desta técnica para estimativas de propriedades termo físicas em problemas de identificação de parâmetros.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALIFANOV O. M. Solution of an inverse problem of heat conduction by iterations methods. **J. Eng. Phys.** v. 26, p. 471-476, 1974.

BECK J.V., BLACKWELL B., **Handbook of Numerical Heat Transfer**, N.Y., John Wiley e Sons Inc., New York, 1988.

BECK, J.V.; BLACKWELL, B. C. **Inverse Heat Conduction: Ill-posed Problems**. N. Y., Wiley-Interscience Publication, 1985. 308p.

BECK, J. V.; BLACKWELL, J. C. **Inverse Heat Conduction**. 2.ed., N.Y., John e Sons, 1985. 300p.

BEHBAHANI-NIA A., KOWSARY F. A dual reciprocity BE-based sequential function specification solution method for inverse heat conduction problems. **International Journal of Heat e Mass transfer**. v. 47, p. 1247-1255, 2004.

BENDAT J. S., PIERSON A. G. **Analysis e Measurement Procedures**, 2. ed., USA, Wiley-Interscience, 1986. 566p.

BLANC, G., RAYNAUD, M., E CHAU, T. H.. A Guide for the Use of the Function Specification Method for 2D Inverse Heat Conduction Problems. **Rev. Gén. Therm.** v. 37, p. 17-30, 1998.

BLUM, J. E MARQUARDT, W. An Optimal Solution to Inverse Heat Conduction Problems Based on Frequency-Domain Interpretation e Observers, **Numerical Heat Transfer**, parte B, v. 32, p. 453-478, 1997.

CARVALHO, S. R. Determinação do Campo de Temperatura em Ferramentas de Corte Durante um Processo de Usinagem por Torneamento . 2006. 151f. Tese de Doutorado- Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia-MG.

CARVALHO, S. R; ONG, T. H; GUIMARAES, G. A Mathematical e Computational Model of Furnaces for Continuous Steel Strip Processing. **Journal of Materials Processing Technology**, Irele, in press.2006.

COLAÇO M. J., ORLEE H. R. B., DULIKRAVICH G.S. Inverse e Optimization Problems in Heat Transfer. **Journal of the Braz. Soc. of Mech. Sci. e Eng.** v. XXVIII, n. 1, p. 1-24. jan-mar 2006

DOWDING, K. J. E BECK, J. V. A Sequential Gradient Method for the Inverse Heat Conduction Problem (IHCP). **Journal of Heat Transfer.** v.121, p. 300-306, may. 1999.

GONÇALVES, C. V.; VILARINHO, L. O. ; SCOTTI, A. ; GUIMARAES, G. Estimation of heat source e thermal efficiency in GTAW process by using inverse techniques. **Journal of Materials Processing Technology**, USA. v. 172, p. 42-51, 2006.

GOLDEMBER, D. E., **Genetic Algorithms in Search, Optimization, e Machine Learning**, MA, Addison Wesley Publishing Company, Inc. 1989.

GONÇALVES, C. V., SCOTTI A. E GUIMARÃES, G. Simulated Annealing Inverse Technique applied in Welding: A Theoretical e Experimental Approach, 4th International Conference on Inverse Problems in Engineering, 4, 2002, Rio de Janeiro, Brazil. **Proceedings of 4th International Conference on Inverse Problems in Engineering.**

GONÇALVES C. V., SILVA L. A., NETO A. S, RADE D, A., GUIMARÃES G. An Inverse Technique Applied To Natural Convection Over A Heated Vertical Plate, In: 34TH NATIONAL HEAT TRANSFER CONFERENCE, 34, 2000 Pittsburgh, Pennsylvania. **Proceedings of NHTC'00.**

GONÇALVES C. V., VILARINHO L.O., SCOTTI A. E GUIMARÃES G.. Estimation of Heat Source e Thermal Efficiency in GTAW Process by Using Inverse Techniques. **Journal of Materials Processing Technology** . v.172, p. 42–51, ago 2005

JARNY, Y., ÖZISIK, M. N. E BARDON, J. P. A General Optimization Method Using Adjoint Equation for Solving Multidimensional Inverse Heat Conduction. **International Journal of Heat e Mass Transfer**. v. 34, p. 2911-2919, 1991.

KIM, S. K. E DANIEL I. M. Solution to inverse heat conduction problem in nanoscale using sequential method. **Numerical heat transfer: part b: fundamentals**. v. 44, n. 5, p 439-456, nov 2003.

KYUNG YOUN KIM, BONG SEOK KIM, HO CHAN KIM, MIN CHAN KIM, KYUNG JIN LEE, BUM JIN CHUNG E SIN KIM. Inverse Estimation of Time-Dependent Boundary Heat Flux With an Adaptative Input Estimator. **Int. Comm. Heat Mass Transfer**. v. 30, n. 4, p. 475-484, 2003.

LIMA F. R. S. **Modelagem Tridimensional de Problemas Inversos em Condução de Calor: Aplicação em Processos de Usinagem**. 2001. 172 f. Tese de Doutorado - Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia.

LIMA, F. R S.; GUIMARAES, G. Desenvolvimento de Técnicas de Problemas Inversos Bidimensionais Em Condução de Calor. In: III CIDIM/97, 1997, Havana. **Anais do III CIDIM/97**.

LIMA, F. R S.; MACHADO, A. R., GUTTS, S. e GUIMARAES, G. Numerical e Experimental Simulation for Heat Flux e Cutting Temperature Estimation Using Three-Dimensional Inverse Heat Conduction Technique. **Inverse Problems In Engineering**. United States of America. v. 8, p. 553-577, 2000.

MARQUARDT, W. E AURACHER, H. An observer-based solution of heat conduction problems. **International Journal of Heat e Mass Transfer**. v. 33, p. 1545-1562, Jul 1989

MURIO, D. A., **The Molification Method e the Numerical Solution of Ill-Posed Problems**, New York ,John Wiley, 1993

OSMAN, A. M., DOWDING, K. J. E BECK, J. V. Numerical Solution of the General Two-Dimensional Inverse Conduction Problem (IHCP), **Journal of Heat Transfer**, v. 119, p. 38-45, 1997.

ÖZISIK, M. N. E ORLEE, H. R. B. **Inverse Heat Transfer**. New York, Taylor e Francis, 2000.

PARK H. M., JUNG W. S.. A Recursive Algorithm for Multidimensional Inverse Heat Conduction Problems by Means of Mode Reduction. **Chemical Engineering Science**. v.55, p. 5115-5124, Apr 2000.

PATANKAR, S.V., **Numerical Heat Transfer e Fluid Flow**. New York: Hemisphere Publishing Corporation, 1980. 197p.

PROAKIS, J. G., MAONOLAKIS, D. G. **Digital Signal Processing: principles, algorithms, e applications**, Prentice Hall 3ed, New Jersey, 1996. 968p.

RAUDENSKY, M., WOODBURY, K. A., KRAL, J. E BREZINA, T. Genetic Algorithm in Solution of Inverse Heat Conduction Problems, **Numerical Heat Transfer**. Part B, v. 28, p. 293-306, 1995.

RECH J., KUSIAK A. E BATTAGLIA J. L. Tribological e thermal functions of cutting tool coatings. **Surface e coatings technology**. v. 186, n. 3, p. 364-371, sep 2004.

SARAMAGO, S. F. P., ASSIS, E. G., E STEFFEN, V. *Simulated annealing*: Some applications in mechanical systems optimization, 20th Iberian Latin – American Congress on Computational Methods in Enginnering, 20, 1999, São Paulo, Brasil. **Proceedings of 20th Iberian Latin – American Congress on Computational Methods in Enginnering** (CD – ROM).

SCOTT, E. P. E BECK, J. V. Analysis of Order of the Sequential Regularization Solutions of Inverse Heat Conduction Problems, **Journal of Heat Transfer**. v. 111, p. 218-224, may 1989.

SHIH-MING LIN, CHA'O-KUANG CHEN, YUE-TZU YANG. A modified sequential approach for solving inverse heat conduction problems. **International Journal of Heat e Mass Transfer**. v. 47, p. 2669–2680, nov 2003

STOLZ, G. Numerical Solutions to an Inverse Problem of Heat Conduction for Simple for Simple Shapes. **Journal of Heat Transfer**. v. 82, p. 20-26, 1960.

SUNG - CHONG CHUNG. Temperature estimation in drilling process by using an observer. **International Journal of Machine Tools e Manufacture**. v. XX, p. 1-11, mar 2005.

TAHAR LOULOU, ELAINE P. SCOTT. Estimation of 3-Dimensional Heat Flux from Surface Temperature Measurements Using an Iterative Regularization Method. **Heat e Mass Transfer**. v. 39, p. 435-443, 2003.

TIKHONOV, A. N., E ARSENIN, **Solutions of Ill-Posed Problems**. Washington, V. H. Winston e Sons, 1977.

TUAN, P. -C, JI, C.-C, FONG, L.-W E HUANG W.-T. An Input Estimation Approach to On-line Two-Dimensional Inverse Heat Conduction Problems, **Numerical Heat Transfer**, Part B, Vol. 29, p. 345-363, 1996.

VEERPLAATS, G.N. **Numerical optimization techniques for engineering design**. N. Y. Mc Graw-Hill College, 1984.

XIANWU LING, H. P. CHERUKURI , R. G. KEANINI. A Modified Sequential Function Specification Finite Element-Based Method for Parabolic Inverse Heat Conduction Problems. **Comput Mech**. v. 36, p. 117-128, jan 2005.

XINGJIAN XUE. **Improvements on Heat Flux e Heat Conductance Estimation with Applications to Metal Castings**. 2003. 112f. A Thesis for the Degree of Master of Science in Mechanical Engineering - Mississippi State University, Mississippi.

WOEI-SHYONG LEEA, YANG-HSIUNG KOB, CHING-CHINA JI. A Study of an Inverse Method for the Estimation of Impulsive Heat Flux. **Journal of the Franklin Institute**. v. 337, p. 661-671, apr 2000.