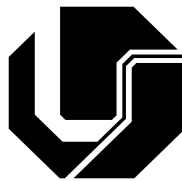


MANOEL MORAES JUNQUEIRA

**UMA CONTRIBUIÇÃO AO MÉTODO DE
SÍNTESE MODAL EXPERIMENTAL**



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

2006

MANOEL MORAES JUNQUEIRA

**UMA CONTRIBUIÇÃO AO MÉTODO DE
SÍNTESE MODAL EXPERIMENTAL**

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para a obtenção do título de **DOCTOR EM ENGENHARIA MECÂNICA**.

Área de concentração: Projetos e Sistemas Mecânicos.

Orientador: Prof. Dr. Cleudmar Araújo Amaral

UBERLÂNDIA – MG

2006

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

- J95c Junqueira, Manoel Moraes, 1957-
 Uma contribuição para o método de síntese modal experimental /
Manoel Moraes Junqueira. - 2006.
 243 p. : il.
- Orientador: Cleudmar Araújo Amaral.
- Tese (doutorado) – Universidade Federal de Uberlândia, Programa
de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.
 Inclui bibliografia.
1. Engenharia mecânica - Teses. 2. Mecânica dos sólidos - Teses.
3. Dinâmica - Teses. 3. Vibração - Teses. I. Amaral, Cleudmar Araújo.
II. Universidade Federal de Uberlândia. Programa de Pós-Graduação em
Engenharia Mecânica. III. Título.

CDU: 621

Aos meus pais Antônio e Batista
Aos meus irmãos Gilma e Antônio
À minha esposa Ângela
Aos meus filhos Gustavo e João Paulo

AGRADECIMENTOS

À Universidade Federal de Uberlândia e à Faculdade de Engenharia Mecânica pela oportunidade de realizar este trabalho.

JUNQUEIRA, M. M. **Uma Contribuição ao Método de Síntese Modal Experimental**. 2006. 243 p. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia.

Resumo

A determinação dos parâmetros dinâmicos de estruturas grandes ou complexas pode ser feita utilizando métodos de síntese modal subdividindo a estrutura completa em subestruturas. A aplicação deste método pode ser feita utilizando formulações analítica ou experimental. Em geral, autovalores e autovetores imprecisos podem ser identificados utilizando métodos experimentais de síntese modal devido a um processo deficiente de normalização das bases modais e a condição de baixa ortogonalidade das bases identificadas. Este trabalho contribui para a melhoria do processo de identificação dinâmica de estruturas grandes ou complexas utilizando o método síntese modal experimental. A formulação utiliza como base o método SMFR (Síntese Modal com Flexibilidades Residuais) e um método de identificação das matrizes físicas do sistema usando as FRF (Função de Resposta em Frequência) experimentais, denominado método ACS. Através dessas matrizes é possível melhorar as condições de ortogonalidade e de normalização das bases modais experimentais. Paralelamente, foram desenvolvidos dois novos métodos (CSME e CSMF) para a escolha automática das bases modais das subestruturas usadas no processo de síntese modal. As metodologias foram validadas através de exemplos de simulação numérica e modelos experimentais. Utilizando o método CSMF foi possível melhorar o processo de escolha modal, automatizando e minimizando a interferência do usuário no método de síntese modal. Através das metodologias analisadas para melhorar o processo de síntese modal experimental, recomenda-se utilizar o método iterativo quando forem utilizados dados experimentais com alto nível de ruído.

Palavras-chave: Normalização. Identificação. Síntese Modal Experimental. Modelagem Dinâmica. Vibração.

JUNQUEIRA, M. M. **A Contribution for the Experimental Modal Synthesis Method.** 2006. 243 p. D. Sc. Thesis, Federal University of Uberlândia, Uberlândia.

Abstract

The determination of the dynamic parameters of great or complex structures can be made using modal synthesis methods subdividing the complete structure in substructures. The employment of this method may be done by using analytical or experimental procedures. Generally speaking, poor eigenvalues and eigenvectors may be identified using experimental modal synthesis methods due to a normalization deficient process of the modal bases and to the low orthogonality condition of the identified bases. The contribution of this current work is about the improvement of the great or complex structures' dynamic identification process by using the experimental modal synthesis method. The basis of this research methodology is the SMFR (Modal Synthesis with Residual Flexibilities) method and an identification of the physical matrices of the system by using the experimental FRF (Frequency Response Function), called ACS (Simultaneous Curve Fitting) method. These matrices contribute to the improvement of the orthogonality conditions and normalization of the experimental modal bases. Simultaneously, two new methods (CSME and CSMF) for the automatic choice of the used substructures modal bases in the modal synthesis process have been developed. The validation procedures of these methodologies were developed by using examples of numerical simulation and experimental models. Using CSMF method, it was possible to improve the modal choice process, automatizing and minimizing the interference of the user in the modal synthesis method. In the case of experimental data with high level noise, the recommended is the iterative method.

Keyword: *Normalization, identification, experimental modal synthesis, dynamic modeling.*

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.01	– Representação esquemática de duas subestruturas A e B discretizadas e interligadas por uma interface comum-----	008
Figura 2.02	– Fluxograma para aplicação do método SMFR-----	027
Figura 3.01	– Associação entre as frequências usando qualquer número de modos mantidos em cada uma das duas subestruturas -----	033
Figura 3.02	– Associação entre as frequências usando um modo mantido em uma das duas subestruturas -----	034
Figura 3.03	– Associação entre as frequências usando o mesmo número de modos mantidos em cada uma das duas subestruturas-----	034
Figura 3.04	– Modelos massa-mola-amortecedor com nove GDL-----	036
Figura 3.05	– Modelos massa-mola-amortecedor com dezenove GDL-----	036
Figura 3.06	– Erro relativo da frequência e índice MAC: modelo discreto com nove GDL-----	037
Figura 3.07	– Erro relativo da frequência e índice MAC: modelo discreto com dezenove GDL-----	038
Figura 3.08	– Viga bi-engastada de alumínio modelada por elementos finitos-----	039
Figura 3.09	– Erro relativo da frequência e índice MAC: modelo de viga com nove GDL-----	041
Figura 3.10	– Erro relativo da frequência e índice MAC: modelo de viga com dezenove GDL-----	042
Figura 4.01	– Sistema discreto massa-mola-amortecedor com três GDL-----	054
Figura 4.02	– Normalização via massa modal unitária utilizando os resíduos, para um sistema amortecido -----	055
Figura 4.03	– Função de transferência-----	057
Figura 4.04	– Sistema discreto massa-mola com 3 graus de liberdade sem amortecimento-----	058
Figura 4.05	– Normalização via massa modal unitária utilizando os resíduos, para um sistema não amortecido -----	059
Figura 5.01	– Curva de frequência relativa gerada pela Eq. (5.01)-----	062
Figura 5.02	– Curva da Fig. 5.01 ajustada segundo uma gaussiana-----	063
Figura 5.03	– Fluxograma do algoritmo do Método de Chen implementado em código Matlab-----	070

Figura 5.04	– Sistema discreto massa-mola-amortecedor de quatro GDL-----	072
Figura 5.05	– Modos e FRF de simulação do modelo com quatro GDL(com 5% de ruído e uma contagem – Chen)-----	073
Figura 5.06	– Modos e FRF de simulação do modelo com quatro GDL(com 5% de ruído e quinze contagens – Chen)-----	074
Figura 5.07	– Modos e FRF de simulação do modelo com quatro GDL (sem ruído – Chen)-----	075
Figura 5.08	– Sistema discreto massa-mola-amortecedor com oito GDL-----	076
Figura 5.09	– Quatro modos e uma FRF de simulação do modelo com oito GDL (com 5% de ruído e uma contagem – Chen)-----	078
Figura 5.10	– Quatro m e uma FRF de simulação do modelo com oito GDL(com 5% de ruído e quinze contagens – Chen)-----	079
Figura 5.11	– Quatro m e uma FRF de simulação do modelo com oito GDL(sem ruído – Chen)-----	080
Figura 5.12	– Erro relativo da frequência e índice MAC identificado para o modelo discreto com oito GDL (Ruído de 5%-uma contagem – Chen)-----	081
Figura 5.13	– Modelo experimental utilizado para avaliar os métodos de identificação-----	086
Figura 5.14	– Montagem experimental para determinar as FRFs-----	086
Figura 5.15	– FRF do modelo experimental com três GDL (Chen)-----	087
Figura 5.16	– Modos e FRF de simulação do modelo com quatro GDL(com 5% de ruído e uma contagem – ACS)-----	098
Figura 5.17	– Modos e FRF de simulação do modelo com quatro GDL(com 5% de ruído e quinze contagens – ACS)-----	099
Figura 5.18	– Modos e FRF de simulação do modelo com quatro GDL(sem ruído – ACS)-----	100
Figura 5.19	– Quatro modos e uma FRF de simulação do modelo com oito GDL (com 5% de ruído e uma contagem – ACS)-----	103
Figura 5.20	– Quatro modos e uma FRF de simulação do modelo com oito GDL (com 5% de ruído e quinze contagens – ACS)-----	104
Figura 5.21	– Quatro modos e uma FRF de simulação do modelo com oito GDL (sem ruído – ACS)-----	105
Figura 5.22	– Erro relativo da frequência e índice MAC identificado para o modelo discreto com oito GDL (Ruído de 5%-uma contagem – ACS)-----	106
Figura 5.23	– FRF do modelo experimental com três GDL (ACS)-----	110
Figura 5.24	– Sistema discreto massa-mola-amortecedor de seis GDL-----	117

Figura 5.25	– Quatro modos e uma FRF de simulação do modelo com seis GDL (com 5% de ruído e uma contagem – Método Iterativo/ACS)-----	119
Figura 5.26	– Erro relativo da frequência e índice MAC identificado para o modelo discreto com seis GDL (Ruído de 5% – uma contagem – Método Iterativo/ACS)-----	120
Figura 5.27	– FRF do modelo experimental com três GDL (Método Iterativo/ACS).	124
Figura 6.01	– Viga bi-engastada de alumínio modelada por elementos finitos-----	130
Figura 6.02	– Os três primeiros modos originais das subestruturas da viga-----	132
Figura 6.03	– Os três primeiros modos originais e sintetizados do modelo da viga.	133
Figura 6.04 a – r	– Erro relativo da frequência e índice MAC do 2º modo sintetizado para o modelo de viga com vinte GDL (SMFR – sem ruído)-----	134
Figura 6.05	– Sistema discreto massa-mola-amortecedor com oito GDL-----	143
Figura 6.06	– Modos originais e sintetizados de um modelo discreto com oito GDL (sem ruído)-----	149
Figura 6.07	– Modos originais e sintetizados de um modelo discreto com oito GDL (com ruído de 5% e uma contagem)-----	150
Figura 6.08	– Modos originais e sintetizados de um modelo discreto com oito GDL (com ruído de 5% e quinze contagem)-----	151
Figura 6.09 a – h	– Erro relativo da frequência e índice MAC para o modelo discreto com oito GDL (SMFR – sem ruído)-----	152
Figura 6.09 A – H	– Erro relativo da frequência e índice MAC para o modelo discreto com oito GDL (SMFR – com ruído de 5% e uma contagem)-----	152
Figura 6.10	– Modos originais e sintetizados de um modelo discreto com oito GDL usando dois modos em cada subestrutura: um mantido e outro não mantido-----	160
Figura 6.11	– Sistema discreto massa-mola-amortecedor com vinte GDL e quatro subestruturas-----	162
Figura 6.12	– Modos originais e sintetizados de um modelo discreto com vinte GDL-----	167
Figura 6.13	– Modos originais e sintetizados de um modelo discreto com vinte GDL-----	168
Figura 6.14 a – t	– Erro relativo da frequência e índice MAC para o modelo discreto com vinte GDL (SMFR – sem ruído)-----	169
Figura 6.14 A – T	– Erro relativo da frequência e índice MAC para o modelo discreto com vinte GDL (SMFR – com ruído de 5% e uma contagem)-----	169
Figura 7.01	– Esquema do modelo experimental analisado-----	190

Figura 7.02	– As duas subestruturas, desconectadas, do modelo experimental ----	191
Figura 7.03	– As duas subestruturas, conectadas, do modelo experimental -----	191
Figura 7.04	– Esquema do aparato experimental utilizado nas medidas das FRFs.	192
Figura 7.05	– Instrumentação e estrutura fixada à mesa inercial-----	192
Figura 7.06	– FRF experimental e dos modos ortogonalizados da subestrutura A-	196
Figura 7.07	– FRF experimental e dos modos ortogonalizados da subestrutura B-	196
Figura 7.08	– FRF experimental e dos modos ortogonalizados da estrutura completa-----	197
Figura 7.09	– FRFs do modelo experimental e sintetizado – MMD-----	199
Figura 7.10	– Modos do modelo experimental e sintetizado – MMD-----	199
Figura 7.11a	– Erro relativo da frequência e índice MAC do primeiro modo sintetizado – MMD-----	200
Figura 7.11b	– Erro relativo da frequência e índice MAC do segundo modo sintetizado – MMD-----	200
Figura 7.11c	– Erro relativo da frequência e índice MAC do terceiro modo sintetizado – MMD-----	201
Figura 7.11d	– Erro relativo da frequência e índice MAC do quarto modo sintetizado – MMD-----	201
Figura 7.11e	– Erro relativo da frequência e índice MAC do quinto modo sintetizado – MMD-----	202
Figura 7.12	– Escolha automática dos modos (CSMF – total de quatro modos mantidos)-----	203
Figura 7.13	– FRFs do modelo experimental e sintetizado (SMFR – quatro modos sintetizados)-----	204
Figura 7.14	– Modos do modelo experimental e sintetizado (SMFR – quatro modos sintetizados)-----	204
Figura 7.15a	– Erro relativo da frequência e índice MAC do primeiro modo sintetizado – SMFR-----	205
Figura 7.15b	– Erro relativo da frequência e índice MAC do segundo modo sintetizado – SMFR-----	205
Figura 7.15c	– Erro relativo da frequência e índice MAC do terceiro modo sintetizado – SMFR-----	206
Figura 7.15d	– Erro relativo da frequência e índice MAC do quarto modo sintetizado – SMFR-----	206
Figura 7.16	– Escolha automática dos modos (CSMF – total de três modos mantidos)-----	207

Figura 7.17	– FRFs do modelo experimental e sintetizado (SMFR – três modos sintetizados)-----	208
Figura 7.18	– Modos do modelo experimental e sintetizado (SMFR – três modos sintetizados)-----	208
Figura 7.19a	– Erro relativo da frequência e índice MAC do primeiro modo sintetizado – SMFR-----	209
Figura 7.19b	– Erro relativo da frequência e índice MAC do segundo modo sintetizado – SMFR-----	209
Figura 7.19c	– Erro relativo da frequência e índice MAC do terceiro modo sintetizado – SMFR-----	210
Figura 7.20	– Escolha automática dos modos (CSMF – total de dois modos mantidos)----	211
Figura 7.21a	– FRFs do modelo experimental e sintetizado (SMFR – dois modos sintetizados [classificados em 1 ^o])-----	212
Figura 7.21b	– FRFs do modelo experimental e sintetizado (SMFR – dois modos sintetizados [classificados em 2 ^o])-----	212
Figura 7.22a	– Modos do modelo experimental e sintetizado (SMFR – dois modos sintetizados [classificados em 1 ^o])-----	213
Figura 7.22b	– Modos do modelo experimental e sintetizado (SMFR – dois modos sintetizados [classificados em 2 ^o])-----	213
Figura 7.23a	– Erro relativo da frequência e índice MAC do segundo modo sintetizado – SMFR-----	214
Figura 7.23b	– Erro relativo da frequência e índice MAC do terceiro modo sintetizado – SMFR-----	214
Figura A.01	– Base de fixação do modelo experimental-----	239
Figura A.02	– Lâmina de aço inoxidável-----	239
Figura A.03	– Placas inferiores do modelo experimental-----	240
Figura A.04	– Placas superiores do modelo experimental-----	241
Figura A.05	– Conexão entre as duas subestruturas do modelo experimental-----	241
Figura A.06	– Suportes das placas inferiores do modelo experimental-----	242
Figura A.07	– Suporte das placas superiores do modelo experimental-----	243
Figura A.08	– Suporte de fixação das lâminas às placas do modelo experimental--	243
Figura A.19	– Placa de fixação das lâminas aos suportes da Fig. 7.08-----	243
Figura A.10	– Placa de fixação das lâminas aos suportes das Fig. 7.09-7.10-----	243

LISTA DE TABELAS

Tabela 4.01	– Autovalores e bases modais obtidas da solução do autoproblema---	056
Tabela 4.02	– Bases modais normalizadas-----	056
Tabela 4.03	– Matrizes de massa e identidade identificadas-----	056
Tabela 4.04	– Autovalores e bases modais obtidas da solução do autoproblema---	058
Tabela 4.05	– Bases modais normalizadas-----	059
Tabela 4.06	– Matrizes de massa e identidade identificadas via função de transferência-----	059
Tabela 5.01	– Frequências naturais amortecidas, originais e identificadas e índice MAC para o modelo discreto com quatro GDL (Ruído de 5%-uma contagem)-----	072
Tabela 5.02	– Fatores de amortecimento originais e identificados para o modelo discreto com quatro GDL (Ruído de 5%-uma contagem)-----	072
Tabela 5.03	– Matrizes de massa originais e identificadas para o modelo discreto com quatro GDL (Ruído de 5%-uma contagem)-----	076
Tabela 5.04	– Frequências naturais amortecidas originais e identificadas e índice MAC para o modelo discreto com oito GDL (Ruído de 5%-uma contagem)-----	077
Tabela 5.05	– Fatores de amortecimento originais e identificados para o modelo discreto com oito GDL (Ruído de 5%-uma contagem)-----	077
Tabela 5.06	– Matrizes de massa originais e identificadas para o modelo discreto com oito GDL (Ruído de 5%-uma contagem)-----	085
Tabela 5.07	– Valores originais e identificados de massa do modelo experimental-	087
Tabela 5.08	– Frequências naturais amortecidas originais e identificadas e índice MAC para o modelo discreto com quatro GDL (Ruído de 5%-uma contagem)-----	097
Tabela 5.09	– Fatores de amortecimento originais e identificados para o modelo discreto com quatro GDL (Ruído de 5%-uma contagem)-----	097
Tabela 5.10	– Matrizes de massa originais e identificadas para o modelo discreto com quatro GDL (Ruído de 5%-uma contagem)-----	101
Tabela 5.11	– Frequências naturais amortecidas originais e identificadas e índice MAC para o modelo discreto com oito GDL (Ruído de 5%-uma contagem)-----	102

Tabela 5.12	– Fatores de amortecimento originais e identificados para o modelo discreto com oito GDL (Ruído de 5%-uma contagem)-----	102
Tabela 5.13	– Matrizes de massa originais e identificadas para o modelo discreto com oito GDL (Ruído de 5%-uma contagem)-----	102
Tabela 5.14	– Valores originais e identificados de massa do modelo experimental-	113
Tabela 5.15	– Frequências naturais amortecidas originais e identificadas e índice MAC para o modelo discreto com seis GDL (Ruído de 5%-uma contagem)-----	118
Tabela 5.16	– Fatores de amortecimento originais e identificados para o modelo discreto com seis GDL (Ruído de 5%-uma contagem)-----	118
Tabela 5.17	– Matrizes de massa originais e identificadas para o modelo discreto com seis GDL (Ruído de 5%-uma contagem)-----	123
Tabela 5.18	– Valores originais e identificados de massa do modelo experimental-	127
Tabela 6.01	– Relação entre as frequências e modos da estrutura sintetizada e original-----	131
Tabela 6.02	– Frequências originais das subestruturas e estrutura completa do modelo discreto com oito GDL e três subestruturas-----	146
Tabela 6.03	– Frequências e índice MAC referente à primeira etapa da síntese de três subestruturas(SMFR sem ruído)-----	146
Tabela 6.04	– Frequências e índice MAC referente à segunda e última etapa da síntese de três subestruturas(SMFR sem ruído)-----	146
Tabela 6.05	– Frequências e índice MAC referente à primeira etapa da síntese de três subestruturas(SMFR com ruído de 5%-uma contagem)-----	146
Tabela 6.06	– Frequências e índice MAC referente à segunda e última etapa da síntese de três subestruturas(SMFR com ruído de 5%-uma contagem)-----	147
Tabela 6.07	– Frequências e índice MAC referente à primeira etapa da síntese de três subestruturas(SMFR com ruído de 5%-dez contagens)-----	147
Tabela 6.08	– Frequências e índice MAC referente à segunda e última etapa da síntese de três subestruturas (SMFR com ruído de 5%-dez contagens)-----	147
Tabela 6.09	– Frequências e índice MAC referente à síntese de três subestruturas (MMD sem ruído)-----	147
Tabela 6.10	– Frequências e índice MAC referente à síntese de três subestruturas (MMD com ruído de 5%-uma contagem)-----	148
Tabela 6.11	– Frequências e índice MAC referente à síntese de três subestruturas	

	(MMD com ruído de 5%-dez contagens)-----	148
Tabela 6.12	– Freqüências e índice MAC referente à segunda e última etapa da síntese de três subestruturas usando os dois primeiros modos de cada subestrutura (SMFR sem ruído)-----	148
Tabela 6.13	– Freqüências e índice MAC referente à segunda e última etapa da síntese de três subestruturas usando os dois últimos modos de cada subestrutura (SMFR sem ruído)-----	148
Tabela 6.14	– Freqüências originais das subestruturas e estrutura completa do modelo discreto com vinte GDL e quatro subestruturas representado pela Fig. 5.08-----	162
Tabela 6.15	– Freqüências e índice MAC referente à primeira etapa da síntese de quatro subestruturas(SMFR sem ruído)-----	163
Tabela 6.16	– Freqüências e índice MAC referente à segunda etapa da síntese de quatro subestruturas(SMFR sem ruído)-----	164
Tabela 6.17	– Freqüências e índice MAC referente à terceira e última etapa da síntese de quatro subestruturas(SMFR sem ruído)-----	164
Tabela 6.18	– Freqüências e índice MAC referente à primeira etapa da síntese de quatro subestruturas(SMFR com ruído de 5%-uma contagem)-----	165
Tabela 6.19	– Freqüências e índice MAC referente à segunda etapa da síntese de quatro subestruturas(SMFR com ruído de 5%-uma contagem)-----	165
Tabela 6.20	– Freqüências e índice MAC referente à terceira e última etapa da síntese de quatro subestruturas(SMFR com ruído de 5%-uma contagem)-----	165
Tabela 6.21	– Freqüências e índice MAC referente à síntese de quatro subestruturas (MMD sem ruído)-----	166
Tabela 6.22	– Freqüências e índice MAC referente à síntese de quatro subestruturas (MMD com ruído de 5%-uma contagem)-----	166
Tabela 7.01	– Matrizes físicas da subestrutura A-----	195
Tabela 7.02	– Matrizes físicas da subestrutura B-----	195
Tabela 7.03	– Matrizes físicas da estrutura completa-----	195
Tabela 7.04	– Erro relativo e índice MAC referente à síntese do modelo experimental (MMD)-----	198
Tabela 7.05	– Erro relativo e índice MAC referente à síntese do modelo experimental pelo método SMFR com dois modos mantidos em cada subestrutura-----	203
Tabela 7.06	– Erro relativo e índice MAC referente à síntese do modelo	

	experimental pelo método SMFR com dois modos mantidos em uma subestrutura e um na outra-----	207
Tabela 7.07a	– Erro relativo e índice MAC referente à síntese do modelo experimental pelo método SMFR com um modo mantido em cada subestrutura (classificado em 1 ^o)-----	211
Tabela 7.07b	– Erro relativo e índice MAC referente à síntese do modelo experimental pelo método SMFR com um modo mantido em cada subestrutura (classificado em 2 ^o)-----	211

SIMBOLOGIA

Letras latinas:

$[A]$	Matrizes dinâmicas de estado
$[\bar{A}]$	Matriz auxiliar
A_k	Constante de escalonamento
$[B]$	Matrizes dinâmicas de estado
	Inversa da função de resposta em frequência
$[\bar{B}]$	Matriz auxiliar
c_{ij}	Termos de amortecimento
$\{c\}$	Vetor solução da matriz de amortecimento
$[C_{ld}]$	Matriz de restrições linearmente dependentes
$[C_{li}]$	Matriz de restrições linearmente independentes
$[C]$	Matriz de amortecimento do sistema
$[\hat{D}]$	Matriz auxiliar
$\{e\}$	Matriz coluna auxiliar
E	Energia dos modos
$\bar{E}$	Matriz de autovetores
	Matriz auxiliar
f	Vetor de forças externas do sistema
f'	Vetor de forças externas de ordem dobrada do sistema amortecido
$\bar{f}$	Vetor de forças externas do sistema amortecido
F	Vetor de forças
g	Termos de flexibilidade
g_i	i-ésimo vetor linha da matriz transformação
G	Matriz transformação
	Matriz de flexibilidade
G_g	Matriz de flexibilidade elástica

G_d	Matriz de flexibilidade residual
h_i^N	i-ésimo vetor linha da FRF normal
H	Função de resposta em frequência
H^N	Função de resposta em frequência normal
H_s	Função de resposta em frequência simulado com ruído
k	Termos de rigidez
K	Matriz de rigidez do sistema
$\hat{K}$	Rigidez modal sintetizada do sistema amortecido
m	Termos de massa
	Número de modos mantidos nas subestruturas
M	Matriz de massa do sistema
$\hat{M}$	Massa modal sintetizada do sistema amortecido
$\hat{p}$	Coordenadas generalizadas reduzidas
q	Coordenadas modais do sistema não amortecido
	Matriz coluna auxiliar
$\overline{Q}$	Matriz auxiliar
r	Matriz de resíduos para o k-ésimo modo
	Ruído gaussiano
R	Matriz auxiliar
$\overline{R}$	Matriz de restrições do sistema amortecido
	Matriz auxiliar
s	Vetor solução das matrizes de massa e rigidez
S	Soma das diferenças relativas das frequências que define a classificação dos modos
	Matriz auxiliar
$\overline{S}$	Matriz de compatibilidades do sistema amortecido
u	Coordenadas físicas
V	Matriz auxiliar
$\hat{V}$	Matriz auxiliar
$\overline{V}$	Matriz auxiliar
X	Vetor de deslocamento resultante
y	Coordenadas físicas de ordem dobrada do sistema não amortecido

Letras gregas:

$\hat{\alpha}$	Rigidez modal relativa ao superconjunto modal do sistema amortecido
α_{jj}	Rigidez modal relativa os modos de flexibilidade residual do sistema não amortecido
$\hat{\alpha}_{jj}$	Rigidez modal relativa os modos de flexibilidade residual do sistema amortecido
$\hat{\beta}$	Massa modal relativa ao superconjunto modal do sistema amortecido
β_{jj}	Massa modal relativa os modos de flexibilidade residual do sistema não amortecido
$\hat{\beta}_{jj}$	Massa modal relativa os modos de flexibilidade residual do sistema amortecido
$\hat{\Gamma}$	Rigidez modal das subestruturas conectadas do sistema amortecido
δ_a	Modos de elásticos de alívio de inércia
δ_{nj}	Modos de flexibilidade residual do sistema não amortecido
$\hat{\delta}_{nj}$	Modos de flexibilidade residual do sistema amortecido
$\hat{\Delta}$	Massa modal das subestruturas conectadas do sistema amortecido
$\hat{\zeta}$	Autovetores sintetizados do sistema original para o caso amortecido
η	Coordenadas generalizadas do sistema amortecido
θ	Modos normais do sistema não amortecido
$\hat{\theta}$	Modos normais do sistema amortecido
λ	Autovalores do sistema amortecido original
Λ	Matriz de autovalores do sistema não amortecido
$\hat{\Lambda}$	Matriz de autovalores do sistema amortecido
ξ	Fator de amortecimento
σ	Coeficiente de amortecimento
$\hat{\Sigma}$	Autovetores sintetizados das subestruturas do sistema amortecido
$\hat{\phi}$	Matriz de modos normais do sistema amortecido
χ	Matriz de deslocamentos modais
Ψ	Superconjunto modal do sistema não amortecido
$\hat{\Psi}$	Superconjunto modal do sistema amortecido
ω	Frequência natural
Ω	Matriz rigidez do sistema amortecido

Superescritos:

- a Referente à subestrutura A
- b Referente à subestrutura B
- $*$ Conjugado de um número ou matriz complexa

Subscritos:

- d Modos não mantidos
- f Modos normais de interface fixa
- g Modos elásticos
- i Graus de liberdade internos
- j Graus de liberdade de junção
- l Modos de interface livre
- k Modos normais com interface carregada
- m Modos mantidos
- n Soma dos graus de liberdade de interface e internos
- p Coordenadas de corpo rígido em excesso
- r Modos estáticos de restrição
Modos de corpo rígido
Coordenadas suficientes para considerar movimento de corpo rígido
- s Modos de junção de interface fixa

Abreviações:

- ACS Ajuste de Curvas Simultâneas
- CEAM Critério de Eliminação Automática de Modos
- FRF Função de Resposta em Frequência
- CSME Critério de Seleção Modal pela Energia
- CSMF Critério de Seleção Modal pelas Frequências
- MAC Critério de confiança modal
- MEF Método de Elementos Finitos
- MMD Montagem das Matrizes Dinâmicas
- SMFR Síntese Modal que utiliza o superconjunto modal de Flexibilidade Residual

SUMÁRIO

CAPÍTULO I — Introdução	001
1.1 Revisão bibliográfica	003
CAPÍTULO II — Síntese Modal de Estruturas	007
2.1 Modelo dinâmico das subestruturas	007
2.2 Modos utilizados no método de síntese modal	009
a) Modos normais com interface fixa	010
b) Modos normais com interface livre	011
c) Modos normais com interface carregada	011
d) Modos de corpo rígido	012
e) Modos estáticos de restrição	012
f) Modos estáticos de junção - subestruturas fixas	013
g) Modos estáticos de junção - subestruturas livres	013
h) Modos de junção com alívio de inércia	014
i) Modos de flexibilidade residual	017
2.3 Método de Síntese Modal com Flexibilidade Residual (SMFR)	020
2.4 O Método da Montagem das Matrizes Dinâmicas (MMD)	028
CAPÍTULO III — Seleção Automática de Modos	029
3.1 Critério de seleção modal pela energia	030
3.2 Critério de seleção modal pelas frequências	032
3.3 Modelos de simulação numérica	035
3.3.1 Modelo de massa-mola-amortecedor	036
3.3.2 Modelo de uma viga bi-engastada	039
CAPÍTULO IV — Normalização das Bases Modais	045
4.1 Normalização das bases modais via resíduos modais	046
4.2 Simulações numéricas	054
a) Sistema discreto massa-mola-amortecedor com 3 graus de liberdade – caso amortecido	054
b) Sistema discreto massa-mola com 3 graus de liberdade – caso não amortecido	058
4.3 Novas abordagens para o problema	060

CAPÍTULO V — Identificação das Matrizes Físicas	061
5.1 Ruído gaussiano	061
5.2 Método de Chen	064
5.2.1 Estimativa da matriz de amortecimento	067
5.2.2 Estimativa das matrizes de massa e rigidez	068
5.2.3 Simulações numéricas	071
a) Sistema massa-mola-amortecedor com quatro graus de liberdade	071
b) Sistema massa-mola-amortecedor com oito graus de liberdade	076
5.2.4 Modelo experimental	085
5.3 Ajuste de curvas simultâneas	090
5.3.1 Simulações numéricas	096
a) Sistema massa-mola-amortecedor com quatro graus de liberdade	097
b) Sistema massa-mola-amortecedor com oito graus de liberdade	101
5.3.2 Modelo experimental	110
5.4 Método iterativo	114
5.4.1 Simulações numéricas	117
5.4.2 Modelo experimental	123
5.5 Avaliação dos métodos	127
CAPÍTULO VI — Simulações Numéricas	129
6.1 Modelo de elementos finitos de uma viga bi-engastada	129
6.2 Modelo discreto massa-mola-amortecedor (oito GDL)	143
6.3 Modelo numérico de vinte GDL com quatro subestruturas	161
CAPÍTULO VII — Modelagem Experimental	189
7.1 Modelo experimental	189
7.2 Resultados	194
7.2.1 Método MMD	198
7.2.2 Método SMFR	202
a) Quatro modos mantidos	202
b) Três modos mantidos	207
c) Dois modos mantidos	210
CAPÍTULO VIII — Discussão dos Resultados	215
8.1 Estimativa das matrizes físicas e normalização	215
8.2 Síntese modal	217
8.2.1 Escolha automática de modos	217
8.2.2 Resultados simulados	217
8.2.3 Resultados experimentais	219

CAPÍTULO IX — Conclusões	221
9.1 Sugestões	223
9.2 Trabalhos publicados	223
CAPÍTULO X — Referências Bibliográficas	225
ANEXO I — Programa em Matlab para a identificação das matrizes físicas pelo método de Chen	231
ANEXO II — Programa em Matlab para o método SMFR	235
ANEXO III — Desenhos das peças utilizadas na modelagem experimental	239

CAPÍTULO I

Introdução

O método de síntese modal baseia-se na divisão de uma estrutura em várias subestruturas menores cujas bases modais reduzidas são agrupadas para sintetizar a base modal do sistema original. O método é uma forma conveniente de modelagem dinâmica de grandes estruturas devido ao seu princípio de modulação. A independência das subestruturas possibilita análises individuais para a montagem da estrutura completa. A análise separada de cada componente facilita os testes e ajuste de modelos, além da redução do custo computacional.

As técnicas de síntese modal podem ser divididas em numéricas e experimentais. Devido às dificuldades inerentes de uma abordagem experimental, os pesquisadores normalmente utilizam um processo misto de análise. Geralmente, um aparato experimental utilizando sensores apropriados, condicionadores de sinais e analisador espectral é utilizado para obter os sinais no domínio do tempo ou no domínio da frequência da excitação e respostas em deslocamento, velocidade e aceleração em pontos discretos. Estes sinais servem para ajustar um modelo numérico de elementos finitos das subestruturas analisadas. Uma vez ajustado o modelo numérico este será utilizado para o processo de síntese subsequente. Esta abordagem é adequada quando os modelos não são tão grandes nem possuem uma geometria muito complexa. Nestes casos, a modelagem numérica demandaria muito tempo para a análise do problema. O processo seria muito mais rápido se os dados experimentais medidos pudessem ser analisados diretamente, para aplicação direta do processo de síntese modal.

No entanto, na técnica de síntese modal observa-se que, na maioria dos casos, a identificação dos parâmetros dinâmicos não é satisfatória se forem utilizados dados puramente experimentais. Isso ocorre devido a vários problemas:

- Erros no processo de ajustes feitos para a identificação dos parâmetros modais;
- Normalização deficiente das bases modais;
- Baixa condição de ortogonalidade da base modal identificada.

Além disso, outras deficiências dos métodos puramente experimentais estão na escolha das bases modais que serão mantidas no processo de síntese modal. Normalmente existem duas formas de se fazer esta escolha:

- O usuário alimenta as bases modais das subestruturas com uma grande quantidade de modos de forma a manter a máxima energia no sistema;
- O usuário conhece a estrutura analisada e dentro da faixa de interesse de análise define aqueles modos de maior energia e adequados para a análise.

Os dois processos de escolha citados anteriormente são deficientes. No primeiro se a estrutura for muito grande, o volume de dados finais pode ser muito grande e no segundo pode haver perda de informações importantes por conta de modos que não seriam incluídos. No trabalho de Araújo (1998) foi definido um novo processo de escolha automática de modos utilizando como critério o nível de energia do contorno comparado com o nível de energia interna das subestruturas. Este critério é baseado na norma euclidiana, (KREYSZIG, 1993), das bases modais internas e do contorno das subestruturas. O autor mostrou que o método é viável, porém nem sempre as melhores seleções são feitas, principalmente, com uma quantidade reduzida de modos mantidos para as subestruturas.

Neste trabalho a técnica de síntese modal experimental foi avaliada e diferentes metodologias foram utilizadas visando melhorar sua precisão e a sua aplicação direta em modelagens dinâmicas de estruturas. Para isto, utilizou-se o método de síntese modal SMFR (Síntese Modal com Flexibilidade Residual), (ARAÚJO, 1998). A técnica SMFR, utiliza o superconjunto modal de flexibilidade residual e pode ser utilizada tanto em modelagens numéricas como em modelagens experimentais. De acordo com esta técnica também é possível utilizar amortecimento geral nos modelos analisados. A utilização desta técnica é justificada uma vez que ela pode ser utilizada em todos os tipos de abordagem (numérica ou experimental) podendo ser aplicada em sistemas sem amortecimento ou com amortecimento geral.

O método SMFR foi implementado em ambiente Matlab e os seguintes aspectos foram abordados:

- Melhoria do processo de normalização das bases modais;
- Melhoria das condições de ortogonalidade das bases modais;
- Implementação de um novo processo de escolha das bases modais automatizando a quantidade e a qualidade dos modos utilizados no processo.

Em cada uma destas etapas diferentes metodologias de identificação das matrizes físicas e de síntese modal foram validadas através de exemplos de simulação numérica e/ou modelos experimentais. Finalmente, um modelo experimental foi utilizado para a modelagem

dinâmica utilizando a técnica de síntese modal proposta utilizando todas as análises efetuadas.

A seguir tem-se a estruturação deste trabalho:

- Capítulo I : Uma introdução comentando a importância do tema, as motivações, os objetivos do trabalho e a revisão bibliográfica.
- Capítulo II : Desenvolvimento da técnica de síntese modal (SMFR e MMD) para sistemas com amortecimento geral.
- Capítulo III : Seleção das bases modais. Neste capítulo foi proposta uma nova abordagem para a seleção das bases modais.
- Capítulo IV : Normalização das bases modais via resíduos modais.
- Capítulo V : Identificação das matrizes dinâmicas a partir de dados simulados e experimentais.
- Capítulo VI : Simulações Numéricas.
- Capítulo VII : Modelagem Experimental.
- Capítulo VIII : Discussão dos Resultados.
- Capítulo IX : Conclusões.
- Capítulo X: Referências Bibliográficas.

1.1 Revisão bibliográfica

O conceito de síntese modal foi introduzido por Hurty (1960 1965). Foram sintetizados os modos e as frequências naturais de uma estrutura completa a partir dos modos e das frequências naturais selecionados das subestruturas isoladas que compunham o sistema. Sua síntese foi realizada por uma técnica que resulta de aplicação de equações de compatibilidade de deslocamentos e equilíbrio de forças nas interfaces entre as subestruturas conectadas.

Mais tarde Craig e Bampton (1968) desenvolveram um método similar ao de Hurty simplificando o tratamento dos modos de corpo rígido das subestruturas. Com uma formulação mais compacta tornou-se possível o mesmo tratamento para todos os modos associados aos graus de liberdade de interface, facilitando a programação e diminuindo o tempo de processamento.

A partir de então esta técnica tem sido usada extensivamente na resolução de problemas relacionados a sistemas dinâmicos. Likins (1969) usou modos complexos para representar o movimento de hastes flexíveis de satélites.

Hasselman e Kaplan (1974) desenvolveram o método de Craig e Bampton (1968) usando modos complexos de subestruturas, aplicando duas transformações sucessivas nas equações de movimento. A formulação considera o amortecimento discreto. Pode ser generalizado para uma grande variedade de modelos mas é limitado no tratamento de compatibilidade entre alguns subsistemas.

Rubin (1975) empregou conjuntos incompletos usando modos normais de interface livre de mais baixa frequência. Adotou-se um critério conservativo para a seleção dos modos necessários onde foram empregados todos com frequência natural até 50% acima da frequência mais alta dentro da banda de interesse. O método pode representar as subestruturas a partir de dados de teste. Isso possibilita a representação de subestruturas reais a partir de dados experimentais.

Kana et al. (1975) sintetizaram o amortecimento de um sistema baseando-se em métodos de energia utilizando subestruturas visando a obtenção dos autovalores do sistema.

Jezequel (1979) empregou modos de interface fixa juntamente com modos de interface carregada, em uma análise de síntese com amortecimento não-proporcional.

Craig e Chung (1981) desenvolveram um procedimento generalizado de acoplamento de subestruturas na presença de amortecimento geral baseando-se no método de Goldman (1969).

Os modos de interface fixa e de flexibilidade residual foram implementados e tratados de uma forma conveniente no trabalho de Glasgow e Nelson (1980) enquanto que Bucher (1986) incorporou os modos de flexibilidade residual no desenvolvimento do método usando modos de interface livre.

Curnier (1983) apresentou uma formulação unificada usando modos de interface fixa, livre e de interface carregada.

Wu e Greif (1983) desenvolveram uma metodologia aplicando uma transformação sucessiva nas equações livres de amortecimento baseando-se em modos de interface livre e uma outra transformação sucessiva nas equações de estado baseando-se em modos de interface fixa amortecida.

Martim e Ghlaïm (1984) desenvolveram um método de síntese modal utilizando molas e amortecedores para conectar as subestruturas. Determinou-se a massa e o amortecimento interno assim como a rigidez e o amortecimento das conexões entre as subestruturas.

Soni (1984) desenvolveu um método de síntese modal com amortecimento geral, analisando casos de variação significativa da intensidade do amortecimento, validando este procedimento experimentalmente.

Hale e Bergman (1985) desenvolveram um método de síntese incluindo sistemas não conservativos compostos por subestruturas.

Gaul (1985) estudou a resposta de sistemas acoplados compostos de uma estrutura principal conectada a subestruturas leves com poucos graus de liberdade.

Lips e Vigneron (1984) desenvolveram um método para sintetizar os fatores de amortecimento e outros dados modais de um satélite, baseando-se nas influências das subestruturas.

Craig (1987) apresentou uma revisão do método de síntese modal no domínio do tempo e da frequência.

Li e Stühler (1989) propuseram um método acoplando as subestruturas através de molas e amortecedores, juntamente com um procedimento para correção modal de sistemas com amortecimento não proporcional.

Wang e Liou (1989) apresentou um trabalho onde identificou, com certa precisão, as FRFs de uma estrutura completa a partir das FRFs experimentais das subestruturas. O método foi proposto com atenção especial aos efeitos de juntas. Notou-se que a resposta dinâmica do sistema é bastante afetada pelas propriedades das conexões entre as subestruturas. Conforme os resultados experimentais o número de pontos de medidas em cada subestrutura deve ser, no mínimo, igual ao número de frequências naturais na banda de frequência de interesse.

Santos (1993) e Duarte (1994) utilizaram o método de Martim e Ghlaïm (1984) para estudar estruturas acopladas por juntas mecânicas em sistemas não lineares.

Craig (1995) fez uma revisão do método em várias aplicações de resposta dinâmica linear de estruturas. Baseou-se em controle de componentes de estruturas flexíveis e identificação de sistema experimental de subestruturas.

Balmès (1996) introduziu um método automatizado no tratamento das condições de acoplamento das subestruturas com interface contínua. Interface contínua implica em modelos mais complexos e maior custo computacional. O método apresentado por Balmès é computacionalmente robusto e eficiente mas não elimina os riscos de baixa precisão dos resultados nos modelos de subestruturas incompatíveis.

Kammer e Triller (1996) desenvolveram um método de seleção de modos baseado na força, velocidade e deslocamento nos graus de liberdade de interface.

Qiu; Ying; Yang (1997) apresentou uma nova técnica usando modos mistos. O método foi apresentado de forma simples e obteve resultados com boa precisão.

Morgan; Pierre; Hulbert (1998a, 1998b) apresentaram um método de síntese modal onde as matrizes dinâmicas das subestruturas são montadas para formar a estrutura

completa. As matrizes das subestruturas são identificadas através de um processo baseado no método de flexibilidade residual modificado.

Araújo (1998) utilizou uma metodologia generalizada de síntese modal que aborda simultaneamente os casos com amortecimento geral e sem amortecimento, através de um superconjunto modal de flexibilidade residual. Além disso, ele propôs uma técnica de síntese modal adaptada a um novo procedimento de remontagem das subestruturas e também condicionada a um critério de escolha automática de modos podendo facilitar a análise experimental.

Richardson (2000) apresentou um método de normalização via resíduos modais para sistemas com amortecimento geral.

Rixen (2004) apresentou um novo método de síntese modal baseado em modos de interface livre e de flexibilidade residual.

CAPÍTULO II

Síntese Modal de Estruturas

O método de síntese modal tem sido bastante utilizado em análises dinâmicas de estruturas grandes e/ou complexas. Na maioria dos métodos de síntese modal, geralmente, assume-se que os sistemas não são amortecidos ou possuem amortecimento proporcional. Esta suposição define equações de movimento desacopladas. Muitas aplicações em engenharia podem ser aproximadas por estruturas com amortecimento proporcional. No entanto, na maioria das vezes, em uma estrutura real, há amortecimento não-proporcional, principalmente em subestruturas acopladas através de molas e/ou amortecedores lineares, interação solo/estrutura de edifícios etc. Em problemas com amortecimento geral, a solução das equações é obtida utilizando álgebra complexa, onde geralmente o sistema é descrito em forma de equações de estado de primeira ordem, (EWINS, 1985).

2.1 Modelo dinâmico das subestruturas

Para que o conjunto de autovetores das subestruturas possa representar adequadamente o movimento do sistema sintetizado, não importando quais sejam as suas condições de contorno, os modos normais precisam ser enriquecidos com modos estáticos, que prevêm os movimentos devidos à vinculação dos contornos das subestruturas. A combinação destes modos define os superconjuntos modais, (CRAIG, 1981).

A forma do acoplamento das subestruturas e a base modal utilizada são os parâmetros mais importantes na metodologia. Baseado nisto, os métodos de síntese modal podem ser classificados como:

- métodos de interface fixa
- métodos de interface livre
- métodos híbridos.

A formulação do método de síntese modal é baseada em três pontos básicos:

- Divisão da estrutura global em uma série de subestruturas
- Obtenção do superconjunto modal (modos flexíveis mais modos estáticos) através

de uma formulação numérica ou experimental.

- Montagem e solução das equações globais de movimento segundo a conectividade imposta.

A Fig. 2.01 mostra uma representação esquemática das duas subestruturas A e B interligadas por uma interface comum no ponto 2, para formarem uma estrutura global. Estas subestruturas são discretizadas utilizando coordenadas físicas internas e de interface.

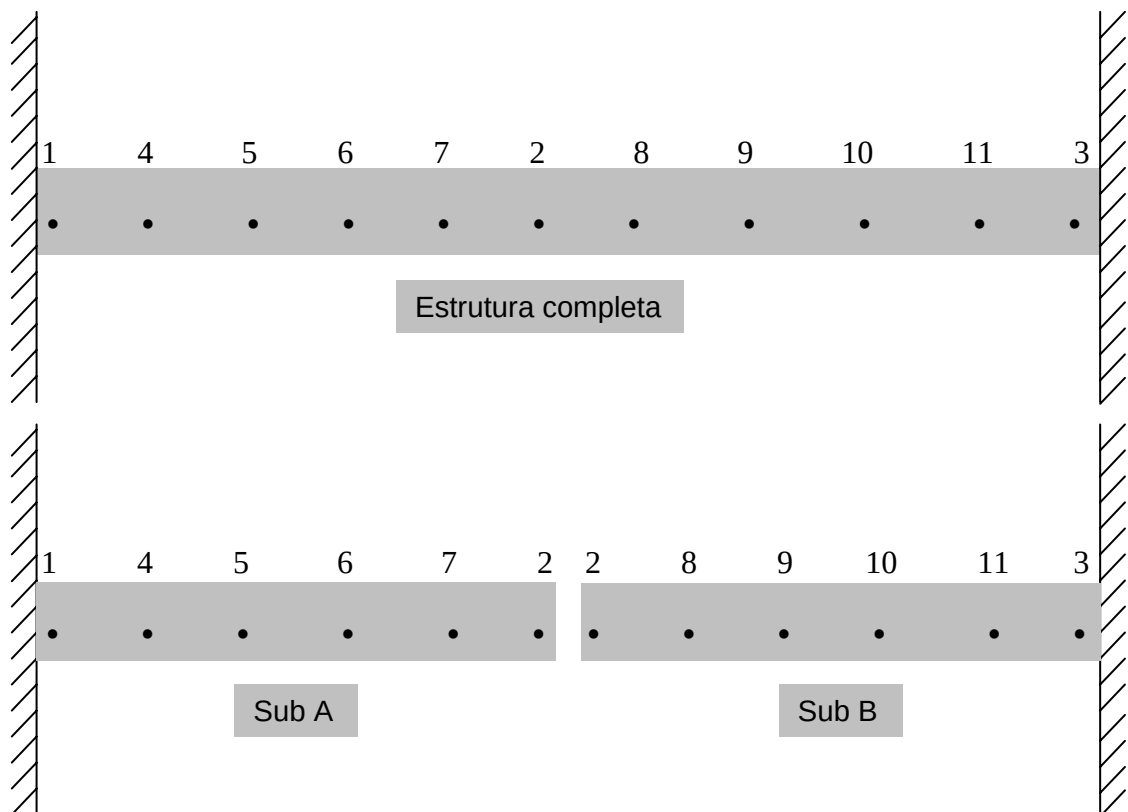


Figura 2.01 – Representação esquemática de duas subestruturas A e B discretizadas e interligadas por uma interface comum.

A equação de movimento para uma subestrutura genérica não amortecida pode ser escrita como:

$$[M] \{\ddot{u}\} + [K] \{u\} = \{f\} \quad (2.01)$$

ou de outra forma,

$$\begin{bmatrix} m_{ii} & m_{ij} \\ m_{ji} & m_{jj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_i \\ \ddot{u}_j \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} \\ k_{ji} & k_{jj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0_i \\ f_j \end{Bmatrix} \quad (2.02)$$

onde $[M]$ e $[K]$ são, respectivamente, as matrizes de massa e rigidez da subestrutura e $\{u\}$ é o vetor de deslocamentos devidos às forças atuantes $\{f\}$. Os índices i e j indicam os graus de liberdade internos e de junção das subestruturas, respectivamente.

Para que se possa desacoplar as equações de movimento e também obter o modelo via ensaio experimental, as coordenadas físicas $\{u\}$ são transformadas em coordenadas modais $\{q\}$, através da seguinte transformação linear:

$$\{u\} = [\Psi] \{q\} \quad (2.03)$$

onde $[\Psi]$ é a base de autovetores e $\{q\}$ são as coordenadas modais.

Aplicando a transformação linear da Eq.(2.03) na Eq.(2.01), e pré-multiplicando ambos os membros da equação pela base modal transposta $[\Psi]^t$ tem-se:

$$[M_q] \{\ddot{q}\} + [K_q] \{q\} = [\Psi]^t \{f\} \quad (2.04)$$

onde,

$$[M_q] = [\Psi]^t [M] [\Psi] \quad \text{e} \quad [K_q] = [\Psi]^t [K] [\Psi]$$

A Eq.(2.04) define o modelo dinâmico de uma subestrutura em coordenadas modais. Supõe-se que as colunas da matriz modal sejam funções de forma linearmente independentes, (EWINS, 1985), cuja combinação linear serve para representar adequadamente a configuração deformada da subestrutura. A metodologia de síntese modal mostrada baseia-se na utilização de diferentes combinações lineares dos modos das subestruturas para descrever uma configuração de deformação.

2.2 Modos utilizados no método de síntese modal

Para estruturas não amortecidas todos os modos das subestruturas são reais e podem ser classificados como:

1. Modos normais
 - a) interface fixa
 - b) interface livre
 - c) híbridos
 - d) interface carregada
2. Modos de Corpo Rígido
3. Modos de flexibilidade Residual
4. Modos Estáticos
 - a) restrição
 - b) junção com interface fixa
 - c) junção com interface livre
 - d) junção com alívio de inércia

Vários pesquisadores, (ALLEMANG; BROWN; SONI, 1987) observaram que o método de síntese modal obtém precisão nos resultados finais somente quando são utilizados superconjuntos modais. Estes superconjuntos, normalmente, utilizam algum tipo de modo normal juntamente com uma combinação de algum ou alguns outros tipos de modos, como definido anteriormente. A seguir, é descrita a forma de obtenção dos principais modos utilizados nos vários métodos de síntese modal.

a) Modos normais com interface fixa

Os modos normais com interface fixa são obtidos do auto-problema definido pela Eq.(2.02), utilizando apenas coordenadas físicas internas. Neste caso, as parcelas das coordenadas físicas de interface são consideradas nulas. Com isso, obtém-se uma formulação do tipo:

$$[m_{ii}]\{\ddot{u}_i\} + [k_{ii}]\{u_i\} = \{0\} \quad (2.05)$$

A solução da Eq.(2.05) será da forma:

$$([k_{ii}] - [\Lambda_{fi}^2][m_{ii}])[\theta_{fi}] = [0] \quad (2.06)$$

Com isso, os modos normais de interface fixa obtidos pela solução da Eq. (2.06) e normalizados pela matriz de massa, são dados por:

$$\left\{ \begin{array}{l} [\bar{\theta}_f] = [m_{ii}]^{-1/2} [\theta_{fi}] \\ [\theta_f] = \begin{bmatrix} \theta_{fi} \\ 0_{fi} \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (2.07)$$

b) Modos normais com interface livre

Os modos normais com interface livre são obtidos considerando as forças nulas na Eq.(2.02). Com isso, são utilizados todos os termos das matrizes de massa e rigidez, ou seja;

$$[M] \{\ddot{u}\} + [K] \{u\} = \{0\} \quad (2.08)$$

A solução da Eq.(2.08) será da forma:

$$([K] - [\Lambda_l^2][M])[\theta_l] = [0] \quad (2.09)$$

Com isso, os modos normais de interface livre obtidos pela solução da Eq.(2.09) e normalizados pela matriz de massa $[\bar{\theta}_l]$, são dados por:

$$\left\{ \begin{array}{l} [\bar{\theta}_l] = [M]^{-1/2} [\theta_l] \\ [\theta_l] = \begin{bmatrix} \theta_{li} \\ \theta_{lj} \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (2.10)$$

Na prática, somente é disponível um conjunto parcial de modos normais representativos do comportamento dinâmico da subestrutura. Os modos normais híbridos, de aplicação mais rara, são combinações das duas possibilidades mostradas anteriormente.

c) Modos normais com interface carregada

Estes modos são obtidos de um auto-problema modificado para a subestrutura, onde são introduzidas variações na matriz de massa nas coordenadas de interface, (BENFIELD,

1971). Este procedimento foi empregado por Jezequel (1979) na determinação experimental de modos normais. Analiticamente a solução desta equação é determinada por:

$$\left[\begin{pmatrix} k_{ii} & k_{ij} \\ k_{ji} & k_{jj} \end{pmatrix} + \Lambda_k^2 \begin{pmatrix} m_{ii} & m_{ij} \\ m_{ij} & m_{jj} + \Delta m_{jj} \end{pmatrix} \right] \begin{bmatrix} \phi_{ki} \\ \phi_{kj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Com isso, os modos normais de interface carregada normalizados são dados por:

$$[\phi_k] = \begin{bmatrix} \phi_{ki} \\ \phi_{kj} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

d) Modos de corpo rígido

Supondo que as coordenadas de interface sejam subdivididas em um conjunto de r coordenadas, suficientes para considerar o movimento de corpo rígido da subestrutura e um conjunto de p coordenadas em excesso, podem-se representar os modos de corpo rígido através da solução do problema:

$$\begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ip} & k_{ir} \\ k_{pi} & k_{pp} & k_{pr} \\ k_{ri} & k_{rp} & k_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{ri} \\ \theta_{rp} \\ I_{rr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Da equação anterior, tem-se que:

$$\begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ip} \\ k_{pi} & k_{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{ri} \\ \theta_{rp} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{ir} \\ k_{pr} \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Das Eq.(2.13) e (2.14) pode-se obter os modos de corpo rígido como:

$$[\theta_r] = \begin{bmatrix} \theta_{ri} \\ \theta_{rp} \\ I_{rr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - \begin{pmatrix} k_{ii} & k_{ip} \\ k_{pi} & k_{pp} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} k_{ir} \\ k_{pr} \end{pmatrix} \\ I_{rr} \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

e) Modos estáticos de restrição

Os modos estáticos de restrição são obtidos através das deformações resultantes de um deslocamento estático unitário imposto em uma das coordenadas de interface, considerando deslocamentos nulos para as demais coordenadas. Com isso, a matriz dos modos estáticos será:

$$\begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} \\ k_{ji} & k_{jj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{r-ij} \\ I_{jj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{ij} \\ R_{jj} \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

onde $[R_{jj}]$ são as forças de reação nas coordenadas de interface. Com isso, a base modal estática com p modos em excesso será:

$$[\delta_r] = \begin{bmatrix} -k_{ii}^{-1} k_{ij} \\ I_{jj} \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

Se a subestrutura for livre-livre, a base modal estática conterá um número de modos de corpo rígido igual ao número de graus de liberdade da subestrutura.

f) Modos estáticos de junção - subestruturas fixas

Os modos de junção podem ser obtidos através das deflexões estáticas produzidas na estrutura, decorrentes da aplicação de uma força unitária em uma das coordenadas de interface, ao mesmo tempo em que as outras coordenadas estão isentas de carregamento. Os modos de junção podem ser utilizados com a finalidade de complementar as bases modais das subestruturas. Para o caso de junção fixa, as forças unitárias são aplicadas no conjunto das coordenadas de interface da subestrutura, definida por:

$$\begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} \\ k_{ji} & k_{jj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{s-ij} \\ \delta_{s-jj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{ij} \\ I_{jj} \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

Com isso, a base modal estática de junção fixa com p modos em excesso será:

$$[\delta_s] = \begin{bmatrix} k_{ij}^{-1} \\ k_{jj}^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{ij} \\ g_{jj} \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

g) Modos estáticos de junção - subestruturas livres

Neste caso, deve-se eliminar os movimentos de corpo rígido através de um conjunto de r restrições determinadas estaticamente, definidas através da relação:

$$\begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ip} & k_{ir} \\ k_{pi} & k_{pp} & k_{pr} \\ k_{ri} & k_{rp} & k_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{l-ip} \\ \delta_{l-pp} \\ 0_{rp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{ip} \\ I_{pp} \\ R_{rp} \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

Com isso, a base modal estática de junção livre com p modos em excesso será:

$$[\delta_l] = \begin{bmatrix} g_{ip} \\ g_{pp} \\ 0_{rp} \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

Portanto, os modos de junção livres são colunas da matriz de flexibilidade da subestrutura nas r coordenadas definidas, que podem ser quaisquer, desde que restrinjam o movimento de corpo rígido da subestrutura.

h) Modos de junção com alívio de inércia

Quando uma subestrutura possui movimento de corpo rígido, os modos de alívio de inércia podem ser utilizados para representar a resposta estática completa, (HINTZ, 1975). Estes modos podem ser definidos como sendo a deflexão estática da subestrutura mediante a aplicação de forças unitárias em todas as coordenadas de interface. Ou seja,

$$[f_{nj}] = \begin{bmatrix} 0_{ij} \\ I_{jj} \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

Estas forças são aplicadas para uma certa subestrutura cuja equação de movimento é definida por:

$$[M][\ddot{u}] + [K][u] = [f_{nj}] \quad (2.23)$$

As matrizes físicas são de ordem $n \times n$ e o vetor de deslocamentos u de ordem $n \times 1$ é composto por r deslocamentos de corpo rígido e por g deslocamentos elásticos, ou seja,

$$[u] = [u_r \quad u_g]^t \quad (2.24)$$

Portanto, a Eq.(2.23) pode ser escrita como,

$$\begin{bmatrix} M_r & M_g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_r \\ \ddot{u}_g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_r & K_g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_r \\ u_g \end{bmatrix} = [f_{nj}]$$

Uma vez que para no movimento de corpo rígido não existem forças elásticas internas, tem-se:

$$[K][u_r] = [0] \quad (2.25)$$

Portanto, das Eq.(2.23), (2.24) e (2.25) pode-se efetuar o equilíbrio de forças para o sistema considerando os modos elásticos, ou seja,

$$[f_g] \equiv [M_g][\ddot{u}_g] + [K_g][u_g] = [f_{nj}] - [M_r][\ddot{u}_r] \quad (2.26)$$

Aplicando a transformação linear nos modos de corpo rígido,

$$[u_r] = [\theta_r][q_r] \quad (2.27)$$

onde $[\theta_r]$ é de ordem $n \times r$, e pré-multiplicando a Eq.(2.26) pela transposta da base modal de corpo rígido, tem-se:

$$[\theta_r]^t [M_g][\ddot{u}_g] + [\theta_r]^t [K_g][u_g] = [\theta_r]^t [f_{nj}] - [\mu_{rr}][\ddot{q}_r] \quad (2.28)$$

onde,

$$[\mu_{rr}] = [\theta_r]^t [M_r] [\theta_r]$$

Uma vez que a base modal de corpo rígido é ortogonal a todos os modos elásticos, a Eq.(2.28) transforma-se em:

$$[\ddot{q}_r] = [\mu_{rr}]^{-1} [\theta_r]^t [f_{nj}] \quad (2.29)$$

Portanto, das Eq.(2.27), (2.26) e (2.29) as forças elásticas são dadas por:

$$[f_g] = \left(I - [M_r][\theta_r][\mu_{rr}]^{-1} [\theta_r]^t \right) [f_{nj}] = [\bar{P}] [f_{nj}] \quad (2.30)$$

Deve-se restringir as forças elásticas com as forças atuantes na interface, de acordo com os graus de liberdade de corpo rígido. Com isso, pode-se obter uma matriz onde as colunas sejam os deslocamentos da subestrutura sob a ação de forças aplicadas na interface, da seguinte forma,

$$[\chi] = [G][f_g] = [G][\bar{P}][f_{nj}] \quad (2.31)$$

onde $[G]$ é uma matriz de flexibilidade definida por:

$$[G] = \begin{bmatrix} g_{jj} & g_{jg} & 0 \\ g_{gj} & g_{gg} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

Na Eq.(2.32), o índice g representa o número total de modos elásticos. A matriz de deslocamentos modais é uma combinação dos modos elásticos de alívio de inércia $[\delta_a]$ mais os deslocamentos de corpo rígido, ou seja:

$$[\chi] = [\delta_a] + [u_r] \quad (2.33)$$

Aplicando a transformação da Eq.(2.27) na (2.33), tem-se:

$$[\chi] = [\delta_a] + [\theta_r][q_r] \quad (2.34)$$

Pré-multiplicando a Eq.(2.34) pela matriz de massa e pela transposta da matriz modal de corpo rígido, tem-se:

$$[\theta_r]^t [M_r] [\chi] = [\theta_r]^t [M_r] [\delta_a] + [\theta_r]^t [M_r] [\theta_r] [q_r] \quad (2.35)$$

A primeira parcela do lado direito da Eq.(2.35) é nula, pela propriedade de ortogonalidade dos modos e ainda, aplicando-se a condição da Eq.(2.28), encontra-se:

$$[q_r] = [\mu_{rr}]^{-1} [\theta_r]^t [M_r] [\chi] \quad (2.36)$$

Obtém-se das Eq.(2.36) e (2.34) que os modos de junção com alívio de inércia são:

$$[\delta_a] = \left([I] - [\theta_r] [\mu_{rr}]^{-1} [\theta_r]^t [M_r] \right) [\chi] \quad (2.37)$$

Finalmente, das Eq.(2.31), (2.32) e (2.37) obtém-se que:

$$[\delta_a] = \left([\bar{P}]^t [G] [\bar{P}] \right) [f_{nj}] \quad (2.38)$$

i) Modos de flexibilidade residual

Os modos de flexibilidade residual têm sido aplicados, principalmente, na análise modal experimental. Sua definição é obtida através dos modos flexíveis não selecionados da base modal. Considere uma subestrutura composta por r modos de corpo rígido e por modos normais de interface livre. A equação contendo a matriz rigidez pode ser escrita como:

$$[K] \{u\} = \{f\} \quad (2.39)$$

Os deslocamentos físicos são combinações das deformações elásticas e movimentos de corpo rígido. Estes deslocamentos podem ser escritos em termos de coordenadas modais pela seguinte transformação linear:

$$\{u\} = [\theta_g] \{q_g\} + [\theta_r] \{q_r\} \quad (2.40)$$

Sabendo-se que

$$[K][\theta_r] = [0] \quad (2.41)$$

e utilizando as Eq.(2.39), (2.40) e (2.41) e pré-multiplicando a equação resultante pela matriz transposta dos modos elásticos, obtém-se:

$$[\theta_g]^t [K][\theta_g] \{q_g\} = [\theta_g]^t \{f\} \quad (2.42)$$

A Eq.(2.42) pode ser escrita em função dos autovetores elásticos, como:

$$\{q_g\} = [\Lambda_g]^{-1} [\theta_g]^t \{f\} \quad (2.43)$$

onde,

$$[\Lambda_g] = [\theta_g]^t [K][\theta_g]$$

Da Eq.(2.42) e (2.43) pode-se escrever que:

$$[K][\theta_g][\Lambda_g]^{-1} [\theta_g]^t \{f\} = \{f\} \quad (2.44)$$

ou de uma forma mais compacta, tem-se:

$$[K][G_g] \{f\} = \{f\} \quad (2.45)$$

onde

$$[G_g] = [\theta_g][\Lambda_g]^{-1} [\theta_g]^t \quad (2.46)$$

A Eq.(2.46) define a matriz de flexibilidade elástica, que também pode ser determinada pela inversa da matriz de rigidez. Mantendo-se m modos na base modal e descartando d modos, a matriz de flexibilidade elástica pode ser escrita como:

$$[G_g] = [\theta_{nm}][\Lambda_{mm}]^{-1} [\theta_{nm}]^t + [\theta_{nd}][\Lambda_{dd}]^{-1} [\theta_{nd}]^t = [G_m] + [G_d] \quad (2.47)$$

O segundo termo desta equação é denominado de matriz de flexibilidade residual, que representa a flexibilidade da estrutura relativa aos modos não selecionados ou fora da faixa de análise. Portanto, os modos de junção de flexibilidade residual podem ser definidos como:

$$[\delta_{nj}] = [G_d] [f_{nj}] \quad (2.48)$$

Nota-se na Eq.(2.48) que o número de modos de flexibilidade residual é igual ao número de graus de liberdade da interface entre as subestruturas. Utilizando-se as Eq.(2.22), (2.47) e (2.48) tem-se, finalmente, que:

$$[\delta_{nj}] = [\theta_{nd}] [\Lambda_{dd}]^{-1} [\theta_{nd}]^t [f_{nj}] = [\theta_{nd}] [\Lambda_{dd}]^{-1} [\theta_{jd}]^t \quad (2.49)$$

Ou seja, a Eq.(2.49) representa os modos de flexibilidade residual ponderados nas coordenadas de interface j . A matriz rigidez e a matriz de massa das subestruturas quando estão associadas aos modos de flexibilidade residual, podem ser escritas como:

$$[\delta_{nj}]^t [K] [\delta_{nj}] = [\theta_{jd}] [\Lambda_{dd}]^{-1} \left([\theta_{nd}]^t [K] [\theta_{nd}] \right) [\Lambda_{dd}]^{-1} [\theta_{jd}]^t \quad (2.50)$$

$$[\delta_{nj}]^t [M] [\delta_{nj}] = [\theta_{jd}] [\Lambda_{dd}]^{-1} \left([\theta_{nd}]^t [M] [\theta_{nd}] \right) [\Lambda_{dd}]^{-1} [\theta_{jd}]^t \quad (2.51)$$

onde $[\Lambda_{dd}] = [\theta_{nd}]^t [K] [\theta_{nd}]$ e $[I_{dd}] = [\theta_{nd}]^t [M] [\theta_{nd}]$

Considerando que a base modal seja normalizada pela matriz de massa, tem-se que:

$$[\alpha_{jj}] = [\delta_{nj}]^t [K] [\delta_{nj}] = [\theta_{jd}] [\Lambda_{dd}]^{-1} [\theta_{jd}]^t \quad (2.52)$$

$$[\beta_{jj}] = [\delta_{nj}]^t [M] [\delta_{nj}] = [\theta_{jd}] [\Lambda_{dd}]^{-2} [\theta_{jd}]^t \quad (2.53)$$

As Eq.(2.52) e (2.53) mostram que as matrizes de rigidez e de massa podem ser simuladas através da parcela modal não selecionada ou descartada quando associadas aos modos de flexibilidade residual. Esta particularidade torna esta base modal indicada para a análise experimental, já que não há a necessidade do conhecimento dos parâmetros físicos do sistema, ou seja, da matriz de massa e a matriz de rigidez.

2.3 Método de Síntese Modal com Flexibilidade Residual (SMFR)

O método SMFR aplicado a sistemas com amortecimento geral utiliza o superconjunto modal de flexibilidade residual que é formado por autovetores complexos devido ao amortecimento não-proporcional. A formulação dos modos de flexibilidade residual utiliza as equações de movimento das subestruturas que são transformadas em equações de estado de primeira ordem. Esse superconjunto modal é então utilizado para transformar as coordenadas físicas em coordenadas modais. O método força a compatibilidade das subestruturas considerando a conectividade através dos deslocamentos e coordenadas generalizadas relativas às coordenadas físicas de interface ou do contorno. Estas equações são adaptadas ao problema de estado, que definirá a solução do sistema de ordem $2n$. A generalização facilita o procedimento de síntese modal podendo ser aplicado em sistemas com ou sem amortecimento geral utilizando uma formulação numérica, experimental ou mista, (ARAÚJO, 1998).

Considerando a estrutura a ser analisada constituída de um amortecimento geral não proporcional, a equação de movimento pode ser definida através de uma equação diferencial de segunda ordem da seguinte forma,

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{f\} \quad (2.54)$$

onde $[M]$, $[C]$ e $[K]$ de ordem $n \times n$ são as matrizes de massa, amortecimento e rigidez, respectivamente. Os vetores $\{u\}$ e $\{f\}$ são os deslocamentos e a força aplicada nos graus de liberdade que podem ser divididos em coordenadas internas e de contorno entre as subestruturas conectadas entre si, como mostrado na figura 2.1. Para uma subestrutura específica a Eq.(2.54) pode ser escrita como,

$$\begin{bmatrix} m_{ii} & m_{ij} \\ m_{ji} & m_{jj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_i \\ \ddot{u}_j \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{ii} & c_{ij} \\ c_{ji} & c_{jj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_i \\ \dot{u}_j \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} \\ k_{ji} & k_{jj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0_i \\ f_j \end{Bmatrix} \quad (2.55)$$

onde i e j são os índices que indicam os graus de liberdades internos e de interface, respectivamente.

Na Eq.(2.54) a matriz de amortecimento é geral, ou seja, não proporcional. Com isso, a solução da equação diferencial nesta forma não é tão simples como no caso não amortecido, uma vez que os termos da parcela de amortecimento não são desacoplados pela transformação linear que utiliza a base modal do sistema não amortecido. A forma mais conveniente de solução da Eq.(2.55) é utilizar uma formulação de estado, ou seja, transformá-la em uma equação diferencial de primeira ordem de dimensão $2n$, (CRAIG, 1981). Ou seja,

$$[A]\{\dot{y}\} + [B]\{y\} = \{f'\} \quad (2.56)$$

onde $[A]$ e $[B]$ são denominados matrizes de estado e $\{y\}$ é o vetor de estado, sendo definidos por,

$$[A] = \begin{bmatrix} C & M \\ M & 0 \end{bmatrix} \quad [B] = \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & -M \end{bmatrix} \quad \{y\} = \begin{Bmatrix} u \\ \dot{u} \end{Bmatrix} \quad \{f'\} = \begin{Bmatrix} f \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.57)$$

A solução homogênea da Eq.(2.56) fornece os autovalores e autovetores complexos do sistema físico com $2n$ graus de liberdade. A vantagem da utilização da equação de estado é a possibilidade de desacoplar a equação do movimento. Além disso, a base modal determinada está relacionada com os autovalores e autovetores do sistema original com n graus de liberdade, (EWINS, 1985). As coordenadas físicas são substituídas pelas coordenadas modais $\{\eta\}$ através da seguinte transformação linear:

$$\{y\} = [\hat{\Psi}] \{\eta\} \quad (2.58)$$

Utilizando a transformação da Eq.(2.58) na (2.56) e pré-multiplicando o resultado pela transposta da matriz modal $[\hat{\Psi}^t]$, obtém-se um conjunto de equações diferenciais desacopladas da forma:

$$\{\dot{\eta}\} + [\Omega]\{\eta\} = [\hat{\Psi}^t]\{f'\} \quad (2.59)$$

Na Eq.(2.59) utilizam-se as seguintes propriedades de normalização da matriz de autovetores de estado:

$$\begin{aligned} [\hat{\Psi}^t][A][\hat{\Psi}] &= [I] \\ [\hat{\Psi}^t][B][\hat{\Psi}] &= [\Omega] \end{aligned} \quad (2.60)$$

Os modos de flexibilidade residual são similares àqueles da Eq.(2.49) escritos aqui utilizando a base modal complexa. Ou seja,

$$[\hat{\delta}_{nj}] = [\hat{\theta}_{nd}] [\hat{\Lambda}_{dd}]^{-1} [\hat{\theta}_{jd}]^t \quad (2.61)$$

Assim como mostrado nas eqs. (2.52) e (2.53) pode-se mostrar que as parcelas de inércia e rigidez das matrizes dinâmicas são dadas por:

$$\hat{\alpha}_{jj} = [\hat{\delta}_{nj}]^t [B] [\hat{\delta}_{nj}] = [\hat{\theta}_{jd}] [\hat{\Lambda}_{dd}]^{-1} [\hat{\theta}_{jd}]^t \quad (2.62)$$

$$\hat{\beta}_{jj} = [\hat{\delta}_{nj}]^t [A] [\hat{\delta}_{nj}] = [\hat{\theta}_{jd}] [\hat{\Lambda}_{dd}]^{-2} [\hat{\theta}_{jd}]^t \quad (2.63)$$

O superconjunto modal de flexibilidade residual é composto pelos modos normais de interface livre selecionados $[\hat{\theta}_l]$, obtidos da solução homogênea da Eq.(2.54), de modos de corpo rígido $[\hat{\theta}_r]$ e modos de flexibilidade residual $[\hat{\delta}_{nj}]$, que são obtidos pelos modos não selecionados ou não considerados na base modal como mostrado na seção anterior, ou seja,

$$[\hat{\Psi}] = [\hat{\delta}_{nj} \quad \hat{\theta}_r \quad \hat{\theta}_l] = [\hat{\delta}_{nj} \quad \hat{\phi}_{nm}] \quad (2.64)$$

No método considera-se que os modos de corpo rígido serão incorporados aos modos normais selecionados definidos por $[\hat{\phi}_{nm}]$. Com isso, a transformação linear que relaciona os deslocamentos físicos com as coordenadas generalizadas é definida por:

$$\{y\} = \begin{bmatrix} \hat{\delta}_{ij} & \hat{\phi}_{im} \\ \hat{\delta}_{jj} & \hat{\phi}_{jm} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_j \\ \eta_m \end{Bmatrix} = [\hat{\Psi}] \{\eta\} \quad (2.65)$$

Aplicando a transformação linear da Eq.(2.65) na Eq.(2.56) e pré-multiplicando a equação resultante pela transposta do superconjunto modal de flexibilidade residual, Eq.(2.64), obtém-se uma equação de movimento para cada subestrutura em termos das coordenadas modais, definida por:

$$[\hat{\beta}] \{\dot{\eta}\} + [\hat{\alpha}] \{\eta\} = [\hat{\Psi}^t] \{f'\} \quad (2.66)$$

onde,

$$[\hat{\beta}] = [\hat{\Psi}^t] [A] [\hat{\Psi}] = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_{jj} & 0_{jm} \\ 0_{mj} & I_{mm} \end{bmatrix}$$

$$[\hat{\alpha}] = [\hat{\Psi}^t] [B] [\hat{\Psi}] = \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_{jj} & 0_{jm} \\ 0_{mj} & \hat{\Lambda}_{mm} \end{bmatrix}$$

A equação de movimento para as duas subestruturas conectadas mostradas na Fig. 2.01 é similar à Eq.(2.66), sendo expandida em função da forma de montagem do vetor de coordenadas modais $\{\eta\}$.

A equação de movimento para as duas subestruturas conectadas, mostradas na Fig. 2.01, considerando a formulação de estado, é dada por:

$$[\hat{\Lambda}] [\dot{\eta}] + [\hat{\Gamma}] \{\eta\} = [\bar{E}^t] \{\bar{f}\} \quad (2.67)$$

onde,

$$\begin{aligned}
[\bar{E}] &= \begin{bmatrix} \hat{\delta}_{jj}^a & 0_{jj} & \hat{\phi}_{jm}^a & 0_{jm}^a \\ \hat{\delta}_{ij}^a & 0_{ij}^a & \hat{\phi}_{im}^a & 0_{im}^a \\ 0_{jj} & \hat{\delta}_{jj}^b & 0_{jm}^b & \hat{\phi}_{jm}^b \\ 0_{ij}^b & \hat{\delta}_{ij}^b & 0_{im}^b & \hat{\phi}_{im}^b \end{bmatrix} & \{\eta\} &= \begin{Bmatrix} \eta_j^a \\ \eta_j^b \\ \eta_m^a \\ \eta_m^b \end{Bmatrix} & \{\bar{f}\} &= \begin{Bmatrix} f_j^a \\ 0_i^a \\ f_j^b \\ 0_i^b \end{Bmatrix} \\
[\hat{\Delta}] &= \begin{bmatrix} \hat{\beta}_{jj}^a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{\beta}_{jj}^b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{mm}^a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{mm}^b \end{bmatrix} & [\hat{\Gamma}] &= \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_{jj}^a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{\alpha}_{jj}^b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{\Lambda}_{mm}^a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \hat{\Lambda}_{mm}^b \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

O os superescritos a e b significam subestrutura A e B, respectivamente. A autosolução do sistema, para o caso amortecido, fornece $2n$ equações de movimento, através da formulação de estado. Neste caso, faz-se uma adaptação das equações de compatibilidade utilizando-se apenas as coordenadas de interface e as pseudo-forças, juntamente com $2n$ modos seleccionados das subestruturas. Esta suposição não compromete o sistema físico, uma vez que, o sistema real possui apenas n graus de liberdade com possíveis n autovalores e autovetores. Portanto, através do procedimento de síntese das duas subestruturas conectadas, obtém-se as equações de compatibilidade da forma:

$$\begin{cases} u_j^a - u_j^b = 0 \\ \eta_j^a + \eta_j^b = 0 \end{cases} \quad (2.68)$$

De acordo com as Eq.(2.67) e (2.68) obtém-se a seguinte matriz de restrição:

$$[\bar{R}] = [C_{ld} \quad C_{li}] = \begin{bmatrix} \hat{\delta}_{jj}^a & -\hat{\delta}_{jj}^b & \hat{\phi}_{jm}^a & -\hat{\phi}_{jm}^b \\ I_{jj}^a & I_{jj}^b & 0_{jm}^a & 0_{jm}^b \end{bmatrix} \quad (2.69)$$

No processo de síntese modal, as bases modais devem ser reduzidas considerando a parcela do conjunto modal relativa às coordenadas modais mantidas, ou seja,

$$\{\eta\} = [\bar{S}] \{\hat{p}\} \quad \{\hat{p}\} = \begin{Bmatrix} \eta_m^a \\ \eta_m^b \end{Bmatrix} \quad (2.70)$$

Portanto, a matriz de conectividade geral pode ser obtida através das Eqs. (2.68), (2.69) e (2.70), ou seja,

$$[\bar{S}] = \begin{bmatrix} -C_{ld}^{-1} C_{li} \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\hat{D} \hat{\phi}_{jm}^a & \hat{D} \hat{\phi}_{jm}^b \\ \hat{D} \hat{\phi}_{jm}^a & -\hat{D} \hat{\phi}_{jm}^b \\ I_m^a & 0_{mamb} \\ 0_{mbma} & I_m^b \end{bmatrix} \quad (2.71)$$

onde,

$$[C_{ld}^{-1}] = \begin{bmatrix} \hat{D} & \hat{D} \hat{\delta}_{jj}^b \\ -\hat{D} & (I_{jj} - \hat{D} \hat{\delta}_{jj}^b) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [\hat{D}] = (\hat{\delta}_{jj}^a + \hat{\delta}_{jj}^b)^{-1}$$

Aplicando a transformação linear definida pela Eq.(2.70) na equação de movimento do sistema definida na Eq.(2.67), juntamente com as relações previamente definidas, e pré-multiplicando esta equação resultante pela matriz transposta de conectividade, obtém-se uma equação homogênea da forma:

$$[\hat{M}] \{\dot{\hat{p}}\} + [\hat{K}] \{\hat{p}\} = \{0\} \quad (2.72)$$

onde;

$$\begin{aligned}
[\hat{M}] &= [\bar{S}]^t [\hat{\Delta}] [\bar{S}] = \begin{bmatrix} I_{mm}^a + (\hat{\phi}_{jm}^a)^t \hat{V} \hat{\phi}_{jm}^a & -(\hat{\phi}_{jm}^a)^t \hat{V} \hat{\phi}_{jm}^b \\ -(\hat{\phi}_{jm}^b)^t \hat{V} \hat{\phi}_{jm}^a & I_{mm}^b + (\hat{\phi}_{jm}^b)^t \hat{V} \hat{\phi}_{jm}^b \end{bmatrix} \\
[\hat{K}] &= [\bar{S}]^t [\hat{\Gamma}] [\bar{S}] = \begin{bmatrix} \hat{\Lambda}_{mm}^a + (\hat{\phi}_{jm}^a)^t \hat{D} \hat{\phi}_{jm}^a & -(\hat{\phi}_{jm}^a)^t \hat{D} \hat{\phi}_{jm}^b \\ -(\hat{\phi}_{jm}^b)^t \hat{D} \hat{\phi}_{jm}^a & \hat{\Lambda}_{mm}^b + (\hat{\phi}_{jm}^b)^t \hat{D} \hat{\phi}_{jm}^b \end{bmatrix} \\
[\hat{V}] &= [\hat{D}]^t (\hat{\beta}_{jj}^a + \hat{\beta}_{jj}^b) [\hat{D}]
\end{aligned}$$

A equação de movimento sintetizada para o sistema completo, Eq.(2.72) é reduzida em termos das coordenadas mantidas $\{\hat{p}\}$ e na redução prévia das bases modais das subestruturas em coordenadas selecionadas e não selecionadas. A análise do autoproblema fornecido pela Eq.(2.72) fornece os autovalores e autovetores complexos $[\hat{\Sigma}]$, que podem ser utilizados para retornar à base modal original do sistema. Esse retorno é feito utilizando uma substituição inversa nas equações de transformação linear que modificaram a base de coordenadas originais. Esta operação fornece uma base modal reduzida da seguinte forma:

$$[\hat{\zeta}] = [\hat{\Psi}] [\bar{S}] [\hat{\Sigma}] \quad (2.73)$$

O fluxograma da Fig. 2.02 mostra o algoritmo do método SMFR de acordo com a formulação mostrada anteriormente. Inicialmente são estimadas as matrizes físicas das duas primeiras subestruturas para início da síntese. Se a estrutura é composta de várias subestruturas, após a síntese modal das duas subestruturas iniciais, estas são remontadas como uma nova subestrutura que será ligada a uma terceira subestrutura de acordo com uma conectividade geral, (ARAÚJO, 1998). Com isso, a formulação é efetuada somente com duas subestruturas mutuamente conectadas. Assim, são estimadas as matrizes físicas das subestruturas seguintes e incorporadas, uma a uma, à subestrutura anterior até a síntese da estrutura completa. A listagem do programa de síntese modal SMFR implementado em ambiente Matlab encontra-se no Anexo I.

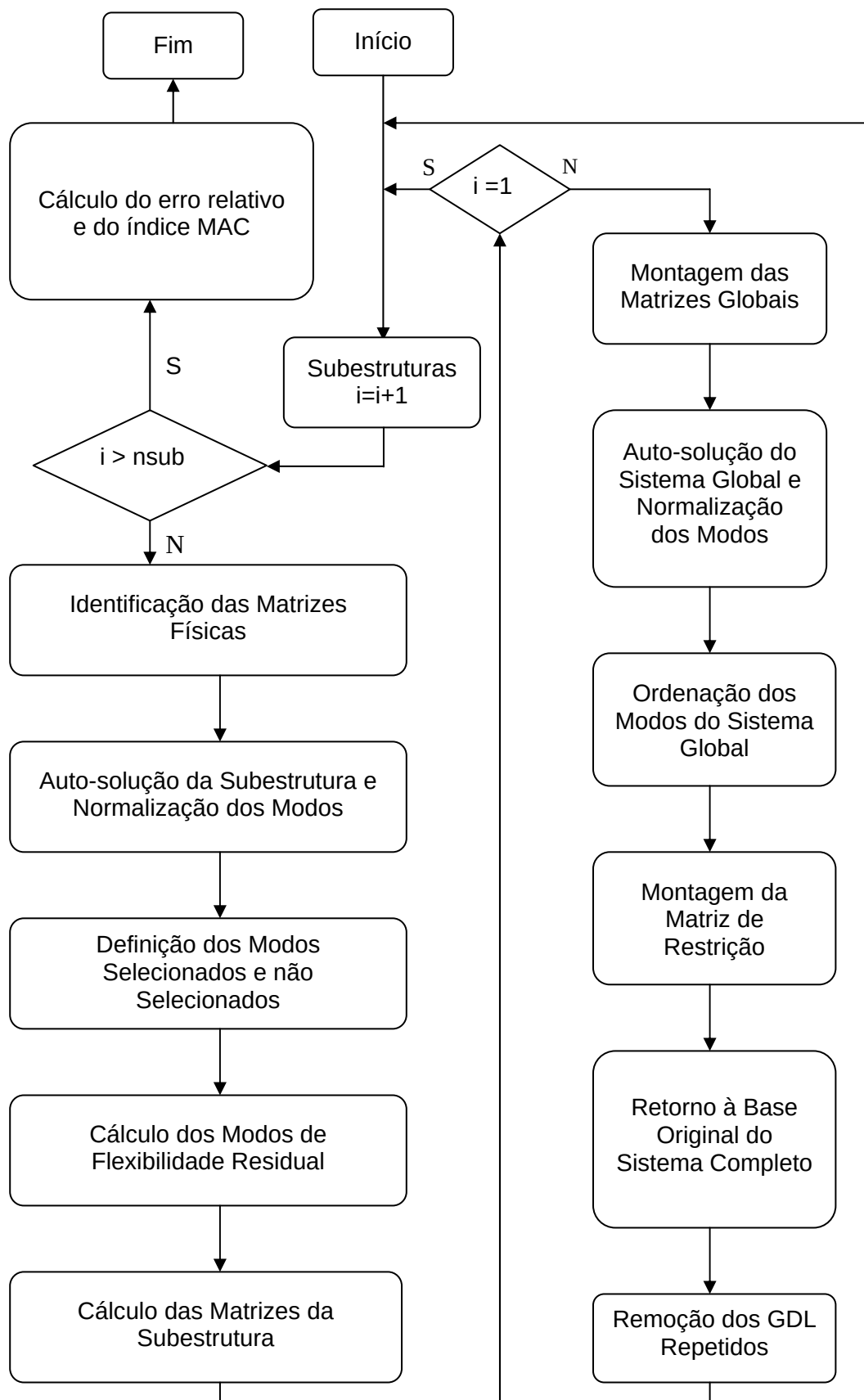


Figura 2.02 – Fluxograma para aplicação do método SMFR.

O índice MAC (Modal Assurance Criteria) foi definido por Ewins (1984) como,

$$MAC(\{u_1\}, \{u_2\}) = \frac{(\{u_1\}^t \{u_2\})^2}{(\{u_1\}^t \{u_1\})(\{u_2\}^t \{u_2\})} \quad (2.74)$$

e indica a precisão entre o modo original $\{u_1\}$ e o modo sintetizado $\{u_2\}$. Na Eq. (2.74) o maior valor que do índice MAC pode atingir é a unidade indicando a precisão máxima.. Neste caso $\{u_1\}$ é igual a $\{u_2\}$.

O erro relativo é definido como,

$$ER = \frac{|\omega_1 - \omega_2|}{\omega_1} \times 100 \quad (2.75)$$

e indica a precisão entre a frequência original ω_1 e a frequência sintetizada ω_2 . Na Eq. (2.75) o menor valor que erro relativo, ER , pode atingir é zero indicando a precisão máxima. Neste caso ω_1 é igual a ω_2 .

2.4 O Método da Montagem das Matrizes Dinâmicas (MMD)

Este método consiste na identificação das matrizes dinâmicas das subestruturas e a formação das matrizes da estrutura completa. As matrizes identificadas são montadas conforme os graus de liberdade de interface que conectam as subestruturas entre si. Os autovalores e autovetores da estrutura completa são obtidos da matriz resultante.

A desvantagem do MMD em relação ao SMFR é o tempo de processamento para a solução do autop problema, se por acaso, a matriz da estrutura completa for de ordem elevada. O método SMFR permite escolher as bandas de frequência de interesse enquanto que no MMD a solução só pode ser obtida para todos autovalores e autovetores. Por outro lado se houver interesse na solução completa, o método MMD tem vantagem sobre o SMFR que há casos onde a síntese de todos os modos é impossível.

CAPÍTULO III

Seleção Automática de Modos

A escolha dos modos usados no processo de síntese modal define a qualidade dos resultados e a banda de frequência que se deseja sintetizar.

Nos processos de síntese modal que utilizam o superconjunto modal de flexibilidade residual, o usuário pode definir quais modos serão mantidos e retirados da base modal. Os modos retirados são usados para obter os modos de flexibilidade residual que vai compor a base modal de cada subestrutura. Assim, mesmo mantendo-se um número suficiente de modos na base, alguns modos que seriam significativos na identificação do sistema original poderiam ser retirados. Este fato também é observado na maioria dos métodos de síntese modal. No método CEAM (Critério de Escolha Automática dos Modos), proposto por Araújo (1998), observou-se que quando o nível de energia de interface das subestruturas era pequeno, obtinha-se resultados mais precisos para os autovalores e autovetores sintetizados. Para cada subestrutura isolada quanto menor a energia das coordenadas de interface relativamente à energia das coordenadas internas para um determinado modo, menor seria a influência deste modo na síntese do sistema completo. Esta suposição foi fundamentada no fato de que as parcelas internas de energia dos modos selecionados são as principais responsáveis pelo movimento de vibração do sistema completo, já que as parcelas relativas à interface das subestruturas ficarão sujeitas às condições impostas pelo acoplamento. Com isso, a comparação entre as parcelas de energia de interface e interna das subestruturas fornece um índice de qualidade entre os modos de uma dada subestrutura. Esta suposição é a base do CEAM. A escolha de um determinado modo com alta energia de interface em relação aos nós internos significa baixa qualidade nos resultados finais da síntese.

O CEAM melhorou a eficiência da técnica de síntese modal introduzindo um processo automatizado de escolha modal. Deve-se destacar que a seleção de modos adequados ao problema analisado é fundamental na convergência final e, geralmente, isto tem sido feito manualmente pelo usuário que deve conhecer a estrutura analisada. Porém, no trabalho de Araújo (1998), foi mostrado que determinadas faixas de modos que seriam adequadas ao processo de síntese final não foram obtidas, principalmente se a estrutura

experimental analisada fosse complexa e apresentasse não linearidades. Por isso, além do efeito da energia de interface deveria haver procedimentos complementares visando melhorar ainda mais o processo de escolha das bases modais que serão mantidas nas subestruturas.

Neste trabalho foram implementados dois novos métodos de escolha automática de modos. O primeiro é baseado na energia dos modos das duas subestruturas, como no CEAM. Porém, essa energia é dividida em duas parcelas distintas. Uma está relacionada aos graus de liberdade de interface entre as subestruturas e a outra se refere aos graus de liberdade internos. São consideradas as duas parcelas de energia e a relação entre elas. De acordo com o critério definido os modos são comparados entre si. Cada modo é comparado com os demais da própria subestrutura e com todos os modos da outra subestrutura. A partir daí são definidos, automaticamente, os modos selecionados e removidos, das duas subestruturas, que serão usados para sintetizar a estrutura completa. O segundo é baseado na simples combinação das frequências dos modos das subestruturas.

Os critérios propostos são avaliados na técnica de síntese modal SMFR, (ARAÚJO, 1998). O processo de escolha definido pode ser aplicado em processos de síntese modal experimental e a metodologia é avaliada em modelos discretos massa-mola e em modelos de elementos finitos

3.1 Critério de seleção modal pela energia

Apesar de ter obtido bons resultados com o CEAM em várias estruturas analisadas, perceberam-se que existiam bases modais não selecionadas que em alguns casos apresentaram uma melhoria na síntese. Porém, o método como foi proposto não conseguiu montar este conjunto. Visando melhorar a precisão destes resultados foi desenvolvido um novo critério de escolha automática dos modos denominado de CSME (Critério de Seleção Modal pela Energia) que também se baseia na energia dos modos, como definido no CEAM.

Neste novo critério será considerada a energia interna, energia de interface e energia total. Considere duas subestruturas conectadas A e B onde as coordenadas de interface estão no ponto 2, de acordo com a Fig. 2.01.

A energia total e as parcelas de energia interna e de interface são obtidas através das Eq. (3.01) a (3.06). Nestas equações são considerados apenas os graus de liberdades correspondentes a cada parcela de energia de interface e interna. Para os modelos de viga formulados por elementos finitos o cálculo de energia é aproximado mas para os modelos de massa concentrada os valores de energia são exatos pois a matriz de massa é diagonal.

$$E_j^{ak} = \frac{1}{2} [\phi_j^{ak}]^t [M_j^a] [\phi_j^{ak}] (\omega^{ak})^2 \quad (3.01)$$

$$E_i^{ak} = \frac{1}{2} [\phi_i^{ak}]^t [M_i^a] [\phi_i^{ak}] (\omega^{ak})^2 \quad (3.02)$$

$$E_t^{ak} = E_j^{ak} + E_i^{ak} \quad (3.03)$$

$$E_j^{bk} = \frac{1}{2} [\phi_j^{bk}]^t [M_j^b] [\phi_j^{bk}] (\omega^{bk})^2 \quad (3.04)$$

$$E_i^{bk} = \frac{1}{2} [\phi_i^{bk}]^t [M_i^b] [\phi_i^{bk}] (\omega^{bk})^2 \quad (3.05)$$

$$E_t^{bk} = E_j^{bk} + E_i^{bk} \quad (3.06)$$

onde,

E_j^{ak} Energia de interface da subestrutura A E_j^{bk} Energia de interface da subestrutura B

E_i^{ak} Energia interna da subestrutura A E_i^{bk} Energia interna da subestrutura B

E_t^{ak} Energia total da subestrutura A E_t^{bk} Energia total da subestrutura B

$[\phi^a]$ Base modal da subestrutura A $[\phi^b]$ Base modal da subestrutura B

ω^{ak} Frequência da subestrutura A ω^{bk} Frequência da subestrutura B

$[M^a]$ Matriz de massa da subestrutura A $[M^b]$ Matriz de massa da subestrutura B

k Indica o k –ésimo modo da estrutura A ou B

Para definir as bases modais que serão selecionadas de cada subestrutura, inicialmente, calculam-se as energias internas e de interface através das Eq. (3.01), (3.02), (3.04) e (3.05). A seguir, são calculadas as energias totais das duas subestruturas conectadas através das Eq.(3.03) e (3.06), considerando, separadamente, os possíveis conjuntos modais mantidos para cada subestrutura. De posse de todas as combinações de

energias totais classificam-se as bases modais das subestruturas de acordo com os mínimos valores obtidos.

Além da avaliação das bases modais considerando as energias totais, o critério pondera também, separadamente, somente a somatória das energias internas, a somatória das energias de interface e a variação da energia de interface. No caso da variação da energia de interface o critério avalia o nível de discrepância entre as energias de interface entre as subestruturas. Se por acaso, esta variação for pequena, ocorre uma boa convergência da síntese final.

Toda a metodologia foi implementada em um código computacional desenvolvido em ambiente Matlab.

3.2 Critério de seleção modal pelas frequências

O CSME identifica alguns conjuntos de modos para serem usados na síntese modal que oferecem bons resultados. No entanto, por este método, nem sempre é possível indicar, entre todos, o conjunto de modos que produzem os resultados mais precisos. Por isso foi desenvolvido outro método denominado CSMF (Critério de Seleção Modal pelas Frequências) onde os modos mantidos são escolhidos pela comparação entre as frequências das subestruturas mutuamente conectadas. Além de mais preciso, este método possui processamento mais rápido que o anterior e complementa o processo de escolha modal definido pelo CSME.

A técnica baseia-se na diferença relativa entre as frequências associadas aos modos mantidos das duas subestruturas conectadas. Os modos são classificados de acordo com a soma ponderada destes valores. Quanto menor esta soma, melhores serão os resultados obtidos na síntese modal.

Seja m_1 e m_2 os dois números de modos mantidos nas duas subestruturas conectadas, sendo m_1 menor ou igual a m_2 . A subestrutura com m_1 modos será denominada, aqui, de subestrutura 1 e a outra de subestrutura 2. Considere as frequências associadas aos modos mantidos nas duas subestruturas, em ordem crescente, como uma linha contínua com m_2 partições cada uma. Cada partição da subestrutura 2 vale 1 e está associada a uma única frequência. Cada partição da subestrutura 1 vale r , conforme a Eq.(3.07).

$$r = \frac{m_1}{m_2} \quad (3.07)$$

Se r é menor do que 1 então uma única frequência estará sempre associada a mais de uma partição. Se r é menor do que 1 mas não é submúltiplo de 1 então há partição associada a mais de uma frequência. Há também tanto frequências da estrutura 1 associadas a mais de uma frequência da estrutura 2 como há frequências da estrutura 2 associadas a mais de uma frequência da estrutura 1 como ilustrado na Fig. 3.01.

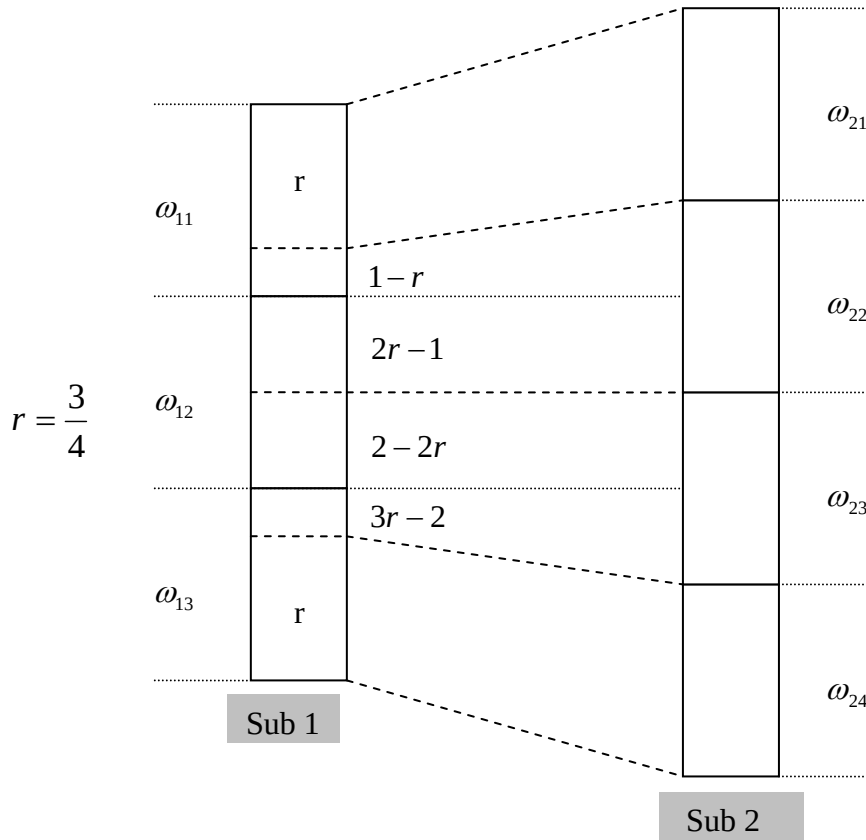


Figura 3.01 – Associação entre as frequências das duas subestruturas.

Para determinar os melhores pares de conjuntos de modos mantidos nas duas subestruturas é realizada uma soma ponderada dos módulos das diferenças relativas entre as frequências, denominadas de S . No exemplo da Fig. 3.01, onde há três modos mantidos em uma subestrutura e quatro na outra, esta soma é representada pela Eq.(3.08) com r igual a $3/4$.

As Fig. 3.02 e 3.03 mostram os dois extremos onde $m_1 = 1$ e $m_1 = m_2$ respectivamente. Para $m_1 = 1$, S é calculado pela Eq.(3.09) e pela Eq.(3.10) quando $m_1 = m_2$.

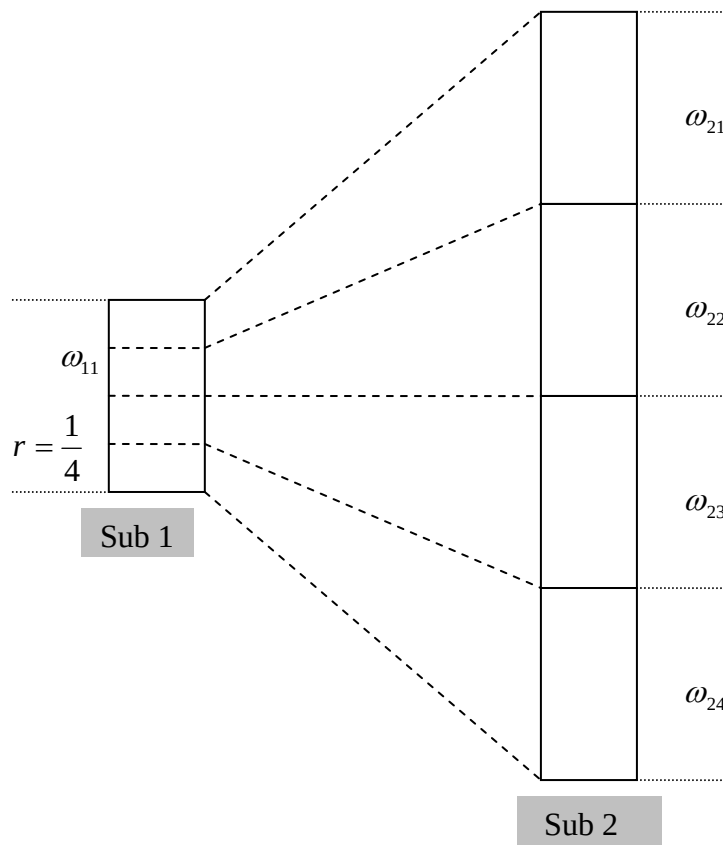


Figura 3.02– Associação entre as frequências das duas subestruturas com $m_1 = 1$.

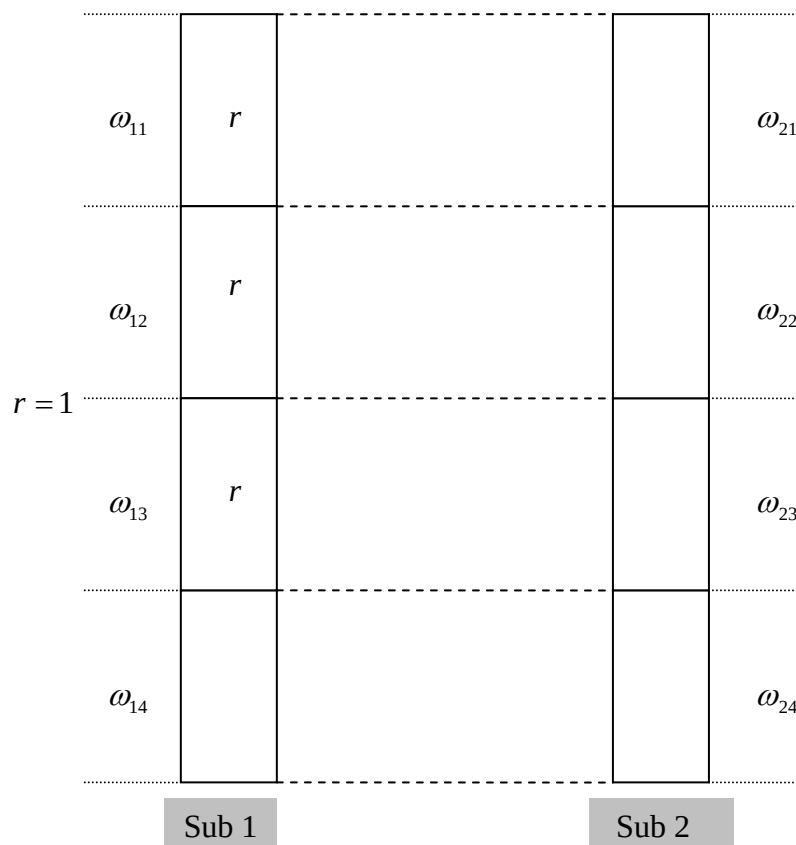


Figura 3.03 – Associação entre as frequências das duas subestruturas com $m_1 = m_2$.

$$S = r \left[\frac{|\omega_{21} - \omega_{11}|}{\max(\omega_{21}, \omega_{11})} \right] + (1-r) \left[\frac{|\omega_{22} - \omega_{11}|}{\max(\omega_{22}, \omega_{11})} \right] + (2r-1) \left[\frac{|\omega_{22} - \omega_{12}|}{\max(\omega_{22}, \omega_{12})} \right] \\ + (2-2r) \left[\frac{|\omega_{23} - \omega_{12}|}{\max(\omega_{23}, \omega_{12})} \right] + (3r-2) \left[\frac{|\omega_{23} - \omega_{13}|}{\max(\omega_{23}, \omega_{13})} \right] + r \left[\frac{|\omega_{24} - \omega_{13}|}{\max(\omega_{24}, \omega_{13})} \right] \quad (3.08)$$

$$S = r \sum_{i=1}^{m_2} \left[\frac{|\omega_{2i} - \omega_{11}|}{\max(\omega_{2i}, \omega_{11})} \right] \quad (3.09)$$

$$S = r \sum_{i=1}^{m_2} \left[\frac{|\omega_{2i} - \omega_{1i}|}{\max(\omega_{2i}, \omega_{1i})} \right] \quad (3.10)$$

Como $r = 1/m_2$ e $r = 1$ nas Eq.(3.09) e Eq.(3.10) respectivamente estas se tornam

$$S = \frac{1}{m_2} \sum_{i=1}^{m_2} \left[\frac{|\omega_{2i} - \omega_{11}|}{\max(\omega_{2i}, \omega_{11})} \right] \quad (3.11)$$

$$S = \sum_{i=1}^{m_2} \left[\frac{|\omega_{2i} - \omega_{1i}|}{\max(\omega_{2i}, \omega_{1i})} \right] \quad (3.12)$$

onde as freqüências ω_{1i} pertencem a subestrutura 1 e as freqüências ω_{2i} pertencem a subestrutura 2. No exemplo da Fig. 3.02 e da Eq.(3.11) o valor de r é igual a $1/4$. O valor de S é calculado para todas as combinações possíveis de modos e os melhores são aqueles com menor valor de S .

Além de indicar os modos que fornecem os resultados mais precisos em síntese modal o CSMF aponta outros modos que também poderiam dar bons resultados em diferentes bandas de freqüência. Então na escolha dos modos deve-se considerar não só o menor valor de S mas, também, a banda de freqüência de interesse.

3.3 Modelos de simulação numérica

Para avaliar os critérios de escolha das bases modais propostos (CSME e CSMF) foram utilizados quatro modelos de simulação numérica. Dois são modelos discretos massa-

mola-amortecedor sendo um com nove graus de liberdade e o outro com dezenove. Os outros dois modelos são vigas modeladas por elementos finitos também com nove e dezenove graus de liberdade. Todos os modelos foram simulados em código Matlab.

3.3.1 Modelos de massa-mola-amortecedor

A Fig. 3.04 e 3.05 apresentam os modelos discretos mola-massa-amortecedor utilizados na avaliação da metodologia. As estruturas completas foram subdivididas em duas subestruturas simétricas. As subestruturas, nos dois modelos, possuem cinco e dez graus de liberdade respectivamente. Todas as estruturas possuem condição de contorno bi-engastada. As massas discretas são iguais para cada modelo. No modelo menor é de 2 Kg e no maior de 1 Kg em cada grau de liberdade. A rigidez e o amortecimento são todos iguais nos dois modelos. Os valores de rigidez e de amortecimento são de 10^5 N/m e de 1 N.s/m respectivamente.

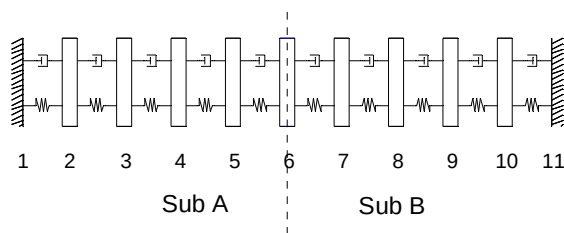


Figura 3.04 – Modelos massa-mola-amortecedor com nove GDL.

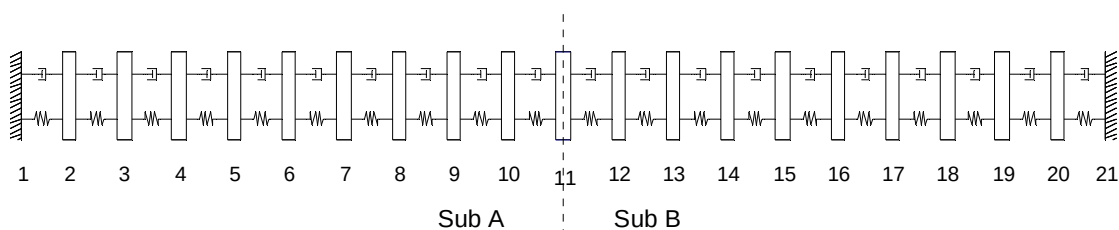
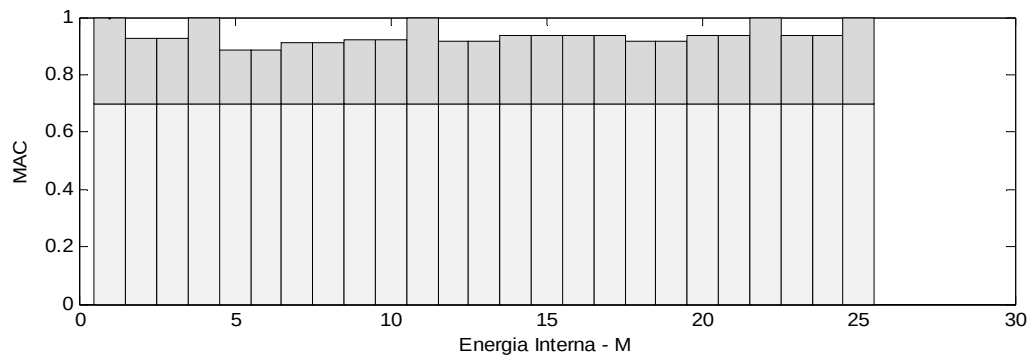
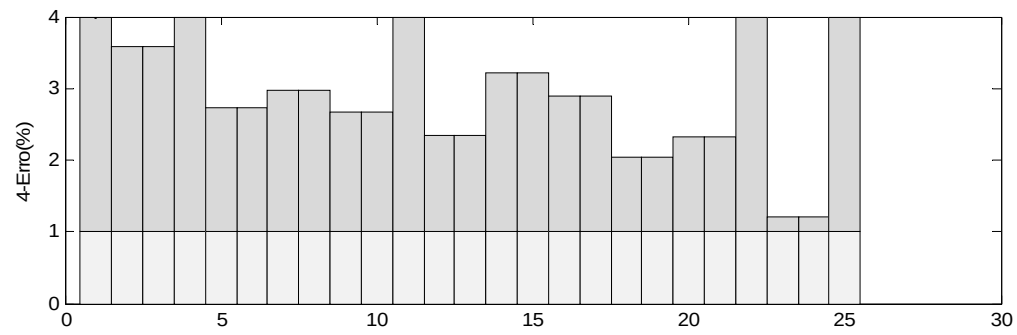


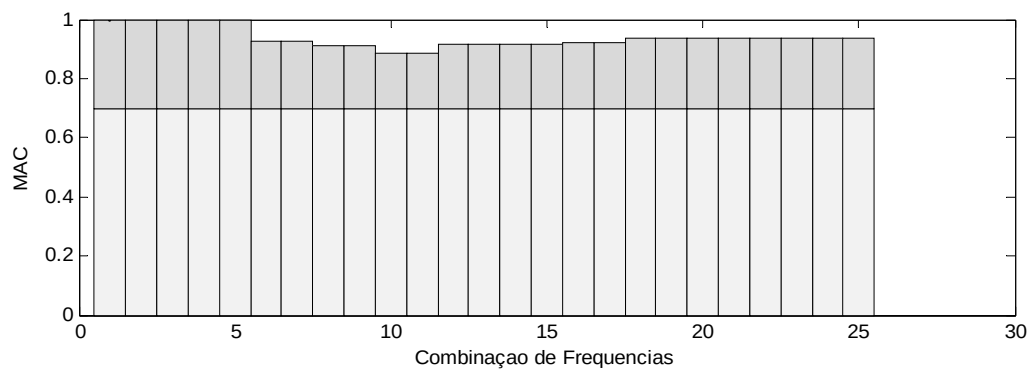
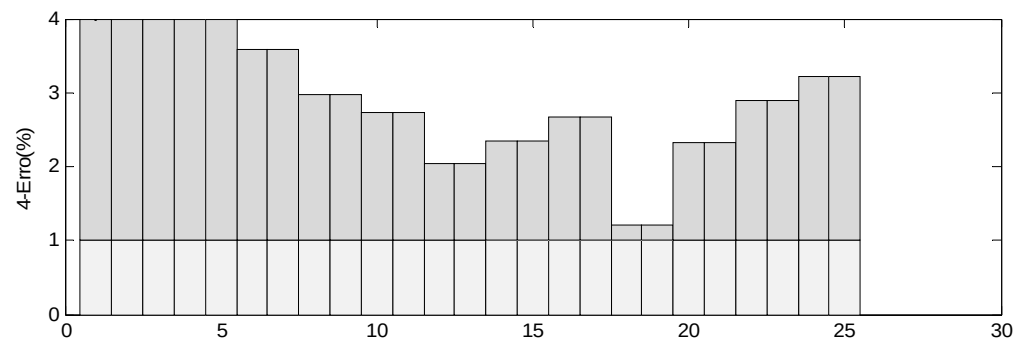
Figura 3.05 – Modelos massa-mola-amortecedor com dezenove GDL.

Os autovalores e autovetores das duas subestruturas e da estrutura completa foram determinados usando os métodos implementados em Matlab. Os modos das subestruturas são usados na síntese da estrutura completa que são comparados com os modos do sistema original. Cada subestrutura do modelo menor possui cinco modos. Como há um grau de liberdade de interface que é comum às duas subestruturas, a estrutura completa possuirá nove modos. A estrutura maior possui dez modos em cada subestrutura e dezenove modos na estrutura completa. Então, conforme SMFR, tem-se apenas um modo de flexibilidade residual que vai compor o superconjunto modal de flexibilidade residual.

As Fig. 3.06 e 3.07 mostram os erros percentuais nas frequências naturais e no

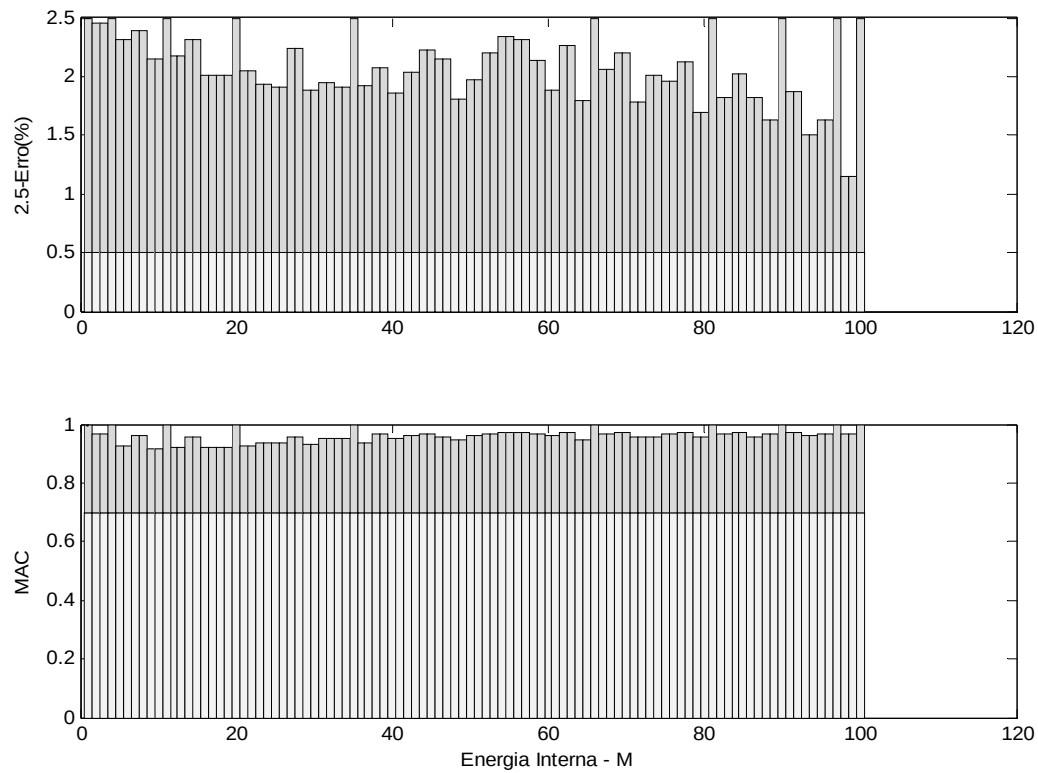


a) Classificação pela Energia Interna (CSME)

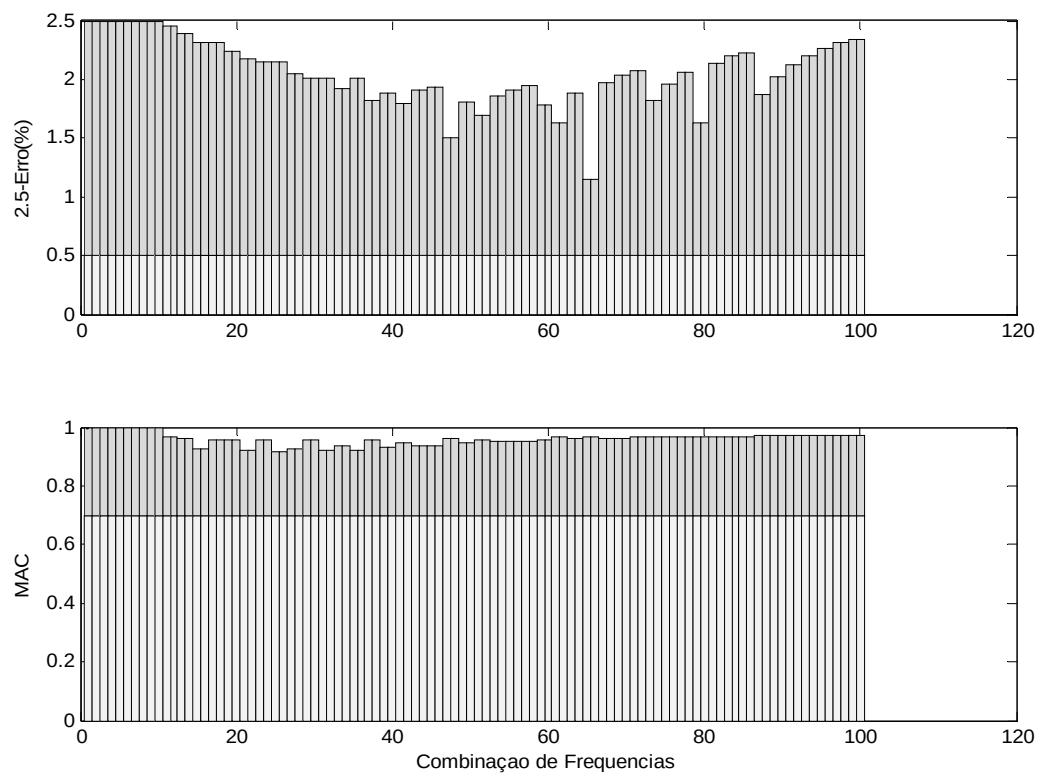


b) Classificação pela CSMF

Figura 3.06 – Erro relativo da frequência e índice MAC : modelo discreto com nove GDL.



a) Classificação pela Energia Interna (CSME)



b) Classificação pela CSMF

Figura 3.07 – Erro relativo da frequência e índice MAC: modelo discreto com dezenove GDL.

índice MAC, (EWINS, 1984), para todas as combinações possíveis de modos mantidos para o modelo discreto com nove e dezenove graus de liberdade respectivamente. Nas Fig. 3.06a e 3.07a as combinações são classificadas de acordo com a soma isolada da energia dos graus de liberdade internos (CSME) e nas Fig 3.06b 3.07b a classificação é feita conforme o CSMF. A posição do erro relativo e do índice MAC nos gráficos é determinada pela ordem de classificação dos resultados.

3.3.2 Modelo de uma viga bi-engastada

O modelo é constituído de uma viga de alumínio engastada nas extremidades. Para efetuar a síntese modal, a estrutura foi dividida em duas subestruturas simétricas, Fig. 3.08.

As bases modais utilizadas na síntese modal foram determinadas utilizando o método dos elementos finitos. Cada subestrutura foi subdividida em dez elementos de viga de Euler-Bernoulli. Devido às dificuldades de realizarem-se medidas experimentais dos graus de liberdade rotação e visando testes experimentais futuros, foram considerados apenas os deslocamentos transversais. Na viga com dez elementos e onze nós, um nó é fixo devido ao engaste. Assim há dez graus de liberdade sendo um de interface, comum às duas subestruturas. Devido à simetria esses valores valem para as duas subestruturas.

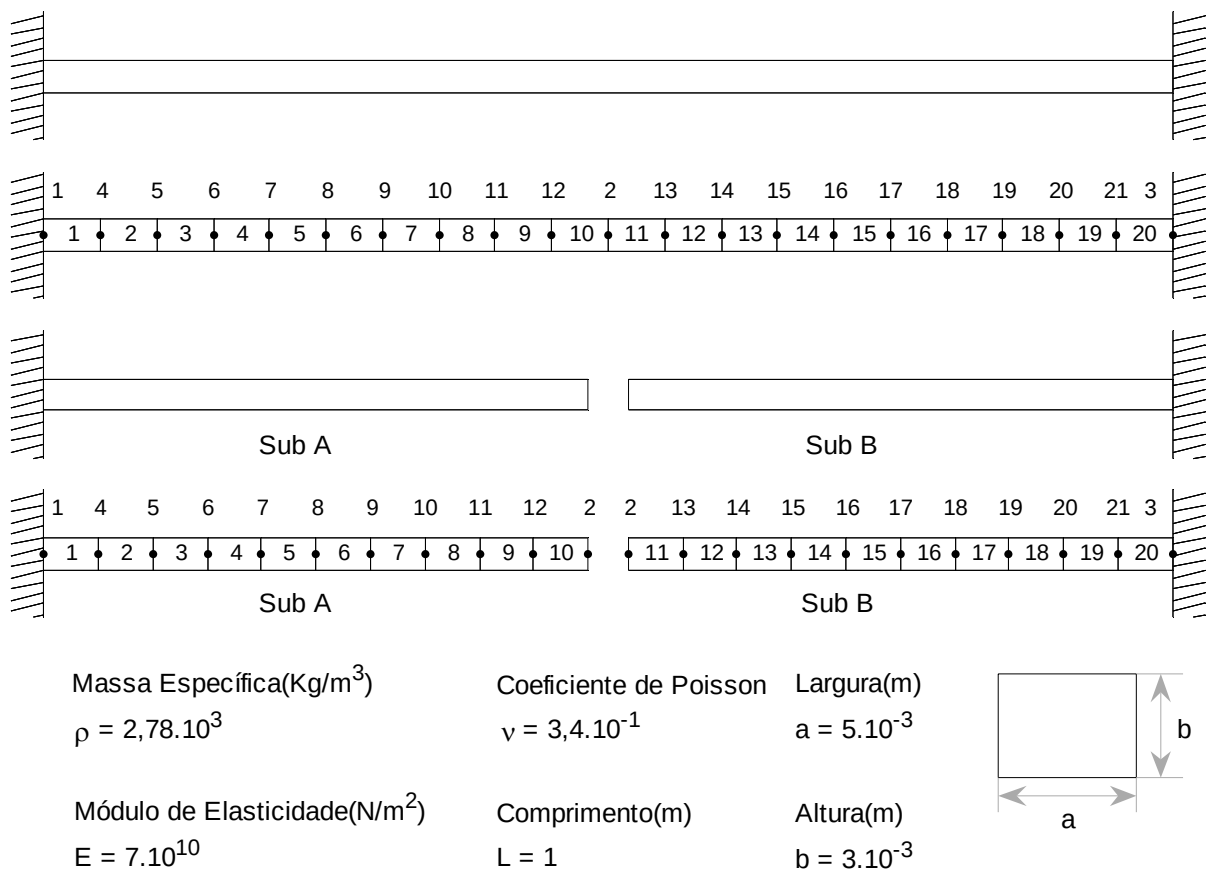


Figura 3.08 – Viga bi-engastada de alumínio modelada por elementos finitos.

Para obter as bases modais do sistema original modelou-se, também, a estrutura original por elementos finitos, utilizando a mesma opção de elemento de viga de Euler-Bernoulli. A estrutura completa foi dividida em vinte elementos de viga com 21 nós. Como a viga é engastada nas duas extremidades há dois nós fixos e dezenove graus de liberdade. Na Fig. 3.08 são mostrados os modelos esquemáticos de elementos finitos das subestruturas e da estrutura completa.

Para avaliar os métodos de escolha propostos, além desse modelo descrito foi usado outro constituído da mesma viga com a metade dos graus de liberdade em cada subestrutura. Em cada um dos modelos há um único grau de liberdade de interface entre as subestruturas. Com isso tem-se apenas um modo de flexibilidade residual que vai compor o superconjunto modal de flexibilidade residual.

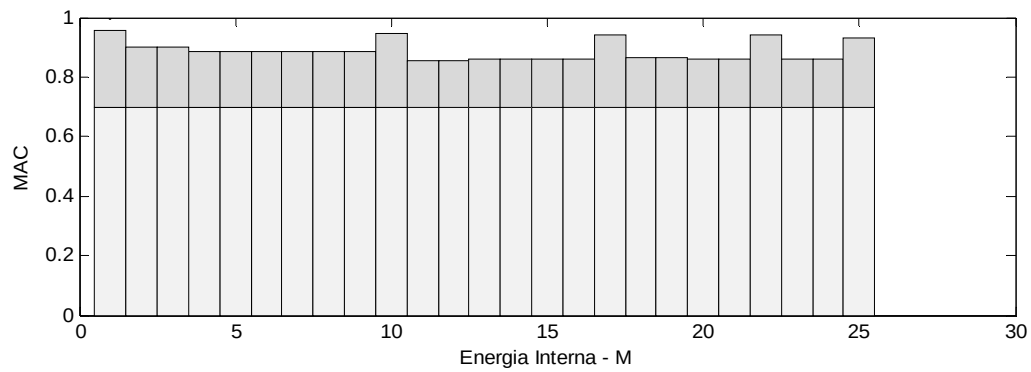
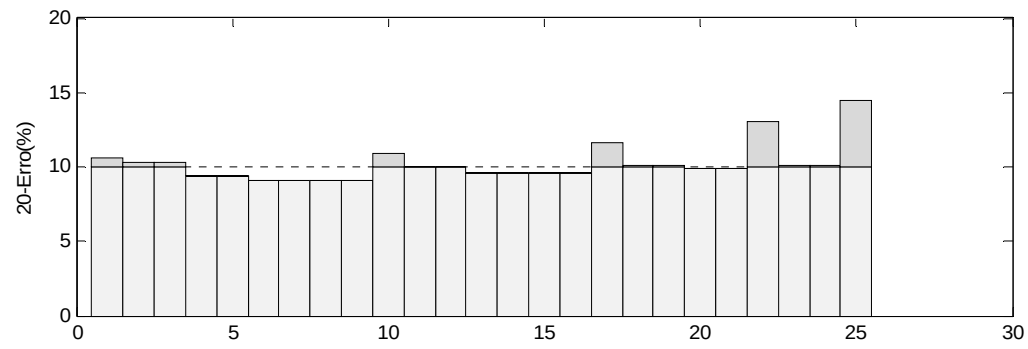
As Fig. 3.09 e 3.10 mostram os erros percentuais nas frequências naturais e o índice MAC para todas as combinações possíveis de modos mantidos para uma viga modelada por elementos finitos com nove e dezenove graus de liberdade respectivamente. Nas Fig. 3.09a 3.10a as combinações são classificadas de acordo com a soma isolada da energia dos graus de liberdades internos (CSME) e nas Fig 3.09b e 3.10b a classificação é feita conforme o CSMF.

As Fig 3.07 e 3.10 mostram as mesmas classificações apresentadas pelas Fig. 3.06 e 3.09 alterando apenas o número de graus de liberdade de nove para dezenove.

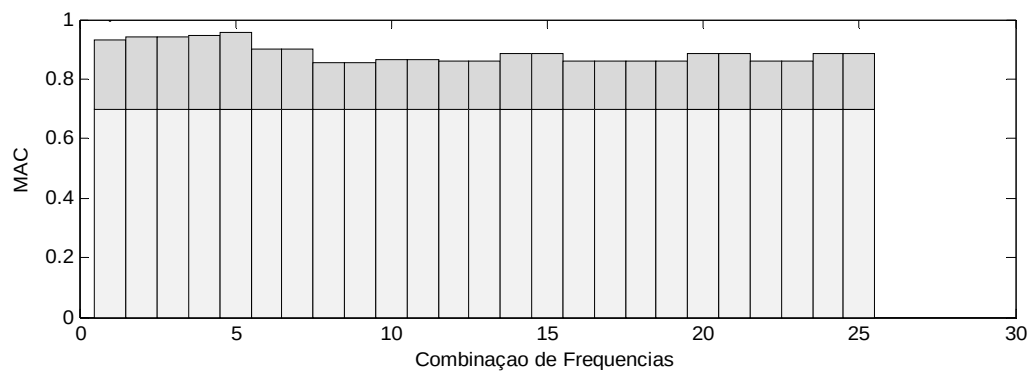
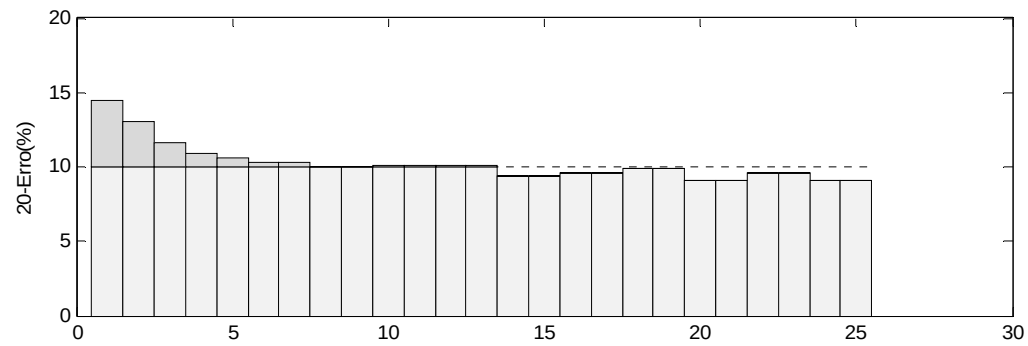
De acordo com a definição dos critérios, observou-se que quanto menor a soma da energia dos nós internos dos modos mantidos nas duas subestruturas melhores serão os resultados da síntese, como pode ser observado na Fig. 3.06a e 3.09a. Além disso, observou-se que quanto menor a variação da energia de interface de cada modo de uma subestrutura em relação aos modos da outra, melhor será a precisão dos resultados obtidos na síntese modal. Verificou-se que a escolha dos modos é mais precisa para os modelos com maiores números de graus de liberdade. No caso dos modelos de viga o uso da variação da energia de interface gerou melhores resultados.

Pelo CSME nem sempre é possível escolher os melhores modos, como pode ser visto nas Fig. 3.09a e 3.10a que classifica os modos nos modelos de viga. A classificação dos modos usando o CSME em modelos discretos é aceitável como mostram as Fig 3.06a e 3.07a. Na maioria dos testes realizados o CSME apresentou bons resultados, principalmente nos modelos discretos, mas os modos escolhidos nem sempre são confiáveis. Em alguns casos os resultados não foram satisfatórios.

Porém o CSMF conseguiu classificar os melhores modos nos quatro modelos analisados, Fig 3.06b – 3.10b, com boa definição, principalmente nos modelos de elementos finitos.

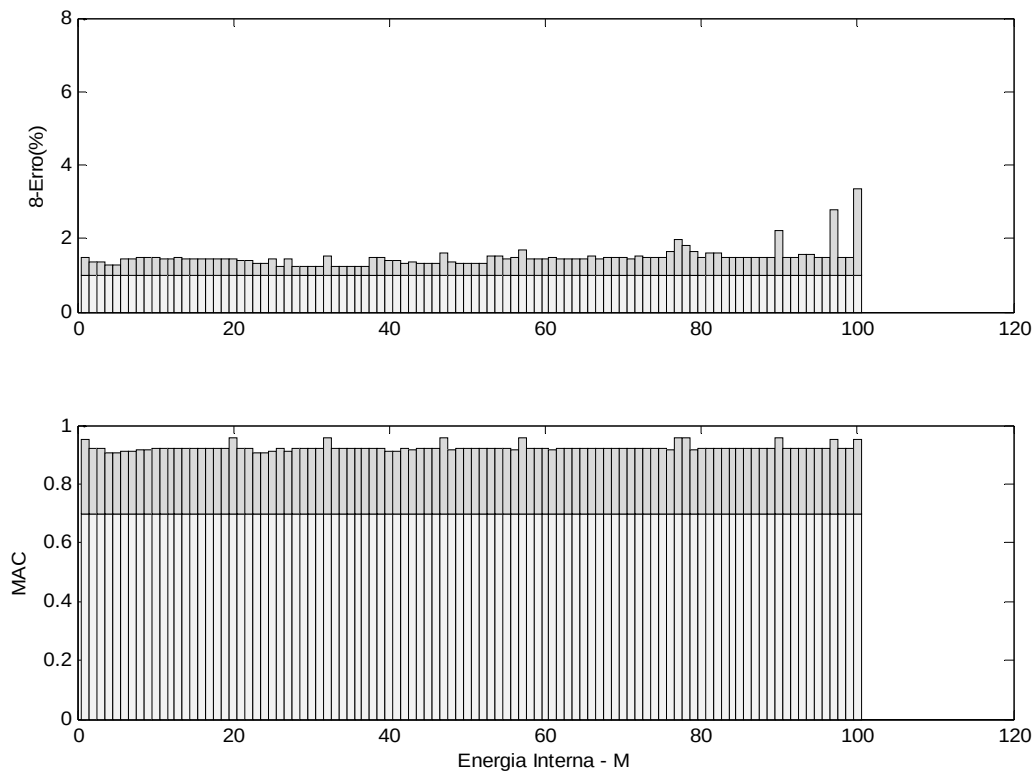


a) Classificação pela Energia Interna (CSME)

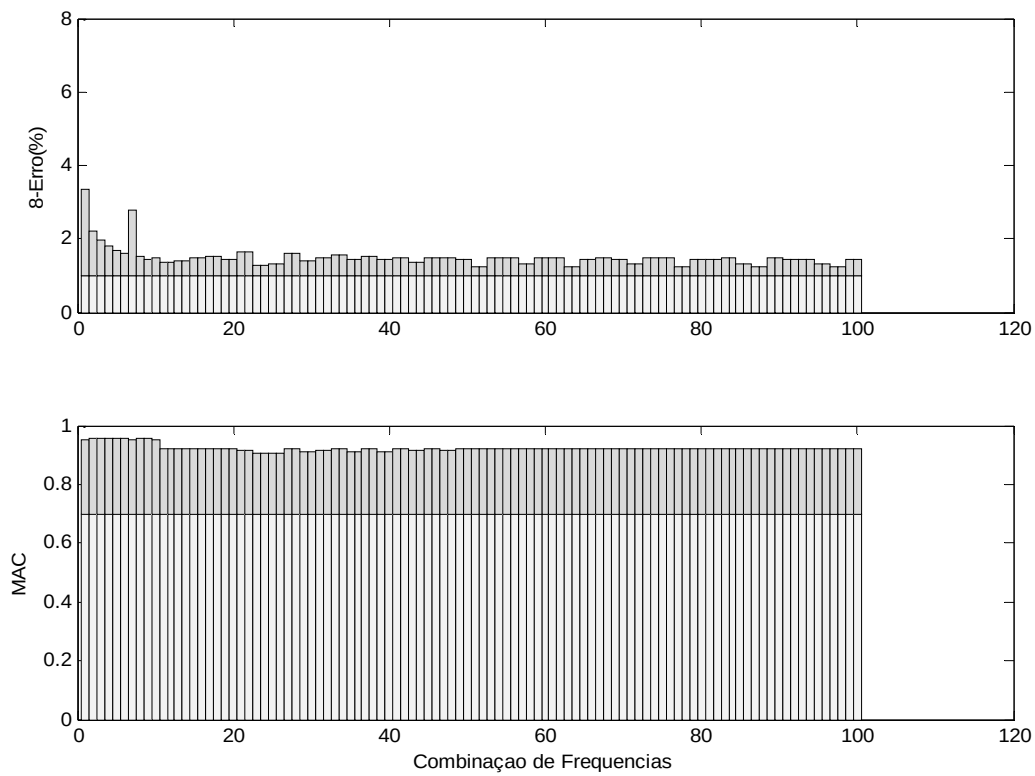


b) Classificação pela CSMF

Figura 3.09 – Erro relativo da frequência e índice MAC: modelo de viga com nove GDL.



a) Classificação pela Energia Interna (CSME)



b) Classificação pela CSMF

Figura 3.10 – Erro relativo da frequência e índice MAC: modelo de viga com dezenove GDL.

Na melhor condição de montagem das bases modais têm-se quatro modos mantidos para cada subestrutura, que resulta em oito modos sintetizados para a estrutura completa com nove graus de liberdade. Para a estrutura com dezenove graus de liberdade são escolhidos nove modos de cada subestrutura resultando um total de dezoito modos sintetizados.

Utilizando o CSMF foi possível selecionar os melhores modos mantidos a serem usados no processo de síntese modal. Diante desta observação, nas análises de modelos de simulação e experimentais deste trabalho, que utilizou o método SMFR, serão sempre utilizados modos escolhidos pela técnica CSMF.

Deve-se destacar que não foi considerado nenhum ruído adicionado aos modelos analisados neste capítulo.

CAPÍTULO IV

Normalização das Bases Modais

Desde 1965 quando Hurty desenvolveu o método de síntese modal, vários trabalhos sobre o assunto ajudaram a aprimorar a técnica, melhorando a qualidade da análise através de variações implementadas no método adaptando-o a sistemas não amortecidos ou com amortecimento geral. Porém, a maioria dos métodos implementados era direcionada para uma formulação analítica ou numérica. Em alguns trabalhos, (MACNEAL, 1971) e (ARAÚJO, 1998), foi desenvolvida uma abordagem visando utilizar uma base de dados puramente experimental.

A utilização de um processo de análise puramente experimental é viável, principalmente para sistemas complexos, onde o desenvolvimento de um modelo numérico, às vezes, pode ser de difícil execução, (DUARTE; EWINS, 1996.) Infelizmente, algumas fontes de erros, como por exemplo a qualidade da base modal, influenciam significativamente na análise modal experimental. A propagação destes erros no processo de ajuste de curvas influencia, geralmente, na identificação de uma base modal não ortogonal. A ordem do modelo, também, influencia nos resultados. Geralmente, um processo convencional de escalonamento da base modal via massa modal unitária é inadequada, uma vez que, a princípio, não se conhecem as matrizes físicas do sistema. Ou seja, em uma abordagem experimental, em geral, não se conhecem as matrizes de massa, rigidez e de amortecimento. Neste caso, não é possível ponderar sobre a nova base modal com relação a esta matriz de massa pois o processo de síntese modal, na maioria das vezes, requer a utilização de modos normalizados pela massa.

Para a aplicação da técnica de síntese modal proposta neste trabalho é essencial que a base modal das subestruturas seja normalizada pela matriz de massa. Quando se trata de dados puramente experimentais este tipo de análise tem sido feita utilizando-se um método de normalização via resíduos modais, (RICHARDSON, 1977, 2000). No trabalho de Araújo; Jacomine; Consentino (2001) este processo de normalização foi avaliado através de um modelo discreto massa-mola-amortecedor. Os autores mostraram que a utilização deste processo de normalização das bases em uma técnica de síntese modal experimental

poderia gerar imprecisões no processo de identificação dos parâmetros modais das subestruturas.

4.1 Normalização das bases modais via resíduos modais

A base desta formulação foi desenvolvida no trabalho de Richardson (1977). Richardson (2000) apresenta uma variação da metodologia, contornando o problema inerente a inversão da matriz função de transferência. A formulação é direcionada para sistemas com amortecimento geral através de uma análise modal experimental onde os modos identificados são números complexos. No entanto, esta técnica só pode ser aplicada em sistemas com leve amortecimento onde considera-se uma aproximação da base modal complexa com os modos normais da estrutura. Será mostrado através dos exemplos de simulação que a utilização desta técnica, desprezando completamente o amortecimento do sistema pode ocasionar erros na identificação da base modal normalizada via massa modal unitária. Para desenvolver a metodologia, considere um sistema discreto com n graus de liberdade modelado por uma equação diferencial ordinária de segunda ordem no domínio do tempo definida por:

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [C]\{\dot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{f(t)\} \quad (4.01)$$

onde $[M]$, $[K]$ e $[C]$ são as matrizes de massa, rigidez e de amortecimento, respectivamente, de ordem $n \times n$ e $\{\ddot{x}\}$, $\{\dot{x}\}$ e $\{x\}$ são vetores de aceleração, velocidade e deslocamento, respectivamente, de ordem $n \times 1$.

Aplicando a transformada de Laplace na Eq. (4.01), obtém-se uma equação de movimento equivalente no domínio da frequência, dada por:

$$[B(s)][X(s)] = [F(s)] \quad (4.02)$$

onde,

$$[B(s)] = [M]s^2 + [C]s + [K] \quad (4.03)$$

Neste caso, s é a variável de Laplace, $[F(s)]$ é a transformada da excitação aplicada ao sistema e $[X(s)]$ é a transformada da resposta. A função de transferência do sistema é definida por:

$$[H(s)] = [X(s)][F(s)]^{-1} = [B(s)]^{-1} = ([M]s^2 + [C]s + [K])^{-1} \quad (4.04)$$

Os elementos de $[B(s)]$ são funções quadráticas de s , e portanto $[H(s)]$ pode ser representada em forma de frações parciais, ou seja,

$$[H(s)] = \sum_{k=1}^m \frac{[r_k]}{2i(s - s_k)} - \frac{[r_k^*]}{2i(s - s_k^*)} \quad (4.05)$$

onde $[r_k]$ é a matriz de resíduos para o k -ésimo modo e $[r_k^*]$ é o seu complexo conjugado.

Os pólos ocorrem em $s = s_k$ e cada pólo tem uma matriz de resíduos $[r_k]$ de ordem $n \times n$ que aparecem em pares conjugados complexos. Os pólos podem ser definidos como

$$s_k = \sigma_k + i\omega_k \quad (4.06)$$

Na Eq. (4.06) σ_k é o coeficiente de amortecimento e ω_k é a frequência natural amortecida do modo k . Experimentalmente, os valores da função de transferência são medidos somente ao longo do eixo $i\omega$. Neste caso, $[H(i\omega)]$ é denominada de Função de Resposta em Frequência (FRF). A frequência de ressonância e o fator de amortecimento são expressos por:

$$\bar{\omega}_k = \sqrt{\sigma_k^2 + \omega_k^2} \quad (4.07)$$

$$\xi_k = -\frac{\sigma_k}{\bar{\omega}_k}$$

Considerando que existe um vetor modal $[\phi_k]$ para cada pólo, os resíduos $[r_k]$ podem ser representados por:

$$[r_k] = A_k [\phi_k][\phi_k]^t \quad (4.08)$$

onde A_k é uma constante de escalonamento. A Eq. (4.08) pode ser desenvolvida da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} r_{k-11} & r_{k-12} & \cdots & r_{k-1n} \\ r_{k-21} & r_{k-22} & \cdots & r_{k-2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{k-j1} & r_{k-j2} & \cdots & r_{k-jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{k-n1} & r_{k-n2} & \cdots & r_{k-nn} \end{bmatrix} = A_k \begin{bmatrix} \phi_{1k}\phi_{1k} & \phi_{1k}\phi_{2k} & \cdots & \phi_{1k}\phi_{nk} \\ \phi_{2k}\phi_{1k} & \phi_{2k}\phi_{2k} & \cdots & \phi_{2k}\phi_{nk} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{jk}\phi_{1k} & \phi_{jk}\phi_{2k} & \cdots & \phi_{jk}\phi_{nk} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{nk}\phi_{1k} & \phi_{nk}\phi_{2k} & \cdots & \phi_{nk}\phi_{nk} \end{bmatrix} \quad (4.09)$$

ou seja, para um resíduo particular tem-se que:

$$\begin{Bmatrix} r_{k-1j} \\ r_{k-2j} \\ \vdots \\ r_{k-jj} \\ \vdots \\ r_{k-nj} \end{Bmatrix} = A_k \begin{Bmatrix} \phi_{1k}\phi_{jk} \\ \phi_{2k}\phi_{jk} \\ \vdots \\ \phi_{jk}\phi_{jk} \\ \vdots \\ \phi_{nk}\phi_{jk} \end{Bmatrix} = A_k \phi_{jk} \begin{Bmatrix} \phi_{1k} \\ \phi_{2k} \\ \vdots \\ \phi_{jk} \\ \vdots \\ \phi_{nk} \end{Bmatrix} \quad (4.10)$$

Uma vez que os vetores modais possuem uma forma única, porém não possuem valores únicos, o processo de normalização pode ser feito através de diferentes formas. A normalização da base modal é importante na busca de um significado físico, uma vez que a base modal não é única. Dentre os vários procedimentos de normalização destacam-se o processo de normalização via valor máximo unitário e a normalização pela massa modal unitária.

Em várias técnicas de identificação, processos de síntese modal e técnicas de controle, a utilização de uma base modal normalizada é de fundamental importância para a obtenção de resultados satisfatórios. Nestes casos, o processo mais utilizado e o que permite maior flexibilidade e precisão é o processo de normalização via massa modal unitária. Em formulações analíticas ou numéricas, onde se conhece a matriz de massa do sistema, este procedimento é relativamente simples e utiliza simplesmente um fator de escala ponderado pela massa modal, ou seja,

$$\begin{aligned}
 [m] &= [\phi^t] [M] [\phi] \\
 [\bar{\phi}] &= [\phi] [m]^{-1/2}
 \end{aligned}
 \tag{4.11}$$

No entanto, quando se utilizam dados experimentais não é possível utilizar a normalização desta forma, pois, a princípio, não se conhece a matriz de massa do sistema. Para contornar este problema pode-se utilizar os resíduos modais para obter um fator de escala. Neste caso, a matriz de massa modal será aproximada por uma expressão que é função do fator de escala A_k . Para mostrar esta relação serão feitas algumas suposições sobre o sistema analisado e ao final da formulação serão apresentados os procedimentos que deverão ser efetuados para que se possa implementar adequadamente a técnica. Para isto, suponha que na estrutura a parcela relativa ao amortecimento modal seja muito menor que a frequência natural amortecida de cada modo, e que as formas dos modos sejam aproximadas aos modos normais de maneira que possam ser avaliados como modos reais,

$$\begin{cases} \sigma_k \ll \omega_k \\ \text{Im}[\phi(k)] \ll \text{Re}[\phi(k)] \end{cases}
 \tag{4.12}$$

Em uma análise experimental as matrizes físicas do sistema não são conhecidas. No entanto, estas matrizes podem ser estimadas a partir da matriz de transferência do sistema. Discussões sobre esta aproximação serão feitas na sequência do trabalho quando for feita a análise dos exemplos de simulação numérica. Da Eq. (4.03) observa-se que:

$$[K] = [B(0)] = [H(0)]^{-1}
 \tag{4.13}$$

Neste caso, as matrizes $[H]$ e $[B]$ devem obedecer a seguinte relação,

$$[I] = [H][B]
 \tag{4.14}$$

onde $[I]$ é a matriz identidade. Tem-se que a 1ª e a 2ª derivadas em relação a s para a Eq. (4.14) são dadas por:

$$[H][B'] + [H'] [B] = [0]
 \tag{4.15}$$

$$[H][B''] + 2[H'] [B'] + [H''] [B] = [0] \quad (4.16)$$

Da Eq. (4.03), pode-se mostrar que:

$$[C] = [B'(0)] \quad (4.17)$$

$$2[M] = [B''(0)] \quad (4.18)$$

e das Eq. (4.13), (4.15) e (4.17) tem-se que:

$$[C] = -[K][H'(0)][K] \quad (4.19)$$

Pré-multiplicando a Eq. (4.16) por $[B]$ e as Eq. (4.13), (4.14), (4.17) e (4.18), tem-se que:

$$2[M] = -2[K][H'(0)][C] - [K][H''(0)][K] \quad (4.20)$$

Substituindo as Eq. (4.13) e (4.17) na Eq. (4.15) e considerando a simetria das matrizes, a Eq. (4.20) pode ser escrita na forma:

$$[M] = [C][H(0)][C] - \frac{1}{2}[K][H''(0)][K] \quad (4.21)$$

Portanto, as Eq. (4.13), (4.19) e (4.21) apresentam uma forma de se estimar as matrizes físicas do sistema a partir da função de transferência e de suas derivadas no ponto $s = 0$. A princípio, esta matriz poderia ser utilizada para uma normalização via massa modal unitária aproximada. No entanto, algumas dificuldades podem ocorrer e serão discutidas na próxima seção. Em função da suposição de pequeno amortecimento e modos normais equivalentes, definidos pela Eq. (4.12), a matriz $[H(0)]$ pode ser escrita como:

$$[H(0)] = -\sum_{k=1}^m \text{Im} \left(\frac{[r_{(k)}]}{s_k} \right) = \sum_{k=1}^m \left(\frac{\omega_k [r_{(k)}]}{\sigma_k^2 + \omega_k^2} \right) \quad (4.22)$$

Na Eq. (4.22) é considerada apenas a parte real dos resíduos que pode ser estimada através da Eq. (4.08). Portanto, a matriz de rigidez $[K]$ pode ser estimada das Eq. (4.13) e (4.22). Utilizando a Eq. (4.19), uma condição de pequeno amortecimento e utilizando a Eq. (4.22) pode-se obter uma expressão aproximada para a matriz de amortecimento da seguinte forma:

$$[C] = [K] \left(\sum_{k=1}^m \text{Im} \left(\frac{[r_{(k)}]}{(s_k)^2} \right) \right) [K] = [K] \left(\sum_{k=1}^m \left(\frac{2\sigma_k [r_{(k)}]}{(\omega_k)^3} \right) \right) [K] \quad (4.23)$$

Considerando a base modal, a função de transferência pode ser escrita como:

$$[H(0)] = [\phi] [k]^{-1} [\phi]^t \quad (4.24)$$

Com isso, das Eq. (4.08), (4.22) e (4.24), tem-se que:

$$[k]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{A_1 \omega_1}{\sigma_1^2 + \omega_1^2} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{A_m \omega_m}{\sigma_m^2 + \omega_m^2} \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

Utilizando as Eq. (4.13), (4.24) e (4.25) obtém-se a rigidez modal, da seguinte forma:

$$[\phi]^t [K] [\phi] = [k] = \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & \frac{\sigma^2 + \omega^2}{A\omega} & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

Utilizando as suposições definidas na Eq. (4.12), a Eq. (4.21) e com as mesmas considerações anteriores, pode-se obter de forma análoga, uma equação para a estimativa da matriz de massa da seguinte forma:

$$[M] = [\phi^t]^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & \frac{4\sigma^2}{A\omega(\sigma^2 + \omega^2)} & \\ & & \ddots \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & \frac{(\sigma^2 + \omega^2)^2}{A\omega^5} & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \right\} [\phi]^{-1} \quad (4.27)$$

Supondo uma condição de pequeno amortecimento e de acordo com as Eq. (4.12) e (4.27), a matriz de massa modal pode, finalmente, ser definida como:

$$[m_k] = [\phi_k^t][M][\phi_k] = \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & \frac{1}{A_k \omega_k} & \\ & & \ddots \end{bmatrix}_{m \times m} \quad (4.28)$$

As relações entre os resíduos e os modos de vibrar do sistema são definidas pelas Eq. (4.09) e (4.10). De uma maneira geral o j – ésimo resíduo pode ser escrito como:

$$\begin{Bmatrix} r_{k-1j} \\ r_{k-2j} \\ \vdots \\ r_{k-ij} \\ \vdots \\ r_{k-nj} \end{Bmatrix} = A_k \begin{Bmatrix} \phi_{1k} \phi_{jk} \\ \phi_{2k} \phi_{jk} \\ \vdots \\ \phi_{jk} \phi_{jk} \\ \vdots \\ \phi_{nk} \phi_{jk} \end{Bmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (4.29)$$

Enquanto os modos de vibrar possuem valores arbitrários, os resíduos mostrados na Eq. (4.29) refletem as propriedades físicas únicas da estrutura. Neste caso, o fator de escala A_k deve sempre ser escolhido de tal forma que a Eq. (4.29) seja válida. Portanto, para obter modos normalizados via massa modal unitária, de acordo com a Eq. (4.28), a constante de escalonamento deve ser tal que:

$$A_k = \frac{1}{\omega_k}, \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (4.30)$$

Para obter a informação modal completa do sistema, somente uma linha ou coluna da função de transferência necessita ser medida e analisada. Da Eq. (4.29) observa-se que a

j – *ésima* coluna dos resíduos está relacionada com o j – *ésimo* modo através da seguinte relação:

$$r_{jj} = A_k \phi_{jk}^2 \quad (4.31)$$

Portanto, das Eq. (4.29), (4.30) e (4.31), um k – *ésimo* modo normalizado por uma condição de massa modal unitária pode ser definido por:

$$\begin{Bmatrix} \phi_{1k} \\ \phi_{2k} \\ \vdots \\ \phi_{jk} \\ \vdots \\ \phi_{nk} \end{Bmatrix} = \sqrt{\frac{\omega_k}{r_{k-jj}}} \begin{Bmatrix} r_{k-1j} \\ r_{k-2j} \\ \vdots \\ r_{k-jj} \\ \vdots \\ r_{k-nj} \end{Bmatrix} \quad (4.32)$$

Observa-se na Eq. (4.32) que para efetuar o processo de normalização é necessário a utilização do resíduo medido no ponto de excitação r_{jj} para que se possa simular a parcela modal ϕ_{jk} . Neste caso, na análise experimental, a resposta no ponto de excitação deve também ser medida. Se não for possível obter a resposta no ponto de excitação pode-se utilizar um procedimento alternativo chamado de medida triangular, (RICHARDSON, 2000). Neste caso, o valor de ϕ_{jk} pode ser estimado por:

$$\phi_{jk} = \sqrt{\frac{A_k \cdot r_{jp}(k) \cdot r_{jq}(k)}{r_{pq}(k)}} \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (4.33)$$

Neste procedimento devem ser feitas três outras medidas envolvendo graus de liberdade (p , q e j). A referência fixa é a j – *ésima* coluna de $[H(s)]$ onde H_{jp} e H_{jq} normalmente serão obtidas. Uma medida extra H_{pq} deverá ser efetuada visando resolver a Eq. (4.33). Por isso, diz-se que a função de transferência H possui uma forma triangular.

4.2 Simulações numéricas

A metodologia de normalização via resíduos modais foi avaliada através de dois exemplos numéricos consistindo de modelos discretos massa-mola com amortecimento e sem amortecimento. O objetivo foi verificar a precisão do processo de normalização via massa modal unitária através da utilização dos resíduos. Pretende-se mostrar que a formulação é adequada partindo-se de uma base modal complexa e que os resultados são bastante sensíveis as restrições impostas pela formulação. Quando se considera um sistema sem amortecimento, as aproximações oriundas da formulação não são adequadas e o modelo de normalização não pode ser utilizado. Em cada caso analisado serão apresentados os passos de análise com os devidos ajustes a serem efetuados visando efetuar adequadamente o processo de normalização. A análise nos dois casos e toda a formulação foi implementada em um código Matlab.

a) Sistema discreto massa-mola-amortecedor com 3 graus de liberdade – caso amortecido

O sistema analisado consiste de um modelo discreto massa-mola-amortecedor com 3 graus de liberdade, mostrado na Fig. 4.01.

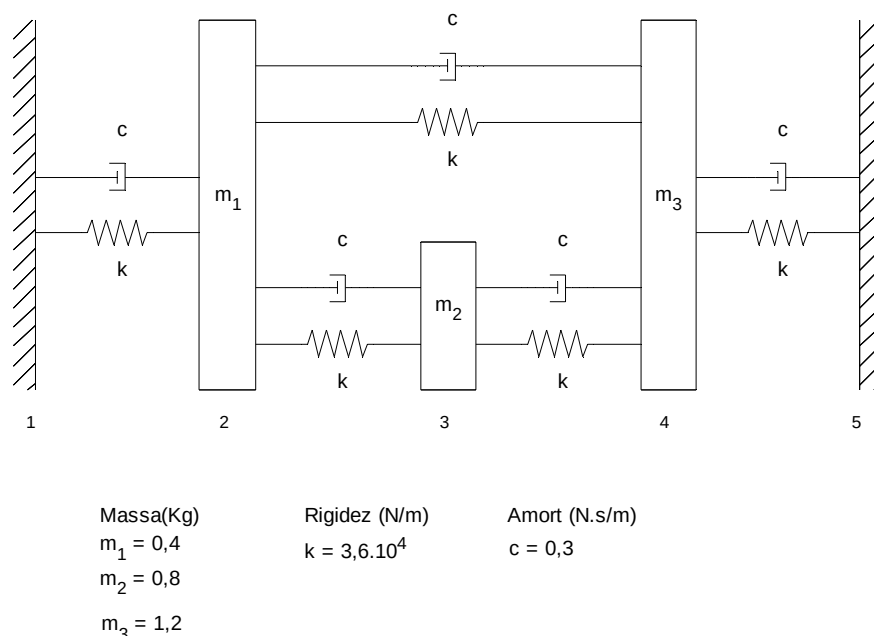


Figura 4.01 – Sistema discreto massa-mola-amortecedor com três GDL.

A implementação do processo de normalização via massa modal unitária utilizando os resíduos, para um sistema amortecido, é realizada de acordo com as etapas apresentadas na Fig. 4.02.

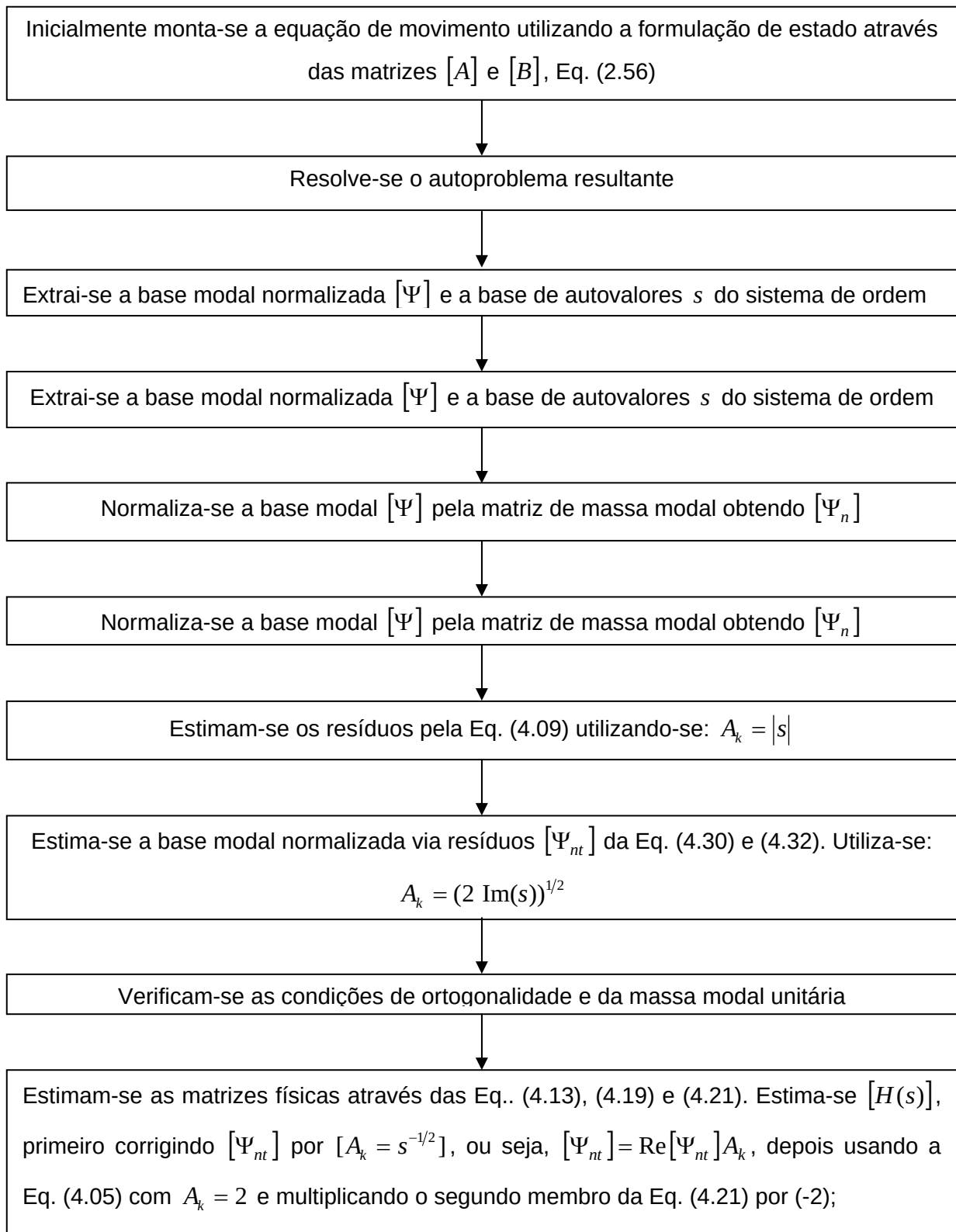


Figura 4.02 – Normalização via massa modal unitária utilizando os resíduos, para um sistema amortecido.

A Fig. 4.03 apresenta a função de transferência em termos de receptância. A Tab. 4.01 apresenta os autovalores s e as bases modais inicialmente identificadas $[\Psi]$ e $[\Psi_{na}]$. A Tab. 4.02 apresenta os modos $[\Psi_n]$, normalizados pela matriz de massa e $[\Psi_{nt}]$, normalizados via massa modal usando os resíduos. A Tab. 4.03 apresenta as matrizes de massa identificadas usando as funções de transferência, considerando as bases modais $[\Psi_n]$ e $[\Psi_{nt}]$.

Tabela 4.01 – Autovalores e bases modais obtidas da solução do autoproblema.

$s(rd/s)$		
-1,24+545,65i	-0,53+355,60i	-0,11+160,68i
$[\Psi]$		
0,0018+0,0000i	0,0001-0,0001i	-0,0024-0,0015i
-0,0003-0,0000i	0,0020-0,0007i	-0,0037-0,0023i
-0,0002-0,0000i	-0,0018+0,0006i	-0,0029-0,0018i
$[\Psi_{na}]$		
0,0321+ 0,0321i	0,0015+0,0015i	-0,0198- 0,0198i
-0,0061-0,0061i	0,0201+ 0,0201i	-0,0304-0,0304i
-0,0037-0,0037i	-0,0178-0,0178i	-0,0235- 0,0235i

Tabela 4.02 – Bases modais normalizadas.

$[\Psi_n]$		
1,4980-0,0000i	0,0555-0,0000i	-0,5030+0,0000i
-0,2866-0,0000i	0,7585-0,0000i	-0,7698+0,0000i
-0,1749+0,0000i	-0,6699-0,0000i	-0,5949-0,0000i
$[\Psi_{nt}]$		
1,3800+0,0014i	0,0732-0,0254i	0,5488+0,3474i
-0,2640-0,0003i	0,9999-0,3469i	0,8398+0,5317i
-0,1612-0,0002i	-0,8831+ 0,3064i	0,6491+0,4109i

Tabela 4.03 – Matrizes de massa e identidade identificadas.

	$[\Psi_n]$			$[\Psi_{nt}]$		
Matriz de Massa	0,39+0,0i	0,00+0,0i	0,00+0,0i	0,44+0,0i	-0,10-0,0i	-0,13-0,0i
	0,00+0,0i	0,79+0,0i	0,00+0,0i	-0,10-0,0i	0,68+0,0i	-0,46-0,0i
	0,00+0,0i	0,00+0,0i	1,19+0,0i	-0,13-0,0i	-0,46-0,0i	1,08+0,0i
Matriz Identidade	1,00-0,0i	-0,00-0,0i	-0,00+0,0i	0,90+0,0i	-0,00+0,0i	0,00+0,0i
	-0,00-0,0i	1,00-0,0i	-0,00+0,0i	-0,00+0,0i	1,50-1,2i	0,00+0,0i
	-0,00+0,0i	-0,00+0,0i	1,00+0,0i	0,0+0,0i	0,00+0,0i	0,70+1,5i

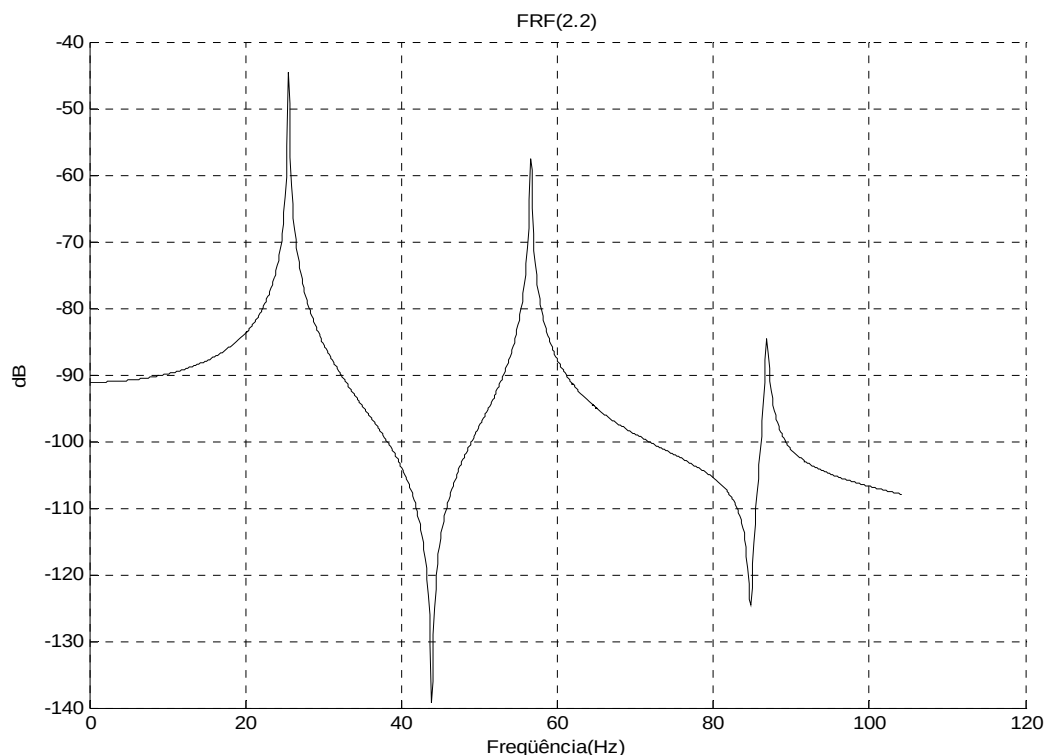


Figura 4.03 – Função de transferência

Observa-se que o modelo de simulação proposto está adequado as condições impostas na formulação, ou seja, uma condição de leve amortecimento (Valor máximo do fator de amortecimento de 0.23%). Através da Tab. 4.03, verifica-se que considerando os modos normalizados pela massa $[\Psi_n]$, identifica-se uma matriz identidade e matrizes físicas com boa precisão. Para a base modal normalizada via utilização dos resíduos $[\Psi_{nt}]$, as matrizes físicas foram razoavelmente identificadas. Porém, o fato mais importante a ser observado é que apesar da forma de $[\Psi_{nt}]$ ser razoavelmente coerente com a forma de $[\Psi_n]$, existe um erro quando se utilizam os resíduos no processo de normalização, conforme mostrado na identificação das matrizes físicas. Com isso, observa-se que apesar do modelo numérico analisado ser “bem comportado” o processo de normalização via massa modal unitária utilizando os resíduos, poderia gerar erros consideráveis em uma abordagem puramente experimental. Isto ocorre porque as bases modais identificadas são mais imprecisas devido a aproximação considerada na formulação. Com isso, a utilização de $[\Psi_{nt}]$ extraída de dados experimentais em uma técnica de modelagem, via síntese modal, que exigisse uma condição de massa modal unitária em sua formulação, poderia não conseguir obter resultados satisfatórios, (ARAÚJO, 1998).

Um inconveniente do processo de normalização via resíduos é a necessidade de medidas experimentais em n pontos para possibilitar a inversão de $[H(s)]$ que é,

geralmente, mal condicionada. Além disso, a formulação proposta considera sistemas com leve amortecimento. Esta condição ocorre em grande parte das estruturas em engenharia. Quando o amortecimento está acima de certos limites, que variam de acordo com o sistema analisado, a metodologia apresentada não poderá ser utilizada.

b) Sistema discreto massa-mola com 3 graus de liberdade – caso não amortecido

O sistema analisado consiste de um modelo discreto massa-mola com 3 graus de liberdade idêntico ao mostrado na Fig. 4.01, porém sem amortecimento, conforme mostrado na Fig. 4.04. Neste caso, a análise foi feita de acordo com as etapas apresentadas na Fig. 4.05.

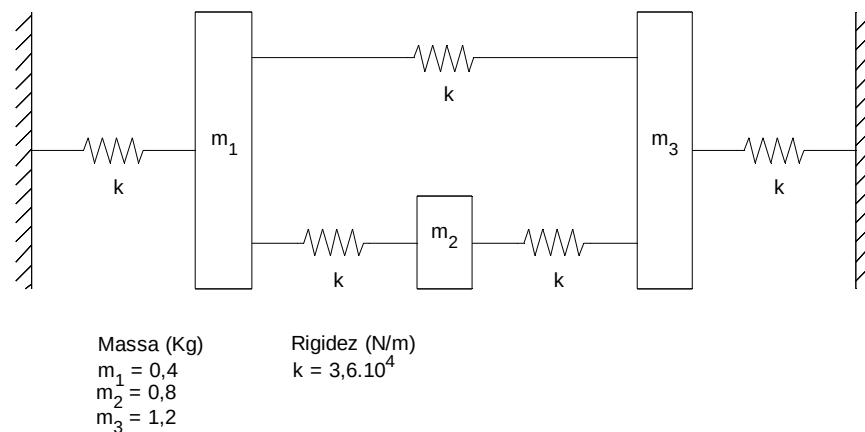


Figura 4.04 – Sistema discreto massa-mola com 3 graus de liberdade sem amortecimento.

A Tab. 4.04 apresenta os autovalores s e as bases modais inicialmente identificadas $[\Psi]$. A Tab. 4.05 apresenta os modos normalizados pela matriz de massa $[\Psi_n]$ e aqueles via massa modal utilizando os resíduos $[\Psi_{nt}]$. A Tab. 4.06 apresenta as matrizes de massa e identidade identificadas utilizando as funções de transferência, considerando as bases modais $[\Psi_n]$ e $[\Psi_{nt}]$.

Tabela 4.04 – Autovalores e bases modais obtidas da solução do autoprobema.

$\lambda(rd/s)^2$		
545, 65	160, 68	355, 60
Ψ		
0, 9758	0, 4593	-0, 0548
-0, 1867	0, 7029	-0, 7484
-0, 1140	0, 5432	0, 6610

Tabela 4.05 – Bases modais normalizadas.

	$[\Psi_n]$			$[\Psi_{nt}]$	
1,4980	0,5030	-0,0555	1,3800	0,6495	0,0775
-0,2866	0,7698	-0,7585	-0,2640	0,9940	1,0584
-0,1749	0,5949	0,6699	-0,1612	0,7682	-0,9348

Tabela 4.06 – Matrizes de massa e identidade identificadas via funções de transferência.

	$[\Psi_n]$			$[\Psi_{nt}]$		
Matriz de Massa	0,4000	0,0000	0,0000	0,4476	-0,0806	-0,0712
	0,0000	0,8001	0,0001	-0,0806	0,4786	0,0700
	0,0000	0,0001	1,2002	-0,0712	0,0700	0,6896
Matriz identidade	1,00	-0,00	-0,00	0,85	-0,00	-0,00
	-0,00	1,00	-0,00	-0,00	1,67	-0,00
	-0,00	-0,00	1,00	0,00	-0,00	1,95

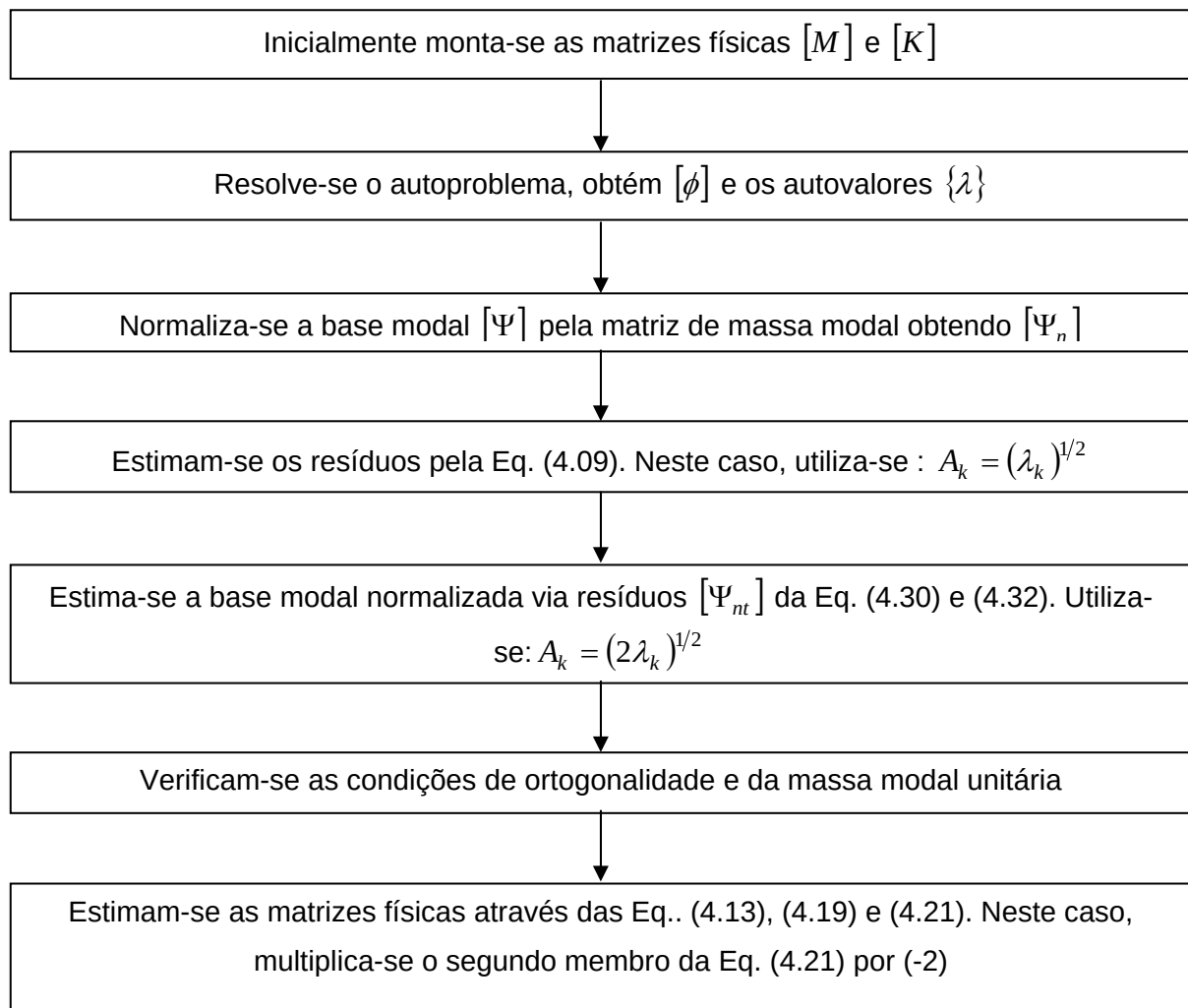


Figura 4.05 – Normalização via massa modal unitária utilizando os resíduos, para um sistema não amortecido.

Observa-se nos resultados anteriores que a base modal $[\Psi_n]$ comporta-se bem em todas as análises, porém a base modal normalizada pelo método $[\Psi_{nt}]$ não identifica adequadamente os parâmetros físicos nem a matriz identidade.

O objetivo de utilizar este modelo sem amortecimento é mostrar que a técnica de normalização via massa modal unitária utilizando os resíduos não é adequada para ser utilizada até mesmo em um modelo completamente sem amortecimento. É claro que este não é o caso de uma análise experimental que, via de regra, as bases modais são números complexos. No entanto, poderia ser feito um processo posterior de conversão das bases modais complexas em modos reais equivalentes, (ARAÚJO, 1998), que é feito geralmente para fins de comparação com modelos numéricos. Neste caso, esta nova base modal equivalente não seria adequada para a normalização via massa modal unitária proposta.

4.3 Novas abordagens para o problema

Nas seções anteriores mostrou-se que a opção de utilizar os resíduos modais para simular uma normalização via massa modal unitária quando as matrizes de massa não são conhecidas pode não ser adequado dependendo do sistema a ser analisado.

Como o objetivo deste trabalho é propor alternativas para aplicar a técnica de síntese modal em dados experimentais, onde, em geral, não são conhecidas as matrizes físicas dos sistemas, propõe-se uma nova abordagem para tentar minimizar os erros de um processo de normalização que é fundamental na técnica de síntese modal. A proposta é utilizar métodos para identificar as matrizes físicas e utilizar a matriz de massa identificada em um processo de normalização via massa modal unitária.

O capítulo V apresenta as técnicas propostas para a identificação das matrizes físicas onde são avaliados através de exemplos de simulação numérica. Nos capítulos VI e VII são avaliadas todas as técnicas propostas neste trabalho através de modelos de simulação numérica e experimentais.

CAPÍTULO V

Identificação das Matrizes Físicas

No capítulo anterior foi mostrado que o método de identificação de uma matriz de massa normalizada via resíduos modais não apresenta resultados satisfatórios para serem utilizados em um processo de síntese modal. Neste capítulo são propostas alternativas para a realização de um processo convencional de normalização da base modal pela matriz de massa identificada da estrutura analisada.

Esta metodologia é similar à metodologia tradicional de normalização via massa modal unitária como mostrado na Eq. (4.12), exceto que a matriz de massa da estrutura será estimada por métodos aproximados que utilizam os parâmetros dinâmicos identificados dos dados experimentais.

Foram implementados três métodos para identificar as matrizes físicas, o Método de Chen, um método de mínimos quadrados e um método iterativo. Todos os métodos foram implementados em código MATLAB onde foram avaliados exemplos de simulação numérica e de um modelo experimental para avaliar a precisão das matrizes identificadas.

Nos exemplos de simulação numérica será introduzido um ruído gaussiano. Será mostrado o procedimento de como foi gerado e adicionado o ruído aos dados simulados.

5.1 Ruído gaussiano

Geralmente os dados experimentais estão acompanhados de algum nível de ruído eletrônico inerente aos processos de medida. O objetivo de uma modelagem numérica é aproximar ao máximo o processo físico que ocorre nas estruturas reais. Uma forma de melhorar o modelo é adicionar um nível de ruído simulado aos dados obtidos na modelagem numérica. Neste trabalho, o ruído será definido como a flutuação dos dados conforme uma distribuição gaussiana cujo desvio padrão é uma porcentagem do valor de medida numérica no ponto considerado.

Cada ruído gaussiano r é gerado em função de dois números randômicos independentes r_1 e r_2 dado por,

$$r = \cos(r_1\pi)\sqrt{-2\ln(r_2)} \quad (5.01)$$

Na Eq.(5.01) observa-se que o termo $\sqrt{-2\ln(r_2)}$ varia de (0) a $(+\infty)$ enquanto o termo $\cos(r_1\pi)$ varia de (-1) a $(+1)$. Então o valor do ruído r varia de $(-\infty)$ a $(+\infty)$, uma condição necessária mas não suficiente para uma distribuição gaussiana.

Para verificar se a distribuição gerada pela Eq.(5.01) é gaussiana foi calculado um grande número de valores de r e distribuído acumulativamente conforme seu valor. Estas distribuições cumulativas foram organizadas em curvas de frequência relativa que foram ajustadas por uma curva gaussiana. A norma do erro obtida entre as curvas geradas e ajustadas é tanto menor quanto maior for o número de uma distribuição cumulativa. Então a Eq.(5.01) gera uma curva gaussiana e r pode ser utilizado para gerar um ruído gaussiano. A Fig. 5.01 mostra uma curva com 10^8 distribuições cumulativas e a Fig. 5.02 mostra a curva da Fig. 5.01 ajustada segundo uma curva gaussiana. Neste exemplo o erro relativo médio foi da ordem de 10^{-3} . Mas este valor pode ser reduzido tanto quanto se queira, tendo como limite o tempo e a precisão numérica do computador.

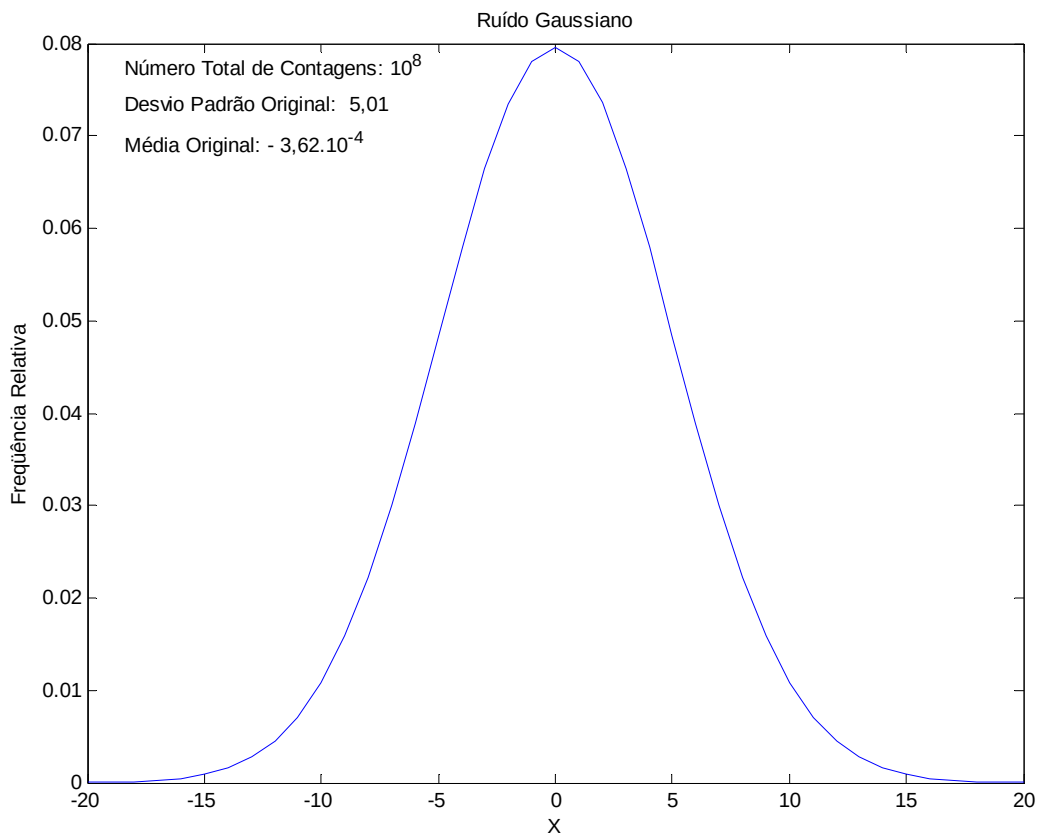


Figura 5.01 – Curva de frequência relativa gerada pela Eq.(5.01).

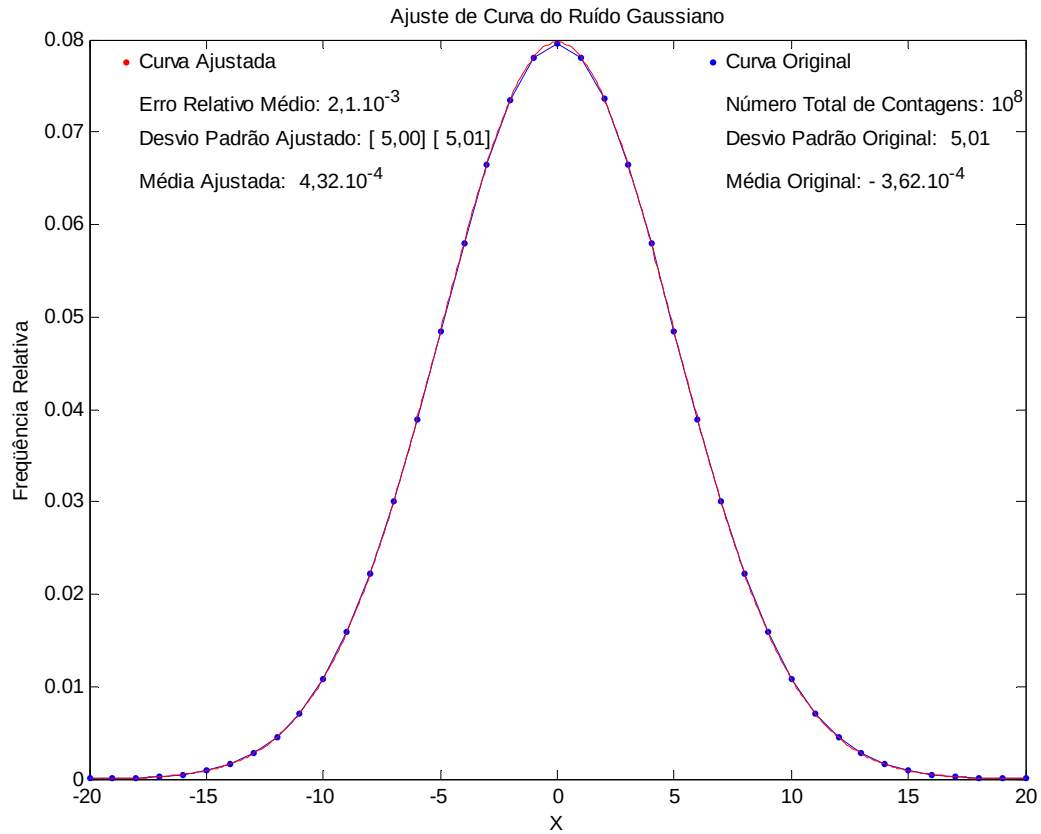


Figura 5.02 – Curva da Fig. 5.01 ajustada segundo uma gaussiana.

Para calcular o valor simulado da medida no ponto considerado em função do nível de ruído $pc(\%)$ adicionado procede-se da seguinte forma,

$$p = \frac{pc}{100} \quad (5.02)$$

$$dv = p \times H \quad (5.03)$$

onde pc , definido como nível de ruído, é a percentagem de H que é medida simulada, sendo dv o desvio que é a fração p de H . A flutuação em torno da média H é dada por,

$$dH = r \times dv \quad (5.04)$$

Portanto os dados com ruído adicionado podem ser calculados pela equação,

$$H_s = H + dH \quad (5.05)$$

onde H_s são os dados simulados com ruído adicionado para aproximar os dados numéricos aos experimentais. Substituindo as Eq.(5.03) e (3.04) na Eq.(5.05) pode-se escrever H_s como

$$H_s = H(1 + r \times p)$$

5.2 Método de Chen

Em geral, na modelagem de estruturas, a matriz de amortecimento é difícil de ser identificada a partir de medidas com ruído, especialmente para estruturas levemente amortecidas. Várias técnicas foram desenvolvidas visando estimar as matrizes de massa, rigidez e de amortecimento de uma estrutura. Ibrahim (1983) apresentou uma formulação de estado que usa um conjunto de modos complexos identificados junto com um modelo matemático analítico da estrutura sob teste. Em tal método um conjunto de modos normais identificados, calculados dos modos complexos é usado nas equações de ortogonalidade para melhorar o cálculo da matriz de massa. Nesta matriz de massa estimada, os modos complexos medidos e os modos analíticos mais altos são usados para melhorar o cálculo da rigidez e do amortecimento. Fritzen (1986) e Wang (1988) desenvolveram um método para a estimativa de modelos a partir de dados contaminados com ruídos. Minas e Inman (1991) apresentaram um método para estimar a matriz de amortecimento de uma estrutura a partir de dados experimentais incompletos. Craig; Kurdila; Kim (1987) desenvolveram um novo algoritmo para a estimativa de parâmetros modais MIMO para a identificação da ordem de modelos estruturais. O método é baseado no domínio da frequência utilizando a excitação e o espectro de resposta. Roemer e Mook (1992) identificaram a matriz de massa, rigidez e amortecimento usando uma aproximação integrada. O amortecimento identificado tem um maior erro relativo. A razão é devido a ordem dos coeficientes de amortecimento que, em geral, são muito menores que a ordem dos coeficientes de rigidez.

O Método de Chen é aplicado neste trabalho para a identificação da matriz de massa e utiliza um processo de mínimos quadrados. Por este método existe, também, a possibilidade de obter os parâmetros rigidez e amortecimento de uma única vez sem iterações adicionais.

No Método de Chen serão empregadas as FRFs normais extraídas das FRFs complexas. Esta técnica, no domínio da frequência, é apropriada para medidas contaminadas com ruído, e em dados experimentais medidos. O método foi proposto inicialmente por Chen; Ju; Tsuei (1996) onde foram feitas apenas validações numéricas.

Neste trabalho, além de simulações numéricas também serão realizados testes em modelos experimentais para validar a metodologia. A análise numérica foi feita a partir das FRFs contaminadas com ruído extraídas das matrizes físicas obtidas pelo método dos elementos finitos e modelos discretos. A análise experimental é feita utilizando as FRFs medidas.

Para identificar as matrizes físicas utilizando o Método de Chen, considere uma estrutura com amortecimento, com a equação do movimento dada por

$$[M]\{\ddot{\bar{x}}(t)\} + [C]\{\dot{\bar{x}}(t)\} + [K]\{\bar{x}(t)\} = \{\bar{f}(t)\} \quad (5.06)$$

onde

$$\bar{x}(t) = \{x(\omega)\}e^{i\omega t} \quad \bar{f}(t) = \{f(\omega)\}e^{i\omega t} \quad (5.07)$$

Para excitação harmônica, substituindo a Eq.(5.07) na Eq.(5.06) tem-se:

$$(-\omega^2[M] + [K])\{x(\omega)\} + i\omega[C]\{x(\omega)\} = \{f(\omega)\} \quad (5.08)$$

O termo dentro dos parêntesis representa a inversa da FRF normal $[H^N(\omega)]^{-1}$. A Eq.(5.08) pode ser escrita como:

$$[H^N(\omega)]^{-1}\{x(\omega)\} + i\omega[C]\{x(\omega)\} = \{f(\omega)\} \quad (5.09)$$

onde $[H^N(\omega)]$ é a matriz FRF gerada dos modos normais. Pré-multiplicando a Eq.(5.09) por $[H^N(\omega)]$, tem-se:

$$\{x(\omega)\} + i[G(\omega)]\{x(\omega)\} = [H^N(\omega)]\{f(\omega)\} \quad (5.10)$$

onde

$$[G(\omega)] = \omega[H^N(\omega)][C] \quad (5.11)$$

é chamada de matriz de transformação. Nota-se que $[G(\omega)]$ é uma matriz real. A Eq.(5.10) pode ser expressa como:

$$\{x(\omega)\} = ([I] + i[G(\omega)])^{-1} [H^N(\omega)] \{f(\omega)\} \quad (5.12)$$

onde $[I]$ é uma matriz identidade de ordem $n \times n$. A resposta em frequência pode ser representada também como:

$$[x(\omega)] = [H(\omega)] \{f(\omega)\} \quad (5.13)$$

onde $[H(\omega)]$ é a matriz FRF complexa. Comparando as Eq.(5.12) e (5.13), a relação entre as FRFs para modos complexos e modos normais é dada por:

$$[H^N(\omega)] = ([I] + i[G(\omega)]) [H(\omega)] \quad (5.14)$$

Nota-se que $[H(\omega)]$ é uma matriz quadrada desde que foi sintetizada pela identificação dos modos complexos. Separando $[H(\omega)]$ em partes real e imaginária, e expandindo a equação resultante tem-se que:

$$[H^N(\omega)] = ([H_R(\omega)] - [G(\omega)][H_I(\omega)]) + i([G(\omega)][H_R(\omega)] + [H_I(\omega)]) \quad (5.15)$$

Se o lado esquerdo da Eq.(5.15) é uma matriz real, então a parte imaginária do lado direito deve ser igual a zero para todas as frequências e a matriz de transformação $[G(\omega)]$ pode ser resolvida em termos das matrizes $[H_R(\omega)]$ e $[H_I(\omega)]$. Ou seja;

$$[G(\omega)] = -[H_I(\omega)] [H_R(\omega)]^{-1} \quad (5.16)$$

Substituindo a Eq.(5.16) na Eq.(5.15) e sabendo-se que é real, tem-se que:

$$[H^N(\omega)] = [H_R(\omega)] + [H_I(\omega)] [H_R(\omega)]^{-1} [H_I(\omega)] \quad (5.17)$$

A matriz de transformação $[G(\omega)]$ e a matriz FRF normal $[H^N(\omega)]$ podem ser calculadas respectivamente pelas Eq.(5.16) e (5.17). Uma vez disponíveis as matrizes $[G(\omega)]$ e $[H^N(\omega)]$, a matriz de amortecimento pode ser calculada da Eq.(5.11).

5.2.1 Estimativa da matriz de amortecimento

Para uma estrutura livre de ruído, uma solução exata para a matriz de amortecimento pode ser obtida diretamente da Eq.(5.11) por:

$$[C] = \frac{1}{\omega} [H^N(\omega)]^{-1} [G(\omega)] \quad (5.18)$$

onde ω é uma frequência qualquer. Na prática as FRFs são contaminadas com ruído cuja intensidade depende das condições experimentais. Neste caso, emprega-se o Método dos Mínimos Quadrados para obter a matriz de amortecimento. Da Eq.(5.11) obtém-se;

$$\begin{aligned} \omega [H^N(\omega_k)] [C] &= [G(\omega_k)] \\ \omega [h_i^N(\omega_k)] [C] &= [g_i(\omega_k)] \end{aligned} \quad (5.19)$$

onde $\{h_i^N(\omega_k)\}$ e $\{g_i(\omega_k)\}$ são os i -ésimos vetores linhas de $[H^N(\omega_k)]$ e $[G(\omega_k)]$, respectivamente. A Eq.(5.19) pode ser escrita como:

$$[\bar{V}] [C] = [\bar{Q}] \quad (5.20)$$

onde as matrizes $[\bar{V}]$ e $[\bar{Q}]$ são dadas por:

$$[\bar{V}] = \begin{bmatrix} \omega_1 [h_1^N(\omega_1)]_{1 \times n} \\ \omega_2 [h_2^N(\omega_2)]_{1 \times n} \\ \dots \\ \omega_m [h_m^N(\omega_m)]_{1 \times n} \end{bmatrix}_{mn \times n} \quad [\bar{Q}] = \begin{bmatrix} [g_1(\omega_1)]_{1 \times n} \\ [g_2(\omega_2)]_{1 \times n} \\ \dots \\ [g_m(\omega_m)]_{1 \times n} \end{bmatrix}_{mn \times n} \quad (5.21)$$

Sendo $[C]$ uma matriz simétrica, define-se um vetor $\{c\}$ da matriz triangular superior, ou inferior, de $[C]$ como:

$$\{c\} = [c_{11} \quad c_{12} \quad \cdots \quad c_{1n} \quad c_{22} \quad c_{23} \quad \cdots \quad c_{2n} \quad \cdots \quad c_{nn}]_{1 \times \frac{n(n+1)}{2}}^t \quad (5.22)$$

onde c_{ij} é o ij -ésimo elemento da matriz de amortecimento $[C]$. Re-arranjando as matrizes $[\bar{V}]$ e $[\bar{Q}]$ apropriadamente, de acordo com a Eq.(5.22), tem-se que:

$$[V]\{c\} = \{q\} \quad (5.23)$$

onde $[V]$ e $\{q\}$ são formados pelas matrizes $[\bar{V}]$ e $[\bar{Q}]$. $[V]$, $\{c\}$ e $\{q\}$ são de ordem $mn^2 \times \frac{n(n+1)}{2}$, $\frac{n(n+1)}{2} \times 1$ e $mn^2 \times 1$ respectivamente. A Eq.(5.23) pode ser resolvida pelo Método dos Mínimos Quadrados, ou seja;

$$\{c\} = [V]^t \{q\} \quad (5.24)$$

Da solução do vetor $\{c\}$ obtém-se a matriz de amortecimento $[C]$. Nota-se que o amortecimento é obtido independentemente das matrizes de massa e da rigidez.

5.2.2 Estimativa das matrizes de massa e rigidez

Considerando um sistema não amortecido, a equação do movimento pode ser escrita como:

$$(-\omega^2[M] + [K])\{x^N(\omega)\} = \{f(\omega)\} \quad (5.25)$$

onde

$$(-\omega^2[M] + [K])[H^N(\omega)] = [I] \quad (5.26)$$

Considerando a simetria de $[H^N(\omega)]$, $[M]$ e $[K]$, e tomando a i -ésima linha, tem-se que:

$$[\bar{A}][M] + [\bar{B}][K] = [\bar{E}] \quad (5.27)$$

onde

$$[\bar{A}] = - \begin{bmatrix} [\omega_1^2 h_i^N(\omega_1)]_{1 \times n} \\ [\omega_1^2 h_i^N(\omega_2)]_{1 \times n} \\ \dots \\ [\omega_1^2 h_i^N(\omega_m)]_{1 \times n} \end{bmatrix}_{mn \times n} \quad [\bar{B}] = \begin{bmatrix} [h_i^N(\omega_1)]_{1 \times n} \\ [h_i^N(\omega_2)]_{1 \times n} \\ \dots \\ [h_i^N(\omega_m)]_{1 \times n} \end{bmatrix}_{mn \times n} \quad (5.28)$$

sendo $[\bar{E}]$ a matriz identidade. A Eq.(5.27) pode ser escrita na forma:

$$\begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M \\ K \end{bmatrix} = [\bar{E}] \quad (5.29)$$

Fazendo $[\bar{R}] = [\bar{A} \quad \bar{B}]$ e $[S] = \begin{bmatrix} M \\ K \end{bmatrix}$, a Eq.(5.29) pode ser escrito como,

$$[\bar{R}][S] = [\bar{E}] \quad (5.30)$$

Sendo $[S]$ formado por duas matrizes simétricas, define-se um vetor $\{s\}$ formado pelas duas matrizes triangulares inferiores de $[M]$ e $[K]$, como

$$\begin{aligned} \{m\} &= [m_{11} \quad m_{12} \quad \dots \quad m_{1n} \quad m_{22} \quad m_{23} \quad \dots \quad m_{2n} \quad \dots \quad m_{nn}]_{1 \times \frac{n(n+1)}{2}}^t \\ \{k\} &= [k_{11} \quad k_{12} \quad \dots \quad k_{1n} \quad k_{22} \quad k_{23} \quad \dots \quad k_{2n} \quad \dots \quad k_{nn}]_{1 \times \frac{n(n+1)}{2}}^t \\ \{s\} &= \begin{Bmatrix} m \\ k \end{Bmatrix}_{n(n+1) \times 1} \end{aligned} \quad (5.31)$$

onde m_{ij} e k_{ij} são os ij -ésimos elemento das matrizes de massa e rigidez respectivamente. Re-arranjando as matrizes $[\bar{R}]$ e $[\bar{E}]$ apropriadamente, de acordo com a Eq.(5.31), a Eq.(5.30) pode ser escrita na forma

$$[R]\{s\} = \{e\} \quad (5.32)$$

onde $[R]$ e e são formados pelas matrizes $[\bar{R}]$ e $[\bar{E}]$. $[R]$ $\{s\}$ e $\{e\}$ são de ordem $mn^2 \times n(n+1)$, $n(n+1) \times 1$ e $mn^2 \times 1$ respectivamente. A Eq.(5.32) pode ser resolvida pelo Método dos Mínimos Quadrados, ou seja;

$$\{s\} = [R]^t \{e\} \quad (5.33)$$

onde $[R]$, $\{s\}$ e $\{e\}$ são formados pelas matrizes $[\bar{R}]$, $[S]$ e $[\bar{E}]$, respectivamente. Da solução do vetor s obtém-se as matrizes $[M]$ e $[K]$.

O Método de Chen foi implementado em ambiente MATLAB juntamente com os métodos de síntese modal SMFR e MMD mostrados no capítulo II. O fluxograma da Fig. 5.03 mostra o algoritmo implementado para o do Método de Chen.

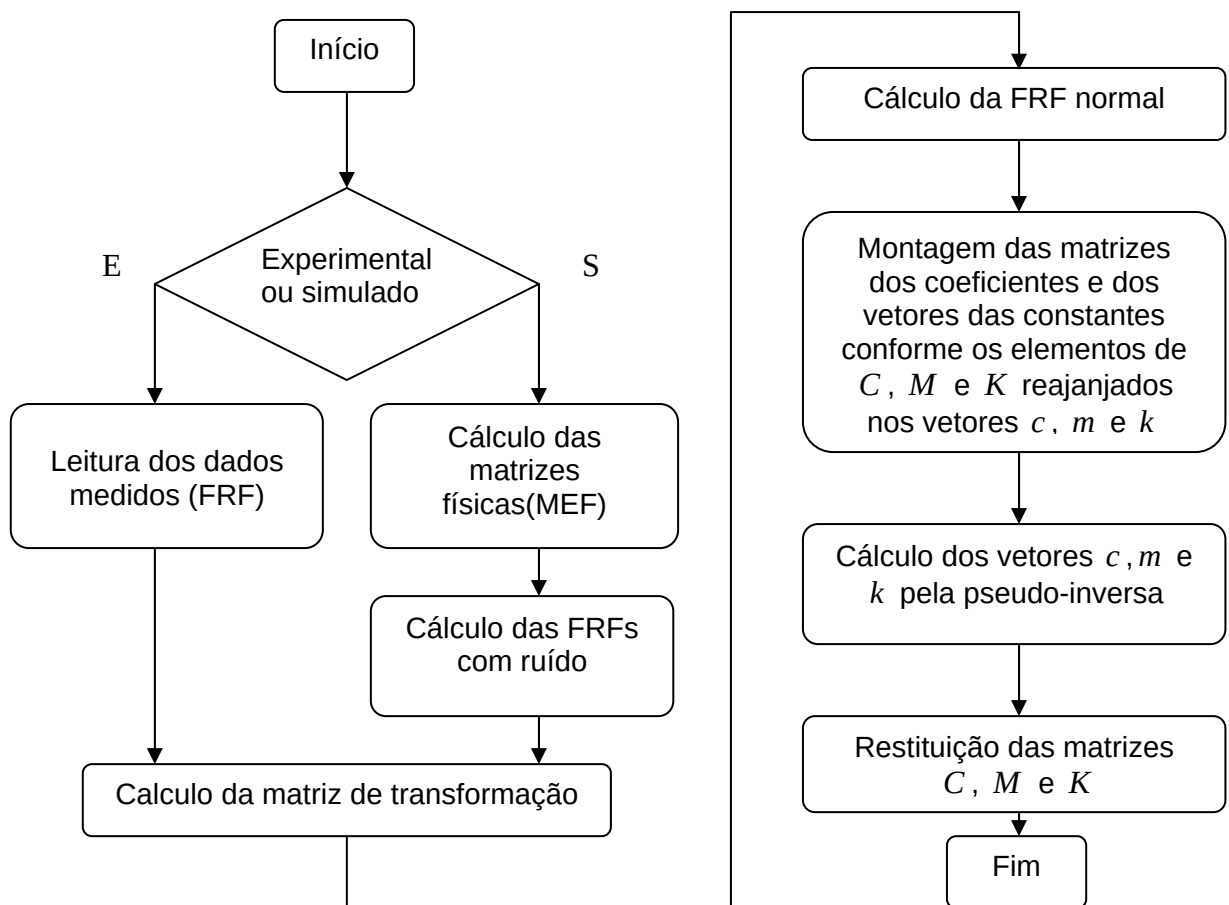


Figura 5.03 – Fluxograma do algoritmo do Método de Chen implementado em código MATLAB.

O primeiro passo a ser definido é se as matrizes físicas a serem calculadas são de um modelo experimental ou simulado. No primeiro caso serão lidas as FRFs medidas. Caso contrário serão lidos os dados da estrutura simulada para que sejam obtidas as matrizes físicas do sistema. A partir destas matrizes são calculadas as FRFs que serão usadas no método. A estas últimas será adicionado ruído, para simular as FRFs experimentais. A seguir são calculadas a matriz de transformação e as FRFs normais para fazer a montagem das matrizes dos coeficientes e dos vetores das constantes. Os elementos de $[M]$, $[C]$ e $[K]$ são determinados usando o Método dos Mínimos Quadrados. Esses elementos são

calculados na forma vetorial e depois são ajustados à forma matricial. A listagem do programa desenvolvido em MATLAB encontra-se no Anexo II.

5.2.3 Simulações numéricas

O processo de identificação utilizando o Método de Chen foi avaliado através de exemplos de simulação numérica e de um modelo experimental. O objetivo principal destas análises foi verificar a sensibilidade do método e avaliar a precisão das identificações das matrizes de massa.

Nos modelos de simulação do tipo massa-mola-amortecedor foi utilizado ruído gaussiano, como mostrado na seção 5.1, no sinal das FRFs numéricas para simular as FRFs experimentais. No processo de medidas experimentais é comum obter a FRF como média de várias medidas. Nas FRFs simuladas também será usado a média de várias FRFs com ruído. A cada FRF incluída na média será atribuída uma contagem. Assim uma em média de dez FRFs considera-se uma FRF com dez contagens.

Foram realizadas duas simulações numéricas com diferentes graus de liberdade para avaliar a sensibilidade do método. Foi avaliada uma estrutura com quatro e outra com oito graus de liberdade. Foram realizados três simulações em cada um dos modelos. Em duas delas foi adicionado ruído gaussiano aos dados calculados para torná-los mais próximos de uma formulação experimental e a outra foi considerada sem ruído afim de verificar a precisão do método. Em uma das duas simulações com ruído foram utilizadas FRFs com uma única contagem e na outra foi utilizada as FRFs com quinze contagens.

a) Sistema massa-mola-amortecedor com quatro graus de liberdade

A Fig. 5.04 apresenta o modelo discreto massa-mola-amortecedor com quatro graus de liberdade utilizado para avaliar o Método de Chen.

A matriz de transformação e as FRFs normais foram calculadas a partir das FRFs simuladas e as matrizes de massa, rigidez e de amortecimento foram estimadas pelas Eq.(5.24) e (5.33).

Os resultados da simulação com 5% de ruído com uma contagem são mostrados nas Tab. 5.01, 5.02 e 5.03. A Tab. 5.01 mostra o erro relativo das frequências e o índice MAC dos modos obtidos das matrizes físicas identificadas. Na Tab. 5.02 são mostrados os fatores de amortecimento com seus respectivos erros relativos e a Tab. 5.03 mostra a precisão da massa identificada. As tabelas referentes às simulações sem ruído e com quinze contagens foram omitidas porque os valores são iguais ou muito próximos aos valores exatos.

O erro relativo na identificação da massa aproximou-se dos 11%. Mesmo assim os erros relativos das frequências foram bem menores do que 1% e o índice MAC ficou muito

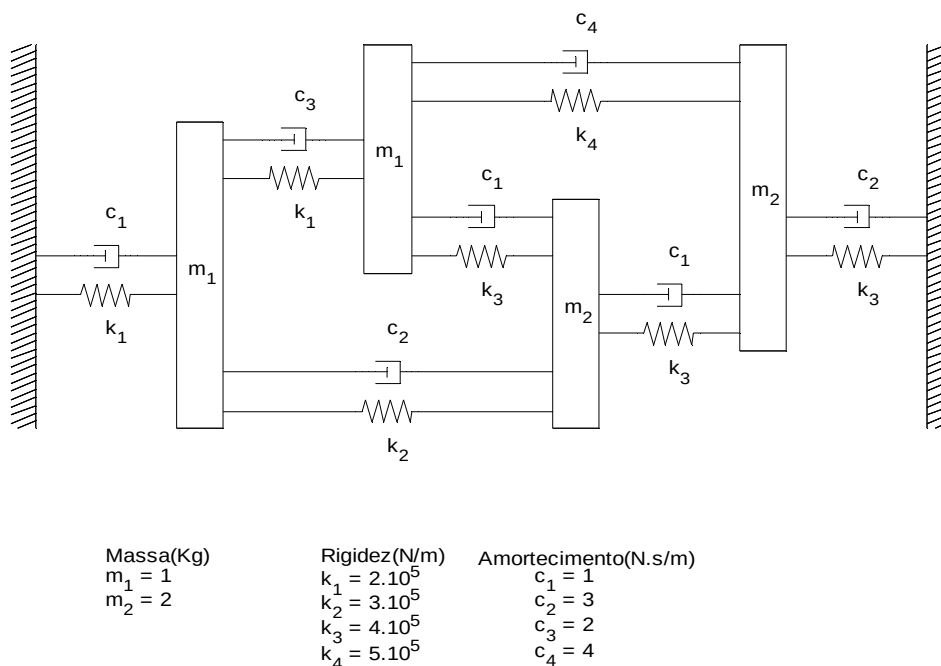


Figura 5.04 – Sistema discreto massa-mola-amortecedor de quatro GDL.

próximo da unidade. Isto significa que o método identifica matrizes equivalentes. Os fatores de amortecimento tiveram erros relativos até 48%. Estes índices elevados devem-se aos baixos valores dos fatores de amortecimento.

A Fig. 5.05 representa os modos e as FRFs da simulação com ruído de 5% e uma única contagem. As matrizes físicas identificadas são idênticas às matrizes físicas exatas do sistema para o caso sem ruído e muito próximas para o caso onde usa FRFs com quinze contagens como pode ser visto nos gráficos das Fig. 5.06 e 5.07, respectivamente. Observou-se que quanto maior o número de contagens nas médias das FRFs, mais precisos serão os resultados. Com um número infinito de contagens as matrizes físicas identificadas serão exatas pois, nesse caso, as FRFs seriam iguais as originais.

Tabela 5.01 – Frequências naturais amortecidas (Hz) , originais e identificadas e índice MAC para o modelo discreto com quatro GDL (Ruído de 5%-uma contagem).

Original	Identificada	Erro Relativo(%)	MAC
47,4208	47,4838	0,1328	1,0000
129,3873	129,2981	0,0670	0,9998
150,3482	149,6519	0,4631	0,9998
185,4626	184,9347	0,2847	1,0000

Tabela 5.02 – Fatores de amortecimento originais e identificados para o modelo discreto com quatro GDL (Ruído de 5%-uma contagem).

Original	Identificado	Erro Relativo(%)
0,0010	0,0005	47,9893
0,0026	0,0034	27,0270
0,0029	0,0035	21,2656
0,0039	0,0043	9,5773

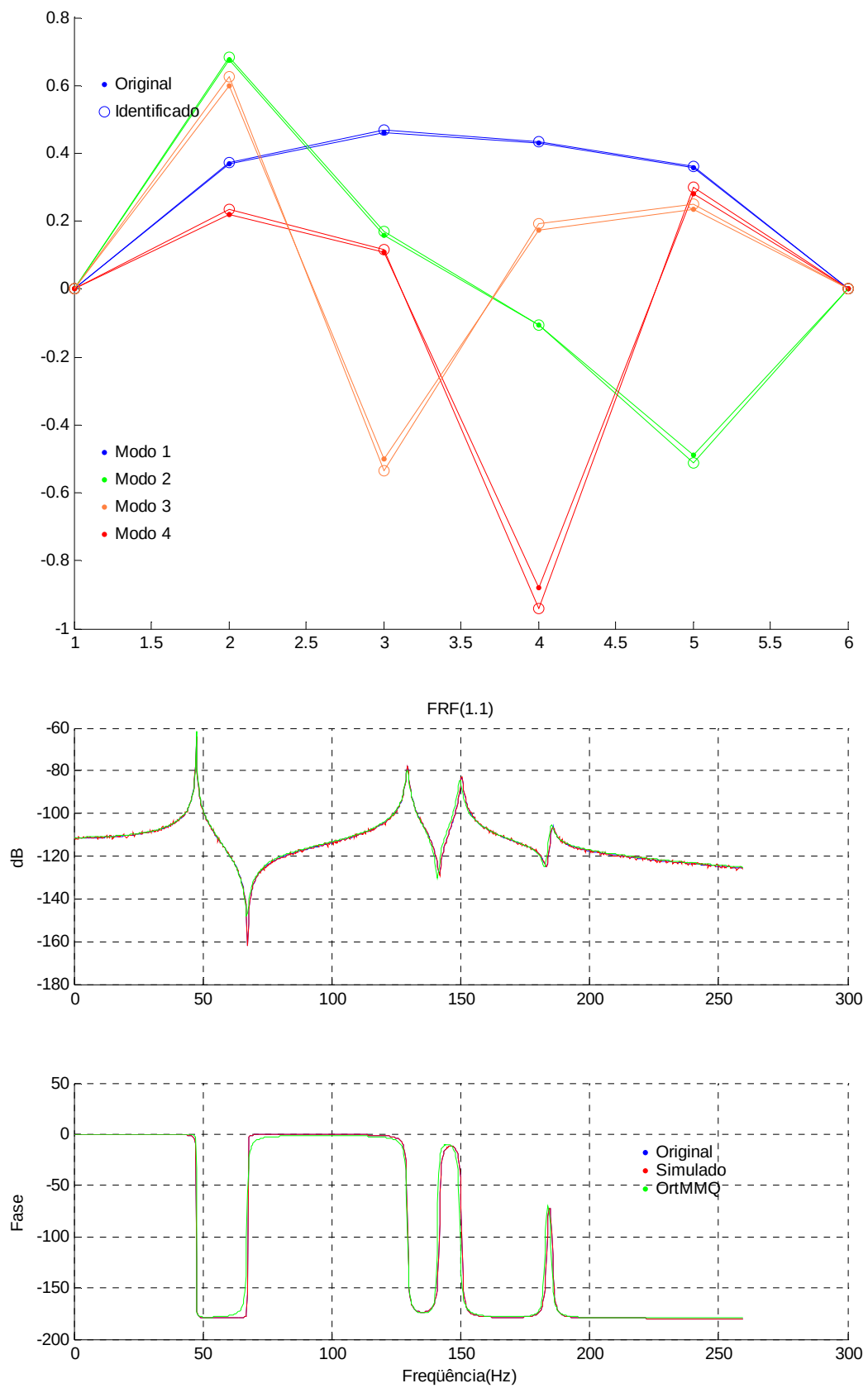


Figura 5.05 – Modos e FRF de simulação do modelo com quatro GDL (com 5% de ruído e uma contagem – Chen).

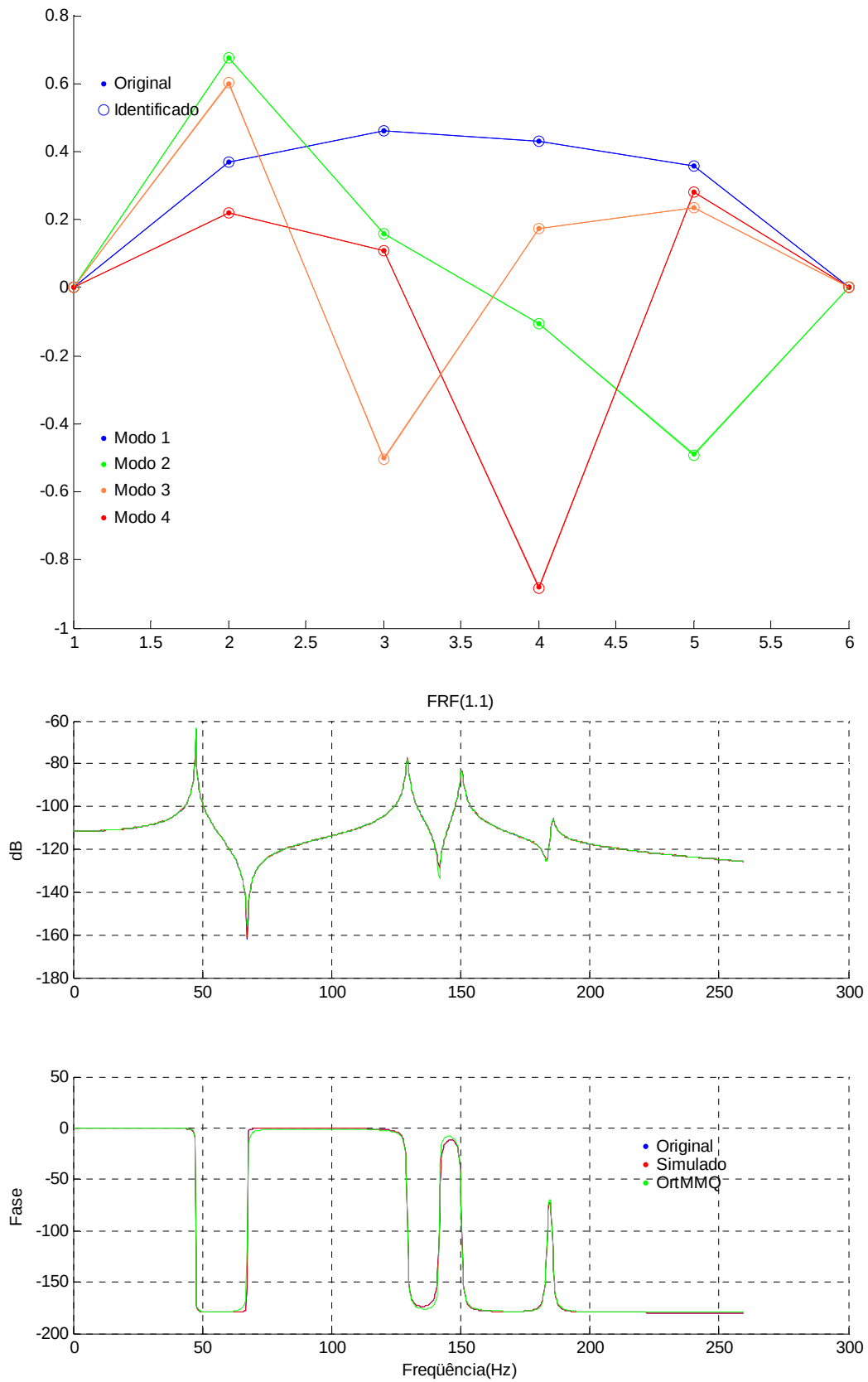


Figura 5.06 – Modos e FRF de simulação do modelo com quatro GDL (com 5% de ruído e quinze contagens – Chen).

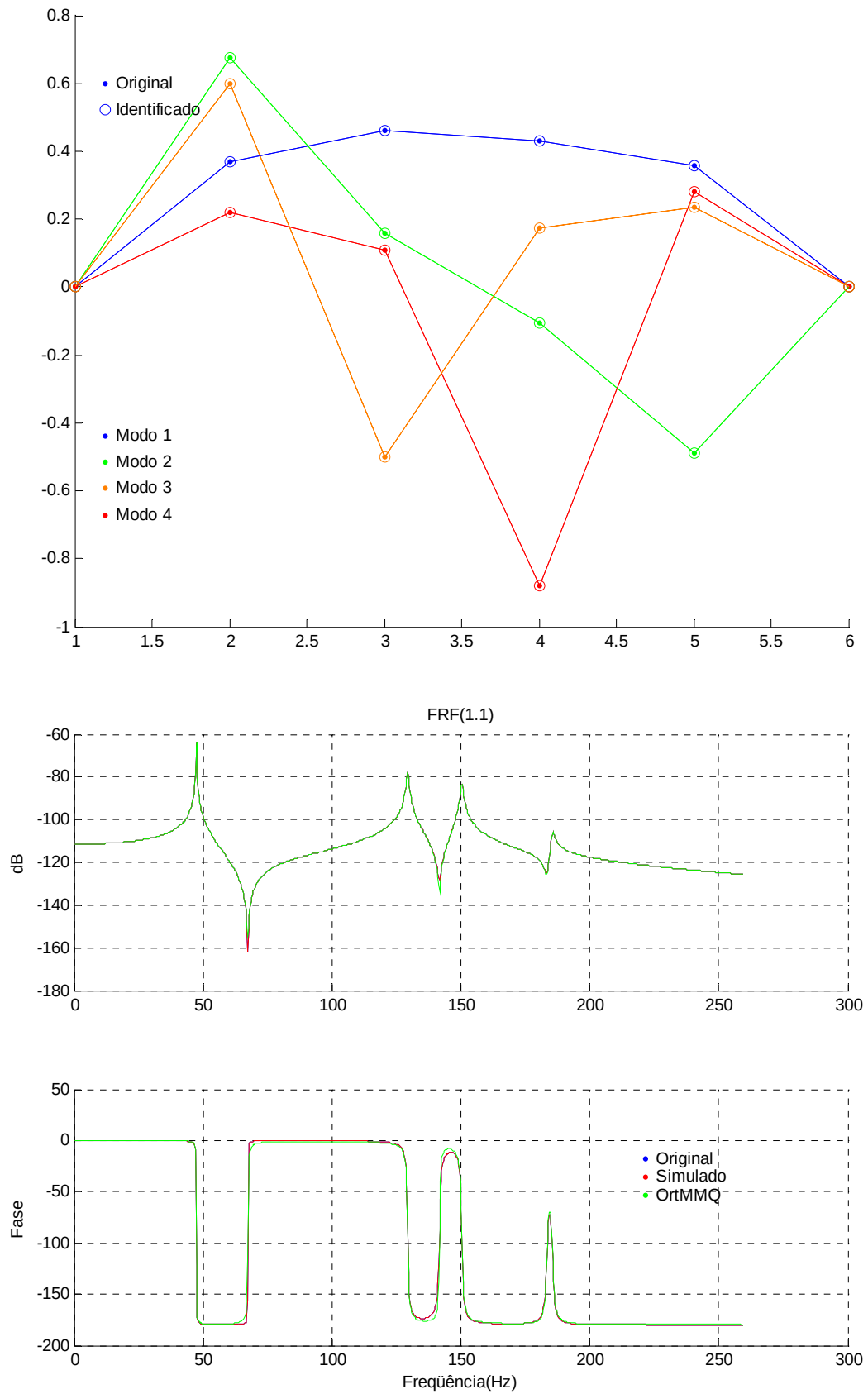


Figura 5.07 – Modos e FRF de simulação do modelo com quatro GDL (sem ruído – Chen).

Tabela 5.03 – Matrizes de massa originais e identificadas para o modelo discreto com quatro GDL (Ruído de 5%-uma contagem).

Valores Originais			
1	0	0	0
0	2	0	0
0	0	1	0
0	0	0	2
Valores Identificados			
0,9519	0,0285	0,0095	-0,0207
0,0285	1,8252	0,0441	0,0568
0,0095	0,0441	0,8923	0,0408
-0,0207	0,0568	0,0408	1,8411
Erro Relativo(%)			
4,8051	-	-	-
-	8,7409	-	-
-	-	10,7701	-
-	-	-	7,9469

b) Sistema massa-mola-amortecedor com oito graus de liberdade

A Fig. 5.08 mostra o segundo exemplo de simulação numérica avaliado. O sistema consiste de elementos discretos do tipo massa-mola-amortecedor com oito graus de liberdade. Para este modelo foram realizadas simulações nas mesmas condições realizadas com o modelo anterior.

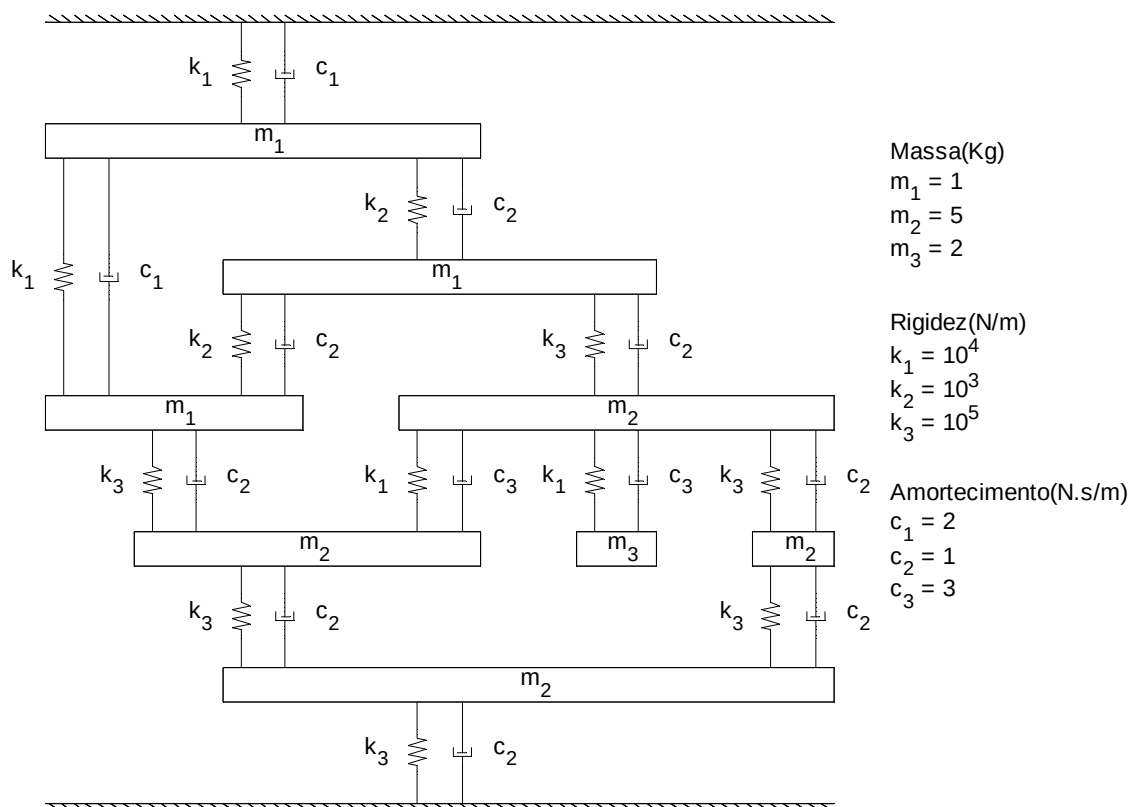


Figura 5.08 – Sistema discreto massa-mola-amortecedor com oito GDL.

Os resultados da simulação com 5% de ruído com uma contagem são mostrados nas Tab. 5.04, 5.05 e 5.06. A Tab. 5.04 mostra o erro relativo das frequências e o índice MAC dos modos obtidos das matrizes físicas identificadas. Na Tab. 5.05 são mostrados os fatores de amortecimento com seus respectivos erros relativos e a Tab. 5.06 mostra a precisão da massa identificada. As tabelas referentes às simulações sem ruído e com quinze contagens foram omitidas porque os valores são iguais ou muito próximos aos valores exatos.

O erro relativo na identificação da massa foi próximo de 21% mas os erros relativos das frequências foram próximos de 3% e o índice MAC ficou muito próximo da unidade. O erro relativo da massa não afeta a precisão dos resultados pois as matrizes identificadas são equivalentes. Os fatores de amortecimento tiveram erro relativo máximo de 208%.

A Fig. 5.09 mostra os modos e as FRFs da simulação com ruído de 5% e uma única contagem. Para este modelo também, as matrizes físicas identificadas são bem próximas às matrizes físicas exatas do sistema para o caso sem ruído e para o caso onde usa FRFs com quinze contagens como pode ser visto nos gráficos das Fig. 5.10 e 5.11 respectivamente. Os gráficos do índice MAC e dos erros relativos das frequências estão na Fig. 5.12.

Tabela 5.04 – Frequências naturais amortecidas (Hz) originais e identificadas e índice MAC para o modelo discreto com oito GDL (Ruído de 5%-uma contagem).

Original	Identificada	Erro Relativo(%)	MAC
8,0419	8,0884	0,5787	0,9999
12,4666	12,4631	0,0281	0,9996
19,2000	19,3013	0,5276	0,9994
23,5342	23,5142	0,0848	0,9997
32,1776	32,1249	0,1639	0,9951
44,0790	43,6845	0,8950	0,9766
56,7682	54,9643	3,1777	0,9864
58,4941	57,8095	1,1705	0,9958

Tabela 5.05 – Fatores de amortecimento originais e identificados para o modelo discreto com oito GDL (Ruído de 5%-uma contagem).

Original	Identificado	Erro Relativo(%)
0,0024	0,0074	208,0556
0,0087	0,0081	6,7008
0,0092	0,0108	18,3933
0,0144	0,0154	6,9958
0,0022	0,0037	62,5057
0,0020	0,0030	48,3789
0,0039	0,0089	126,5771
0,0058	0,0073	26,6126

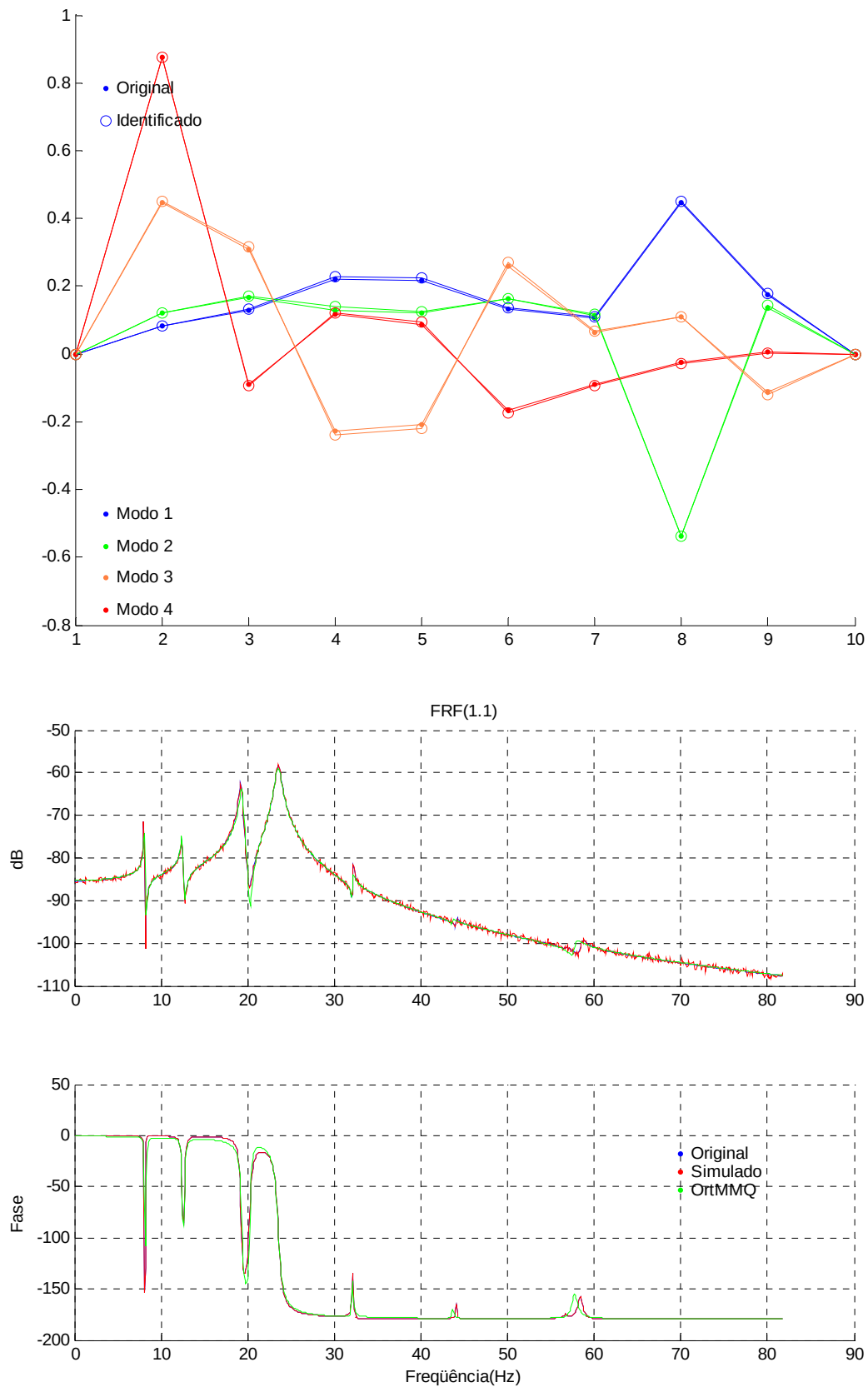


Figura 5.09 – Quatro modos e uma FRF de simulação do modelo com oito GDL (com 5% de ruído e uma contagem – Chen).

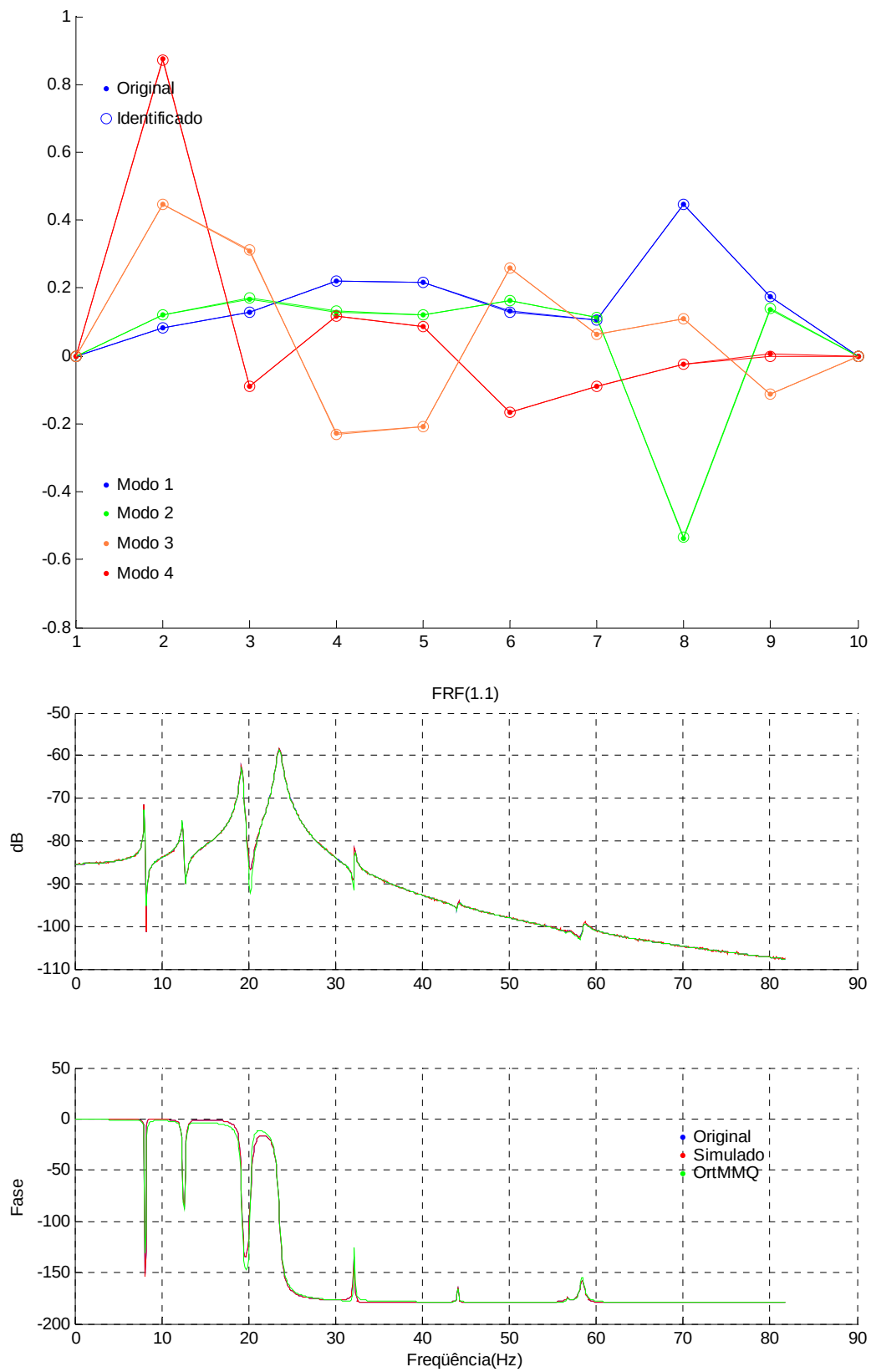


Figura 5.10 – Quatro m e uma FRF de simulação do modelo com oito GDL (com 5% de ruído e quinze contagens – Chen).

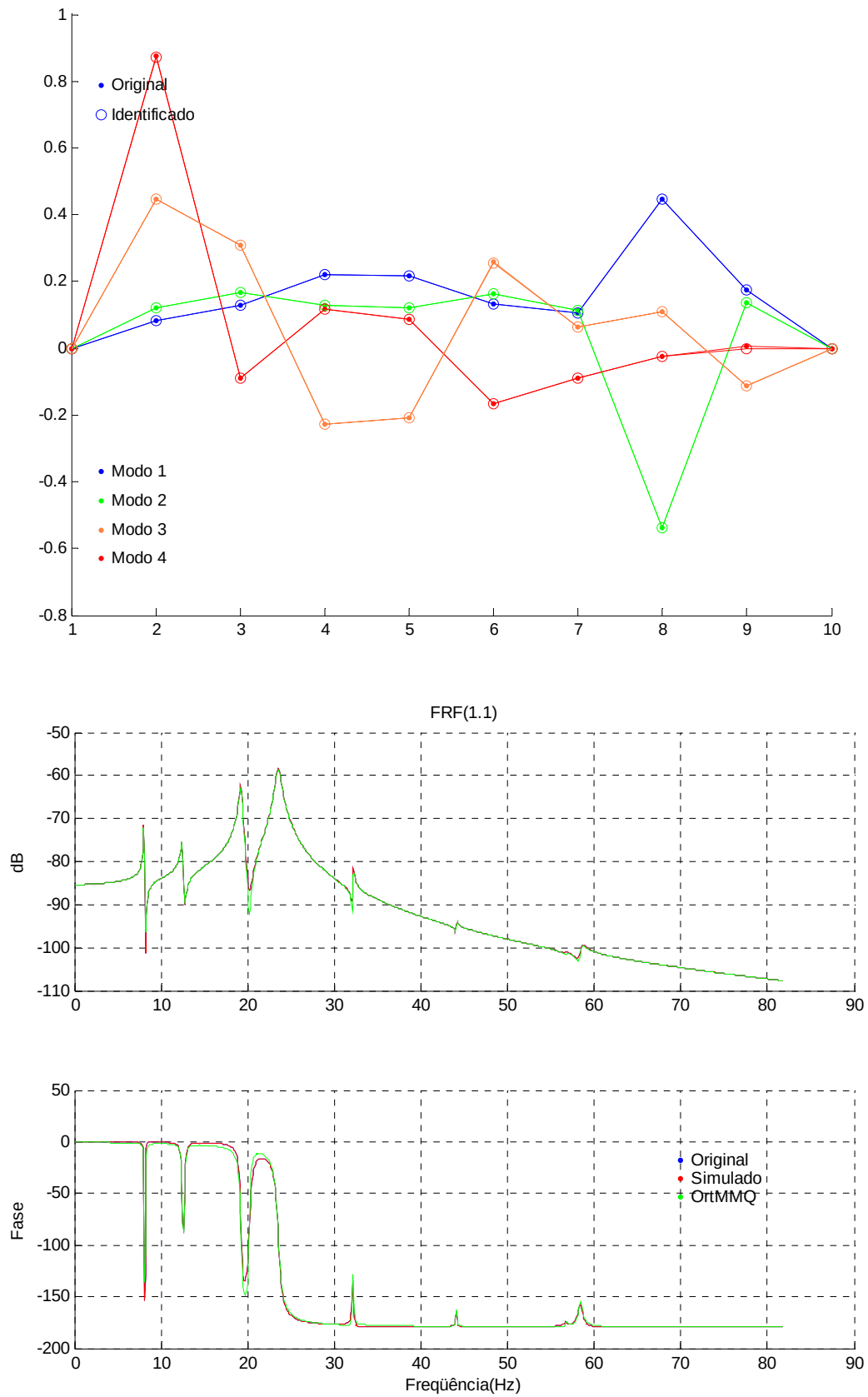


Figura 5.11 – Quatro m e uma FRF de simulação do modelo com oito GDL (sem ruído – Chen).

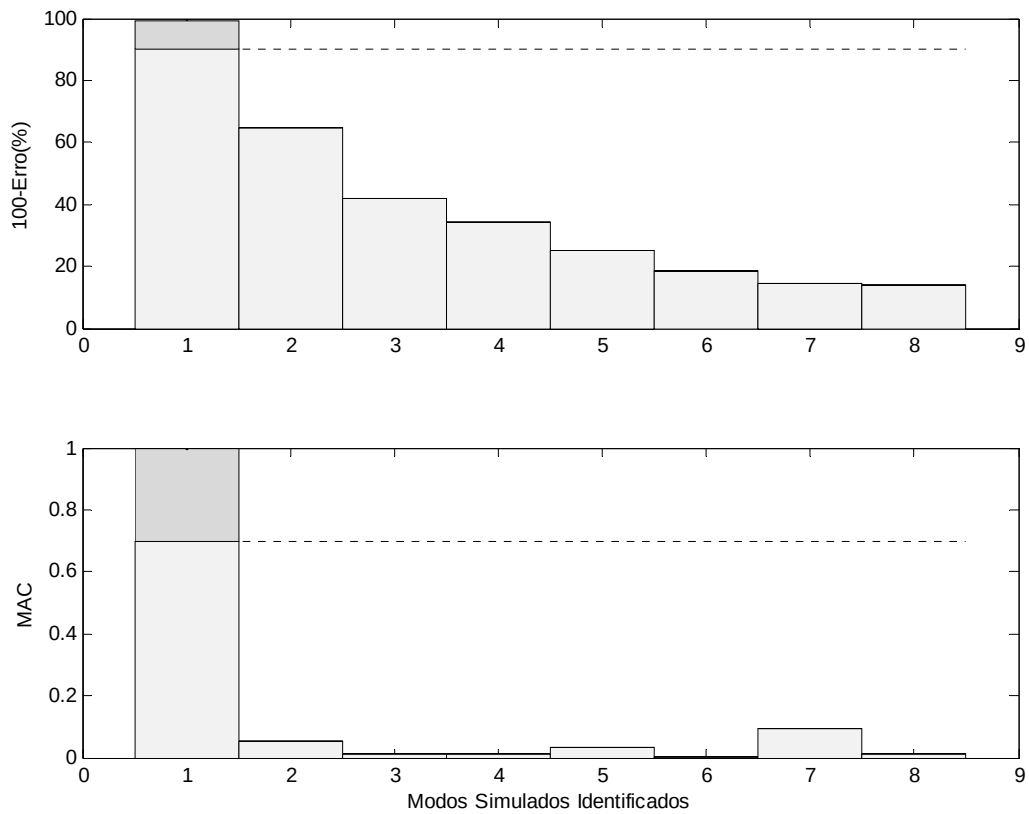


Figura 5.12a – Erro relativo da frequência e índice MAC do primeiro modo identificado para o modelo discreto com oito GDL (Ruído de 5%-uma contagem – Chen).

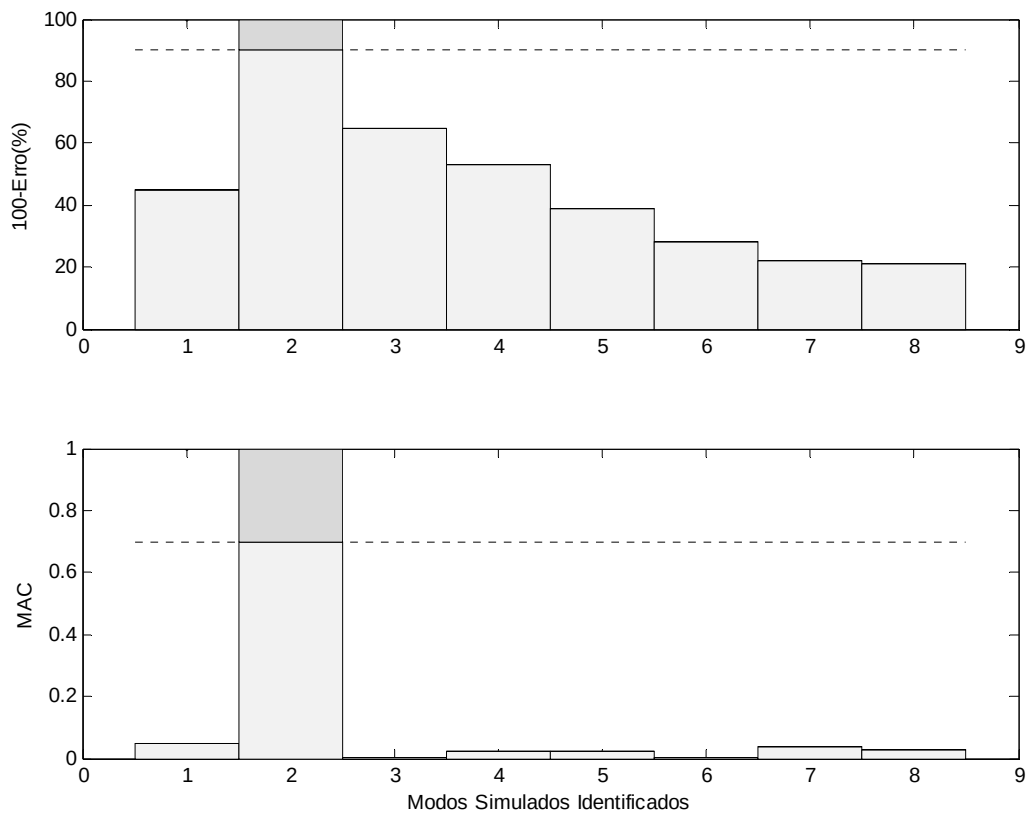


Figura 5.12b – Erro relativo da frequência e índice MAC do segundo modo identificado para o modelo discreto com oito GDL (Ruído de 5%-uma contagem – Chen).

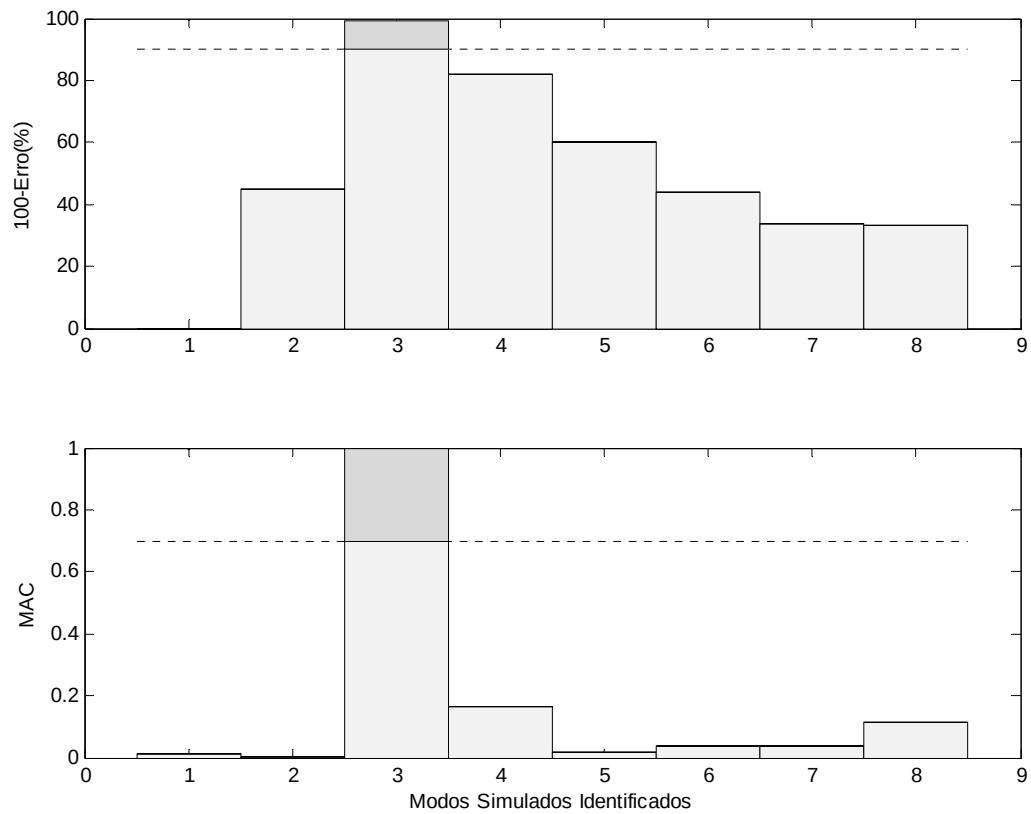


Figura 5.12c – Erro relativo da frequência e índice MAC do terceiro modo identificado para o modelo discreto com oito GDL (Ruído de 5%-uma contagem – Chen).

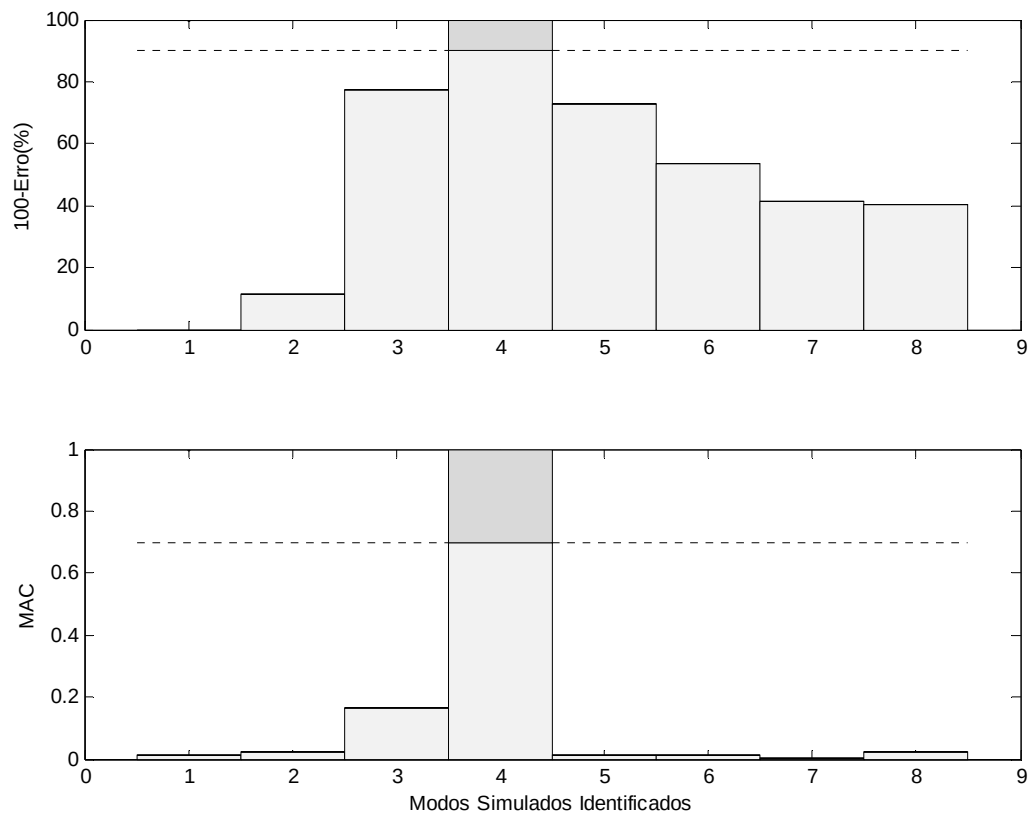


Figura 5.12d – Erro relativo da frequência e índice MAC do quarto modo identificado para o modelo discreto com oito GDL (Ruído de 5%-uma contagem – Chen).

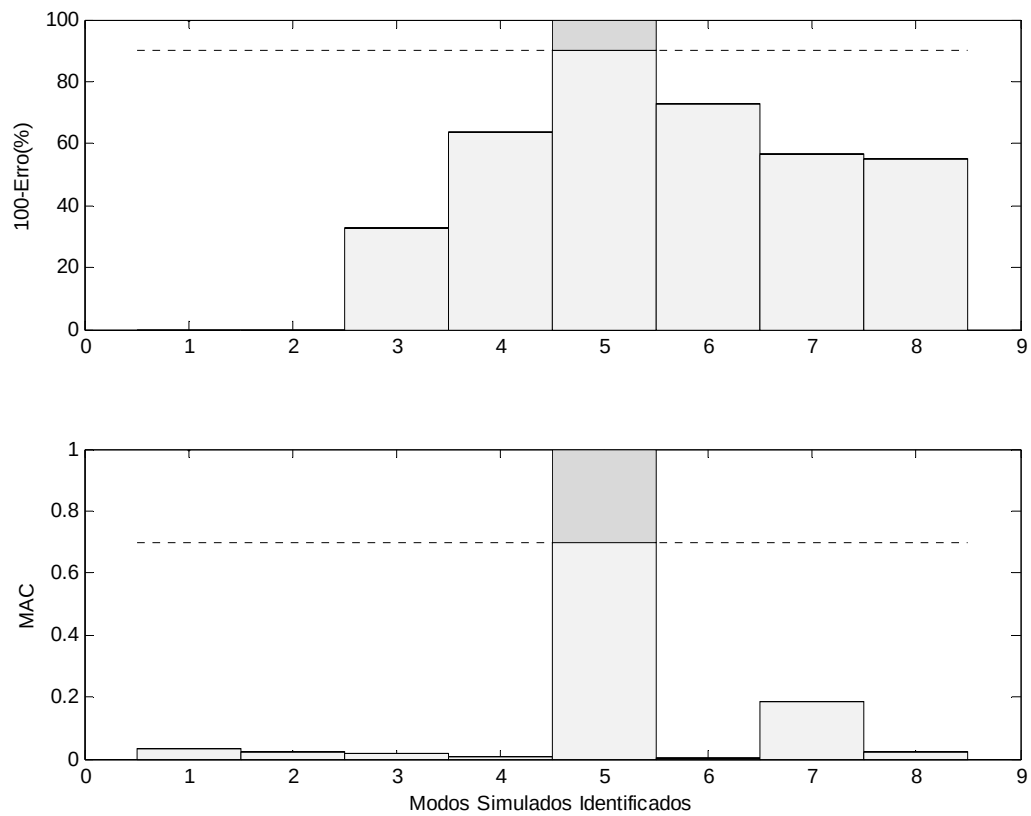


Figura 5.12e – Erro relativo da frequência e índice MAC do quinto modo identificado para o modelo discreto com oito GDL (Ruído de 5%-uma contagem – Chen).

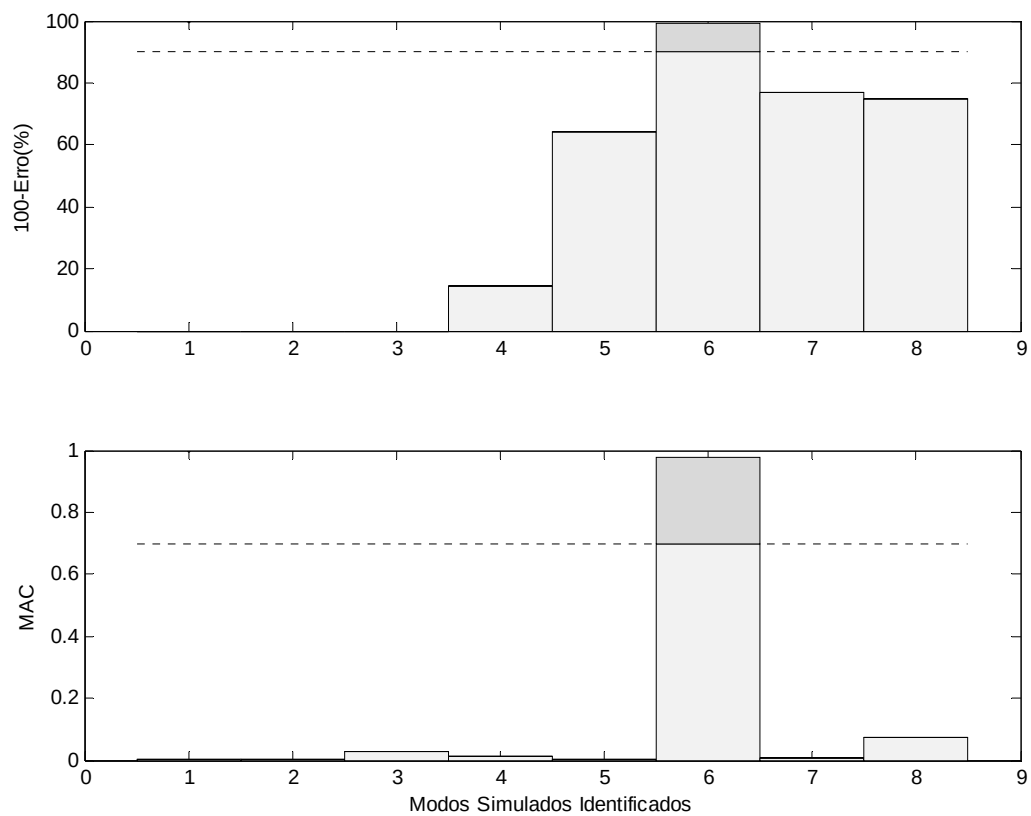


Figura 5.12f – Erro relativo da frequência e índice MAC do sexto modo identificado para o modelo discreto com oito GDL (Ruído de 5%-uma contagem – Chen).

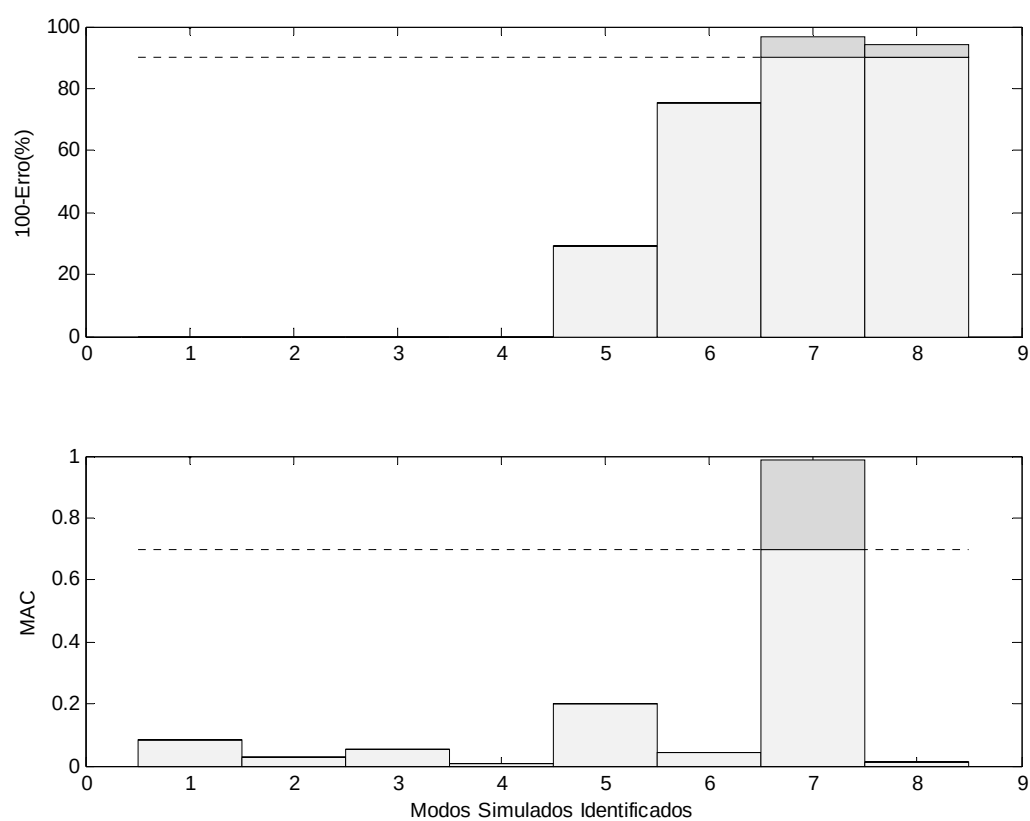


Figura 5.12g – Erro relativo da frequência e índice MAC do sétimo modo identificado para o modelo discreto com oito GDL (Ruído de 5%-uma contagem – Chen).

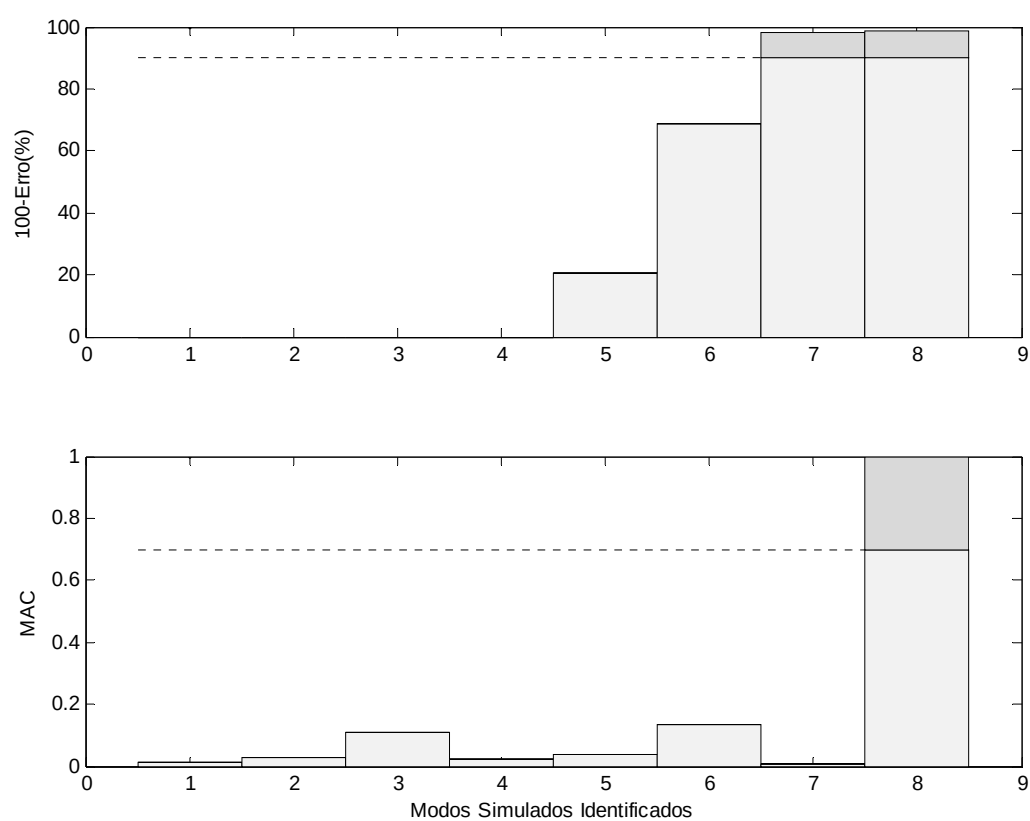


Figura 5.12h – Erro relativo da frequência e índice MAC do oitavo modo identificado para o modelo discreto com oito GDL (Ruído de 5%-uma contagem – Chen).

Tabela 5.06 – Matrizes de massa originais e identificadas para o modelo discreto com oito GDL (Ruído de 5%-uma contagem).

Valores Originais							
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	5	0	0	0	0
0	0	0	0	5	0	0	0
0	0	0	0	0	5	0	0
0	0	0	0	0	0	2	0
0	0	0	0	0	0	0	5
Valores Identificados							
0,9884	0,0122	0,0009	-0,0030	-0,0119	-0,0009	0,0003	-0,0026
0,0122	0,8426	0,0158	-0,0111	0,1065	-0,0334	-0,0007	0,0127
0,0009	0,0158	0,7849	0,1584	-0,0204	0,0277	-0,0010	-0,0327
-0,0030	-0,0111	0,1584	3,9320	0,0706	-0,0870	0,0212	0,5099
-0,0119	0,1065	-0,0204	0,0706	4,3319	0,3212	-0,0259	-0,0166
-0,0009	-0,0334	0,0277	-0,0870	0,3212	4,0604	-0,0155	0,3287
0,0003	-0,0007	-0,0010	0,0212	-0,0259	-0,0155	1,9805	-0,0007
-0,0026	0,0127	-0,0327	0,5099	-0,0166	0,3287	-0,0007	4,1545
Erro Relativo(%)							
1,1605	-	-	-	-	-	-	-
-	15,7387	-	-	-	-	-	-
-	-	21,5140	-	-	-	-	-
-	-	-	21,3593	-	-	-	-
-	-	-	-	13,3624	-	-	-
-	-	-	-	-	18,7915	-	-
-	-	-	-	-	-	0,9744	-
-	-	-	-	-	-	-	16,9097

5.2.4 Modelo experimental

A avaliação do Método de Chen com dados experimentais foi feita utilizando uma estrutura com três graus de liberdade mostrada na Fig. 5.13. A estrutura é constituída por três placas de alumínio paralelas entre si e conectadas por lâminas de aço de 1 mm de espessura. Cada conexão é feita por um conjunto de quatro lâminas que são fixadas às placas através de parafusos. O conjunto é montado em uma base fixada a uma mesa inercial. As placas podem ser aproximadas por massas concentradas, M_1 , M_2 e M_3 , com coeficientes de rigidez, K_1 , K_2 e K_3 , constituídos pela combinação da rigidez das quatro lâminas que fazem as respectivas conexões entre as placas e o suporte fixo. O sistema conta ainda com um amortecedor acoplado entre a massa M_1 e o suporte fixo, conforme mostrado no desenho esquemático da Fig. 5.14 que apresenta o esquema experimental utilizado para medir as FRFs experimentais. Neste sistema cada placa foi excitada independentemente por uma força impulsiva utilizando um martelo de impacto e as respostas foram captadas através de um acelerômetro acoplado às placas. Os sinais foram condicionados e enviados a um analisador de sinais SD380. As FRFs extraídas foram utilizadas na metodologia proposta.



Figura 5.13 – Modelo experimental utilizado para avaliar os métodos de identificação.

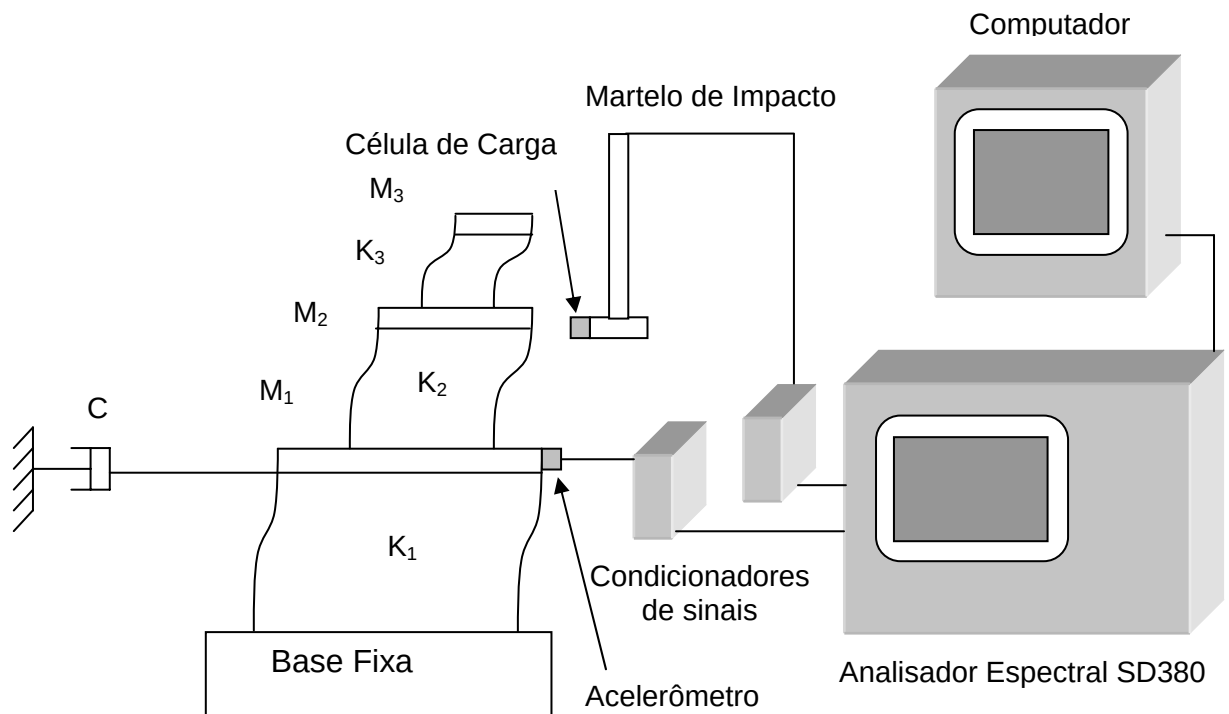


Figura 5.14 – Montagem experimental para determinar as FRFs.

A Tab. 5.07 apresenta os valores identificados da matriz de massa e os erros relativos em relação à matriz de massa verdadeira do sistema.

Tabela 5.07 – Valores originais e identificados de massa do modelo experimental.

Valores Originais		
3,3000	0	0
0	2,2230	0
0	0	0,9290
Valores Identificados		
3,1939	-0,0343	-0,0075
-0,0343	2,1156	0,0016
-0,0075	0,0016	0,9572
Erro Relativo(%)		
3,2156	-	-
-	4,8335	-
-	-	3,0376

A Fig. 5.15 mostra a comparação entre as FRFs obtidas das matrizes físicas identificadas com as FRFs experimentais. Como pode ser visto os gráficos estão bem próximos o que indica uma boa precisão.

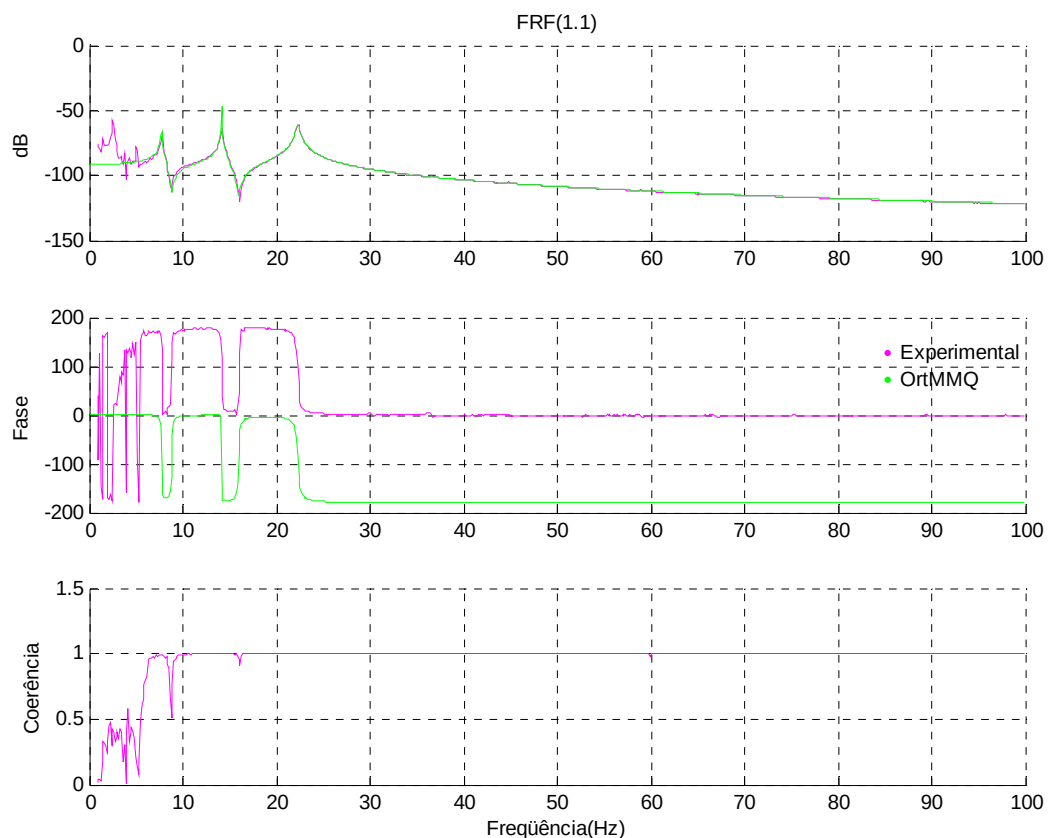


Figura 5.15a – FRF do modelo experimental com três GDL (Chen).

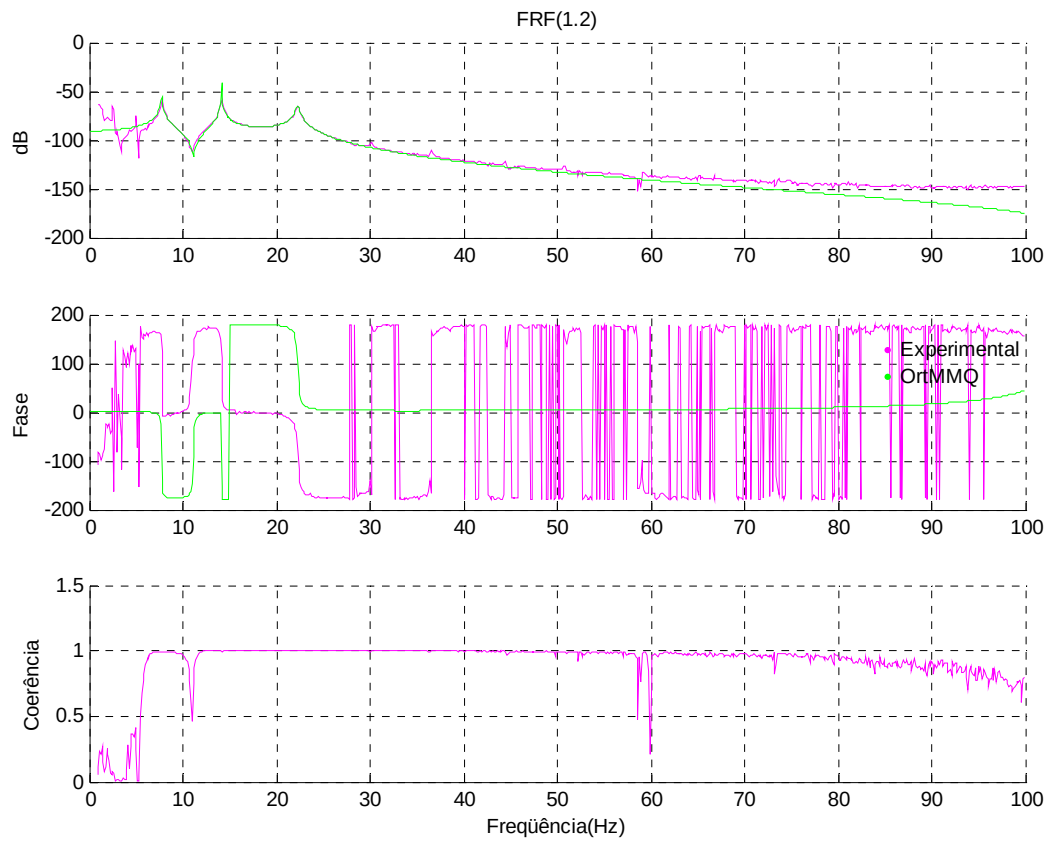


Figura 5.15b – FRF do modelo experimental com três GDL (Chen).

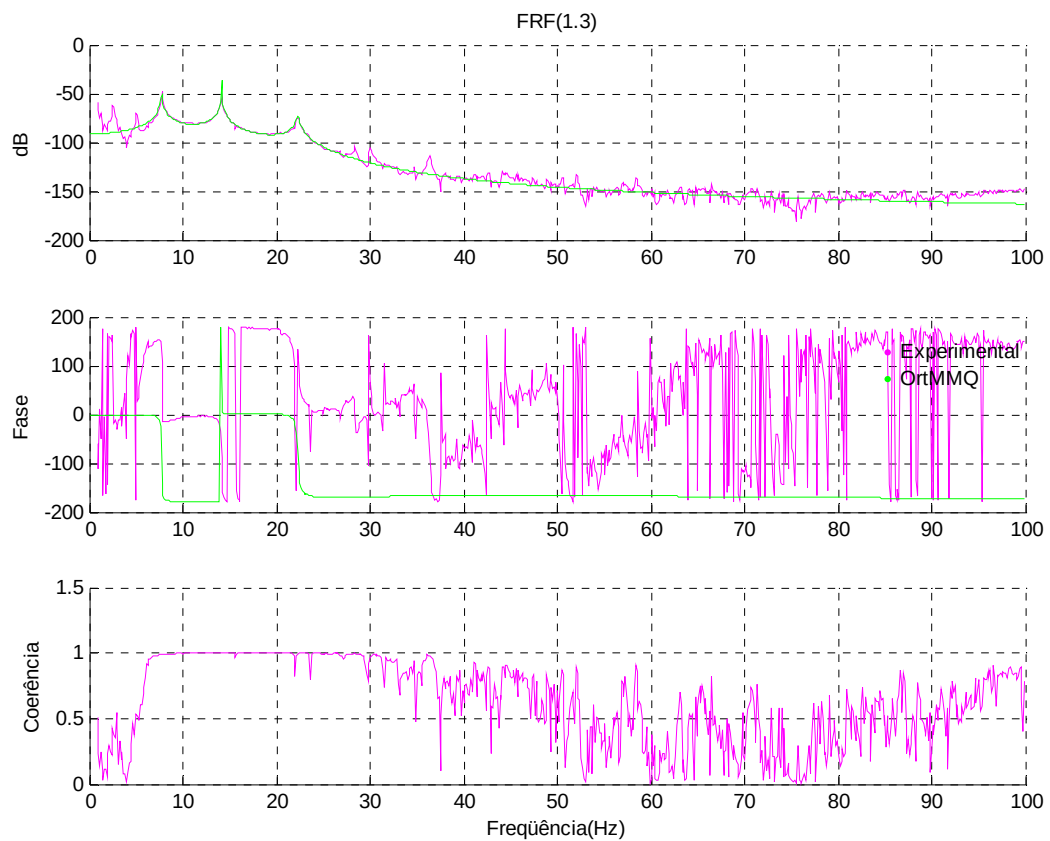


Figura 5.15c – FRF do modelo experimental com três GDL (Chen).

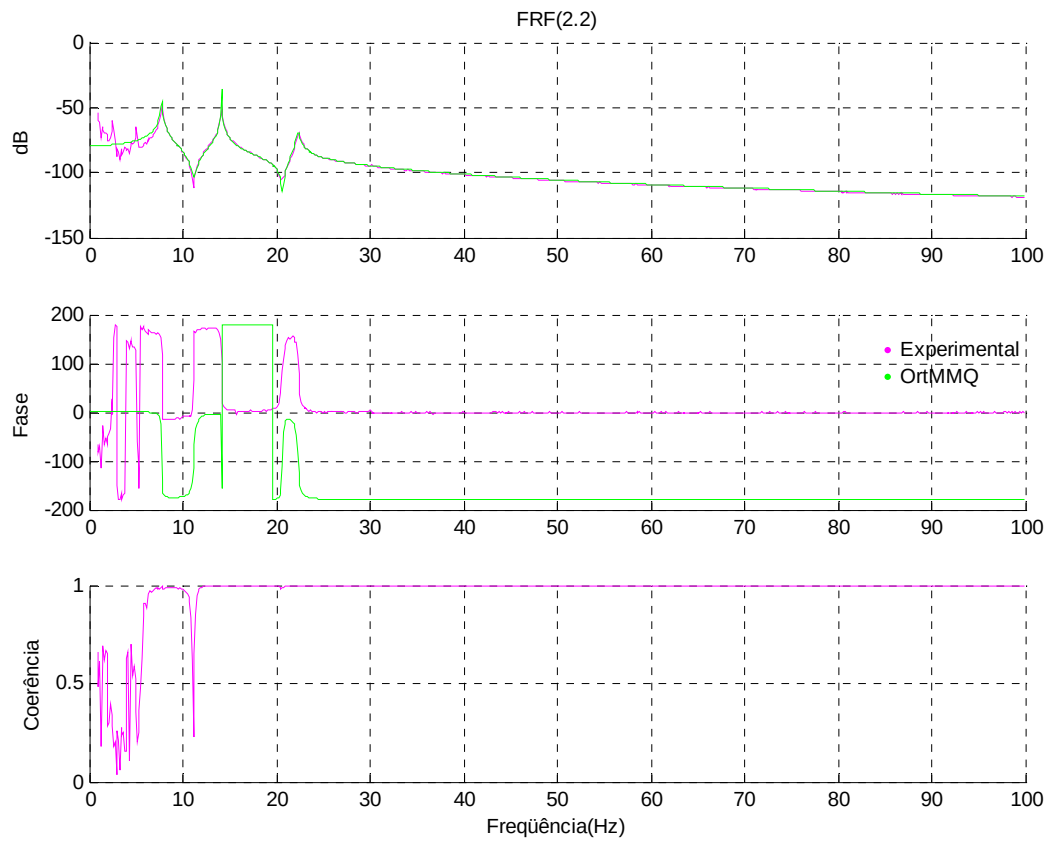


Figura 5.15d – FRF do modelo experimental com três GDL (Chen).

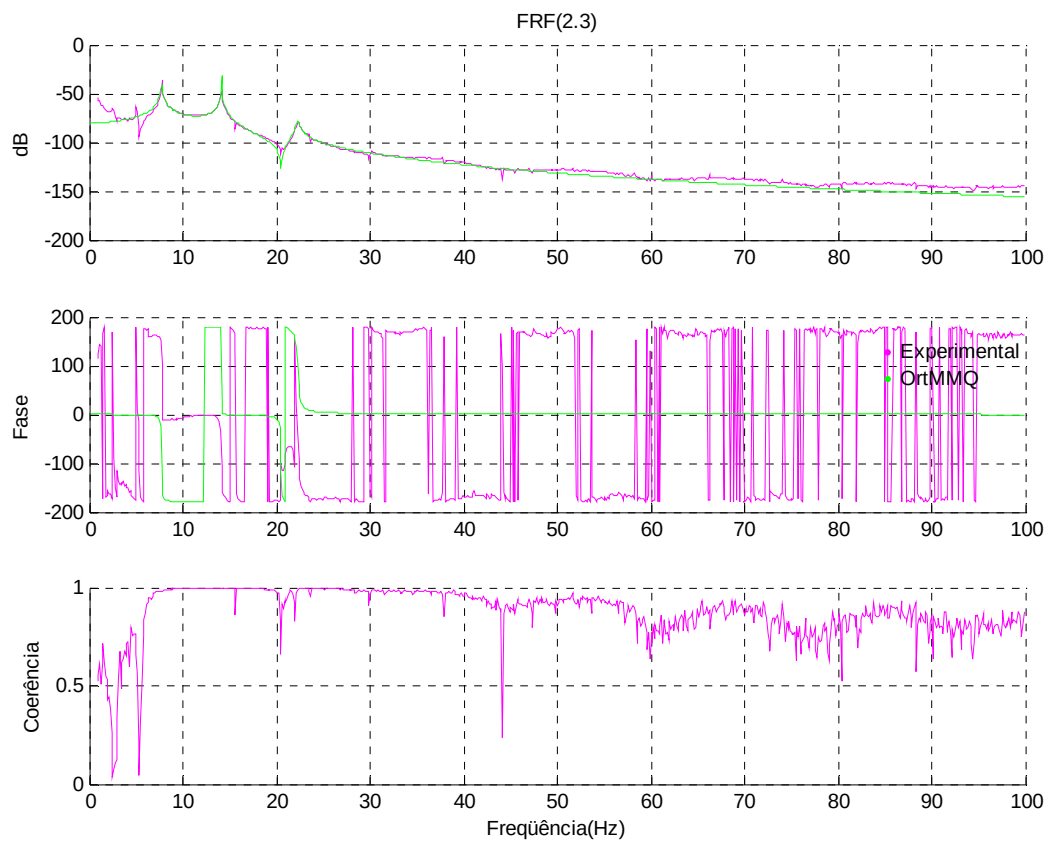


Figura 5.15e – FRF do modelo experimental com três GDL (Chen).

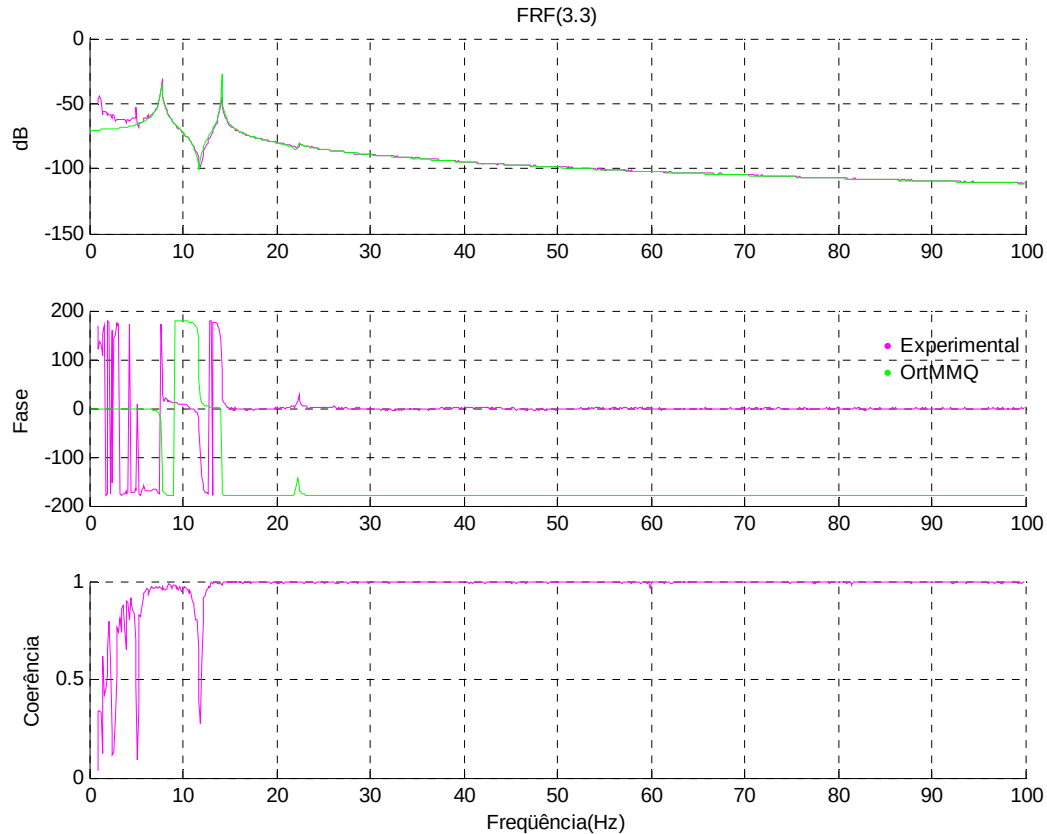


Figura 5.15f – FRF do modelo experimental com três GDL (Chen).

Na identificação das matrizes do sistema, verificou-se que o amortecimento é mais difícil de ser identificado precisamente a partir de dados com ruído. Como já havia sido observado por outros autores, este resultado é devido, na maioria dos casos, a ordem de grandeza dos coeficientes de amortecimento que é muito menor que os coeficientes de rigidez. Em outros métodos de identificação de parâmetros físicos, em geral, a massa, a rigidez e o amortecimento são identificados simultaneamente, utilizando uma única equação. No Método de Chen esta situação não ocorre e os parâmetros de amortecimento identificados são mais precisos, uma vez que, a matriz de amortecimento é estimada independentemente da matriz de massa e rigidez. Quanto a matriz de massa observa-se que o erro relativo máximo foi da ordem de 5%.

5.3 Ajuste de curvas simultâneas

Nesta seção é apresentada uma nova técnica para identificação das matrizes de massa, amortecimento e rigidez utilizando o método dos mínimos quadrados para ajustar as curvas das FRFs do sistema dinâmico. As FRFs de uma estrutura real são acompanhadas de distorções devido aos ruídos inerentes ao processo de medidas experimentais. No caso

de estruturas modeladas matematicamente são adicionados ruídos às FRFs simuladas para aproximá-las às FRFs experimentais.

O método é baseado no ajuste de curvas que será denominado ACS (Ajuste de Curvas Simultâneas). O método consiste em ajustar simultaneamente todas as curvas que representam as FRFs de um sistema dinâmico. Os coeficientes da função que geram as curvas das FRFs ajustadas são as matrizes de massa, rigidez de amortecimento.

A função que gera as curvas a serem ajustadas é dada por,

$$\left[-[M]\omega^2 + i[C]\omega + [K]\right]^{-1} = [H(\omega)] \quad -[M]\omega^2 + i[C]\omega + [K] = [H(\omega)]^{-1} \quad (5.34)$$

onde $[M]$ é a matriz de massa, $[C]$ é matriz de amortecimento, $[K]$ é matriz rigidez e $[H(\omega)]$ é a FRF medida na frequência ω . As matrizes $[M]$, $[C]$ e $[K]$ são os coeficientes que devem ser calculados de modo que determinem as curvas de $[H(\omega)]$ que mais se aproximam das FRFs experimentais ou simuladas conforme o caso.

Desenvolvendo a técnica de ajuste de curva pelo método dos mínimos quadrados tem-se que,

$$\begin{cases} a_{11}c_0 + a_{12}c_1 + \cdots + a_{1,t+1}c_t = b_1 \\ a_{21}c_0 + a_{22}c_1 + \cdots + a_{2,t+1}c_t = b_2 \\ \vdots \\ a_{t+1,1}c_0 + a_{t+1,2}c_1 + \cdots + a_{t+1,t+1}c_t = b_t \end{cases} \quad (5.35)$$

onde t é o grau do polinômio, c_{p-1} são os coeficientes a serem determinados e

$$a_{pq} = \sum_{k=1}^m g_p(x_k)g_q(x_k) \quad b_p = \sum_{k=1}^m g_p(x_k)f(x_k) \quad (5.36)$$

Nas Eq.(5.36) m é o número de pontos e $g_p(x)$ são as funções usadas no ajuste. No ajuste das curvas da Eq.(5.34) os coeficientes c_{p-1} são substituídos pelas matrizes $[M]$, $[C]$ e $[K]$, $g_p(x)$ pelas funções de frequência $g_p(\omega)$ e $f(x)$ pelas FRFs, ou seja, Portanto,

$$\begin{aligned} [c_0] &= [K], & [c_1] &= i[C], & [c_2] &= -[M] \\ g_1(\omega) &= 1, & g_2(\omega) &= \omega, & g_3(\omega) &= \omega^2 & f(\omega) &= [H(\omega)]^{-1} \end{aligned} \quad (5.37)$$

Substituindo as Eq.(5.37) em (5.36) e esta em (5.35) obtém-se o sistema de equações lineares que identifica as três matrizes físicas:

$$\left\{ \begin{aligned} [K]m & \quad i[C]\sum_{k=1}^m \omega_k & -[M]\sum_{k=1}^m (\omega_k)^2 & = & \sum_{k=1}^m [H(\omega_k)]^{-1} \\ [K]\sum_{k=1}^m \omega_k & \quad i[C]\sum_{k=1}^m (\omega_k)^2 & -[M]\sum_{k=1}^m (\omega_k)^3 & = & \sum_{k=1}^m \omega_k [H(\omega_k)]^{-1} \\ [K]\sum_{k=1}^m (\omega_k)^2 & \quad i[C]\sum_{k=1}^m (\omega_k)^3 & -[M]\sum_{k=1}^m (\omega_k)^4 & = & \sum_{k=1}^m (\omega_k)^2 [H(\omega_k)]^{-1} \end{aligned} \right. \quad (5.38)$$

Reescrevendo a Eq.(5.38) em uma forma matricial

$$[A] \begin{bmatrix} K \\ iC \\ -M \end{bmatrix} = [B] \quad (5.39)$$

onde as matrizes $[A]$ e $[B]$ são dadas por,

$$[A] = \begin{bmatrix} m & \sum_{k=1}^m \omega_k & \sum_{k=1}^m (\omega_k)^2 \\ \sum_{k=1}^m \omega_k & \sum_{k=1}^m (\omega_k)^2 & \sum_{k=1}^m (\omega_k)^3 \\ \sum_{k=1}^m (\omega_k)^2 & \sum_{k=1}^m (\omega_k)^3 & \sum_{k=1}^m (\omega_k)^4 \end{bmatrix}_{3 \times 3} \quad [B] = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^m [H(\omega)]^{-1} \\ \sum_{k=1}^m \omega_k [H(\omega)]^{-1} \\ \sum_{k=1}^m (\omega_k)^2 [H(\omega)]^{-1} \end{bmatrix}_{n \times 3} \quad (5.40)$$

As matrizes $[A]$ e $[B]$ podem ser escritas na seguinte forma,

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad [B] = \begin{bmatrix} H_1^r \\ H_2^r \\ H_3^r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_1^i \\ H_2^i \\ H_3^i \end{bmatrix} \quad (5.41)$$

onde a_{pq} são os elementos de $[A]$ e, $[H_p^r]$ e $[H_p^i]$ são as partes real e imaginária de $[B]$, respectivamente. Substituindo a Eq.(5.41) em (5.39) tem-se que,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K \\ iC \\ -M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1^r \\ H_2^r \\ H_3^r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_1^i \\ H_2^i \\ H_3^i \end{bmatrix} \quad (5.42)$$

Na Eq.(5.42) nota-se que do lado esquerdo a multiplicação associada às matrizes $[K]$ e $[M]$ resultam em números exclusivamente reais enquanto que os resultados relativos à matriz $[C]$ são compostos por números exclusivamente imaginários. Como no lado direito as partes real e imaginária estão separadas em $[H_p^r]$ e $[H_p^i]$ então a Eq.(5.42) pode ser dividida nas seguintes equações,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K \\ -M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1^r \\ H_2^r \\ H_3^r \end{bmatrix} \quad (5.43)$$

$$\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix} i[C] = \begin{bmatrix} H_1^i \\ H_2^i \\ H_3^i \end{bmatrix} \quad (5.44)$$

Multiplicando a Eq.(5.44) por i^{-1} tem-se que,

$$\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix} [C] = \begin{bmatrix} H_1^c \\ H_2^c \\ H_3^c \end{bmatrix} \quad (5.45)$$

onde $[H_p^c]$ é real e é obtida pela seguinte equação,

$$\begin{bmatrix} H_1^c \\ H_2^c \\ H_3^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1^i \\ H_2^i \\ H_3^i \end{bmatrix} i^{-1} \quad (5.46)$$

Efetuada a multiplicação das Eq.(5.43) e (5.45) tem-se que,

$$\begin{bmatrix} a_{11}K - a_{13}M \\ a_{21}K - a_{23}M \\ a_{31}K - a_{33}M \end{bmatrix}_{3n \times n} = \begin{bmatrix} H_1^r \\ H_2^r \\ H_3^r \end{bmatrix}_{3n \times n} \quad (5.47)$$

$$\begin{bmatrix} a_{12}C \\ a_{22}C \\ a_{32}C \end{bmatrix}_{3n \times n} = \begin{bmatrix} H_1^c \\ H_2^c \\ H_3^c \end{bmatrix}_{3n \times n} \quad (5.48)$$

As matrizes $[M]$, $[C]$, $[K]$, $[H_p^r]$ e $[H_p^c]$ são de ordem n que é o número de graus de liberdade do sistema. Considerando a igualdade entre os elementos correspondentes na Eq.(5.47) pode-se obter um sistema de equações lineares para determinar os elementos m_{ij} e k_{ij} das matrizes de massa e rigidez respectivamente conforme,

$$2a_{p1}k_{ij} - 2a_{p3}m_{ij} = h_{p-ij}^r + h_{p-ji}^r \Big|_{i \neq j} \quad (5.49)$$

$$a_{p1}k_{ii} - a_{p3}m_{ii} = h_{p-ii}^r \quad (5.50)$$

Como $[M]$ e $[K]$ são matrizes simétricas as equações associadas aos elementos simétricos são agrupadas em uma única equação conforme a Eq.(5.49). Assim obtém-se $n(n+1)/2$ equações para cada uma das matrizes $[M]$ e $[K]$ associadas a uma única matriz $[H_p^r]$. Das Eq.(5.47), (5.49) e (5.50) obtém-se o seguinte sistema,

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_1 \\ \bar{A}_2 \\ \bar{A}_3 \end{bmatrix} \{\bar{M}\} = \begin{bmatrix} \bar{H}_1^r \\ \bar{H}_2^r \\ \bar{H}_3^r \end{bmatrix} \quad (5.51)$$

onde

$$[\bar{A}_p] = \begin{bmatrix} a_{p1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_{p3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2a_{p1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2a_{p3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2a_{p1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2a_{p3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{p1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_{p3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2a_{p1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2a_{p3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2a_{p1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2a_{p3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{p1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_{p3} \end{bmatrix}$$

$$\{\bar{M}\} = [k_{11} \quad k_{1j} \quad k_{1n} \quad k_{ii} \quad k_{ij} \quad k_{in} \quad k_{nn} \quad m_{11} \quad m_{1j} \quad m_{1n} \quad m_{ii} \quad m_{ij} \quad m_{in} \quad m_{nn}]^t$$

$$\{\bar{H}_p^r\} = [h_{p-11}^r \quad h_{p-1j}^r + h_{p-j1}^r \quad h_{p-1n}^r + h_{p-n1}^r \quad h_{p-ii}^r \quad h_{p-ij}^r + h_{p-ji}^r \quad h_{p-in}^r + h_{p-ni}^r \quad h_{p-nn}^r]^t$$

A matriz $[\bar{A}_p]$ é de ordem $[3n(n+1)/2] \times [n(n+1)]$, $\{\bar{M}\}$ é de ordem $[n(n+1)] \times 1$ e $\{\bar{H}^r\}$

$[3n(n+1)/2] \times 1$. Pré multiplicando a Eq.(5.51) por $[\bar{A}]^{-1}$ tem-se

$$\{\bar{M}\} = \begin{bmatrix} \bar{A}_1 \\ \bar{A}_2 \\ \bar{A}_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \bar{H}_1^r \\ \bar{H}_2^r \\ \bar{H}_3^r \end{Bmatrix} \quad (5.52)$$

Os elementos de $\{\bar{M}\}$ podem ser re-arranjados na forma original das duas matrizes $[M]$ e $[K]$.

Da mesma forma, da Eq.(5.48), pode-se determinar os elementos c_{ij} pertencentes a matriz de amortecimento conforme as Eq.(5.53) e (5.54). Logo,

$$2a_{p2} c_{ij} = h_{p-ij}^c + h_{p-ji}^c \Big|_{i \neq j} \quad (5.53)$$

$$a_{p2} c_{ii} = h_{p-ii}^c \quad (5.54)$$

A matriz $[C]$ é simétrica e as equações associadas aos elementos simétricos são somadas de acordo com a Eq.(5.53). Assim obtém-se $[n(n+1)/2]$ equações para cada uma das matrizes $[H_p^c]$. Das Eq.(5.48), (5.53) e (5.54) obtém-se o seguinte sistema,

$$\begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \\ \bar{B}_3 \end{bmatrix} \{\bar{C}\} = \begin{Bmatrix} \bar{H}_1^c \\ \bar{H}_2^c \\ \bar{H}_3^c \end{Bmatrix} \quad (5.55)$$

onde

$$[\bar{B}_p] = \begin{bmatrix} a_{p2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2a_{p2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2a_{p2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{p2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2a_{p2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2a_{p2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{p2} \end{bmatrix}$$

$$\{\bar{C}\} = [c_{11} \quad c_{1j} \quad c_{1n} \quad c_{ii} \quad c_{ij} \quad c_{in} \quad c_{nn}]^t$$

$$\{\bar{H}_p^c\} = [h_{p-11}^c \quad h_{p-1j}^c + h_{p-j1}^c \quad h_{p-1n}^c + h_{p-n1}^c \quad h_{p-ii}^c \quad h_{p-ij}^c + h_{p-ji}^c \quad h_{p-in}^c + h_{p-ni}^c \quad h_{p-nn}^c]^t$$

A matriz $[\bar{B}_p]$ é de ordem $[3n(n+1)/2] \times [n(n+1)/2]$, $\{\bar{C}\}$ é de ordem $[n(n+1)/2] \times 1$ e $\{\bar{H}^c\}$

$[3n(n+1)/2] \times 1$ por 1. Pré multiplicando a Eq.(5.55) por $[\bar{B}]^{-1}$ tem-se que,

$$\{\bar{C}\} = \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \\ \bar{B}_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \bar{H}_1^c \\ \bar{H}_2^c \\ \bar{H}_3^c \end{Bmatrix} \quad (5.56)$$

Considerando a simetria os elementos de $\{\bar{C}\}$ podem ser re-arranjados na forma original da matriz $[C]$.

5.3.1 Simulações numéricas

A avaliação do método ACS no processo de identificação das matrizes físicas foi feita através de simulações numéricas nas mesmas condições usadas para avaliar o Método de Chen. Dois modelos foram simulados, um com quatro e outro com oito graus de

liberdade. Como na seção 5.3 foi realizado, também, teste com o mesmo modelo experimental utilizado para avaliar o Método de Chen.

a) Sistema massa-mola-amortecedor com quatro graus de liberdade

O modelo usado nesta seção foi o mesmo modelo usado na seção 5.2 mostrado na Fig. 5.04. Aqui foram feitas simulações nas mesmas condições realizadas com o Método de Chen.

Os resultados da simulação com 5% de ruído com uma contagem são mostrados nas Tab. 5.08, 5.09 e 5.10. A Tab. 5.08 mostra o erro relativo das frequências e o índice MAC para os modos identificados.

Tabela 5.08 – Frequências naturais amortecidas (Hz) originais e identificadas e índice MAC para o modelo discreto com quatro GDL (Ruído de 5%-uma contagem).

Original	Identificada	Erro Relativo(%)	MAC
47,4208	46,5634	1,8082	1,0000
129,3873	130,7852	1,0804	0,9971
150,3482	152,5890	1,4904	0,9989
185,4626	185,2781	0,0995	0,9999

Na Tab. 5.09 podem ser verificados os fatores de amortecimento com seus respectivos erros relativos e a Tab. 5.10 mostra a precisão da massa identificada. As tabelas referentes às simulações sem ruído e com quinze contagens foram omitidas porque os valores são iguais ou muito próximos aos valores exatos.

O maior erro relativo na identificação da massa foi menor do que 3%, que é bem menor do que os 11% obtidos pelo Método de Chen. Os erros relativos das frequências estão um pouco acima de 1% enquanto o índice MAC ficou muito próximo da unidade como no método anterior. O erro de um dos fatores de amortecimento ficou muito alto, 1293%.

A Fig. 5.16 mostra os modos e as FRFs da simulação com ruído de 5% e uma única contagem. As matrizes físicas identificadas são idênticas às matrizes físicas exatas do sistema para o caso sem ruído e muito próximas para o caso onde usa FRF com quinze contagens como pode ser visto nas Fig. 5.17 e 5.18, respectivamente.

Tabela 5.09 – Fatores de amortecimento originais e identificados para o modelo discreto com quatro GDL (Ruído de 5%-uma contagem).

Original	Identificada	Erro Relativo(%)
0,0010	0,0137	1292,7828
0,0026	0,0020	22,6852
0,0029	0,0033	13,3455
0,0039	0,0040	2,7902

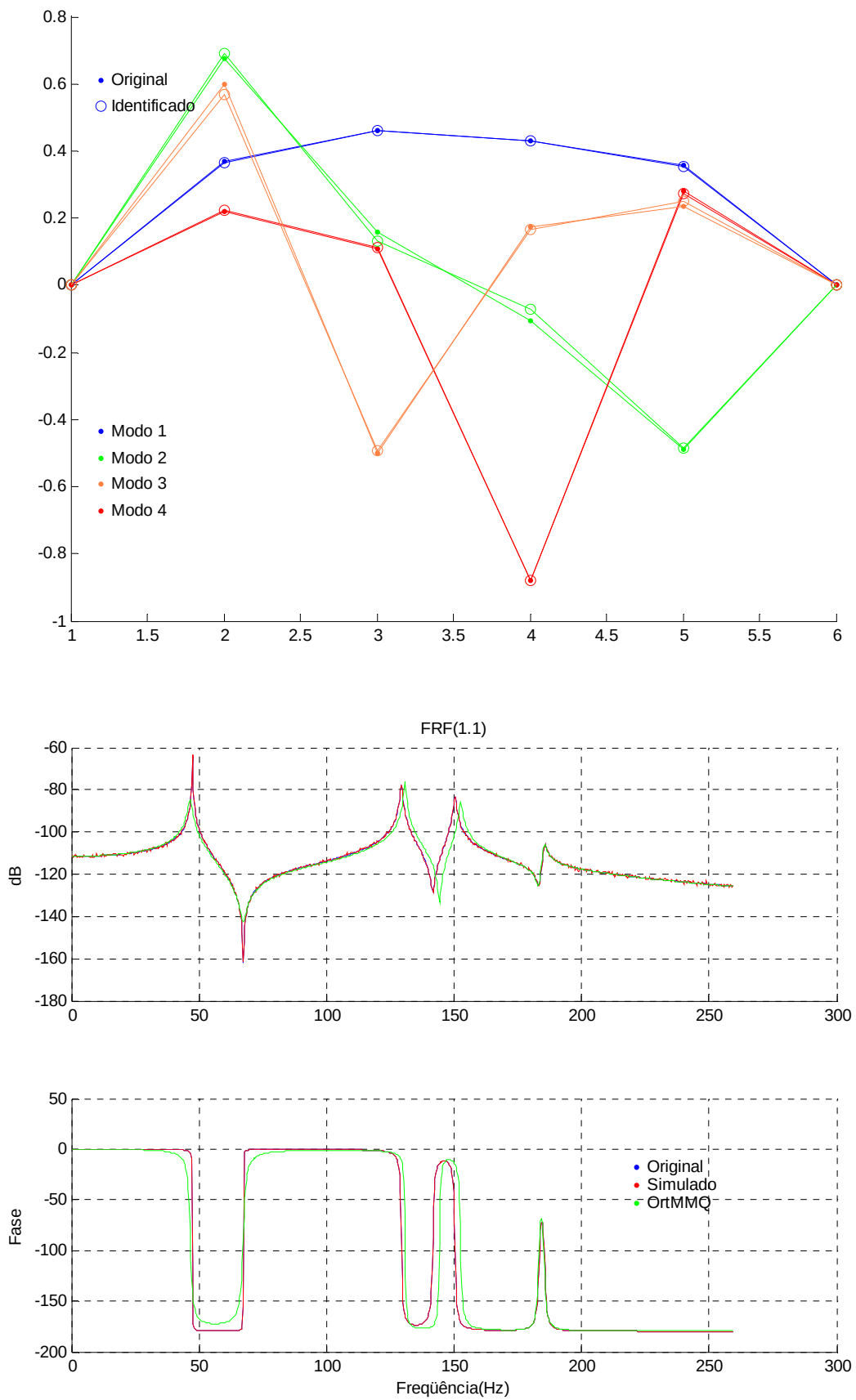


Figura 5.16 – Modos e FRF de simulação do modelo com quatro GDL (com 5% de ruído e uma contagem – ACS).

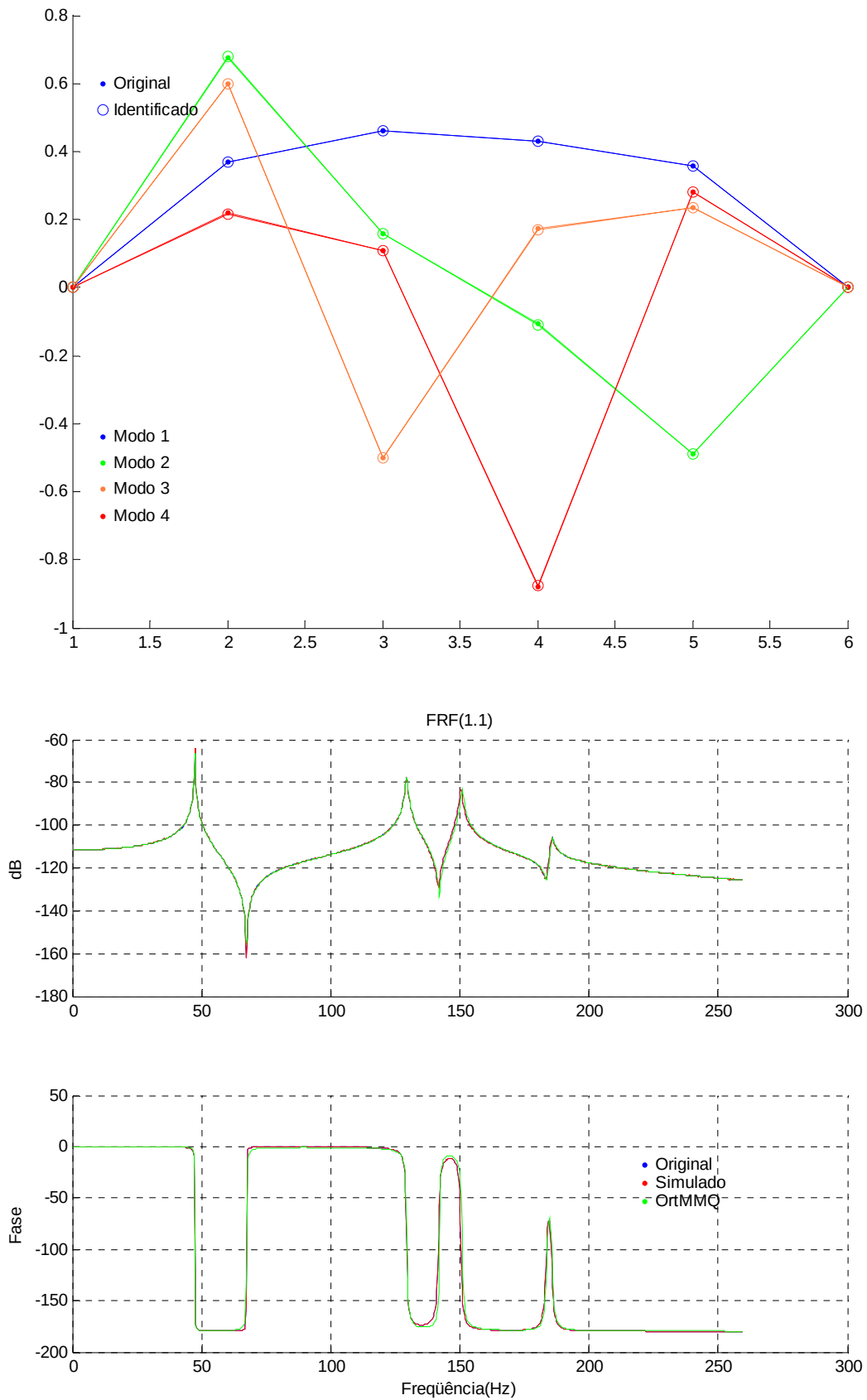


Figura 5.17 – Modos e FRF de simulação do modelo com quatro GDL (com 5% de ruído e quinze contagens – ACS).

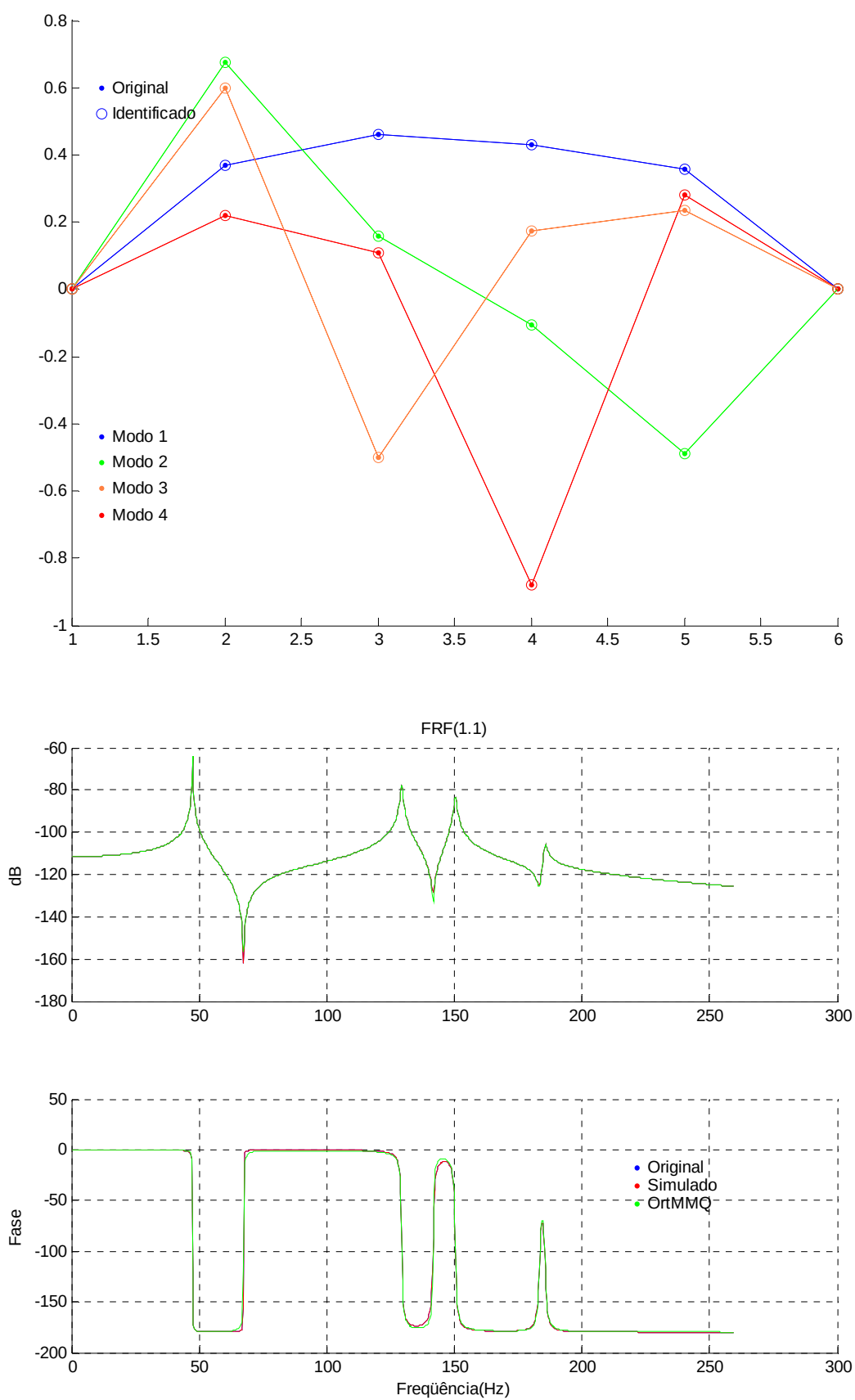


Figura 5.18 – Modos e FRF de simulação do modelo com quatro GDL (sem ruído – ACS).

Tabela 5.10 – Matrizes de massa originais e identificadas para o modelo discreto com quatro GDL (Ruído de 5%-uma contagem).

Valores Originais			
1	0	0	0
0	2	0	0
0	0	1	0
0	0	0	2
Valores Identificados			
1,0164	-0,0072	-0,0078	0,0029
-0,0072	2,0572	-0,0158	-0,0311
-0,0078	-0,0158	1,0067	0,0284
0,0029	-0,0311	0,0284	2,0140
Erro Relativo(%)			
1,6405	-	-	-
-	2,8578	-	-
-	-	0,6717	-
-	-	-	0,7005

b) Sistema massa-mola-amortecedor com oito graus de liberdade

Aqui também o modelo de oito graus de liberdade usado para avaliar este método de identificação é o mesmo usado na seção anterior mostrado na Fig. 5.08. Aqui foram realizadas simulações nas mesmas condições do Método de Chen.

Os resultados da simulação com 5% de ruído com uma contagem são mostrados nas Tab. 5.11, 5.12 e 5.13. A Tab. 5.11 mostra o erro relativo das frequências e o índice MAC dos modos obtidos das matrizes físicas identificadas. Na Tab. 5.12 podem ser verificados os fatores de amortecimento com seus respectivos erros relativos e a Tab. 5.13 mostra a precisão da massa identificada. As tabelas referentes às simulações sem ruído e com quinze contagens foram omitidas porque os valores são iguais ou muito próximos aos valores exatos.

O erro relativo na identificação da massa ficou menor que 3%, que é bem menor do que os 21% obtidos pelo Método de Chen. Os erros relativos das frequências estão um pouco acima de 1% enquanto o índice MAC ficou muito próximo da unidade como no método anterior. O erro relativo de um dos fatores de amortecimento ficou em 89%.

A Fig. 5.19 mostra os modos e as FRFs da simulação com ruído de 5% e uma única contagem. As matrizes físicas identificadas são iguais às matrizes físicas exatas do sistema para o caso sem ruído e muito próximas para o caso onde usa FRF com quinze contagens como pode ser visto nos gráficos dos modos e das FRFs na Fig. 5.20 e 5.21 respectivamente. Os gráficos do índice MAC e do erro relativos das frequências estão na Fig. 5.22.

Tabela 5.11 – Frequências naturais amortecidas (Hz) originais e identificadas e índice MAC para o modelo discreto com oito GDL (Ruído de 5%-uma contagem).

Original	Identificada	Erro Relativo(%)	MAC
8,0419	7,6598	4,7513	0,9961
12,4666	12,0400	3,4224	0,9970
19,2000	19,3019	0,5308	0,9977
23,5342	23,6261	0,3906	0,9996
32,1776	31,5372	1,9902	0,9983
44,0790	42,5828	3,3942	0,9653
56,7682	56,6071	0,2839	0,9758
58,4941	58,2694	0,3842	0,9842

Tabela 5.12 – Fatores de amortecimento originais e identificados para o modelo discreto com oito GDL (Ruído de 5%-uma contagem).

Original	Identificada	Erro Relativo(%)
0,0024	0,0003	89,2042
0,0087	0,0075	12,9086
0,0092	0,0081	11,8775
0,0144	0,0141	1,7580
0,0022	0,0016	28,8754
0,0020	0,0017	14,4743
0,0039	0,0035	11,5856
0,0058	0,0050	13,0967

Tabela 5.13 – Matrizes de massa originais e identificadas para o modelo discreto com oito GDL (Ruído de 5%-uma contagem).

Valores Originais							
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	5	0	0	0	0
0	0	0	0	5	0	0	0
0	0	0	0	0	5	0	0
0	0	0	0	0	0	2	0
0	0	0	0	0	0	0	5
Valores Identificados							
1,0028	-0,0015	0,0011	-0,0013	0,0003	0,0012	-0,0002	0,0017
-0,0015	1,0096	0,0020	-0,0104	0,0182	-0,0451	0,0014	0,0227
0,0011	0,0020	1,0019	0,0161	-0,0271	0,0573	-0,0011	-0,0119
-0,0013	-0,0104	0,0161	5,0114	0,0331	-0,0906	0,0029	0,0651
0,0003	0,0182	-0,0271	0,0331	4,9864	0,0998	-0,0009	-0,0527
0,0012	-0,0451	0,0573	-0,0906	0,0998	4,8552	0,0011	0,1101
-0,0002	0,0014	-0,0011	0,0029	-0,0009	0,0011	1,9948	-0,0022
0,0017	0,0227	-0,0119	0,0651	-0,0527	0,1101	-0,0022	4,9219
Erro Relativo(%)							
0,2810	-	-	-	-	-	-	-
-	0,9566	-	-	-	-	-	-
-	-	0,1893	-	-	-	-	-
-	-	-	0,2281	-	-	-	-
-	-	-	-	0,2711	-	-	-
-	-	-	-	-	2,8965	-	-
-	-	-	-	-	-	0,2622	-
-	-	-	-	-	-	-	1,5623

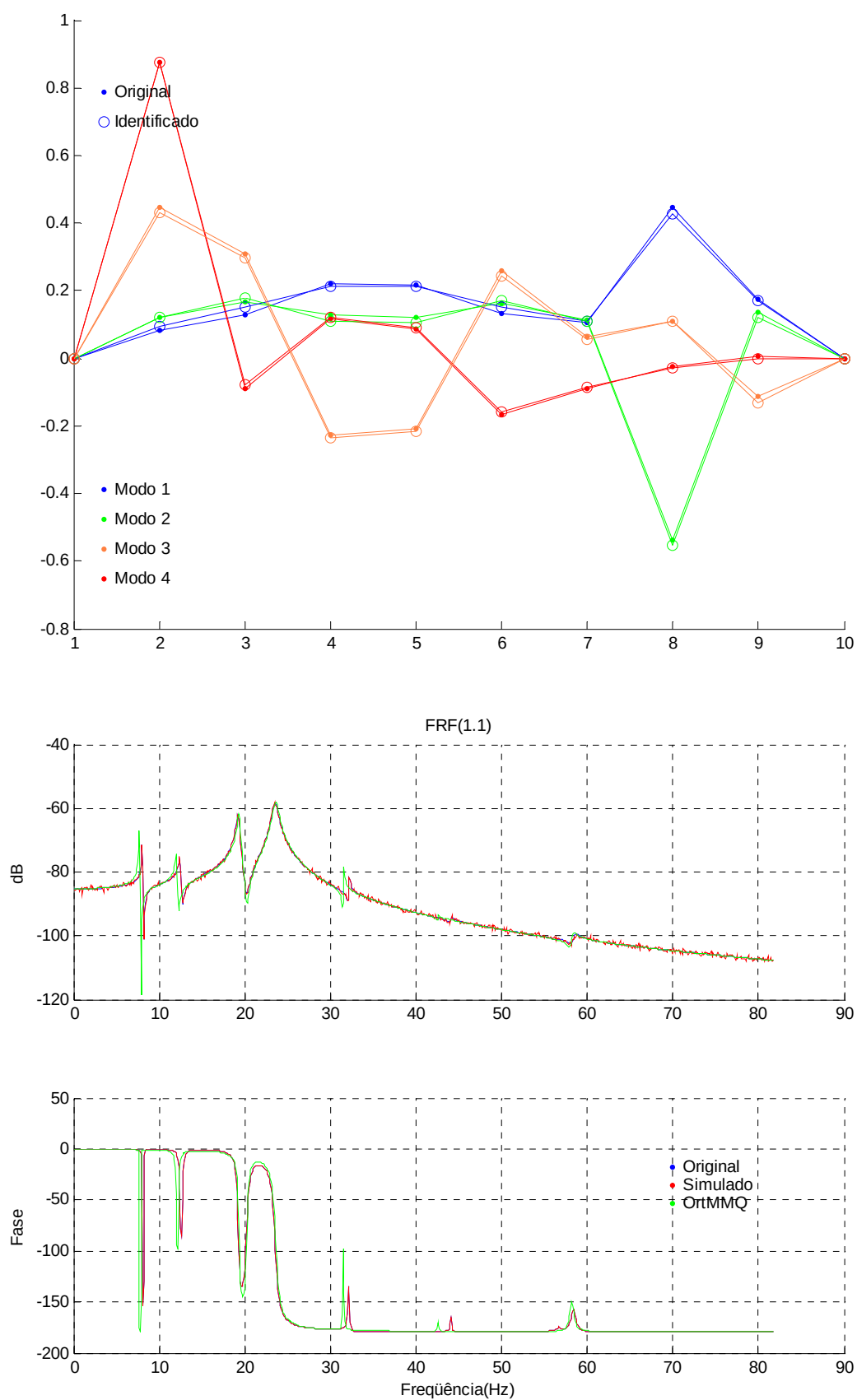


Figura 5.19 – Quatro modos e uma FRF de simulação do modelo com oito GDL (com 5% de ruído e uma contagem – ACS).

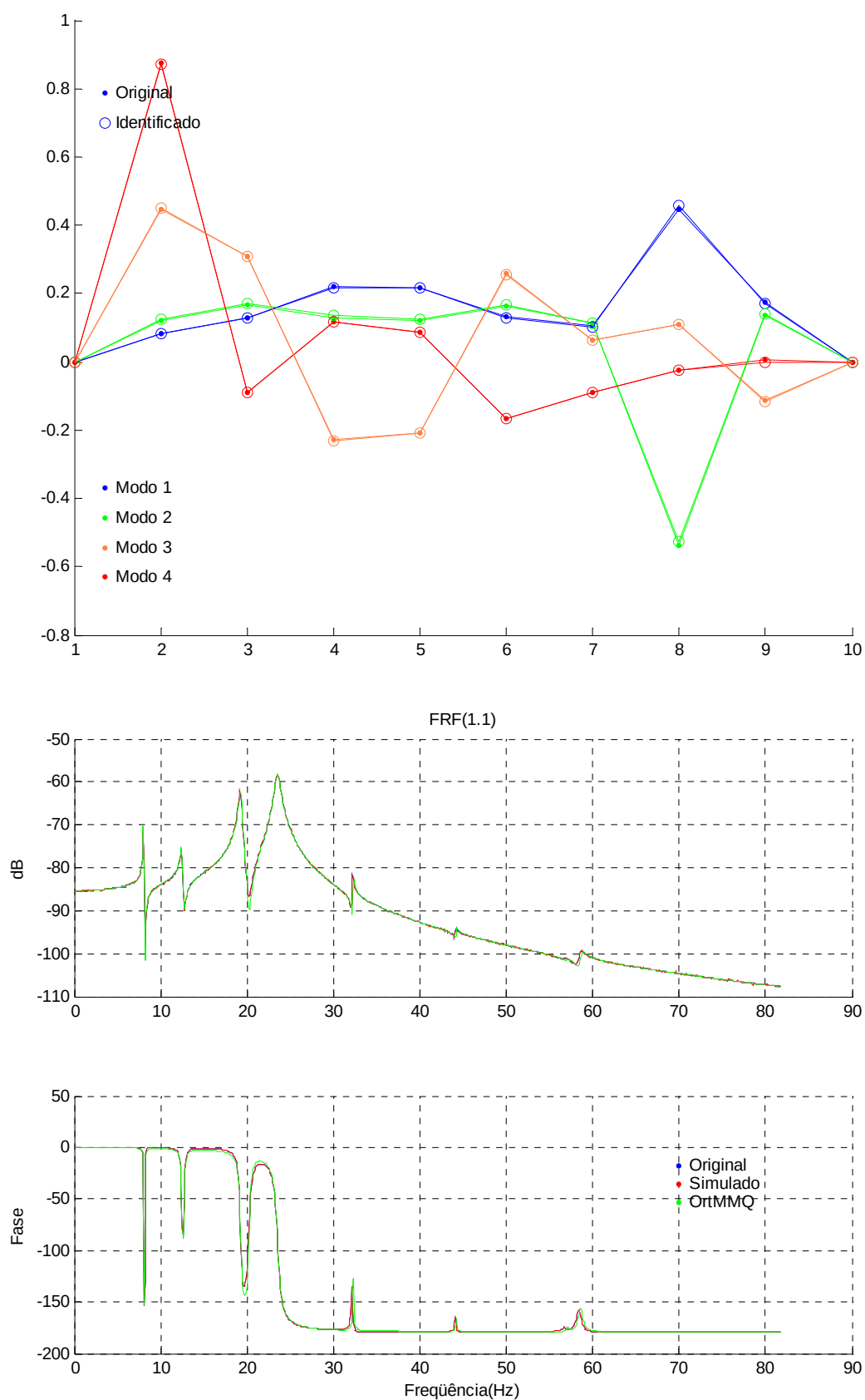


Figura 5.20 – Quatro modos e uma FRF de simulação do modelo com oito GDL (com 5% de ruído e quinze contagens – ACS).

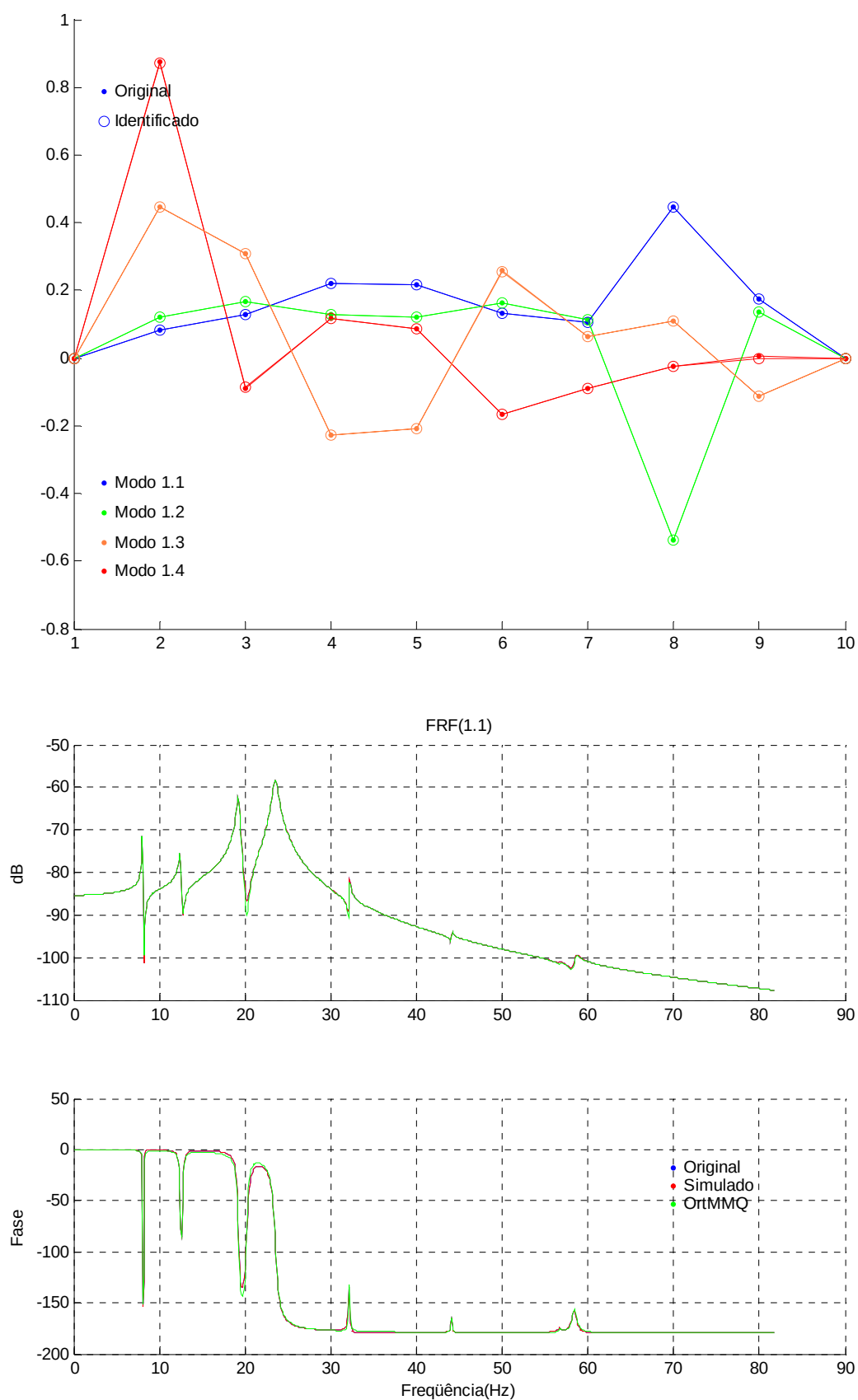


Figura 5.21 – Quatro modos e uma FRF de simulação do modelo com oito GDL (sem ruído – ACS).

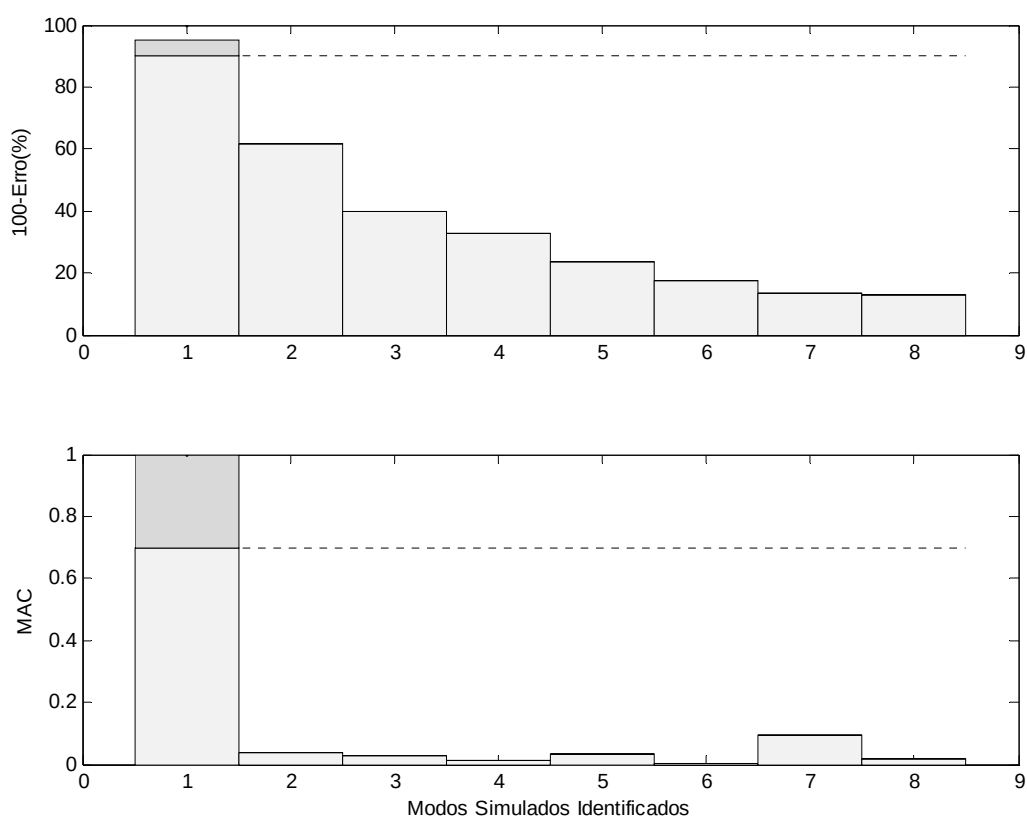


Figura 5.22a – Erro relativo da frequência e índice MAC do primeiro modo identificado para o modelo discreto com oito GDL (Ruído de 5%-uma contagem – ACS).

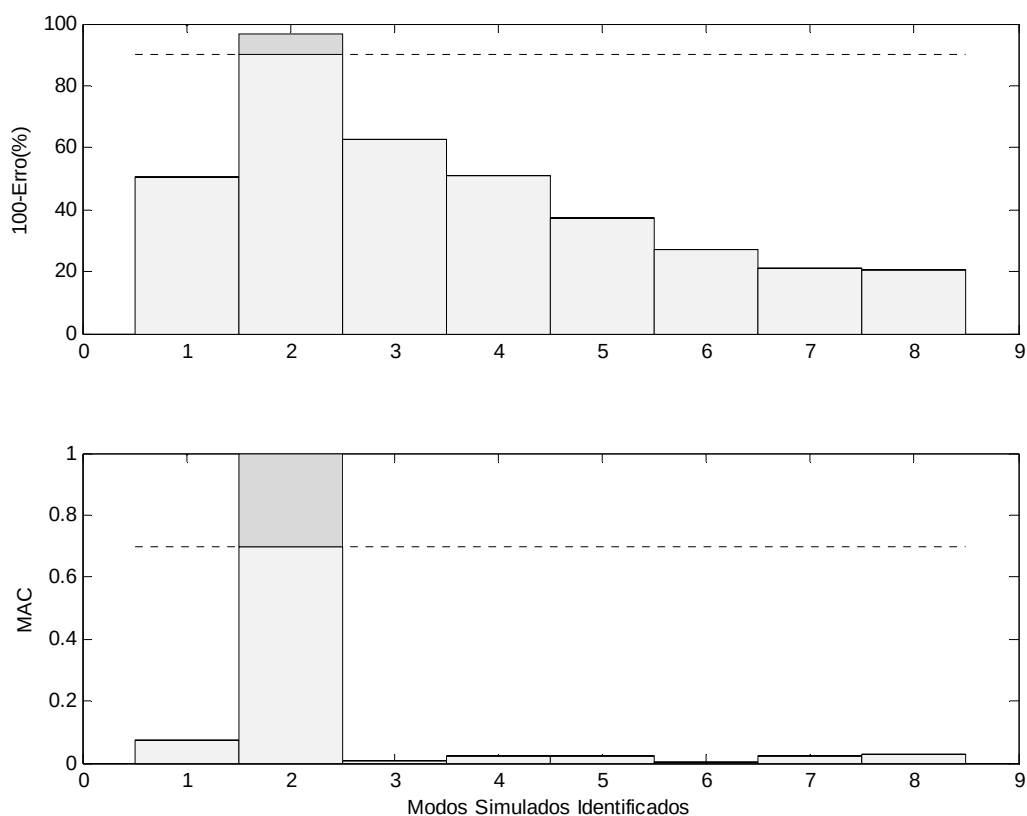


Figura 5.22b – Erro relativo da frequência e índice MAC do segundo modo identificado para o modelo discreto com oito GDL (Ruído de 5%-uma contagem – ACS).

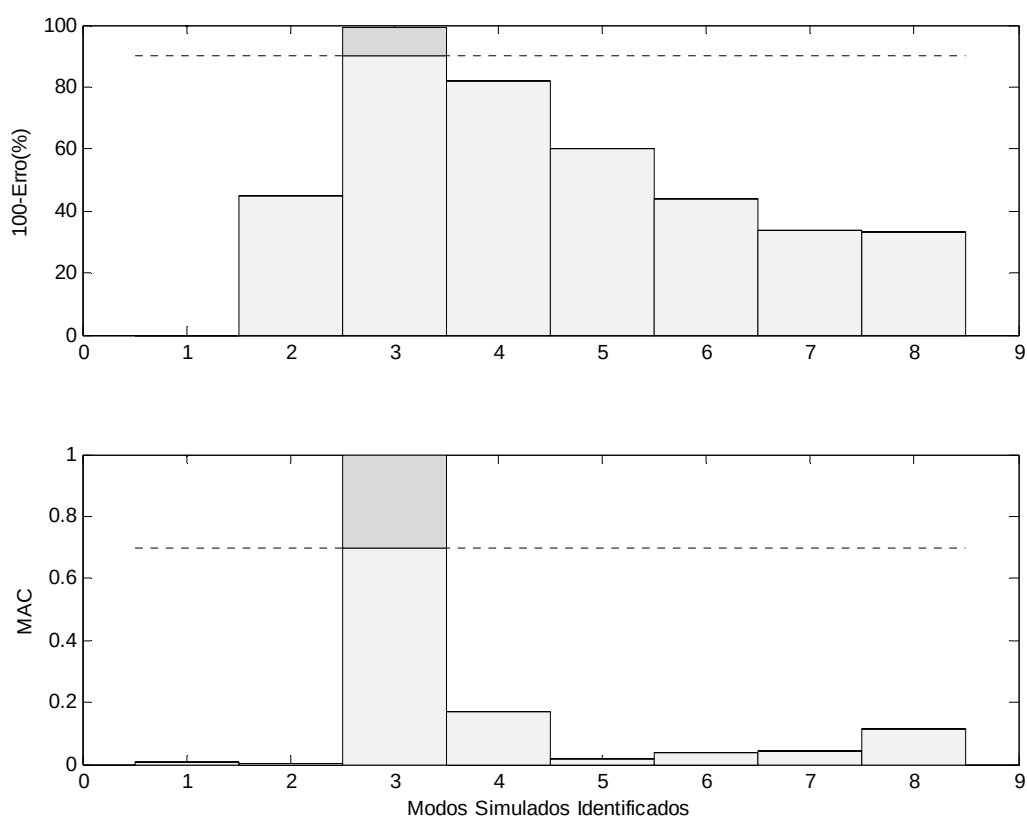


Figura 5.22c – Erro relativo da frequência e índice MAC do terceiro modo identificado para o modelo discreto com oito GDL (Ruído de 5%-uma contagem – ACS).

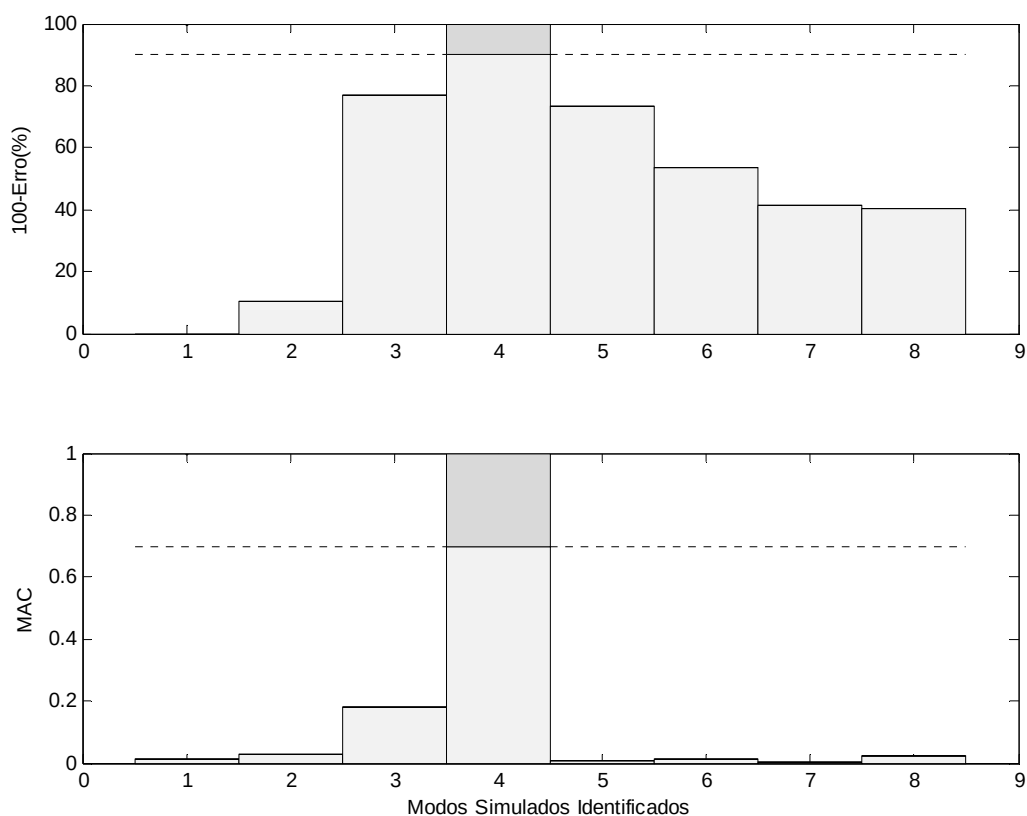


Figura 5.22d – Erro relativo da frequência e índice MAC do quarto modo identificado para o modelo discreto com oito GDL (Ruído de 5%-uma contagem – ACS).

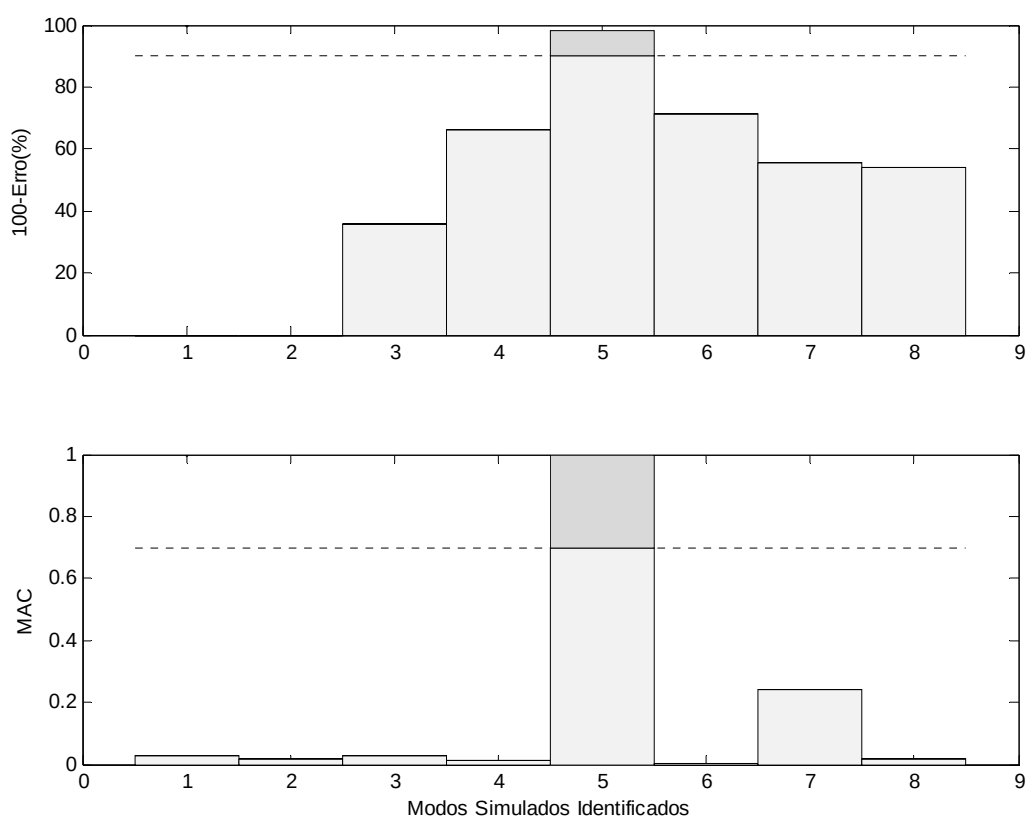


Figura 5.22e – Erro relativo da frequência e índice MAC do quinto modo identificado para o modelo discreto com oito GDL (Ruído de 5%-uma contagem – ACS).

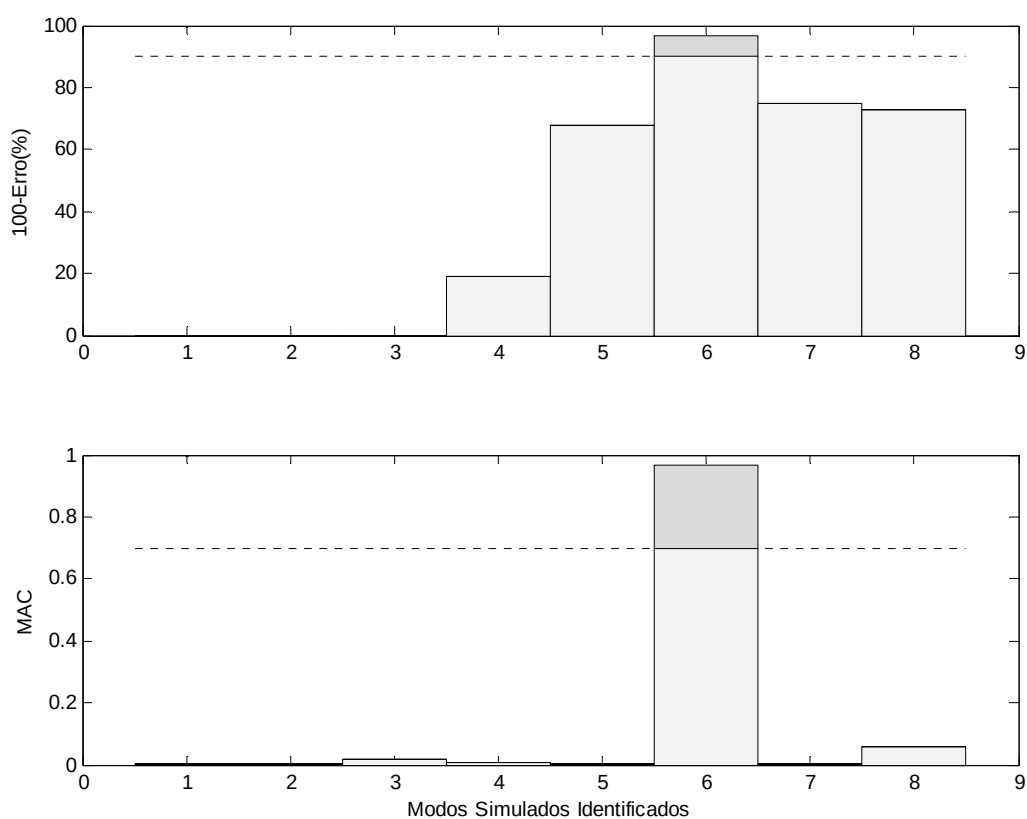


Figura 5.22f – Erro relativo da frequência e índice MAC do sexto modo identificado para o modelo discreto com oito GDL (Ruído de 5%-uma contagem – ACS).

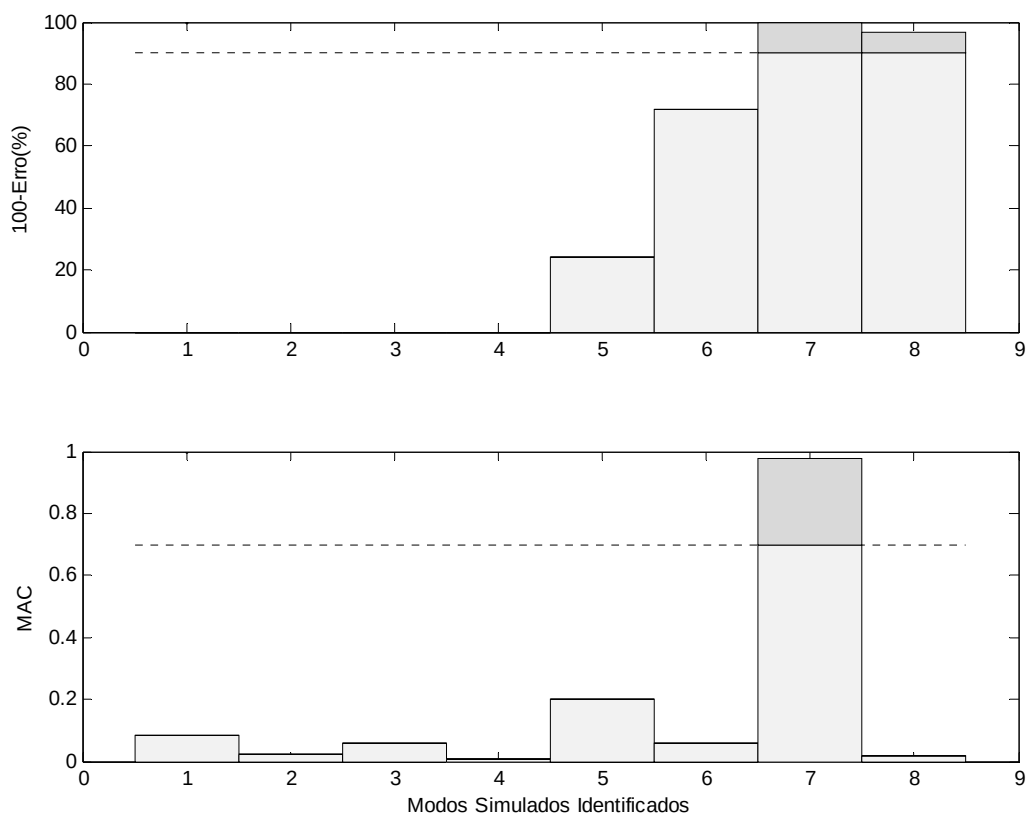


Figura 5.22g – Erro relativo da frequência e índice MAC do sétimo modo identificado para o modelo discreto com oito GDL (Ruído de 5%-uma contagem – ACS).

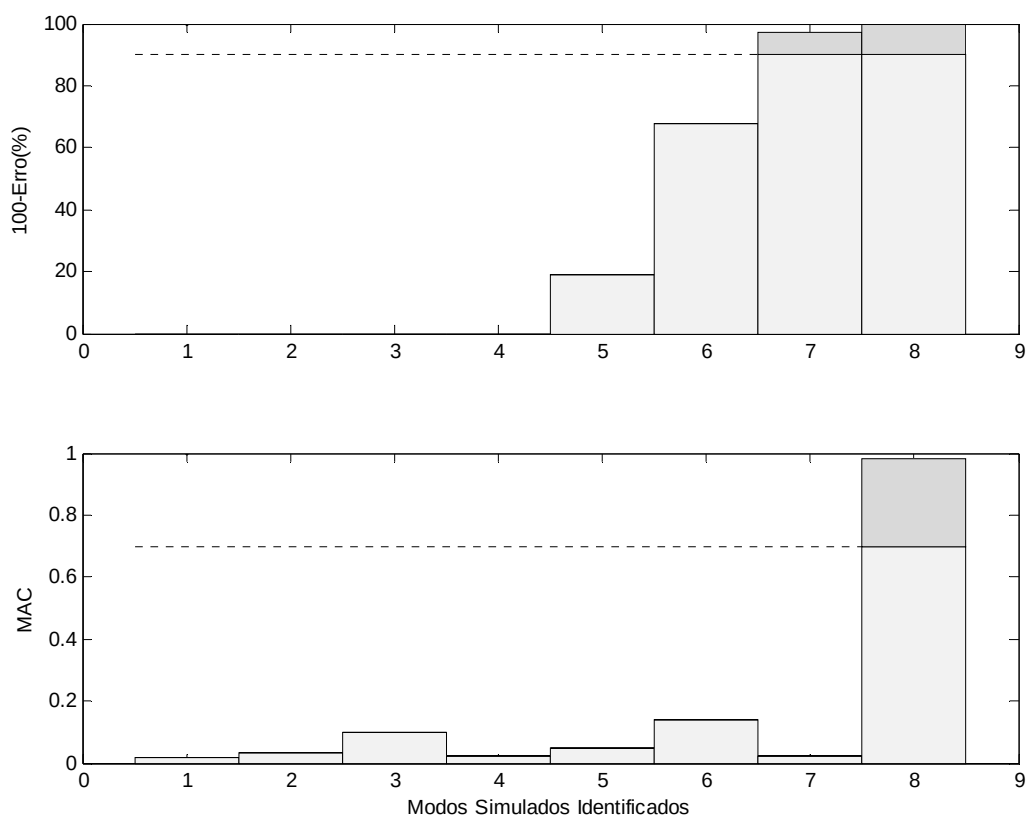


Figura 5.22h – Erro relativo da frequência e índice MAC do oitavo modo identificado para o modelo discreto com oito GDL (Ruído de 5%-uma contagem – ACS).

5.3.2 Modelo experimental

O modelo experimental usado na avaliação deste método foi o mesmo usado na seção anterior, Fig. 5.13. Nesta análise foram usados os mesmos dados experimentais. A Tab. 5.14 mostra os valores identificados da matriz de massa e os erros relativos em relação à matriz de massa verdadeira do sistema. A Fig. 5.23 mostra a comparação entre as FRFs obtidas das matrizes físicas identificadas com as FRFs experimentais. Como pode ser visto existe uma boa concordância entre as curvas.

O erro relativo observado na identificação da matriz de massa ficou em torno de 2% enquanto que pelo Método de Chen o erro foi aproximadamente de 5%.

Comparando os erros relativos das massas identificadas pelos métodos de Chen e pelo método ACS nota-se que neste último os resultados foram melhores em todas as identificações realizadas tanto em testes simulados como no teste experimental. Mas comparando-se os erros relativos das frequências ocorreu o inverso. Os resultados obtidos pelo método Chen foram ligeiramente melhores nas duas simulações realizadas. Quanto ao teste experimental não é possível comparar a precisão dos dois métodos pois não há frequências exatas para calcular o erro relativo.

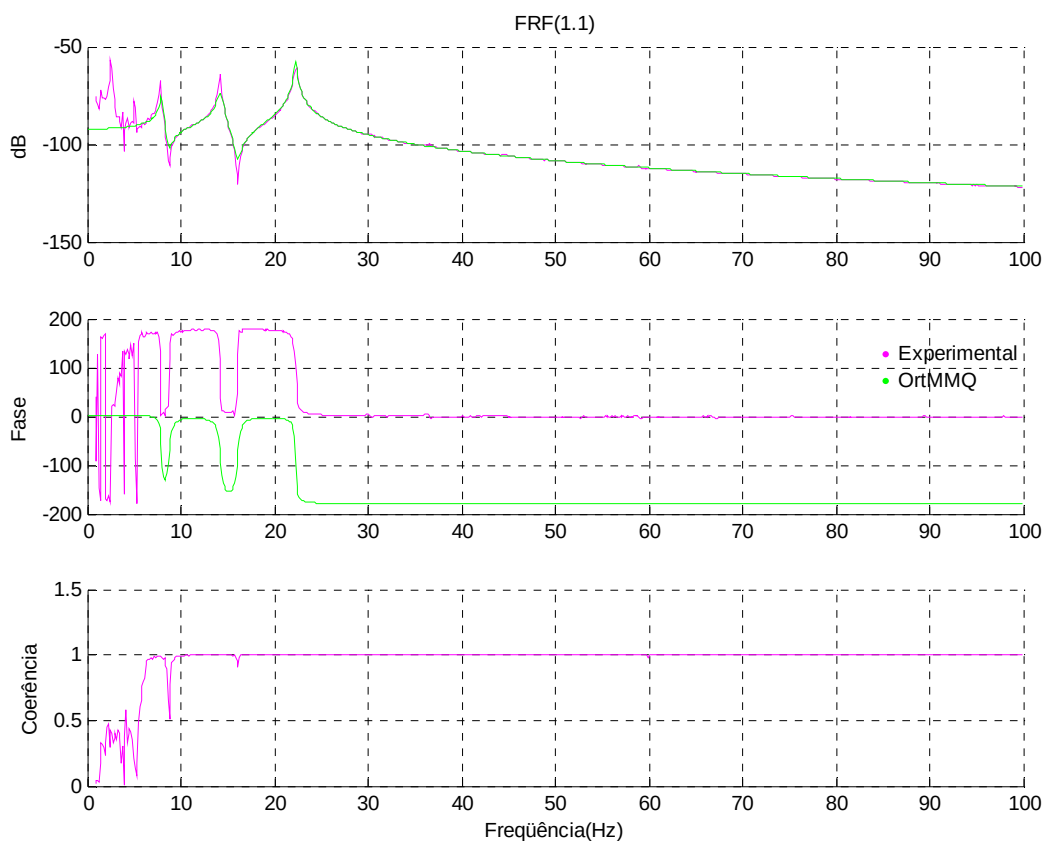


Figura 5.23a – FRF do modelo experimental com três GDL (ACS).

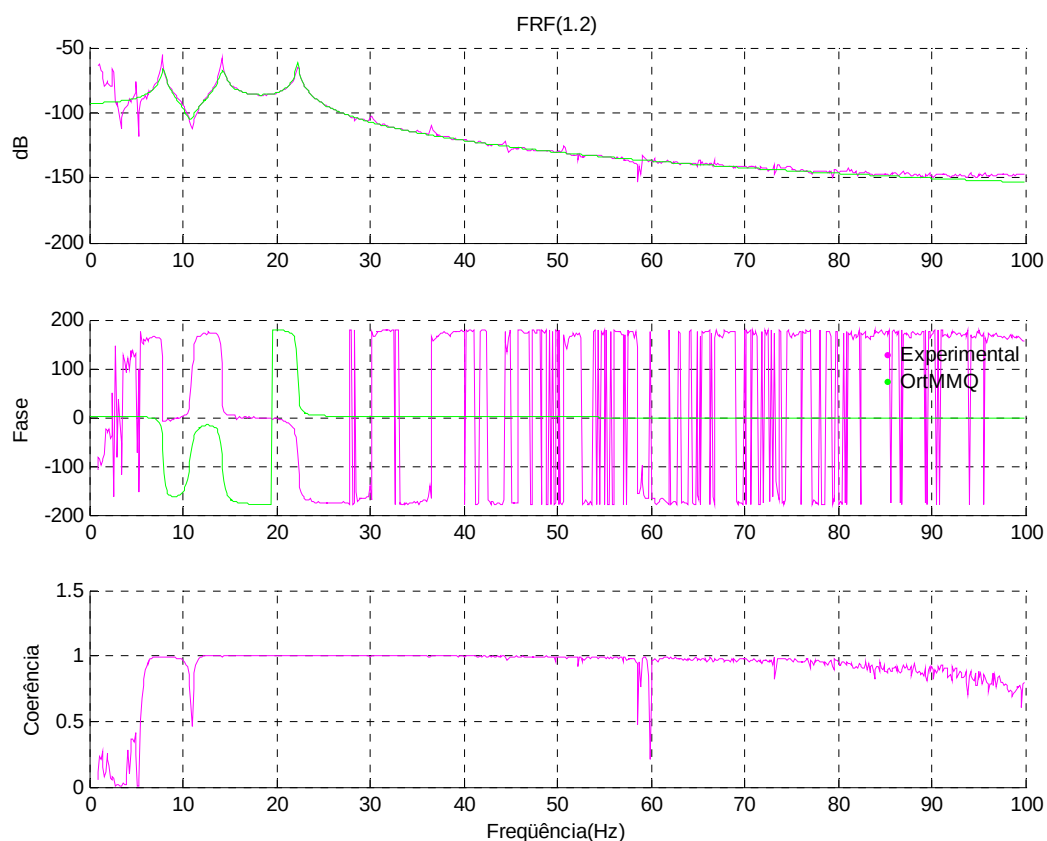


Figura 5.23b – FRF do modelo experimental com três GDL (ACS).

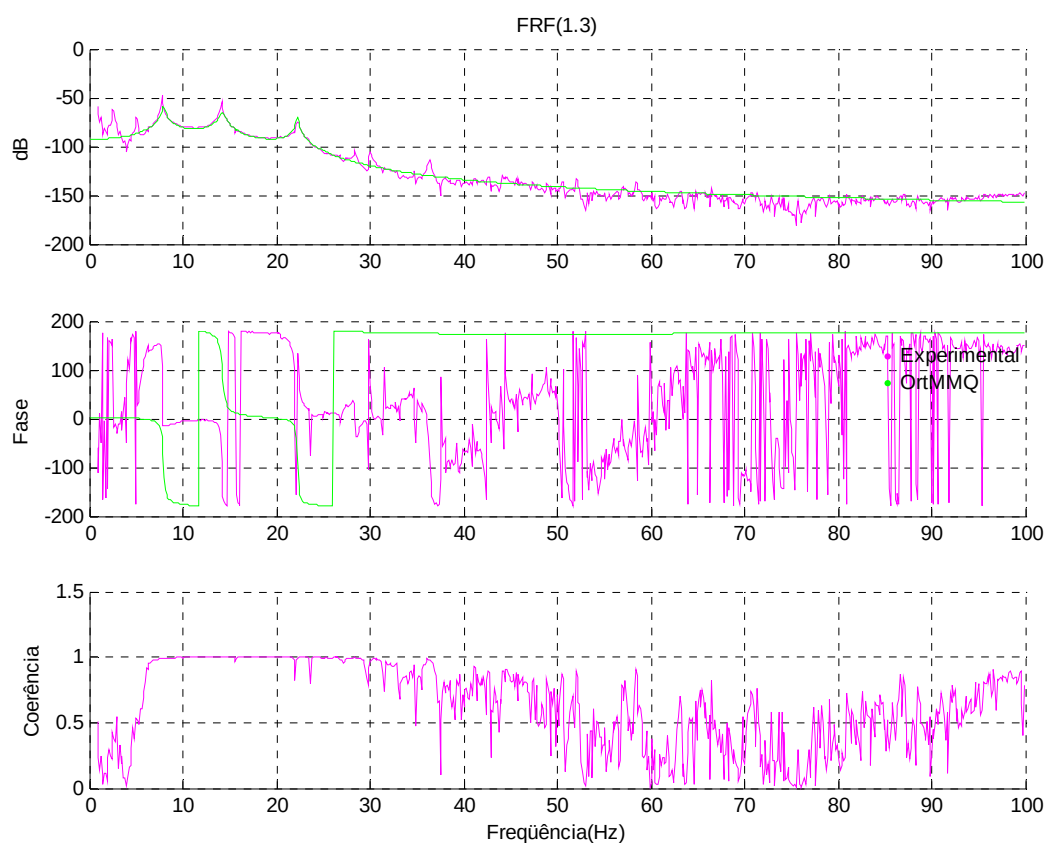


Figura 5.23c – FRF do modelo experimental com três GDL (ACS).

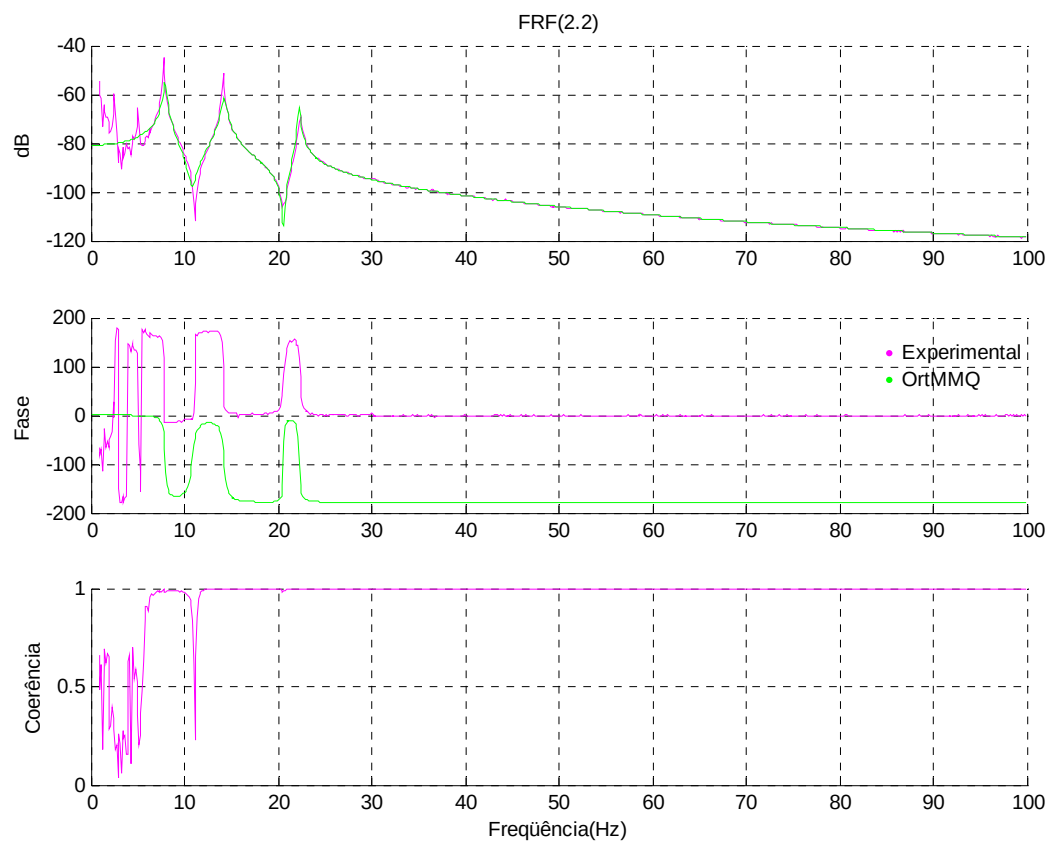


Figura 5.23d – FRF do modelo experimental com três GDL (ACS).

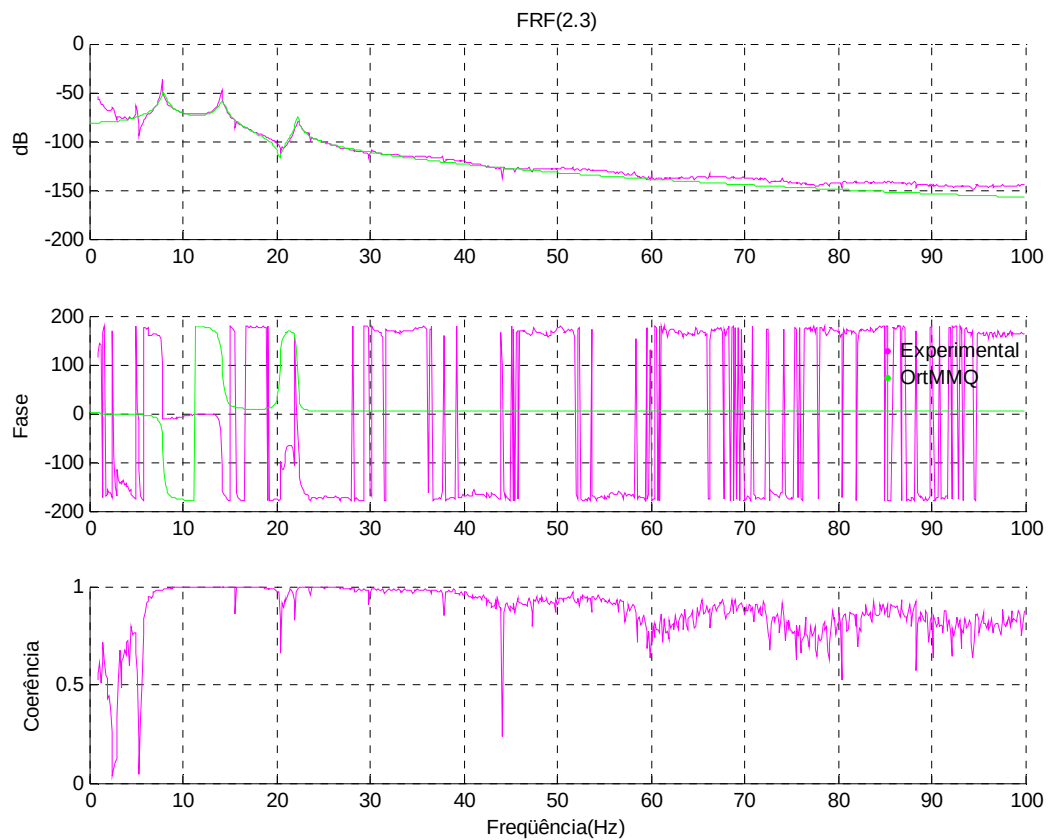


Figura 5.23e – FRF do modelo experimental com três GDL (ACS).

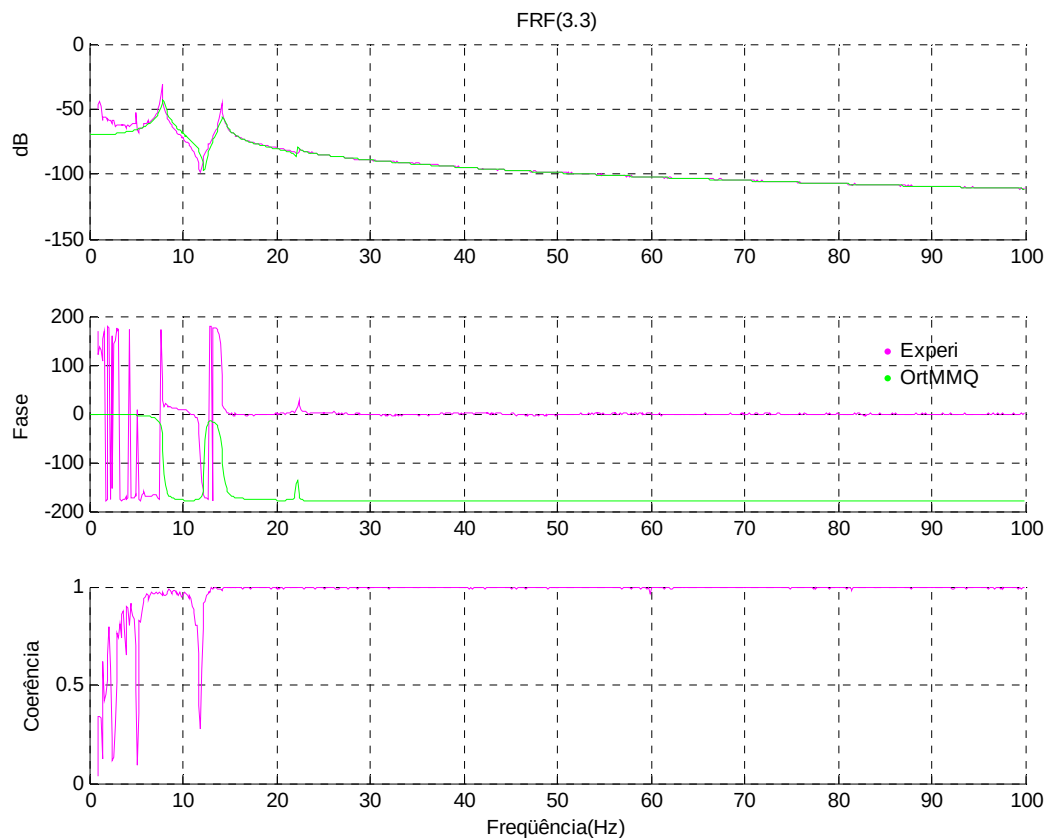


Figura 5.23f – FRF do modelo experimental com três GDL (ACS).

Tabela 5.14 – Valores originais e identificados de massa do modelo experimental.

Valores Originais		
3,3000	0	0
0	2,2230	0
0	0	0,9290
Valores Identificados		
3,2265	0,0198	-0,0158
0,0198	2,2195	-0,0008
-0,0158	-0,0008	0,9465
Erro Relativo(%)		
2,2281	-	-
-	0,1572	-
-	-	1,8812

5.4 Método iterativo

Nos capítulos anteriores foram apresentados métodos de identificação das matrizes dinâmicas com boa precisão mas com um inconveniente de exigir medidas experimentais que utilizam uma quantidade elevada de FRFs, dependendo do número de graus de liberdade da estrutura a ser analisada. O número de FRFs necessário para a identificação

das três matrizes físicas é igual a $[n(n+1)/2]$ onde n é o número de graus de liberdade da estrutura.

Nesta seção é apresentado um método que pode identificar as matrizes de massa, amortecimento e rigidez utilizando apenas n FRFs. Considerando as dificuldades e o tempo exigido nas medidas experimentais, este método é muito conveniente em análises experimentais, principalmente para estruturas com ordem elevada de graus de liberdade.

Este método baseia-se no ajuste dos parâmetros dinâmicos, frequência ω_k , fator de amortecimento ζ_k e amplitude A_{i1-k} no k -ésimo pico da FRF H_{i1} por meio de métodos iterativos.

O desenvolvimento teórico para a estimativa dos parâmetros dinâmicos foi baseado no trabalho do Inman (1996).

Seja H_{i1} a FRF localizada na i -ésima linha e na primeira coluna. Inicialmente são localizados todos os picos das frequências determinando cada um dos intervalos fechados onde estes estão localizados. As frequências naturais de partida são as frequências correspondentes aos picos de cada intervalo.

Os fatores de amortecimento de partida são determinados pela média dos fatores de amortecimento calculados na vizinhança dos respectivos picos, ou seja,

$$\zeta_k = \left(\frac{1}{m_2 - m_1 + 1} \right) \sum_{m=m_1}^{m_2} \frac{\text{Im}(H_{i1}(\omega_m)) (\omega_m^2 - \omega_k^2)}{\text{Re}(H_{i1}(\omega_m)) 2\omega_k \omega_m} \quad (5.57)$$

onde m_1 e m_2 são os extremos dos k -ésimos intervalos.

As amplitudes de partida nos picos de H_{i1} são determinadas da seguinte forma,

$$A_{i1-k} = \left(\frac{1}{m_2 - m_1 + 1} \right) \sum_{m=m_1}^{m_2} H_{i1}(\omega_m) \sqrt{(\omega_k^2 - \omega_m^2)^2 + 4\zeta_k^2 \omega_k^2 \omega_m^2} \quad (5.58)$$

Uma vez estimados os parâmetros dinâmicos calcula-se hp_{i1-k} , no intervalo k , conforme a Eq.(5.59) e determina-se a norma em relação a H_{i1-k} , ou seja.

$$hp_{i1-k}(\omega) = \frac{A_{i1-k}}{\sqrt{(\omega_k^2 - \omega_m^2)^2 + 4\zeta_k^2 \omega_k^2 \omega_m^2}} \quad (5.59)$$

$$dh_1 = \|H_{i1-k} - hp_{i1-k}\| \quad (5.60)$$

onde hp_{i1-k} e H_{i1-k} são as FRFs ajustadas e simulada ou experimental no intervalo k . Os parâmetros são ajustados enquanto hp_{i1-k} e dh são calculados iterativamente até atingir a precisão especificada. Este procedimento é repetido para todos os k intervalos.

Após esse processo iterativo todos os parâmetros estarão calculados. Assim a FRF ajustada h_{i1} pode ser obtida da seguinte forma,

$$h_{i1}(\omega_m) = \sum_{k=1}^n \frac{A_{i1-k}}{\omega_k^2 - \omega_m^2 + 2i\zeta_k \omega_k \omega_m} \quad (5.61)$$

Quanto mais h_{i1} (ajustada) se aproxima de H_{i1} (simulada ou experimental), mais precisos são os parâmetros ω_k , ζ_k e A_{i1-k} .

O cálculo das demais FRFs $h_{ij}|_{j=2, 3, \dots, n}$ é realizado, também, pela Eq.(5.61) alterando apenas o valor de A_{ij-k} já que as frequências naturais e o fator de amortecimento são iguais para todas as FRFs. Para cada j variando de 2 a n são calculados, em um mesmo processo iterativo, os parâmetros A_{ij-k} e a FRF h_{ij} conforme as Eq.(5.63) e (5.64). Os valores de partida de A_{ij-k} são determinados pela Eq.(5.62), em função do máximo valor absoluto no k –ésimo intervalo de H_{ij} , ou seja,

$$A_{ij-k} = \max(\text{abs}(H_{ij-k})) 2i\zeta_k \omega_k^2 \quad (5.62)$$

$$h_{ij}(\omega_m) = \sum_{k=1}^n \frac{A_{ij-k}}{\omega_k^2 - \omega_m^2 + 2i\zeta_k \omega_k \omega_m} \quad (5.63)$$

$$dh_j = \|H_{ij} - h_{ij}\| \quad (5.64)$$

Os parâmetros A_{ij-k} são ajustados enquanto hp_{ij} e dh_j são calculados iterativamente até atingir a precisão desejada. Este procedimento se repete para as $(n-1)$ FRFs restantes. Uma vez ajustados os parâmetros, calcula-se $h_{ij}|_{j=2, 3, \dots, n}$ pela Eq.(5.63).

Os modos podem ser determinados utilizando a função de transferência, ou seja,

$$[H(\omega_m)] = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\{U_k\} \{U_k\}^t}{(\omega_k^2 - \omega_m^2) + 2i\zeta_k \omega_k \omega_m} \right) \quad (5.65)$$

onde $\{U_k\}$ é o k -ésimo modo e $[H]$ é a FRF complexa. A contribuição do somatório da Eq.(5.65) é muito maior nos picos onde ω_m é igual a ω_k , pois neste caso o termo $(\omega_k^2 - \omega_m^2)$ no denominador é igual a zero. Assim a Eq.(5.65) pode ser escrita como,

$$[H(\omega_k)] = \frac{\{U_k\} \{U_k\}^t}{2i\zeta_k \omega_k^2} \quad (5.66)$$

A Eq.(5.66) estabelece uma relação entre os modos e as FRFs $[H(\omega_k)]$ e pode ser escrita na forma

$$\{U_k\} \{U_k\}^t = [H(\omega_k)] 2i\zeta_k \omega_k^2 \quad (5.67)$$

onde $\{U_k\}$ pode ser identificada em função de $[H]$. Considerando apenas a primeira coluna da matriz $\{U_1\} \{U_1\}^t$ obtida na Eq.(5.67) e substituindo H_{ij} (simulada ou experimental) por h_{ij} (ajustada) tem-se que,

$$\begin{aligned} u_{11} u_{11} &= h_{11}(\omega_1) 2i\zeta_1 \omega_1^2 \\ u_{21} u_{11} &= h_{21}(\omega_1) 2i\zeta_1 \omega_1^2 \\ &\vdots \\ u_{n1} u_{11} &= h_{n1}(\omega_1) 2i\zeta_1 \omega_1^2 \end{aligned} \quad (5.68)$$

Das Eq.(5.68) e (5.69) obtém-se, respectivamente,

$$\begin{aligned}
 u_{11} &= \sqrt{h_{11}(\omega_1) 2i \zeta_1 \omega_1^2} \\
 u_{21} &= \frac{h_{21}(\omega_1) 2i \zeta_1 \omega_1^2}{u_{11}} \\
 &\vdots \\
 u_{n1} &= \frac{h_{n1}(\omega_1) 2i \zeta_1 \omega_1^2}{u_{11}}
 \end{aligned} \tag{5.69}$$

Portanto, o primeiro modo $\{U_1\}$ pode ser determinado por

$$\{U_1\} = [u_{11} \quad u_{21} \quad \cdots \quad u_{n1}]^t \tag{5.70}$$

Da mesma forma identificam-se os demais $\{U_k\}$ obtendo-se todos os modos de $[U]$.

5.4.1 Simulações numéricas

A estimativa dos parâmetros dinâmicos foi realizada através de um programa computacional que teve como base uma versão cedida pelo Prof. Dr. Francisco Paulo Léopore Neto do Laboratório de Dinâmica da Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia. Esse programa estima as frequências naturais, fator de amortecimento, modos e ajusta as FRFs simuladas ou experimentais conforme o caso.

Foi implementada uma nova versão deste programa alterando e adaptando para gerar os parâmetros dinâmicos a partir dos quais foram obtidas todas as FRFs necessárias para a identificação das matrizes físicas do sistema. O programa foi desenvolvido em código MATLAB.

A simulação foi feita com um modelo discreto com seis graus de liberdade mostrado na Fig. 5.24.

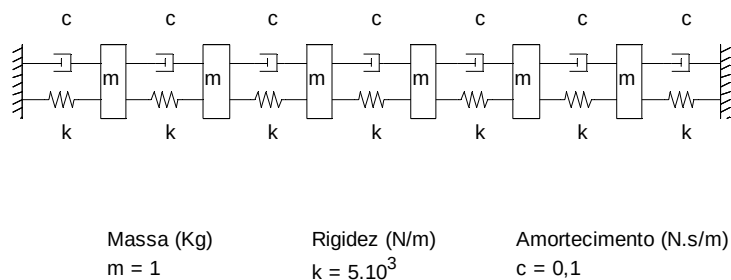


Figura 5.24 – Sistema discreto massa-mola-amortecedor de seis GDL.

Os resultados da simulação com 5% de ruído com uma contagem são mostrados nas Tab. 5.15, 5.16 e 5.17. A Tab. 5.15 mostra o erro relativo das frequências e o índice MAC dos modos obtidos para as matrizes físicas identificadas. Na Tab. 5.16 podem ser verificados os fatores de amortecimento com seus respectivos erros relativos e a Tab. 5.17 mostra a precisão da massa identificada.

Tabela 5.15 – Frequências naturais amortecidas (Hz) originais e identificadas e índice MAC para o modelo discreto com seis GDL (Ruído de 5%-uma contagem).

Original	Identificada	Erro Relativo(%)	MAC
5,0085	5,0087	0,0053	0,9684
9,7658	9,7648	0,0108	0,9951
14,0334	14,0342	0,0051	0,9982
17,5974	17,5956	0,0102	0,9698
20,2789	20,2805	0,0080	0,9556
21,9436	21,9568	0,0604	0,7967

Tabela 5.16 – Fatores de amortecimento originais e identificados para o modelo discreto com seis GDL (Ruído de 5%-uma contagem).

Original	Identificada	Erro Relativo(%)
0,0003	0,0003	12,4197
0,0006	0,0006	2,0911
0,0009	0,0009	4,4111
0,0011	0,0011	2,8711
0,0013	0,0012	3,8096
0,0014	0,0012	13,4078

O máximo erro relativo na identificação da massa foi de aproximadamente 36%, o pior resultados entre todos os métodos analisados. Porém, os erros relativos das frequências naturais ficaram bem próximos de zero e o índice MAC ficou muito próximo da unidade exceto o valor referente ao último modo que ficou em aproximadamente 0,8. A maioria dos fatores de amortecimento ficou em torno de 3% e dois ficaram em torno de 13%.

A Fig. 5.25 mostra os gráficos dos modos originais e identificados de uma das FRFs e os gráficos do índice MAC e dos erros relativos das frequências estão na Fig. 5.26. A FRF numérica é obtida pelo método iterativo através de ajustes sucessivos até atingir a precisão desejada em relação a FRF simulada, com ruído. As FRF ajustadas dão origem aos modos, fatores de amortecimento e as frequências. Estes geram as FRFs a partir das quais são identificadas as matrizes físicas simétricas, pelo Método de Chen ou ACS, de onde se obtém as bases modais ortogonais. Estas geram as FRF, de cor verde, para comparar com as simuladas.

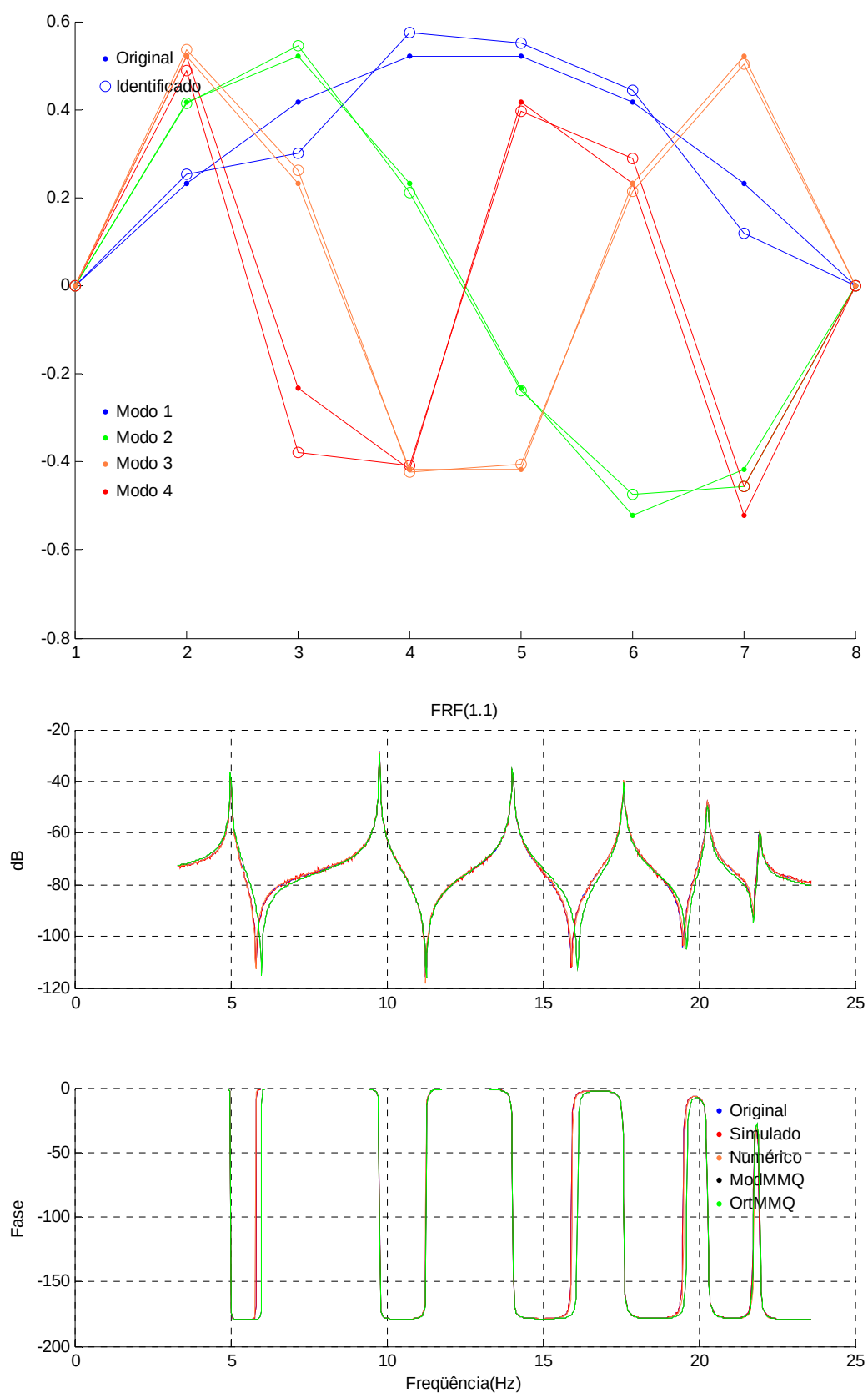


Figura 5.25 – Quatro modos e uma FRF de simulação do modelo com seis GDL (com 5% de ruído e uma contagem – Método Iterativo/ACS).

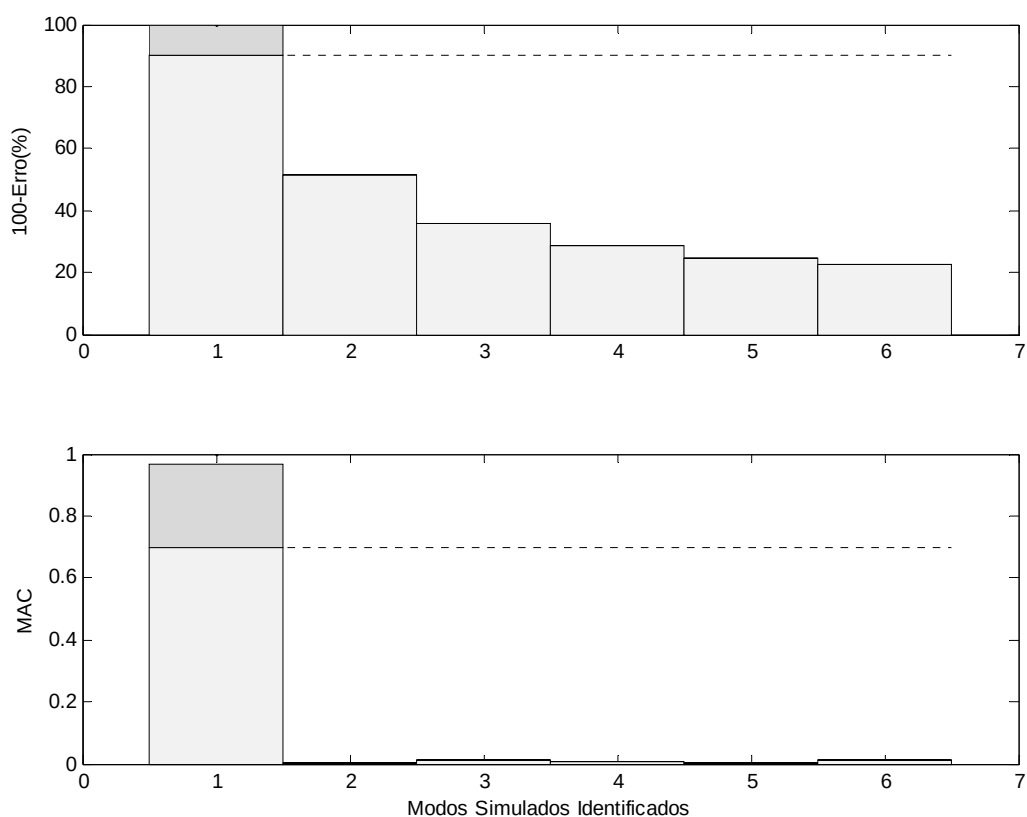


Figura 5.26a – Erro relativo da frequência e índice MAC do primeiro modo identificado para o modelo discreto com seis GDL (Ruído de 5%-uma contagem – Método Iterativo/ACS).

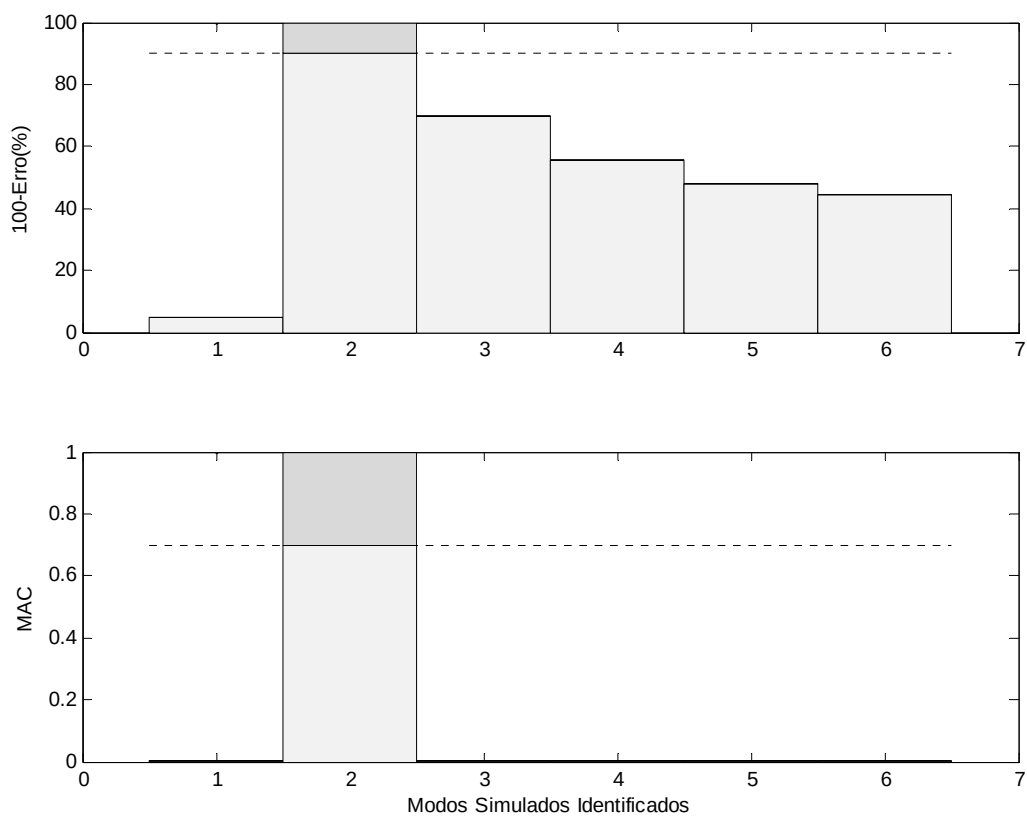


Figura 5.26b – Erro relativo da frequência e índice MAC do segundo modo identificado para o modelo discreto com seis GDL (Ruído de 5%-uma contagem – Método Iterativo/ACS).

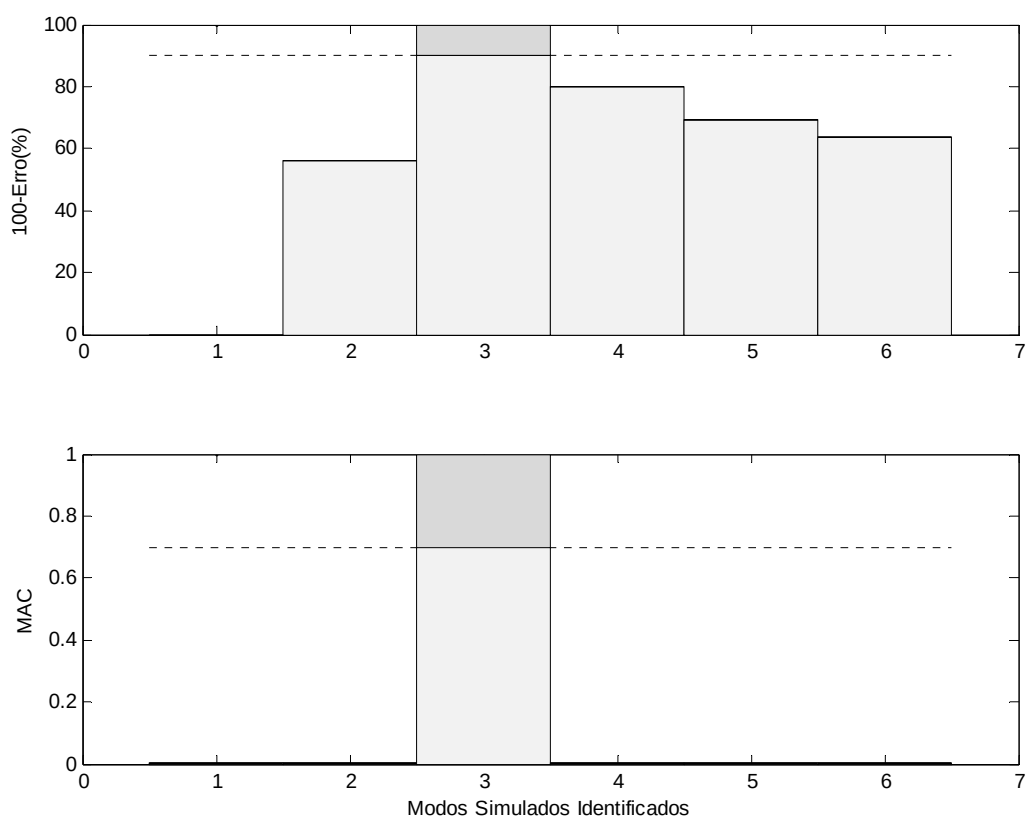


Figura 5.26c – Erro relativo da frequência e índice MAC do terceiro modo identificado para o modelo discreto com seis GDL (Ruído de 5%-uma contagem – Método Iterativo/ACS).

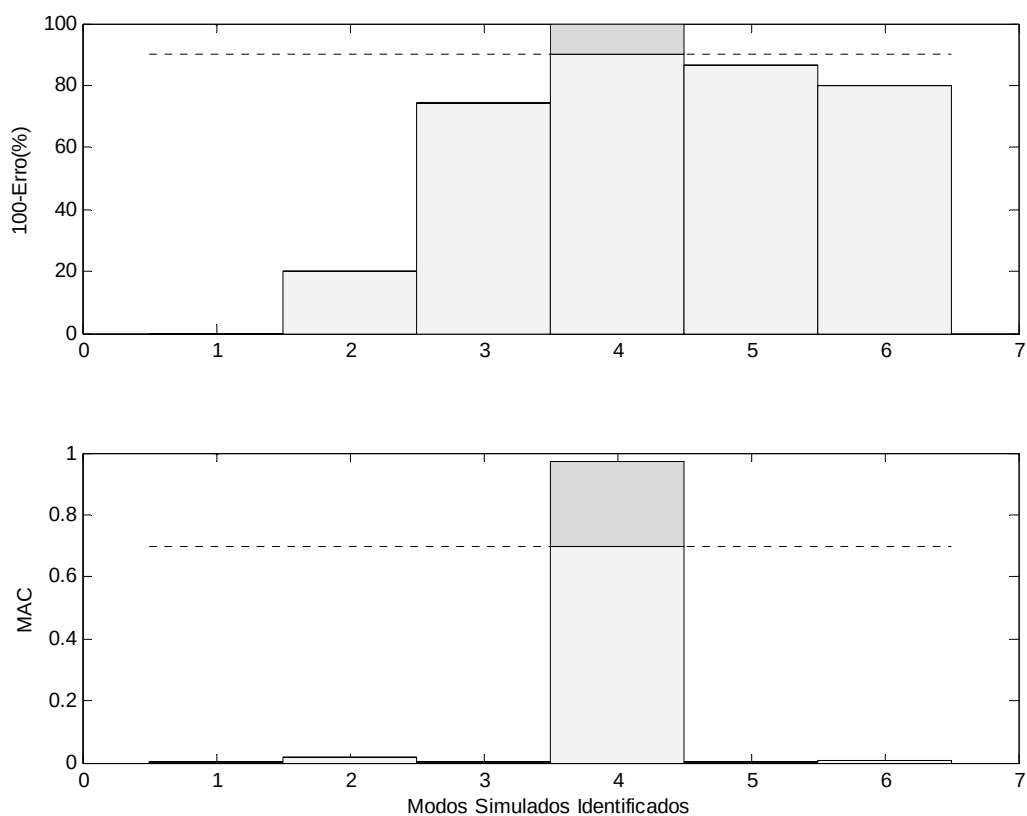


Figura 5.26d – Erro relativo da frequência e índice MAC do quarto modo identificado para o modelo discreto com seis GDL (Ruído de 5%-uma contagem – Método Iterativo/ACS).

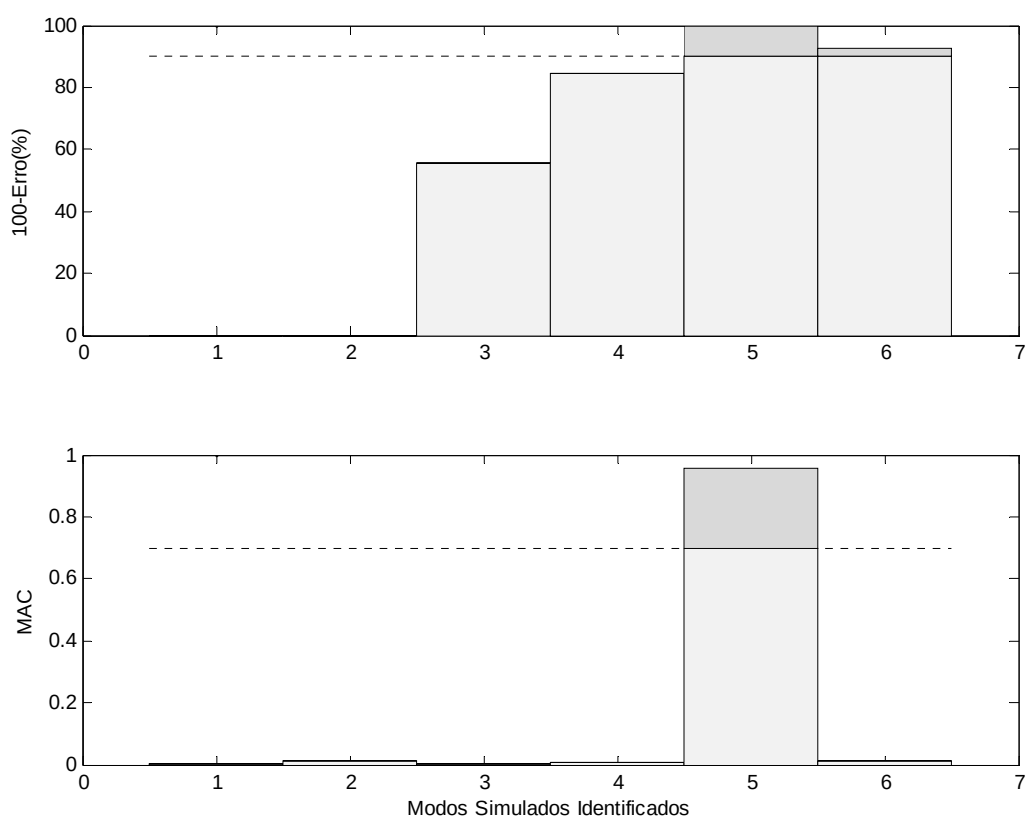


Figura 5.26e – Erro relativo da frequência e índice MAC do quinto modo identificado para o modelo discreto com seis GDL (Ruído de 5%-uma contagem – Método Iterativo/ACS).

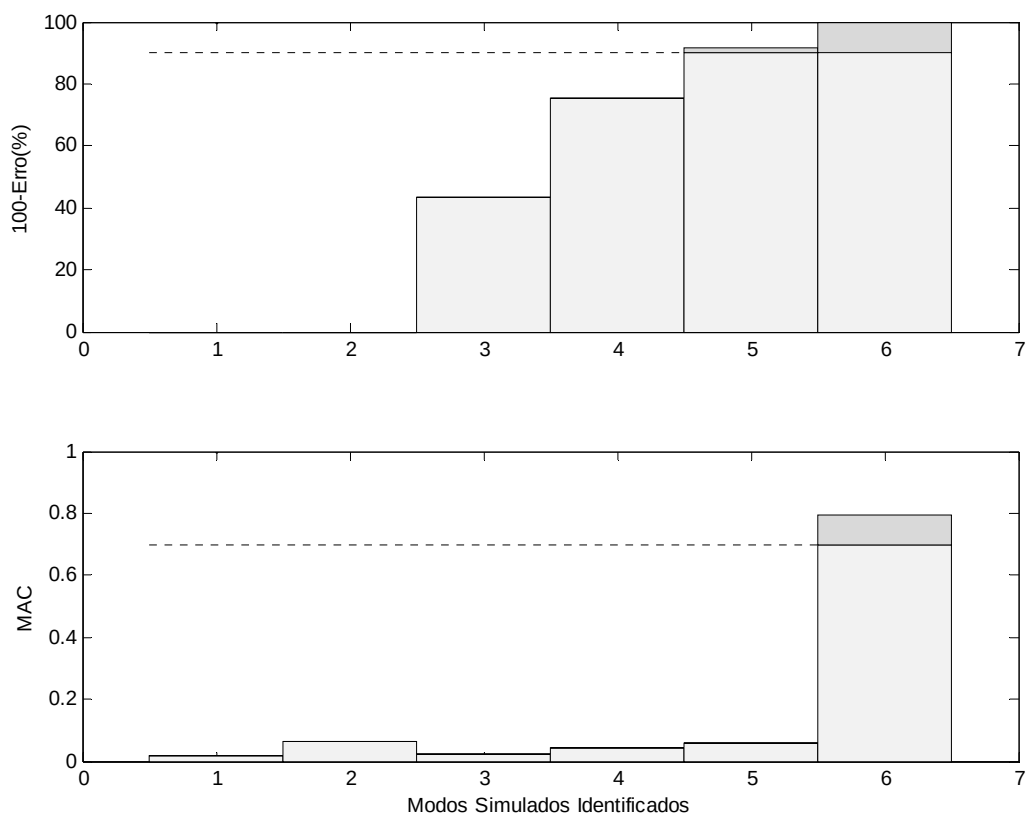


Figura 5.26f – Erro relativo da frequência e índice MAC do sexto modo identificado para o modelo discreto com seis GDL (Ruído de 5%-uma contagem – Método Iterativo/ACS).

Tabela 5.17 – Matrizes de massa originais e identificadas para o modelo discreto com seis GDL (Ruído de 5%-uma contagem).

Valores Originais					
1	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	1
Valores Identificados					
1,0937	-0,0777	0,1356	-0,1286	-0,0717	0,1236
-0,0777	1,2804	-0,3586	0,4629	-0,0222	-0,1981
0,1356	-0,3586	1,3571	-0,3866	0,0682	0,3479
-0,1286	0,4629	-0,3866	1,1886	-0,0931	-0,3609
-0,0717	-0,0222	0,0682	-0,0931	1,1970	0,1740
0,1236	-0,1981	0,3479	-0,3609	0,1740	0,9679
Erro Relativo(%)					
9,3711	-	-	-	-	-
-	28,0384	-	-	-	-
-	-	35,7104	-	-	-
-	-	-	18,8568	-	-
-	-	-	-	19,7023	-
-	-	-	-	-	3,2097

5.4.2 Modelo experimental

Nesta etapa, a análise foi feita utilizando o mesmo modelo experimental mostrado na Fig. 5.13 e os mesmos dados do teste experimental. O procedimento é o mesmo adotado na simulação numérica. A diferença é que as FRFs simuladas são substituídas pelas FRFs experimentais.

A Tab. 5.18 mostra os valores identificados da matriz de massa e os erros relativos em relação à matriz de massa real do sistema. A Fig. 5.27 mostra a comparação entre as FRFs obtidas das matrizes físicas identificadas com as FRFs experimentais.

Comparativamente aos outros métodos analisados verifica-se que, em alguns casos, é possível identificar as matrizes físicas usando este método. As curvas ajustadas mostram boa concordância, principalmente, na região do pico das frequências. O erro relativo observado na identificação da matriz de massa ficou em torno de 62%, o pior índice para a identificação da massa entre todos os métodos. Porém, os resultados apresentados pelos gráficos das FRFs indicam que a matriz de massa identificada é próxima a uma matriz equivalente à matriz verdadeira.

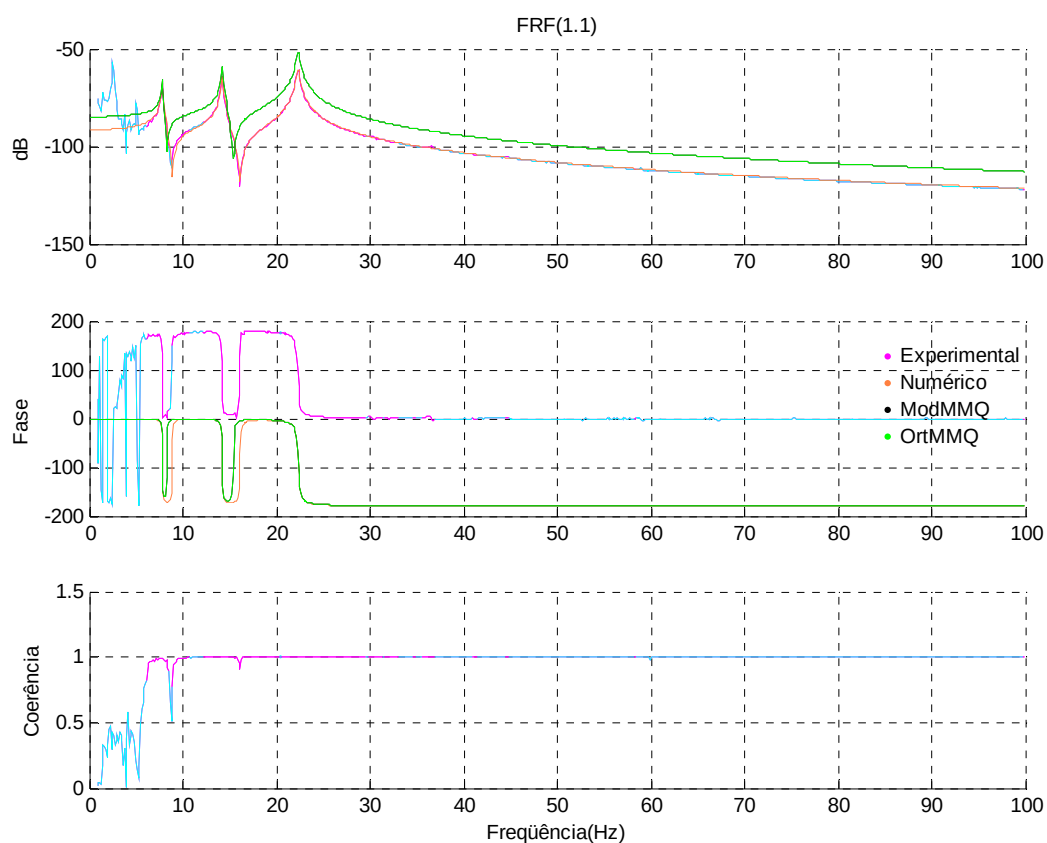


Figura 5.27a – FRF do modelo experimental com três GDL (Método Iterativo/ACS).

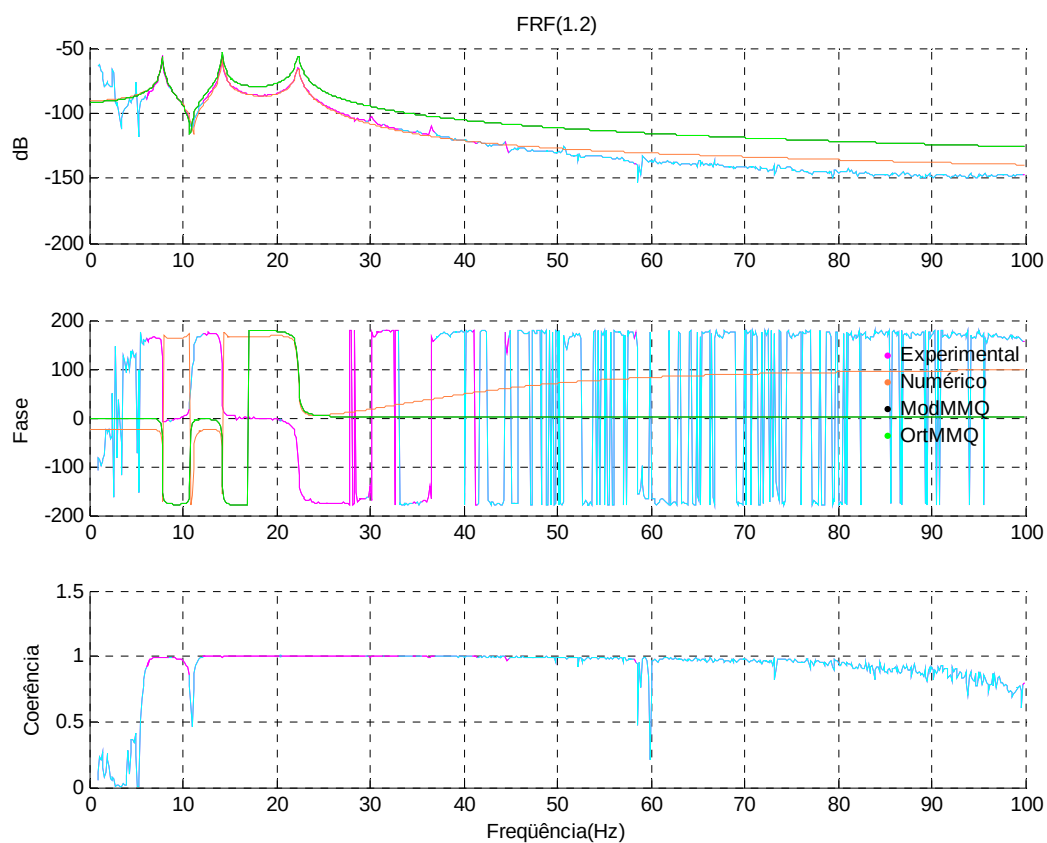


Figura 5.27b – FRF do modelo experimental com três GDL (Método Iterativo/ACS).

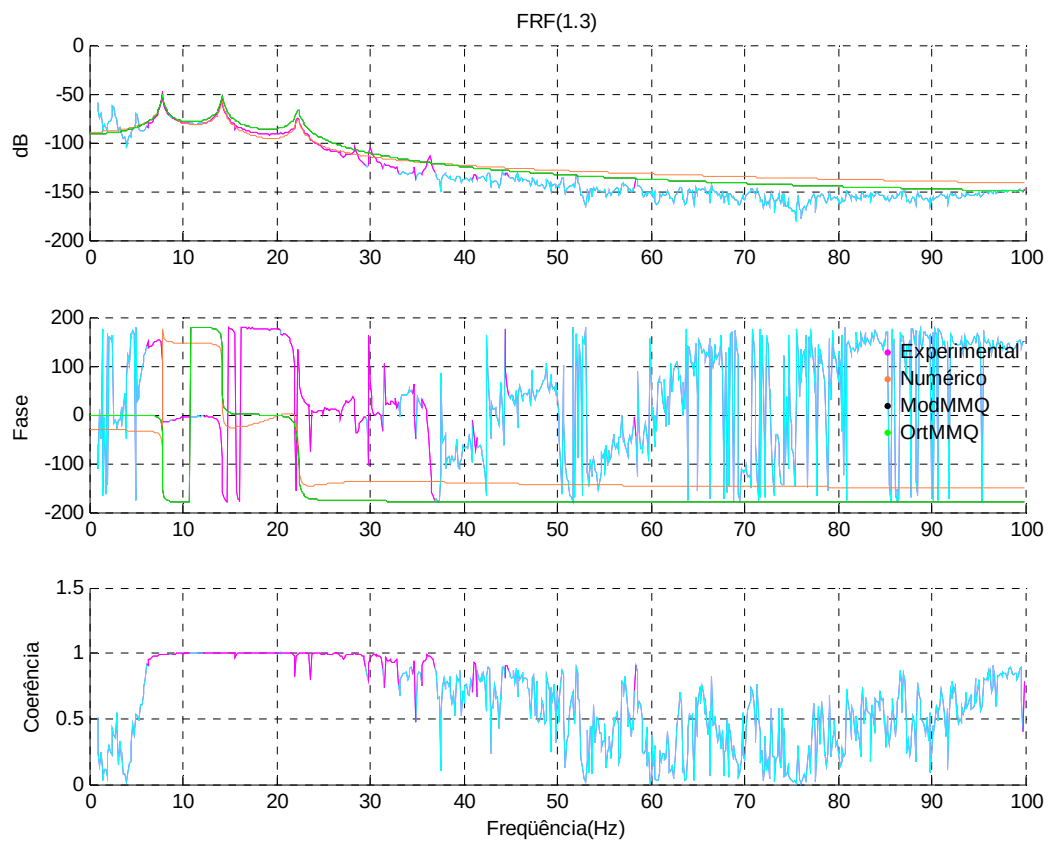


Figura 5.27c – FRF do modelo experimental com três GDL (Método Iterativo/ACS).

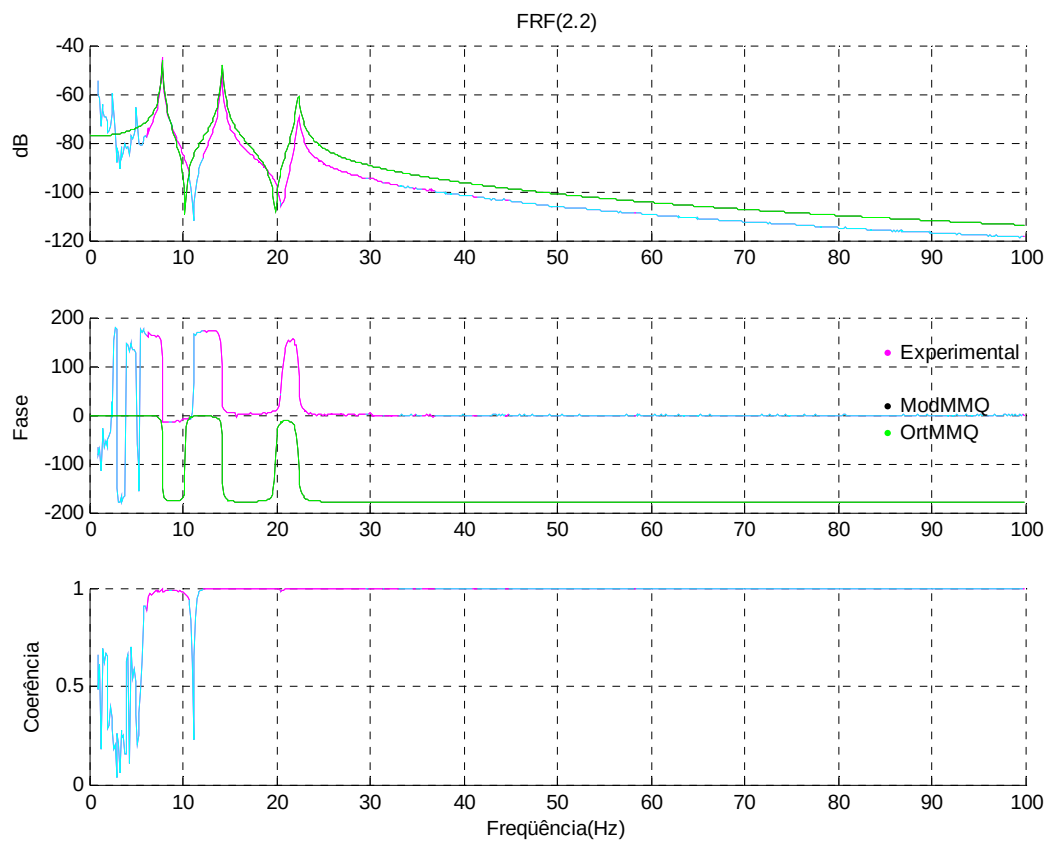


Figura 5.27d – FRF do modelo experimental com três GDL (Método Iterativo/ACS).

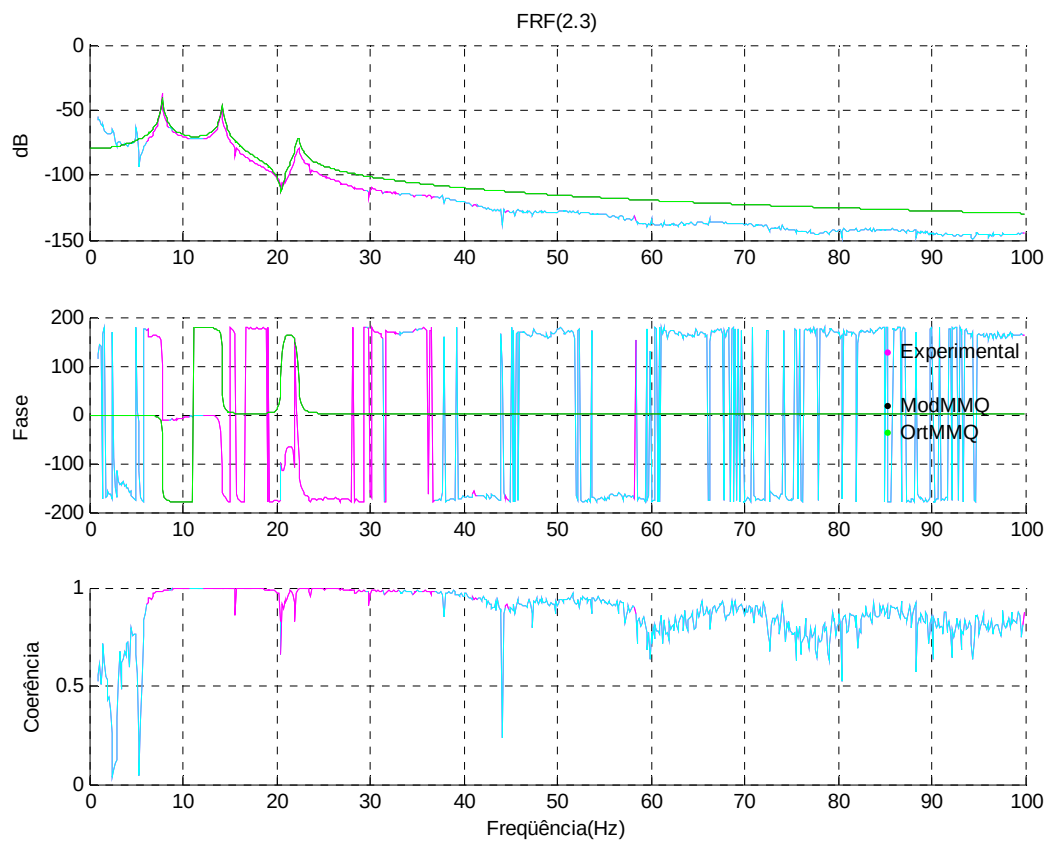


Figura 5.27e – FRF do modelo experimental com três GDL (Método Iterativo/ACS).

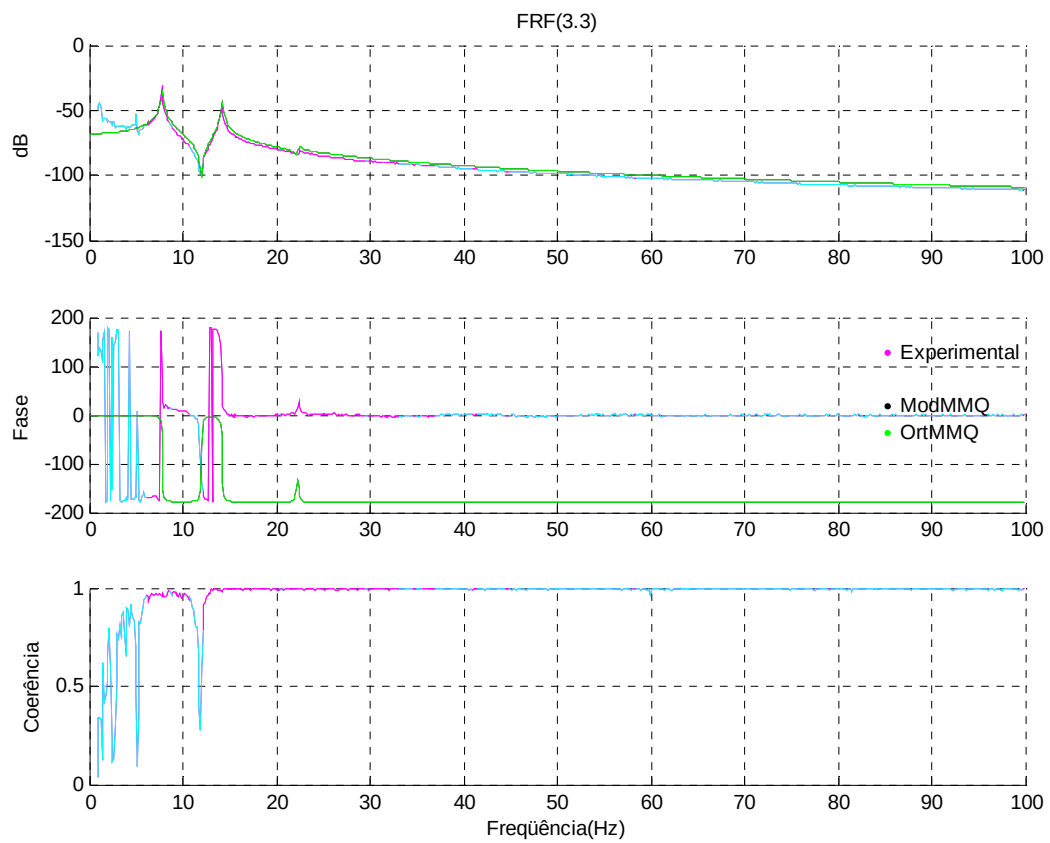


Figura 5.27f – FRF do modelo experimental com três GDL (Método Iterativo/ACS).

Tabela 5.18 – Valores originais e identificados de massa do modelo experimental.

Valores Originais		
3,3000	0	0
0	2,2230	0
0	0	0,9290
Valores Identificados		
1,2384	0,2860	0,0161
0,2860	1,3510	0,1183
0,0161	0,1183	0,7447
Erro Relativo(%)		
62,4736	-	-
-	39,2242	-
-	-	19,8388

5.5 Avaliação dos métodos

O resultado da normalização pela matriz de massa identificada apresentou bons resultados na aplicação em síntese modal. A estrutura real, a princípio, possui infinitos graus de liberdade e é discretizada nos pontos de medida. Essa aproximação pode levar a erros que podem ser minimizados através de refinamentos no processo de discretização.

Os métodos de Chen e ACS identificaram as matrizes físicas exatas a partir de dados simulados sem ruído. No entanto, essa precisão diminui conforme o nível de ruído adicionado nos dados simulados. Com ruído adicionado o Método de Chen é melhor que o ACS na precisão das frequências identificadas, mas em relação a matriz de massa a precisão obtida pelo ACS é melhor.

Utilizado o método iterativo as matrizes físicas foram identificadas com erros relativos bastante elevados até mesmo com dados simulados sem ruído. Mas as frequências, calculadas a partir destas matrizes, apresentaram boa precisão mesmo com um nível de ruído elevado.

Então para dados sem ruído são indicados os métodos de Chen ou ACS. Para os dados com baixo nível de ruído indica-se o método ACS devido sua melhor precisão na identificação da matriz de massa, utilizada também na normalização das bases modais.

Se os dados são contaminados com alto nível de ruído a melhor opção é o método iterativo. Nesse caso as matrizes físicas devem ser identificadas pelo método ACS para que os modos possam ser ortogonalizados e normalizados pela massa.

Nos capítulos VI e VII serão utilizados o método ACS para dados simulados e o método iterativo para dados experimentais que estão contaminados com alto nível de ruído.