
Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática

Gabriel Faria Pinheiro

**Algumas Considerações Envolvendo
Proporções**

Orientador: Walter dos Santos Motta Junior

Uberlândia - MG
2017

Algumas Considerações Envolvendo Proporções

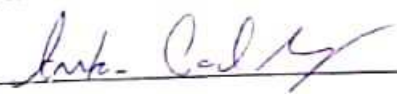
Gabriel Faria Pinheiro

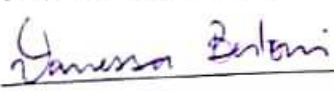
Monografia apresentada à Faculdade de Matemática, UFU, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Uberlândia, 20 de Dezembro de 2017.

BANCA:


Prof. Dr. Walter dos Santos Motta Junior (Orientador)


Prof. Dr. Antonio Carlos Nogueira


Profa. Dra. Vanessa Bertoni


Prof. Dr. Fernando Rodrigo Rafaeli

Algumas Considerações Envolvendo Proporções

Monografia apresentada à Faculdade de Matemática, UFU, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Uberlândia, 20 de dezembro de 2017.

Orientador

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Walter dos Santos Motta Junior (FAMAT-UFU, Orientador)

Prof. Dr. Antonio Carlos Nogueira (FAMAT-UFU)

Profa. Dra. Vanessa Bertoni (FAMAT-UFU)

Sumário

1	Introdução	5
2	Comportamento assintótico de certas sequências de diferenças e a proporção divina	6
2.1	A equação $x(n+2)-bx(n+1)-cx(n)=0$	6
2.2	A equação particular $x(n+2)-x(n+1)-x(n)=0$ com $x(1)=1$ e $x(2)=1$	13
2.3	A Proporção Divina e construções geométricas	18
3	Outras proporções - definições geométricas	23
3.1	Proporção Aritmética	23
3.2	Proporção Geométrica	23
3.3	Harmônica	24
4	Uso de proporções na descrição de formas	26
4.1	O traçado regulador	26
4.2	Aplicações do traçado regulador em construções	26
4.2.1	Pharthenon	26
4.3	Aplicações do traçado regulador em logomarcas	27
4.3.1	Twitter	27
4.3.2	Apple	28
4.3.3	Pointless Corp.	28
4.4	Aplicações do traçado regulador em Posters de cinema	29
4.4.1	Doctor Strange	29
4.4.2	Mad Max	30
4.4.3	Ant-Man	30
	Referências	31

Capítulo 1

Introdução

Este trabalho promove um detalhamento metodológico quanto às técnicas de demonstração associadas a específicas relações de recorrência homogêneas de 2ª ordem, conforme exposto em [4]. Essas ações utiliza procedimentos presentes em problemas de Modelagem Matemática, conforme [1] ou [3]. Nosso objetivo é caracterizar o espaço-solução deste tipo de relação e estudar seu comportamento assintótico, obtendo condições numéricas que venham a garantir a convergência para zero de sequências soluções.

Adiante, observaremos um caso particular de uma relação de recorrência de 2ª ordem e algumas propriedades existentes na mesma, dentre elas uma convergência para o número de ouro, que é resultado da proporção divina, como é possível ver em [5] e [6].

Outras proporções serão apresentadas e haverá uma análise sobre o uso de certas proporções como um meio auxiliar para o design e a arquitetura ([2]).

Capítulo 2

Comportamento assintótico de certas sequências de diferenças e a proporção divina

2.1 A equação $x(n+2)-bx(n+1)-cx(n)=0$

Considere b e c dois números reais não nulos e a equação

$$x(n+2) - bx(n+1) + cx(n) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad b, c \in \mathbb{R} \quad (2.1)$$

usualmente chamada de equação de diferenças linear de segunda ordem com coeficientes constantes.

Deixando livres os valores de $x(1)$ e $x(2)$ sempre é possível construir sequências soluções de (2.1) que ficarão dependentes dessas condições iniciais. Portanto, basta escolher aleatoriamente dois valores iniciais e utilizar (2.1).

Exemplo: As sequências $2^n : 2, 4, 8, \dots$ e $3^n : 3, 9, 27, \dots$ satisfazem a equação $x(n+2) = 5x(n+1) - 6x(n)$ uma vez que $5 \cdot 2^{n+1} - 6 \cdot 2^n = 10 \cdot 2^n - 6 \cdot 2^n = 2^n \cdot 4 = 2^{n+2}$ e $5 \cdot 3^{n+1} - 6 \cdot 3^n = (15 - 6) \cdot 3^n = 9 \cdot 3^n = 3^{n+2}$.

Portanto, sempre será possível obter uma infinidade de soluções de (2.1) que aparentemente não estão relacionadas entre si, mas são dependentes da própria equação (2.1) e das condições iniciais escolhidas.

Por outro lado, se forem impostas as mesmas condições iniciais para duas sequências soluções da forma (2.1), $x(1) = y(1) = A$ e $x(2) = y(2) = B$, em que A e B são constantes reais dadas, então necessariamente $x(n) = y(n), \forall n \in \mathbb{N}$. Em outras palavras, a solução do Problema de Valor Inicial (PVI) associado à (2.1)

$$S : \begin{cases} x(n+2) = bx(n+1) + cx(n), & \forall n \in \mathbb{N}, \\ x(1) = A \text{ e } x(2) = B \end{cases}$$

é única. De fato, se $x(n)$ e $y(n)$ são sequências soluções de S , então $x(3) = bB + cA = by(2) + cy(1) = y(3)$; $x(4) = bx(3) + cx(2) = by(3) + cy(2) = y(4)$. Logo, repetindo recursivamente essa dinâmica, segue que $x(n) = y(n)$.

Mesmo que as condições iniciais não sejam fixadas, desejamos mostrar que existe um relacionamento algébrico entre as infinitas soluções de (2.1).

Definição: Dadas as sequências $x_1(n), \dots, x_k(n), k \in \mathbb{N}$, dizemos que elas são *linearmente dependentes* (L.D.) se existirem constantes reais $a_1, \dots, a_k$ não todas nulas tais que

$$\sum_{i=1}^k a_i x_i(n) = 0, \quad \forall n \geq n_0, \quad (2.2)$$

com n_0 um “ponto de partida” onde os $a_i x_i(n)$ não sejam todos nulos.

Se $a_j \neq 0, 1 \leq j \leq k$, então multiplicando ambos os lados de (2.2) por $\frac{1}{a_j}$ obtemos

$$x_j(n) = - \sum_{\substack{i=1, \\ j \neq i}}^k \frac{a_i}{a_j} x_i(n), \quad (2.3)$$

ou seja, cada $x_j(n)$ com coeficiente não nulo é uma combinação linear dos demais $x_j(n)$,

Quando $x_1(n), \dots, x_k(n)$ não são L.D., dizemos que essas sequências são *linearmente independentes* (L.I.). Portanto, em geral, a igualdade $\sum_{i=1}^k a_i x_i(n) = 0$ somente é válida quando $a_1 = \dots = a_k = 0$.

Exemplo: As sequências $x_1(n) = 2^n$ e $x_2(n) = 3^n$ são L.I.. De fato, sejam a_1 e $a_2 \in \mathbb{R}$ tais que $a_1 \cdot 2^n + a_2 \cdot 3^n = 0$. Então, para $n = 0$ segue que $a_1 + a_2 = 0$ e para $n = 1$, tem-se que $2a_1 + 3a_2 = 0$. Logo, $a_2 = 0 \Rightarrow a_1 = 0$.

Definição: Um conjunto formado por duas soluções L.I. de (2.1) é chamado de *conjunto fundamental de soluções* dessa equação.

Se houver uma forma de caracterizar quando as soluções de (2.1), com condições iniciais distintas, são L.I., isso viabilizará uma caracterização de conjunto fundamental de soluções.

Suponha que $x_1(n)$ e $x_2(n)$ são soluções de (2.1) com $x_1(1) = A_1, x_1(2) = B_1, x_2(1) = A_2, x_2(2) = B_2$ tais que $(A_1, B_1) \neq (A_2, B_2)$. Assim, se $a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n) = 0$, então fazendo $n = 1$ e $n = 2$, segue que

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Logo, esse sistema homogêneo é possível determinado se, e somente se,

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

Exemplo: O conjunto $\{2^n, 3^n\}$ é um conjunto fundamental de soluções de $x(n+2) = 5x(n+1) - 6x(n)$ pois

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} = 6 \neq 0.$$

Portanto, dada qualquer equação do tipo $x(n+2) = bx(n+1) + cx(n)$ e escolhendo, por exemplo, $x(1) = 1$ e $x(2) = 0$ e, posteriormente, $y(1) = 0$ e $y(2) = 1$, iremos encontrar duas distintas sequências soluções de (2.1), tais que

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

isto é, $\{x(n), y(n)\}$ é um sistema fundamental de soluções associado a (2.1). Observe que essa estratégia de escolha, produzindo determinantes não nulos, produz uma infinidade de conjuntos fundamentais de soluções para (2.1).

Seja X o conjunto de todas as sequências soluções de (2.1). Observe que a solução nula $x(n) = 0$ naturalmente satisfaz (2.1). Por outro lado, as operações $\lambda x_1(n)$ e $x_1(n) + x_2(n)$, com $\lambda \in \mathbb{R}$, $x_1(n), x_2(n) \in X$ são fechadas em X , ou seja, $\lambda x_1(n)$, multiplicação termo a termo, e $x_1(n) + x_2(n)$, soma termo a termo são soluções de (2.1). De fato,

- se $x_1(n) \in X$, então $\lambda x_1(n+2) - \lambda b x_1(n+1) - \lambda c x_1(n) = \lambda(x_1(n+2) - b x_1(n+1) - c x_1(n)) = \lambda \cdot 0 = 0$,

- se $x_1(n), x_2(n) \in X$, então $(x_1 + x_2)(n+2) - b(x_1 + x_2)(n+1) - c(x_1 + x_2)(n) = x_1(n+2) - b x_1(n+1) - c x_1(n) + x_2(n+2) - b x_2(n+1) - c x_2(n) = 0 + 0 = 0$;

Princípio da Superposição Se $x_1(n), x_2(n) \in X$ e $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, então $x(n) = a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n) \in X$.

O fechamento das operações, multiplicação por escalar e soma, das sequências acima definidas faz com que elas satisfaçam esse princípio. E como consequência, temos o seguinte teorema

Teorema: Se $\{x_1(n), x_2(n)\}$ é um conjunto fundamental de soluções de (2.1), então X é um espaço vetorial real tal que $\{x_1(n), x_2(n)\}$ é uma base desse espaço.

Basta observar que se $x(n) \in X$, com $x(0) = H_1$ e $x(1) = H_2$ e $x_1(0) = A_1$, $x_1(1) = B_1$, $x_2(0) = A_2$, $x_2(1) = B_2$ com

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

então, o sistema

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \end{pmatrix},$$

sempre admite solução única.

Exemplo: $\{2^n, 3^n\}$ é um conjunto fundamental de soluções para $x(n+2) = 5x(n+1) - 6x(n)$. Considere $x(n)$ solução dessa equação com $x(1) = 0$ e $x(2) = 4$, então $x(n) : 0, 4, 20, 76, 260, \dots$. Por outro lado,

$$\begin{pmatrix} 2^1 & 3^1 \\ 2^2 & 3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow a_1 = -2 \text{ e } a_2 = \frac{4}{3},$$

então, $-4 \cdot 2^n + 4 \cdot 3^n = x(n)$.

Observe que $-2.2 + \frac{4}{3}.3 = 0$; $-2.2^2 + \frac{4}{3}.3^2 = 4$; $-2.2^3 + \frac{4}{3}.3^3 = 20$; ...

O exemplo modelo que estamos explorando utiliza um tipo especial de sequência: as progressões geométricas. Naturalmente surge a questão: quando um modelo genérico $x(n+2) + bx(n+1) + cx(n) = 0$ admite como solução uma progressão geométrica $x(n) = r^n, r \neq 0$?

Observe que $x(n) = r^n$ é solução de $x(n+2) + bx(n+1) + cx(n) = 0$ quando $r^n(r^2 + br + c) = 0$ o que acarreta que r deve ser a raiz da “equação característica” $x^2 + bx + c = 0$. Vejamos todas as possibilidades para o comportamento das raízes dessa equação.

- Se $r_1 \neq r_2$ são raízes reais distintas da equação característica, então a solução geral de (2.1) é

$$x(n) = a_1 r_1^n + a_2 r_2^n, \quad n \in \mathbb{N}$$

De fato, para ver que $x(n) = a_1 r_1^n + a_2 r_2^n$ é solução de (2.1), basta mostrar que r_1^n, r_2^n é um conjunto fundamental de soluções. Para isso, basta observar que:

$$\begin{vmatrix} r_1^n & r_2^n \\ r_1^{n+1} & r_2^{n+1} \end{vmatrix} = r_1^n r_2^n (r_2 - r_1) \neq 0, \quad \forall n \in \mathbb{R}.$$

- Se $r_1 = r_2$ são raízes reais da equação característica, então a solução geral de (2.1) é

$$x(n) = a_1 r_1^n + a_2 n r_1^n, \quad n \in \mathbb{N}$$

De fato, para ver que $x(n) = a_1 r^n + a_2 n r^n$ é solução de (2.1), basta mostrar que $r^n, n r^n$ é um conjunto fundamental de soluções. Para isso, basta observar que:

$$\begin{vmatrix} r^n & n r^n \\ r^{n+1} & (n+1) r^{n+1} \end{vmatrix} = r^{2n+1} \neq 0, \quad \forall n \in \mathbb{R}.$$

- Se r_1 e $r_2 = \overline{r_1} \in \mathbb{C}$ são raízes conjugadas da equação característica, então a solução geral de (2.1) é

$$x(n) = r^n (a_1 \cos(\theta n) + a_2 \sin(\theta n)), \quad n \in \mathbb{N}$$

onde $r = |r_1|$ e $\theta = \arg(r_1)$.

Seja $i^2 = -1$. Mostremos que

$$\phi(n) = r^n e^{in\theta} = r^n (\cos(\theta n) + i \sin(\theta n))$$

e

$$\psi(n) = r^n e^{-in\theta} = r^n (\cos(-\theta n) + i \sin(-\theta n))$$

satisfazem a equação (2.1):

Repare que

$$\begin{aligned} & \phi(n+2) + b\phi(n+1) + c\phi(n) \\ &= r^{n+2} e^{i(n+2)\theta} + b r^{n+1} e^{i(n+1)\theta} + c r^n e^{in\theta} \\ &= r^n (r^2 e^{i\theta n} e^{i\theta 2} + b r e^{i\theta n} e^{i\theta} + c e^{i\theta n}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= r^n e^{i\theta n} (r^2 e^{i\theta 2} + br e^{i\theta} + c) \\
&= r^n e^{i\theta n} .0 = 0
\end{aligned}$$

analogamente,

$$\begin{aligned}
&\psi(n+2) + b\psi(n+1) + c\psi(n) \\
&= r^{n+2} e^{-i(n+2)\theta} + br^{n+1} e^{-i(n+1)\theta} + cr^n e^{-in\theta} \\
&= r^n (r^2 e^{-i\theta n} e^{-i\theta 2} + br e^{-i\theta n} e^{-i\theta} + ce^{-i\theta n}) \\
&= r^n e^{-i\theta n} (r^2 e^{-i\theta 2} + br e^{-i\theta} + c) \\
&= r^n e^{-i\theta n} .0 = 0.
\end{aligned}$$

Pela linearidade da equação (2.1), as sequências dadas por

$$\alpha(n) = \frac{1}{2}(\phi(n) + \psi(n)) \text{ e } \beta(n) = \frac{1}{2i}(\phi(n) - \psi(n))$$

são soluções L.I. de (2.1), pois

$$\alpha(n) = \frac{1}{2}(r^n(\cos(n\theta)) + i.\text{sen}(n\theta) + r^n(\cos(-n\theta) + i.\text{sen}(-n\theta))) = r^n \cos(n\theta) \in \mathbb{R}$$

e

$$\beta(n) = \frac{1}{2i}(r^n(\cos(n\theta)) + i.\text{sen}(n\theta) - r^n(\cos(-n\theta) + i.\text{sen}(-n\theta))) = r^n \text{sen}(n\theta) \in \mathbb{R}$$

Portanto, como $\phi(n)$ e $\psi(n)$ são soluções, a combinação linear delas também é, o que nos dá que a solução geral da equação (2.1) é dada por

$$x(n) = r^n(a_1 \cos(n\theta) + a_2 \text{sen}(n\theta))$$

como queríamos.

Também podemos perceber que as soluções da equação (2.1) tendem a zero se, e somente se, os módulos das raízes da equação característica forem menores do que 1. Dos três itens apresentados acima, segue que

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_1 r_1^n + a_2 r_2^n = 0 \Leftrightarrow |r_1| < 1 \text{ e } |r_2| < 1$
- b) $\lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_1 r_1^n + a_2 n r^n = a_1 \left(\lim_{n \rightarrow \infty} r^n \right) + a_2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{r^n} = 0 \Leftrightarrow |r| < 1$
- c) $\lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} r^n(a_1 \cos(n\theta) + a_2 \text{sen}(n\theta)) = 0 \Leftrightarrow |r| < 1$

Proposição: O módulo das raízes da equação característica é menor do que 1 se, e somente se,

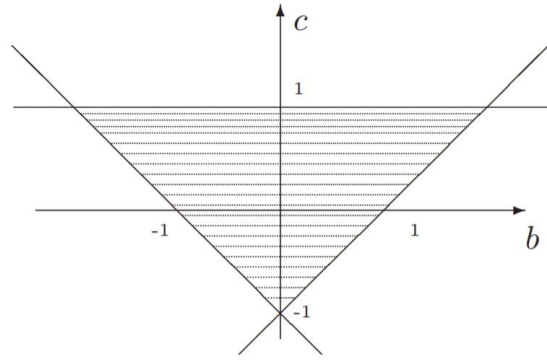


Figura 2.1: Região onde o módulo das raízes é menor do que 1.

$$1 - b + c > 0, \quad 1 + b + c > 0 \quad \text{e} \quad |c| < 1.$$

Demonstração: ($\Rightarrow$) Seja a função $f(r) = r^2 + br + c$. Observe que devemos analisar os três casos de $\Delta = b^2 - 4c$ para as raízes r_1 e r_2 .

- Caso $b^2 - 4c < 0$

Temos que $4c > b^2 > 0$, então, devemos ter, $c > 0$ para que este caso seja satisfeito. Neste caso, as raízes da equação são da forma

$$r_1 = -\frac{b}{2} + \frac{\sqrt{b^2 - 4c}}{2} = -\frac{b}{2} + i\sqrt{c - \frac{b^2}{4}}$$

e

$$r_2 = -\frac{b}{2} - \frac{\sqrt{b^2 - 4c}}{2} = -\frac{b}{2} - i\sqrt{c - \frac{b^2}{4}}$$

onde temos, por hipótese

$$|r_1| = |r_2| = \sqrt{\left(\frac{-b}{2}\right)^2 + c - \left(\frac{b}{2}\right)^2} = \sqrt{c} < 1$$

Logo, temos que $0 < c < 1$.

- Caso $b^2 - 4c = 0$

Temos que $b^2 = 4c$.

Diretamente, pela hipótese, temos que

$$|r_1| = |r_2| = \left|\frac{-b}{2}\right| < 1$$

Daí, $|b| < 2 \Leftrightarrow b^2 < 4$. Assim, $b^2 = 4c < 4$, o que implica em $c < 1$.

- Caso $b^2 - 4c > 0$

Temos duas raízes e, por hipótese, sabemos que o módulo delas é menor do que 1, logo $f(1) > 0$ e $f(-1) > 0$. Ou seja,

$$f(1) = 1 + b + c > 0$$

e

$$f(-1) = 1 - b + c > 0$$

Com isso, podemos montar o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 1 + b + c > 0 \\ 1 - b + c > 0 \end{cases}$$

onde, somando as equações, temos que $c > -1$.

Desta forma, temos o desejado, pois $-1 < c < 1$, $f(1) = 1 + b + c > 0$ e $f(-1) = 1 - b + c > 0$.

($\Leftarrow$) Da hipótese, temos,

$$\begin{cases} 1 + b + c > 0 \\ 1 - b + c > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b > -(1 + c) \\ 1 + c > b \end{cases},$$

ou seja, $-(1 + c) < b < 1 + c$. Também por hipótese, $-1 < c < 1$, assim conseguimos limitar b entre -2 e 2 , isto é, $|b| < 2$, daí $\left|\frac{-b}{2}\right| < 1$.

Isso implica que o vértice da parábola (com concavidade para cima) de $f(r)$ está entre os pontos -1 e 1 . Para isso, teremos 4 casos possíveis:

- Caso onde o ponto 1 está entre as raízes:

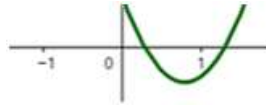


Figura 2.2: Ponto 1 entre as raízes

Nesse caso, vemos que $f(-1) > 0$ e $f(1) < 0$, o que contraria a hipótese de que $f(1) = 1 + b + c > 0$.

- Caso onde o ponto -1 está entre as raízes:

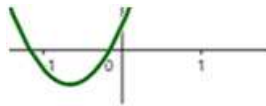


Figura 2.3: Ponto -1 entre as raízes

Neste caso, vemos que $f(-1) < 0$ e $f(1) > 0$, o que contraria a hipótese de que $f(-1) = 1 - b + c > 0$.

- Caso onde as raízes são menores que -1 e maiores que 1 :

Neste caso, vemos que $f(-1) < 0$ e $f(1) < 0$, o que contraria as hipóteses de que $f(1) = 1 + b + c > 0$ e $f(-1) = 1 - b + c > 0$.

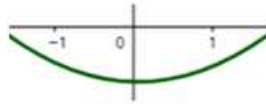


Figura 2.4: Raízes menores que -1 e maiores que 1 .

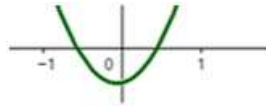


Figura 2.5: Módulo das raízes menor que 1 .

- Caso onde o módulo das raízes é menor que 1 :

Repare que este é o último caso e o único que satisfaz as hipóteses, tendo assim o desejado.

■

2.2 A equação particular $x(n+2)-x(n+1)-x(n)=0$ com $x(1)=1$ e $x(2)=1$

Definição: Sequências de Fibonacci são sequências que obedecem à lei recursiva:

$$u_{n+1} = u_n + u_{n-1}, \quad \forall n \geq 2.$$

Assim temos alguns exemplos de sequências de Fibonacci como $(0, 4, 4, 8, \dots)$ e $(-2, 2, 0, 2, \dots)$.

A sequência de Fibonacci é uma consequência da relação de recorrência de segunda ordem do tipo (2.1), em que $b = c = 1$ e $x(1) = x(2) = 1$. Os termos dessa sequência chamam-se números de Fibonacci.

Proposição: Seja a sequência de Fibonacci $x(n)$. Então, para $n \in \mathbb{N}$, são válidas as seguintes propriedades:

1) A soma dos n primeiros números da sequência é dada por $\sum_{i=1}^n x(i) = x(n+2) - 1$.

Demonstração: Demonstremos por indução: para $n = 1$, temos que $x(1) = 1$ e $x(1+2) - 1 = x(3) - 1 = 2 - 1 = 1$. Dessa forma, $x(1) = x(1+2) - 1$, o que confirma a base da indução.

Agora, suponha que a identidade seja válida para um índice n qualquer. Então a hipótese de indução será

$$x(1) + x(2) + \dots + x(n) = x(n+2) - 1$$

Vamos mostrar que esta também é verdadeira para $n+1$, isto é:

$$x(1) + x(2) + \dots + x(n+1) = x(n+3) - 1$$

Para isso, basta somar $x(n+1)$ em ambos os membros da hipótese de indução, tendo como resultado

$$x(1) + x(2) + \dots + x(n) + x(n+1) = x(n+2) - 1 + x(n+1) = x(n+3) - 1,$$

como desejávamos. ■

2) A soma dos números de ordem ímpar da sequência é dada por $\sum_{i=1}^n x(2i-1) = x(2n)$.

Demonstração: Demonstremos por indução: para $n = 1$, temos que $x(1) = x(2.1) = 1$, o que confirma a base da indução.

Agora, suponha que a identidade seja válida para um índice n qualquer. Então a hipótese de indução será

$$x(1) + x(3) + x(5) + \dots + x(2n-1) = x(2n).$$

Para mostrar que esta também é verdadeira para $n+1$, deve-se somar o próximo termo ímpar em cada lado da hipótese de indução:

$$x(1) + x(3) + x(5) + \dots + x(2n-1) + x(2n+1) = x(2n) + x(2n+1) = x(2n+2),$$

como desejávamos. ■

3) A soma dos números de ordem par da sequência é dada por $\sum_{i=1}^n x(2i) = x(2n+1) - 1$.

Demonstração: Demonstremos por indução: para $n = 1$, temos que $x(2) = x(2+1) - 1 = x(3) - 1 = 2 - 1 = 1$, o que confirma a base da indução.

Agora, suponha que a identidade seja válida para um índice n qualquer. Então a hipótese de indução será

$$x(2) + x(4) + x(6) + \dots + x(2n) = x(2n+1) - 1.$$

Vamos mostrar que esta também é verdadeira para $n+1$ somando o próximo termo par em cada lado da hipótese de indução, isto é:

$$x(2) + x(4) + x(6) + \dots + x(2n) + x(2n+2) = x(2n+1) - 1 + x(2n+2) = x(2n+3) - 1,$$

como desejávamos. ■

4) A soma dos quadrados dos números da sequência é dado por $\sum_{i=1}^n x^2(i) = x(n).x(n+1)$.

Demonstração: Demonstremos por indução: para $n = 1$, temos que $x^2(1) = x(1).x(2)$ isto é, $1^2 = 1.1 = 1$, o que confirma a base da indução.

Agora, suponha que a identidade seja válida para um índice n qualquer. Então a hipótese de indução será

$$x^2(1) + x^2(2) + \dots + x^2(n) = x(n).x(n+1)$$

Vamos mostrar que esta também é verdadeira para $n+1$ somando o quadrado do termo de ordem $n+1$ dos dois lados da hipótese de indução, isto é:

$$\begin{aligned} x^2(1) + x^2(2) + \dots + x^2(n) + x^2(n+1) &= x(n).x(n+1) + x^2(n+1) = \\ x(n+1).(x(n) + x(n+1)) &= x(n+1).x(n+2) \end{aligned}$$

como desejávamos. ■

Proposição[Fórmula de Cassini]: Os números de Fibonacci satisfazem:

$$x(n-1).x(n+1) - x^2(n) = (-1)^n, \quad n \in \mathbb{N}$$

Demonstração: Demonstremos por indução: para $n=1$, temos $x(1-1).x(1+1) - x^2(1) = (-1)^1 \Leftrightarrow x(0).x(2) - x^2(1) = (-1)^1 \Leftrightarrow 0.1 - (1)^2 = -1 \Leftrightarrow -1 = -1$, o que confirma a base da indução.

Agora, suponha que a identidade seja válida para um índice n qualquer. Então a hipótese de indução será

$$x(n-1).x(n+1) - x^2(n) = (-1)^n$$

Vamos mostrar que esta também é verdadeira para $n+1$, isto é:

$$x(n).x(n+2) - x^2(n+1) = (-1)^{n+1}$$

Desenvolvendo o lado esquerdo da igualdade, temos:

$$\begin{aligned} &x(n).x(n+2) - x^2(n+1) \\ &= (x(n+1) - x(n-1)).(x(n) + x(n+1)) - x^2(n+1) \\ &= x(n+1).x(n) + x^2(n+1) - x(n).x(n-1) - x(n-1).x(n+1) - x^2(n+1) \\ &= x(n+1).x(n) - x(n).x(n-1) - x(n-1).x(n+1). \end{aligned}$$

Mas, da hipótese de indução, temos $x(n-1).x(n+1) - x^2(n) = (-1)^n \Leftrightarrow x(n-1).x(n+1) = (-1)^n + x^2(n)$.

Substituindo, no desenvolvimento temos $x(n).x(n+2) - x^2(n+1)$

$$\begin{aligned} &= x(n+1).x(n) - x(n).x(n-1) - ((-1)^n + x^2(n)) \\ &= x(n+1).x(n) - x(n).x(n-1) - x^2(n) - (-1)^n \\ &= x(n+1).x(n) - x(n).(x(n-1) + x(n)) + (-1)^{n+1} \\ &= x(n+1).x(n) - x(n).x(n+1) + (-1)^{n+1} \\ &= (-1)^{n+1}, \end{aligned}$$

como desejávamos. ■

Proposição: Seja $x(n)$ a sequência de Fibonacci. Então, para todo n , vale a propriedade

$$x(m+n) = x(m-1).x(n) + x(m).x(n+1), \quad \forall m, n, \text{ com } m > 1$$

Demonstração: Por indução e fixando m , a igualdade se desenvolverá para $n=1$:

$$x(m+1) = x(m-1).x(1) + x(m).x(2)$$

$$x(m+1) = x(m-1).1 + x(m).1$$

$$x(m+1) = x(m-1) + x(m),$$

o que é verdade por ser a relação fundamental da sequência de Fibonacci. Então é válida a base da indução.

Supondo que a identidade acima seja verdadeira para algum n , temos a hipótese de indução

$$x(m+n) = x(m-1).x(n) + x(m).x(n+1)$$

Para $n-1$, temos

$$x(m+n-1) = x(m-1).x(n-1) + x(m).x(n-1+1)$$

$$x(m+n-1) = x(m-1).x(n-1) + x(m).x(n)$$

Somando essa equação com a hipótese de indução, temos

$$x(m+n) + x(m+n-1) = x(m-1).x(n) + x(m-1).x(n-1) + x(m).x(n+1) + x(m).x(n)$$

$$x(m+(n+1)) = x(m-1).(x(n) + x(n-1)) + x(m).(x(n+1) + x(n))$$

$$x(m+(n+1)) = x(m-1).x(n+1) + x(m).x(n+2),$$

como queríamos demonstrar. ■

Definição: Uma progressão geométrica $(q, q^2, q^3, \dots, q^n, \dots)$ é uma sequência de Fibonacci se, para todo $n \geq 3$, $q^n = q^{n-1} + q^{n-2}$

Dessa forma, podemos dividir esta última expressão por $q^{n-2} \neq 0$, assim

$$q^2 = q + 1 \tag{2.4}$$

que tem como raízes

$$q_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \text{ e } q_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Proposição: Seja $(u_1, u_2, u_3, \dots, u_n)$ uma sequência de Fibonacci qualquer. Então existem valores únicos de α e $\beta \in \mathbb{R}$, tais que, para todo $n \geq 1$

$$u_n = \alpha q_1^n + \beta q_2^n, \tag{2.5}$$

em que q_1 e q_2 são as raízes encontradas logo acima.

Demonstração: A prova será feita por indução em n .

Para $n = 1$ e $n = 2$, podemos montar o sistema

$$\begin{cases} \alpha q_1 + \beta q_2 = u_1 \\ \alpha q_1^2 + \beta q_2^2 = u_2 \end{cases} \quad (2.6)$$

Para $q_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ e $q_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, temos para o determinante das incógnitas

$$\begin{vmatrix} q_1 & q_2 \\ q_1^2 & q_2^2 \end{vmatrix} = \dots = -\sqrt{5} \neq 0$$

o que faz valer a base de indução, ou seja, α e β são unicamente determinados para $n = 1$ e $n = 2$.

Agora, suponhamos que a afirmação seja verdadeira para todo $m \leq n$ e mostremos que também é verdadeira para $n + 1$.

Seja

$$x(n+1) = x(n) + x(n-1) = \alpha q_1^n + \beta q_2^n + \alpha q_1^{n-1} + \beta q_2^{n-1} = \alpha q_1^{n-1}(q_1 + 1) + \beta q_2^{n-1}(q_2 + 1).$$

Da equação (2.4), as raízes q_1 e q_2 são tais que $q^2 = q + 1$. Substituindo na expressão acima, tem-se

$$\alpha q_1^{n-1} q_1^2 + \beta q_2^{n-1} q_2^2 = \alpha q_1^{n+1} + \beta q_2^{n+1},$$

como queríamos demonstrar. ■

Teorema:[A fórmula de Binet] O número de Fibonacci $x(n)$ pode ser obtido pela fórmula

$$x(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right] \quad (2.7)$$

Demonstração: Substituindo $u_1 = x(1) = 1, u_2 = x(2) = 1, q_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ e $q_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ na equação (2.5) temos

$$\begin{aligned} \begin{cases} \alpha q_1 + \beta q_2 = u_1 \\ \alpha q_1^2 + \beta q_2^2 = u_2 \end{cases} &= \begin{cases} \alpha \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) + \beta \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) = 1 \\ \alpha \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^2 + \beta \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 = 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \alpha \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) + \beta \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) = 1 \\ \alpha \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} \right) + \beta \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} \right) = 1 \end{cases} = \begin{cases} \alpha(1-\sqrt{5}) + \beta(1+\sqrt{5}) = 2 \\ \alpha(3-\sqrt{5}) + \beta(3+\sqrt{5}) = 2 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \alpha(1-\sqrt{5})(3-\sqrt{5}) + \beta(1+\sqrt{5})(3-\sqrt{5}) = 2.(3-\sqrt{5}) \\ \alpha(3-\sqrt{5})(-1+\sqrt{5}) + \beta(3+\sqrt{5})(-1+\sqrt{5}) = 2.(-1+\sqrt{5}) \end{cases} \\ &= \begin{cases} \alpha(8-4\sqrt{5}) + \beta(-2+2\sqrt{5}) = 2.(3-\sqrt{5}) \\ \alpha(-8+4\sqrt{5}) + \beta(2+2\sqrt{5}) = 2.(-1+\sqrt{5}) \end{cases} \end{aligned}$$

Somando as duas equações, temos $\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$ e, substituindo em alguma das equações, encontramos $\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Agora, sabendo os valores de α, β, q_1 e q_2 , substituindo na equação (2.5), temos que $x(n) = u_n = \alpha q_1^n + \beta q_2^n$

$$= -\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right]$$

O que conclui a prova. ■

2.3 A Proporção Divina e construções geométricas

Definição: Dizemos que um ponto C divide um segmento na proporção divina (ou razão áurea) se:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}.$$



Figura 2.6: Segmento dividido na proporção divina

Repare que se $\overline{AB} = a$ e $\overline{AC} = x$, temos $\overline{CB} = a - x$. Dessa forma, temos

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} \Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{x}{a-x} \Leftrightarrow x^2 + ax - a^2 = 0.$$

Resolvendo a equação do segundo grau em x e, observando que x é um comprimento, temos como raiz

$$x = a \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right).$$

Adequando-se à definição, temos que a proporção divina

$$\frac{a}{x} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2},$$

número que é conhecido como *número de ouro* e representado por φ . Assim

$$\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1,618033988\dots$$

Desta forma, um segmento de qualquer tamanho pode ser dividido em Proporção Divina multiplicando o seu tamanho por 0,618033988... e marcando um ponto distando o valor resultante do início do segmento.

Podemos visualizar uma possível aplicação desta divisão na fachada da obra Taj Mahal (mausoléu na Índia):

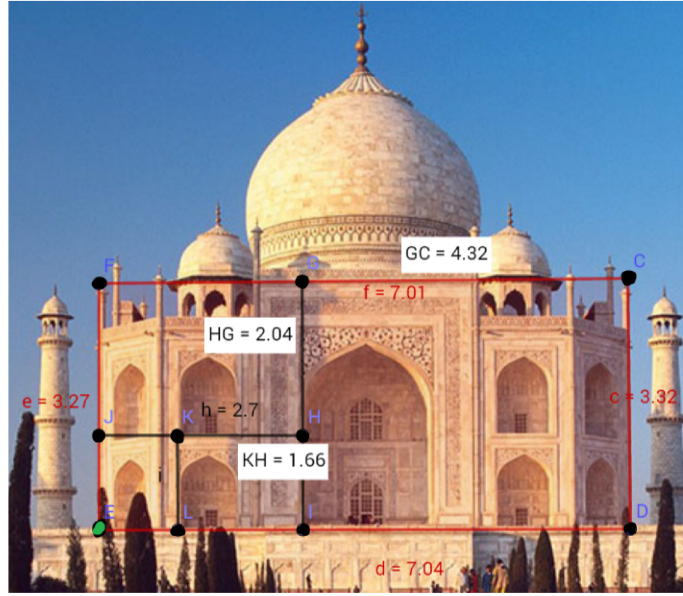


Figura 2.7: Os pontos G e K dividem os segmentos $\overline{FC}$ e $\overline{JH}$, respectivamente, na Proporção Divina

Teorema: A razão entre dois termos consecutivos da sequência de Fibonacci converge para o número de ouro quando n tende para o infinito

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x(n+1)}{x(n)} = \varphi.$$

Demonstração: Pela Fórmula de Binet, utilizando-a para $n+1$ e n , temos

$$x(n+1) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right] \quad (2.8)$$

e

$$x(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]. \quad (2.9)$$

Dividindo a primeira equação pela segunda, temos

$$\begin{aligned} \frac{x(n+1)}{x(n)} &= \frac{\frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right]}{\frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]} = \frac{\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right]}{\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \cdot \left[1 - \frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}} \right]}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n \cdot \left[1 - \frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n} \right]} \\ &= \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} \right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} \right)^n}. \end{aligned}$$

Como $-1 \leq \frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} \leq 1$, temos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} \right)^{n+1} = 0$.

Finalmente,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x(n+1)}{x(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} \right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} \right)^n} \right) = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi,$$

o que conclui a demonstração. ■

Definição: Chama-se retângulo áureo qualquer retângulo no qual a razão de suas medidas obedece à razão áurea com a seguinte propriedade: se dele tirarmos um quadrado, o retângulo restante será semelhante ao retângulo original.

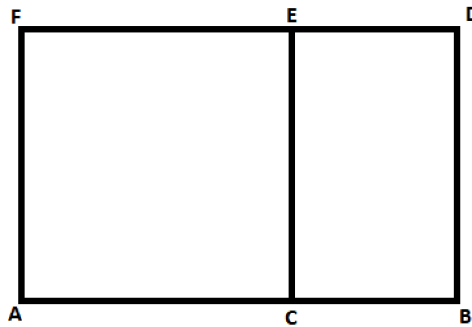


Figura 2.8: Retângulo áureo

Dessa forma, temos que os retângulos $ABDF$ e $CBDE$ são semelhantes e sua constante de proporcionalidade é o número de ouro.

Repare que podemos destacar quadrados sucessivamente dos novos retângulos formados. Se em cada quadrado destacado, desenharmos um quarto de arco de circunferência como na figura abaixo, temos o que chamamos de *espiral áurea*.

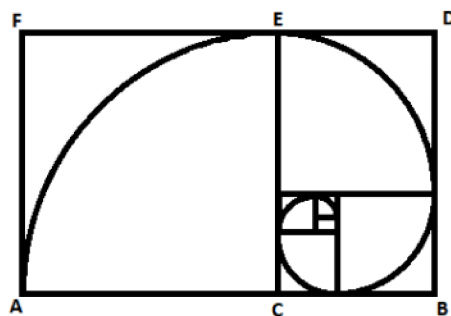


Figura 2.9: Retângulos áureos e espiral áurea

Acredita-se que essa “Geometria Sagrada” começou com Pitágoras, que era certo de que o universo é tão lógico quanto a matemática.

Um dos principais motivos para a proporção divina e o retângulo áureo terem esse nome, é devido ao fato de encontrá-la em várias situações da natureza, onde não há interferências humanas como, por exemplo, na formação de galáxias, furacões ou nos miolos de girassóis:



Figura 2.10: Espiral áurea na formação de uma galáxia

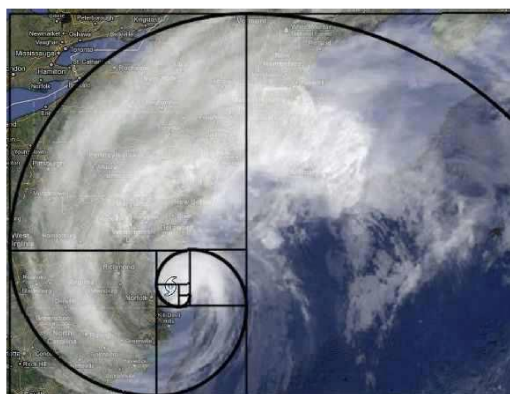


Figura 2.11: Espiral áurea na formação de um furacão

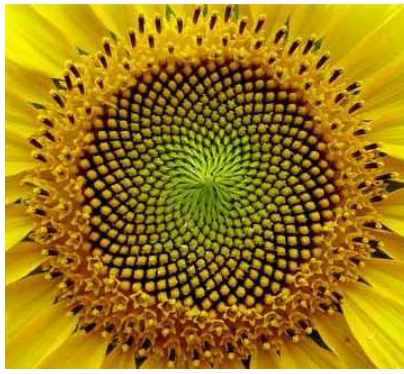


Figura 2.12: Espiral áurea num miolo de girassol

Outras análises do uso do retângulo e espiral áurea podem ser encontrados em [6].

Capítulo 3

Outras proporções - definições geométricas

3.1 Proporção Aritmética

Definição: Quando $a, b, c \in \mathbb{R}$ com $a < b < c$ tais que $c - b = b - a$ obedecem a proporção

$$\frac{c - b}{b - a} = k = 1,$$

dizemos que esta é uma proporção aritmética.

Repare que, fazendo manipulações algébricas, obtemos

$$c - b = b - a$$

$$2b = c + a$$

$$b = \frac{c+a}{2}.$$

Observe que, desta forma, toda sucessão de números na qual o quociente entre cada um pelo precedente é constante determina uma progressão aritmética e chamamos esse tipo de proporção aritmética de contínua.

No caso da proporção descontínua, teremos uma proporção do tipo

$$\frac{d - c}{b - a} = k, \quad k \text{ constante},$$

Neste tipo de proporção, não necessariamente determinamos uma progressão aritmética.

3.2 Proporção Geométrica

Definição: Quando $a, b, c \in \mathbb{R}$ com $a < b < c$ obedecem a proporção

$$\frac{c}{b} = \frac{b}{a} = k, \quad k \text{ constante},$$

dizemos que esta é uma proporção geométrica.

A proporção geométrica pode ser classificada em contínua ou descontínua onde, na descontínua, temos uma proporção do tipo $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, a qual envolve, no mínimo, quatro grandezas distintas entre si. Na proporção geométrica contínua, temos apenas três termos, do tipo $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$.

Algebricamente, nesta última temos

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$$

$$b^2 = ac$$

$$b = \sqrt{ac}.$$

isto é, uma proporção geométrica contínua se estabelece quando a grandeza intermediária se equivale à raiz da grandeza menor multiplicada pela raiz da grandeza maior.

Um exemplo do uso da proporção geométrica contínua é na disposição das folhas de papel do tipo A, como é possível observar na figura a seguir.

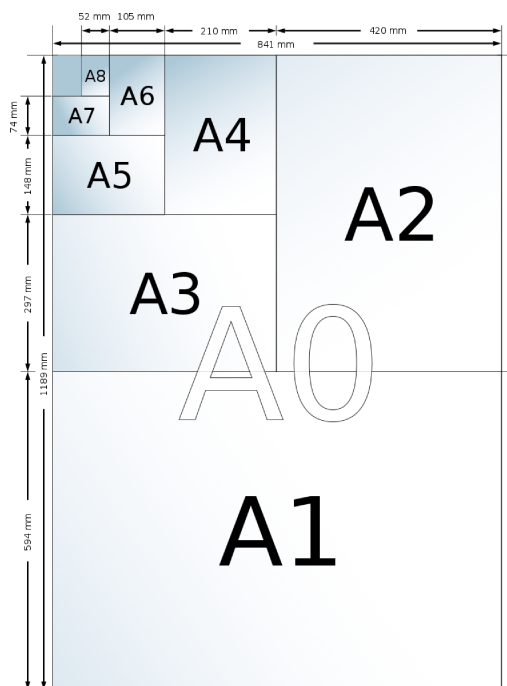


Figura 3.1: Tamanhos de papel do tipo A

3.3 Harmônica

Definição: Quando $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ com $a < b < c$ obedecem a proporção

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{1}{c} - \frac{1}{b}$$

dizemos que esta é uma proporção harmônica.

Pela definição, temos que a relação estabelecida entre três grandezas de uma proporção harmônica pode ser vista como

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{1}{c} - \frac{1}{b}$$

$$\frac{2}{b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c}$$

$$\frac{2}{b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c}$$

$$\frac{2}{b} = \frac{c+a}{ac}$$

$$2ac = b(c+a)$$

$$b = \frac{2ac}{c+a}$$

Capítulo 4

Uso de proporções na descrição de formas

4.1 O traçado regulador

À procura de traços e formas belos, os artistas e arquitetos estabeleceram um elemento geométrico de suporte na elaboração de projetos associados às obras arquitetônicas, expressões artísticas e ao design de objetos. Este recurso é conhecido desde a antiguidade e vem sendo aplicado até os dias de hoje.

Le Corbusier (6 de Outubro de 1887 - 27 de Agosto de 1965), arquiteto, urbanista e pintor Francês, destacou-se pela revolução do pensamento arquitetônico ao dar ênfase à funcionalidade em seus projetos. Em seu livro *Vers une architecture* (Por uma arquitetura), abordou o conceito de harmonia adquirida pelo traçado regulador.

O traçado designa um conjunto de elementos que tem como base a proporção divina. Utilizando este como um método de suporte para a criação dos projetos.

4.2 Aplicações do traçado regulador em construções

Pode-se procurar relações do traçado regulador em qualquer construção que se desejar. Tanto obras mais antigas quanto mais atuais podem conter esse elemento como um norte para suas construções, como é possível observar em [2]

4.2.1 Pharthemon

Um dos traçados mais famosos é o pertencente ao Parthenon, construído e decorado pelo escultor Fídias (daí a justificativa da letra φ pela notação do número de ouro).

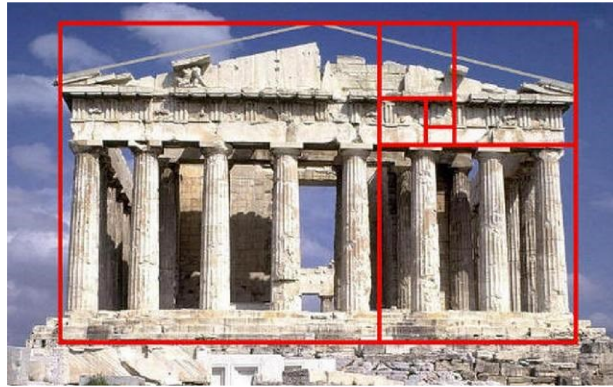


Figura 4.1: Detalhes da proporção divina na construção do Parthenon

Pela figura 4.1 é possível visualizar várias divisões por segmento áureo como, por exemplo, a altura da obra.

4.3 Aplicações do traçado regulador em logomarcas

Atualmente, muitos designers utilizam o traçado regulador para criarem logomarcas de empresas.

4.3.1 Twitter

A Twitter é uma rede social e um servidor de *microblogging*. Em sua logomarca é possível observar alguns círculos criados à partir de diâmetros iguais ao lado dos quadrados que são obtidos a partir do retângulo áureo.

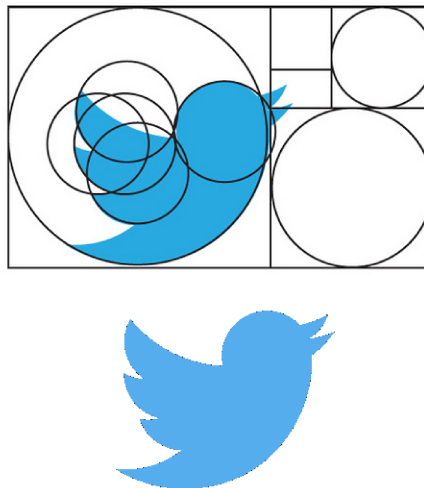


Figura 4.2: Criação da logomarca da Twitter

4.3.2 Apple

A Apple é uma empresa multinacional focada em projetos e comercialização de produtos eletrônicos. Na logomarca da empresa, é possível observar várias contribuições de retângulos, circunferências e segmentos gerados a partir do número de ouro.

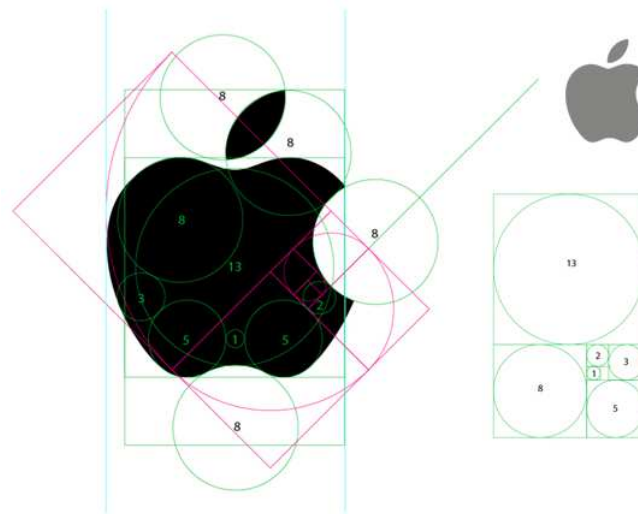


Figura 4.3: Criação da logomarca da empresa Apple

4.3.3 Pointless Corp.

A Pointless Corp. é um espaço criado dentro de uma empresa de consultoria para que os funcionários trabalhassem em projetos experimentais, sem nenhuma relação com suas funções na empresa e compromissos com os clientes.



Figura 4.4: Criação da logomarca da empresa Pointless Corp.

4.4 Aplicações do traçado regulador em Posters de cinema

A disposição dos textos e das imagens contidas nos Posters de cinema geralmente são feitas utilizando algum auxílio da proporção divina.

4.4.1 Doctor Strange



Figura 4.5: Possíveis traçados auxiliares para a disposição dos elementos do Poster do filme Doctor Strange

4.4.2 Mad Max

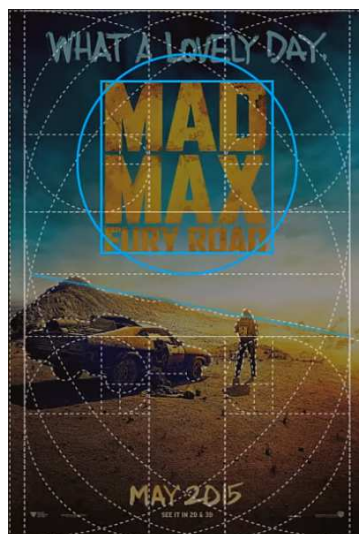


Figura 4.6: Possíveis traçados auxiliares para a disposição dos elementos do Poster do filme Mad Max

4.4.3 Ant-Man

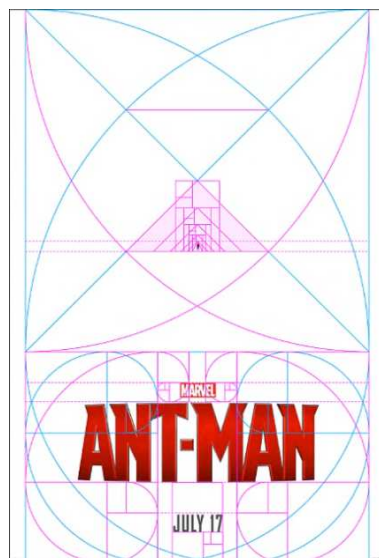


Figura 4.7: Possíveis traçados auxiliares para a disposição dos elementos do Poster do filme Ant-Man

Referências Bibliográficas

- [1] BASSANEZI, Rodney C. “Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática”. Ed. Contexto. São Paulo-SP, 2004
- [2] CAMPOS, Bruna C.; JUNIOR, Walter dos S. M. “Algumas análises envolvendo o traçado regulador”; Revista Horizonte Científico, nº 2, Vol. 9, 2018
- [3] GARCIA, Ronaldo Alves; CRUZ, José Hilário. “Problemas de Valor Inicial e de Contorno para Equações Diferenças”, Revista da Olimpíada Brasileira de Matemática nº 6, páginas 97- 108. IME-UFG, 2005.
- [4] GARCIA, Ronaldo Alves; CRUZ, José Hilário. “Equações Diferenças Lineares de Segunda Ordem”, Revista da Olimpíada Brasileira de Matemática nº 6, páginas 85-96. IME-UFG, 2005
- [5] LEOPOLDINO, Karlo S. Medeiros. Tese (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Rio Grande do Norte, 2016.
- [6] VASCONCELOS, Tássia Borges de. Tese (Programa de Pós-Graduação em Arquitetura e Urbanismo) - Universidade Federal de Pelotas. Pelotas, 2014.