

ROGÉRIO SALES GONÇALVES

**ESTUDO DE RIGIDEZ DE CADEIAS CINEMÁTICAS
FECHADAS**



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

2009

ROGÉRIO SALES GONÇALVES

**ESTUDO DE RIGIDEZ DE CADEIAS CINEMÁTICAS
FECHADAS**

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para a obtenção do título de **DOUTOR EM ENGENHARIA MECÂNICA**.

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos e Vibrações.

Orientador: Prof. Dr. João Carlos Mendes Carvalho

UBERLÂNDIA – MG

2009

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

G635e Gonçalves, Rogério Sales, 1981-
Estudo de rigidez de cadeias cinemáticas fechadas / Rogério Sales
Gonçalves. - 2009.
239 f. : il.

Orientador: João Carlos Mendes Carvalho.

Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Uberlândia, Programa
de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.
Inclui bibliografia.

1. Robótica - Teses. I. Carvalho, João Carlos Mendes. II. Universida-
de Federal de Uberlândia. Programa de Pós-Graduação em Engenharia
Mecânica. IV. Título.

CDU: 681.3:007.52

AGRADECIMENTOS

A Deus pela minha vida.

Agradeço ao meu orientador Prof. Dr. João Carlos Mendes Carvalho pelas suas importantes observações, espírito inovador e motivador capaz de despertar o gosto por desafios e pela pesquisa, ao longo de todos estes anos.

A minha esposa Ana Paula, pelo amor, carinho, companheirismo e pela muita paciência demonstrada ao longo de todos estes anos.

Ao CNPq e Capes pelo apoio Financeiro.

À Villares Metals pela doação de parte do material utilizado nos testes experimentais.

À Universidade Federal de Uberlândia e à Faculdade de Engenharia Mecânica.

Finalmente agradeço a todos que de uma forma ou de outra ajudaram na confecção desta tese.

GONÇALVES, R. S. **Estudo de Rigidez de Cadeias Cinemáticas Fechadas**, 2009. 239f. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia.

RESUMO

Um sistema multicorpo consiste em uma cadeia cinemática composta por segmentos, que podem ser rígidos ou flexíveis, conectados entre si por meio de articulações. Os sistemas multicorpos são de grande importância, pois são utilizados nas mais variadas aplicações tais como em aeronáutica, automobilística, máquinas ferramentas, mecanismos, exploração marítima, na área médica e robótica. Um sistema multicorpo que tem sido muito estudado nos últimos anos consiste na denominada estrutura paralela. Isto se deve às suas vantagens em relação às estruturas seriais. Embora apresente diversas vantagens, este tipo de estrutura apresenta desafios aos pesquisadores na solução de problemas tais como as singularidades, a rigidez e acuracidade. Nesta tese é realizado o estudo da rigidez de cadeias cinemáticas complexas, direcionado às estruturas paralelas, em função de sua grande aplicação industrial, sendo que os resultados obtidos podem ser aplicados em outros tipos de cadeia cinemática fechada como, por exemplo, em estruturas veiculares. Para o estudo da rigidez das estruturas robóticas é apresentada uma revisão das estruturas robóticas seriais e paralelas. É realizada uma revisão sobre o estudo de rigidez de estruturas robóticas presentes na literatura destacando suas vantagens e desvantagens. É também proposto o uso do método de análise de rigidez utilizando-se a teoria de análise matricial de estrutura – *MSA* (Matrix Structural Analysis) acoplado ao modelo cinemático da estrutura e das principais fontes de flexibilidade das estruturas robóticas: segmentos e articulações. Esta tese é uma das pioneiras a comparar diferentes metodologias de análise de rigidez, mostrando suas vantagens e desvantagens. São apresentados exemplos numéricos e experimentais aplicando-se o método *MSA*. É apresentada também uma nova metodologia de análise de singularidades utilizando-se do método *MSA* e de números condicionais. Finalmente, foi proposta uma nova metodologia para a consideração das folgas nas articulações de sistemas multicorpos, com uma aplicação para um mecanismo plano.

Palavras Chave: Sistemas Multicorpos, Estruturas Robóticas, Rigidez, Análise Matricial de Estrutura, Singularidades.

GONÇALVES, R. S. **Stiffness Study of Closed Kinematics Chains**, 2009. 239f. Ph.D. Thesis, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia.

ABSTRACT

Multibody systems consist on a kinematic chain composed of links that can be rigid or flexible, interconnected by joints. The multibody systems are of great importance and are used in various applications such as in aerospace and automobile engineering, machine tools, mechanisms, sea exploration, medicine and robotics. An example of multibody system that has been widely studied in recent years is called parallel structure, which presents advantages over serial structures. In spite of its several advantages, this type of structure presents challenges to researchers on what concerns the solution of problems such as singularities, stiffness and accuracy. This thesis discuss the stiffness of complex kinematic chains directed to the parallel structures, due to their large industrial application, and the results can be applied to other closed kinematic chain systems, such as in vehicle structures. A review on the study of the stiffness of robotic structures was carried out in the literature, highlighting its advantages and disadvantages. It is also proposed the use of the stiffness method of analysis using the Matrix Structural Analysis theory (*MSA*) coupled to the kinematic model of the structure and main sources of flexibility of robotic structures: links and joints. This thesis is one of the pioneers to compare different methods of analysis of stiffness, showing its advantages and disadvantages. Numerical and experimental examples are presented applying the method *MSA*. It is also presented a new methodology for analyzing singularities through *MSA* method and conditional numbers. Finally, a new methodology was proposed for considering clearances in joints on multibody systems, with an application on a planar mechanism.

Keywords: Multibody Systems, Robotic Structures, Stiffness, Matrix Structural Analysis, Singularity.

SUMÁRIO

RESUMO.....	iv
ABSTRACT.....	v
LISTA DE FIGURAS.....	x
LISTA DE TABELAS.....	xvi
LISTA DE SÍMBOLOS.....	xviii

CAPÍTULO I – INTRODUÇÃO.....	1
-------------------------------------	----------

CAPÍTULO II - ESTRUTURAS ROBÓTICAS.....	5
--	----------

2.1. Introdução.....	5
2.2. Classificação das Estruturas Robóticas.....	6
2.2.1. Classificação por Número de Graus de Liberdade.....	6
2.2.2. Classificação pelo Sistema de Acionamento.....	6
2.2.3. Classificação em Função da Cadeia Cinemática.....	7
2.2.4. Classificação em Função da Geometria do Espaço de Trabalho.....	7
2.3. Identificação das Estruturas Robóticas.....	9
2.4. Robôs com Arquitetura Serial.....	11
2.5. Robôs com Arquitetura Paralela.....	16
2.6. Estruturas Híbridas.....	31
2.7. Conclusões.....	32

CAPÍTULO III - ESTUDO DE RIGIDEZ DE SISTEMAS MULTICORPOS.....33

3.1. Introdução.....	33
3.2. Modelos Derivados da Matriz Jacobiana.....	36
3.2.1. Modelagem Utilizando-se a Matriz Jacobiana e Considerando Elementos como Molas.....	36
3.2.2. Modelagem Utilizando-se a Matriz Jacobiana e Considerando Matriz de Flexibilidade.....	44
3.3. Análise de Rigidez Utilizando-se a Técnica de Elementos Finitos.....	49
3.4. Análise de Rigidez Utilizando-se Análise Matricial de Estruturas.....	53
3.5. Avaliação dos Métodos Experimentais de Análise de Rigidez.....	55
3.6. Diagrama para o Cálculo dos Deslocamentos Flexíveis.....	57
3.7. Conclusões.....	58

CAPÍTULO IV - ANÁLISE DE RIGIDEZ DE ESTRUTURAS ROBÓTICAS

UTILIZANDO-SE ANÁLISE MATRICIAL DE ESTRUTURAS – MSA.....61

4.1. Introdução.....	61
4.2. Análise Matricial de Estruturas (<i>Matrix Structural Analysis – MSA</i>).....	62
4.3. Matriz de Rigidez de um Segmento.....	64
4.4. Modelagem da Articulação.....	68
4.5. Matriz de Transformação de Coordenadas.....	71
4.6. Montagem da Matriz de Rigidez da Estrutura e Imposição das Condições de Contorno.....	76
4.7. Modelagem de Estruturas Robóticas utilizando-se <i>MSA</i>	78
4.8. Conclusões.....	80

CAPITULO V - APLICAÇÕES DO MÉTODO *MSA*.....83

5.1. Comparação entre Métodos de Cálculo dos Deslocamentos Flexíveis.....	83
5.1.1. Modelagem dos Deslocamentos Flexíveis Utilizando-se do Método de Yoon (2004) e Komatsu (1989; 1990a; 1990b).....	84
5.1.2. Modelo Utilizando-se <i>MSA</i>	91
5.1.3. Modelo <i>FEA-Finite Element Analysis</i>	95
5.1.4. Comparação Entre os Resultados.....	97
5.2. Visualização do Efeito da Articulação no modelo <i>MSA</i>	100
5.3. Modelagem da Estrutura Robótica Paralela 6- <u>R</u> SS.....	105
5.4. Conclusões.....	109

CAPÍTULO VI - CORRELAÇÃO ENTRE RIGIDEZ E SINGULARIDADE.....111

6.1. Introdução.....	111
6.2. Análise das Singularidades.....	112
6.2.1. Cálculo das Singularidades Utilizando-se da Matriz Jacobiana.....	112
6.2.2. Cálculo das Singularidades Utilizando-se <i>MSA</i>	115
6.3. Análise das Singularidades do Mecanismo Plano de Quatro Barras Simétrico...118	
6.4. Análise das Singularidades da Estrutura Robótica Paralela Plana 5R.....	122
6.4.1. Modelo <i>MSA</i> da Estrutura 5R.....	129
6.5. Manipulador Robótico Paralelo Maryland.....	135
6.6. Conclusões.....	137

CAPÍTULO VII – MODELAGEM DAS FOLGAS NAS ARTICULAÇÕES.....139

7.1. Introdução.....	139
7.2. Estudo das Folgas nas Articulações.....	141
7.3. Metodologia de Análise das Folgas nos Sistemas Multicorpos.....	147
7.4. Modelagem Dinâmica do Mecanismo de Quatro Barras.....	148
7.4.1. Modelo Cinemático do Mecanismo de Quatro Barras por Números Complexos.....	149
7.4.2. Modelagem Dinâmica do Mecanismo de Quatro Barras.....	154
7.5. Exemplo Numérico Aplicado ao Mecanismo de quatro barras Simétrico.....	158
7.6. Conclusões.....	162

CAPÍTULO VIII – TESTES EXPERIMENTAIS.....163

8.1. Bancada de Testes.....	163
8.2. Testes Experimentais.....	166

CAPÍTULO IX – CONCLUSÕES.....171

9.1. Conclusões.....	171
9.2. Sugestões de Temas para Pesquisas Futuras.....	174

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 175

ANEXOS.....195

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – (a) Sistema de Suspensão traseira; (b) Robô cirúrgico; (c) Trem de pouso do Airbus A380; (d) Trem de pouso do Beechjet.....	2
Figura 2.1 – Robô Cartesiano. (a) Esquema do robô; (b) Robô cartesiano (EPSON); (c) Espaço de Trabalho.....	8
Figura 2.2 – Robô Cilíndrico. (a) Esquema do robô; (b) Robô Comercial; (c) Espaço de Trabalho.....	8
Figura 2.3 – Robô Esférico. (a) Esquema do robô; (b) Espaço de Trabalho.....	9
Figura 2.4 – Famílias de estrutura paralelas planas de 3 g.d.l com pernas idênticas (Bonev et al., 2003).....	10
Figura 2.5 – (a) Robô industrial (antropomórfico) IRB 6600ID (ABB) e sua notação na forma de Grafos; (b) Robô FlexPicker (ABB) e sua notação na forma de Grafos.....	11
Figura 2.6 – Arquitetura serial simples.....	12
Figura 2.7 – Robô SCARA. (a) Esquema do robô; (b) Foto de um Robô SCARA (EPSON).....	12
Figura 2.8 – Braço robótico SSRMS (Space Shuttle Remote Manipulation System), desenvolvido pelo centro espacial do Canadá (http://www.space.gc.ca).....	13
Figura 2.9 – Braços flexíveis cooperativos (Yamano et al., 2004).....	13
Figura 2.10 – (a) Estrutura robótica serial arborescente; (b) Robô arborescente desenvolvido na Univ. of Massachusetts Amherst.....	15
Figura 2.11 – Robô seriais independentes trabalhando corporativamente.....	15
Figura 2.12 – Esquema de manipulador de arquitetura Paralela.....	16
Figura 2.13 – Plataforma original de Gough (Gough e Whitehall, 1962).....	17
Figura 2.14 – (a) Estrutura paralela plana 5R. (b) Robô 5R Mitsubishi Electric.....	19
Figura 2.15 – Manipulador Paralelo Plano 3RRR (Chablat e Wenger, 2004).....	19
Figura 2.16 – (a) Protótipo do “Agile Eye”; (b) Desenho esquemático. < http://robot.gmc.ulaval.ca/en/research/theme103.html >.....	20
Figura 2.17 – Estrutura cinemática da plataforma de Gough-Stewart, (Craig 1989).....	21
Figura 2.18 – (a) Esquema do protótipo de Stewart; (b) uma perna (Stewart 1965).....	21

Figura 2.19 – (a) Exemplo de Aplicação do calibrador cinemático de trajetórias robóticas. (b) Protótipo (Oliveira Jr e Carvalho, 2002).....	23
Figura 2.20 – (a) Esquema Cinemático do Hexaglidle (Pugliese, 1999). (b) Protótipo do robô Hexaglidle fabricado pela ETH, (ETH, 2008).....	24
Figura 2.21 – (a) Robô FlexPicker (ABB); (b) Robô Surgiscope® (Hein et al., 1999).....	24
Figura 2.22 – Esquema cinemático do robô Delta, (Clavel e Rey, 1998).....	25
Figura 2.23 – (a) Delta Linear (Clavel et al., 1998); (b) Hexa, (Pierrot, 1998).....	26
Figura. 2.24 – Estrutura Paralela Eclipse (a) Esquema cinemático; (b) Protótipo (Kim et al., 1998).....	27
Figura 2.25 – (a) Esquema do CaPaMan; (b) Protótipo do CaPaMan (Carvalho et al., 2008).....	28
Figura 2.26 – (a) Configuração Genérica da estrutura paralela 6-RSS; (b) Protótipo; (c) Detalhe das pernas e atuadores; (d) elemento terminal com transdutor linear (Gonçalves e Carvalho, 2008).....	29
Figura 2.27 – Protótipo do CALOWI.....	30
Figura 2.28 – a) Manipulador híbrido; b) Estrutura Paralela (Carbone e Ceccarelli, 2002c).....	31
Figura 3.1 – Robô IRB 6400RF fabricado pela ABB.....	34
Figura 3.2 – Braço robótico SSRMS (<i>Space Shuttle Remote Manipulation System</i>), desenvolvido pelo centro espacial do Canadá (http://www.space.gc.ca).....	35
Figura 3.3 – Robô PUMA. (a) Esquema em 3D; (b) modelo simplificado de rigidez com elementos representados por molas (Ceccarelli, 2004).....	40
Figura 3.4 – (a) Articulação rotativa modelada como mola de torção; (b) articulação prismática modelada como mola linear.....	41
Figura 3.5 – Modelagem dos deslocamentos flexíveis de uma viga (Alves Filho, 2006).....	41
Figura 3.6 – Deslocamento linear flexível (δ) ao longo do eixo Y e deslocamento angular flexível (φ) em torno do eixo Z	43
Figura 3.7 – (a) Modelo de flexibilidade de uma estrutura serial; (b) Modelagem da Estrutura Paralela (Yoon et al., 2004).....	45
Figura 3.8 – Princípio da Superposição. (a) molas em serie; (b) molas em paralelo.....	46
Figura. 3.9 – Modelo de rigidez do robô PUMA. (a) modelo com molas lineares e de torção; (b) modelo apenas com molas de torção (Ceccarelli, 2004).....	48
Figura 3.10 – (a) Robô paralelo Delta; (b) Modelo <i>FEA</i> (Deblaise, 2006a).....	51

Figura 3.11 – (a) Modelo CAD do robô H4; (b) esquema cinemático do robô H4; (c) protótipo do robô H4 (Corradine et al., 2004).....	52
Figura 3.12 – Modelo <i>FEA</i> do robô H4 (Corradine et al., 2004).....	52
Figura 3.13 – (a) Modelo micro manipulador paralelo de 3 g.d.l; (b) representação de uma perna (Koseki et al., 2000).....	54
Figura 3.14 – Modelos de articulações “ <i>notched hinge</i> ” (Koseki et al., 2000).....	55
Figura 3.15 – (a) Esquema do Micro-manipulador paralelo; (b) Protótipo (Yi et al., 2003)....	55
Figura 3.16 – Esquema Cinemático do Milli-CATRASYs.....	56
Figura 3.17 – Modelo experimental para medição dos deslocamentos flexíveis da estrutura Delta (Deblaise, 2006a).....	57
Figura 3.18 – Diagrama para o cálculo dos deslocamentos flexíveis.....	58
Figura 4.1 – Métodos de Análise Estrutural (a partir de Przemieniecki, 1985).....	63
Figura 4.2 – Elemento de viga genérico no espaço.....	64
Figura 4.3 – Esforços aplicados em uma viga espacial (Alves Filho, 2006).....	
Figura 4.4 – (a) Representação dos esforços atuantes na barra; (b) deslocamentos devido às deformações da barra.....	65
Figura 4.5 – Transformação de coordenadas. (a) Posição Genérica no Espaço; (b) Rotação β em torno do eixo z_1 ; (c) Rotação $-\alpha$ em torno do eixo Y	72
Figura 4.6 – Transformação de coordenadas em relação aos nós.....	74
Figura 4.7 – Procedimento de obtenção da matriz de rigidez da estrutura. (Anexo I).....	77
Figura 4.8 – Passos da Metodologia <i>MSA</i> para o cálculo dos deslocamentos flexíveis.....	79
Figura 5.1 – Manipulador Robótico de 2 gdl.....	84
Figura 5.2 – Modelo de flexibilidade de uma estrutura serial proposto por Yoon et al. (2004).....	84
Figura 5.3 – Modelo para aplicação da metodologia do Komatsu et al. (1990a; 1990b).....	86
Figura 5.4 – Cálculo do deslocamento flexível linear (V_I) e angular (i_I).....	87
Figura 5.5 – Modelo <i>MSA</i> do manipulador robótico de 2 gdl.....	92
Figura 5.6 – Modelo <i>FEA</i> do manipulador robótico 2 gdl.....	96
Figura 5.7 – Deslocamentos Flexíveis (em azul) do modelo <i>FEA</i>	96
Figura 5.8 – a) Modelo sem articulação; b) Modelo <i>MSA</i> ; c) deslocamentos flexíveis.....	102
Figura 5.9 – Modelo <i>MSA</i> com articulação. (a) Modelo <i>MSA</i> ; (b) deslocamentos flexíveis..	103

Figura 5.10 – Modelagem da estrutura considerando a articulação inexistente $k_{lx} = k_{ly} = k_{lz} = k_{ax} = k_{ay} = k_{az} = 0$	105
Figura 5.11 – Modelo da Estrutura 6-RSS para o cálculo de sua matriz de rigidez.....	106
Figura 6.1 – Singularidades do mecanismo 5R, (a) singularidade inversa; (b) singularidade direta (Hess-Coelho,2005).....	113
Figura 6.2 – Emprego de atuadores adicionais para evitar os efeitos indesejáveis das singularidades (Hess-Coelho, 2005)	114
Figura 6.3 – Diagrama para a determinação das posições singulares.....	117
Figura 6.4 – Posições de Singularidade Estrutura Robótica Serial 3R, (Tsai, 1999).....	118
Figura 6.5 – Mecanismo Plano de Quatro Barras Simétrico.....	118
Figura 6.6 – Posições de Singularidade do mecanismo de quatro barras.....	119
Figura. 6.7 – Modelo Cinemático do Mecanismo plano de quatro Barras.....	119
Figura 6.8 – Modelo <i>MSA</i> do mecanismo plano de quatro barras.....	120
Figura 6.9 – Trajetória do Mecanismo de quatro barras.....	122
Figura 6.10 – Manipulador Paralelo 5R (Liu et al., 2006).....	123
Figura 6.11 – Soluções do Modelo Cinemático Inverso da estrutura 5R. Modos de Trabalho (<i>Working Mode</i>) (Macho et al., 2008).....	124
Figura 6.12 – Soluções do modelo cinemático direto. Modos de Montagem (<i>Assembly modes</i>) (Macho et al., 2008).....	126
Figura 6.13 – Posições singulares para o mecanismo 5R, simétrico, $r_1 = r_2 = 0,1\text{ m}$ e $r_3 = 0,1\text{ m}$	129
Figura 6.14 – Discretização do mecanismo plano de cinco barras para aplicação do modelo <i>MSA</i>	130
Figura 6.15 – Mecanismo 5R em uma configuração singular onde as barras B_1P e PB_2 estão alinhadas.....	132
Figura 6.16 – (a) Manipulador Maryland; (b) Diagrama Esquemático (Tsai e Stamper, 1996).....	135
Figura 6.17 – Exemplo de uma configuração singular do manipulador Maryland.....	136
Figura 7.1 – Articulação rotativa com folga.....	140
Figura 7.2 – Modelos para análise da folga das articulações rotativas planas: (a) Modelo do segmento sem massa; (b) Modelo da mola-amortecedor.....	141

Figura 7.3 – Mecanismo cursor manivela com folga radial na articulação rotativa do cursor (Schwab et al., 2002).....	143
Figura 7.4 – Articulação rotativa com folga modelada como uma equação de restrição (Schwab et al., 2002).....	143
Figura 7.5 – Modelo de análise da folga de uma junta universal (Lim et al., 2001).....	144
Figura 7.6 – Possíveis movimentos do ponto C_I (Voglewede e Uphoff, 2002).....	146
Figura 7.7 – Região hachurada representativa das posições que o ponto C pode ocupar (Voglewede e Uphoff, 2002).....	146
Figura 7.8. Folga ε na Articulação.....	147
Figura 7.9 – Reação de apoio.....	148
Figura 7.10 – Modelo cinemático do mecanismo de quatro barras.....	149
Figura 7.11 – Cálculo das acelerações dos centros de massa.....	152
Figura 7.12 – Forças de inércia para o mecanismo de quatro barras (Erdman e Sandor, 1991).....	154
Figura 7.13 – Diagrama de corpo livre do mecanismo de quatro barras (Erdman e Sandor, 1991).....	155
Figura 7.14 – Mecanismo Plano de Quatro Barras Simétrico.....	158
Figura 7.15 – Cálculo da rotação do segmento ③.....	159
Figura 7.16 – Mecanismo de Quatro Barras: (a) cálculo MSA ; (b) consideração da folga; (c) modelo final.....	161
Figura 8.1 – Esquema da Bancada de Testes.....	164
Figura 8.2 – Análise dos deslocamentos flexíveis.....	164
Figura 8.3 – Bancada de Testes.....	165
Figura 8.4 – Detalhes do aparato experimental.....	165
Figura 8.5 – Modelo MSA do modelo experimental.....	166
Figura 8.6 – Gráfico do deslocamento flexível correspondente a Tab. 8.1.....	167
Figura 8.7 – Gráfico do deslocamento flexível correspondente a Tab. 8.2.....	168
Figura 8.8 – Gráfico do deslocamento flexível correspondente a Tab. 8.3.....	169
Figura A.1 – (a) Diagrama de Corpo Livre do elemento mola; (b) nó 2 engastado; (c) nó 1 engastado.....	195
Figura A.2 – Sistema formado por duas molas montadas em série.....	199
Figura A.3 – Diagrama de corpo livre das molas (a) e (b).....	199

Figura A.4 – Procedimento de obtenção da matriz de rigidez da estrutura.....	201
Figura A.5 – Procedimento de obtenção da matriz de rigidez da estrutura.....	201
Figura A.6 – a) Modelo experimental; b) Modelo <i>MSA</i> de uma estrutura formada por três segmentos e uma articulação esférica.....	203
Figura A.7 – Segmento 1 - 2 formado pelos nós 1 e 2, com os deslocamentos flexíveis correspondentes.....	204
Figura A.8 – Articulação formada pelos nós 3 e 4, com os deslocamentos flexíveis correspondentes.....	204
Figura A.9 – Procedimento de Superposição para montagem da matriz de rigidez da estrutura.....	206
Figura A.10 – Matriz de rigidez da estrutura.....	207

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1. Notação na forma de Grafos.....	10
Tabela 5.1. Representação dos elementos.....	91
Tabela 5.2. Numeração dos graus de liberdade do modelo da Fig. 5.5.....	94
Tabela 5.3. Cálculo dos deslocamentos flexíveis considerando apenas a flexibilidade das articulações.....	98
Tabela 5.4. Cálculo dos deslocamentos flexíveis considerando apenas a flexibilidade dos segmentos.....	98
Tabela 5.5. Cálculo dos deslocamentos flexíveis considerando a flexibilidade das articulações e segmentos.....	98
Tabela 5.6. Deslocamentos Flexíveis correspondentes ao exemplo da Fig. 5.8.....	101
Tabela 5.7. Deslocamentos Flexíveis correspondentes ao exemplo da Fig. 5.9.....	104
Tabela 5.8. Deslocamentos flexíveis do ponto Q do manipulador 6-RSS quando $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \theta_4 = \theta_5 = \theta_6 = 0^\circ$	107
Tabela 5.9. Deslocamentos flexíveis ponto Q do manipulador 6-RSS quando $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \theta_4 = \theta_5 = \theta_6 = 10^\circ$	108
Tabela 5.10. Deslocamentos flexíveis do ponto Q do manipulador 6-RSS quando $\theta_1 = 1,5^\circ$; $\theta_2 = 5^\circ$; $\theta_3 = 1,5^\circ$; $\theta_4 = 3,5^\circ$; $\theta_5 = 3^\circ$; $\theta_6 = 1^\circ$	108
Tabela 6.1. Deslocamentos Flexíveis do nó 6 e cálculo do número condicional do Mecanismo de quatro Barras Simétrico Plano.....	121
Tabela 6.2. Modelo Geométrico Direto (2 soluções).....	126
Tabela 6.3. Modelo Geométrico Inverso (4 soluções).....	127
Tabela 6.4. Deslocamentos flexíveis do nó 5 – Mecanismo 5R, posições singulares. $F_y = 1\text{ N}$	131
Tabela 6.5. Deslocamentos Flexíveis do nó 5 – Mecanismo 5R, posições singulares. $F_x = 1\text{ N}$	132
Tabela 6.6. Deslocamentos flexíveis do nó 5 – Mecanismo 5R. $F_y = 1\text{ N}$	133
Tabela 6.7. Deslocamentos flexíveis do nó 5 – Mecanismo 5R. $F_x = 1\text{ N}$	134
Tabela 8.1. Deslocamento flexível na direção y em função da carga aplicada de 0,750 kg ao longo do segmento horizontal	167

Tabela 8.2. Deslocamento flexível na direção y em função da carga aplicada de 1,002 kg ao longo do segmento horizontal.....	168
Tabela 8.3. Deslocamento flexível na direção y em função da carga aplicada de 1,250 kg ao longo do segmento horizontal.....	169
Tabela A3.1. Dados experimentais e estatísticos do deslocamento flexível para Carga de 0,750 kg.....	229
Tabela A3.2. Dados experimentais e estatísticos do deslocamento flexível para Carga de 1,002 kg.....	230
Tabela A3.3. Dados experimentais e estatísticos do deslocamento flexível para Carga de 1,250 kg.....	231

LISTA DE SÍMBOLOS

Letras latinas

A	área da secção transversal do segmento
A_j	secção transversal uniforme da área do elemento j
$\ A\ _2$	norma 2 da matriz A
$\ A\ _\infty$	norma infinita da matriz A
$\ A\ _1$	norma 1 da matriz A
A_{gj}	aceleração do centro de massa do segmento j
C	matriz de flexibilidade (<i>compliance</i>)
C_{arti}	matriz de flexibilidade das articulações
c_b	folga da junta universal
C_{ei}	matriz de flexibilidade de um elemento
C_F	relação entre os esforços externos e as reações nas articulações
C_K	coeficiente que relaciona os deslocamentos flexíveis que ocorrem no elemento terminal com os deslocamentos flexíveis em cada componente
C_{li}	matriz de flexibilidade dos segmentos deformáveis
$cond(K)$	número de condicionamento da matriz K
C_T	matriz de flexibilidade da estrutura
c_x	cosseno diretor na direção x
c_y	cosseno diretor na direção y
c_z	cosseno diretor na direção z
E	módulo de elasticidade
e	voltagem
E_j	módulo de elasticidade do elemento j
f	função implícita de q e x
F	esforços que atuam no elemento terminal
F_I	força normal ao segmento 1

F_2	força normal ao segmento 2
$[F_B]$	vetor coluna contendo os valores desconhecidos das forças de reação nas articulações e o torque de acionamento necessário.
$[F_D]$	vetor coluna contendo os valores conhecidos das forças e torques de inércia
F_e	forças externas aplicadas
F_x	força aplicada na direção do eixo Cartesiano x
F_y	força aplicada na direção do eixo Cartesiano y
F_z	força aplicada na direção do eixo Cartesiano z
F_{Oj}	força de inércia no segmento j contido em F_D
G	módulo de elasticidade em cisalhamento
g_N	equação de restrição da folga
I	momento de inércia de massa da área da seção transversal em torno do eixo Z
i	nó
I_{yj}	momento de inércia em y do elemento j
I_{zj}	momento de inércia em z do elemento j
$J_e(\theta, e)$	matrizes Jacobianas para cada articulação e cada deformação elástica
J_l	matriz Jacobiana obtida em relação às deformações dos segmentos
J_p	Jacobiano da estrutura paralela
J_q	Jacobiano do modelo cinemático inverso
J_s	matriz Jacobiana da estrutura serial
J_t	momento de inércia a torção
J_x	Jacobiano do modelo cinemático direto
K	matriz de rigidez da estrutura
k_1	coeficiente de rigidez concentrado do primeiro segmento
k_{12}	coeficientes de rigidez concentrados do acoplamento entre os segmentos 1 e 2
k_2	coeficientes de rigidez concentrados do segundo segmento
k_{ai}	parâmetros de rigidez concentradas das articulações do nó i
k_{art}	matriz de rigidez das articulações do nó i
k_{ax}	parâmetro de rigidez angular da articulação em torno do eixo x do referencial local
k_{ay}	parâmetro de rigidez angular da articulação em torno do eixo y do referencial local
k_{az}	parâmetro de rigidez angular da articulação em torno do eixo z do referencial local
k_{bj}	matriz de rigidez do segmento
k_f	rigidez a flexão do segmento

k_{lx}	parâmetro de rigidez linear na direções do eixo x do referencial local
k_{ly}	parâmetro de rigidez linear na direções do eixo y do referencial local
k_{lz}	parâmetro de rigidez linear na direções do eixo z do referencial local
K_M	torque constante do motor
k_{motor}	parâmetro de rigidez concentrado do motor elétrico
K_p	matriz de rigidez da estrutura paralela
k_p	parâmetro de rigidez concentrado linear para o elemento mola linear
K_s	matriz de rigidez da estrutura serial
k_t	parâmetro de rigidez concentrado angular para o elemento mola angular
l	comprimento do segmento
Δl	variação do comprimento do segmento
L_j	comprimento do segmento j
L_r	indutância
M	momento aplicado
m	coordenadas operacionais
m_j	massa do segmento j
M_x	momento aplicado em torno do eixo Cartesiano x
M_y	momento aplicado em torno do eixo Cartesiano y
M_z	momento aplicado em torno do eixo Cartesiano z
n	coordenadas generalizadas
0_3	matriz quadrada de zeros de ordem 3
$O_j x_j y_j z_j$	referencial j do segmento
$\mathbf{q}$	coordenadas generalizadas
R_B	raio da peça
R_J	raio do eixo
R_r	resistência térmica
$[T]$	matriz de transformação
T_e	torques externos aplicados a estrutura
T_L	torque devido ao carregamento externo no mecanismo de quatro barras
T_{Oj}	torque de inércia agindo no segmento j
U	energia de deformação do segmento
$\{\mathbf{u}\}$	vetor dos deslocamentos flexíveis no referencial inercial
u_i	deslocamentos flexíveis do nó i

$\{\bar{u}\}$	vetor dos deslocamentos flexíveis no referencial local
V_1	deslocamento flexível linear do segmento 1
V_2	deslocamento flexível linear do segmento 2
$\{W\}$	esforços externos no sistema de coordenadas inercial
W_i	esforços externos aplicados no nó i
$\mathbf{x}$	coordenadas operacionais
$\{\mathbf{x}\}$	coordenadas dos eixos inerciais
$\{\bar{x}\}$	coordenadas locais
x_j	eixo na direção longitudinal da barra j
$\Delta \mathbf{q}$	deslocamentos flexíveis das articulações
$\Delta \mathbf{x}$	deslocamentos flexíveis do elemento terminal

Letras gregas

ψ	ângulo de rotação do segmento devido à folga na articulação
Ω	resistência elétrica
ϕ	deslocamento angular
φ	deslocamento angular
χ	matriz diagonal dos parâmetros de rigidez concentrado
δ	deslocamento flexível linear
ε	folga
γ	ângulo da força de reação na articulação
δ_I	folga da articulação 1
ε_I	folga da articulação 2
β_j	ângulo da aceleração linear do centro de massa do segmento j
δW	trabalho virtual
δ_x	deformação linear na direção do eixo Cartesianos x
δ_y	deformação linear na direção do eixo Cartesianos y
δ_z	deformação linear na direção do eixo Cartesianos z

ϕ_x	deformação angular em torno do eixo Cartesiano x
ϕ_y	deformação angular em torno do eixo Cartesiano y
ϕ_z	deformação angular em torno do eixo Cartesiano z
η_1	deslocamento flexível angular do segmento 1
η_2	deslocamento flexível angular do segmento 2
β	ângulo auxiliar
δq	variação das coordenadas generalizadas
δx	variação de coordenadas operacionais
θ	ângulo da articulação
θ_{aux}	ângulo auxiliar
θ_1	ângulo de entrada do mecanismo 5R
θ_2	ângulo de entrada do mecanismo 5R
θ_i	coordenadas generalizadas dos ângulos
τ_i	torques e/ou forças aplicados nas articulações
Φ_y	fator de correção devido ao esforço cortante dependente da secção transversal da barra
Φ_z	fator de correção devido ao esforço cortante dependente da secção transversal da barra
ω_0	velocidade angular do motor elétrico sem carga
ω_2	velocidade angular da manivela do mecanismo de quatro barras

CAPÍTULO I

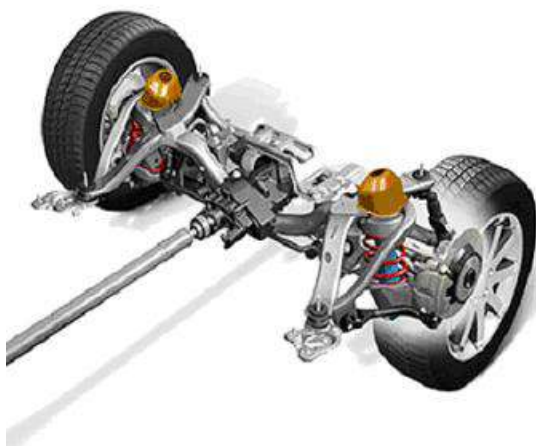
INTRODUÇÃO

Um sistema multicorpo consiste em uma estrutura composta por segmentos, que podem ser rígidos ou flexíveis, conectados entre si por meio de articulações. As estruturas assim constituídas, conhecidas por cadeias cinemáticas, podem ser de forma aberta (serial), fechada ou uma combinação entre elas. Em função de sua aplicação, as articulações podem ser motorizadas (ativas), como em um robô serial industrial, ou sem motorização (passivas), como a suspensão de um veículo. A cadeia cinemática serial é constituída na forma de um braço humano, por isso normalmente é denominada “estrutura antropomórfica”, onde os segmentos e as articulações são instalados um após o outro desde a base até atingir o elemento terminal. Desta forma, para ir da base até o elemento terminal e retornar à base, o percurso é o mesmo, num trajeto de ida e volta passando pelos mesmos elementos.

Já na cadeia cinemática fechada, os segmentos e articulações são montados formando anéis. Nas cadeias cinemáticas fechadas, possuindo vários anéis, pode-se partir da base e atingir o elemento terminal utilizando-se de mais de um trajeto.

Os sistemas multicorpos são de grande importância, pois são utilizados nas mais variadas aplicações tais como em aeronáutica, automobilística, máquinas ferramentas, mecanismos, veículos aquáticos, na área médica e robótica.

Como exemplo, na automobilística um sistema multicorpo é utilizado na suspensão automotiva, que envolve o projeto dinâmico em função de sua rigidez, Fig. 1.1(a); na área médica o uso de sistemas multicorpos possibilita construir sistemas altamente precisos, Fig. 1.1(b); na aeronáutica, sistemas multicorpos podem ser encontrados no trem de pouso, Fig. 1.1(c) e 1.1(d). Atualmente, tem sido de grande interesse o uso de sistemas multicorpos em máquinas ferramentas de alta velocidade.



(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 1.1 – (a) Sistema de Suspensão traseira de automóvel; (b) Robô cirúrgico; (c) Trem de pouso do Airbus A380; (d) Trem de pouso do Beechjet.

Um sistema multicorpo que tem sido muito estudado nos últimos anos consiste na denominada “estrutura paralela”. Esta estrutura paralela consiste, na realidade, de uma cadeia cinemática fechada complexa onde, em geral, existem várias outras cadeias cinemáticas fechadas unindo a base ao elemento terminal, que é denominado “plataforma móvel”.

A estrutura paralela tem sido objeto de inúmeras pesquisas, pois pode ser utilizada para varias aplicações tais como em robótica, máquinas de usinagem, sensores, simuladores de voo e de terremotos, brinquedos, entre outras. Isto se deve às suas vantagens em relação às estruturas seriais. Embora apresente diversas vantagens, este tipo de estrutura apresenta desafios aos pesquisadores na solução de problemas tais como as singularidades, a rigidez e erros/precisão.

A importância crescente da alta precisão e desempenho dinâmico para sistemas multicorpos tais como robôs, máquinas de usinagem de altíssima rotação e sistemas automáticos de manipulação e montagem, tem aumentado o uso de materiais de baixo peso e alta resistência, projetados com a finalidade de reduzir dimensões do projeto e o peso do sistema. Assim, a rigidez é um parâmetro de projeto importante para otimização de projetos. Além disso, o conhecimento das singularidades que porventura possam existir dentro do espaço de trabalho do sistema multicorpo permite a aplicação de um sistema de controle mais simples e confiável.

Outro aspecto importante a considerar é que o sistema multicorpo possui articulações e, com isso, folgas. Então, tem que existir um compromisso entre a rigidez, a mobilidade e a precisão.

Além de ser um importante parâmetro de projeto, a análise da rigidez pode ser utilizada também para a estimativa da performance esperada de sistemas em termos de carga útil e exatidão e para verificar a sua viabilidade em tarefas específicas (Pai e Leu, 1991; Carbone et al., 2002b; Ceccarelli et al., 2002). A análise da rigidez pode ser utilizada também nos algoritmos de controle com o objetivo de prover melhor performance em termos de precisão e estabilidade (Koganezawa e Ban, 2002; Tonietti e Bicchi, 2002).

No estudo da rigidez de sistemas multicorpos existem ainda alguns problemas abertos que não foram completamente resolvidos como, por exemplo, qual o melhor método de análise da rigidez a fim de permitir uma comparação adequada entre os resultados teóricos e experimentais. Estes aspectos requerem o desenvolvimento de modelos mais completos da rigidez permitindo associar com a análise de fenômenos que não são facilmente modelados como folgas e atritos. Existem também os erros de manufatura e problemas de geometria que devem ser considerados. Além disso, se possível, deve-se definir um procedimento padrão para avaliação experimental do desempenho da rigidez e um procedimento padrão para comparação do desempenho da rigidez para arquiteturas de sistemas multicorpos diferentes.

Desta forma, o estudo da rigidez das cadeias cinemáticas fechadas justifica-se por:

- Permitir a pesquisa de novas metodologias para o estudo da rigidez das arquiteturas de sistemas multicorpos, constituindo uma inovação científica tecnológica;
- A análise da rigidez é um importante parâmetro no projeto de sistemas mecânicos para otimização das dimensões das peças e seu peso, otimizando o seu comportamento dinâmico.

- O estudo pode ser aplicado em diversas áreas de interesse tais como aeronáutica, automobilística, usinagem, máquinas em geral e não apenas especificamente em estruturas robóticas;
- Apesar dos trabalhos já realizados, ainda não se dispõe de resultados conclusivos sobre o comportamento da rigidez de sistemas multicorpos;
- Os estudos realizados concentram-se em poucas estruturas para comparação e validação dos resultados. O mesmo pode se dizer com relação às singularidades;
- A análise da rigidez pode ser utilizada no controle de estruturas para aumentar sua precisão e aumentar o desempenho de estruturas paralelas.

Assim, nesta tese é realizado o estudo da rigidez de sistemas multicorpos, direcionado às estruturas paralelas, em função de sua grande aplicação industrial, sendo que os resultados obtidos podem ser aplicados em outros tipos de cadeia cinemática fechada como, por exemplo, em estruturas veicular e aeronáutica. Para atingir seus objetivos, este trabalho está dividido nos capítulos de I a IX, sendo o Capítulo I a introdução.

No Capítulo II é apresentada uma revisão sobre estruturas robóticas seriais e paralelas.

O Capítulo III fornece uma revisão sobre o estudo de rigidez de estruturas robóticas.

Já no Capítulo IV é apresentado, em detalhes, o método de análise de rigidez utilizando-se a teoria de análise matricial de estrutura – *MSA* (Matrix Structural Analysis). Neste Capítulo é apresentada uma metodologia sistemática para análise de rigidez de estruturas robóticas incluindo a flexibilidade dos segmentos e articulações.

No Capítulo V são apresentados alguns resultados numéricos utilizando-se da metodologia desenvolvida nos Capítulos III e IV, realizando comparações entre os diversos modelos de análise de rigidez.

No Capítulo VI é realizado o estudo das singularidades conjuntamente com a rigidez de estruturas robóticas e proposta uma nova metodologia de análise de singularidade utilizando-se do método *MSA* (Matrix Structural Analysis) e de números condicionais.

Uma revisão dos estudos das folgas nas articulações das estruturas robóticas e um novo modelo para o estudo das folgas nas articulações das estruturas robóticas paralelas planas é proposto no Capítulo VII.

No Capítulo VIII a bancada experimental e os testes experimentais são apresentados permitindo a validação da metodologia proposta.

Finalmente, no Capítulo IX são apresentadas as conclusões e as sugestões de trabalhos futuros.

CAPÍTULO II

ESTRUTURAS ROBÓTICAS

Este Capítulo tem como objetivo apresentar uma revisão sobre as estruturas robóticas, objeto de estudo desta tese, apresentando suas classificações e notações utilizadas. Um enfoque maior será dado para as estruturas robóticas paralelas tridimensionais devido ao seu grande desenvolvimento nos últimos anos.

2.1. INTRODUÇÃO

Um sistema robótico consiste basicamente de um manipulador mecânico com um elemento terminal na extremidade e munido dos seguintes subsistemas: atuadores, sistema de controle e sensores (Tsai, 1999).

A robótica pode ser dividida em duas grandes áreas: a robótica fixa e a robótica móvel. Um robô móvel pode ser visto como sendo um robô que tem uma mobilidade em relação ao ambiente em que está inserido. Ele pode ser classificado considerando vários aspectos tais como a habilidade de locomoção no ambiente (para ambientes internos ou externos); tipo de locomoção (com rodas, pernas ou esteiras); flexibilidade do corpo (corpo único, multicorpos flexíveis ou rígidos); finalidade de uso (para ensino, pesquisa, robôs de serviço); forma (antropomórfico, tipo inseto); ambiente que está inserido (espacial, submarino, terrestre) e nível de autonomia (teleoperado, totalmente autônomo) (Kelly, 1996; Gonçalves, 2006).

A robótica fixa, constituída por robôs manipuladores, é utilizada em aplicações industriais como manipulação de materiais, operações de soldagem, pintura e montagens. Os

robôs manipuladores são constituídos por segmentos conectados por articulações. Algumas articulações são atuadas e outras são passivas.

Os robôs manipuladores podem ser classificados de acordo com vários critérios tais como graus de liberdade, estrutura cinemática, tipo de acionamento, geometria do espaço de trabalho e características de movimento.

2.2. Classificação das Estruturas Robóticas

2.2.1. Classificação por Número de Graus de Liberdade

A classificação de um robô em função de seus graus de liberdade (gdl) representa a capacidade do robô em manipular objetos no espaço. Para posicionar e orientar totalmente um objeto no espaço são necessários 6 gdl. Os robôs com 6 gdl são denominados robôs de *propósito geral*. Caso o robô apresente mais de 6 gdl é dito *redundante* e no caso de possuir menos de 6 gdl de *deficiente*. Um robô redundante tem mais habilidade para contornar obstáculos e operar num espaço de trabalho rigidamente definido. Por outro lado, para algumas aplicações especiais como ajustar componentes num plano, quatro gdl são suficientes (Oliveira, 2005).

Desta forma o número de gdl de um mecanismo corresponde ao número de parâmetros de entrada independentes necessários para definir a configuração (posição e orientação) do mecanismo completamente (Tsai, 1999).

2.2.2. Classificação pelo Sistema de Acionamento

A classificação em função do sistema de acionamento corresponde ao tipo de energia utilizado. Assim, têm-se os robôs com acionamento elétrico, hidráulico e pneumático. A energia elétrica é mais limpa e facilita o controle, mas à medida que as velocidades são maiores e/ou alta capacidade de carga são exigidas o acionamento hidráulico ou pneumático é mais conveniente. A maior desvantagem de se usar o acionamento pneumático é a dificuldade de controle pelo fato do ar ser compressível (Tsai, 1999).

2.2.3. Classificação em Função da Cadeia Cinemática

Uma outra forma de classificar os robôs é de acordo com sua estrutura topológica. Segundo este critério, um robô ou manipulador com estrutura paralela é aquele que controla o movimento de seu elemento terminal por meio de pelo menos duas cadeias cinemáticas indo do elemento terminal até a base do robô. Robôs com esta configuração são ditos de cadeia cinemática fechada.

Se o robô controla o movimento de seu elemento terminal por meio de apenas uma cadeia cinemática, indo da extremidade até a base do robô, ele é dito de estrutura serial e possui cadeia cinemática aberta.

Os robôs híbridos possuem cadeias cinemáticas abertas e fechadas. Estas estruturas serão detalhadas no item 2.3

2.2.4. Classificação em função da Geometria do Espaço de Trabalho

Outra forma de classificar os sistemas robóticos é quanto à geometria do espaço de trabalho que é definido como o conjunto de pontos atingíveis pelo elemento terminal. Para os robôs com estruturas seriais as três primeiras articulações são usadas para determinar a posição e as articulações restantes são usadas para definir a orientação do elemento terminal. Por esta razão, a montagem formada pelas três primeiras articulações é denominada base e a montagem associada às articulações restantes é o punho. Frequentemente os punhos são projetados de modo que os eixos das articulações se interceptem num único ponto denominado de centro do punho. As bases podem assumir várias configurações cinemáticas e consequentemente gerar diferentes espaços de trabalho. Conforme Tsai (1999) a mais simples estrutura do braço de um robô é constituído por três articulações prismáticas mutuamente perpendiculares, sendo este tipo de robô conhecido como robô cartesiano. A posição do centro do punho de um robô cartesiano pode ser descrita pelas três coordenadas associadas com as três articulações prismáticas.

Por exemplo, os robôs cartesianos são aqueles constituídos por três articulações prismáticas, portanto com 3 gdl, e possuindo espaço de trabalho no formato de um paralelepípedo retangular reto. Na Fig. 2.1(a) é apresentado o esquema deste robô, na Fig. 2.1(b) um exemplo industrial e na Fig. 2.1(c) seu espaço de trabalho.

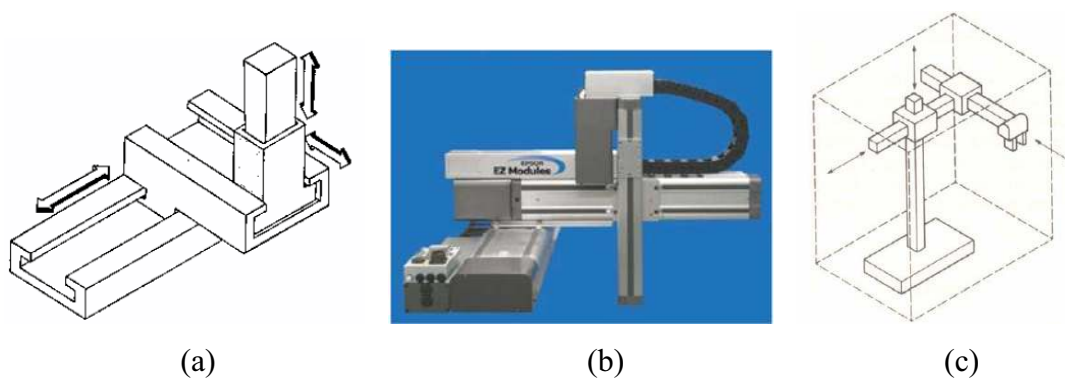


Figura 2.1– Robô Cartesiano. (a) Esquema do robô; (b) Robô cartesiano (EPSON); (c) espaço de trabalho.

Os robôs cilíndricos são constituídos por uma articulação rotativa e duas articulações prismáticas. Na Figura 2.2(a) é apresentado o esquema do robô, na Fig. 2.2(b) um exemplo industrial e na Fig. 2.2(c) seu espaço de trabalho.

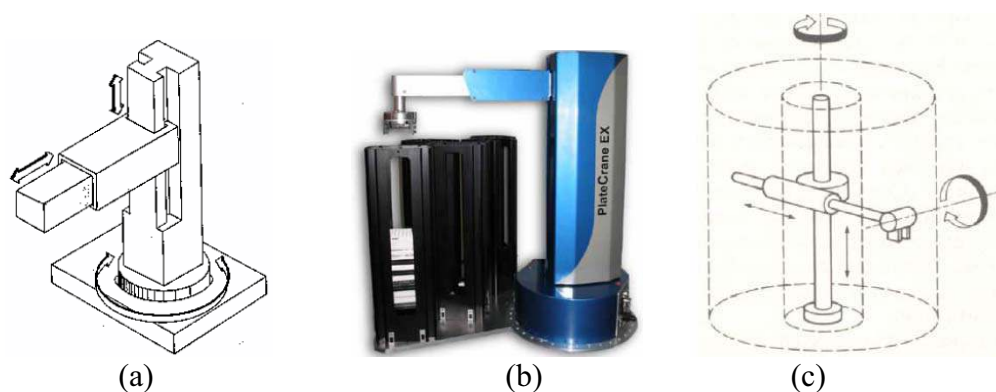


Figura 2.2 – Robô Cilíndrico. (a) Esquema do robô; (b) Robô Comercial; (c) espaço de trabalho.

Os robôs esféricos possuem 2 articulações de rotação e uma articulação prismática. Na Figura 2.3(a) é apresentado o esquema do robô e na Fig. 2.3(b) o seu espaço de trabalho.

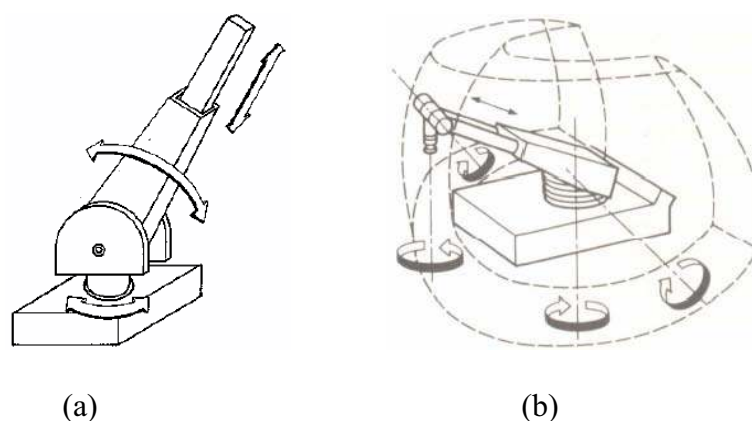


Figura 2.3 – Robô Esférico. (a) Esquema do robô; (b) espaço de trabalho.

Como o espaço de trabalho pode estar associado com o tipo de coordenada utilizada para definir a posição do elemento terminal, esta classificação muitas vezes é dita ser função da “natureza de seus movimentos” tais como cartesiano, cilíndrico ou esférico.

2.3. Identificação das Estruturas Robóticas

Para facilitar o estudo cinemático das cadeias robóticas algumas notações são utilizadas, sendo as principais a notação literal, (Paul, 1981; Bonev, 2008) e a notação na forma de Grafos (Pierrot, 1991).

A notação literal permite identificar a cadeia cinemática por uma seqüência de letras, que representam cada articulação, de forma seqüencial. Nesta notação a letra *R* representa uma articulação rotativa, *S* uma articulação esférica, *P* uma articulação prismática e *U* uma junta universal. A ordem em que as letras aparecem segue a convenção de colocação saindo da base e chegando ao elemento terminal, da esquerda para direita, respectivamente. Se a cadeia cinemática aparece repetidas vezes, um número é associado, à esquerda da primeira letra, à quantidade de cadeias cinemáticas existentes. A representação da articulação ativa é feita pela utilização do sublinhado nesta letra. Por exemplo, uma articulação rotativa acoplada com um atuador é escrita como R. Na estrutura serial, como todas as articulações são ativas as letras não são sublinhadas.

Utilizando-se da notação literal, o robô Cartesiano da Fig. 2.1 é representado por PPP, o robô Cilíndrico da Fig. 2.2 por RPP e o robô Esférico da Fig. 2.3 como RRP.

A Figura 2.4 apresenta diversos exemplos da utilização da notação literal aplicada a estruturas paralelas planas com 3 gdl.

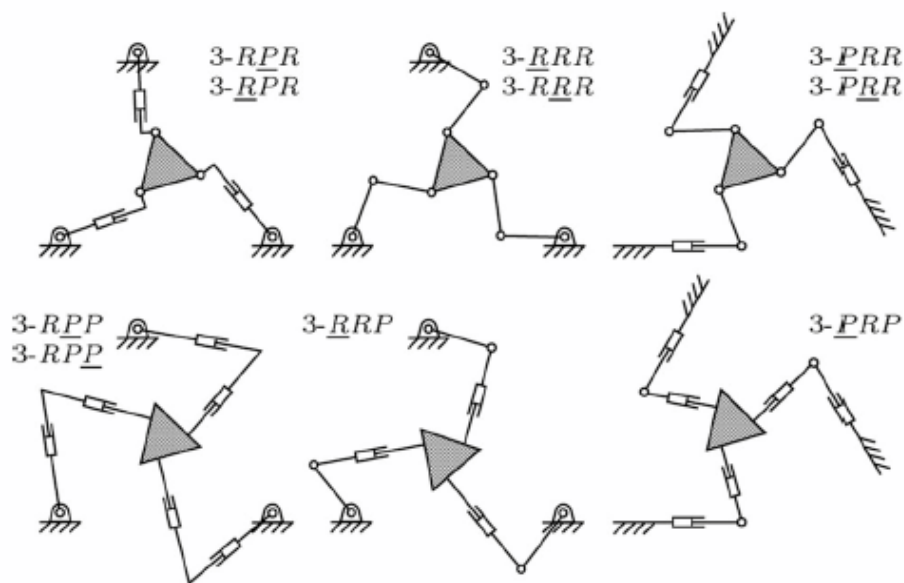
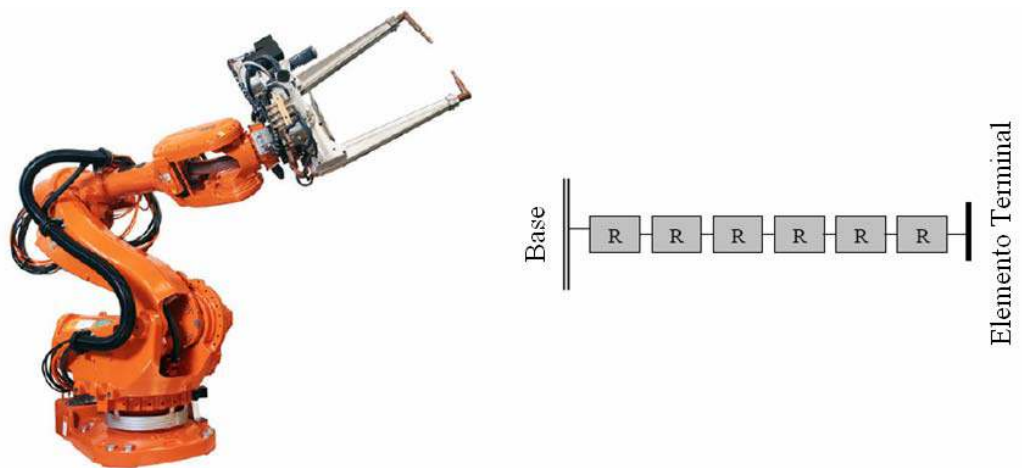


Figura 2.4 – Famílias de estrutura paralelas planas de 3 gdl com pernas idênticas (Bonev et al., 2003).

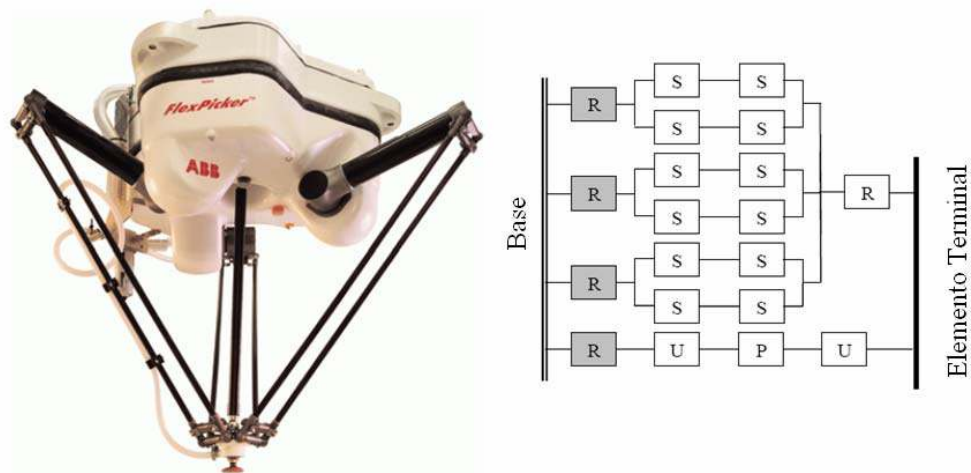
A notação de Grafos (Pierrot, 1991) utiliza uma representação em forma de grafos (caixas) para representar as articulações, conforme a Tab. 2.1. Esta notação segue a mesma sequência de montagem da notação literal. Neste caso, a articulação ativa é representada por um grafo hachurado (preenchido). A Figura 2.5 apresenta um exemplo de uma estrutura robótica serial e uma estrutura paralela com a respectiva notação em forma de grafos. Pode-se observar que, diferentemente da notação literal, a notação por grafos não é compacta.

Tabela 2.1 - Notação na forma de Grafos.

Articulação	Articulação Passiva	Articulação Ativa
Rotativa	— R —	— R —
Prismática	— P —	— P —
Universal	— U —	
Esférica	— S —	



(a)



(b)

Figura 2.5 – (a) Robô industrial (antropomórfico) IRB 6600ID (ABB, 2008) e sua notação na forma de Grafos; (b) Robô FlexPicker (ABB, 2008) e sua notação na forma de Grafos.

2.4. Robôs com Arquitetura Serial

As estruturas robóticas seriais são constituídas por uma sequência de segmentos e articulações conectados em cadeia aberta (Craig, 1989). Elas são caracterizadas pela existência de uma cadeia cinemática única entre o elemento terminal e a base. Os segmentos (ou corpos) são interligados por uma articulação motora de rotação ou prismática. Assim, exceto o elemento terminal e a base, todos os segmentos possuem duas articulações, Fig. 2.6.

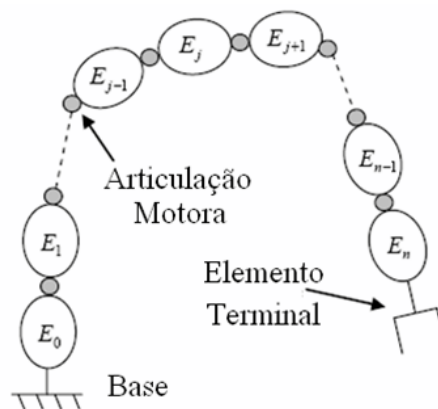


Figura 2.6 – Arquitetura serial simples.

Em função de sua morfologia assemelhar-se ao braço humano, a estrutura serial também é conhecida por “estrutura antropomórfica”, e tem sido estudada e desenvolvida principalmente para o uso em robótica industrial, Fig. 2.5(a). Esta estrutura também é conhecida por “estrutura clássica” e, conseqüentemente, “robôs clássicos”.

Uma classe de robôs seriais que tem sido muito utilizada é o Robô SCARA (*Selective Compliant Assembly Robot Arm*) que está representado na Fig. 2.7. Este robô possui 2 gdl, com 2 articulações rotativas que geralmente, são associadas a um terceiro grau de liberdade, fornecidas por uma articulação prismática. O robô SCARA é muito utilizado para operações de montagem e para operações do tipo “*pick and place*” possuindo repetibilidade de $\pm 0,01 \text{ mm}/\pm 0,005^\circ$.

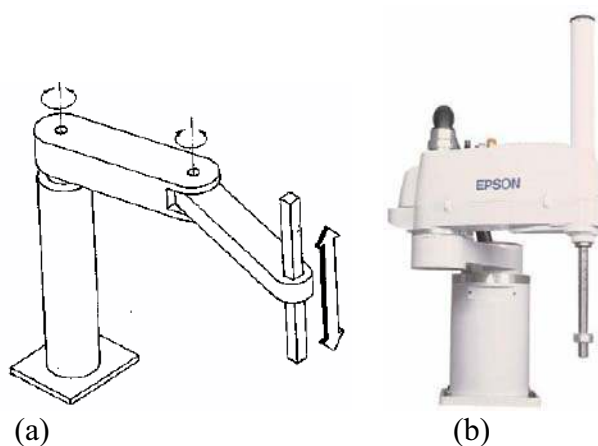


Figura 2.7 – Robô SCARA. (a) Esquema do robô; (b) Foto de um Robô SCARA (EPSON).

Em geral, para a modelagem dos robôs seriais, os segmentos são considerados *corpos rígidos*. Para garantir esta rigidez os corpos são volumosos e pesados. Por exemplo, para

robôs seriais com acionamento elétrico, tem-se da ordem de 27 quilos de massa do robô para cada quilo de carga útil transportável. Este valor tem apresentado pequenas reduções graças à otimização do projeto estrutural e o uso de novos materiais.

Quando os segmentos são flexíveis, o robô é dito flexível. Estes robôs possuem como vantagem um custo menor, maior espaço de trabalho, maiores velocidades de operação, maiores capacidades de carga em relação ao seu peso (*“payload-to-manipulator-weight-ratio”*), menor consumo de energia e melhor portabilidade mas, em compensação, podem apresentar problemas de vibração em altas velocidades (Dwivedy e Eberhard, 2006) e dificuldades de controle. Estes robôs possuem aplicações, por exemplo, em estruturas robóticas espaciais, Fig. 2.8.



Figura 2.8 – Braço robótico SSRMS (*Space Shuttle Remote Manipulation System*), desenvolvido pelo centro espacial do Canadá (<http://www.space.gc.ca>).

Outros trabalhos sobre robôs flexíveis seriais foram desenvolvidos por Yamano et al. (2004) que estudou o uso de braços flexíveis trabalhando em cooperação, Fig. 2.9. Benosman e Vey (2004) fizeram uma revisão sobre o controle de robôs flexíveis e (Dwivedy e Eberhard, 2006) realizaram uma revisão sobre a análise dinâmica de manipuladores flexíveis.

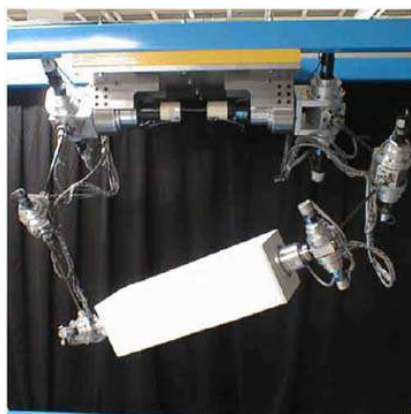
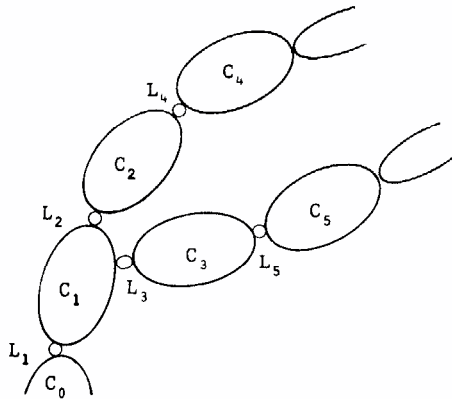


Figura 2.9 – Braços flexíveis cooperativos (Yamano et al., 2004).

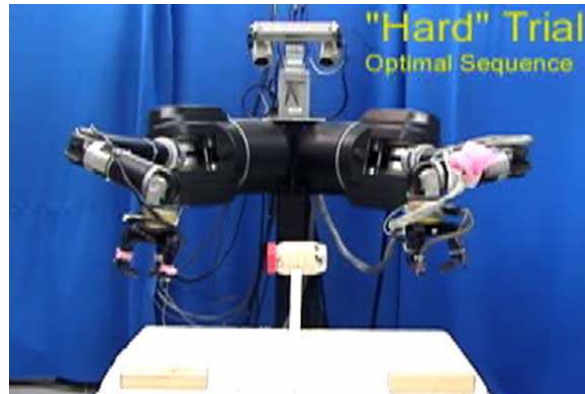
A aplicação das estruturas seriais aos robôs manipuladores se deve, em parte, à idéia inicial de que o robô seria um sistema mecânico capaz de realizar os mesmos tipos de tarefas que o homem e com a mesma habilidade. Entretanto, viu-se, após inúmeras pesquisas e aplicações práticas, que o sonho de se construir uma máquina robótica semelhante ao homem e com a mesma habilidade não seria uma tarefa evidente. Podem-se enumerar diversos elementos que justificam esta dificuldade. No entanto, dois tipos de problemas são imperativos. Um deles está relacionado com a forma de controle: o comando do robô controla ângulos (articulações de rotação) para a execução de trajetórias e tarefas planejadas utilizando-se de coordenadas cartesianas (ou outras associadas a elas). Como estes segmentos estão ligados de forma serial, os erros em cada segmento e articulação são aditivos até atingirem o elemento terminal (Earl, 1983). O modelo matemático consiste, então, em um sistema não linear com funções trigonométricas altamente acopladas tornando praticamente impossível sua solução em tempo real. Isto faz com que a grande maioria dos sistemas de comando atualmente existentes, utilize o controle do tipo ponto-a-ponto, onde o elemento terminal, que porta a ferramenta, descreve uma trajetória discretizada, partindo de cada ponto com velocidade nula e atingindo o ponto consecutivo também com velocidade nula (alguns sistemas têm utilizado trajetórias usando *splines* de forma a evitar as paradas intermediárias ponto-a-ponto). O segundo problema está relacionado com a inércia: partindo-se do elemento terminal, cada atuador deve suportar não só a carga manipulada, mas também o peso da estrutura e do atuador consecutivo. Isto faz com que a estrutura seja reforçada para evitar as flexibilidades e sustentar todo o peso morto do sistema. Desta forma, obtém-se uma estrutura extremamente pesada para manipular cargas relativamente pequenas. Tal construção compromete não só a eficiência massiva do robô como também cria problemas relativos à inércia, ou seja, impede a estrutura de operar a altas velocidades e altas taxas de aceleração, pois poderiam criar vibrações indesejadas na estrutura e no posto de trabalho, comprometendo também a precisão.

Vários trabalhos de pesquisa têm sido realizados de forma a procurar soluções para estes tipos de problemas. Uma delas consiste em utilizar mecanismos articulados de cadeia fechada ao invés das cadeias cinemáticas seriais. Esta arquitetura tem sido denominada “arquitetura paralela” ou “estrutura paralela” pela aparente configuração de paralelismo entre os elementos estruturais do mecanismo articulado e também em oposição às estruturas seriais.

Quando, a partir de uma mesma base, existem mais de uma estrutura serial, se diz que a estrutura é arborescente, Fig. 2.10. Os estudos atuais têm sido direcionados para o uso de robôs com estruturas seriais independentes trabalhando de forma cooperativa, Fig. 2.11.



(a)



(b)

Figura 2.10 – (a) Estrutura robótica serial arborescente; (b) Robô arborescente desenvolvido na Universidade de Massachusetts Amherst.

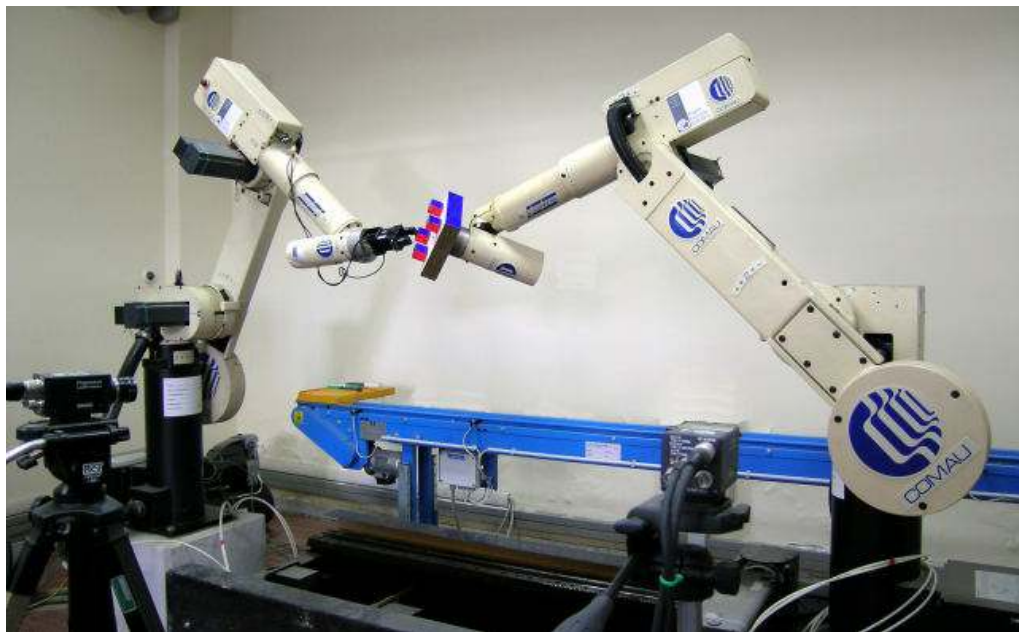


Figura 2.11– Robôs seriais independentes trabalhando cooperativamente.

2.5. Robôs com Arquitetura Paralela

A configuração típica das estruturas paralelas consiste em uma cadeia cinemática fechada onde os segmentos (ou conjunto de segmentos articulados) unem, simultaneamente, a base ao elemento terminal (plataforma móvel). Sendo que, em várias formas construtivas, os acionadores podem ser instalados em uma base fixa ou próximos à base, tornando-a mais leve. Assim, um manipulador com arquitetura paralela é caracterizado pela existência de várias cadeias cinemáticas, simples ou complexas, entre uma base e o elemento terminal, Fig. 2.12.

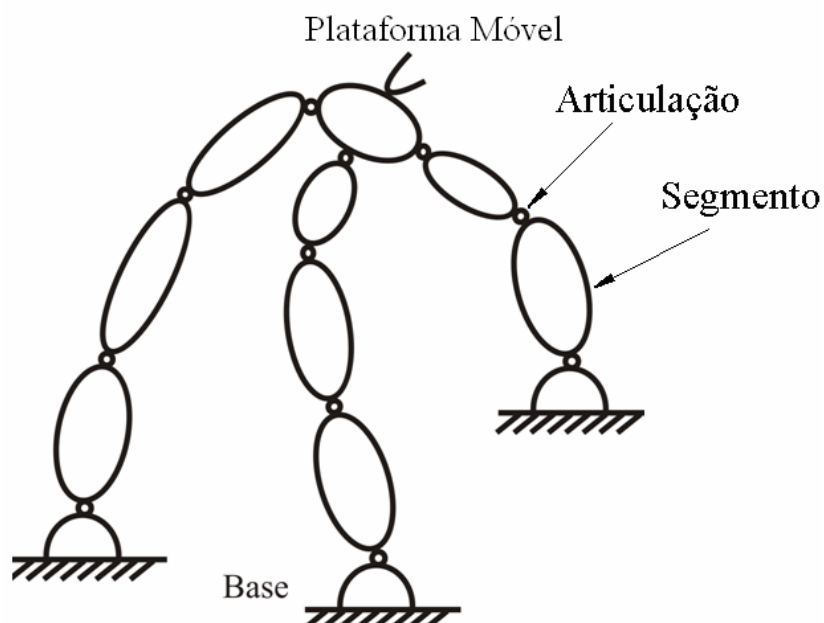


Figura 2.12 – Esquema de manipulador de arquitetura Paralela.

Merlet (1997) define um manipulador paralelo da seguinte forma: “manipulador paralelo consiste em um elemento terminal de n graus de liberdade e uma base fixa, conectados por, pelo menos, duas cadeias cinemáticas independentes, e a movimentação efetuada por n acionadores simples”.

Segundo a *International Federation for the Theory of Machines and Mechanisms* - IFToMM, um robô ou manipulador com estrutura paralela é aquele que controla o movimento de seu elemento terminal por meio de pelo menos duas cadeias cinemáticas seriais entre esse elemento terminal e à base do robô, (Ionescu, 2003).

A diferença básica entre as duas definições é que Merlet define o número de gdl da plataforma móvel como sendo a quantidade de atuadores da estrutura.

Estas arquiteturas despertam grande interesse porque apresentam grande rigidez aliada à exatidão de posicionamento e possuem capacidade de carga maior que as tradicionais arquiteturas seriais. Além disso, podem operar a grandes velocidades sem apresentar os mesmos níveis de problemas inerciais que as arquiteturas seriais (Carvalho e Ceccarelli, 1999). Mas quando comparadas às estruturas seriais, as estruturas paralelas possuem espaço de trabalho menor em relação ao volume total ocupado pela estrutura. Embora a estrutura paralela tenha um menor espaço de trabalho, ela pode ser instalada sobre o posto de trabalho, não ocupando espaço do chão de fábrica.

Provavelmente a primeira estrutura paralela foi a desenvolvida em 1931 por Gwinnett que apresentou um projeto de uma plataforma móvel destinada ao cinema “dinâmico” que não chegou a sair do papel (Bonev, 2003).

O primeiro estudo sobre as estruturas paralelas foi realizado por Pollard, que no ano de 1938 realizou o projeto de um manipulador paralelo denominado “Triapod”, um mecanismo paralelo plano de cinco barras para ser utilizado na pintura de automóveis. Este robô na época não foi finalizado pela falta de conhecimento suficiente para realizar o seu controle (Pugliese, 1999).

De acordo com diversos autores, o primeiro dispositivo mecânico utilizando a estrutura paralela é uma máquina construída por Gough em 1949, para realizar testes em pneus de aviões (Gough e Whitehall, 1962; Merlet, 1997; Stewart, 1965; Deblaise, 2006a), Fig. 2.13.

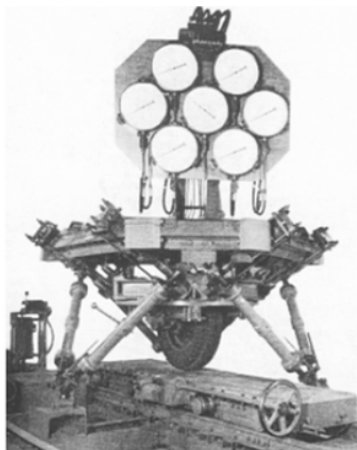


Figura 2.13 – Plataforma original de Gough (Gough e Whitehall, 1962).

Stewart desenvolveu uma plataforma de 6 graus de liberdade (gdl), que foi utilizado como simulador de voo desde o final dos anos 60 (Stewart, 1965) que, em função da semelhança com a plataforma desenvolvida por Gough, é conhecida como plataforma de Gough-Stewart.

A partir da publicação do trabalho de Stewart (1965) diversas estruturas paralelas têm sido propostas.

Assim, as aplicações das estruturas paralelas são as mais variadas, mas com um nítido direcionamento para as aplicações que requerem grandes velocidades de trabalho e/ou precisão, características que as arquiteturas seriais não possuem. Como exemplo de aplicação destas estruturas, pode-se citar: manipuladores e micro-manipuladores (com resolução da ordem de $0,1\mu\text{m}$) (Deblaise, 2006a), simuladores de movimentos gerais (Stewart, 1965), simuladores de terremoto (Ceccarelli, 1997), simuladores de voo (Stewart, 1965), punhos (Hess-Coelho, 2007), sensores de força, centros de usinagem (ETH, 2008) e brinquedos.

As estruturas paralelas podem ser classificadas como planas, esféricas ou tridimensionais (Tsai, 1999).

Estruturas Paralelas Planas

As estruturas paralelas planas são mecanismos robóticos de cadeia fechada que executam movimentos no plano. Estas estruturas são caracterizadas por um espaço de trabalho pequeno o qual é parcialmente inacessível devido à presença de configurações singulares. Dentre as estruturas paralelas planas podem-se destacar a estrutura robótica paralela plana 5R, o manipulador paralelo plano 3-RRR, o manipulador paralelo plano 3-PRP e 3-RPR.

A estrutura paralela plana 5R (ou mecanismo de 5 barras) é também denominada de robô industrial SCARA duplo, possui 2 gdl e apenas articulações de rotação. Este tipo de robô é comercializado pela Mitsubishi Electric, denominados como robôs industriais séries RP, oferecidos em três tamanhos, sendo utilizados para manipulações rápidas de materiais possuindo uma repetibilidade de $\pm 0,01\text{mm}$. Ele é basicamente um duplo robô SCARA oferecendo melhores tempos de ciclos e maior precisão do que os robôs SCARA convencionais (Figielski, 2007). Assim, o manipulador 5R é um manipulador paralelo com o mínimo de graus de liberdade que pode ser utilizado para posicionar um ponto em uma região no plano. O manipulador plano 5R consiste de cinco barras que são conectadas entre si em

suas extremidades por cinco articulações rotativas, duas das quais são conectadas à base e são motoras, como mostrado na Fig. 2.14. Este manipulador com estrutura simétrica tem atraído à atenção de muitos pesquisadores, que investigaram sua cinemática (Alici, 2002; Chablat e Wenger, 2004), espaço de trabalho (Gao et al., 1996; Cervantes-Sánchez et al., 2000; Macho, et al., 2008), modos de montagem (Cervantes-Sánchez et al., 2000; Gao et al., 1998), singularidades (Park e Kim, 1999; Cervantes-Sánchez et al., 2001), atlas de performance (Gao et al., 1998), projeto cinemático (Cervantes-Sánchez et al., 2001; Alici e Shirinzadeh, 2004) e planejamento de trajetória (Gonçalves et al., 2008).

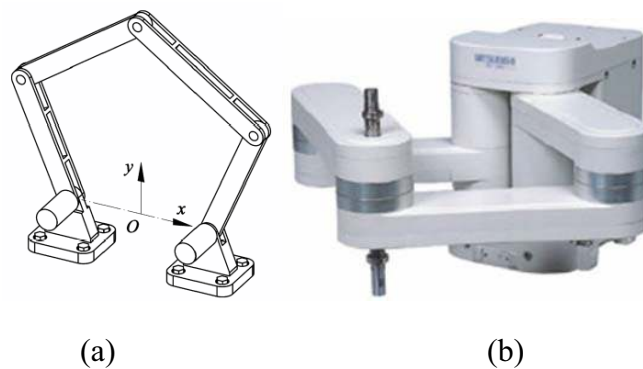


Figura 2.14 – (a) Estrutura paralela plana 5R. (b) Robô 5R Mitsubishi Electric.

A Figura 2.15 apresenta o esquema do manipulador paralelo plano 3-RRR.

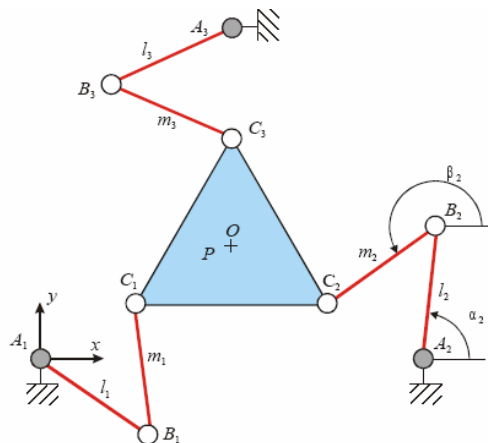


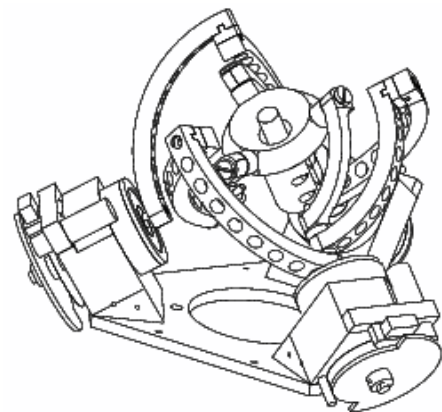
Figura 2.15 – Manipulador Paralelo Plano 3-RRR (Chablat e Wenger, 2004).

Estruturas Paralelas Esféricas

As Estruturas Paralelas Esféricas são baseadas no mecanismo esférico. Um mecanismo é denominado mecanismo esférico se todos os segmentos móveis realizam movimentos esféricos em torno de um ponto comum estacionário. Além disso, todos os eixos das articulações devem interceptar em um ponto comum, sendo que este mecanismo admite apenas articulações rotativas (Tsai, 1999). A Figura 2.16 apresenta o “Agile Eye” desenvolvido na Universidade de Laval, Canadá (Gosselin et al., 1996). Este manipulador paralelo esférico tem estrutura 3-RRR e foi projetado para permitir a rápida orientação de uma câmera com um espaço de trabalho e velocidades maiores que o olho humano. Hess-Coelho (2007) estudou o uso de uma estrutura 3-RRR + RUR derivada do “Agile Eye” para ser utilizada como um punho robótico.



(a)



(b)

Figura 2.16 – (a) Protótipo do “Agile Eye”; (b) Desenho esquemático.
<<http://robot.gmc.ulaval.ca/en/research/theme103.html>>

Estruturas Paralelas Tridimensionais

As Estruturas Paralelas Tridimensionais são aquelas que realizam movimentos que não podem ser caracterizados como plano ou esférico. Um manipulador é dito espacial se pelo menos um dos seus segmentos móveis possui movimento espacial geral.

Dentre as estruturas paralelas tridimensionais destaca-se a Plataforma de Gough-Stewart. Esta estrutura possui 6 gdl e sua estrutura cinemática é ilustrada na Fig. 2.17 (Craig, 1989).

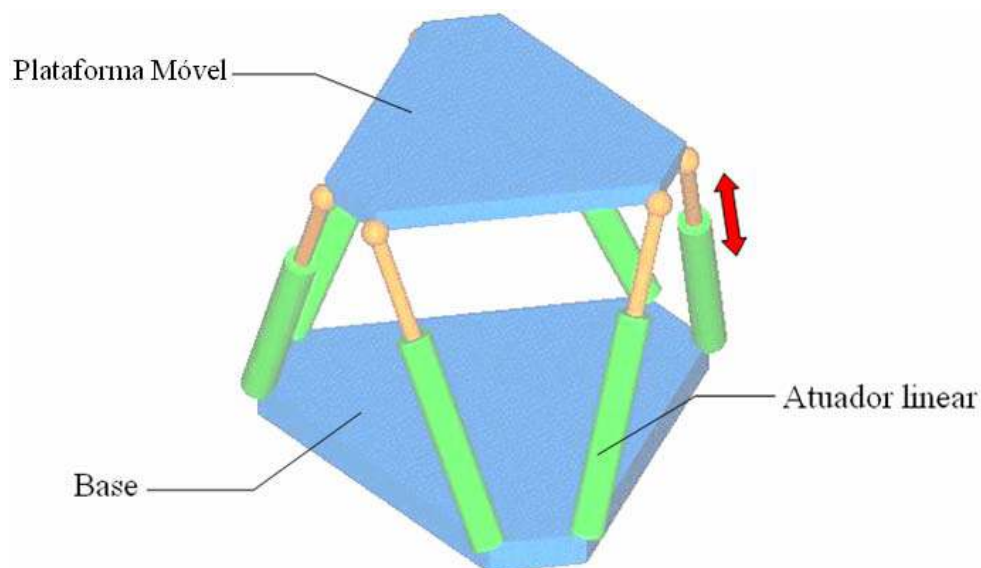


Figura 2.17 – Esquema da plataforma de Gough-Stewart, (Craig 1989).

O elemento terminal do manipulador é constituído pela plataforma móvel, cuja posição e orientação são controladas por seis pernas. Cada uma delas possui um atuador linear e é ligada à plataforma móvel por meio de uma articulação esférica, enquanto que a conexão entre ela e a base fixa é realizada por uma articulação universal.

O esquema do protótipo feito por Stewart (1965) é ilustrado na Fig. 2.18(a). A plataforma móvel triangular é movimentada por 3 pernas, cada uma delas possuindo dois atuadores lineares, conectadas por articulações rotativas, Fig. 2.18(b). As três pernas são ligadas à plataforma móvel, nos seus três vértices, por 3 articulações esféricas e cada perna é conectada à base por meio de 2 articulações, cada uma com 2 gdl.

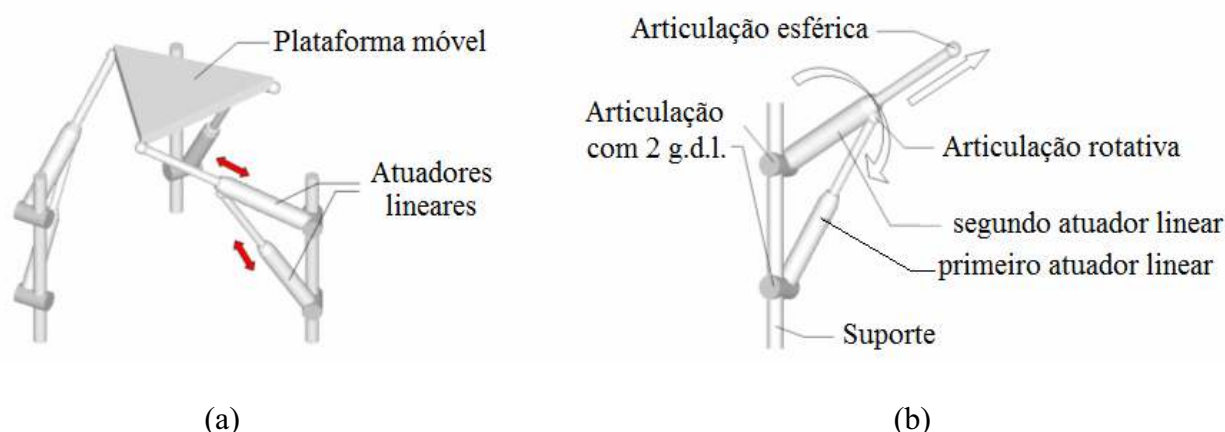


Figura 2.18 – (a) Esquema do protótipo de Stewart; (b) uma perna (Stewart 1965).

O primeiro atuador linear, situado embaixo, Fig. 2.18(b), controla a inclinação da perna, enquanto o segundo controla o comprimento da perna. Assim, a posição da articulação esférica é controlada por um sistema de coordenadas polares. Este mecanismo tinha como finalidade ser um simulador de vôo.

No trabalho de Stewart (1965), também foi proposto o uso da plataforma para algumas finalidades específicas:

- Como um veículo, representando um corpo no espaço, sujeito as todas as forças que podem ser encontradas durante uma viagem.
- Para representar uma plataforma estacionária, simulando um navio, sujeito aos movimentos aleatórios do mar.
- Como uma plataforma para simular as ações de um helicóptero em vôo.
- Para simular qualquer veículo a ser controlado por um homem.
- Base para o projeto de uma nova forma de máquina ferramenta.
- Base para o projeto de uma máquina de montagem ou transferência.

Hoje em dia esta estrutura é utilizada também, por exemplo, para simular ondas e para posicionar e orientar precisamente objetos com massas significativas (Deblaise, 2006a).

Outra estrutura baseada na plataforma de Gough-Stewart é o Calibrador Cinemático de Trajetórias Robóticas, desenvolvido no Laboratório de Automação e Robótica da Universidade Federal de Uberlândia, Fig. 2.19. Esta estrutura consiste em um sistema eletromecânico baseado na Plataforma de Gough-Stewart onde as seis pernas são substituídas por micro-cabos ligados a sensores de deslocamento. O princípio de funcionamento consiste em fixar a plataforma móvel ao elemento terminal de um robô; comandar o robô para a realização de uma trajetória conhecida, com conseqüente variação do comprimento das pernas do

calibrador cinemático. Esta variação é medida pelos sensores de deslocamento que, através do modelo geométrico direto, permite calcular a posição e a orientação da plataforma móvel, permitindo comparar a trajetória programada para o robô e a trajetória real descrita pelo elemento terminal, (Oliveira Jr e Carvalho, 2002).

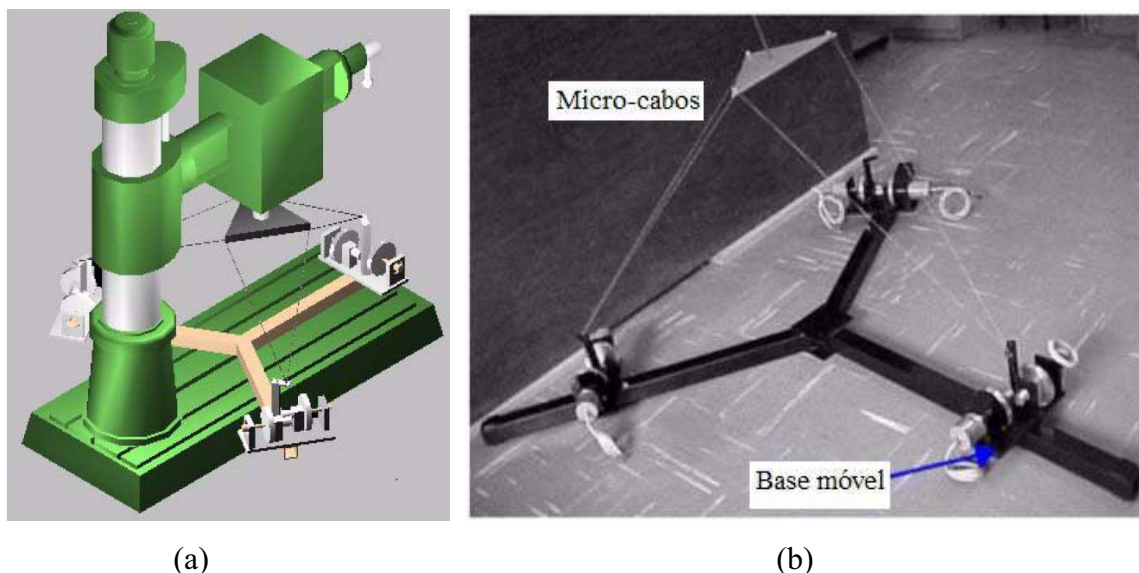


Figura 2.19 – (a) Exemplo de Aplicação do calibrador cinemático de trajetórias robóticas. (b) Protótipo (Oliveira Jr e Carvalho, 2002).

Também o manipulador paralelo denominado Hexaglide possui uma cadeia cinemática derivada da plataforma de Gough-Stewart. No Hexaglide o posicionamento dos atuadores lineares não é parte integrante das pernas como na plataforma de Stewart, mas deslizante na base fixa, conforme ilustrado na Fig. 2.20. A plataforma móvel é movimentada por seis pernas, cada uma movimentada por um atuador linear; cada perna é conectada à plataforma móvel por uma articulação esférica, bem como a conexão entre a base fixa e a perna. Um exemplo deste manipulador foi desenvolvido pela empresa Ingersoll (2008).

Uma vantagem deste manipulador paralelo em relação à plataforma de Gough-Stewart é a possibilidade de poder aumentar o espaço de trabalho em uma direção, aumentando o tamanho da guia prismática dos atuadores lineares. Para uma plataforma de Gough-Stewart um aumento no espaço de trabalho, ainda que em uma única direção, pode ser obtido somente com o aumento em escala de todas as dimensões do manipulador. Outra vantagem do Hexaglide é a instalação dos motores na base fixa.

Um protótipo deste robô foi desenvolvido na ETH (Eidgenössische Technische Hochschule) em Zurique, Alemanha, conforme ilustrado na Fig. 2.20 (ETH, 2008), utilizado, por exemplo, em operações de usinagem.

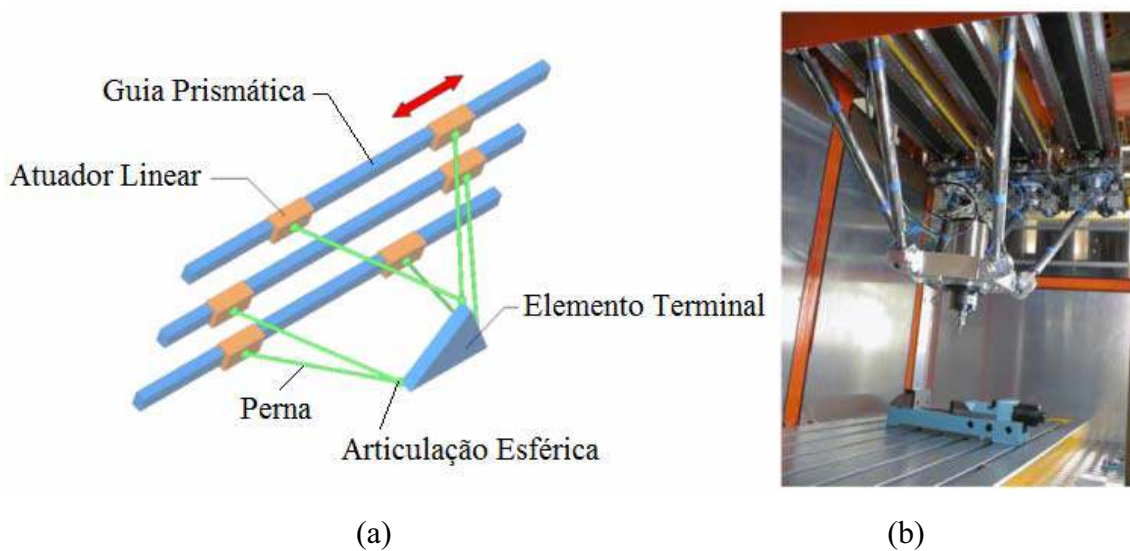


Figura 2.20 – (a) Esquema Cinemático do Hexaglide (Pugliese, 1999). (b) Protótipo do robô Hexaglide fabricado pela ETH, (ETH, 2008).

Outra estrutura paralela espacial bastante estudada é a estrutura Delta, proposta em 1988 (Clavel, 1998; Clavel, 1991). Ela representa a segunda geração dos robôs paralelos tridimensionais, pois os acionadores são fixos na base e os elementos móveis são “leves” (Deblaise, 2006a). Esta estrutura é comercializada pela fabricante de robôs ABB com o nome de FlexPicker[®], Fig. 2.21(a) com repetibilidade de $\pm 0,1\text{mm}$.

Esta estrutura é aplicada nas mais diversas áreas inclusive na área médica como o robô Surgiscope[®] (Hein et al., 1999), Fig. 2.21(b).

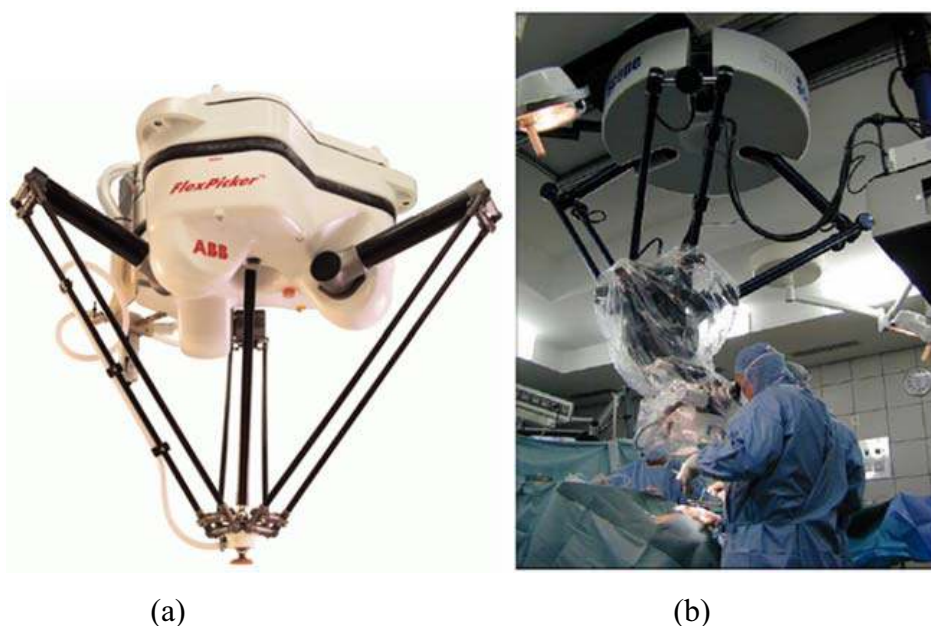


Figura 2.21 – (a) Robô FlexPicker (ABB); (b) Robô Surgiscope[®] (Hein et al., 1999).

O esquema cinemático do robô Delta é ilustrado na Fig. 2.22, (Clavel e Rey, 1998).

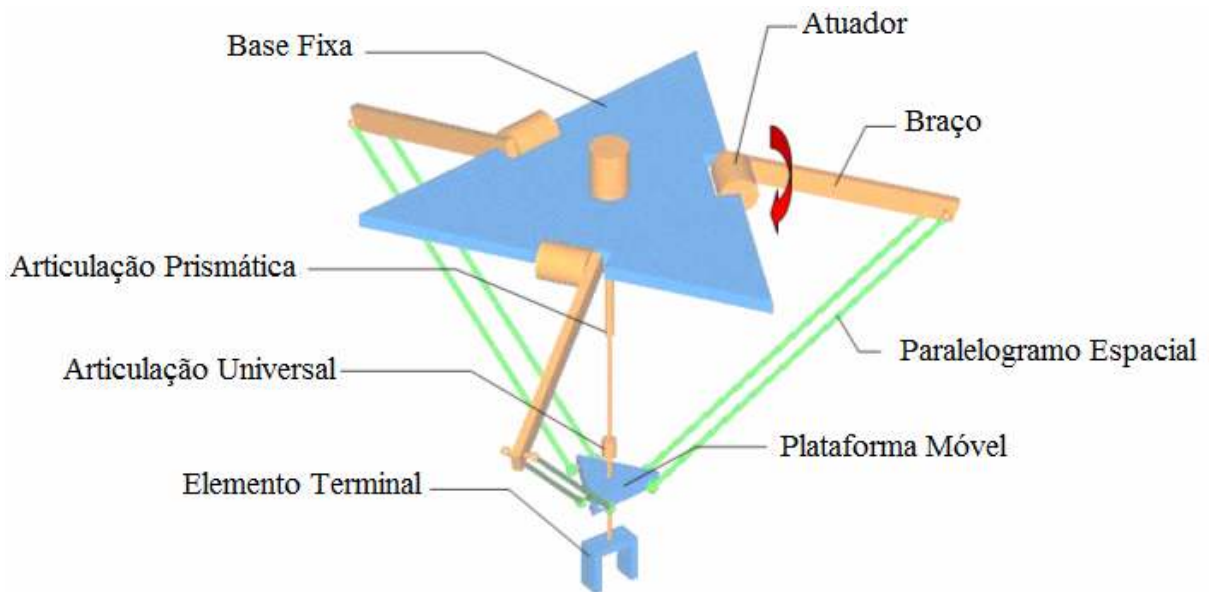


Figura 2.22 – Esquema cinemático do robô Delta, (Clavel e Rey, 1998).

A plataforma móvel tem 3 graus de liberdade, movendo-se sempre paralela à base, devido às três pernas que a conectam à base fixa. Cada perna, que é movimentada por um atuador rotativo fixado em sua base, é constituída por um braço e por um paralelogramo espacial conectados por articulações esféricas. Um outro gdl é acrescentado ao elemento terminal por uma quarta conexão entre a plataforma móvel e a base. A ligação é constituída por uma haste conectada à base fixa por meio de uma articulação prismática, e à plataforma móvel por uma articulação universal, (Clavel, 1988; Clavel e Rey, 1998).

Este robô é caracterizado por uma velocidade de operação elevada e, no campo da robótica industrial, é um dos manipuladores capaz de atingir as maiores acelerações (Pugliese, 1999).

Do robô Delta também foram derivados o Delta Linear que, com 3 atuadores lineares fixados na base fixa permitem manter as mesmas características do Delta, aumentando o espaço de trabalho em uma direção (Clavel et al., 1998), Fig. 2.23(a).

Outra variante do Delta é o Hexa, obtido pela duplicação das pernas do Delta. O manipulador obtido possui 6 graus de liberdade e permite uma inclinação máxima da plataforma móvel de cerca de 25 graus (Pierrot, 1998), Fig. 2.23(b).

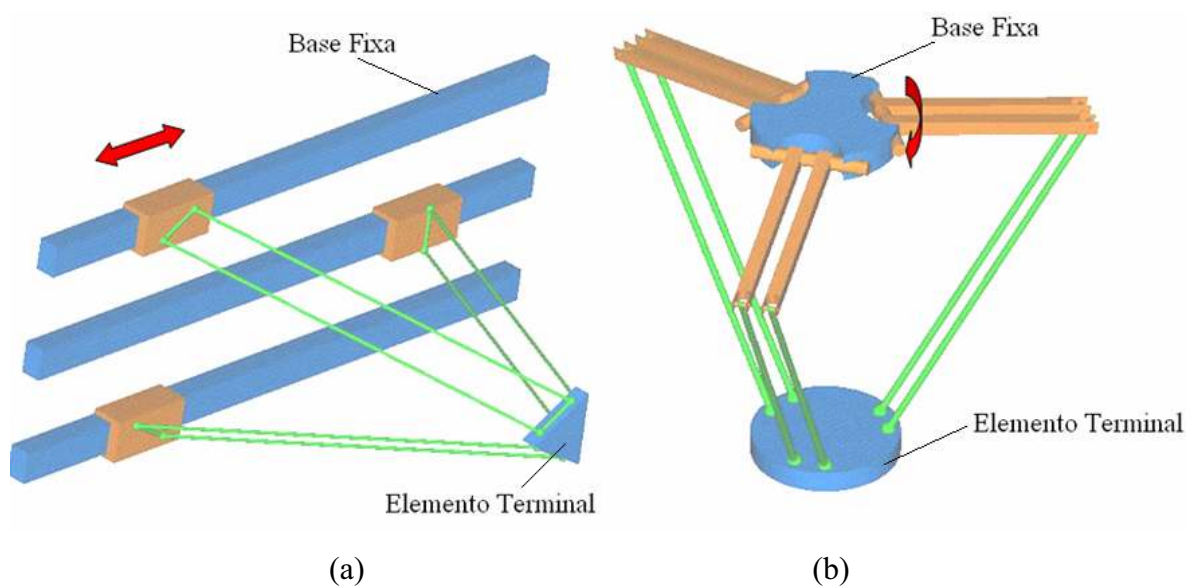
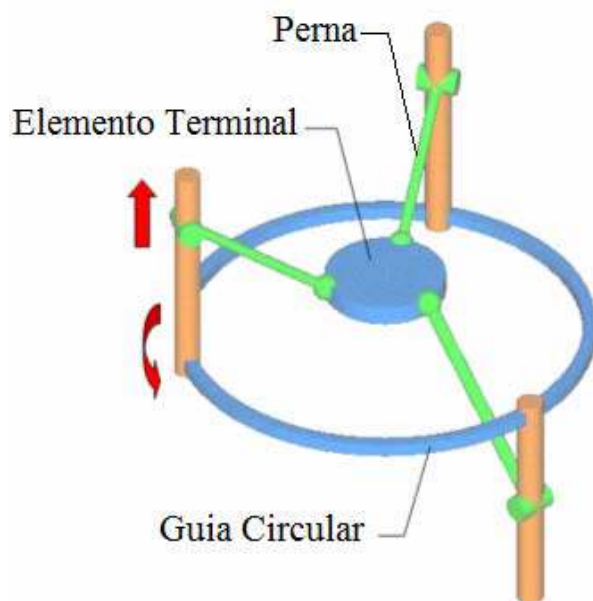


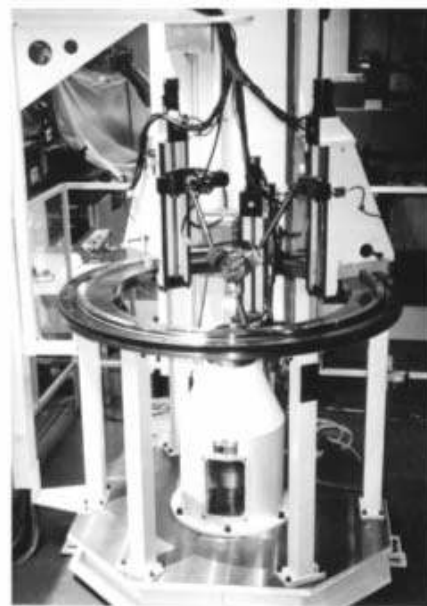
Figura 2.23 – (a) Delta Linear (Clavel et al., 1998); (b) Hexa, (Pierrot, 1998).

O Eclipse é outro exemplo de estrutura paralela espacial. Foi desenvolvido no Laboratório de Robótica da Universidade Nacional de Seoul – Coreia (Kim et al., 1998), com o objetivo de obter um manipulador paralelo capaz de fornecer ao elemento terminal um ângulo de inclinação de 90° , em relação a um plano horizontal. Todas as plataformas paralelas propostas anteriormente dificilmente alcançavam os 30 graus de inclinação (Ceccarelli e Ottaviano, 2002).

A Figura 2.24 ilustra o esquema cinemático do Eclipse e o protótipo construído (Kim et al., 1998). Nesta estrutura a plataforma móvel é movimentada por 3 pernas, cada uma conectada por meio de articulações esféricas, sendo a perna conectada à base por uma articulação rotativa e uma articulação prismática que pode deslizar verticalmente. A guia prismática pode girar deslizando sobre uma guia circular. Apesar da versatilidade do Eclipse quando comparada com outros manipuladores paralelos, sua acuracidade é baixa devido à baixa rigidez do sistema (Pugliese, 1999).



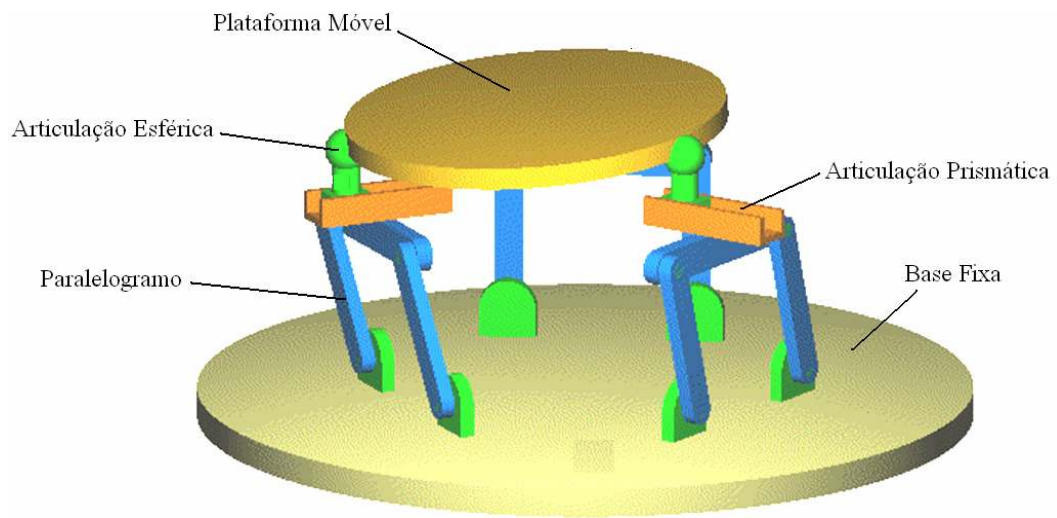
(a)



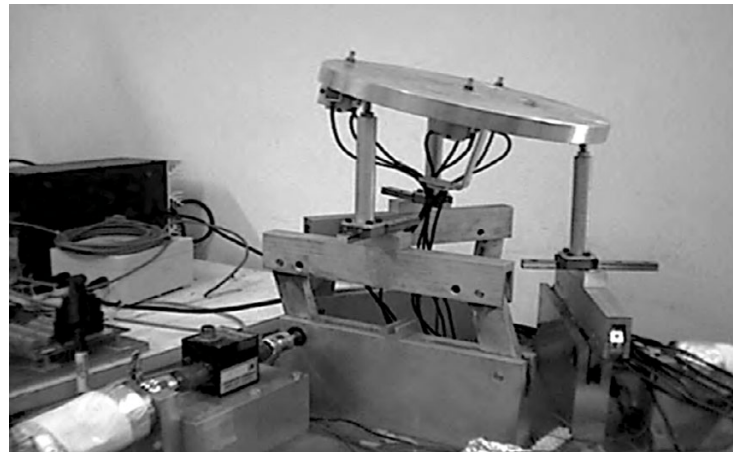
(b)

Figura. 2.24 – Estrutura Paralela Eclipse (a) Esquema cinemático; (b) Protótipo (Kim et al., 1998).

Na Universidade de Cassino, Itália foi desenvolvida a estrutura paralela espacial CaPaMan: Cassino Parallel Manipulator (Ceccarelli, 1998; Carvalho e Ceccarelli, 1999). O CaPaMan é um manipulador paralelo simétrico com três gdl, composto por uma base fixa e uma plataforma móvel que são conectadas por três pernas. Cada uma das pernas é constituída por um paralelogramo articulado, e se mantém sempre na vertical em relação à plataforma fixa. Os centros dos paralelogramos articulados estão dispostos nos vértices de um triângulo equilátero, de modo que os planos que os contém formam entre si ângulos de 120 graus, atribuindo desta forma propriedades de simetria ao manipulador. Conforme esquematizado na Fig. 2.25, as barras de ligação entre os mecanismos de quatro barras e a plataforma móvel contém duas articulações: uma esférica conectando a extremidade superior da barra à plataforma móvel e a outra prismática, a qual é fixada no ponto médio e perpendicular à biela do paralelogramo articulado.



(a)



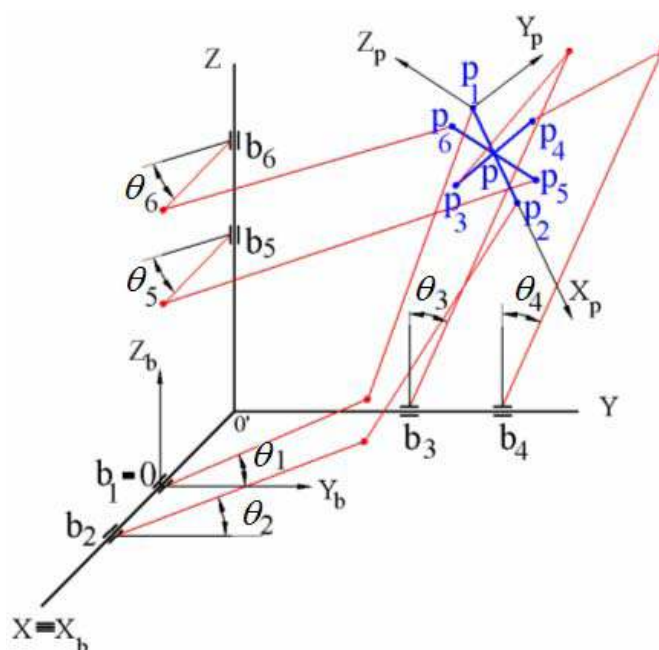
(b)

Figura 2.25 – (a) Esquema do CaPaMan; (b) Protótipo do CaPaMan (Carvalho et al., 2008).

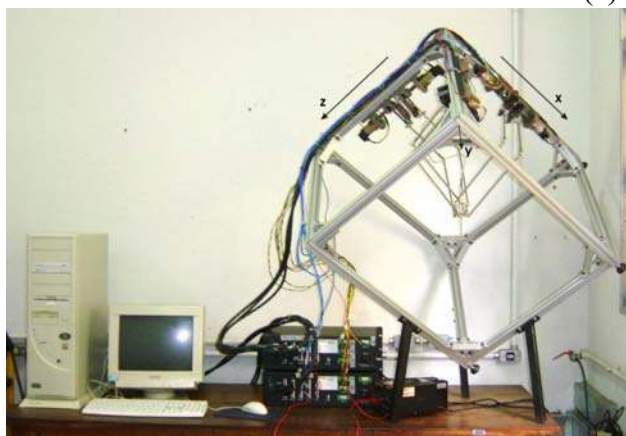
Outro protótipo, similar ao CaPaMan, é o TuPaMan, desenvolvido no laboratório da Politécnica de Torino, Itália (Romiti et al., 1993). Diferentemente do CaPaMan esta estrutura possui 6 gdl e dois conjuntos de paralelogramos articulados.

No Laboratório de Automação e Robótica da Universidade Federal de Uberlândia, baseado no trabalho de Jacquet (Jacquet et al., 1992), foi desenvolvido a estrutura robótica paralela 6-RSS. Este manipulador tem 6 graus de liberdade, o qual é caracterizado por uma base e uma plataforma móvel, conectados por seis segmentos RS-SS, onde as articulações rotativas, R, estão posicionadas nos eixos cartesianos, duas a duas, representadas pelos pontos b_i ($i = 1$ a 6) da Fig. 2.26(a). Os braços (segmentos SS) são ligados no centro de cada face de um cubo virtual que constitui a plataforma móvel. O sistema Cartesiano é a base da estrutura onde os atuadores são montados. Ela possui vantagens como: os acionadores são montados na

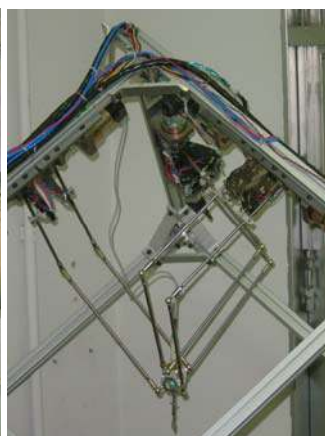
base fixa e nenhum componente de transmissão mecânica (polias, engrenagens, cabos) está em movimento, reduzindo de forma considerável o problema de inércia; a sua construção é modular, permitindo a redução do custo de fabricação e, para uma mesma base de acionadores, podem-se utilizar diferentes composições de braços e antebraços, obtendo-se uma vasta gama de espaço de trabalho. As variáveis cinemáticas são os ângulos de entrada θ_i ($i=1$ a 6) das articulações rotativas R. A estrutura estudada tem os segmentos RS e SS com os mesmos comprimentos e : $|b_1b_2| = |b_3b_4| = |b_5b_6| = |p_1p_2| = |p_3p_4| = |p_5p_6|$.



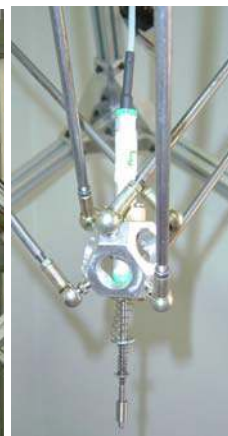
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 2.26 – (a) Configuração Genérica da estrutura paralela 6-RSS (Bezerra, 1996); (b) Protótipo; (c) Detalhe das pernas e atuadores; (d) elemento terminal com transdutor linear (Gonçalves e Carvalho, 2008a).

Recentemente, diversos pesquisadores estão trabalhando no desenvolvimento de estruturas robóticas paralelas atuadas por cabos, onde os segmentos são substituídos por cabos. Manipuladores baseados em cabos possuem características cinemáticas e dinâmicas muito boas e são de fácil transporte e de baixo custo de construção, os que as tornam favoráveis para aplicações médicas e de reabilitação (Cannella et al., 2008). Neste tipo de estrutura, os cabos devem estar sempre tensionados.

Hiller e sua equipe (Hiller et al., 2008) trabalharam no desenvolvimento de uma plataforma de Stewart atuada por cabos denominada SEGESTA que utiliza sete ou oito cabos para mover a plataforma móvel segundo uma trajetória desejada.

Bostelman et al. (2000) apresentou o projeto do RoboCrane, para ser utilizado como uma máquina ferramenta paralela.

Palmucci et al. (2008), realizou uma aplicação da estrutura paralela CaTraSys (“Cassino Tracking System”), que é um sistema de medição baseado em cabos, para realizar uma análise do passo humano permitindo medir as forças/torques envolvidas no movimento do passo humano.

Cannella et al. (2008), apresenta um sistema de cabos 4-4, denominado CALOWI (Cassino LOW-cost robot) para ajudar pessoas idosas ou pacientes com problemas nas pernas em operações de sentar e levantar, Fig. 2.27. Tavolieri et al., (2008), apresentam o estudo do espaço de trabalho do CALOWI.

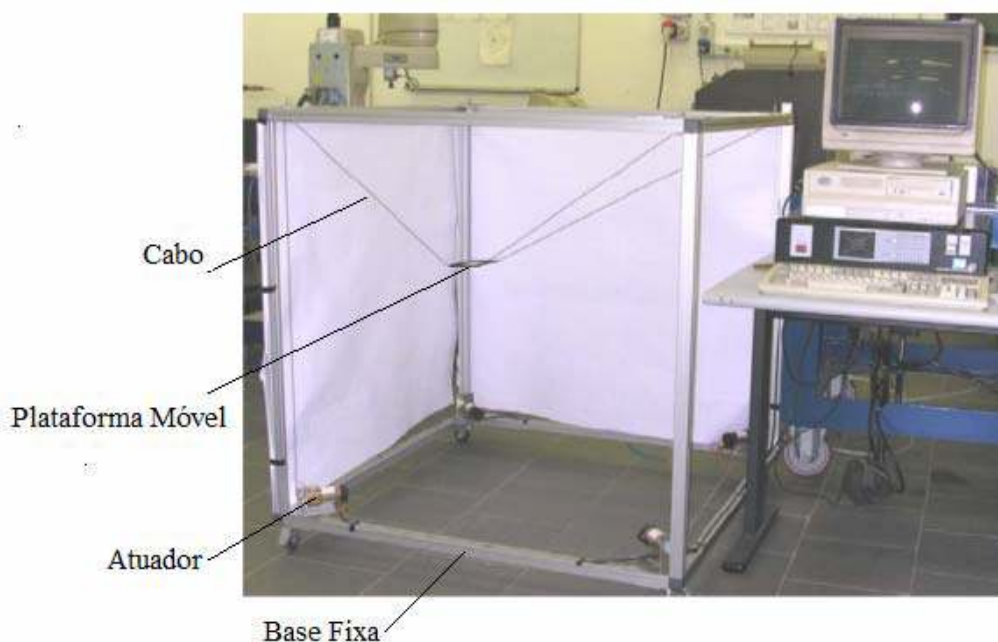


Figura 2.27 – Protótipo do CALOWI.

Os manipuladores paralelos também são utilizados como punhos de estruturas seriais, como proposto por Agrawal e Desmier (1994) e o punho esférico de Gosselin (Gosselin et al. 1995). Esta classe de robôs é denominada de estruturas híbridas.

2.6. Estruturas Híbridas

Esta terceira classe de estrutura tem sido estudada por alguns pesquisadores que conduziram trabalhos a respeito de combinações de estruturas seriais e paralelas. Entre eles pode-se citar: Fichter e McDowell (1980), Hunt (1983), Mohammed e Duffy (1985), Khalil e Kleinfinger (1986), Waldron et al. (1989), Chakarov e Parushev (1994) e Carbone (2003).

Kumar (1990) define como sistemas híbridos, as estruturas que não são totalmente seriais ou totalmente paralelas. Assim, as estruturas híbridas podem ser obtidas pela combinação:

- a) A estrutura paralela serve como estrutura de fixação, ou suporte, para que um robô do tipo clássico, ou serial, realize a tarefa.
- b) A estrutura serial serve como suporte, enquanto que o manipulador paralelo executa a tarefa, devendo ser leve e compacto o máximo possível, tendo a função de punho do robô serial.

Combinando cadeias seriais com cadeias paralelas, os manipuladores híbridos têm a possibilidade de associar as vantagens de ambas as arquiteturas. Em particular, um manipulador híbrido pode ter acuracidade comparada com os manipuladores paralelos e espaço de trabalho comparado com as estruturas seriais (Carbone et al., 2002a).

A Figura 2.28 ilustra um manipulador híbrido.



Figura 2.28 – a) Manipulador híbrido; b) Estrutura Paralela (Carbone et al. 2002a).

2.7. Conclusões

Neste Capítulo foram apresentados os critérios de classificação das estruturas robóticas considerando o número de graus de liberdade, a cadeia cinemática, os acionamentos, a geometria do espaço de trabalho e características de movimento.

Embora os diversos tipos de estruturas robóticas tenham sido descritos, foi dada maior atenção às estruturas paralelas com o objetivo de apresentar sua diversidade e permitir a visualização dos problemas de rigidez e singularidades.

Devido à sua constituição diversos autores afirmam que elas são rígidas com maior acuracidade e podem operar a grandes velocidades. No entanto, isto nem sempre pode ser verificado para todas as estruturas paralelas, limitando o espaço de trabalho da estrutura e provocando vibrações indesejáveis. Uma das possibilidades da origem desses problemas pode estar relacionada com a rigidez da estrutura que, por sua vez está relacionada com as singularidades. Mesmo que a estrutura não esteja em uma configuração singular, mas está próxima a ela, a estrutura pode se “tornar mais flexível” comprometendo seu comportamento.

Assim, nesta tese, o estudo da rigidez e das singularidades das cadeias cinemáticas fechadas é realizado com o intuito de contribuir para elucidar os problemas associados à modelagem das estruturas robóticas paralelas. A metodologia apresentada também pode ser aplicada às estruturas seriais.

CAPÍTULO III

ESTUDO DE RIGIDEZ DE SISTEMAS MULTICORPOS

Neste Capítulo é apresentada uma revisão sobre as diversas metodologias de estudo e cálculo de rigidez de estruturas robóticas.

3.1. Introdução

Quando uma carga (força) é aplicada a um corpo produz mudanças em sua geometria que são conhecidas como deformações ou deslocamentos flexíveis. Deslocamentos flexíveis em sistemas robóticos causam flutuações do elemento terminal em relação à base fixa, produzindo efeitos negativos como a falta da estabilidade dinâmica (vibrações) e na redução da acuracidade do sistema (Rivin, 1999). A importância crescente da alta precisão e desempenho dinâmico para sistemas multicorpos, principalmente robôs, máquinas de usinagem de altíssima rotação e sistemas automáticos de manipulação e montagem, têm aumentado o uso de materiais de baixo peso e alta resistência, projetados com a finalidade de reduzir dimensões do projeto e peso.

Assim, a rigidez é um parâmetro importante de projeto para escolha correta de materiais, geometria dos componentes, formato e tamanho, interação de cada componente com os outros e otimização de projetos (Pai e Leu, 1991; Carbone et al., 2002a e Carbone et al., 2003a).

Pode-se definir rigidez como sendo a capacidade de um sistema mecânico de suportar cargas sem mudanças excessivas em sua geometria (Rivin, 1999). Assim, a rigidez é uma característica mecânica que descreve o comportamento de uma estrutura sujeita às forças estáticas em termos da deflexão elástica e pode ser avaliada em estruturas robóticas por meio de formulações específicas e testes experimentais (ANSI/RIA, 1990 e UNI, 1995). Desta forma, o estudo da rigidez de um sistema multicorpo equivale a obter a matriz de rigidez, K ,

da estrutura analisada, que representa a medida da capacidade da estrutura de resistir às deformações devido à ação de esforços externos.

Tem-se também a matriz de flexibilidade (*compliance*), C , que representa a medida da capacidade de um corpo ou estrutura para exibir uma deformação devido à ação de esforços externos, sendo a matriz de rigidez a inversa da matriz de flexibilidade ($K = C^{-1}$).

A rigidez total de um manipulador depende de vários fatores, incluindo o tamanho e o tipo de material usado nos segmentos, o sistema de transmissão mecânica, os atuadores e o sistema de controle (Tsai, 1999). Em geral, para obter um mecanismo com alta rigidez, muitas partes devem ser grandes e pesadas. A rigidez também é afetada pela posição e orientação das partes da estrutura, ou seja, de sua configuração no espaço (Yoon *et al.*, 2004).

As principais fontes de flexibilidade das estruturas robóticas são as articulações, incluindo os atuadores, e segmentos. Assim, em função das principais fontes de flexibilidade da estrutura, diversas formas de modelagem foram propostas.

Nos trabalhos desenvolvidos por Tsai (1999) e Kim e Streit (1995), eles consideram que as principais fontes de flexibilidade são as articulações. Esta aproximação é aceitável quando o tipo de estrutura estudada utiliza segmentos rígidos, suposição que pode ser aplicada na maioria dos robôs industriais que utilizam estruturas seriais, conforme ilustrado na Fig. 3.1.



Figura 3.1 – Robô IRB 6400RF fabricado pela ABB.

Outros estudos desprezam a flexibilidade das articulações considerando somente a flexibilidade dos segmentos, que é aplicada quando os segmentos podem ser modelados como

vigas. Este tipo de abordagem é utilizado para modelar braços robóticos flexíveis, com aplicações diversas entre as quais em operações espaciais, Fig. 3.2, como citado em Hokamoto et al. (1995), e em estruturas robóticas paralelas como em Gao et al. (1993) e Svinin et al. (1999).



Figura 3.2 – Braço robótico SSRMS (*Space Shuttle Remote Manipulation System*), desenvolvido pelo centro espacial do Canadá (<http://www.space.gc.ca>).

As simplificações nas fontes de flexibilidade são suposições realizadas para simplificar o modelo de rigidez da estrutura, diminuindo o esforço computacional de cálculo.

Poucos estudos têm sido realizados considerando ambas as flexibilidades, das articulações e segmentos, como em Yoon et al. (2004) e Deblaise *et al.* (2006a; 2006b).

Existem basicamente três métodos principais usados para obter o modelo de rigidez de estruturas robóticas: métodos que utilizam a Matriz Jacobiana; métodos derivados da técnica de elementos finitos e os que utilizam a técnica de análise matricial de estruturas (Deblaise *et al.*, 2006b; Gonçalves e Carvalho, 2007).

3.2. Modelos derivados da Matriz Jacobiana

Os métodos derivados da Matriz Jacobiana têm sido estudados por diversos autores tais como (Gosselin, 1990; El-Khasawneh e Ferreira, 1999; Zhang *et al.*, 2004; Zhang, 2000; Majou *et al.*, 2004 e Company *et al.*, 2005).

Visto que no modelo geométrico das estruturas robóticas seriais é possível isolar as coordenadas operacionais ($\mathbf{x}$), associadas ao elemento terminal, em função das coordenadas generalizadas ($\mathbf{q}$), associadas às articulações, ficando na forma $\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{q})$ e que, nas estruturas paralelas isto não é possível, obtendo-se uma função do tipo $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{q}) = 0$, o cálculo do Jacobiano é escrito de formas diferentes, levando a alguns autores a dizer que o Jacobiano da estrutura paralela corresponde ao inverso do Jacobiano da estrutura serial, como apresentado a seguir.

3.2.1. Modelagem Utilizando-se da Matriz Jacobiana e Considerando Elementos como Molas

Para uma estrutura com n coordenadas generalizadas e com m coordenadas operacionais o torque e/ou força, $\boldsymbol{\tau}_i$, transmitido através da i -ésima articulação pode ser relacionado com as correspondentes deflexões da articulação $\Delta \mathbf{q}_i$, para pequenas deflexões, por uma aproximação linear dada por (Tsai, 1999):

$$\boldsymbol{\tau}_i = k_i \Delta \mathbf{q}_i \quad (3.1)$$

onde k_i é denominado constante de rigidez da articulação i (ou parâmetro de rigidez concentrado). A Equação (3.1) pode ser escrita em formato matricial para as n coordenadas generalizadas como:

$$\boldsymbol{\tau} = \chi \Delta \mathbf{q} \quad (3.2)$$

sendo $\boldsymbol{\tau} = [\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n]^T$, $\Delta \mathbf{q} = [\Delta q_1, \Delta q_2, \dots, \Delta q_n]^T$ e $\chi = \text{diag}[k_1, k_2, \dots, k_n]$ uma matriz diagonal $n \times n$.

A Equação (3.2) é aplicável tanto para a estrutura serial como para a paralela conforme descrito a seguir.

Estruturas Seriais

O modelo geométrico direto dos manipuladores seriais permite obter uma função independente para as coordenadas operacionais do tipo $\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{q})$. Neste caso, os deslocamentos flexíveis das articulações $\Delta \mathbf{q}$ estão relacionados com os deslocamentos flexíveis do elemento terminal $\Delta \mathbf{x} = [\delta_x \ \delta_y \ \delta_z \ \phi_x \ \phi_y \ \phi_z]$, sendo δ_x ; δ_y e δ_z as deformações lineares nas direções dos eixos Cartesianos e ϕ_x ; ϕ_y e ϕ_z as deformações angulares em torno dos eixos Cartesianos, pela matriz Jacobiana da estrutura serial, J_s .

$$\Delta \mathbf{x} = J_s \Delta \mathbf{q} \quad (3.3)$$

O princípio do trabalho virtual rege que um sistema está em equilíbrio se e somente se o trabalho virtual, $\delta W = \boldsymbol{\tau}^T \delta \mathbf{q} + \mathbf{F}^T \delta \mathbf{x}$, se anula para qualquer deslocamento virtual infinitesimal, compatível com as restrições impostas ao sistema. No entanto, $\delta \mathbf{q}$ e $\delta \mathbf{x}$ não são independentes, mas relacionados pela Eq. (3.3). Logo, os esforços que atuam no elemento terminal, $\mathbf{F} = [F_x \ F_y \ F_z \ M_x \ M_y \ M_z]^T$, sendo F_x ; F_y e F_z as forças aplicadas na direção dos eixos Cartesianos, e M_x ; M_y e M_z os torques aplicados em torno dos eixos Cartesianos, estão relacionados com a força/torque da articulação, $\boldsymbol{\tau}$, pela matriz Jacobiana da estrutura serial transposta, ou seja:

$$\boldsymbol{\tau} = J_s^T \mathbf{F} \quad (3.4)$$

Das Equações (3.2) à (3.4) obtém-se:

$$\Delta \mathbf{x} = \mathbf{C} \mathbf{F} \quad (3.5)$$

onde $\mathbf{C} = J_s \chi J_s^T$ é a matriz de flexibilidade (*compliance*).

Se a matriz Jacobiana é uma matriz quadrada e não singular, pode-se escrever pela multiplicação de ambos os lados da Eq. (3.5) por C^{-1} :

$$\mathbf{F} = K_s \Delta \mathbf{x} \quad (3.6)$$

onde

$$K_s = C^{-1} = J_s^{-T} \chi J_s^{-1} \quad (3.7)$$

A matriz K_s é a matriz de rigidez da estrutura serial.

Estruturas Paralelas

Nas estruturas paralelas algumas articulações são motoras enquanto outras são passivas. Neste caso, não é possível obter uma função independente entre as coordenadas operacionais e as coordenadas generalizadas, sendo obtido uma expressão na forma:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{q}) = \mathbf{0} \quad (3.8)$$

onde $\mathbf{f}$ é uma função implícita de $\mathbf{q}$ e $\mathbf{x}$, e $\mathbf{0}$ é um vetor de zeros.

Neste caso, os deslocamentos flexíveis das articulações $\Delta \mathbf{q}$ estão relacionadas com os deslocamentos flexíveis do elemento terminal $\Delta \mathbf{x}$ da seguinte forma:

$$J_x \Delta \mathbf{x} - J_q \Delta \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (3.9)$$

sendo

$$J_x = \partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{q}) / \partial \mathbf{x} \quad \text{e} \quad J_q = -\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{q}) / \partial \mathbf{q} \quad (3.10)$$

onde J_x é denominado Jacobiano do modelo cinemático direto e J_q é denominado Jacobiano do modelo cinemático inverso (Tsai, 1999).

A partir da Eq. (3.9) pode-se escrever

$$\Delta \mathbf{q} = \mathbf{J}_p \Delta \mathbf{x} \quad (3.11)$$

Sendo $\mathbf{J}_p = \mathbf{J}_q^{-1} \mathbf{J}_x$ o Jacobiano da estrutura paralela. Quando as Eqs. (3.3) e (3.11) são comparadas, pode-se observar que uma expressão é o inverso da outra. Daí se dizer que o Jacobiano da estrutura paralela corresponde ao inverso do Jacobiano da estrutura serial como em Tsai (1999).

A relação entre os esforços e as correspondentes deflexões é dada pela Eq. (3.2) e substituindo a Eq. (3.11) em (3.2), obtém-se:

$$\boldsymbol{\tau} = \chi \mathbf{J}_p \Delta \mathbf{x} \quad (3.12)$$

Novamente, aplicando o princípio do trabalho virtual obtém-se a relação entre os esforços aplicados nas articulações, $\boldsymbol{\tau}$, e os esforços na plataforma móvel, $\mathbf{F}$:

$$\mathbf{F} = \mathbf{J}_p^T \boldsymbol{\tau} \quad (3.13)$$

Substituindo a Eq. (3.12) em (3.13) obtém:

$$\mathbf{F} = \mathbf{J}_p^T \chi \mathbf{J}_p \Delta \mathbf{x} \quad (3.14)$$

ou

$$\mathbf{F} = \mathbf{K}_p \Delta \mathbf{x} \quad (3.15)$$

Sendo $\mathbf{K}_p = \mathbf{J}_p^T \chi \mathbf{J}_p$ a matriz de rigidez para a estrutura paralela.

Gosselin (1990), utilizando-se da metodologia apresentada, realizou o mapeamento da rigidez da estrutura paralela plana 3-RPR.

Inicialmente, os modelos de cálculo utilizando-se da matriz Jacobiana consideravam somente a flexibilidade das articulações como molas (Gosselin, 1990; El-Khasawneh e

Ferreira, 1999). Posteriormente, os segmentos também foram modelados como molas, dando origem aos modelos denominados de parâmetros de rigidez concentrados (*lumped stiffness model*) (Zhang et al., 2004 e Ceccarelli, 2004). Na consideração do segmento como mola, geralmente, ele está submetido a apenas esforços de tração e compressão, sendo desconsiderado os efeitos de flexão e torção. Em Carbone et al. (2006) é aplicado o princípio da superposição para considerar também o efeito da flexão.

Na Figura 3.3 é apresentado um exemplo de modelagem onde as fontes de flexibilidade dos atuadores e segmentos são considerados como sendo molas.

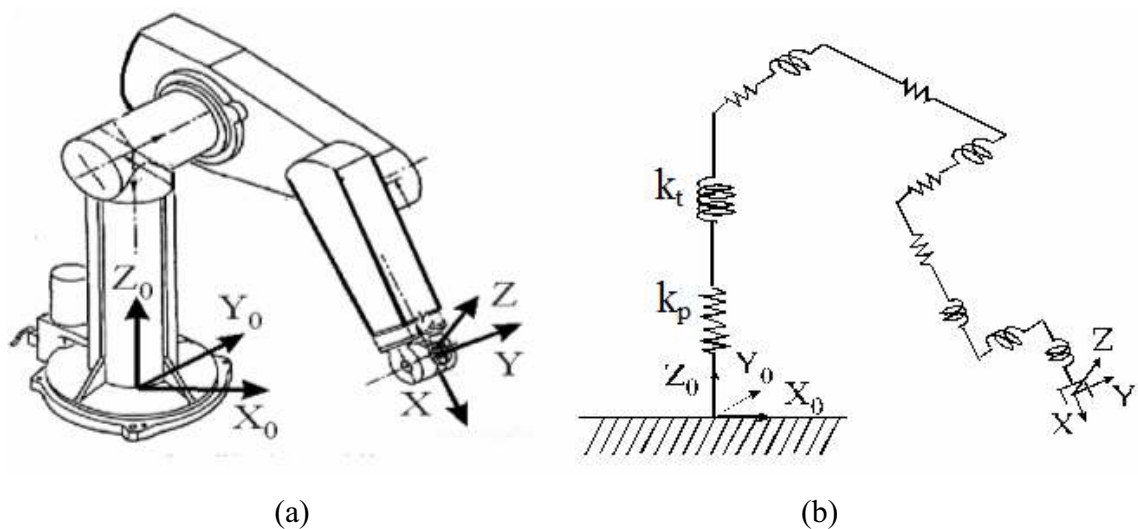


Figura 3.3 – Robô PUMA. (a) Esquema em 3D; (b) modelo simplificado de rigidez com elementos representados por molas (Ceccarelli, 2004).

Cálculo dos parâmetros de rigidez concentrados (lumped stiffness model)

A modelagem dos parâmetros de rigidez concentrados das articulações, k_i , é realizada considerando-as como sendo molas. A articulação rotativa é considerada uma mola de torção com um parâmetro de rigidez concentrado k_t , e a articulação de translação como sendo uma mola linear com rigidez, k_p , Fig. 3.4 (Duffy, 1996 e Rivin, 1999).

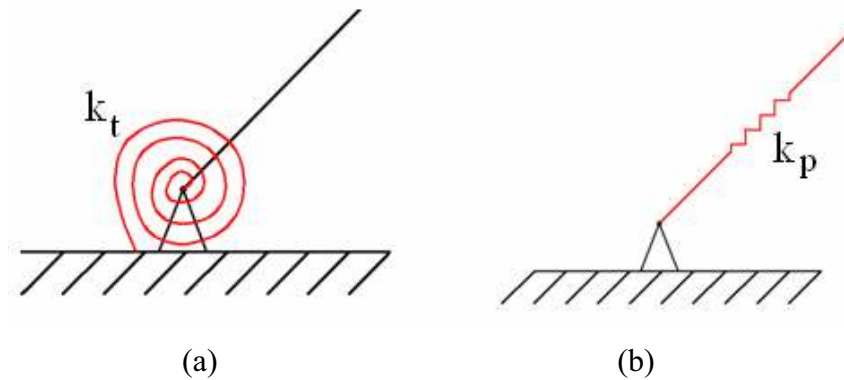


Figura 3.4 – (a) Articulação rotativa modelada como mola de torção; (b) articulação prismática modelada como mola linear.

Uma das formas de calcular os parâmetros de rigidez concentrados dos segmentos é considerá-lo composto por um conjunto de molas. A Figura 3.5 representa uma viga engastada submetida a esforços generalizados na sua extremidade livre, com área da seção transversal A , comprimento l , módulo de elasticidade E , módulo de elasticidade em cisalhamento G e momento de inércia a torção J_t . Os deslocamentos flexíveis lineares são modelados por molas lineares e os deslocamentos flexíveis angulares por molas de torção.

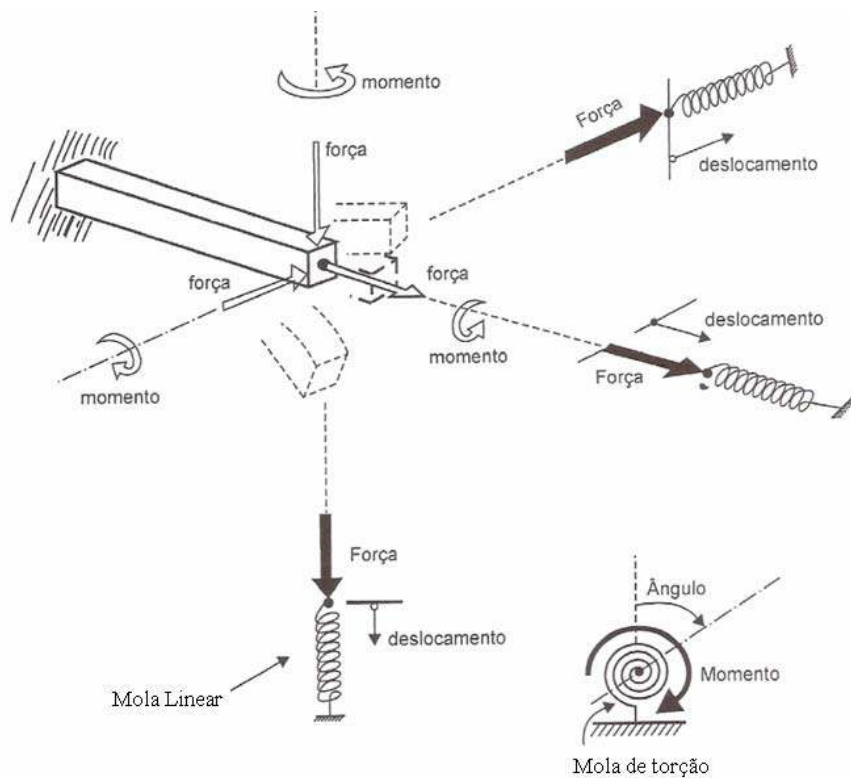


Figura 3.5 – Modelagem dos deslocamentos flexíveis de uma viga (Alves Filho, 2006).

O deslocamento flexível na direção axial, k_p , da viga pode ser obtido pela comparação com uma mola linear em que:

$$F = k_p x \quad (3.16)$$

Da Resistência dos Materiais tem-se que:

$$F = \frac{E A}{l} \Delta l \quad (3.17)$$

onde Δl é a variação do comprimento.

Por analogia à Eq. (3.16) tem-se que a rigidez axial da barra é dada por:

$$k_p = \frac{E A}{l} \quad (3.18)$$

Para uma mola de torção tem-se:

$$M = k_t \phi \quad (3.19)$$

em que M é o momento aplicado e ϕ o deslocamento angular e k_t é a rigidez angular.

Da Resistência dos Materiais, a torção é regida pela Eq. (3.20)

$$M = \frac{G J_t}{l} \phi \quad (3.20)$$

Comparando-se as Eqs. (3.19) e (3.20) chega-se que a rigidez angular k_t é dada por:

$$k_t = \frac{G J_t}{l} \quad (3.21)$$

O parâmetro de rigidez concentrado também pode ser obtido para uma viga engastada em uma extremidade e com uma carga F aplicada na extremidade livre, Fig. 3.6. Esta viga apresenta um deslocamento angular φ e linear δ em sua extremidade.

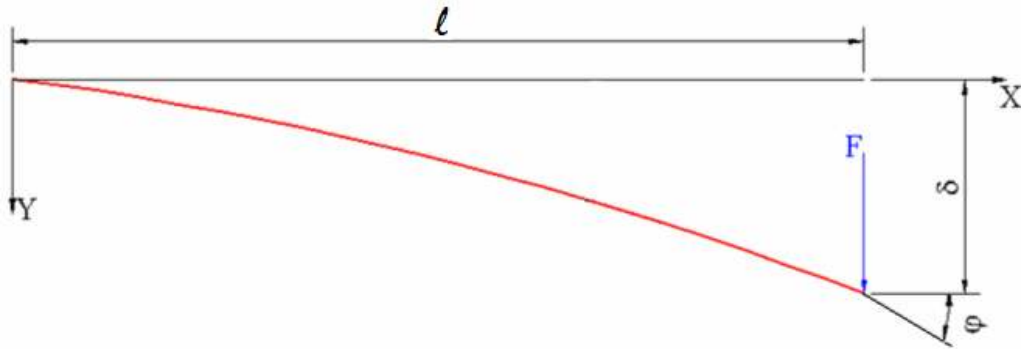


Figura 3.6 – Deslocamento linear flexível (δ) ao longo do eixo Y e deslocamento angular flexível (φ) em torno do eixo Z .

Da Resistência dos Materiais (Branco, 1998), (Carbone et al. 2006), o máximo deslocamento angular para a viga engastada é:

$$\varphi = \frac{F l^2}{2 E I} \quad (3.22)$$

onde I é o momento de inércia da área da seção transversal em torno do eixo Z . Fazendo-se a analogia com uma mola de torção tem-se:

$$\varphi = \frac{F l}{k_f} \quad (3.23)$$

Assim

$$k_f = \frac{2 E I}{l} \quad (3.24)$$

onde k_f é a rigidez à flexão.

Este procedimento para os outros esforços envolvidos, que acarretam momentos fletores e torsores, não é trivial. Em Forrester (2001) são apresentadas as modelagens da matriz de rigidez tri-dimensional para uma mola helicoidal de seção transversal retangular e depois para seção circular. Esta matriz é obtida usando métodos de energia (*strain energy methods*) e o segundo teorema de Castigliano, considerando momentos fletores e torsores e forças axiais e cortantes, além das propriedades geométricas da mola como o passo e a curvatura do arame. A matriz é composta por diversos termos extensos e complicados.

O procedimento apresentado por Forrester (2001), apesar de ser completo e fornecer resultados corretos dos parâmetros de rigidez concentrados, comprovados por experimentos, não é prático para a análise de rigidez de sistemas multicorpos.

Outro fator que deve ser levado em consideração é que em uma estrutura robótica os segmentos possuem orientações diferentes o que dificulta a simplificação da estrutura representada por molas.

A idéia básica de derivar sistemas mecânicos equivalentes construídos com regras básicas de composição de sistemas de molas em série e em paralelo para determinar a rigidez equivalente para um sistema multicorpo é um procedimento muito aproximado e incompleto. Mas o esquema equivalente pode ser utilizado para entender o papel da rigidez de cada componente no comportamento da estrutura como um todo de forma simples (Ceccarelli, 2004).

3.2.2. Modelagem Utilizando-se da Matriz Jacobiana e Considerando Matrizes de Flexibilidade

Poucos estudos têm sido realizados considerando a flexibilidade tanto dos segmentos como das articulações. Dentre os estudos realizados destacam-se os de Yoon et al. (2004) e Komatsu et al. (1989; 1990a; 1990b). As formulações apresentadas são funções dos movimentos de corpo rígido e das deformações dos segmentos e articulações.

A modelagem das flexibilidades de uma estrutura serial, conforme Yoon et al. (2002, 2004) pode ser realizada considerando a estrutura serial sendo composta por diversas articulações e segmentos deformáveis, Fig. 3.7(a).

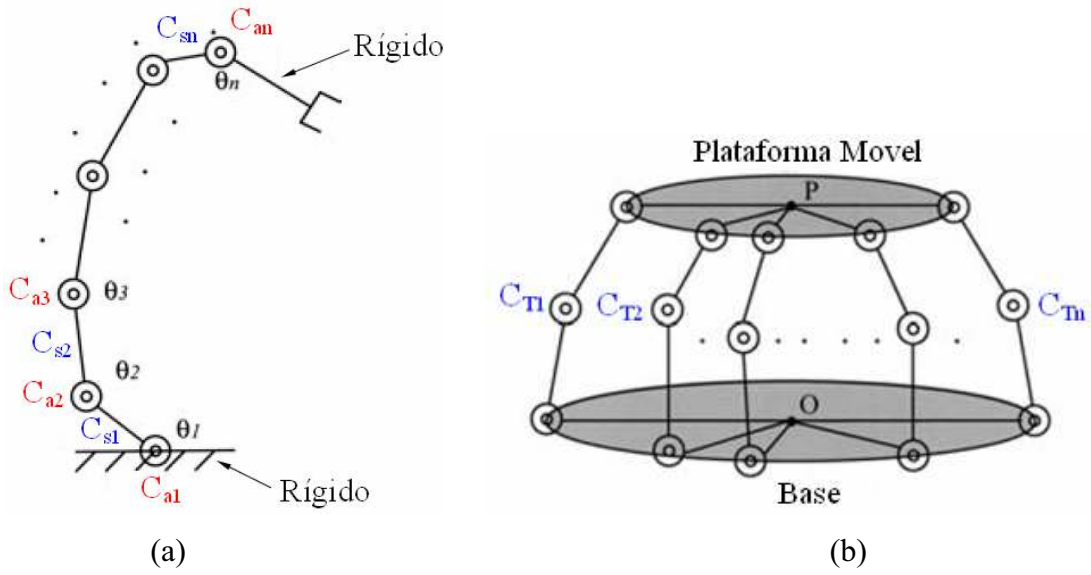


Figura 3.7 – (a) Modelo de flexibilidade de uma estrutura serial; (b) Modelagem da Estrutura Paralela (Yoon et al., 2004).

A formulação proposta por Komatsu (1989; 1990 e 1990) e Yoon (2004) utiliza a Matriz Jacobiana sendo dada pela Eq. (3.25):

$$\begin{aligned} C_T &= J_e(\theta, e) C_e J_e^T(\theta, e) \\ C_e &= \text{diag}(C_{e1} \ C_{e2} \ \dots \ C_{en}) \end{aligned} \quad (3.25)$$

Sendo: C_T a matriz de flexibilidade do elemento terminal, θ o ângulo da articulação, $J_e(\theta, e)$ são as matrizes Jacobianas para cada articulação e cada deformação elástica, C_e é a matriz de flexibilidade que é definida pelas características estruturais de todos os elementos, C_{ej} ($j = 1$ a n) é a matriz de flexibilidade de cada elemento. Yoon et al. (2004) considera a matriz de flexibilidade do segmento como sendo modelada como uma viga de Euler-Bernoulli. Da Resistência dos Materiais, (Kardestuncer, 1974) a matriz de flexibilidade de um segmento com seção uniforme circular pode ser calculada pela Eq. (3.26).

$$\mathbf{C}_{ej} = \begin{bmatrix} L_j/E_j A_j & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_j^3/3E_j I_{zj} & 0 & 0 & 0 & L_j^2/2E_j I_{zj} \\ 0 & 0 & L_j^3/3E_j I_{yj} & 0 & -L_j^2/2E_j I_{yj} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_j/G_j J_{tj} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -L_j^2/2E_j I_{yj} & 0 & L_j/E_j I_{yj} & 0 \\ 0 & L_j^2/2E_j I_{zj} & 0 & 0 & 0 & L_j/E_j I_{zj} \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

Onde L_j é o comprimento do segmento j , E_j o módulo de elasticidade, $I_{yj} = I_{zj}$ os momentos de inércia, J_{tj} momento de inércia à torção (ou momento de inércia polar) e G_j o módulo de elasticidade ao cisalhamento.

A matriz de flexibilidade da articulação depende do tipo de articulação utilizada na estrutura e é obtida por meio de catálogos ou experimentos.

A modelagem da estrutura paralela pode ser realizada considerando-se a estrutura paralela como sendo a união de varias estruturas seriais, Yoon et al.(2004), Fig. 3.7(a) e Fig. 3.7 (b).

Aplicando-se o principio da superposição, conforme Fig. 3.8, e lembrando-se que $\mathbf{K} = \mathbf{C}^{-1}$, a matriz de flexibilidade da estrutura paralela pode ser obtida pela Eq. (3.27).

$$\mathbf{C}_p^{-1} = \mathbf{C}_{T1}^{-1} + \mathbf{C}_{T2}^{-1} + \dots + \mathbf{C}_{Tn}^{-1} \quad (3.27)$$

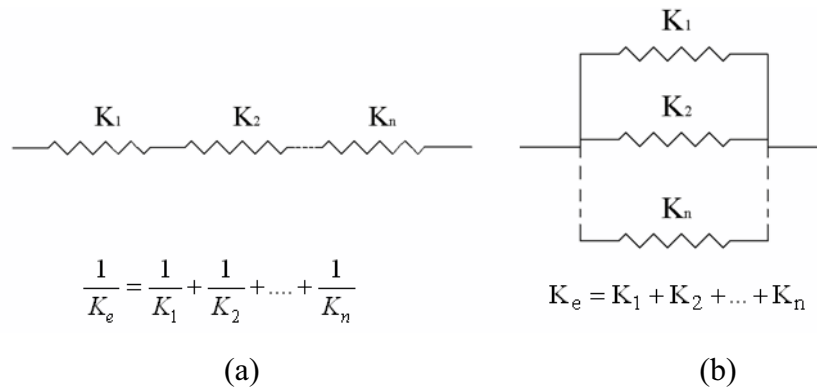


Figura 3.8 – Principio da Superposição. (a) molas em serie; (b) molas em paralelo.

Do apresentado anteriormente, o uso da matriz Jacobiana e, em geral, o uso de qualquer formulação matricial para análise de rigidez pode resultar em problemas de difícil

solução computacional quando as matrizes tornam-se singular ou próxima da singularidade (Carbone, 2003). Por exemplo, em Yoon et al., 2002 a presença de um eixo passivo na estrutura robótica paralela fornece como resultado uma matriz de flexibilidade singular. Este problema foi resolvido por Yoon et al., 2002 assumindo que o eixo passivo tem uma rigidez pequena, mas não igual à zero.

Deve-se destacar também que o uso dos parâmetros de rigidez concentrados (*lumped stiffness model*) fornece resultados aceitáveis com tempo computacional pequeno, mas são muitos hipotéticos (Rizk, et al., 2007). Geralmente são utilizados considerando que os segmentos estão sujeitos somente à tração e compressão. Neste caso, tem-se o modelo clássico de Hooke, em que aplicando uma força em uma mola na sua direção axial, esta se deforma na direção axial em função da sua constante de rigidez, k . Estas abordagens produzem resultados poucos confiáveis se os elementos da estrutura estão sujeitos à flexão (Company et al., 2005 e Majou, 2006).

Utilizando-se dos parâmetros de rigidez concentrados (*lumped stiffness model*) (Ceccarelli, 2004; Ceccarelli e Carbone, 2002; Carbone et al., 2002a; 2002b; Ceccarelli, 1998), a matriz de rigidez pode ser obtida numericamente definindo um modelo apropriado do manipulador, o qual leva em consideração os parâmetros de rigidez concentrado (*lumped stiffness model*) dos segmentos e articulações ativas. Esta metodologia é denominada “Component Matrix Formulation” (Ceccarelli, 2004).

Pelo método proposto, a matriz de rigidez K é dada por:

$$K = C_F K_P C_K \quad (3.28)$$

onde a matriz C_F representa a capacidade de transmissão de forças do mecanismo paralelo e que descreve a relação entre os esforços externos e as reações nas articulações. K_P é a matriz que agrupa os parâmetros de rigidez concentrados dos componentes deformáveis do manipulador paralelo e C_K relaciona os deslocamentos flexíveis, que ocorrem no elemento terminal, com os deslocamentos flexíveis em cada componente.

Deve-se destacar que a metodologia proposta por Ceccarelli e Carbone (2002), nada mais é do que o cálculo da matriz de rigidez através da matriz Jacobiana expandido para considerar os segmentos. Por exemplo, se o modelo proposto na Fig. 3.3 for simplificado

considerando-se os segmentos rígidos, o modelo de rigidez se reduz a 6 parâmetros concentrados de rigidez K_{T1} a K_{T6} , como mostrado na Fig. 3.9.

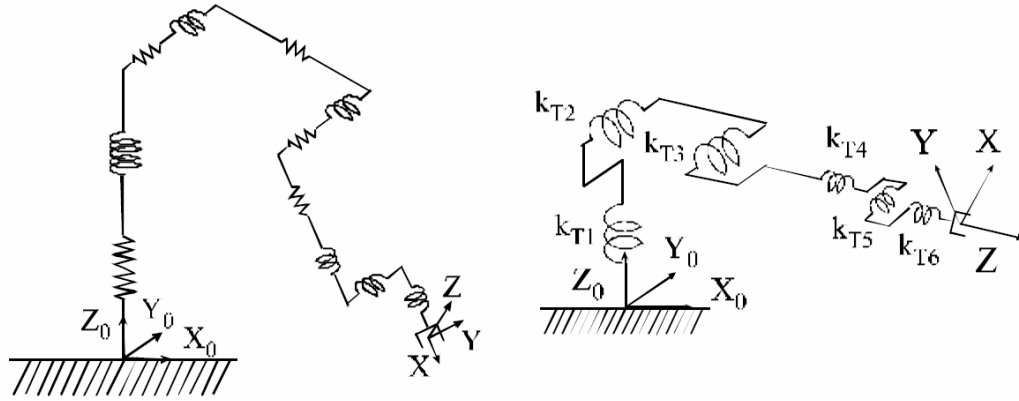


Figura. 3.9 – Modelo de rigidez do robô PUMA. (a) modelo com molas lineares e de torção; (b) modelo apenas com molas de torção (Ceccarelli, 2004).

Desta forma, o modelo proposto na Eq. (3.28) pode ser calculado com:

$$K = C_F K_p C_K$$

$$C_F = J_s^{-t} \quad e \quad C_K = J_s^{-1} \quad (3.29)$$

onde J_s é a matriz Jacobiana da estrutura robótica serial e K_p é calculada como sendo uma matriz diagonal que contém os parâmetros concentrados dos atuadores do robô, similar a matriz χ proposta por Tsai (1999).

No método “Component Matrix Formulation” (Ceccarelli, 2004) pode requerer o cálculo de matrizes enormes se o número de componentes da estrutura é muito grande. O cálculo da matriz inversa de K pode resultar em problemas numéricos e aumentar consideravelmente o tempo de resolução computacional. Entretanto, em alguns casos é possível limitar o tamanho da matriz em 6×6 considerando sub-montagens do sistema multicorpo ao invés de componentes simples isolados. Neste caso, esta metodologia pode ser conveniente para o cálculo da matriz de rigidez também para estruturas complicadas como proposto por (Ceccarelli, 1998; Ceccarelli e Carbone, 2002; Carbone et al., 2003b). Deve-se tomar cuidado para realizar o agrupamento dos elementos com uma escolha apropriada com o objetivo da matriz obtida, se possível, ser quadrada e inversível (Carbone, 2003). O

agrupamento destes elementos é realizado utilizando-se do princípio da superposição. Como os segmentos são modelados como molas, estes podem ser combinados em ligações em série ou em paralelo.

3.3. Análise de Rigidez Utilizando-se a técnica de Elementos Finitos.

A segunda forma de análise de rigidez utiliza a técnica de elementos finitos (*Finite Element Analysis – FEA*).

O método *FEA* é uma técnica de análise numérica destinada à obtenção de soluções aproximadas de problemas regidos por equações diferenciais. Embora o método tenha sido originalmente desenvolvido para análise estática de sistemas estruturais, ele tem sido utilizado no estudo de uma grande variedade de problemas de engenharia, nos domínios da mecânica dos sólidos, mecânica dos fluidos, transmissão de calor e eletromagnetismo (Rade, 2001). Este método é adequado para implementação em computadores digitais estando disponível em vários pacotes computacionais como ANSYS®, NASTRAN® e ABAQUS®.

A principal motivação para o uso do *FEA* reside no fato que, devido à complexidade dos problemas de engenharia, soluções analíticas em forma fechada tornam-se inviáveis ou mesmo impossíveis de serem obtidas. Assim, deve-se recorrer a soluções numéricas aproximadas.

Em todo problema formulado em domínios contínuos, as incógnitas do problema, denominadas variáveis de campo (que podem ser grandezas escalares, como temperaturas, ou vetoriais, como deslocamentos), podem assumir valores independentes em cada ponto do domínio. Conseqüentemente, o problema tem número infinito de incógnitas, sendo caracterizado como um problema infinito-dimensional. Este tipo de problema é geralmente modelado por equações diferenciais parciais, cuja solução analítica é dada por funções que fornecem os valores das variáveis de campo em função das coordenadas tridimensionais para todos os pontos do domínio.

O *FEA* é essencialmente um processo de discretização que visa transformar um problema infinito-dimensional em um problema finito-dimensional, com número finito de incógnitas. O método consiste em dividir o domínio sobre o qual o problema é estudado em várias regiões interconectadas, denominadas elementos. Cada elemento dispõe de certo número de pontos (interiores e/ou limítrofes), denominados nós ou pontos nodais. O conjunto de elementos utilizados na discretização é denominado malha. Uma vez definidos os

elementos e seus respectivos nós, no interior de cada elemento são admitidas soluções aproximadas para as variáveis de campo, expressas como funções arbitrárias dos valores que as incógnitas assumem nos nós (valores nodais). Estas funções são denominadas funções de interpolação ou funções de forma. São também impostas condições garantindo a continuidade da solução nos nós compartilhados por vários elementos. As incógnitas do problema, denominadas graus de liberdade (gdl), passam a ser os valores das variáveis de campo nos pontos nodais, sendo o número destas incógnitas (agora finito) denominado número de graus de liberdade do modelo. Dependendo da natureza do problema, após a discretização, o modelo matemático regente resulta representado por um número finito de equações diferenciais ordinárias ou de equações algébricas, cuja resolução numérica conduz aos valores das incógnitas nodais. Uma vez determinadas estas incógnitas, os valores das variáveis de campo no interior dos elementos podem ser avaliados empregando as funções de interpolação (Rade, 2001).

As principais vantagens do *FEA* são: elementos de diferentes formas e tamanhos podem ser associados para discretizar domínios de geometria complicada; a divisão do contínuo em regiões facilita a modelagem de problemas envolvendo domínios não homogêneos, onde as propriedades físicas variam e o método pode ser todo formulado matricialmente, facilitando sua implementação computacional. As principais desvantagens do método são as incertezas inerentes à modelagem *FEA* devido a simplificações do modelo físico como: não consideração de certos tipos de efeitos físicos, como não linearidades, histerese, amortecimento, etc; erros de discretização; valores imprecisos de parâmetros físicos e/ou geométricos (módulo de elasticidade, densidade, etc.); dificuldade em modelar efeitos localizados como junções parafusadas e rebitadas e também erros oriundo do processo de resolução numérica (Rade, 2001).

Esta modelagem é bem adaptada para mecanismos tridimensionais, permitindo descrever fielmente a geometria da estrutura. Bouzgarrou et al. (2004) realizou o estudo de rigidez do robô paralelo 3TR1 apresentado por Gogu (2002) utilizando elementos finitos acoplado a um modelo CAD. Clinton et al. em 1997 estudou a rigidez da plataforma de Gough-Stewart. Nesta estrutura todos os elementos estão sujeitos apenas às solicitações mecânicas do tipo tração e compressão. Cada elemento é estudado individualmente e em seguida montados a fim de realizar o estudo do conjunto da estrutura.

Em Dong et al. (2005) um estudo utilizando *FEA* é realizado a fim de determinar o modelo de rigidez de uma estrutura paralela que possui articulações flexíveis.

Zhou et al. (2006) utiliza um modelo *FEA* para modelagem do manipulador paralelo 3-PRS. Todos os segmentos são modelados por elementos finitos, do tipo elemento triangular com elementos de placas, para modelagem da plataforma móvel e elemento de viga espacial para as pernas. A flexibilidade das articulações são consideradas pela introdução de molas virtuais ao modelo *FEA*. Como os parâmetros das articulações não são conhecidos o modelo numérico *FEA* é ajustado através de testes experimentais em função das funções respostas em frequência.

Deblaise (2006a) utiliza da modelagem *FEA* para comparar os resultados obtidos utilizando-se de análise matricial de estruturas. Este estudo foi aplicado na modelagem de um robô paralelo Delta, Fig. 3.10(a). Neste trabalho, um primeiro modelo, considerando apenas a flexibilidade dos segmentos, Fig. 3.10(b), não forneceu resultados compatíveis com os resultados dos testes experimentais.

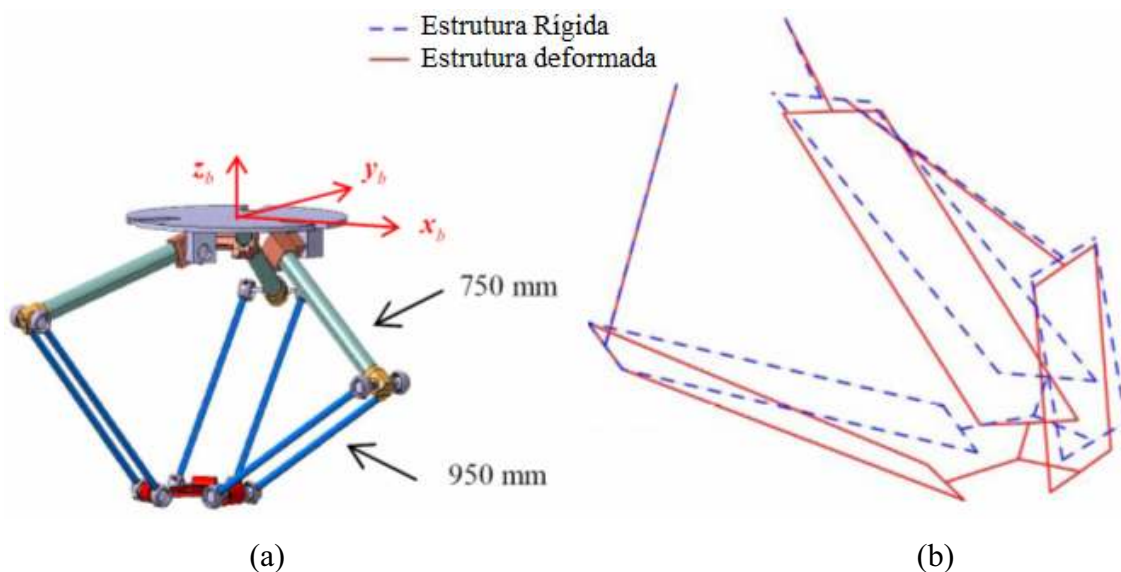


Figura 3.10 – (a) Robô paralelo Delta; (b) Modelo *FEA* (Deblaise, 2006a).

Corradine et al., (2004) utilizaram o *FEA* para modelar o robô H4, Figs. 3.11 e 3.12. Neste trabalho, além da modelagem dos segmentos, as articulações presentes, esféricas e rotativas, foram modeladas introduzindo “*displacement relaxion*” no modelo *FEA*, o que permite, no caso das articulações esféricas, que todos os deslocamentos flexíveis de translação entre os seus segmentos sejam os mesmos, mas não as rotações. No caso da articulação rotativa todos os movimentos, com exceção do eixo de rotação, devem ser iguais. A Figura

3.12 apresenta o resultado da modelagem *FEA* obtida. Quando comparados os resultados do modelo *FEA* com os resultados experimentais, estes são próximos.

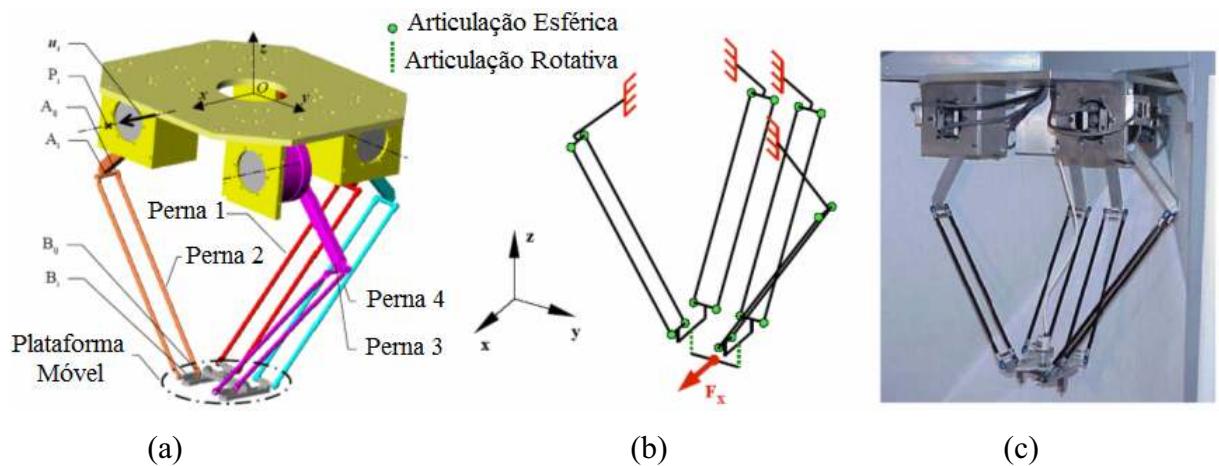


Figura 3.11 – (a) Modelo CAD do robô H4; (b) esquema cinemático do robô H4; (c) protótipo do robô H4 (Corradine et al., 2004).

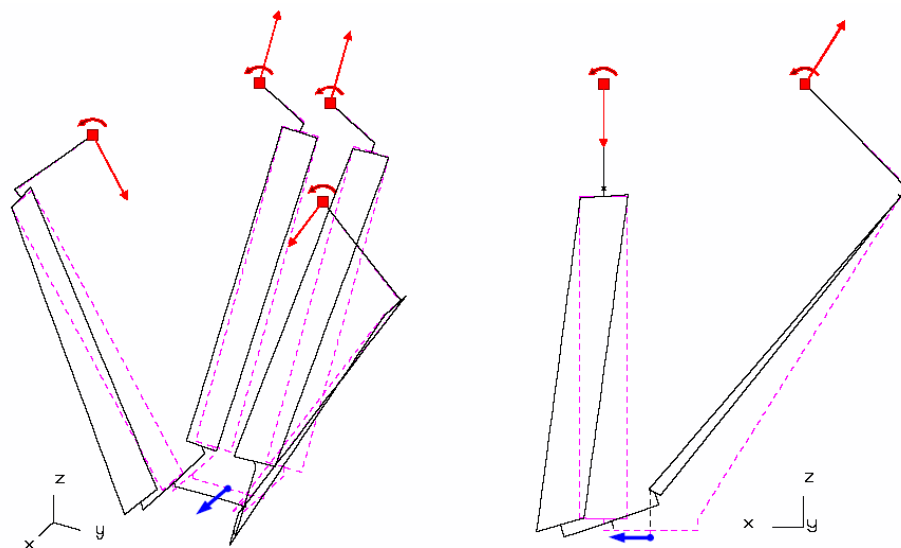


Figura 3.12 – Modelo *FEA* do robô H4 (Corradine et al., 2004).

Assim, o método *FEA* é utilizado principalmente para validar modelos analíticos (El-Khasawneh e Ferreira, 1999 e Li *et al.*, 2002) ou/e resultados experimentais (Corradini *et al.*, 2004 e Bouzgarrou *et al.*, 2004).

O método *FEA* quando envolve algum programa comercial de análise requer grande esforço computacional, pois, como a rigidez depende da posição, é necessário, para cada posição específica, realizar a construção de um modelo de elementos finitos (Huang *et al.*, 2002).

3.4. Análise de Rigidez Utilizando-se Análise Matricial de Estruturas.

A terceira forma de análise de rigidez envolve a técnica de análise matricial de estruturas (*Matrix Structural Analysis – MSA*) (Huang *et al.*, 2002; Li *et al.*, 2002; Martin, 1966; Imbert, 1979; Clinton *et al.*, 1997 e Dong *et al.*, 2005).

Os métodos de análise matricial estrutural, universalmente aceitos no projeto de estruturas, foram desenvolvidos para serem utilizados com computadores fornecendo uma análise rápida e precisa de estruturas complexas sob condições estáticas e/ou dinâmicas (Przemieniecki, 1985).

Os métodos matriciais são baseados no conceito de substituir uma estrutura contínua por um modelo equivalente formado por elementos discretos que possuem suas propriedades elásticas e inerciais conhecidas e expressáveis em formato de matriz (Przemieniecki, 1985). As matrizes representando estas propriedades são consideradas como blocos de construção do modelo que, quando montados em conjunto, de acordo com regras derivadas da teoria da elasticidade, acarretam na obtenção das propriedades estática e dinâmica da estrutura. Nesta forma de análise, os elementos são modelados como segmentos e nós.

A modelagem *MSA*, considerando os segmentos como fonte de flexibilidade, pode ser dividida em duas partes. A primeira parte considera a flexibilidade dos segmentos como sendo modelados como elementos de molas lineares. Este tipo de suposição é válido, geralmente, para estruturas robóticas que possuem apenas os esforços aplicados na direção axial dos segmentos da estrutura, isto é, apenas quando os segmentos da estrutura estão submetidos apenas a esforços de tração e/ou compressão. A segunda parte considera o segmento modelado como sendo uma viga de Euler-Bernoulli.

Deve-se destacar que uma distinção formal entre a técnica de elementos finitos e a técnica da análise matricial de estruturas é que nesta última a estrutura é dividida em grandes partes, cada parte caracterizada por um conjunto de deslocamentos nodais associados a relações forças-deslocamentos. Em contraste, se a estrutura é considerada contínua, o campo de deslocamentos associado com a estrutura é caracterizado por um conjunto de equações

diferenciais de equilíbrio e esforços aplicados. As técnicas de elementos finitos baseiam-se em métodos numéricos com a utilização de aproximações polinomiais do campo de deslocamentos e aplicação de métodos variacionais (Haug et al., 1986).

Maiores detalhes sobre o método *MSA* e seu equacionamento serão apresentados no Capítulo IV.

Clinton *et al.* (1997) usou esta metodologia para obter a matriz de rigidez de cada elemento da plataforma de Stewart e depois realizar a montagem do sistema como um todo.

Deblaise, (2006a) aplicou esta metodologia para estrutura Delta, Fig. 3.10. Em um primeiro modelo, somente a flexibilidade dos segmentos foram considerados. Em um segundo modelo a flexibilidade das articulações foi incluída utilizando-se do trabalho de Yoon (2004). A articulação de rotação foi modelada a partir da definição de uma matriz de flexibilidade para articulação formada por rolamentos.

Em Koseki et al. (2000) foi realizada a modelagem de um micro mecanismo paralelo de 3 gdl utilizando-se de *MSA*. Os segmentos são modelados como vigas e as articulações tradicionais foram substituídas por uma articulação “entalhada” (*notched hinge* ou *Flexural hinge*) (Kapur, et al., 2007). Este tipo de articulação permite à flexão ao longo de um eixo, mas rígida em relação aos outros eixos. As vantagens desta articulação são: ausência de folgas, de atrito não linear e estruturas mais simples de serem fabricadas. Possui como desvantagens a insuficiente mobilidade em torno de um eixo e/ou insuficiente rigidez ao longo dos outros eixos (Koseki et al., 2000). A Figura 3.13 mostra o micro manipulador paralelo de 3 gdl e a Fig. 3.14 alguns exemplos das “*notched hinge*”.

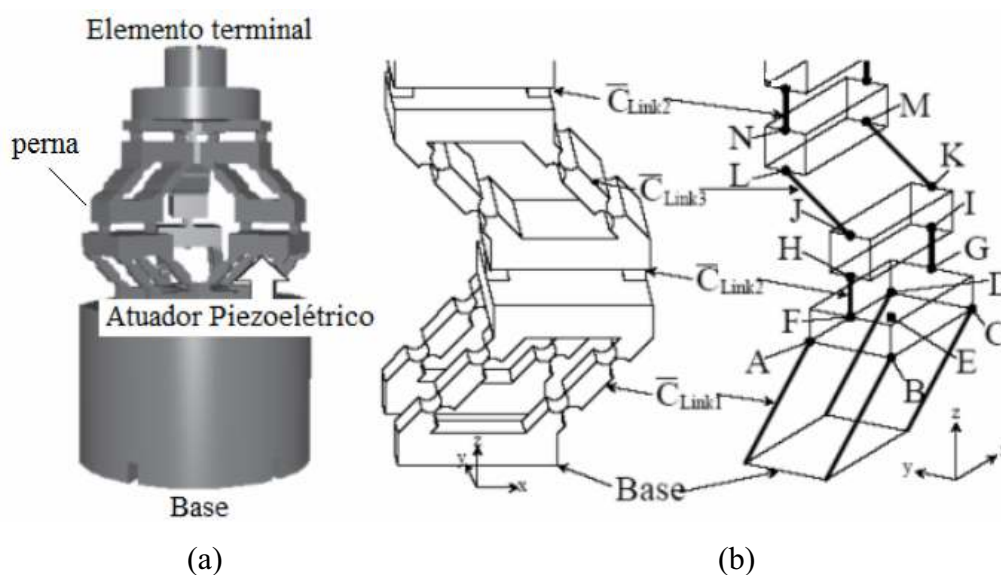


Figura 3.13 – (a) Modelo micro manipulador paralelo de 3 gdl; (b) representação de uma perna (Koseki et al., 2000).

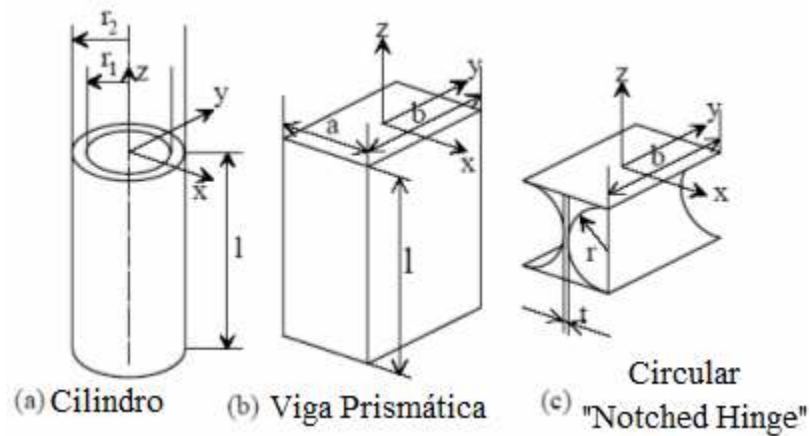


Figura 3.14 – Modelos de articulações “notched hinge” (Koseki et al., 2000).

Yi et al. (2003) desenvolveram um outro micro manipulador baseado na estrutura paralela plana de 3 gdl tipo 3-RRR. Nesta estrutura também é utilizado o método *MSA* considerando as articulações como “notched hinge”, Fig. 3.15. Eles demonstraram que a troca das articulações comuns pelas “notched hinge”, devido à imprecisão na modelagem, prejudica a acuracidade do sistema.

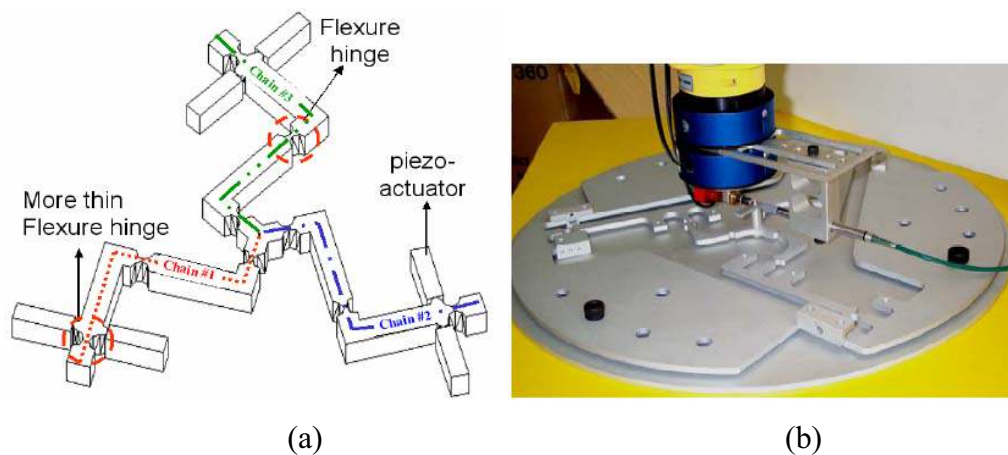


Figura 3.15 – (a) Esquema do Micro-manipulador paralelo 3-RRR; (b) Protótipo (Yi et al., 2003).

3.5. Avaliação dos Métodos Experimentais de Análise de Rigidez

A verificação dos modelos analíticos e numéricos consiste basicamente em medir os deslocamentos flexíveis em diferentes direções provocadas pela aplicação de forças em condições estáticas (Carbone e Ceccarelli, 2004). A grande desvantagem deste método é a necessidade de tediosas medições que podem ser afetadas por erros experimentais. Neste caso é necessário um planejamento estatístico para determinar o número de medições dos deslocamentos flexíveis em uma determinada posição em função de uma carga estática aplicada. Acosta et al. (2000) propôs a realização de testes dinâmicos para determinação de funções de transferência em função dos deslocamentos em uma determinada direção provocados por uma excitação (perturbação) em uma determinada faixa de frequências (excedendo a frequência natural do sistema). Nos testes experimentais as funções de coerência não foram representativas na região de ressonância.

Ottaviano et al. (2002) desenvolveram o sistema Milli-CATRASYs (*Milli Cassino Tracking System*). Esta estrutura é composta por seis sensores do tipo LVDT (Transformador Diferencial Variável Linear) localizados em uma base fixa que permitem a aplicação de uma determinada carga. Os sensores são ligados a uma plataforma móvel através de cabos permitindo a medição da orientação e posição da estrutura dos deslocamentos flexíveis a serem medidos, Fig. 3.16.

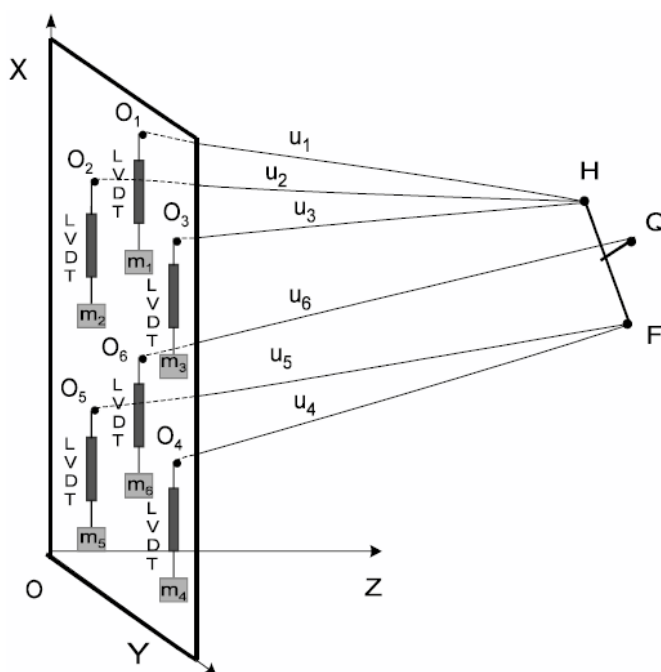


Figura 3.16 – Esquema Cinemático do Milli-CATRASYs.

Deblaise (2006a) utilizou um sistema “prato-esfera” composto por três esferas de referência colocadas de tal forma sob um prato para formar um sistema isostático em que seis relógios comparadores de resolução de $1\ \mu\text{m}$ permitem realizar a medição dos deslocamentos flexíveis de translação e rotação. A resolução do sistema é de $5\ \mu\text{m}$, Fig. 3.17.



Figura 3.17 – Modelo experimental para medição dos deslocamentos flexíveis da estrutura Delta (Deblaise, 2006a).

3.6. Diagrama para o Cálculo dos Deslocamentos Flexíveis.

A matriz de rigidez, K , depende da configuração assumida pela estrutura. Assim, uma matriz de rigidez diferente é calculada para cada configuração do sistema robótico. Desta forma, a análise de rigidez do sistema deve ser realizada em várias configurações. Se possível a matriz de rigidez deve ser calculada em todo o espaço de trabalho ou no mínimo em um número significativo de configurações. Logo, o modelo de cálculo da matriz de rigidez deve ser feito de tal forma que permita a conexão com o modelo cinemático da estrutura robótica analisada, permitindo realizar o mapeamento de sua rigidez. É importante também relacionar as presenças de singularidades com a rigidez do sistema.

Diferentes metodologias e notações podem ser utilizadas para obter o modelo cinemático da estrutura. A escolha de como resolver o modelo cinemático está basicamente relacionada com o sistema robótico estudado.

A Figura 3.18 resume o procedimento para o cálculo dos deslocamentos flexíveis.

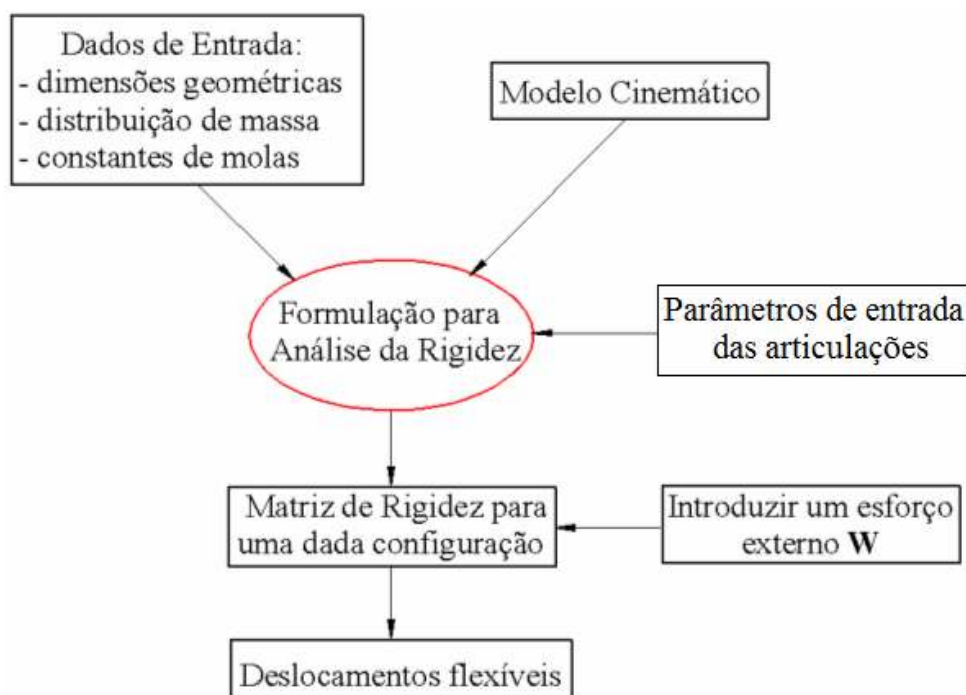


Figura 3.18 – Diagrama para o cálculo de deslocamentos flexíveis.

Assim, qualquer formulação para análise de rigidez precisa como parâmetros de entrada o modelo cinemático que é calculado em função dos ângulos de entrada das articulações. Através da formulação da análise de rigidez é possível obter a matriz de rigidez da estrutura como um todo que, associada aos esforços externos aplicados, permite realizar o cálculo dos deslocamentos devido à flexibilidade tanto ao longo da estrutura como no elemento terminal (plataforma móvel).

3.7. Conclusões

Neste Capítulo foi apresentada uma revisão sobre os métodos de cálculo da matriz de rigidez de estruturas robóticas tanto para arquiteturas seriais como para paralelas.

Apesar dos trabalhos já realizados, ainda não se dispõe de resultados conclusivos sobre a melhor metodologia e sobre o comportamento da rigidez das estruturas robóticas. Os estudos têm sido baseados praticamente nas mesmas estruturas como forma de comparação e validação dos resultados.

Basicamente os métodos de análise de rigidez são formulados para uma determinada estrutura, muitas vezes não podendo ser estendido a outras estruturas.

Dependendo do tipo de estrutura, as flexibilidades das articulações ou segmentos são desprezadas com o objetivo de simplificação dos cálculos computacionais.

Os métodos de cálculo derivados da matriz Jacobiana, considerando os segmentos modelados como molas, são simplificados e fornecem uma estimativa inicial da matriz de rigidez.

O uso da metodologia *FEA* fornece modelos confiáveis, mas estes modelos precisam ser refeitos (*remeshed*) para cada configuração da estrutura robótica. Entretanto, estes modelos são bem adaptados para validar modelos analíticos ou resultados experimentais.

Os métodos *MSA* são de simples modelagem e de fácil implementação computacional.

Dentre as metodologias presentes na literatura, a análise de rigidez *MSA* é a que apresenta uma maior padronização no procedimento de obtenção da matriz de rigidez do sistema. Na maioria das aplicações, utilizando-se do modelo *MSA*, a flexibilidade das articulações são desprezadas para simplificar o modelo.

No Capítulo IV a metodologia *MSA* é apresentada como proposta para elaboração de uma metodologia que possa ser considerada para a mais ampla gama de estruturas robóticas, tanto de arquitetura serial como de arquitetura paralela. Esta metodologia deve permitir a completa integralização entre todas as fontes de flexibilidade das estruturas robóticas como segmentos das mais variadas formas, articulações ativas e passivas assim como a consideração de folgas.

CAPÍTULO IV

ANÁLISE DE RIGIDEZ DE ESTRUTURAS ROBÓTICAS UTILIZANDO-SE ANÁLISE MATRICIAL DE ESTRUTURAS – *MSA*

Um dos objetivos desta tese é o estudo da modelagem de rigidez de sistemas multicorpos utilizando-se da análise matricial de estruturas (*Matrix Structural Analysis – MSA*). Assim, neste Capítulo, primeiramente é apresentada a técnica de análise matricial de estruturas e, posteriormente é apresentada a modelagem das matrizes de rigidez dos principais componentes das estruturas robóticas. Desta forma, ao final do Capítulo será possível modelar um sistema multicorpo considerando as fontes de flexibilidade devido aos segmentos, articulações e atuadores.

4.1. Introdução

Os métodos matriciais de análise de estrutura consistem em substituir uma estrutura contínua por um modelo equivalente formado por elementos estruturais discretos, com propriedades elásticas e inerciais que podem ser expressas na forma matricial. A estrutura discreta é composta por segmentos unidos por nós. Os segmentos são barras cujo comprimento é muito maior que as dimensões de sua seção transversal. Os nós são os pontos de união dos segmentos, os pontos de apoio e as extremidades livres dos segmentos. Quando a estrutura é submetida a cargas, cada nó sofre deslocamentos de translação e/ou rotação, que dependem da configuração da estrutura e das condições impostas à estrutura. Por exemplo, num engastamento não existem deslocamentos.

Para diferenciar os deslocamentos devido ao movimento de corpo rígido e os deslocamentos devido a aplicações de esforços que causam deformações, os deslocamentos devido às deformações são denominados deslocamentos flexíveis (ou deslocamentos “*compliantes*”).

Os deslocamentos dos nós (deslocamentos nodais) podem ser obtidos a partir da análise completa da estrutura. Os deslocamentos nodais são os parâmetros cinemáticos indeterminados e representam o número de graus de liberdade (gdl) da estrutura ou também conhecido como “grau de indeterminação cinemática” (Przemieniecki, 1985).

4.2. Análise Matricial de Estruturas (*Matrix Structural Analysis – MSA*)

Métodos de Análise Estrutural

Os métodos de análise estrutural podem ser divididos em dois grupos: os métodos analíticos e os métodos numéricos. As limitações devidas aos métodos analíticos são bem conhecidas. Somente em casos especiais soluções explícitas são obtidas. Soluções aproximadas podem ser encontradas para algumas configurações estruturais simples mas, em geral, para estruturas complexas os métodos analíticos não podem ser usados. Então, os métodos numéricos devem ser utilizados.

Os métodos numéricos de análise de estrutura podem ser subdivididos em dois tipos: soluções numéricas de equações diferenciais para deslocamentos ou tensões, e métodos matriciais baseados na idealização da estrutura discretizada em elementos estruturais.

No primeiro tipo, as equações de elasticidade são resolvidas para uma configuração estrutural particular, tanto por técnicas de diferenças finitas quanto pela integração numérica direta. Nesta abordagem a análise é baseada na aproximação matemática de equações diferenciais. Limitações de ordem prática, porém, restringem sua aplicação às estruturas simples ou particulares.

No segundo tipo, toda a teoria é desenvolvida com base na álgebra matricial. A estrutura é inicialmente idealizada como uma montagem de elementos estruturais discretos, com formas presumidas da distribuição de deslocamentos e tensões. A solução completa é então obtida pela combinação dessa distribuição individual aproximada de deslocamentos e tensões, de maneira que se satisfaça o equilíbrio de forças e a compatibilidade de deslocamentos nas uniões desses elementos. Métodos baseados nesta abordagem são mais adequados para análise de estruturas complexas e são ideais para implementação computacional (Deblaise, 2006b).

Os métodos matriciais podem ser divididos em: o método dos deslocamentos (*stiffness method*), onde os deslocamentos são considerados desconhecidos, e o método da força (*flexibility method*), onde as forças são desconhecidas. Em ambos a análise pode ser feita por meio da combinação sistemática dos elementos estruturais individuais da estrutura, nas quais as condições de equilíbrio e compatibilidade são satisfeitas (Przemieniecki, 1985). Na Figura 4.1 é apresentado um esquema geral dos métodos de análise estrutural.

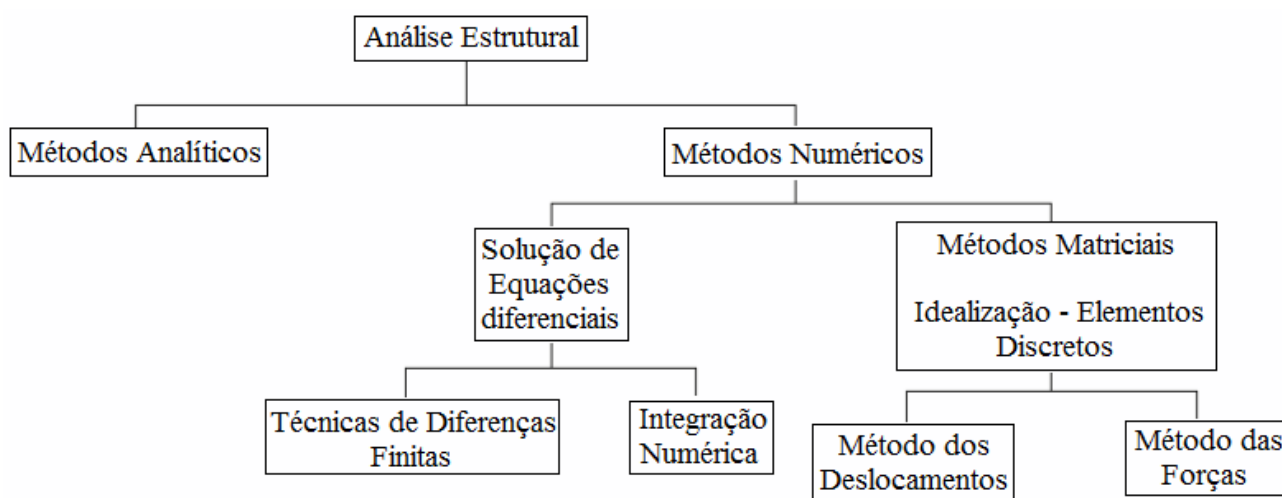


Figura 4.1 – Métodos de Análise Estrutural (a partir de Przemieniecki, 1985).

O *Matrix Structural Analysis*, ou métodos matriciais, consiste em obter as matrizes dos componentes, após a discretização da estrutura contínua e, posteriormente, “agrupar” estas matrizes, respeitando-se um conjunto de regras derivadas da teoria da elasticidade, permitindo obter as propriedades estáticas e dinâmicas da estrutura.

Para a modelagem, inicialmente é escrita a matriz de rigidez de cada elemento em relação a um referencial local; posteriormente, a matriz de rigidez de todos os elementos é escrita em relação a um mesmo referencial inercial e, finalmente, agrupadas para obter a matriz de rigidez da estrutura como um todo.

A seguir serão apresentadas a matriz de rigidez de um segmento, a formulação para modelagem das articulações passivas e ativas, e o procedimento para obtenção da matriz de rigidez da estrutura.

4.3. Matriz de Rigidez de um Segmento

Como o procedimento *MSA* fornece um modelo discretizado do sistema real é necessário definir os elementos em que a estrutura pode ser representada. A aplicação do método *MSA* nos sistemas multicorpos é intuitiva em função das próprias divisões existentes. Estes elementos são constituídos basicamente por segmentos e articulações que podem ser ativas ou passivas.

Em geral, na resistência dos materiais os segmentos são denominados vigas e/ou barras. Para uniformizar a notação, será utilizado o nome de segmento para definir uma viga ou barra, de comprimento e seção transversal definidos.

A análise do comportamento de um segmento pode ser realizada a partir do diagrama de corpo livre.

Considerando uma barra j no espaço, de seção transversal uniforme de área A_j , onde, nas extremidades estão os nós consecutivos i e $i+1$. No centróide da seção transversal do nó i é fixado o referencial do segmento $O_j x_j y_j z_j$, cujo eixo x_j está na direção longitudinal do segmento e os eixos y_j e z_j definidos pelo produto vetorial positivo, Fig. 4.2. O segmento possui comprimento L_j , módulo de elasticidade E_j , momentos de inércia $I_{y_j} = I_{z_j}$, momento de inércia à torção (ou momento de inércia polar) J_{tj} e módulo de elasticidade ao cisalhamento G_j .

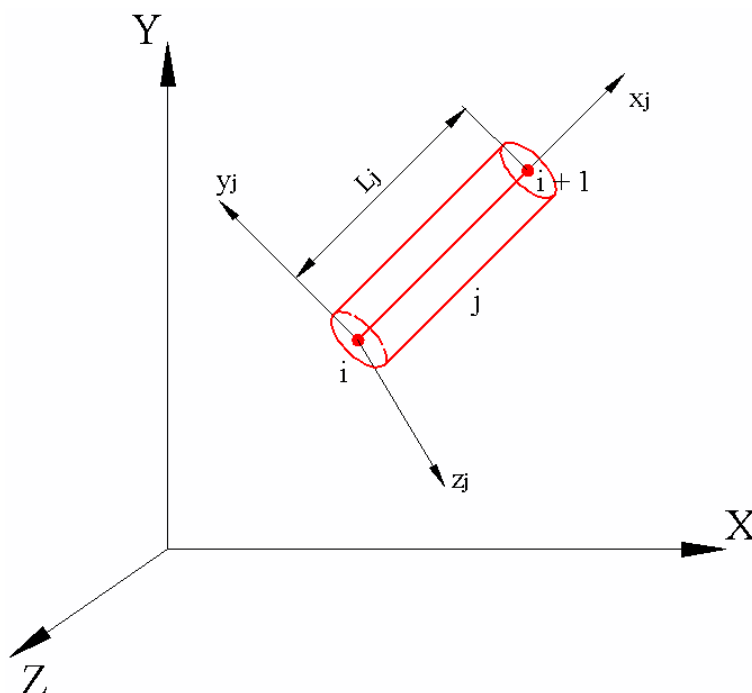


Figura 4.2 – Elemento de viga genérico no espaço.

No caso mais geral, a barra está sujeita a forças axiais e cortantes, momentos fletores e torsores que provocam os deslocamentos flexíveis correspondentes, Fig. 4.3.

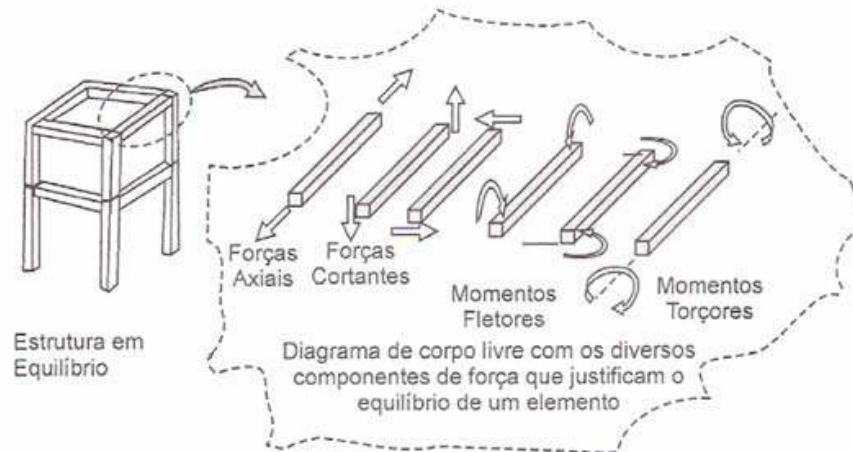


Figura 4.3 – Esforços aplicados em uma viga espacial (Alves Filho, 2006).

Para a análise da relação esforços-deslocamentos flexíveis é considerado no nó i , um referencial $O_i x_i y_i z_i$ coincidente com o referencial da barra $O_j x_j y_j z_j$ e, no nó $i+1$, um referencial $O_{i+1} x_{i+1} y_{i+1} z_{i+1}$ equipolente ao referencial da barra. Assim, na Fig. 4.4(a) estão representados os possíveis esforços atuantes nos nós i e $i+1$ e, na Fig. 4.4(b), os deslocamentos flexíveis correspondentes.

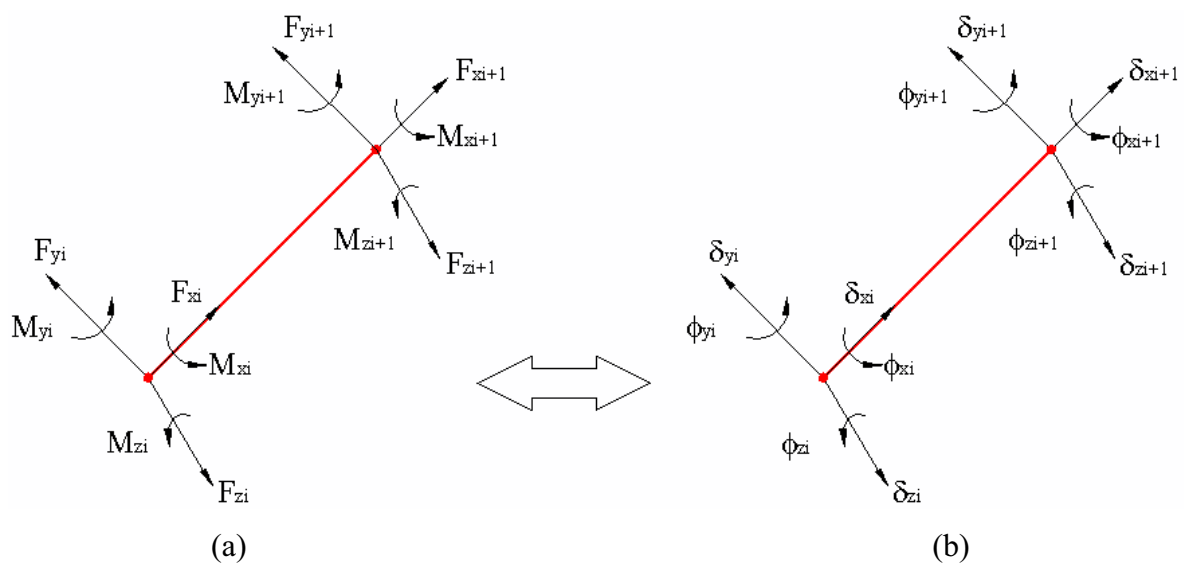


Figura 4.4 – (a) Representação dos esforços atuantes na barra; (b) deslocamentos devido às deformações da barra.

Na Figura 4.4, F_x, F_y, F_z, M_x, M_y e M_z são as forças e momentos aplicadas nas direções dos eixos x, y e z respectivamente. $\delta_x, \delta_y, \delta_z$ são os deslocamentos flexíveis lineares nas direções dos x, y e z respectivamente e ϕ_x, ϕ_y, ϕ_z são os deslocamentos flexíveis angulares nas direções dos x, y e z respectivamente.

Em relação ao referencial de cada barra, $O_j x_j y_j z_j$, a relação entre forças e deslocamentos flexíveis, considerando uma barra tri-dimensional esbelta e de seção transversal uniforme, engastada-livre, é dado por (Shabana, 1989):

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{A_j E_j}{L_j} \delta_x; & F_y &= \frac{12E_j I_{zj}}{L_j^3} \delta_y + \frac{6E_j I_{zj}}{L_j^2} \phi_z; & F_z &= \frac{12E_j I_{yj}}{L_j^3} \delta_z - \frac{6E_j I_{yj}}{L_j^2} \phi_y \\ M_x &= \frac{G_j J_{tj}}{L_j} \phi_x; & M_y &= -\frac{6E_j I_{yj}}{L_j^2} \delta_z + \frac{4E_j I_{yj}}{L_j} \phi_y; & M_z &= \frac{6E_j I_{zj}}{L_j^2} \delta_y + \frac{4E_j I_{zj}}{L_j} \phi_z \end{aligned} \quad (4.1)$$

Escrevendo a Eq. (4.1) em formato matricial tem-se:

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{A_j E_j}{L_j} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12E_j I_{zj}}{L_j^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6E_j I_{zj}}{L_j^2} \\ 0 & 0 & \frac{12E_j I_{yj}}{L_j^3} & 0 & -\frac{6E_j I_{yj}}{L_j^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{G_j J_{tj}}{L_j} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6E_j I_{yj}}{L_j^2} & 0 & \frac{4E_j I_{yj}}{L_j} & 0 \\ 0 & \frac{6E_j I_{zj}}{L_j^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4E_j I_{zj}}{L_j} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ \delta_z \\ \phi_x \\ \phi_y \\ \phi_z \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

A matriz quadrada 6 x 6 da Eq. (4.2) corresponde à matriz de rigidez do segmento, denominada k_{bj} , ou seja:

$$k_{bj} = \begin{bmatrix} \frac{A_j E_j}{L_j} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12E_j I_{zj}}{L_j^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6E_j I_{zj}}{L_j^2} \\ 0 & 0 & \frac{12E_j I_{yj}}{L_j^3} & 0 & -\frac{6E_j I_{yj}}{L_j^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{G_j J_{tj}}{L_j} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6E_j I_{yj}}{L_j^2} & 0 & \frac{4E_j I_{yj}}{L_j} & 0 \\ 0 & \frac{6E_j I_{zj}}{L_j^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4E_j I_{zj}}{L_j} \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

Se for considerado o efeito dos esforços cortantes tem-se (Alves Filho, 2006):

$$k_{bj} = \begin{bmatrix} \frac{A_j E_j}{L_j} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12E_j I_{zj}}{(1+\Phi_y)L_j^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6E_j I_{zj}}{(1+\Phi_y)L_j^2} \\ 0 & 0 & \frac{12E_j I_{yj}}{(1+\Phi_z)L_j^3} & 0 & -\frac{6E_j I_{yj}}{(1+\Phi_z)L_j^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{G_j J_{tj}}{L_j} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6E_j I_{yj}}{(1+\Phi_z)L_j^2} & 0 & \frac{(4+\Phi_z)E_j I_{yj}}{(1+\Phi_z)L_j} & 0 \\ 0 & \frac{6E_j I_{zj}}{(1+\Phi_y)L_j^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{(4+\Phi_y)E_j I_{zj}}{(1+\Phi_y)L_j} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

Onde Φ_y e Φ_z são fatores de correção que dependem da seção transversal da barra analisada (Alves Filho, 2006). Se o efeito dos esforços cortantes forem desprezados, isto é: $\Phi_y = \Phi_z = 0$ a Eq. (4.4) é particularizada para a Eq. (4.3).

Para um segmento j definido por dois nós, por procedimento análogo ao das Eqs. (4.1) à (4.3), a matriz de rigidez é uma matriz quadrada de tamanho 12×12 dada por:

$$k_j = \begin{bmatrix} k_{bj} & -k_{bj} \\ -k_{bj} & k_{bj} \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

Assim, da Fig. 4.4, pode-se escrever:

$$\begin{bmatrix} F_{xi} & F_{yi} & F_{zi} & M_{xi} & M_{yi} & M_{zi} & F_{xi+1} & F_{yi+1} & F_{zi+1} & M_{xi+1} & M_{yi+1} & M_{zi+1} \end{bmatrix}^T = \\ = [k_j]_{12 \times 12} \begin{bmatrix} \delta_{xi} & \delta_{yi} & \delta_{zi} & \phi_{xi} & \phi_{yi} & \phi_{zi} & \delta_{xi+1} & \delta_{yi+1} & \delta_{zi+1} & \phi_{xi+1} & \phi_{yi+1} & \phi_{zi+1} \end{bmatrix}^T \quad (4.6)$$

Em uma forma compacta, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} W_i \\ W_{i+1} \end{Bmatrix} = [k_j]_{12 \times 12} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_{i+1} \end{Bmatrix} \quad (4.7)$$

ou

$$\{W\} = [K] \{u\} \quad (4.8)$$

Onde W_i representa os esforços aplicados no nó i e W_{i+1} os esforços aplicados no nó $i+1$. u_i representa os deslocamentos flexíveis do nó i e u_{i+1} os deslocamentos flexíveis do nó $i+1$.

4.4. Modelagem da Articulação

Os modelos *MSA* foram desenvolvidos para aplicação em estruturas, como por exemplo, em pórticos e pontes. Estes tipos de estruturas possuem geralmente as extremidades dos elementos (pontos nodais) fixados por parafusos ou rebites de tal forma que todos os deslocamentos de uma extremidade de um segmento são transmitidos para o seguinte.

Acontece que os sistemas multicorpos, por exemplo, as estruturas robóticas, são constituídos por segmentos que são conectados por articulações que podem ser ativas ou passivas. Neste ponto é necessária a definição da matriz de rigidez da articulação e sua integração com o modelo *MSA*.

Uma articulação pode permitir um ou mais graus de liberdade, podendo ser: deslocamentos lineares nas direções ortogonais x, y, z e deslocamentos angulares em torno desses eixos ortogonais. Assim pode-se definir a matriz de rigidez da articulação k_{art} como

uma matriz diagonal onde k_{lx} , k_{ly} , k_{lz} são os parâmetros de rigidez linear nas direções dos eixos do referencial local e, k_{ax} , k_{ay} , k_{az} são os parâmetros de rigidez angular em torno dos eixos do referencial local, Eq. (4.9).

$$k_{art} = \begin{bmatrix} k_{lx} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{ly} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{lz} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{ax} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{ay} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{az} \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

A matriz de rigidez da articulação, Eq. (4.9), deve ser expandida para uma matriz de tamanho 12 x 12. Fazendo uma analogia com um segmento que possui dois nós, a articulação pode ser representada por um segmento cuja matriz de rigidez é k_{art} e tendo dois nós i e $i+1$. Desta forma, pode-se escrever, de forma semelhante à Eq. (4.5), que a matriz de rigidez k_j para o elemento articulação j é dada por:

$$k_j = \begin{bmatrix} k_{art} & -k_{art} \\ -k_{art} & k_{art} \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

Deve-se destacar que a inclusão de uma articulação no modelo *MSA*, considerado nesta tese, é feita em relação ao referencial de um elemento já existente. Isto é realizado pelo fato de que a articulação inserida no modelo *MSA* não possui um comprimento mas, nos sistemas robóticos, as articulações possuem um posicionamento e uma orientação em relação ao referencial inercial. Por exemplo, uma articulação rotativa é modelada inserindo a Eq. (4.9) no modelo considerando-se k_{ax} ou k_{ay} ou $k_{az} \approx 0$, dependendo de qual eixo local do elemento articulação coincidir com o seu eixo de rotação. De forma análoga no caso das estruturas robóticas paralelas a presença de uma articulação prismática passiva é representada pelo fato de k_{lx} ou k_{ly} ou k_{lz} ser igual à zero. Da mesma forma uma articulação esférica é caracterizada por $k_{ax} = k_{ay} = k_{az} \approx 0$.

A definição da matriz de rigidez da articulação conforme Eq. (4.9) é uma contribuição desta tese. Ela permite a fácil visualização do tipo de articulação que está sendo utilizada e sua influência no sistema como um todo pode ser verificada pelos exemplos que serão apresentados no Capítulo V.

Para aplicação do modelo *MSA*, considerando a flexibilidade dos segmentos e articulações, é necessário determinar os parâmetros de rigidez das articulações k_{lx} , k_{ly} , k_{lz} , k_{ax} , k_{ay} , k_{az} . Estes parâmetros podem ser fornecidos pelos fabricantes ou obtidos por testes experimentais.

Se a articulação for ativa, por exemplo, atuada por um motor, a matriz de rigidez desta pode ser calculada utilizando-se uma expressão empírica como proposto por Rivin (1999). Assim, $k_{ax} = k_{\text{motor}}$:

$$1/k_{\text{motor}} = \omega_0 \nu \tau_e \quad (4.11)$$

Com:

$$\tau_e = L_r / R_r, \nu = \left[\left(\frac{e}{\Omega} - I_0 \right) K_M \right] / \omega_0 \quad (4.12)$$

onde ω_0 é velocidade angular do motor sem carga, R_r , L_r , e , Ω e K_M são a resistência térmica, indutância, voltagem, resistência e o torque constante do motor, respectivamente. Cabe salientar que a Eq. (4.12) é aplicada para o motor “bloqueado”.

Em Rivin (1999) podem ser encontradas fórmulas empíricas também para o cálculo, por exemplo, da flexibilidade de sistemas de acionamento pneumático e hidráulico.

Para a aplicação do método é necessário escrever a matriz de rigidez de todos os elementos em relação a um mesmo referencial inercial. Esta transformação, elemento por elemento, deve ser realizada antes da montagem da matriz de rigidez da estrutura como um todo e que será detalhado a seguir.

Ainda cabe salientar que na literatura estão presentes poucos trabalhos utilizando-se *MSA* que incluem a modelagem da articulação no modelo. Deblaise (2006a) aplicou esta metodologia para a estrutura Delta. Em um primeiro modelo, somente a flexibilidade dos segmentos foram considerados. Em um segundo modelo, a flexibilidade das articulações foi

incluída utilizando-se do trabalho de Yoon (2004), onde a articulação rotativa foi modelada a partir da definição de uma matriz de flexibilidade para articulação formada por rolamentos. Kim et al. (2005) define uma matriz de flexibilidade para a articulação em que uma articulação esférica pode ser modelada como a intersecção de 3 articulações rotativas não coplanares.

4.5. Matriz de Transformação de Coordenadas

A matriz de rigidez da barra apresentada na Eq. (4.4), orientada de qualquer forma no espaço, deve ser expressa em relação a um referencial inercial XYZ , Fig. 4.2. Para isto, é necessário obter uma matriz de transformação de coordenadas para permitir escrever os deslocamentos flexíveis de todos os segmentos em relação a este referencial inercial (Azar, 1972).

Considerando o referencial local de uma barra dado por $O_{x_2y_2z_2}$, sendo o eixo x_2 coincidente com a direção longitudinal da barra conforme definido anteriormente. É possível relacionar o referencial $O_{x_2y_2z_2}$ com o referencial inercial $OXYZ$ por meio de duas rotações sucessivas conforme esquematizado na Fig. 4.5. Partindo da configuração onde o eixo longitudinal do segmento coincide com o eixo X , por meio de uma rotação de um ângulo $-\alpha$ em torno do eixo Y obtém-se o referencial $O_{x_1y_1z_1}$, Fig. 4.5(c). A relação de transformação entre os referenciais é dada por:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & 0 & \sin(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

A segunda rotação é feita de um ângulo β em torno do eixo z_1 , Fig. 4.5(b). A relação de transformação é:

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & \sin(\beta) & 0 \\ -\sin(\beta) & \cos(\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

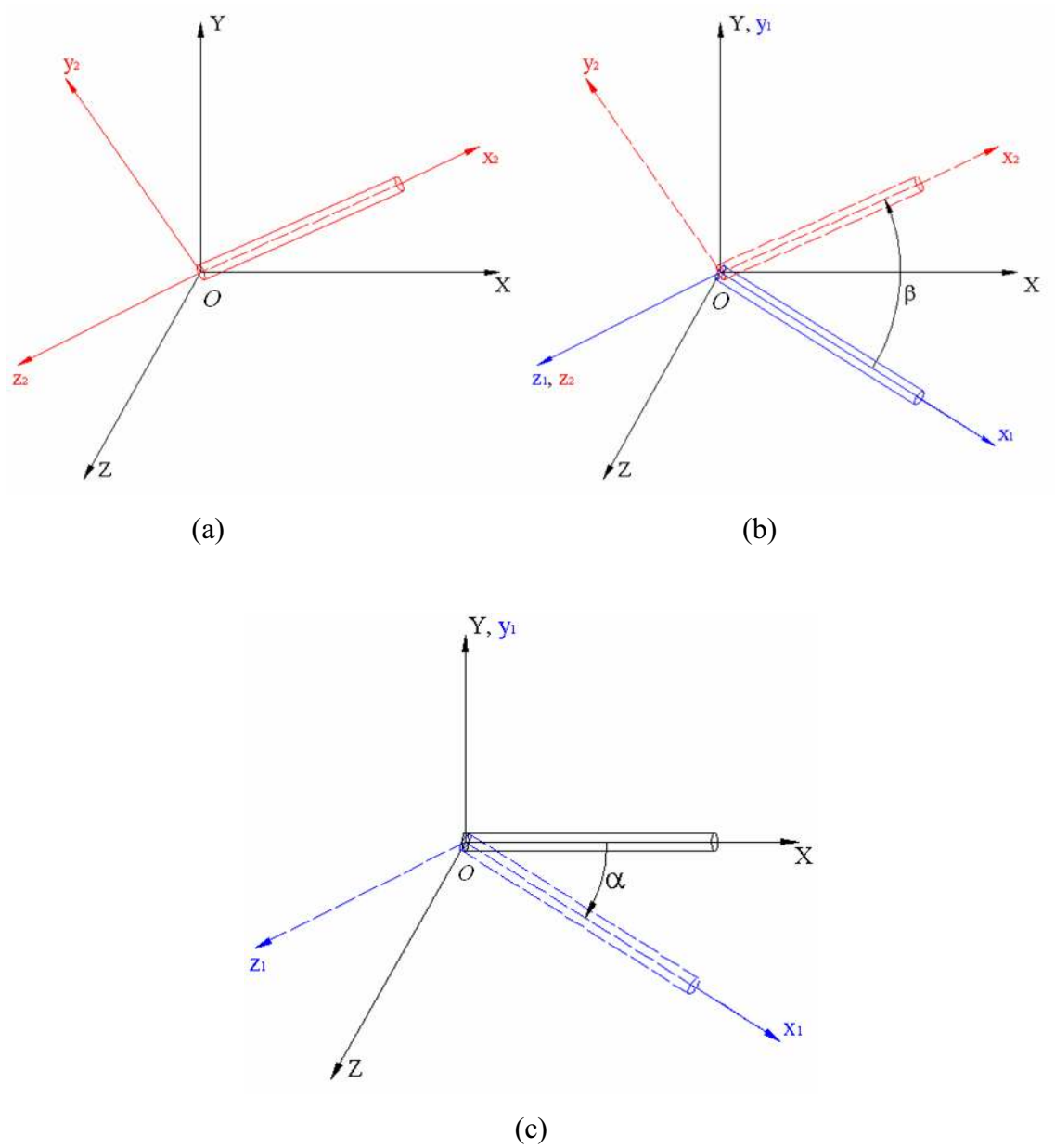


Figura 4.5 – Transformação de coordenadas. (a) Posição Genérica no Espaço; (b) Rotação β em torno do eixo z_1 ; (c) Rotação $-\alpha$ em torno do eixo Y .

Substituindo a Eq. (4.13) em (4.14) e realizando as multiplicações tem-se que a matriz de transformação entre o referencial $O_{x_2y_2z_2}$ e O_{xyz} é dado por:

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha)\cos(\beta) & \sin(\beta) & \cos(\beta)\sin(\alpha) \\ -\cos(\alpha)\sin(\beta) & \cos(\beta) & -\sin(\alpha)\sin(\beta) \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

Em notação compacta, tem-se:

$$\{\bar{x}\} = [T] \{x\} \quad (4.16)$$

Em que $[T]$ é a matriz de transformação; $\{\bar{x}\}$ são as coordenadas locais e $\{x\}$ as coordenadas dos eixos inerciais.

Consequentemente, os esforços também têm que ser expressos em relação ao referencial inercial, ou seja:

$$\{\bar{W}\} = [T] \{W\} \quad (4.17)$$

Em que $\{\bar{W}\}$ são os esforços nas coordenadas locais e $\{W\}$ os esforços no sistema de coordenadas inercial. Da mesma forma, os deslocamentos flexíveis são dados no sistema de referencia inercial por:

$$\{\bar{u}\} = [T] \{u\} \quad (4.18)$$

onde $\{\bar{u}\}$ é o vetor dos deslocamentos flexíveis no referencial local e $\{u\}$ no referencial inercial.

Se a matriz de rigidez é expressa no sistema de referencia local tem-se:

$$\{\bar{W}\} = [\bar{K}] \{\bar{u}\} \quad (4.19)$$

Substituindo as Eqs. (4.17) e (4.18) na (4.19) tem-se:

$$[T] \{W\} = [\bar{K}] [T] \{u\} \quad (4.20)$$

Pré-multiplicando ambos os lados da Eq. (4.20) pela matriz inversa de $[T]$ obtém:

$$\{W\} = [T]^{-1} [\bar{K}] [T] \{u\} \quad (4.21)$$

ou

$$\{W\} = [K] \{u\} \quad (4.22)$$

onde $[K]$ é a matriz de rigidez do elemento, expresso no referencial inercial sendo:

$$[K] = [T]^{-1} [\bar{K}] [T] \quad (4.23)$$

A matriz de transformação entre os referenciais pode ser obtida diretamente pelas considerações geométricas e utilizando-se dos cossenos diretores, a partir das coordenadas dos nós, Figs. 4.2 e 4.6.

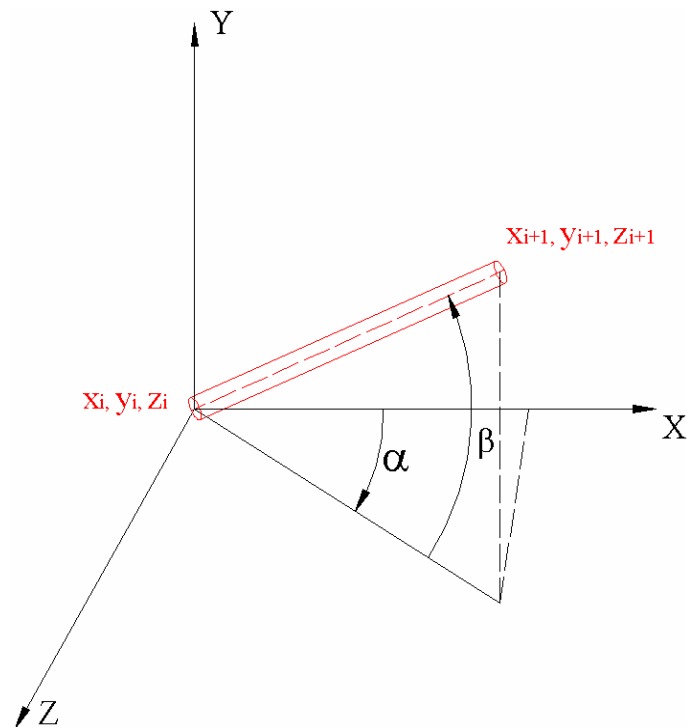


Figura 4.6 – Transformação de coordenadas em relação aos nós.

Como as coordenadas do nó i são $[x_i, y_i, z_i]$ e do nó $i+1$ são $[x_{i+1}, y_{i+1}, z_{i+1}]$ a matriz de transformação $[T]$ também pode ser obtida por (Shabana, 1989):

$$[T] = \begin{bmatrix} c_x & \frac{-c_x c_y}{\sqrt{(c_x)^2 + (c_z)^2}} & \frac{-c_z}{\sqrt{(c_x)^2 + (c_z)^2}} \\ c_y & \sqrt{(c_x)^2 + (c_z)^2} & 0 \\ c_z & \frac{-c_y c_z}{\sqrt{(c_x)^2 + (c_z)^2}} & \frac{c_x}{\sqrt{(c_x)^2 + (c_z)^2}} \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

Onde:

$$c_x = \frac{x_{i+1} - x_i}{L_j}; \quad c_y = \frac{y_{i+1} - y_i}{L_j}; \quad c_z = \frac{z_{i+1} - z_i}{L_j} \quad (4.25)$$

A matriz de transformação $[T]$, dada pela Eq. (4.23), é válida para todas as posições da barra, exceto quando o eixo y_j do elemento coincide com a direção do eixo inercial Y . Neste caso a matriz de transformação $[T]$ é dada por:

$$[T] = \begin{bmatrix} 0 & -c_y & 0 \\ c_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

Sendo a matriz de rigidez de uma barra j uma matriz quadrada 12×12 , Eq. (4.5), a matriz de transformação do referencial da barra j para o referencial inercial deve ser uma matriz diagonal na forma (Shabana, 1989):

$$[T_j] = \begin{bmatrix} [T] & 0_3 & 0_3 & 0_3 \\ 0_3 & [T] & 0_3 & 0_3 \\ 0_3 & 0_3 & [T] & 0_3 \\ 0_3 & 0_3 & 0_3 & [T] \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

Onde 0_3 é uma matriz quadrada de zeros de ordem 3.

Após obter a matriz de rigidez de cada elemento no sistema de referência inercial, pode-se proceder à obtenção da matriz de rigidez da estrutura como um todo.

4.6. Montagem da Matriz de Rigidez da Estrutura e Imposição das Condições de Contorno.

O objetivo do método *MSA* consiste em determinar a relação entre as cargas que atuam nos nós da estrutura completa e seus respectivos deslocamentos flexíveis sob forma matricial. Assim, como a relação dos esforços e deslocamentos flexíveis no âmbito de um elemento é expressa pela matriz de rigidez do elemento, a relação esforços e deslocamentos flexíveis no âmbito da estrutura são expressos pela matriz de rigidez da estrutura. A montagem da matriz de rigidez da estrutura deve considerar o modo pelos quais os elementos estão arranjados na estrutura e como estão conectados entre si.

A montagem da matriz de rigidez da estrutura decorre da aplicação das leis de equilíbrio e compatibilidade. Os esforços são transferidos para o elemento vizinho pelos nós. A estrutura em equilíbrio deve satisfazer três relações fundamentais:

a) *Equilíbrio de forças*: considerando a condição de equilíbrio da estrutura, diagrama de corpo livre do elemento, pode-se aplicar as equações de equilíbrio conhecidas do estudo da mecânica a cada um dos elementos isoladamente.

b) *Compatibilidade de deslocamentos*: os elementos conectados em um nó mantêm-se conectados no mesmo nó na condição deformada e estando sujeitos aos mesmos componentes de deslocamentos.

c) *Lei de comportamento do material*: ao transmitir os esforços ao longo da estrutura, os corpos ou, mais especificamente, os “elementos” se deformam. Em grande parte das aplicações práticas, quando o nível dos esforços não é muito elevado, as forças internas crescem proporcionalmente às deformações (Alves Filho, 2006).

A montagem da matriz de rigidez da estrutura ocorre como um processo de “superposição” das matrizes de rigidez elementar, considerando como os elementos estão conectados entre si.

Resumidamente, a montagem da matriz de rigidez da estrutura decorre da aplicação da lei de equilíbrio e da compatibilidade. A matriz de rigidez da estrutura pode ser obtida a partir da matriz de rigidez de cada elemento em função de como estes elementos estão conectados. A forma em que os elementos estão conectados é fornecida pela numeração dos nós presentes

no sistema. Desta forma, a obtenção da matriz de rigidez do sistema acontece como um processo de “superposição” das matrizes dos elementos, Fig. 4.7. Em termos computacionais, pode-se criar uma matriz de conectividade dos elementos, permitindo a montagem da matriz de rigidez da estrutura.

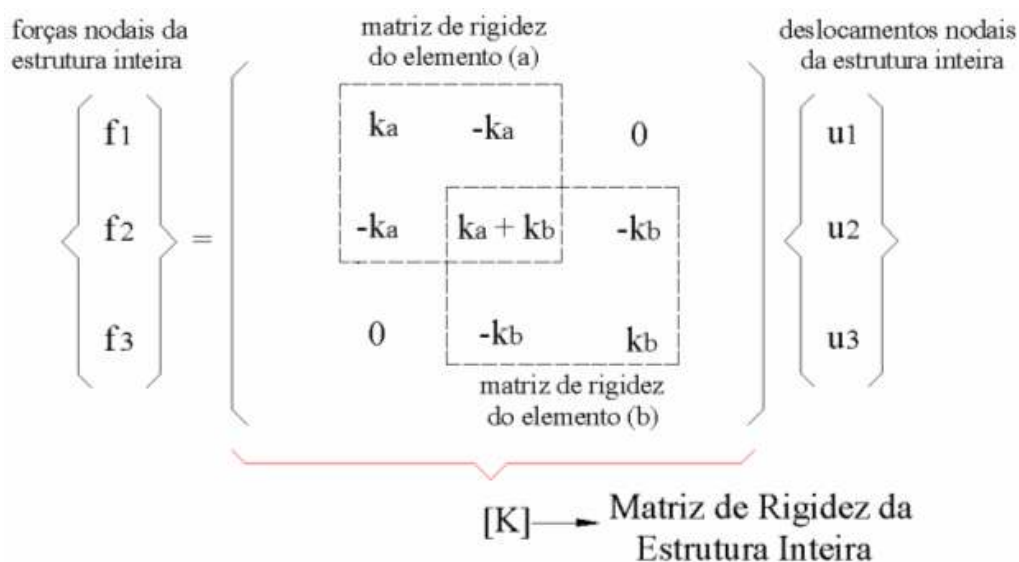


Figura 4.7 – Procedimento de obtenção da matriz de rigidez da estrutura. (Anexo I)

A matriz de rigidez da estrutura, assim obtida, é singular, não sendo possível sua solução. O significado físico da impossibilidade do cálculo dos deslocamentos flexíveis, é que a estrutura está “solta”, sem qualquer fixação, podendo mover-se como um corpo rígido livre no espaço. Os movimentos de corpo rígido ocorrem sem deformação dos elementos e devem ser eliminados. Na prática, as estruturas estão fixadas. Então, é necessário prover um número suficiente de restrições para impedir ou “suprimir” o movimento de corpo rígido da estrutura, de sorte a contabilizar a condição deformada de cada elemento. Esse requisito é estabelecido pelas condições de apoio da estrutura, que devem ser levadas em consideração para obter uma nova matriz de rigidez da estrutura.

Após a imposição das condições de contorno, a matriz de rigidez modificada é inversível, não mais singular, permitindo o cálculo dos deslocamentos devido à flexibilidade a partir da Eq. (4.8), ou seja:

$$\{u\} = [K]^{-1} \{W\} \quad (4.28)$$

Na Equação (4.28), $\{W\}$ é o vetor que contém os esforços nodais aplicados à estrutura e $\{u\}$ é vetor que contém os deslocamentos flexíveis nodais.

Para ilustrar o procedimento de montagem da matriz de rigidez da estrutura é apresentado no Anexo I o procedimento da obtenção da matriz de rigidez local de uma mola e, posteriormente, o procedimento para obter a matriz de rigidez de um sistema formado por duas molas.

4.7. Modelagem de Estruturas Robóticas utilizando-se MSA

Do apresentado anteriormente, o uso da metodologia *MSA* permite uma fácil implementação computacional devido ao fato do método ser todo escrito em formato matricial. Para a correta aplicação deste método é necessário o acoplamento do modelo *MSA* com o modelo cinemático do sistema multicorpo em estudo permitindo, desta forma, a realização do mapeamento da rigidez em função dos esforços aplicados na estrutura e em todo o espaço de trabalho. Nos Capítulos V e VI serão apresentados exemplos, utilizando-se da modelagem *MSA*. Na Figura 4.8 é apresentado o esquema do procedimento de cálculo dos deslocamentos flexíveis utilizando-se da metodologia *MSA*.

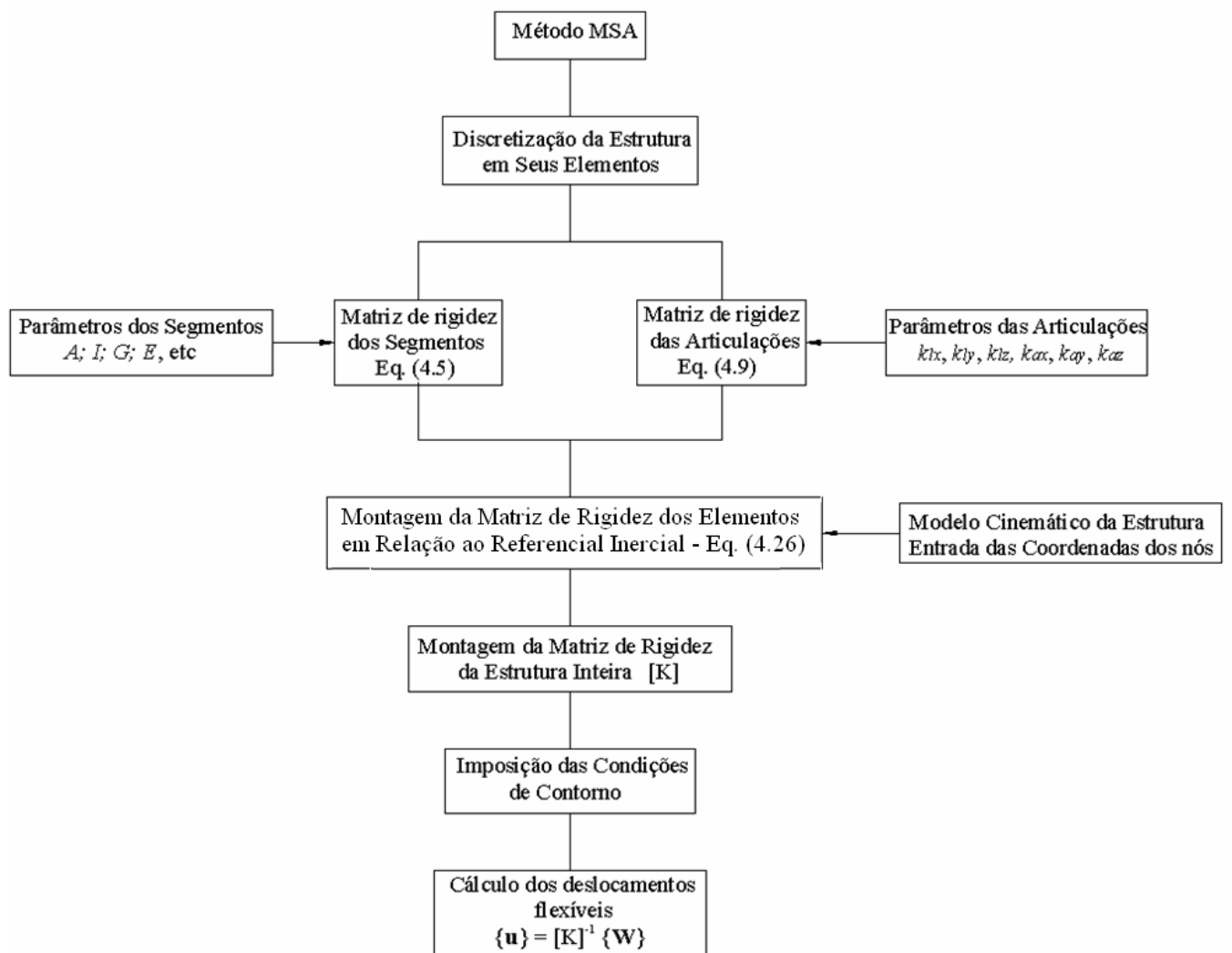


Figura 4.8 – Passos da Metodologia *MSA* para o cálculo dos deslocamentos flexíveis.

4.8. Conclusões

O método *MSA* permite a idealização do sistema multicorpo por meio de sua discretização. No caso das estruturas robóticas, estas já se apresentam discretizadas, sendo compostas basicamente por segmentos e articulações que podem ser passivas ou ativas. Assim, conhecendo a geometria, propriedades mecânicas e dimensões dos componentes é possível determinar as matrizes de rigidez dos segmentos. Por meio de catálogos ou mesmo de testes experimentais é possível determinar os parâmetros de rigidez das articulações.

A partir da matriz de rigidez dos elementos, escritas no referencial local, ela deve ser transformada para um mesmo referencial inercial. Considerando a lei de equilíbrio e da compatibilidade pode-se obter a matriz de rigidez de toda estrutura. No entanto, esta matriz é singular por não considerar as restrições de movimento de corpo livre do sistema. Com a imposição das condições de contorno, esta matriz de rigidez modificada é inversível, permitindo obter os deslocamentos flexíveis em função dos esforços aplicados. Deve-se salientar que a obtenção desta matriz de rigidez leva em consideração o modelo cinemático da estrutura robótica em estudo podendo obter as coordenadas dos nós dos elementos.

O método *MSA* é de fácil compreensão e de implementação computacional devido ao fato de trabalhar com matrizes. A principal vantagem deste método de resolução é que o erro envolvido no processo é independente da discretização do modelo e, além disso, é um método de rápida solução. Por exemplo, a solução elásto-plástica para uma viga continua usando o *MSA* requer apenas 4 elementos de vigas enquanto que um modelo feito em um software *FEA* precisa de 500 elementos para fornecer os mesmos resultados com a mesma acuracidade do *MSA*.

Finalmente, como o procedimento de mapeamento de rigidez de uma estrutura necessita avaliações sucessivas para diferentes posições e aplicações de esforços, ou no caso de um procedimento de otimização do sistema ou identificação do sistema, a eficiência do *MSA* é indiscutível (Fellipa, 2000; 2005). No uso do método *MSA* não é necessário calcular derivadas que são utilizadas nos outros modelos de análise de rigidez, principalmente nos derivados da matriz Jacobiana.

Na modelagem apresentada foi definida e introduzida uma matriz de rigidez de uma articulação genérica que é representada por dois nós consecutivos, facilitando a consideração de rigidez de segmentos e articulações em uma mesma modelagem.

No Capítulo V serão apresentados exemplos de modelagem utilizando-se da metodologia *MSA*, realizando, inclusive, a comparação com as outras metodologias de cálculo existentes para análise de rigidez.

CAPITULO V

APLICAÇÕES DO MÉTODO *MSA*

Neste Capítulo é apresentado um exemplo aplicado a um manipulador robótico serial de 2 gdl, para comparação entre as metodologias de cálculo dos deslocamentos flexíveis. Os deslocamentos flexíveis deste manipulador são obtidos utilizando-se da metodologia de Komatsu (1989; 1990a e 1990b) e Yoon et al. (2004); Tsai (1999); *MSA* e *FEA*. Os resultados são comparados entre si.

Também é aplicado o método *MSA* para o cálculo dos deslocamentos flexíveis de uma estrutura destacando a influência da modelagem das articulações conforme proposto nesta tese.

Finalmente, a metodologia *MSA* é aplicada para o cálculo dos deslocamentos flexíveis de uma estrutura robótica paralela.

5.1. Comparação entre Métodos de Cálculo dos Deslocamentos Flexíveis.

A Figura 5.1 apresenta o esquema de um manipulador robótico plano de 2 gdl, que é utilizado para comparação entre as principais técnicas, apresentadas no Capítulo III, para o cálculo dos deslocamentos flexíveis.

Para modelagem do manipulador robótico serial de 2 gdl, foram fixados um referencial inercial $O_0 x_0 y_0$, e os referenciais auxiliares $A_1 x_1 y_1$, fixo no corpo móvel do comprimento L_1 e $B x_2 y_2$, fixo no corpo móvel de comprimento L_2 . Os ângulos θ_1 e θ_2 são as coordenadas generalizadas (articulares) e os segmentos $O_0 A$ e $O_1 B$ possuem comprimentos L_1 e L_2 respectivamente, Fig. 5.1.

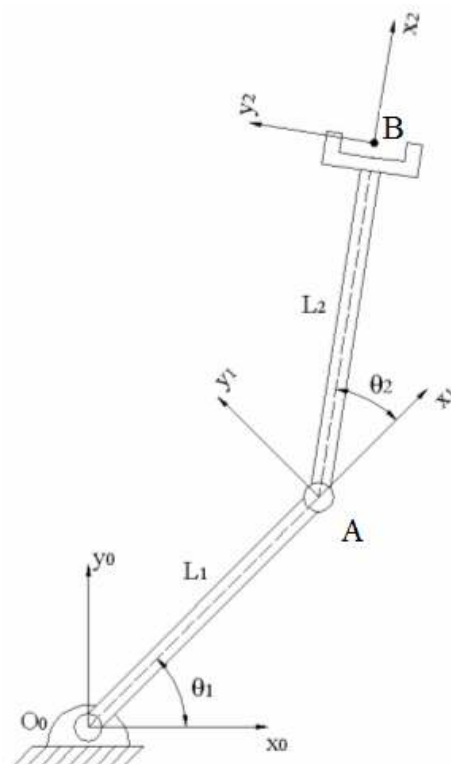


Figura 5.1 – Manipulador Robótico de 2 gdl.

5.1.1. Modelagem dos Deslocamentos Flexíveis Utilizando-se do método de Yoon (2004) e Komatsu (1989; 1990a e 1990b).

A modelagem das flexibilidades de uma estrutura serial, conforme Yoon et al. (2004) e Komatsu et al. (1989; 1990a; 1990b) pode ser realizada considerando a estrutura composta por diversas articulações e segmentos deformáveis, Fig. 5.2.

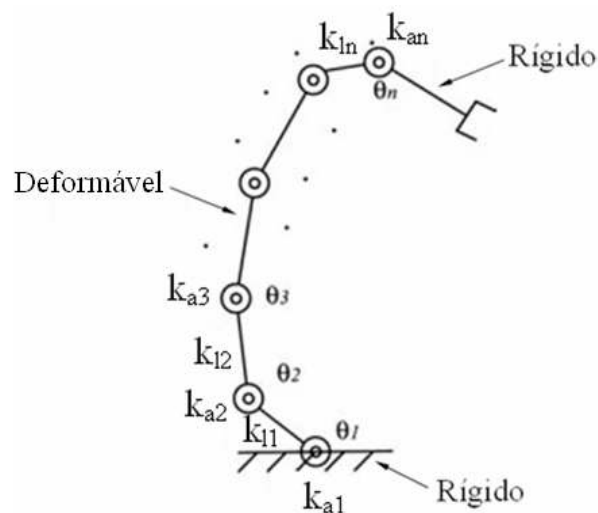


Figura 5.2 – Modelo de flexibilidade de uma estrutura serial proposto por Yoon et al. (2004).

Na Figura 5.2 os segmentos, C_{li} , são modelados como segmentos deformáveis. As flexibilidades das articulações são representadas por C_{arti} e as coordenadas generalizadas são dadas pelos ângulos θ_i ($i = 1, \dots, n$).

A formulação é realizada em função do cálculo da Matriz Jacobiana, sendo a modelagem da deformação dos segmentos e articulações realizada a partir da Eq. (3.25). Nesta seção, para efeito de comparação, será considerado separadamente o efeito das deformações dos segmentos, Eq. (5.1) e o efeito das deformações das articulações, Eq. (5.2), sendo que a Eq. (3.25) pode ser rescrita também como na Eq. (5.3).

A parcela da flexibilidade devido aos segmentos é calculada pela Eq. (5.1)

$$\begin{aligned} C_l &= J_l k_l^{-1} J_l^T \\ k_l &= \text{diag}(k_1, k_2, \dots, k_n) \end{aligned} \quad (5.1)$$

onde J_l é a matriz Jacobiana obtida em relação às deformações dos segmentos e k_i ($i = 1, \dots, n$) são os parâmetros de rigidez concentradas dos segmentos.

A parcela de flexibilidade devido às articulações é calculada pela Eq. (5.2).

$$\begin{aligned} C_{art} &= J_{art} k_{art}^{-1} J_{art}^T \\ k_{art} &= \text{diag}(k_{a1}, k_{a2}, \dots, k_{an}) \end{aligned} \quad (5.2)$$

Onde J_{art} representa a matriz Jacobiana da estrutura serial, ou seja, $J_{art} = J_s$ e k_{ai} ($i = 1, \dots, n$) são os parâmetros de rigidez concentradas das articulações.

A matriz de flexibilidade da estrutura serial, considerando tanto as deformações devido aos segmentos como das articulações, pode ser calculada pela Eq. (5.3):

$$C_T = C_l + C_{art} \quad (5.3)$$

Considerando os deslocamentos flexíveis é possível escrever o modelo cinemático da estrutura, Fig. 5.3 e Fig. 5.4. Assim as coordenadas dos pontos A e B são calculadas por:

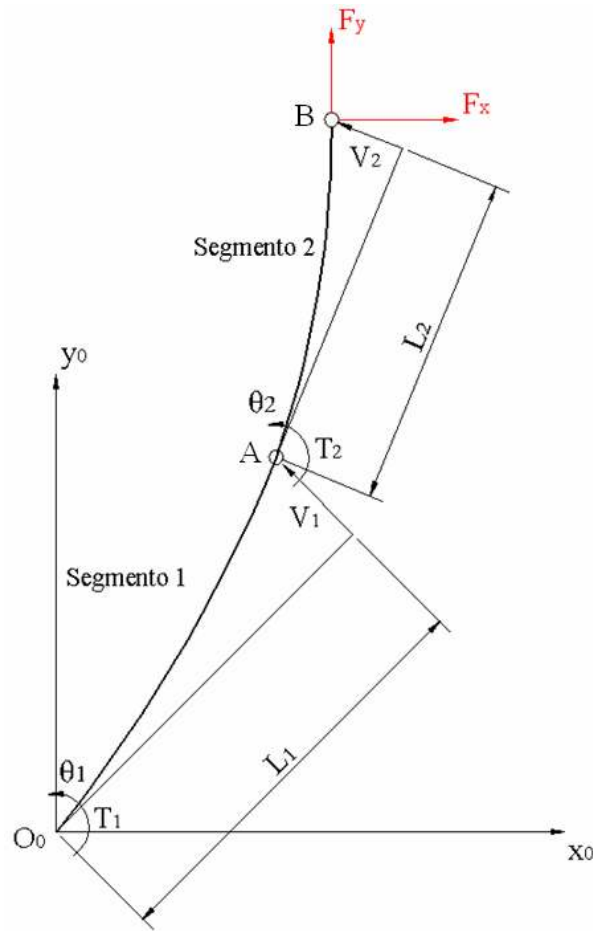


Figura 5.3 – Modelo para aplicação da metodologia do Komatsu et al. (1990a; 1990b).

$$\begin{aligned}
 x_A &= L_1 \cos(\theta_1) - V_1 \sin(\theta_1) \\
 y_A &= L_1 \sin(\theta_1) + V_1 \cos(\theta_1) \\
 x_B &= x_A + L_2 \cos(\theta_1 + \eta_1 + \theta_2) - V_2 \sin(\theta_1 + \eta_1 + \theta_2) \\
 y_B &= y_A + L_2 \sin(\theta_1 + \eta_1 + \theta_2) - V_2 \cos(\theta_1 + \eta_1 + \theta_2)
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

Da Figura 5.3 tem-se que as forças F_x e F_y aplicadas no ponto B podem ser decompostos na direção normal aos segmentos 1 e 2, Fig. 5.4, resultando nos esforços:

$$\begin{aligned}
 F_1 &= F_x \sin(\theta_2) + F_y \cos(\theta_2) \\
 F_2 &= F_y \\
 M_1 &= L_2 F_y \\
 M_2 &= 0
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

Sendo F_1 e F_2 as forças obtidas de F_x e F_y aplicadas nos pontos A e B , perpendiculares aos segmentos 1 e 2, respectivamente. M_1 e M_2 são os momentos aplicados em A e B , respectivamente, devido à força F_y .

Aplicando a equação diferencial da linha elástica (Branco, 1998), Figs. 5.3 e 5.4, para uma viga engastada em uma extremidade, tem-se que os deslocamentos flexíveis lineares, V_1 e V_2 , e angulares η_1 , η_2 , devidos aos esforços F_1 , F_2 , M_1 e M_2 , são calculados por:

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{L_1^3}{3E_1I_1} F_1 + \frac{L_1^2}{2E_1I_1} M_1 \\ V_2 &= \frac{L_2^3}{3E_2I_2} F_2 + \frac{L_2^2}{2E_2I_2} M_2 \\ \eta_1 &= \frac{L_1^2}{2E_1I_1} F_1 + \frac{L_1}{E_1I_1} M_1 \\ \eta_2 &= \frac{L_2^2}{2E_2I_2} F_2 + \frac{L_2}{E_2I_2} M_2 \end{aligned} \quad (5.6)$$

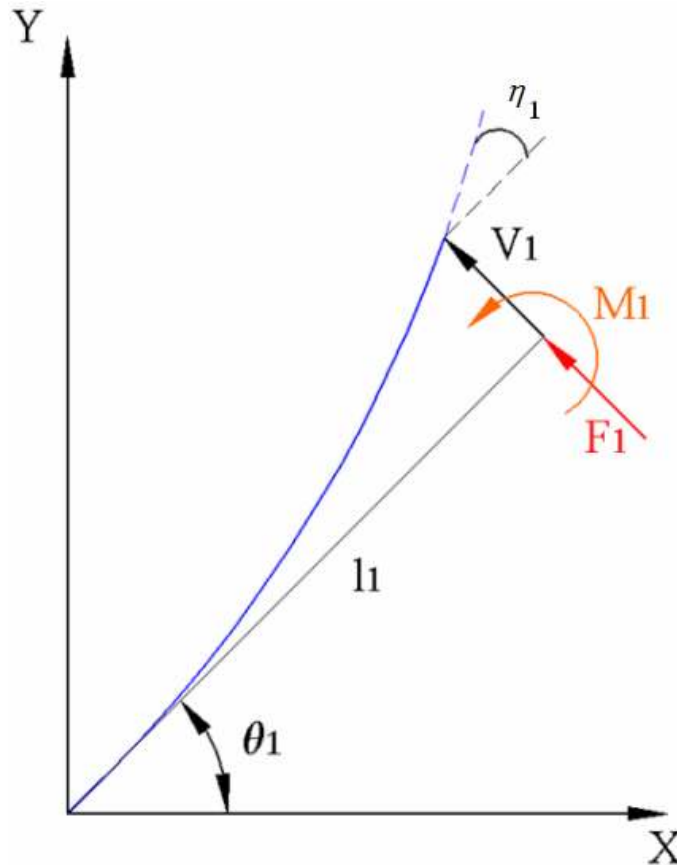


Figura 5.4 – Cálculo do deslocamento flexível linear (V_1) e angular (η_1).

Substituindo a Eq. (5.5) em (5.6), e após manipulações matemáticas, pode-se escrever os deslocamentos flexíveis angulares como (Komatsu et al. 1990a; 1990b):

$$\begin{aligned}\eta_1 &= \frac{3}{2L_1}V_1 + \frac{3E_2I_2L_1L_2}{2E_1I_1(2L_2^3 + 3L_2^2)}V_2 \\ \eta_2 &= \frac{3(L_2^2 + 2L_2)}{2L_2^3 + 3L_2^2}V_2\end{aligned}\tag{5.7}$$

Das Figuras 5.1, 5.3 e 5.4, a configuração do elemento terminal, ponto B , considerando o modelo cinemático e os deslocamentos flexíveis é dada por, $\mathbf{f}_T$:

$$\mathbf{f}_T = \begin{Bmatrix} x_B \\ y_B \\ \theta_T \end{Bmatrix}\tag{5.8}$$

Onde:

$$\theta_T = \theta_1 + \eta_1 + \theta_2 + \eta_2\tag{5.9}$$

O cálculo da deformação dos segmentos é realizado pela Eq. (5.1) aplicada ao manipulador serial de 2 gdl:

$$\begin{aligned}C_l &= J_l k_l^{-1} J_l^T \\ k_l &= \text{diag}(k_1, k_2, \dots, k_n)\end{aligned}\tag{5.10}$$

Como J_l é a matriz Jacobiana em função das deformações, esta pode ser calculada pela derivada da Eq. (5.8), em relação às deformações, $\mathbf{x}_l$:

$$J_l = \frac{\partial \mathbf{f}_T}{\partial \mathbf{x}_l} ; \quad \mathbf{x}_l = \begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{Bmatrix}\tag{5.11}$$

Realizando o cálculo do Jacobiano em relação às deformações tem-se:

$$J_I = \begin{bmatrix} J_{I1} & J_{I2} \\ J_{I21} & J_{I22} \\ J_{I31} & J_{I32} \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

sendo:

$$J_{I1} = -\text{sen}\theta_1 - \frac{3L_2 \text{sen}(\theta_{aux})}{2L_1} - \frac{3V_2 \cos(\theta_{aux})}{2L_1} \quad (5.13)$$

$$J_{I2} = -\frac{3 \text{sen}(\theta_{aux}) E_2 I_2 L_1}{4L_2 E_1 I_1} - \text{sen}(\theta_{aux}) - \frac{3V_2 \cos(\theta_{aux}) E_2 I_2 L}{4L_2^2 E_1 I_1} \quad (5.14)$$

$$J_{I21} = \cos\theta_1 + \frac{3L_2 \cos(\theta_{aux})}{2L_1} - \frac{3V_2 \text{sen}(\theta_{aux})}{2L_1} \quad (5.15)$$

$$J_{I22} = \frac{3 \cos(\theta_{aux}) E_2 I_2 L_1}{4L_2 E_1 I_1} + \cos(\theta_{aux}) - \frac{3V_2 \text{sen}(\theta_{aux}) E_2 I_2 L_1}{4L_2^2 E_1 I_1} \quad (5.16)$$

$$J_{I31} = \frac{3}{2L_1} \quad (5.17)$$

$$J_{I32} = \frac{3E_2 I_2 L_1}{4L_2^2 E_1 I_1} + \frac{3}{2L_2} \quad (5.18)$$

onde

$$\theta_{aux} = \theta_1 + \frac{3V_1}{2L_1} + \frac{3E_2 I_2 L_1 V_2}{4L_2^2 E_1 I_1} + \theta_2 \quad (5.19)$$

Além disso, para cálculo da matriz de flexibilidade dos segmentos, Eq. (5.10), é necessária a determinação dos coeficientes k_I , k_{I2} e k_2 , que são os coeficientes de rigidez concentrados do primeiro segmento, do acoplamento entre os segmentos e do segundo segmento, respectivamente. O cálculo destes coeficientes é obtido pela utilização da equação da energia de deformação à flexão (Branco, 1998), Eq. (5.21), e da energia de deformação do sistema da Fig. 5.3 em relação à V_I e V_2 , Eqs. (5.20) (Komatsu et al., 1990a; 1990b):

$$U = \frac{(k_1 V_1^2 + k_{12} V_1 V_2 + k_2 V_2^2)}{2} \quad (5.20)$$

$$U = \frac{1}{2 E_1 I_1} \int_0^{l_1} (F_1 x_1 + M_1)^2 dx_1 + \frac{1}{2 E_2 I_2} \int_0^{l_2} (F_2 x_2 + M_2)^2 dx_2 \quad (5.21)$$

Igualando-se as Eqs. (5.20) e (5.21) e após simplificações matemáticas, obtém-se:

$$k_1 = \frac{3 E_1 I_1}{L_1^3} \quad (5.22)$$

$$k_{12} = 0 \quad (5.23)$$

$$k_2 = \frac{9 L_1 L_2 E_2^2 I_2^2 (4 L_1 - 4 L_1 \cos \theta_2 + L_2) + 12 E_1 I_1 E_2 I_2 L_2^3}{4 E_1 I_1 L_2^6} \quad (5.24)$$

Desta forma, substituindo as Eqs. (5.22) à (5.24) e (5.12) na Eq. (5.10) pode-se calcular C_l .

O cálculo da matriz de flexibilidade devido às articulações (parcela devido ao movimento de corpo rígido) é obtido aplicando a Eq. 5.2 ao modelo da Fig. 5.1.

$$\begin{aligned} C_{art} &= J_{art} k_{art}^{-1} J_{art}^T \\ k_{art} &= \text{diag}(k_{a1}, k_{a2}) \end{aligned} \quad (5.25)$$

O cálculo da matriz Jacobiana devido às articulações, J_{art} , é dado pela derivada da Eq. (5.8) em relação à $\mathbf{x}_{art}$ por:

$$J_{art} = \frac{\partial \mathbf{f}_T}{\partial \mathbf{x}_{art}} ; \quad \mathbf{x}_{art} = \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (5.26)$$

$$J_{art} = \begin{bmatrix} -L_1 \sin \theta_1 - V_1 \cos \theta_1 - L_2 \sin(\theta_{aux}) - V_2 \cos(\theta_{aux}) & -L_2 \sin(\theta_{aux}) - V_2 \cos(\theta_{aux}) \\ L_1 \cos \theta_1 - V_1 \sin \theta_1 + L_2 \cos(\theta_{aux}) - V_2 \sin(\theta_{aux}) & L_2 \cos(\theta_{aux}) - V_2 \sin(\theta_{aux}) \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

onde θ_{aux} é dado pela Eq. (5.19).

O cálculo das constantes k_{a1} e k_{a2} deve ser determinado em função de dados experimentais ou utilizando-se, por exemplo, das Eqs. (4.10) e (4.11).

Desta forma, é possível, a partir das Eqs. (5.25) e (5.27), obter a matriz de flexibilidade devido às articulações.

Finalmente, tem-se que a matriz de flexibilidade do manipulador robótico serial de 2 gdl é dada por:

$$C_T = C_l + C_{art} \quad (5.28)$$

O modelo proposto por Komatsu et al. (1990a; 1990b) torna-se equivalente ao modelo proposto por Tsai (1999) quando os segmentos são considerados rígidos e levando-se em consideração apenas as flexibilidades das articulações. Assim, o cálculo da matriz de flexibilidade segundo Tsai pode ser obtido por:

$$C = J\chi^{-1}J^T$$

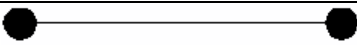
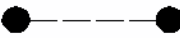
$$\chi = \text{diag}(k_1, k_2, \dots, k_n) \quad (5.29)$$

Onde $J = J_{art}$ e $\chi = k_{art}$.

5.1.2. Modelo Utilizando MSA.

A Figura 5.5. ilustra o modelo desenvolvido para aplicação da metodologia MSA conforme proposto nesta tese. Para a representação dos elementos é utilizada a seguinte notação:

Tabela 5.1. Representação dos elementos.

Representação	Elemento
	nó
	segmento rígido
	segmento flexível
	articulação
	engaste

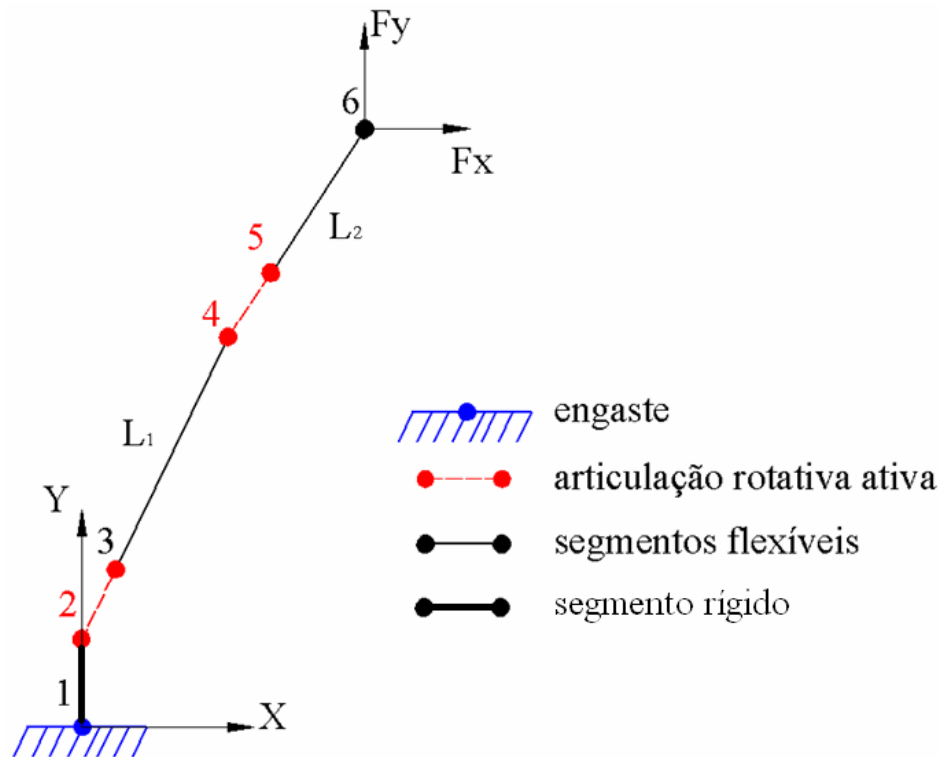


Figura 5.5 – Modelo *MSA* do manipulador robótico de 2 gdl.

Na Figura 5.5 os pontos 1 a 6 são os nós; o segmento definido pelos nós 1–2 é a base considerada rígida e os segmentos definidos pelos nós 3–4 e 5–6 são flexíveis. As articulações rotativas são representadas pelos nós 2–3 e 4–5. Deve-se destacar que os nós 2–3 que definem a articulação, possuem a mesma posição, bem como os nós 4 e 5. O referencial inercial tem sua origem no nó 1.

Aplicando o procedimento descrito no Capítulo 4, Fig. 4.9, primeiramente serão obtidas as matrizes de rigidez de cada elemento. Neste modelo estão presentes dois tipos de elementos: segmentos (três) e articulações (duas).

Para obter as matrizes de rigidez relativa aos segmentos, eles são considerados como elementos de viga com seção transversal circular, desprezando o efeito dos esforços cortantes e calculadas pela Eq. (4.3), ou seja:

$$k_{bj} = \begin{bmatrix} \frac{A_j E_j}{L_j} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12E_j I_{zj}}{L_j^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6E_j I_{zj}}{L_j^2} \\ 0 & 0 & \frac{12E_j I_{yj}}{L_j^3} & 0 & -\frac{6E_j I_{yj}}{L_j^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{G_j J_j}{L_j} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6E_j I_{yj}}{L_j^2} & 0 & \frac{4E_j I_{yj}}{L_j} & 0 \\ 0 & \frac{6E_j I_{zj}}{L_j^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4E_j I_{zj}}{L_j} \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

E a matriz de rigidez da articulação é dada pela Eq. (4.8):

$$k_{art} = \begin{bmatrix} k_{lx} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{ly} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{lz} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{ax} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{ay} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{az} \end{bmatrix} \quad (5.31)$$

Para o cálculo da matriz de flexibilidade da articulação são necessários os parâmetros de rigidez linear k_{lx} , k_{ly} , k_{lz} e os parâmetros de rigidez angular k_{ax} , k_{ay} , k_{az} . Estes parâmetros podem ser obtidos em função do catálogo dos fabricantes ou por testes experimentais.

Antes de realizar a montagem da matriz de rigidez do manipulador como um todo deve-se escrever as matrizes de cada elemento em relação ao referencial inercial O_{XYZ} . Para isto é utilizada a matriz de transformação [T], Eq. (4.26). As coordenadas dos nós 1 à 6 são obtidas pelo modelo cinemático direto do robô.

O segmento definido pelos nós 1 e 2, correspondente à base do robô, pode ser considerado flexível ou não. Neste exemplo ela é considerada indeformável. Para isto, na matriz de rigidez deste elemento é considerado o seu módulo de elasticidade como sendo 10 vezes maior do que os outros segmentos. Este valor foi obtido por simulações computacionais de tal forma que os deslocamentos flexíveis da base não influenciem no cálculo das flexibilidades do modelo.

Após escrever as matrizes de rigidez dos segmentos e articulações, em relação ao referencial inercial, é realizada a montagem da matriz de rigidez de toda a estrutura. Como cada nó possui 6 gdl, a dimensão desta matriz quadrada é $6.n = 36$. A montagem desta matriz deve obedecer à numeração dos nós apresentados na Fig. 5.5. Desta forma é possível estabelecer uma matriz de conectividade entre os elementos, que indica, por exemplo, que os nós 2 e 3 (que dão origem à articulação rotativa) possuem os mesmos deslocamentos lineares e os mesmos deslocamentos angulares, exceto a rotação em torno do eixo da articulação. Assim, em função da Fig. 5.5 e Tab. 5.2 pode-se escrever, para cada nó, a quantificação dos graus de liberdade (quantidade de movimentos possíveis):

Tabela 5.2. Numeração dos graus de liberdade do modelo da Fig. 5.5.

Deslocamentos flexíveis	nós					
	1	2	3	4	5	6
deslocamento linear na direção x (δ_x)	1	7	13	19	25	31
deslocamento linear na direção y (δ_y)	2	8	14	20	26	32
deslocamento linear na direção z (δ_z)	3	9	15	21	27	33
deslocamento angular em torno do eixo x (ϕ_x)	4	10	16	22	28	34
deslocamento angular em torno do eixo y (ϕ_y)	5	11	17	23	29	35
deslocamento angular em torno do eixo z (ϕ_z)	6	12	18	24	30	36

A matriz de conectividade pode ser montada como:

Matriz de conectividade =

$$\begin{bmatrix}
 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\
 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 \\
 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 & 22 & 23 & 24 \\
 19 & 20 & 21 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 & 28 & 29 & 30 \\
 25 & 26 & 27 & 28 & 29 & 30 & 31 & 32 & 33 & 34 & 35 & 36
 \end{bmatrix}
 \begin{array}{l}
 \rightarrow \text{segmento } 1-2 \\
 \rightarrow \text{articulação } 2-3 \\
 \rightarrow \text{segmento } 3-4 \\
 \rightarrow \text{articulação } 4-5 \\
 \rightarrow \text{segmento } 5-6
 \end{array}$$

A matriz de conectividade permite então a montagem da matriz de rigidez de toda a estrutura. Esta fornece a posição das matrizes de rigidez do elemento dentro da matriz de rigidez da estrutura.

Conforme descrito no Capítulo IV esta matriz é singular pois a estrutura não possui restrições. Deve-se aplicar a condição de contorno que, neste caso, corresponde ao engastamento do nó 1. Como no engastamento todos os deslocamentos são nulos podem-se

eliminar estes graus de liberdade do sistema (1 a 6) correspondentes ao nó 1. Assim, a nova matriz quadrada possui dimensão 30×30 , sendo inversível.

Na Figura 5.5 os esforços podem ser aplicados em todos os nós (2 a 6). Neste exemplo, os esforços são aplicados apenas ao nó 6, para efeito de comparação com as outras metodologias.

Desta forma, os deslocamentos flexíveis podem ser calculados pela Eq. (4.23) por:

$$\{\mathbf{u}\} = \mathbf{K}^{-1} \{\mathbf{W}\} \quad (5.32)$$

Em que $\mathbf{K}$ é uma matriz de dimensão 30×30 e o vetor dos esforços, $\{\mathbf{W}\}$, aplicados aos nós de 2 a 6 de dimensão 30×1 . Desta forma, o vetor deslocamento flexível, $\{\mathbf{u}\}$, possui dimensão 30×1 , sendo, por exemplo, os seis primeiros elementos do vetor correspondentes aos deslocamentos lineares e rotativos do nó 2.

5.1.3. Modelo *FEA-Finite Element Analysis*.

Foi realizada também a simulação com um modelo de elementos finitos utilizando-se do software comercial Ansys[®]. Neste modelo foi considerada apenas a flexibilidade dos segmentos, que foram modelados como elementos de viga, tipo BEAM4. As Figuras 5.6 e 5.7 apresentam o modelo do manipulador robótico de 2 gdl, para uma posição específica ($\theta_1 = 90^\circ$ e $\theta_2 = -90^\circ$), sendo a Fig. 5.6 representativa da discretização dos elementos (cada segmento sendo dividido em 10 partes) e a Fig. 5.7 dos deslocamentos flexíveis, quando aplicado uma força unitária na direção do eixo X.

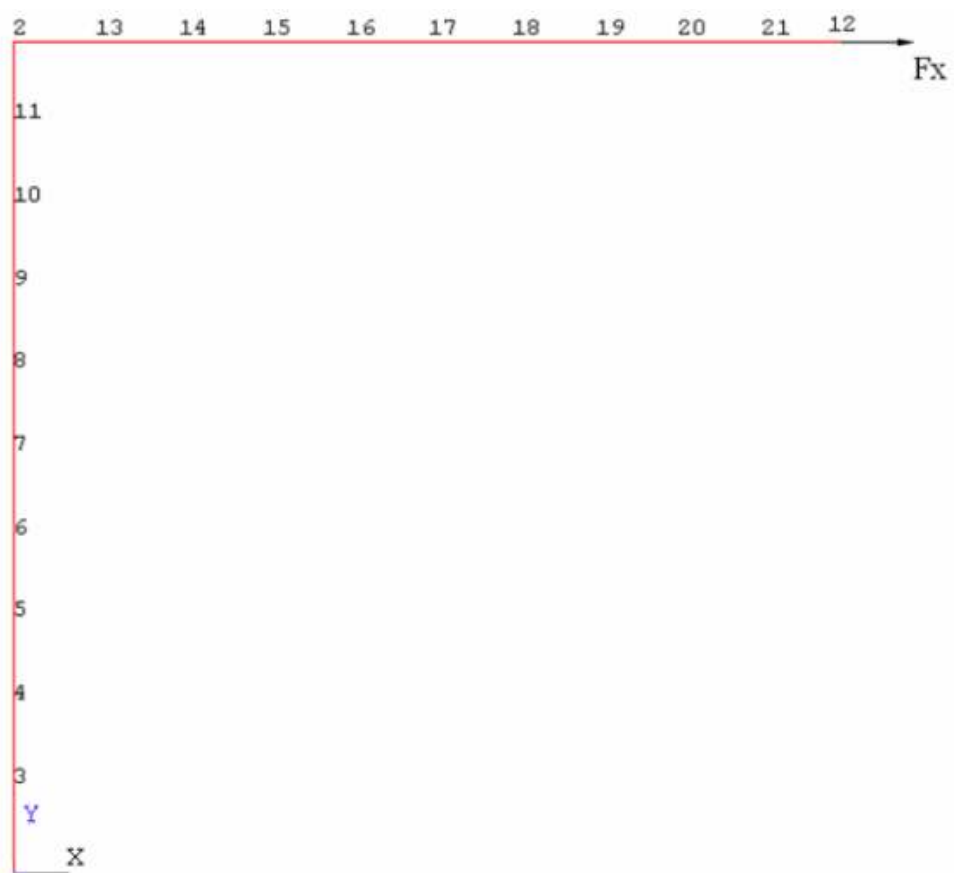


Figura 5.6 – Modelo *FEA* do manipulador robótico 2 gdl.

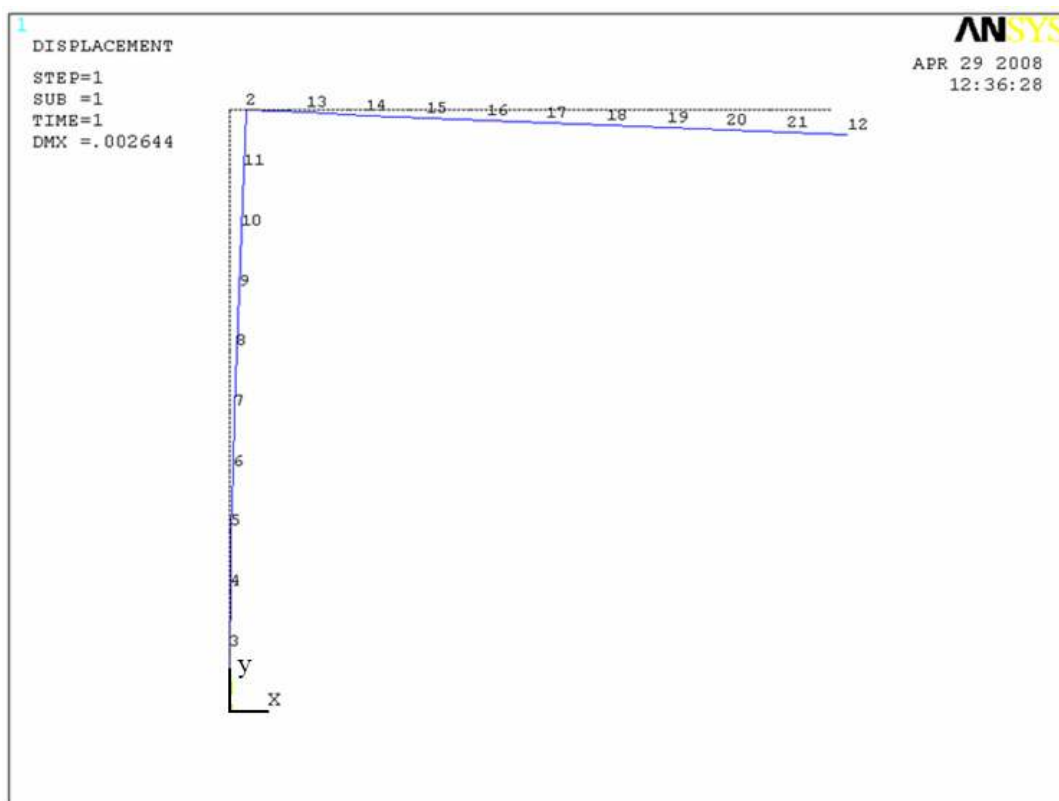


Figura 5.7 – Deslocamentos Flexíveis (em azul) do modelo *FEA*.

5.1.4. Comparação Entre os Resultados.

As Tabelas 5.3, 5.4 e 5.5 apresentam os resultados para comparação utilizando-se as metodologias pelo cálculo apresentado por *Komatsu e Yoon*; *Tsai*; *MSA* e *FEA*.

Para estes cálculos foi considerada a configuração do manipulador robótico de 2 gdl, Fig. 5.1, como sendo: $\theta_1 = 90^\circ$ e $\theta_2 = -90^\circ$. Foi aplicada uma força unitária na direção do eixo inercial X de $F_x = 1\text{ N}$ e com $F_y = 0$. Para todos os modelos, os segmentos, construídos em aço com módulo de elasticidade $E = 2e^{11}\text{ N/m}^2$, foram modelados possuindo um comprimento de $0,3\text{ m}$, de seção transversal circular e com diâmetro de $0,005\text{ m}$.

Os parâmetros concentrados das articulações para os modelos de *Komatsu*, *Yoon* e *Tsai* foram adotados, para simulações numéricas, como:

$$k_{a1} = k_{a2} = 1000\text{ N m/rad} \quad (5.33)$$

Para simulação da flexibilidade das articulações, utilizando-se da metodologia *MSA*, foram adotados os seguintes valores para simulação numérica:

$$k_{lx} = k_{ly} = k_{lz} = 2e^{11}\text{ N/m} \text{ e } k_{ax} = k_{ay} = 2e^{11}\text{ N m/rad} \quad (5.34)$$

$$k_{az} = 1000\text{ N m/rad} \quad (5.35)$$

Na Tabela 5.3 são apresentados os resultados comparativos quando se utiliza apenas a flexibilidade das articulações, sendo os segmentos indeformáveis. Na Tabela 5.4 são apresentados os resultados quando se considera apenas a flexibilidade dos segmentos e desprezando a flexibilidade das articulações. Finalmente, a Tabela 5.5 apresenta os resultados considerando tanto a flexibilidade dos segmentos como das articulações. O traço (–) nas Tabelas indica que não foi aplicada aquela metodologia ao exemplo, em função de não ter sido considerado no modelo.

Tabela 5.3. Cálculo dos deslocamentos flexíveis considerando apenas a flexibilidade das articulações.

Deslocamentos flexíveis	Metodologias			
	Komatsu e Yoon	Tsai	MSA	FEA
δ_x [mm]	0,3729	0,3729	0,2518	—
δ_y [mm]	-0,1658	-0,1659	-0,3249	—
δ_z [mm]	0	0	0	—
ϕ_x [rad]	0	0	0	—
ϕ_y [rad]	0	0	0	—
ϕ_z [rad]	0	0	-0,0011	—

Tabela 5.4. Cálculo dos deslocamentos flexíveis considerando apenas a flexibilidade dos segmentos.

Deslocamentos flexíveis	Metodologias			
	Komatsu e Yoon	Tsai	MSA	FEA
δ_x [mm]	1,4347	—	1,4668	1,4668
δ_y [mm]	-2,1676	—	-2,2001	-2,2002
δ_z [mm]	0	—	0	0
ϕ_x [rad]	0	—	0	0
ϕ_y [rad]	0	—	0	0
ϕ_z [rad]	-0,0073	—	-0,0073	-0,0073

Tabela 5.5. Cálculo dos deslocamentos flexíveis considerando a flexibilidade das articulações e segmentos.

Deslocamentos flexíveis	Metodologias			
	Komatsu e Yoon	Tsai	MSA	FEA
δ_x [mm]	1,5234	—	1,5720	—
δ_y [mm]	-2,2567	—	-2,3050	—
δ_z [mm]	0	—	0	—
ϕ_x [rad]	0	—	0	—
ϕ_y [rad]	0	—	0	—
ϕ_z [rad]	-0,0073	—	-0,0076	—

A partir dos resultados resumidos nas Tabelas 5.3 à 5.5, pode-se verificar que as metodologias existentes apresentam resultados semelhantes.

No caso da modelagem considerando-se somente a flexibilidade das articulações, Tab. 5.3, os resultados utilizando-se a metodologia do Komatsu e Yoon, quando comparadas com a modelagem utilizada por Tsai, fornecem os mesmos resultados. Conforme apresentado, isto já era esperado devido a ambas utilizarem o cálculo da matriz Jacobiana. Já na modelagem utilizando-se *MSA* os resultados são diferentes devido ao não conhecimento dos valores correspondentes a k_{bx} , k_{by} , k_{bz} , k_{ax} e k_{ay} , sendo estes valores adotados para efeito de cálculo numérico. Para um resultado mais preciso seria necessário testes experimentais para determinação destes parâmetros, obtendo-se uma correspondência adequada com os valores utilizados por Komatsu e Yoon.

Considerando a modelagem com somente a flexibilidade dos segmentos, Tab. 5.4, os resultados são coincidentes para o modelo *MSA* e *FEA*. Com a metodologia do Komatsu e Yoon os resultados são praticamente os mesmos.

Nos cálculos considerando a flexibilidade, tanto das articulações como dos segmentos, Tab. 5.5, os resultados para o modelo do Komatsu e Yoon e *MSA* são próximos.

Considerando apenas a flexibilidade das articulações, Tab. 5.3, o modelo proposto por Tsai é mais conveniente devido ao fato que este é derivado do cálculo do Jacobiano da estrutura robótica. Mesmo assim, o cálculo deste Jacobiano pode-se tornar complicado dependendo do número de gdl da estrutura e do tipo de estrutura considerada. Por exemplo, para uma estrutura robótica paralela a obtenção do Jacobiano não é simples.

Quando é considerada apenas a flexibilidade dos segmentos, Tab. 5.4, a utilização do método *MSA* é mais favorável, pois ao contrário da metodologia utilizada por Komatsu e Yoon, não é necessário o cálculo de equações diferenciais, como é o caso do cálculo do Jacobiano considerando a flexibilidade dos segmentos. Conforme apresentado pelas Eqs. (5.4) à (5.24) este cálculo é complicado e susceptível a erros de cálculo. Neste modelo foi considerada a modelagem de um manipulador robótico de 2 gdl. Caso o número de gdl fosse maior, isto implicaria em mais cálculos de equações diferenciais. Além disso, para aplicação da metodologia do Komatsu e Yoon também é necessário calcular o valor dos esforços agindo em cada segmento, tarefa esta que pode ser complicada dependendo da quantidade de segmentos e forças e/ou momentos presentes no modelo.

Os mesmos comentários acima são válidos para o modelo considerando simultaneamente a flexibilidade dos segmentos e das articulações, Tab. 5.5.

Desta forma, para efeito de padronização de cálculo para diferentes tipos de estruturas e pela facilidade de implementação computacional, o melhor método de cálculo é o *MSA*. Poderia ser considerada uma desvantagem do método *MSA* o fato do não conhecimento dos parâmetros das articulações. Mas tanto para o método *MSA* como para os outros, os parâmetros das articulações devem ser obtidos por catálogos ou por testes experimentais.

A utilização do método *FEA* apresenta resultados satisfatórios, mas sua grande dificuldade é a necessidade da construção de um modelo para cada posição a ser analisada e a obtenção de sua malha, para depois aplicar um programa (*solver*) de elementos finitos. Assim, por exemplo, para realização do mapeamento da rigidez da estrutura, a utilização do método *FEA* é inconveniente.

Uma ressalva é feita a respeito da metodologia proposta por Ceccarelli e Carbone (2002); Carbone et al. (2002a; 2002b); Ceccarelli, (1998); Ceccarelli (2004) e Carbone (2003a; 2003b), apresentada no Capítulo III. Esta metodologia denominada “Component Matrix Formulation” necessita da obtenção de um modelo formado por molas em que os seus parâmetros de rigidez concentrados devem ser agrupados em função de cada modelo de estrutura. Este procedimento é de difícil aplicação e padronização, além de ser hipotética e subjetiva a adoção de quais parâmetros de rigidez concentrados utilizar e como agrupar estes parâmetros.

A seguir é apresentada a modelagem de uma estrutura, utilizando-se *MSA*, com a utilização de uma articulação entre os segmentos para mostrar a viabilidade da modelagem da articulação como proposta nesta tese.

5.2. Visualização do Efeito da Articulação no modelo *MSA*.

Para permitir uma melhor visualização do efeito de uma articulação quando se aplica o *MSA*, a seguir é apresentada uma estrutura que, inicialmente, possui ligações rígidas, Fig. 5.8(a). Posteriormente, é considerada uma articulação de rotação entre o segmento horizontal e vertical, Fig. 5.9(a).

Considerando então, a estrutura representada na Fig. 5.8(a), composta por um segmento horizontal e um vertical, unidos rigidamente e engastadas na outra extremidade. Para análise, o segmento vertical foi dividido para permitir a aplicação de uma força horizontal. Desta forma, os nós constituindo a estrutura foram definidos conforme esquematizado na Fig. 5.8(b). O segmento 1-2 possui comprimento de 300 mm , os segmentos 2-3; 2-4 e 4-5 possuem comprimento de 150 mm . Os segmentos são modelados como vigas de aço com seção transversal circular e diâmetro de 5 mm . A Figura 5.8(c) ilustra a estrutura sem aplicação de esforços (linha tracejada) e em linha contínua apresenta a mesma estrutura deformada, sobre a ação de uma força de 50 N , aplicada no nó 4, na direção do eixo X .

Na Tabela 5.6 são apresentados os deslocamentos flexíveis para cada nó.

Tabela 5.6. Deslocamentos Flexíveis correspondentes ao exemplo da Fig. 5.8.

$\{u\}$	Nós				
	1	2	3	4	5
$\delta_x\text{ [m]}$	0	0,00000354328434	0,00000354336783	0,00190793377733	0
$\delta_y\text{ [m]}$	0	0,00000008210978	0,00304106811702	0,00000004105220	0
$\delta_z\text{ [m]}$	0	0	0	0	0
$\phi_x\text{ [rad]}$	0	0	0	0	0
$\phi_y\text{ [rad]}$	0	0	0	0	0
$\phi_z\text{ [rad]}$	0	0,02027324008305	0,02027324008413	-0,00508602686017	0

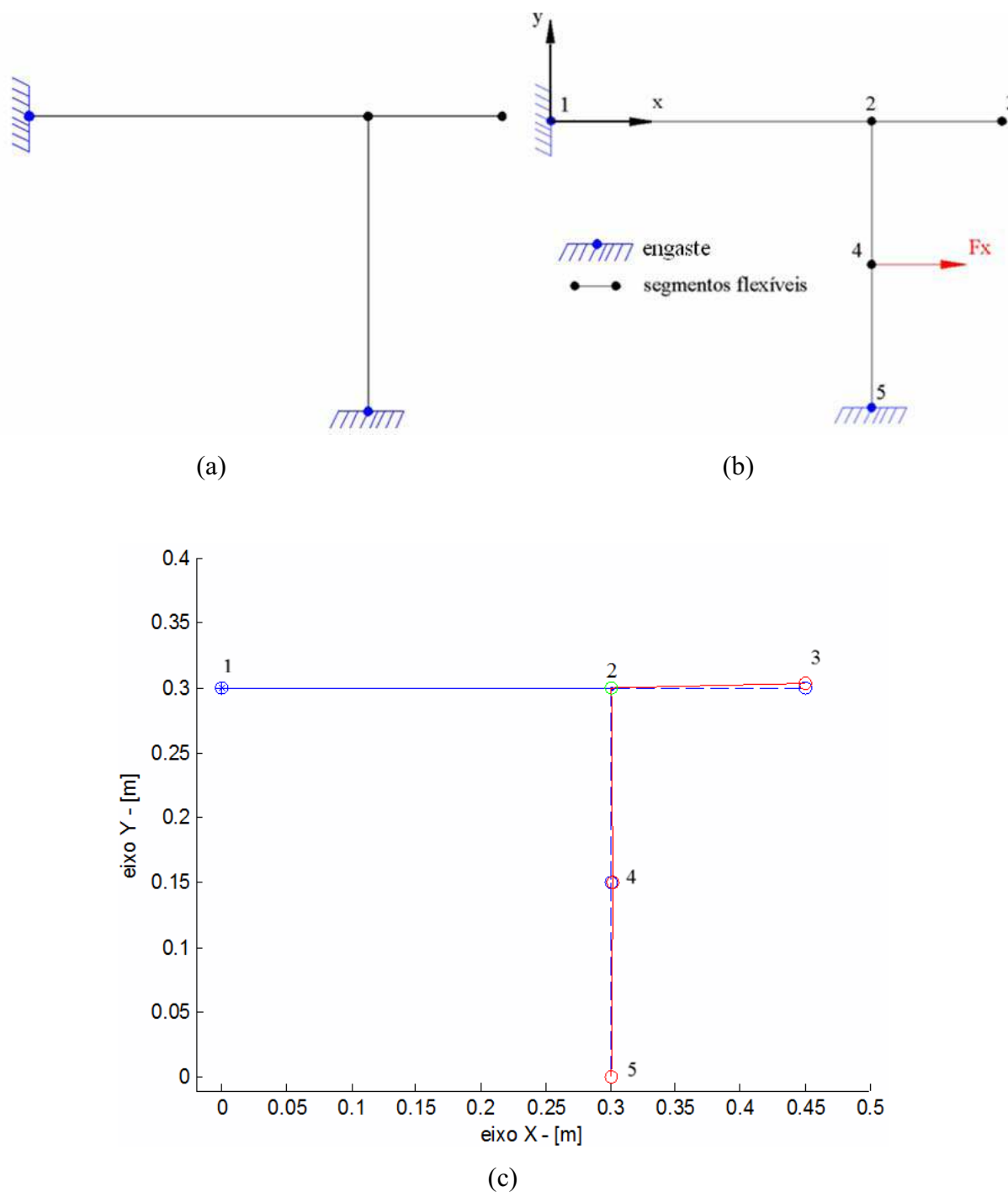


Figura 5.8 – a) Modelo sem articulação; b) Modelo *MSA*; c) deslocamentos flexíveis.

A estrutura original, Fig. 5.8(a), foi alterada pela inclusão de uma articulação de rotação separando-a no nó 2, conforme esquematizado na Fig. 5.9(a), sendo representada pelos nós 6-2, Fig. 5.9(b). O movimento de rotação da articulação é em torno do eixo z .

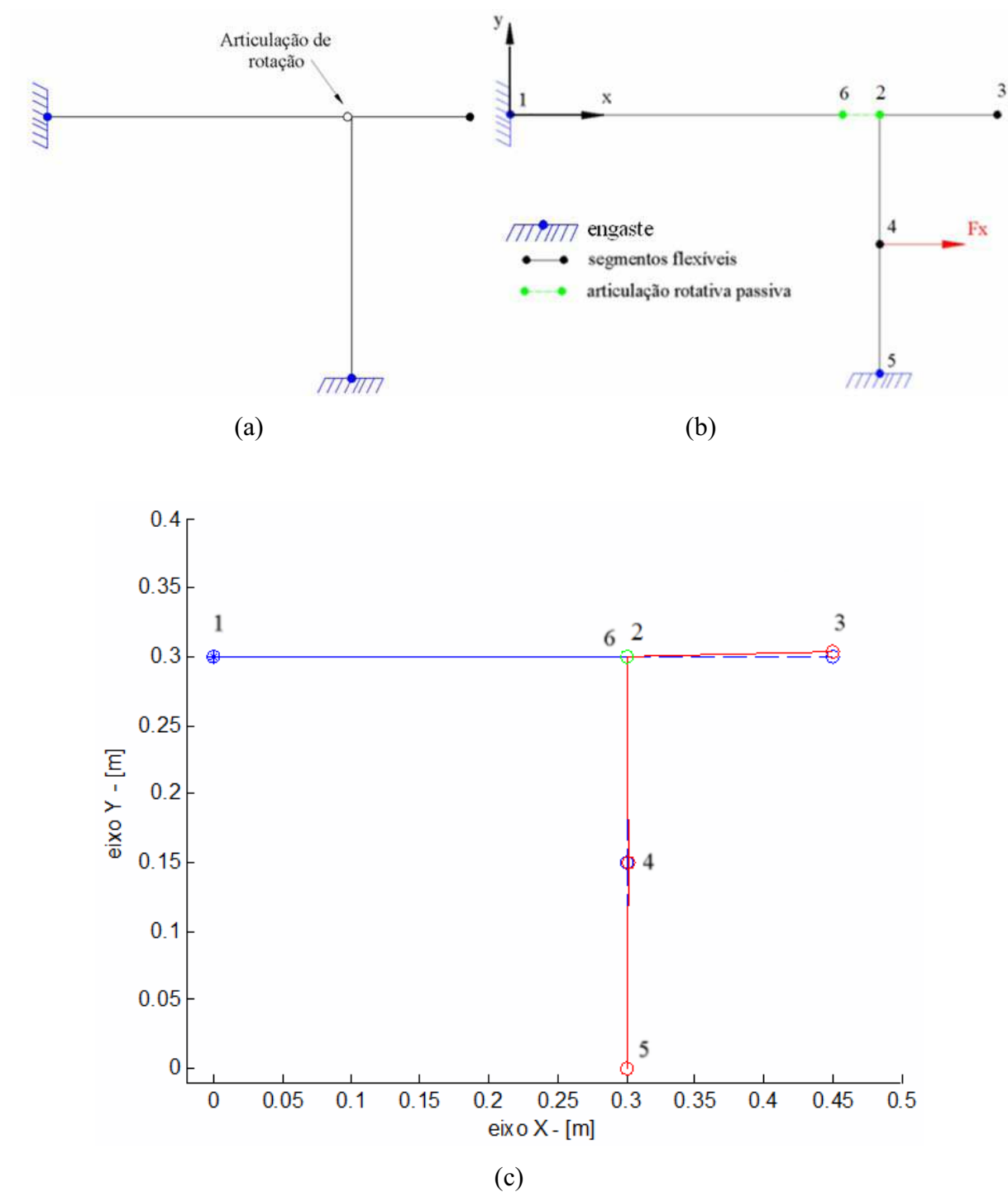


Figura 5.9 – a) Modelo com articulação; b) Modelo *MSA*; c) deslocamentos flexíveis.

A articulação rotativa possui o termo $k_{rz} = 0$, isto é, livre para girar em torno do eixo z . Para os outros parâmetros da articulação, para efeito de simulação computacional, foram utilizados $k_{lx} = k_{ly} = k_{lz} = 2e^{11} \text{ N/m}$ e $k_{ax} = k_{ay} = 2e^{11} \text{ N m/rad}$ definindo elevada rigidez nas

demais direções. Estes valores foram obtidos a partir de simulações computacionais de tal forma que a rigidez nestas direções da articulação não afetasse os deslocamentos finais.

Tabela 5.7. Deslocamentos Flexíveis correspondentes ao exemplo da Fig. 5.9.

	Nós					
$\{u\}$	1	6	2	3	4	5
δ_x [m]	0	0,000003315	0,000003315	0,000003315	0,002006388	0
δ_y [m]	0	0	0	0,003435260	0	0
δ_z [m]	0	0	0	0	0	0
ϕ_x [rad]	0	0	0	0	0	0
ϕ_y [rad]	0	0	0	0	0	0
ϕ_z [rad]	0	0	0,0229	0,022901735	-0,005742010	0

Na Tabela 5.7, pelo princípio da compatibilidade de deslocamentos, os nós 2 e 6 devem possuir os mesmos deslocamentos flexíveis em todas as direções menos a rotação em torno do eixo z.

Este exemplo também permite verificar o comportamento físico da estrutura quando todos os parâmetros da articulação são iguais à zero, ou seja:

$$k_{lx} = k_{ly} = k_{lz} = k_{ax} = k_{ay} = k_{az} = 0 \quad (5.36)$$

Neste caso, a estrutura deve comportar-se como duas estruturas separadas, como se a articulação não existisse. A primeira estrutura é formada por um segmento horizontal, nós 1-2, e a segunda formada pelos nós 5-4-2-3. A construção do modelo *MSA* é feita utilizando-se da numeração dos nós, Anexo I e, mesmo neste caso, o modelo *MSA* fornece os resultados corretos.

A aplicação de uma força $F_x = 50 \text{ N}$ no nó 4 provoca deslocamentos flexíveis somente na segunda estrutura e nenhum deslocamento flexível na primeira, conforme representado na Fig. 5.10.

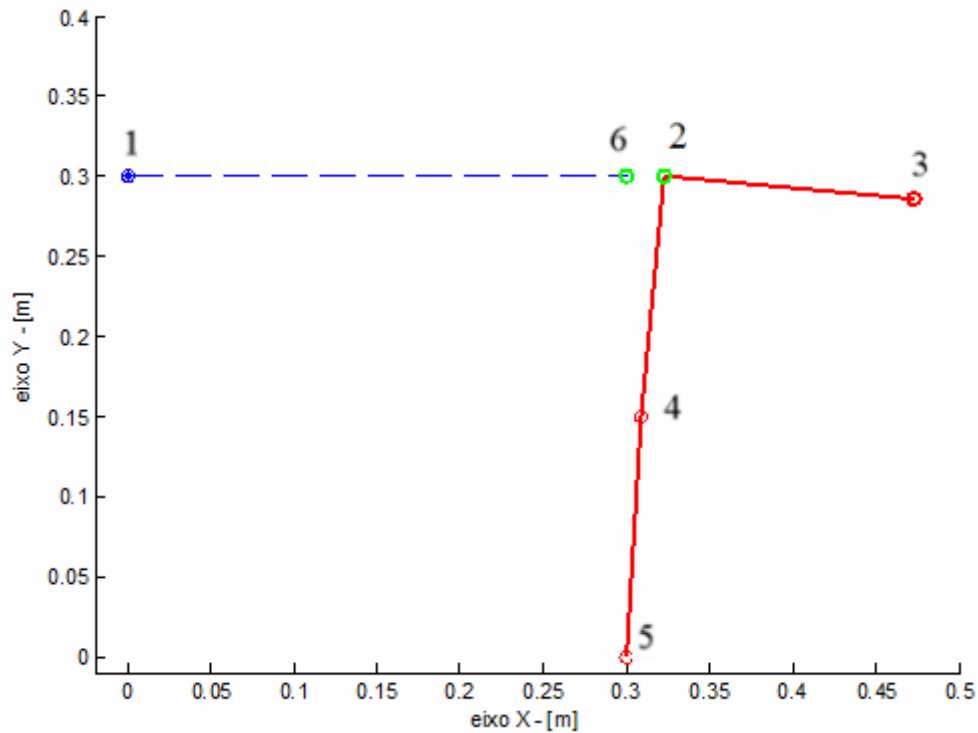


Figura 5.10 – Modelagem da estrutura considerando a articulação inexistente $k_{lx} = k_{ly} = k_{lz} = k_{ax} = k_{ay} = k_{az} = 0$.

No próximo exemplo é realizada análise utilizando-se da metodologia *MSA* para uma estrutura robótica paralela.

5.3. Modelagem da Estrutura Robótica Paralela 6-RSS.

Para motivo de simplificação, nesta modelagem é considerada somente a flexibilidade dos segmentos. Assim, para a estrutura paralela 6-RSS, os braços e antebraços são modelados como sendo segmentos e a montagem da matriz de rigidez da estrutura é realizada em função de como os elementos estão arranjados na estrutura, através dos nós, Fig. 5.11, (Gonçalves e Carvalho, 2008a; 2008b). Este modelo é composto por 19 nós e 18 segmentos.

Para modelagem da estrutura 6-RSS é necessário conhecer as coordenadas dos pontos: b_1 ; S_1 ; p_1 ; Q ; b_2 ; S_2 ; p_2 ; b_3 ; S_3 ; p_3 ; b_4 ; S_4 ; p_4 ; b_5 ; S_5 ; p_5 ; b_6 ; S_6 e p_6 correspondentes aos nós 1 até o 19, respectivamente, Fig. 5.11. A obtenção destas coordenadas é feita utilizando-se o modelo cinemático da estrutura (Bezerra, 1996) e (Carvalho, et al., 2001).

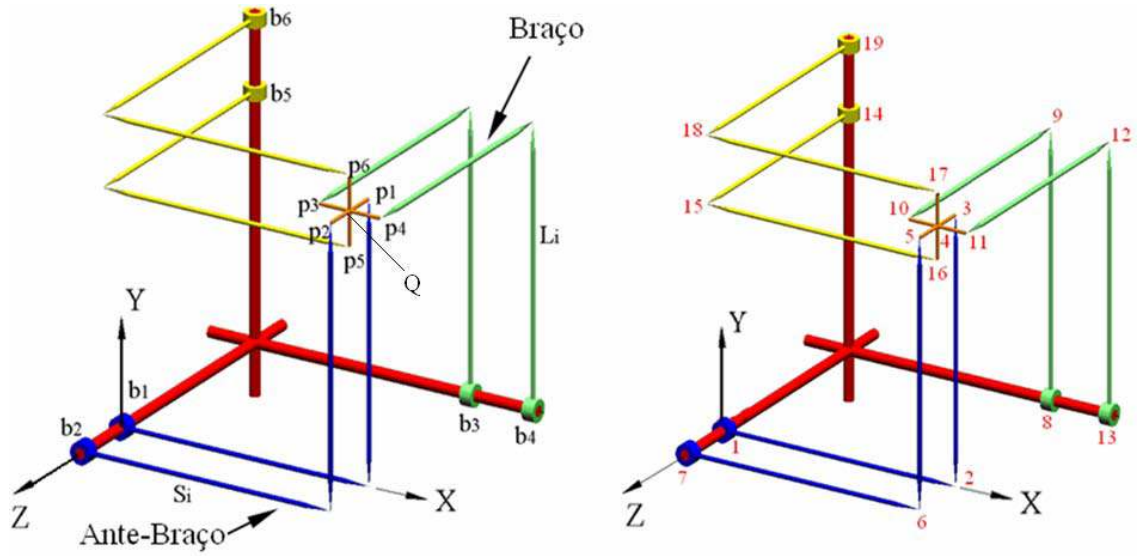


Figura 5.11 – Modelo da Estrutura 6-RSS para o cálculo de sua matriz de rigidez.

Para a modelagem foram utilizados os seguintes parâmetros: comprimentos dos braços e antebraços iguais a 300 mm ; $|b_1b_2| = |b_3b_4| = |b_5b_6| = |p_1p_2| = |p_3p_4| = |p_5p_6| = 76\text{ mm}$; sendo os segmentos construídos em aço com $E = 2e^{11}\text{ N/m}^2$, $G = 0.8e^{11}\text{ N/m}^2$ e seção transversal circular com diâmetro de 5 mm .

Como cada segmento possui uma orientação arbitrária no espaço, é necessário fazer a transformação de coordenadas, para cada segmento, de forma a obter sua matriz de rigidez no sistema de referencia inercial.

Utilizando os conceitos desenvolvidos no Capítulo IV e Anexo I, é possível obter a matriz de rigidez para estrutura completa que, no caso, é uma matriz quadrada 114×114 ($19\text{ nós} \times 6\text{ gdl}$), que corresponde ao número de nós (19) multiplicado pelo número de graus de liberdade de cada nó (6). Esta matriz, conforme descrito anteriormente, é uma matriz singular. Aplicando as condições de contorno que, neste caso, os atuadores foram considerados bloqueados e, portanto, os antebraços podem ser considerados engastados nas articulações de rotação (nós $1, 7, 8, 13, 14$ e 19), obtém-se uma matriz de dimensões 78×78 que permite realizar o cálculo dos deslocamentos flexíveis dos demais nós com o uso da Eq. (4.23), ou seja:

$$\{\mathbf{u}\} = [\mathbf{K}]^{-1} \{\mathbf{W}\} \quad (5.37)$$

Os esforços: forças e momentos externos, são aplicados no ponto Q , nó 4, que constitui o centro do elemento terminal da estrutura 6-RSS. Desta forma é possível calcular os deslocamentos flexíveis deste ponto que é fundamental para a estrutura robótica, pois é neste ponto que é fixada a ferramenta para uma operação específica.

Nas Tabelas 5.8, 5.9 e 5.10 estão apresentados os valores obtidos dos deslocamentos flexíveis do centro do elemento terminal em três configurações diferentes. Esta formulação pode ser também usada para calcular os valores extremos da rigidez para todo o espaço de trabalho da estrutura. Nas Tabelas, F_e representa as forças externas, $F_e = [F_x \ F_y \ F_z]$ e T_e os torques externos, $T_e = [M_x \ M_y \ M_z]$.

Para verificação do modelo proposto utilizando-se da modelagem pelo método *MSA*, foi construído um modelo em elementos finitos utilizando-se do software Ansys®, cujos resultados são apresentados na Tabela 5.8. Para o modelo *FEA* foi utilizado o elemento de viga *BEAM4* para a modelagem dos segmentos, com as mesmas propriedades do modelo *MSA*, sendo que cada segmento foi dividido em dez partes.

Tabela 5.7. Deslocamentos flexíveis do ponto Q do manipulador 6-RSS quando $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \theta_4 = \theta_5 = \theta_6 = 0^\circ$.

{ u }	$F_e = (10, 0, 0)$ [N] $T_e = (0, 0, 0)$ [Nm]		$F_e = (0, 10, 0)$ [N] $T_e = (0, 0, 0)$ [Nm]		$F_e = (0, 0, 10)$ [N] $T_e = (0, 0, 0)$ [Nm]		$F_e = (10, 10, 10)$ [N] $T_e = (0, 0, 0)$ [Nm]	
	MSA	FEA	MSA	FEA	MSA	FEA	MSA	FEA
δ_x [m]	0,002168	0,002173	-0,000532	-0,000534	-0,000532	-0,000534	0,001103	0,001105
δ_y [m]	-0,000532	-0,000534	0,002168	0,002173	-0,000532	-0,000534	0,001103	0,001105
δ_z [m]	-0,000532	-0,000534	-0,000532	-0,000534	0,002168	0,002173	0,001103	0,001105
ϕ_x [rad]	0,000857	0,000854	-0,005384	-0,005378	0,001701	0,001727	-0,002826	-0,002796
ϕ_y [rad]	0,001701	0,001727	0,000857	0,000854	-0,005384	-0,005378	-0,002826	-0,002796
ϕ_z [rad]	-0,005384	-0,005378	0,001701	0,001727	0,000857	0,000854	-0,002826	-0,002796

Tabela 5.9. Deslocamentos flexíveis obtidos pelo método *MSA* para o ponto *Q* do manipulador 6-RSS quando $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \theta_4 = \theta_5 = \theta_6 = 10^\circ$.

$\{u\}$	$F_e = (10, 0, 0)$ [N] $T_e = (0, 0, 0)$ [Nm]	$F_e = (0, 10, 0)$ [N] $T_e = (0, 0, 0)$ [Nm]	$F_e = (0, 0, 10)$ [N] $T_e = (0, 0, 0)$ [Nm]	$F_e = (10, 10, 10)$ [N] $T_e = (0, 0, 0)$ [Nm]
δ_x [m]	0,002272	-0,000779	-0,000779	0,000713
δ_y [m]	-0,000779	0,002272	-0,000779	0,000713
δ_z [m]	-0,000779	-0,000779	0,002272	0,000713
ϕ_x [rad]	0,001356	-0,006122	0,001777	-0,002989
ϕ_y [rad]	0,001777	0,001356	-0,006122	-0,002989
ϕ_z [rad]	-0,006122	0,001777	0,001356	-0,002989

Tabela 5.10. Deslocamentos flexíveis obtidos pelo método *MSA* para o ponto *Q* do manipulador 6-RSS quando $\theta_1 = 1,5^\circ$; $\theta_2 = 5^\circ$; $\theta_3 = 1,5^\circ$; $\theta_4 = 3,5^\circ$; $\theta_5 = 3^\circ$; $\theta_6 = 1^\circ$.

$\{u\}$	$F_e = (10, 0, 0)$ [N] $T_e = (1, 0, 0)$ [Nm]	$F_e = (0, 10, 0)$ [N] $T_e = (0, 1, 0)$ [Nm]	$F_e = (0, 0, 10)$ [N] $T_e = (0, 0, 1)$ [Nm]	$F_e = (10, 10, 10)$ [N] $T_e = (1, 1, 1)$ [Nm]
δ_x [m]	0,002366	-0,000456	-0,001146	0,000763
δ_y [m]	-0,001190	0,002302	-0,000462	0,000650
δ_z [m]	-0,000391	-0,001196	0,002283	0,000696
ϕ_x [rad]	0,008324	-0,005218	0,002089	0,005195
ϕ_y [rad]	0,002119	0,008197	-0,005136	0,005179
ϕ_z [rad]	-0,005466	0,002205	0,007933	0,004672

Pode-se observar na Tab. 5.8, para a condição inicial ($\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \theta_4 = \theta_5 = \theta_6 = 0^\circ$), que as forças aplicadas na direção dos eixos Cartesianos produzem os mesmos deslocamentos nestas direções quando as outras forças são iguais à zero. Se os mesmos valores de esforços são aplicados em todas as direções dos eixos Cartesianos, simultaneamente, os deslocamentos flexíveis são iguais. Isto se deve à modularidade da estrutura visto que os segmentos RS-SS, montados em cada eixo do referencial Cartesiano, são todos iguais. O mesmo fato, presente na Tab. 5.8, é observado na Tab. 5.9 quando todos os ângulos são iguais a 10° . A Tabela 5.10 apresenta os resultados dos deslocamentos flexíveis para uma configuração arbitrária da estrutura robótica 6-RSS quando submetida a esforços generalizados.

Os programas utilizados neste Capítulo estão no Anexo II.

5.4. Conclusões

Neste Capítulo foi apresentada uma comparação entre as principais metodologias de cálculo para determinação dos deslocamentos flexíveis. Os procedimentos utilizados apresentaram resultados semelhantes.

O procedimento *MSA*, mostrou-se melhor para efeito de padronização, isto é, aplicação para diferentes tipos de estruturas robóticas, e de implementação computacional, além de não ser necessário o cálculo de equações diferenciais como é o caso dos métodos baseados no cálculo da matriz Jacobiana.

O método *FEA* é útil para efeitos de comparação dos resultados numéricos e/ou experimentais para configurações específicas, mas não é conveniente para o mapeamento da rigidez, pois é necessária a construção de um modelo em uma determinada posição e a obtenção de sua malha para depois aplicar um programa (*solver*) de elementos finitos, ou seja, a cada configuração a ser estudada, o modelo deve ser refeito.

A comparação entre estas metodologias é uma das contribuições desta tese, mostrando as dificuldades e vantagens da aplicação de cada método.

Deve-se destacar que a comparação entre as metodologias foi realizada para uma estrutura serial devido à dificuldade de cálculo da matriz Jacobiana para as estruturas paralelas considerando-se a deformação dos segmentos e articulações. Este exemplo demonstra que o modelo *MSA* pode ser aplicado a qualquer tipo de estrutura.

Foi apresentado um exemplo de um modelo de uma estrutura utilizando-se *MSA* para mostrar o efeito da articulação no modelo conforme proposto nesta tese. Foi verificado que, mesmo no caso da modelagem da articulação “inexistente”, o modelo *MSA* forneceu os resultados esperados.

Finalmente, a modelagem *MSA* foi aplicada em uma estrutura robótica paralela tridimensional com 6 gdl mostrando que mesmo para uma estrutura tridimensional a metodologia *MSA* pode ser aplicada facilmente.

No próximo Capítulo será apresentado à correlação entre rigidez e posições singulares nas estruturas robóticas.

CAPÍTULO VI

CORRELAÇÃO ENTRE RIGIDEZ E SINGULARIDADE

Configurações singulares são posições particulares em que o sistema multicorpo se torna incontrolável e que devem ser evitadas durante a operação do sistema. No caso das estruturas robóticas paralelas, a identificação das singularidades é um dos problemas em aberto que é tema de estudo de vários pesquisadores. Neste Capítulo são apresentados o estudo das singularidades para estruturas robóticas seriais e paralelas utilizando-se o Jacobiano e um novo método de análise das singularidades, para estruturas paralelas utilizando-se da teoria de *MSA* e de números condicionais. Esta metodologia é aplicada ao paralelogramo articulado (mecanismo plano simétrico de quatro barras) e na estrutura robótica paralela plana 5R. Também é apresentado o cálculo de uma posição de singularidade utilizando-se do método *MSA* para uma estrutura robótica paralela espacial. Os resultados obtidos são comparados com resultados disponíveis na literatura.

6.1. Introdução

Em configurações singulares, uma estrutura paralela pode apresentar mudanças significativas de comportamento, tornando-se mesmo incontrolável. De modo a prever estas situações indesejáveis, geralmente é feita a análise da matriz Jacobiana para determinar as configurações singulares (Tsai, 1999).

Para cadeias cinemáticas abertas, a condição de singularidade é função das articulações intermediárias e independentes da primeira e última articulação. Isto ocorre porque a presença de singularidades depende somente da posição relativa dos eixos das articulações (Tsai, 1999).

Vários estudos têm sido realizados sobre as singularidades que ocorrem nas estruturas paralelas. Pode-se observar que estas singularidades estão diretamente relacionadas com a

rigidez da estrutura paralela. Assim, a caracterização de uma estrutura paralela para aplicações práticas, requer uma avaliação adequada do comportamento de sua rigidez (Gosselin, 1990; Griffis e Duffy, 1991).

Então, o projeto mecânico de sistemas baseados neste tipo de cadeia cinemática, além de usar critérios tais como espaço de trabalho e mobilidade, deve também considerar estas singularidades. Para isto, pode-se elaborar um “mapeamento” do espaço de trabalho da estrutura permitindo verificar as regiões nas quais estas singularidades acontecem (Gosselin, 1990; Sefrioui e Gosselin, 1995) e, conseqüentemente, verificar o comportamento da rigidez da estrutura e vice-versa.

A seguir é detalhado o cálculo das singularidades utilizando-se do Jacobiano e suas dificuldades de aplicação. Posteriormente, é apresentado o procedimento para determinar as singularidades utilizando o método *MSA* e de números condicionais. Finalmente são apresentados alguns exemplos para identificar as singularidades, sendo comparados com exemplos presentes na literatura.

6.2. Análise das Singularidades

6.2.1. Cálculo das Singularidades Utilizando-se da Matriz Jacobiana

Como apresentado no Capítulo III, o Jacobiano da estrutura robótica serial transforma a variação das coordenadas generalizadas, $\delta \mathbf{q}$, em variação de coordenadas operacionais, $\delta \mathbf{x}$, pela Eq. (3.3), ou seja:

$$\delta \mathbf{x} = \mathbf{J}_s \delta \mathbf{q} \quad (6.1)$$

Para obter as singularidades é suficiente verificar as configurações em que a Eq. (6.1) não seja inversível, isto é, basta que o determinante do Jacobiano se anule.

Conforme apresentado no Capítulo III, para as cadeias cinemáticas fechadas, o Jacobiano corresponde ao inverso do Jacobiano da estrutura serial, ou seja:

$$\delta \mathbf{q} = \mathbf{J}_p \delta \mathbf{x} \quad (6.2)$$

sendo

$$J_p = J_q^{-1} J_x \quad (6.3)$$

Neste caso, as singularidades das cadeias cinemáticas fechadas são descritas em função de J_q e J_x .

Devido à existência de duas matrizes Jacobianas, uma estrutura fechada pode ter configurações singulares quando cada matriz J_q , J_x ou ambas forem singulares. Assim, Tsai (1999) dividiu as singularidades das cadeias cinemáticas fechadas em três tipos: singularidade direta; inversa e combinada. A singularidade direta também é chamada singularidade paralela (*“Parallel Singularity”*)

Quando o determinante da matriz J_q torna-se nulo, o mecanismo está numa configuração singular que significa que ele alcançou as fronteiras do espaço de trabalho, que são dependentes, por exemplo, das dimensões de suas peças e dos cursos dos atuadores. Assim, a estrutura perde um ou mais graus de mobilidade (Hess-Coelho, 2005). Neste caso é denominada singularidade inversa.

No caso em que o determinante de J_x torna-se nulo, o mecanismo torna-se incontrolável. Mesmo se os eixos de saída dos atuadores estiverem travados, o elemento terminal pode executar movimentos não previstos e o mecanismo adquire graus de mobilidade adicionais, porém inúteis. Este tipo de singularidade é denominado singularidade direta.

Quando tanto J_q como J_x forem nulos, a singularidade é denominada combinada.

A Figura 6.1 representa uma situação onde o mecanismo plano 5R apresenta singularidades do tipo $J_q = 0$, (Fig. 6.1a), e $J_x = 0$, (Fig. 6.1b).

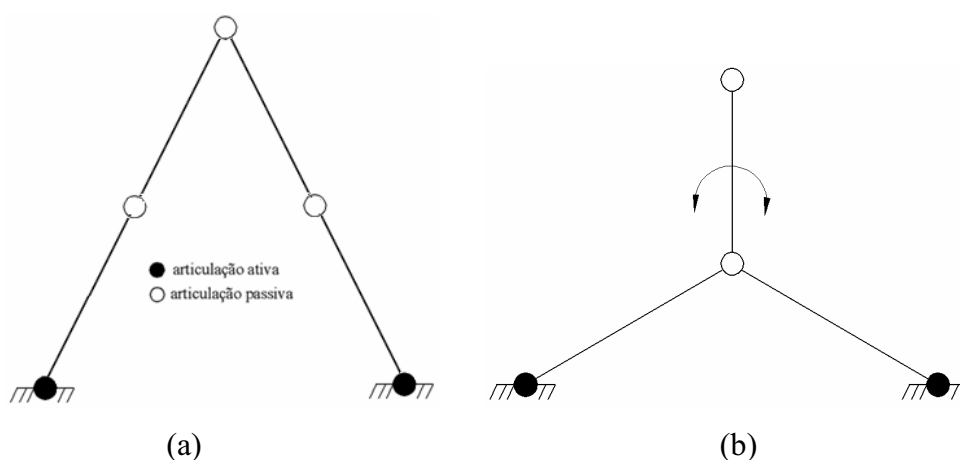


Figura 6.1 – Singularidades do mecanismo 5R₁ (a) singularidade inversa; (b) singularidade direta (Hess-Coelho, 2005).

Para evitar que uma estrutura atinja configurações singulares, algumas estratégias foram propostas como: utilização de mecanismos redundantes; redução do espaço de trabalho disponível, o que significa que o elemento terminal se moverá num espaço de trabalho menor do que o possível que não contenha singularidades (Macho et al., 2008); seleção de trajetórias alternativas para o elemento terminal que seja livre de singularidades dentro do espaço de trabalho possível (Figielski et al., 2007). A redundância em estruturas paralelas pode ser de dois tipos: redundância cinemática, quando são adicionadas cadeias cinemáticas ativas entre a base e a plataforma móvel; e a redundância de atuação, quando contém um número maior de atuadores do que o necessário para posicionar e orientar o elemento terminal, Fig. 6.2 (Park e Kim, 1999; Gogu, 2007, Carretero et al., 2008).

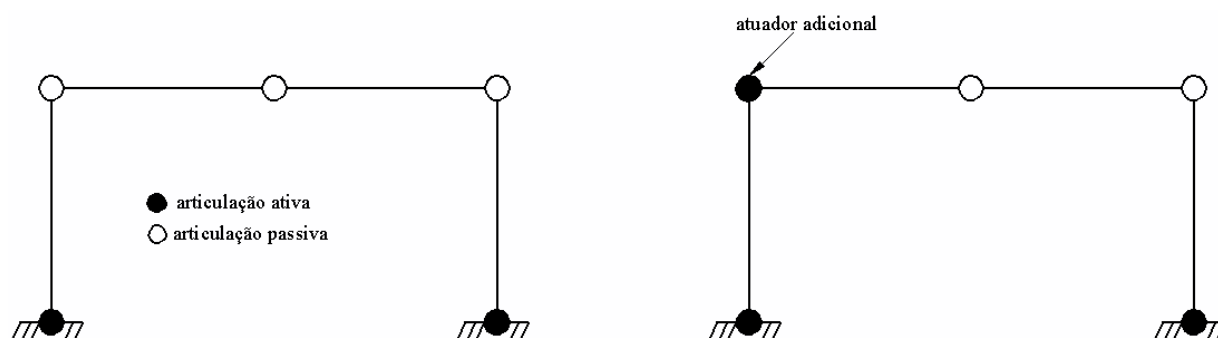


Figura 6.2 – Emprego de atuadores adicionais para evitar os efeitos indesejáveis das singularidades (Hess-Coelho, 2005).

O processo convencional de obtenção das equações de velocidade entrada-saída dos mecanismos paralelos consiste em diferenciar as equações do modelo cinemático inverso. Geralmente, este processo é tedioso e leva à possibilidade de erros de parametrização (Bonev et al., 2003). Dash et al. (2004), afirmam que para determinar as configurações singulares, o caminho clássico é encontrar as raízes do determinante das matrizes Jacobianas do manipulador. Entretanto, no caso das estruturas paralelas, a matriz J_x é complicada, devido ao fato de seu modelo cinemático direto ser de difícil solução, consequentemente, achar as raízes é difícil.

Yang (2001) afirma que encontrar as raízes da matriz Jacobiana, relativa ao modelo cinemático inverso, J_q , é mais simples devido ao fato de sempre apresentar-se como uma matriz diagonal, que não é o caso das singularidades devido ao modelo cinemático direto.

Além dos problemas citados anteriormente sobre o uso das matrizes Jacobianas, a resolução das raízes do determinante de J_x leva a um consumo de tempo computacional alto, mesmo com a ajuda de um software de matemática simbólica como, por exemplo, o software Maple[®], devido ao fato das equações serem altamente não lineares (Mbarek et. al, 2007). A metodologia do cálculo das matrizes Jacobianas então pode ser aplicada eficientemente apenas para estruturas paralelas particulares (Sefrioui e Gosselin, 1995; Fioretti, 1994; Gosselin, 1990).

Na literatura, além do cálculo da matriz Jacobina, existem outros procedimentos para o cálculo das posições singulares. Mbarek et al., (2007) usa o cálculo do número condicional para determinar as configurações singulares. Liu et al. (2006a) utiliza o número condicional aplicado à matriz Jacobiana. Mbarek et al. (2007) afirma que esta abordagem não fornece pistas sobre o comportamento do manipulador paralelo nem certezas sobre a ausência de singularidades entre duas posições singulares durante o movimento da plataforma.

Também é possível realizar a análise das singularidades para os manipuladores paralelos utilizando-se da teoria “Grassmann line geometry” (Merlet, 1989; Ben-Horin e Shoham, 2005). Este procedimento permite a redução do tempo computacional ao mesmo tempo em que permite uma avaliação do processo que causa a perda de rigidez da estrutura paralela (Mbarek et al., 2007).

6.2.2. Cálculo das Singularidades Utilizando-se *MSA*

Como a singularidade leva a uma mudança instantânea do número de graus de liberdade do mecanismo, deve-se evitar estas posições.

Sabe-se que nas configurações de singularidades a rigidez inerente do sistema robótico muda repentinamente. Nestas posições, os deslocamentos flexíveis tornam-se muito grandes frente aos deslocamentos flexíveis nas posições fora das configurações singulares.

Nesta tese é proposta uma nova metodologia de análise das singularidades, aplicada às estruturas paralelas, a partir do estudo de rigidez da estrutura robótica utilizando-se da metodologia *MSA*.

O método de cálculo das singularidades de estruturas paralelas, proposto nesta tese, é realizado através do mapeamento do espaço de trabalho da estrutura robótica. Este mapeamento é feito dentro do modelo *MSA* pela variação das coordenadas articulares isto é, através do modelo cinemático da estrutura. Assim, basta realizar o mapeamento da rigidez no

espaço de trabalho da estrutura e identificar, quando aplicada uma força unitária generalizada, os deslocamentos flexíveis “exorbitantes”, isto é, as configurações em que a estrutura perde sua rigidez inerente.

Nesta tese é ainda proposto um segundo procedimento para verificação das posições singulares por meio do cálculo dos números condicionais aplicados à matriz de rigidez da estrutura, utilizando-se do método *MSA*. Os números condicionais aplicados a uma matriz medem a sensibilidade da solução do sistema de equações lineares em função dos erros nos dados de entrada. Eles fornecem uma indicação da acuracidade dos resultados da inversão da matriz. Assim, um número de condicionamento alto indica uma matriz mal condicionada, que indica a posição de singularidade do sistema multicorpo. Nesta tese, os números condicionais são aplicados à matriz de rigidez da estrutura após a aplicação das condições de contorno.

Existem diversos números condicionais que são baseados no cálculo das normas de uma matriz (Meyer, 2000).

As principais normas, ($\| \cdot \|$), utilizadas para uma matriz A são:

$$\begin{aligned}\|A\|_1 &= \max_j \sum_{i=1}^n \|a_{ij}\| \quad (\text{máxima soma absoluta de colunas de } A) \\ \|A\|_2 &= \left[\text{máx auto valor de } A^T A \right]^{1/2} = \text{max valor singular de } A \\ \|A\|_\infty &= \max_i \sum_{j=1}^n \|a_{ij}\| \quad (\text{máxima soma absoluta de linhas de } A)\end{aligned}\tag{6.4}$$

Fazendo, na Eq. (6.4), $A = K$, o cálculo do número de condicionamento pode ser realizado como (Meyer, 2000):

$$\text{cond}(K) = \|K\| * \|K^{-1}\|\tag{6.5}$$

Sendo a matriz de rigidez dependente da configuração da estrutura, é possível fazer o mapeamento do espaço de trabalho da estrutura robótica paralela utilizando-se de uma rotina computacional. Simultaneamente com o mapeamento do espaço de trabalho é aplicado o método *MSA* calculando-se a matriz de rigidez da estrutura bem como o cálculo do número condicional, conforme fluxograma da Fig. 6.3. Pelo cálculo do número condicional é possível determinar as posições singulares.

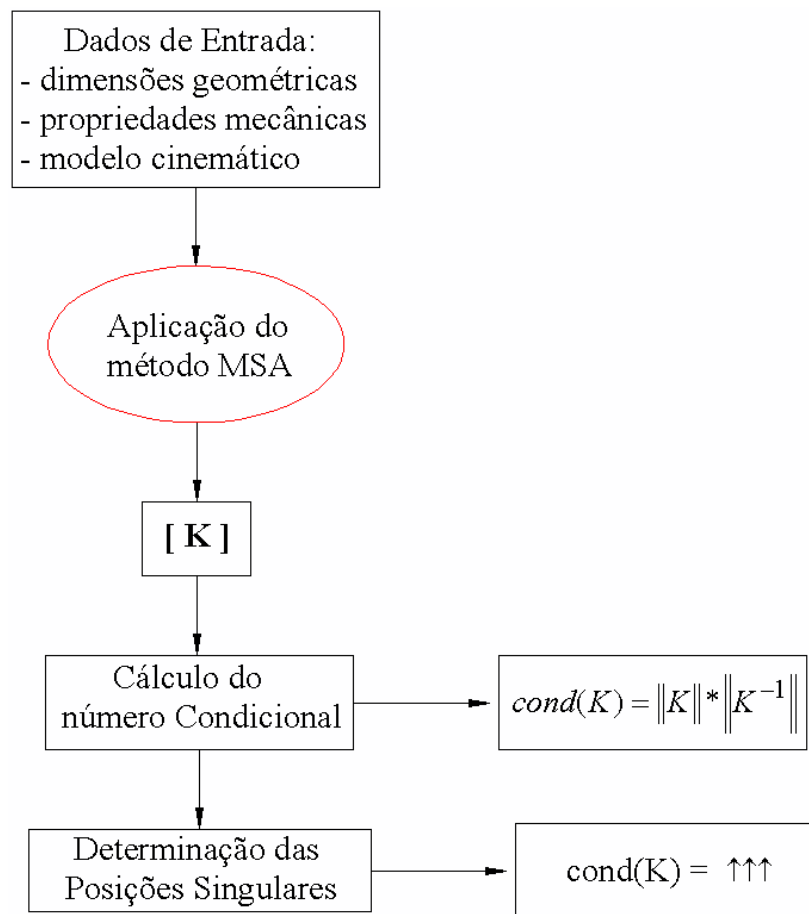


Figura 6.3 – Diagrama para a determinação das posições singulares.

Deve-se destacar que a metodologia proposta para identificação das singularidades é aplicada às estruturas robóticas paralelas, não podendo ser aplicada às estruturas robóticas seriais. Como todas as articulações em uma estrutura robótica serial são ativas, estas possuem uma rigidez que podem ser calculadas. Assim, nos casos extremos, uma estrutura serial 3R modelada a partir do modelo *MSA*, seria nas posições singulares ou uma viga continua (quando todas as articulações fossem totalmente rígidas) ou um pêndulo com 3 gdl (quando todas as articulações fossem passivas, isto é, a rigidez na direção do eixo de rotações iguais a zero). A Figura 6.4 representa as posições singulares do manipulador robótico serial 3R (Tsai, 1999). A metodologia *MSA* continua válida para o cálculo dos deslocamentos flexíveis para estruturas seriais como apresentado nos Capítulos IV e V.

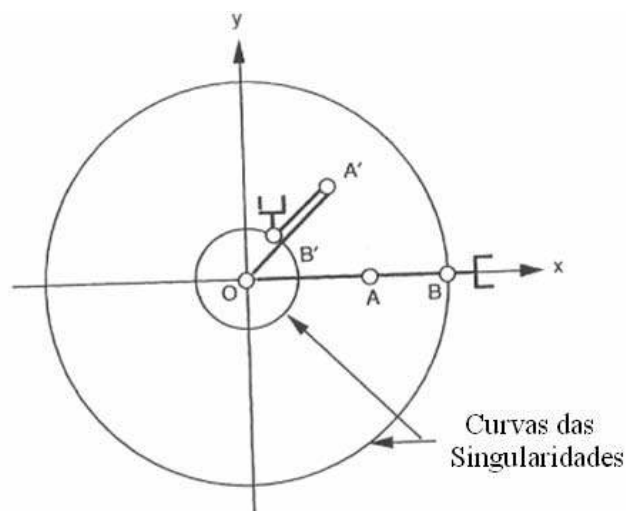


Figura 6.4 – Posições de Singularidade Estrutura Robótica Serial 3R, (Tsai, 1999).

A seguir serão apresentados dois exemplos de mecanismos planos, aplicando-se a metodologia proposta para determinar as singularidades e mapeamento da rigidez.

6.3. Análise das Singularidades do Mecanismo Plano de Quatro Barras Simétrico.

O mecanismo de quatro barras é um dos mais simples mecanismos existentes e presente em varias aplicações de engenharia. Este mecanismo é constituído por três barras móveis e uma barra fixa. A Figura. 6.5 ilustra o mecanismo plano de quatro Barras Simétrico (paralelogramo articulado) e a Fig. 6.6 as suas posições singulares. Neste mecanismo, os comprimentos das manivelas de entrada e saída são iguais, ou seja: $\overline{AB} = \overline{DE}$.

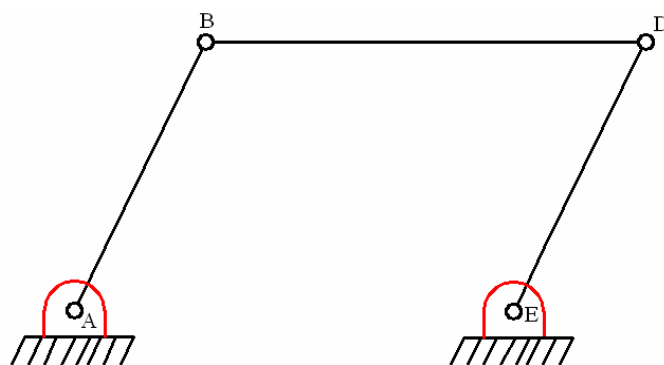


Figura 6.5 – Mecanismo Plano de Quatro Barras Simétrico.

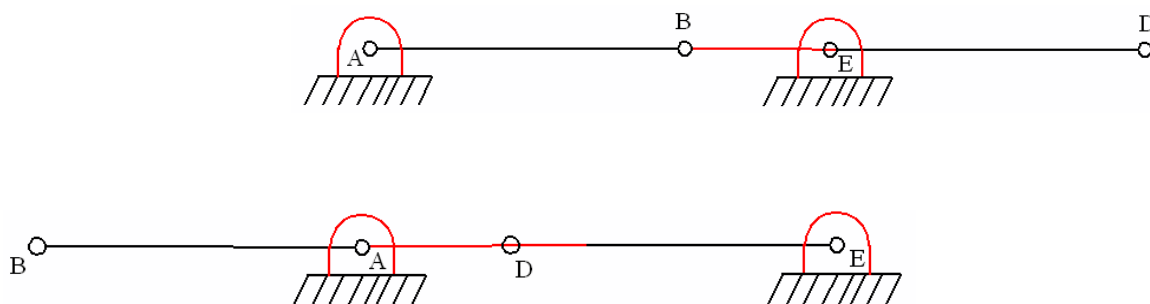


Figura 6.6 – Posições de Singularidade do mecanismo de quatro barras simétrico.

O modelo cinemático é obtido em função da posição dos pontos A , B , P , D e E , conforme Fig. 6.7. A presença do ponto P diz respeito ao ponto de aplicação dos esforços, similar ao ponto central do elemento terminal de uma estrutura paralela plana.

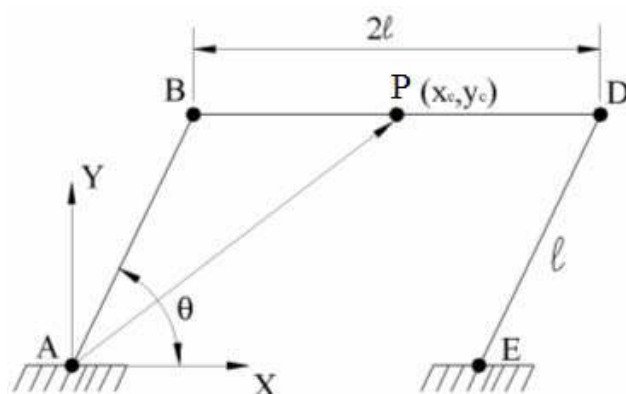


Figura. 6.7 – Representação Esquemática do Mecanismo plano de quatro Barras.

Da Figura 6.7 pode-se escrever:

$$\begin{aligned}
 x_A &= 0; \quad y_A = 0 \\
 x_B &= l \cdot \cos \theta; \quad y_B = l \cdot \sin \theta \\
 x_P &= l \cdot \cos \theta + l; \quad y_P = l \cdot \sin \theta \\
 x_D &= x_E + l \cdot \cos \theta; \quad y_D = l \cdot \sin \theta \\
 x_E &= 2l; \quad y_E = 0
 \end{aligned} \tag{6.6}$$

Para verificar a validade da aplicação da metodologia *MSA* e determinar as posições singulares, o modelo *MSA* foi elaborado conforme apresentado na Fig. 6.8.

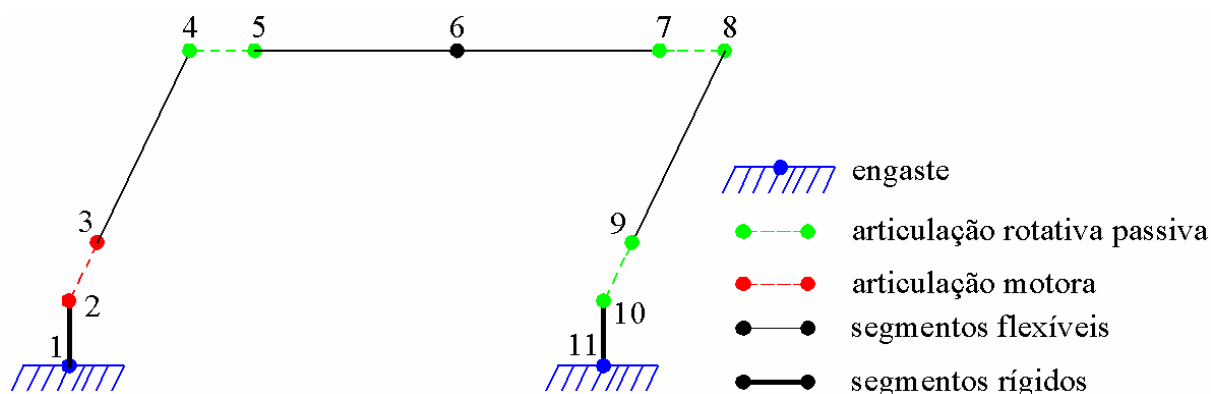


Figura 6.8 – Modelo *MSA* do mecanismo plano de quatro barras.

O modelo é composto por 6 segmentos e 11 nós: os segmentos 1-2 e 10-11 formam a base do mecanismo, considerada rígida; os segmentos 3-4; 5-6; 6-7 e 8-9 são flexíveis; a articulação motora é representada pelos nós 2-3; as articulações passivas são representadas pelos nós 4-5; 7-8 e 9-10 e os esforços externos são aplicados no nó 6.

Os segmentos foram modelados como elementos de viga de aço, com módulo de elasticidade $E = 2e^{11} \text{ N/m}^2$, seção circular com diâmetro de 5 mm e comprimento de 300 mm . A articulação motora foi considerada como uma articulação “engastada”. As outras articulações foram modeladas como sendo passivas, sendo o eixo de rotação com rigidez nula. Os elementos da base rígida foram modelados como segmentos de viga com seção circular de diâmetro de 5 mm , comprimento de 10 mm e módulo de elasticidade $E = 20e^{11} \text{ N/m}^2$. A modelagem do mecanismo segue o procedimento descrito no Capítulo IV.

Nas posições singulares, os deslocamentos flexíveis se tornam grandes quando comparados com os deslocamentos flexíveis nas outras posições. Na Tabela 6.1 estão representados alguns valores dos deslocamentos flexíveis do nó 6 (ponto C) nas direções x e y em função da variável cinemática θ , incluindo as posições de singularidades 0° ; 180° e 360° .

Tabela 6.1. Deslocamentos Flexíveis do nó 6 e cálculo do número condicional do Mecanismo de quatro Barras Simétrico Plano utilizando o método *MSA*.

Ângulo θ [°]	Deslocamento nó 6 x [mm]	Deslocamento nó 6 y [mm]	Número Condicional
0	-0,000257553	12977965,57829760	9,626600778e¹⁵
5	-0,014884619	0,90439295	7,27204e ⁸
10	-0,028205144	0,89323662	7,15678 e ⁸
15	-0,040855482	0,88568063	6,90393 e ⁸
20	-0,052320296	0,87697012	6,54897 e ⁸
25	-0,06222404	0,86668849	6,13206 e ⁸
30	-0,070256143	0,85496256	5,68997 e ⁸
35	-0,076167993	0,84207835	5,25159 e ⁸
40	-0,07977732	0,82839485	4,83705 e ⁸
45	-0,080972666	0,81431054	4,45874 e ⁸
50	-0,079716345	0,80024325	4,12318 e ⁸
55	-0,076045376	0,78661400	3,83287 e ⁸
60	-0,070070265	0,77383265	3,58784 e ⁸
65	-0,061971595	0,76228460	3,38668 e ⁸
70	-0,051994501	0,75231863	3,2274 e ⁸
80	-0,027661863	0,73828144	3,02581 e ⁸
90	0	0,73340712	2,96821 e ⁸
100	0,027661863	0,73828144	3,04574 e ⁸
110	0,0519945	0,75231863	3,2564 e ⁸
120	0,070070265	0,77383265	3,60344 e ⁸
150	0,070256143	0,85496255	5,43733 e ⁸
180	0,000157878	-13239032,76425500	0,577662285 e¹⁵
200	-0,051631138	0,87570784	6,99591 e ⁸
230	-0,079244932	0,79997955	5,46592 e ⁸
250	-0,051743667	0,75225777	4,86454 e ⁸
300	0,069703573	0,77369151	3,86537 e ⁸
350	0,0274829	0,89050591	6,697 e ⁸
360	-0,000157871	-13239032,98565570	9,82025034 e¹⁵

Na Tabela 6.1 também é apresentado o cálculo do número condicional, conforme proposto nas Eqs. (6.4) e (6.5). Os números condicionais maiores são relativos às posições singulares. Pode-se observar que a ordem de grandeza do número condicional fora das posições singulares é de 10^8 enquanto que nas posições singulares é de 10^{15} . No caso da verificação das singularidades considera-se um número de condicionamento grande aquele que difere em grandeza dos demais.

A Figura 6.9 representa o mapeamento da rigidez do mecanismo de quatro barras, com a exclusão das posições singulares. Em linha contínua é representada a trajetória normal, do nó 6, sem aplicação de esforços e, com asterisco, os deslocamentos flexíveis devido à aplicação de uma força de 10 N no nó 6 na direção do eixo y . Desta forma, tem-se o mapeamento do espaço de trabalho conjuntamente com a análise de rigidez.

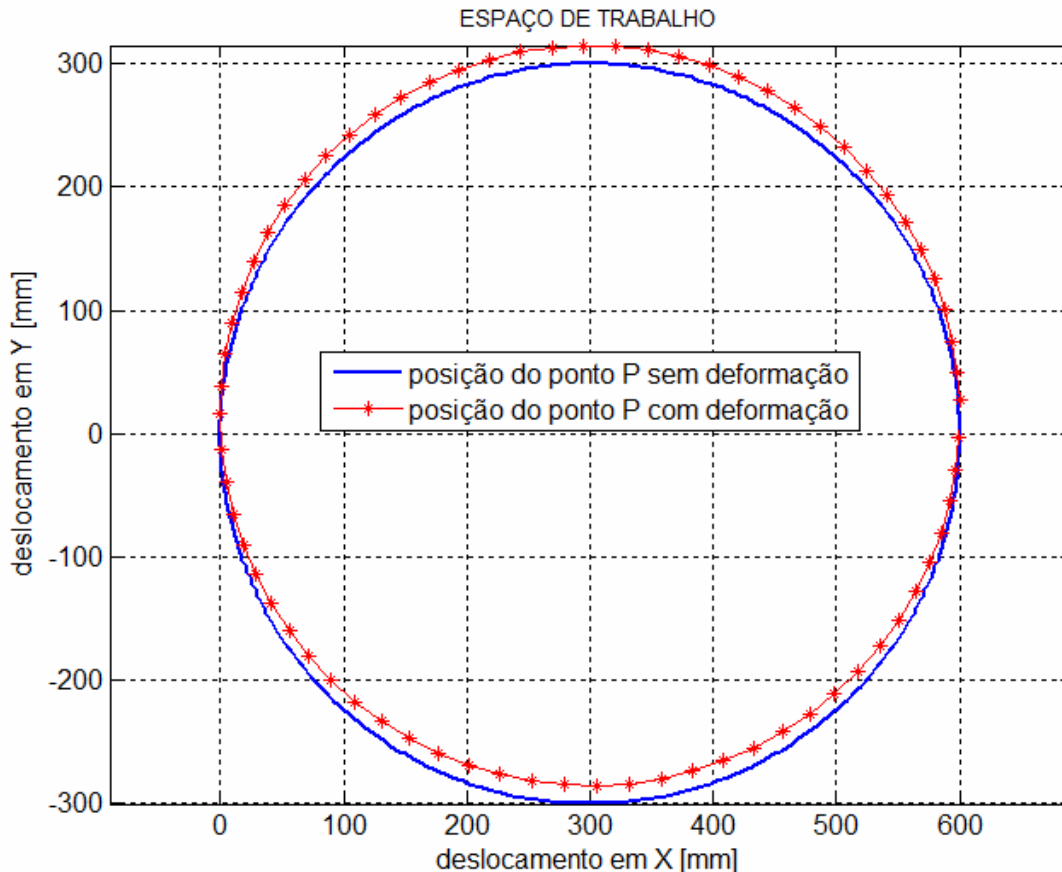


Figura 6.9 – Trajetória do Ponto P do Mecanismo de quatro barras, relativo ao modelo MSA .

6.4. Análise das Singularidades da estrutura robótica paralela plana 5R

Na Figura 6.10 está representada a estrutura robótica paralela plana 5R e os parâmetros utilizados na sua modelagem cinemática. Cada articulação ativa é denotada por A_i ($i = 1, 2$), a outra extremidade do segmento atuado é denotada por B_i e o ponto comum das duas pernas é denotado por P , que representa o elemento terminal do robô. Um referencial inercial O_{xy} é fixado no centro da linha que une as articulações A_1 e A_2 , com o eixo y normal à

A_1A_2 e o eixo x diretamente alinhado com A_1A_2 . Para a estrutura simétrica, tem-se: $OA_1 = OA_2 = r_3$, $A_1B_1 = A_2B_2 = r_1$ e $B_1P = B_2P = r_2$.

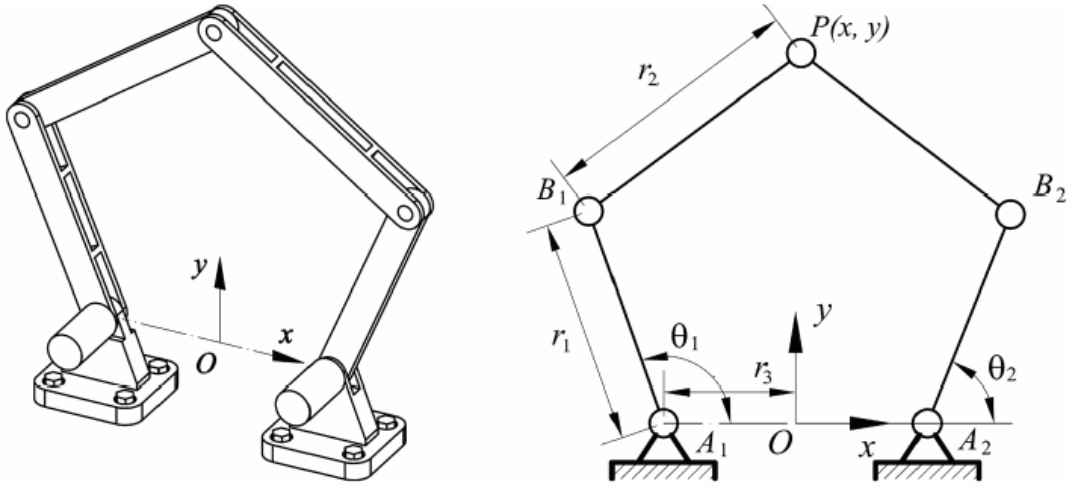


Figura 6.10 – Manipulador Paralelo 5R (Liu et al., 2006b).

Modelo Cinemático Inverso

Conhecendo-se as coordenadas x e y do ponto P , pode-se, a partir do modelo cinemático inverso, determinar os ângulos de entrada θ_1 e θ_2 que podem ser obtidos em função da seguinte restrição em relação ao referencial O_{xy} , Fig. 6.10:

$$|PB_i| = r_2, \quad i = 1, 2 \quad (6.7)$$

ou

$$(x - r_1 \cos \theta_1 + r_3)^2 + (y - r_1 \sin \theta_1)^2 = r_2^2 \quad (6.8)$$

$$(x - r_1 \cos \theta_2 - r_3)^2 + (y - r_1 \sin \theta_2)^2 = r_2^2 \quad (6.9)$$

Se o ponto P é conhecido, os ângulos de entrada para alcançar esta posição podem ser obtidos como:

$$\theta_i = 2 \operatorname{tg}^{-1}(z_i), \quad i = 1, 2 \quad (6.10)$$

onde

$$z_i = \frac{-b_i \pm \sqrt{b_i^2 - 4a_i c_i}}{2a_i}, \quad i = 1, 2 \quad (6.11)$$

e

$$\begin{aligned} a_1 &= r_1^2 + y^2 + (x + r_3)^2 - r_2^2 + 2(x + r_3)r_1 \\ b_1 &= -4yr_1 \\ c_1 &= r_1^2 + y^2 + (x + r_3)^2 - r_2^2 - 2(x + r_3)r_1 \\ a_2 &= r_1^2 + y^2 + (x - r_3)^2 - r_2^2 + 2(x - r_3)r_1 \\ b_2 &= b_1 = -4yr_1 \\ c_2 &= r_1^2 + y^2 + (x - r_3)^2 - r_2^2 - 2(x - r_3)r_1 \end{aligned} \quad (6.12)$$

Existem quatro soluções para o problema cinemático inverso do manipulador 5R, Eq. (6.10), como mostrado na Fig. 6.11. Por exemplo, uma das soluções é quando os sinais são $\oplus\oplus$, Fig. 6.11, que representa o caso em que os ângulos θ_1 e θ_2 calculados na Eq. (6.10) são positivos.

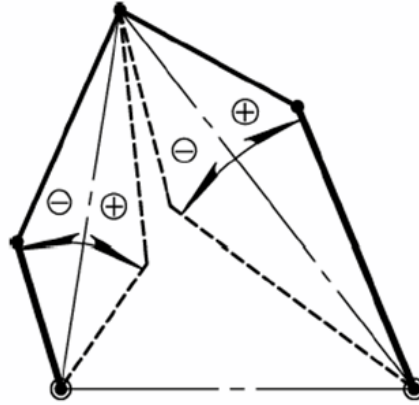


Figura 6.11 – Soluções do Modelo Cinemático Inverso da estrutura 5R. Modos de Trabalho (*Working Mode*) (Macho et al., 2008).

Modelo Cinemático Direto

O problema do modelo cinemático direto consiste em obter as coordenadas do ponto P em relação ao conjunto de ângulos de entradas θ_1 e θ_2 , conhecidos. Das Eqs. (6.8) e (6.9) têm-se:

$$x^2 + y^2 - 2(r_1 \cos \theta_1 - r_3)x - 2r_1 \sin \theta_1 y - 2r_1 r_3 \cos \theta_1 + r_3^2 + r_1^2 - r_2^2 = 0 \quad (6.13)$$

$$x^2 + y^2 - 2(r_1 \cos \theta_2 + r_3)x - 2r_1 \sin \theta_2 y + 2r_1 r_3 \cos \theta_2 + r_3^2 + r_1^2 - r_2^2 = 0 \quad (6.14)$$

Das Equações (6.13) e (6.14) pode-se escrever:

$$x = ey + f \quad (6.15)$$

onde

$$e = \frac{r_1(\sin \theta_1 - \sin \theta_2)}{2r_3 + r_1 \cos \theta_2 - r_1 \cos \theta_1} \quad (6.16)$$

$$f = \frac{r_1 r_3 (\cos \theta_2 + \cos \theta_1)}{2r_3 + r_1 \cos \theta_2 - r_1 \cos \theta_1} \quad (6.17)$$

Para determinar a coordenada y deve-se substituir a Eq. (6.15), na Eq. (6.13), logo:

$$dy^2 + gy + h = 0 \quad (6.18)$$

Então,

$$y = \frac{-g \pm \sqrt{g^2 - 4dh}}{2d} \quad (6.19)$$

onde

$$\begin{aligned} d &= 1 + e^2 \\ g &= 2(ef - er_1 \cos \theta_1 + er_3 - r_1 \sin \theta_1) \\ h &= f^2 - 2f(r_1 \cos \theta_1 - r_3) - 2r_1 r_3 \cos \theta_1 + r_3^2 + r_1^2 - r_2^2 \end{aligned} \quad (6.20)$$

As Equações (6.15) e (6.19) fornecem duas soluções para o problema cinemático direto do manipulador 5R. Eles correspondem aos dois tipos dos modos de montagem (Assembly Modes), denominados configurações superior, indicado por $\oplus$ e inferior, indicado por $\ominus$, Fig. 6.12.

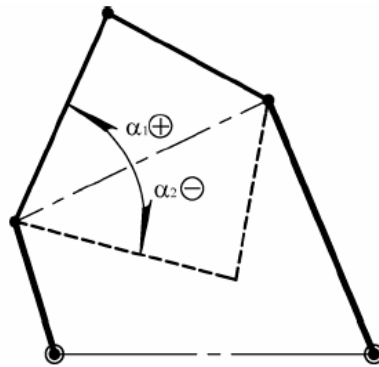


Figura 6.12 – Soluções do modelo cinemático direto. Modos de Montagem (Assembly modes) (Macho et al., 2008).

Assim, para diferentes modos, um mecanismo pode ter diferentes locais de singularidade e espaços de trabalho.

As combinações possíveis em função dos modos de montagem e dos modos de trabalho são:

Tabela 6.2. Modelo Geométrico Direto (2 soluções).

Coordenadas x, y	Modos de Trabalhos
$x = ey + f$ $y = \frac{-g + \sqrt{g^2 - 4dh}}{2d}$	
$x = ey + f$ $y = \frac{-g - \sqrt{g^2 - 4dh}}{2d}$	

Tabela 6.3. Modelo Geométrico Inverso (4 soluções).

Coordenadas $\theta_1, z_1, \theta_2, z_2$	Modo de Montagem
$\theta_1 = 2 \tan^{-1}(z_1)$ $z_1 = \frac{-b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4a_1c_1}}{2a_1}$ $\theta_2 = 2 \tan^{-1}(z_2)$ $z_2 = \frac{-b_2 + \sqrt{b_2^2 - 4a_2c_2}}{2a_2}$	
$\theta_1 = 2 \tan^{-1}(z_1)$ $z_1 = \frac{-b_1 - \sqrt{b_1^2 - 4a_1c_1}}{2a_1}$ $\theta_2 = 2 \tan^{-1}(z_2)$ $z_2 = \frac{-b_2 - \sqrt{b_2^2 - 4a_2c_2}}{2a_2}$	
$\theta_1 = 2 \tan^{-1}(z_1)$ $z_1 = \frac{-b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4a_1c_1}}{2a_1}$ $\theta_2 = 2 \tan^{-1}(z_2)$ $z_2 = \frac{-b_2 - \sqrt{b_2^2 - 4a_2c_2}}{2a_2}$	
$\theta_1 = 2 \tan^{-1}(z_1)$ $z_1 = \frac{-b_1 - \sqrt{b_1^2 - 4a_1c_1}}{2a_1}$ $\theta_2 = 2 \tan^{-1}(z_2)$ $z_2 = \frac{-b_2 + \sqrt{b_2^2 - 4a_2c_2}}{2a_2}$	

Nesta estrutura, as singularidades diretas acontecem quando uma das pernas A_1B_1P ou A_2B_2P estão completamente estendidas ou totalmente dobradas. Estas configurações singulares são configurações particulares em que os atuadores não podem resistir a forças e/ou momentos aplicados ao elemento terminal, sendo que estas singularidades estão presentes dentro do espaço de trabalho da estrutura.

As singularidades devido ao modelo inverso correspondem às configurações nas quais o elemento terminal perde um ou mais graus de liberdade. As singularidades devido ao modelo cinemático inverso, quando J_q é singular, ocorrem quando A_1B_1 é perpendicular a B_1P ou quando A_2B_2 é perpendicular a B_2P . Estas singularidades determinam as fronteiras do espaço de trabalho.

Diversos autores realizaram o estudo das singularidades presente na estrutura 5R tais como (Liu et al., 2006a; Liu et al., 2006b; Macho et al., 2008; Cervantes-Sánchez et al., 2001; Mbarek et al., 2007; Figielski et al., 2007; Sun et al., 2007; Theingi et al., 2002). Todos estes trabalhos utilizam o cálculo das matrizes Jacobianas ou procedimentos derivados dela.

Na Figura 6.13(a) são representadas as posições singulares (linha azul), e a fronteira do espaço de trabalho (linha vermelha), correspondente ao modo de montagem superior $\oplus$ e ao modo de trabalho $\oplus\oplus$; (b) $\ominus\oplus$; (c) $\oplus\ominus$ e (d) $\ominus\ominus$ (Figielski et al., 2007). A região hachurada corresponde ao espaço de trabalho do ponto P . A linha verde corresponde a uma circunferência auxiliar com dimensão de raio igual ao somatório dos segmentos $A_1B_1 + B_1P$ e $A_2B_2 + B_2P$ para determinação da fronteira do espaço de trabalho.

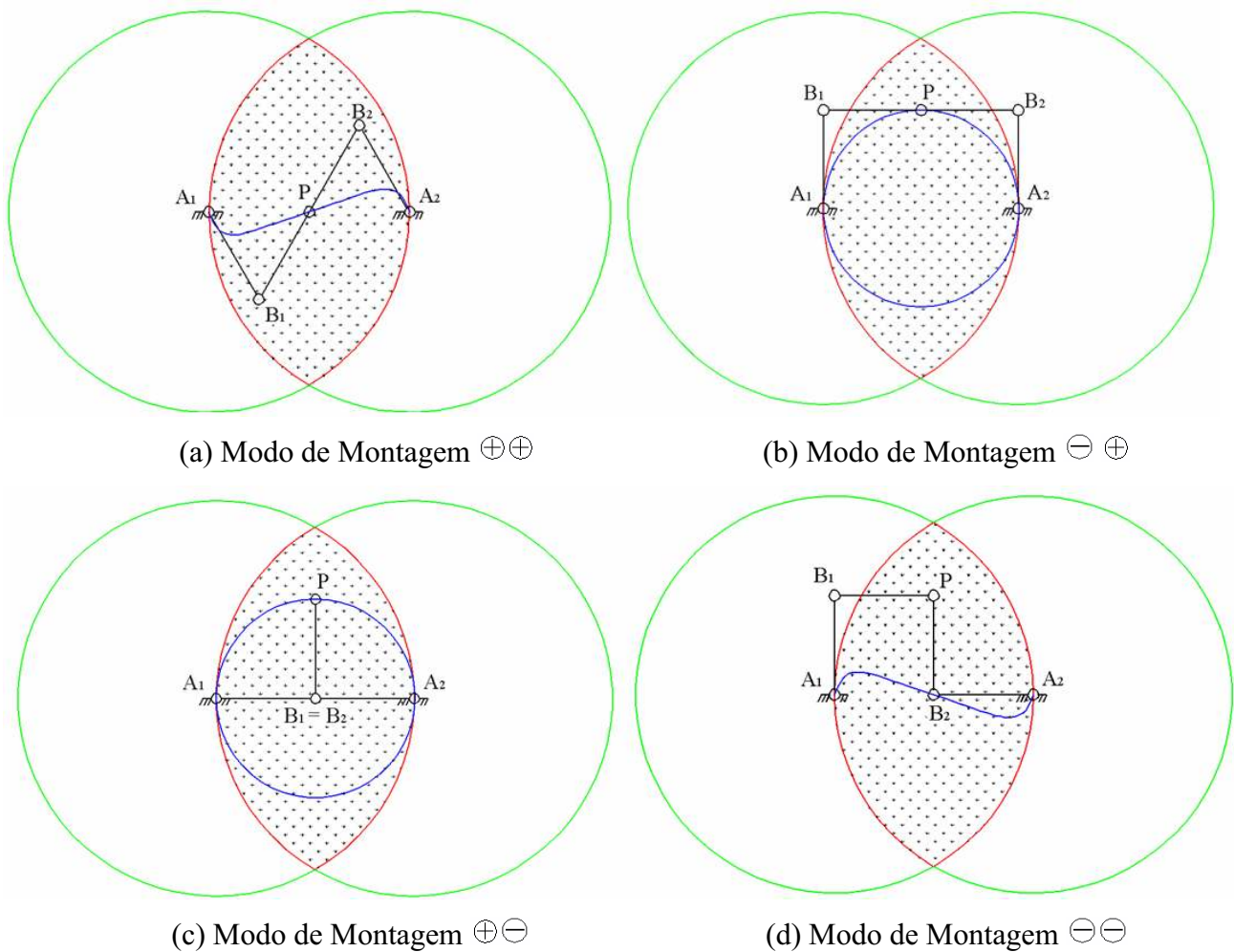


Figura 6.13 – Posições singulares para o mecanismo 5R, simétrico, $r_1 = r_2 = 0,1 \text{ m}$ e $r_3 = 0,1 \text{ m}$.

6.4.1. Modelo *MSA* da Estrutura 5R.

Neste item é realizada a modelagem do mecanismo paralelo 5R utilizando o método *MSA*, com o objetivo de determinar as posições singulares.

Para a aplicação da metodologia *MSA* e determinar as posições de singularidade foi desenvolvido o modelo do mecanismo conforme representado na Figura 6.14. Os segmentos flexíveis são formados pelos nós: 1-2; 3-4; 5-6 e 7-8. As articulações rotativas passivas são formadas pelos nós: 2-3; 4-5 e 6-7. O modelo possui 8 nós.

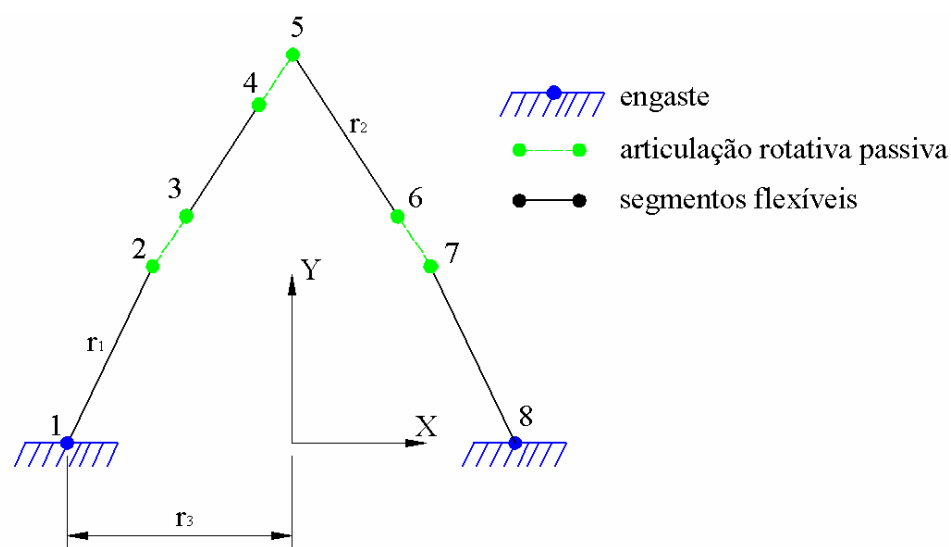


Figura 6.14 – Discretização do mecanismo plano de cinco barras para aplicação do modelo *MSA*.

Para aplicação do modelo, os segmentos foram considerados como elementos de viga de aço com módulo de elasticidade $E = 2e^{11} \text{ N/m}^2$, com seção transversal de 5 mm de diâmetro e dimensões de $r_1 = 0,1 \text{ m}$; $r_2 = 0,1 \text{ m}$ e $r_3 = 0,1 \text{ m}$. As articulações motoras, nós 1 e 8, foram modeladas como engastadas. As outras articulações foram modeladas como sendo passivas com o eixo de rotação apresentando rigidez nula. A modelagem desta estrutura segue o procedimento descrito nos Capítulos IV e V.

O procedimento de cálculo das posições singulares envolve a determinação do espaço de trabalho. Para isto, são necessárias as posições do ponto P e também dos pontos A_1 , B_1 , A_2 e B_2 , obtidas pelo modelo cinemático do mecanismo $5R$. Aplicando-se o modelo *MSA* para o manipulador $5R$ é possível realizar o mapeamento da rigidez e determinar as posições singulares.

Na Tabela 6.4 estão apresentados os resultados obtidos para o modo de montagem $\oplus$ e para configuração $\ominus \oplus$ onde os segmentos B_1P e PB_2 estão alinhados, Fig. 6.13(b), correspondendo à posição de singularidade. Qualquer valor de força aplicada ao ponto P , correspondente ao nó 5, Fig. 6.14, na direção de y , irá representar um deslocamento grande, isto é, bem maiores do que as dimensões do mecanismo, da mesma forma para o valor do número condicional *cond*. Na Tabela 6.5 estão representados, em função do ângulo ($\theta = \theta_1 = \theta_2$), o deslocamento do nó 5 nas direções x e y , bem como o resultado do cálculo do número condicional.

Tabela 6.4. Deslocamentos flexíveis do nó 5 – Mecanismo 5R, posições singulares. $F_y = 1\text{ N}$.

Ângulo θ [°]	Deslocamento nó 5 – x [m]	Deslocamento nó 5 – y [m]	Número Condicional (<i>cond</i>)
0	0	-0,7171 e ⁵	0,5632 e ¹⁴
5	-0,0034 e ⁻³	-0,4259 e ⁵	0,3609 e ¹⁴
10	0,0028 e ⁻³	-0,7171 e ⁵	0,6424 e ¹⁴
15	-0,0104 e ⁻³	-0,4259 e ⁵	0,3956 e ¹⁴
20	-0,0213 e ⁻³	-0,7171 e ⁵	2,1405 e ¹⁴
25	-0,0053 e ⁻³	-0,4259 e ⁵	0,4027 e ¹⁴
30	-0,0024 e ⁻³	-0,7171 e ⁵	0,6661 e ¹⁴
35	-0,0105 e ⁻³	-0,4259 e ⁵	0,3815 e ¹⁴
40	-0,0191 e ⁻³	-0,7171 e ⁵	0,6078 e ¹⁴
45	-0,0148 e ⁻³	-0,4259 e ⁵	0,3345 e ¹⁴
50	-0,015 e ⁻³	-0,3029 e ⁵	0,2567 e ¹⁴
55	-0,0028 e ⁻³	-0,7171 e ⁵	0,6424 e ¹⁴
60	-0,03 e ⁻³	-0,7171 e ⁵	0,6661 e ¹⁴
65	0,0104 e ⁻³	-0,7171 e ⁵	0,6781 e ¹⁴
70	-0,0131 e ⁻³	-0,4259 e ⁵	0,4027 e ¹⁴
80	0,0036 e ⁻³	-0,4259 e ⁵	0,3815 e ¹⁴
90	0 e ⁻³	-0,7171 e ⁵	0,3402 e ¹⁴
100	0,0046 e ⁻³	-0,4259 e ⁵	0,2673 e ¹⁴
110	0,0131 e ⁻³	-0,4259 e ⁵	0,1881 e ¹⁴
120	0,03 e ⁻³	-0,7171 e ⁵	0,1793 e ¹⁴
150	-0,0104 e ⁻³	-0,4259 e ⁵	0,0985 e ¹⁴
180	0	-0,7171 e ⁵	0,5532 e ¹⁴
200	-0,0213 e ⁻³	-0,7171 e ⁵	0,6781 e ¹⁴
230	-0,006 e ⁻³	-0,3029 e ⁵	0,2567 e ¹⁴
250	-0,0131 e ⁻³	-0,4259 e ⁵	0,6767 e ¹⁴
300	0,03 e ⁻³	-0,7171 e ⁵	0,1659 e ¹⁴
350	-0,0028 e ⁻³	-0,7171 e ⁵	0,2598 e ¹⁴
360	0	-0,7171 e ⁵	0,2336 e ¹⁴

Na mesma configuração do exemplo anterior, apresentada na Fig. 6.15, se for aplicada uma força na direção de x , no ponto P (nó 5) os cálculos dos deslocamentos flexíveis são realizados normalmente utilizando-se da metodologia *MSA*, em função do ângulo de entrada θ . Tab. 6.5. Neste caso, as posições singulares, são verificadas pelo número de condicionamento *cond* conforme apresentado na Tab 6.5. Deve-se destacar que, quando os segmentos B_1P e PB_2 estão alinhados, o mecanismo 5R tem os mesmos deslocamentos que um mecanismo de quatro barras. Assim, as configurações de singularidade estão localizadas em uma circunferência centrada na origem do referencial O_{xy} com raio r_2 , Fig. 6.13(b).

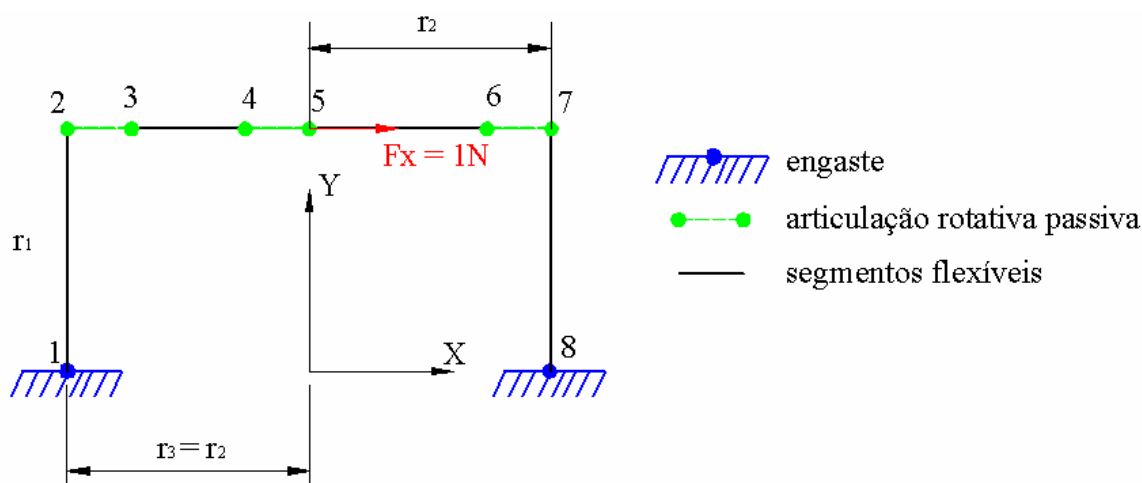


Figura 6.15 – Mecanismo 5R em uma configuração singular onde as barras B_1P e PB_2 estão alinhadas.

Tabela 6.5. Deslocamentos Flexíveis do nó 5 – Mecanismo 5R, posições singulares. $F_x = 1\text{ N}$.

Ângulo θ [°]	Deslocamento nó 5 – x [m]	Deslocamento nó 5 – y [m]	Número Condicional (<i>cond</i>)
0	$0,0003\text{ e}^{-4}$	0	$0,5632\text{ e}^{14}$
5	$0,0023\text{ e}^{-4}$	$-0,0001\text{ e}^{-3}$	$0,3609\text{ e}^{14}$
10	$0,0084\text{ e}^{-4}$	$0,0089\text{ e}^{-3}$	$0,6424\text{ e}^{14}$
15	$0,0184\text{ e}^{-4}$	$-0,0097\text{ e}^{-3}$	$0,3956\text{ e}^{14}$
20	$0,032\text{ e}^{-4}$	$-0,0211\text{ e}^{-3}$	$2,1405\text{ e}^{14}$
25	$0,0487\text{ e}^{-4}$	$-0,0031\text{ e}^{-3}$	$0,4027\text{ e}^{14}$
30	$0,0681\text{ e}^{-4}$	$-0,0141\text{ e}^{-3}$	$0,6661\text{ e}^{14}$
35	$0,0896\text{ e}^{-4}$	$-0,0063\text{ e}^{-3}$	$0,3815\text{ e}^{14}$
40	$0,1124\text{ e}^{-4}$	$-0,0166\text{ e}^{-3}$	$0,6078\text{ e}^{14}$
45	$0,136\text{ e}^{-4}$	$-0,01\text{ e}^{-3}$	$0,3345\text{ e}^{14}$
50	$0,1596\text{ e}^{-4}$	$0,0017\text{ e}^{-3}$	$0,2567\text{ e}^{14}$
55	$0,1824\text{ e}^{-4}$	$0,0296\text{ e}^{-3}$	$0,6424\text{ e}^{14}$
60	$0,2039\text{ e}^{-4}$	$-0,0205\text{ e}^{-3}$	$0,6661\text{ e}^{14}$
65	$0,2233\text{ e}^{-4}$	$-0,0062\text{ e}^{-3}$	$0,6781\text{ e}^{14}$
70	$0,24\text{ e}^{-4}$	$-0,0071\text{ e}^{-3}$	$0,4027\text{ e}^{14}$
80	$0,2636\text{ e}^{-4}$	$-0,0098\text{ e}^{-3}$	$0,3815\text{ e}^{14}$
90	$0,2718\text{ e}^{-4}$	0	$0,3402\text{ e}^{14}$
100	$0,2636\text{ e}^{-4}$	$0,0099\text{ e}^{-3}$	$0,2673\text{ e}^{14}$
110	$0,24\text{ e}^{-4}$	$0,0071\text{ e}^{-3}$	$0,1881\text{ e}^{14}$
120	$0,2039\text{ e}^{-4}$	$0,0205\text{ e}^{-3}$	$0,1793\text{ e}^{14}$
150	$0,0681\text{ e}^{-4}$	$0,0337\text{ e}^{-3}$	$0,0985\text{ e}^{14}$
180	$0,0003\text{ e}^{-4}$	0	$0,5532\text{ e}^{14}$
200	$0,032\text{ e}^{-4}$	$-0,0211\text{ e}^{-3}$	$0,6781\text{ e}^{14}$
230	$0,1596\text{ e}^{-4}$	$-0,0138\text{ e}^{-3}$	$0,2567\text{ e}^{14}$
250	$0,24\text{ e}^{-4}$	$-0,0071\text{ e}^{-3}$	$0,6767\text{ e}^{14}$
300	$0,2039\text{ e}^{-4}$	$0,0205\text{ e}^{-3}$	$0,1659\text{ e}^{14}$
350	$0,0084\text{ e}^{-4}$	$-0,0089\text{ e}^{-3}$	$0,2598\text{ e}^{14}$
360	$0,0003\text{ e}^{-4}$	0	$0,2336\text{ e}^{14}$

Nas Tabelas 6.6 e 6.7 são apresentados resultados para alguns casos em que ($\theta_1 \neq \theta_2$) onde não ocorre singularidade para esta estrutura e também alguns casos em que ($\theta_1 = \theta_2$) que caracterizam, para o caso da Fig. 6.13(b), posições singulares. As posições singulares ficam claramente caracterizadas pelos deslocamentos flexíveis “exorbitantes” e pelos números condicionais elevados, da ordem de e^{13} , enquanto que nas posições não singulares o número condicional possui grandeza de e^6 (Gonçalves e Carvalho, 2009).

Tabela 6.6. Deslocamentos flexíveis do nó 5 – Mecanismo 5R. $F_y = 1\text{ N}$.

Ângulo θ_1 [°]	Ângulo θ_2 [°]	Deslocamento nó 5 – x [m]	Deslocamento nó 5 –y [m]	Número Condicional (<i>cond</i>)
0	0	0	-7,171e ⁴	5,632e ⁺¹³
10	10	2,8e ⁻⁶	-7,171e ⁴	6,424e ⁺¹³
30	30	-2,4e ⁻⁶	-7,171e ⁴	6,661e ⁺¹³
60	60	-3e ⁻⁶	-7,171e ⁴	6,661e ⁺¹³
80	80	3,6e ⁻³	-4,259e ⁴	3,815e ⁺¹³
90	90	0	-7,1709e ⁴	5,6320e ⁺¹³
89	91	0	7,5303e ⁻⁴	2,8782e ⁺¹³
88	92	0	3,6170e ⁻⁴	2,9270e ⁶
87	93	0	2,3044e ⁻⁴	2,9722e ⁶
80	100	0	4,3968e ⁻⁵	3,2244e ⁶
90	100	6,7115e ⁻⁶	1,2422e ⁻⁴	2,8058e ⁶
60	114	-1,1537e ⁻⁶	7,2796e ⁻⁷	3,4425e ⁶
68	89	-1,4553e ⁻⁵	4,0489e ⁻⁵	3,5580e ⁶
64	75	-2,5246e ⁻⁵	1,0635e ⁻⁴	3,6057e ⁶

Tabela 6.7. Deslocamentos flexíveis do nó 5 – Mecanismo 5R. $F_x = 1\text{ N}$.

Ângulo θ_1 [°]	Ângulo θ_2 [°]	Deslocamento nó 5 – x [m]	Deslocamento nó 5 – y [m]	Número Condicional (<i>cond</i>)
0	0	$0,003\text{e}^{-5}$	0	$5,632\text{e}^{13}$
10	10	$0,084\text{e}^{-5}$	$0,0089\text{e}^{-3}$	$6,424\text{e}^{13}$
30	30	$0,681\text{e}^{-5}$	$-0,0141\text{e}^{-3}$	$6,661\text{e}^{13}$
60	60	$2,039\text{e}^{-5}$	$-0,0205\text{e}^{-3}$	$6,661\text{e}^{13}$
80	80	$2,636\text{e}^{-5}$	$-0,0098\text{e}^{-3}$	$3,815\text{e}^{13}$
90	90	$2,7175\text{e}^{-5}$	0	$5,632\text{e}^{13}$
89	91	$2,6989\text{e}^{-5}$	0	$2,8782\text{e}^6$
88	92	$2,6407\text{e}^{-5}$	$6,5979\text{e}^{-7}$	$2,9253\text{e}^6$
87	93	$2,6156\text{e}^{-5}$	0	$2,9722\text{e}^6$
80	100	$2,0420\text{e}^{-5}$	0	$3,2244\text{e}^6$
90	100	$2,4859\text{e}^{-5}$	$6,7115\text{e}^{-6}$	$2,8058\text{e}^6$
60	114	$2,0464\text{e}^{-6}$	$-1,1537\text{e}^{-6}$	$3,4425\text{e}^6$
68	89	$2,1246\text{e}^{-5}$	$-1,4553\text{e}^{-5}$	$3,5580\text{e}^6$
64	75	$2,3946\text{e}^{-5}$	$-2,5246\text{e}^{-5}$	$3,6057\text{e}^6$

De forma similar, as configurações singulares podem ser determinadas para outras configurações da estrutura.

Assim, uma das vantagens na utilização do método *MSA* é que mesmo em posições singulares, dependendo de como a força está aplicada, é possível calcular os deslocamentos flexíveis identificando que correspondem a posições singulares pelo número de condicionamento.

Deve-se destacar que, conforme Mbarek et al. (2007), a abordagem utilizando-se números condicionais não fornece pistas sobre o comportamento do manipulador paralelo, nem certezas sobre a ausência de singularidades entre duas configurações singulares durante o movimento do elemento terminal (plataforma móvel). Isto não é verdade quando se utiliza os números condicionais associados à metodologia *MSA*, conforme observado nos exemplos apresentados.

Uma das grandes vantagens do método *MSA* associado aos números condicionais, proposto nesta tese, é que, simultaneamente com o mapeamento da rigidez em função do modelo cinemático da estrutura e com o auxílio de um programa computacional, pode-se realizar a plotagem da configuração da estrutura robótica em cada instante, visualizando o seu comportamento e verificando as posições singulares, onde o sistema perde sua rigidez

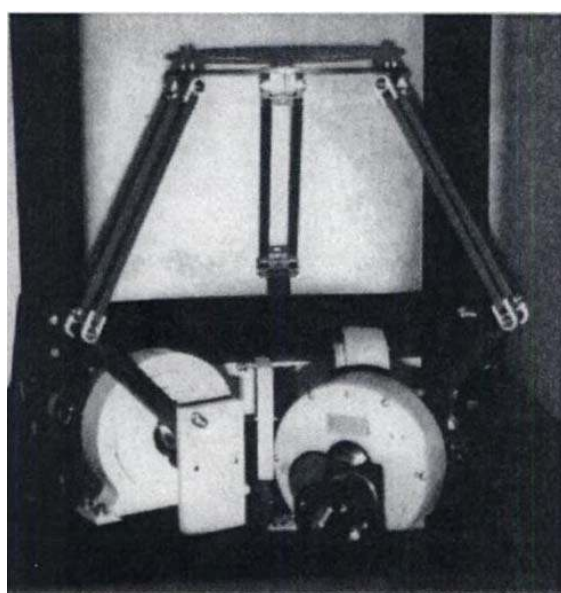
inerente. Com a plotagem a cada instante é identificado como os elementos constituintes do modelo da estrutura robótica estão dispostos.

A seguir, o procedimento de cálculo das singularidades utilizando-se do método *MSA* é aplicado a uma estrutura robótica paralela espacial.

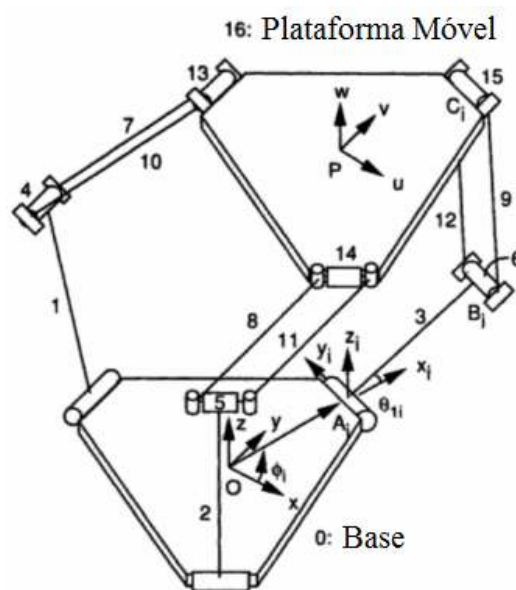
6.5. Manipulador Robótico Paralelo Maryland

A metodologia *MSA* para identificação de singularidades foi aplicada à estrutura robótica paralela Maryland (Tsai, 1999).

O manipulador Maryland possui 3 gdl e utiliza articulações rotativas para restringir o movimento da plataforma móvel somente em movimento de translação no espaço (Tsai e Stamper, 1996). Cada cadeia cinemática é constituída pelo braço inferior e braço superior, conforme Fig. 6.16. A diferença entre o robô Maryland e o Delta é que este último utiliza articulações esféricas no paralelogramo articulado.



(a)



(b)

Figura 6.16 – (a) Manipulador Maryland; (b) Diagrama Esquemático (Tsai e Stamper, 1996).

Na Figura 6.17 o manipulador Maryland está representado em uma configuração de singularidade, em que os braços inferiores e superiores estão alinhados.

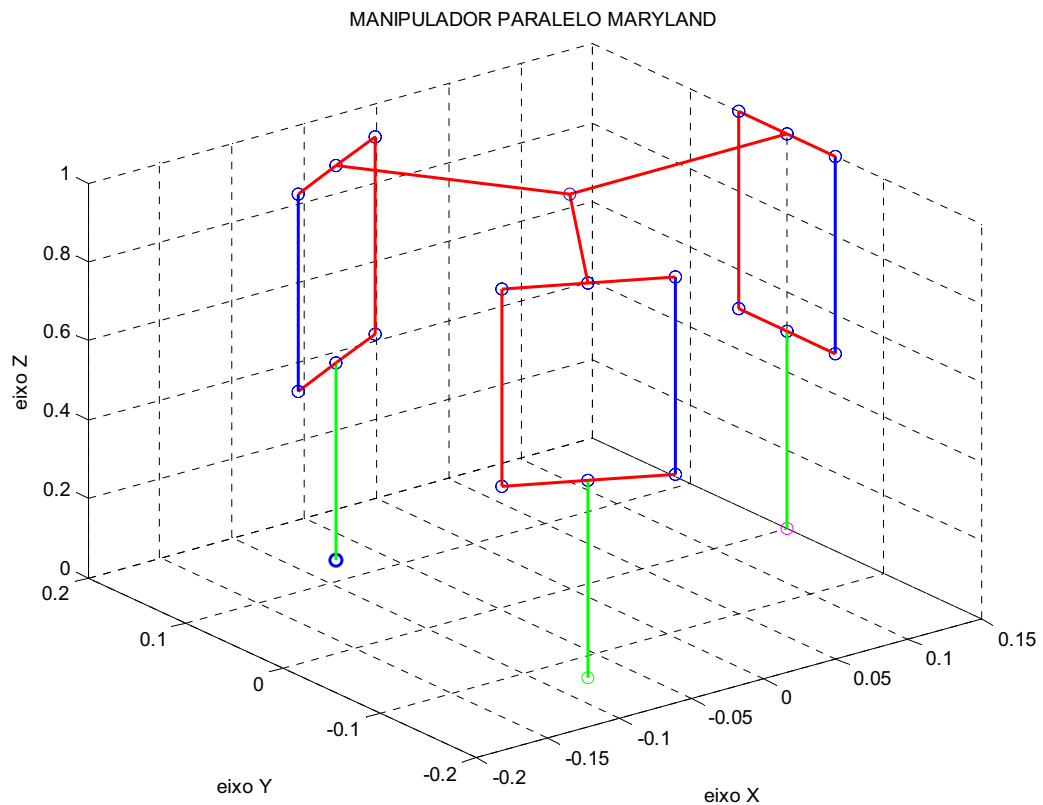


Figura 6.17 – Exemplo de uma configuração singular do manipulador Maryland.

No caso da utilização do método *MSA* para o cálculo das singularidades de estruturas robóticas paralelas tridimensionais, o número de condicionamento, para este modelo, é da ordem 10^{26} , enquanto que, para as posições não singulares, é da ordem de 10^{16} . Outro fato observado é que nas posições singulares para manipuladores paralelos tridimensionais o cálculo dos deslocamentos flexíveis fornece computacionalmente como resposta “Not a Number” (NaN), que é observado quando o programa encontra, por exemplo, uma divisão $0/0$ ou ∞/∞ .

6.6. Conclusões

Neste Capítulo foi apresentada uma revisão sobre o cálculo das singularidades das estruturas robóticas e a correlação com a rigidez. O principal método utilizado atualmente para determinação das singularidades envolve o cálculo da matriz Jacobiana, que envolve o cálculo de equações diferenciais que, em geral, são complicadas o que podem acarretar erros. Além disso, o processo analítico de determinação das posições singulares envolve determinar as raízes do determinante das matrizes Jacobianas do manipulador que, principalmente no caso das estruturas paralelas a sua solução analítica é difícil. Nos modelos numéricos, o tempo de processamento computacional é relativamente alto, mesmo com a ajuda de um software de matemática simbólica, pois as equações são altamente não lineares, e nem sempre conseguindo resolver o sistema de equações.

Nesta tese foi apresentada uma nova metodologia para determinação das posições singulares associada ao mapeamento da rigidez do sistema. Esta nova metodologia utiliza o método *MSA* acoplado com o cálculo de números condicionais. Através dos exemplos foi verificado que nas posições singulares o sistema perde sua rigidez, apresentando assim, deslocamentos flexíveis exorbitantes. Foi mostrado também que as posições singulares podem ser determinadas com o uso dos números condicionais aplicados à matriz de rigidez do sistema obtida pelo método *MSA*.

CAPÍTULO VII

MODELAGEM DE FOLGAS NAS ARTICULAÇÕES

No estudo do comportamento dos deslocamentos possíveis de um sistema multicorpo devem ser considerados os deslocamentos devido à movimentação da estrutura, devido às flexibilidades de seus elementos e também os deslocamentos devido às folgas nas articulações.

Neste sentido é que neste Capítulo é apresentada uma proposta de metodologia para consideração das folgas nas articulações em sistemas multicorpos. A presença de folgas nas articulações é necessária para permitir o movimento relativo das peças. No entanto, a presença destas folgas pode prejudicar a acuracidade do sistema, principalmente no caso das articulações passivas presentes nas estruturas robóticas paralelas. A metodologia proposta para análise da folga nos sistemas multicorpos usa o modelo dinâmico da estrutura robótica, considerada sem folgas, para determinação das reações de apoio nas articulações. Com a direção em que as forças agem nas articulações é possível calcular, em função do valor da folga, o ponto de contato entre as partes que compõem a articulação. Esta nova configuração, determinada a partir do modelo dinâmico, é adicionada ao resultado obtido pelo modelo *MSA*.

7.1. Introdução

Os manipuladores robóticos são modelados considerando que as articulações são ideais. Reuleaux (1875) classifica as articulações, ou pares cinemáticos, em duas categorias: pares inferiores (*lower pairs*) e os pares superiores (*higher pairs*) (Hartenberg e Denavit, 1964). A diferença entre elas é função do tipo de contato entre os corpos que formam o par. Se as partes em contato dos dois corpos acontecem apenas em um ponto ou ao longo de uma curva (engrenagens, contato das esferas de um rolamento com a pista, came e seguidor) tem-se um par superior. Nos pares inferiores o contato entre os corpos rígidos se dá em uma

região da superfície de dimensões bastante significativas em relação às dimensões dos pares cinemáticos (articulações rotativas, articulações prismáticas, articulações esféricas, articulações do tipo parafuso, articulações cilíndricas, articulações planares).

Na prática as articulações são fabricadas com folgas para permitir a movimentação entre os elementos. No entanto, devido às folgas, os manipuladores robóticos apresentam erros de posição e orientação do elemento terminal (Meng, 2007). Por outro lado, não importa o quão pequena seja a folga, ela pode levar a problemas de vibração, fadiga e falta de acuracidade (Fernandes, 2005). Desta forma, quando o mecanismo articulado requer alta acuracidade, as folgas não podem ser ignoradas (Meng, 2007). Assim, é importante quantificar os efeitos das flexibilidades dos segmentos e das articulações conjuntamente com as folgas existentes para definir um modelo realístico dos sistemas multicorpos para realizar uma determinada tarefa.

Também na análise dinâmica dos sistemas multicorpos as articulações são consideradas perfeitas, ideais, isto é, sem deformações elásticas e plásticas, sem desgastes e folgas. A presença das folgas no sistema também podem causar impactos que prejudicam o funcionamento e a acuracidade do sistema multicorpo.

Nos modelos de análise de rigidez é considerado que os pontos de conexões entre dois segmentos, ligados por uma articulação, são coincidentes. A introdução da folga na articulação causa o distanciamento destes dois pontos. Por exemplo, a Fig. 7.1 ilustra uma articulação rotativa com uma folga ε que é definida como a diferença entre os raios das duas peças, o raio da peça R_B e o raio do eixo R_J .

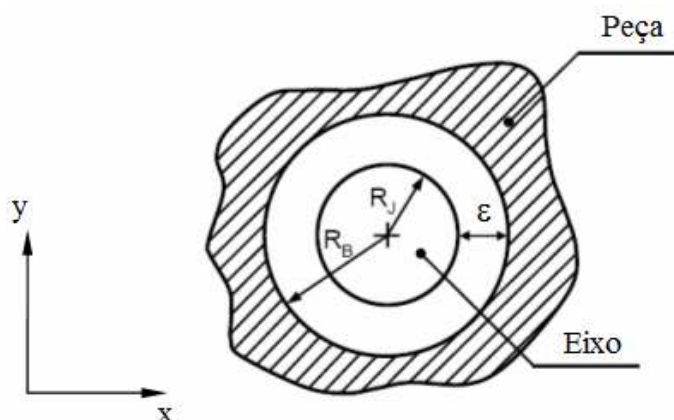


Figura 7.1 – Articulação rotativa com folga.

Assim, uma articulação rotativa com folga, no plano, introduz mais dois graus de liberdade ao sistema, relativos à possibilidade de movimentos nas direções x e y da peça interna (eixo), Fig. 7.1. Da mesma forma para uma articulação espacial, uma articulação esférica por exemplo, introduz mais três graus de liberdade ao sistema, relativos à possibilidade de movimentos nas direções x , y e z . No caso das articulações ativas, por exemplo, atuadas por motores, a folga pode ser considerada inexistente devido ao pré-carregamento existente nestas articulações (Meng, 2007).

O objetivo do estudo das folgas nesta tese é determinar a sua influência na acuracidade do sistema, determinando sua contribuição não apenas nos deslocamentos lineares, mas também nos deslocamentos angulares do elemento terminal.

7.2. Estudo das Folgas nas Articulações

Fernandes (2005) dividiu o estudo das articulações com folgas em: Método do segmento sem massa (*“The massless link approach”*); Método da mola-amortecedor (*“The spring-damper approach”*) e Método da mudança do momento (*“The momentum exchange approach”*).

No modelo do segmento sem massa (*“The massless link approach”*) (Seneviratne e Earles, 1992; Fernandes, 2005), a presença da folga é modelada pela adição de um segmento virtual sem massa o qual possui o comprimento igual à folga, Fig. 7.2(a). Neste modelo é assumido que existe o contato entre as duas peças durante todo o tempo.

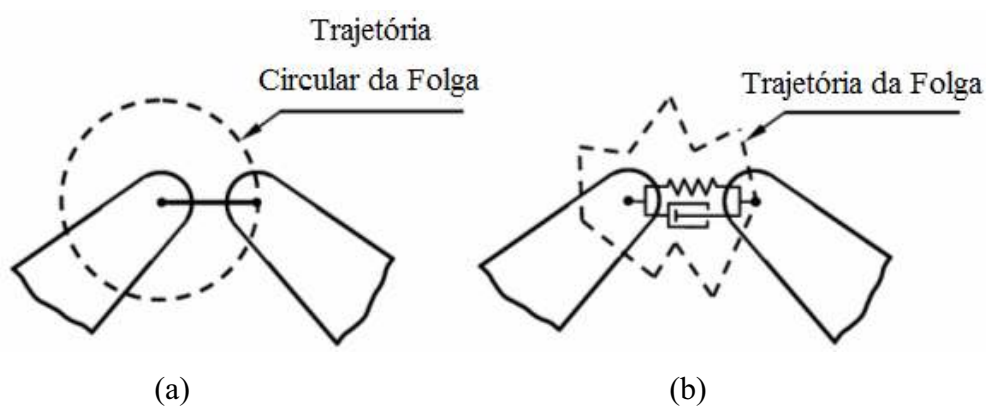


Figura 7.2 – Modelos para análise da folga das articulações rotativas planas: (a) Modelo do segmento sem massa; (b) Modelo da mola-amortecedor.

Na metodologia da mola-amortecedor (“*The spring-damper approach*”) (Seneviratne e Earles, 1992; Fernandes, 2005) a folga é modelada pela introdução de um elemento mola-amortecedor, Fig. 7.2b. A dificuldade deste modelo é determinar os parâmetros de rigidez da mola e de amortecimento para a correta representação da folga.

Já a metodologia da mudança do momento (“*The momentum exchange approach*”) (Ravn, 1998; Fernandes, 2005; Chang, 2007) considera os elementos que constituem a folga da articulação como corpos em colisão. Neste modelo as forças de impacto-contato controlam a dinâmica da folga da articulação (Fernandes, 2005).

Nos métodos mola-amortecedor e segmento sem massa, a folga é substituída por componentes equivalentes, os quais tentam modelar a folga o mais próximo possível da realidade, sem considerar na análise dinâmica o efeito do impacto e da dissipação de energia durante o impacto, o que já é possível no método da mudança do momento (Fernandes, 2005).

Diversos autores têm desenvolvido estudos das folgas nas articulações e seu efeito na acuracidade da posição das estruturas paralelas. Alguns autores aplicam uma análise probabilística, estocástica, para determinar o erro na posição da plataforma móvel em função da folga nas articulações (Mayourian e Rastegar, 1990; Li, Xianmin e Yang, 1998). Nas análises estocásticas as forças de contato não são consideradas. Fogarasy e Smith (1998) utilizaram o cálculo de derivadas das equações algébricas da cadeia fechada para conseguir uma primeira aproximação do erro da configuração do elemento terminal, os quais denominaram de método do Jacobiano. Mas, neste método existe a dificuldade na obtenção da matriz Jacobiana para as estruturas paralelas. Innocenti (2002), Parenti-Castelli e Venanzi (2002, 2005) usaram o princípio do trabalho virtual para determinar a posição que a plataforma móvel atinge quando uma força externa é aplicada na plataforma. Meng (2007) afirma que este método é ineficiente computacionalmente (demorado) e pode ser aplicado apenas em casos especiais de mecanismos planos sendo inviável para mecanismos tridimensionais.

Recentemente, Shiau et al. (2008) consideraram a folga existente nas articulações esféricas da estrutura 3-PRS. Neste modelo, a análise dinâmica utiliza o método de Newton e considera as forças que aparecem devido à presença da folga na articulação. Para a resolução das equações foram utilizados métodos numéricos. Neste modelo, a flexibilidade dos segmentos é desprezada.

Schwab et al. (2002) fizeram o estudo da análise dinâmica de um mecanismo do tipo cursor manivela considerando a presença de folgas nas articulações rotativas, Fig. 7.3. Em seu

trabalho, a folga na articulação é considerada como uma equação de restrição definida por g_N conforme Eq. (7.1), Fig. 7.4.

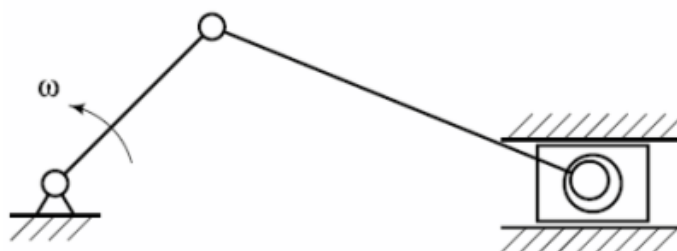


Figura 7.3 – Mecanismo cursor manivela com folga radial na articulação rotativa do cursor (Schwab et al., 2002).

$$g_N = c - \sqrt{x^2 + y^2} \leq 0 \quad (7.1)$$

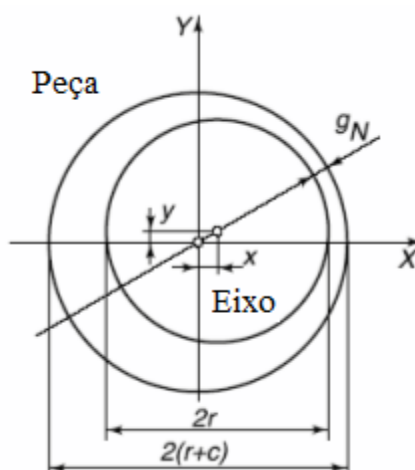


Figura 7.4 – Articulação rotativa com folga modelada como uma equação de restrição (Schwab et al., 2002).

Neste modelo nenhum contato ocorre quando $g_N > 0$. A fase de contato é representada quando $g_N = 0$ e, para valores de $g_N < 0$, estarão acontecendo deformações.

No trabalho de Bauchau e Rodriguez (2002) foi desenvolvido um modelo de análise incluindo a folga e o efeito da lubrificação para mecanismos tridimensionais, mas as simulações numéricas foram realizadas somente para mecanismos planos. No modelo, a folga da articulação possui comportamento não linear e as flexibilidades do sistema multicorpo são modeladas utilizando-se o *FEA*. As restrições cinemáticas ao longo dos vários corpos são resolvidas utilizando-se a técnica dos multiplicadores de Lagrange, permitindo o desenvolvimento modular do método de elementos finitos, respeitando as restrições cinemáticas.

Lim et al. (2001) desenvolveu um modelo geométrico de erros aplicados a um manipulador cúbico paralelo mostrando como os erros nos segmentos e as mudanças na direção da aplicação das forças nos segmentos podem afetar a acuracidade do elemento terminal. No seu trabalho foi mostrado que as mudanças nos erros de posição e orientação ocorrem principalmente nas direções que as forças atuam nos segmentos. A análise do erro é feita relacionando os erros presentes em uma junta universal, Fig. 7.5(a), com a acuracidade do elemento terminal. O centro da junta universal é localizado dentro de uma esfera, Fig. 7.5(b) e Fig. 7.5(c), onde seu raio é igual à folga da junta universal denotada por c_b .

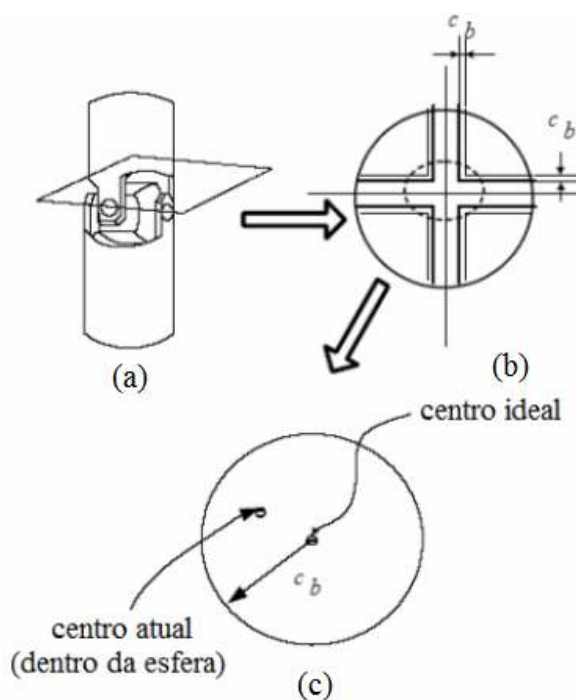


Figura 7.5 – (a) Junta Universal; (b) Erros da Junta Universal; (c) Modelo de análise da folga de uma junta universal (Lim et al., 2001).

Voglewede e Uphoff (2002) estudaram a influência das folgas nas articulações no estudo das singularidades. Quando o modelo de análise de singularidade é livre de folgas nas articulações, o modelo cinemático prediz que o elemento terminal é incapaz de mover-se ao menos que esteja em uma configuração singular. Nos protótipos reais, pequenos deslocamentos sem restrição ocorrem em todas as configurações devido à presença de folgas nos componentes. Estes movimentos são pequenos na maioria das configurações, mas podem aumentar quando próximos das configurações singulares.

Voglewede e Uphoff (2002) desenvolveram um método para prever a posição do elemento terminal, para mecanismos planos, em função das folgas presentes nas articulações. Este modelo considera, para cada configuração da estrutura paralela em estudo, que o atuador esteja bloqueado para uma determinada configuração. É considerado, primeiramente, cada perna da estrutura paralela separada do todo.

Em seguida, cada articulação passiva é substituída por um atuador virtual cuja faixa de movimento corresponde exatamente ao movimento sem restrição do componente. As folgas presentes são somadas aos comprimentos dos segmentos.

O resultado é apresentado para cada configuração da estrutura, representando a região que o elemento terminal pode ocupar em função das folgas. Esta metodologia foi aplicada às estruturas paralelas planas 5R e 3R $\overline{R}$ RR. Finalmente, o cálculo do espaço de trabalho do mecanismo virtual é obtido utilizando-se de métodos tradicionais de análise do espaço de trabalho.

Existem três tipos de abordagem para análise do espaço de trabalho: geométrica, utilizando-se a discretização e utilizando-se otimização (Araujo, 2007).

Na análise do espaço de trabalho utilizando-se da geometria são utilizadas operações “booleanas” a partir de entidades primitivas como cilindros, esferas e paralelepípedos (Ottaviano e Ceccarelli, 2002; Gonçalves et al., 2007).

Na discretização é utilizado uma malha (“*grid*”) para formar o espaço de trabalho, verificando-se para cada nó do reticulado sua relação de pertinência com o espaço de trabalho (Araujo, 2007).

A utilização de técnicas de otimização compreende a definição de funções objetivas que devem ser minimizadas ou maximizadas em função dos parâmetros geométricos e de restrições de igualdade e/ou de desigualdades (Gonçalves et al., 2007).

Por exemplo, para o mecanismo paralelo 5R (Voglewede e Uphoff, 2002), cada perna é considerada separadamente, Fig. 7.6, sendo o ponto C_1 correspondente ao elemento

terminal. O ponto A_1 é considerado fixo correspondendo ao atuador travado em uma dada configuração. δ_1 e ε_1 representam as folgas das duas articulações passivas da perna. Neste modelo, o ponto B_1 pode transladar de δ_1 em qualquer direção e o ponto C_1 pode girar em torno de B_1 e transladar em qualquer direção de ε_1 . A Figura 7.6 representa o movimento possível de C_1 , em que o raio de sua trajetória é dado por: $(\ell_2 - \delta_1 - \varepsilon_1) \leq r \leq (\ell_2 + \delta_1 + \varepsilon_1)$. A intersecção do movimento das duas pernas é a região em que o elemento terminal pode ocupar em função das folgas nas articulações, Fig. 7.7. Este modelo proposto por Voglewede e Uphoff (2002) pode ser incluído nos modelos probabilísticos, pois não se sabe, em função da aplicação da força, o ponto exato do contato.

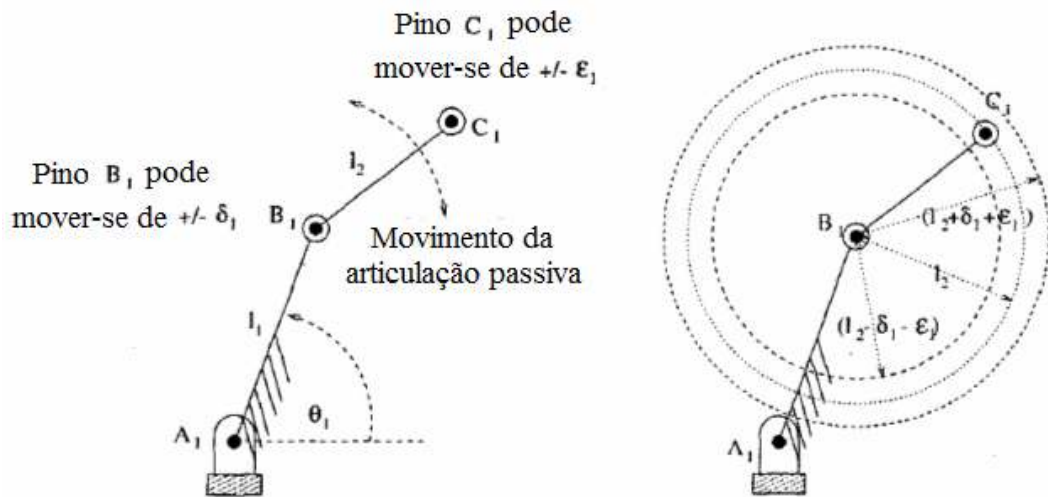


Figura 7.6 – Possíveis movimentos do ponto C_1 (Voglewede e Uphoff, 2002).

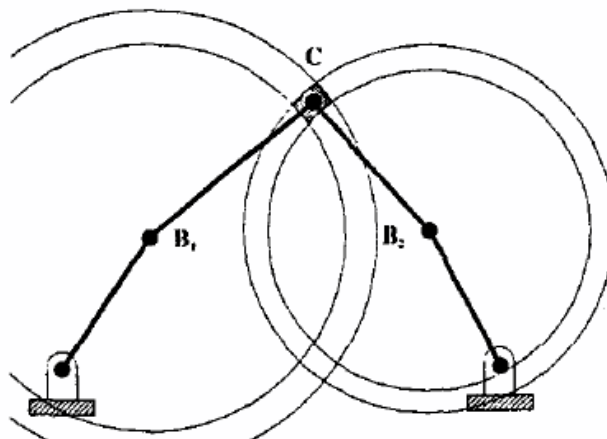


Figura 7.7 – Região hachurada representativa das posições que o ponto C pode ocupar (Voglewede e Uphoff, 2002).

7.3. Metodologia de Análise das Folgas nos Sistemas Multicorpos

Nesta tese está sendo proposta uma metodologia para a inclusão da influência das folgas nos sistemas multicorpos planos. A folga ε causa o deslocamento das peças que formam a articulação, Fig. 7.8, existindo infinitos locais de contato entre as duas peças. Assim, é necessário determinar o ponto de contato na articulação que, nesta tese, é determinado a partir do cálculo do modelo dinâmico da estrutura que permite determinar as forças de reações, Fr , nas articulações. Da segunda lei de Newton o deslocamento ocorre na mesma direção da aplicação da força, Fig. 7.9, caracterizado pelo ângulo γ obtido do modelo dinâmico do mecanismo. Sabendo-se a posição de contato e o valor da folga ε , é possível determinar os deslocamentos provocados na direção dos eixos x e y como:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \varepsilon \cos(\gamma) \\ \varepsilon_y &= \varepsilon \sin(\gamma)\end{aligned}\tag{7.2}$$

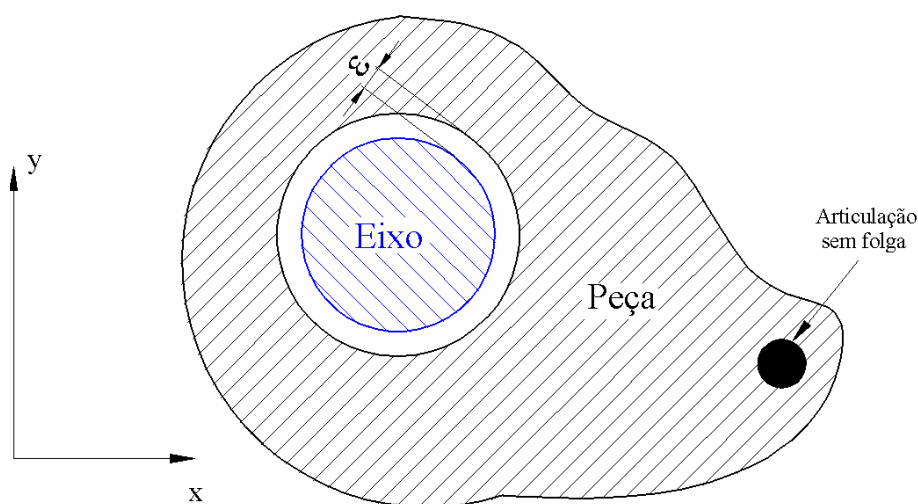


Figura 7.8 – Folga ε na Articulação.

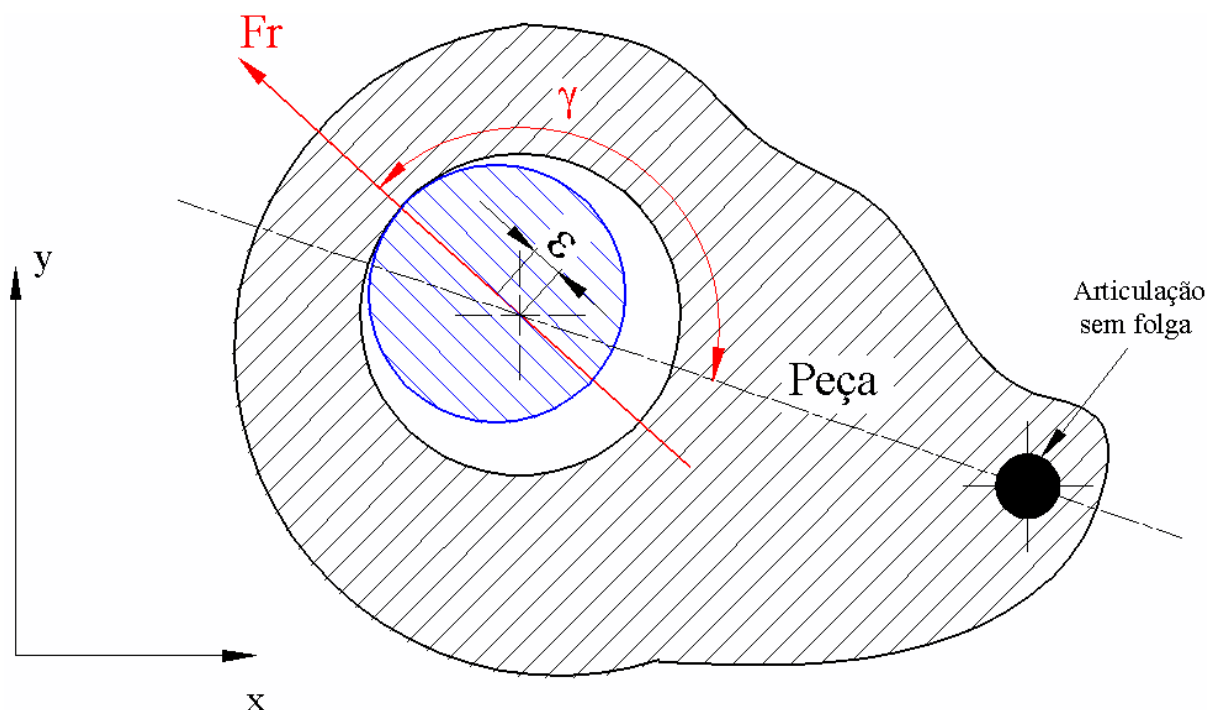


Figura 7.9 – Reação de apoio.

Com esta nova posição, Fig. 7.9, considerando a folga, a situação (posição e orientação) dos demais elementos são atualizadas determinando a influência da folga em toda a estrutura. Finalmente, os deslocamentos provocados pela folga, determinados com o auxílio da modelagem dinâmica, são somados aos deslocamentos flexíveis obtidos com o modelo *MSA*, considerando a estrutura isenta de folgas.

Assim, ao final deste Capítulo será possível modelar o sistema multicorpo considerando-se as influências das flexibilidades dos segmentos e das articulações, conjuntamente com as folgas presentes no sistema analisado.

7.4. Modelagem Dinâmica do Mecanismo de Quatro Barras

O modelo proposto para consideração das folgas é aplicado ao mecanismo plano de quatro barras. A modelagem dinâmica é realizada a partir da análise cinetostática de mecanismos e utilizando-se do método matricial (Erdman e Sandor, 1991). O modelo cinemático é obtido por números complexos (Mabie e Ocvirk, 1980).

7.4.1. Modelo Cinemático do Mecanismo Plano de Quatro Barras por Números Complexos

Podem-se determinar as soluções analíticas da velocidade e aceleração de um determinado ponto de um mecanismo utilizando-se de vetores na forma complexa (Erdman e Sandor, 1991; Mabie e Ocvirk, 1980).

Na análise cinemática do mecanismo de quatro barras, Fig. 7.10, pode-se determinar a velocidade e a aceleração do ponto D a partir do vetor posição $\mathbf{r}_D$, sendo conhecidos os comprimentos r_1 , r_2 , r_3 e r_4 bem como os parâmetros do movimento da manivela de entrada ou seja: a variação angular θ_2 , a rotação de entrada ω_2 e a sua aceleração angular α_2 .

$$\mathbf{r}_D = r_2 \left(e^{i\theta_2} \right) + r_3 \left(e^{i\theta_3} \right) = r_1 + r_4 \left(e^{i\theta_4} \right) \quad (7.3)$$

$$\mathbf{V}_D = r_2 \omega_2 i \left(e^{i\theta_2} \right) + r_3 \omega_3 i \left(e^{i\theta_3} \right) = r_4 \omega_4 i \left(e^{i\theta_4} \right) \quad (7.4)$$

$$\mathbf{A}_D = r_2 \left(i\alpha_2 - \omega_2^2 \right) \left(e^{i\theta_2} \right) + r_3 \left(i\alpha_3 - \omega_3^2 \right) \left(e^{i\theta_3} \right) = r_4 \left(i\alpha_4 - \omega_4^2 \right) \left(e^{i\theta_4} \right) \quad (7.5)$$

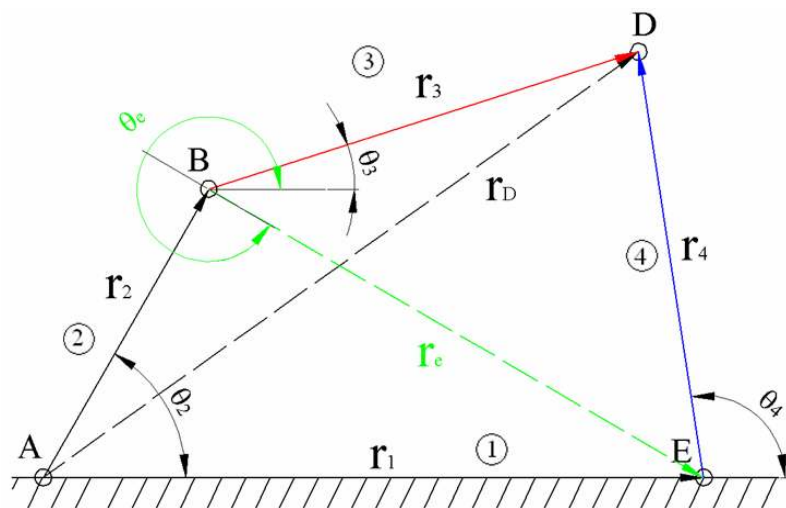


Figura 7.10 – Modelo cinemático do mecanismo de quatro barras.

As incógnitas nas Eqs. (7.3) a (7.5) são: θ_3 , θ_4 , ω_4 , ω_3 , α_3 e α_4 . Os valores de θ_3 e θ_4 podem ser determinados com o uso do vetor auxiliar variável $\mathbf{r}_e$, Fig. 7.10, em função de θ_2 , conforme Mabie e Ocvirk (1980):

$$\cos(\theta_3 - \theta_e) = \frac{r_3^2 + r_e^2 - r_4^2}{2 r_3 r_e} \quad (7.6)$$

$$\cos(\theta_e - \theta_4) = \frac{r_3^2 - r_e^2 - r_4^2}{2 r_e r_4} \quad (7.7)$$

Sendo os valores do comprimento de r_e e θ_e calculados por:

$$r_e^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2 r_1 r_2 \cos \theta_2 \quad (7.8)$$

$$\text{sen } \theta_e = -\frac{r_2}{r_1} \text{sen } \theta_2 \quad (7.9)$$

Nas Equações (7.6) a (7.9) são determinados dois valores. Deve-se tomar cuidado em selecionar os valores reais e os valores correspondentes ao mecanismo estudado.

As velocidades angulares ω_3 e ω_4 podem ser determinadas igualando-se as partes reais e imaginarias da Eq. (7.4):

$$r_2 \varpi_2 \text{sen } \theta_2 + r_3 \varpi_3 \text{sen } \theta_3 = r_4 \varpi_4 \text{sen } \theta_4 \quad (7.10)$$

$$r_2 \varpi_2 \cos \theta_2 + r_3 \varpi_3 \cos \theta_3 = r_4 \varpi_4 \cos \theta_4 \quad (7.11)$$

Multiplicando-se a Eq. (7.10) por $\cos \theta_4$ e a Eq. (7.11) por $\text{sen } \theta_4$ tem-se:

$$r_2 \varpi_2 \text{sen } \theta_2 \cos \theta_4 + r_3 \varpi_3 \text{sen } \theta_3 \cos \theta_4 = r_4 \varpi_4 \text{sen } \theta_4 \cos \theta_4 \quad (7.12)$$

$$r_2 \varpi_2 \cos \theta_2 \text{sen } \theta_4 + r_3 \varpi_3 \cos \theta_3 \text{sen } \theta_4 = r_4 \varpi_4 \cos \theta_4 \text{sen } \theta_4 \quad (7.13)$$

Subtraindo-se a Eq. (7.12) de (7.13) obtém-se:

$$r_2 \varpi_2 (\cos \theta_2 \operatorname{sen} \theta_4 - \operatorname{sen} \theta_2 \cos \theta_4) + r_3 \varpi_3 (\cos \theta_3 \operatorname{sen} \theta_4 - \operatorname{sen} \theta_3 \cos \theta_4) = 0$$

$$r_2 \varpi_2 \operatorname{sen}(\theta_4 - \theta_2) + r_3 \varpi_3 \operatorname{sen}(\theta_4 - \theta_3) = 0 \quad (7.14)$$

Que isolando ϖ_3 obtém-se:

$$\varpi_3 = -\frac{r_2}{r_3} \varpi_2 \frac{\operatorname{sen}(\theta_4 - \theta_2)}{\operatorname{sen}(\theta_4 - \theta_3)} \quad (7.15)$$

De modo semelhante tem-se:

$$\varpi_4 = \frac{r_2}{r_4} \varpi_2 \frac{\operatorname{sen}(\theta_3 - \theta_2)}{\operatorname{sen}(\theta_3 - \theta_4)} \quad (7.16)$$

As acelerações angulares podem ser determinadas a partir da Eq. (7.5), igualando-se as partes reais e imaginárias de ambos os lados da igualdade que após manipulações matemáticas obtém-se:

$$\alpha_3 = \frac{\{-r_2 \alpha_2 \operatorname{sen}(\theta_4 - \theta_2) + r_2 \varpi_2^2 \cos(\theta_4 - \theta_2) + r_3 \varpi_3^2 \cos(\theta_4 - \theta_3) - r_4 \varpi_4^2\}}{r_3 \operatorname{sen}(\theta_4 - \theta_3)} \quad (7.17)$$

$$\alpha_4 = \frac{\{r_2 \alpha_2 \operatorname{sen}(\theta_3 - \theta_2) - r_2 \varpi_2^2 \cos(\theta_3 - \theta_2) + r_4 \varpi_4^2 \cos(\theta_3 - \theta_4) - r_3 \varpi_3^2\}}{r_4 \operatorname{sen}(\theta_3 - \theta_4)} \quad (7.18)$$

Com a determinação dos valores das velocidades angulares e acelerações angulares, pode-se determinar as velocidades e acelerações lineares de qualquer ponto do mecanismo.

Para a análise dinâmica do mecanismo de quatro barras são necessárias a determinação das acelerações dos centros de massa das barras que é realizado com o auxílio da Fig. 7.11.

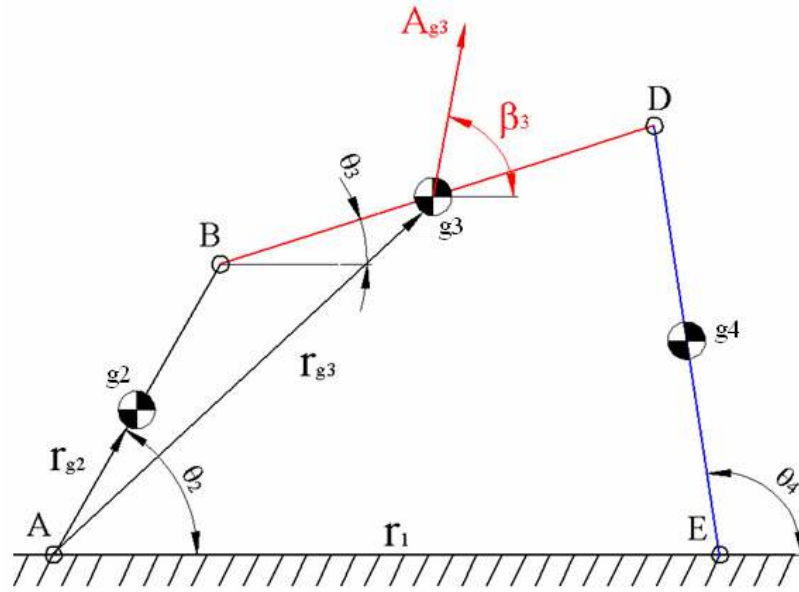


Figura 7.11 – Cálculo das acelerações dos centros de massa.

A aceleração do centro de massa da barra 2, A_{g2} , pode ser determinada a partir da derivada segunda do vetor posição do centro de massa da barra 2, r_{g2} :

$$r_{g2} = r_{g2} e^{i\theta_2} = r_{g2} (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \quad (7.19)$$

$$V_{g2} = r_{g2} \omega_2 (i e^{i\theta_2}) \quad (7.20)$$

$$A_{g2} = r_{g2} (i \alpha_2 - \omega_2^2) (e^{i\theta_2}) \quad (7.21)$$

Pode-se decompor a Eq. (7.21) em suas partes: real, A_{g2x} e imaginária A_{g2y} , como:

$$A_{g2x} = -r_{g2} \alpha_2 \sin \theta_2 - r_{g2} \omega_2^2 \cos \theta_2 \quad (7.22)$$

$$A_{g2y} = r_{g2} \alpha_2 \cos \theta_2 - r_{g2} \omega_2^2 \sin \theta_2 \quad (7.23)$$

A intensidade de A_{g2} pode ser calculada por $A_{g2} = \sqrt{(A_{g2x})^2 + (A_{g2y})^2}$ e sua direção definida por β_2 , por $\tan \beta_2 = \frac{A_{g2y}}{A_{g2x}}$.

A aceleração do centro de massa da barra 3, A_{g3} , é calculada por:

$$\mathbf{r}_{g3} = r_2 e^{i\theta_2} + r_{g3} e^{i\theta_3} \quad (7.24)$$

$$\mathbf{V}_{g3} = r_2 \varpi_2 (i e^{i\theta_2}) + r_{g3} \varpi_3 (i e^{i\theta_3}) \quad (7.25)$$

$$\mathbf{A}_{g3} = r_2 (i \alpha_2 - \varpi_2^2) (e^{i\theta_2}) + r_{g3} (i \alpha_3 - \varpi_3^2) (e^{i\theta_3}) \quad (7.26)$$

Da mesma forma, pode-se decompor a Eq. (7.26) em suas partes: real, A_{g3x} e imaginária A_{g3y} como:

$$A_{g3x} = -r_2 \alpha_2 \sen \theta_2 - r_2 \omega_2^2 \cos \theta_2 - r_{g3} \alpha_3 \sen \theta_3 - r_{g3} \omega_3^2 \cos \theta_3 \quad (7.27)$$

$$A_{g3y} = r_2 \alpha_2 \cos \theta_2 - r_2 \omega_2^2 \sen \theta_2 + r_{g3} \alpha_3 \cos \theta_3 - r_{g3} \omega_3^2 \sen \theta_3 \quad (7.28)$$

A intensidade de A_{g3} pode ser calculada por $A_{g3} = \sqrt{(A_{g3x})^2 + (A_{g3y})^2}$ e a sua direção por β_3 , por $\tg \beta_3 = \frac{A_{g3y}}{A_{g3x}}$.

Com procedimento análogo podem-se calcular os valores das partes: real, A_{g4x} e imaginária A_{g4y} como:

$$\begin{aligned} A_{g4x} = & -r_2 \alpha_2 \sen \theta_2 - r_2 \omega_2^2 \cos \theta_2 - r_3 \alpha_3 \sen \theta_3 - r_3 \omega_3^2 \cos \theta_3 \\ & + r_{g4} \alpha_4 \sen \theta_4 + r_{g4} \omega_4^2 \cos \theta_4 \end{aligned} \quad (7.29)$$

$$\begin{aligned} A_{g4y} = & r_2 \alpha_2 \cos \theta_2 - r_2 \omega_2^2 \sen \theta_2 + r_3 \alpha_3 \cos \theta_3 - r_3 \omega_3^2 \sen \theta_3 \\ & - r_{g4} \alpha_4 \cos \theta_4 + r_{g4} \omega_4^2 \sen \theta_4 \end{aligned} \quad (7.30)$$

Finalmente, a intensidade de A_{g4} pode ser calculada por $A_{g4} = \sqrt{(A_{g4x})^2 + (A_{g4y})^2}$ e sua direção dada por β_4 , por $\tg \beta_4 = \frac{A_{g4y}}{A_{g4x}}$.

7.4.2. Modelagem Dinâmica do Mecanismo de Quatro Barras

A modelagem dinâmica do mecanismo de quatro barras é realizada utilizando-se da análise cinetostática de mecanismos. Para esta análise é considerado que o mecanismo é composto por segmentos rígidos conectados por articulações livres de atrito e folgas. Supondo o mecanismo restrito a movimentar-se no plano horizontal, de forma que o efeito gravitacional não influencia na análise e que as acelerações lineares e angulares podem ser determinadas seguindo o procedimento do item 7.4.1, pode-se determinar as forças de reação nas articulações em função das forças de inércia e momentos de inércia do mecanismo, utilizando-se o conceito de equilíbrio dinâmico. As forças de inércia representam a carga cinetostática do mecanismo e pode ser calculada pela Eq. (7.31):

$$F_{Oj} = (m_j A_{gj}) e^{i(\beta_j + \pi)} \quad (j = 1 \text{ a } n) \quad (7.31)$$

Onde F_{Oj} representa a força de inércia agindo no segmento j ; m_j representa a massa do segmento; β_j define a direção da aceleração A_{gj} , do centro de massa do segmento e n é o número de segmentos. A força de inércia possui direção contrária ao vetor da aceleração do centro de massa, $(\beta_j + \pi)$.

A Figura 7.12 apresenta o mecanismo de quatro barras para uma posição genérica com as forças de inércias em suas respectivas posições.

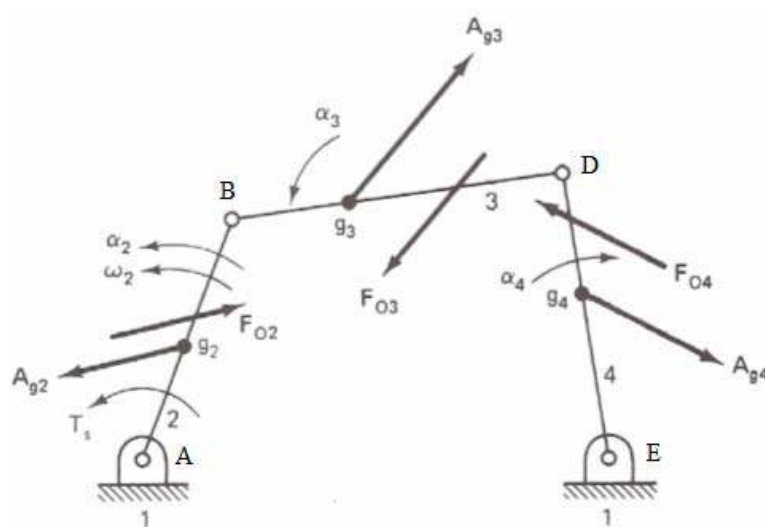


Figura 7.12 – Forças de inércia para o mecanismo de quatro barras (Erdman e Sandor, 1991).

O torque de inércia, T_{Oj} , pode ser calculado pela Eq. (7.32):

$$T_{Oj} = -I_j \alpha_j \quad (7.32)$$

onde I_j é o momento de inércia em torno do centro de massa do segmento j e α_j é a aceleração angular do segmento j . O torque de inércia age em sentido oposto ao da aceleração angular.

A análise dinâmica é realizada utilizando-se a análise cinetostática com o método matricial que considera que no diagrama de corpo livre de cada segmento do mecanismo, as forças de inércia e torque de inércia são assumidas atuando no centro de massa, Fig. 7.13 (Erdman e Sandor, 1991). Então, para o diagrama de corpo livre de cada segmento pode-se escrever as três equações de equilíbrio: $\Sigma F_x = 0$; $\Sigma F_y = 0$ e $\Sigma T_{Oj} = 0$.

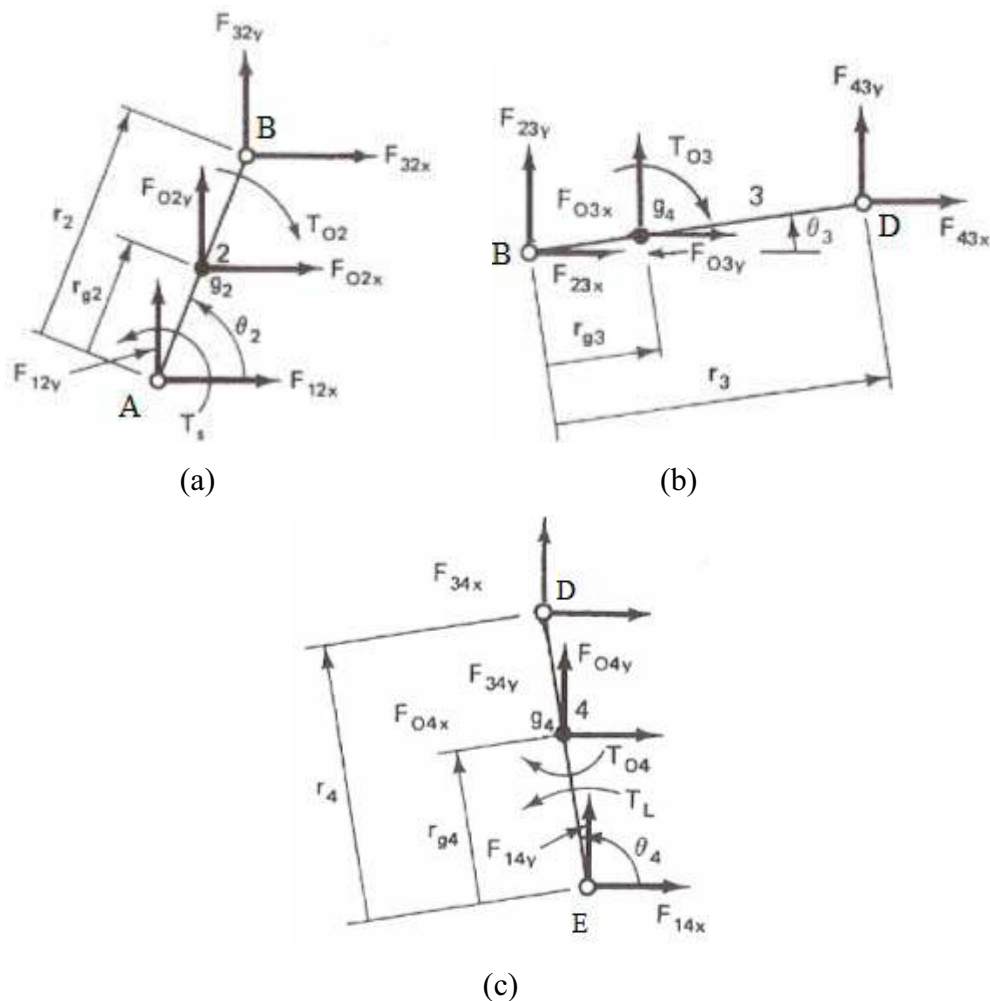


Figura 7.13 – Diagrama de corpo livre do mecanismo de quatro barras. (a) barra 2; (b) barra 3; (c) barra 4 (Erdman e Sandor, 1991).

Da Figura 7.13 (a), para o segmento 2, pode-se escrever:

$$F_{12x} + F_{32x} + F_{O2x} = 0 \quad (7.33)$$

$$F_{12y} + F_{32y} + F_{O2y} = 0 \quad (7.34)$$

Considerando o momento positivo no sentido horário e T_s o torque de acionamento tem-se:

$$T_{O2} + T_s + F_{12x} r_{g2} \text{sen } \theta_2 - F_{12y} r_{g2} \cos \theta_2 - F_{32x} (r_2 - r_{g2}) \text{sen } \theta_2 + F_{32y} (r_2 - r_{g2}) \cos \theta_2 = 0 \quad (7.35)$$

Para o segmento 3, Fig. 7.13 (b):

$$F_{23x} + F_{43x} + F_{O3x} = 0 \quad (7.36)$$

$$F_{23y} + F_{43y} + F_{O3y} = 0 \quad (7.37)$$

$$T_{O3} + F_{23x} r_{g3} \text{sen } \theta_3 - F_{23y} r_{g3} \cos \theta_3 - F_{43x} (r_3 - r_{g3}) \text{sen } \theta_3 + F_{43y} (r_3 - r_{g3}) \cos \theta_3 = 0 \quad (7.38)$$

Pelo diagrama de corpo livre do segmento 4, Fig. 7.13 (c):

$$F_{34x} + F_{14x} + F_{O4x} = 0 \quad (7.39)$$

$$F_{34y} + F_{14y} + F_{O4y} = 0 \quad (7.40)$$

$$T_{O4} - F_{34x} (r_4 - r_{g4}) \text{sen } \theta_4 + F_{34y} (r_4 - r_{g4}) \cos \theta_4 + T_L + F_{14x} r_{g4} \text{sen } \theta_4 - F_{14y} r_{g4} \cos \theta_4 = 0 \quad (7.41)$$

Onde T_L representa o torque devido ao carregamento externo.

As Eqs. (7.33) a (7.41) representam um sistema de nove equações que descrevem, para cada configuração instantânea do mecanismo de quatro barras, o equilíbrio dinâmico das forças e momentos em cada segmento em movimento. As variáveis a serem determinadas são as reações de apoio F_{12x} , F_{12y} , F_{23x} , F_{23y} , F_{34x} , F_{34y} , F_{14x} e F_{14y} nas articulações e o torque de acionamento T_s . Da terceira lei de Newton tem-se que: $F_{jkx} = -F_{kix}$. Desta forma, pode-se reescrever o sistema de Eqs. (7.33) a (7.41) isolando-se os termos conhecidos à direita e as variáveis a serem determinadas à esquerda:

$$\begin{aligned}
F_{O2x} &= -F_{12x} + F_{23x} \\
F_{O2y} &= -F_{12y} + F_{23y} \\
T_{O2} &= -F_{12x} r_{g2} \text{sen } \theta_2 + F_{12y} r_{g2} \cos \theta_2 - T_s - F_{23x} (r_2 - r_{g2}) \text{sen } \theta_2 + F_{23y} (r_2 - r_{g2}) \cos \theta_2 \\
F_{O3x} &= -F_{23x} + F_{34x} \\
F_{O3y} &= -F_{23y} + F_{34y} \\
T_{O3} &= -F_{23x} r_{g3} \text{sen } \theta_3 + F_{23y} r_{g3} \cos \theta_3 - F_{34x} (r_3 - r_{g3}) \text{sen } \theta_3 + F_{34y} (r_3 - r_{g3}) \cos \theta_3 \\
F_{O4x} &= -F_{34x} - F_{14x} \\
F_{O4y} &= -F_{34y} - F_{14y} \\
T_{O4} &= F_{34x} (r_4 - r_{g4}) \text{sen } \theta_4 - F_{34y} (r_4 - r_{g4}) \cos \theta_4 - F_{14x} r_{g4} \text{sen } \theta_4 + F_{14y} r_{g4} \cos \theta_4 - T_L
\end{aligned} \tag{7.42}$$

O sistema de equações (7.42) pode ser escrito em formato matricial para resolução computacional:

$$[F_D] = [L][F_B] \tag{7.43}$$

sendo $[F_D]$ um vetor coluna contendo os valores conhecidos das forças de inércia e os torques, $[L]$ é uma matriz quadrada contendo o comprimento dos segmentos e os valores dos ângulos e, $[F_B]$ é um vetor coluna contendo os valores desconhecidos das forças de reações nas articulações e o torque de acionamento necessário.

Para resolver a Eq. (7.43) pode-se aplicar técnicas de manipulação de matrizes. Multiplicando-se ambos os lados da Eq. (7.43) pela inversa da matriz $[L]$ tem-se:

$$[L]^{-1} [F_D] = [L]^{-1} [L][F_B] \tag{7.44}$$

onde $[L]^{-1} [L] = [I]$ e $[I]$ é a matriz identidade. Desta forma chega-se em:

$$[F_B] = [L]^{-1} [F_D] \tag{7.45}$$

7.5. Exemplo Numérico Aplicado ao Mecanismo de quatro barras Simétrico

Para verificar a metodologia proposta foi realizado o cálculo do modelo dinâmico do mecanismo de quatro barras simétrico, Fig. 7.14.

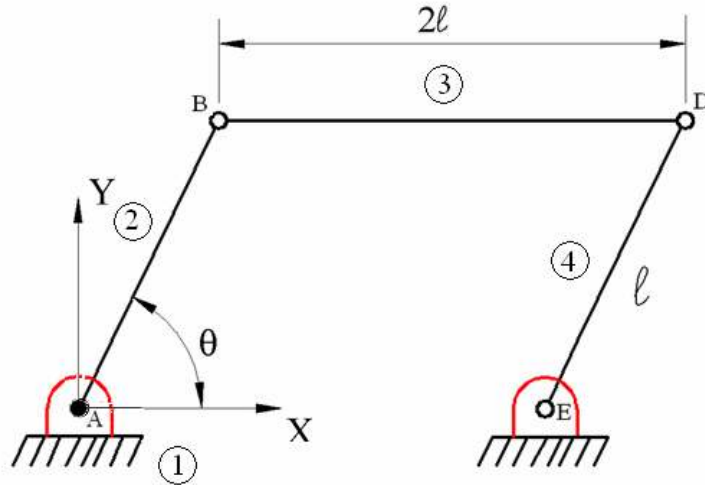


Figura 7.14 – Mecanismo Plano de Quatro Barras Simétrico.

Os parâmetros utilizados no modelo numérico são: $\ell = 0,2 \text{ m}$; o segmento ① é a base fixa; os segmentos ② e ④ são iguais e possuem massas de $m_2 = m_4 = 0,157 \text{ kg}$ e seção transversal quadrada de $0,01\text{m} \times 0,01\text{m}$; o segmento ③ possui massa de $m_3 = 0,314 \text{ kg}$ e seção transversal quadrada de $0,01\text{m} \times 0,01\text{m}$.

Os valores das forças de inércia, Eq. (7.31), e torques de inércia, Eq. (7.32), são dados por:

$$\begin{aligned}
 F_{O2x} &= m_2 A_{g2} \cos(\beta_2 + \pi); \\
 F_{O2y} &= m_2 A_{g2} \sin(\beta_2 + \pi); \\
 T_{O2} &= -I_2 \alpha_2; \\
 F_{O3x} &= m_3 A_{g3} \cos(\beta_3 + \pi); \\
 F_{O3y} &= m_3 A_{g3} \sin(\beta_3 + \pi); \\
 T_{O3} &= -I_3 \alpha_3; \\
 F_{O4x} &= m_4 A_{g4} \cos(\beta_4 + \pi); \\
 F_{O4y} &= m_4 A_{g4} \sin(\beta_4 + \pi); \\
 T_{O4} &= -I_4 \alpha_4;
 \end{aligned} \tag{7.46}$$

Os valores dos momentos de inércia de massa em torno do eixo do centro de gravidade podem ser calculados pela Eq. (7.47):

$$I_j = \frac{m_j (h_j^2 + L_j^2)}{12} \quad (7.47)$$

onde h_j e L_j são as dimensões da seção transversal do segmento.

As acelerações lineares dos centros de massa podem ser calculadas pelas Eqs. (7.22) a (7.30). Para os cálculos foi considerado o valor da velocidade angular do segmento ② sendo constante e igual a $\varpi_2 = 15 \text{ rpm}$.

Substituindo os valores na Eq. (7.45) obtêm-se os valores das reações de apoio nas articulações.

Os resultados do modelo dinâmico analítico do mecanismo de quatro barras simétrico foram confirmados através do desenvolvimento de um modelo computacional tri-dimensional utilizando-se do software VisualNastran 4D®.

Supondo uma folga de 1 mm na articulação do mecanismo de quatro barras simétrico correspondente ao ponto B, Fig. 7.14, e sabendo-se a direção da força de reação nesta articulação é possível, a partir da Eq. (7.2), calcular a influência da folga nas direções x e y . Como a articulação correspondente ao ponto D, Fig. 7.14, é considerada isenta de folga, o segmento ③ apresentará uma rotação ψ , que pode ser calculada pelo modelo cinemático considerando a folga, conforme Fig. 7.15.

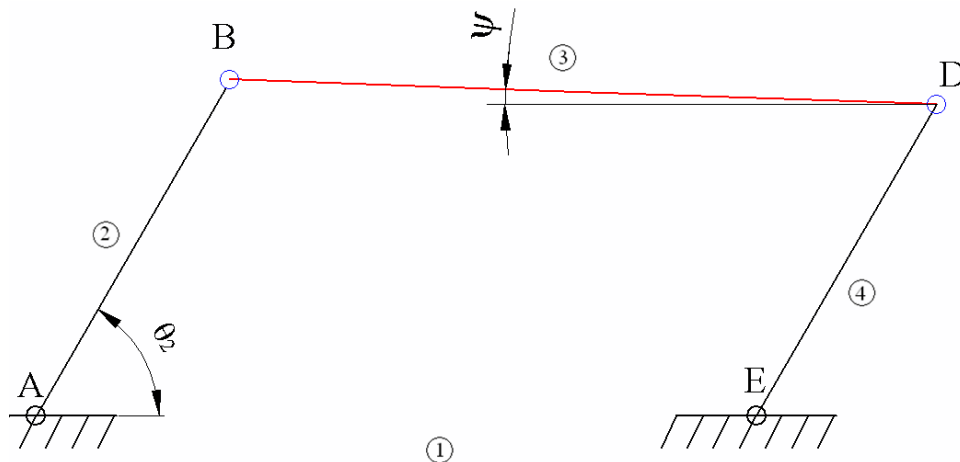


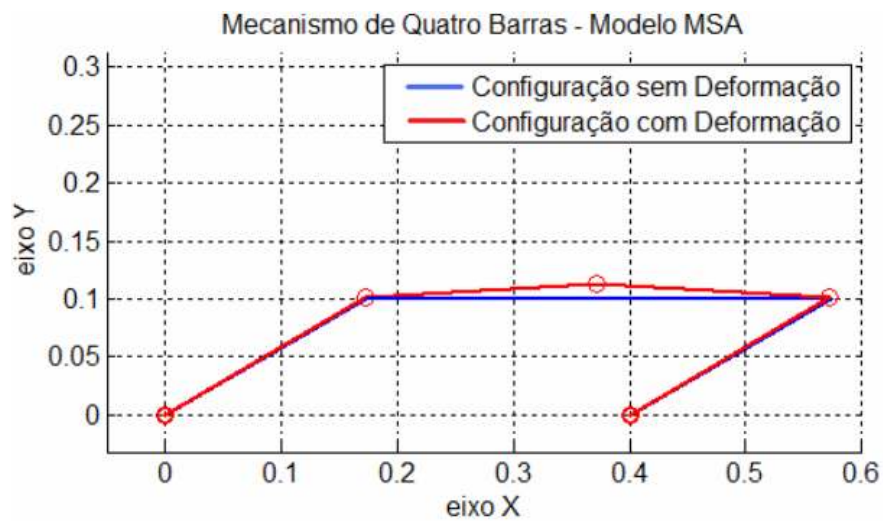
Figura 7.15 – Cálculo da rotação do segmento ③.

Deve-se destacar que o procedimento anterior pode ser aplicado para mais de uma folga, pois os ângulos das reações de apoio nas articulações são todos conhecidos.

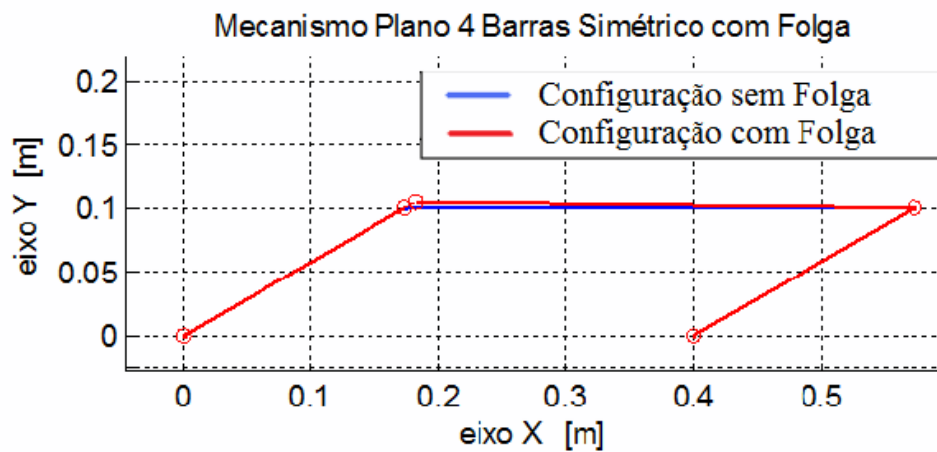
Portanto, em função da variação do ângulo de entrada θ_2 é possível calcular, para cada instante, as novas posições dos pontos do mecanismo com folga. Desta forma, a influência na configuração do mecanismo, isto é, as variações lineares e angulares devido à folga, são somadas aos deslocamentos flexíveis do modelo proposto utilizando-se o *MSA*. Assim, a análise final considera tanto a flexibilidade dos segmentos e articulações obtidos a partir do modelo *MSA*, como a influência das folgas calculadas com o auxílio do modelo dinâmico.

A Figura 7.16(a) mostra para o ângulo $\theta_2 = 30^\circ$ o resultado dos deslocamentos flexíveis do modelo *MSA* quando da aplicação de uma força $F_y = 50\text{ N}$, aplicada no centro da biela; a Fig. 7.16(b) mostra a variação da configuração da estrutura em função da folga de 10 mm na articulação *B* (folga exagerada para efeito de visualização) e, finalmente, a Fig. 7.16(c) mostra a configuração final somando os efeitos dos deslocamentos flexíveis e o efeito da folga.

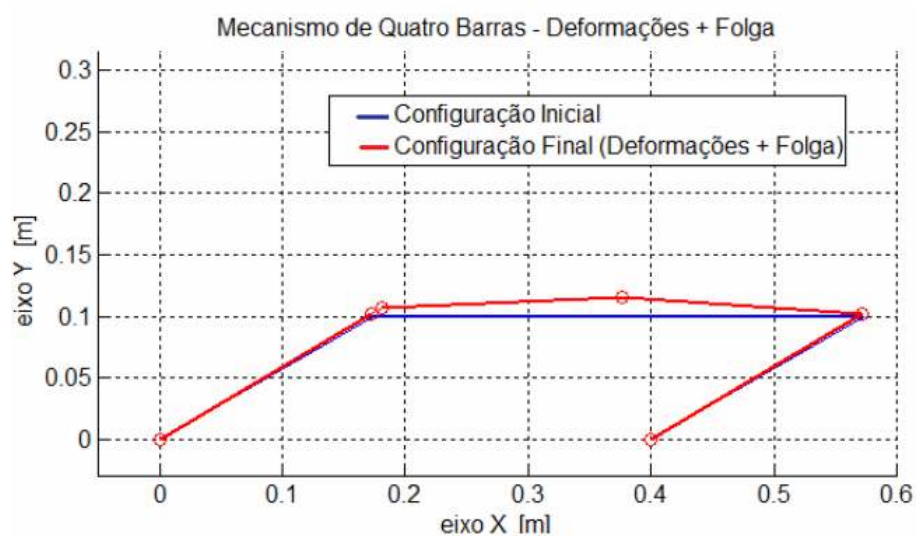
Deve-se destacar que, considerando no modelo *MSA* a nova configuração dos nós devido à folga, os resultados numéricos apresentaram alterações desprezíveis. Isto já era esperado, pois na análise *MSA* o cálculo dos deslocamentos flexíveis são realizados para uma configuração estática. Como as folgas nos sistemas multicorpos são pequenas, esta variação no modelo não foi significativa.



(a)



(b)



(c)

Figura 7.16 – Mecanismo de Quatro Barras: (a) cálculo *MSA*; (b) consideração da folga; (c) modelo final.

7.6. Conclusões

Neste Capítulo foi realizado o estudo da influência das folgas nos sistemas multicorpos planos. Foi proposto também um modelo de inclusão da folga no cálculo da acuracidade do sistema.

A folga, por menor que seja, prejudica a acuracidade do sistema, causando alterações no comportamento da estrutura.

A influência da folga foi determinada a partir do modelo dinâmico do sistema que, em função da direção das forças de reações, foi possível determinar o ponto de contato entre as peças que formam a articulação. As novas posições dos nós do mecanismo em consideração são atualizadas, permitindo determinar a influência das folgas na acuracidade do sistema. Este resultado foi somado aos deslocamentos flexíveis obtidos com o modelo *MSA*.

Desta forma, o sistema final para determinar a acuracidade do sistema leva em consideração tanto a flexibilidade dos segmentos e articulações como a influência das folgas nas articulações.

CAPÍTULO VIII

TESTES EXPERIMENTAIS

Neste Capítulo são apresentados a bancada de testes e os testes experimentais realizados para validar o modelo *MSA* proposto nesta tese.

8.1. Bancada de Testes

Na Figura 8.1 é apresentado o esquema da bancada de teste utilizada nos experimentos de validação. Ela é composta por uma base rígida que permite a montagem de diversas estruturas para a realização dos testes experimentais. Para medir os deslocamentos flexíveis foi utilizado um sistema composto por um relógio comparador, com resolução de $1\ \mu m$ e curso de $1\ mm$, fixado em uma guia prismática de precisão. Um paquímetro com resolução de $0,02\ mm$ e curso de $600\ mm$ foi utilizado para o correto posicionamento do relógio comparador ao longo do segmento, permitindo verificar a posição de aplicação das cargas. Foi utilizado também um inclinômetro digital, com resolução de $0,1^\circ$, para o nivelamento do sistema de medição, um porta peso e pesos, permitindo a aplicação de cargas estáticas e uma balança digital com resolução de 2 gramas para calibração dos pesos.

Os testes realizados para verificação dos resultados numéricos foram feitos para uma estrutura fechada constituída por dois segmentos engastados em suas extremidades e unidos por uma articulação esférica, Fig. 8.2, simulando uma perna da estrutura paralela 6-RSS. Esta montagem permite a aplicação de cargas concentradas ao longo do segmento horizontal e sua montagem na bancada de testes está apresentada nas Figs. 8.3 e 8.4. Os segmentos são construídos em aço com módulo de elasticidade $E = 2,17e^{11}\ N/m^2$ e seção circular uniforme de $6,1\ mm$.

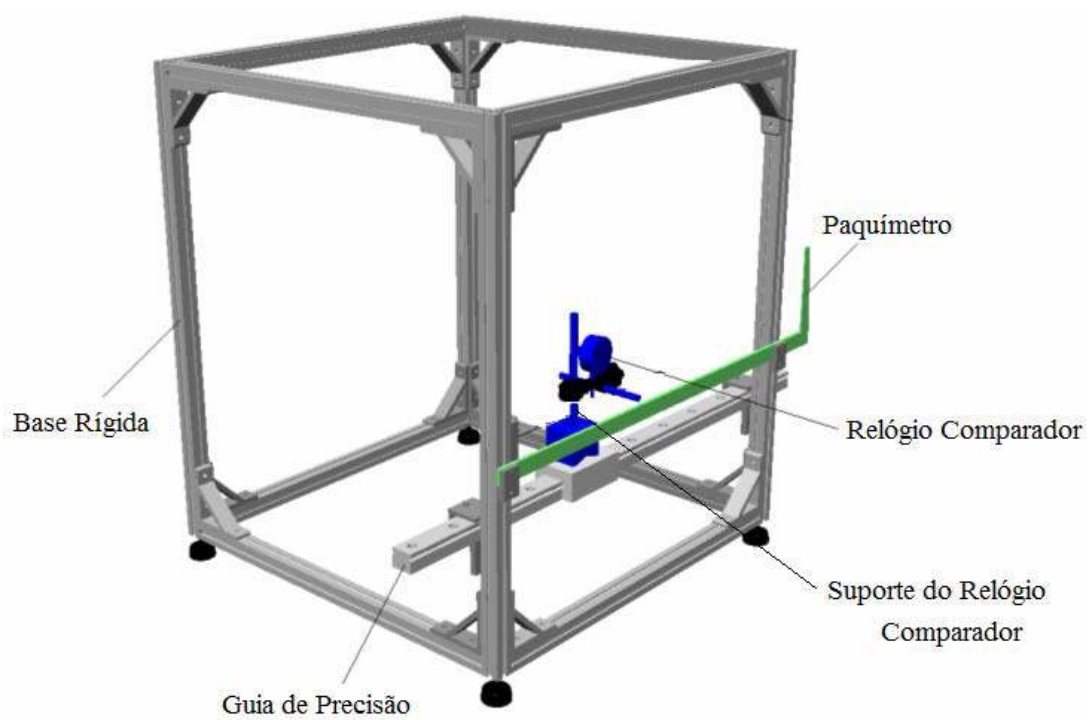


Figura 8.1 – Esquema da Bancada de Testes.

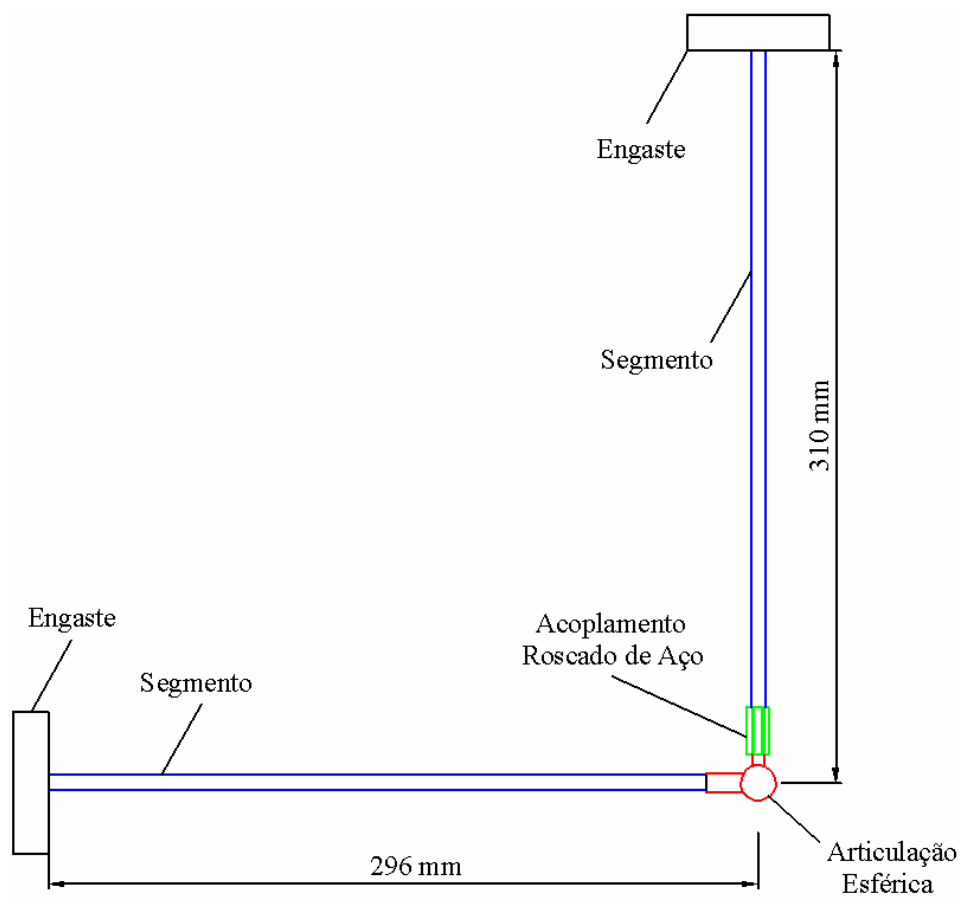


Figura 8.2 – Análise dos deslocamentos flexíveis.



Figura 8.3 – Bancada de Testes.

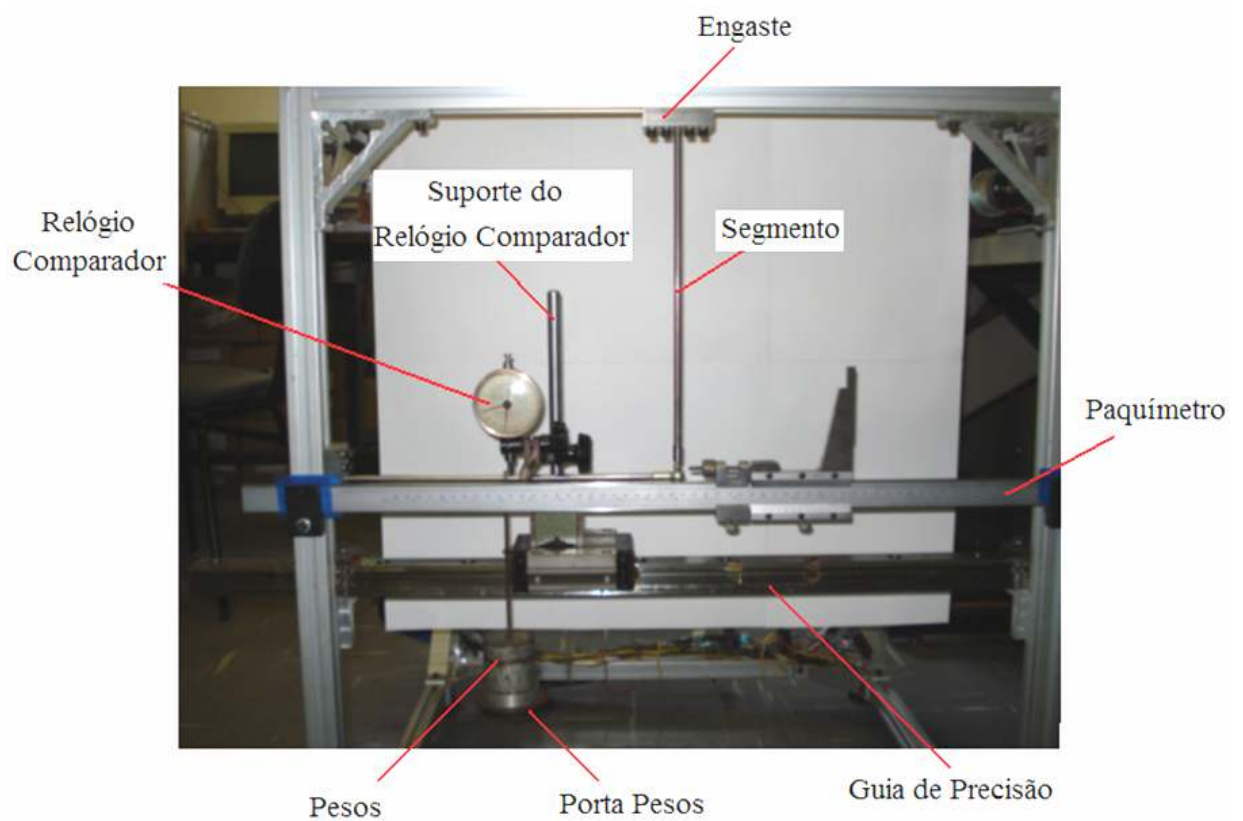


Figura 8.4 – Detalhes do aparato experimental

8.2. Testes Experimentais

Foram realizados testes para três cargas: de 0,750 kg; 1,002 kg e 1,250 kg, medindo-se ao longo do segmento horizontal o deslocamento flexível na direção do eixo y . O modelo numérico foi obtido utilizando-se do método *MSA*, conforme Fig. 8.5, e implementado com o software MatLab[®], apresentado no Anexo IV.

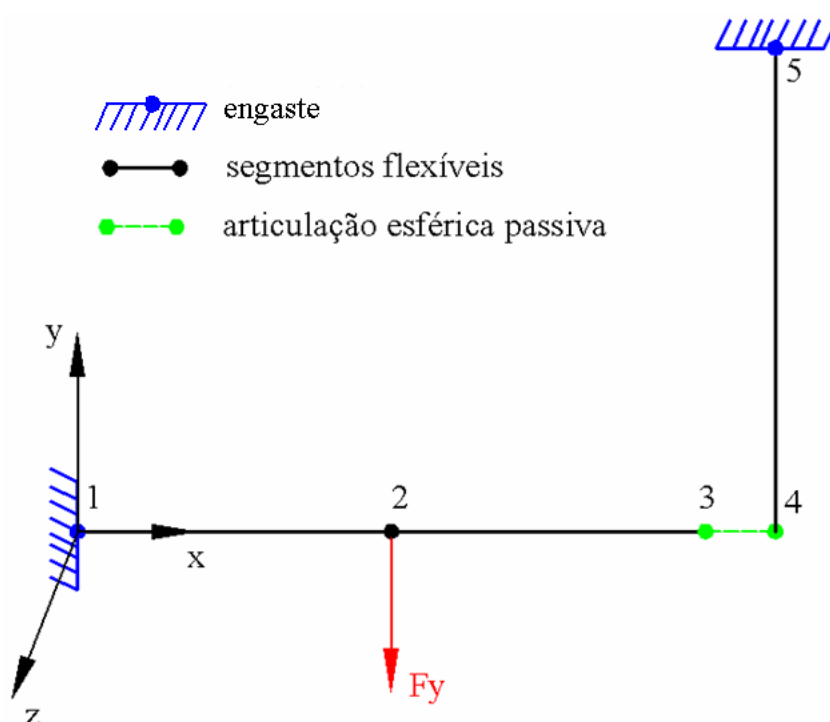


Figura 8.5 – Modelo *MSA* do modelo experimental.

As Tabelas 8.1 a 8.3 e as Figs. 8.6 a 8.8 apresentam os resultados obtidos nos testes experimentais. No Anexo III são apresentados o planejamento estatístico e todos os resultados experimentais.

Tabela 8.1. Deslocamento flexível na direção y do nó 2 em função da carga aplicada de 0,750 kg ao longo do segmento horizontal.

Deslocamento flexível do nó 2 em y [mm]			
Posição da aplicação da carga em x [mm]	Teórico (MSA) [mm]	Experimental (média) [mm]	Erro (%)
30	-0,004	-0,0040	0
45	-0,011	-0,0102	7,27
60	-0,022	-0,0230	4,55
75	-0,037	-0,0364	1,62
90	-0,054	-0,0536	0,7
105	-0,073	-0,0724	0,82
120	-0,091	-0,0898	1,32
135	-0,107	-0,1114	4,11
150	-0,119	-0,1166	2,02
165	-0,126	-0,1222	3,02
180	-0,126	-0,1204	4,44
195	-0,120	-0,1150	4,17
210	-0,107	-0,1052	1,68
225	-0,088	-0,0836	5
240	-0,066	-0,0640	3,03

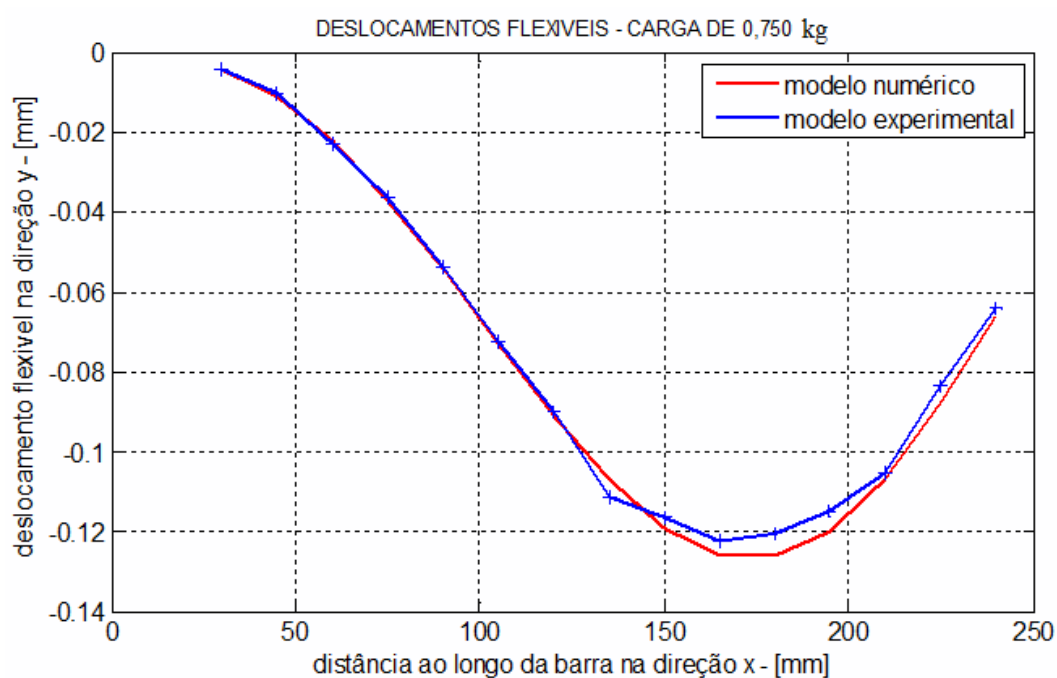


Figura 8.6 – Gráfico do deslocamento flexível correspondente a Tab. 8.1.

Tabela 8.2. Deslocamento flexível na direção y do nó 2 em função da carga aplicada de 1,002 kg ao longo do segmento horizontal.

Deslocamento flexível do nó 2 em y [mm]			
Posição da aplicação da carga em x [mm]	Teórico (MSA) [mm]	Experimental (média) [mm]	Erro (%)
30	-0,005	-0,0060	20
45	-0,014	-0,0152	8,57
60	-0,029	-0,0300	3,45
75	-0,049	-0,0496	1,22
90	-0,072	-0,0710	1,39
105	-0,098	-0,1044	6,53
120	-0,122	-0,1240	1,64
135	-0,143	-0,1406	1,68
150	-0,159	-0,1566	1,51
165	-0,168	-0,1624	3,33
180	-0,169	-0,1636	3,19
195	-0,160	-0,1596	0,25
210	-0,143	-0,1422	0,56
225	-0,118	-0,1176	0,34
240	-0,088	-0,0812	7,73

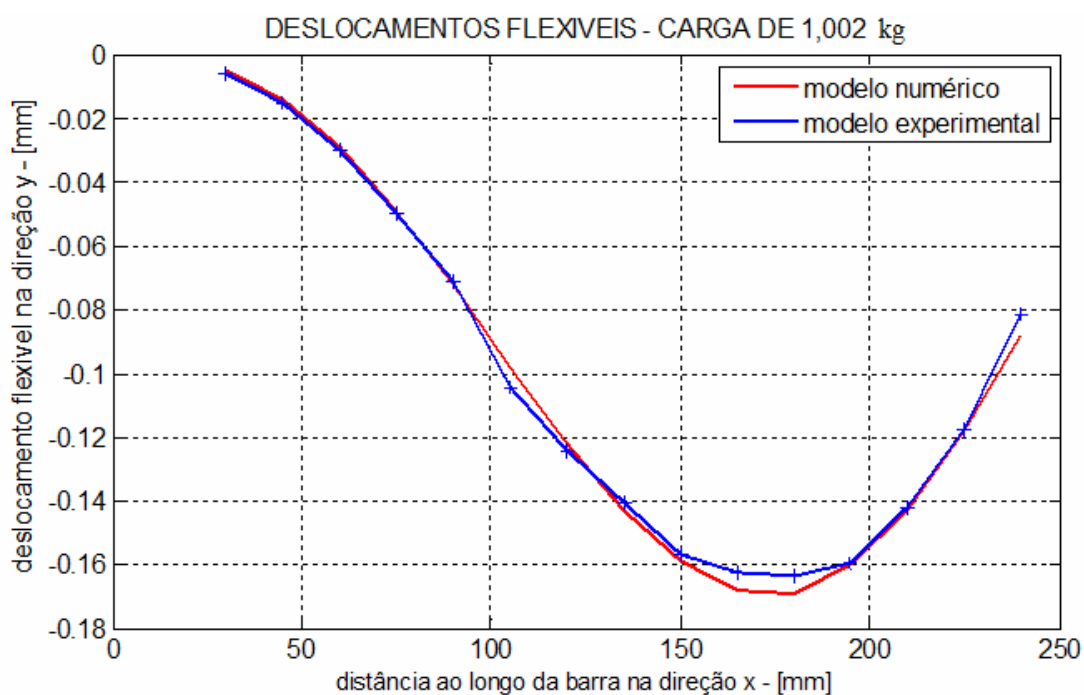


Figura 8.7 – Gráfico do deslocamento flexível correspondente a Tab. 8.2.

Tabela 8.3. Deslocamento flexível na direção y do nó 2 em função da carga aplicada de 1,250 kg ao longo do segmento horizontal.

Deslocamento flexível do nó 2 em y [mm]			
Posição da aplicação da carga em x [mm]	Teórico (MSA) [mm]	Experimental (média) [mm]	Erro (%)
30	-0,006	-0,0074	23,33
45	-0,017	-0,0182	7,06
60	-0,036	-0,0380	5,56
75	-0,061	-0,0618	1,31
90	-0,090	-0,0926	2,89
105	-0,121	-0,1186	1,98
120	-0,152	-0,1498	1,45
135	-0,179	-0,1764	1,45
150	-0,199	-0,1916	3,72
165	-0,210	-0,2052	2,29
180	-0,211	-0,2038	3,41
195	-0,200	-0,1974	1,30
210	-0,178	-0,1708	4,05
225	-0,147	-0,1420	3,40
240	-0,110	-0,1074	2,36

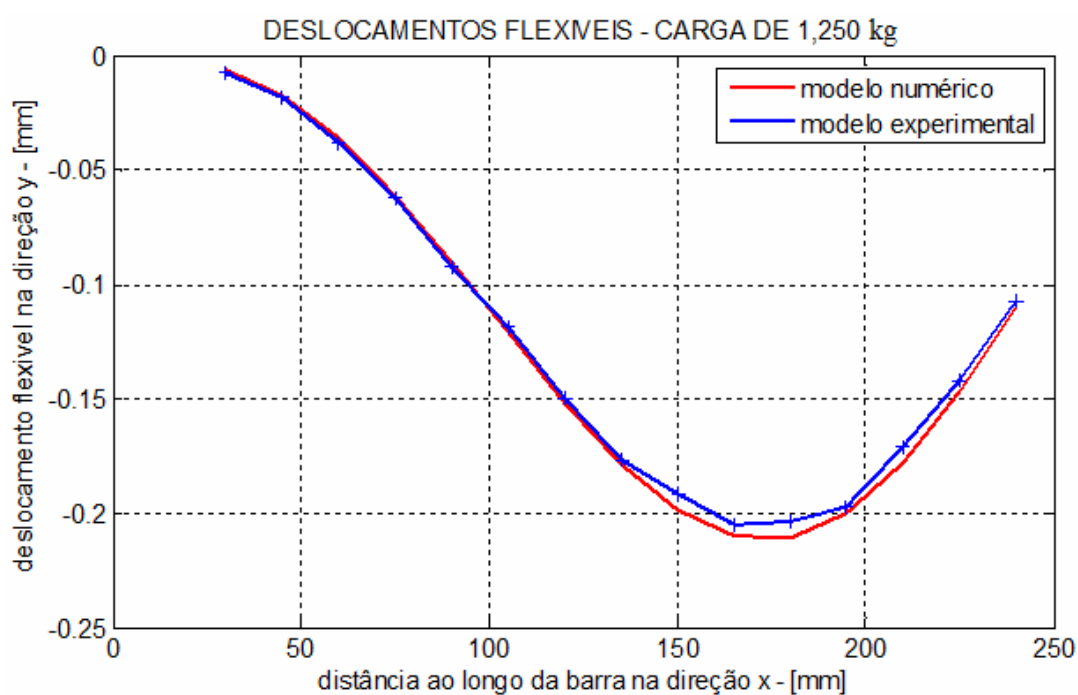


Figura 8.8 – Gráfico do deslocamento flexível correspondente a Tab. 8.3.

Pode-se verificar pelas Tabs. 8.1 a 8.3 que os erros entre os valores obtidos pelo método *MSA* e os experimentais são pequenos. Os maiores erros aconteceram próximo ao engastamento. Isto era esperado pela impossibilidade de se obter um engastamento perfeito e pela impossibilidade de garantir que o ponto de aplicação da força fosse exatamente o mesmo ponto de medição do deslocamento. Dos resultados obtidos pode-se verificar que o método *MSA* apresentado nesta tese, além de ser de fácil entendimento, implementação e padronização, também fornece resultados coerentes com a parte experimental.

CAPÍTULO IX

CONCLUSÕES

9.1. Conclusões

Os sistemas multicorpos são de grande importância por serem utilizados nas mais variadas aplicações como, por exemplo, em robótica, máquinas de usinagem, sensores, simuladores de voo e de terremotos, brinquedos, entre outras. Porém podem apresentar problemas de acuracidade e singularidades.

A importância crescente da alta acuracidade e desempenho dinâmico para sistemas multicorpos, principalmente robôs, máquinas de usinagem de altíssima rotação e sistemas automáticos de manipulação e montagem, têm aumentado o uso de materiais de baixo peso e alta resistência, projetados com a finalidade de reduzir as dimensões do projeto e o peso do sistema final. A melhoria da acuracidade depende de diversos fatores tais como os erros dimensionais, do sistema de controle, folgas e rigidez da estrutura. Assim, na otimização de projetos de sistemas multicorpos, quando associada com a sua acuracidade, a rigidez tem aspecto muito importante. Além disso, o conhecimento das singularidades que porventura possam existir dentro do espaço de trabalho do sistema multicorpo permite a aplicação de um sistema de controle mais simples e confiável.

Nos primeiros capítulos desta tese foram descritos diversos tipos de estruturas robóticas, dando maior atenção às estruturas paralelas com o objetivo de apresentar sua diversidade e permitindo a visualização dos problemas de rigidez e singularidades existentes nestas estruturas.

Devido à sua constituição diversos autores afirmam que as estruturas robóticas paralelas são rígidas, apresentando maior acuracidade quando comparadas com as estruturas robóticas seriais. No entanto, isto nem sempre pode ser verificado para todas as estruturas paralelas, a falta de rigidez em alguns casos limita o espaço de trabalho da estrutura, e podendo provocar vibrações indesejáveis.

Assim, nesta Tese, o estudo da rigidez e das singularidades das cadeias cinemáticas fechadas foi realizado com o intuito de contribuir para elucidar os problemas associados à modelagem das estruturas robóticas paralelas.

Dos trabalhos presentes na literatura conclui-se que as metodologias de cálculo da matriz de rigidez são, na grande maioria, modelos simplificados em que as flexibilidades dos segmentos ou das articulações são desprezadas. Da mesma forma, as folgas nas articulações também são desprezadas. Além disso, os métodos de análise de rigidez são formulados para uma determinada estrutura, muitas vezes não podendo ser estendido a outras estruturas.

Dentre os trabalhos estudados não foi encontrado nenhum que apresentasse uma comparação efetiva entre as principais formas de análise de rigidez. Neste aspecto, pode-se dizer que este é o primeiro que faz esta comparação, além de mostrar as dificuldades e vantagens de cada método.

Das metodologias estudadas para a análise de rigidez, o método *MSA* é o que permite uma maior padronização para obter a matriz de rigidez do sistema, pois possibilita a completa integralização entre todas as fontes de flexibilidade como segmentos das mais variadas formas e articulações ativas e passivas.

O método *MSA* é aplicado ao sistema multicorpo através de sua discretização que, no caso das estruturas robóticas, já se apresentam divididas em partes, sendo compostas basicamente por segmentos e articulações que podem ser passivas ou ativas. Assim, a aplicação do método *MSA* torna-se relativamente simples em função dos elementos constitutivos da estrutura robótica. Conhecendo a geometria, propriedades mecânicas e dimensões dos componentes é possível determinar as matrizes de rigidez dos segmentos (“links”) e, por meio de catálogos ou mesmo de testes experimentais é possível determinar os parâmetros de rigidez das articulações. A partir destes dados é possível montar a matriz de rigidez da estrutura e, conseqüentemente determinar os deslocamentos flexíveis dos segmentos, das articulações bem como da estrutura robótica como um todo. A obtenção desta matriz de rigidez leva em consideração o modelo cinemático da estrutura robótica que, nesta Tese, é feita a partir do conhecimento das coordenadas dos nós.

Outra grande vantagem da modelagem *MSA* é trabalhar com matrizes, o que permite a fácil implementação computacional, sem a necessidade de, por exemplo, calcular derivadas que são necessárias nos outros modelos de análise de rigidez, principalmente nos métodos derivados da matriz Jacobiana.

A forma como a articulação foi modelada, na metodologia *MSA*, é uma das contribuições desta tese. Sua grande vantagem é a fácil visualização do efeito físico da articulação no sistema multicorpo.

O método *FEA* é útil para efeitos de comparação dos resultados numéricos e/ou experimentais mas, quando envolvem algum programa comercial de análise, requer grande esforço computacional pois, como a rigidez depende da configuração, é necessário, para cada posição específica, realizar a construção de um novo modelo de elementos finitos, inviabilizando o mapeamento da rigidez.

Nesta Tese também foi realizado o estudo das singularidades das estruturas robóticas e sua correlação com a rigidez. O principal método utilizado para determinação das singularidades, presente na literatura, envolve o cálculo da matriz Jacobiana. Nesta Tese foi apresentado um novo método de análise das singularidades das estruturas paralelas associando o método *MSA* e números condicionais. Desta forma, conforme proposto, é possível realizar o mapeamento da rigidez do sistema multicorpo simultaneamente com o cálculo das posições singulares.

Foi proposto também um modelo de consideração da folga no cálculo da acuracidade do sistema, visto que a folga, por menor que seja, prejudica a acuracidade do sistema, causando alterações no seu comportamento.

A influência da folga no sistema multicorpo foi determinada com o auxílio do modelo dinâmico. Em função da direção das forças de reações, obtidas a partir do modelo dinâmico, é possível determinar o ponto de contato entre as peças que compõem a articulação. As novas posições dos nós do mecanismo são consideradas para o cálculo dos deslocamentos. Assim, determina-se a influência das folgas na acuracidade do sistema. Este resultado foi adicionado aos deslocamentos flexíveis obtidos com o modelo *MSA*.

Testes experimentais foram realizados verificando a validade do modelo proposto utilizando-se do método *MSA*. Para a validade dos resultados experimentais foi realizado um planejamento estatístico adequado.

Desta forma, nesta Tese foi apresentada uma metodologia sistemática, formulada com base na análise matricial de estruturas (*MSA*), para a análise de rigidez de sistemas multicorpos que permite uma completa integralização dos principais efeitos que prejudicam a acuracidade dos sistemas multicorpos: segmentos, articulações e a presença de folgas.

9.2. Sugestões de Temas para Pesquisas Futuras

As sugestões de estudos futuros estão descritas a seguir.

- Aplicação do modelo *MSA* proposto nesta Tese em diversas estruturas robóticas, com os respectivos testes experimentais.
- Desenvolvimento de um software para modelagem da acuracidade de sistemas multicorpos, a partir do modelo *MSA* desenvolvido nesta Tese, contendo em sua biblioteca os modelos cinemáticos e dinâmicos de várias estruturas robóticas presentes na literatura.
- Desenvolvimento de programas de otimização de sistemas multicorpos considerando a acuracidade do sistema e singularidades a partir do modelo *MSA* desenvolvido nesta Tese.
- Desenvolvimento de índices de performance de rigidez.
- Consideração das folgas nas articulações para estruturas robóticas tridimensionais com a realização de testes experimentais.
- Desenvolvimento de um equipamento de medição, com seis graus de liberdade, para avaliação experimental da acuracidade de sistemas multicorpos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABB, <http://www.abb.com.br/product/pt/9AAC100735.aspx?country=BR>, acessado 02/05/2008.

ACOSTA A.M., KIRSCH R.F., PERREAULT E.J., A Robotic Manipulator for the Characterization of Two-Dimensional Dynamic Stiffness Using Stochastic Displacement Perturbations, *Journal of Neuroscience Methods*, vol.102, n.2, pp.177-186, 2000.

AGRAWAL S.K.; DESMIER G.; LI S., Fabrication and Analysis of a Novel 3 DOF Parallel Wrist Mechanism, **Robotics: Kinematics, Dynamics and Controls**, ASME 1994, DE-Vol. 72, pp. 351-354, 1994.

ALICI G.; SHIRINZADEH, B., Optimum synthesis of planar parallel manipulators based on kinematic isotropy and force balancing, **Robotica** 22, 97–108, 2004.

ALICI, G. An inverse position analysis of five-bar planar parallel manipulators, **Robotica** 20 195–201, 2002.

ALVES, A. Filho. Elementos Finitos A Base da Tecnologia CAE, **Editora Érica**, 2006

ANSI/RIA, 1990, **R15.05-1-1990**.

ARAÚJO, M. H. F. Análise Cineto-Estática de Mecanismos do Tipo PRRRP Utilizados como Máquinas-ferramentas de Arquitetura Paralela, **Dissertação**, Escola Politécnica, USP, 2007.

AZAR, J. J., “Matriz Structural Analysis”, **Pergamon Press INC**, 1972.

BARROS NETO, B, SCARMINIO, I. S. e BRUNS, R. E., Como Fazer Experimentos: Pesquisa e Desenvolvimento na Ciência e na Indústria, 2º edição, **Editora Unicamp**, 412 p, 2002.

BAUCHAU, O. A.; RODRIGUES, J., Modeling of Joints with Clearance in Flexible Multibody Systems, *International Journal of Solids and Structures*, pp. 41-63, 2002.

BEN-HORIN P.; SHOHAM M. Singularity analysis of a class of parallel robots based on Grassmann-Cayley algebra. **Proceedings of CK2005**, 12th International Workshop on Computational Kinematics Cassino May 4-6, 2005.

BENOSMAN, M., VEY, G. L., Control of flexible manipulators: a survey, *Robotica* 22 (2004) 533-545.

BERTHOUEX, P. M., BROWN, L. C., Statistics for Environmental Engineers, 2º edição, **Lewis Publishers**, 463 p, 2002.

BEZERRA, C.A.D. Geometric Model of a Fully Cartesian Parallel Structure. **MSc Thesis**, Federal University of Uberlândia, Brazil , 1996. (Em Português)

BONEV, I., ParalleMIC – the Parallel Mechanisms Information Center. Disponível em : <http://www.parallemic.org/Terminology/General.html>. Acesso em: 30/06/2008.

BONEV, I. A.; ZLATANOV, D.; GOSSELIN, C. M. Singularity analysis of 3-DOF planar parallel mechanisms via screw theory, **ASME J. Mech. Design**, 125(3), 573–581, 2003.

BONEV, L. The true origin of parallel robots, in www.parallemic.org/Reviews/Review007.html, 2003.

BOSTELMAN, R., JACOFF, A., PROCTOR, F., KRAMER, T., WAVERING, A., Cable-Based Reconfigurable Machines for Large Scale Manufacturing, **Proceedings of the 2000 Japan-USA Symposium on Flexible Automation-Intern'l Conf. on New Technological Innovation for the 21st Century**, Ann Arbor, MI, 7/23-26/2000.

BOUZGARROU, B.C.; FAUROUX, J.C.; GOGU, G., and HEERAH, Y. Rigidity analysis of T3R1 parallel robot with uncoupled kinematics, **Proc. of the 35th International Symposium on Robotics**, Paris, France, March, 2004.

BRANCO, C. A. G. M., Mecânica dos Materiais, **Fundação CALOUSTE GULBENKIAN**, 1998, Lisboa – Portugal.

CANNELLA, G.; OTTAVIANO, E.; CASTELLI, G. A Cable-Based System for Aiding Elderly People in Sit to Stand Transfer, **MUSME 2008, the International Symposium on Multibody Systems and Mechatronics**, San Juan (Argentina), 8-12 April, 2008.

CARBONE, G. Stiffness Evaluation of Multibody Robotic Systems, **Tese** (em Inglês), 2003.

CARBONE, G., CECCARELLI, M., TEOLIS, M. A Numerical Evaluation of the Stiffness of CaHyMan (Cassino Hybrid Manipulator), **2nd Workshop on Computational Kinematics CK 2001**, Seoul, pp.145-154, 2001; Electronic Journal of Computational Kinematics EJCK, <http://www-sop.inria.fr/coprin/EJCK/EJCK.html>, vol.1, n.1, paper n.14, 2002a.

CARBONE, G., WOLF, A., CECCARELLI, M., SHOHAM, M. Application of Serial - Parallel Robot Architectures for Surgical Tasks: a Study of Feasibility, **5th Israeli Symposium on Computer-Aided Surgery, Medical Robotics and Medical Surgery ISRACAS'02**, Tel-Aviv, 2002b.

CARBONE, G., JECKEL, M., HAVLÍK, S., CECCARELLI, M. An Optimum Multi-Objective Design Procedure for Microgripping Mechanisms, **12th International Workshop on Robotics in Alpe-Andria-Danube Region RAAD 2003**, Cassino, paper 055RAAD03, 2003a.

CARBONE, G., OTTAVIANO, E., CECCARELLI, M. Experimental stiffness evaluation of a serial-parallel macro-milli manipulator for medical applications, **11th World Congress in Mechanism and Machine Science IFToMM 03**, Tianjin, 2003b.

CARBONE, G.; CECCARELLI, M., A Procedure for Experimental Evaluation of Cartesian Stiffness Matrix, 15th CISM-IFTToMM Symposium on Robot Design, Dynamics and Control ROMANSY 2004, Montreal, CD Proceedings, paper Rom04-24, 2004.

CARBONE, G.; LIM, Hun-ok; TAKANISHI, A.; CECCARELLI, M. Stiffness analysis of biped humanoid robot WABIAN-RIV, **Mechanism and Machine Theory**, vol 4, pp. 17-40, 2006.

CARRETERO, J. A.; NOKLEBY, S. B.; FIRMANI, F., Wrench Capabilities of Redundantly-Actuated Spatial Parallel Manipulators using Wrench Polytopes, **Proceedings of the Second International Workshop on Fundamental Issues and Future Research Directions for Parallel Mechanisms and Manipulators**, Montpellier, France, 2008.

CARVALHO, J.C.M., CARBONE, G., CECCARELLI, M.; OLIVEIRA, P.J. ; SARAMAGO, S.F.P, An optimum path planning for Cassino Parallel Manipulator by using inverse dynamics. **Robotica (Cambridge)**, v. 26, p. 229-239, 2008

CARVALHO, J.C.M, DUARTE, M. A. V.; RIBEIRO, C. R., Forward and Inverse Kinematic Model of a Parallel Cartesian Structure Using Neural Network. **In: IX DINAME**, pp. 207-211, Florianópolis, 2001

CARVALHO, J.C.M, CECCARELLI, M. A Dynamic Analysis for Cassino Parallel Manipulator, **10th World Congress on the Theory of Mechanisms**, Oulu, Finland, June 20-24, pp. 1202-1207, 1999.

CECCARELLI, M., A New 3 D.O.F. Parallel Spatial Mechanism, **Mechanism and Machine Theory**, vol.32, n.8, pp.895-902, 1997.

CECCARELLI, M. A Stiffness Analysis for CaPaMan, **Proceedings of Conference on New Machine Concepts for Handling Manufacturing Device on the Basis of Parallel Structures**, VDI 1427, Braunschweig, pp.67-80, 1998.

CECCARELLI, M.; OTTAVIANO, E. A workspace evaluation of an eclipse robot, **Robotica**, vol. 20, pp. 299-313, 2002.

CECCARELLI, M. **Fundamentals of Mechanics of Robotic Manipulation**, Kluwer, Dordrecht, 2004.

CECCARELLI, M.; CARBONE G. A Stiffness Analysis for CaPaMan (Cassino Parallel Manipulator), **Mechanism and Machine Theory**, vol.37, n.5, pp. 427-439, 2002.

CECCARELLI M., OTTAVIANO E., CARBONE G., A Study of Feasibility for a Novel Parallel-Serial Manipulator, **Fuji International Journal of Robotics and Mechatronics**, vol.14, n.3, pp. 304-312, 2002.

CERVANTES-SÁNCHEZ, J. J.; HERNÁNDEZ-RODRÍGUES, J. C.; ANGELES, J., On the kinematic design of the 5R planar, symmetric manipulator, **Mechanism and Machine Theory**, nº 36, pp. 1301-1313, 2001.

CERVANTES-SANCHEZ, J.J.; HERNANDEZ-RODRIGUEZ, J.C.; RENDON- SANCHEZ, J.G. On the workspace, assembly configurations and singularity curves of the RRRRR-type planar manipulator, **Mechanism and Machine, Theory** 35, 1117–1139, 2000.

CHABLAT, W. D.; WENGER, P. The Kinematic Analysis of a Symmetrical Three-Degree-of-Freedom Planar Parallel Manipulator, **Symposium on Robot Design, Dynamics and Control**, pp. 1-7, 2004.

CHAKAROV, D. and PARUSHEV, P. Synthesis of Parallel Manipulator With Linear Drive Modules, **Mechanism and Machine Theory**, Vol. 29, No. 7, pp. 917-932, 1994.

CHANG, Z., Nonlinear Dynamics and Analysis of a Four-Bar Linkage with Clearance, **12th IFToMM World Congress**, Besançon, França, 2007.

CLAVEL, R., Delta: a Fast Robot, with Parallel Geometry, **Proceedings of the 18th Int. Symposium on Industrial Robot**, Lausanne, (1988).

CLAVEL, R. Conception d'un robot parallèle rapide à 4 degrés de liberté, **thèse de doctorat**, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, 1991 (em français).

CLINTON, C.M.; ZHANG, G. and WAVERING, A.J. Stiffness modeling of a Stewart-platform-based milling machine, **Trans. of the North America Manufacturing Research Institution of SME**, Vol. XXV, pp 335-340, Lincoln, NB, US, May 20-23 1997.

COMPANY, O., PIERROT, F., and FAUROUX, J.C. A method for modeling analytical stiffness of a lower mobility parallel manipulator, **Proc. Of IEEE ICRA: Int. Conf. On Robotics and Automation**, Barcelona, Spain, April 18-25, 2005.

CORRADINI, C.; FAUROUX, J.C.; KRUT, S., and COMPANY, O. Evaluation of a 4 degree of freedom parallel manipulator stiffness, **Proc of the 11th World Cong. in Mechanism & Machine Science, IFTOMM'2004**, Tianjin, China, April 1-4, 2004.

CRAIG, J.J. Introduction to Robotics: Mechanics and Control, **Addison-Wesley**, New York, 1989.

DASH, A. K.; CHEN, I-M; YEO, S. H.; YANG, G., Instantaneous Kinematics and Singularity Analysis of three-legged Parallel Manipulators, **Robotica**, v. 22, pp. 189-203, 2004.

DE LUCA, A. Robots with Flexible Links: Modeling and Control", 2003 << www.prisma.unina.it/cira03/TA_DeLuca2.pdf >>, Acesso: 13/05/2008.

DEBLAISE, D. Contribution à la modélisation et à l'étalonnage élasto-géométriques des manipulateurs à structure parallèle, **Tese (em Français)**, 2006a.

DEBLAISE, D., HERNOT, X. and MAURINE, P. A Systematic Analytical Method for PKM Stiffness Matrix Calculation, **IEEE International Conference on Robotics and Automation**, 2006b.

DONG, W.; DU, Z. and SUN, L. Stiffness influence atlases of a novel flexure hinge-based parallel mechanism with large workspace, **Proc. of IEEE ICRA: Int. Conf. On Robotics and Automation**, Barcelona, Spain, April 18-25 2005.

DUFFY J. Statics and Kinematics with Applications to Robotics, **Cambridge University Press**, Cambridge, pp.153-169, 1996.

DWIVEDY, S. K., EBERHARD, P. Dynamic analysis of flexible manipulators, a literature review, **Mechanism and Machine Theory**, vol. 41, pg. 749-777, 2006.

EARL C.F. Some Kinematic Structures for Robot Manipulator Designs, **IFToMM Journal Mechanism and Machine Theory**, 1983, Vol.105, pp.15-22.

ETH, EIDGENNOSSISCHE TECHINISCHE HOCHSCHULE,
<<http://www.ethz.ch/index_EN>> acessado: 13/04/2008.

EL-KHASAWNEH, B. S. and FERREIRA, P. M. Computation of stiffness and stiffness bounds for parallel link manipulator, **Int. J. Machine Tools & manufacture**, vol. 39(2), pp. 321-342, 1999.

EPSON, <http://www.robots.epson.com/>, acessado 02/05/2008.

ERDMAN, A., G.; SANDOR, G. N., Mechanism design: analysis and synthesis, 2. ed., **Englewood Cliffs: Prentice Hall**, V. I, 631p., 1991.

FELIPPA, C. A. A Historical Outline of Matrix Structural Analysis: A Play in Three Acts. **Fall 2001**. University of Colorado. June 2000.

FELIPPA, C. A. Introduction to Finite Element Method. **Fall 2001**. University of Colorado. 18 Sept. 2005.

FERNANDES, J. P. F., Dynamic Analysis of Mechanical Systems with Imperfect Kinematic Joints, **Tese (em Inglês)**, 2005.

FICHTER, E. F. and MCDOWELL, E. D. A Novel Design for a Robot Arm, **Proceedings of the International Computer Technology Conference**, New York, ASME, pp. 250-256, 1980.

FIGIELSKI, A.; BONEV, I. A.; BIGRAS, P. Towards development of a 2-DOF planar parallel robot with optimal workspace use, **Systems, Man and Cybernetics**, 2007.

FOGARASY A.A.; SMITH M.R., The influence of manufacturing tolerances on the kinematic performance of mechanisms. **In Proc. Inst. Mech. Eng. Part C:Mech. Eng. Sci.**, volume 212, pages 35–47, 1998.

FIORETTI A., Implementation-oriented kinematics analysis of a 6 dof parallel robotic platform. **In 4th IFAC Symposium on Robot Control**, Capri, 1994.

FORRESTER, M. K. Stiffness Model of a Die Spring, Virginia Polytechnic. **Dissertação (em inglês)**, 2001.

GAO F.; ZHANG X.; ZHAO Y.; WANG H., A physical model of the solution space and the atlases of the reachable workspaces for 2-DOF parallel plane wrists, **Mechanism and Machine Theory** 31 (2) 173–184, 1996.

GAO X., SONG S.-M., ZHENG C.Q. A Generalized Stiffness Matrix Method for Force Distribution of Robotic Systems with Indeterminacy, **ASME Journal of Mechanical Design**, vol.115, n.3, pp.576-580, 1993.

GAO, F.; LIU X.-J.; GRUVER, W.A. Performance evaluation of two-degree-of-freedom planar parallel robots, **Mechanism and Machine Theory** 33 (6), 661–668, 1998.

GOGU, G. Structural synthesis of parallel robotic manipulators with decoupled motion, **Internal Report ROBEA MAX - CNRS**, 2002.

GOGU, G., Fully-isotropic T2R3-type Redundantly-actuated Parallel Robots, **Proceedings of the 2007 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems**, San Diego, USA, 2007.

GONÇALVES, R. S. Robô Móvel Suspenso por Fio com Pernas de Comprimentos Variáveis. 116f. **Dissertação**, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, (2006).

GONÇALVES, R. S.; CARVALHO, J. C. M., Estudo da Rigidez de Sistemas Multicorpos, **17º Simpósio do Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica**, Universidade Federal de Uberlândia, 2007.

GONÇALVES, R. S.; CARVALHO, J. C. M., Análise de Rigidez de Estruturas Robótica Paralelas, **CONEM 2008, V Congresso Nacional de Engenharia Mecânica**, Salvador, Bahia, Brazil, 2008a.

GONÇALVES, R. S.; CARVALHO, J. C. M., Stiffness analysis of parallel manipulator using matrix structural analysis, **EUCOMES 2008, 2-nd European Conference on Mechanism Science**, Cassino, Italy, 2008b.

GONÇALVES, R. S.; SANTOS, R. R.; CARVALHO, J. C. M., On The Performance of Strategies for the Path Planning of a 5R Symmetrical Parallel Manipulator, **DINCON 2008, 7th Brazilian Conference on Dynamics, Control and Applications**, May 07-09, Unesp at Presidente Prudente, SP, Brazil, 2008.

GONÇALVES, R. S.; CARVALHO, J. C. M., Singularities of Parallel Manipulators Using Matrix Structural Analysis, **XII International Symposium on Dynamic Problems of Mechanics**, 2009.

GOSSELIN C.M.; PERRAULT L.; VAILLANCOURT C. Simulation and Computer Aided Kinematic Design of Three-Degree-of-Freedom Spherical parallel Manipulator, **Journal of Robotic Systems**, Vol. 12, No. 12, pp. 857-869, 1995.

GOSSELIN, C., M., Stiffness Mapping for Parallel Manipulators, **IEEE Trans. On Robotics and Automation**, Vol. 6, n.3, pp.377-382, 1990.

GOSSELIN, C. M., ST-PIERRE, E., GAGNÉ, M., On the development of the agile eye: mechanical design, control issues and experimentation, **IEEE Robotics and Automation Society Magazine**, vol. 3, no. 4, pp. 29–37, 1996.

GOUGH, V. E. e WHITEHALL, S. G. Universal type testing machine, **FISITA 9th International Technical Congress**, pp. 117-137, may 1962.

GRIFFIS, M., DUFFY, J., Global Stiffness Modeling of a Class of Simple Compliant Couplings, **Mech. Mach. Theory**, vol.28, n.2, pp.207-224, 1993.

GRIFFIS, M.; DUFFY, J. Kinestatic Control Theory: A Novel Theory for Simultaneously Regulating Force and Displacement, **Trans. of the ASME, Journal of Mechanical Design**, Vol. 113, pp. 508-515, Dec. 1991.

HARTENBERG, R. S.; DENAVITT, J. Kinematic Synthesis of Linkages, New York: **McGraw-Hill Book Company**, 435p., 1964

HAUG, E. J.; CHOI, K. K.; KOMKOV, V. Design sensitivity analysis of structural systems, **Academic Press**, Orlando, FL, 1986.

HEIN, A., T.C. LUETH , G. HOMMEL, Contact Observation of Interactive Surgical Robotics Systems. **IROS IEEE/RSJ Int. Conf. On Intelligent Robots and Systems**, Seoul, South Korea, Oct. 17-21., pp. 733-9, 1999.

HESS-COELHO, T.A., A Redundant Parallel Spherical Mechanism for Robotic Wrist Applications. **Journal of Mechanical Design**, v. 129, p. 891-895, 2007.

HESS-COELHO, T.A., Topologia, Síntese e Análise de uma Estrutura Cinemática Paralela, **Tese de Livre-Docente**, USP, São Paulo, 2005.

HILLER, M., HIRSCH, K., BRUCKMANN, T., BRANDT, T., SCHRAMM, D., Common Aspects in the Mechatronic Design of Automotive and Robotic Systems, **MUSME 2008, The International Symposium on Multibody Systems and Mechatronics**, San Juan (Argentina), 8-12 April, 2008.

HOKAMOTO, S., MODI, V.J. and MISRA, A.K. Dynamics and Control of Mobile Flexible Manipulators with Slewing and Deployable Links, AAS 95-322, **AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference**, Halifax, Canada, 1995.

HUANG, T.; ZHAO, X. and WHITEHOUSE, D.J. Stiffness estimation of a tripod-based parallel kinematic machine, **IEEE Trans. on Robotics and Automation**, Vol. 18(1), February 2002.

HUNT, K. H., Structural Kinematics of In-Parallel-Actuated Robot Arms, **Journal of Mechanism, Transmission, and Automation in Design**, Vol. 105, pp 705-712, 1983.

IMBERT, J. F. Analyse des structures par elements finis, **Cepadues Editions**, 1979.

INGERSOLL, << <http://www.ingersoll.com/ind/edmmachines.htm> >> acessado: 13/04/2008.

INNOCENTI, C., Kinematic clearance sensitivity analysis of spatial structures with revolute joints. **ASME Journal of Mechanical Design**, 124:52–57, 2002.

IONESCU, T. G., **Mechanisms and Machine Theory**, v. 38, 2003.

JACQUET, P., DANESCU, G., CARVALHO, J. C. M. e DAHAN, M., A Spatial Fully Parallel Manipulator, **Proc. 9th CISM – IFToMM**, Udine, Italy, 1-4 Sept., 1992.

KAPUR, P.; RANGANATH, R.; NATARAJU, B. S. Analysis of Stewart platform with flexural joints at singular configurations, **12th IFToMM World Congress**, Besançon (France), June 18-21, 2007.

KARDESTUNCER H. Elementary Matrix Analysis of Structures, **McGraw-Hill** Kogakusha, Tokyo, 1974.

KELLY, A. Introduction to Mobile Robots, University of Carnegie Mellon, USA, <www.frc.ri.cmu.edu/nalanzo/course/course.html>, 1996.

KHALIL, W. and KLEINFINGER, J. F. A New Gwometric Notation For Open and Closed-Loop Robots, **IEEE, Journal of Robotics and Automations**, San Francisco, April, 1986.

KIM , H. S., SHIN , C-R; KYUNG, J-H.; HA, Y-Ho; YU, H-S, SHIM, P-S. Stiffness Analysis of a Low-DOF Parallel Manipulator including the Elastic Deformations of Both Joints and Links (ICCAS 2005), **ICCAS 2005 – International Conference on Control, Automation and Systems**, Korea, 2005.

KIM, H.Y., STREIT, D.A. Configuration Dependent Stiffness of the Puma 560 Manipulator: Analytical and Experimental Results, **Mechanism and Machine Theory**, vol.30, n.8, pp.1269-1277, 1995.

KIM, J., PARK, F. C., KIM, J. W., HWANG, J. C., ECLIPSE: An Over actuated Parallel Mechanism for Rapid Machining, **Proc. Of ASME-IMECE Symposium on Machine Tools**, Anaheim, (1998) pp. 15–20.

KOGANEZAWA K., BAN S., Stiffness Control of Antagonistically Driven Redundant D.O.F. Manipulator, **Proceedings of IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems IROS'02**, Lausanne, pp.2280-2285, 2002.

KOMATSU, T.; UENOHARA, M.; IIKURA, S.; MIURA, H.; SHIMOYAMA, I. Compliance Control for a Two-Link Flexibel Manipulator, **The Japan Society of Mechanical Engineers** (em Japonês), 1990a.

KOMATSU, T.; UENOHARA, M.; IIKURA, S.; MIURA, H.; SHIMOYAMA, I. Dynamic Control for Two-Link Flexible Manipulator, **The Japan Society of Mechanical Engineers** (em Japonês), 1989.

KOMATSU, T.; UENOHARA, M.; IIKURA, S.; MIURA, H.; SHIMOYAMA, I., Vibration Control for Two-Link Flexible Manipulator using a Wrist Force Sensor, **The Japan Society of Mechanical Engineers** (em Japonês), 1990b.

KOSEKI, Y.; TANIKAWA, T.; KOYACHI, N.; ARAI, T. Kinematic Analysis of Translational 3-DOF Micro Parallel Mechanism Using Matriz Method, **Proceedings of the International Conference on Intelligent Robots and Systems**, 2000.

KUMAR, V. Instantaneous Kinematics of Parallel- Chain Robotic Mechanisms, **Proceedings of the 21st Biennial Mechanism Conference: Mechanism Synthesis and Analysis**, Chicago, Illinois, September 16-19, ASME, DE-Vol. 25, pp. 279-288, 1990.

LI, Y.W.; WANG, J.S. and WANG, L.P. Stiffness analysis of a Stewart platform-based parallel kinematic machine, **Proc. of IEEE ICRA: Int. Conf. On Robotics and Automation, Washington, US**, May 11-15, 2002.

LI, S.; XIANMIN, Z.; YANG, J., Error transfer of planar linkages with pair clearance. **In Proceedings of 1998 ASME Design Engineering Technical Conference**, pages MECH-5913, 1998.

LIM, S. R., CHOI, W. C., SONG, J-B., HONG, D., Error Model and Accuracy Analysis of a Cubic Parallel Device, **International Journal of the Korean Society of Precision Engineering**, vol. 2, n. 4, 2001.

LIU, Xin-Jun; WANG, J.; ZHENG, Hao-Jun. Optimum design of the 5R symmetrical parallel manipulator with a surrounded and good-condition workspace. **Robotics and Autonomous Systems**, n° 54, pp. 221-233. 2006a.

LIU, Xin-Jun; WANG, J.; ZHENG, Hao-Jun. Performance atlases and optimum design of planar 5R symmetrical parallel mechanisms, **Mechanism and Machine Theory**, n° 41, pp. 119-144 (2006)b.

MABIE, H. H.; OCVIRK, F. W., Dinâmica das Máquinas, 2 ed., Rio de Janeiro: **Livros Técnicos e Científicos**, 1980.

MACHO, E.; ALTUZARRA, O.; PINTO, C.; HERNANDEZ, A. Workspaces associated to assembly modes of the 5R planar parallel manipulator, **Robotica**, pp. 1-9, 2008.

MAJOU, F.; GOSSELIN, C.; WENGER, P; CHABLAT, D., Parametric stiffness analysis of the orthoglide, **Mechanism and Machine Theory**, 2006.

MAJOU, F.; GOSSELIN, C.M.; WENGER, P.; and CHABLAT, D. Parametric stiffness analysis of the orthoglide, **Proc. of the 35th International Symposium on Robotics**, Paris, France, March 2004.

MARTIN, H. C. Introduction to matrix methods of structural analysis, **McGraw-Hill Book Company**, 1966.

MAYOURIAN, M.; RASTEGAR, J., Stochastic modeling of the mechanical behavior of mechanisms in the presence of joint clearances, **In Proceedings of 1990 ASME Mechanisms Conference**, pages 177–182, 1990.

MBAREK, T.; LONIJ, G.; CORVES, B. Singularity analysis of a fully parallel manipulator with five-Degrees-of-Freedom based on Grassmann line geometry, **12th IFToMM World Congress**, Besançon, France, 2007.

MENG, J., A Geometric Theory for Synthesis, Analysis and Design of Sub-6 DoF Parallel Manipulator, The Hong Kong University of Science and Technology, Hong Kong (**Tese em Inglês**) 2007

MERLET, J. P. Les robots parallèles, **Hermes**, Paris, 1997.

MERLET, J. P. Singular Configurations of Parallel Manipulators and Grassmann Geometry. **The International Journal of Robotics Research**, Vol. 8, No. 5, 1989.

MERLET, J.-P. Parallel Manipulators, Part I: Theory, Design, Kinematics, Dynamics and Control, Tech. Rep. 646, **INRIA**, France, 1988.

MEYER, C.D. Matrix Analysis and Applied Linear Algebra. SIAM, 2000

MOHAMMED, M. G. and DUFFY, J. A Direct Determination of the Instantaneous Kinematics of Fully Parallel Robot Manipulators, **ASME Journal of Mechanisms, Transmission, and Automation in Design**, Vol. 107, pp. 226-229, 1985.

OLIVEIRA, A. A. Jr; CARVALHO, J.C.M. A Modified Stewart Platform for Measuring Robot Path, MUSME 2002, **The International Symposium On Multibody Systems and Mechatronics**, Mexico City, 12-14 September 2002.

OLIVEIRA, P. J. Otimização de Trajetórias de Robôs com Estrutura Paralela, 122f. Universidade Federal de Uberlândia. Uberlândia, MG, **Tese**, 2005.

OTTAVIANO, E, CECCARELLI, M., Optimal Design of CaPaMan (Cassino Parallel Manipulator) with a specified orientation workspace, **Robotica**, Vol. 20, pp. 159-166, 2002.

OTTAVIANO E., CECCARELLI M., TOTI M., AVILA CARRASCO C., CATRASYS (Cassino Tracking System): A Wire System for Experimental Evaluation of Robot Workspace, **Fuji International Journal of Robotics and Mechatronics**, vol.14, n.1, pp.78-87, 2002.

PAI D.K.; LEU M.C. Uncertainty and Compliance of Robot Manipulators with Application to Task Feasibility, **International Journal of Robotics Research**, vol.10, n.3, pp.200-213, 1991.

PALMUCCI, F.; OTTAVIANO, E.; CECCARELLI, M. An Application of CaTraSys, a Cable-Based Parallel Measuring System for a Kinetostatic Analysis of Human Walking, **MUSME 2008, The International Symposium on Multibody Systems and Mechatronics**, San Juan (Argentina), 8-12 April, 2008.

PARK, F.C.; KIM, J.W. Singularity analysis of closed kinematic chains, **Journal of Mechanical Design** 121, 32–38, 1999.

PAUL, R. P., Robot Manipulators Mathematics, Programming and Control”, MIT Press, 1981.

PARENTI-CASTELLI, V.; VENANZI, S., On the joint clearance effects in serial and parallel manipulators. In **Proceedings of the workshop on Fundamental Issues and Future Research Directions for Parallel Mechanisms and Manipulators**, pages 215–223, 2002.

PARENTI-CASTELLI, V.; VENANZI, S., Clearance Influence Analysis on Mechanisms, **Mechanism and Machine Theory**, 40, pp. 1316-1329, 2005.

PIERROT, F. From Hexa to Hexam, **First European-American Forum Parallel Kinematic Machine**, Milano, 1998.

PIERROT, F. Robots pleinement parallèles légers : Conception, modélisation et commande, **thèse de doctorat**, Université Montpellier II, 1991.

PRZEMIENIECKI, J. S. Theory of Matrix Structural Analysis, **Dover Publications**, Inc, New York, 1985.

PUGLIESE, F. Validazione sperimentale del prototipo CaPaMan (Cassino Parallel Manipulator), **TESI DI LAUREA**, 1999.

RADE, D. A.. Método dos Elementos Finitos em Engenharia Mecânica. **Apostila**, 2001.

RAVN, P., A Continuous Analysis Method for Planar Multibody Systems with Joint Clearance, **Multibody System Dynamics**, 2, pp. 1-24, 1998.

REULEAUX, F. Theoretische Kinematik. **Translated as Kinematics of Machinery**, Dover, New York, 1875.

RIVIN, E.I. Stiffness and Damping in Mechanical Design, **Marcel Dekker Inc.**, New York, 1999.

RIZK , R.; MUNTEANU, M. Gh.; GOGU, G. A semi-analytical stiffness model of parallel robots from the Isoglide family via the sub-structuring principle, **12th IFToMM World Congress**, Besançon (France), June18-21, 2007.

ROMITI, A.; SORLI, M., ZHMUD, N. Design and Properties of the Turin 6 D.O.F. Parallel Robot for Deburring Operations, **3rd International Symposium on Measurement and Control in Robotics**, Torino, pp. Bm III 1-6, 1993.

SCHWAB, A. L., MEIJAARD, J. P., MEIJERS, P., A Comparison of Revolute Joint Clearance Models in the Dynamic Analysis of Rigid and Elastic Mechanical Systems, **Mechanism and Machine Theory**, 37, pp. 895-913, 2002.

SEFRIOUI, J., GOSSELIN, C., On the Quadratic nature of the Singularity Curves of Planar Three-Degree-of-Freedom Parallel Manipulator, *Mech. Mach. Theory*, Vol.30, N.4, pp.533-551, 1995.

SENEVIRATNE, L.D.; EARLES, S.W.E., Chaotic Behaviour Exhibited During contact Loss in a Clearance Joint in a Four-bar Mechanism, **Mechanism and Machine Theory**, 27(3), pp. 307-321, 1992.

SHABANA, A. A. Dynamics of Multibody Systems, **John Wiley & Sons**, 1989.

SHIAU, T-N.; TSAI, Y-J.; TSAI, M-S., Nonlinear Dynamic Analysis of a Parallel Mechansim with Consideration of Joint Effects, **Mechanism and Machine Theory**, pp. 491-505, 2008.

STEWART D. A Platform Whit Six Degrees of Freedom, **Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers**, Vol. 180, Pt. 1, n. 15, pp. 371-386, 1965.

SUN, S.; CHEUNG, J. W. F.; LOU, Y., A Study on Five-Bar Manipulators for Semiconductor Packaging Applications, **Proceedings of the 2007 IEEE International Conference on Mechatronics and Automation**, China, 2007.

SVININ, M.; KANEKO M., TSUJI T. Internal Forces and Stability in Multi-Finger Grasp, **Control Engineering Practice**, vol.7, pp.413-422, 1999.

TAVOLIERI, C.; CECCARELLI, M.; MERLET, J. P. A Workspace Analysis of a Fullyconstrained Cable-Based Parallel Manipulator by Using Interval Analysis, **MUSME 2008, the International Symposium on Multibody Systems and Mechatronics**, San Juan (Argentina), 8-12 April, 2008.

THEINGI, C. L.; CHEN, I-M.; ANGELES, J. Singularity Management of 2DOF Planar Manipulator Using Coupled Kinematics, **Seventh International Conference on Control, Automation, Robotics and Vision**, Singapore, 2002.

TONIETTI G., BICCHI A., Adaptative Simutaneous Position and Stiffness Control for a Soft Robot Arm, **Proceedings of the IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems IROS'02**, Lausanne, pp.1992-1997, 2002.

TSAI, L. W. and STAMPER, R., A Parallel Manipulator with Only Translational Degrees of Freedom, 96-DETC-MECH-1152, **ASME 1996 Design Engineering Technical Conference**, Irvine, CA, 1996.

TSAI, L.W. Robot Analysis: The Mechanics of Serial and Parallel Manipulators, **John Wiley & Sons**, New York, pp.260-297, 1999.

UNI, “**UNI EN 29283**”, Robot Industriali di Manipolazione, Criteri Prestazionali e Relativi Metodi di Prova, 1995.

VOGLEWEDE, P. A., EBERT-UPHOFF, I., Two Viewpoints on the Unconstrained Motion of Parallel Manipulators at or near Singular Configurations, **Proceedings of the 2002 IEEE International Conference on Robotics & Automation**, Washington, 2002.

WALDRON, K. J., RAGHAVAN, M. and ROTH, B. Kinematics of a Hybrid Series-Parallel Manipulator System, **Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control**, Vol. 111, No. 2, pp. 211-221, 1989.

YAMANO, M.; KIM, J. S.; KONNO, A.; UCHIYAMA, M. Cooperative Control of a 3D Dual-Flexibel-Arm Robot, **Journal of Intelligent and Robtic Systems**, vol. 39. pp. 1-15, 2004.

YANG, G.; CHEN, I-M, Singularity Analysis of Three-Legged Parallel Robots Based on Passive-Joint Velocities, **IEEE Transactions on Robotics and Automation**, V. 17, n° 4, 2001

YI, B. J.; CHUNH, G. B.; NA, H. Y.; KIM, W. K. Design and Experiment of a 3-DOF Parallel Micromechanism Utilizing Flexure Hinges, **IEEE Transactions on Robotics and Automation**, Vol, 19, n° 4, 2003.

YOON, W. K., SUEHIRO, T., TSUMAKI, Y. and UCHIYAMA, M. Stiffness Analysis and Design of a Compact Modified Delta Parallel Mechanism, **Robotica**, vol. 22, pp. 463-475, 2004.

YOON, W.K., SUEHIRO T., TSUMAKI Y., UCHIYAMA M. A Method for Analyzing Parallel Mechanism Stiffness Including Elastic Deformations in the Structure, **Proceedings of the IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems IROS'02**, Lausanne, pp.2875-2880, 2002.

ZHANG, D., GOSSELIN, C. Kinetostatic modeling of parallel mechanisms with a passive constraining leg and revolute actuators, **Mechanism and Machine Theory**, vol. 37, pp. 599-617, 2002.

ZHANG, D.; Xi , F.; MECHEFSKE, C.M., Lang, S.Y.T. Analysis of parallel kinematic machine with kinetostatic modeling method, **Robotics and Computer-Integrated Manufacturing**, vol. 20(2), pp 151- 165, April 2004.

ZHOU, Z., XI, J., MECHEFSKE, C, K. Modeling of a Fully Flexible 3PRS Manipulator for Vibration Analysis, **Journal of Mechanical Design**, Vol. 128, pp 403-412, 2006.

ANEXO I

MONTAGEM DA MATRIZ DE RIGIDEZ DA ESTRUTURA UTILIZANDO O MÉTODO MSA

Para ilustrar o procedimento de montagem da matriz de rigidez da estrutura é apresentado o procedimento para obter a matriz de rigidez local de uma mola e, posteriormente, o procedimento para obter a matriz de rigidez de um sistema formado por duas molas. Este exemplo é apresentado com o objetivo de mostrar o princípio de montagem da matriz de rigidez de um sistema composto por diversos elementos. Posteriormente é aplicado o procedimento de montagem da matriz de rigidez para o caso de uma estrutura formada por dois segmentos e uma articulação.

Na Figura A.1(a) é representado o diagrama de corpo livre de uma mola. O elemento mola é composto por dois nós e k representa a sua constante de rigidez que permite, a partir da lei de Hook, relacionar a força f com o deslocamento u . Na Figura A.1(b) a mola está comprimida, sofrendo um deslocamento u_1 com $u_2 = 0$ (mola engastada à direita). No caso da Fig. A.1(c) a mola está tracionada, sofrendo um deslocamento u_2 com $u_1 = 0$ (mola engastada à esquerda). Para os casos (b) e (c) são aplicadas à lei de equilíbrio das forças e do comportamento do material.

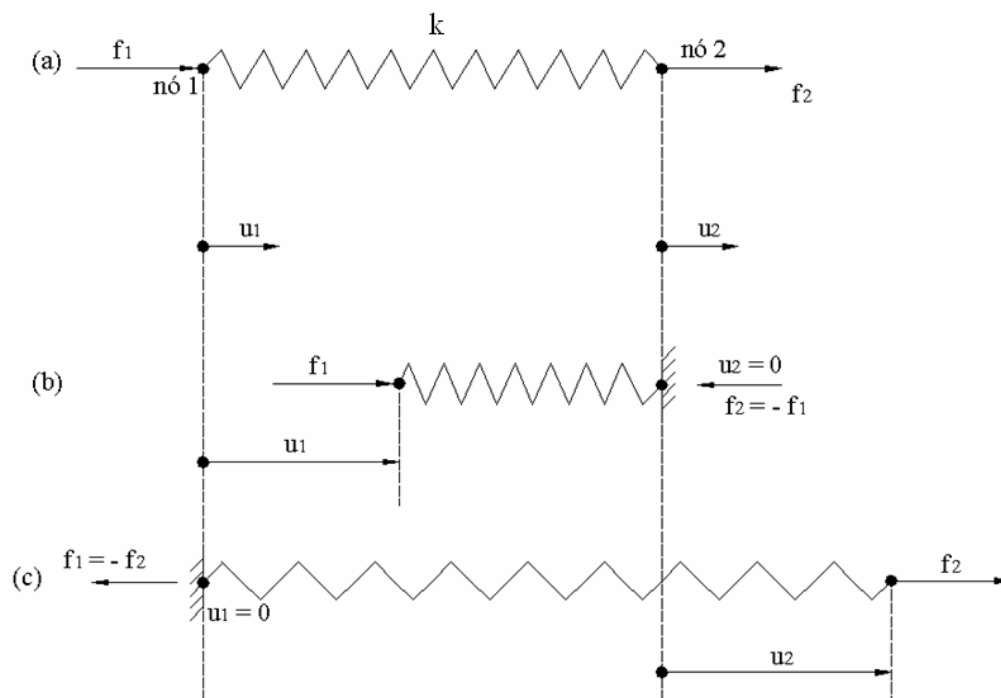


Figura A.1 – (a) Diagrama de Corpo Livre do elemento mola; (b) nó 2 engastado; (c) nó 1 engastado.

As forças nodais $\{f\}$ e os deslocamentos flexíveis $\{u\}$ podem ser representados, cada um, por um vetor coluna 2×1 .

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{A1.1})$$

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{A1.2})$$

Tem-se que a relação entre todas as forças e deslocamentos flexíveis do elemento mola é dada pela matriz de rigidez do elemento. Neste caso, como o elemento de mola tem duas componentes de deslocamentos possíveis ao longo do seu eixo, sua matriz de rigidez é de dimensão 2×2 . Cabe salientar que, para um elemento qualquer com n deslocamentos possíveis, a sua matriz de rigidez terá dimensão $n \times n$.

Desta forma, pode-se escrever:

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{A1.3})$$

Na Equação (A1.3) devem-se obter os valores dos elementos da matriz de rigidez identificados pela linha i e coluna j , k_{ij} , bem como definir o significado físico desses coeficientes.

Da condição de equilíbrio, Fig. A.1(b), tem-se:

$$f_2 = -f_1 \quad (\text{A1.4})$$

Do ponto de vista físico, a força aplicada no nó 1 é transferida internamente à mola, de tal forma que a força f_1 deve ser equilibrada pela força interna. Neste caso, a mola está submetida à compressão e a força interna é negativa, podendo escrever:

$$f_1 = k.u_1 \quad (\text{A1.5})$$

E, como $f_2 = -f_1$, obtém-se:

$$f_2 = -k.u_2 \quad (\text{A1.6})$$

Como neste caso tem-se $u_2 = 0$, da Eq. (A1.3) tem-se:

$$\begin{aligned} f_1 &= k_{11}.u_1 + k_{12}.0 \\ f_2 &= k_{21}.u_1 + k_{22}.0 \end{aligned} \quad (\text{A1.7})$$

Ou

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{A1.8})$$

Substituindo os valores de f_1 , Eq. (A1.5), e f_2 , Eq. (A1.6), na Eq. (A1.8), chega-se nos valores de k_{11} e k_{21} :

$$\begin{aligned} k.u_1 &= k_{11}.u_1 & k_{11} &= k \\ -k.u_1 &= k_{21}.u_1 & \rightarrow k_{21} &= -k \end{aligned} \quad (\text{A1.9})$$

De forma análoga para a Fig. A.1(c) obtém-se:

$$\begin{aligned} k_{12} &= -k \\ k_{22} &= k \end{aligned} \quad (\text{A1.10})$$

Assim, a matriz de rigidez do elemento mola, K , é dada por:

$$K = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \quad (\text{A1.11})$$

O significado físico de cada componente da matriz de rigidez é que estes representam forças associadas a um deslocamento unitário imposto em um nó quando o outro nó é mantido fixo (deslocamento nulo). Por exemplo, k_{21} representa a força no nó 2 devido ao deslocamento unitário do nó 1, mantendo-se o nó 2 fixo.

Desta forma, para qualquer tipo de elemento presente no *MSA*, o coeficiente k_{ij} da matriz de rigidez representa a força no grau de liberdade i devido ao deslocamento unitário imposto ao grau de liberdade j , mantendo-se os outros graus de liberdade fixos.

A seguir é apresentado o procedimento de montagem da matriz de rigidez de um sistema formado por duas molas em série.

O primeiro ponto a destacar é que a matriz de rigidez da estrutura como um todo depende da matriz de rigidez de cada um de seus componentes, sempre descritos em relação a um mesmo referencial. Assim, é necessário estabelecer um sistema de referencia inercial, em que as matrizes elementares, de cada elemento, serão descritas. Deve-se também estabelecer a numeração dos nós, pois estes é que fornecerão a forma de como os elementos estão conectados entre si e onde serão transmitidos as forças e os deslocamentos. Assim, o nó deve estar em equilíbrio, isto é, a força externa aplicada ao nó e as forças aplicadas pelos elementos nos nós devem equilibrar-se. Deve haver a compatibilidade de deslocamentos para os elementos, e estes se mantêm conectados após a condição deformada, sendo que as extremidades dos elementos conectados em um mesmo nó estão sujeitas aos mesmos componentes de deslocamento.

As Figuras A.2 a A.4 ilustram o procedimento de montagem da matriz de rigidez da estrutura que, no caso, é representada por um sistema de duas molas associadas em série: mola (a) formada pelos nós 1 e 2, com rigidez k_a , e mola (b) formada pelos nós 2 e 3, com rigidez k_b . Na Figura A.3 é representado o diagrama de corpo livre das duas molas conectadas no nó 2. Em cada nó pode ser aplicada uma força, f_i ($i = 1, 2$ e 3) que resultará nos deslocamentos u_i ($i = 1, 2$ e 3).

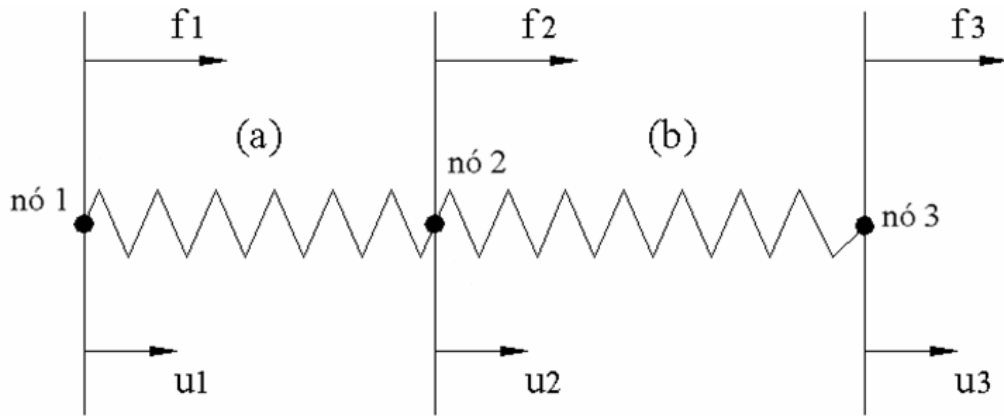


Figura A.2 – Sistema formado por duas molas montadas em série.

A matriz de rigidez da estrutura toda pode ser obtida a partir das matrizes de rigidez de cada elemento de mola, Fig. A.3, pela discretização do sistema da Fig. A.2.

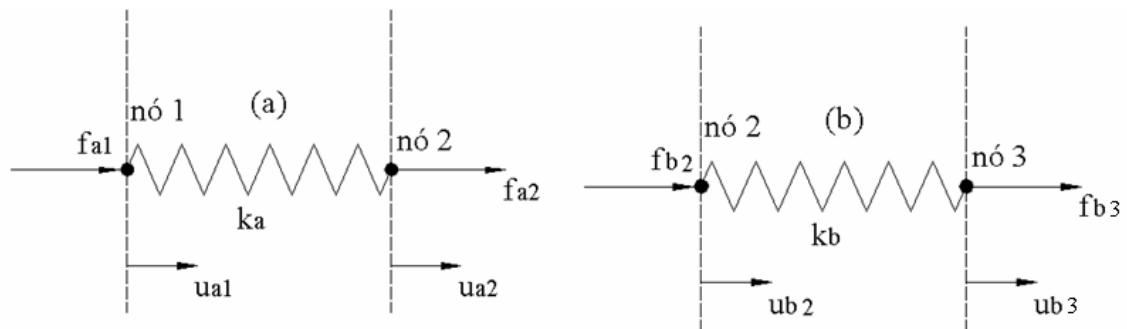


Figura A.3 – Diagrama de corpo livre das molas (a) e (b).

Escrevendo a relação entre todas as forças e deslocamentos flexíveis do elemento mola (a), Eq. (A.12) e do elemento de mola (b), Eq. (A.13), em formato matricial tem-se:

$$\begin{Bmatrix} f_{a1} \\ f_{a2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_a & -k_a \\ -k_a & k_a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{a1} \\ u_{a2} \end{Bmatrix} \quad (\text{A1.12})$$

$$\begin{Bmatrix} f_{b2} \\ f_{b3} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_b & -k_b \\ -k_b & k_b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{b2} \\ u_{b3} \end{Bmatrix} \quad (\text{A1.13})$$

A estrutura tem que estar em equilíbrio e deve existir compatibilidade de deslocamento no nó 2, isto é, os deslocamentos no nó 2, Fig. A.2 e A.3, devem ser iguais, podendo-se escrever que:

$$\begin{aligned}
 f_{a1} &= f_1 \\
 f_{a2} &= f_{b2} = f_2 \\
 f_{b3} &= f_3 \\
 u_{a1} &= u_1 \\
 u_{a2} &= u_{b2} = u_2 \\
 u_{b3} &= u_3
 \end{aligned}
 \tag{A1.14}$$

Logo,

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_a & -k_a \\ -k_a & k_a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}
 \tag{A1.15}$$

$$\begin{Bmatrix} f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_b & -k_b \\ -k_b & k_b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}
 \tag{A1.16}$$

A montagem da matriz de rigidez K da estrutura por meio de um modo prático, considerando as leis de equilíbrio e compatibilidade, pode ser feita a partir da identificação dos nós do sistema conforme esquematizado a seguir: os nós são representados pelas linhas e colunas; a matriz de rigidez K é composta pelas matrizes de rigidez de cada elemento, correspondendo aos seus nós. Neste caso, ocorrerá a superposição dos valores da matriz de rigidez dos elementos que compartilham o mesmo nó. A superposição é representada pelo símbolo Σ porque, de fato, corresponde ao somatório da constante de rigidez de cada elemento, Figs. A.4 e A.5.

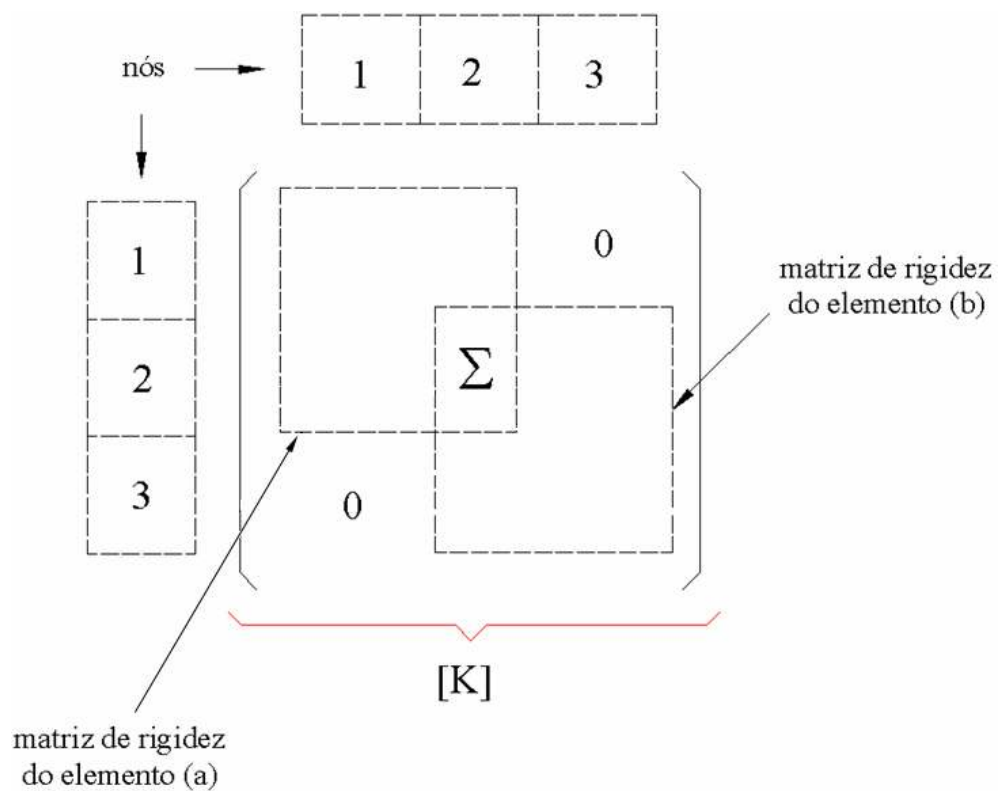


Figura A.4 – Procedimento de obtenção da matriz de rigidez da estrutura.

Assim, a montagem da matriz de rigidez do sistema formado pelas duas molas é, Fig. A.5:

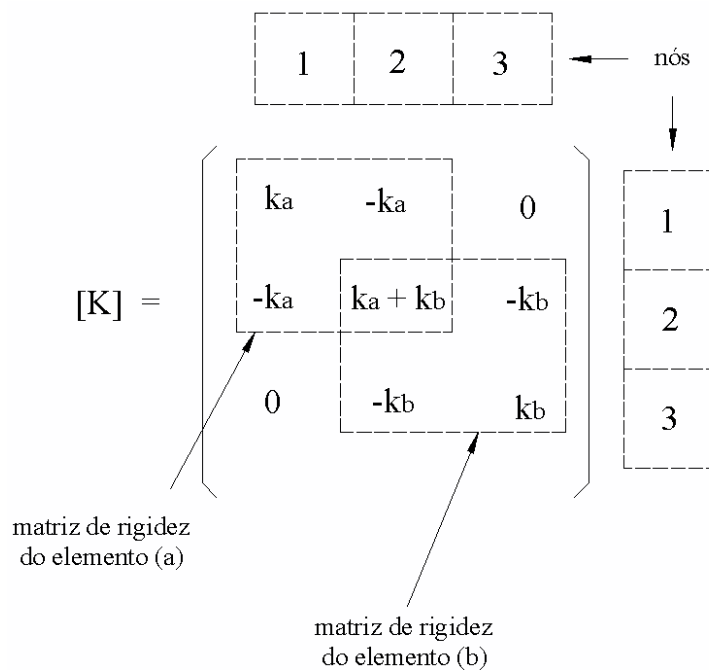


Figura A.5 – Procedimento de obtenção da matriz de rigidez da estrutura.

Logo, conforme Eq. (4.8), a relação força versus deslocamento para a estrutura é dada por:

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_a & -k_a & 0 \\ -k_a & k_a + k_b & -k_b \\ 0 & -k_b & k_b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad (\text{A1.17})$$

Ou de uma forma compacta:

$$\{f\} = [K] \{u\} \quad (\text{A1.18})$$

Onde K é a matriz de rigidez da estrutura.

Da Figura A.4 conclui-se que a matriz de rigidez da estrutura pode ser obtida a partir da matriz de rigidez de cada elemento em função de como estes elementos estão conectados, sendo a forma de conexão fornecida pela numeração dos nós presentes no sistema. Desta forma, a obtenção da matriz de rigidez do sistema acontece como um processo de “superposição” das matrizes dos elementos.

O segundo exemplo visa apresentar um método prático, para aplicação computacional, de montagem da matriz de rigidez de uma estrutura.

Como a dimensão da matriz de rigidez é o produto da quantidade de nós pelo número de gdl de cada nó (6 gdl), o exemplo foi limitado em cinco nós, correspondendo a 30 gdl. Cabe salientar que esta estrutura foi utilizada na parte experimental, descrita no Capítulo VIII, Fig. 8.5.

A estrutura é composta por dois segmentos engastados e conectados por uma articulação esférica, conforme esquema da Fig. A.6(a).

Para considerar a aplicação de uma força externa no segmento horizontal, ele foi dividido em duas partes. Assim, o modelo da Fig. A.6 passa a ser formado por três segmentos e uma articulação esférica: o primeiro segmento é formado pelos nós 1 e 2; o segundo segmento é formado pelos nós 2 e 3 e o terceiro segmento pelos nós 4 e 5; a articulação é formada pelos nós 3 e 4 e os nós 1 e 5 correspondem aos engastes, Fig. A.6(b).

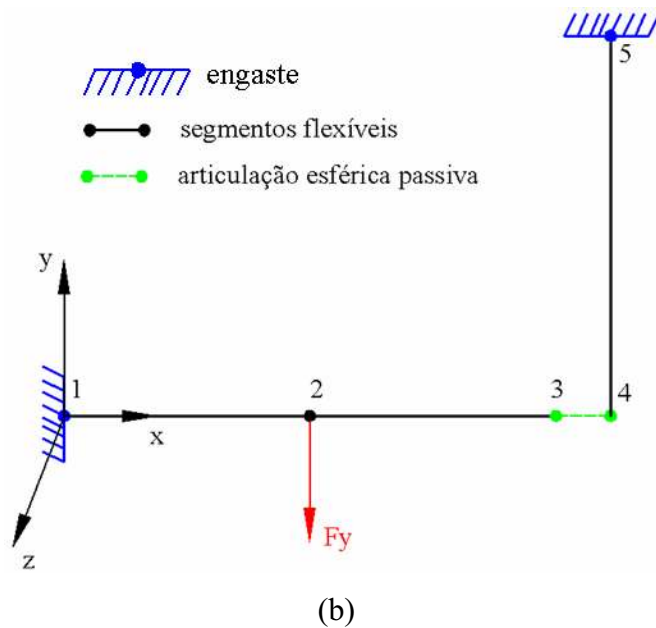
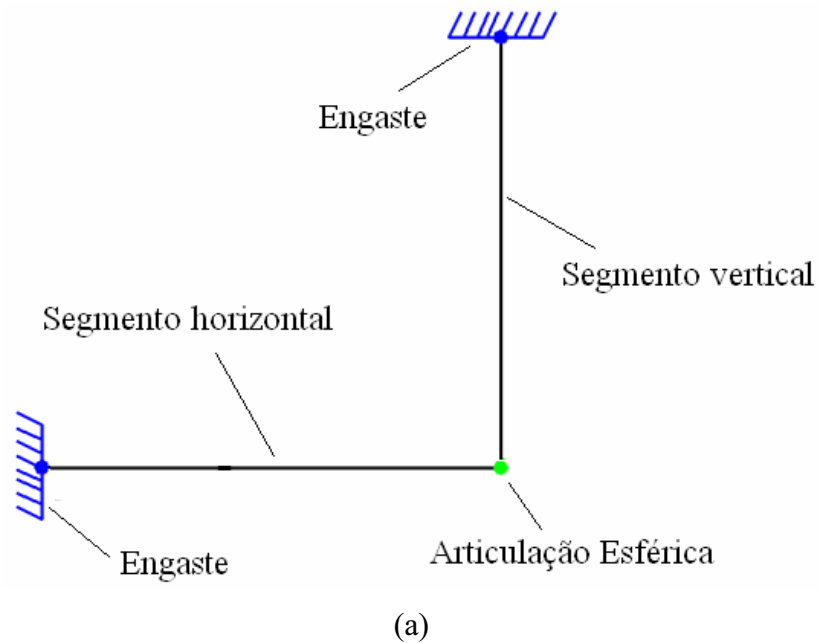


Figura A.6 – a) Modelo experimental; b) Modelo *MSA* de uma estrutura formada por três segmentos e uma articulação esférica.

Cada segmento, formado por dois nós, possui doze graus de liberdade no total, isto é, seis gdl para cada nó. Os graus de liberdade são as possibilidades de deslocamentos flexíveis correspondentes aos deslocamentos flexíveis lineares (δ_{xi} , δ_{yi} , δ_{zi}) e deslocamentos flexíveis angulares (ϕ_{xi} , ϕ_{yi} , ϕ_{zi}), sendo o sub-índice i correspondente ao número do nó, Fig. A.7.



Figura A.7 – Segmento 1-2 formado pelos nós 1 e 2, com os deslocamentos flexíveis correspondentes.

Da mesma forma, a articulação representada pelos nós 3 e 4, possui doze graus de liberdade conforme Figura A.8.

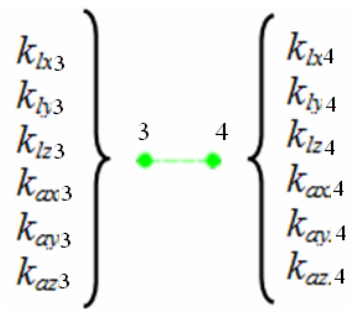


Figura A.8 – Articulação formada pelos nós 3 e 4, com os deslocamentos flexíveis correspondentes.

Cada segmento e articulação possuem uma matriz de rigidez escrita em relação ao referencial local, conforme Eqs. 4.5 e 4.10, respectivamente. Estas matrizes têm que ser escritas em relação ao referencial inercial. Para isto, em função das coordenadas dos nós, pode-se utilizar as Eqs. (4.24) a (4.27).

A montagem da matriz de rigidez é realizada por um processo de superposição em função dos nós e de seus graus de liberdade, sendo então, independente do referencial utilizado. Cada grau de liberdade recebe um número para sua identificação e, preferencialmente, de forma seqüencial crescente:

$$\left. \begin{array}{l} 1 - \text{deslocamento flexível } \delta_{x1} \\ 2 - \text{deslocamento flexível } \delta_{y1} \\ 3 - \text{deslocamento flexível } \delta_{z1} \\ 4 - \text{deslocamento flexível } \phi_{x1} \\ 5 - \text{deslocamento flexível } \phi_{y1} \\ 6 - \text{deslocamento flexível } \phi_{z1} \end{array} \right\} \text{ nó 1}$$

$$\left. \begin{array}{l} 7 - \text{deslocamento flexível } \delta_{x2} \\ 8 - \text{deslocamento flexível } \delta_{y2} \\ 9 - \text{deslocamento flexível } \delta_{z2} \\ 10 - \text{deslocamento flexível } \phi_{x2} \\ 11 - \text{deslocamento flexível } \phi_{y2} \\ 12 - \text{deslocamento flexível } \phi_{z2} \end{array} \right\} \text{ nó 2}$$

$$\left. \begin{array}{l} 13 - \text{deslocamento flexível } \delta_{x3} \\ 14 - \text{deslocamento flexível } \delta_{y3} \\ 15 - \text{deslocamento flexível } \delta_{z3} \\ 16 - \text{deslocamento flexível } \phi_{x3} \\ 17 - \text{deslocamento flexível } \phi_{y3} \\ 18 - \text{deslocamento flexível } \phi_{z3} \end{array} \right\} \text{ nó 3}$$

$$\left. \begin{array}{l} 19 - \text{deslocamento flexível } \delta_{x4} \\ 20 - \text{deslocamento flexível } \delta_{y4} \\ 21 - \text{deslocamento flexível } \delta_{z4} \\ 22 - \text{deslocamento flexível } \phi_{x4} \\ 23 - \text{deslocamento flexível } \phi_{y4} \\ 24 - \text{deslocamento flexível } \phi_{z4} \end{array} \right\} \text{ nó 4}$$

$$\left. \begin{array}{l} 25 - \text{deslocamento flexível } \delta_{x5} \\ 26 - \text{deslocamento flexível } \delta_{y5} \\ 27 - \text{deslocamento flexível } \delta_{z5} \\ 28 - \text{deslocamento flexível } \phi_{x5} \\ 29 - \text{deslocamento flexível } \phi_{y5} \\ 30 - \text{deslocamento flexível } \phi_{z5} \end{array} \right\} \text{ nó 5}$$

A partir da numeração dos gdl, pode-se montar uma matriz de conectividade onde, em cada linha é representado o número dos gdl de cada elemento. Desta forma, a matriz de conectividade, mat_conect , é dada por:

$$mat_conec = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 \\ 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 & 22 & 23 & 24 \\ 19 & 20 & 21 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 & 28 & 29 & 30 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow \text{segmento } 1-2 \\ \rightarrow \text{segmento } 2-3 \\ \rightarrow \text{articulação } 3-4 \\ \rightarrow \text{segmento } 4-5 \end{array}$$

Pode-se observar que o número total de gdl do sistema corresponde ao produto do número de nós por 6 gdl de cada nó que, neste exemplo, totaliza 30 gdl.

Neste caso, como o número de gdl é grande, não é possível montar a matriz de rigidez da mesma forma que o exemplo anterior (Figs. A.4 e A.5). Para isto é utilizada a matriz de

conectividade porque ela fornece a indicação dos elementos, seus nós, seus gdl e quais gdl estão superpostos.

Portanto, para a montagem da matriz de rigidez, nas linhas e colunas são representados os números dos gdl (1 a 30) e cada elemento pelos seus gdl correspondentes. Cada casa da matriz possui a rigidez do elemento correspondente e, na região de superposição, a somatória da rigidez dos elementos que compartilham o mesmo nó. As outras casas em branco são preenchidas por zeros.

Desta forma, a matriz de rigidez da estrutura livre possui dimensão 30 x 30, Fig. A.9.

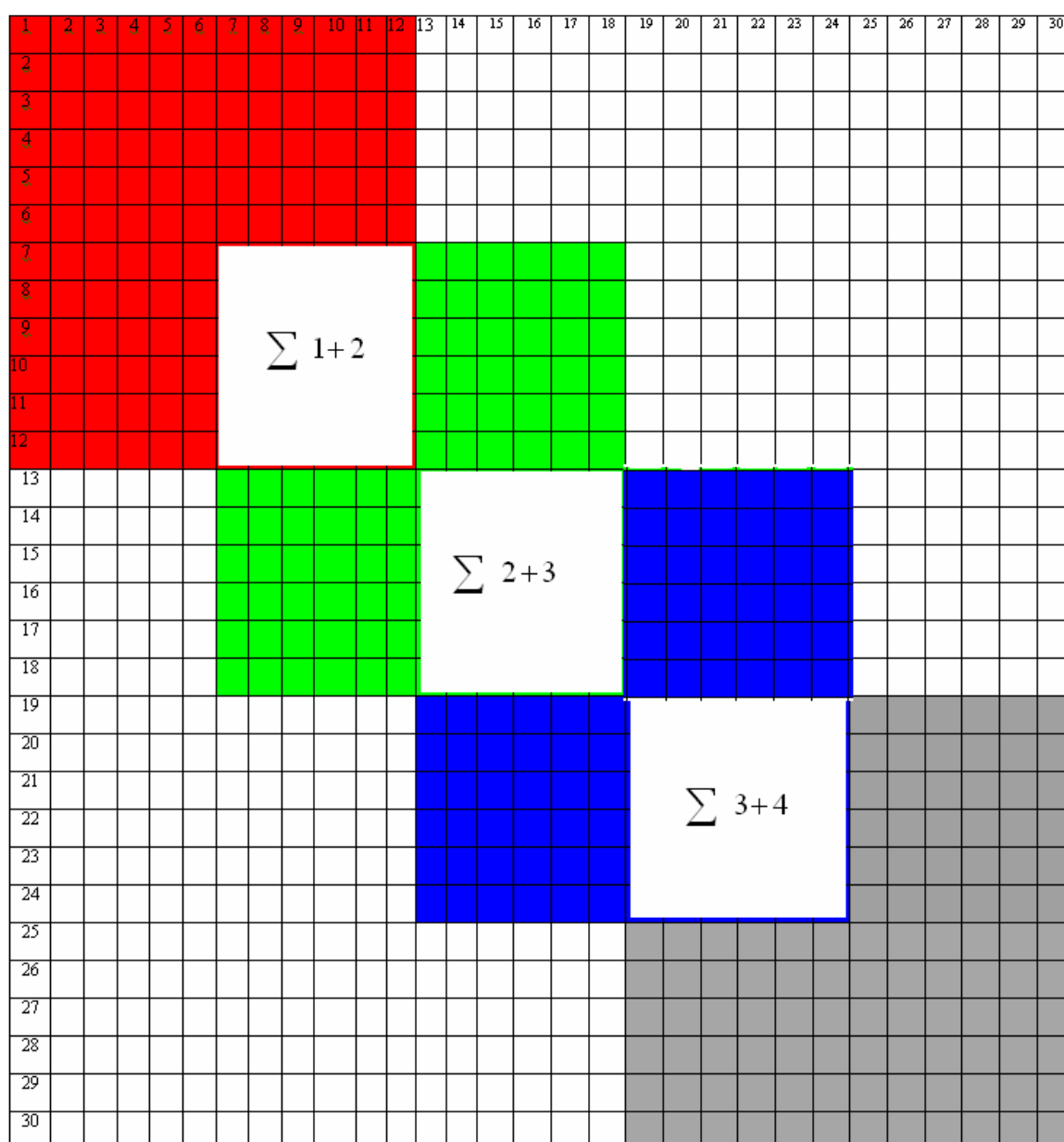


Figura A.9 – Procedimento de Superposição para montagem da matriz de rigidez da estrutura.

Assim, do exposto, a partir da matriz de conectividade é possível montar computacionalmente um algoritmo para a montagem desta matriz de rigidez.

Após a obtenção da matriz de rigidez da estrutura é necessária a aplicação das condições de contorno que, para este modelo, consiste no engastamento dos nós 1 e 5. Como no engastamento os deslocamentos são nulos, podem-se eliminar as linhas e colunas correspondentes aos graus de liberdade dos nós 1 e 5, ficando a matriz na seguinte forma:

7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
8	$\sum 1+2$																
9																	
10																	
11																	
12																	
13							$\sum 2+3$										
14																	
15																	
16																	
17																	
18																	
19													$\sum 3+4$				
20																	
21																	
22																	
23																	
24																	

Figura A.10 – Matriz de rigidez da estrutura.

Deve-se destacar que nas condições de contorno pode-se também impor determinados deslocamentos lineares ou angulares.

Após a imposição das condições de contorno pode-se inverter a Eq. (A1.18) obtendo-se os deslocamentos flexíveis em função das forças aplicadas nos respectivos nós.

$$\{u\} = [K]^{-1} \{W\} \quad (A1.19)$$

O mesmo procedimento descrito neste Anexo I pode ser estendido para qualquer sistema multicorpo.

ANEXO II – PROGRAMAS DO CAPÍTULO V

```
% programa para modelagem robô flexível de 2 gdl da Figura 5.1
% Autor: Rogério Sales Gonçalves

clear all; close all; clc; format long

% ----- CALCULO SIMBOLICO -----

syms l1 l2 E1 E2 I1 I2 teta1 teta2 i1 i2 F1 F2 M1 M2 V1 V2 i1 i2 k1
k2 k3 x1 x2 Ptx Pty A B

% V1 = (l1^3/(3*E1*I1))*F1 + (l1^2/2*E1*I1)*M1
%
% i1 = (l1^2/(2*E1*I1))*F1 + (l1/E1*I1)*M1
%
% V2 = (l2^3/(3*E2*I2))*F2 + (l2^2/2*E2*I2)*M2
%
% i2 = (l2^2/(2*E2*I2))*F2 + (l2/E2*I2)*M2

a1 = 3/(2*l1)
a2 = (3*E2*I2*(l1*l2))/(2*E1*I1*(2*l2^3))
i1 = a1*V1 + a2*V2 % Cálculo do angulo de deformação da barra 1 devido a rotação
a3 = 3*(l2^2)/(2*l2^3)
i2 = a3*V2 % Cálculo do angulo de deformação da barra 2 devido a rotação

X1 = l1*cos(teta1) - V1*sin(teta1) % posição do segmento 1 na direção X
considerando a deformação do segmento

Y1 = l1*sin(teta1) + V1*cos(teta1) % posição do segmento 1 na direção Y
considerando a deformação do segmento

X2 = X1 + l2*cos(teta1 + i1 + teta2) - V2*sin(teta1 + i1 + teta2)
% posição do segmento 2 na direção X considerando a deformação do segmento
Y2 = Y1 + l2*sin(teta1 + i1 + teta2) + V2*cos(teta1 + i1 + teta2)
% posição do segmento 2 na direção Y considerando a deformação do segmento

XT = X2 % deslocamento da extremidade (TIP) considerando a deformação do
segmento

YT = Y2 % deslocamento da extremidade (TIP) considerando a deformação do
segmento

teta_t = teta1 + i1 + teta2 + i2 % deslocamento angular total

X = [XT YT teta_t].';

v = [V1 V2 teta1 teta2]

Jxx = jacobian(X,v) % Matriz Jacobiana 3 x 4

Jxx_1_1= Jxx(1,1); Jxx_1_2= Jxx(1,2); Jxx_1_3= Jxx(1,3); Jxx_1_4= Jxx(1,4)
Jxx_2_1= Jxx(2,1); Jxx_2_2= Jxx(2,2); Jxx_2_3= Jxx(2,3); Jxx_2_4= Jxx(2,4)
Jxx_3_1= Jxx(3,1); Jxx_3_2= Jxx(3,2); Jxx_3_3= Jxx(3,3); Jxx_3_4= Jxx(3,4)
```

```

deformacao = [V1 V2]

angulos = [teta1 teta2]

Js = jacobian(X,angulos)% Matriz Jacobiana devido ao efeito das
articulações (Modelagem idêntica ao TSAI)- Esta parte considera o
deslocamento devido as articulações.

Jm = jacobian(X,deformacao) % Matriz Jacobiana devido a deformação dos
segmentos (derivadas em relação a V1 e V2) - Esta parte considera o
deslocamento devido as deformações.

%----- CALCULO NUMERICO -----

clear l1 l2 E1 E2 I1 I2 teta1 teta2 i1 i2 F1 F2 M1 M2 V1 V2 i1 i2 k1
k2 k3 x1 x2 Ptx Pty A B L

teta1 = 90*(pi/180) % angulo da articulação angular 1
teta2 = teta1 + 0*(pi/180) % angulo da articulação angular 2
E1 = 2*10^11 % [ Pa - N/m^2] % Considerando Material AÇO
E2 = 2*10^11 % [ Pa - N/m^2]
l1 = 0.3 % [m]
l2 = 0.3 % [m]
L = 0 % Distância entre o ponto B e a aplicação da força
Ptx = 1 % Força aplicada na direção Horizontal - [N]
Pty = 0 % Força aplicada na direção Vertical - [N]

F1 = Ptx*sin(teta2) + Pty*cos(teta2) % Projeção da Força Ptx e Pty na
direção perpendicular ao segmento 1 - [N]
F2 = Pty % Projeção da Força Pty na direção perpendicular ao segmento 1 -
[N]
M1 = (l2+L)*Pty % Momento na extremidade do segmento 1 devido a força Pty
- [N*m]
M2 = 0% Momento na extremidade do segmento 2 devido a força Pty - [N*m]

R = (5/1000)/2 % Barra considera com seção transversal circular
I1 = (pi*R^4)/4
I2 = (pi*R^4)/4
V1 = (l1^3/(3*E1*I1))*F1 + (l1^2/(2*E1*I1))*M1 % [m]
i1 = (l1^2/(2*E1*I1))*F1 + (l1/(E1*I1))*M1 % [rad/m]
V2 = (l2^3/(3*E2*I2))*F2 + (l2^2/(2*E2*I2))*M2 % [m]
i2 = (l2^2/(2*E2*I2))*F2 + (l2/(E2*I2))*M2
a1 = 3/(2*l1)
a2 = (3*E2*I2*l1*(l2+L))/(2*E1*I1*(2*l2^3 + 3*l2^2*L))
i1_compara = a1*V1 + a2*V2 % Cálculo do angulo de deformação da barra 1
devido a rotação
a3 = 3*(l2^2 + 2*l2*L)/(2*l2^3 + 3*l2^2*L)
i2_compara = a3*V2 % Cálculo do angulo de deformação da barra 2
devido a rotação

#####

% ----- Matriz Jacobiana Numérica devido aos ângulos -----

```

```

Js11 = -l1*sin(teta1)-V1*cos(teta1)-
l2*sin(teta1+3/2/l1*V1+3/4*E2*I2*l1/l2^2/E1/I1*V2+teta2)-
V2*cos(teta1+3/2/l1*V1+3/4*E2*I2*l1/l2^2/E1/I1*V2+teta2)

Js12 = -l2*sin(teta1+3/2/l1*V1+3/4*E2*I2*l1/l2^2/E1/I1*V2+teta2)-
V2*cos(teta1+3/2/l1*V1+3/4*E2*I2*l1/l2^2/E1/I1*V2+teta2)

Js21 = l1*cos(teta1)-
V1*sin(teta1)+l2*cos(teta1+3/2/l1*V1+3/4*E2*I2*l1/l2^2/E1/I1*V2+teta2)-
V2*sin(teta1+3/2/l1*V1+3/4*E2*I2*l1/l2^2/E1/I1*V2+teta2)

Js22 = l2*cos(teta1+3/2/l1*V1+3/4*E2*I2*l1/l2^2/E1/I1*V2+teta2)-
V2*sin(teta1+3/2/l1*V1+3/4*E2*I2*l1/l2^2/E1/I1*V2+teta2)

Js31 = 1
Js32 = 1

J1 = [Js11 Js12; Js21 Js22]

ks1 = 1000
ks2 = 1000
k1 = diag([ks1, ks2])

C1 = J1*inv(k1)*J1'

K = inv(C1)

L = 0
teta3 = 0 % ângulo da aplicação da força se esta não fosse aplicada
diretamente no ponto B da Figura 5.3

km1 = (3*E1*I1)/l1^3
km2 = 0

alfa = 9*l1*(l2 +L*cos(teta3))*E2^2*I2^2*(4*l1-4*l1*cos(teta2)
+l2*L*cos(teta3))+l2*E1*I1*E2*I2*(l2^3+3*L*l2^2*cos(teta3)
+3*L^2*l2*(cos(teta3))^2)

beta = E1*I1*(2*l2^3 + 3*l2^2*L*cos(teta3))^2
km3 = alfa/beta
km = diag([km1, km3])

Jm11 = -sin(teta1)-
3/2*l2*sin(teta1+3/2/l1*V1+3/4*E2*I2*l1/l2^2/E1/I1*V2+teta2)/l1-
3/2*V2*cos(teta1+3/2/l1*V1+3/4*E2*I2*l1/l2^2/E1/I1*V2+teta2)/l1

Jm12 = -
3/4/l2*sin(teta1+3/2/l1*V1+3/4*E2*I2*l1/l2^2/E1/I1*V2+teta2)*E2*I2*l1/E1/I1
-sin(teta1+3/2/l1*V1+3/4*E2*I2*l1/l2^2/E1/I1*V2+teta2)-
3/4*V2*cos(teta1+3/2/l1*V1+3/4*E2*I2*l1/l2^2/E1/I1*V2+teta2)*E2*I2*l1/l2^2/
E1/I1

Jm21 =
cos(teta1)+3/2*l2*cos(teta1+3/2/l1*V1+3/4*E2*I2*l1/l2^2/E1/I1*V2+teta2)/l1-
3/2*V2*sin(teta1+3/2/l1*V1+3/4*E2*I2*l1/l2^2/E1/I1*V2+teta2)/l1

```

```

Jm22 =
3/4/l2*cos(teta1+3/2/l1*V1+3/4*E2*I2*l1/l2^2/E1/I1*V2+teta2)*E2*I2*l1/E1/I1
+cos(teta1+3/2/l1*V1+3/4*E2*I2*l1/l2^2/E1/I1*V2+teta2)-
3/4*V2*sin(teta1+3/2/l1*V1+3/4*E2*I2*l1/l2^2/E1/I1*V2+teta2)*E2*I2*l1/l2^2/
E1/I1

Jm31 = 3/2/l1

Jm32 = 3/4*E2*I2*l1/l2^2/E1/I1+3/2/l2

% Jm = [Jm11 Jm12; Jm21 Jm22; Jm31 Jm32]

Jm = [Jm11 Jm12; Jm21 Jm22]
Cm = Jm*inv(km)*Jm'
KM = inv(Cm)

CT = Cl + Cm

KT = inv(CT)

F = [1 0]'

deslocamentos_total_serial = (inv(KT)*F)

deslocamento_articulacoes_serial = (inv(K)*F)

deslocamento_deformacoes_serial = (inv(KM)*F)

```

```
% comparação modelo Komatsu considerado sem deformações dos segmentos,
% apenas deformações devido as articulações
% através desta formulação verifica-se que ambos os modelos são
% equivalentes
% Autor: Rogério Sales Gonçalves
```

```
close all; clc; format long
```

```
% -----
syms l1 l2 teta1 teta2
```

```
% CONSIDERANDO OS SEGMENTOS RÍGIDOS
```

```
i1 = 0
i2 = 0
V1 = 0
V2 = 0
```

```
% -----
```

```
X1 = l1*cos(teta1) - V1*sin(teta1)
Y1 = l1*sin(teta1) + V1*cos(teta1)
X2 = X1 + l2*cos(teta1 + i1 + teta2) - V2*sin(teta1 + i1 + teta2)
Y2 = Y1 + l2*sin(teta1 + i1 + teta2) + V2*cos(teta1 + i1 + teta2)
XT = X2
YT = Y2
teta_t = teta1 + i1 + teta2 + i2
X = [XT YT teta_t]
angulos = [teta1 teta2]
Js = jacobian(X,angulos)
```

```
clear l1 l2 teta1 teta2
```

```
l1 = 0.3
l2 = 0.3
teta1 = 60*(pi/180)
teta2 = 10*(pi/180)
```

```
Js11 = -l1*sin(teta1)-l2*sin(teta1+teta2)
Js12 = -l2*sin(teta1+teta2)
Js21 = l1*cos(teta1)+l2*cos(teta1+teta2)
Js22 = l2*cos(teta1+teta2)
Js = [Js11 Js12; Js21 Js22]
```

```
ks1 = 1000
ks2 = 1000
k1 = diag([ks1, ks2])
```

```
C1 = J1*inv(k1)*J1'
K = inv(C1)
F = [1 0]';
deslocamentos_articulacoes_sem_deformacao = (inv(K)*F)*1000
```

```

% -----

% MODELO TSAI - leva em consideração apenas as articulações e
% segmentos são considerados rígidos

J_tsai = [-l1*sin(teta1)-l2*sin(teta1+teta2) -l2*sin(teta1+teta2); ...
          l1*cos(teta1)+l2*cos(teta1+teta2)  l2*cos(teta1+teta2)];

kk = diag([ks1 ks2]);
C_tsai = J_tsai*inv(kk)*J_tsai';
K_tsai = inv(C_tsai);
deslocamentos_tsai = (inv(K_tsai)*F)

%-----

```

MODELO *FEA* UTILIZANDO-SE DO SOFTWARE ANSYS – FIGURAS 5.6 e 5.7

```
/BATCH
/COM,ANSYS RELEASE 9.0  UP20041104   11:11:51   10/02/2007
/input,menust,tmp,",,,,,,,,,,,,,1
/GRA,POWER
/GST,ON
/PLO,INFO,3
/GRO,CURL,ON
/CPLANE,1
/REPLOT,RESIZE
WPSTYLE,,,,,,,,0
/REPLOT,RESIZE
/VIEW,1,1,2,3
/ANG,1
/REP,FAST
/VIEW,1,1,1,1
/ANG,1
/REP,FAST
/REP7
!*
ET,1,BEAM4
!*
R,1,1,963495408493621e-005,3.067961575771282e-011,3.067961575771282e-011,0.005,0.005,,
RMORE,,,,,
!*
!*
MPTEMP,,,,,,,,
MPTEMP,1,0
MPDATA,EX,1,,2.000000000000000e+011
MPDATA,PRXY,1,,0.3
SECTYPE, 1, BEAM, CSOLID, , 0
SECOFFSET, CENT
SECDATA,0.00250,0,0,0,0,0,0,0,0,0

K, ,0,0,0,
K, ,0,0.3,0,
K, ,0.3,0.3,0,
L,   1,   2
L,   2,   3
FLST,5,2,4,ORDE,2
FITEM,5,1
FITEM,5,-2
CM,_Y,LINE
LSEL, , , P51X
CM,_Y1,LINE
CMSEL,,_Y
!*
LESIZE,_Y1, , ,10, , , ,1
!*
FLST,2,2,4,ORDE,2
FITEM,2,1
FITEM,2,-2
LMESH,P51X
FINISH
/SOL
```

```
!*  
ANTYPE,0  
FLST,2,1,1,ORDE,1  
FITEM,2,1  
!*  
/GO  
D,P51X, , , , ,ALL, , , ,  
FLST,2,1,1,ORDE,1  
FITEM,2,12  
!*  
/GO  
F,P51X,FX,1  
/STATUS,SOLU  
SOLVE
```

MODELO MSA DO MANIPULADOR DE 2 gdl da FIGURA 5.1

```
% MODELO MSA DO MANIPULADOR DE 2 gdl da FIGURA 5.1
% AUTOR: Rogério Sales Gonçalves

clear all; close all; clc; format long

% MODELO CINEMATICO DO MANIPULADOR 2 gdl

for ii = 91

    teta(ii) = (ii - 1)*(pi/180);
    tetal(ii) = 0*(pi/180);

    l = 0.3;    % [metros]

    a1x(ii) = 0; a1y(ii) = 0; a1z(ii) = 0;% Origem do Referencial Inercial
    a2x(ii) = 0; a2y(ii) = 0.01; a2z(ii) = 0;
    a3x(ii) = 0; a3y(ii) = 0.01; a3z(ii) = 0;
    a4x(ii) = l*cos(teta(ii)); a4y(ii) = 0.01 + l*sin(teta(ii)); a4z(ii) = 0;
    a5x(ii) = l*cos(teta(ii)); a5y(ii) = 0.01 + l*sin(teta(ii)); a5z(ii) = 0;
    a6x(ii) = l*cos(teta(ii)) + l*cos(tetal(ii));
    a6y(ii) = 0.01 + l*sin(teta(ii)) + l*sin(tetal(ii));
    a6z(ii) = 0;

    plot3(a1x(ii), a1y(ii), a1z(ii), '+b');
    hold on
    plot3(a2x(ii), a2y(ii), a2z(ii), 'ob');
    plot3(a3x(ii), a3y(ii), a3z(ii), 'ob');
    plot3(a4x(ii), a4y(ii), a4z(ii), 'ob');
    plot3(a5x(ii), a5y(ii), a5z(ii), 'ob');
    plot3(a6x(ii), a6y(ii), a6z(ii), 'ob');

    plot3([a1x(ii) a2x(ii)], [a1y(ii) a2y(ii)], [a1z(ii) a2z(ii)], 'b');
    plot3([a2x(ii) a3x(ii)], [a2y(ii) a3y(ii)], [a2z(ii) a3z(ii)], 'b');
    plot3([a3x(ii) a4x(ii)], [a3y(ii) a4y(ii)], [a3z(ii) a4z(ii)], 'b');
    plot3([a4x(ii) a5x(ii)], [a4y(ii) a5y(ii)], [a4z(ii) a5z(ii)], 'b');
    plot3([a5x(ii) a6x(ii)], [a5y(ii) a6y(ii)], [a5z(ii) a6z(ii)], 'b');

    grid on
    xlabel('eixo X');
    ylabel('eixo Y');
    zlabel('eixo Z');
    title('Mecanismo Plano 4 Barras Simétrico');
    view(0,90)
    axis equal
    axis([-0.4 1.2 -0.4 0.4])
    pause(0.01)

##### SEGMENTO 1 - ELEMENTO 1 - A1A2 - BASE RÍGIDA #####

L1 = 0.01; E1 = 2*10^11; R1 = (5/1000)/2; Ix1 = (pi*R1^4)/4; Iy1 = Ix1; Iz1
= Ix1; Ip1 = (pi*R1^4)/2; G = 0.8*10^11; J1 = Ip1; A1 = pi*R1^2;
```

```
E = 2*10^11; R1 = (5/1000)/2; Ix = (pi*R1^4)/4; Iy = Ix; Iz = Ix; Ip =
(pi*R1^4)/2; G = 0.8*10^11; J = Ip; A = pi*R1^2;
```

```
% Calculo do tamanho do segmento
```

```
l1(ii) = sqrt((a2x(ii) - a1x(ii))^2 + (a2y(ii) - a1y(ii))^2 + (a2z(ii) -
a1z(ii))^2);
```

```
% Calculo dos cossenos diretores
```

```
cx(ii) = (a2x(ii) - a1x(ii))/l1(ii);
cy(ii) = (a2y(ii) - a1y(ii))/l1(ii);
cz(ii) = (a2z(ii) - a1z(ii))/l1(ii);
```

```
% MATRIZ DE ROTACAO EM FUNÇÃO DAS COORDENADAS ESPACIAIS DO SEGMENTO
```

```
if a1x(ii) == a2x(ii);
```

```
    Matriz_rotacao_segmento1 = [ 0      -cy(ii)      0;...
                                cy(ii)      0          0;...
                                0          0          1];
```

```
else
```

```
    Matriz_rotacao_segmento1 = [ cx(ii), (- cx(ii)*cy(ii))/(sqrt(cx(ii)^2 +
cz(ii)^2)), (- cz(ii))/(sqrt(cx(ii)^2 + cz(ii)^2)); cy(ii), (sqrt(cx(ii)^2 +
cz(ii)^2)), 0; cz(ii), (- cy(ii)*cz(ii))/(sqrt(cx(ii)^2 + cz(ii)^2)),
( cx(ii))/(sqrt(cx(ii)^2 + cz(ii)^2))];
```

```
end
```

```
% MONTAGEM DA MATRIZ
```

```
Matriz_geral_segmento1 = [Matriz_rotacao_segmento1, zeros(3),
zeros(3), zeros(3); zeros(3), Matriz_rotacao_segmento1, zeros(3),
zeros(3); zeros(3), zeros(3), Matriz_rotacao_segmento1, zeros(3);
zeros(3), zeros(3), zeros(3), Matriz_rotacao_segmento1];
```

```
L1 = 0.01;
```

```
E2 = 20*10^11;
```

```
K_separado_1 = [ (A1*E2)/L1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -(E2*A1)/L1, 0, 0, 0, 0, 0;
                 0, (12*E2*Iz1)/L1^3, 0, 0, 0, (6*E2*Iz1)/L1^2, 0,
-(12*E2*Iz1)/L1^3, 0, 0, 0, (6*E2*Iz1)/L1^2; 0, 0, (12*E2*Iy1)/L1^3, 0,
-(6*E2*Iy1)/L1^2, 0, 0, 0, -(12*E2*Iy1)/L1^3, 0, -(6*E2*Iy1)/L1^2, 0;
0, 0, 0, ((G*J1)/L1), 0, 0, 0, 0, 0, 0, -(G*J1)/L1, 0, 0;
0, 0, -(6*E2*Iy1)/L1^2, 0, (4*E2*Iy1)/L1, 0, 0, 0, (6*E2*Iy1)/L1^2, 0,
(2*E2*Iy1)/L1, 0; 0, (6*E2*Iz1)/L1^2, 0, 0, 0, (4*E2*Iz1)/L1, 0, -(6*E2*Iz1)/L1^2,
0, 0, 0, (2*E2*Iz1)/L1; -(E2*A1)/L1, 0, 0, 0, 0, 0, (A1*E2)/L1, 0, 0, 0, 0, 0;
0, -(12*E2*Iz1)/L1^3, 0, 0, 0, -(6*E2*Iz1)/L1^2, 0, (12*E2*Iz1)/L1^3, 0, 0, 0,
-(6*E2*Iz1)/L1^2; 0, 0, -(12*E2*Iy1)/L1^3, 0, (6*E2*Iy1)/L1^2, 0, 0, 0,
(12*E2*Iy1)/L1^3, 0, 6*E2*Iy1)/L1^2, 0; 0, 0, 0, -(G*J1)/L1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, (G*J1)/L1,
0, 0; 0, 0, -(6*E2*Iy1)/L1^2, 0, (2*E2*Iy1)/L1, 0, 0, 0, (6*E2*Iy1)/L1^2, 0,
(4*E2*Iy1)/L1, 0; 0, (6*E2*Iz1)/L1^2, 0, 0, 0, (2*E2*Iz1)/L1, 0, -(6*E2*Iz1)/L1^2,
0, 0, 0, (4*E2*Iz1)/L1];
```

```

K_separado_1 =
(Matriz_geral_segmento1*(K_separado_1)*Matriz_geral_segmento1');

##### SEGMENTO 2 - ARTICULAÇÃO ROTATIVA A2A3 #####

l3(ii) = sqrt((a4x(ii) - a3x(ii))^2 + (a4y(ii) - a3y(ii))^2 + (a4z(ii) -
a3z(ii))^2);
cx(ii) = (a4x(ii) - a3x(ii))/l3(ii);
cy(ii) = (a4y(ii) - a3y(ii))/l3(ii);
cz(ii) = (a4z(ii) - a3z(ii))/l3(ii);

if a3x(ii) == a4x(ii);
    Matriz_rotacao_segmento2 = [ 0      -cy(ii)      0;...
                                cy(ii)      0          0;...
                                0           0          1];
else

Matriz_rotacao_segmento2 = [ cx(ii), (- cx(ii)*cy(ii))/(sqrt(cx(ii)^2 +
cz(ii)^2)), (- cz(ii))/(sqrt(cx(ii)^2 + cz(ii)^2)); cy(ii), (sqrt(cx(ii)^2 +
cz(ii)^2)), 0; cz(ii), (- cy(ii)*cz(ii))/(sqrt(cx(ii)^2 + cz(ii)^2)),
( cx(ii))/(sqrt(cx(ii)^2 + cz(ii)^2))];

end

% MONTAGEM DA MATRIZ

Matriz_geral_segmento2 = [Matriz_rotacao_segmento2, zeros(3),
zeros(3), zeros(3); zeros(3), Matriz_rotacao_segmento2, zeros(3),
zeros(3); zeros(3), zeros(3), Matriz_rotacao_segmento2, zeros(3);
zeros(3), zeros(3), zeros(3), Matriz_rotacao_segmento2];

ka    = 2*10^11;          % RIGIDEZ LINEAR NA DIREÇÃO X
kr    = 2*10^11;          % RIGIDEZ LINEAR NA DIREÇÃO Y
kr1   = 2*10^11;          % RIGIDEZ LINEAR NA DIREÇÃO Z
kra   = 2*10^11;          % RIGIDEZ ANGULAR NA DIREÇÃO X
krr   = 2*10^11;          % RIGIDEZ ANGULAR NA DIREÇÃO Y
krr1  = 1000              % RIGIDEZ ANGULAR NA DIREÇÃO Z

matriz_rigidez_articulacao = diag([ka, kr, kr1, kra, krr, krr1]);

K_separado_2 = [matriz_rigidez_articulacao, -matriz_rigidez_articulacao;
                - matriz_rigidez_articulacao, matriz_rigidez_articulacao];

K_separado_2 =
(Matriz_geral_segmento2*(K_separado_2)*Matriz_geral_segmento2');

##### SEGMENTO 3 - ELEMENTO 3 - A3A4 #####

l3(ii) = sqrt((a4x(ii) - a3x(ii))^2 + (a4y(ii) - a3y(ii))^2 + (a4z(ii) -
a3z(ii))^2);

```

```

cx(ii) = (a4x(ii) - a3x(ii))/l3(ii);
cy(ii) = (a4y(ii) - a3y(ii))/l3(ii);
cz(ii) = (a4z(ii) - a3z(ii))/l3(ii);

if a3x(ii) == a4x(ii)
    Matriz_rotacao_segmento3 = [ 0      -cy(ii)      0;...
                                cy(ii)      0      0;...
                                0      0      1];
else

Matriz_rotacao_segmento3 = [ cx(ii), (- cx(ii)*cy(ii))/(sqrt(cx(ii)^2 +
cz(ii)^2)), (- cz(ii))/(sqrt(cx(ii)^2 + cz(ii)^2)); cy(ii), (sqrt(cx(ii)^2 +
cz(ii)^2)), 0; cz(ii), (- cy(ii)*cz(ii))/(sqrt(cx(ii)^2 + cz(ii)^2)),
( cx(ii))/(sqrt(cx(ii)^2 + cz(ii)^2))];

End

% MONTAGEM DA MATRIZ

Matriz_geral_segmento3 = [Matriz_rotacao_segmento3, zeros(3),
zeros(3), zeros(3); zeros(3), Matriz_rotacao_segmento3, zeros(3),
zeros(3); zeros(3), zeros(3), Matriz_rotacao_segmento3, zeros(3);
zeros(3), zeros(3), zeros(3), Matriz_rotacao_segmento3];

L3 = 0.3;    E3 = E

K_separado_3 = [ (A1*E3)/L3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -(E3*A1)/L3, 0, 0, 0, 0, 0;
                 0, (12*E3*Iz1)/L3^3, 0, 0, 0, (6*E3*Iz1)/L3^2, 0,
-(12*E3*Iz1)/L3^3, 0, 0, 0, (6*E3*Iz1)/L3^2; 0, 0, (12*E3*Iy1)/L3^3, 0,
-(6*E3*Iy1)/L3^2, 0, 0, 0, -(12*E3*Iy1)/L3^3, 0, -(6*E3*Iy1)/L3^2, 0;
0, 0, 0, ((G*J1)/L3), 0, 0, 0, 0, 0, 0, -(G*J1)/L3, 0, 0;
0, 0, -(6*E3*Iy1)/L3^2, 0, (4*E3*Iy1)/L3, 0, 0, 0, (6*E3*Iy1)/L3^2, 0,
(2*E3*Iy1)/L3, 0; 0, (6*E3*Iz1)/L3^2, 0, 0, 0, (4*E3*Iz1)/L3, 0, -(6*E3*Iz1)/L3^2,
0, 0, 0, (2*E3*Iz1)/L3; -(E3*A1)/L3, 0, 0, 0, 0, 0, (A1*E3)/L3, 0, 0, 0, 0, 0;
0, -(12*E3*Iz1)/L3^3, 0, 0, 0, -(6*E3*Iz1)/L3^2, 0, (12*E3*Iz1)/L3^3, 0, 0, 0,
-(6*E3*Iz1)/L3^2; 0, 0, -(12*E3*Iy1)/L3^3, 0, (6*E3*Iy1)/L3^2, 0, 0, 0,
(12*E3*Iy1)/L3^3, 0, 6*E3*Iy1)/L3^2, 0; 0, 0, 0, -(G*J1)/L3, 0, 0, 0, 0, 0, (G*J1)/L3,
0, 0; 0, 0, -(6*E3*Iy1)/L3^2, 0, (2*E3*Iy1)/L3, 0, 0, 0, (6*E3*Iy1)/L3^2, 0,
(4*E3*Iy1)/L3, 0; 0, (6*E3*Iz1)/L3^2, 0, 0, 0, (2*E3*Iz1)/L3, 0, -(6*E3*Iz1)/L3^2,
0, 0, 0, (4*E3*Iz1)/L3];

K_separado_3 =
(Matriz_geral_segmento3*(K_separado_3)*Matriz_geral_segmento3');

#####SEGMENTO 4 - ARTICULAÇÃO ROTATIVA A4A5 #####

l3(ii) = (sqrt(a6x(ii) - a5x(ii))^2 + (a6y(ii) - a5y(ii))^2 + (a6z(ii) -
a5z(ii))^2);

cx(ii) = (a6x(ii) - a5x(ii))/l3(ii);
cy(ii) = (a6y(ii) - a5y(ii))/l3(ii);
cz(ii) = (a6z(ii) - a5z(ii))/l3(ii);

```

```

if a5x(ii) == a6x(ii)
    Matriz_rotacao_segmento4 = [ 0      -cy(ii)      0;...
                                cy(ii)      0          0;...
                                0          0          1];
else
    Matriz_rotacao_segmento3 = [ cx(ii), (- cx(ii)*cy(ii))/(sqrt(cx(ii)^2 +
    cz(ii)^2)), (- cz(ii))/(sqrt(cx(ii)^2 + cz(ii)^2)); cy(ii), (sqrt(cx(ii)^2 +
    cz(ii)^2)), 0; cz(ii), (- cy(ii)*cz(ii))/(sqrt(cx(ii)^2 + cz(ii)^2)),
    ( cx(ii))/(sqrt(cx(ii)^2 + cz(ii)^2))];
end

% MONTAGEM DA MATRIZ

Matriz_geral_segmento4 = [Matriz_rotacao_segmento4, zeros(3),
zeros(3), zeros(3); zeros(3), Matriz_rotacao_segmento4, zeros(3),
zeros(3); zeros(3), zeros(3), Matriz_rotacao_segmento4, zeros(3);
zeros(3), zeros(3), zeros(3), Matriz_rotacao_segmento4];

ka    = 2*10^11;           % RIGIDEZ LINEAR NA DIREÇÃO X
kr    = 2*10^11;           % RIGIDEZ LINEAR NA DIREÇÃO Y
kr1   = 2*10^11;           % RIGIDEZ LINEAR NA DIREÇÃO Z
kra   = 2*10^11;           % RIGIDEZ ANGULAR NA DIREÇÃO X
krr   = 2*10^11;           % RIGIDEZ ANGULAR NA DIREÇÃO Y
krr1  = 1000               % RIGIDEZ ANGULAR NA DIREÇÃO Z

matriz_rigidez_articulacao = diag([ka, kr, kr1, kra, krr, krr1]);

K_separado_4 = [matriz_rigidez_articulacao, -matriz_rigidez_articulacao;
                - matriz_rigidez_articulacao, matriz_rigidez_articulacao];

K_separado_4 =
(Matriz_geral_segmento4*(K_separado_4)*Matriz_geral_segmento4');

##### SEGMENTO 5 - ELEMENTO 5 - A5A6 #####

l5(ii) = sqrt((a6x(ii) - a5x(ii))^2 + (a6y(ii) - a5y(ii))^2 + (a6z(ii) -
a5z(ii))^2 );

cx(ii) = (a6x(ii) - a5x(ii))/l5(ii);
cy(ii) = (a6y(ii) - a5y(ii))/l5(ii);
cz(ii) = (a6z(ii) - a5z(ii))/l5(ii);

if a5x(ii) == a6x(ii)
    Matriz_rotacao_segmento5 = [ 0      -cy(ii)      0;...
                                cy(ii)      0          0;...
                                0          0          1];
else
    Matriz_rotacao_segmento5 = [ cx(ii), (- cx(ii)*cy(ii))/(sqrt(cx(ii)^2 +
    cz(ii)^2)), (- cz(ii))/(sqrt(cx(ii)^2 + cz(ii)^2)); cy(ii), (sqrt(cx(ii)^2 +
    cz(ii)^2)), 0; cz(ii), (- cy(ii)*cz(ii))/(sqrt(cx(ii)^2 + cz(ii)^2)),
    ( cx(ii))/(sqrt(cx(ii)^2 + cz(ii)^2))];
end
% MONTAGEM DA MATRIZ GLOBAL

```

```

Matriz_geral_segmento5 = [Matriz_rotacao_segmento5, zeros(3),
zeros(3), zeros(3); zeros(3), Matriz_rotacao_segmento5, zeros(3),
zeros(3); zeros(3), zeros(3), Matriz_rotacao_segmento5, zeros(3);
zeros(3), zeros(3), zeros(3), Matriz_rotacao_segmento5];

```

```

%MATRIZ DE RIGIDEZ DE UMA BARRA SE SEÇÃO TRANSVERSAL CONSTANTE - SEGMENTO 2

```

```

L5 = 1; E5 = E;

```

```

K_separado_5 = [ (A1*E5)/L5, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -(E5*A1)/L5, 0, 0, 0, 0, 0,
0, (12*E5*Iz1)/L5^3, 0, 0, 0, (6*E5*Iz1)/L5^2, 0,
-(12*E5*Iz1)/L5^3, 0, 0, 0, (6*E5*Iz1)/L5^2, 0, 0, (12*E5*Iy1)/L5^3, 0,
-(6*E5*Iy1)/L5^2, 0, 0, 0, -(12*E5*Iy1)/L5^3, 0, -(6*E5*Iy1)/L5^2, 0,
0, 0, 0, ((G*J1)/L5), 0, 0, 0, 0, 0, 0, -(G*J1)/L5, 0, 0,
0, 0, -(6*E5*Iy1)/L5^2, 0, (4*E5*Iy1)/L5, 0, 0, 0, (6*E5*Iy1)/L5^2, 0,
(2*E5*Iy1)/L5, 0; 0, (6*E5*Iz1)/L5^2, 0, 0, 0, (4*E5*Iz1)/L5, 0, -(6*E5*Iz1)/L5^2,
0, 0, 0, (2*E5*Iz1)/L5; -(E5*A1)/L5, 0, 0, 0, 0, 0, (A1*E5)/L5, 0, 0, 0, 0, 0,
0, -(12*E5*Iz1)/L5^3, 0, 0, 0, -(6*E5*Iz1)/L5^2, 0, (12*E5*Iz1)/L5^3, 0, 0, 0,
-(6*E5*Iz1)/L5^2, 0, 0, -(12*E5*Iy1)/L5^3, 0, (6*E5*Iy1)/L5^2, 0, 0, 0,
(12*E5*Iy1)/L5^3, 0, 6*E5*Iy1)/L5^2, 0; 0, 0, 0, -(G*J1)/L5, 0, 0, 0, 0, 0, (G*J1)/L5,
0, 0; 0, 0, -(6*E5*Iy1)/L5^2, 0, (2*E5*Iy1)/L5, 0, 0, 0, (6*E5*Iy1)/L5^2, 0,
(4*E5*Iy1)/L5, 0; 0, (6*E5*Iz1)/L5^2, 0, 0, 0, (2*E5*Iz1)/L5, 0, -(6*E5*Iz1)/L5^2,
0, 0, 0, (4*E5*Iz1)/L5];

```

```

K_separado_5 =
(Matriz_geral_segmento5*(K_separado_5)*Matriz_geral_segmento5');

```

```

% MONTAGEM DA MATRIZ DE RIGIDEZ

```

```

% número total de graus de liberdade

```

```

nb_gdl = 36; % (6*6) -> numero de nós multiplicado pelo numero de gdl de
cada nó

```

```

% matriz de conectividade - graus de liberdade ordenados segundo:

```

```

% 1 nó 1, direção x          nó 1 corresponde ao ponto A1
% 2 nó 1, direção y
% 3 nó 1, direção z
% 4 nó 1, direção fi_x
% 5 nó 1, direção fi_y
% 6 nó 1, direção fi_z

```

```

% 7 nó 2, direção x          nó 2 corresponde ao ponto A2
% 8 nó 2, direção y
% 9 nó 2, direção z
% 10 nó 2, direção fi_x
% 11 nó 2, direção fi_y
% 12 nó 2, direção fi_z

```

```

% 13 nó 3, direção x          nó 3 corresponde ao ponto A3
% 14 nó 3, direção y
% 15 nó 3, direção z
% 16 nó 3, direção fi_x
% 17 nó 3, direção fi_y
% 18 nó 3, direção fi_z

```

```

%      19 nó 4, direção x                                nó 4 corresponde ao ponto A4
%      20 nó 4, direção y
%      21 nó 4, direção z
%      22 nó 4, direção fi_x
%      23 nó 4, direção fi_y
%      24 nó 4, direção fi_z

%      25 nó 5, direção x                                nó 5 corresponde ao ponto A5
%      26 nó 5, direção y
%      27 nó 5, direção z
%      28 nó 5, direção fi_x
%      29 nó 5, direção fi_y
%      30 nó 5, direção fi_z

%      31 nó 6, direção x                                nó 6 corresponde ao ponto A6
%      32 nó 6, direção y
%      33 nó 6, direção z
%      34 nó 6, direção fi_x
%      35 nó 6, direção fi_y
%      36 nó 6, direção fi_z

mat_conect = [ 1  2  3  4  5  6  7  8  9 10 11 12 % segmento A1 A2
               7  8  9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 % articulação A2 A3
               13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 % segmento A3 A4
               19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 % articulação A4 A5
               25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36]; % segmento A5 A6

% condições de contorno nos gdl impostos
cond_cont=[      1      0
                2      0
                3      0
                4      0
                5      0
                6      0];

% forças externas aplicadas nos gdl livres
forças_aplic= [31      1
               32      0
               33      0
               34      0
               35      0
               36      0]; % valores em Newtons

% MONTAGEM DA MATRIZ DE RIGIDEZ
nb_ele = 5;

% CONSTRUÇÃO DAS MATRIZES ELEMENTARES E MONTAGEM DA MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL

K_global=zeros(nb_gdl);

mat_ident=eye(nb_gdl);

mat_transf1=[mat_ident(mat_conect(1,1),:); mat_ident(mat_conect(1,2),:);
             mat_ident(mat_conect(1,3),:); mat_ident(mat_conect(1,4),:);
             mat_ident(mat_conect(1,5),:); mat_ident(mat_conect(1,6),:);
             mat_ident(mat_conect(1,7),:); mat_ident(mat_conect(1,8),:);
             mat_ident(mat_conect(1,9),:);mat_ident(mat_conect(1,10),:);
             mat_ident(mat_conect(1,11),:);mat_ident(mat_conect(1,12),:)];

```

```

K_global_1 = K_global + mat_transf1'*K_separado_1*mat_transf1;

mat_transf2=[mat_ident(mat_conect(2,1),:); mat_ident(mat_conect(2,2),:);
             mat_ident(mat_conect(2,3),:); mat_ident(mat_conect(2,4),:);
             mat_ident(mat_conect(2,5),:); mat_ident(mat_conect(2,6),:);
             mat_ident(mat_conect(2,7),:); mat_ident(mat_conect(2,8),:);
             mat_ident(mat_conect(2,9),:);mat_ident(mat_conect(2,10),:);
             mat_ident(mat_conect(2,11),:);mat_ident(mat_conect(2,12),:)]';

K_global_2 = K_global_1 + mat_transf2'*K_separado_2*mat_transf2;

mat_transf3=[mat_ident(mat_conect(3,1),:); mat_ident(mat_conect(3,2),:);
             mat_ident(mat_conect(3,3),:); mat_ident(mat_conect(3,4),:);
             mat_ident(mat_conect(3,5),:); mat_ident(mat_conect(3,6),:);
             mat_ident(mat_conect(3,7),:); mat_ident(mat_conect(3,8),:);
             mat_ident(mat_conect(3,9),:);mat_ident(mat_conect(3,10),:);
             mat_ident(mat_conect(3,11),:);mat_ident(mat_conect(3,12),:)]';

K_global_3 = K_global_2 + mat_transf3'*K_separado_3*mat_transf3;

mat_transf4=[mat_ident(mat_conect(4,1),:); mat_ident(mat_conect(4,2),:);
             mat_ident(mat_conect(4,3),:); mat_ident(mat_conect(4,4),:);
             mat_ident(mat_conect(4,5),:); mat_ident(mat_conect(4,6),:);
             mat_ident(mat_conect(4,7),:); mat_ident(mat_conect(4,8),:);
             mat_ident(mat_conect(4,9),:);mat_ident(mat_conect(4,10),:);
             mat_ident(mat_conect(4,11),:);mat_ident(mat_conect(4,12),:)]';

K_global_4 = K_global_3 + mat_transf4'*K_separado_4*mat_transf4;

mat_transf5=[mat_ident(mat_conect(5,1),:); mat_ident(mat_conect(5,2),:);
             mat_ident(mat_conect(5,3),:); mat_ident(mat_conect(5,4),:);
             mat_ident(mat_conect(5,5),:); mat_ident(mat_conect(5,6),:);
             mat_ident(mat_conect(5,7),:); mat_ident(mat_conect(5,8),:);
             mat_ident(mat_conect(5,9),:);mat_ident(mat_conect(5,10),:);
             mat_ident(mat_conect(5,11),:);mat_ident(mat_conect(5,12),:)]';

K_global_5 = K_global_4 + mat_transf5'*K_separado_5*mat_transf5;

matriz_total_restricao = K_global_5([7:36],[7:36]);

Fx2 = 0; Fy2 = 0; Fz2 = 0; Mx2 = 0; My2 = 0; Mz2 = 0;
Fx3 = 0; Fy3 = 0; Fz3 = 0; Mx3 = 0; My3 = 0; Mz3 = 0;
Fx4 = 0; Fy4 = 0; Fz4 = 0; Mx4 = 0; My4 = 0; Mz4 = 0;
Fx5 = 0; Fy5 = 0; Fz5 = 0; Mx5 = 0; My5 = 0; Mz5 = 0;
Fx6 = 1; Fy6 = 0; Fz6 = 0; Mx6 = 0; My6 = 0; Mz6 = 0;

W2 = [Fx2 Fy2 Fz2 Mx2 My2 Mz2]';
W3 = [Fx3 Fy3 Fz3 Mx3 My3 Mz3]';
W4 = [Fx4 Fy4 Fz4 Mx4 My4 Mz4]';
W5 = [Fx5 Fy5 Fz5 Mx5 My5 Mz5]';
W6 = [Fx6 Fy6 Fz6 Mx6 My6 Mz6]';

esforcos = [W2; W3; W4; W5; W6];
deslocamentos_estrutura_total= inv(matriz_total_restricao)*esforcos;

```

```

no_2 = deslocamentos_estrutura_total(1:6);
no_3 = deslocamentos_estrutura_total(7:12);
no_4 = deslocamentos_estrutura_total(13:18);
no_5 = deslocamentos_estrutura_total(19:24);
no_6 = deslocamentos_estrutura_total(25:30);

no_2_x(ii) = deslocamentos_estrutura_total(1);
no_2_y(ii) = deslocamentos_estrutura_total(2);
no_2_z(ii) = deslocamentos_estrutura_total(3);

no_3_x(ii) = deslocamentos_estrutura_total(7);
no_3_y(ii) = deslocamentos_estrutura_total(8);
no_3_z(ii) = deslocamentos_estrutura_total(9);

no_4_x(ii) = deslocamentos_estrutura_total(13);
no_4_y(ii) = deslocamentos_estrutura_total(14);
no_4_z(ii) = deslocamentos_estrutura_total(15);

no_5_x(ii) = deslocamentos_estrutura_total(19);
no_5_y(ii) = deslocamentos_estrutura_total(20);
no_5_z(ii) = deslocamentos_estrutura_total(21);

no_6_x(ii) = deslocamentos_estrutura_total(25);
no_6_y(ii) = deslocamentos_estrutura_total(26);
no_6_z(ii) = deslocamentos_estrutura_total(27);

```


ANEXO III – PLANEJAMENTO ESTATÍSTICO E RESULTADOS EXPERIMENTAIS

Para determinar os deslocamentos flexíveis de forma experimental é necessário o planejamento estatístico com o objetivo de definir a quantidade de medições necessárias para que o resultado seja significativo.

O planejamento estatístico é realizado em função do cálculo do erro estatístico. Para o planejamento estatístico foi utilizado o cálculo do número de medições (n_I) do deslocamento flexível em função do erro estatístico do Tipo I (Barros Neto et al., 2002).

Cálculo do número de medições necessárias – n_I

O número de medições necessárias dentro da amostra (neste caso a amostra é única, formada pelo experimento da Fig. 8.3) é realizado em função do erro estatístico do tipo I, Eq. (A3.1):

$$n_I = \left(\frac{t_{\alpha/2} \cdot s}{E_r} \right)^2 \quad (\text{A3.1})$$

onde α é o nível de significância do teste (normalmente 0,05), E_r é o erro experimental intrínseco (medição ou estimação da incerteza) e s é o desvio padrão da amostra estimado a partir de ensaios preliminares. Considera-se uma distribuição *t-student* $t_{\alpha/2}$ caso o número de medições seja $n_I < 30$ e para valores maiores ou iguais a 30 de n_I ($n_I \geq 30$), considera-se no lugar de $t_{\alpha/2}$ uma distribuição normal $Z_{\alpha/2}$ (Berthouex & Brown, 2002).

Para a determinação do número de medições foram realizados ensaios preliminares compostos por cinco medições do deslocamento flexível para cada posição ao longo do eixo x . Este procedimento foi repetido para as três cargas aplicadas de 0,750 kg; 1,002 kg e 1,250 kg.

Desta forma, como foram feitas cinco medições tem-se que $n_I < 30$ e deve-se utilizar a distribuição amostral *t-student*. Da tabela de *t-student* com $\alpha/2 = 0,025$ para quatro graus de liberdade (o número de graus de liberdade, ν , é calculado em função do número de experimentos menos 1 $\rightarrow \nu = n_I - 1$), encontra-se $t_{(0,025)} = 2,776$.

O desvio padrão amostral, que é uma medida da variabilidade, é calculado pela Eq. (A3.2):

$$s = \sqrt{\frac{1}{n_1 - 1} \sum_{i=1}^{n_1} \left(y_i - \bar{y} \right)^2} \quad (\text{A3.2})$$

onde y_i representa as medições dos deslocamentos flexíveis e $\bar{y}$ a média destes deslocamentos.

O erro experimental, E , necessário para o cálculo da Eq. (A3.1) é assumido como a medida da incerteza na ordem de $\pm 2,5\%$ da média $\bar{y}$.

Outro parâmetro estatístico utilizado nesta tese é o coeficiente de variação (CV), que é um número adimensional expresso em porcentagem. O coeficiente de variação é uma média relativa à dispersão útil para a comparação e observação em termos relativos do grau de concentração em torno da média, sendo calculada por:

$$CV = \frac{s}{\bar{y}} \cdot 100 \% \quad (\text{A3.3})$$

Um valor alto de CV corresponde uma dispersão alta em torno da média.

Os resultados experimentais e os cálculos estatísticos são apresentados nas Tabs. A3.1, A3.2 e A3.3. Desta forma, em poucos casos (apenas em quatro casos) seriam necessárias mais do que as cinco pré-medidas já realizadas. Estes casos ocorreram próximo do engaste onde os maiores erros experimentais estão concentrados. Estes casos estão representados nas Tabs. A3.1, A3.2 e A3.3 com as casas hachuradas.

Tabela A3.1. Dados experimentais e estatísticos do deslocamento flexível para Carga de 0,750 kg.

TESTE EXPERIMENTAL - CARGA 0,750 kg

	30 [mm]	45[mm]	60 [mm]	75 [mm]	90 [mm]	105 [mm]	120 [mm]
medida do modelo teórico (MSA)[mm]	-0.00353	-0.0105	-0.02168	-0.03660	-0.05426	-0.07310	-0.09130
medida do modelo teórico aproximada [mm]	-0.004	-0.011	-0.022	-0.037	-0.054	-0.073	-0.091
medida experimental 1 [mm]	-0.004	-0.010	-0.023	-0.036	-0.053	-0.073	-0.089
medida experimental 2 [mm]	-0.004	-0.010	-0.023	-0.037	-0.053	-0.071	-0.090
medida experimental 3 [mm]	-0.004	-0.010	-0.023	-0.037	-0.054	-0.073	-0.090
medida experimental 4 [mm]	-0.004	-0.011	-0.023	-0.036	-0.054	-0.073	-0.090
medida experimental 5 [mm]	-0.004	-0.010	-0.023	-0.036	-0.054	-0.072	-0.090
Media [mm]	-0.0040	-0.0102	-0.0230	-0.0364	-0.0536	-0.0724	-0.0898
desvio padrão [mm]	0.0000	0.0004	0.0000	0.0005	0.0005	0.0009	0.0004
coeficiente de variação [%]	0.000	-4.384	0.000	-1.505	-1.022	-1.235	-0.498
erro experimental [%]	0	7.27273	4.54545	1.62162	0.74074	0.821918	1.318681
Tamanho da Amostra para Erro Tipo I	0.000	23.702	0.000	2.792	1.288	1.882	0.306

	135 [mm]	150[mm]	165 [mm]	180 [mm]	195 [mm]	210 [mm]	225 [mm]	240 [mm]
medida do modelo teórico (MSA)[mm]	-0.10730	-0.11920	-0.12596	-0.12636	-0.12000	-0.10710	-0.08840	-0.06578
medida do modelo teórico aproximada [mm]	-0.107	-0.119	-0.126	-0.126	-0.120	-0.107	-0.088	-0.066
medida experimental 1 [mm]	-0.112	-0.115	-0.122	-0.120	-0.115	-0.105	-0.083	-0.063
medida experimental 2 [mm]	-0.111	-0.116	-0.123	-0.121	-0.114	-0.106	-0.083	-0.063
medida experimental 3 [mm]	-0.111	-0.116	-0.122	-0.120	-0.115	-0.105	-0.084	-0.065
medida experimental 4 [mm]	-0.111	-0.117	-0.122	-0.120	-0.115	-0.105	-0.084	-0.065
medida experimental 5 [mm]	-0.112	-0.119	-0.122	-0.121	-0.116	-0.105	-0.084	-0.064
Media [mm]	-0.1114	-0.1166	-0.1222	-0.1204	-0.1150	-0.1052	-0.0836	-0.0640
desvio padrão [mm]	0.0005	0.0015	0.0004	0.0005	0.0007	0.0004	0.0005	0.0010
coeficiente de variação (%)	-0.492	-1.301	-0.366	-0.455	-0.615	-0.425	-0.655	-1.563
erro experimental (%)	4.11215	2.01681	3.01587	4.44444	4.16667	1.682243	5	3.030303
Tamanho da Amostra para Erro Tipo I	0.298	2.086	0.165	0.255	0.466	0.223	0.529	3.010

Tabela A3.2. Dados experimentais e estatísticos do deslocamento flexível para Carga de 1,002 kg.

TESTE EXPERIMENTAL - CARGA 1,002 kg

	30[mm]	45 [mm]	60 [mm]	75[mm]	90 [mm]	105 [mm]	120 [mm]
medida do modelo teórico (MSA)[mm]	-0.0047	-0.01400	-0.02890	-0.0489	-0.07240	-0.09760	-0.12190
medida do modelo teórico aproximada [mm]	-0.005	-0.014	-0.029	-0.049	-0.072	-0.098	-0.122
medida experimental 1 [mm]	-0.006	-0.016	-0.030	-0.050	-0.071	-0.105	-0.124
medida experimental 2 [mm]	-0.006	-0.015	-0.030	-0.050	-0.071	-0.104	-0.124
medida experimental 3 [mm]	-0.006	-0.015	-0.030	-0.050	-0.071	-0.104	-0.124
medida experimental 4 [mm]	-0.006	-0.015	-0.030	-0.049	-0.071	-0.105	-0.125
medida experimental 5 [mm]	-0.006	-0.015	-0.030	-0.049	-0.071	-0.104	-0.123
Media [mm]	-0.0060	-0.0152	-0.0300	-0.0496	-0.0710	-0.1044	-0.1240
desvio padrão [mm]	0.0000	0.0004	0.0000	0.0005	0.0000	0.0005	0.0007
coeficiente de variação (%)	0.000	-2.942	0.000	-1.104	0.000	-0.525	-0.570
erro experimental (%)	20	8.57143	3.44828	1.22449	1.38889	6.530612	1.639344
Tamanho da Amosta para Erro Tipo I	0.000	10.673	0.000	1.504	0.000	0.339	0.401

	135[mm]	150 [mm]	165 [mm]	180[mm]	195 [mm]	210 [mm]	225 [mm]	240 [mm]
medida do modelo teórico (MSA)[mm]	-0.14330	-0.15930	-0.16820	-0.16880	-0.16030	-0.14300	-0.11810	-0.08780
medida do modelo teórico aproximada [mm]	-0.143	-0.159	-0.168	-0.169	-0.160	-0.143	-0.118	-0.088
medida experimental 1 [mm]	-0.141	-0.156	-0.162	-0.163	-0.159	-0.144	-0.119	-0.081
medida experimental 2 [mm]	-0.141	-0.157	-0.162	-0.163	-0.160	-0.142	-0.118	-0.081
medida experimental 3 [mm]	-0.141	-0.156	-0.163	-0.164	-0.159	-0.142	-0.116	-0.081
medida experimental 4 [mm]	-0.140	-0.157	-0.162	-0.164	-0.160	-0.141	-0.117	-0.081
medida experimental 5 [mm]	-0.140	-0.157	-0.163	-0.164	-0.160	-0.142	-0.118	-0.082
Media [mm]	-0.1406	-0.1566	-0.1624	-0.1636	-0.1596	-0.1422	-0.1176	-0.0812
desvio padrão [mm]	0.0005	0.0005	0.0005	0.0005	0.0005	0.0011	0.0011	0.0004
coeficiente de variação (%)	-0.390	-0.350	-0.337	-0.335	-0.343	-0.770	-0.970	-0.551
erro experimental (%)	1.67832	1.50943	3.33333	3.19527	0.25	0.559441	0.338983	7.727273
Tamanho da Amosta para Erro Tipo I	0.187	0.151	0.140	0.138	0.145	0.732	1.159	0.374

Tabela A3.3. Dados experimentais e estatísticos do deslocamento flexível para Carga de 1,250 kg.

TESTE EXPERIMENTAL - CARGA 1,250 kg

	30[mm]	45 [mm]	60 [mm]	75 [mm]	90[mm]	105 [mm]	120 [mm]
medida do modelo teórico (MSA)[mm]	-0.00589	-0.01747	-0.03610	-0.06100	-0.09040	-0.12170	-0.15218
medida do modelo teórico aproximada [mm]	-0.006	-0.017	-0.036	-0.061	-0.090	-0.121	-0.152
medida experimental 1 [mm]	-0.008	-0.017	-0.039	-0.062	-0.094	-0.119	-0.149
medida experimental 2 [mm]	-0.008	-0.019	-0.037	-0.062	-0.092	-0.119	-0.150
medida experimental 3 [mm]	-0.007	-0.018	-0.038	-0.061	-0.092	-0.118	-0.150
medida experimental 4 [mm]	-0.007	-0.019	-0.038	-0.062	-0.092	-0.118	-0.150
medida experimental 5 [mm]	-0.007	-0.018	-0.038	-0.062	-0.093	-0.119	-0.150
Media [mm]	-0.0074	-0.0182	-0.0380	-0.0618	-0.0926	-0.1186	-0.1498
desvio padrão [mm]	0.0005	0.0008	0.0007	0.0004	0.0009	0.0005	0.0004
coeficiente de variação (%)	-7.402	-4.597	-1.861	-0.724	-0.966	-0.462	-0.299
erro experimental (%)	23.3333	7.0588	5.5556	1.3115	2.8889	1.9835	1.4474
Tamanho da Amosta para Erro Tipo I	67.549	26.056	4.269	0.646	1.150	0.263	0.110

	135[mm]	150 [mm]	165 [mm]	180 [mm]	195[mm]	210 [mm]	225 [mm]	240[mm]
medida do modelo teórico (MSA)[mm]	-0.17870	-0.19880	-0.20990	-0.21060	-0.20000	-0.17840	-0.14730	-0.10960
medida do modelo teórico aproximada [mm]	-0.179	-0.199	-0.210	-0.211	-0.200	-0.178	-0.147	-0.110
medida experimental 1 [mm]	-0.177	-0.190	-0.205	-0.204	-0.199	-0.171	-0.142	-0.108
medida experimental 2 [mm]	-0.177	-0.190	-0.204	-0.204	-0.198	-0.170	-0.141	-0.107
medida experimental 3 [mm]	-0.176	-0.192	-0.205	-0.204	-0.196	-0.171	-0.143	-0.108
medida experimental 4 [mm]	-0.176	-0.194	-0.206	-0.204	-0.197	-0.171	-0.142	-0.108
medida experimental 5 [mm]	-0.176	-0.192	-0.206	-0.203	-0.197	-0.171	-0.142	-0.106
Media [mm]	-0.1764	-0.1916	-0.2052	-0.2038	-0.1974	-0.1708	-0.1420	-0.1074
desvio padrão [mm]	0.0005	0.0017	0.0008	0.0004	0.0011	0.0004	0.0007	0.0009
coeficiente de variação (%)	-0.311	-0.873	-0.408	-0.219	-0.578	-0.262	-0.498	-0.833
erro experimental (%)	1.4525	3.7186	2.2857	3.4123	1.3000	4.0449	3.4014	2.3636
Tamanho da Amosta para Erro Tipo I	0.119	0.940	0.205	0.059	0.411	0.085	0.306	0.855

ANEXO IV

MODELO NUMÉRICO DA ANÁLISE EXPERIMENTAL – FIGURA 8.5

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Universidade Federal de Uberlandia
% Faculdade de Engenharia Mecânica - FEMEC
% Laboratório de Automação e Robótica
% Autor: Rogério Sales Goncalves
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

clear all; close all; clc; format long

##### ENTRADA DOS DADOS #####

% propriedades físicas e geométricas das barras [A(m^2) E(N/m^2) L(m)
teta(grau)]

E = 2.17*10^11; R = (6.1/1000)/2; Ix = (pi*R^4)/4; Iy = Ix; Iz = Ix;
Ip = (pi*R^4)/2; G = 0.8*10^11; J = Ip; A = pi*R^2;

K_separado = zeros(12,12);

L1 = 148/1000; % Determinação do ponto de aplicação da Carga na direção x
L2 = (0.296-L1);
L3 = 0.3;

% ##### ENTRADA DAS COORDENADAS DAS EXTREMIDADES DO SEGMENTO #####

a1x = 0; a1y = 0; a1z = 0;
a2x = L1; a2y = 0; a2z = 0;
a3x = 0.296; a3y = 0; a3z = 0;
a4x = 0.296; a4y = 0; a4z = 0;
a5x = 0.296; a5y = 0.3; a5z = 0;

plot3(a1x, a1y, a1z, '+b');
hold on
plot3(a2x, a2y, a2z, 'ob');
plot3(a3x, a3y, a3z, 'ob');
plot3(a4x, a4y, a4z, 'ob');
plot3(a5x, a5y, a5z, '+b');
plot3([a1x a2x], [a1y a2y], [a1z a2z], 'b');
plot3([a2x a3x], [a2y a3y], [a2z a3z], 'b');
plot3([a3x a4x], [a3y a4y], [a3z a4z], 'b');
plot3([a4x a5x], [a4y a5y], [a4z a5z], 'b');
grid on
xlabel('eixo X');
ylabel('eixo Y');
zlabel('eixo Z');
title('Dispositivo Experimental');
axis equal
axis([-0.1 0.4 -0.1 0.4])
view(0,90)

```

```
##### SEGMENTO 1 - ELEMENTO 1 - A1A2 #####
```

```
E1 = 2.17*10^11; E2 = E1 R1 = (6.1/1000)/2; Ix1 = (pi*R1^4)/4; Iy1 = Ix1;
Iz1 = Ix1; Ip1 = (pi*R1^4)/2; G = 0.8*10^11; J1 = Ip1; A1 = pi*R1^2;
```

```
% Calculo do tamanho do segmento
```

```
l1 = sqrt((a2x - a1x)^2 + (a2y - a1y)^2 + (a2z - a1z)^2);
```

```
% Calculo dos cossenos diretores
```

```
cx = (a2x - a1x)/l1;
```

```
cy = (a2y - a1y)/l1;
```

```
cz = (a2z - a1z)/l1;
```

```
% MATRIZ DE ROTACAO EM FUNÇÃO DAS COORDENADAS ESPACIAIS DO SEGMENTO
```

```
Matriz_rotacao_segmento1 = [ cx(ii), (- cx(ii)*cy(ii))/(sqrt(cx(ii)^2 +
cz(ii)^2)), (- cz(ii))/(sqrt(cx(ii)^2 + cz(ii)^2)); cy(ii), (sqrt(cx(ii)^2 +
cz(ii)^2)), 0; cz(ii), (- cy(ii)*cz(ii))/(sqrt(cx(ii)^2 + cz(ii)^2)),
( cx(ii))/(sqrt(cx(ii)^2 + cz(ii)^2))];
```

```
% MONTAGEM DA MATRIZ
```

```
Matriz_geral_segmento1 = [Matriz_rotacao_segmento1, zeros(3),
zeros(3), zeros(3); zeros(3), Matriz_rotacao_segmento1, zeros(3),
zeros(3); zeros(3), zeros(3), Matriz_rotacao_segmento1, zeros(3);
zeros(3), zeros(3), zeros(3), Matriz_rotacao_segmento1];
```

```
K_separado_1 = [ (A1*E2)/L1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -(E2*A1)/L1, 0, 0, 0, 0, 0;
0, (12*E2*Iz1)/L1^3, 0, 0, 0, (6*E2*Iz1)/L1^2, 0,
-(12*E2*Iz1)/L1^3, 0, 0, 0, (6*E2*Iz1)/L1^2; 0, 0, (12*E2*Iy1)/L1^3, 0,
-(6*E2*Iy1)/L1^2, 0, 0, 0, -(12*E2*Iy1)/L1^3, 0, -(6*E2*Iy1)/L1^2, 0;
0, 0, 0, (G*J1)/L1, 0, 0, 0, 0, 0, -(G*J1)/L1, 0, 0;
0, 0, -(6*E2*Iy1)/L1^2, 0, (4*E2*Iy1)/L1, 0, 0, 0, (6*E2*Iy1)/L1^2, 0,
(2*E2*Iy1)/L1, 0; 0, (6*E2*Iz1)/L1^2, 0, 0, 0, (4*E2*Iz1)/L1, 0, -(6*E2*Iz1)/L1^2,
0, 0, 0, (2*E2*Iz1)/L1; -(E2*A1)/L1, 0, 0, 0, 0, 0, (A1*E2)/L1, 0, 0, 0, 0, 0;
0, -(12*E2*Iz1)/L1^3, 0, 0, 0, -(6*E2*Iz1)/L1^2, 0, (12*E2*Iz1)/L1^3, 0, 0, 0,
-(6*E2*Iz1)/L1^2; 0, 0, -(12*E2*Iy1)/L1^3, 0, (6*E2*Iy1)/L1^2, 0, 0, 0,
(12*E2*Iy1)/L1^3, 0, 6*E2*Iy1)/L1^2, 0; 0, 0, 0, -(G*J1)/L1, 0, 0, 0, (G*J1)/L1,
0, 0; 0, 0, -(6*E2*Iy1)/L1^2, 0, (2*E2*Iy1)/L1, 0, 0, 0, (6*E2*Iy1)/L1^2, 0,
(4*E2*Iy1)/L1, 0; 0, (6*E2*Iz1)/L1^2, 0, 0, 0, (2*E2*Iz1)/L1, 0, -(6*E2*Iz1)/L1^2,
0, 0, 0, (4*E2*Iz1)/L1];
```

```
K_separado_1 =
```

```
(Matriz_geral_segmento1*(K_separado_1)*Matriz_geral_segmento1');
```

```
#### SEGMENTO 2 - ELEMENTO 2 - A2A3 #####
```

```
% Calculo do tamanho do segmento
```

```
l2 = sqrt((a3x - a2x)^2 + (a3y - a2y)^2 + (a3z - a2z)^2);
```

```
% Calculo dos cossenos diretores
```

```
cx = (a3x - a2x)/l2;
```

```
cy = (a3y - a2y)/l2;
```

```
cz = (a3z - a2z)/l2;
```

```
% MATRIZ DE ROTACAO EM FUNÇÃO DAS COORDENADAS ESPACIAIS DO SEGMENTO
```

```
Matriz_rotacao_segmento2 = [ cx(ii), (- cx(ii)*cy(ii))/(sqrt(cx(ii)^2 +  
cz(ii)^2)), (- cz(ii))/(sqrt(cx(ii)^2 + cz(ii)^2)); cy(ii), (sqrt(cx(ii)^2 +  
cz(ii)^2)), 0; cz(ii), (- cy(ii)*cz(ii))/(sqrt(cx(ii)^2 + cz(ii)^2)),  
( cx(ii))/(sqrt(cx(ii)^2 + cz(ii)^2))];
```

```
% MONTAGEM DA MATRIZ
```

```
Matriz_geral_segmento2 = [Matriz_rotacao_segmento2, zeros(3),  
zeros(3), zeros(3); zeros(3), Matriz_rotacao_segmento2, zeros(3),  
zeros(3); zeros(3), zeros(3), Matriz_rotacao_segmento2, zeros(3);  
zeros(3), zeros(3), zeros(3), Matriz_rotacao_segmento2];
```

```
K_separado_2 = [ (A1*E2)/L2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, - (E2*A1)/L2, 0, 0, 0, 0, 0;  
0, (12*E2*Iz1)/L2^3, 0, 0, 0, (6*E2*Iz1)/L2^2, 0,  
- (12*E2*Iz1)/L2^3, 0, 0, 0, (6*E2*Iz1)/L2^2; 0, 0, (12*E2*Iy1)/L2^3, 0,  
- (6*E2*Iy1)/L2^2, 0, 0, 0, - (12*E2*Iy1)/L2^3, 0, - (6*E2*Iy1)/L2^2, 0;  
0, 0, 0, ((G*J1)/L2), 0, 0, 0, 0, 0, - ((G*J1)/L2), 0, 0;  
0, 0, - (6*E2*Iy1)/L2^2, 0, (4*E2*Iy1)/L2, 0, 0, 0, (6*E2*Iy1)/L2^2, 0,  
(2*E2*Iy1)/L2, 0; 0, (6*E2*Iz1)/L2^2, 0, 0, 0, (4*E2*Iz1)/L2, 0, - (6*E2*Iz1)/L2^2,  
0, 0, 0, (2*E2*Iz1)/L2; - (E2*A1)/L2, 0, 0, 0, 0, 0, (A1*E2)/L2, 0, 0, 0, 0, 0;  
0, - (12*E2*Iz1)/L2^3, 0, 0, 0, - (6*E2*Iz1)/L2^2, 0, (12*E2*Iz1)/L2^3, 0, 0, 0,  
- (6*E2*Iz1)/L2^2; 0, 0, - (12*E2*Iy1)/L2^3, 0, (6*E2*Iy1)/L2^2, 0, 0, 0,  
(12*E2*Iy1)/L2^3, 0, 6*E2*Iy1/L2^2, 0; 0, 0, 0, - ((G*J1)/L2), 0, 0, 0, 0, 0, (G*J1)/L2,  
0, 0; 0, 0, - (6*E2*Iy1)/L2^2, 0, (2*E2*Iy1)/L2, 0, 0, 0, (6*E2*Iy1)/L2^2, 0,  
(4*E2*Iy1)/L2, 0; 0, (6*E2*Iz1)/L2^2, 0, 0, 0, (2*E2*Iz1)/L2, 0, - (6*E2*Iz1)/L2^2,  
0, 0, 0, (4*E2*Iz1)/L2];
```

```
K_separado_2 =  
(Matriz_geral_segmento2*(K_separado_2)*Matriz_geral_segmento2');
```

```
##### SEGMENTO 3 - ARTICULAÇÃO ROTATIVA A3A4 #####
```

```
% Calculo do tamanho do segmento
```

```
l3 = sqrt((a5x - a4x)^2 + (a5y - a4y)^2 + (a5z - a4z)^2);
```

```
% Calculo dos cossenos diretores
```

```
cx = (a5x - a4x)/l3;
```

```
cy = (a5y - a4y)/l3;
```

```
cz = (a5z - a4z)/l3;
```

```
Matriz_rotacao_segmento3 = [ 0      -cy      0; ...  
      cy      0      0; ...  
      0      0      1];
```

```
% MONTAGEM DA MATRIZ
```

```
Matriz_geral_segmento3 = [Matriz_rotacao_segmento3, zeros(3),  
zeros(3), zeros(3); zeros(3), Matriz_rotacao_segmento3, zeros(3),  
zeros(3); zeros(3), zeros(3), Matriz_rotacao_segmento3, zeros(3);  
zeros(3), zeros(3), zeros(3), Matriz_rotacao_segmento3];
```

```

ka    = 2*10^11;          % RIGIDEZ LINEAR NA DIREÇÃO X
kr    = 2*10^11;          % RIGIDEZ LINEAR NA DIREÇÃO Y
kr1   = 2*10^11;          % RIGIDEZ LINEAR NA DIREÇÃO Z
kra   = 0*10^11;          % RIGIDEZ ANGULAR NA DIREÇÃO X
krr   = 0*10^11;          % RIGIDEZ ANGULAR NA DIREÇÃO Y
krr1  = 0*10^11;          % RIGIDEZ ANGULAR NA DIREÇÃO Z

matriz_rigidez_articulacao = diag([ka, kr, kr1, kra, krr, krr1]);

K_separado_3 = [matriz_rigidez_articulacao, -matriz_rigidez_articulacao;
                - matriz_rigidez_articulacao,  matriz_rigidez_articulacao];

K_separado_3 =
(Matriz_geral_segmento3*(K_separado_3)*Matriz_geral_segmento3');

#####SEGMENTO 4 - ELEMENTO 4 - A4A5 #####

% Calculo do tamanho do segmento
l4 = sqrt((a5x - a4x)^2 + (a5y - a4y)^2 + (a5z - a4z)^2);
% Calculo dos cosenos diretores
cx = (a5x - a4x)/l4;
cy = (a5y - a4y)/l4;
cz = (a5z - a4z)/l4;

% MATRIZ DE ROTACAO EM FUNÇÃO DAS COORDENADAS ESPACIAIS DO SEGMENTO
Matriz_rotacao_segmento4 = [ 0      -cy      0;...
                             cy      0      0;...
                             0      0      1];

% MONTAGEM DA MATRIZ

Matriz_geral_segmento4 = [Matriz_rotacao_segmento4, zeros(3),
zeros(3),zeros(3);zeros(3),Matriz_rotacao_segmento4, zeros(3),
zeros(3);zeros(3),zeros(3),Matriz_rotacao_segmento4, zeros(3);
zeros(3),zeros(3),zeros(3),Matriz_rotacao_segmento4];

K_separado_4 = [ (A1*E2)/L3,0,0,0,0,0,-(E2*A1)/L3,0,0,0,0,0;
                 0,(12*E2*Iz1)/L3^3,0,0,0,(6*E2*Iz1)/L3^2,0,
-(12*E2*Iz1)/L3^3,0,0,0,(6*E2*Iz1)/L3^2;0,0,(12*E2*Iy1)/L3^3,0,
-(6*E2*Iy1)/L3^2,0,0,0,-(12*E2*Iy1)/L3^3,0,-(6*E2*Iy1)/L3^2,0;
0,0,0,((G*J1)/L3),0,0,0,0,0,-((G*J1)/L3),0,0;
0,0,-(6*E2*Iy1)/L3^2,0,(4*E2*Iy1)/L3,0,0,0,(6*E2*Iy1)/L3^2,0,
(2*E2*Iy1)/L3,0;0,(6*E2*Iz1)/L3^2,0,0,0,(4*E2*Iz1)/L3,0,-(6*E2*Iz1)/L3^2,
0,0,0,(2*E2*Iz1)/L3,-(E2*A1)/L3,0,0,0,0,(A1*E2)/L3,0,0,0,0;
0,-(12*E2*Iz1)/L3^3,0,0,0,-(6*E2*Iz1)/L3^2,0,(12*E2*Iz1)/L3^3,0,0,0,
-(6*E2*Iz1)/L3^2;0,0,-(12*E2*Iy1)/L3^3,0,(6*E2*Iy1)/L3^2,0,0,0,
(12*E2*Iy1)/L3^3,0,6*E2*Iy1)/L3^2,0;0,0,0,-((G*J1)/L3),0,0,0,0,0,(G*J1)/L3,
0,0;0,0,-(6*E2*Iy1)/L3^2,0,(2*E2*Iy1)/L3,0,0,0,(6*E2*Iy1)/L3^2,0,
(4*E2*Iy1)/L3,0;0,(6*E2*Iz1)/L3^2,0,0,0,(2*E2*Iz1)/L3,0,-(6*E2*Iz1)/L3^2,
0,0,0,(4*E2*Iz1)/L3];

K_separado_4 =
(Matriz_geral_segmento4*(K_separado_4)*Matriz_geral_segmento4');

```

```

% número total de graus de liberdade
nb_gdl = 30; % (5*6) -> numero de nós multiplicado pelo numero de gdl
de cada nó

% matriz de conectividade - graus de liberdade ordenados segundo:
% 1 nó 1, direção x          nó 1 corresponde ao ponto A1
% 2 nó 1, direção y
% 3 nó 1, direção z
% 4 nó 1, direção fi_x
% 5 nó 1, direção fi_y
% 6 nó 1, direção fi_z

% 7 nó 2, direção x          nó 2 corresponde ao ponto A2
% 8 nó 2, direção y
% 9 nó 2, direção z
% 10 nó 2, direção fi_x
% 11 nó 2, direção fi_y
% 12 nó 2, direção fi_z

% 13 nó 3, direção x         nó 3 corresponde ao ponto A3
% 14 nó 3, direção y
% 15 nó 3, direção z
% 16 nó 3, direção fi_x
% 17 nó 3, direção fi_y
% 18 nó 3, direção fi_z

% 19 nó 4, direção x         nó 4 corresponde ao ponto A4
% 20 nó 4, direção y
% 21 nó 4, direção z
% 22 nó 4, direção fi_x
% 23 nó 4, direção fi_y
% 24 nó 4, direção fi_z

% 25 nó 5, direção x         nó 5 corresponde ao ponto A5
% 26 nó 5, direção y
% 27 nó 5, direção z
% 28 nó 5, direção fi_x
% 29 nó 5, direção fi_y
% 30 nó 5, direção fi_z

mat_conect=[ 1  2  3  4  5  6  7  8  9 10 11 12 % segmento A1 A2
             7  8  9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 % segmento A2 A3
            13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 % articulação A3 A4
            19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30]; % segmento A4 A5

% condições de contorno nos gdl impostos
cond_cont=[ 1 0
            2 0
            3 0
            4 0
            5 0
            6 0
           25 0
           26 0
           27 0
           28 0
           29 0
           30 0 ];

```

```

% MONTAGEM DA MATRIZ DE RIGIDEZ
nb_ele = 4;

% CONSTRUÇÃO DAS MATRIZES ELEMENTARES E MONTAGEM DA MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL
K_global=zeros(nb_gdl);

mat_ident=eye(nb_gdl);

mat_transf1=[mat_ident(mat_conect(1,1),:); mat_ident(mat_conect(1,2),:);
             mat_ident(mat_conect(1,3),:); mat_ident(mat_conect(1,4),:);
             mat_ident(mat_conect(1,5),:); mat_ident(mat_conect(1,6),:);
             mat_ident(mat_conect(1,7),:); mat_ident(mat_conect(1,8),:);
             mat_ident(mat_conect(1,9),:);mat_ident(mat_conect(1,10),:);
             mat_ident(mat_conect(1,11),:);mat_ident(mat_conect(1,12),:)]';

K_global_1 = K_global + mat_transf1'*K_separado_1*mat_transf1;

mat_transf2=[mat_ident(mat_conect(2,1),:); mat_ident(mat_conect(2,2),:);
             mat_ident(mat_conect(2,3),:); mat_ident(mat_conect(2,4),:);
             mat_ident(mat_conect(2,5),:); mat_ident(mat_conect(2,6),:);
             mat_ident(mat_conect(2,7),:); mat_ident(mat_conect(2,8),:);
             mat_ident(mat_conect(2,9),:);mat_ident(mat_conect(2,10),:);
             mat_ident(mat_conect(2,11),:);mat_ident(mat_conect(2,12),:)]';

K_global_2 = K_global_1 + mat_transf2'*K_separado_2*mat_transf2;

mat_transf3=[mat_ident(mat_conect(3,1),:); mat_ident(mat_conect(3,2),:);
             mat_ident(mat_conect(3,3),:); mat_ident(mat_conect(3,4),:);
             mat_ident(mat_conect(3,5),:); mat_ident(mat_conect(3,6),:);
             mat_ident(mat_conect(3,7),:); mat_ident(mat_conect(3,8),:);
             mat_ident(mat_conect(3,9),:);mat_ident(mat_conect(3,10),:);
             mat_ident(mat_conect(3,11),:); mat_ident(mat_conect(3,12),:)]';

K_global_3 = K_global_2 + mat_transf3'*K_separado_3*mat_transf3;

mat_transf4=[mat_ident(mat_conect(4,1),:); mat_ident(mat_conect(4,2),:);
             mat_ident(mat_conect(4,3),:); mat_ident(mat_conect(4,4),:);
             mat_ident(mat_conect(4,5),:); mat_ident(mat_conect(4,6),:);
             mat_ident(mat_conect(4,7),:); mat_ident(mat_conect(4,8),:);
             mat_ident(mat_conect(4,9),:);mat_ident(mat_conect(4,10),:);
             mat_ident(mat_conect(4,11),:);mat_ident(mat_conect(4,12),:)]';

K_global_4 = K_global_3 + mat_transf4'*K_separado_4*mat_transf4;

matriz_total_restricao = K_global_4([7:24],[7:24]);

Fx2 = 0;
Fy2 = -(0.750*9.81); % força correspondente a massa aplicada
Fz2 = 0;
Mx2 = 0;
My2 = 0;
Mz2 = 0;
Fx3 = 0; Fy3 = 0; Fz3 = 0; Mx3 = 0; My3 = 0; Mz3 = 0;
Fx4 = 0; Fy4 = 0; Fz4 = 0; Mx4 = 0; My4 = 0; Mz4 = 0;

```

```

W2 = [Fx2 Fy2 Fz2 Mx2 My2 Mz2]';
W3 = [Fx3 Fy3 Fz3 Mx3 My3 Mz3]';
W4 = [Fx4 Fy4 Fz4 Mx4 My4 Mz4]';

esforços = [W2; W3; W4];
deslocamentos_estrutura_total= inv(matriz_total_restricao)*esforços;

no_2 = deslocamentos_estrutura_total(1:6)
no_3 = deslocamentos_estrutura_total(7:12)
no_4 = deslocamentos_estrutura_total(13:18)

no_2_mm = deslocamentos_estrutura_total(1:3)*1000
no_3_mm = deslocamentos_estrutura_total(7:9)*1000
no_4_mm = deslocamentos_estrutura_total(13:15)*1000

#####

% PLOTANDO A POSIÇÃO DEFORMADA

a1x = 0; a1y = 0; a1z = 0;

a2x_def = L1 + no_2(1);
a2y_def = 0 + no_2(2);
a2z_def = 0 + no_2(3);

a3x_def = 0.296 + no_3(1);
a3y_def = 0 + no_3(2);
a3z_def = 0 + no_3(3);

a4x_def = 0.296 + no_4(1);
a4y_def = 0 + no_4(2);
a4z_def = 0 + no_4(3);

a5x = 0.296;
a5y = 0.3;
a5z = 0;

plot3(a1x, a1y, a1z, '+r');
hold on
plot3(a2x_def, a2y_def, a2z_def, 'or');
plot3(a3x_def, a3y_def, a3z_def, 'or');
plot3(a4x_def, a4y_def, a4z_def, 'or');
plot3(a5x, a5y, a5z, '+r');

plot3([a1x a2x_def], [a1y a2y_def], [a1z a2z_def], 'r');
plot3([a2x_def a3x_def], [a2y_def a3y_def], [a2z_def a3z_def], 'r');
plot3([a3x_def a4x_def], [a3y_def a4y_def], [a3z_def a4z_def], 'r');
plot3([a4x_def a5x], [a4y_def a5y], [a4z_def a5z], 'r');
grid on
axis equal
axis([-0.1 0.4 -0.1 0.4])
view(0,90)

```