

GIOVANA TRINDADE DA SILVA OLIVEIRA

**PROJETO ÓTIMO DE ROBÔS
MANIPULADORES 3R CONSIDERANDO A
TOPOLOGIA DO ESPAÇO DE TRABALHO**



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA**

2012

GIOVANA TRINDADE DA SILVA OLIVEIRA

**PROJETO ÓTIMO DE ROBÔS
MANIPULADORES 3R CONSIDERANDO A
TOPOLOGIA DO ESPAÇO DE TRABALHO**

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para a obtenção do título de **DOUTORA EM ENGENHARIA MECÂNICA**.

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Vibrações.

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Sezimária F. Pereira Saramago.

Co-Orientador: Antônio Carlos Nogueira

UBERLÂNDIA – MG

2012

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFU , MG, Brasil

- O48p
2012 Oliveira, Giovana Trindade da Silva, 1976-
Projeto ótimo de robôs manipuladores 3r considerando a topologia do espaço de trabalho / Giovana Trindade da Silva Oliveira. - 2011.
214 f. : il.
Orientadora: Sezimária F. Pereira Saramago.
Co-orientador: Antônio Carlos Nogueira
- Tese (doutorado) – Universidade Federal de Uberlândia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.
Inclui bibliografia.
1. Engenharia mecânica - Teses. 2. Robótica - Teses. 3. Manipuladores (Mecanismo) - Teses. 4. Singularidades (Matemática) - Teses. 5. Otimização matemática - Teses. I. Saramago, Sezimária de Fátima Pereira. II. Nogueira, Antônio Carlos, 1951- III. Universidade Federal de Uberlândia. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. IV. Título.

CDU: 621

AGRADECIMENTOS

A Deus por estar presente em todos os momentos da minha vida.

Agradeço à Profª Drª. Sezimária F. Pereira Saramago pelo incentivo e orientação que, com muito profissionalismo e paciência, sempre indicou a melhor forma de conduzir o trabalho, ao longo destes anos.

Agradeço ao Prof. Dr. Antônio Carlos Nogueira pela co-orientação e importantes observações.

À minha família pelo apoio e incentivo na busca desta realização. Ao meu marido Marco Aurélio pela paciência e principalmente ao meu filho Arthur, por suportar minha ausência e ser a inspiração para o êxito, juntamente com o futuro bebê.

À FAPEMIG – Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais, pelo suporte financeiro.

Aos membros da banca examinadora por aceitarem o convite e pelas contribuições .

À Universidade Federal de Uberlândia e ao programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica pela oportunidade de realizar este trabalho.

Finalmente, agradeço a todos que de alguma forma contribuíram para a realização desta tese.

OLIVEIRA, G. T. S. **Projeto Ótimo de Robôs Manipuladores 3R considerando a Topologia do Espaço de Trabalho**. 2012. 214f. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia.

RESUMO

Diversos estudos têm investigado as propriedades do espaço de trabalho de cadeias robóticas abertas com o objetivo de enfatizar suas características geométricas e cinemáticas, criar algoritmos analíticos e procedimentos para o seu projeto. O espaço de trabalho de um robô manipulador é considerado de grande interesse do ponto de vista teórico e prático. Em aplicações clássicas na indústria, manipuladores precisam passar por singularidades no espaço das juntas para mudar sua postura. Um manipulador com três graus de liberdade pode executar uma mudança de postura não singular se, e somente se, existe pelo menos um ponto em seu espaço de trabalho que tem exatamente três soluções coincidentes do Modelo Geométrico Inverso (MGI). É muito difícil expressar esta condição a partir do modelo cinemático. Assim, neste trabalho, a ferramenta algébrica base de Groebner é utilizada para obter uma das equações que separam as regiões que possuem diferentes tipos de manipuladores 3R ortogonais. O determinante da matriz Jacobiana do Modelo Geométrico Direto é considerado nulo para obter as demais superfícies de separação. Além disso, apresenta-se uma classificação dos manipuladores 3R ortogonais em relação ao número de soluções no MGI, o número de pontos de cúspides e o número de nós. Alguns problemas de otimização multi-objetivo são propostos visando obter o projeto ótimo de robôs. Primeiramente, considera-se o caso geral, cujo objetivo é maximizar o volume do espaço de trabalho, maximizar a rigidez do sistema de juntas e otimizar a destreza do manipulador sem a imposição de restrições. Em seguida, o problema de otimização é sujeito a penalidades que controlam a topologia, tornando possível a obtenção de soluções que obedeçam as topologias pré-estabelecidas. São apresentadas as soluções para o caso r_3 nulo e para r_3 não nulo. O problema de otimização é investigado aplicando uma técnica determinística e dois algoritmos evolutivos. Algumas aplicações numéricas são apresentadas para mostrar a eficiência da metodologia proposta.

Palavras Chave: Robótica, Topologia de Manipuladores, Singularidades, Otimização multi-objetivo.

OLIVEIRA, G. T. S. **Optimum Design of 3R Robots Manipulators considering its Topology of the Workspace**, 2012. 214f. Ph.D. Thesis, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia.

ABSTRACT

Several studies have investigated the properties of the workspace of opened robotic chains (or serial) with the purpose of emphasizing its geometric and kinematic characteristics, to devise analytical algorithms and procedures for its design. The workspace of a robot manipulator is considered of great interest from theoretical and practical viewpoint. In classical applications in industry, manipulators need to pass through singularities in the joint space to change their posture. A 3-DOF manipulator can execute a non-singular change of posture if and only if there is at least one point in its workspace which has exactly three coincident solutions of the Inverse Kinematic Model (IKM). It is very difficult to express this condition directly from the kinematic model. Thus, in this work, the algebraic tool Gröbner basis is used to obtain an equation for splitting the regions with different types of 3R orthogonal manipulators. The determinant of Jacobian matrix of the direct kinematic model is considered equal to zero to obtain the other surfaces of separation. In addition, is presented a classification of 3R orthogonal manipulators related to the number of solutions in IKM, the number of cusp points and nodes. Some problems of multi-objective optimization are proposed to obtain the optimal design of robots. First considering a general case where the aim is to maximize the volume of the workspace, maximize the stiffness of the joint system and optimize the dexterity of the manipulator without the imposition of restrictions. Next, the optimization problem is subject to penalties that control the topology, making it possible to obtain solutions which satisfy the predetermined topologies. Solutions are presented for the case r_3 null and r_3 not null. The optimization problem is investigated by using a deterministic technique and two evolutionary algorithms. Some numerical applications are presented to show the efficiency of the proposed methodology.

Keywords: Robotics, Manipulators Topology, Singularities, Multi-objective Optimization.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1.	Representação de juntas deslizantes ou prismáticas.	3
Figura 1.2.	Representação de juntas de revolução ou rotacionais.	3
Figura 1.3.	Representação de juntas cilíndricas.	3
Figura 1.4.	Representação da geometria de alguns robôs: (a) Cartesiano; (b) Cilíndrico; (c) Esférico; (d) Revolução.	4
Figura 2.1.	Parâmetros de Denavit-Hartenberg-DH (KHALIL e DOMBRE, 1999).	12
Figura 2.2.	Arquitetura cinemática de um Manipulador 3R.	14
Figura 2.3.	(a) Espaço de trabalho de um robô 3R; (b) seção radial plana.	20
Figura 2.4.	Família de curvas que descrevem a seção radial do espaço de trabalho, para dois tipos diferentes de manipuladores 3R ortogonais.	20
Figura 2.5.	Mudança de Postura de um Manipulador Planar 2R.	21
Figura 2.6.	Singularidades de posição para alguns exemplos de manipuladores 3R (EL OMRI, 1996; BAILI, 2004).	23
Figura 2.7.	Seção radial do espaço de trabalho de um manipulador 3R ortogonal apresentando 3 regiões denominadas aspectos.	25
Figura 2.8.	Envoltórias com quatro ramos.	26
Figura 2.9.	Pontos de cúspides na seção do espaço de trabalho de um manipulador.	29
Figura 2.10.	Seção radial do espaço de trabalho de um manipulador quadrático.	30
Figura 2.11.	Seção do espaço de trabalho de um manipulador ortogonal quártico.	30

Figura 2.12.	Seção do espaço de trabalho de um manipulador ortogonal não genérico.	32
Figura 2.13.	Instabilidade de um manipulador ortogonal não genérico.	33
Figura 3.1.	Esquema do Manipulador Ortogonal Estudado (BAILI, 2004).	36
Figura 3.2.	Modelo esquematizado de um Manipulador Planar 3R.	38
Figura 3.3.	Gráfico de C_{1a} e C_{1b} em duas seções do espaço dos parâmetros de DH.	47
Figura 3.4.	Três manipuladores testes e suas seções do espaço de trabalho.	48
Figura 4.1.	Seção do espaço de trabalho de um manipulador binário genérico do tipo 1.	52
Figura 4.2.	Seção do espaço de trabalho de um manipulador com 4 pontos de cúspides e 0 nós.	53
Figura 4.3.	Seção do espaço de trabalho de um manipulador quaternário e não genérico, com 4 pontos de cúspides e 4 nós.	53
Figura 4.4.	Representação das quatro superfícies de separação e dos cinco domínios, em uma seção (d_3, d_4) considerando $r_2 = 1,0$.	55
Figura 4.5.	Seção do espaço de trabalho de um manipulador do tipo 1.	55
Figura 4.6.	Seção do espaço de trabalho de um manipulador do tipo 2.	56
Figura 4.7.	Seção plana da superfície C_1 .	56
Figura 4.8.	Deformação contínua do ramo da singularidade interna quando d_4 diminui, considerando $d_3 = 1,5$ e $r_2 = 0,5$.	57
Figura 4.9.	Seção do espaço de trabalho de um manipulador do tipo 3.	59
Figura 4.10.	Seção plana da superfície C_2 .	61
Figura 4.11.	Seção do espaço de trabalho de um manipulador pertencente à superfície C_2 .	61

Figura 4.12. Seção do espaço de trabalho de um manipulador do tipo 4.	62
Figura 4.13. Seção plana da superfície C_3 .	63
Figura 4.14. Seção do espaço de trabalho de um manipulador pertencente à superfície C_3 .	63
Figura 4.15. Seção do espaço de trabalho de um manipulador do tipo 5.	64
Figura 4.16. Seção plana da superfície C_4 .	65
Figura 4.17. Seção do espaço de trabalho de um manipulador pertencente à superfície C_4 .	65
Figura 4.18. Seção do espaço de trabalho de um manipulador na transição entre WT_2 e WT_3 .	68
Figura 4.19. Correspondência entre (a) espaço de trabalho de um manipulador e (b) croqui de duas configurações com $d_4 < d_3$, $\theta_1 = 0^\circ$, $\theta_2 = 0^\circ$ (à direita) ou $\theta_2 = 180^\circ$ (à esquerda).	69
Figura 4.20. (a) Seção plana da superfície E_1 e (b) Croqui de duas configurações com $d_4 < d_3$, para o manipulador da Fig. 4.19.	70
Figura 4.21. Seção do espaço de trabalho de um manipulador na topologia WT_4 .	71
Figura 4.22. Transição entre WT_3 e WT_4 .	71
Figura 4.23. Equação E_2 que separa as transições WT_3 e WT_4 .	72
Figura 4.24. Seção do espaço de trabalho de um manipulador na topologia WT_6 .	73
Figura 4.25. Seção do espaço de trabalho de um manipulador na topologia WT_9 .	73
Figura 4.26. Transição entre WT_5 e WT_6 .	74
Figura 4.27. Transição entre WT_8 e WT_9 .	74
Figura 4.28. Correspondência entre (a) espaço de trabalho de um manipulador e (b) croqui de duas configurações com $d_4 > d_3$, $\theta_1 = 0^\circ$, $\theta_2 = 0^\circ$ (à direita) ou $\theta_2 = 180^\circ$ (à esquerda).	75

Figura 4.29.	Seção plana da superfície E_3 .	76
Figura 4.30.	Divisão do espaço dos parâmetros segundo o número de pontos de cúspides e de nós em uma seção $r_2 = 1,0$.	77
Figura 4.31.	As superfícies de separação para quatro valores de r_2 .	77
Figura 5.1.	Seção do espaço de trabalho de um manipulador não cuspidal, quaternário e genérico sem nós.	81
Figura 5.2.	Seção do espaço de trabalho de um manipulador quaternário, genérico com 2 pontos de cúspides e sem nós.	81
Figura 5.3.	Seção do espaço de trabalho de um manipulador quaternário, genérico com 4 pontos de cúspides e 2 nós.	81
Figura 5.4.	Seção do espaço de trabalho de um manipulador quaternário, genérico com 6 pontos de cúspides e 4 nós.	82
Figura 5.5.	Seção do espaço de trabalho de um manipulador quaternário genérico, com 8 pontos de cúspides e 4 nós.	82
Figura 5.6.	Diferentes seções em (d_3, d_4) para r_2 e r_3 dados.	84
Figura 5.7.	Diferentes superfícies de separação para um manipulador ortogonal, com $r_3 \neq 0$.	85
Figura 5.8.	Limites das partes C_6' , C_6'' e C_6''' em uma seção (d_3, d_4) com $r_2 = 0,2$ e $r_3 = 0,9$.	86
Figura 5.9.	As quatro superfícies de separação e os nove domínios para um manipulador ortogonal, considerando $r_3 \neq 0$.	86
Figura 5.10.	Seção do espaço de trabalho de um manipulador do tipo 1.	87
Figura 5.11.	Seção do espaço de trabalho de um manipulador do tipo 2.	87
Figura 5.12.	Seção do espaço de trabalho de um manipulador tipo 2, com 4 pontos de cúspides e sem nós.	88
Figura 5.13.	Seção do espaço de trabalho de um manipulador do tipo 3.	89
Figura 5.14.	Seção do espaço de trabalho de um manipulador do tipo 4.	90

Figura 5.15. Transição entre os domínios 1 e 4.	90
Figura 5.16. Seção do espaço de trabalho de um manipulador do tipo 5.	92
Figura 5.17. Seção do espaço de trabalho de um manipulador do tipo 6.	92
Figura 5.18. Transição entre os domínios 5 e 6.	93
Figura 5.19. Seção do espaço de trabalho de um manipulador do tipo 7.	94
Figura 5.20. Seção do espaço de trabalho de um manipulador do tipo 8.	95
Figura 5.21. Seção do espaço de trabalho de um manipulador do tipo 9.	96
Figura 5.22. Os dois casos possíveis para E_{1g} e E_{3g} .	98
Figura 5.23. As seis superfícies de separação e os dezoito tipos de topologia em uma seção (d_3, d_4) para um manipulador ortogonal, para $r_2 < r_3$.	99
Figura 5.24. Seção do espaço de trabalho de um manipulador na topologia WT_3 .	100
Figura 5.25. Seção do espaço de trabalho de um manipulador na topologia WT_6 .	101
Figura 5.26. Seção do espaço de trabalho de um manipulador na topologia WT_8 .	101
Figura 5.27. Seção do espaço de trabalho de um manipulador na topologia WT_9 .	102
Figura 5.28. Seção do espaço de trabalho de um manipulador na topologia WT_{11} .	103
Figura 5.29. Seção do espaço de trabalho de um manipulador na topologia WT_{13} .	104
Figura 5.30. Seção do espaço de trabalho de um manipulador na topologia WT_{15} .	105
Figura 5.31. Seção do espaço de trabalho de um manipulador na topologia WT_{16} .	106

Figura 5.32.	Seção do espaço de trabalho de um manipulador na topologia WT_{17} .	106
Figura 5.33.	Seção do espaço de trabalho de um manipulador na topologia WT_{18} .	107
Figura 5.34.	As seis superfícies de separação e os vinte e dois tipos de topologia em uma seção (d_3, d_4) para um manipulador ortogonal, para $r_2 > r_3$.	108
Figura 5.35.	Seção do espaço de trabalho de um manipulador na topologia WT_{19} .	109
Figura 5.36.	Seção do espaço de trabalho de um manipulador na topologia WT_{20} .	109
Figura 5.37.	Seção do espaço de trabalho de um manipulador na topologia WT_{21} .	110
Figura 6.1.	Discretização da seção radial usando malha retangular (OLIVEIRA <i>et al.</i> , 2006).	119
Figura 7.1.	Representação do operador cruzamento simples entre dois indivíduos.	128
Figura 7.2.	Representação do operador cruzamento uniforme com parâmetros contínuos.	128
Figura 7.3.	Representação do operador mutação.	129
Figura 7.4.	Fluxograma básico de um algoritmo genético binário.	130
Figura 7.5.	Processo para gerar o vetor doador $V^{(q+1)}$ de uma função bidimensional.	133
Figura 7.6.	Ilustração do processo de cruzamento binomial para $\alpha = 2$, $\beta = 4$ e $\gamma = Np$.	134
Figura 7.7.	Ilustração do processo de cruzamento exponencial para $\alpha = 2$, $\beta = 4$ e $\gamma = Np$.	135
Figura 8.1.	(a) Tela com o menu de entrada de dados; (b) Tela de saída dos resultados ótimos.	150
Figura 8.2.	Projeto dimensional de um manipulador 3R que pertence à topologia $WT_1(0, 0)$.	151
Figura 8.3.	Projeto ótimo do manipulador 3R obtido utilizando ED, considerando a métrica L_{2R} e a topologia WT_1 .	155

Figura 8.4.	Projeto dimensional de um manipulador 3R que pertence à topologia $WT_3(4, 0)$.	156
Figura 8.5.	Projeto ótimo do manipulador 3R obtido utilizando ED, considerando a métrica L_{2R} e a topologia WT_3 .	158
Figura 8.6.	Projeto dimensional de um manipulador 3R que pertence à topologia $WT_5(2, 1)$.	159
Figura 8.7.	Projeto ótimo do manipulador 3R obtido utilizando ED, considerando a métrica L_{2R} e a topologia WT_5 .	161
Figura 8.8.	Projeto dimensional de um manipulador 3R que pertence à topologia $WT_6(2, 3)$.	162
Figura 8.9.	Projeto ótimo do manipulador 3R obtido utilizando ED, considerando a métrica L_{2R} e a topologia WT_6 .	164
Figura 8.10.	Gráfico das envoltórias no plano rz , comparando as seções radiais do espaço de trabalho.	165
Figura 8.11.	Projeto dimensional de um manipulador 3R que pertence à topologia $WT_9(0, 2)$.	165
Figura 8.12.	Projeto ótimo do manipulador 3R obtido utilizando ED, considerando a métrica L_{2R} e a topologia WT_9 .	168
Figura 8.13.	Gráfico das envoltórias no plano rz , comparando as seções radiais do espaço de trabalho.	168
Figura 8.14.	Projeto dimensional de um manipulador 3R que pertence à topologia $WT_3(4, 0)$.	169
Figura 8.15.	Projeto ótimo do manipulador 3R obtido utilizando ED, considerando a métrica L_{2R} e a topologia $WT_3(4, 0)$.	172
Figura 8.16.	Gráfico das envoltórias no plano rz comparando as seções radiais do espaço de trabalho.	173
Figura 8.17.	Projeto dimensional de um manipulador 3R que pertence à topologia $WT_2(4, 2)$.	173
Figura 8.18.	Projeto ótimo do manipulador 3R obtido utilizando ED, considerando a métrica L_{2R} e a topologia $WT_2(4, 2)$.	176
Figura 8.19.	Gráfico das envoltórias no plano rz , comparando as seções radiais do espaço de trabalho.	178

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1.	Parâmetros de DH para um manipulador 3R.	14
Tabela 2.2.	Resumo das classes dos manipuladores com 3gdl (EL OMRI, 1996).	34
Tabela 8.1.	Resultados ótimos para o Volume, a Destreza e a Rigidez, para manipuladores 3R, aplicando o Método dos Objetivos Ponderados (MOP).	142
Tabela 8.2.	Valores ótimos para o Volume, a Destreza e a Rigidez, para manipuladores 3R, aplicando o Método do Critério Global (MCG).	145
Tabela 8.3.	Valores ótimos para o Volume, a Rigidez e a Destreza, para manipuladores 3R ortogonais, aplicando o MOP e considerando $d_2 = 1,0$.	147
Tabela 8.4.	Valores ótimos para o Volume, a Rigidez e a Destreza, manipuladores 3R ortogonais, aplicando o MCG e considerando $d_2 = 1,0$.	148
Tabela 8.5.	Valores ótimos para o Volume, a Rigidez e a Destreza, manipuladores 3R ortogonais restritos, aplicando o MOP, considerando $r_3 = 0$ e a topologia WT_1 .	153
Tabela 8.6.	Valores ótimos para o Volume, a Rigidez e a Destreza, manipuladores 3R ortogonais restritos, aplicando o MCG, considerando $r_3 = 0$ e a topologia WT_1 .	154
Tabela 8.7.	Valores ótimos para o Volume, a Rigidez e a Destreza, manipuladores 3R ortogonais restritos, aplicando o MOP, considerando $r_3 = 0$ e a topologia WT_3 .	157
Tabela 8.8.	Valores ótimos para o Volume, a Rigidez e a Destreza, manipuladores 3R ortogonais restritos, aplicando o MCG, considerando $r_3 = 0$ e a topologia WT_3 .	158
Tabela 8.9.	Valores ótimos para o Volume, a Rigidez e a Destreza, manipuladores 3R ortogonais restritos, aplicando o MOP, considerando $r_3 = 0$ e a topologia WT_5 .	160
Tabela 8.10.	Valores ótimos para o Volume, a Rigidez e a Destreza, manipuladores 3R ortogonais restritos, aplicando o MCG, considerando $r_3 = 0$ e a topologia WT_5 .	161
Tabela 8.11.	Valores ótimos para o Volume, a Rigidez e a Destreza, manipuladores 3R ortogonais restritos, aplicando o MOP, considerando $r_3 = 0$ e a topologia WT_6 .	164
Tabela 8.12.	Valores ótimos para o Volume, a Rigidez e a Destreza, manipuladores 3R ortogonais restritos, aplicando o MCG, considerando $r_3 = 0$ e a topologia WT_6 .	164
Tabela 8.13.	Valores ótimos para o Volume, a Rigidez e a Destreza, manipuladores 3R ortogonais restritos, aplicando o MOP, considerando $r_3 = 0$ e a topologia WT_9 .	166

Tabela 8.14.	Valores ótimos para o Volume, a Rigidez e a Destreza, manipuladores 3R ortogonais restritos, aplicando o MCG, considerando $r_3 = 0$ e a topologia WT_9 .	167
Tabela 8.15.	Valores ótimos para o Volume, a Rigidez e a Destreza, manipuladores 3R ortogonais restritos, aplicando o MOP, considerando $r_3 \neq 0$ e a topologia WT_3 .	171
Tabela 8.16.	Valores ótimos para o Volume, a Rigidez e a Destreza, manipuladores 3R ortogonais restritos, aplicando o MCG, considerando $r_3 \neq 0$ e a topologia WT_3 .	172
Tabela 8.17.	Valores ótimos para o Volume, a Rigidez e a Destreza, manipuladores 3R ortogonais restritos, aplicando o MOP, considerando $r_3 \neq 0$ e a topologia WT_2 .	175
Tabela 8.18.	Valores ótimos para o Volume, a Rigidez e a Destreza, manipuladores 3R ortogonais restritos, aplicando o MCG, considerando $r_3 \neq 0$ e a topologia WT_2 .	176

Lista de Símbolos

Letras latinas

A	Área da seção radial plana
C_i, E_i	Curvas de separação no espaço dos parâmetros
$C\alpha_j, S\alpha_j$	Co-seno e seno do ângulo α_j , respectivamente
$C\theta_i, S\theta_i$	Co-seno e seno do ângulo θ_i , respectivamente
d_i, r_i	Parâmetros de Denavit-Hartenberg (translações)
$f(X)$	Função objetivo
$f_k(X)$	Vetor cujas componentes são k funções objetivo
f_k^0	Solução ideal
F_p	Fator de perturbação dos indivíduos da população
$g_j(X)$	Função de restrição de desigualdade ($j = 1, \dots, J$)
H	Ponto situado na extremidade do robô, com coordenadas em $X_3Y_3Z_3$
$h_l(X)$	Função de restrição de igualdade ($l = 1, \dots, L$)
J	Matriz Jacobiana da estrutura serial
K_j	Matriz diagonal $n \times n$
$k(J)$	Índice de isotropia da matriz Jacobiana serial
k_p	Fator de penalidade na função pseudo objetivo
$L_p(f)$	Métricas- L_p para o Método do Critério Global
N_f	Número de avaliações da função objetivo.
N_{ger}	Número máximo de gerações
N_p	Número de indivíduos da população
n_r e n_z	Subintervalos para a discretização dos ângulos da juntas
$O_{jxjYjZj}$	Sistemas cartesianos
P	Representação da junta prismática
$P(X)$	Função de penalidade na função pseudo objetivo
Pa_d	Probabilidade acumulativa de cada cromossomo d
p_c	Posição de cruzamento na cadeia de bits de cada cromossomo
P_c	Probabilidade de cruzamento
p_d	Probabilidade ou aptidão do indivíduo d da população de cromossomos
P_d	Probabilidade de seleção dos cromossomos

p_i	Indica as posições dos bits numa cadeia binária
P_m	Probabilidade de mutação
q	q -ésima geração (iteração) no processo iterativo
R	Representação da junta rotacional
r, z	Coordenadas de um ponto da seção radial
$rand$	Número aleatório gerado no intervalo de 0 a 1
r_g	Baricentro da seção radial
r_p	Fator de penalidade
$r_{\min}, r_{\max}, z_{\min}, z_{\max}$	limites do espaço de trabalho pré-estabelecidos
R^n	Espaço Euclidiano n-dimensional
T_0^m	Matriz de transformação homogênea que representa as coordenadas do efetuador em relação à base
T_{i-1}^i	Matriz de transformação homogênea que representa o sistema $X_i Y_i Z_i$ em Relação ao sistema $X_{i-1} Y_{i-1} Z_{i-1}$
T	Tempo computacional
$U^{(q+1)}$	Vetor resultante ou vetor experimental
V	Volume do espaço de trabalho dos robôs manipuladores 3R
$V^{(q+1)}$	Vetor modificado ou vetor doador
$X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$	Vetor das variáveis de projeto
$X_\alpha, X_\beta, X_\gamma, X_\rho$ e X_δ	Vetores escolhidos aleatoriamente na população para gerar novo indivíduo
X_{best}	Melhor indivíduo da população
$x_i^{\inf}, x_i^{\sup}$	Limites inferiores e superiores das variáveis de projeto, respectivamente
$X_j Y_j Z_j$	Sistema de referência associado ao j -ésimo membro do robô manipulador 3R
$X_s^{(q)}$	Vetor a ser substituído na população
$W(H)$	Espaço de trabalho formado pelo ponto H situado na extremidade do robô
$WT_i(k, l)$	k representa o número de pontos de cúspides e l representa o número de nós da Topologia do espaço de trabalho i
w_k	Coefficientes de ponderação das funções multi-objetivos

Letras gregas

α_j, θ_j	Parâmetros de Denavit-Hartenberg (ângulos de rotação)
$\alpha_i^{\text{inf}}, \alpha_i^{\text{sup}}$	Limites inferiores e superiores de α_i
$\Delta\theta_j$	Discretização dos ângulos das juntas j
Σm_i	Número total de bits (alelos) de um cromossomo, onde m_i é o tamanho do gene i
$\phi(X)$	Função pseudo objetivo

SUMÁRIO

RESUMO.....	vii
ABSTRACT.....	ix
LISTA DE FIGURAS.....	xi
LISTA DE TABELAS.....	xix
LISTA DE SÍMBOLOS	xxi
 CAPÍTULO 1. INTRODUÇÃO.....	 1
 CAPÍTULO 2. MODELAGEM DE ROBÔS MANIPULADORES 3R E SEU ESPAÇO DE TRABALHO.....	 11
2.1. Operador Geométrico.....	13
2.2. Modelo Geométrico Direto (MGD).....	13
2.3. Modelo Geométrico Inverso (MGI).....	18
2.4. Espaço de Trabalho.....	19
2.5. Postura e Mudança de Postura.....	20
2.6. Noções sobre Singularidades.....	21
2.7. Manipulador Cuspidal.....	27
2.8. Manipuladores Quadráticos, Quárticos, Binários, Quaternários, Genéricos e não Genéricos.....	29
 CAPÍTULO 3. SOLUÇÃO DO POLINÔMIO DO MGI DE MANIPULADORES 3R.....	 34
3.1. Condição de Existência de um Ponto Quádruplo.....	43
3.2. A Superfície de Separação.....	45

CAPÍTULO 4. CLASSIFICAÇÃO DOS MANIPULADORES 3R ORTOGONAIS SEGUNDO SUA TOPOLOGIA, CONSIDERANDO $r_3 = 0$ 51

4.1. Classificação da topologia segundo o número de Pontos de Cúspides, para $r_3 = 0$	54
4.1.1. Manipulador Ortogonal do Tipo 1 e do Tipo 2.....	55
4.1.2. Manipulador Ortogonal do Tipo 3.....	59
4.1.3. Manipulador Ortogonal do Tipo 4.....	61
4.1.4. Manipulador Ortogonal do Tipo 5.....	64
4.2. Classificação da topologia segundo o número de Nós, para $r_3 = 0$	67
4.2.1. Manipuladores pertencentes ao Domínio 1.....	68
4.2.2. Manipuladores pertencentes ao Domínio 2.....	68
4.2.3. Manipuladores pertencentes aos Domínios 3 e 5.....	72
4.2.4. Manipuladores pertencentes ao Domínio 4.....	76
4.3. Divisão do espaço dos parâmetros apresentando as topologias dos Manipuladores Ortogonais, $r_3 = 0$	76
4.4. Observações importantes.....	78

CAPÍTULO 5. CLASSIFICAÇÃO DOS MANIPULADORES 3R ORTOGONAIS SEGUNDO SUA TOPOLOGIA, CONSIDERANDO $r_3 \neq 0$ 79

5.1. Considerações sobre as Superfícies de Separação para $r_3 \neq 0$	83
5.2. Classificação da topologia segundo o Número de Pontos de Cúspides, para $r_3 \neq 0$	86
5.2.1. Manipulador Ortogonal do Tipo 1, para $r_3 \neq 0$	87
5.2.2. Manipulador Ortogonal do Tipo 2, para $r_3 \neq 0$	87
5.2.3. Manipulador Ortogonal do Tipo 3, para $r_3 \neq 0$	88
5.2.4. Manipulador Ortogonal do Tipo 4, para $r_3 \neq 0$	89
5.2.5. Manipulador Ortogonal do Tipo 5, para $r_3 \neq 0$	91
5.2.6. Manipulador Ortogonal do Tipo 6, para $r_3 \neq 0$	91
5.2.7. Manipulador Ortogonal do Tipo 7, para $r_3 \neq 0$	93
5.2.8. Manipulador Ortogonal do Tipo 8, para $r_3 \neq 0$	94
5.2.9. Manipulador Ortogonal do Tipo 9, para $r_3 \neq 0$	95
5.3. Classificação da topologia segundo o Número de Nós, para $r_3 \neq 0$	96

5.3.1. Topologia do espaço de trabalho no caso $r_2 < r_3$	98
a) Manipuladores pertencentes ao Domínio 1, para $r_3 \neq 0$	99
b) Manipuladores pertencentes ao Domínio 2, para $r_3 \neq 0$	99
c) Manipuladores pertencentes ao Domínio 3, para $r_3 \neq 0$	100
d) Manipuladores pertencentes ao Domínio 4, para $r_3 \neq 0$	100
e) Manipuladores pertencentes ao Domínio 5, para $r_3 \neq 0$	101
f) Manipuladores pertencentes ao Domínio 6, para $r_3 \neq 0$	102
g) Manipuladores pertencentes ao Domínio 7, para $r_3 \neq 0$	102
h) Manipuladores pertencentes ao Domínio 8, para $r_3 \neq 0$	103
i) Manipuladores Pertencentes ao Domínio 9, para $r_3 \neq 0$	105
5.3.2. Topologia do espaço de trabalho no caso $r_2 > r_3$	109
5.4. Observações importantes.....	111

CAPÍTULO 6. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO.....113

6.1. Otimização Multi-Objetivo.....	113
6.1.1. Método dos Objetivos Ponderados (MOP).....	115
6.1.2. Método do Critério Global (MCG).....	115
6.2. Otimização Restrita usando Funções de Penalidade.....	116
6.3. Volume do Espaço de Trabalho de Manipuladores 3R.....	117
6.4. Rigidez do Mecanismo Serial.....	120
6.5. Destreza.....	121
6.6. Formulação do Problema de Otimização.....	123

CAPÍTULO 7. REVISÃO DAS TÉCNICAS DE OTIMIZAÇÃO.....125

7.1. Algoritmos Genéticos (AG).....	125
7.1.1. Seleção (Reprodução).....	126
7.1.2. Cruzamento.....	127
7.1.3. Mutação.....	128
7.1.4. Considerações finais.....	129
7.2. Evolução Diferencial (ED).....	131
7.2.1. Operadores da Evolução Diferencial.....	132
a) Mutação.....	132

b) Cruzamento.....	133
c) Seleção.....	135
7.3. Programação Sequencial Quadrática (PSQ).....	136
CAPÍTULO 8. SIMULAÇÕES NUMÉRICAS.....	139
8.1. Otimização irrestrita de Manipuladores 3R.....	140
8.1.1. Método dos Objetivos Ponderados (MOP).....	140
8.1.2. Método do Critério Global (MCG).....	144
8.2. Otimização irrestrita de Manipuladores 3R Ortogonais.....	146
8.2.1. Método dos Objetivos Ponderados (MOP).....	146
8.2.2. Método do Critério Global (MCG).....	148
8.3. Otimização restrita de Manipuladores 3R Ortogonais, considerando $r_3 = 0$	149
8.3.1. Caso 1 – Manipuladores pertencentes à Topologia $WT_1(0, 0)$	151
8.3.2. Caso 2 – Manipuladores pertencentes à Topologia $WT_3(4, 0)$	155
8.3.3. Caso 3 – Manipuladores pertencentes à Topologia $WT_5(2, 1)$	159
8.3.4. Caso 4 – Manipuladores pertencentes à Topologia $WT_6(2, 3)$	162
8.3.5. Caso 5 – Manipuladores pertencentes à Topologia $WT_9(0, 2)$	165
8.4. Otimização restrita de Manipuladores 3R Ortogonais, considerando $r_3 \neq 0$	169
8.4.1. Caso 1 – Manipuladores pertencentes à Topologia $WT_3(4, 0)$	169
8.4.2. Caso 2 – Manipuladores pertencentes à Topologia $WT_2(4, 2)$	173
8.5. Observações importantes.....	177
CAPÍTULO 9. CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS.....	179
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	183
ANEXO I.....	195
ANEXO II.....	211

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

Com o decorrer dos anos cresce cada vez mais o interesse pelas indústrias em buscar novas tecnologias visando melhorar a produtividade e a qualidade de seus produtos, tornando evidente a importância, por exemplo, da robótica.

Para o estudo da robótica são necessários conhecimentos interdisciplinares, envolvendo várias áreas do conhecimento, tais como: cinemática, dinâmica, controle, otimização, matemática, inteligência artificial, programação de sistemas, computação gráfica e outras. Estas áreas se interligam fazendo da robótica uma área de pesquisa científica multidisciplinar.

A utilização de robôs manipuladores na indústria vem substituindo gradativamente a mão-de-obra humana na realização de tarefas repetitivas e muitas vezes perigosas para o operador. A indústria automobilística é uma das mais beneficiadas com a utilização destes equipamentos em aplicações como manipulação de materiais, operações de soldagem, pintura e montagens, entre outras.

No meio industrial ainda não existe um consenso universal na aceitação da definição de robô, existindo diferentes definições. Uma que contempla a quase todos os tipos de robôs industriais em operação é a proposta pela ISO 9409/1 (International Organization for Standardization) (ISO, 1990), a saber: *Um robô é um manipulador reprogramável automático, multifuncional, de vários graus de liberdade, capaz de manipular materiais, objetos, utensílios e dispositivos especiais, durante um ciclo de movimentos variados e programados para a execução de diferentes tarefas.*

Desta forma, robôs são máquinas controladas por computadores programadas para mover, manipular objetos e efetuar trabalhos enquanto interagem com o ambiente à sua volta. Em um robô manipulador serial, o efetuator (ou órgão terminal), objeto responsável pela

execução da tarefa final de aplicação do robô, é precedido por um conjunto de segmentos (elementos ou corpos), que realizam seus movimentos por meio de servo-motores (atuadores - responsáveis pela alteração dos ângulos de junta ou do comprimento de cada elemento). As conexões entre os segmentos são denominadas de juntas (ou articulações) (TSAI, 1999).

Basicamente, um robô pode ser dividido em três partes fundamentais: estrutura, acionamento e sistema de controle.

Estrutura: é a parte que tem liberdade de movimento, pode ser constituído por braço, punho e efetuador.

Acionamento: é a parte responsável pela movimentação física de cada junta da estrutura, assim como de alguns efetadores. Tem como principal função transformar energia elétrica, hidráulica, pneumática, ou uma combinação destas, em energia cinética.

Sistema de controle: é responsável pela coordenação e controle do movimento do efetuador.

Os robôs industriais podem ser classificados de acordo com vários critérios, tais como: mobilidade em relação ao ambiente de trabalho (robô móvel ou fixo); informação de entrada e aprendizagem (manipulador manual, robô sequencial, robô “Play-Back”, robô NC-numerical control, robô inteligente); geometria do espaço de trabalho (retangular, cilíndrico, esférico); graus de liberdade (gdl), que corresponde ao número de parâmetros de entrada independentes necessários para definir a posição e orientação do mecanismo (braço do robô e pulso do robô); tipo de acionamento (elétrico, pneumático, hidráulico ou uma combinação destes); tipos de movimento (interpolação de junta, interpolação em linha reta, interpolação circular); tipo de cadeias cinemáticas e juntas.

Em relação à cadeia cinemática, os manipuladores podem ser classificados como:

Cadeia Aberta: quando o robô controla o movimento do efetuador por meio de apenas uma cadeia cinemática, indo da extremidade até a base do robô, ele é dito de estrutura serial e possui cadeia cinemática aberta.

Cadeia Fechada: quando o robô controla o movimento de seu efetuador por meio de pelo menos duas cadeias cinemáticas, indo do efetuador até a base do robô, ele é dito de estrutura paralela e possui cadeia cinemática fechada.

Cadeia Mista: é a combinação das estruturas aberta e fechada, os robôs são ditos híbridos.

Os tipos de junta mais utilizados em robótica são:

Junta prismática ou *deslizante* (Fig. 1.1): permite que dois segmentos emparelhados deslizem um em relação ao outro, ao longo de um eixo que é definido pela geometria da junta. Ela possui um gdl caracterizando o chamando movimento linear e é representada por P .

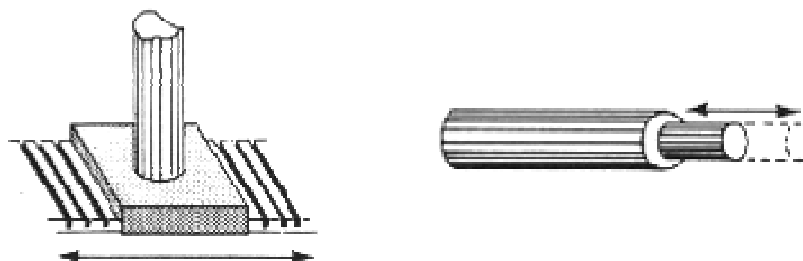


Figura 1.1 - Representação de juntas deslizantes ou prismáticas

Junta de revolução ou *rotacional* (R), conforme Fig. 1.2, permite que dois segmentos emparelhados rotacionem, um em relação ao outro, em torno de um eixo que é definido pela geometria da junta. Ela possui um gdl e o movimento é dito angular.

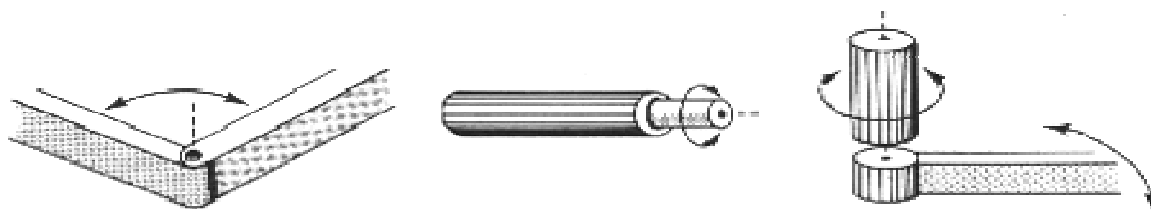


Figura 1.2 - Representação de juntas de revolução ou rotacionais

Junta cilíndrica ou *junta prismática e rotacional* (Fig. 1.3) permite ao mesmo tempo, uma rotação e uma translação em relação a um eixo definido pela geometria da junta. Portanto, este tipo de junta apresenta dois gdl, sendo representada por PR .

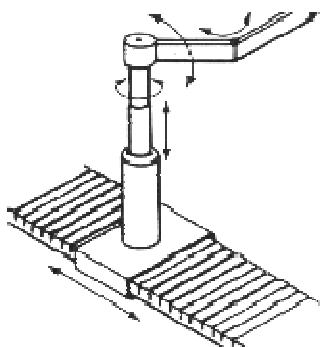


Figura 1.3 - Representação de juntas cilíndricas

Outros tipos de juntas podem ser vistas, por exemplo, em Tsai (1999). Além disso, existem diferentes geometrias da estrutura de um manipulador robótico dependendo do tipo e da ordem das juntas cinemáticas empregadas nas conexões entre os segmentos constituintes de sua estrutura (MEGAHED, 1993). Sendo assim, um robô pode ser classificado de acordo com o tipo de movimento de seus eixos. O modo mais simples de identificar estes movimentos é descrevê-los em sistemas de coordenadas. A seguir são apresentadas algumas geometrias mais encontradas na literatura.

Um robô constituído por três juntas prismáticas é dito retangular ou cartesiano e é representado por PPP ou 3P. Um robô cilíndrico possui duas juntas prismáticas e uma rotacional (PPR, PRP ou RPP), os esféricos têm duas juntas de rotação e uma prismática (RRP, RPR ou PRR), os robôs de revolução são constituídos por três juntas rotacionais (RRR ou 3R). A Fig. 1.4 apresenta alguns exemplos de esquemas destes robôs.

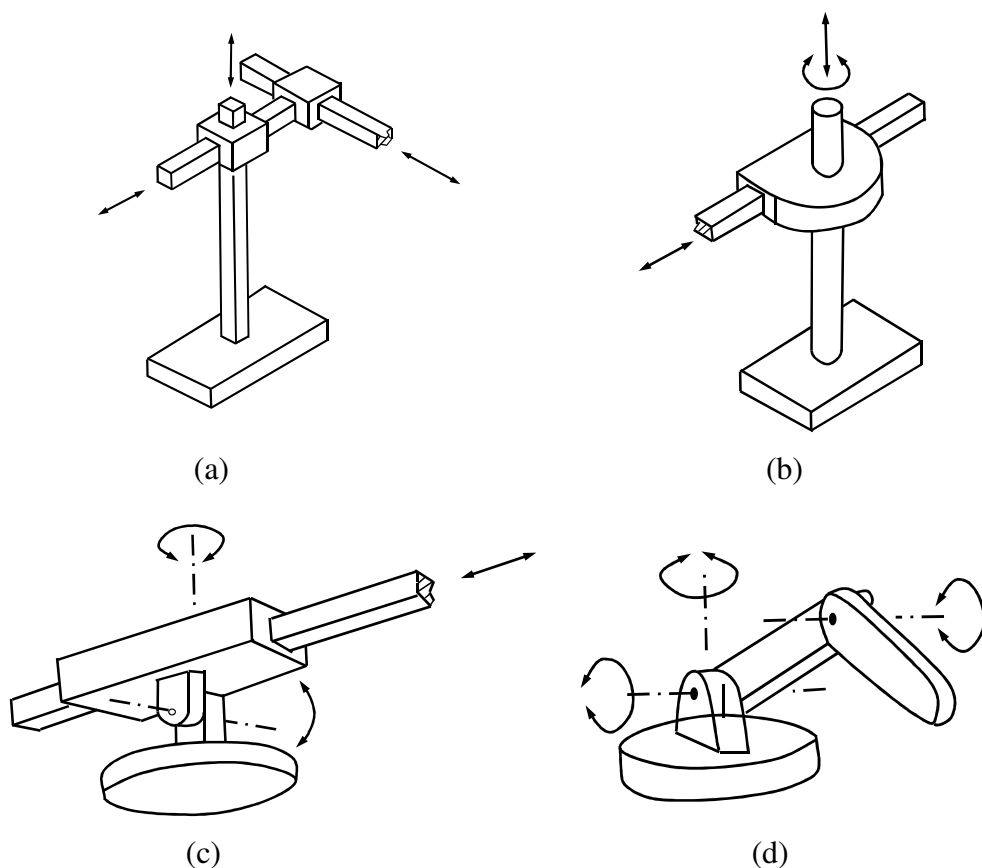


Figura 1.4 - Representação da geometria de alguns robôs: (a) Cartesiano; (b) Cilíndrico; (c) Esférico; (d) Revolução

A capacidade de um robô desenvolver uma determinada tarefa depende da sua arquitetura e da dimensão de seus segmentos, bem como da posição que ele assume no

ambiente de trabalho. Uma característica fundamental de um robô manipulador é o seu espaço de trabalho, definido pelo conjunto de pontos atingíveis pelo efetuador.

Diversos estudos têm investigado as propriedades do espaço de trabalho de manipuladores com a intenção de enfatizar as características geométricas e cinemáticas. Na literatura científica têm sido propostos vários métodos para projetar manipuladores, baseados principalmente na definição e otimização de parâmetros previamente definidos.

Roth (1975) desenvolveu um dos primeiros artigos relacionados com o estudo do espaço de trabalho dos manipuladores, enfatizando a sua importância para análise e projeto. Foram desenvolvidos vários algoritmos para avaliar o espaço de trabalho e determinar a sua fronteira, aplicando diversas metodologias, tais como: uso de técnicas para investigar o espaço cartesiano (TSAI; SONI, 1983), cálculos recursivos nos ângulos das juntas (GUPTA; ROTH, 1982) e métodos baseados nas máximas distâncias atingíveis (KUMAR; WALDRON, 1981). Ceccarelli apresentou uma formulação algébrica para determinar o espaço de trabalho de robôs de revolução (1989 e 1996).

Em 1999, Ceccarelli e Lanni trataram o projeto de manipuladores como um problema de otimização levando em consideração as características do espaço de trabalho. Em 2002, este mesmo problema foi investigado e solucionado por Lanni *et al.* aplicando as técnicas numéricas: programação quadrática seqüencial e a técnica de busca randômica Simulated Annealing. Abdel-Malek *et al.* (2000) introduziram uma formulação genérica para a determinação de *vazios* (regiões não atingíveis pelo efetuador e que são envolvidas pelo espaço de trabalho) no espaço de trabalho de um manipulador serial.

Burdick (1991), El Omri e Wenger (1995) e Wenger (2000) mostraram que para a escolha de alguns parâmetros, os manipuladores 3R podem mudar de posição sem transpor uma singularidade. Eles foram bem sucedidos em caracterizar tais manipuladores, porém precisavam de condições gerais sobre os parâmetros de projeto. Assim, em 2002, Corvez e Rouillier obtiveram importantes resultados sobre esta questão. Saramago *et al.* (2002) propuseram uma caracterização da fronteira do espaço de trabalho e formularam uma condição analítica geral para deduzir a existência de pontos de cúspides sobre as fronteiras interna e externa do espaço de trabalho. Baili (2004) estudou as propriedades dos manipuladores 3R com eixos ortogonais e fez uma classificação no espaço dos parâmetros dimensionais segundo a topologia de seus espaços de trabalho.

Em 2004, Bergamaschi obteve uma formulação algébrica para caracterizar a fronteira do espaço de trabalho de robôs manipuladores 3R, considerando a existência de anéis vazios e

singularidades presentes neste volume de trabalho. Ele utilizou tal formulação no desenvolvimento do projeto ótimo da estrutura cuja função objetivo maximizava o volume de trabalho. Bergamaschi *et al.* (2008) propuseram uma metodologia híbrida para obter o volume máximo do espaço de trabalho de manipuladores 3R quaisquer. Nesta metodologia, inicialmente aplicava-se métodos sequenciais e a seguir a Evolução Diferencial, forçando o espaço de trabalho a ocupar o maior conjunto de pontos dentro de uma região pré-estabelecida, neste caso, um cilindro cujo eixo coincidia com o eixo de rotação do espaço de trabalho.

Recentemente, diversos trabalhos em robótica foram desenvolvidos. Entre eles, pode-se citar: Huda e Takeda (2007) realizaram um estudo cinemático para permitir a síntese dimensional de um mecanismo paralelo com três membros simétricos, constituído de juntas universal-rotação-universal (3-URU) que executam o movimento de rotação pura da plataforma. Eles propuseram um procedimento de síntese dimensional para o mecanismo considerando as singularidades e o espaço de trabalho.

Wang e Guo (2010) propuseram uma solução para um sistema multirobótico de sincronização, onde cada robô se move ao longo de subsegmentos de tamanhos iguais, no mesmo intervalo de tempo, com comunicações esporádicas. Eles desenvolveram um algoritmo descentralizado através da concepção de leis de impacto que não dependem da localização dos robôs, mas das informações do tempo (cada robô atualiza sua velocidade com base no intervalo de tempo entre dois impactos consecutivos). A seguir, aplicaram o algoritmo de sincronização a um problema de patrulhamento planar através do caminho Hamiltoniano.

Yao e Dai (2011) investigaram o espaço de trabalho e a capacidade de orientação de dedos robóticos com uma ligação (um sistema articulado) cinco-barras e seu movimento definido por um parâmetro da base, além de discutir condições de singularidade sobre parâmetros de diferentes elementos (links).

O movimento do braço humano pode inspirar o planejamento de trajetórias de braços robóticos antropomórficos para alcançar eficiência energética de movimentos, neste sentido, Zhou *et al.* (2011) propuseram uma abordagem para modelar o consumo de energia (custo metabólico) no movimento do braço humano planar por meio de simulação biomecânica para prever trajetórias ótimas, desenvolvendo um modelo analítico e outro musculoesquelético para implementar a abordagem proposta.

A equipe de Wenger tem desenvolvido diversos estudos sobre os manipuladores paralelos, tais como:

- Estudo comparativo de mecanismos com arquiteturas paralelas para aplicações em usinagem (CHABLAT *et al.*, 2007);
- Análise de propriedades cinemáticas e de rigidez do protótipo Orthoglide (projetado e otimizado para avaliar o desempenho de máquinas seriais e paralelas), através de um novo método desenvolvido para analisar a rigidez de rotação e translação considerando o modelo restrito, permitindo a comparação da performance do Orthoglide com outros manipuladores similares (PASKHEVICH *et al.*, 2007);
- Otimização do projeto de manipuladores paralelos para aplicações em usinagem com alta velocidade e precisão (PASKHEVICH *et al.*, 2009);
- Caracterização de regiões máximas, definidas como regiões onde o efetuador pode mover-se entre qualquer conjunto de pontos e regiões onde qualquer trajetória contínua pode ser executada no espaço de trabalho de manipuladores paralelos. Desta forma, é possível executar trajetórias viáveis do tipo *ponto-a-ponto* ou *contínuas*, a partir da noção de aspectos livres definidos para manipuladores paralelos (CHABLAT; WENGER, 2009);
- Comparação de manipuladores paralelos planares, baseada numa abordagem de otimização multi-objetivo (CHABLAT *et al.*, 2010);
- Otimização de trajetória de manipuladores com base no consumo de energia: aplicação ao Orthoglide (UR-REHMAN *et al.*, 2009).
- As condições de existência de pontos de cúspides no espaço de projeto de manipuladores paralelos também foi investigada por Moroz *et al.* (2010). O método utilizado é baseado na noção de variedade do discriminante e na Decomposição Algébrica Cilíndrica, usando as bases de Groebner para a solução do sistema de equações;
- Chablat (2010) apresentou um algoritmo capaz de calcular os domínios máximos livres de singularidade do espaço de trabalho e do espaço articular para dois mecanismos paralelos planares usando o modelo de octree e um método de análise baseado nos intervalos.

Poucos trabalhos de pesquisa sobre manipuladores paralelos cuspidais e não cuspidaes têm sido realizados. Wenger (2010) apresentou algumas considerações sobre manipuladores paralelos. Um manipulador paralelo pode ser cuspidal no sentido de que poderá alterar seu modo de se movimentar sem passar por uma singularidade do tipo paralela. Para ser cuspidal, um manipulador paralelo deve ter três modos de movimentação coincidentes, o que define um ponto de cúspide em seu espaço articulado. Como as equações cinemáticas de um manipulador paralelo são complexas, é difícil obter condições geométricas gerais para um

manipulador paralelo ser cuspidal. Os resultados disponíveis apenas dizem respeito a manipuladores planares com três graus de liberdade.

Um estudo do lugar das singularidades no espaço das juntas e no espaço de trabalho de um manipulador paralelo planar 3-RPR, com destaque especial aos pontos de cúspides e de nós, foi apresentado por Zaiter *et al.* (2011). Eles mostraram que a imagem de um ponto de cúspide, que corresponde a três soluções coincidentes da cinemática direta, e a imagem de um ponto duplo, que corresponde a dois pares de soluções coincidentes da cinemática direta são, respectivamente, um ponto tangente e um ponto de cruzamento entre uma curva singular e uma curva associada com as superfícies características.

O trabalho atual é uma continuidade da pesquisa de Bergamaschi (2004) utilizando a classificação feita por Baili (2004). O objetivo principal é estudar a topologia das superfícies de singularidades do espaço de trabalho de robôs 3R ortogonais, possibilitando ao projetista a escolha de um determinado tipo de topologia e a obtenção do projeto ótimo destes manipuladores que corresponde à topologia mais adequada. Para isso, o problema de otimização é escrito como uma função multi-objetivo considerando a maximização do volume de trabalho do manipulador, a maximização da rigidez do mecanismo e a otimização de sua destreza. São consideradas técnicas evolutivas e sequenciais para a solução do problema ótimo e realizada uma comparação entre elas.

No capítulo II são obtidas as expressões que definem o modelo geométrico de manipuladores 3R ortogonais utilizando a notação de Denavit-Hartenberg. É mostrada, passo a passo, a obtenção das matrizes de transformações homogêneas, bem como a matriz Jacobiana do modelo geral e seu respectivo determinante. Também é apresentado o espaço de trabalho e um breve estudo sobre as singularidades e os tipos de manipuladores.

Para o estudo da topologia dos manipuladores 3R é necessário conhecer as equações que separam suas topologias. O capítulo III é dedicado à obtenção de uma destas equações através da solução do polinômio de grau 4 do modelo geométrico inverso, utilizando a ferramenta algébrica Base de Groebner. No capítulo IV é apresentada a obtenção das outras equações considerando o anulamento do determinante da matriz Jacobiana. Além disso, apresenta-se uma classificação dos manipuladores 3R ortogonais em relação ao número de soluções no Modelo Geométrico Inverso, o número de pontos de cúspides e o número de nós, considerando manipuladores sem defasagem sobre o último eixo, ou seja, o parâmetro dimensional r_3 é nulo. No capítulo V é apresentada outra classificação de manipuladores 3R considerando o r_3 não nulo.

O capítulo VI traz a formulação do problema de otimização. São apresentadas algumas funções objetivos que podem ser consideradas na otimização de sistemas robóticos, em situações onde se deseja otimizar problemas com vários objetivos, com e sem restrições de topologias pré-estabelecidas. No problema de otimização são consideradas as relações geométricas obtidas nos capítulos III, IV e V, permitindo a obtenção de soluções dentro de uma topologia que atenda as necessidades práticas da indústria.

Uma revisão das técnicas utilizadas no processo da otimização é apresentada no capítulo VII (Algoritmos Genéticos, Evolução Diferencial e Programação Sequencial Quadrática). No capítulo VIII são apresentados os resultados das simulações numéricas propostas nesta tese.

Finalmente, o capítulo IX traz as conclusões do estudo desenvolvido e sugestões de trabalhos futuros.

CAPÍTULO II

MODELAGEM DE ROBÔS MANIPULADORES 3R E SEU ESPAÇO DE TRABALHO

A estrutura de um manipulador em série é um conjunto cinemático constituído de uma sucessão de corpos rígidos ligados entre si por juntas rotacionais e/ou prismáticas. Uma forma de representação cinemática bastante comum é a utilização dos parâmetros de Denavit-Hartenberg (DH). Neste caso, o sistema é composto de $(n+1)$ corpos, sendo que C_0 é a base e C_n é o efetuador. A junta j conecta o corpo C_{j-1} ao corpo C_j . A cada corpo C_j pode-se fixar um referencial R_j , $(X_j Y_j Z_j)$, passando pelo eixo da articulação, a partir da base (C_0). A fixação dos referenciais ao longo da estrutura do robô pode ser feita usando um procedimento pré-estabelecido que consiste em:

- Identificar os eixos de todas as articulações L_j ;
- Fixar o eixo Z_j sobre o eixo da articulação j ;
- Estabelecer O_j como a interseção da perpendicular comum aos eixos das articulações L_{j-1} e L_j situado com o eixo da articulação L_j . Se os eixos das duas articulações são paralelos ou coincidentes, pode-se escolher arbitrariamente uma perpendicular comum. Neste caso, considerações de simetria ou simplicidade permitem uma escolha racional;
- Definir o eixo X_j nesta perpendicular comum, orientado da direção da articulação L_{j-1} (eixo Z_{j-1}) na direção de L_j (eixo Z_j). Se os eixos dessas duas articulações são concorrentes ou coincidentes, a orientação é arbitrária. Se os eixos são paralelos, a escolha do eixo X_j é arbitrária, e algumas considerações de simetria e/ou simplificações são utilizadas para simplificar os cálculos;
- Orientar o eixo Z_j arbitrariamente;
- Determinar o eixo Y_j pelo produto vetorial positivo tal que $X_j \times Y_j = Z_j$.

A passagem entre os sistemas de referência R_{j-1} e R_j depende de quatro parâmetros geométricos, conforme a Fig. 2.1, definidos por:

d_j : distância entre Z_{j-1} e Z_j ao longo de X_{j-1} ;

α_j : ângulo entre os eixos Z_{j-1} e Z_j , correspondente a uma rotação em torno de X_{j-1} ;

r_j : distância entre X_{j-1} e X_j ao longo de Z_j ;

θ_j : ângulo entre os eixos X_{j-1} e X_j , correspondente a uma rotação em torno de Z_j .

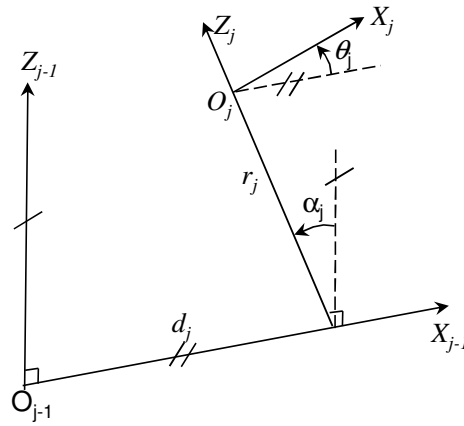


Figura 2.1 - Parâmetros de Denavit-Hartenberg - DH (KHALIL; DOMBRE, 1999)

A matriz de transformação descrevendo o referencial R_j em relação ao referencial R_{j-1} é dada por: (KHALIL; DOMBRE, 1999):

$$T_j^{j-1} = Rot(X, \alpha_j) Trans(X, d_j) Rot(Z, \theta_j) Trans(Z, r_j)$$

$$= \begin{pmatrix} c_j & -s_j & 0 & d_j \\ c\alpha_j s_j & c\alpha_j c_j & -s\alpha_j & -r_j s\alpha_j \\ s\alpha_j s_j & s\alpha_j c_j & c\alpha_j & r_j c\alpha_j \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

sendo $c_j = \cos(\theta_j)$, $s_j = \sin(\theta_j)$, $c\alpha_j = \cos(\alpha_j)$ e $s\alpha_j = \sin(\alpha_j)$, $j = 1, \dots, n+1$

Assim, ao efetuador de um robô de n gdl é associado um sistema de coordenadas, T_n^0 , que é uma matriz de transformação homogênea representando-o em relação à base:

$$T_n^0 = T_1^0 \cdot T_2^1 \cdot \dots \cdot T_j^{j-1} \cdot T_{j+1}^j \cdot \dots \cdot T_n^{n-1} \quad (2.2)$$

2.1. Operador Geométrico

Para um manipulador de n gdl, o operador geométrico, f , é uma aplicação contínua e diferenciável que relaciona os vetores das coordenadas das juntas do manipulador com as coordenadas operacionais de posição e orientação do efetuador:

$$f:]-\pi, \pi]^3 \rightarrow \mathfrak{R}^3$$

$$(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \mapsto (x, y, z)$$

A imagem deste operador no espaço operacional é dita espaço de trabalho.

Espaço articulado é o espaço que descreve as configurações das juntas do manipulador. É uma combinação que considera dois tipos de aspectos: um intervalo em $\mathfrak{R}$ para as articulações prismáticas e um círculo para as articulações rotacionais. Este espaço é isomórfico a $]-\pi, \pi]^3$ com os limites das juntas ignorados. No entanto, como o manipulador gira em torno da primeira junta de revolução, θ_1 , o espaço das juntas pode ser representado pelo toro, nas variáveis θ_2 e θ_3 .

Espaço operacional é o espaço que descreve a posição e a orientação do referencial do efetuador do manipulador com n gdl em coordenadas cartesianas (x, y, z) , que é isomórfico a $\mathfrak{R}^3$ se não há presença de obstáculos. A estrutura do espaço operacional depende da estrutura do manipulador e da natureza da tarefa a realizar (CORVEZ; ROUILLIER, 2002).

O modelo cinemático de um robô pode ser direto ou inverso. No modelo direto o conhecimento das variáveis das juntas permite determinar a posição e a orientação do efetuador do robô. Já no modelo inverso, as incógnitas do problema são as variáveis das juntas.

2.2. Modelo Geométrico Direto (MGD)

O modelo geométrico direto de um manipulador é o conjunto das relações que permite expressar a posição e a orientação do efetuador em função, por exemplo, dos parâmetros de Denavit Hartenberg. A Fig. 2.2 apresenta a arquitetura cinemática de um manipulador com 3 juntas rotacionais na configuração zero. O efetuador é representado pelo ponto P que é

definido pelas coordenadas cartesianas x , y e z no referencial $Oxyz$ fixo na base do manipulador. Os parâmetros geométricos de tais manipuladores, obtidos conforme a Fig. 2.1, são apresentados na Tab. 2.1.

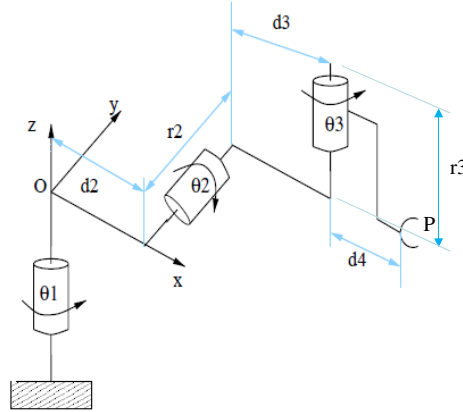


Figura 2.2 - Arquitetura cinemática de um Manipulador 3R

Tabela 2.1 - Parâmetros de DH do manipulador 3R

	d_j	α_j	r_j	θ_j
1	0	0	0	θ_1
2	d_2	α_2	r_2	θ_2
3	d_3	α_3	r_3	θ_3
4	d_4	0	0	0

A determinação deste modelo se dá pela multiplicação das matrizes de transformação T_j^{j-1} entre o sistema $R_{j-1} = X_{j-1}Y_{j-1}Z_{j-1}$, ligado ao corpo C_{j-1} , e $R_j = X_jY_jZ_j$, ligado ao corpo C_j . O resultado é dado pela matriz de transformação homogênea T_n^0 , conforme a Eq.(2.2).

A modelagem geométrica do manipulador 3R é feita com o auxílio de cinco sistemas de referência. O primeiro é associado à base e indicado por $R_0 = X_0Y_0Z_0$, o segundo é associado à primeira junta, sendo indicado por $R_1 = X_1Y_1Z_1$, o terceiro associa-se à segunda junta e é indicado por $R_2 = X_2Y_2Z_2$, o quarto é associado à terceira junta e indicado por $R_3 = X_3Y_3Z_3$ e finalmente, o quinto referencial é associado ao efetuador e indicado por $R_4 = X_4Y_4Z_4$.

Para este tipo de manipulador é usual adotar que o eixo do sistema referencial R_1 seja coincidente com o eixo do sistema inercial R_0 , deste modo, tem-se $\alpha_1 = 0$, $d_1 = 0$ e $r_1 = 0$.

Como os sistemas R_0 e R_1 possuem origem e eixo Z coincidentes e a junta é de rotação, a única diferença entre eles é o ângulo de rotação θ_1 em torno do eixo Z_1 . Assim, a matriz de

transformação homogênea do referencial R_I em relação à base R_0 , obtida conforme a Eq.(2.1), é dada por:

$$T_1^0 = Rot(\theta_1, Z_1) = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

A representação do sistema R_2 em relação ao sistema R_I e a representação do sistema R_3 em relação ao sistema R_2 são dadas, respectivamente, pelas matrizes de transformação homogênea:

$$T_2^1 = \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & d_2 \\ c\alpha_2 s\theta_2 & c\alpha_2 c\theta_2 & -s\alpha_2 & -r_2 s\alpha_2 \\ s\alpha_2 s\theta_2 & s\alpha_2 c\theta_2 & c\alpha_2 & r_2 c\alpha_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

$$T_3^2 = \begin{bmatrix} c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 & d_3 \\ c\alpha_3 s\theta_3 & c\alpha_3 c\theta_3 & -s\alpha_3 & -r_3 s\alpha_3 \\ s\alpha_3 s\theta_3 & s\alpha_3 c\theta_3 & c\alpha_3 & r_3 c\alpha_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

A representação do efetuador (R_4) em relação ao sistema R_3 é dada por:

$$T_4^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Desta forma, o efetuador do manipulador 3R em relação à base é expresso pelo produto matricial:

$$T_4^0 = T_1^0 \cdot T_2^1 \cdot T_3^2 \cdot T_4^3 \quad (2.7)$$

Desenvolvendo o produto das matrizes, obtém-se:

$$T_1^0.T_2^1 = \begin{bmatrix} c\theta_1 c\theta_2 - s\theta_1 s\theta_2 c\alpha_2 & -c\theta_1 s\theta_2 - s\theta_1 c\theta_2 c\alpha_2 & s\theta_1 s\alpha_2 & d_2 c\theta_1 + r_2 s\theta_1 s\alpha_2 \\ s\theta_1 c\theta_2 + c\theta_1 c\alpha_2 s\theta_2 & -s\theta_1 s\theta_2 + c\theta_1 c\alpha_2 c\theta_2 & -c\theta_1 s\alpha_2 & d_2 s\theta_1 - r_2 c\theta_1 s\alpha_2 \\ s\alpha_2 s\theta_2 & s\alpha_2 c\theta_2 & c\alpha_2 & r_2 c\alpha_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

$$T_1^0.T_2^1.T_3^2 = \begin{bmatrix} \eta_{2_x} & o_{2_x} & a_{2_x} & p_{2_x} \\ \eta_{2_y} & o_{2_y} & a_{2_y} & p_{2_y} \\ \eta_{2_z} & o_{2_z} & a_{2_z} & p_{2_z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

sendo $\eta_{2_x} = c\theta_3(c\theta_1 c\theta_2 - s\theta_1 s\theta_2 c\alpha_2) - c\alpha_3 s\theta_3(c\theta_1 s\theta_2 + s\theta_1 c\alpha_2 c\theta_2) + s\theta_1 s\alpha_2 s\alpha_3 s\theta_3$

$$\eta_{2_y} = c\theta_3(s\theta_1 c\theta_2 + c\theta_1 c\alpha_2 s\theta_2) + c\alpha_3 s\theta_3(-s\theta_1 s\theta_2 + c\theta_1 c\alpha_2 c\theta_2) - c\theta_1 s\alpha_2 s\alpha_3 s\theta_3$$

$$\eta_{2_z} = s\alpha_2 s\theta_2 c\theta_3 + s\alpha_2 c\theta_2 c\alpha_3 s\theta_3 + c\alpha_2 s\alpha_3 s\theta_3$$

$$o_{2_x} = -s\theta_3(c\theta_1 c\theta_2 - s\theta_1 s\theta_2 c\alpha_2) - c\alpha_3 c\theta_3(c\theta_1 s\theta_2 + s\theta_1 c\alpha_2 c\theta_2) + s\theta_1 s\alpha_2 s\alpha_3 c\theta_3$$

$$o_{2_y} = -s\theta_3(s\theta_1 c\theta_2 + c\theta_1 c\alpha_2 s\theta_2) + c\alpha_3 c\theta_3(-s\theta_1 s\theta_2 + c\theta_1 c\alpha_2 c\theta_2) - c\theta_1 s\alpha_2 s\alpha_3 c\theta_3$$

$$o_{2_z} = -s\alpha_2 s\theta_2 s\theta_3 + s\alpha_2 c\theta_2 c\alpha_3 c\theta_3 + c\alpha_2 s\alpha_3 c\theta_3$$

$$a_{2_x} = s\alpha_3(c\theta_1 s\theta_2 + s\theta_1 c\theta_2 c\alpha_2) + c\alpha_3 s\theta_1 s\alpha_2$$

$$a_{2_y} = -s\alpha_3(-s\theta_1 s\theta_2 + c\theta_1 c\theta_2 c\alpha_2) - c\alpha_3 c\theta_1 s\alpha_2$$

$$a_{2_z} = -s\alpha_3 s\alpha_2 c\theta_2 + c\alpha_2 c\alpha_3$$

$$p_{2_x} = d_3(c\theta_1 c\theta_2 - s\theta_1 s\theta_2 c\alpha_2) + r_3 s\alpha_3(c\theta_1 s\theta_2 + s\theta_1 c\alpha_2 c\theta_2) + r_3 c\alpha_3 s\theta_1 s\alpha_2 + d_2 c\theta_1 + r_2 s\theta_1 s\alpha_2$$

$$p_{2_y} = d_3(s\theta_1 c\theta_2 + c\theta_1 s\theta_2 c\alpha_2) - r_3 s\alpha_3(-s\theta_1 s\theta_2 + c\theta_1 c\alpha_2 c\theta_2) - r_3 c\alpha_3 c\theta_1 s\alpha_2 + d_2 s\theta_1 - r_2 c\theta_1 s\alpha_2$$

$$p_{2_z} = d_3 s\alpha_2 s\theta_2 - r_3 s\alpha_3 s\alpha_2 c\theta_2 + r_3 c\alpha_3 c\alpha_2 + r_2 c\alpha_2$$

E finalmente,

$$T_4^0 = T_1^0 T_2^1 T_3^2 T_4^3 = \begin{bmatrix} \eta_{3_x} & o_{3_x} & a_{3_x} & p_{3_x} \\ \eta_{3_y} & o_{3_y} & a_{3_y} & p_{3_y} \\ \eta_{3_z} & o_{3_z} & a_{3_z} & p_{3_z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

sendo $\eta_{3_x} = \eta_{2_x}$, $\eta_{3_y} = \eta_{2_y}$, $\eta_{3_z} = \eta_{2_z}$

$$o_{3_x} = o_{2_x}, o_{3_y} = o_{2_y}, o_{3_z} = o_{2_z}$$

$$a_{3_x} = a_{2_x}, a_{3_y} = a_{2_y}, a_{3_z} = a_{2_z}$$

$$p_{3_x} = d_4 \eta_{2_x} + p_{2_x}, p_{3_y} = d_4 \eta_{2_y} + p_{2_y} \text{ e } p_{3_z} = d_4 \eta_{2_z} + p_{2_z}$$

Agrupando os termos das três últimas igualdades, obtêm-se as coordenadas de posição relativas ao efetuador:

$$\begin{aligned} x = & \left[d_2 + (r_3 s \alpha_3 - d_4 c \alpha_3 s \theta_3) s \theta_2 + (d_3 + d_4 c \theta_3) c \theta_2 \right] c \theta_1 + \left\{ s \alpha_2 (r_2 + r_3 c \alpha_3 + d_4 s \alpha_3 s \theta_3) \right. \\ & \left. + c \alpha_2 \left[(r_3 s \alpha_3 - d_4 c \alpha_3 s \theta_3) c \theta_2 - (d_3 + d_4 c \theta_3) s \theta_2 \right] \right\} s \theta_1 \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} y = & \left[d_2 + (r_3 s \alpha_3 - d_4 c \alpha_3 s \theta_3) s \theta_2 + (d_3 + d_4 c \theta_3) c \theta_2 \right] s \theta_1 - \left\{ s \alpha_2 (r_2 + r_3 c \alpha_3 + d_4 s \alpha_3 s \theta_3) \right. \\ & \left. + c \alpha_2 \left[(r_3 s \alpha_3 - d_4 c \alpha_3 s \theta_3) c \theta_2 - (d_3 + d_4 c \theta_3) s \theta_2 \right] \right\} c \theta_1 \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$z = c \alpha_2 (r_2 + r_3 c \alpha_3 + d_4 s \alpha_3 s \theta_3) - s \alpha_2 \left[(r_3 s \alpha_3 - d_4 c \alpha_3 s \theta_3) c \theta_2 - (d_3 + d_4 c \theta_3) s \theta_2 \right] \quad (2.13)$$

Pode-se também utilizar as coordenadas radiais (BERGAMASCHI, 2004), definindo-se:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ e } z \text{ conforme a Eq.(2.13)} \quad (2.14)$$

sendo x e y dados nas Eqs.(2.11) e (2.12), respectivamente.

As Equações (2.11) a (2.13) são de fundamental importância para o estudo realizado nesta tese. A partir delas, calcula-se o determinante da matriz Jacobiana, J , da estrutura e suas singularidades.

O cálculo da Jacobiana clássica depende do ângulo de junta θ_1 , no entanto, devido a dificuldades encontradas para fatorar o determinante e obter as equações das superfícies de singularidades, será utilizada neste trabalho, a matriz Jacobiana de Base (que não depende de θ_1), obtida por Baili (2004) por meio da metodologia apresentada em Dombre e Khalil (1999), que se baseia na relação entre os vetores das velocidades de translação e de rotação do referencial R_n , representando os elementos de redução do torsor cinemático do referencial R_n e as velocidades articulares.

Como o principal objetivo nesta pesquisa é a obtenção do projeto ótimo de manipuladores 3R considerando a topologia do espaço de trabalho, será utilizada a classificação feita por Baili (2004), considerando manipuladores 3R com eixos ortogonais, ou seja, $\alpha_2 = -90^\circ$ e $\alpha_3 = 90^\circ$. Assim, a Jacobiana de Base, referida no restante deste trabalho apenas como Jacobiana, é dada pela Eq.(2.15):

$$J = \begin{pmatrix} -s\theta_3 c\theta_2 d_4 - c\theta_2 r_2 & r_3 & -s\theta_3 d_4 \\ s\theta_3 s\theta_2 d_4 + s\theta_2 r_2 & d_3 + c\theta_3 d_4 & 0 \\ c\theta_2 d_3 + c\theta_2 c\theta_3 d_4 + d_2 + s\theta_2 r_3 & 0 & c\theta_3 d_4 \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

O determinante da matriz dada na Eq.(2.15) é dado por:

$$\det(J) = d_4 \{ (d_3 + d_4 c\theta_3) [d_2 s\theta_3 + (d_3 s\theta_3 - r_2 c\theta_3) c\theta_2] + r_3 s\theta_2 (d_3 s\theta_3 - r_2 c\theta_3) \} \quad (2.16)$$

2.3. Modelo Geométrico Inverso (MGI)

Neste modelo, as coordenadas operacionais do efetuador em relação à base são conhecidas e procura-se determinar as coordenadas das juntas, dadas pelos ângulos θ_1 , θ_2 e θ_3 , que correspondem à uma situação dada do efetuador.

De modo geral, a determinação do MGI de manipuladores seriais não é uma tarefa fácil, no entanto, a maioria dos manipuladores industriais é projetada de modo a apresentar solução analítica, ou seja, solução na forma explícita (PAUL, 1981).

Geralmente, a resolução do MGI para um manipulador com 3 gdl consiste em resolver um polinômio de grau 4 em $t = \tan(\theta_i/2)$, $i = 1, 2, 3$, que depende do ângulo de uma das juntas. Os coeficientes deste polinômio dependem dos parâmetros de DH do manipulador estudado e

da posição do efetuador no espaço cartesiano. O número máximo de soluções é igual a 4 (PIEPER, 1968). No capítulo 3 será apresentada a solução do polinômio obtido pelo MGI de um manipulador 3R ortogonal. Como se trata de um problema algébrico complicado utilizou-se a ferramenta algébrica Base de Groebner visando facilitar a obtenção das soluções.

2.4. Espaço de Trabalho

O espaço de trabalho $W(H)$, também dito espaço operacional, de um ponto H situado na extremidade do efetuador é o conjunto de todos os pontos que H ocupa quando as variáveis das juntas (ângulos θ_1 , θ_2 e θ_3) são variadas em todos os seus intervalos de definição (GUPTA; ROTH, 1982). Ele representa o volume total alcançado pelo efetuador quando o manipulador executa todos os movimentos possíveis, sendo influenciado pelo número de juntas e comprimento dos segmentos.

O procedimento mais imediato para investigar o espaço de trabalho é variar os ângulos das juntas sobre seus intervalos de definição e estimar as coordenadas do ponto H com relação à base do manipulador. Desta maneira, obtêm-se as posições atingíveis pelo efetuador, tendo como resultado a representação vetorial dada por H .

O espaço de trabalho pode ser obtido por intermédio da extensão radial r e axial z com relação à base (BERGAMASCHI, 2004). Assim, utiliza-se as equações paramétricas do lugar geométrico descrito pelo ponto H sobre um plano radial. Como ilustração desta metodologia, a Fig. 2.3(a) exhibe o espaço de trabalho seccionado de um determinado manipulador 3R, obtido pela rotação, em torno do eixo Z , de uma seção radial plana que funciona como uma seção geratriz. A Fig. 2.3(b) esboça a seção radial relativa ao espaço de trabalho mostrado na Fig. 2.3(a) (BERGAMASCHI, 2004).

As Equações (2.14) representam a equação do lugar geométrico descrito pelo ponto H no semiplano radial do sistema fixo na base. Ela pode ser pensada como sendo a equação de uma família de curvas planas, no plano rz , de parâmetros θ_2 e θ_3 . A Fig. 2.4 ilustra uma família de curvas que está contida na seção radial do espaço de trabalho, considerando dois tipos diferentes de manipuladores 3R ortogonais.

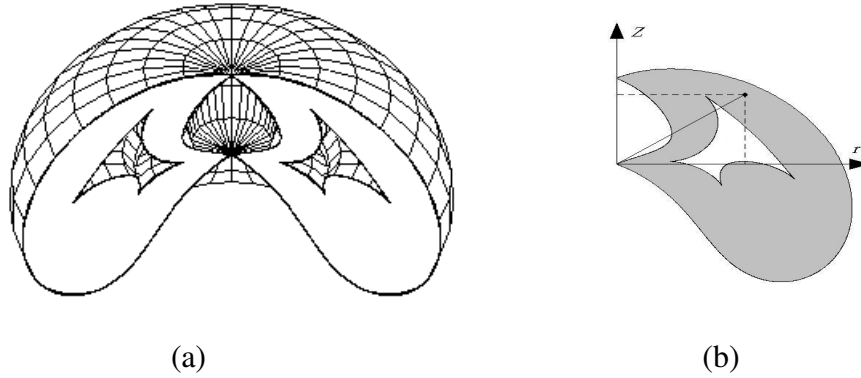


Figura 2.3 - (a) Espaço de trabalho de um robô 3R; (b) seção radial plana

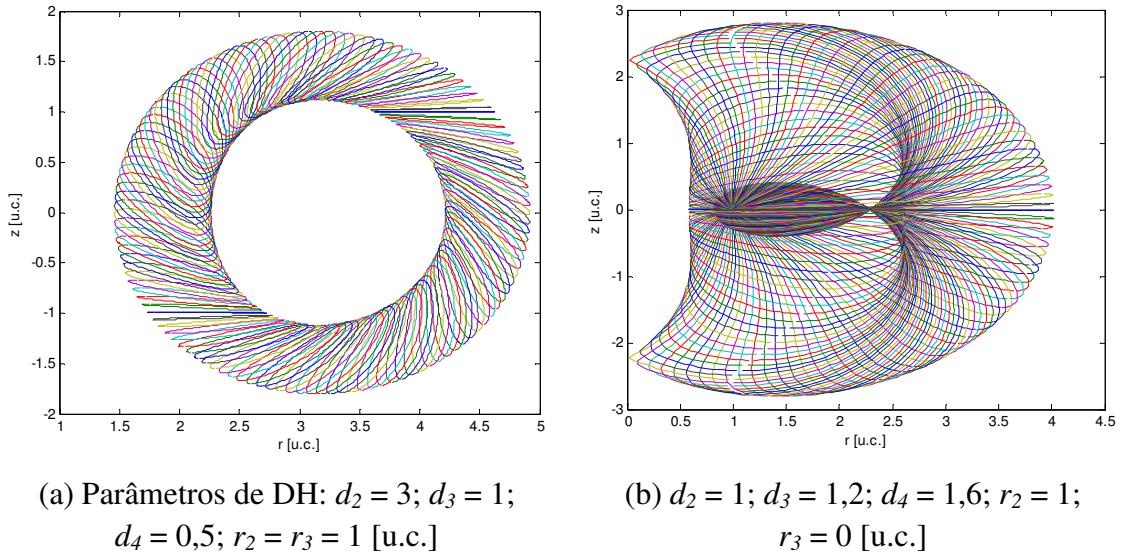


Figura 2.4 - Família de curvas que descrevem a seção radial do espaço de trabalho para dois tipos diferentes de manipuladores 3R ortogonais

2.5. Postura e Mudança de Postura de Manipuladores

A partir do modelo geométrico inverso de um manipulador, pode-se obter uma ou várias soluções à partir de uma posição e uma orientação dadas para o seu efetuador.

Cada solução do MGI corresponde a um vetor $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)^T$ que representa a configuração do manipulador para que o efetuador possa atingir um ponto dado, para uma dada orientação, de seu espaço de trabalho.

O termo *postura* designa uma das configurações articulares possíveis, dada pelas soluções do MGI, para uma posição e orientação definida para o efetuador.

Diz-se que um manipulador *muda de postura* quando ele passa de uma postura a outra. Ao longo de uma mudança de posição, o efetuador executa uma trajetória fechada no espaço operacional.

Como exemplo, seja o manipulador planar 2R da Fig. 2.5. Escolhendo como coordenadas operacionais as coordenadas de posição (P_x , P_y) do ponto E no plano x_0y_0 , observa-se que este manipulador pode atingir este ponto por duas posturas (uma postura onde o manipulador está em linha tracejada e outra onde ele está em linha cheia). Para este tipo de manipulador, estas duas posturas são comumente denominadas posturas “cotovelo alto” e “cotovelo baixo”.

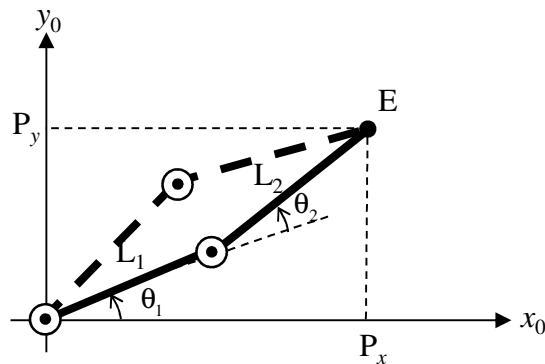


Figura 2.5 - Mudança de Postura de um Manipulador Planar 2R

O manipulador da Fig. 2.5 passa pela singularidade “braço tenso” para mudar de postura (cotovelo alto versus cotovelo baixo e inversamente) (EL OMRI, 1996).

2.6. Noções sobre Singularidades

As singularidades desempenham um papel muito importante no comportamento dos robôs manipuladores. Sua análise permite conhecer a topologia do espaço de trabalho de um manipulador.

O operador geométrico divide o espaço de trabalho em regiões ao longo dos lugares das singularidades. Este operador transforma os domínios do espaço articulado em regiões no espaço operacional, as quais formam o espaço de trabalho. Este espaço é composto de uma ou várias regiões com diferentes *graus de acessibilidade* (número de posturas para o efetuador atingir o mesmo ponto numa região).

Configurações singulares são posições particulares em que o sistema robótico torna-se incontrolável e que devem ser evitadas durante a operação do sistema. Em tais configurações, uma estrutura pode apresentar mudanças significativas de comportamento (o efetuador do manipulador perde localmente um ou vários gdl, isto significa que ele alcançou as fronteiras do espaço de trabalho que dependem, por exemplo, das dimensões de suas peças). Para prever estas situações indesejáveis, geralmente é feita uma análise da matriz Jacobiana da estrutura serial para determinar tais configurações (TSAI, 1999).

Uma *singularidade* é definida pelo conjunto das configurações que anulam o determinante da matriz Jacobiana J . Assim, para obter as singularidades basta que o determinante de J se anule. Existem três tipos de pontos singulares, denominados *singularidades de base*. Trata-se dos pontos singulares “simples” (chamados também de singularidades genéricas); pontos singulares “duplos” (cruzamento das singularidades) e pontos de cúspides (chamados também de Whitney) (EL OMRI, 1996).

Em manipuladores seriais, a condição de singularidade é função das juntas intermediárias, não dependendo da primeira e nem da última junta. Isto ocorre porque a presença de singularidades depende apenas da posição relativa dos eixos das juntas (TSAI, 1999).

As configurações singulares podem ser do tipo *posição* (ou seja, o efetuador não pode executar certas translações), do tipo *orientação* (o efetuador não pode executar certa rotação) e do tipo *mista* (combinação de ambas, onde o efetuador não pode executar certo movimento helicoidal) (EL OMRI, 1996).

As singularidades de posição dos manipuladores 3R são de três tipos, ocorrem quando a matriz Jacobiana não é completa:

- *Singularidade do tipo 1*: Uma das colunas da matriz jacobiana J é nula. Isto ocorre quando o efetuador está sobre um eixo da junta rotacional, consequentemente, esta junta não influencia o movimento do efetuador. A Fig. 2.6(a) representa um manipulador cujo efetuador corta o eixo da primeira junta.
- *Singularidade do tipo 2*: Duas colunas da matriz J são proporcionais. Neste caso, a contribuição das duas juntas ao movimento do efetuador é a mesma. A Fig. 2.6(b) representa um manipulador em configuração singular do tipo 2: os dois últimos eixos são paralelos, portanto, as duas juntas desempenham o mesmo papel.

- *Singularidade do tipo 3*: Este é o caso mais geral, as colunas de J formam um sistema dependente. Para um manipulador 3R, este tipo de singularidade é definido quando o efetuador está sobre uma linha, denominada direção singular, que encontra todos os eixos articulados, conforme Fig. 2.6(c).

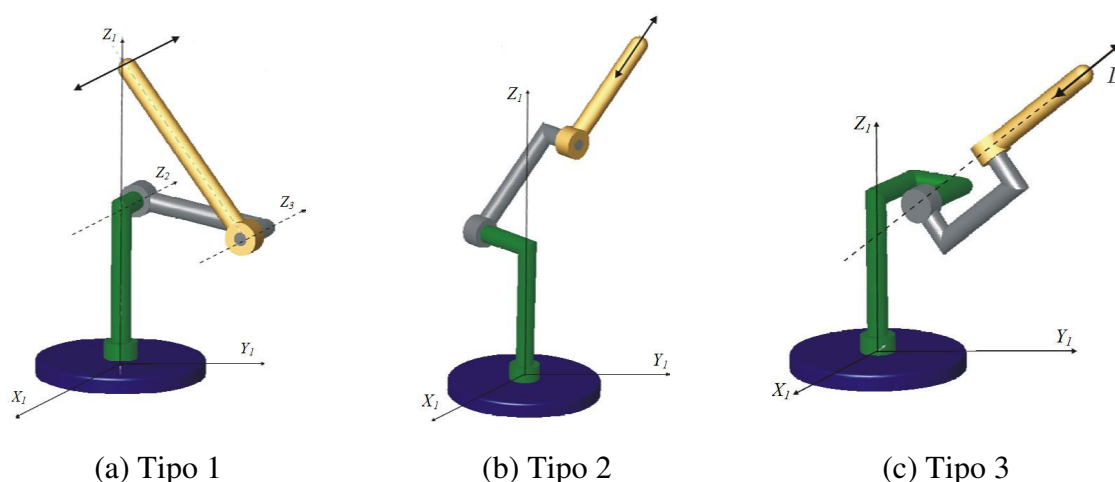


Figura 2.6 - Singularidades de posição para alguns exemplos de manipuladores 3R (EL OMRI, 1996; BAILI, 2004)

O conhecimento dos lugares de singularidades é importante para o comando dos robôs no espaço de trabalho. Existe uma relação entre as propriedades cinemáticas globais de um manipulador e a topologia dos lugares das singularidades. Poucos pesquisadores se interessam pela análise global, entretanto, a geometria e a topologia das singularidades representam um meio pertinente para a análise e a classificação das propriedades cinemáticas dos manipuladores (BAILI, 2004).

A determinação das singularidades é fundamental para a realização desta pesquisa, pois elas definem as equações que separam as diversas topologias do espaço de trabalho de manipuladores 3R que possuem propriedades cinemáticas semelhantes, como por exemplo, grau de acessibilidade e tipos de manipuladores: binários, quaternários, genéricos, etc.

As singularidades de um manipulador podem ser calculadas de diferentes modos. No caso dos manipuladores 3R, podem ser calculadas considerando o espaço das juntas e o espaço operacional.

No espaço das juntas, o caminho clássico é encontrar as raízes do determinante da matriz Jacobiana do manipulador e no espaço operacional, é calcular as raízes do polinômio do MGI, conforme Kohli e Spanos (1985), Tsai *et al.* (1993), Ranjbaran e Angeles (1994) e El

Omri (1996). Um estudo detalhado para a obtenção das curvas que separam as diversas topologias do espaço de trabalho do manipulador 3R ortogonal é apresentado no capítulo 3.

Para estudar o espaço de trabalho de um manipulador é suficiente determinar os lugares das singularidades neste espaço, já que eles compreendem as fronteiras externas e internas (se elas existem). O modo mais simples consiste em calcular a imagem das singularidades pelo operador geométrico do manipulador. Pode-se citar dois métodos que permitem ter a estrutura das fronteiras do espaço de trabalho: calcular as raízes duplas do MGI ou de modo geométrico (EL OMRI, 1996).

Kohli e Hsu (1987) mostraram que para um manipulador com n gdl, as singularidades são hiper-superfícies de dimensão $(n-1)$. Elas dividem o espaço de trabalho em um número finito de regiões disjuntas com diferentes graus de acessibilidade. Sobre as curvas de singularidades, ao menos 2 raízes do MGI são idênticas.

O MGI pode ser reduzido a um polinômio em uma das variáveis das juntas. Ranjbaran e Angeles (1994) apresentam explicitamente a equação das singularidades no espaço operacional partindo do MGI. O lugar dos pontos onde este polinômio admite raízes múltiplas é exatamente o lugar das singularidades no espaço operacional. Na prática, estas singularidades são obtidas traçando o gráfico da equação que define a envoltória do espaço de trabalho (como pode ser visto em BERGAMASCHI, 2004; BAILI, 2004) no plano rz resultante da anulação do discriminante do polinômio do MGI (KOHLI; SPANOS, 1985; TSAI *et al.*, 1993; RANJBARAN; ANGELES, 1994; EL OMRI, 1996).

Gupta e Roth (1982) e Ceccarelli (1989) determinaram o espaço de trabalho de um manipulador 3R de modo geométrico sem se preocupar com o cálculo da Jacobiana, isso por prever os buracos e os vazios deste espaço. O espaço de trabalho também é composto de uma ou várias regiões com diferentes graus de acessibilidade. As fronteiras destas regiões (isto é, as fronteiras do espaço de trabalho) são as singularidades.

Uma formulação algébrica permitindo representar as superfícies de singularidade no espaço de trabalho de manipuladores 3R foi apresentada em Ottaviano *et al.* (2004).

Em 2004, Bergamaschi obteve uma formulação algébrica para caracterizar a fronteira do volume de trabalho de manipuladores 3R considerando a existência de anéis *vazios* (regiões não atingíveis pelo efetuador e que são envolvidas pelo espaço de trabalho) e *singularidades* (pontos onde a envoltória deixa de ser regular, ou seja, onde o seu gradiente se anula).

Existem outras formas de calcular as singularidades, por exemplo, o método recursivo de Burdick (1988), que é válido para manipuladores 3R. Este método é puramente geométrico e não necessita do cálculo da matriz Jacobiana e nem de seu determinante.

É comum na indústria a utilização de manipuladores “padrões” cujas propriedades são perfeitamente conhecidas. As principais tarefas destes manipuladores consistem em realizar operações de manutenção, soldagem ou pintura. Porém, com o avanço tecnológico, a diversidade das tarefas a realizar ou para satisfazer a tendência de minimização dos custos dos manipuladores e da concorrência, os projetistas são obrigados a propor manipuladores novos satisfazendo a demanda do mercado. Esta inovação não é automática, já que ela exige um conhecimento global de suas propriedades. Neste sentido, El Omri (1996) e Baili (2004), descrevem generalidades e propriedades importantes dos manipuladores que um projetista deve conhecer.

Na maioria dos manipuladores industriais, pode-se verificar a presença de regiões (aspectos) que apresentam 2 soluções do MGI e regiões que apresentam 4 soluções do MGI. Estas regiões, ou domínios que dependem do número de soluções do MGI, são denominadas por alguns autores de aspectos (BORREL; LIEGEOIS, 1986). A Fig. 2.7 mostra a seção radial do espaço de trabalho de um manipulador que apresenta duas regiões com 2 soluções e uma região com 4 soluções do MGI, portanto pode-se dizer que apresenta 3 aspectos em seu espaço de trabalho.

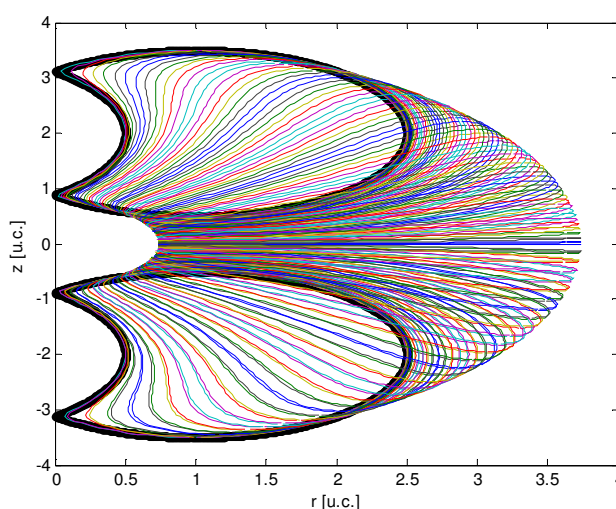


Figura 2.7 - Seção radial do espaço de trabalho de um manipulador 3R ortogonal apresentando 3 regiões denominadas aspectos

Outra definição, adotada por alguns autores, no estudo do espaço de trabalho são os ramos. Os ramos são diretamente definidos pela equação $\det(J) = 0$ (DOMBRE; KHALIL, 1999). Como ilustração, na Fig. 2.7, é apresentado um manipulador cujas envoltórias são formadas por 4 ramos.

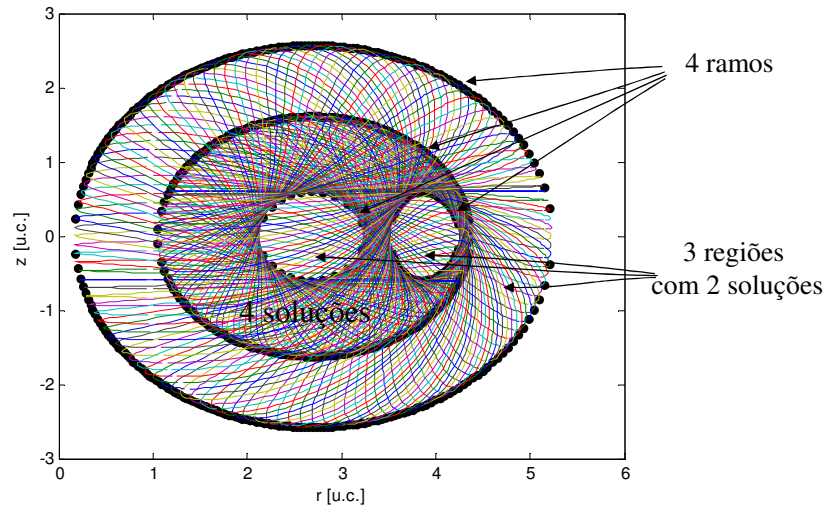


Figura 2.8 - Envoltórias com quatro ramos

Outra característica importante do espaço de trabalho é sua envoltória. Um teorema que estabelece condições para que uma envoltória seja *regular* (genérica) foi apresentado em Bergamaschi (2004):

Teorema: Sejam $f : U \rightarrow R$ e $\partial f / \partial t : U \rightarrow R$ funções de classe C^1 no aberto U de $R^2 \times R$ e $(x_0, y_0, t_0) \in U$ tais que

$$f(x_0, y_0, t_0) = \frac{\partial f}{\partial t}(x_0, y_0, t_0) = 0 \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial t} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} \neq 0 \text{ em } (x_0, y_0, t_0), \quad (2.18)$$

então, dada uma família de curvas, representada por $f(x, y, t) = 0$, a envoltória, dada por $t \mapsto (x(t), y(t))$, é *regular* em t_0 se, e somente se, $\partial^2 f / \partial t^2 \neq 0$ em (x_0, y_0, t_0) .

Na prática, as envoltórias genéricas são as superfícies regulares no espaço articulado onde não se cruzam com outras superfícies. As envoltórias regulares são estáveis. Este é o caso mais frequente para um manipulador com 3 gdl. As envoltórias cujos ramos se interceptam são *não genéricas* (ou não regulares).

Burdick (1995) mostrou que as envoltórias não genéricas são instáveis, uma pequena perturbação dos parâmetros geométricos provoca uma grande mudança na topologia do manipulador (PAI; LIEU, 1992).

A classificação das envoltórias em categorias estáveis e instáveis é importante no projeto de um manipulador para eliminar as singularidades. Na prática, as singularidades instáveis podem ser eliminadas por uma pequena modificação dos parâmetros geométricos do manipulador.

As envoltórias também podem ser classificadas em singularidades separáveis e não separáveis. Uma envoltória é dita *separável* quando ela separa o domínio das juntas em diferentes regiões. Uma envoltória é *não separável*, para um manipulador 3R, se ela possui somente um ramo de singularidade (BURDICK, 1988).

2.7. Manipulador Cuspidal

Inicialmente, pesquisadores acreditavam que para mudar de posição, o manipulador precisava transpor uma superfície de singularidade, mas isso nem sempre ocorre. Em 1988, Parenti e Innocenti estabeleceram a existência de mudanças de posturas sem a transposição de singularidade (a mudança de posição é não singular). Este resultado revolucionou os resultados adquiridos até então. A maioria dos manipuladores utilizados na indústria tem uma mudança de postura singular. No entanto, as mudanças de posturas não singulares são muito importantes, especialmente para os pesquisadores que se interessam no projeto dos manipuladores ou durante o seu controle, e não podem ignorar que uma trajetória fechada sem singularidade pode ser executada ao sair de uma posição e chegar à outra.

Para a maioria dos robôs manipuladores, o efetuador pode alcançar uma posição e orientação por diferentes posturas, sendo que cada postura corresponde a uma solução do MGI. A escolha de uma postura dá mais flexibilidade, principalmente quando se tem a presença de obstáculos no ambiente de trabalho. No entanto, os manipuladores que possuem regiões com diferentes números de soluções do MGI em seu espaço de trabalho devem passar

por uma superfície de singularidade para mudar de postura (BORREL; LIEGEOIS, 1986). Com isto, é possível prever e evitar as mudanças de posição durante uma trajetória, por exemplo, em soldagem, já que nesta mudança de postura, o efetuador deve, geralmente, voltar seu caminho sobre a fronteira do espaço de trabalho e deixar a trajetória. Por isso, o encontro de singularidades em movimento é conhecido como um sério problema. Como mostrado anteriormente na Fig. 2.5, o manipulador planar com dois segmentos possui duas posturas para uma dada posição do efetuador, a mudança de postura faz-se pela singularidade “braço tenso”. Assim, o efetuador deve, portanto, “saltar” sobre a fronteira do espaço de trabalho para ir à outra posição (EL OMRI, 1996).

Este comportamento não é geral, somente certos manipuladores, com regiões com diferentes números de soluções em seu espaço de trabalho, devem transpor uma singularidade para mudar de postura. Existem outros tipos de manipuladores denominados manipuladores *cuspidais* (podem mudar de postura sem transpor uma superfície de singularidade, ou seja, podem mudar de postura ao longo da trajetória que pertence a um mesmo aspecto). Um manipulador cuspidal deve ter singularidades evitáveis (EL OMRI, 1996).

Um manipulador para o qual deve-se necessariamente passar por uma singularidade para mudar de postura é denominado *não cuspidal*. Tal manipulador, ao seguir uma trajetória contínua, deve deixar a trajetória para mudar de postura indo sobre a fronteira de seu espaço de trabalho.

Estudos têm mostrado que os manipuladores cuspidais são numerosos e não podem ser utilizados como os outros. (WENGER *et al.*, 1993; EL OMRI, 1996; WENGER; EL OMRI, 1996; WENGER; EL OMRI, 1994). Daí a necessidade de classificá-los e conhecer suas propriedades.

El Omri e Wenger (1995) apresentaram um novo resultado que permite a classificação de manipuladores cuspidais como sendo manipuladores com 3 gdl que podem mudar de postura sem passar por uma configuração singular, se e somente se, existe em seu espaço de trabalho um ponto que possui 3 soluções do MGI coincidentes. Tal ponto é denominado *ponto de cúspide* (corresponde a uma raiz real tripla do MGI).

A Figura 2.9 mostra as singularidades de um manipulador ortogonal cuspidal em uma seção do espaço de trabalho, cujos parâmetros de DH são: $d_2 = 1$; $d_3 = 2$; $d_4 = 1,5$; $r_2 = 1$ e $r_3 = 0$ [u.c.]. Existem 4 pontos de cúspides e duas regiões (uma com 2 posições possíveis e outra com 4 soluções do MGI).

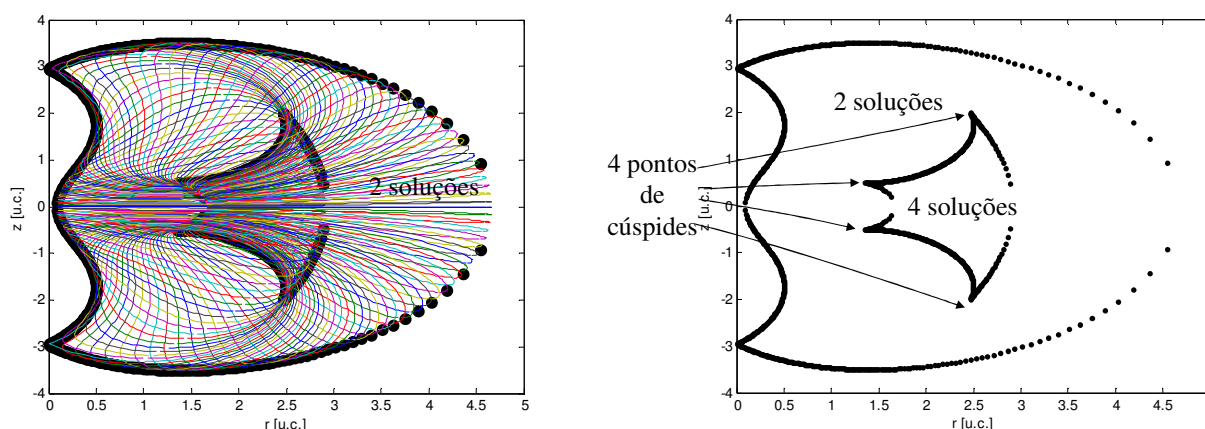


Figura 2.9 - Pontos de cúspides na seção do espaço de trabalho de um manipulador

Métodos numéricos ou gráficos podem ser utilizados para verificar as condições de existência de pontos de cúspides. Eles constituem uma ajuda importante para o projetista na escolha de um manipulador. Todavia, no caso geral, as condições de existência de pontos de cúspides em função dos parâmetros de DH não podem ser escritas explicitamente (El OMRI, 1996).

Dado que a existência de um ponto de cúspide prova que o manipulador é cuspidal, isso pode ser utilizado como critério de classificação. Para isto, é necessário procurar as raízes triplas do polinômio do MGI, se existir pelo menos uma, pode-se afirmar que o manipulador é cuspidal, e reciprocamente.

2.8. Manipuladores quadráticos, quárticos, binários, quaternários, genéricos e não genéricos

Um dos parâmetros que influenciam o comportamento de um manipulador são as soluções do seu MGI. A análise das soluções obtidas para o MGI permite definir o grau de acessibilidade do efetuador. Obter a solução do MGI se resume na resolução de um polinômio em uma das variáveis das juntas. Para manipuladores com 3 gdl este polinômio pode ser de grau 2 ou 4.

Um manipulador é dito *quadrático* se o polinômio resultante do MGI for de grau 2. Geralmente, para a maior parte dos manipuladores usuais, um manipulador cujos dois primeiros eixos são concorrentes ou paralelos é quadrático. A Figura 2.9 ilustra a seção radial do espaço de trabalho de um manipulador ortogonal quadrático, cujos parâmetros de DH são:

$d_2 = 1; d_3 = 0,6; d_4 = 0,3; r_2 = r_3 = 0$ [u.c.].

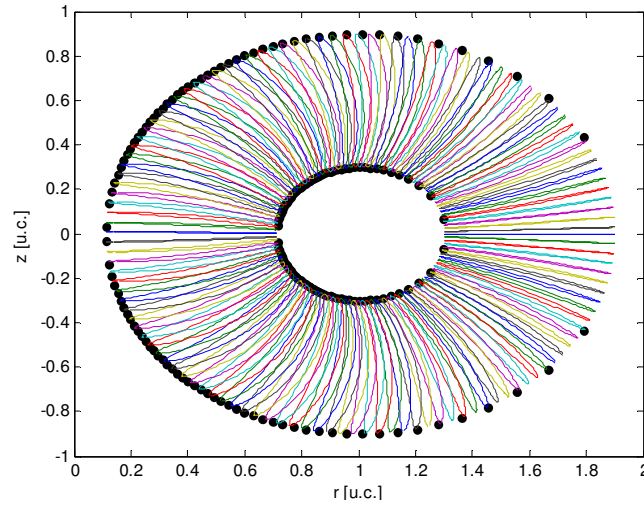


Figura 2.10 - Seção radial do espaço de trabalho de um manipulador quadrático

Os manipuladores *quárticos* são aqueles cujo polinômio correspondente ao MGI possui grau 4. Em geral, estes manipuladores são os mais numerosos. Podem ser classificados como manipuladores cuspidais e não cuspidais. Por exemplo, o manipulador ortogonal representado na Fig. 2.11(a), cujos parâmetros de DH são: $d_2 = 2,4; d_3 = 0,5; d_4 = 2; r_2 = 1,2$ e $r_3 = 0,5$ [u.c.] é um manipulador quártico não cuspidal, enquanto que o manipulador ortogonal ilustrado na Fig. 2.11(b), cujos parâmetros de DH são: $d_2 = 1; d_3 = 2; d_4 = 1,5; r_2 = 1,2$ e $r_3 = 0$ [u.c.] é quártico cuspidal.

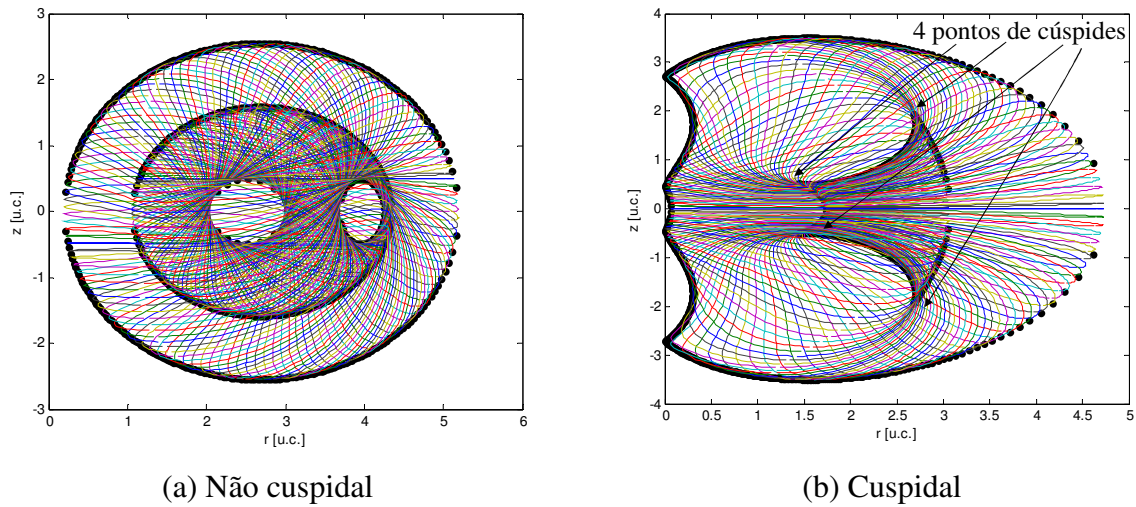


Figura 2.11 - Seção do espaço de trabalho de um manipulador ortogonal quártico

Com a resolução do polinômio do MGI é possível determinar todas as variáveis das juntas que permitem ao efetuador alcançar um ponto dado. O polinômio pode ter 2 ou 4 soluções reais. Com isto, é possível definir duas classes de manipuladores: os binários e os quaternários.

Todos os manipuladores com 3 gdl são binários ou quaternários, exceto os manipuladores 3P cujo polinômio do MGI possui solução única (EL OMRI, 1996).

Um manipulador é *binário* se o número máximo de soluções do seu MGI for igual a 2. Todos os manipuladores binários são não cuspidais.

Os manipuladores *quaternários* podem ter até 4 soluções na resolução de seu MGI e representam a maioria dos manipuladores. Burdick (1995) mostrou que os manipuladores 3R com $d_2 = 0$ ou $d_3 = 0$ (manipuladores cujos dois eixos se interceptam) são quaternários e Baili *et al.* (2003) mostraram que manipuladores com $r_3 \neq 0$ e tal que o último braço é superior ao seu precedente ($d_3 < d_4$) são quaternários. Todavia, esta condição é suficiente, mas não é necessária, já que existem manipuladores tais que $r_3 = 0$ e $d_3 > d_4$ que são quaternários, como por exemplo, o manipulador representado na Fig. 2.11(b). Uma condição necessária e suficiente, em função dos parâmetros de DH, para que um manipulador 3R ortogonal com $r_3 = 0$ seja quaternário foi estabelecida por Wenger *et al.* (2005) e é apresentada no próximo capítulo.

Em alguns casos, os manipuladores quadráticos podem ser quaternários. Se o polinômio do MGI é de grau 2, cada uma das duas soluções em θ_3 dão lugar a duas soluções em θ_2 . Consequentemente, pode ter 4 soluções do MGI que são representadas pelas 4 combinações possíveis dos pares (θ_2, θ_3) (SMITH, 1990; EL OMRI, 1996).

Como mencionado anteriormente, um manipulador é dito *genérico* se suas envoltórias não se interceptam no espaço das juntas e *não genérico* se as envoltórias se cortam no espaço das juntas. A Fig. 2.10 apresenta a seção radial de um manipulador genérico. A Fig. 2.12 mostra a seção do espaço de trabalho de um manipulador ortogonal não genérico, cujos parâmetros de DH são: $d_2 = 1,1$; $d_3 = 1,1$; $d_4 = 1,4$; $r_2 = 1,3$ e $r_3 = 0$ [u.c.].

Para os manipuladores não genéricos, uma pequena variação dos parâmetros geométricos modifica grandemente as propriedades das singularidades e, consequentemente, o comportamento do manipulador (PAI; LIEU, 1992; BURDICK, 1995).

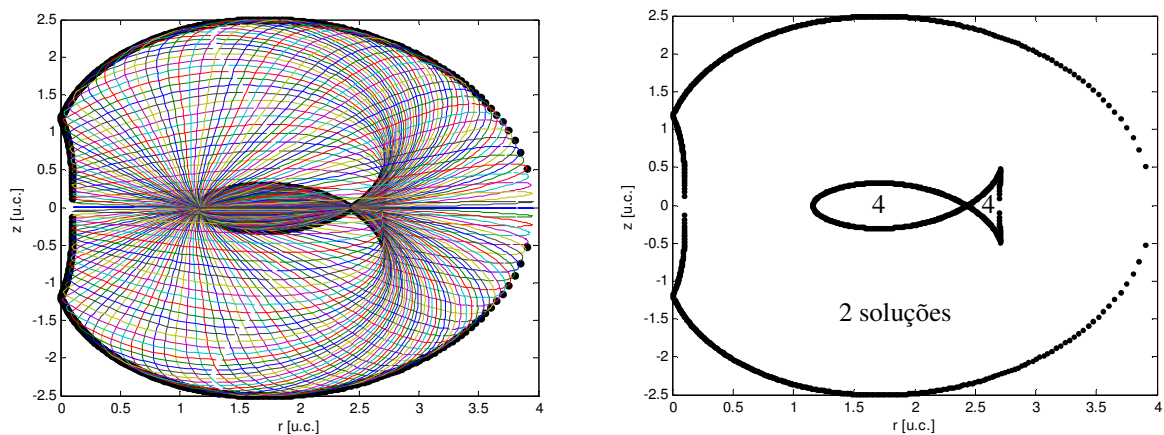


Figura 2.12 - Seção do espaço de trabalho de um manipulador ortogonal não genérico

As simplificações geométricas na morfologia de um manipulador conduzem geralmente aos manipuladores não genéricos. Isto explica o fato de grande parte dos manipuladores industriais serem não genéricos. As tolerâncias de precisão durante a fabricação destes manipuladores provocam erros sobre os parâmetros geométricos e podem desestabilizar posteriormente seus componentes. Tal manipulador pode não ter o comportamento segundo o seu projeto original, e sim o comportamento de um manipulador genérico cujos parâmetros de DH sejam próximos dos valores previstos. Um estudo da sensibilidade das propriedades dos manipuladores 3R com incertezas dos parâmetros geométricos foi realizado por Caro (2004). A Fig. 2.13(a) representa um manipulador ortogonal não genérico, não cuspidal, com 3 regiões, cujos dois primeiros eixos se cruzam (parâmetros de DH são: $d_2 = 0$; $d_3 = 2$; $d_4 = 1,5$; $r_2 = 1$ e $r_3 = 0$ [u.c.]). Introduzindo uma pequena diferença entre os dois primeiros eixos ($d_2 = 0,15$), o manipulador torna-se genérico, cuspidal e com somente 2 regiões, conforme mostra a Fig. 2.13(b).

A Tabela 2.2 traz o resumo de algumas classes dos manipuladores com 3 gdl encontrados na literatura, assim como suas principais características (EL OMRI, 1996; BAILI, 2004).

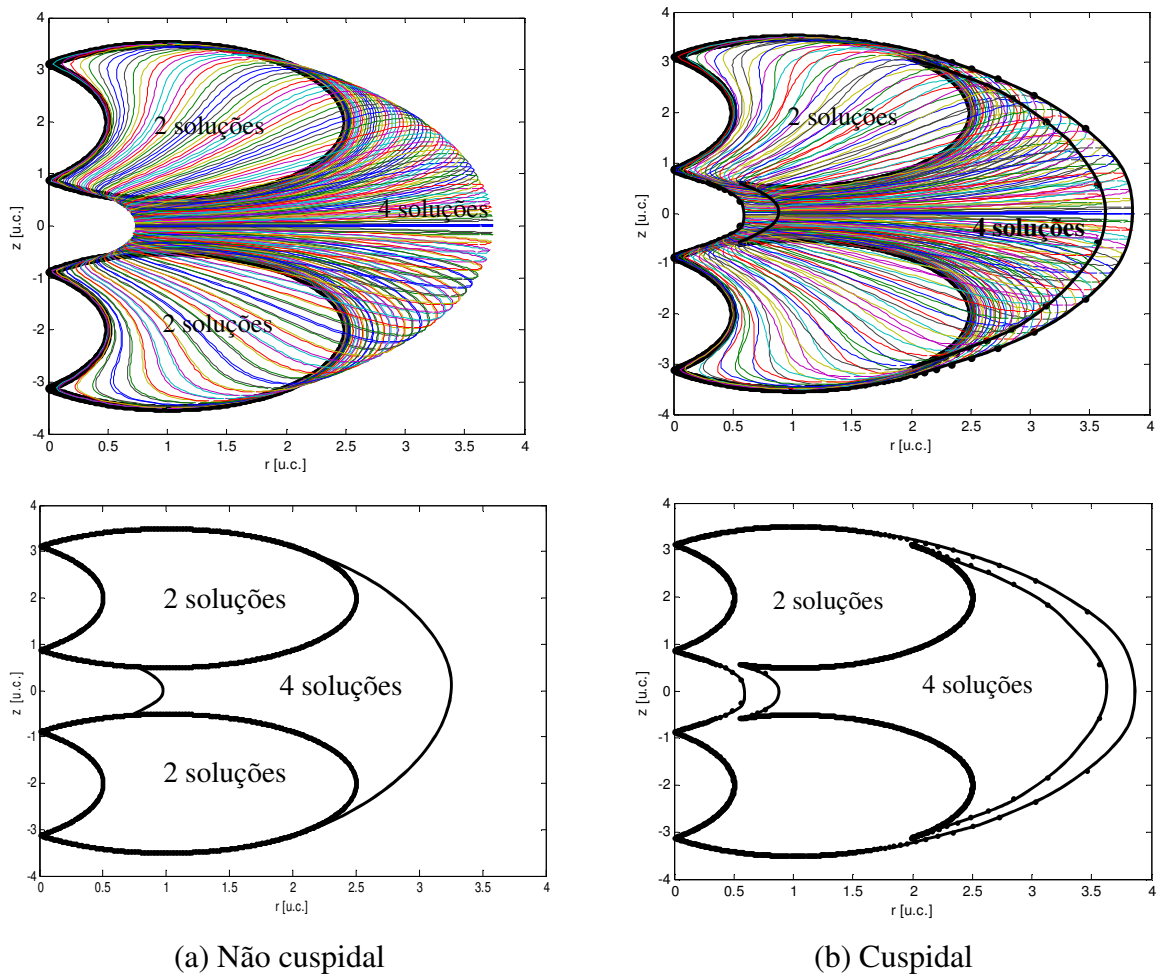


Figura 2.13 - Instabilidade de um manipulador ortogonal não genérico

Foram apresentadas aqui algumas propriedades geométricas e cinemáticas de manipuladores com 3 gdl. Estas propriedades constituem os critérios que podem ser atribuídos a um manipulador dado. Ou seja, para um conjunto de parâmetros de DH dado, é possível descrever todas as propriedades que tal manipulador pode ter. Porém não se têm resultados que permitem encontrar os parâmetros de um manipulador satisfazendo certo número de propriedades. Neste sentido, Baili (2004) dividiu o espaço dos parâmetros de duas famílias de manipuladores 3R ortogonais em vários subespaços denominados topologias do espaço de trabalho. Em cada topologia do espaço de trabalho, os manipuladores partilham as mesmas propriedades. Este estudo será apresentado nos capítulos 4 e 5.

Tabela 2.2 - Resumo das classes dos manipuladores com 3 gdl (EL OMRI, 1996)

Classes de manipuladores	Características
Quadrático	Polinômio do MGI de grau 2
Quártico	Polinômio do MGI de grau 4
Binário	Tem no máximo 2 soluções no MGI
Quaternário	Tem no máximo 4 soluções no MGI
Genérico	Estável, as envoltórias não se interceptam no espaço das juntas
Não Genérico	Instável, as envoltórias se interceptam no espaço das juntas, possui algum parâmetro dimensional nulo
Cuspidal	Existe pelo menos um ponto de cúspide no espaço de trabalho e pode mudar de posição sem transpor uma superfície de singularidade
Não Cuspidal	Não existe ponto de cúspide no espaço de trabalho e deve transpor uma singularidade para mudar de posição

Com esta divisão, é possível encontrar uma faixa de valores que compreendem os parâmetros de um manipulador satisfazendo certo número de propriedades. Com isto, esta tese propõe a aplicação de técnicas de otimização para encontrar o projeto ótimo de manipuladores em determinadas topologias. A metodologia será apresentada nos capítulos 6, 7 e os resultados das simulações numéricas no capítulo 8.

CAPÍTULO III

SOLUÇÃO DO POLINÔMIO DO MGI DE MANIPULADORES 3R

Para estudar as topologias dos manipuladores 3R é necessário conhecer as equações que as separam. Este capítulo é dedicado à obtenção de uma destas equações através da solução do polinômio do MGI utilizando a ferramenta algébrica Base de Groebner.

Nos casos clássicos utilizados na indústria, os manipuladores precisam passar por singularidades no espaço das juntas para mudar de posição, ou seja, o efetuador deve, geralmente, voltar seu caminho sobre a fronteira do espaço de trabalho e deixar a trajetória. Estas singularidades são definidas como os lugares onde o determinante da matriz Jacobiana do MGD se anula, originando as equações das superfícies que dividem o espaço de trabalho em várias regiões, ditas *domínios*, onde os manipuladores possuem as mesmas propriedades (binário/quaternário, mesmo número de pontos de cúspides e de nós, etc.).

Com o objetivo de classificar a família de manipuladores estudada segundo os critérios: genérico/não genérico; binário/quaternário; cuspidal/não cuspidal; número de pontos de cúspides (para o caso em que o manipulador seja cuspidal) e número de nós no espaço de trabalho, Baili (2004) dividiu o espaço dos parâmetros de DH em várias topologias do espaço de trabalho a partir da determinação das equações matemáticas das superfícies que os limitam.

Esta classificação é um meio interessante para ajudar o projetista a escolher os parâmetros de DH de um manipulador que deve satisfazer um conjunto de propriedades desejadas. Ou seja, se o projetista determina antecipadamente a topologia do espaço de trabalho do manipulador procurado, ele poderá obter um projeto ótimo que obedeça à classificação pretendida.

Toda a abordagem se inicia na procura de condições sobre os parâmetros de DH para que um manipulador seja cuspidal. Para um manipulador da família estudada ser cuspidal é

necessário que o polinômio correspondente ao seu MGI admita uma ou várias raízes triplas (EL OMRI; WENGER, 1995). Se existir pelo menos uma, pode-se afirmar que o manipulador é cuspidal, e reciprocamente. Neste trabalho, são considerados os manipuladores com três juntas rotacionais com eixos ortogonais ($\alpha_2 = -90^\circ$ e $\alpha_3 = 90^\circ$).

O estudo deste tipo de manipulador se baseia na topologia das superfícies de singularidades do espaço de trabalho e é feito em função dos parâmetros de DH restantes: d_2 , d_3 , d_4 e r_2 . A fim de reduzir o número de parâmetros, sem perda de generalidade, podem-se normalizar todos estes parâmetros em relação à d_2 (obviamente qualquer outro parâmetro pode ser utilizado). Adotando-se $d_2 = 1$, os parâmetros geométricos considerados são d_3 , d_4 e r_2 . As três variáveis das juntas consideradas são: θ_1 , θ_2 e θ_3 .

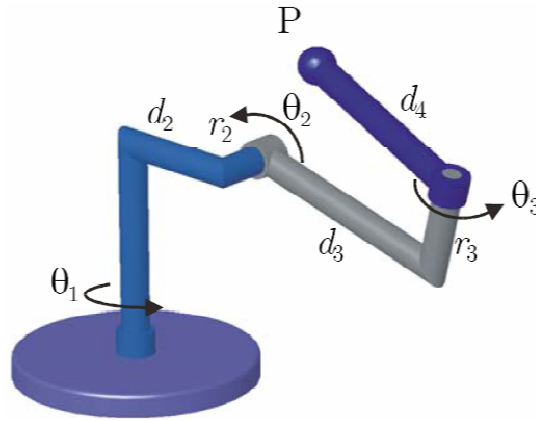


Figura 3.1 - Esquema do Manipulador Ortogonal Estudado (BAILI, 2004)

Substituindo as hipóteses simplificadoras $\alpha_2 = -90^\circ$, $\alpha_3 = 90^\circ$, $r_3 = 0$ e $d_2 = 1$, nas Eqs.(2.11) a (2.13), obtém-se as seguintes expressões:

$$\begin{aligned} x &= [1 + (d_3 + d_4 c\theta_3) c\theta_2] c\theta_1 - (r_2 + d_4 s\theta_3) s\theta_1 \\ y &= [1 + (d_3 + d_4 c\theta_3) c\theta_2] s\theta_1 + (r_2 + d_4 s\theta_3) c\theta_1 \\ z &= -(d_3 + d_4 c\theta_3) s\theta_2 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Existem vários métodos que permitem a resolução de sistemas polinomiais. Alguns métodos clássicos utilizados no domínio da robótica e que são muito conhecidos são: o método de Pieper (1968), que permite a resolução do MGI de manipuladores com 6 gdl possuindo três juntas rotacionais de eixos concorrentes ou três juntas prismáticas; e o Método de Paul (1981), que trata separadamente cada caso particular e sendo adequado à maior parte

dos robôs industriais.

Outros métodos podem ser utilizados com o objetivo de resolver os sistemas polinomiais resultantes da determinação do MGI de manipuladores seriais e do MGD de manipuladores paralelos. Os métodos de resolução mais empregados são baseados nos métodos de continuação ou de eliminação.

O método de continuação é puramente numérico. Em compensação, o método de eliminação (denominado também método das resultantes) é baseado na formulação algébrica e permite a eliminação de um grande número de variáveis em uma única etapa. Assim, em apenas uma etapa, este método permite reduzir um sistema de polinômios não lineares em várias variáveis, em um polinômio em uma única variável.

Um terceiro método permitindo resolver um sistema de polinômios não lineares é baseado nas Bases de Groebner (técnica iterativa de eliminação algébrica de variáveis). Utilizando as Bases de Groebner e com o objetivo de diminuir o número de incógnitas, a eliminação lexicográfica pode ser utilizada. A ordem de eliminação lexicográfica foi desenvolvida em Cox *et al.* (2005). Esta técnica produz um sistema triangular de equações cujas soluções representam as soluções do sistema inicial.

A existência de pelo menos um ponto de singularidade no espaço de trabalho com exatamente três soluções no MGI coincidentes é difícil de ser mostrada diretamente do MGD. A ideia é eliminar as variáveis de junta, θ_1 e θ_2 , do sistema, a fim de obter uma condição sobre a última variável, θ_3 . Para isto, são adicionadas as relações algébricas $c\theta_i^2 + s\theta_i^2 = 1$, $i = 1, 2, 3$, às Eqs.(3.1) do MGD, resultando num sistema algébrico de 6 equações:

$$\begin{aligned}
 x &= [1 + (d_3 + d_4 c\theta_3) c\theta_2] c\theta_1 - (r_2 + d_4 s\theta_3) s\theta_1 \\
 y &= [1 + (d_3 + d_4 c\theta_3) c\theta_2] s\theta_1 + (r_2 + d_4 s\theta_3) c\theta_1 \\
 z &= -(d_3 + d_4 c\theta_3) s\theta_2 \\
 c\theta_1^2 + s\theta_1^2 &= 1 \\
 c\theta_2^2 + s\theta_2^2 &= 1 \\
 c\theta_3^2 + s\theta_3^2 &= 1
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

ou equivalentemente:

$$\begin{aligned}
f_1 &= x - [1 + (d_3 + d_4 c\theta_3) c\theta_2] c\theta_1 + (r_2 + d_4 s\theta_3) s\theta_1 \\
f_2 &= y - [1 + (d_3 + d_4 c\theta_3) c\theta_2] s\theta_1 - (r_2 + d_4 s\theta_3) c\theta_1 \\
f_3 &= z + (d_3 + d_4 c\theta_3) s\theta_2 \\
f_4 &= c\theta_1^2 + s\theta_1^2 - 1 \\
f_5 &= c\theta_2^2 + s\theta_2^2 - 1 \\
f_6 &= c\theta_3^2 + s\theta_3^2 - 1
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Para resolver o sistema (3.3), calcula-se uma Base de Groebner. Para facilitar o entendimento do procedimento descrito anteriormente, será considerado um manipulador planar com três juntas rotacionais, conforme Fig. 3.2, cujo MGD é dado por:

$$\begin{aligned}
x &= d_3 (c\theta_1 c\theta_2 - s\theta_1 s\theta_2) + d_2 c\theta_1 \\
y &= d_3 (s\theta_1 c\theta_2 + s\theta_2 c\theta_1) + d_2 s\theta_1
\end{aligned} \tag{3.4}$$

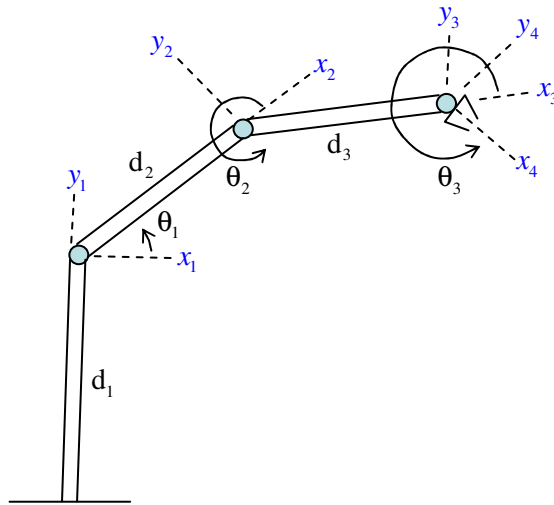


Figura 3.2 - Modelo esquematizado de um Manipulador Planar 3R

Adicionando as relações algébricas $c\theta_i^2 + s\theta_i^2 = 1$, sendo $i = 1, 2$, às Eqs.(3.4) do MGD, têm-se que estudar um sistema algébrico de 4 equações:

$$\begin{aligned}
x &= d_3(c\theta_1c\theta_2 - s\theta_1s\theta_2) + d_2c\theta_1 \\
y &= d_3(s\theta_1c\theta_2 + s\theta_2c\theta_1) + d_2s\theta_1 \\
0 &= c\theta_1^2 + s\theta_1^2 - 1 \\
0 &= c\theta_2^2 + s\theta_2^2 - 1
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Para este robô é fácil controlar a *orientação* do efetuador. Como a configuração da junta 3 é independente das configurações das juntas 1 e 2, dado algum θ_1 e θ_2 , é possível alcançar alguma orientação desejada $\alpha = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3$ pela configuração $\theta_3 = \alpha - (\theta_1 + \theta_2)$.

Para simplificar a solução do MGI, será utilizada a observação acima para ignorar a *orientação* do efetuador. Assim, concentra-se na *posição* do efetuador, que é uma função apenas de θ_1 e θ_2 .

Da Equação (3.5) é possível colocar o efetuador em um dado ponto (x, y) por meio do seguinte sistema de 4 equações polinomiais nas variáveis $s\theta_1, c\theta_1, s\theta_2, c\theta_2$:

$$\begin{aligned}
f_1 &= x - d_3(c\theta_1c\theta_2 - s\theta_1s\theta_2) - d_2c\theta_1 \\
f_2 &= y - d_3(s\theta_1c\theta_2 + s\theta_2c\theta_1) - d_2s\theta_1 \\
f_3 &= c\theta_1^2 + s\theta_1^2 - 1 \\
f_4 &= c\theta_2^2 + s\theta_2^2 - 1
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Para resolver estas equações, conforme apresentado em Cox *et al.* (2005), calcula-se uma Base de Groebner para o ideal gerado pelos polinômios f_1, f_2, f_3 e f_4 , usando a ordem *Lex* $c_2 > s_2 > c_1 > s_1$, onde $c_1 = c\theta_1, s_1 = s\theta_1, c_2 = c\theta_2$ e $s_2 = s\theta_2$ (vide Anexo I).

No comando **gbasis** do Maple9®, são informados os polinômios para os quais se deseja obter uma base de Groebner, seguido do comando que indica a ordenação dos monômios para a eliminação das variáveis. Para este exemplo, o comando é descrito abaixo:

```
> G := gbasis([x - d3*(c1*c2 - s1*s2) - d2*c1, y - d3*(c1*s2 + c2*s1) - d2*s1, c1^2 + s1^2 - 1, c2^2 + s2^2 - 1], plex(c2, s2, c1, s1));
```

O resultado é uma Base de Groebner Reduzida:

$$\begin{aligned}
G := & \left[-4d_2y^3s_1 + 4x^2d_2^2s_1^2 + 4y^2d_2^2s_1^2 + 4yd_2d_3^2s_1 + d_3^4 - 4yd_2^3s_1 - 2x^2d_2^2 \right. \\
& - 2d_3^2d_2^2 - 2x^2d_3^2 - 2y^2d_3^2 + 2y^2d_2^2 + 2x^2y^2 - 4d_2yx^2s_1 + d_2^4 + x^4 + y^4, \\
& d_3^2 + 2xd_2c_1 + 2yd_2s_1 - d_2^2 - x^2 - y^2, \\
& 2xd_2d_3s_2 + 2x^2d_2s_1 + 2y^2d_2s_1 + yd_3^2 - yd_2^2 - yx^2 - y^3, \\
& \left. 2d_3d_2c_2 + d_2^2 + d_3^2 - x^2 - y^2 \right]
\end{aligned} \tag{3.7}$$

A solução depende dos parâmetros x , y , d_2 e d_3 , que aparecem como parâmetros simbólicos nos coeficientes da Base de Groebner.

Em termos algébricos, esta é a Base de Groebner reduzida para o ideal I gerado pelos polinômios em (3.6), no anel $(x, y, d_2, d_3) [s_1, c_1, s_2, c_2]$.

Retornando ao sistema algébrico que representa o manipulador 3R em estudo, dado nas Eqs.(3.3), para eliminar θ_1 e θ_2 , calcula-se uma Base de Groebner para o ideal gerado pelos polinômios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 e f_6 .

De forma similar ao robô planar, calcula-se a Base de Groebner através do comando **gbasis** do Maple9®, para o ideal gerado pelos polinômios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 e f_6 dados pelas Eqs.(3.3), usando a ordem *Lex* $c_3 > s_3 > r_2 > d_3 > d_4$. Neste caso, o comando é descrito como:

$$> G := \mathbf{gbasis}([f1,f2,f3,f4,f5,f6], \text{lexdeg}([c1,s1,c2,s2],[c3,s3,r2,d3,d4,x,y,z]));$$

O resultado obtido para a Base de Groebner reduzida para o manipulador 3R em estudo é composta pelos polinômios:

$$p_1(\theta_3) = c\theta_3^2 + s\theta_3^2 - 1 \tag{3.8}$$

e

$$p_2(\theta_3) = m_5c\theta_3^2 + m_4s\theta_3^2 + m_3c\theta_3s\theta_3 + m_2c\theta_3 + m_1s\theta_3 + m_0, \tag{3.9}$$

sendo:

$$\begin{cases} m_0 = -x^2 - y^2 + r_2^2 + \frac{(R+1-L)^2}{4} \\ m_1 = 2r_2d_4 + (L-R-1)d_4r_2 \\ m_2 = (L-R-1)d_3d_4 \\ m_3 = 2r_2d_3d_4^2 \\ m_4 = d_4^2(r_2^2 + 1) \\ m_5 = d_3^2d_4^2 \end{cases} \quad (3.10)$$

$$R = x^2 + y^2 + z^2 \quad \text{e} \quad L = d_4^2 + d_3^2 + r_2^2 \quad (3.11)$$

Considere a mudança de variáveis em $t = \text{tg}(\theta_3/2)$ e as relações abaixo:

$$\text{c}\theta_3 = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \text{e} \quad \text{s}\theta_3 = \frac{2t}{1+t^2} \quad (3.12)$$

Substituindo as Eqs.(3.10) e (3.12) na Eq.(3.9), o polinômio $p_2(\theta_3)$ torna-se:

$$p_2(t) = \frac{m_5(1-2t^2+t^4)}{(1+t^2)^2} + \frac{4m_4t^2}{(1+t^2)^2} + \frac{(m_3-m_3t^2)2t}{(1+t^2)^2} + \frac{(m_2-m_2t^2)}{(1+t^2)} + \frac{2m_1t}{(1+t^2)} + m_0 \quad (3.13)$$

Simplificando e igualando a zero, tem-se:

$$\begin{aligned} p_2(t) = & (m_5 - m_2 + m_0)t^4 + (-2m_3 + 2m_1)t^3 + (-2m_5 + 4m_4 + 2m_0)t^2 \\ & + (2m_3 + 2m_1)t + (m_5 + m_2 + m_0) = 0 \end{aligned} \quad (3.14)$$

Fazendo

$$\begin{cases} a = m_5 - m_2 + m_0 \\ b = -2m_3 + 2m_1 \\ c = -2m_5 + 4m_4 + 2m_0 \\ d = 2m_3 + 2m_1 \\ e = m_5 + m_2 + m_0 \end{cases} \quad (3.15)$$

obtém-se o polinômio:

$$P(t) = at^4 + bt^3 + ct^2 + dt + e \quad (3.16)$$

Sabe-se que um manipulador é cuspidal se o polinômio $P(t)$ de grau 4 com coeficientes em função de x, y, z, d_3, d_4 e r_2 admitir raiz real tripla (BAILI, 2004). Isto equivale a resolver o seguinte sistema:

$$S(t, a, b, c, d, e) = \begin{cases} P(t, Z, R, d_3, d_4, r_2) = 0 \\ \frac{\partial P(t, Z, R, d_3, d_4, r_2)}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial^2 P(t, Z, R, d_3, d_4, r_2)}{\partial t^2} = 0 \end{cases} \quad (3.17)$$

No sistema polinomial S , as variáveis do problema são t, R e Z , onde $Z = z^2$, enquanto os parâmetros estritamente positivos do problema são d_3, d_4 e r_2 . O anulamento de um destes parâmetros resulta em um manipulador não cuspidal (EL OMRI, 1996).

A resolução do sistema S consiste em dividir o espaço dos parâmetros (d_3, d_4 e $r_2 > 0$) em várias regiões onde o número de soluções do problema é constante. Em cada região, obtém-se o número de soluções do problema e é dado um par de parâmetros de um manipulador representando a região em questão (CORVEZ; ROUILLIER, 2002). Não é interessante considerar os manipuladores cujos parâmetros se encontram nas superfícies que separam as diferentes regiões, pois considerando tolerâncias necessárias durante o processo de fabricação, não se pode construir um manipulador cujos parâmetros geométricos estão exatamente sobre uma superfície que delimita duas regiões. Todas as regiões comportam os manipuladores que possuem as mesmas propriedades. Estas regiões são definidas como *domínios*. Para a classificação da família de manipuladores estudada, é mostrada, a cada passagem entre dois domínios, uma seção do espaço de trabalho do manipulador pertencendo à superfície de separação a fim de ilustrar a transição.

Sob as hipóteses $Z > 0$ e $R - Z > 0$, sendo $R = x^2 + y^2 + z^2$, é possível a eliminação das variáveis t, Z e R . Depois de efetuar várias mudanças de variáveis e da utilização das Bases de Groebner obtém-se um sistema triangular cuja solução é equivalente à solução do sistema

inicial (3.17). O estudo e análise deste novo sistema, utilizando o algoritmo Cylindrical Algebraic Decomposition – CAD (CORVEZ; ROUILLIER, 2002), permite escrever os cinco polinômios abaixo:

$$g_1 : r_2^2 + d_3^2 - d_4^2 = 0 \quad (3.18)$$

$$g_2 : d_4^2 \left[\left(1 + r_2^2 + d_3^2 \right)^2 - 4d_3^2 \right] \left(r_2^2 + d_3^2 - d_4^2 \right) - r_2^2 d_3^2 = 0 \quad (3.19)$$

$$g_3 : r_2^2 d_4 - d_3 + d_4 = 0 \quad (3.20)$$

$$g_4 : (d_3 - 1)^2 (d_3^2 - d_4^2) + r_2^2 d_3^2 = 0 \quad (3.21)$$

$$g_5 : (d_3 + 1)^2 (d_3^2 - d_4^2) + r_2^2 d_3^2 = 0 \quad (3.22)$$

Na classificação a ser apresentada no próximo capítulo, as equações das superfícies de separação serão obtidas através de raciocínio geométrico e comparadas com as superfícies dadas por estes cinco polinômios dados pelas Eqs.(3.18) a (3.22).

Uma condição necessária e suficiente para que um manipulador ortogonal com $r_3 = 0$ seja quaternário, ou seja, tenha 4 soluções distintas no MGI é apresentada a seguir. Esta condição depende dos parâmetros de DH do manipulador. O método de cálculo é detalhado na próxima seção.

3.1. Condição de Existência de um Ponto Quádruplo

Para determinar a equação da superfície de separação entre os domínios dos manipuladores binários e os manipuladores quaternários, escreve-se a condição de existência de um ponto quádruplo (4 soluções no MGI) a partir do polinômio do MGI de grau 4, dado na Eq.(3.16). Este polinômio pode ser reescrito na forma:

$$P(t) = \tilde{a}t^4 + \tilde{b}t^3 + \tilde{c}t^2 + \tilde{d}t + \tilde{e} = 0, \quad (3.23)$$

onde seus coeficientes estão em função de $t = \tan(\theta_3/2)$, x , y , z e dos parâmetros de DH. Para a família de manipuladores 3R ortogonais, com $d_2 = 1$ e $r_3 = 0$, tem-se então:

$$\tilde{a} = d_3^2 d_4^2 - d_3 d_4 R_2 - R_1 + \frac{R_2^2}{4} + r_2^2 \quad (3.24)$$

$$\tilde{b} = \frac{d_4 r_2 (-2d_3 d_4 + R_2 + 2)}{8} \quad (3.25)$$

$$\tilde{c} = \left(-\frac{d_3^2 d_4^2}{3} + \frac{2d_4^2 r_2^2}{3} + \frac{2d_4^2}{3} - \frac{R_1}{3} + \frac{R_2^2}{12} + \frac{r_2^2}{3} \right) \frac{1}{6} \quad (3.26)$$

$$\tilde{d} = \frac{d_4 r_2 (2d_3 d_4 + R_2 + 2)}{8} \quad (3.27)$$

$$\tilde{e} = d_3^2 d_4^2 + d_3 d_4 R_2 - R_1 + \frac{R_2^2}{4} + r_2^2, \quad (3.28)$$

$$\text{sendo } R_2 = -R_1 - z^2 - 1 + d_3^2 + r_2^2 + d_4^2, \quad R_1 = x^2 + y^2 \quad (3.29)$$

Para $P(t)$ admitir raiz quádrupla, as três equações seguintes devem ser verificadas:

$$\tilde{a}\tilde{e} - \tilde{b}\tilde{d} = 0 \quad (3.30)$$

$$\tilde{a}\tilde{d} - \tilde{b}\tilde{c} = 0 \quad (3.31)$$

$$\tilde{a}\tilde{c} - \tilde{b}^2 = 0 \quad (3.32)$$

A fim de escrever uma condição que dependa apenas dos parâmetros de DH, deve-se eliminar as coordenadas cartesianas x , y e z . Ou seja, deve-se eliminar R_1 e R_2 . Esta eliminação pode ser feita utilizando as ferramentas algébricas desenvolvidas em Buchberger *et al.* (1982). Estas ferramentas estão disponíveis em alguns softwares de cálculo simbólico (no Maple utiliza-se a função *Resultant*). A partir das Eqs.(3.30) e (3.32), elimina-se primeiro R_1 , obtendo-se um polinômio de grau 4 em R_2 . Em seguida, elimina-se R_1 nas Eqs.(3.31) e (3.32), obtendo um polinômio de grau 3 em R_2 . Finalmente, elimina-se R_2 dos dois polinômios encontrados, resultando no seguinte polinômio:

$$d_3^{12} d_4^2 r_2^4 Q_1 Q_2 Q_3 = 0, \quad (3.33)$$

onde Q_1 , Q_2 e Q_3 são três polinômios em função de d_3 , d_4 e r_2 :

$$Q_1 = d_3^6 d_4^2 - d_3^4 d_4^4 + 3r_2^2 d_3^4 d_4^2 - 2d_3^4 d_4^2 + 2d_3^2 d_4^4 - 2r_2^2 d_3^2 d_4^4 + d_3^2 d_4^2 + 3r_2^4 d_3^2 d_4^2 - r_2^2 d_3^2 - 2r_2^2 d_4^4 - r_2^4 d_4^4 - d_4^4 + r_2^6 d_4^2 + r_2^2 d_4^2 + 2r_2^4 d_4^2 \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} Q_2 = & -543d_4^5 d_3^2 r_2^2 + 648d_4^5 d_3^4 - 81d_4^5 d_3^2 - 32d_4^4 r_2^4 d_3 - 8d_4^4 r_2^2 d_3 + 1110d_3^3 r_2^2 d_4^4 - 25r_2^2 d_3^5 - 47d_3^2 d_4^3 r_2^2 \\ & - 141d_3^2 d_4^3 r_2^4 - 47d_3^2 d_4^3 r_2^8 - 210d_3^6 d_4 r_2^2 + 486d_3^{10} d_4^3 + 972d_3^6 d_4^3 - 1215d_3^8 d_4^3 - 1458d_3^5 d_4^4 \\ & - 8d_3^4 d_4^4 r_2^{10} - 48d_3^4 d_4^4 r_2^6 - 32d_3^4 d_4^4 r_2^8 - 141d_3^2 d_4^3 r_2^6 + 243d_3^3 d_4^4 + 81d_3^5 d_4^2 - 162d_3^7 d_4^2 + 81d_3^9 d_4^2 \\ & - 243d_3^4 d_4^3 + 1224d_3^3 d_4^4 r_2^6 + 300d_3^3 d_4^4 r_2^8 + 1791d_3^3 d_4^4 r_2^4 - 801d_3^4 d_4^3 r_2^2 + 35d_3^4 d_4 r_2^4 + 29d_3^3 d_4^2 r_2^6 \\ & + 444d_3^5 d_4^2 r_2^2 + 58d_3^3 d_4^2 r_2^4 + 35d_3^4 d_4 r_2^2 + 16d_4^5 r_2^{12} + 80d_4^5 r_2^{10} + 160d_4^5 r_2^8 + 160d_4^5 r_2^6 + 80d_4^5 r_2^4 \\ & + 16d_4^5 r_2^2 - 177d_3^5 d_4^2 r_2^4 - 813d_3^7 d_4^2 r_2^2 - 2340d_3^8 d_4^5 r_2^2 + 2052d_3^4 d_4^5 r_2^4 - 2025d_3^6 d_4^5 + 3078d_3^8 d_4^5 \\ & - 3096d_3^7 d_4^4 r_2^4 + 1440d_3^5 d_4^4 r_2^6 - 459d_3^6 d_4^3 r_2^4 + 72d_3^9 d_4^4 r_2^2 + 2268d_3^{10} d_4^5 r_2^2 + 1872d_3^8 d_4^5 r_2^4 \\ & + 648d_3^{12} d_4^5 + 972d_3^{11} d_4^4 - 2268d_3^{10} d_4^5 + 3159d_3^7 d_4^4 - 1188d_3^5 d_4^4 r_2^4 + 2601d_3^6 d_4^3 r_2^2 - 72d_3^6 d_4^5 r_2^6 \\ & + 180d_3^4 d_4^5 r_2^6 + 2340d_3^6 d_4^5 r_2^4 + 2352d_3^4 d_4^5 r_2^2 - 1773d_3^8 d_4^3 r_2^2 - 2682d_3^5 d_4^4 r_2^2 - 1557d_3^6 d_4^5 r_2^2 \\ & + 1872d_3^7 d_4^4 r_2^2 - 2916d_3^3 d_4^4 + 29d_3^3 d_4^2 r_2^2 - 168d_3^4 d_4^5 r_2^8 - 552d_3^2 d_4^5 r_2^8 - 1227d_3^2 d_4^5 r_2^4 \\ & - 1233d_3^2 d_4^5 r_2^6 - 84d_3^2 d_4^5 r_2^{10} - 1845d_3^4 d_4^3 r_2^4 - 1287d_3^4 d_4^3 r_2^6 \end{aligned} \quad (3.35)$$

$$Q_3 = -d_3 + d_4 r_2^2 + d_4 \quad (3.36)$$

Para o caso onde $r_3 \neq 0$, obtém-se exatamente as mesmas equações, pois os coeficientes do polinômio em (3.23) conservam as mesmas expressões em função de R_1 e R_2 . No caso de $r_3 \neq 0$, a expressão de R_2 será dada por:

$$R_2 = -R_1 - z^2 - 1 + d_3^2 + r_2^2 + d_4^2 + r_3^2 \quad (3.37)$$

Eliminando R_2 nas Eqs.(3.30) a (3.32), o resultado permanece inalterado. Conclui-se então, que a condição de aparecimento de um ponto quádruplo não depende de r_3 .

3.2. A Superfície de Separação

Já que a eliminação de variáveis entre uma ou várias equações pode acrescentar soluções complementares (BUCHBERGER *et al.*, 1982), as soluções da Eq.(3.33) podem conter outras superfícies não válidas além da superfície que separa os manipuladores binários dos quaternários no espaço dos parâmetros (d_3, d_4, r_2) . Porém, sabe-se que a superfície separando os manipuladores binários dos quaternários deve necessariamente estar entre as

superfícies obtidas por Corvez e Rouillier (2002) dadas pelas Eqs.(3.18) a (3.22).

A comparação entre as Eqs.(3.33) a (3.36) e as Eqs.(3.18) a (3.22) mostra que a Eq.(3.34) ($Q_I = 0$) é igual à Eq.(3.19). Entre estas equações, a única solução que resulta em uma superfície de separação é obtida fazendo $Q_I = 0$. Observa-se que esta equação é de grau 2 em d_4^2 e sua resolução permite escrever as equações das duas superfícies C_{1a} e C_{1b} seguintes:

$$C_{1a} : d_4 = \sqrt{\frac{1}{2} \left(d_3^2 + r_2^2 - \frac{(d_3^2 + r_2^2)^2 - d_3^2 + r_2^2}{AB} \right)} \quad (3.38)$$

$$C_{1b} : d_4 = \sqrt{\frac{1}{2} \left(d_3^2 + r_2^2 + \frac{(d_3^2 + r_2^2)^2 - d_3^2 + r_2^2}{AB} \right)} \quad (3.39)$$

sendo:

$$A = \sqrt{(d_3 + 1)^2 + r_2^2} \quad \text{e} \quad B = \sqrt{(d_3 - 1)^2 + r_2^2} \quad (3.40)$$

A Figura 3.3 apresenta o gráfico das duas superfícies C_{1a} e C_{1b} . As Figs. 3.3(a) e 3.3(b) apresentam os gráficos destas duas superfícies traçados em uma seção (d_3, d_4) para $r_2 = 0,5$ e depois para $r_2 = 1,0$. A seguir, as superfícies considerando uma seção (r_2, d_4) , para $d_3 = 0,5$ e depois $d_3 = 1,5$, são mostradas nas Figs. 3.3(c) e 3.3(d).

Para analisar a separação dos manipuladores binários e quaternários, considera-se inicialmente a Fig. 3.3(c), para $d_3 = 0,5$. Sejam três testes: manipulador 1, definido por $d_4 = 0,15$ e $r_2 = 0,21$; manipulador 2, dado por $d_4 = 0,4$ e $r_2 = 0,1$ e manipulador 3 onde $d_4 = 0,45$ e $r_2 = 0,4$. Os dois manipuladores 1 e 2 são separados pela superfície C_{1a} enquanto que os manipuladores 2 e 3 são separados pela superfície C_{1b} . A Fig. 3.4 mostra a seção do espaço de trabalho destes três manipuladores testes. Os manipuladores 1 e 2 são binários e o manipulador 3 é quaternário. Pode-se observar que apenas a superfície dada pela Eq.(3.38) separa os manipuladores binários dos quaternários, sendo que a Eq.(3.39) não faz esta separação.

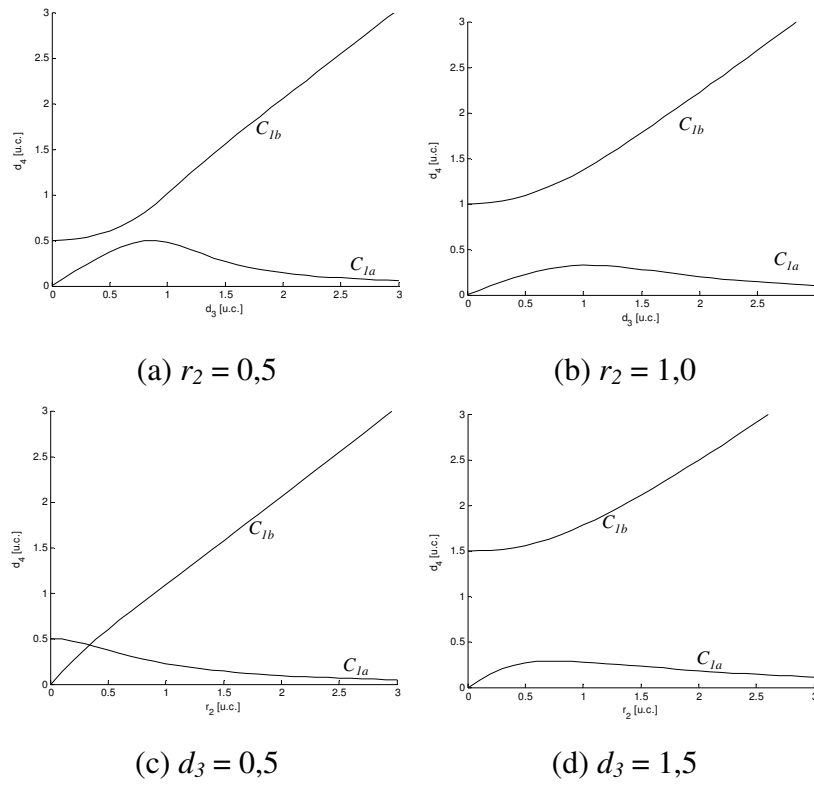


Figura 3.3 - Gráfico de C_{1a} e C_{1b} em duas seções do espaço dos parâmetros de DH

De forma análoga, analisando as seções representadas pela Fig. 3.3, pode-se constatar que o limite entre os manipuladores binários e os manipuladores quaternários é dado apenas pela Eq.(3.38). Além disso, a Eq.(3.39) admite as soluções para $d_4 > d_3$ unicamente para os manipuladores quaternários.

Conclui-se então, que a superfície de separação entre os manipuladores binários e os quaternários é a superfície C_{1a} , dada na Eq.(3.38). Esta superfície será denotada simplesmente de superfície C_I :

$$C_I : d_4 = \sqrt{\frac{1}{2} \left(d_3^2 + r_2^2 - \frac{(d_3^2 + r_2^2)^2 - d_3^2 + r_2^2}{AB} \right)}, \quad (3.41)$$

sendo A e B dados na Eq.(3.40).

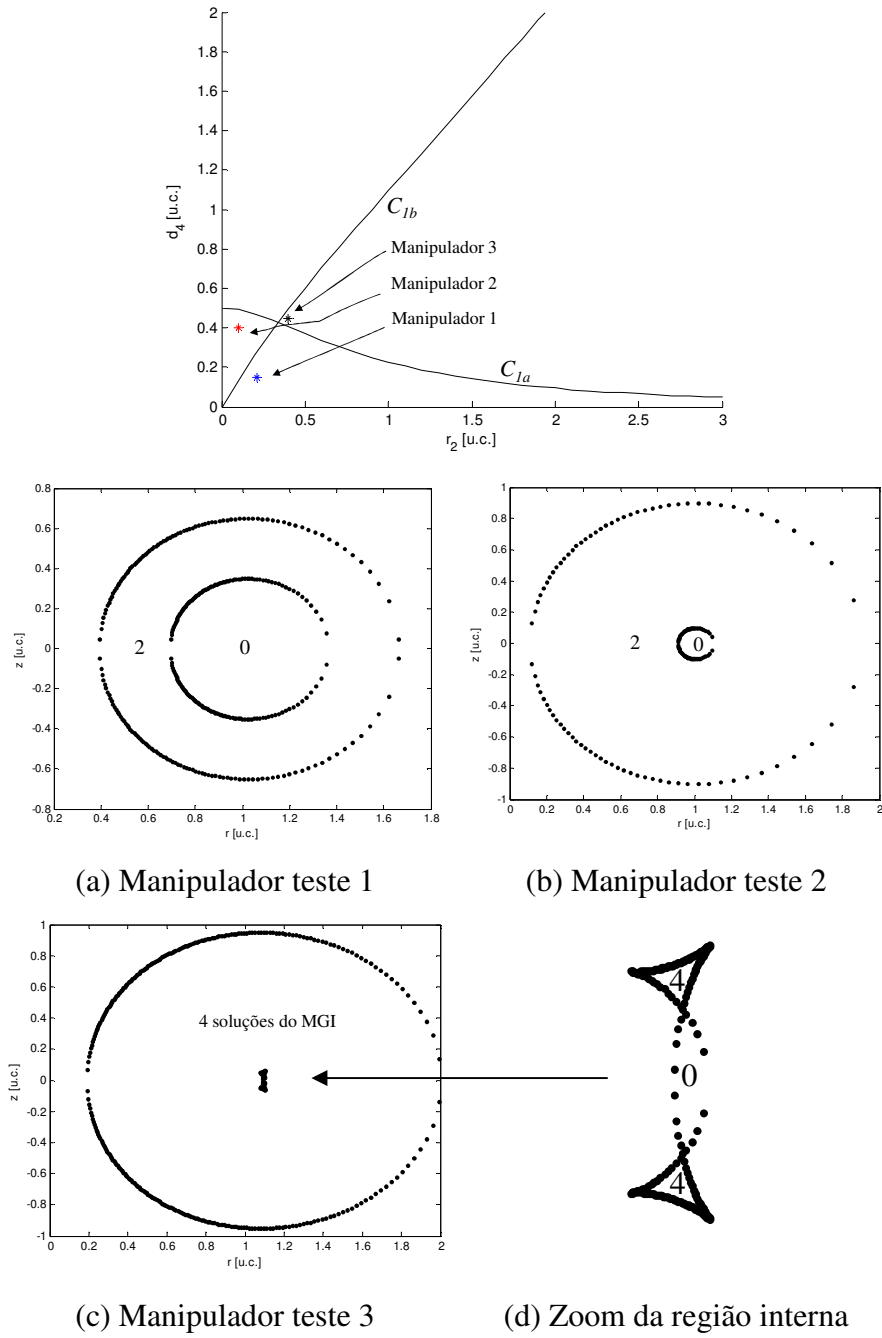


Figura 3.4 - Três manipuladores testes e suas seções do espaço de trabalho

Além disso, o manipulador 3R ortogonal, tanto para $r_3 = 0$, como para $r_3 \neq 0$, é quaternário se, e somente se:

$$d_4 > \sqrt{\frac{1}{2} \left(d_3^2 + r_2^2 - \frac{(d_3^2 + r_2^2)^2 - d_3^2 + r_2^2}{AB} \right)} \quad (3.42)$$

No próximo capítulo é feita uma classificação para os manipuladores com eixos ortogonais, considerando o parâmetro dimensional $r_3 = 0$, baseada na topologia das superfícies de singularidades no espaço de trabalho.

CAPÍTULO IV

CLASSIFICAÇÃO DOS MANIPULADORES 3R ORTOGONAIS SEGUNDO SUA TOPOLOGIA, CONSIDERANDO $r_3 = 0$

Este capítulo apresenta uma classificação para os manipuladores com eixos ortogonais, baseada na topologia das superfícies de singularidades (*envoltórias*) no espaço de trabalho. Uma *topologia* do espaço de trabalho é definida a partir de pontos singulares particulares que aparecem nos lugares das singularidades. Estes pontos particulares são os *pontos de cúspides* e os *nós*. Um *nó* é definido em uma seção plana (r, z) do espaço de trabalho como um ponto de interseção de curvas singulares; é um ponto onde coincidem duas soluções duplas do MGI (EL OMRI, 1996). Estes pontos singulares são um meio eficaz para caracterizar a topologia do espaço de trabalho, servindo para definir propriedades importantes de um manipulador.

Deseja-se obter as superfícies que dividem o espaço dos parâmetros em regiões que correspondem a conjuntos de manipuladores que possuem propriedades cinemáticas globais similares, como por exemplo, manipuladores binários ou quaternários; genéricos ou não genéricos; manipuladores com o mesmo número de pontos de cúspides, etc. Tais regiões são denominadas *domínios*.

A família estudada é composta por manipuladores ortogonais com 3 juntas rotacionais, conforme a Fig. 3.1 sem defasagem sobre o último eixo, ou seja, fazendo $r_3 = 0$.

Assim, o estudo da família dos manipuladores se baseia na topologia das superfícies das singularidades no espaço de trabalho. Tais singularidades são definidas como os lugares onde o determinante da matriz Jacobiana se anula. Um manipulador que pertence a esta família pode ter um vazio em seu espaço de trabalho ou não, pode ser cuspidal ou não; genérico ou não genérico e binário ou quaternário.

A topologia de uma superfície de singularidade no espaço de trabalho pode ser caracterizada pelo número de pontos de cúspides e o número de nós. Os manipuladores podem ter 0, 2 ou 4 pontos de cúspides e 0, 1, 2, 3 ou 4 nós.

A seguir, são apresentados três exemplos para ilustrar algumas topologias do espaço de trabalho. Estas topologias estão diretamente relacionadas com a forma das singularidades, bem como com a presença ou não de um ou vários pontos singulares particulares. Os números que aparecem em cada região do espaço de trabalho indicam o grau de acessibilidade (2 ou 4 soluções do MGI).

A Figura 4.1 mostra a seção do espaço de trabalho, no plano rz , de um manipulador binário genérico, cujos parâmetros de DH são: $d_2 = 1,2$; $d_3 = 0,7$; $d_4 = 0,4$ e $r_2 = 0,2$ [u.c.]. Nesta seção, as envoltórias não formam pontos de cúspides e nem de nós. Todavia, elas delimitam uma região interna sem solução do MGI (vazio) e uma região externa com 2 soluções do MGI.

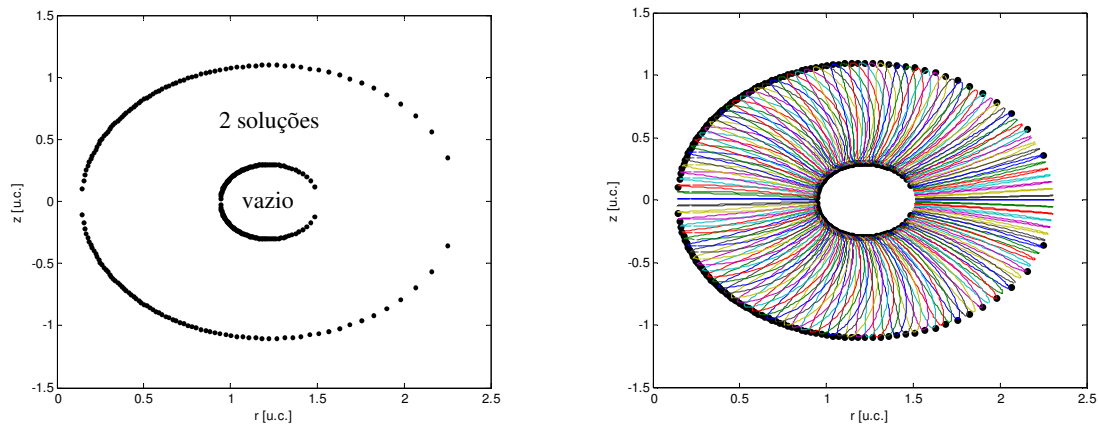


Figura 4.1 - Seção do espaço de trabalho de um manipulador binário genérico do tipo 1

A Figura 4.2 apresenta a seção do espaço de trabalho de outro manipulador, que é quaternário e genérico, cujos parâmetros de DH são: $d_2 = 1,1$; $d_3 = 2,0$; $d_4 = 1,6$ e $r_2 = 1,0$ [u.c.]. As envoltórias formam 4 pontos de cúspides e nenhum nó. O grau de acessibilidade (número de soluções para o MGI) é 4 para a região interna e 2 para a região externa. Observa-se neste exemplo que não há presença de vazio na seção do espaço de trabalho.

A seção do espaço de trabalho apresentada na Fig. 4.3 pertence a um manipulador quaternário e não genérico (as envoltórias no espaço articulado se interceptam), cujos parâmetros de DH são: $d_2 = 0,9$; $d_3 = 2,0$; $d_4 = 5,0$ e $r_2 = 1,0$ [u.c.]. Observa-se a existência de

4 pontos de cúspides, 4 nós, 2 regiões com 2 soluções do MGI e 3 regiões com 4 soluções do MGI.

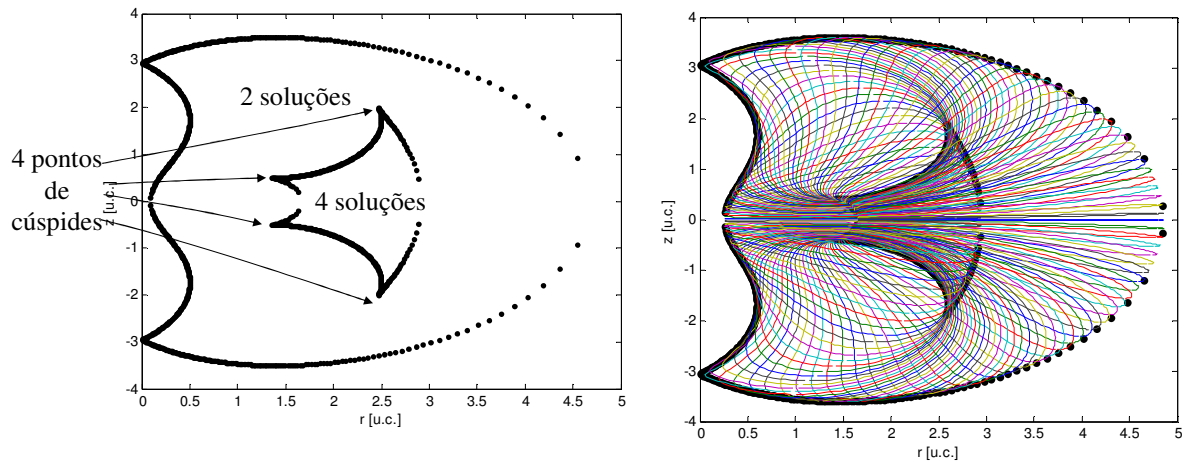


Figura 4.2 - Seção do espaço de trabalho de um manipulador com 4 pontos de cúspides e 0 nós

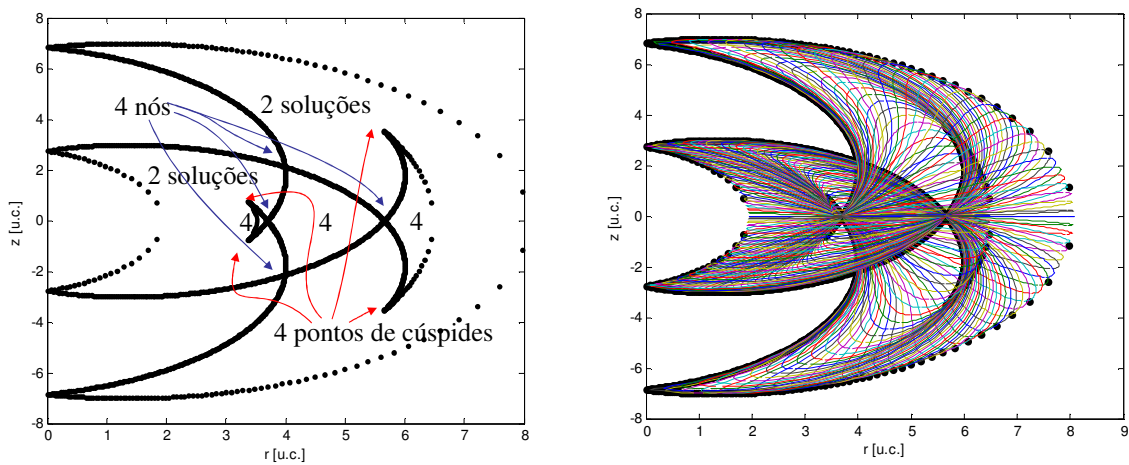


Figura 4.3 - Seção do espaço de trabalho de um manipulador quaternário e não genérico, com 4 pontos de cúspides e 4 nós

Estes exemplos dão uma ideia da diversidade das topologias do espaço de trabalho que podem ser encontradas na família do manipulador em estudo. Assim, nota-se a importância de estudar as singularidades no espaço de trabalho e mais precisamente, a presença ou não de pontos de cúspides e de nós.

A classificação é baseada em dois critérios que permitem definir uma topologia do espaço de trabalho: o número de pontos de cúspides e o número de nós que aparecem nas curvas de singularidades. São estabelecidos os casos possíveis de espaço de trabalho segundo seu número de pontos de cúspides, bem como as equações das superfícies que separam os

diversos domínios. Um domínio é caracterizado por um conjunto de manipuladores que possui o mesmo número de pontos de cúspides. Para completar a classificação, são analisados os números de nós, ou seja, cada domínio contendo os manipuladores com o mesmo número de pontos de cúspides é subdividido em várias topologias do espaço de trabalho.

4.1. Classificação da topologia segundo o número de Pontos de Cúspides, para $r_3 = 0$

Nesta seção será mostrado que, a partir do anulamento do determinante da matriz Jacobiana da estrutura serial, obtém-se uma condição para a qual cada combinação de sinal define várias regiões. Os manipuladores de cada região possuem o mesmo número de pontos de cúspides.

Para realizar a classificação da topologia do espaço de trabalho, são considerados os seguintes critérios: o número de pontos de cúspides, se o manipulador é genérico ou não genérico e se é binário ou quaternário.

Na família de manipuladores estudada, têm-se três casos: manipuladores com 0, 2 ou 4 pontos de cúspides. É mostrado que estes casos são divididos em cinco domínios delimitados por 4 superfícies (C_1 , C_2 , C_3 e C_4). Como ilustração, a Fig. 4.4 apresenta a seção plana (d_3, d_4) , para $r_2 = 1,0$, onde pode-se observar a existência de duas regiões correspondendo aos manipuladores que possuem 4 pontos de cúspides (domínios 2 e 4), uma região correspondendo aos manipuladores tendo 2 pontos de cúspides (domínio 3) e duas regiões correspondendo aos manipuladores não cuspidais (domínios 1 e 5).

Considerando que a superfície C_1 é dada na Eq.(3.41), neste capítulo são obtidas as superfícies C_2 , C_3 e C_4 .

Nesta seção, apresenta-se os cinco tipos de manipuladores e determina-se, em seguida, as equações das superfícies que delimitam os domínios correspondentes. Um manipulador do tipo i é um representante do domínio i , para $i = 1, \dots, 5$. Vale lembrar aqui, que os demais parâmetros dimensionais são normalizados em relação ao parâmetro d_2 ($d_2 = 1,0$).

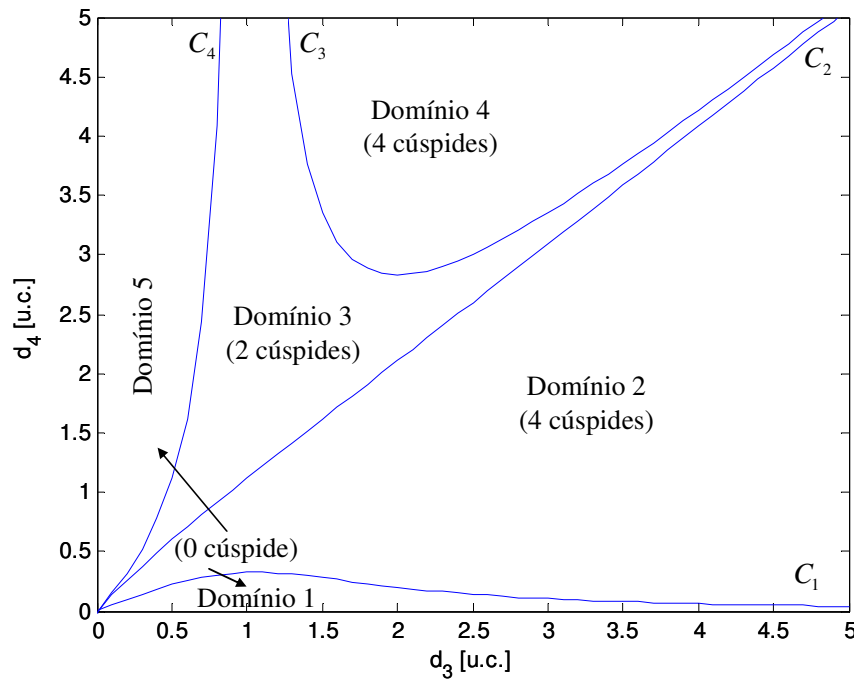


Figura 4.4 - Representação das quatro superfícies de separação e dos cinco domínios, em uma seção (d_3, d_4) considerando $r_2 = 1,0$

4.1.1. Manipulador Ortogonal do Tipo 1 e do Tipo 2

Seja um manipulador que pertence ao domínio 1. A seção do espaço de trabalho representado pela Fig. 4.5 caracteriza o primeiro tipo de manipuladores. Trata-se de um manipulador binário, não cuspidal, contendo um vazio em seu espaço de trabalho (este vazio é delimitado pela envoltória interna). No exemplo apresentado, $d_3 = 1,0$, $d_4 = 0,2$ e $r_2 = 1,0$ [u.c.].

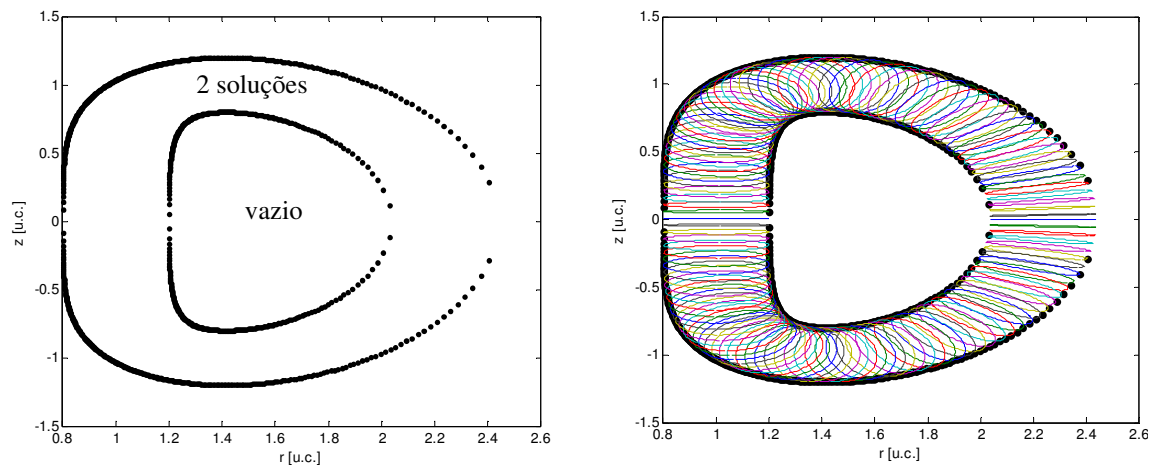


Figura 4.5 - Seção do espaço de trabalho de um manipulador do tipo 1

A Figura 4.6 corresponde a um manipulador do tipo 2, quaternário e cuspidal pertencente ao domínio 2. Em seu espaço de trabalho, o manipulador tem 4 pontos de cúspides, um vazio, duas regiões com 4 soluções e uma região com 2 soluções do MGI. Observe que um manipulador do tipo 2 possui 4 pontos de cúspides. A ilustração apresentada na Fig. 4.6 corresponde aos parâmetros: $d_3 = 2,0$; $d_4 = 0,5$ e $r_2 = 1,0$ [u.c.].

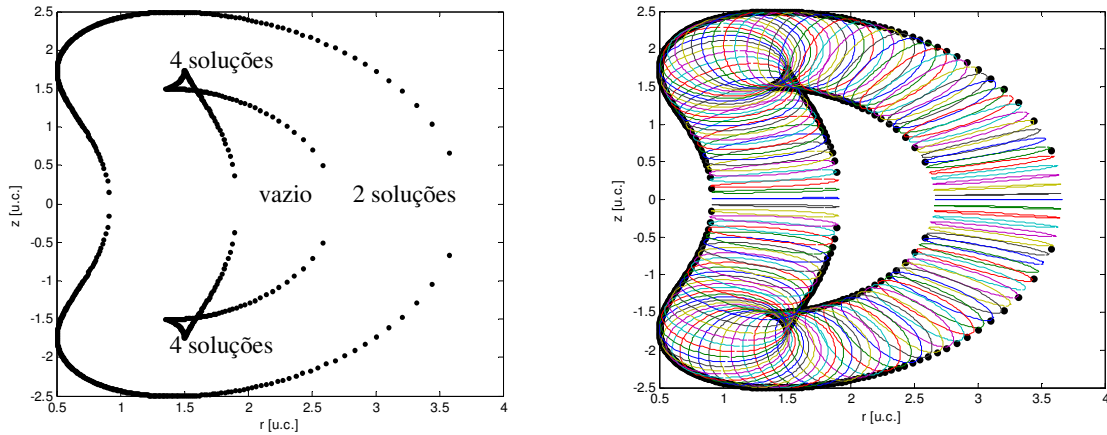


Figura 4.6 - Seção do espaço de trabalho de um manipulador do tipo 2

Seja um manipulador na transição entre os domínios 1 e 2, situado sobre a curva C_I , dada pela Eq.(3.41). A Fig. 4.7 mostra a seção plana desta superfície considerando $r_2 = 1,0$. Este manipulador caracteriza a transição entre os manipuladores do tipo 1 e 2. Esta transição é representada por um manipulador tendo um ponto quádruplo (4 soluções no MGI) onde dois pontos de cúspides e um nó coincidem.

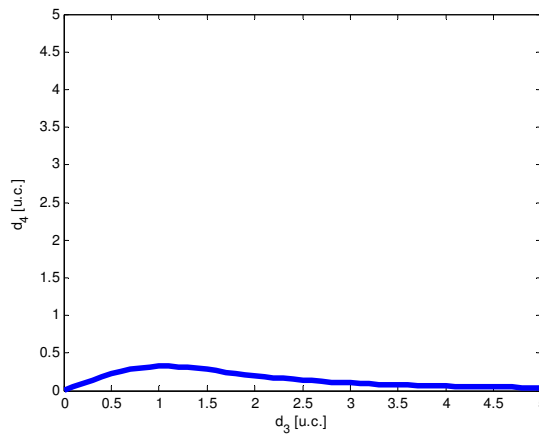


Figura 4.7 - Seção plana da superfície C_I

Baili (2004) apresentou um trabalho onde demonstra os seguintes resultados:

- Todos os manipuladores tais que $d_3 \leq d_4$ são quaternários;

- O conjunto dos manipuladores tais que $d_3 > d_4$ é composto de dois domínios adjacentes em que um contém os manipuladores quaternários e o outro contém os manipuladores binários. Ou seja, os manipuladores binários existem somente quando $d_3 > d_4$. Neste caso, existe uma superfície no espaço dos parâmetros (d_3 , d_4 , r_2) que separa os manipuladores quaternários dos manipuladores binários.

A Figura 4.8 mostra como um manipulador quaternário com 4 pontos de cúspides torna-se binário pela deformação contínua do ramo da envoltória interna em seu espaço de trabalho ao diminuir progressivamente o valor do parâmetro d_4 , considerando $d_3 = 1,5$ e $r_2 = 0,5$ (portanto, $d_3 > d_4$). A Fig. 4.8(a) representa um manipulador quaternário que possui 4 pontos de cúspides e nenhum vazio em seu espaço de trabalho. Quando $d_4 = 0,9$, os dois segmentos laterais se cortam: dois nós aparecem formando um vazio e duas regiões com 4 soluções no MGI, conforme Fig. 4.8 (b). À medida que d_4 diminui, os dois pontos de cúspides e o nó de cada região com 4 soluções se aproximam (Fig. 4.8 (c) e Fig. 4.8 (d)). Em seguida, estes dois pontos de cúspides, o nó e a região com 4 soluções se transformam em um único ponto quádruplo. Este ponto quádruplo desaparece a seguir e o manipulador torna-se então binário (Fig. 4.8.(e)). A transição entre manipulador binário e manipulador quaternário é definida pela existência de um par de pontos quádruplos.

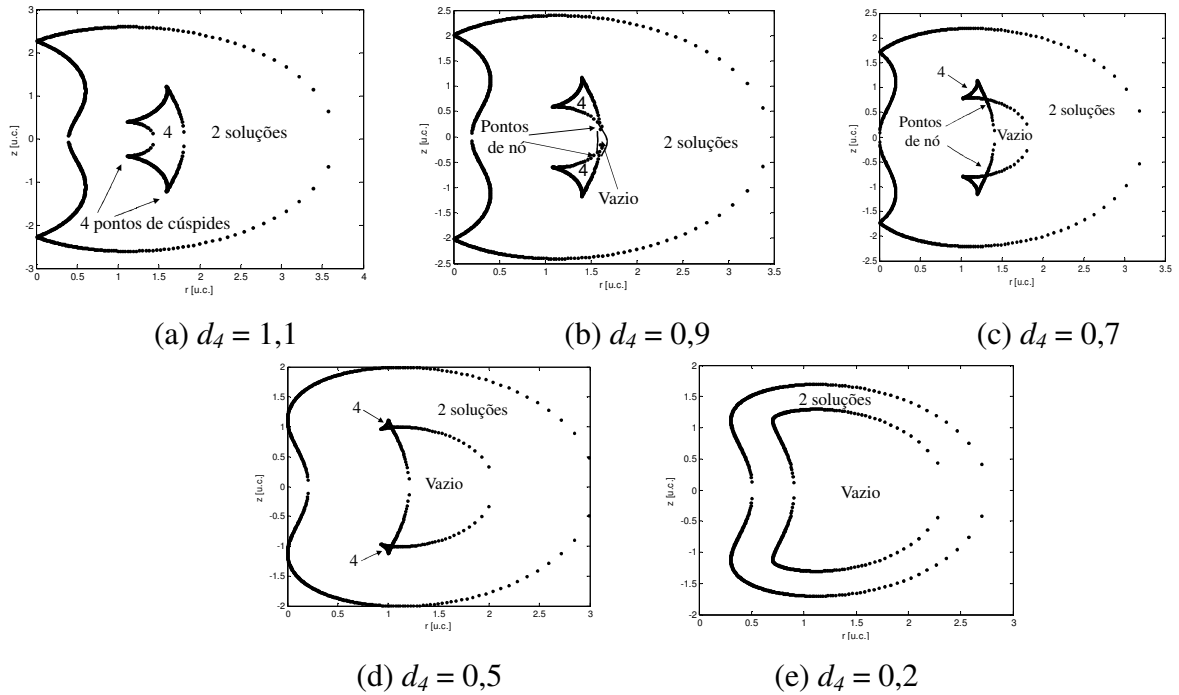


Figura 4.8 - Deformação contínua do ramo da singularidade interna quando d_4 diminui, considerando $d_3 = 1,5$ e $r_2 = 0,5$

Todos os manipuladores 3R ortogonais com $r_3 = 0$ que não pertencem nem ao tipo 1 e nem ao tipo 2, têm 4 ramos de singularidades. De fato, desde que a condição $d_4 > d_3$ seja verificada, pode-se mostrar que o determinante da matriz Jacobiana para um mecanismo 3R, dado na Eq.(2.16), se escreve sob a forma de dois fatores (considerando as hipóteses simplificadoras $r_3 = 0$ e $d_2 = 1,0$):

$$\det(J) = d_4(d_3 + d_4 c\theta_3)[s\theta_3 + (d_3 s\theta_3 - r_2 c\theta_3)c\theta_2] \quad (4.1)$$

Fazendo $\det(J) = 0$, obtêm-se as singularidades, para tais mecanismos, dadas pelas seguintes equações:

$$d_3 + d_4 c\theta_3 = 0 \quad (4.2)$$

ou

$$s\theta_3 + (d_3 s\theta_3 - r_2 c\theta_3)c\theta_2 = 0 \quad (4.3)$$

Da Equação (4.2), tem-se:

$$c\theta_3 = -\frac{d_3}{d_4} \quad (4.4)$$

Como $c\theta_3^2 + s\theta_3^2 = 1$, obtém-se:

$$s\theta_3 = \varepsilon \sqrt{1 - \left(\frac{d_3}{d_4}\right)^2}, \text{ para } d_4 \geq d_3 \text{ e } \varepsilon = \pm 1 \quad (4.5)$$

Desta forma, tem-se uma singularidade com dois ramos definidos pelas curvas D_1 e D_2 , ou seja:

$$\text{Curva } D_1: \quad \theta_3 = \arccos\left(-\frac{d_3}{d_4}\right) \quad (4.6)$$

$$\text{Curva } D_2: \quad \theta_3 = -\arccos\left(-\frac{d_3}{d_4}\right) \quad (4.7)$$

A Equação (4.3) gera outra singularidade com dois ramos S_1 e S_2 , que são encontradas em todos os manipuladores da família estudada. Pode-se definir S_1 e S_2 tais que $(\theta_2, \theta_3) \in [-\pi, \pi] \times [0, \pi]$. Estes dois ramos de singularidades são transladados de π segundo θ_3 . Os ramos D_1 e D_2 situam-se entre $\pi/2$ e π de uma parte e entre $-\pi$ e $-\pi/2$ da outra parte (segundo θ_3 também) (EL OMRI, 1996).

4.1.2. Manipulador Ortogonal do Tipo 3

O manipulador do tipo 3 é representado no domínio 3, conforme Fig. 4.4. Este manipulador é quaternário, cuspidal e não genérico. Conforme representado na Fig. 4.9, estes manipuladores possuem somente 2 pontos de cúspides sobre a envoltória interna que possui a forma de um peixe. Na seção do espaço de trabalho, as duas regiões contidas na envoltória interna têm 4 soluções no MGI e a região delimitada pelas envoltórias interna e externa apresenta 2 soluções. Os parâmetros para a seção representada na Fig. 4.9 são: $d_3 = 1,2$; $d_4 = 1,6$ e $r_2 = 1,0$ [u.c.].

Partindo do espaço de trabalho do manipulador do tipo 2, representado pela Fig. 4.6, aumentando progressivamente d_4 , a envoltória interna se deforma de uma maneira contínua dando lugar a novos tipos de manipuladores (mesmo número de pontos de cúspides, mas números de nós diferentes). Quando se aumenta muito d_4 , obtém-se o manipulador correspondente ao tipo 3.

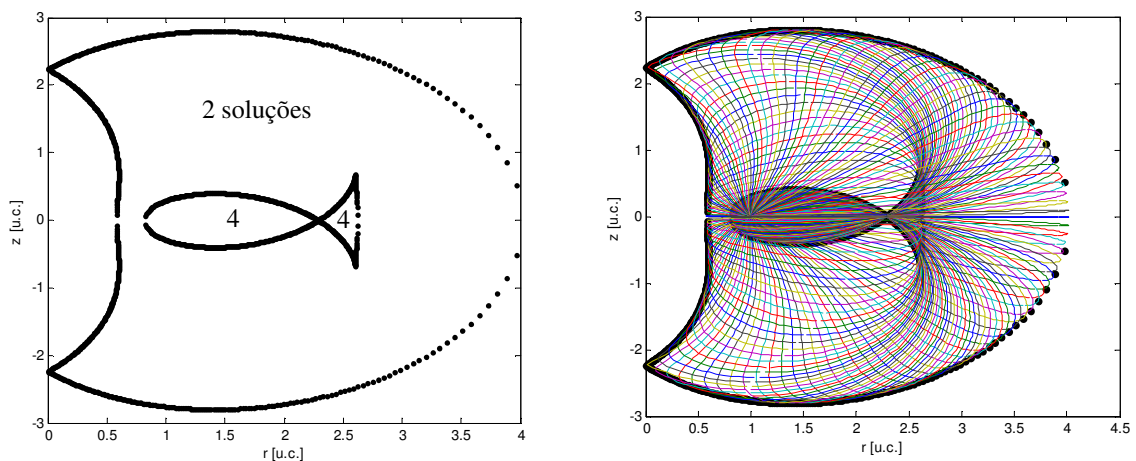


Figura 4.9 - Seção do espaço de trabalho de um manipulador do tipo 3

Conforme representado na Fig. 4.4, deseja-se obter a superfície C_2 que representa a superfície de transição entre os manipuladores do tipo 2 e do tipo 3. Esta transição é

caracterizada por um manipulador cujo ramo de singularidade D_2 é tangente ao ramo S_I no espaço articulado. Escrevendo esta condição de tangência, deduz-se a equação representando a superfície C_2 que separa os manipuladores do tipo 2 daqueles do tipo 3. Para isto, isola-se $c\theta_2$ na Eq.(4.3), substituindo os valores de $c\theta_3$ e $s\theta_3$ dados nas Eqs.(4.4) e (4.5), resultando em:

$$c\theta_2 = - \frac{\varepsilon \sqrt{1 - \left(\frac{d_3}{d_4}\right)^2}}{d_3 \varepsilon \sqrt{1 - \left(\frac{d_3}{d_4}\right)^2} + \left(\frac{d_3}{d_4}\right) r_2} \quad (4.8)$$

A condição de interseção entre os ramos de singularidades das Eqs.(4.2) e (4.3) é dada pela inequação:

$$-1 \leq c\theta_2 \leq 1 \quad (4.9)$$

A condição de interseção entre os ramos D_2 e S_I é dada considerando a segunda desigualdade de (4.9) e $\varepsilon = -1$. Com isto, obtém-se a superfície de separação C_2 :

$$c\theta_2 \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{d_3} \sqrt{1 - \left(\frac{d_3}{d_4}\right)^2} \leq -\sqrt{1 - \left(\frac{d_3}{d_4}\right)^2} + \frac{r_2}{d_4} \Rightarrow \frac{(1+d_3)}{d_3} \sqrt{1 - \left(\frac{d_3}{d_4}\right)^2} \leq \frac{r_2}{d_4} \quad (4.10)$$

$$\text{Elevando ao quadrado: } \left(\frac{1+d_3}{d_3}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{d_3}{d_4}\right)^2\right] \leq \left(\frac{r_2}{d_4}\right)^2 \quad (4.11)$$

$$\text{Simplificando: } \left(\frac{1+d_3}{d_3}\right)^2 - \left(\frac{1+d_3}{d_4}\right)^2 \leq \left(\frac{r_2}{d_4}\right)^2 \Rightarrow d_4 \leq \left(\frac{d_3}{1+d_3}\right) \sqrt{r_2^2 + (1+d_3)^2} \quad (4.12)$$

Desta forma, a superfície de separação C_2 entre os domínios 2 e 3 é definida por:

$$C_2 : d_4 = \frac{d_3}{1+d_3} A, \text{ sendo } A = \sqrt{(d_3+1)^2 + r_2^2} \quad (4.13)$$

A Figura 4.10 representa uma seção plana desta superfície considerando $r_2 = 1,0$.

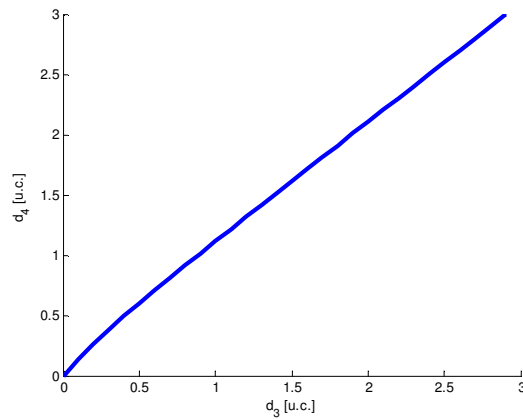


Figura 4.10 - Seção plana da superfície C_2

A Figura 4.11 mostra a seção plana do espaço de trabalho de um manipulador situado exatamente sobre a superfície de separação C_2 . Nesta ilustração, adotou-se os parâmetros de DH como: $d_3 = 2,0$; $d_4 = 2,1$ e $r_2 = 1,0$ [u.c.].

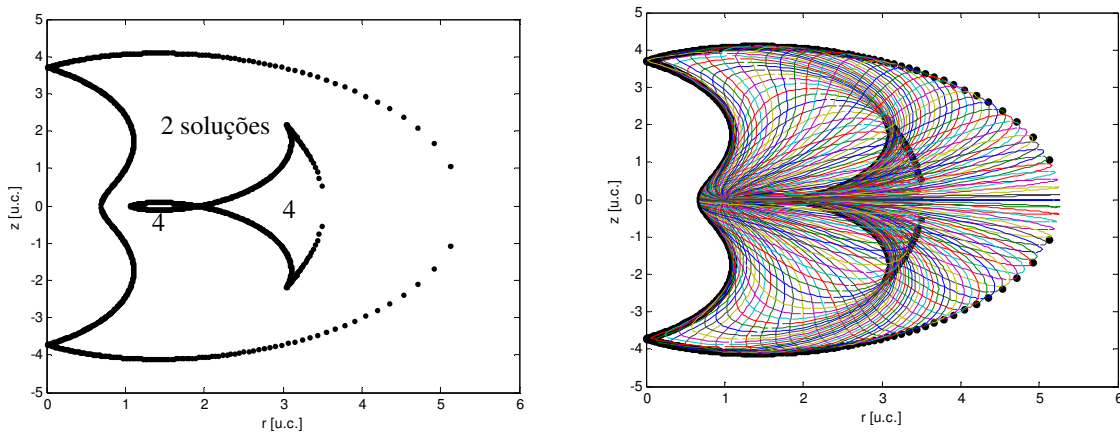


Figura 4.11 - Seção do espaço de trabalho de um manipulador pertencente à superfície C_2

4.1.3. Manipulador Ortogonal do Tipo 4

O manipulador apresentado na Fig. 4.12 é do tipo 4, é quaternário, cuspidal e não genérico, na ilustração, foram adotados os parâmetros de DH: $d_3 = 2,4$; $d_4 = 4,0$ e $r_2 = 1,0$ [u.c.]. Os 4 pontos de cúspides são compartilhados igualmente entre as envoltórias interna e externa.

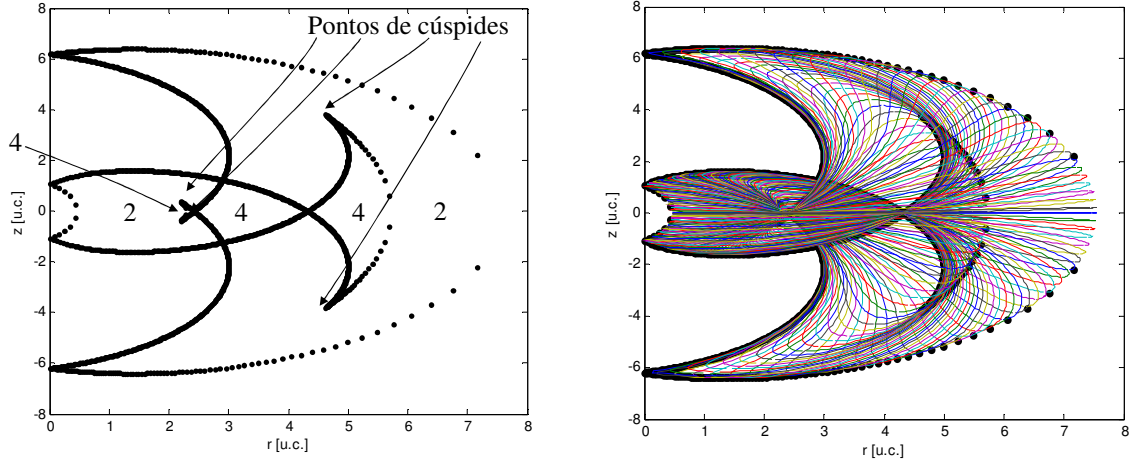


Figura 4.12 - Seção do espaço de trabalho de um manipulador do tipo 4

Conforme representado na Fig. 4.4, deseja-se obter a superfície C_3 que corresponde à transição entre os manipuladores do domínio 3 e do domínio 4. Esta transição é caracterizada por um manipulador cuja linha D_2 é tangente ao ramo de singularidade S_I no espaço articulado. Escrevendo esta condição de tangência, obtém-se a equação representando a superfície C_3 , que separa os manipuladores do tipo 3 e aqueles do tipo 4. A condição de interseção entre D_2 e S_2 é dada considerando a primeira desigualdade de (4.9) e $\varepsilon = -1$:

$$c\theta_2 \geq -1 \Rightarrow -\frac{1}{d_3} \sqrt{1 - \left(\frac{d_3}{d_4}\right)^2} \geq -\left(\sqrt{1 - \left(\frac{d_3}{d_4}\right)^2}\right) + \frac{r_2}{d_4} \quad (4.14)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{d_3} \sqrt{1 - \left(\frac{d_3}{d_4}\right)^2} \leq \left(\sqrt{1 - \left(\frac{d_3}{d_4}\right)^2}\right) - \frac{r_2}{d_4} \Rightarrow \left(\frac{1 - d_3}{d_3}\right) \left(\sqrt{1 - \left(\frac{d_3}{d_4}\right)^2}\right) \leq -\frac{r_2}{d_4}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{d_3 - 1}{d_3}\right) \left(\sqrt{1 - \left(\frac{d_3}{d_4}\right)^2}\right) \geq \left(\frac{r_2}{d_4}\right) \Rightarrow \left(\frac{d_3 - 1}{d_3}\right)^2 \left(1 - \left(\frac{d_3}{d_4}\right)^2\right) \geq \left(\frac{r_2}{d_4}\right)^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{d_4}\right)^2 (r_2^2 + (d_3 - 1)^2) \leq \left(\frac{d_3 - 1}{d_3}\right)^2 \Rightarrow d_4 \geq \frac{d_3}{|1 - d_3|} \sqrt{r_2^2 + (d_3 - 1)^2} \text{ com } d_3 > 1 \quad (4.15)$$

Logo, a Equação (4.16) define a superfície C_3 que é a transição entre os manipuladores do tipo 3 e do tipo 4:

$$C_3 : d_4 = \frac{d_3}{d_3 - 1} B, \text{ com } d_3 > 1 \text{ e } B = \sqrt{(d_3 - 1)^2 + r_2^2} \quad (4.16)$$

A Figura 4.13 mostra uma seção plana desta superfície considerando $r_2 = 1,0$.

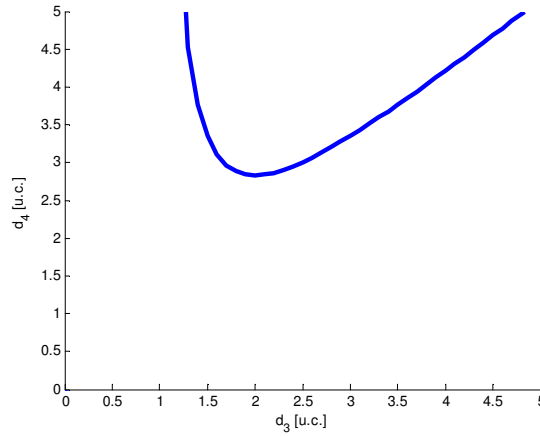


Figura 4.13 - Seção plana da superfície C_3

A Figura 4.14 corresponde a um manipulador cujos parâmetros pertencem exatamente à superfície de separação C_3 . Neste exemplo foram adotados $d_3 = 2,0$; $d_4 = 2,83$ e $r_2 = 1,0$ [u.c.].

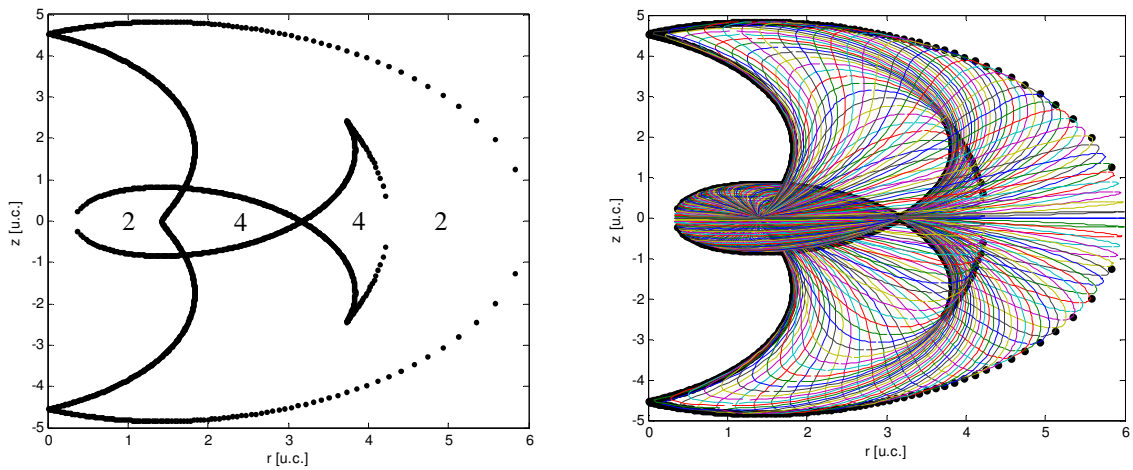


Figura 4.14 - Seção do espaço de trabalho de um manipulador pertencente à superfície C_3

4.1.4. Manipulador Ortogonal do Tipo 5

A Figura 4.15 corresponde a um manipulador no domínio 5, neste exemplo, adotou-se os parâmetros de DH como: $d_3 = 0,4$; $d_4 = 0,9$ e $r_2 = 1,0$ [u.c.]. É um manipulador quaternário, não cuspidal, genérico e representa os manipuladores do tipo 5. Ao contrário de um manipulador do tipo 1, a região delimitada pela envoltória interna não é vazia, mas uma região com 4 soluções no MGI.

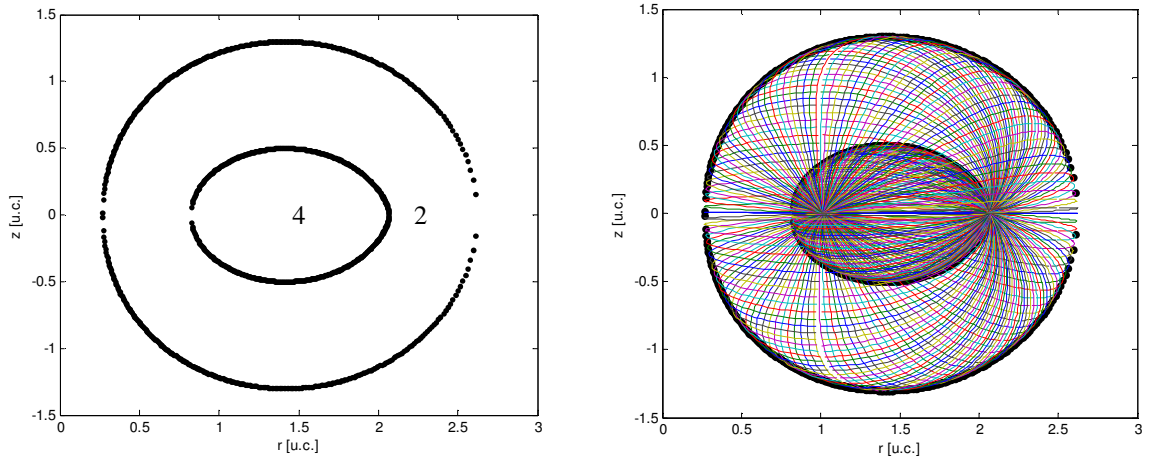


Figura 4.15 - Seção do espaço de trabalho de um manipulador do tipo 5

De forma análoga, deseja-se determinar a superfície de separação entre os domínios 3 e 5, denominada C_4 , conforme mostrado na Fig. 4.4. A transição é definida por um manipulador cuja linha D_I é tangente ao ramo de singularidade S_I no espaço articulado. Escrevendo esta condição, obtém-se a equação que representa a superfície de separação C_4 , para isso, recorre-se novamente à primeira desigualdade de (4.9), agora considerando $\varepsilon = 1$:

$$\begin{aligned}
 c\theta_2 \geq -1 &\Rightarrow -\frac{1}{d_3} \sqrt{1 - \left(\frac{d_3}{d_4}\right)^2} \geq -\sqrt{1 - \left(\frac{d_3}{d_4}\right)^2} - \frac{r_2}{d_4} \Rightarrow \left(\frac{1-d_3}{d_3}\right) \sqrt{1 - \left(\frac{d_3}{d_4}\right)^2} \geq \left(\frac{r_2}{d_4}\right) \\
 &\Rightarrow d_4 \geq \frac{d_3}{|1-d_3|} \sqrt{r_2^2 + (d_3 - 1)^2} \quad \text{com } d_3 < 1
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

Logo, a Equação (4.18) define a superfície de separação C_4 , sendo representada na Fig 4.16 por uma seção plana desta superfície considerando $r_2 = 1,0$.

$$C_4 : d_4 = \frac{d_3}{1-d_3} B, \text{ com } d_3 < 1 \text{ e } B = \sqrt{(d_3 - 1)^2 + r_2^2} \quad (4.18)$$

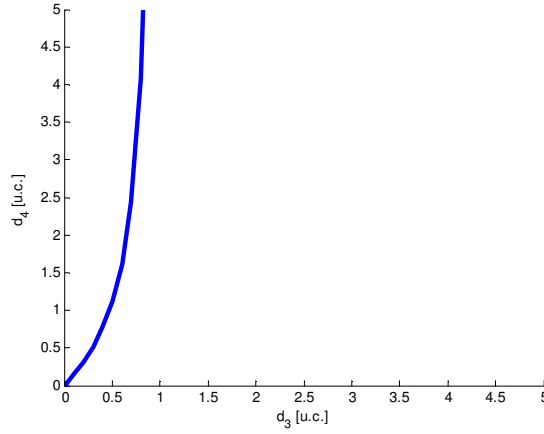


Figura 4.16 - Seção plana da superfície C_4

A Figura 4.17 mostra um manipulador de transição entre os domínios 3 e 5, ou seja, situado exatamente sobre a superfície de separação C_4 (neste caso, foram considerados $d_3 = 0,2$; $d_4 = 0,32$ e $r_2 = 1,0$ [u.c.]).

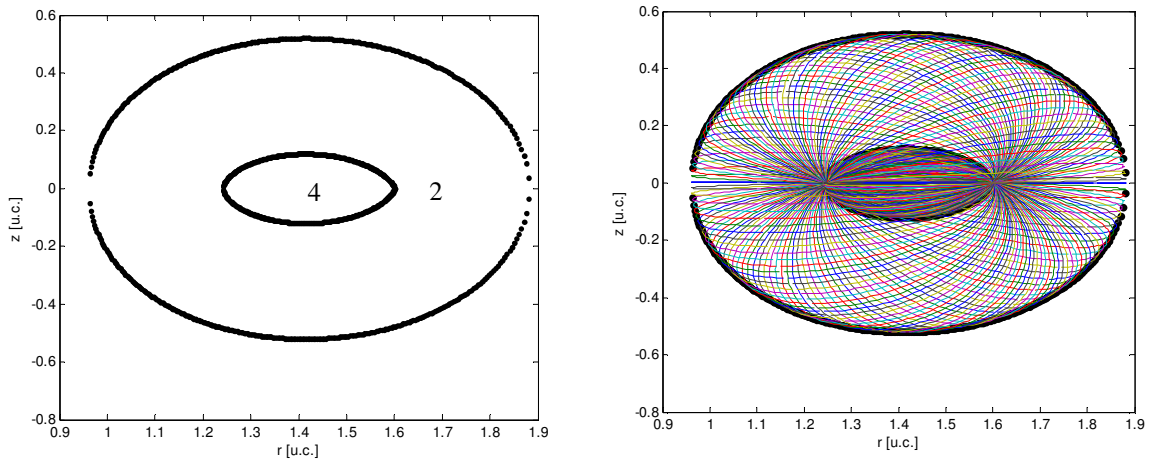


Figura 4.17 - Seção do espaço de trabalho de um manipulador pertencente à superfície C_4

Em resumo, os manipuladores pertencentes ao domínio 1 são binários e não cuspidais, aqueles pertencendo ao domínio 5 são quaternários e não cuspidais. Já os manipuladores pertencentes aos domínios restantes (2, 3 e 4) são quaternários e cuspidais.

A Figura 4.4 apresenta as superfícies de separação e os 5 domínios numa seção plana (d_3, d_4) do espaço dos parâmetros para $r_2 = 1,0$. Observa-se a existência de 2 regiões

correspondentes aos manipuladores que possuem 4 pontos de cúspides (domínio 2 e 4), uma região correspondente aos manipuladores tendo 2 pontos de cúspides (domínio 3) e duas regiões correspondendo aos manipuladores não cuspidais (domínio 1 e 5).

A seguir, é feita uma comparação entre as superfícies encontradas utilizando interpretação geométrica e as superfícies obtidas pelos polinômios dados pelas Eqs.(3.18) a (3.22). A Eq.(3.19) representa um polinômio de grau 2 em d_4^2 . A resolução desta equação em d_4 fornece duas raízes:

$$d_4 = \sqrt{\frac{1}{2} \left(d_3^2 + r_2^2 - \frac{(d_3^2 + r_2^2)^2 - d_3^2 + r_2^2}{\sqrt{(d_3 + 1)^2 + r_2^2} \sqrt{(d_3 - 1)^2 + r_2^2}} \right)} \quad (4.19)$$

ou

$$d_4 = \sqrt{\frac{1}{2} \left(d_3^2 + r_2^2 + \frac{(d_3^2 + r_2^2)^2 - d_3^2 + r_2^2}{\sqrt{(d_3 + 1)^2 + r_2^2} \sqrt{(d_3 - 1)^2 + r_2^2}} \right)} \quad (4.20)$$

A primeira raiz representa a equação da superfície C_I dada por Eq.(3.41) e que separa os manipuladores binários (tipo 1) dos outros manipuladores quaternários (tipo 2). A segunda raiz, Eq.(4.20), é equivalente à superfície C_{Ib} dada pela Eq.(3.39), representa um ramo no espaço dos parâmetros que não é válida para os manipuladores ortogonais com $r_3 = 0$. No entanto, esta superfície torna-se válida quando se considera uma família mais geral de manipuladores 3R ortogonais com $r_3 \neq 0$. A Eq.(3.21) representa um polinômio do segundo grau em d_4 . Resolvendo esta equação em d_4 para valores positivos de d_4 e r_2 , obtêm-se as duas raízes seguintes:

$$d_4 = \frac{d_3}{d_3 - 1} \sqrt{(d_3 - 1)^2 + r_2^2} \quad e \quad d_3 > 1 \quad (4.21)$$

ou

$$d_4 = \frac{d_3}{1 - d_3} \sqrt{(d_3 - 1)^2 + r_2^2} \quad e \quad d_3 < 1 \quad (4.22)$$

Observe que a Eq.(4.21) corresponde à superfície C_3 , dada pela Eq.(4.16) e que a Eq.(4.22) corresponde à superfície C_4 , dada pela Eq.(4.18).

Do mesmo modo, a resolução da Eq.(3.22) em d_4 , resulta na seguinte raiz, que representa a equação da superfície C_2 :

$$d_4 = \frac{d_3}{1+d_3} \sqrt{(d_3+1)^2 + r_2^2} \quad (4.23)$$

A partir da classificação desta família de manipuladores 3R ortogonais segundo o número de pontos de cúspides, pode-se estabelecer uma condição necessária e suficiente dependente dos parâmetros de DH sob a forma explícita para que um manipulador seja cuspidal. De fato, observando a Fig. 4.4 tem-se que os manipuladores cuspidais encontram-se nos domínios 2, 3 e 4. Consequentemente, para que um manipulador desta família seja cuspidal, é necessário e suficiente que os parâmetros de DH satisfaçam as condições:

$$d_4 > \sqrt{\frac{1}{2} \left(d_3^2 + r_2^2 - \frac{(d_3^2 + r_2^2)^2 - d_2^2(d_3^2 - r_2^2)}{\sqrt{(d_3 + d_2)^2 + r_2^2} \sqrt{(d_3 - d_2)^2 + r_2^2}} \right)} \quad \text{e} \quad d_3 > d_2 \quad (4.24)$$

ou

$$d_3 < d_2 \quad \text{e} \quad d_4 < \frac{d_3}{d_2 - d_3} \sqrt{(d_3 - d_2)^2 + r_2^2} \quad (4.25)$$

4.2. Classificação da topologia segundo o número de Nós, para $r_3 = 0$

Nesta seção, cada domínio tendo o mesmo número de pontos de cúspides é dividido em outros subdomínios que contenham um mesmo número de nós. Cada subdomínio define uma topologia do espaço de trabalho denotada por $WT_i(k, l)$, onde k representa o número de pontos de cúspides e l representa o número de nós.

Com esta finalidade, são determinadas as superfícies que separam duas topologias do espaço de trabalho em um mesmo domínio utilizando raciocínio geométrico. A cada transição são traçadas as singularidades no espaço de trabalho de um manipulador cujos parâmetros geométricos verificam a equação da superfície de separação. Baili (2004) mostrou que os

manipuladores pertencentes à família estudada podem ter 0, 1, 2, 3 ou 4 nós e que existem exatamente 9 topologias diferentes de espaço de trabalho.

4.2.1. Manipuladores pertencendo ao Domínio 1

Todos os manipuladores que pertencem a este domínio são binários e tem um vazio em seu espaço de trabalho, eles não têm pontos de cúspides e nem de nós. Esta topologia do espaço de trabalho é denominada de $WT_1(0, 0)$ e ilustrada pela Fig. 4.5.

4.2.2. Manipuladores pertencendo ao Domínio 2

A Figura 4.2 e Fig. 4.6 caracterizam dois manipuladores que pertencem ao domínio 2 (eles têm 4 pontos de cúspides). Porém, eles não apresentam o mesmo número de nós: podendo apresentar 2 nós ou nenhum, conforme o domínio. A topologia do espaço de trabalho $WT_2(4, 2)$ é representada pela Fig. 4.6 (manipulador com 4 pontos de cúspides, 2 nós e um vazio) enquanto que $WT_3(4, 0)$ (manipulador com 4 pontos de cúspides, nenhum nó e sem vazio em seu espaço de trabalho) é representado pela Fig. 4.2. A transição entre as topologias do espaço de trabalho WT_2 e WT_3 é tal que os dois segmentos laterais da envoltória interna do espaço de trabalho são tangentes, conforme Fig. 4.18. Neste caso, o manipulador possui 4 pontos de cúspides, nenhum nó, uma região com 2 soluções e 2 regiões com 4 soluções do MGI. Na ilustração da Fig. 4.18, os parâmetros de DH são: $d_3 = 1,2$; $d_4 = 0,76$ e $r_2 = 0,8$ [u.c.].

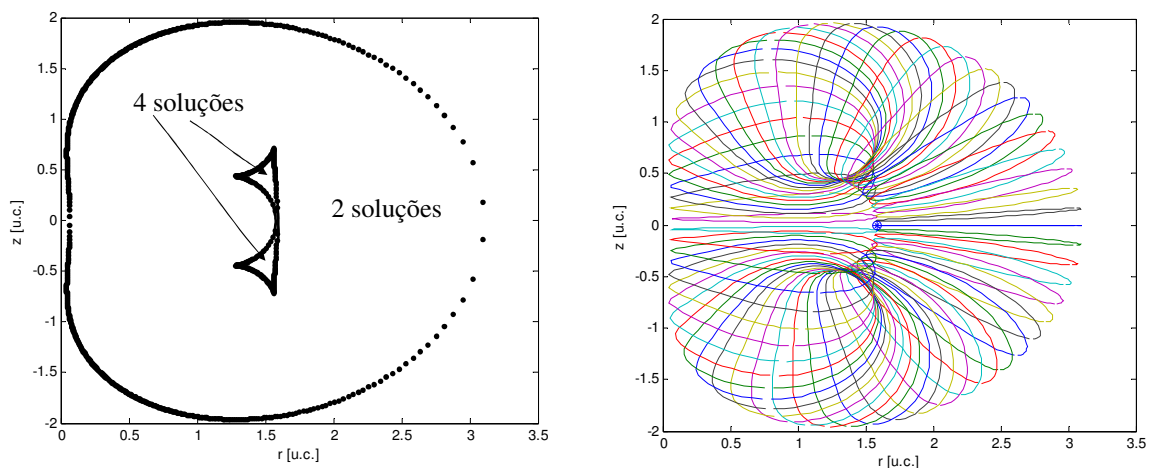


Figura 4.18 - Seção do espaço de trabalho de um manipulador na transição entre WT_2 e WT_3

Para obter a superfície de separação entre estes dois tipos de manipuladores, considere-se que esta transição corresponde ao limite entre os manipuladores do domínio 2 que possuem

e os que não possuem um vazio no seu espaço de trabalho. Para determinar a equação desta superfície, examina-se o caso limite para o qual um manipulador tenha um vazio em seu espaço de trabalho.

O espaço de trabalho tem simetria em relação ao plano $z = 0$, consequentemente, a transição acontece no plano $z = 0$.

A Figura 4.19(b) representa duas configurações de um manipulador com $d_4 < d_3$, $\theta_1 = 0^\circ$, $\theta_2 = 0^\circ$ (à direita) ou $\theta_2 = 180^\circ$ (à esquerda).

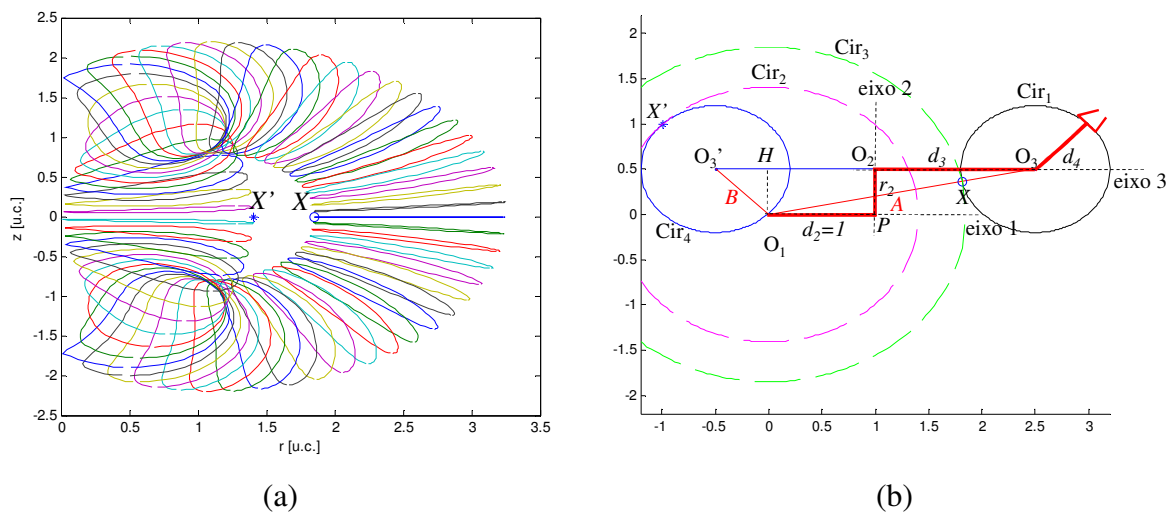


Figura 4.19 - Correspondência entre (a) espaço de trabalho de um manipulador e (b) croqui de duas configurações com $d_4 < d_3$, $\theta_1 = 0^\circ$, $\theta_2 = 0^\circ$ (à direita) ou $\theta_2 = 180^\circ$ (à esquerda)

Para a primeira configuração ($\theta_2 = 0^\circ$), efetua-se uma rotação de 360° em torno do eixo 3 passando por O_3 . O caminho do efetuador é uma circunferência de centro O_3 e raio d_4 , denominada Cir_1 . Sobre esta circunferência, coloca-se o ponto X no lugar mais próximo do eixo 1 passando por O_1 . Efetuando-se uma rotação de 360° do ponto X ao redor de O_1 , obtém-se um novo círculo de centro O_1 e raio O_1X denominado Cir_3 .

Para a segunda configuração ($\theta_2 = 180^\circ$), efetuando-se uma rotação de 360° em θ_3 e ao redor do eixo 3 passando por O_3' , o efetuador descreve um círculo de centro O_3' e raio d_4 denotado por Cir_4 , logo $O_2O_3' = d_3$. Sobre Cir_4 , define-se o ponto X' como o ponto mais distante de O_1 . O círculo Cir_2 , de centro O_1 e raio O_1X' , é dado pelo ponto X' ao se efetuar uma rotação de 360° ao redor de O_1 .

Na Figura 4.19(a) representa-se os pontos X e X' numa seção do espaço de trabalho a fim de ver a correspondência com a Fig. 4.20(b). Observa-se que o triângulo O_1HO_3 é retângulo, logo, tem-se que $(O_1O_3)^2 = (r_2)^2 + (1 + d_3)^2$, que corresponde à expressão de A , dada

na Eq.(3.40). Agora, da congruência dos triângulos PO_2O_3 e PO_2O_3' (sendo P o centro do círculo que passa por O_3 e O_3' , logo $PO_3 \equiv PO_3'$), tem-se que $O_2O_3' \equiv O_2O_3 = d_3$, daí, $HO_3' = (d_3 - 1)$, conseqüentemente, $(O_1O_3')^2 = (r_2)^2 + (d_3 - 1)^2$, que corresponde à expressão de B , também dada na Eq.(3.40).

A transição entre as topologias do espaço de trabalho WT_2 e WT_3 é definida pela coincidência dos círculos Cir_2 e Cir_3 em X ou em X' , conforme a Fig. 4.20(b). Esta coincidência se traduz pela condição:

$$O_1X = A - d_4 \quad \text{e} \quad O_1X' = B + d_4 \quad (4.26)$$

$$\text{Daí, } O_1X = O_1X' \Leftrightarrow A - d_4 = B + d_4 \quad (4.27)$$

Finalmente,

$$E_1 : d_4 = \frac{1}{2}(A - B) \quad (4.28)$$

A Equação (4.28) define a superfície de separação entre WT_2 e WT_3 designada por E_1 e representada na Fig. 4.20 por uma seção plana desta superfície considerando $r_2 = 1,0$.

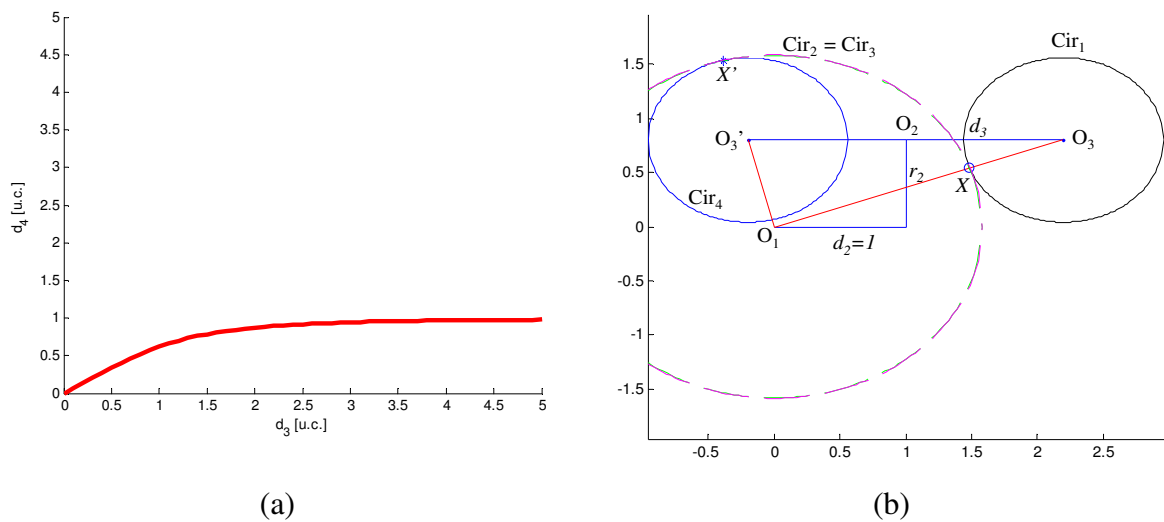


Figura 4.20 - (a) Seção plana da superfície E_1 e (b) Croqui de duas configurações com $d_4 < d_3$, para o manipulador da Fig. 4.19

Além disso, uma terceira topologia do espaço de trabalho representada pelo manipulador caracterizado pela Fig. 4.21 está contida no domínio 2. Esta topologia do espaço de trabalho denotada $WT_4(4, 2)$ contém 4 pontos de cúspides e 2 nós. Estes nós são diferentes daqueles de WT_2 , pois eles coincidem com as duas imagens das duas linhas de singularidade D_1 e D_2 . Além disso, estes nós não delimitam um vazão, mas uma região de 4 soluções no MGI. A Fig. 4.21 foi obtida considerando-se, para ilustração, $d_3 = 3,0$; $d_4 = 4,0$ e $r_2 = 9,0$ [u.c.].

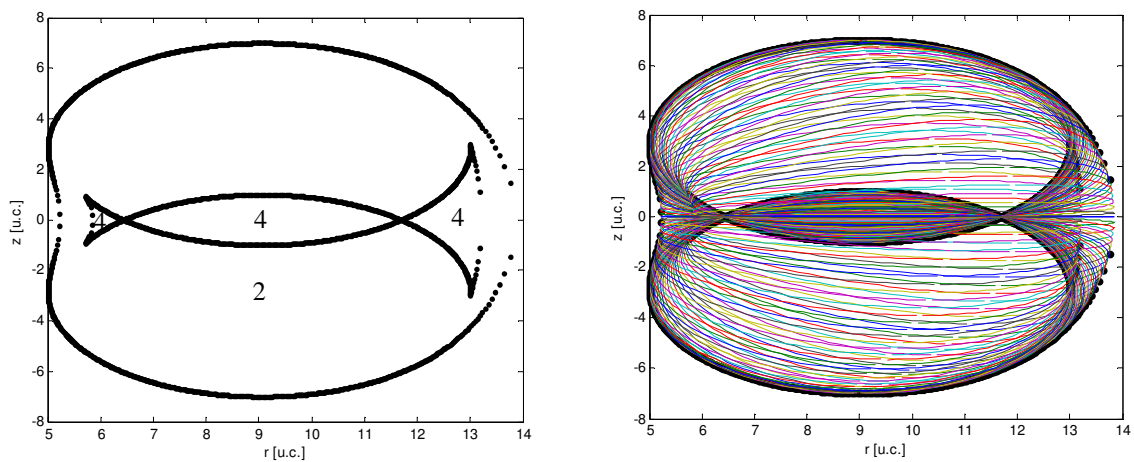


Figura 4.21 - Seção do espaço de trabalho de um manipulador na topologia WT_4

A transição entre as topologias WT_3 e WT_4 é tal que os segmentos superiores e inferiores da envoltória interna são tangentes, conforme ilustrado na Fig. 4.22, onde adotou-se os parâmetros de DH: $d_3 = 2,0$; $d_4 = 2,0$ e $r_2 = 2,5$ [u.c.].

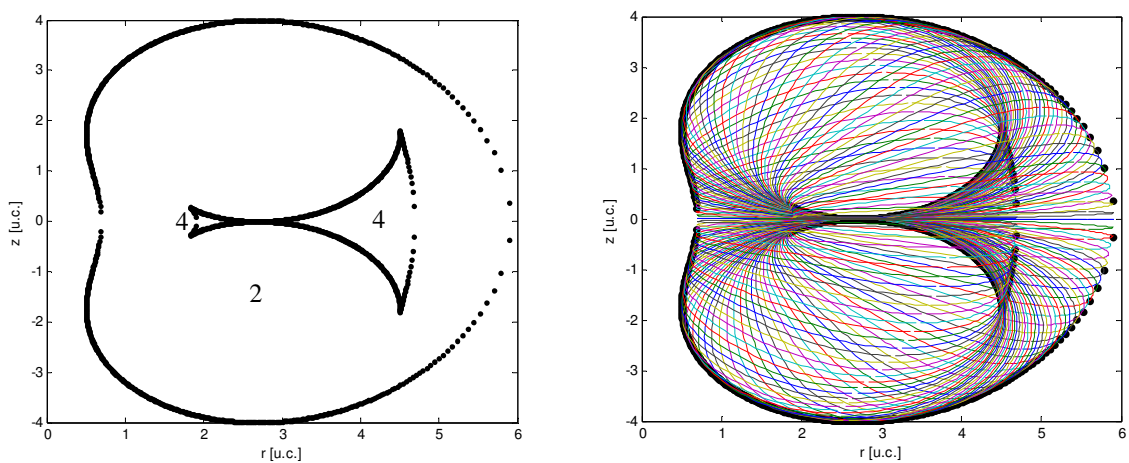


Figura 4.22 - Transição entre WT_3 e WT_4

A transição entre WT_3 e WT_4 é devida, neste caso, às duas singularidades D_1 e D_2 , desde que a Eq.(4.2) admita as soluções. Isto não é verdade para $d_4 \geq d_3$, portanto, o caso transitório se apresenta quando $d_4 = d_3$, o que define a equação E_2 , separa estas duas topologias do espaço de trabalho:

$$E_2 : d_4 = d_3 \quad (4.29)$$

Esta equação é apresentada na Fig. 4.23.

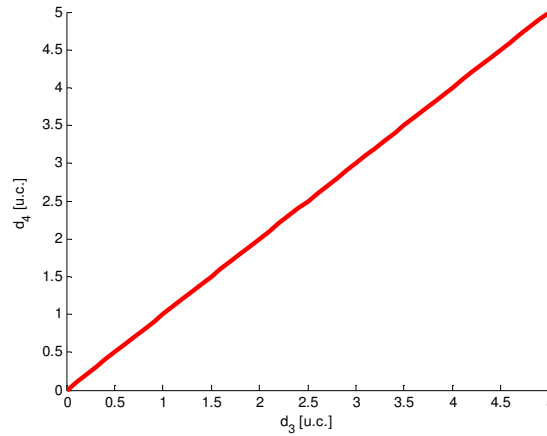


Figura 4.23 - Equação E_2 que separa as transições WT_3 e WT_4

4.2.3. Manipuladores pertencentes aos Domínios 3 e 5

Na seção 4.1, foi mostrado que para os manipuladores pertencentes ao domínio 3 a envoltória interna possui 2 pontos de cúspides e no caso dos manipuladores do domínio 5 a envoltória interna não possui ponto de cúspide. A envoltória interna pode estar inteiramente contida na região delimitada pela envoltória externa (caso da Fig. 4.9 e Fig. 4.15). Mas ela também pode interceptar a superfície da envoltória externa, o que faz aparecer dois nós. A Fig. 4.9 representa manipuladores de topologia $WT_5(2, 1)$, com 2 pontos de cúspides e um nó, enquanto que a Fig. 4.24 caracteriza um manipulador (com parâmetros de DH: $d_3 = 3,0$; $d_4 = 4,0$ e $r_2 = 2,0$ [u.c.]) que pertence à topologia do espaço de trabalho $WT_6(2, 3)$, que tem 2 pontos de cúspides e 3 nós.

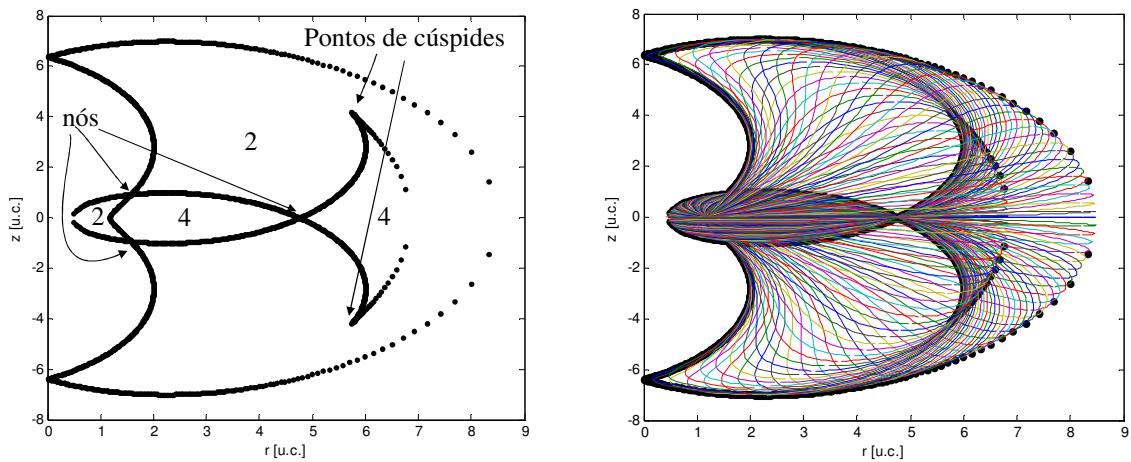


Figura 4.24 - Seção do espaço de trabalho de um manipulador na topologia WT_6

A topologia do espaço de trabalho $WT_8(0, 0)$ representada pela Fig. 4.15 corresponde aos manipuladores sem pontos de cúspides e sem nós. Da mesma forma, a Fig. 4.25 caracteriza um manipulador (no exemplo, com parâmetros de DH: $d_3 = 0,5$; $d_4 = 2,0$ e $r_2 = 0,6$ [u.c.]) que pertence à topologia do espaço de trabalho $WT_9(0, 2)$. Esta topologia corresponde aos manipuladores que apresentam nenhum ponto de cúspide e dois nós.

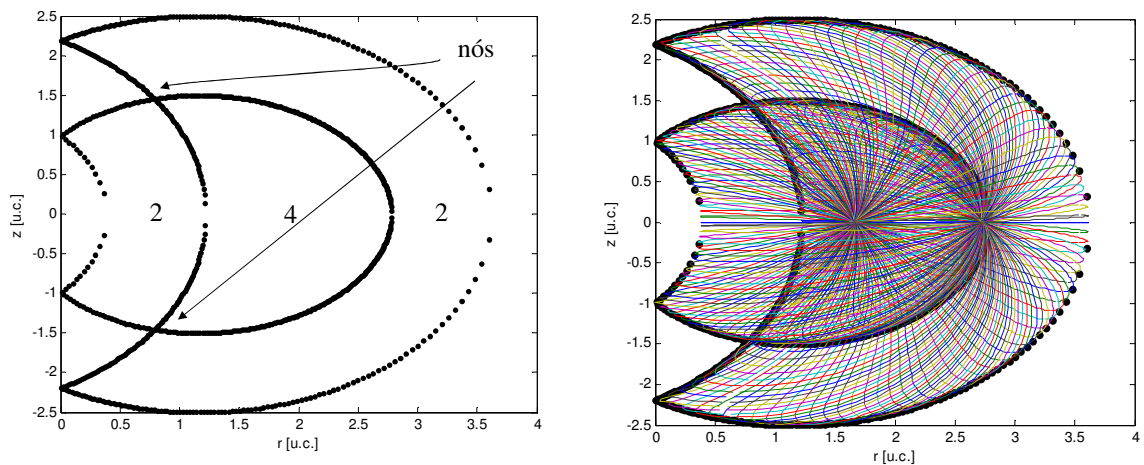


Figura 4.25 - Seção do espaço de trabalho de um manipulador na topologia WT_9

A transição entre WT_5 e WT_6 e a transição entre WT_8 e WT_9 são definidas pelos manipuladores cuja envoltória interna é tangente à envoltória externa. A Fig. 4.26 mostra um manipulador que se encontra sobre a superfície de separação das duas topologias do espaço de trabalho WT_5 e WT_6 . Neste exemplo os parâmetros são: $d_3 = 1,2$; $d_4 = 1,58$ e $r_2 = 0,8$ [u.c.].

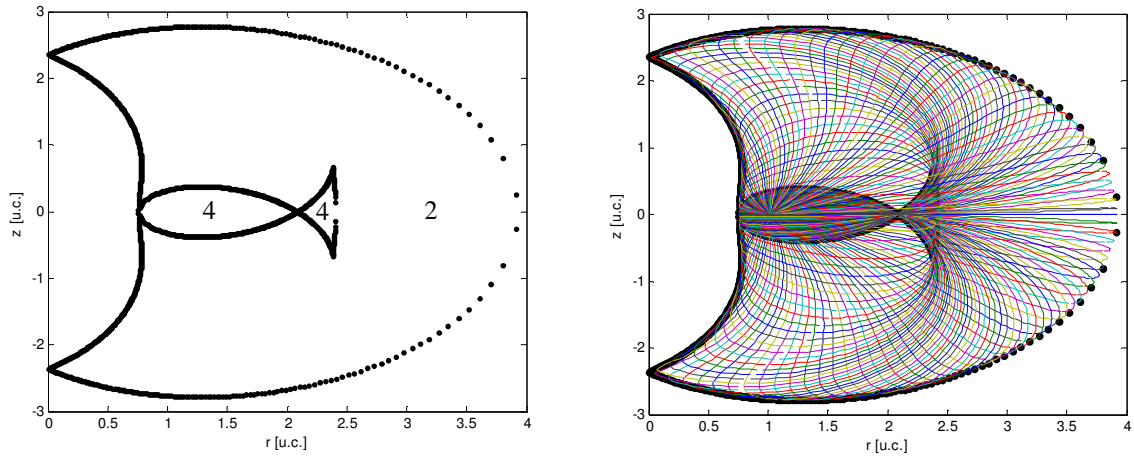


Figura 4.26 - Transição entre WT_5 e WT_6

De forma similar, a Fig. 4.27 apresenta um manipulador (parâmetros de DH: $d_3 = 0,5$; $d_4 = 1,02$ e $r_2 = 0,2$ [u.c.]) que pertence à superfície que separa as duas topologias do espaço de trabalho WT_8 e WT_9 .

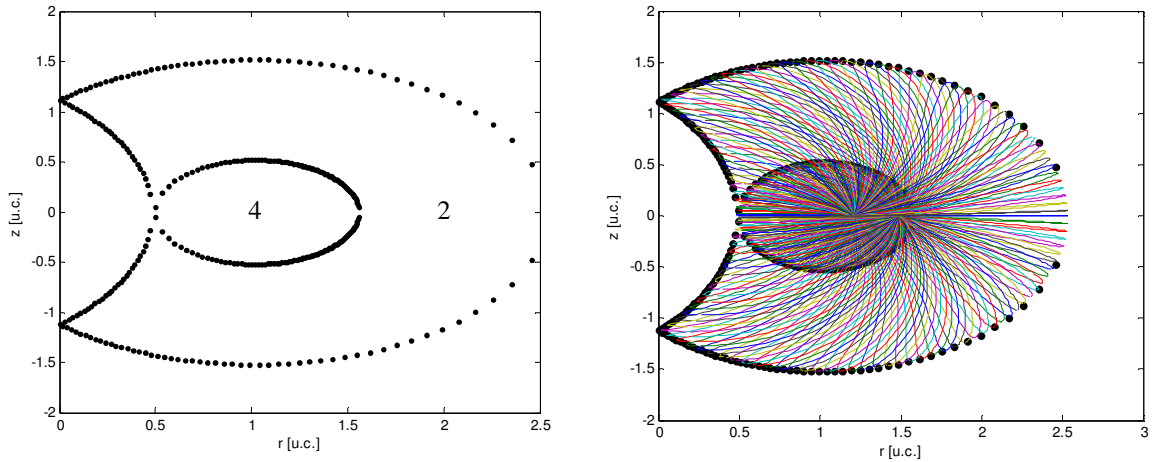


Figura 4.27 - Transição entre WT_8 e WT_9

Geometricamente, esta transição é feita ao sair da região com 4 soluções no MGI (delimitado pela envoltória interina), deslocando-se no plano $z = 0$ e aproximando-se do eixo $r = 0$ (ver Fig. 4.26 e Fig. 4.27).

A Figura 4.28 representa duas configurações de um manipulador com $d_4 > d_3$, $\theta_1 = 0^\circ$, $\theta_2 = 0^\circ$ (à direita) e $\theta_2 = 180^\circ$ (à esquerda). Utilizando-se a mesma aproximação geométrica que permitiu determinar E_I , encontram-se facilmente os significados dos círculos Cir_3 e Cir_4 . No caso geral, as regiões delimitadas pelos círculos Cir_1 e Cir_2 têm 2 soluções no MGI (Fig. 4.28(b)). Além disso, quando $\theta_1 = 0^\circ$, $\theta_2 = 0^\circ$ ou $\theta_2 = 180^\circ$, a região compreendida entre

os círculos Cir_3 e Cir_4 é uma região com 4 soluções no MGI (região de sobreposição dos círculos Cir_3 e Cir_4). Seguir a flecha tracejada indicada na Fig. 4.28(a) em uma seção do espaço de trabalho (parâmetros de DH: $d_3 = 3,0$; $d_4 = 4,0$ e $r_2 = 2,0$ [u.c.]) no plano $z = 0$ corresponde a partir de uma região com 2 soluções, atravessar em seguida uma região com 4 soluções, para chegar finalmente a uma região com 2 soluções antes de deixar o espaço de trabalho compreendido pela envoltória WS_I . A condição procurada (caso da Fig. 4.26 e da Fig. 4.27) corresponde a: sair de uma região com 2 soluções, atravessar outra com 4 soluções antes de deixar o espaço de trabalho já que as duas superfícies de singularidade WS_I e WS_2 são tangentes em $z = 0$. Observando a Fig. 4.28(b), esta condição é verificada quando: $A + B = 2d_4$.

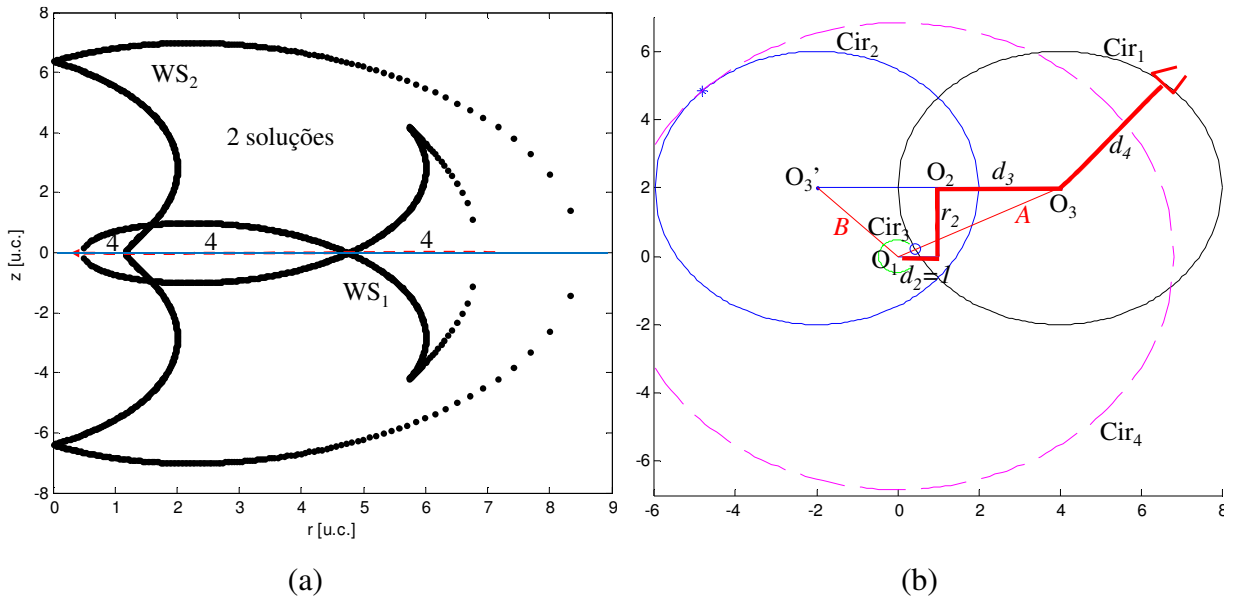


Figura 4.28 - Correspondência entre (a) espaço de trabalho de um manipulador e (b) croqui de duas configurações com $d_4 > d_3$, $\theta_1 = 0^\circ$, $\theta_2 = 0^\circ$ (à direita) ou $\theta_2 = 180^\circ$ (à esquerda)

A Equação (4.30) define a superfície de separação E_3 entre as topologias do espaço de trabalho WT_5 e WT_6 e as topologias WT_8 e WT_9 . A Fig. 4.29 mostra uma seção plana desta superfície considerando $r_2 = 1,0$.

$$E_3 : d_4 = \frac{1}{2}(A + B) \quad (4.30)$$

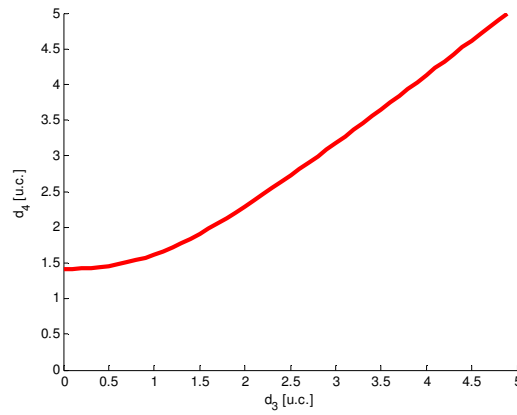


Figura 4.29 - Seção plana da superfície E_3

4.2.4. Manipuladores pertencentes ao Domínio 4

Todos os manipuladores deste domínio possuem 4 pontos de cúspides e 4 nós, não havendo outros subdomínios. A topologia do espaço de trabalho $WT_7(4, 4)$ foi representada na Fig. 4.12.

4.3. Divisão do espaço dos parâmetros apresentando as topologias dos Manipuladores Ortogonais, $r_3 = 0$

A partir da divisão do espaço dos parâmetros da família de manipuladores ortogonais estudada segundo o número de pontos de cúspides e de nós, tem-se uma nova divisão do espaço dos parâmetros considerando as 9 topologias do espaço de trabalho. A Fig. 4.30 apresenta uma seção do espaço dos parâmetros, considerando $r_2 = 1,0$. As superfícies separando as regiões de acordo com o número de pontos de cúspides são as C_i ($i = 1, \dots, 4$), enquanto as superfícies separando as regiões considerando o número de nós são as E_i ($i = 1, \dots, 3$). Conforme definido anteriormente, cada uma das 9 topologias dos espaços de trabalho será denotada por $WT_i(a, b)$, onde a indica o número de pontos de cúspides e b o número de nós da topologia i .

Traçando as superfícies que separam as topologias do espaço de trabalho em várias seções considerando outros valores de r_2 , observa-se que estas topologias se deformam (Fig. 4.31). As áreas das superfícies associadas às topologias WT_1 , WT_2 , WT_7 e WT_9 diminuem quando se aumenta r_2 . Além disso, poucos manipuladores têm a topologia do espaço de trabalho WT_4 , já que o domínio associado a este tipo de topologia é muito pequeno. Por exemplo, na Fig. 4.31(a), ao considerar $r_2 = 0,3$, não está representada a topologia WT_4 .

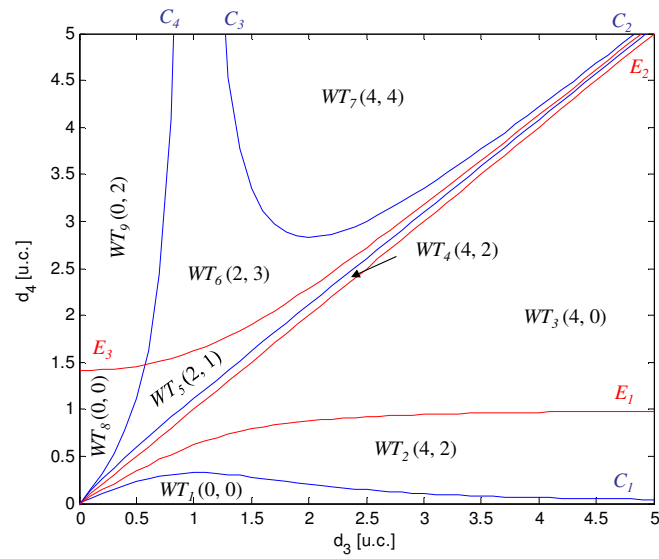
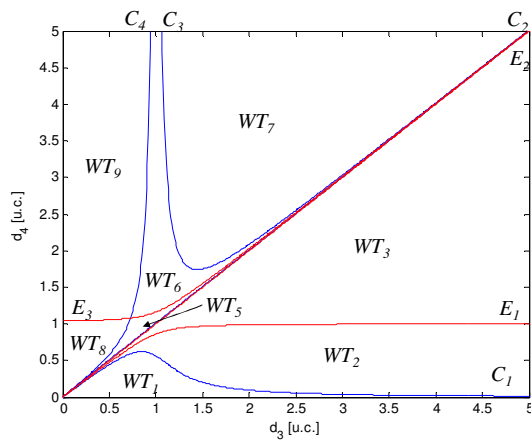
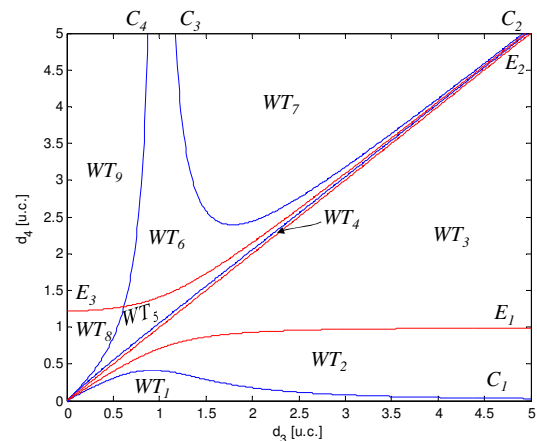


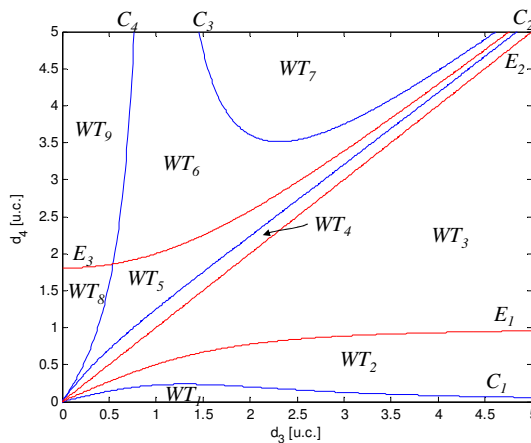
Figura 4.30 - Divisão do espaço dos parâmetros segundo o número de pontos de cúspides e de nós em uma seção $r_2 = 1,0$



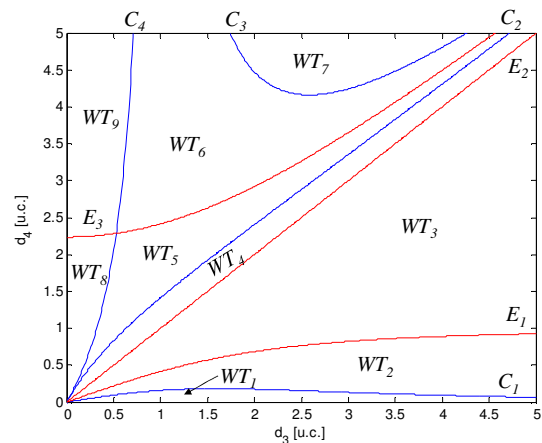
(a) $r_2 = 0,3$



(b) $r_2 = 0,7$



(c) $r_2 = 1,5$



(d) $r_2 = 2,0$

Figura 4.31 - As superfícies de separação para quatro valores de r_2

4.4. Observações importantes

Neste capítulo, foi apresentada a classificação de uma família de manipuladores 3R com eixos ortogonais e com $r_3 = 0$ segundo a topologia do espaço de trabalho. No espaço dos parâmetros (d_3 , d_4 , e r_2) existem apenas 5 domínios nos quais o número de pontos de cúspides é constante. As equações das superfícies separando estes 5 domínios foram determinadas em função dos parâmetros de DH por uma interpretação geométrica das envoltórias durante as transições entre as diversas topologias do espaço de trabalho e também foram encontradas a partir dos polinômios resultantes da solução do sistema obtido pela condição de existência de raiz tripla.

Os domínios com números de pontos de cúspides constantes foram subdivididos em função do número de nós, como pode ser observado na Fig. 4.30. As propriedades de cada topologia foram apresentadas, considerando o número de regiões com 2 ou 4 soluções no MGI; a existência ou não de vazio no espaço de trabalho e se os manipuladores são binários ou quaternários, genéricos ou não genéricos, etc.

CAPÍTULO V

CLASSIFICAÇÃO DOS MANIPULADORES 3R ORTOGONAIS SEGUNDO SUA TOPOLOGIA, CONSIDERANDO $r_3 \neq 0$

A classificação apresentada neste capítulo é análoga à apresentada no capítulo anterior. Neste caso, a família estudada é composta de manipuladores 3R ortogonais considerando o parâmetro dimensional $r_3 \neq 0$, conforme a Fig. 3.1. O estudo de tal manipulador é feito em função dos parâmetros de DH: d_2, d_3, d_4, r_2 e r_3 ; as três variáveis das juntas são θ_1, θ_2 e θ_3 . Do mesmo modo que no estudo anterior, os parâmetros de DH são normalizados com relação à d_2 para diminuir o número de incógnitas ($d_2 = 1,0$).

O estudo se baseia na topologia das superfícies das singularidades no espaço de trabalho. Como visto anteriormente, pode ser caracterizada pelo número de pontos de cúspides e de nós. No caso em que $r_3 \neq 0$, um manipulador pode ter 0, 2, 4, 6 ou 8 pontos de cúspides e 0, 2 ou 4 nós.

Antes de começar esta segunda classificação, são apresentados alguns exemplos para ilustrar as diversas topologias do espaço de trabalho diretamente relacionadas com a forma das envoltórias, assim como ao número de pontos de cúspides e nós. Além disso, em cada região do espaço de trabalho, é dado o grau de acessibilidade. Estas topologias do espaço de trabalho são novas e não existem para os manipuladores estudados anteriormente.

A Figura 5.1 corresponde à seção do espaço de trabalho de um manipulador não cuspidal, quaternário e regular (cujos parâmetros de DH são: $d_3 = 0,5$; $d_4 = 0,8$; $r_2 = 0,15$ e $r_3 = 0,1$ [u.c.]). Observe que as envoltórias não possuem pontos de cúspides e nem nós. Este manipulador se assemelha aos manipuladores pertencendo à topologia do espaço de trabalho WT_8 visto no capítulo anterior (Fig. 4.15). Todavia, os dois ramos de singularidade D_1 e D_2 no espaço articulado dobram-se formando 2 regiões com 2 soluções do MGI no espaço de

trabalho, conforme Fig. 5.1. Quando estas duas novas superfícies de singularidade existem, vários tipos de manipuladores são possíveis:

- Estas duas superfícies de singularidade podem se cruzar;
- A superfície de singularidade D_1 pode se associar à envoltória interna e formar dois pontos de cúspides;
- A superfície de singularidade D_2 pode interceptar a envoltória interna;
- A superfície de singularidade D_2 pode interceptar, ao mesmo tempo, a envoltória interna e externa.

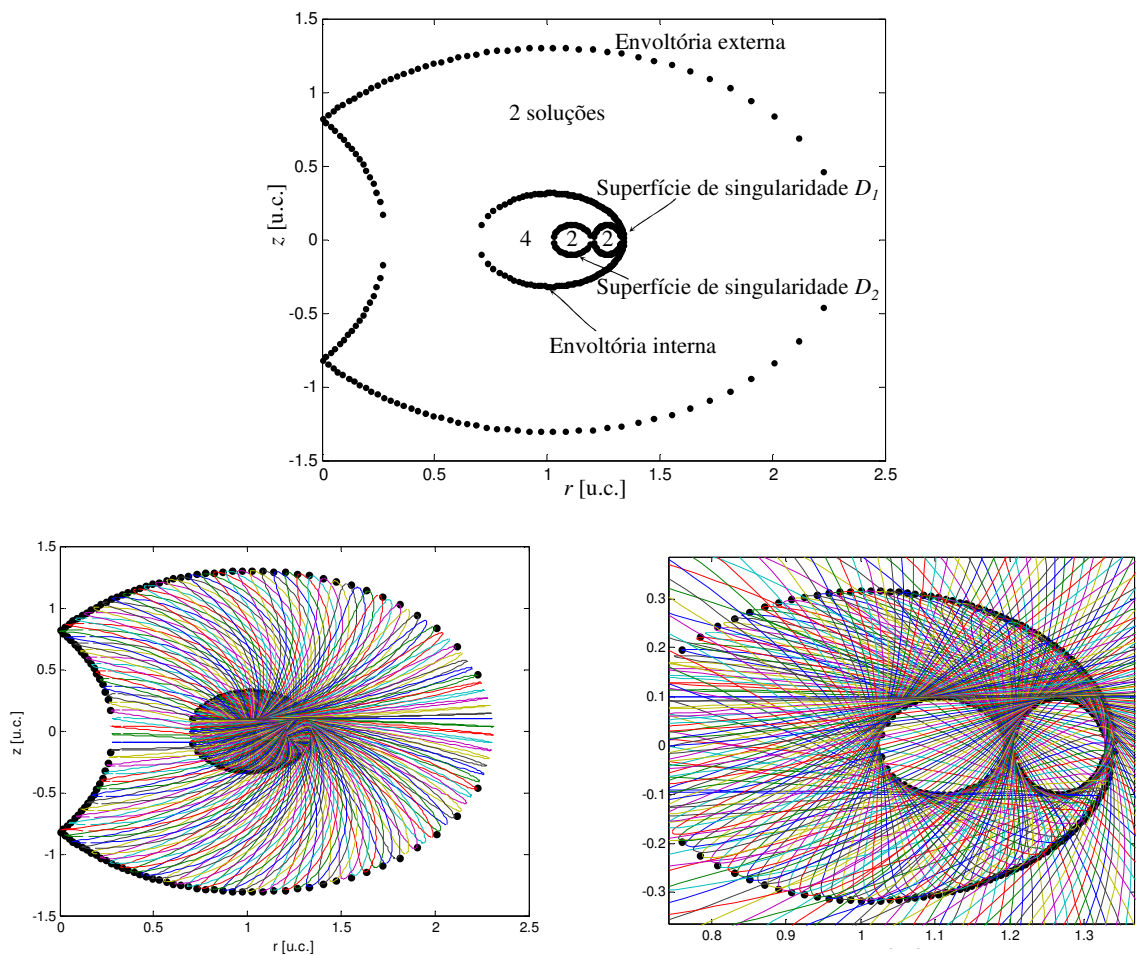


Figura 5.1 - Seção do espaço de trabalho de um manipulador não cuspidal, quaternário e genérico sem nós

A Figura 5.2 caracteriza um manipulador cuspidal, quaternário e regular. Ao contrário dos manipuladores da família estudada anteriormente, para os quais os pontos de cúspides

eram formados sobre as envoltórias internas, neste caso tem-se 2 pontos de cúspides formados por uma terceira envoltória sob forma de meia lua (imagem de um ramo de singularidade formado no espaço articulado). No interior desta meia lua, o grau de acessibilidade é 4. Neste exemplo, considerou-se: $d_3 = 0,35$; $d_4 = 0,3$; $r_2 = 0,2$ e $r_3 = 0,9$ [u.c.].

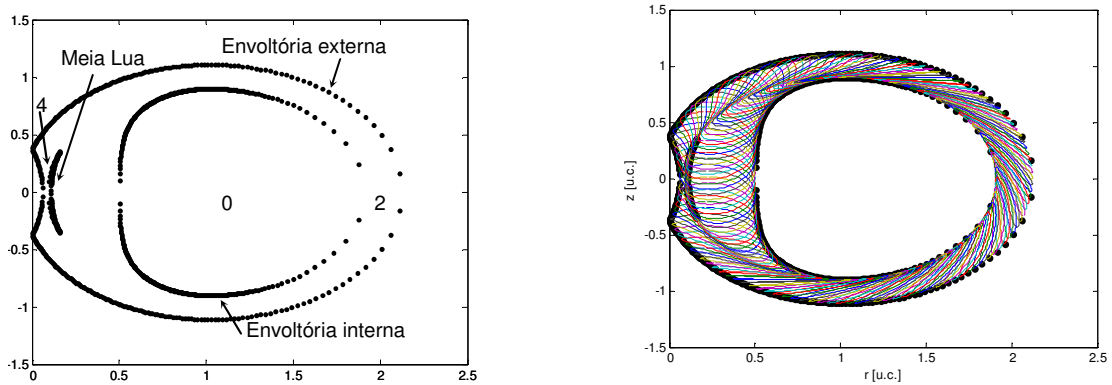


Figura 5.2 - Seção do espaço de trabalho de um manipulador quaternário, genérico com 2 pontos de cúspides e sem nós

Outro caso não encontrado ao se considerar $r_3 = 0$ é representado pela Fig. 5.3, que mostra um manipulador cuspidal, quaternário e regular que possui 4 pontos de cúspides e 2 nós. Os 4 pontos de cúspides dos manipuladores encontrados no estudo anterior são formados sobre a envoltória interna (WT_2 , WT_3 e WT_4) ou então são compartilhados entre as envoltórias interna e externa (WT_7). No entanto, os 4 pontos de cúspides do manipulador representado pela Fig. 5.3, são todos formados apenas sobre a envoltória externa. Para esta figura, adotou-se: $d_3 = 0,6$; $d_4 = 0,4$; $r_2 = 0,2$ e $r_3 = 0,9$ [u.c.].

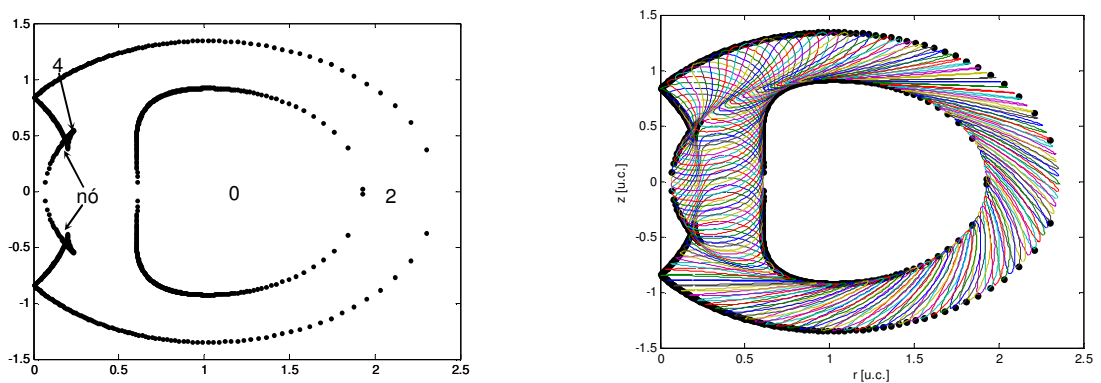


Figura 5.3 - Seção do espaço de trabalho de um manipulador quaternário, genérico com 4 pontos de cúspides e 2 nós

A Figura 5.4 corresponde a um manipulador cuspidal, quaternário e regular que possui 3 ramos de singularidade, 6 pontos de cúspides e 4 nós em seu espaço de trabalho. Para este manipulador, 4 pontos de cúspides são formados sobre a envoltória interna (que corresponde aos manipuladores da topologia WT_2 , no estudo anterior). Os 2 pontos de cúspides suplementares são formados sobre a meia lua, que, ao contrário da Fig. 5.2, intercepta a envoltória externa. Na Fig. 5.4, foram considerados: $d_3 = 0,495$; $d_4 = 0,53$; $r_2 = 0,2$ e $r_3 = 0,9$ [u.c.].

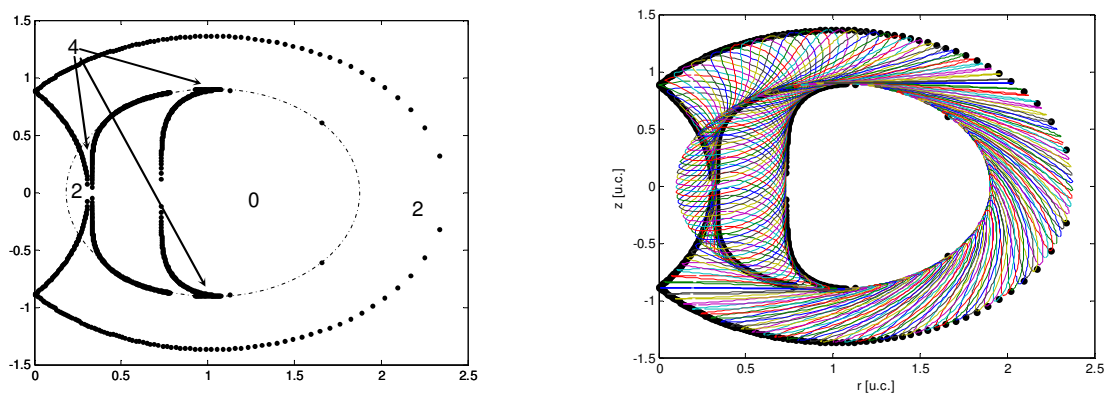


Figura 5.4 - Seção do espaço de trabalho de um manipulador quaternário, genérico com 6 pontos de cúspides e 4 nós

A Figura 5.5 ilustra outro caso não apresentado no capítulo anterior (para este exemplo, $d_3 = 0,9$; $d_4 = 0,9$; $r_2 = 0,2$ e $r_3 = 0,9$ [u.c.]), trata-se de um manipulador cuspidal, quaternário e regular que possui 8 pontos de cúspides e 4 nós em seu espaço de trabalho. Quatro pontos de cúspides são formados sobre a envoltória interna e os 4 restantes sobre a envoltória externa.

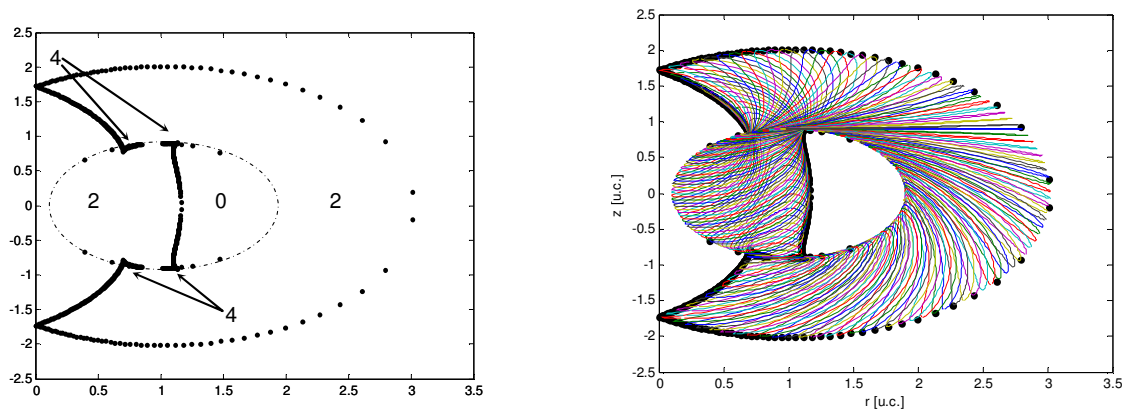


Figura 5.5 - Seção do espaço de trabalho de um manipulador quaternário genérico, com 8 pontos de cúspides e 4 nós

Estes exemplos de manipuladores dão uma ideia sobre a diversidade das topologias do espaço de trabalho que pode ser encontrado além das 9 topologias possíveis apresentadas para o caso $r_3 = 0$.

5.1. Considerações sobre as Superfícies de Separação para $r_3 \neq 0$

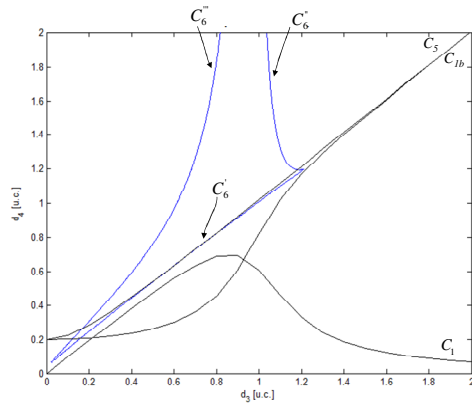
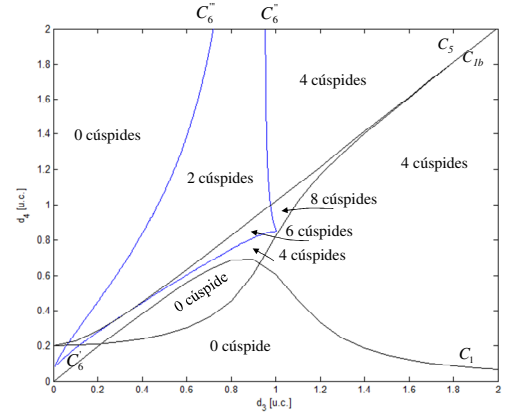
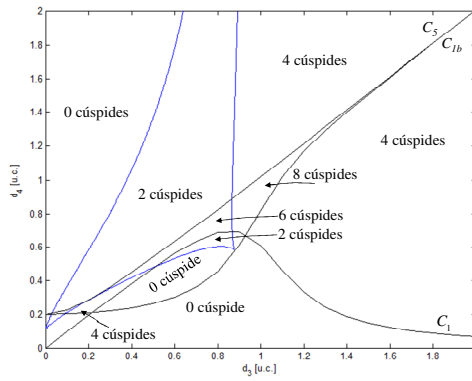
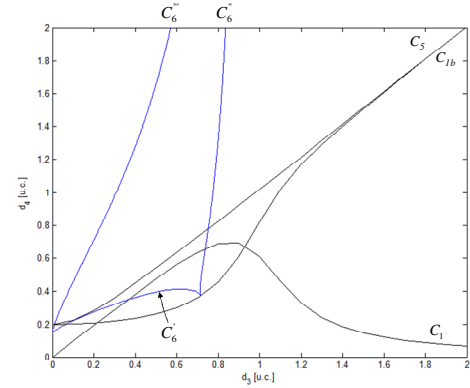
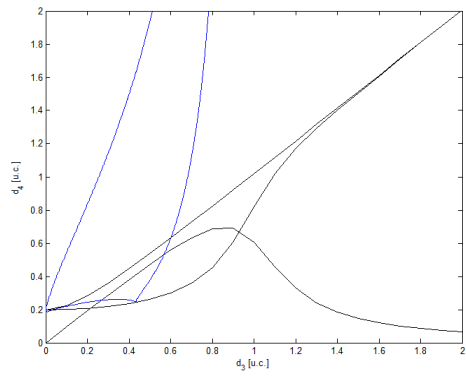
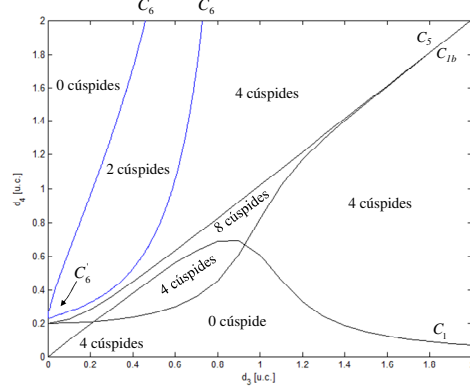
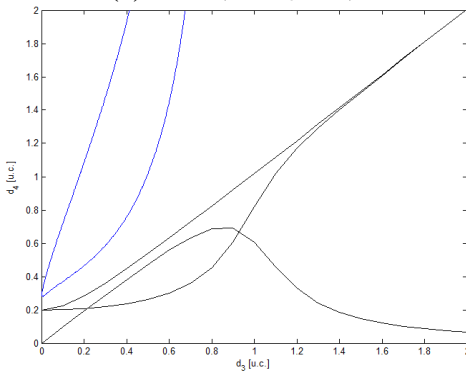
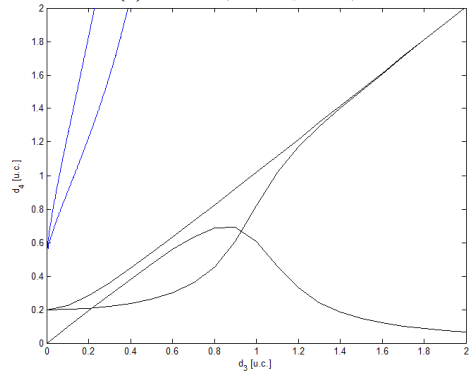
De maneira análoga ao capítulo anterior, o objetivo nesta seção é determinar todas as topologias do espaço de trabalho possíveis, assim como as equações das superfícies que as separam, além de verificar a transição entre duas topologias do espaço de trabalho.

Para isto, deve-se primeiramente determinar se um manipulador, que pertence à família estudada, é ou não cuspidal. Em seguida, deve-se resolver o sistema polinomial S , apresentado na Eq.(3.17). Como visto no estudo anterior, a solução deste sistema não é elementar. De fato, além das três variáveis x , y e z , que representam a posição do efetuador e dos parâmetros de DH: d_3 , d_4 , e r_2 , acrescenta-se o parâmetro r_3 . Isto complica naturalmente o problema e o torna difícil de ser abordado.

A Figura 5.6 ilustra algumas seções planas (d_3, d_4) para os pares (r_2, r_3) dados. Observa-se domínios contendo manipuladores não cuspidais e cuspidais que podem ter 2, 4, 6 ou 8 pontos de cúspides. São apresentadas as equações das superfícies que separam os domínios com número de pontos de cúspides constante. As seções planas (c), (d) e (e) apresentam o maior número de domínios. Cada uma destas três seções contém 9 domínios dos quais, 2 domínios não têm pontos de cúspides, 2 domínios com 2 pontos de cúspides, 3 domínios com 4 pontos de cúspides, 1 domínio com 6 pontos de cúspides e 1 domínio com 8 pontos de cúspides (ver Fig. 5.6(c)).

As superfícies que separam os domínios apresentados na Fig. 5.6, foram obtidas pela solução do sistema polinomial S dado na Eq.(3.17) e apresentadas nas Eqs.(3.18) a (3.22). Ao traçar tais curvas, constata-se que algumas são independentes de r_3 . A superfície C_1 , obtida no caso $r_3 = 0$, permanece válida para este estudo. Além disso, pode-se constatar que duas superfícies obtidas anteriormente que não eram válidas para $r_3 = 0$, tornam-se válidas no caso em que $r_3 \neq 0$. A primeira superfície é a C_{1b} , dada na Eq.(3.39); e a segunda é a superfície C_5 , obtida a partir do polinômio dado na Eq.(3.18):

$$C_5 : d_4 = \sqrt{d_3^2 + r_2^2} \quad (5.1)$$

(a) $r_2 = 0,2$ e $r_3 = 0,1$ (b) $r_2 = 0,2$ e $r_3 = 0,3$ (c) $r_2 = 0,2$ e $r_3 = 0,5$ (d) $r_2 = 0,2$ e $r_3 = 0,7$ (e) $r_2 = 0,2$ e $r_3 = 0,9$ (f) $r_2 = 0,2$ e $r_3 = 1,1$ (g) $r_2 = 0,2$ e $r_3 = 1,3$ (h) $r_2 = 0,2$ e $r_3 = 2,5$ Figura 5.6 - Diferentes seções em (d_3, d_4) para r_2 e r_3 dados

As superfícies C_2 , C_3 e C_4 não dividem mais o espaço dos parâmetros como acontecia quando $r_3 = 0$. Neste caso, tem-se uma nova superfície delimitando o domínio com 2 pontos de cúspides, denotada $d_4 = C_6$ e apresentada no Anexo II. Como será visto no estudo do domínio 4, o significado físico desta superfície é que sua equação não pode ser fatorada quando $r_3 \neq 0$. Mas quando $r_3 = 0$, sua equação pode ser escrita sob a forma de um produto de 3 fatores, correspondendo às equações das superfícies C_2 , C_3 e C_4 do estudo anterior. Observando as diferentes seções da Fig. 5.6, verifica-se que a superfície C_6 é composta de 2 ou 3 partes. Estas partes não são contínuas e não podem ser explicitadas. Serão denotadas C_6' , C_6'' e C_6''' .

A Figura 5.7 representa uma seção do espaço dos parâmetros no plano d_3d_4 para $r_2 = 0,2$ e $r_3 = 0,9$ [u.c.]. As 4 superfícies de separação C_1 , C_{1b} , C_5 e C_6 (decomposta em C_6' , C_6'' e C_6''') são indicadas. Estas superfícies separam os domínios com diferentes números de pontos de cúspides. Observa-se a presença dos seguintes domínios: sem pontos de cúspides (branco), com 2 pontos de cúspides (cinza), 4 pontos de cúspides (amarelo), 6 pontos de cúspides (azul claro) e 8 pontos de cúspides (azul escuro).

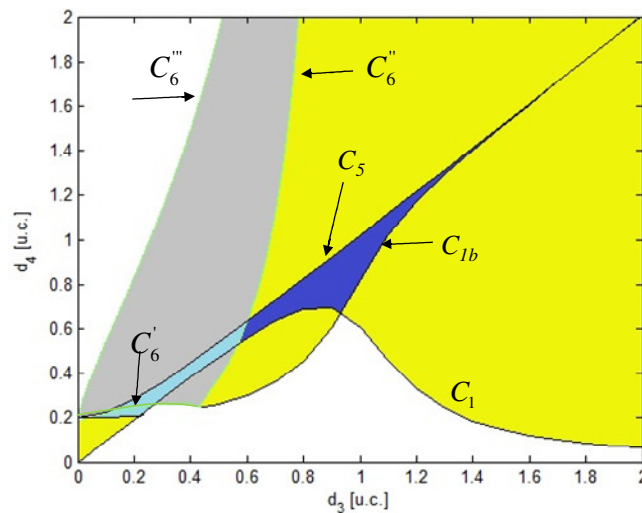


Figura 5.7 - Diferentes superfícies de separação para um manipulador ortogonal, com $r_3 \neq 0$

A Figura 5.8 mostra os limites entre as três partes de C_6 : o limite entre C_6' com C_6'' e o limite entre C_6' com C_6''' , que é definido pela interseção com o eixo das ordenadas.

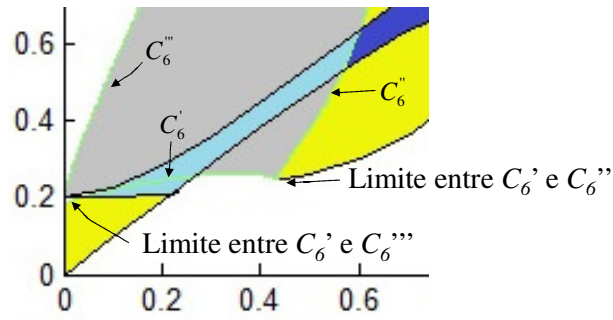


Figura 5.8 - Limites das partes C_6' , C_6'' e C_6''' em uma seção (d_3, d_4) com $r_2 = 0,2$ e $r_3 = 0,9$

5.2. Classificação da topologia segundo o Número de Pontos de Cúspides, para $r_3 \neq 0$

Diferentes formas dos espaços de trabalho são estudadas considerando o número de pontos de cúspides. Será mostrado que na família de manipuladores estudada encontra-se 9 tipos de manipuladores e 4 superfícies importantes de separação.

Os nove tipos de manipuladores são determinados tornando um representante em cada domínio, conforme ilustrado na Fig. 5.9 (neste caso, considerou-se $r_2 = 0,2$ e $r_3 = 0,9$ [u.c.]). As superfícies de separação são determinadas analisando todas as transições entre os 9 domínios.

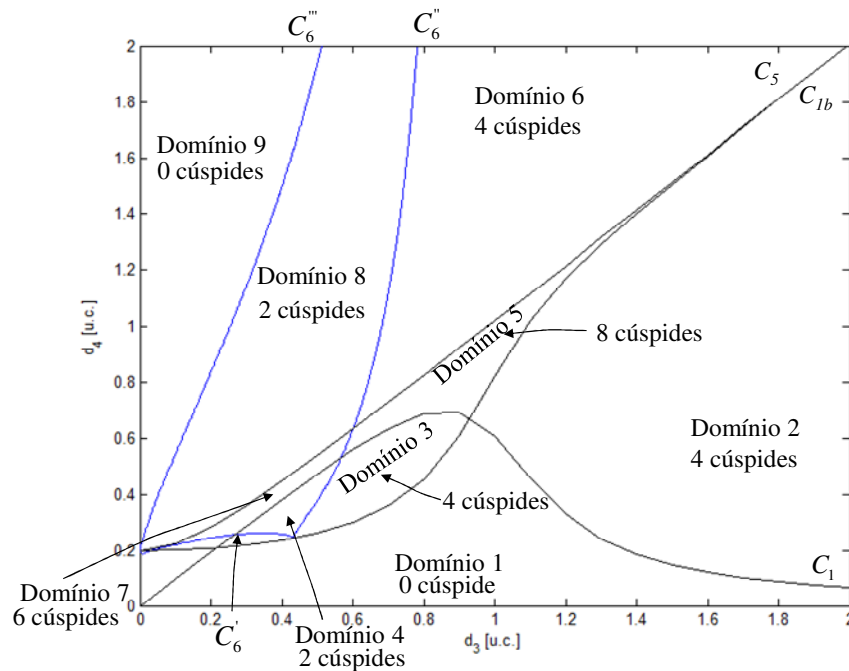


Figura 5.9 - As quatro superfícies de separação e os nove domínios para um manipulador ortogonal, considerando $r_3 \neq 0$

5.2.1. Manipulador Ortogonal do Tipo 1, para $r_3 \neq 0$

O primeiro tipo de manipulador é representado pela Fig. 5.10, sendo um manipulador binário, não tem pontos de cúspide e contém um vazio em seu espaço de trabalho, que é delimitado pela envoltória interna. Nesta representação foram adotados: $d_3 = 1,2$; $d_4 = 0,2$; $r_2 = 0,2$ e $r_3 = 0,9$ [u.c.].

A região útil do espaço de trabalho possui 2 soluções para o MGI. Observe que este manipulador do tipo 1 não possui pontos de nós.

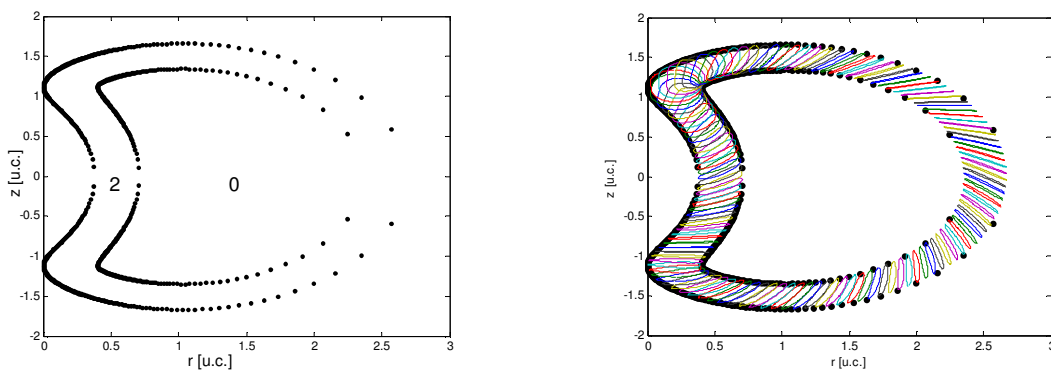


Figura 5.10 - Seção do espaço de trabalho de um manipulador do tipo 1

5.2.2. Manipulador Ortogonal do Tipo 2, para $r_3 \neq 0$

A Figura 5.11 corresponde a um manipulador do tipo 2, quaternário e cuspidal. Em seu espaço de trabalho, possui 4 pontos de cúspides, um vazio, duas regiões com 4 soluções e uma região com 2 soluções no MGI. Para esta ilustração, foram considerados: $d_3 = 1,4$; $d_4 = 0,8$; $r_2 = 0,2$ e $r_3 = 0,9$ [u.c.].

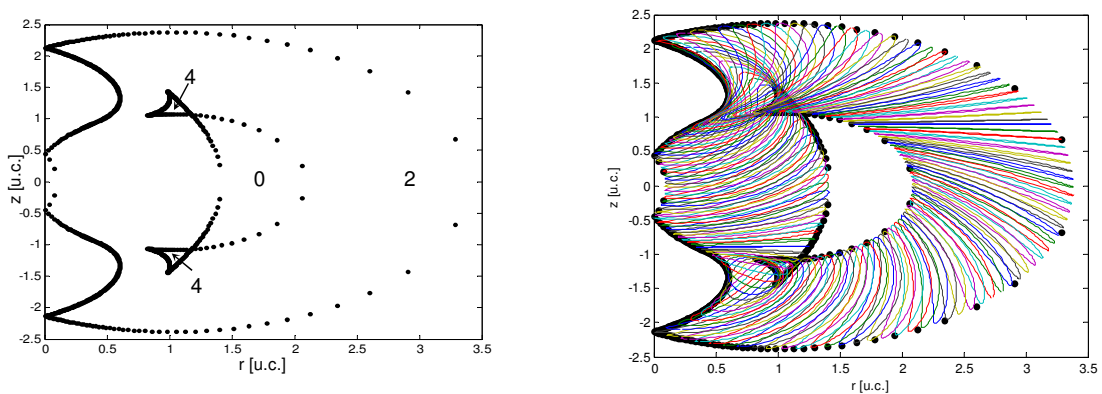


Figura 5.11 - Seção do espaço de trabalho de um manipulador do tipo 2

Ainda no domínio 2, pode-se observar uma outra categoria de manipuladores que possuem 4 pontos de cúspides, não têm pontos de nós, conforme Fig. 5.12 ($d_3 = 0,1$; $d_4 = 0,18$; $r_2 = 0,2$ e $r_3 = 0,9$ [u.c.]).

A transição entre os manipuladores do tipo 1 e do tipo 2 é semelhante à transição entre os manipuladores do tipo 1 e 2 no caso $r_3 = 0$. A Fig. 5.9 mostra que a passagem do domínio 1 ao domínio 2 se efetua transpondo a superfície de separação C_I , definida na Eq.(3.41).

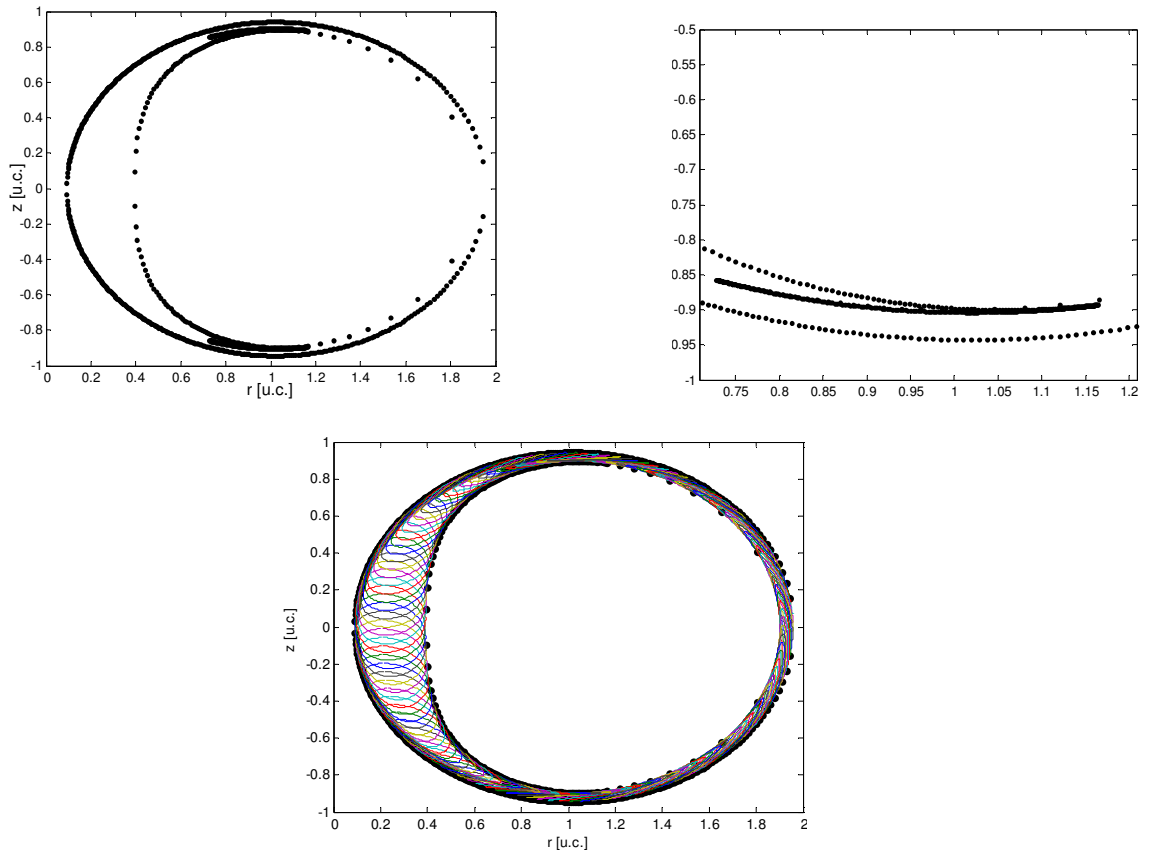


Figura 5.12 - Seção do espaço de trabalho de um manipulador tipo 2, com 4 pontos de cúspides e sem nós

5.2.3. Manipulador Ortogonal do Tipo 3, para $r_3 \neq 0$

O terceiro tipo de manipuladores corresponde ao domínio 3 e é caracterizado pela Fig. 5.13 (considerando os parâmetros: $d_3 = 0,6$; $d_4 = 0,5$; $r_2 = 0,2$ e $r_3 = 0,9$ [u.c.]). Este manipulador é quaternário, cuspidal e possui um vazio em seu espaço de trabalho. Os quatro pontos de cúspides são formados sobre a envoltória externa, formando 2 regiões com 4 soluções no MGI.

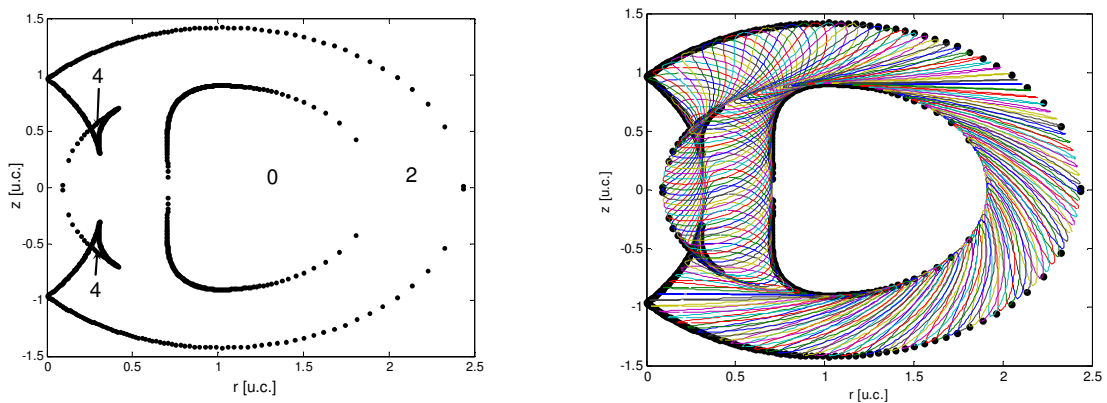


Figura 5.13 - Seção do espaço de trabalho de um manipulador do tipo 3

Observando a Fig. 5.9, percebe-se que a transição de um manipulador do tipo 1 e um outro do tipo 3 efetua-se transpondo a superfície de separação C_{1b} (Eq.(3.39)) no espaço dos parâmetros de DH. Fisicamente, a transição corresponde à criação de um par de pontos quádruplos sobre a envoltória externa onde cada ponto quádruplo dá lugar a 2 pontos de cúspides e 1 nó. Escrevendo a condição de existência de um ponto quádruplo, tem-se uma expressão independente de r_3 e obtêm-se as equações das superfícies C_1 e C_{1b} , apresentadas no capítulo 3.

5.2.4. Manipulador Ortogonal do Tipo 4, para $r_3 \neq 0$

O quarto tipo de manipulador é caracterizado pela Fig. 5.14, sendo genérico, quaternário e cuspidal. Em seu espaço de trabalho, possui um vazio, uma região com 2 soluções do MGI e uma nova envoltória sob forma de meia lua, que contém 2 pontos de cúspides e delimita uma região com 4 soluções do MGI. Para esta ilustração, adotou-se: $d_3 = 0,36$; $d_4 = 0,3$; $r_2 = 0,2$ e $r_3 = 0,9$ [u.c.].

A transição entre um manipulador do tipo 1 e outro do tipo 4 se faz transpondo a parte C_6' no espaço dos parâmetros de DH, conforme Fig. 5.9. Tal transição é caracterizada pelo manipulador correspondendo à Fig. 5.15 (cujos parâmetros adotados foram: $d_3 = 0,4$; $d_4 = 0,259$; $r_2 = 0,2$ e $r_3 = 0,9$ [u.c.]).

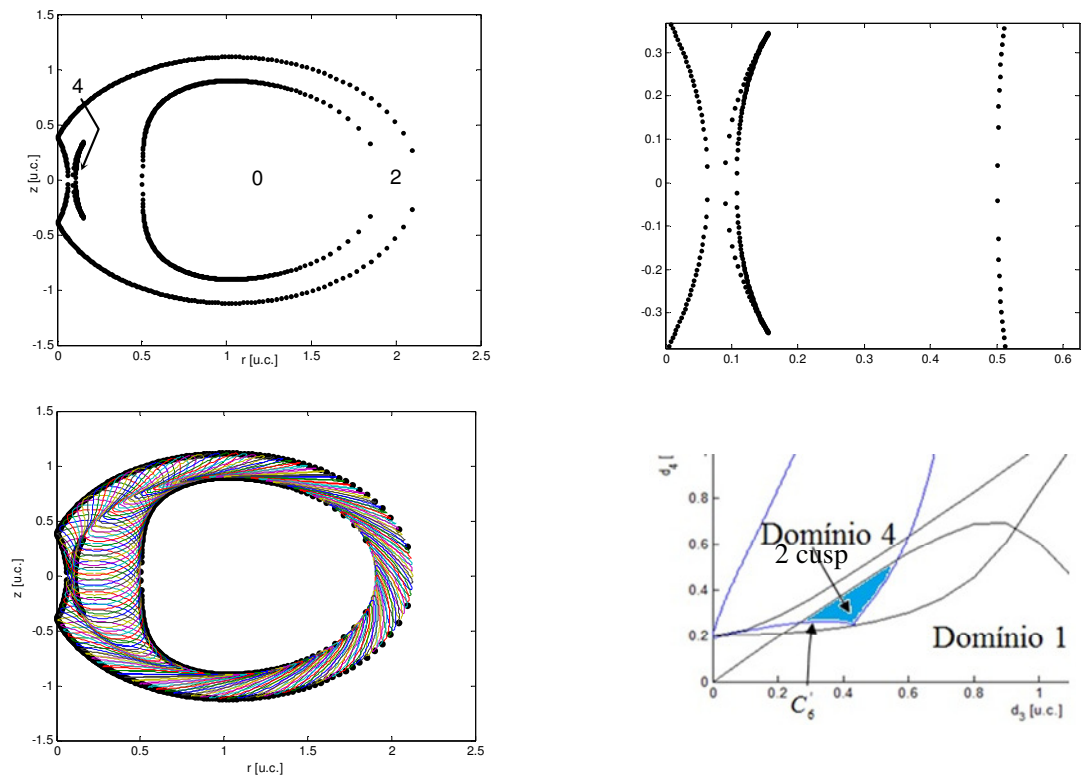


Figura 5.14 - Seção do espaço de trabalho de um manipulador do tipo 4

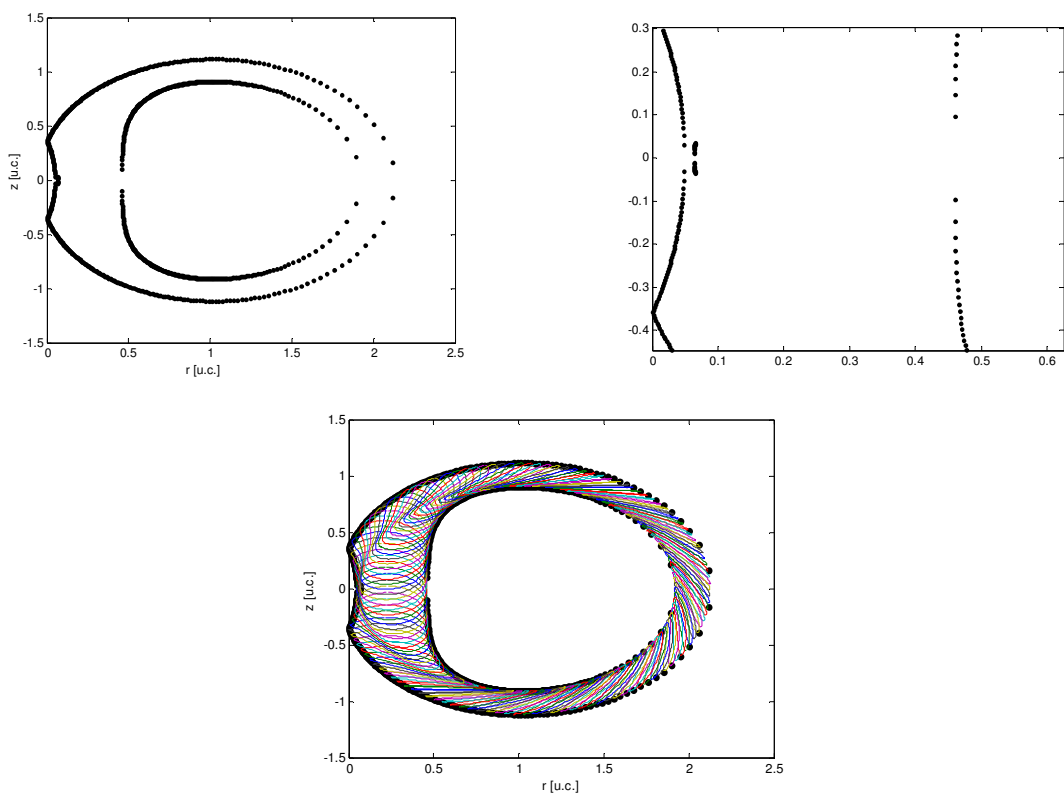


Figura 5.15 - Transição entre os domínios 1 e 4

A superfície de singularidade sob forma de meia lua no espaço de trabalho se cria em $z = 0$, isto quer dizer que os 2 pontos de cúspides se formam em $z = 0$. A ideia é então procurar uma condição de aparecimento simultâneo destes 2 pontos de cúspides sobre o eixo $z = 0$, os quais permitirão determinar a equação da superfície de separação. Começa-se, então, determinando as envoltórias do espaço de trabalho, calculando o discriminante do polinômio do MGI. Escreve-se, em seguida, a condição de aparecimento de um par de pontos de cúspides em $z = 0$ em função dos parâmetros de DH, e elimina-se o parâmetro r . Utilizando o software de cálculo simbólico Maple, obtém-se uma equação de grau 12 em d_3^2 , d_4^2 , r_2^2 e r_3^2 , que possui 536 termos (BAILI, 2004). O Algoritmo de Charles Wampler (SOMMESE *et al.*, 2001) mostra que a equação encontrada não pode ser fatorada. Esta equação representa a superfície C_6 e encontra-se no Anexo II.

5.2.5. Manipulador Ortogonal do Tipo 5, para $r_3 \neq 0$

A Figura 5.16 corresponde a um manipulador do tipo 5, quaternário e cuspidal. Em seu espaço de trabalho, possui 8 pontos de cúspides, sendo 4 sobre a envoltória interna e 4 sobre a envoltória externa. Além disso, possui um vazio, uma região com 2 soluções e 4 regiões com 4 soluções no MGI. Para obter a Fig. 5.16, foram considerados: $d_3 = 0,88$; $d_4 = 0,9$; $r_2 = 0,2$ e $r_3 = 0,9$ [u.c.].

A transição entre um manipulador do tipo 2 e outro do tipo 5 faz-se transpondo a superfície C_{1b} no espaço dos parâmetros de DH. A transição corresponde à criação de um par de pontos quádruplos em $z \neq 0$ sobre a envoltória externa. Cada ponto quádruplo faz surgir 2 pontos de cúspides e um nó que englobam uma região com 4 soluções no MGI.

A transição entre os manipuladores do tipo 3 e do tipo 5 faz-se transpondo a superfície C_1 no espaço dos parâmetros de DH. A transição corresponde à criação de um par de pontos quádruplos em $z \neq 0$ sobre a envoltória interna. Cada ponto quádruplo forma 2 pontos de cúspides e um nó que englobam uma região com 4 soluções no MGI.

5.2.6. Manipulador Ortogonal do Tipo 6, para $r_3 \neq 0$

Um manipulador do tipo 6 é apresentado na Fig. 5.17, considerando $d_3 = 1,5$; $d_4 = 2,0$; $r_2 = 0,2$ e $r_3 = 0,9$ [u.c.]. É um manipulador quaternário e cuspidal. Em seu espaço de trabalho, 2 pontos de cúspides são formados sobre a envoltória interna sob a forma de rabo de peixe, enquanto que os outros 2 são formados sobre a envoltória externa. Este manipulador contém uma região com 4 soluções e 2 regiões com 2 soluções no MGI.

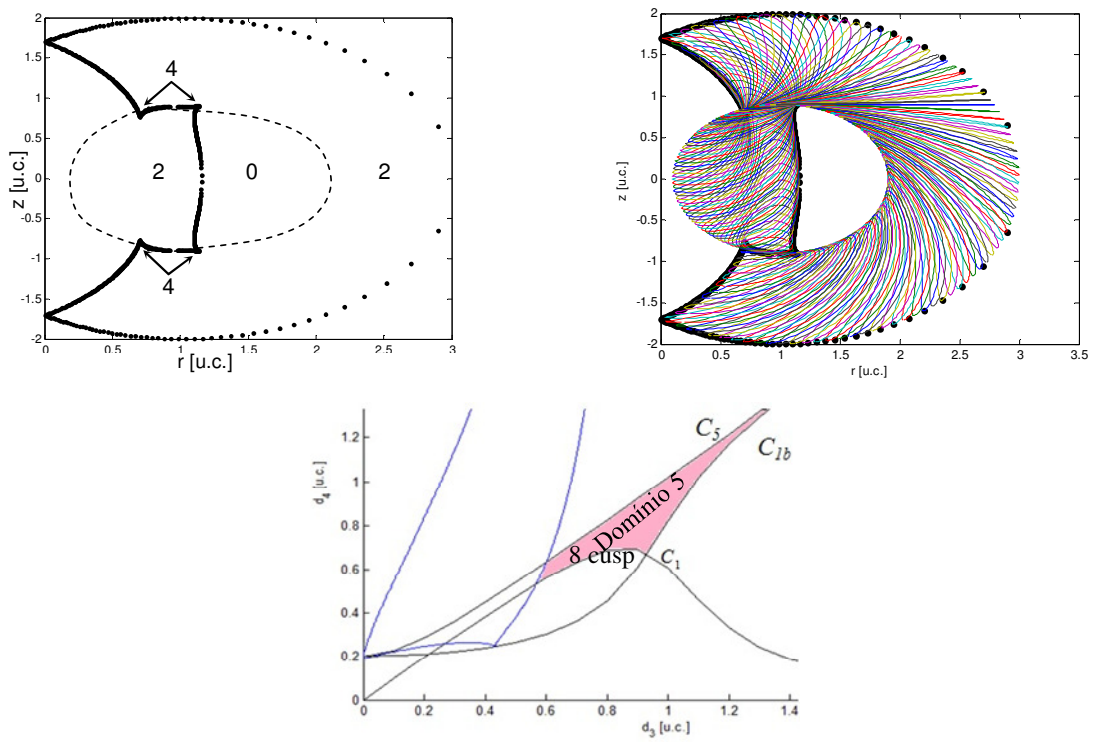


Figura 5.16 - Seção do espaço de trabalho de um manipulador do tipo 5

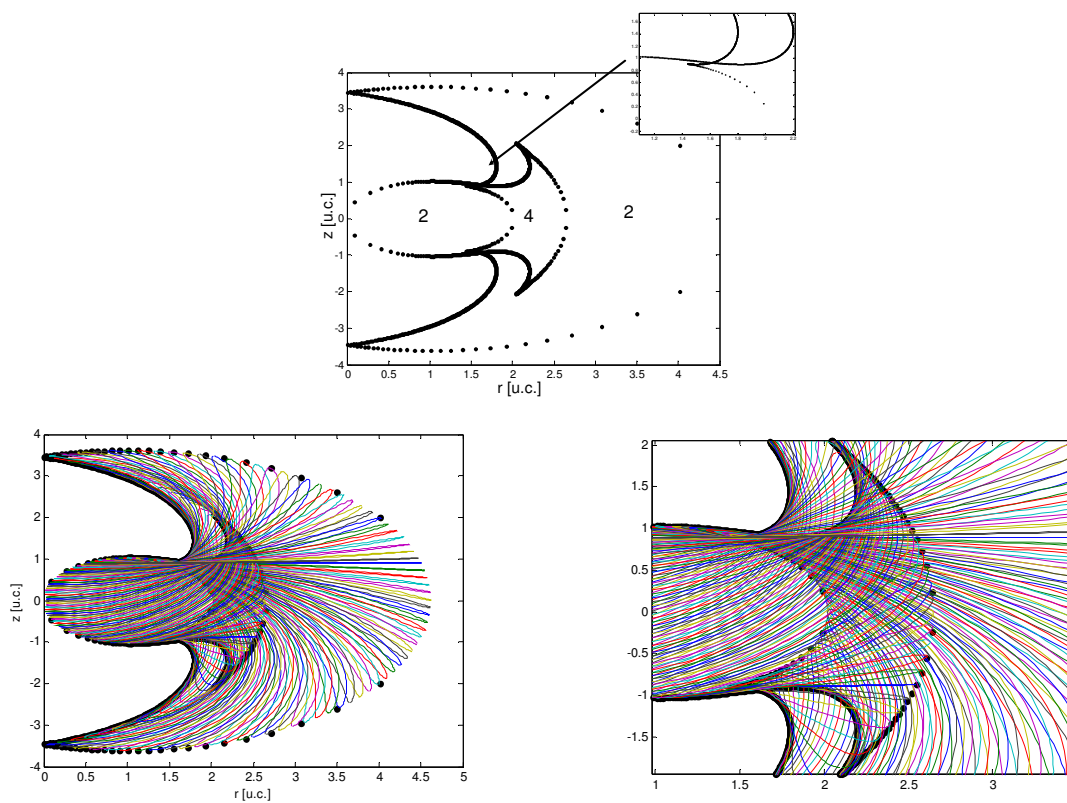


Figura 5.17 - Seção do espaço de trabalho de um manipulador do tipo 6