

DANIELA PORTES LEAL FERREIRA

Sistema p-Fuzzy Aplicado às Equações Diferenciais Parciais



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE MATEMÁTICA

2011

DANIELA PORTES LEAL FERREIRA

Sistema p-Fuzzy Aplicado às Equações Diferenciais Parciais

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA**.

Área de Concentração: Matemática.

Linha de Pesquisa: Análise Funcional e Equações Diferenciais.

Orientador(a): Prof(a). Dr(a). Rosana Sueli da Motta Jafelice.

UBERLÂNDIA - MG

2011

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFU , MG, Brasil

F383s Ferreira, Daniela Portes Leal, 1972-
 Sistema p-Fuzzy aplicado às equações diferenciais parciais / Daniela
 Portes Leal Ferreira. - 2011.
 75 f. : il.

Orientadora: Rosana Sueli da Motta Jafelice.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Uberlândia, Programa de Pós-Graduação em Matemática.
Inclui bibliografia.

1. Matemática - Teses. 2. Conjuntos difusos - Teses. 3. Equações diferenciais parciais - Teses. I. Jafelice, Rosana Sueli da Motta. II. Universidade Federal de Uberlândia. Programa de Pós-Graduação em Matemática. III. Título.

CDU: 51



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Av. João Naves de Ávila, 2121, Bloco 1F, Sala 1F 152
 Campus Santa Mônica, Uberlândia - MG, CEP 38400-902

ALUNO(A): Daniela Portes Leal Ferreira.

NÚMERO DE MATRÍCULA: 100095.

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: Matemática.

LINHA DE PESQUISA: Análise Funcional e Equações Diferenciais.

PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA: Nível Mestrado.

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: Sistema p-Fuzzy Aplicado às Equações Diferenciais Parciais.

ORIENTADOR(A): Prof(a). Dr(a). Rosana Sueli da Motta Jafelice.

Esta dissertação foi **APROVADA** em reunião pública realizada na Sala Multiuso da Faculdade de Matemática, Bloco 1F, Campus Santa Mônica, em 23 de agosto de 2011, às 9h00min, pela seguinte Banca Examinadora:

NOME

ASSINATURA

Profa. Dra. Rosana Sueli da Motta Jafelice
 UFU - Universidade Federal de Uberlândia

Rosana Sueli da Motta Jafelice

Prof. Dr. Fernando Antônio Campos Gomide
 UNICAMP - Universidade Estadual de Campinas

Fernando Antônio Campos Gomide

Profa. Dra. Ana Maria Amarillo Bertone UFU
 UFU - Universidade Federal de Uberlândia

Ana Maria Amarillo Bertone

Uberlândia-MG, 23 de agosto de 2011.

Dedicatória

Dedico esta dissertação ao meu companheiro Anderson e a meus filhos Lucas e Nathalia, por todo apoio, amor, compreensão e pela companhia ao longo da trajetória que me levou à concretização deste trabalho.

À meus pais Hélia e Anízio pelo amor e pelos ensinamentos que formaram os alicerces de minha história.

Agradecimentos

Agradeço a Deus porque Dele e por Ele são todas as coisas.

Meus agradecimentos a minha orientadora, professora Dra. Rosana Sueli da Motta Jafelice que sempre demonstrou acreditar no meu potencial, pela oportunidade oferecida, pela orientação e principalmente pelo bom convívio nestes anos de trabalho.

Agradeço ao professor Dr. Elias Serqueira por colaborar gentilmente com os dados experimentais e seus conhecimentos essenciais para a aplicação apresentada neste trabalho.

Deixo também uma palavra de agradecimento aos professores do Mestrado em Matemática da Universidade Federal de Uberlândia/UFU pela forma como ministraram suas disciplinas e por me terem transmitido o interesse por estas matérias.

Agradeço aos colegas do meu grupo: Carla, Carlos, Flávio, Liliane, Thiago e Túlio, pela alegre convivência e pela boa disposição com que realizamos os muitos trabalhos em comum.

FERREIRA, D. P. L. *Sistema P-Fuzzy Aplicado às Equações Diferenciais Parciais*. 2011. 64 p. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia-MG.

Resumo

Descrever matematicamente os fenômenos naturais para fazer previsões e tomar decisões é um dos grandes desafios da matemática. Vários fenômenos podem ser descritos através de equações diferenciais parciais, entretanto muitos desses fenômenos apresentam variáveis linguísticas, isto é, informações vagas e imprecisas. Essa característica dificulta a modelagem do fenômeno através das equações diferenciais, já que estas dependem da precisão dos parâmetros utilizados. A proposta deste trabalho é demonstrar a viabilidade e aplicabilidade dos sistemas parcialmente fuzzy (p-fuzzy) na modelagem de fenômenos descritos por equações diferenciais parciais. Os sistemas p-fuzzy foram obtidos utilizando a função *ANFIS* do Matlab, que a partir de um conjunto de dados identifica as funções de pertinência e os parâmetros do sistema baseado em regras fuzzy. Analisando os resultados alcançados concluímos que a utilização dos sistemas p-fuzzy é uma ferramenta útil para a modelagem de fenômenos particulares que envolvem taxas de variações parciais, inclusive com evolução no tempo.

Palavras-chave: Teoria dos Conjuntos Fuzzy, ANFIS, Equações Diferenciais Parciais, Sistemas Parcialmente Fuzzy.

FERREIRA, D. P. L. *Model P-Fuzzy applied to partial differential equations* 2011. 64 p. M. Sc. Dissertation, Federal University of Uberlândia, Uberlândia-MG.

Abstract

Describing mathematically natural phenomena in order to make predictions and decisions is one of the biggest challenges in mathematics. Several phenomena can be described through partial differential equations, however many of these phenomena present linguistic variables, i.e. vague and imprecise information. Such characteristics make phenomenon modeling through differential equations difficult due to their dependence on the precision of the parameters used. The purpose of this research is to demonstrate the feasibility and applicability of fuzzy partial systems (p-fuzzy) for the modeling of the phenomena described by partial differential equations. In particular, the method proposed made possible the mathematical treatment of the physical phenomenon of luminescence, therefore demonstrating the potential of fuzzy p systems in relation to those obtained without the fuzzy modeling approach. The p-fuzzy systems were obtained using the function *ANFIS* Matlab, which came from a data set and identifies the membership functions as well as the parameters of fuzzy rules based systems. Analyzing the results, it is possible to conclude that the p-fuzzy system is a useful tool for modeling specific phenomena that involve partial variation rates, including time evolution.

*Keywords:*Fuzzy Set Theory, ANFIS, Partial Differential Equations, Fuzzy Partial System .

Sumário

Resumo	vii
Abstract	viii
Introdução	1
1 Conceitos Básicos da Teoria de Sistemas Fuzzy	4
1.1 Conjuntos Fuzzy	4
1.2 Operações entre Conjuntos Fuzzy	7
1.3 Níveis de um Conjunto Fuzzy	9
1.4 Números Fuzzy	10
1.5 Lógica Fuzzy	13
1.6 Relação Fuzzy	15
1.7 Sistemas Baseado em Regras Fuzzy	16
1.7.1 Processador de Entrada (Fuzzificação)	17
1.7.2 Base de regras	18
1.7.3 Máquina de Inferência Fuzzy	18
1.7.4 Processador de Saída (Defuzzificação)	20
2 Conceitos Básicos de Cálculo Numérico	22
2.1 Solução Numérica de Equações Diferenciais Ordinárias	22
2.1.1 Integração Numérica para obter a Solução de EDOs	23
2.1.2 Integração Múltipla	24
2.1.3 Método das Diferenças Finitas para Obter a Solução de EDOs	24
2.2 Solução Numérica de Equações Diferenciais Parciais	28
2.2.1 Diferenças Finitas para Equações Elípticas	28
2.2.2 Diferenças Finitas para Equações Parabólicas	31

3	Sistema p-Fuzzy Aplicado às Equações Diferenciais	34
3.1	Sistemas p-fuzzy aplicado a Equações Diferenciais Ordinárias	35
3.1.1	Exemplos de sistemas p-fuzzy aplicados a EDOs	36
3.2	Sistemas p-Fuzzy aplicado a Equações Diferenciais Parciais	42
3.2.1	Exemplos de Sistemas p-fuzzy aplicado a EDPs Elípticas	43
3.2.2	Exemplos de Sistemas p-fuzzy aplicado a EDPs Parabólicas	45
4	Sistemas <i>Fuzzy</i> Aplicados ao Estudo da Luminescência de Íons de Neodímio	52
4.1	Luminescência Espacial	52
4.2	Modelos para a Luminescência Utilizando Sistemas Baseados em Regras Fuzzy .	54
4.3	Interface Gráfica para o Cálculo da Luminescência	57
4.4	Sistema p-fuzzy Aplicado ao Cálculo do Valor da Potência	58
	Conclusão	61

Introdução

O modelo matemático é um conjunto de equações e relações matemáticas que traduz, de alguma forma, um fenômeno em questão ou um problema de situação real. O modelo matemático deve apresentar as características essenciais de forma que o seu comportamento seja igual ou semelhante a do fenômeno estudado [3].

A partir da construção de modelos pode-se fazer estimativas, previsões e tomar decisões adequadas aos objetivos propostos em um determinado problema. Isto justifica o fato de serem utilizados nos mais diversos campos da atividade humana: Economia, Biologia, Psicologia, Comunicação, Demografia, Astronomia, Engenharia e outros.

Diversos fenômenos podem ser modelados utilizando equações diferenciais, entretanto muitos desses fenômenos não têm dados suficientes para um estudo estatístico ou então não comportam medições, dependendo de informações subjetivas de especialistas. Especialmente nas ciências humanas, muitos conceitos, tais como a classe de “nível cultural”, “doenças altamente contagiosas”, “padrão de vida”, apresentam informações essenciais e subjetivas que são típicas do pensamento e raciocínio humano. Essas características dificultam a modelagem do fenômeno através das equações diferenciais, pois estas dependem da precisão dos parâmetros utilizados. O tratamento matemático dessas incertezas têm sido realizado utilizando a Teoria dos Conjuntos Fuzzy [1] e [23].

A teoria de conjuntos fuzzy foi proposta por Zadeh em 1965 com o objetivo de fornecer um método de obtenção e manuseio de informações imprecisas que são típicas do pensamento e raciocínio humano. Desta forma, a modelagem matemática tradicional, pouco flexível, é substituída por regras que se aproximam do conhecimento inexato do homem, possibilitando o tratamento matemático de termos lingüísticos como “aproximadamente”, “em torno de”, “muito”, “pouco”, “alto” etc.

Aplicações da teoria dos conjuntos fuzzy podem ser encontradas em diversas áreas das ciências aplicadas. Em particular, modelos da Biomatemática que utilizam a teoria de equações diferenciais ordinárias têm sido tratados dentro da teoria fuzzy [4], [23], [24] e [31]. Nestes tra-

balhos as equações diferenciais ordinárias são substituídas por um Sistema Baseado em Regras Fuzzy (SBRF) no qual a relação que descreve as variações com as variáveis de estado é descrita por meio de regras fuzzy em vez de equações. Tais sistemas são denominado Parcialmente Fuzzy, p-fuzzy, e foram construídos utilizando o método de inferência de Mamdani [22].

Alguns estudos têm apresentado modelos de equações diferenciais parciais (EDPs) utilizando parâmetros obtidos através de um SBRF, [12] e [18]. As aplicações apresentadas em [25] e [26] utilizam esta teoria para determinar a *esperança fuzzy*. Em [20] obtêm-se aproximações fuzzy de equações diferenciais parciais; [6] apresenta um novo método de inferência com aplicações no estudo das EDPs. Leite e Bassanezi (2010) publicaram recentemente um artigo utilizando a extensão de Zadeh para determinar a solução de EDPs utilizando condições iniciais fuzzy.

A proposta deste trabalho é demonstrar a viabilidade e aplicabilidade dos sistema parcialmente fuzzy na modelagem de fenômenos descritos por equações diferenciais parciais.

Generalizando os sistemas p-fuzzy para o caso das equações diferenciais parciais propomos um SBRF no qual as variáveis estão correlacionadas com suas variações por uma base de regras fuzzy que têm como entrada as variáveis de estado e como saída as variações parciais.

Nos modelos fuzzy propostos neste trabalho utilizamos o método de inferência de Takagi-Sugeno [30] no qual o consequente das regras “Se... então...” é um polinômio da forma $f(x, y) = px + qy + r$, onde x e y são as entradas do sistema, p , q e r são parâmetros do polinômio.

Neste trabalho estudamos a aplicabilidade do método proposto para a obtenção dos sistemas p-fuzzy em diversos modelos matemáticos descritos por equações diferenciais ordinárias, comparando as aproximações determinadas analiticamente ou numericamente com as soluções obtidas utilizando os sistemas p-fuzzy. Em seguida realizamos o estudo de fenômenos descritos por equações diferenciais parciais. De forma análoga, os resultados obtidos numericamente e através do modelo p-fuzzy foram comparados, permitindo verificar a aplicabilidade do método proposto (Capítulo 3).

Os conceitos apresentados no Capítulo 1 e 2 alicerçam, respectivamente, a construção dos SBRF e a obtenção de aproximações numéricas utilizadas no capítulos subsequentes.

O Capítulo 4 é dedicado à aplicação da teoria, estudada anteriormente, na modelagem matemática da luminescência, realizada a partir de experiências com um feixe de luz focalizado em um ponto na superfície de uma amostra vítrea. Para tanto, são feitas considerações sobre o modelo e de que forma a subjetividade incorporada apresenta vantagens com relação aos resultados obtidos sem a modelagem fuzzy.

Norteados pelo estudo desenvolvido encerramos nosso trabalho apresentando um resumo comentado dos principais resultados, discutindo a viabilidade da aplicação dos sistemas p-fuzzy

no estudo das Equações Diferenciais Parciais.

Daniela Portes Leal Ferreira
Uberlândia-MG, 25 de julho de 2011.

Capítulo 1

Conceitos Básicos da Teoria de Sistemas Fuzzy

A teoria dos conjuntos Fuzzy, proposta por Zadeh, fornece um método de obtenção e manuseio de informações essenciais e imprecisas que são típicas do pensamento e raciocínio humano, tornando possível programar e armazenar conceitos vagos e imprecisos em computadores [1].

Desta forma a modelagem matemática tradicional, pouco flexível, é substituída por rotinas que se aproximam do mecanismo inexato do homem possibilitando a sua aplicação em diversas áreas do conhecimento, especialmente na análise de sistemas econômicos, urbanos, biológicos e sociais.

Alguns conceitos fundamentais desta teoria serão discutidos, incluindo funções de pertinência, e as operações com os conjuntos fuzzy. Em seguida apresentamos a fundamentação necessária para a implementação dos Sistemas Baseados em Regras Fuzzy.

1.1 Conjuntos Fuzzy

Na teoria clássica, um conjunto é uma coleção de elementos que pode ser caracterizado por uma função cuja definição é dada a seguir.

Definição 1.1 *Seja U um conjunto e A um subconjunto de U . A função característica de A é dada por*

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases}$$

A função χ_A tem como conjunto de domínio o universo U e sua imagem está é um elemento do conjunto $\{0, 1\}$.

Existe uma drástica distinção entre os elementos que pertencem e os que não pertencem a um conjunto clássico, também chamado de conjunto *crisp*. Entretanto, particularmente nas ciências humanas, muitos termos comumente empregadas, tais como "nível cultural", "doenças contagiosas", não apresentam esta característica. Estes são exemplos de conjuntos cujas fronteiras podem ser consideradas incertas. O uso da teoria clássica para representá-los simplifica o problema e estabelece fronteiras que originalmente não existem. Esta característica também pode ser identificada nas classificações que utilizam termos como: largo, pequeno, importante, sério, aproximado. Nestes conjuntos, a transição da pertinência para a não pertinência é gradual e não abrupta como na teoria clássica.

Para descrever tais conjuntos, Lotfi A. Zadeh introduziu, em 1965, a Teoria de Conjuntos Fuzzy [32]. A partir de uma generalização dos conjuntos clássicos Zadeh apresentou uma formalização matemática para representar imprecisões usando subconjuntos fuzzy [1]. A generalização é obtida substituindo o conjunto imagem da função característica χ_A pelo intervalo $[0, 1]$. Assim a *função característica* é generalizada para a *função de pertinência*, φ_F , que associa a todo elemento do universo U a um valor do intervalo $[0, 1]$.

Definição 1.2 *Seja U um conjunto; um subconjunto fuzzy F de U é caracterizado por uma função*

$$\varphi_F : U \rightarrow [0, 1].$$

O valor da função de pertinência é interpretado como sendo o grau em que o elemento x de U tem a propriedade F .

Um subconjunto fuzzy F é determinado pelo conjunto de pares ordenados:

$$F = \{(x, \varphi_F(x)) \mid x \in U\}.$$

Exemplo 1.1 *Considere o conjunto fuzzy "jovem", os elementos são as "idades" e os graus de pertinência dependem da idade. Uma possível representação para o conjunto seria:*

$$jovem = \{(20, 1.0); (25, 1.0); (26, 0.96); (28, 0.74); (30, 0.5); (40, 0.1); (50, 0.04)\}.$$

Zadeh propôs uma notação mais conveniente para os conjuntos fuzzy usando o sinal de "+" para denotar uma enumeração [32]. Utilizando a barra, "/", como uma notação alternativa para o par ordenado $(x, \varphi_F(x))$ o conjunto fuzzy pode ser descrito como segue,

$$F = \varphi_F(x_1)/x_1 + \varphi_F(x_2)/x_2 + \dots + \varphi_F(x_n)/x_n.$$

Assim, quando o conjunto universo U é finito, o conjunto fuzzy F pode ser representado por

$$F = \sum \varphi_F(x)/x.$$

Exemplo 1.2 *Suponha que alguém queira descrever a classe de carros os quais têm a propriedade de serem caros considerando carros tais como BMW, Buick, Ferrari, Rolls Royce, Mercedes e Palio. Alguns carros, como Ferrari e Rolls Royce definitivamente pertencem a este conjunto, enquanto o Palio não pertence, [7]. Existe ainda um terceiro grupo, no qual é difícil determinar se o carro é caro ou não. Desta forma o conjunto de carros caros pode ser descrito da seguinte forma,*

$$\text{carroscaros} = 1.0/\text{Ferrari} + 1.0/\text{RollsRoyce} + 0.8/\text{Mercedes} + 0,7/\text{BMW} + 0,4/\text{Buick} + 0/\text{Palio}.$$

Um conjunto fuzzy pode ser representado analítica e graficamente por sua função de pertinência. A representação gráfica é muito utilizada na literatura por ter uma interpretação mais intuitiva. Na representação em duas dimensões, o eixo vertical representa o grau de pertinência no intervalo $[0,1]$ e o eixo horizontal o universo correspondente à informação ser modelada [11].

Exemplo 1.3 *O subconjunto fuzzy A dos números reais “próximos de 10” pode ser representado analiticamente pela função de pertinência dada a seguir e graficamente pela Figura 1.1:*

$$\chi_A(x) = \begin{cases} x - 9 & \text{se } 9 \leq x < 10 \\ 11 - x & \text{se } 10 \leq x < 11 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

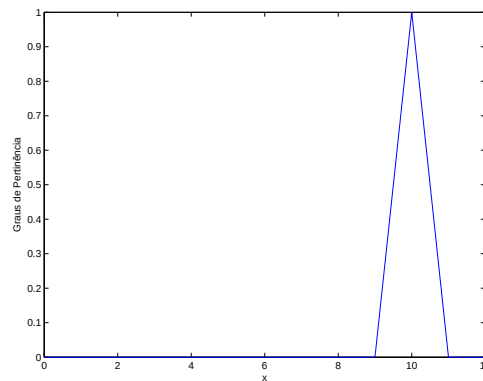


Figura 1.1: Subconjunto fuzzy dos números próximos de 10.

Frequentemente é apropriado considerar somente elementos do universo cujo grau de pertinência seja diferente de zero. O subconjunto clássico de U definido por

$$\text{supp}F = \{x \in U : \varphi_F(x) > 0\}$$

é denominado conjunto suporte e tem papel fundamental na interrelação entre teorias de conjuntos clássicas e fuzzy [1].

1.2 Operações entre Conjuntos Fuzzy

As noções de igualdade e de inclusão de dois conjuntos fuzzy são imediatamente derivados da teoria clássica de conjuntos.

Dois conjuntos fuzzy são iguais se todos elementos do universo têm o mesmo grau de pertinência em cada um deles.

Um conjunto fuzzy A é subconjunto de um conjunto fuzzy B se todo elemento do universo tem grau de pertinência em A menor do que em B .

Sejam A e B subconjuntos clássicos de U representados pelas funções características χ_A e χ_B , respectivamente. Os conjuntos $A \cup B$ (união), $A \cap B$ (interseção) e A' (complementar), têm $\forall x \in U$, as respectivas funções característica :

$$\chi_{A \cup B}(x) = \max\{\chi_A(x), \chi_B(x)\},$$

$$\chi_{A \cap B}(x) = \min\{\chi_A(x), \chi_B(x)\},$$

$$\chi_{A'}(x) = 1 - \chi_A(x).$$

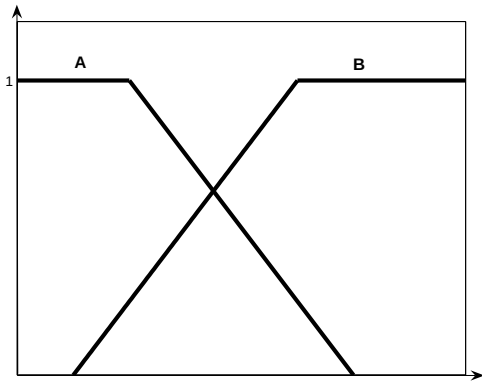
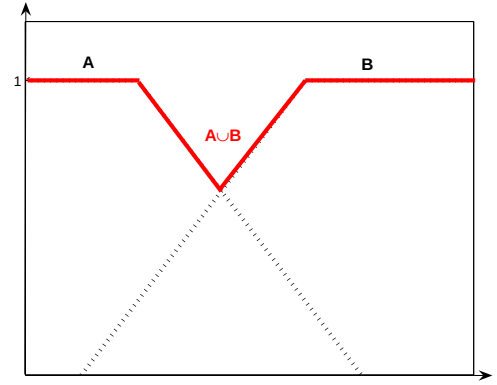
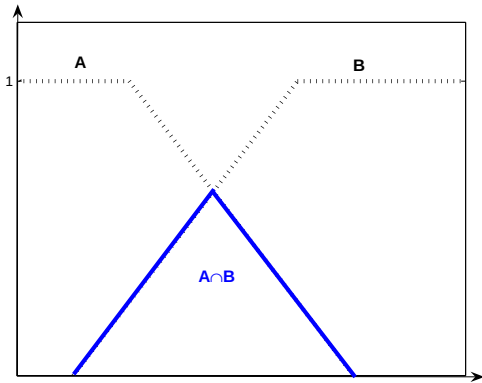
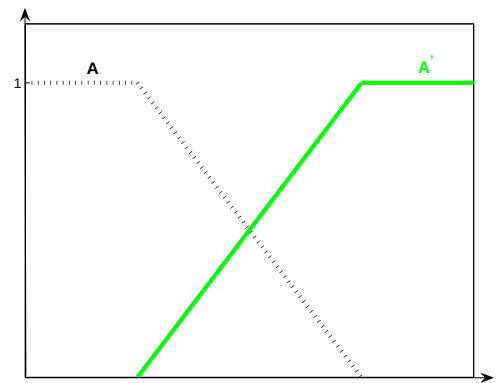
As operações entre conjuntos podem ser estendidas para os conjuntos fuzzy generalizando as funções características que definem os conjuntos obtidos pela união, interseção e complemento, para as respectivas funções de pertinência.

Definição 1.3 *Sejam A e B subconjuntos fuzzy de U representados pelas funções de pertinência φ_A e φ_B (Figura 1.2), respectivamente. Os conjuntos fuzzy $A \cup B$ (Figura 1.3), $A \cap B$ (Figura 1.4) e A' (Figura 1.5) têm, $\forall x \in U$, as respectivas funções de pertinência:*

$$\varphi_{A \cup B}(x) = \max\{\varphi_A(x), \varphi_B(x)\},$$

$$\varphi_{A \cap B}(x) = \min\{\varphi_A(x), \varphi_B(x)\},$$

$$\varphi_{A'}(x) = 1 - \varphi_A(x) \forall x \in U.$$

Figura 1.2: Conjuntos fuzzy A e B Figura 1.3: União de A e B .Figura 1.4: Interseção de A e B .Figura 1.5: Complementar de A .

Se A e B forem conjuntos clássicos, as funções características das respectivas operações são iguais às funções de pertinências acima definidas, demonstrando a coerência destas definições.

Observe ainda que no caso de conjuntos fuzzy um elemento pode pertencer ao um conjunto e ao seu complementar (Exemplo 1.2). Essa é uma grande diferença da teoria clássica de conjuntos, no qual o elemento ou pertence ao conjunto ou pertence ao seu complementar.

Exemplo 1.4 *O conjunto fuzzy C dos carros caros deve refletir uma situação oposta da relacionada com o conjunto fuzzy B dos carros baratos, considerando os seus custos como elementos. Para o conjunto dos carros baratos a função de pertinência deve ser decrescente com o valor do carro, já para os carros caros deve ser crescente. Assim pode-se definir a função de pertinência de F por:*

$$\varphi_C(x) = 1 - \varphi_B(x)$$

onde φ_B é a função de pertinência do subconjunto fuzzy dos carros baratos. O Conjunto fuzzy F é o complementar do conjunto fuzzy C .

Considere como universo dos custos o intervalo $U = [0, 150.000]$, onde $x \in U$ é interpretado como custo de um carro. O subconjunto fuzzy B , dos *carros baratos* pode ser caracterizado pela função de pertinência:

$$\varphi_B(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \leq 25.000 \\ \frac{100.000 - x}{75.000} & \text{se } 25.000 < x \leq 100.000 \\ 0 & \text{se } x > 100.000. \end{cases}$$

Desta forma o conjunto fuzzy dos carros caros será caracterizado pela função de pertinência:

$$\varphi_C(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 25.000 \\ \frac{x - 25.000}{75.000} & \text{se } 25.000 < x \leq 100.000 \\ 1 & \text{se } x > 100.000. \end{cases}$$

Uma representação gráfica para C e B é dada na Figura 1.6.

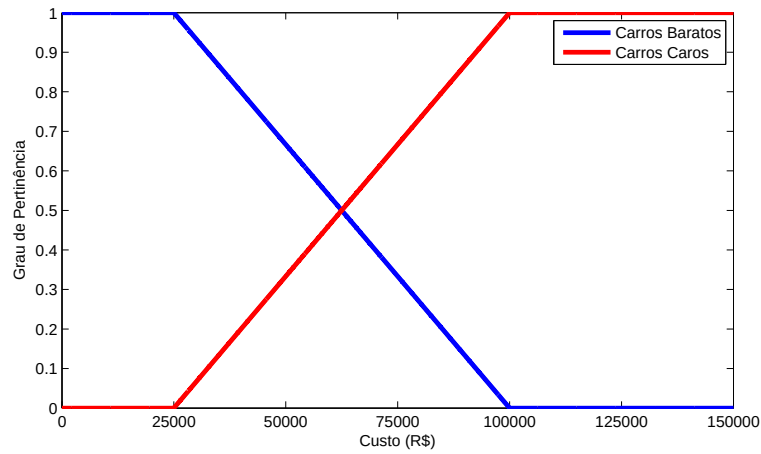


Figura 1.6: Subconjunto fuzzy dos Carros Caros e dos Carros Baratos.

1.3 Níveis de um Conjunto Fuzzy

Um subconjunto fuzzy F de U é caracterizado por elementos do universo com seus respectivos graus de pertinência. Um elemento x de U está em uma classe se seu grau de pertinência é maior que determinado valor ou nível $\alpha \in [0, 1]$ que define a classe. O conjunto crisp desses elementos é um α -nível de F , denotado por $[F]^\alpha$ [1].

Definição 1.4 Seja F um subconjunto fuzzy de U e $\alpha \in [0, 1]$. O α -nível de F é o subconjunto de U definido por

$$[F]^\alpha = \{x \in U : \varphi_F(x) \geq \alpha\} \quad \text{para } 0 < \alpha \leq 1 \quad \text{e} \quad [F]^0 = \overline{\text{supp}A}.$$

Exemplo 1.5 Seja $U = \mathbb{R}$ o conjunto dos números reais e A um conjunto fuzzy de $\mathbb{R}$ caracterizado pela seguinte função de pertinência:

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} x - 9 & \text{se } 9 \leq x < 10 \\ 11 - x & \text{se } 10 \leq x < 11 \\ 0 & \text{se } x \notin [9, 11]. \end{cases}$$

Nesse caso $\text{supp}A =]9, 11[$, logo $[A]^0 = \overline{]9, 11[} = [9, 11]$. Para determinar o conjunto α -nível para $0 < \alpha \leq 1$ tome $x - 9 \geq \alpha$ e $11 - x \geq \alpha$, assim $[A]^\alpha = [9 + \alpha, 11 - \alpha]$. A Figura 1.7 representa $[A]^\alpha$ no eixo das abscissas em vermelho, para um determinado valor de α , onde $0 < \alpha \leq 1$.

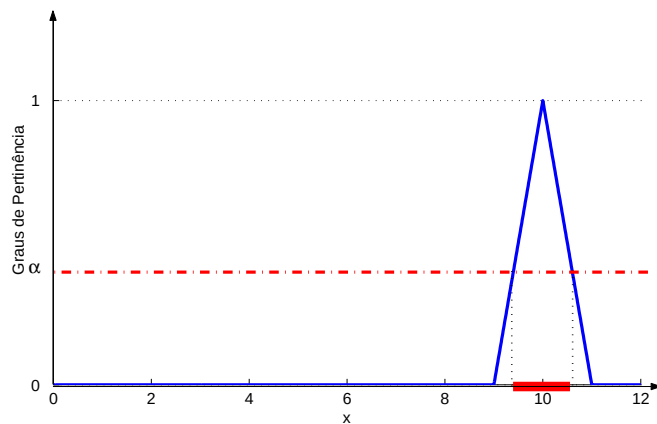


Figura 1.7: α -nível de A .

1.4 Números Fuzzy

Os números fuzzy representam, matematicamente, situações que envolvem *valores numéricos* imprecisos. Geralmente em tais situações é necessário utilizar a expressão “em torno de” para representar a imprecisão dos dados numéricos. Por exemplo, quando se quer marcar um encontro com determinada pessoa utiliza-se a expressão “por volta das 4 horas” [1]. Neste caso,

matematicamente, indica-se a expressão por volta das 4 horas por um subconjunto fuzzy A cujo domínio da função de pertinência é o conjunto dos números reais.

Definição 1.5 *Um subconjunto fuzzy A é chamado de número fuzzy quando o conjunto de domínio da função de pertinência φ_A é o conjunto dos números reais e satisfaz às condições:*

- i. Todos os α -nível de A são não vazios, com $0 < \alpha \leq 1$;*
- ii. Todos os α -nível de A são intervalos fechados de R ;*
- iii. O suporte de A , $\text{supp}A = \{x \in U : \varphi_A(x) > 0\}$, é limitado.*

Os números fuzzy mais utilizados são os triangulares, trapezoidais e os de forma de sino [1].

Definição 1.6 *Um número fuzzy A é dito triangular se sua função de pertinência é da forma*

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq a \\ \frac{x-a}{u-a} & \text{se } a < x \leq u \\ \frac{b-x}{b-u} & \text{se } u \leq x < b \\ 0 & \text{se } x \geq b. \end{cases} \quad (1.1)$$

Para modelar matematicamente a expressão “por volta das quatro horas” pode-se utilizar um número fuzzy triangular com a seguinte função de pertinência:

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 3,8 \\ \frac{x-3,8}{2} & \text{se } 3,8 < x \leq 4 \\ \frac{4,2-x}{2} & \text{se } 4 \leq x < 4,2 \\ 0 & \text{se } x \geq 4,2. \end{cases} \quad (1.2)$$

Note que o número fuzzy triangular não é necessariamente simétrico, como em (1.2), pois $b-u$ pode ser diferente de $u-a$ em (1.1). O número fuzzy triangular é um modelo matemático para a expressão linguística “*perto de u* ” e no caso deste ser simétrico pode ser entendido como em “*em torno de u* ”.

Definição 1.7 Um número fuzzy A é dito trapezoidal se sua função de pertinência tem a forma de um trapézio e é dada por

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a} & \text{se } a < x \leq b \\ 1 & \text{se } b \leq x < c \\ \frac{d-x}{d-c} & \text{se } c < x \leq d \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Definição 1.8 Um número fuzzy A tem a forma de sino se dados u , a e δ , tem-se

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{-(x-u)^2}{a}\right) & \text{se } u - \delta \leq x \leq u + \delta \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Apresentaremos a seguir as operações aritméticas para os números fuzzy.

Definição 1.9 Sejam A e B dois números fuzzy e λ um número real.

a) A soma dos números fuzzy A e B é o número fuzzy, $A+B$, cuja função de pertinência é

$$\varphi_{A+B}(z) = \sup_{\{(x,y):x+y=z\}} \min[\varphi_A(x), \varphi_B(y)].$$

b) A multiplicação de λ pelo número fuzzy A é o número fuzzy, λA , cuja função de pertinência é

$$\varphi_{\lambda A}(z) = \sup_{\{x:\lambda x=z\}} [\varphi_A(x)] = \begin{cases} \varphi_A(\lambda^{-1}z) & \text{se } \lambda \neq 0 \\ 0 & \text{se } \lambda = 0. \end{cases}$$

c) A diferença dos números fuzzy A e B é o número fuzzy, $A-B$, cuja função de pertinência é

$$\varphi_{A-B}(z) = \sup_{\{(x,y):x-y=z\}} \min[\varphi_A(x), \varphi_B(y)].$$

d) A multiplicação dos números fuzzy A e B é o número fuzzy, $A \cdot B$, cuja função de pertinência é

$$\varphi_{A \cdot B}(z) = \sup_{\{(x,y):x \cdot y=z\}} \min[\varphi_A(x), \varphi_B(y)].$$

e) A divisão do número fuzzy A por B , se $0 \notin \text{supp}B$, é o número fuzzy cuja função de pertinência é

$$\varphi_{A/B}(z) = \sup_{\{(x,y):x/y=z\}} \min[\varphi_A(x), \varphi_B(y)].$$

O resultado a seguir generaliza, por meio dos α -níveis, as operações aritméticas para intervalos [1].

Seja $\otimes$ qualquer uma das operações aritméticas mencionadas anteriormente, os α -níveis do conjuntos $A \otimes B$ são dados por:

$$[A \otimes B]^\alpha = [A]^\alpha \otimes [B]^\alpha$$

para todo $\alpha \in [0, 1]$.

A aplicação dos α -níveis no cálculo das operações aritméticas podem ser encontradas em [21].

1.5 Lógica Fuzzy

Um sistema lógico é um conjunto de axiomas e regras que visam representar formalmente um raciocínio válido. Na lógica clássica um raciocínio pode ter a seguinte forma:

Se X é A então Y é B .

X é A .

Portanto, Y é B .

Para formular métodos dedutivos como este, para o caso fuzzy, é necessário o conceito de variáveis linguísticas. A noção de variável linguística é praticamente a mesma de uma variável definida na matemática convencional, ambas substituem valores. No caso da variável linguística os valores assumidos são termos linguísticos associados à subconjuntos fuzzy, particularmente, números fuzzy. Assim, enquanto uma variável matemática assume dados numéricos ou expressões algébricas cujas soluções são números, os valores de uma variável linguística são termos linguísticos, tais como: muito alto, pequeno, baixo e muitos outros, cujos significados são dados quantitativamente por conjuntos fuzzy.

Exemplo 1.6 *Suponha que se queira construir um aparelho de ar condicionado cuja temperatura deva ser controlada. “Temperatura” é uma variável linguística que pode assumir os valores “frio”, “confortável” e “quente”. Considere “frio” uma temperatura inferior a cerca de 20°C , “confortável” uma temperatura em torno de 25°C e “quente” uma temperatura superior a cerca de 30°C . Cada valor ou termo assumido pela variável “Temperatura” é expresso qualitativamente por um dos termos linguísticos e quantitativamente por um subconjunto fuzzy.*

As proposições que associam uma variável linguística a um termo são denominadas proposições fuzzy. Do exemplo anterior destacam-se três proposições fuzzy:

Temperatura é fria;

Temperatura é confortável;

Temperatura é quente.

Na lógica clássica as proposições são unicamente “Verdadeiras” ou “Falsas” podendo ser compostas com o auxílio dos conectivos: “e”, “ou”, “não” e “implicação”. O valor lógico de uma proposição composta depende dos valores lógicos de cada uma das proposições envolvidas na composição e da regra de cada conectivo definida por tabelas verdade. As sentenças verdadeiras têm valor lógico 1, enquanto sentenças falsas têm valor lógico 0.

Entretanto para avaliar logicamente, no sentido fuzzy, uma proposição fuzzy composta do tipo “Se x é A e y é B então z é C ” deve-se inicialmente atribuir um valor pertencente ao intervalo $[0, 1]$ que indique o quanto a proposição “ x é A ” é verdadeira e realizar a avaliação lógica, no sentido fuzzy, de cada um dos conectivos encontrados na proposição. Para isto é necessário estender os conectivos por meio das normas triangulares.

Definição 1.10 *Uma co-norma triangular (s -norma) é uma operação binária $s : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ satisfazendo as seguintes condições:*

- i. Comutatividade: $xsy = ysx$*
- ii. Associatividade: $xs(ysz) = (xsy)sz$*
- iii. Monotonicidade: Se $x \leq y$ e $w \leq z$ então $xsw \leq ysz$*
- iv. Condições de fronteira: $xs0 = x, xs1 = 1$.*

A s -norma estende o operador $\vee$ que modela o conectivo “ou” [1].

Exemplo 1.7 *O operador $s : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ definido por $s(x, y) = \max\{x, y\} = x \vee y$ reproduz a tabela verdade do conectivo $\vee$.*

Definição 1.11 Uma norma triangular (*t-norma*) é uma operação binária $t : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ satisfazendo as seguintes condições:

- i. Comutatividade: $xsy = ysx$
- ii. Associatividade: $xs(ysz) = (xsy)sz$
- iii. Monotonicidade: Se $x \leq y$ e $w \leq z$ então $xsw \leq ysz$
- iv. Condições de fronteira: $xs0 = 0, xs1 = x$.

A t-norma estende o operador $\wedge$ que modela o conectivo “e” [1].

Exemplo 1.8 O operador $t : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ definido por $t(x, y) = \min\{x, y\} = x \wedge y$ reproduz a tabela verdade do conectivo $\wedge$.

Definição 1.12 Uma aplicação $\eta : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ é uma negação se satisfizer as seguintes condições:

- i. Monotonicidade: η é decrescente
- ii. Involução: $\eta(\eta(x)) = x$
- iii. Condições de fronteiras: $\eta(0) = 1, \eta(1) = 0$.

Exemplo 1.9 A aplicação $\eta(x) = 1 - x$ reproduz a tabela verdade da negação “ $\sim$ ”, [1].

Definição 1.13 Qualquer operação $\Rightarrow : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ que reproduza a tabela verdade da implicação clássica é denominada implicação fuzzy.

1.6 Relação Fuzzy

Na teoria clássica de conjuntos, uma relação R sobre $U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$ é qualquer subconjunto do produto cartesiano usual $U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$ e pode ser representada pela função característica:

$$\chi_R : U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n \rightarrow \{0, 1\}.$$

com

$$\chi_R(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} 1 & \text{se } (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R \\ 0 & \text{se } (x_1, x_2, \dots, x_n) \notin R \end{cases}$$

Dependendo do fenômeno estudado é conveniente relacionar conjuntos fuzzy ao invés de conjuntos clássicos, neste caso, a relação é considerada fuzzy. O conceito matemático de relação fuzzy é formalizado estendendo a função característica de uma relação clássica para uma função de pertinência.

Definição 1.14 *Uma relação fuzzy R sobre $U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$ é qualquer subconjunto fuzzy de $U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$ cuja função de pertinência é dada por:*

$$\varphi_R : U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n \rightarrow [0, 1].$$

O número $\varphi_R(x_1, x_2, \dots, x_n) \in [0, 1]$ indica o grau com que os elementos x_i estão relacionados segundo a relação R .

Uma relação fuzzy de grande importância é o produto cartesiano, tecnicamente, na teoria de conjuntos fuzzy, tal operação é similar a interseção. A diferença está nos conjuntos universos envolvidos nas operações: na interseção, os subconjuntos fuzzy são de um mesmo universo, enquanto que no produto cartesiano eles podem ser diferentes.

Definição 1.15 *O produto cartesiano fuzzy $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ dos subconjuntos fuzzy $A_1, A_2, \dots, A_n$ de $U_1, U_2, \dots, U_n$ é a relação fuzzy R cuja função de pertinência é*

$$\varphi_R(x_1, x_2, \dots, x_n) = \varphi_{A_1}(x_1) \wedge \varphi_{A_2}(x_2) \wedge \dots \wedge \varphi_{A_n}(x_n)$$

onde $\wedge$ é a t -norma min.

Em diversas aplicações, a composição de relações tem importância fundamental. Considerando R e S duas relações fuzzy binárias em $U_1 \times U_2$ e $U_2 \times U_3$, respectivamente, a relação composta $R \circ S$ pode ser definida como a seguir.

Definição 1.16 *A composição $R \circ S$ é uma relação fuzzy binária em $U_1 \times U_3$ com função de pertinência dada por*

$$\varphi_{R \circ S}(x_1, x_3) = \sup_{x_2 \in U_2} [(\varphi_R(x_1, x_2))t(\varphi_S(x_2, x_3))].$$

1.7 Sistemas Baseado em Regras Fuzzy

Um SBRF é um sistema que utiliza a teoria de conjuntos fuzzy para produzir saídas a partir de um conjunto de entradas fuzzy. Tais sistemas foram desenvolvidos com o objetivo de emular o comportamento humano considerando que o conhecimento e as ações humanas são apoiadas em uma sequência de regras ligísticas, traduzidas por um conjunto de regras. As regras formuladas pelo ser humano são usualmente da forma:

Se (um conjunto de condições é satisfeito) então (um conjunto de consequências pode ser inferido).

Nos sistemas baseados em regras fuzzy o antecedente (conjunto de condições) e consequente (conjunto de consequências) de cada regra são valores assumidos por variáveis linguísticas e esses por sua vez, são modelados por conjuntos fuzzy. Ou seja, as regras são proposições condicionais fuzzy.

Uma vez estabelecida uma base de regras, isto é, como relacionam-se os conjuntos fuzzy envolvidos nas regras fuzzy, um SBRF pode ser visto como um mapeamento entre a entrada e a saída da forma $y = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ e $y \in \mathbb{R}^m$. Esta classe de sistema é amplamente utilizada em problemas de modelagem, controle e classificação [1].

O SBRF contém quatro componentes: um processador de entrada que realiza a fuzzificação dos dados de entrada, uma coleção de regras fuzzy, uma máquina de inferência fuzzy e um processador de saída que fornece a saída. Estes componentes estão conectados conforme indicado na Figura 1.8.



Figura 1.8: Sistema baseado em regras fuzzy [11].

1.7.1 Processador de Entrada (Fuzzificação)

A fuzzificação está relacionada com os conceitos vagos e imprecisos da linguagem natural. Esta operação consiste, essencialmente, em traduzir os valores de entrada em conjuntos fuzzy.

Geralmente os dados de entrada são *crips*, entretanto a manipulação desses dados em um SBRF é baseada na teoria de conjuntos fuzzy. Desta forma a fuzzificação é, necessariamente, a primeira etapa deste sistema. Após a fuzzificação as variáveis serão descritas por conjuntos

fuzzy cujas funções de pertinência são definidas, por exemplo, com a ajuda de um especialista na área fenômeno a ser modelado.

1.7.2 Base de regras

Um sistema baseado em regras é caracterizado por um conjunto de declarações condicionais linguísticas usualmente representadas da forma “se-então”, as quais podem ser facilmente escritas como regras fuzzy, onde o antecedente e o conseqüente de cada regra são proposições fuzzy. A coleção das regras fuzzy formam a base de regras.

A base de regras pode ser elaborada a partir do conhecimento e experiência do especialista sobre o processo a ser estudado ou com base no aprendizado utilizando dados, isto é, o sistema se encarrega de criar a sua própria base de regras a partir dos dados.

1.7.3 Máquina de Inferência Fuzzy

A máquina de inferência tem a capacidade de simular a tomada de decisão baseando-se nos conjuntos fuzzy e na base de regras. Ainda é hábil para inferir ações empregando métodos de inferência que para cada valor assumido pelas variáveis de entrada fornecem um valor de saída. Neste trabalho serão discutidos os Métodos de Inferência de Mamdani e de Takagi-Sugeno.

Método de Inferência de Mamdani

No método de inferência proposto por Mamdani as regras fuzzy são interpretadas pelo produto cartesiano e agregadas pelo conetivo “ou” modelado pela s-norma máximo. Ou seja, o método de inferência de Mamdani se resume na união da composição das relações de entradas com as definidas por cada regra.

Para ilustrar o método de inferência considere as regras

$$R_1 : \text{Se } x \text{ é } A_1 \text{ e } y \text{ é } B_1 \text{ então } z \text{ é } C_1.$$

$$R_2 : \text{Se } x \text{ é } A_2 \text{ e } y \text{ é } B_2 \text{ então } z \text{ é } C_2.$$

A Figura 1.9 ilustra como uma saída z de um sistema de inferência do tipo Mamdani é gerada a partir das entradas x e y , vistos como conjuntos unitários.

Observe que a saída obtida pelo método de Mamdani é um conjunto fuzzy, sendo, portanto, necessário um método para obter um número real que a represente. Estes processos são chamados métodos de Defuzzificação e serão apresentados na próxima seção.

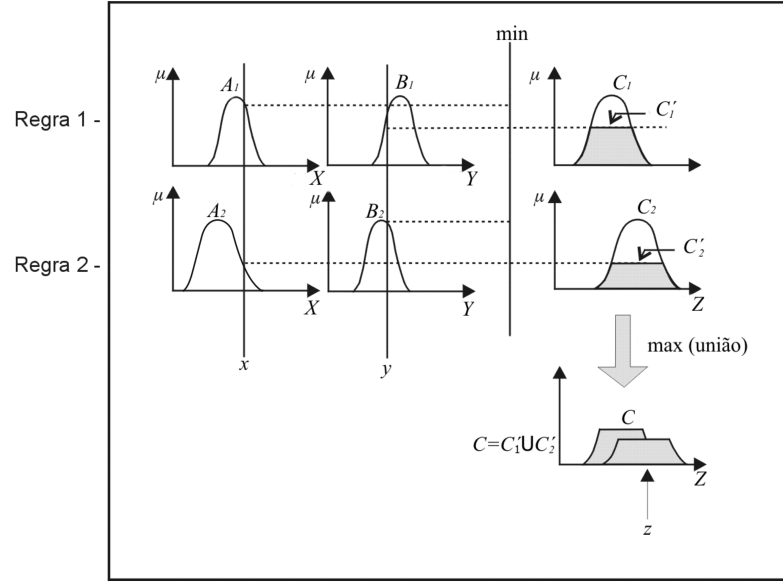


Figura 1.9: Saída final do controlador fuzzy de Mamdani.

Método de Inferência de Takagi-Sugeno

As diferenças básicas entre o método de Takagi-Sugeno e o de Mamdani estão na forma de escrever o consequente de cada regra e no processo de defuzzificação utilizado para obter a saída geral do sistema.

Com o método de inferência de Takagi-Sugeno o consequente de cada regra é dado por uma função das variáveis de entrada [1].

Uma regra R_i com n entradas $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e uma saída $z \in \mathbb{R}$ tem a forma

$$R_i : \text{Se } x_1 \text{ e } A_{i1} \text{ e } x_2 \text{ e } A_{i2} \text{ e... } x_n \text{ e } A_{in} \text{ então } z_i = g_i(x_1, x_2, \dots, x_n), i = 1, \dots, r.$$

onde A_{ij} são subconjuntos fuzzy de $\mathbb{R}$.

A saída geral do método é dado por

$$z = f_r(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\sum_{j=1}^r w_j T g_j(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\sum_{j=1}^r w_j} = \frac{\sum_{j=1}^r w_j T z_j}{\sum_{j=1}^r w_j}.$$

onde $w_j = \varphi_{A_{j1}}(x_1) T \varphi_{A_{j2}}(x_2) T \dots \varphi_{A_{jn}}(x_n)$ onde T é uma t-norma. As t-normas mais utilizadas são o produto e o mínimo, respectivamente. Para ilustrar o método de inferência considere o caso de duas regras, cada uma com duas variáveis de entrada e uma de saída:

$$R_1 : \text{Se } x_1 \text{ é } A_{11} \text{ e } x_2 \text{ é } A_{12} \text{ então } z_1 = g_1(x_1, x_2).$$

$$R_2 : \text{Se } x_1 \text{ é } A_{21} \text{ e } x_2 \text{ é } A_{22} \text{ então } z_2 = g_2(x_1, x_2).$$

A saída z , é:

$$z = \frac{w_1 z_1 + w_2 z_2}{w_1 + w_2} = \frac{w_1 g_1(x_1, x_2) + w_2 g_2(x_1, x_2)}{w_1 + w_2} = f(x_1, x_2)$$

onde $w_i = \min[\varphi_{A_{i1}}(x_1), \varphi_{A_{i2}}(x_2)]$.

Observe que neste método a saída gerada pela máquina de inferência é um número real sendo, portanto, desnecessária a Defuzzificação da saída.

A Figura 1.10 ilustra o processo utilizado para obter a saída z , dadas as entradas x e y .

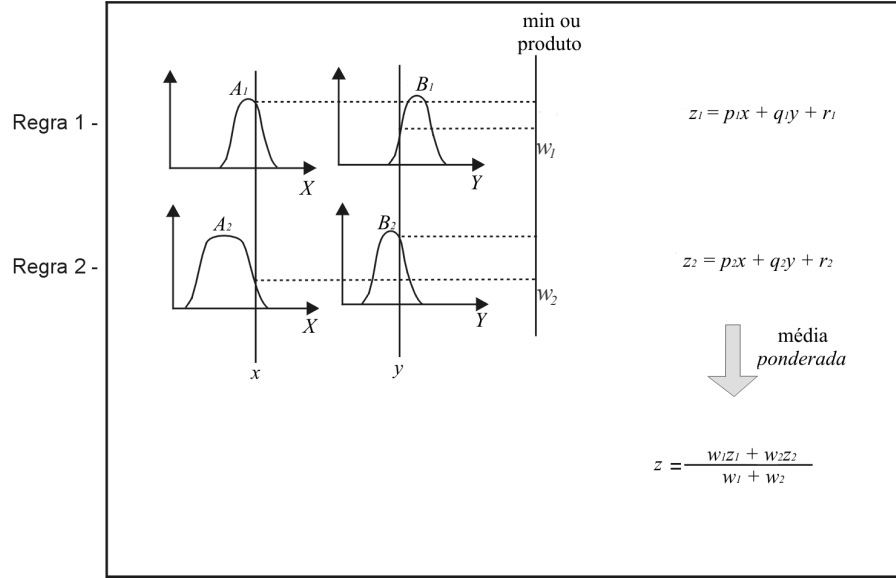


Figura 1.10: Saída final do controlador fuzzy de Takagi-Sugeno.

1.7.4 Processador de Saída (Defuzzificação)

A saída dos SBRF, em geral, são conjuntos fuzzy. O módulo de Defuzzificação, quando necessário, converte a saída, que é um conjunto fuzzy, em um número crisp.

O método mais comum de defuzzificação é o Método do Centro de Gravidade, [1]. Este método é semelhante à média ponderada para a distribuição de dados, com diferença que os pesos são os valores que indicam o grau de compatibilidade da saída z_i com o conceito modelado pelo conjunto fuzzy C em z . As equações (1.3) e (1.4) apresentam o centro de gravidade $G(C)$ para os domínios discreto e contínuo, respectivamente.

$$G(C) = \frac{\sum_{i=0}^n z_i \varphi_C(z_i)}{\sum_{i=0}^n \varphi_C(z_i)}. \quad (1.3)$$

$$G(C) = \frac{\int_R z \varphi_C(z) dz}{\int_R \varphi_C(z) dz}. \quad (1.4)$$

O desenvolvimento de SBRF é fundamental para a aplicação da teoria fuzzy proposta por este trabalho. A estrutura formal da matemática fuzzy desenvolvida neste capítulo será de grande utilidade no estudo apresentado nos capítulos posteriores.

Capítulo 2

Conceitos Básicos de Cálculo Numérico

A complexidade da maioria dos problemas reais torna, em geral, impossível determinar soluções por métodos analíticos. Nestes casos o problema é solucionado recorrendo a soluções aproximadas.

As ferramentas ou métodos usados para obter a solução de problemas matemáticos de forma aproximada são objetos de estudo do Cálculo Numérico. Algumas dessas ferramentas são apresentadas neste capítulo, devido a sua importância no estudo proposto por este trabalho.

2.1 Solução Numérica de Equações Diferenciais Ordinárias

A modelagem de diversos fenômenos é baseada em equações diferenciais. As equações diferenciais são expressões matemáticas que envolvem as derivadas ou diferenciais de uma função incógnita. Resolver uma equação diferencial é determinar esta função. Algumas equações diferenciais podem ser resolvidas utilizando-se métodos analíticos e, desta forma uma solução exata é determinada. Entretanto, em muitos casos faz-se necessário que a solução seja obtida numericamente.

Uma equação diferencial ordinária (EDO) envolve apenas derivadas em relação a uma única variável. Uma EDO de primeira ordem é da forma $y' = f(x, y)$. Se acrescentada uma condição inicial $y(x_0) = y_0$, esta representa um problema de valor inicial (PVI). Apresentaremos dois métodos para obter a solução numérica das EDOs: integração numérica e diferenças finitas.

2.1.1 Integração Numérica para obter a Solução de EDOs

Considere o PVI:

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Separando as variáveis e integrando y' no intervalo $[x_n, x_{n+1}]$ tem-se:

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} y'(x) dx = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) dx,$$

e pelo Teorema Fundamental do Cálculo

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) dx.$$

Assim, para solucionar o PVI, determina-se uma aproximação numérica para a integral definida $\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) dx$.

As fórmulas de integração numérica são obtidas com base na seguinte idéia: escolhe-se uma função que aproxime satisfatoriamente à função do integrando que seja de fácil manuseio, e resolve-se a integral com essa função, obtendo assim fórmulas de integração numérica que envolvem apenas uma combinação dos valores da função do integrando. Funções interpoladoras podem ser utilizadas para obter essas aproximações.

Definição 2.1 *A integração numérica pode ser definida por*

$$I = \int_a^b f(x) dx = \sum_{k=0}^n w_k f(x_k) + E_{n+1},$$

onde w_k são denominados pesos, $f(x_k)$ valores funcionais f , sendo em número de $n + 1$. Os pesos w_k e os pontos de integração x_k , $k = 0, 1, \dots, n$ são determinados de tal modo que o erro de truncamento E_{n+1} se anule quando f for um polinômio de grau menor ou igual a um certo número natural p [27].

Regra do Trapézio

A Regra do Trapézio consiste em aproximar o valor da função no intervalo $[x_n, x_{n+1}]$ por uma função de primeira ordem. Isto, geometricamente, é equivalente a aproximar uma curva qualquer em um intervalo por uma reta neste intervalo. Desta forma a área sob a função, que é a integral neste intervalo, é aproximada pela área do trapézio dada por $\frac{h}{2}[f(x_{n+1}) - f(x_n)]$ onde $h = x_{n+1} - x_n$. Assim a integral definida no intervalo $[x_n, x_{n+1}]$ é dada por [27]:

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x) dx = \frac{h}{2}[f(x_{n+1}) - f(x_n)].$$

O erro de truncamento é dado por:

$$E_T = -\frac{h^3}{12}f''(\xi), \quad \xi \in (x_n, x_{n+1}).$$

Regra de Simpson

A Regra de Simpson é obtida aproximando-se a função por um polinômio interpolador do segundo grau, sendo portanto necessário três pontos igualmente espaçados, $(x_n, x_M$ e $x_{n+1})$ onde x_M é o ponto médio do intervalo $[x_n, x_{n+1}]$. Graficamente a função é aproximada por uma parábola. A regra de Simpson é dada por [27]:

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x)dx = \frac{h}{3}[f(x_{n+1}) + 4f(x_M) + f(x_n)].$$

O erro de truncamento é dado por:

$$E_T = -\frac{h^5}{90}f^{IV}(\xi), \quad \xi \in (x_n, x_{n+1}).$$

2.1.2 Integração Múltipla

O cálculo numérico de integral de mais de uma variável é uma extensão natural do que foi abordado para o caso de integral de funções com uma variável. Para o cálculo numérico de integrais duplas do tipo:

$$I = \int_{y_n}^{y_{n+2}} \int_{x_n}^{x_{n+2}} f(x, y)dx dy$$

pode ser utilizado uma extensão da Regra de Simpson. Com base nesta regra pode-se escrever:

$$\begin{aligned} I = \int_{y_n}^{y_{n+2}} \int_{x_n}^{x_{n+2}} f(x, y)dx dy &= \frac{hk}{9} \{f(x_n, y_n) + 4f(x_{n+1}, y_n) + f(x_{n+2}, y_n) + \\ &+ 4[f(x_n, y_{n+1}) + 4f(x_{n+1}, y_{n+1}) + f(x_{n+2}, y_{n+1})] + \\ &+ f(x_n, y_{n+2}) + 4f(x_{n+1}, y_{n+2}) + f(x_{n+2}, y_{n+2})\}. \end{aligned}$$

2.1.3 Método das Diferenças Finitas para Obter a Solução de EDOs

Neste método, aproximações obtidas por diferenças finitas são utilizadas para solucionar as EDOs. As diferenças finitas podem ser atrasadas, centrais ou avançadas nas derivadas. Por meio da série de Taylor para a função y pode-se escrever

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n(x) + \frac{h^2}{2!}y''_n(x) + \frac{h^3}{3!}y'''_n(x) + \dots$$

Utilizando uma expansão da série de Taylor até a primeira ordem tem-se:

$$y_{n+1} \cong y_n + hy'_n(x),$$

$$hy'_n(x) \cong y_{n+1} - y_n,$$

$$y'_n(x) \cong \frac{y_{n+1} - y_n}{h}.$$

Desta forma tem-se a diferença finita adiantada dada por

$$y'_n(x) \cong \frac{y_{n+1} - y_n}{h}. \quad (2.1)$$

Outra fórmula de diferenças finitas pode ser obtida utilizando a seguinte expansão da série de Taylor até a primeira ordem:

$$y_{n-1} \cong y_n - hy'_n(x)$$

$$hy'_n(x) \cong y_n - y_{n-1}$$

$$y'_n(x) \cong \frac{y_n - y_{n-1}}{h}$$

A aproximação dada por

$$y'_n(x) \cong \frac{y_n - y_{n-1}}{h} \quad (2.2)$$

e denominada diferença finita atrasada.

As diferenças finitas centrais são obtidas adicionando as aproximações (2.1) e (2.2).

$$y'(x) \cong \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h}. \quad (2.3)$$

As diferenças finitas atrasada, adiantada e central, utilizadas como aproximações da segunda derivada, são obtidas de modo análogo a partir da série de Taylor expandida até a segunda ordem. Assim a segunda derivada de y pode ser aproximada utilizando a diferença central dada por:

$$y''_n(x) \cong \frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{h^2}. \quad (2.4)$$

Sempre que possível, usa-se, para aproximar derivadas, fórmulas em função das diferenças finitas centrais, tendo em vista que elas são mais precisas [27].

A abordagem adotada para obter a solução das EDOs compreende as seguintes etapas:

1. Discretização do domínio .
2. Aproximação das derivadas por diferenças finitas: as derivadas das equações diferenciais são substituídas por aproximações obtidas utilizando diferenças finitas.

3. Estabelecimento das equações de diferenças em cada ponto de discretização. Essas equações formam um sistema de n equações e n incógnitas, que pode vir a ter solução se as condições de contorno forem utilizadas. Em seguida transpõem-se esses termos para o lado direito do sistema para obter um sistema tridiagonal.
4. Utilização das condições de contorno.

Exemplo 2.1 *Consideremos um varal de nylon com as extremidades fixadas em hastes com as seguintes alturas $H_1 = 1.6m$ e $H_2 = 1.5m$, onde a distância entre as hastes é dada por $L = 5m$. Neste varal existe uma colcha dependurada com uma distância de $a = 2m$ e $b = 4m$ da extremidade inicial. Este fenômeno é representado pela seguinte equação :*

$$-\alpha y'' = p(x), \quad (2.5)$$

onde α é uma constante e $p(x)$ é o peso de cada ponto do varal dado por:

$$p(x) = \begin{cases} P_L & \text{se } 0 \leq x < a \quad \text{ou} \quad b \leq x < L \\ P_L + c & \text{se } a \leq x < b, \end{cases}$$

onde c corresponde ao peso da colcha molhada, dado por $c = 1.3Kg$ e $P_L = 0.2m$. As condições de contorno são $y(0) = H_1$ e $y(L) = H_2$ [17].

A solução do problema é obtida seguindo as etapas descritas anteriormente.

1. Discretização do domínio: Utilizando um passo $h = 0.1$ o domínio é particionado em $n = 50$ pontos.
2. Aproximação das derivadas por diferenças finitas: Usando aproximações para as derivadas obtidas pelas diferenças centradas, dadas pelas equações (2.3) e (2.4), a equação (2.5) pode ser reescrita:

$$-\alpha \left(\frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{h^2} \right) = p_n.$$

3. Estabelecimento das equações de diferenças em cada ponto da malha.

Para $n = 1$

$$\begin{aligned} -\alpha \left(\frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{h^2} \right) &= p_1 \\ 2y_1 - y_2 &= \frac{h^2 p_1}{\alpha} + y_0. \end{aligned}$$

Para $n = 2$

$$-\alpha \left(\frac{y_3 - 2y_2 + y_1}{h^2} \right) = p_2$$

$$2y_2 - y_3 - y_1 = \frac{h^2 p_2}{\alpha}.$$

Para $n = 3$

$$-\alpha \left(\frac{y_4 - 2y_3 + y_2}{h^2} \right) = p_2$$

$$2y_3 - y_4 - y_2 = \frac{h^2 p_3}{\alpha}.$$

Essas equações formam um sistema de n equações e n incógnitas, representado matricialmente por:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{h^2 p_1}{\alpha} + y_0 \\ \frac{h^2 p_2}{\alpha} \\ \frac{h^2 p_3}{\alpha} \\ \vdots \\ \frac{h^2 p_n}{\alpha} + y_L \end{pmatrix}$$

4. Substituir das condições de contorno $y(0) = H_1 = 1.6$ e $y(L) = H_2 = 1.5$.

Adotando $\alpha = -10.6$ resolve-se o sistema, determinando assim a altura do varal em cada ponto do domínio. A Figura 2.1 representa a solução obtida.

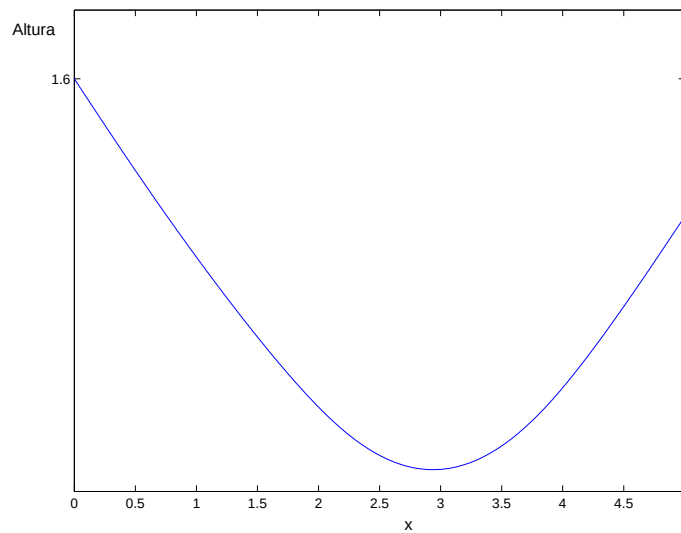


Figura 2.1: Aproximação numérica da altura y do varal no intervalo $[0, 5]$.

2.2 Solução Numérica de Equações Diferenciais Parciais

Uma equação diferencial parcial na variável dependente u e nas variáveis independentes x e y , é uma equação que pode ser posta na forma:

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0$$

onde F é uma função das variáveis indicadas e pelo menos uma derivada parcial aparece nessa expressão.

Uma importante classe de equações diferenciais parciais (EDP) são as EDPs de segunda ordem com a forma:

$$A(x, y)u_{xx} + B(x, y)u_{xy} + C(x, y)u_{yy} = G(x, y, u, u_x, u_y) \quad (2.6)$$

com $(x, y) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, sendo A, B, C , funções contínuas em Ω tal que, $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$, para todo $(x, y) \in \Omega$.

As EDPs, em cada ponto da região Ω de definição da equação (2.6), podem ser classificadas em um dos seguintes tipos:

Elíptica se $B(x, y)^2 - A(x, y)C(x, y) < 0$.

Parabólica se $B(x, y)^2 - A(x, y)C(x, y) = 0$.

Hiperbólica se $B(x, y)^2 - A(x, y)C(x, y) > 0$.

A equação (2.6) pode ser considerada elíptica, parabólica ou hiperbólica num conjunto Ω se a respectiva condição for satisfeita em todos os pontos [27].

Neste trabalho o método de diferenças finitas foi utilizado para resolver numericamente algumas EDPs. A idéia básica é aproximar as derivadas parciais que aparecem na equação diferencial, nas condições iniciais e nas condições de contorno por meio das fórmulas de diferenças finitas. A abordagem utilizada é análoga a exposta na seção anterior.

2.2.1 Diferenças Finitas para Equações Elípticas

Considere a equação:

$$u_{xx} + u_{yy} = f(x, y), (x, y) \in \mathbb{R}. \quad (2.7)$$

Tem-se que $A(x, y) = C(x, y) = 1$ e $B(x, y) = 0$. Logo esta é uma equação elíptica. Atribui-se à expressão $u_{xx} + u_{yy}$ o nome de Operador Laplaciano.

A equação (2.7) é utilizada na modelagem matemática de diversos fenômenos: distribuição de temperatura, distribuição de tensões em placas carregadas, potencial gerado por cargas elétricas e muitos outros.

O primeiro passo para aproximar (2.7) por diferenças finitas é definir uma malha de pontos espaçados por h e k . A partir das fórmulas de diferenças finitas define-se aproximações para as derivadas parciais dadas por:

$$u_{xx}(x, y) = \frac{u(x + h, y) - 2u(x, y) + u(x - h, y)}{h^2},$$

$$u_{yy}(x, y) = \frac{u(x, y + k) - 2u(x, y) + u(x, y - k)}{k^2}.$$

Substituindo no Laplaciano obtém-se:

$$u_{xx} + u_{yy} = \frac{u(x + h, y) - 2u(x, y) + u(x - h, y)}{h^2} + \frac{u(x, y + k) - 2u(x, y) + u(x, y - k)}{k^2}.$$

Se a malha for uniforme, isto é, os espaçamentos na vertical e na horizontal forem iguais, fazendo $k = h$ tem-se que:

$$u_{xx} + u_{yy} = \frac{u(x + h, y) + u(x, y + h) - 4u(x, y) + u(x - h, y) + u(x, y - h)}{h^2}.$$

No desenvolvimento que segue-se, adota-se a seguinte notação:

$$u(x_i, y_j) = u_{i,j}$$

$$u(x_i + h, y_j) = u_{i+1,j}$$

$$u(x_i - h, y_j) = u_{i-1,j}$$

$$u(x_i, y_j + k) = u_{i,j+1}$$

$$u(x_i, y_j - k) = u_{i,j-1}.$$

Desta forma pode-se obter a equação (2.7) em cada ponto (x_i, y_j) da malha. Nos problemas envolvendo malha com discretização do Laplaciano, existem as cónitas, obtidas da condição de contorno, e as incógnitas, que são os valores da função $u(x, y)$ nos pontos da malha. No sistema obtido, as cónitas são os coeficientes k^2 acompanhados das condições de contorno. Essas condições não devem ser usadas na matriz dos coeficientes que multiplicam as incógnitas, mas devem ser somadas à matriz cujos elementos são os valores $f(i, j)$ nos pontos da malha, multiplicada por $k^2 h^2$. A solução da equação (2.7) em cada ponto da malha é a solução do sistema representado matricialmente por:

$$A \times \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ \vdots \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k^2 h^2 f(1, 1) - k^2 u_0 \\ k^2 h^2 f(2, 1) \\ k^2 h^2 f(3, 1) \\ \vdots \\ k^2 h^2 f(N, 1) \\ k^2 h^2 f(1, 2) \\ k^2 h^2 f(2, 2) \\ \vdots \\ k^2 h^2 f(N, M) - k^2 u_n \end{pmatrix}$$

onde A é uma matriz pentadiagonal dada por:

$$\begin{pmatrix} -2(k^2 + h^2) & k^2 & 0 & \dots & h^2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k^2 & -2(k^2 + h^2) & k^2 & 0 & \dots & h^2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k^2 & -2(k^2 + h^2) & k^2 & 0 & \dots & h^2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h^2 & 0 & \dots & k^2 & -2(k^2 + h^2) & k^2 & 0 & \dots & h^2 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & h^2 & 0 & \dots & k^2 & -2(k^2 + h^2) & k^2 & 0 & \dots & h^2 \\ 0 & 0 & \dots & h^2 & 0 & \dots & k^2 & -2(k^2 + h^2) & k^2 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & h^2 & 0 & \dots & k^2 & -2(k^2 + h^2) & k^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & h^2 & 0 & \dots & k^2 & -2(k^2 + h^2) \end{pmatrix}$$

Exemplo 2.2 *Uma placa retangular de prata tem calor sendo gerado uniformemente em todos os pontos. Considere que a temperatura em todos os seus pontos satisfaz a seguinte equação:*

$$u_{xx} + u_{yy} = -(\cos(x + y) + \cos(x - y)), \quad 0 < x < \pi \quad 0 < y < \frac{\pi}{2}. \quad (2.8)$$

Suponha que a temperatura ao longo das bordas seja dada por:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \cos x, & u(x, \frac{\pi}{2}) &= 0, & 0 \leq x \leq \pi, \\ u(0, y) &= \cos y, & u(\pi, y) &= -\cos x, & 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Inicialmente define-se uma malha uniforme. Em seguida usa-se diferenças finitas, como exposto anteriormente, obtendo-se uma aproximação numérica para o problema de valor de contorno. A Figura 2.2 apresenta a aproximação numérica da equação (2.8) com condições de contorno dadas em (2.9).

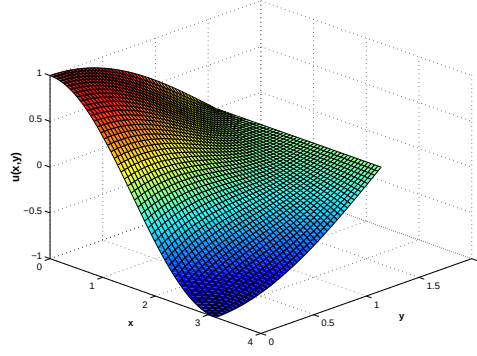


Figura 2.2: Aproximação numérica da solução $u(x, y)$ utilizando diferenças finitas.

2.2.2 Diferenças Finitas para Equações Parabólicas

Como exemplo de uma EDP Parabólica, considere a equação

$$y_t - a(x, t)y_{xx} = f(x, t), \quad x \in (a, b) \quad (2.10)$$

com condição inicial

$$u(x, 0) = u^0(x), \quad x \in [a, b]$$

e condições de contorno

$$u(a, t) = u_a(t)$$

$$u(b, t) = u_b(t).$$

Para problemas com evolução no tempo adota-se a notação:

$$u_i^j = u(x_i, t_j).$$

Por meio de diferenças finitas centrais para as derivadas espaciais, a segunda derivada y_{xx} é aproximada por:

$$u_{xx}(x_i, t_j) = \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2}. \quad (2.11)$$

A derivada em relação ao tempo y_t pode ser discretizada utilizando as fórmulas de diferenças finitas avançada, atrasada ou central dadas, respectivamente, por:

$$\begin{aligned} u_t(x_i, t_j) &= \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{k}, \\ u_t(x_i, t_j) &= \frac{u_i^j - u_i^{j-1}}{k}, \\ u_t(x_i, t_j) &= \frac{u_i^{j+1} - u_i^{j-1}}{2k}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

onde a variável k representa o intervalo de tempo entre as iterações.

Substituindo na equação (2.10) as aproximações obtidas em (2.11) e (2.12), tem-se que:

$$\frac{u_i^j - u_i^{j-1}}{k} - \alpha_i^j \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2} = f_i^j.$$

Para encontrar o valor das incógnitas, no tempo j , isola-se u_i^j obtendo:

$$\frac{u_i^j - u_i^{j-1}}{k} = f_i^j + \alpha_i^j \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2},$$

$$u_i^j - u_i^{j-1} = \frac{\alpha k}{h^2} (u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j) + k f_i^j.$$

Considerando $\frac{\alpha k}{h^2} = \lambda$, tem-se o sistema:

$$\begin{pmatrix} 2\lambda + 1 & -\lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\lambda & 2\lambda + 1 & -\lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\lambda & 2\lambda + 1 & -\lambda & 0 & \dots \\ 0 & \dots & -\lambda & 2\lambda + 1 & -\lambda & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 2\lambda + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^j \\ u_2^j \\ u_3^j \\ u_4^j \\ \vdots \\ u_{n-1}^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1^{j-1} \\ u_2^{j-1} \\ u_3^{j-1} \\ u_4^{j-1} \\ \vdots \\ u_{n-1}^{j-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1^j + \lambda y_0 \\ f_2^j \\ f_3^j \\ f_4^j \\ \vdots \\ f_{n-1}^j + \lambda y_n \end{pmatrix}$$

Resolvendo o sistema obtemos uma aproximação da solução da equação diferencial parcial (2.10).

Outra possibilidade é aproximar a derivada em relação ao tempo utilizando diferenças centrais, calculadas no tempo intermediário entre t_i e t_{i+1} que não pertence a malha, considere $f^{j+1/2}$ a função calculada neste ponto. Nos problemas resolvidos utilizando este método, aparecem valores da solução em seis pontos da malha. Três deles são conhecidos, os correspondentes ao tempo t_j , os outros três são calculados resolvendo o sistema tridiagonal [5]:

$$A_y^{j+1} = B_y^j + k f^{j+1/2},$$

onde

$$A = \begin{pmatrix} \lambda + 1 & \frac{-\lambda}{2} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{-\lambda}{2} & \lambda + 1 & \frac{-\lambda}{2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-\lambda}{2} & \lambda + 1 & \frac{-\lambda}{2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \frac{-\lambda}{2} & \lambda + 1 & \frac{-\lambda}{2} & 0 & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{-\lambda}{2} & \lambda + 1 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & \frac{\lambda}{2} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\lambda}{2} & 1 - \lambda & \frac{\lambda}{2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\lambda}{2} & 1 - \lambda & \frac{\lambda}{2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \frac{\lambda}{2} & 1 - \lambda & \frac{\lambda}{2} & 0 & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{\lambda}{2} & 1 - \lambda \end{pmatrix}.$$

Este método é denominado Método de Crank-Nicolson [10]. A seguir apresentamos uma aplicação deste método para determinar a aproximação da solução de EDP's com evolução no tempo.

Exemplo 2.3 *Considere uma cidade hipotética em uma malha regular tendo uma fonte de poluição que contamina a atmosfera e se espalha por toda a malha devido à presença de um vento regional, $v = (v_1, 0)$. Um modelo para descrever a evolução do quadro de impacto num determinado período de tempo, é dado pela equação diferencial parcial evolutiva advectiva-difusiva:*

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + v_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \sigma u = f \quad (2.13)$$

onde $u = u(x, y, t)$ indica a concentração do poluente no instante t , α representa a dispersão na área, v_1 a velocidade de transporte, σ representa o decaimento e f representa a fonte de poluente. Para simplificar o problema, considere as condições de contorno $u = 0$, isto é, assuma que o retângulo considerado seja grande o suficiente, de forma que a concentração de poluentes na fronteira seja igual a zero, [17].

Utilizando método de Crank-Nicolson, com $\alpha = 0.01$, $\sigma = 0.001$ e $v_1 = 0.1$ determinam-se aproximações da evolução da poluição num determinado tempo. As Figuras 2.3, 2.4 e 2.5 apresentam a concentração da poluição após 4, 40 e 400 iterações, respectivamente.

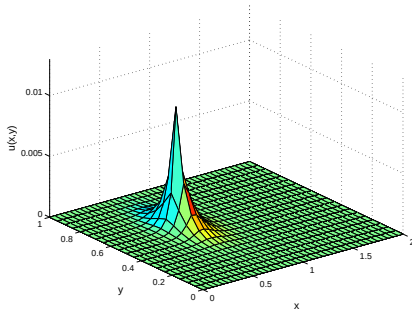


Figura 2.3: Poluição após 4 iterações.

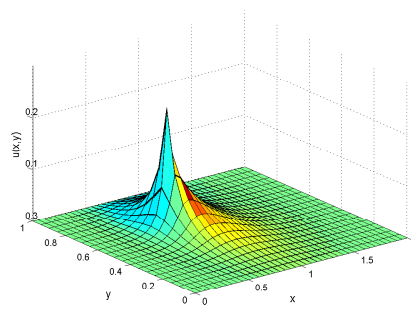


Figura 2.4: Poluição após 40 iterações.

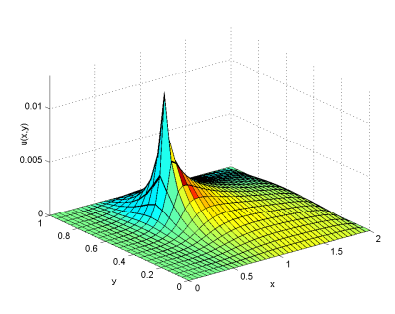


Figura 2.5: Poluição após 400 iterações.

Os métodos numéricos apresentados neste capítulo foram utilizados para obter as bases de dados necessárias para a construção dos sistemas p-fuzzy, a partir dos quais determinamos as aproximações de soluções das equações diferenciais.

Capítulo 3

Sistema p-Fuzzy Aplicado às Equações Diferenciais

As equações diferenciais são uma ferramenta para a modelagem de fenômenos cujas variáveis de estado estão relacionadas com suas variações temporais. Esta relação é estabelecida a partir de parâmetros ou funções que precisam ser mensurados ou estimados, entretanto, na maioria dos casos, faz-se necessária a coleta de um número elevado de dados para descrever bem o fenômeno a ser modelado. Além disso, em muitos desses fenômenos a relação entre as variáveis e suas variações é imprecisa. Essa característica dificulta a modelagem do fenômeno através das equações diferenciais, já que estas dependem da precisão dos parâmetros utilizados.

Este capítulo propõe a adoção de sistemas baseados em regras fuzzy que incorporam informações imprecisas nas variáveis, nas variações e nas suas relações com as variáveis, permitindo assim, o tratamento matemático dessas incertezas. Tais sistemas são chamados sistemas p-fuzzy [1].

Propomos a aplicação de sistemas p-fuzzy para a solução de problemas modelados por Equações Diferenciais Ordinárias e Parciais. Para obter a base de regras e as funções de pertinência utilizamos a função *ANFIS* (*Adaptive Neuro-Fuzzy Inference System*) do Matlab [13]. A *ANFIS* é uma rotina de treinamento de sistemas de inferência fuzzy do tipo Takagi-Sugeno, que utiliza um algoritmo de aprendizagem para identificar, a partir de um conjunto de dados os parâmetros do sistema baseado em regras fuzzy tipo Sugeno [16].

A base de regras e os parâmetros das funções de pertinência do SBRF podem ser construídos a partir de dados obtidos experimentalmente ou com o auxílio de um especialista. Utilizando estes dados e a função *ANFIS* do Matlab é possível identificarmos as regras e os parâmetros do sistema baseado em regras fuzzy. A Figura 3.1 apresenta a metodologia proposta para

a solução de equações diferenciais. Para verificarmos a eficiência do método proposto em diversas aplicações neste capítulo, utilizamos dados obtidos através da resolução das equações diferenciais pelo método de diferenças finitas.

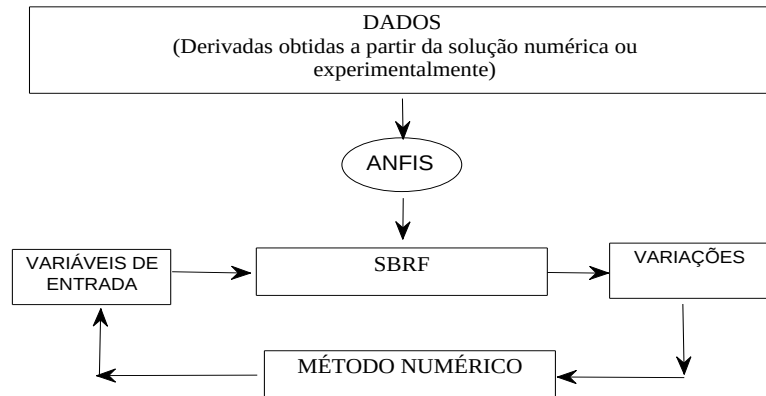


Figura 3.1: Esquema para a solução de Equações Diferenciais utilizando Sistemas p-fuzzy.

3.1 Sistemas p-fuzzy aplicado a Equações Diferenciais Ordinárias

A equação diferencial

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

é estudada a partir da variação, representada na equação pelo campo f . Entretanto, em muitas das aplicações, f é conhecido parcialmente, isto é, não pode ser determinado explicitamente. Com base nas características do fenômeno que se deseja modelar podemos construir uma base de regras para descrever f . Desta forma tanto as variáveis como suas variações são linguísticas e estão correlacionadas, não por meio de equações, e sim através da base de regra fuzzy [1].

Quando a relação das variações com as variáveis de estado é descrita por meio de regras fuzzy, em vez de equações, dizemos que o sistema é parcialmente fuzzy, p-fuzzy [1]. Utilizando os sistemas p-fuzzy, mesmo que f não seja conhecida explicitamente, é possível calcular as imagens de todos os pontos de seu domínio.

Os sistemas p-fuzzy apresentados na literatura utilizam características do campo f para a

construção da base de regras. Entretanto o ajuste das funções de pertinência é baseado na solução analítica da equação diferencial. Seguindo a metodologia proposta por este trabalho a construção da base de regras e o ajuste das funções de pertinências são realizados automaticamente com o auxílio da função *ANFIS*.

Para um melhor entendimento da metodologia exposta apresentaremos algumas aplicações que comprovam a eficácia e versatilidade dos sistemas p-fuzzy na modelagem de situações reais.

3.1.1 Exemplos de sistemas p-fuzzy aplicados a EDOs

Exemplo 3.1 *Crescimento Malthusiano*

Considere o princípio malthusiano para crescimento populacional:

“ a variação de uma população é proporcional a população em cada instante”.

Este princípio determina que a variação populacional cresce a medida em que cresce a população. A partir desta característica podemos determinar um conjunto de dados e construir um SBRF cuja saída é a taxa de variação da população. A arquitetura de um sistema p-fuzzy pode ser vista na Figura 3.2. O SBRF foi contruído a partir de dados obtidos da solução analítica do modelo malthusiano, seguindo a metodologia exposta na Figura 3.1.

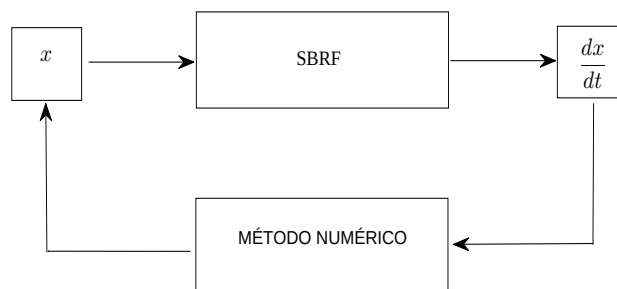


Figura 3.2: Arquitetura de um Sistema p-fuzzy.

O sistema apresenta duas variáveis linguísticas: a população x e a taxa de variação $\frac{dx}{dt}$. Definimos para a população os termos linguísticos *Baixa* (B), *Média Baixa* (MB), *Média Alta* (MA) e *Alta* (A), representadas na Figura 3.3 por funções de pertinências triangulares. As variáveis de saída são polinômios da forma $f(x, y) = px + q$, os parâmetros p e q foram determinados pela função *ANFIS*.

A base de regras construída para a taxa de variação em função da entrada x é composta pelas regras:

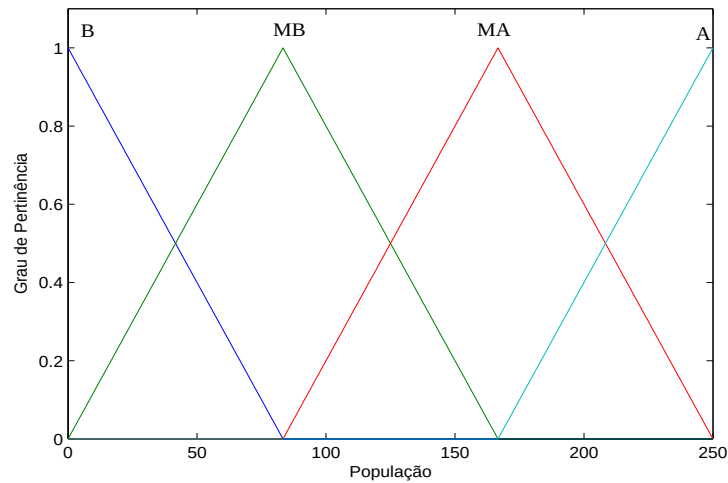


Figura 3.3: Funções de pertinência para a população.

1. Se x é B então $\frac{dx}{dt} = 0.47x$.
2. Se x é MB então $\frac{dx}{dt} = 0.47x + 0.001611$.
3. Se x é MA então $\frac{dx}{dt} = 0.47x + 0.003223$.
4. Se x é A então $\frac{dx}{dt} = 0.47x + 0.04834$.

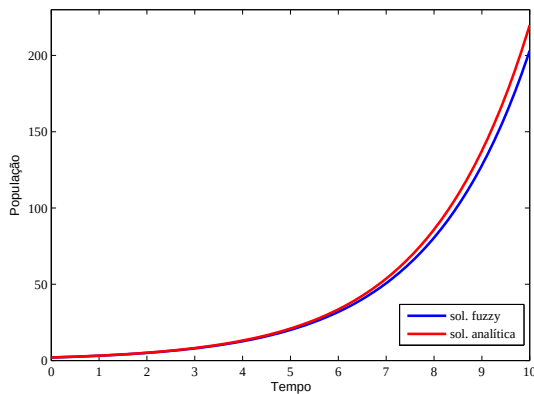


Figura 3.4: Solução do sistema p-fuzzy com população inicial igual a 2.

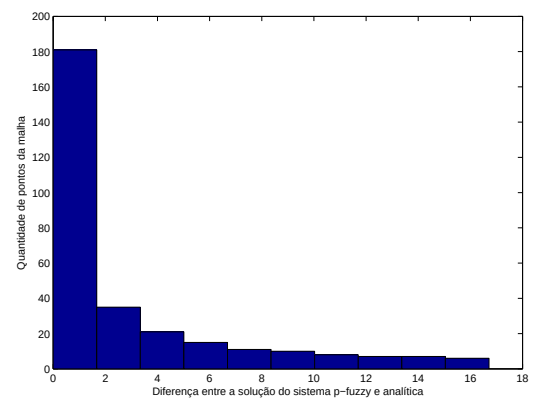


Figura 3.5: Diferença entre a solução do sistema p-fuzzy e analítica calculada em cada tempo t .

Analisando as Figura 3.4 e 3.5 que apresentam, respectivamente, as soluções analítica e fuzzy e a diferença em cada ponto t das duas soluções, podemos observar que para a maioria dos pontos a diferença entre as soluções é pequena. Assim o sistema p-fuzzy é uma boa

aproximação para a solução obtida analiticamente a partir da equação diferencial.

Exemplo 3.2 *Modelo Presa-Predador de Lotka-Volterra*

Este modelo foi criado com base em modificações observadas para populações de peixes e tubarões do mar Mediterrâneo por ocasião da paralização e posterior retomada das atividades pesqueiras como consequência da 1ª Guerra Mundial. O modelo de Lotka-Volterra é dado pelas equações:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - cxy, \\ \frac{dy}{dt} = -by + dxy, \end{cases} \quad (3.1)$$

onde $x(t)$ e $y(t)$ representam, respectivamente, o número de presas e número de predadores no tempo t . As constantes a , b , c , e d correspondem respectivamente ao nascimento de peixes, mortalidade de peixes quando há o encontro entre peixes e tubarões, a mortalidade de tubarões e a conversão de alimentos para predadores [2]. Consideramos $a = 0.1$, $b = 0.01$, $c = 0.05$, $d = 0.001$.

Temos como objetivo determinar uma base de regras que substitua as equações dadas em (3.1), para modelar a dinâmica entre presas e predadores, por meio de um modelo p-fuzzy contínuo. Utilizando a solução analítica e seguindo o esquema apresentado na introdução deste capítulo, obtemos um SBRF cujas entradas são as variáveis x e y e cujas saídas são as suas variações. A Figura 3.6 apresenta a arquitetura do sistema p-fuzzy para a equação (3.1).

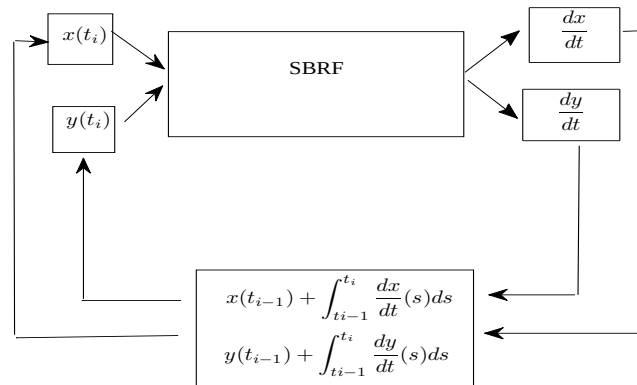


Figura 3.6: Sistema p-fuzzy para modelo presa e predador.

O número de presas e predadores, em cada instante t , é obtido utilizando o número de presas e predadores no tempo anterior e a integrais das saídas do SBRF, Figura 3.6. As integrais são

aproximadas utilizando um método de integração numérica. Neste exemplo optamos pelo a regra do trapézio:

$$\begin{cases} x(t_i) = x(t_{i-1}) + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{dx}{dt}(s)ds, \\ y(t_i) = y(t_{i-1}) + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{dy}{dt}(s)ds. \end{cases} \quad (3.2)$$

As variáveis de entrada x e y tem funções de pertinência triangulares, Figuras 3.7 e 3.8.

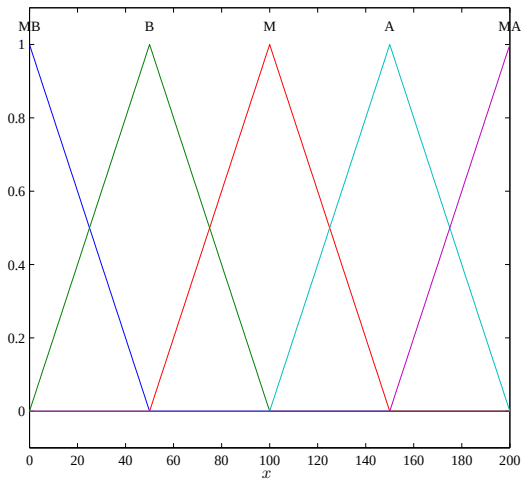


Figura 3.7: Funções de pertinência da variável de entrada x .

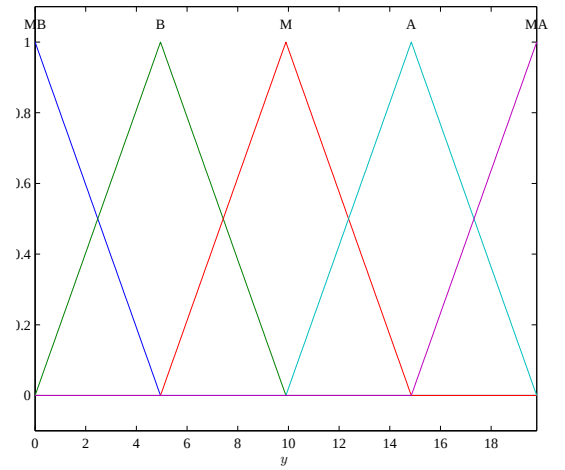


Figura 3.8: Funções de pertinência da variável de entrada y .

A base de regras do SBRF é formada por 25 regras nas quais as variáveis de saída $\frac{dx}{dt}$ e $\frac{dy}{dt}$ são representadas por polinômios da forma $f(x, y) = px + qy + r$.

As simulações das trajetórias e o plano de fase produzidos pelo sistema p-fuzzy são apresentadas nas Figuras 3.9 e 3.10.

A Figura 3.11 apresenta um comparação entre as aproximações determinadas utilizando o método numérico Runge Kutta e as aproximações obtidas utilizando o modelo p-fuzzy. Analisando os resultados podemos concluir que o sistema p-fuzzy proposto descreve adequadamente o modelo presa-predador de Lotka-Volterra, cuja solução é obtida sem a necessidade dos métodos numéricos utilizados para solucionar EDOs.

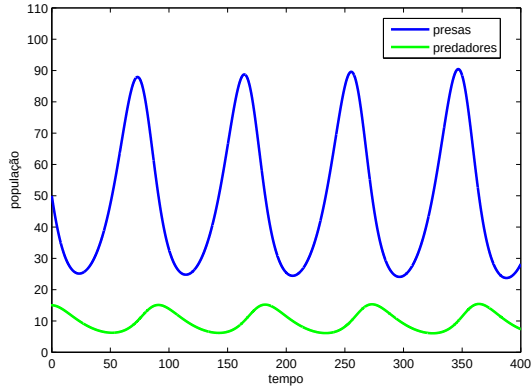


Figura 3.9: Evolução da população ao longo do tempo.

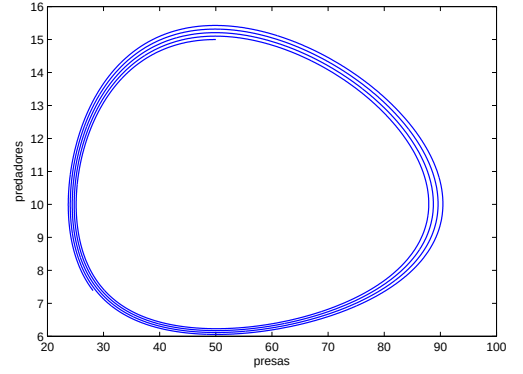


Figura 3.10: Plano de fase do sistema p-fuzzy para $x_0 = 50$ e $y_0 = 15$.

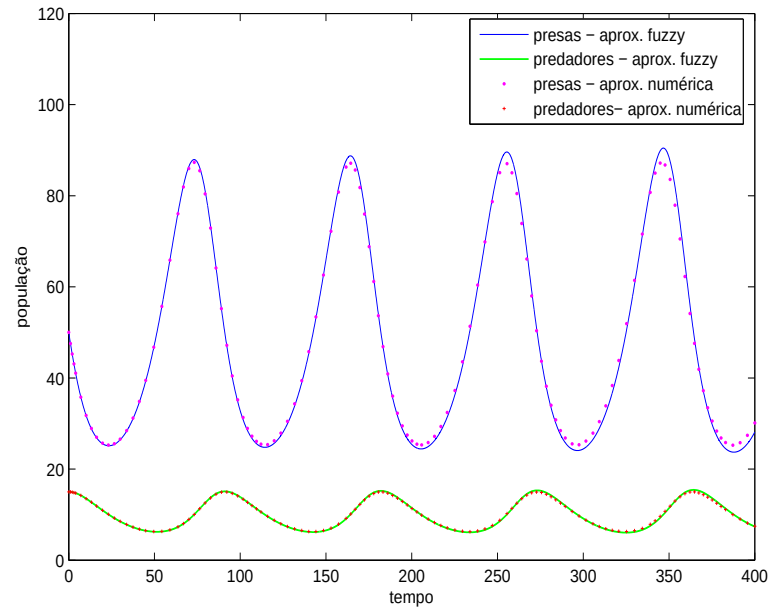


Figura 3.11: Aproximações obtidas numericamente e a partir do modelo p-fuzzy.

Exemplo 3.3 *Modelo Colcha no Varal*

No exemplo 2.1 do capítulo 2 apresentamos a solução para o problema da colcha no varal utilizando o método de diferenças finitas. Resolveremos o mesmo problema utilizando um sistema p-fuzzy.

Particionando o domínio $[0, 5]$ podemos representar a variável x pelos termos linguísticos trapezoidais: *Pequeno* (P), *Médio* (M), *Grande* (G), Figura 3.12.

Para estabelecer um modelo p-fuzzy descreveremos a relação entre a variável x e a derivada segunda de y com relação a x , $\frac{d^2y}{dx^2}$, através da base de regras fuzzy:

1. Se x is P então $\frac{d^2y}{dx^2} = -0.02701x + 0.03172$.

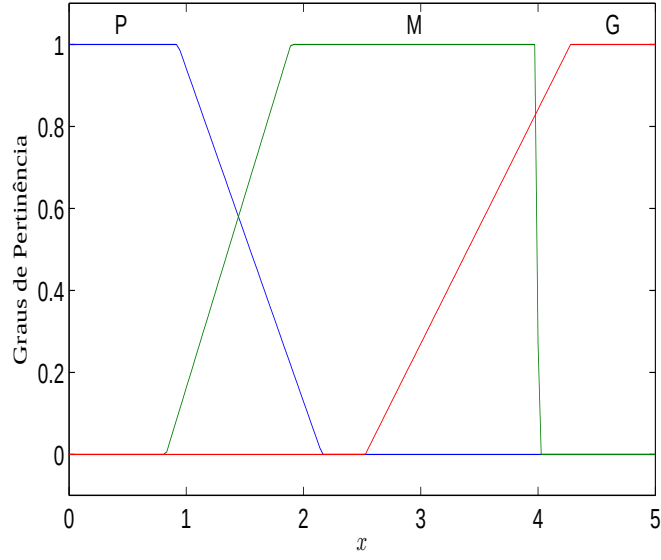


Figura 3.12: Funções de pertinência.

2. Se x is M então $\frac{d^2y}{dx^2} = 0.08488x - 0.07414$.
3. Se x is G então $\frac{d^2y}{dx^2} = 0.01237x - 0.03804$.

O sistema p-fuzzy utilizado na modelagem matemática deste problema pode ser resumido pelo esquema da Figura 3.13.

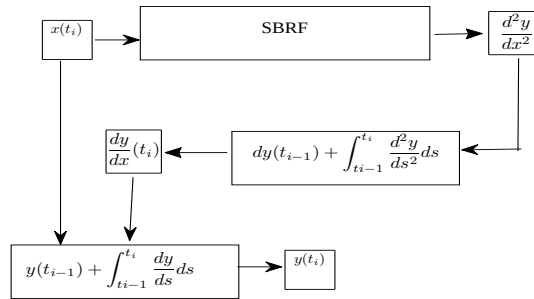


Figura 3.13: Arquitetura sistema p-fuzzy utilizado para o modelo do varal.

Utilizando o método de integração de Simpson, obtemos uma aproximação da solução.

A Figura 3.14 apresenta a solução numérica, obtida utilizando diferenças finitas e a aproximação fuzzy obtida através do sistema p-fuzzy. O gráfico da Figura 3.15 apresenta a discrepância entre as aproximações numérica e fuzzy em cada ponto do varal. A solução fuzzy obtida aproxima-se consideravelmente da solução numérica, demonstrando a eficiência do sistema p-fuzzy construído.

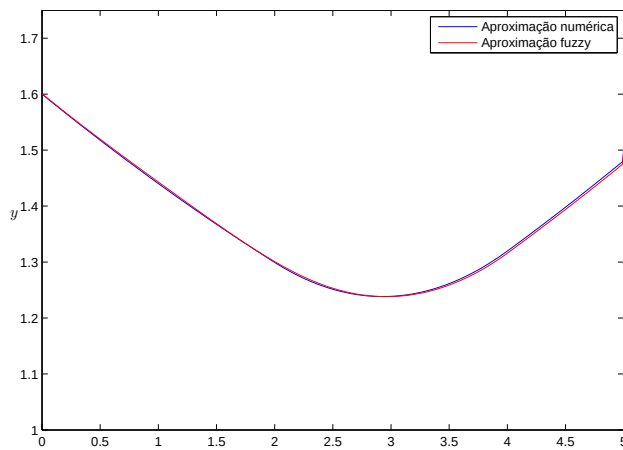


Figura 3.14: Aproximação fuzzy e numérica.

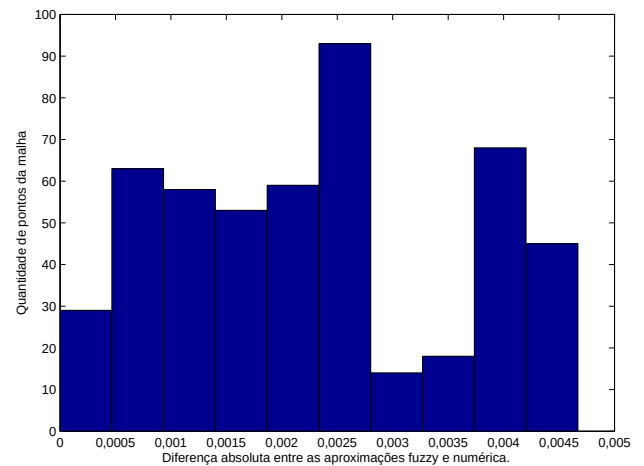


Figura 3.15: Comparação das aproximações fuzzy e numérica em cada ponto.

3.2 Sistemas p-Fuzzy aplicado a Equações Diferenciais Parciais

As equações diferenciais parciais (EDPs) são utilizadas na modelagem da maioria dos fenômenos naturais. Na prática a maior parte das aplicações apresenta relações entre várias variáveis, assim a modelagem matemática envolve derivadas a respeito de cada uma dessas variáveis. Se as relações existentes entre as variáveis de estado e suas variações parciais não forem determinísticas, a modelagem utilizando as EDPs torna-se bastante complicada. Nestes casos os sistemas p-fuzzy mostram-se eficientes.

Para a modelagem de fenômenos que envolvem variações parciais utilizando sistemas p-fuzzy devemos substituir as derivadas parciais por uma base de regras fuzzy que têm como entrada as variáveis de estado e como saída as variações parciais. Utilizando a mesma metodologia da seção anterior, obtemos o campo de direções parciais por meio de um sistema fuzzy que utiliza o método de inferência de Takagi-Sugeno.

Apresentamos a seguir exemplos de aplicação dos sistemas p-fuzzy na modelagem de alguns fenômenos descritos por EDPs.

3.2.1 Exemplos de Sistemas p-fuzzy aplicado a EDPs Elípticas

Exemplo 3.4 Temperatura de uma Placa

Considere o seguinte problema:

Uma placa retangular de prata de 6×5 cm tem calor sendo gerado uniformemente em todos os pontos, com uma taxa $q = 1.5 \text{ cal/cm}^3$. Representamos por x a distância ao longo da borda da placa, de largura igual a 6 cm e por y a distância ao longo da outra borda da placa, de largura igual a 5 cm. Suponha que a temperatura ao longo das bordas se mantenha nas seguintes temperaturas:

$$u(x, 0) = x(6 - x), \quad u(x, 5) = 0, \quad 0 \leq x \leq 6$$

$$u(0, y) = y(5 - y), \quad u(6, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq 5,$$

onde a origem se encontra em um dos cantos da placa com as coordenadas (0,0) e as bordas se posicionam ao longo dos eixos positivos x e y . A temperatura de estado estável, $u(x, y)$, satisfaz a equação de Poisson:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = \frac{q}{K}, \quad 0 < x < 6, \quad 0 < y < 5,$$

onde K , a condutividade térmica, é $1.04 \text{ cal/cm} \cdot ^\circ\text{C} \cdot \text{s}$ [10].

Utilizando uma discretização para a placa e o método de diferenças finitas, obtemos uma aproximação numérica da temperatura $u(x, y)$, representada nas Figuras 3.16 e 3.17.

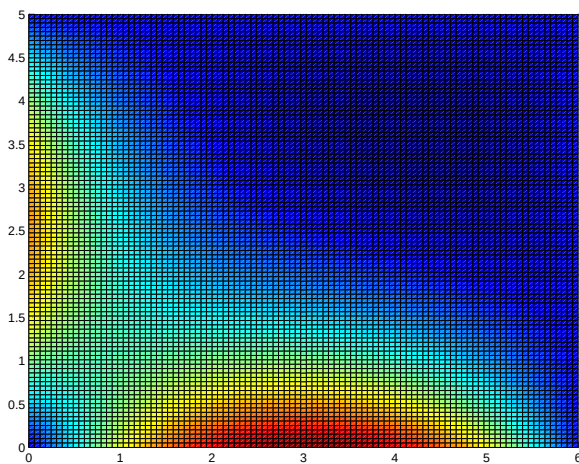


Figura 3.16: Projção no plano xy da temperatura $u(x, y)$.

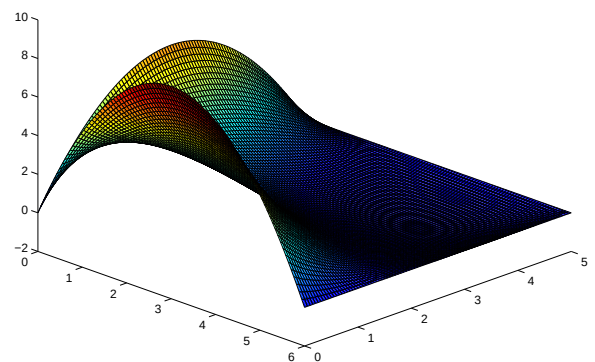


Figura 3.17: Aproximação numérica da temperatura.

O modelo p-fuzzy gerado tem como variáveis de entrada as medidas x e y e variável de saída a derivada parcial de $u(x, y)$ com relação a x , $u_x(x, y)$ [8]. A base de dados necessária para a aplicação da função *ANFIS* é obtida a partir da aproximação numérica da solução, utilizando o

método de diferenças finitas. Com o auxílio da rotina *ANFIS* do Matlab, determina-se funções de pertinência triangulares para as variáveis de entrada, Figura 3.18.

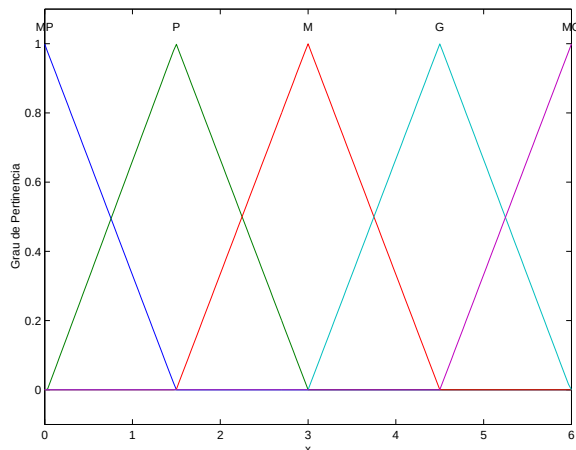


Figura 3.18: Funções de pertinência para a variável de entrada x .

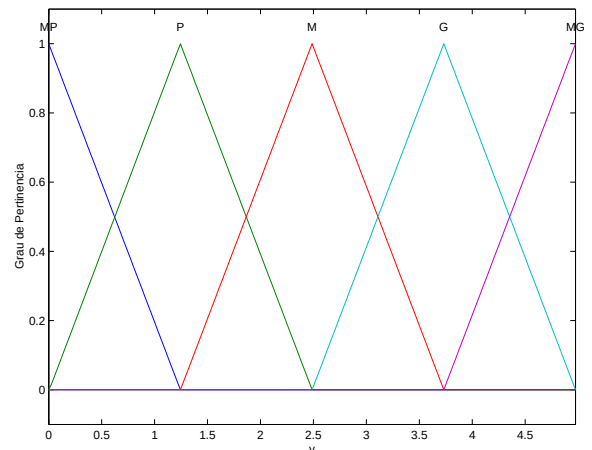


Figura 3.19: Funções de pertinência para a variável de entrada y .

As regras a seguir apresentam alguns polinômios que representam a variável de saída.

1. Se x é muito pequeno e y é muito pequeno então $u_x(x, y) = 160.8x - 84.8y + 1.1$.
2. Se x é médio e y é médio então $u_x(x, y) = -160.2x + 3.1y + 473.5$.
3. Se x é muito grande e y é muito grande então $u_x(x, y) = -30.1x + 83.5y - 234.8$.

Fixando y e utilizando o método de integração de Simpson, obtemos a solução $u(x, y)$, representada na Figura 3.20.

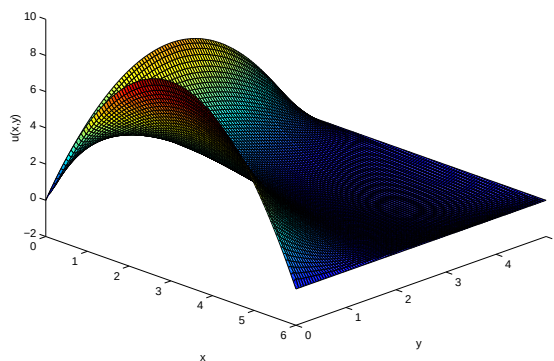


Figura 3.20: Aproximação da solução $u(x, y)$ a partir do modelo p-fuzzy.

A aproximação da solução obtida através do modelo p-fuzzy e a aproximação numérica obtida a partir do método de diferenças finitas, apresentam comportamentos similares. A

diferença absoluta máxima entre os valores obtidos para cada ponto da malha através dois métodos é de 0.197, como podemos observar, no eixo horizontal, para um número pequeno de pontos da malha, eixo vertical da Figura 3.21.

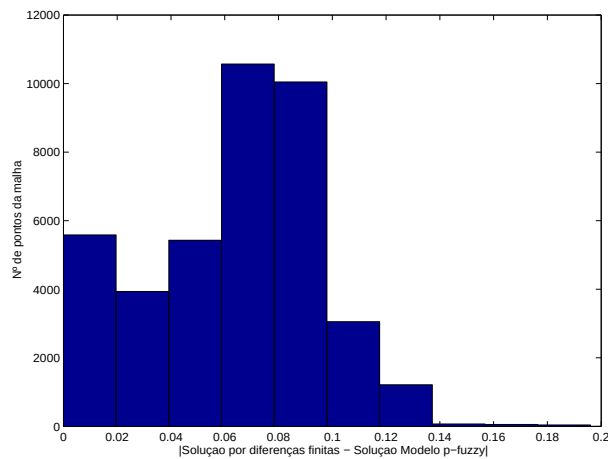


Figura 3.21: Diferença entre as aproximações obtidas por diferenças finitas e modelo p-fuzzy.

Apresentamos outros exemplos de sistemas p-fuzzy aplicados às EDPs.

3.2.2 Exemplos de Sistemas p-fuzzy aplicado a EDPs Parabólicas

Exemplo 3.5 *Uma colcha secando no varal*

Analisaremos novamente o problema de uma colcha secando em um varal mas agora considerando que a cada tempo t , o seu peso se modifica devido a evaporação ocorrida. Como consequência deste processo, o varal juntamente com a colcha tende a subir, até que esta fique completamente seca. Este problema pode ser modelado utilizando a EDP parabólica:

$$y_t - \alpha y_{xx} = f, \quad (x, t) \in \mathbb{R}$$

Assumiremos para as constantes e condições de contorno os mesmos valores utilizados no Exemplo 2.1. A função utilizada como variação da massa é dada por:

$$f_i^n = y_{seca} - y_i^{n-1},$$

onde y_{seca} é a solução da EDP considerando a massa da colcha seca igual a $0,8Kg$, y_i^0 é a solução da EDO substituída a cada iteração pela solução da equação:

$$y_t(x, y) - \alpha y_{xx}(x, t) = t_{evap} f^{n+1/2}.$$

O valor de $f^{n+1/2}$, em cada iteração, é a média dos valores de f_i^n e f_i^{n+1} . Para resolver a EDO e a EDP utilizamos o método de diferenças finitas e na discretização do tempo o método de Crank-Nicolson [17]. Para modelar o problema através dos sistemas p-fuzzy, construiremos uma base de regras com variáveis de entrada x e t , a variável de saída é a variação parcial de y em relação a x . Assim os dados utilizados pela função *ANFIS* são os valores de x , t e $\frac{\partial y}{\partial x}$. Desta forma, utilizamos apenas um SBRF para modelar o fenômeno ao longo do tempo t . A arquitetura do sistema p-fuzzy é apresentada na Figura 3.22.

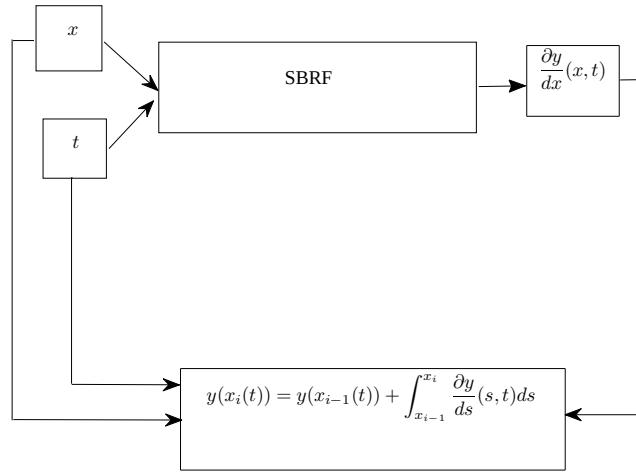


Figura 3.22: Modelo p-fuzzy aplicado a equações parabólicas.

A saída do SBRF são polinômios da forma $f(x, t) = px + qt + r$. Os parâmetros p , q e r são determinados pela *ANFIS*. As variáveis de entrada, x e t , são representadas por conjuntos fuzzy com cinco funções de pertinência representadas nas Figuras 3.23 e 3.24.

Assim a base de regras é constituída pelas vinte e cinco regras:

1. Se t é muito pequeno e x é muito pequeno então $\frac{\partial y}{\partial x} = 0.00005632t - 13.447x - 0.006925$.
2. Se t é muito pequeno e x é pequeno então $\frac{\partial y}{\partial x} = 0.19577t - 13.258x + 16.248$.
3. Se t é muito pequeno e x é médio então $\frac{\partial y}{\partial x} = 0.39168t - 13.161x + 32.453$.
4. Se t é muito pequeno e x é grande então $\frac{\partial y}{\partial x} = 0.59247t - 13.226x + 49.117$.
5. Se t é muito pequeno e x é muito grande então $\frac{\partial y}{\partial x} = 0.80507t - 13.513x + 66.774$.
6. Se t é pequeno e x é muito pequeno então $\frac{\partial y}{\partial x} = -0.000083496t - 12.994x - 0.00037619$.
7. Se t é pequeno e x é pequeno então $\frac{\partial y}{\partial x} = 0.19561t - 12.814x + 10.858$.

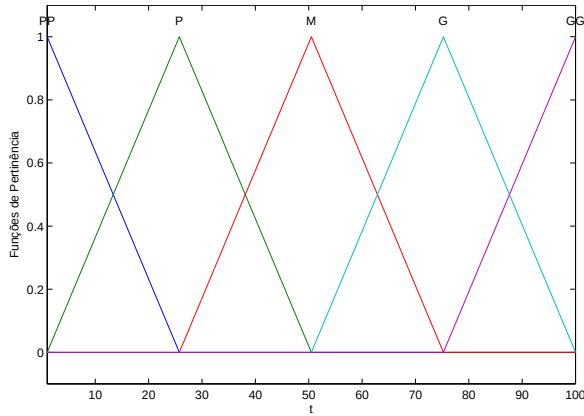


Figura 3.23: Funções de pertinência para a variável de entrada t .

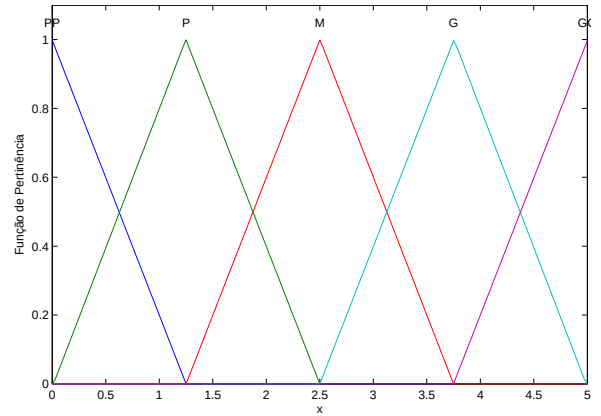


Figura 3.24: Funções de pertinência para a variável de entrada x .

8. Se t é pequeno e x é médio então $\frac{\partial y}{\partial x} = 0.3916t - 12.74x + 21.71$.
9. Se t é pequeno e x é grande então $\frac{\partial y}{\partial x} = 0.59266t - 12.809x + 32.871$.
10. Se t é pequeno e x é muito grande então $\frac{\partial y}{\partial x} = 0.80527t - 13.079x + 44.665$.
11. Se t é médio e x é muito pequeno então $\frac{\partial y}{\partial x} = 0.0033417 - 12.314x - 0.00013059t$.
12. Se t é médio e x é pequeno então $\frac{\partial y}{\partial x} = 0.19556t - 12.143x + 5.1862$.
13. Se t é médio e x é médio então $\frac{\partial y}{\partial x} = 0.39157t - 12.081x + 10.376$.
14. Se t é médio e x é grande então $\frac{\partial y}{\partial x} = 0.59274t - 12.149x + 15.716$.
15. Se t é médio e x é muito grande então $\frac{\partial y}{\partial x} = 0.80535t - 12.403x + 21.348$.
16. Se t é grande e x é muito pequeno então $\frac{\partial y}{\partial x} = 0.0085558 - 11.835x - 0.00015877t$.
17. Se t é grande e x é pequeno então $\frac{\partial y}{\partial x} = 0.19553t - 11.671x - 0.23786$.
18. Se t é grande e x é médio então $\frac{\partial y}{\partial x} = 0.39154t - 11.616x - 0.473$.
19. Se t é grande e x é grande então $\frac{\partial y}{\partial x} = 0.59278t - 11.682x - 0.71446$.
20. Se t é grande e x é muito grande então $\frac{\partial y}{\partial x} = 0.80538t - 11.924x - 0.98422$.
21. Se t é muito grande e x é muito pequeno então $\frac{\partial y}{\partial x} = 0.01639 - 11.585x - 0.00018756t$.
22. Se t é muito grande e x é pequeno então $\frac{\partial y}{\partial x} = 0.19551t - 11.424x - 5.3799$.
23. Se t é muito grande e x é médio então $\frac{\partial y}{\partial x} = 0.39152t - 11.374x - 10.765$.
24. Se t é muito grande e x é grande então $\frac{\partial y}{\partial x} = 0.59282t - 11.439x - 16.306$.
25. Se t é muito grande e x é muito grande então $\frac{\partial y}{\partial x} = 0.80543t - 11.673x - 22.178$.

Observe que a aproximação da solução y para cada tempo t , fixo, é obtida a partir da saída do SBRF. As integrais foram resolvidas utilizando o método de integração de Simpson.

As Figuras 3.25 e 3.26 apresentam a solução numérica, aproximação fuzzy no tempo $t=0$ e a evolução da solução fuzzy no tempo, respectivamente.

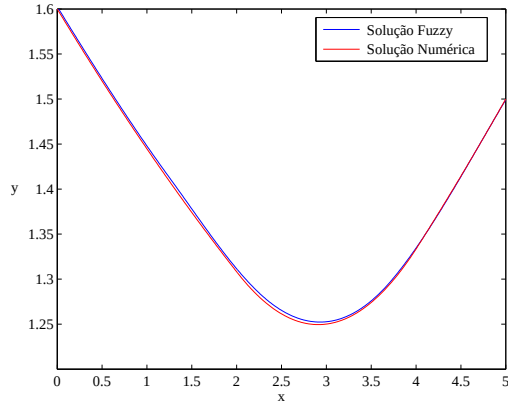


Figura 3.25: Solução Numérica $y(x, t)$ e Solução Fuzzy no instante $t=0$.

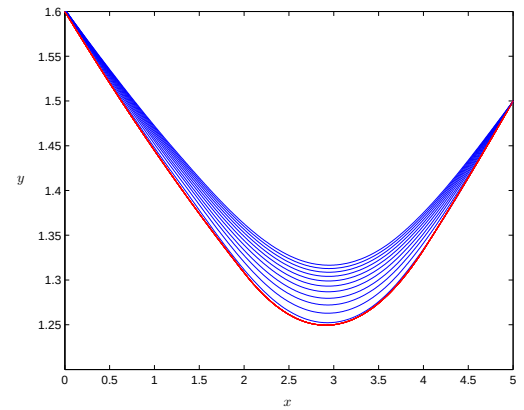


Figura 3.26: Evolução da solução $y(x, t)$ a partir do modelo p-fuzzy.

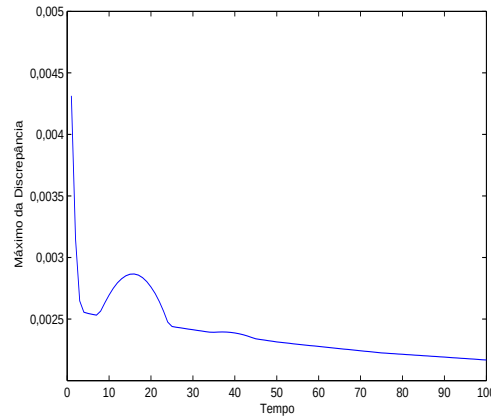


Figura 3.27: Evolução do valor máximo da diferença no tempo t .

As aproximações obtidas utilizando o sistema p-fuzzy estão próximas das aproximações obtidas numericamente utilizando o método de Crank-Nicolson. O valor máximo da diferença entre as aproximações fuzzy e numérica, para todo x , em cada tempo t é inferior a 0.045. A partir da Figura 3.27 constatamos que as soluções aproximam-se com o tempo, pois a discrepância máxima entre as aproximações decresce com o tempo.

Exemplo 3.6 Poluição do ar

No exemplo 2.3 do capítulo 2 apresentamos a solução numérica para o fenômeno de poluição do ar modelado pela equação diferencial parcial evolutiva advectiva-difusiva:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + v_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \sigma u = f, \quad (3.3)$$

lembrando que $u(x, y, t)$ é a concentração do poluente no instante t , α representa a dispersão na área, v_1 a velocidade de transporte, σ representa o decaimento e f representa a fonte de poluente.

Nesta seção apresentamos a solução deste problema utilizando sistemas p-fuzzy. O objetivo é substituir as relações descritas pela EDP por uma base de regras que tem como variáveis de entrada as variáveis de estado x , y e t , e variável de saída, a derivada parcial de u em relação a x . Fixando os valores de y e t , encontramos uma aproximação para a solução $u(x, y, t)$ resolvendo numericamente a integral apresentada no esquema da Figura 3.28.

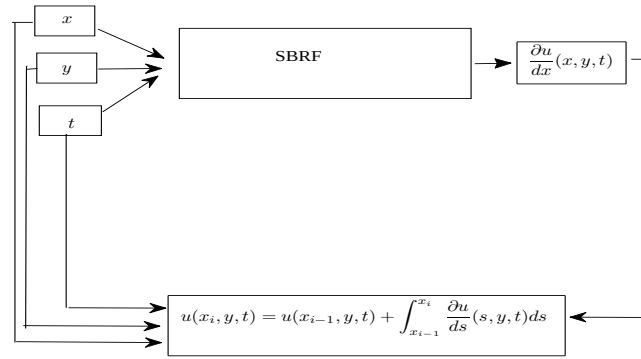


Figura 3.28: Arquitetura do sistema p-fuzzy.

As funções de pertinência para as variáveis de entrada do SBRF, x , y e t , são triangulares com nove termos linguísticos para a variável tempo e cinco termos linguísticos para as variáveis x e y . De forma análoga, as funções de pertinência e os parâmetros do polinômio de saída são determinadas pela função ANFIS. As derivadas parciais com relação a x , no ponto (x, y) , num tempo t , são obtidas a partir de regras cujos antecedentes são polinômios lineares. A regra a seguir ilustra os polinômios de saída.

Se t é “proximo de zero” e x é “muito pequeno” e y é “muito pequeno” então

$$u_x = -0.01613t + 0.1218x + -0.1196y - 0.01759.$$

Variando t obtemos as aproximações da evolução do quadro de impacto da poluição representadas nas Figuras 3.29 e 3.30.

A partir da Figura 3.31, concluímos que a diferença máxima entre as aproximações fuzzy e numérica, para todo ponto da malha em cada tempo $t \in [0, 10]$, é inferior a 0.00526.

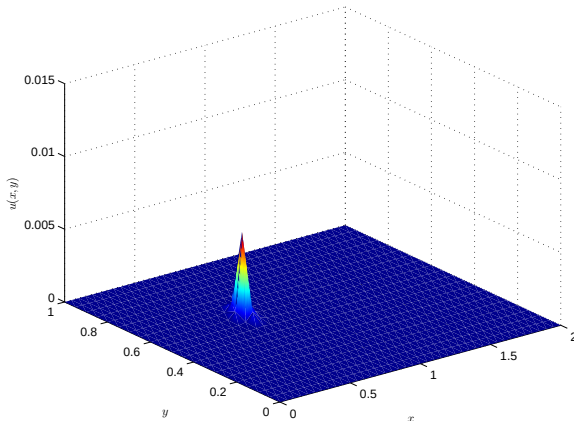


Figura 3.29: Aproximação $u(x, y)$ no tempo $t=0$.

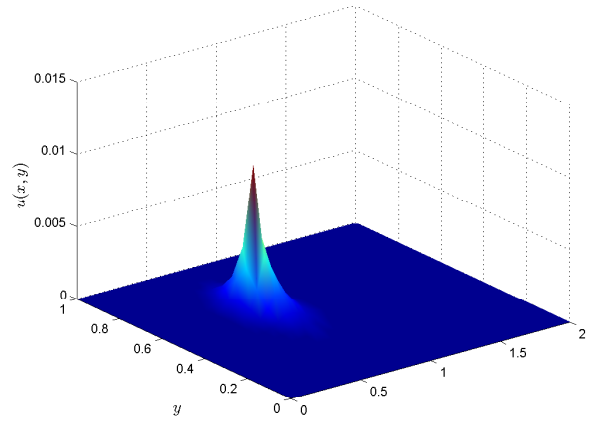


Figura 3.30: Aproximação $u(x, y)$ no tempo $t=10$.

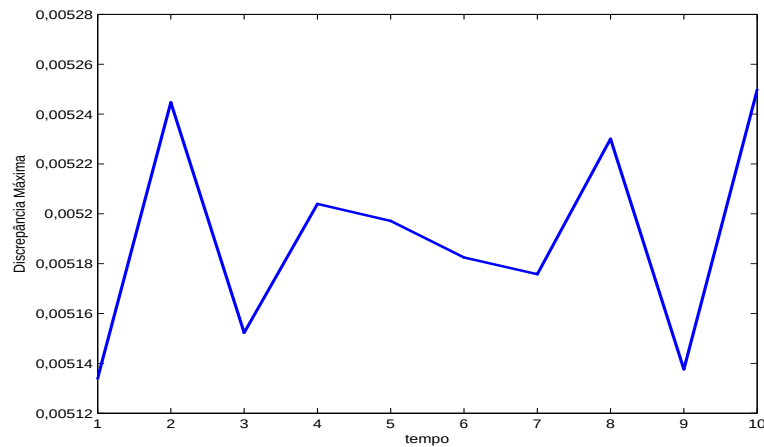


Figura 3.31: Evolução do valor máximo da diferença no tempo t .

O estudo realizado neste capítulo demonstra a aplicabilidade dos sistemas p-fuzzy na modelagem de fenômenos descritos por equações diferenciais. Mais especificamente, demonstra o seu potencial na modelagem de fenômenos nos quais as taxas de variações das variáveis de estado são descritas por meio de uma base de regras fuzzy que permite incluir no modelo informações subjetivas.

A proposta de modelagem matemática de fenômenos descritos por EDPs a partir de sistemas p-fuzzy, não utiliza os métodos numéricos de solução para EDPs, facilitando o processo utilizado para obter as aproximações.

Para obter os modelos propostos neste capítulo utilizamos a solução analítica ou aproximações numéricas obtidas a partir do método de diferenças finitas. A partir destes modelos podemos verificar que as aproximações obtidas utilizando os sistemas p-fuzzy, com método de inferência de Takagi-Sugeno, são coerentes com as soluções obtidas pelos métodos numéricos e

analíticos.

No próximo capítulo apresentamos uma aplicação do método apresentado neste capítulo utilizando dados experimentais enfatizando a aplicabilidade dos sistemas fuzzy e p-fuzzy na modelagem fenômenos cuja solução ainda não foi determinada.

Capítulo 4

Sistemas *Fuzzy* Aplicados ao Estudo da Luminescência de Íons de Neodímio

A completa caracterização das propriedades ópticas de um material é importante para o desenvolvimento da tecnologia e também para obter entendimento sobre o processo de transferência de energia envolvido.

Em particular, o estudo da luminescência de íons de Neomídio imersos em um hospedeiro vítreo, mostra-se muito interessante devido à sua aplicação em dispositivos ópticos, como, por exemplo, fibras ópticas [28]. A modelagem matemática da luminescência é realizada a partir de experiências com um feixe de laser focalizado em um micro ponto na superfície da amostra vítrea [28].

Neste capítulo propomos um sistema baseado em regras fuzzy para modelar a luminescência próximo ao ponto de incidência do laser de excitação [9]. Neste modelo a base de regras é determinada através das características do fenômeno possibilitando o tratamento matemático da luminescência nestes pontos, o que não é possível a partir de outros modelos encontrados na literatura.

4.1 Luminescência Espacial

Diversos estudos sobre íons Terras Raras (TR) têm sido realizados [28] e [29]. Em particular o de Neodímio (Nd^{3+}), muito utilizado em dispositivos ópticos aplicados no campo da pesquisa científica, da indústria e da medicina. Os íons de Neodímio, devido às suas propriedades ópticas, podem ser utilizados como amplificadores ópticos em fibras ópticas e como elementos ativos para lasers de estado sólido [28].

Para determinar a melhor concentração de Nd^{3+} que deve ser inserida na matriz vítrea e visando a sua aplicação como amplificadores ópticos, é necessário modelar as propriedades ópticas, em particular a luminescência, em função da concentração de íons de Neodímio. A partir do estudo da luminescência é possível determinar a concentração de íons de Neodímio mais adequada para que haja maior migração de fótons entre eles, caracterizando-os como amplificadores ópticos [29].

O estudo desta propriedade é realizado a partir de experiências com um feixe de laser que, focalizado em um micro ponto na superfície da amostra vítrea, excita os íons emitindo assim fótons (luz) que se difundem criando uma área luminescente na amostra [28] e [29].

A função densidade de fótons, $n(r)$, é a função de difusão do estado constante. A simetria radial da função da densidade dos fótons deve indicar que, o forte bombeio óptico pode fazer com que o comprimento de absorção seja menor que o de difusão e assim pode-se utilizar a equação de coordenada polar, dada por:

$$L^2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial n(r)}{\partial r} \right) + n(r) = -G_0 \delta(r), \quad (4.1)$$

onde G_0 é uma constante relacionada à intensidade da excitação do laser, $L = \sqrt{D\tau}$ é o comprimento de difusão, D a constante de difusão, τ o tempo de vida e $\delta(r)$ é a função de Dirac [19], [28] e [29].

A função de Dirac é definida como tendo as seguintes propriedades:

- i) $\delta(t) = 0$, para $t \neq 0$,
- ii) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$.

A função $\delta(t)$ corresponde a um impulso unitário em $t = 0$. Um impulso unitário em $t = t_0$ é dados por $\delta(t - t_0)$. Assim, de i) e ii), temos $\delta(t - t_0) = 0$, $t \neq t_0$ e $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt = 1$.

A solução analítica para a equação(4.1) é dada por uma função de Bessel Modificada de ordem zero [28], [29] e [19]. Esta função de Bessel pode ser simplificada considerando pontos afastados do laser de excitação, assim obtem-se uma função exponencial que ajusta-se perfeitamente a borda das curva de luminescência, dada por [28]:

$$n(r) = n_0 \frac{1}{\sqrt{\frac{r}{L}}} \exp\left(-\frac{r}{L}\right). \quad (4.2)$$

Desta forma a aproximação dada pela equação (4.2) descreve a luminescência nos pontos afastados do laser. O sistema fuzzy proposto na próxima seção permite o cálculo de aproximações para a luminescências nos pontos próximos do laser de excitação.

4.2 Modelos para a Luminescência Utilizando Sistemas Baseados em Regras Fuzzy

Os dados utilizados na construção dos modelos foram medidos conforme relata a literatura [28], [29]. A luminescência detectada foi produzida pela presença dos íons de Neodímio (Nd^{3+}) com emissão em torno de 880 nm (nanômetro, 10^{-9} m), 1060 nm , e 1330 nm [28]. Os dados coletados descrevem a luminescência nos pontos em função do raio r medido a partir do ponto de incidência do feixe laser, assim, considerando $(50,50)$ como o ponto de incidência, obtemos as coordenadas (x, y) utilizando a equação:

$$y = 50 \pm \sqrt{r^2 - (x - 50)^2}.$$

Para determinar as coordenadas utilizamos os dados nos quais o raio seja menor ou igual 20 nm , assim consideramos os valores para x pertencentes ao intervalo $[30, 70]$. Desta forma obtemos um conjunto de dados que descreve a luminescência $L(x, y)$ no ponto (x, y) que representaremos por $L(x, y)$.

As Figuras 4.1, 4.2 e 4.3 representam o valor da luminescência, nestes pontos, para as emissões 880 nm , 1060 nm , e 1330 nm , respectivamente.

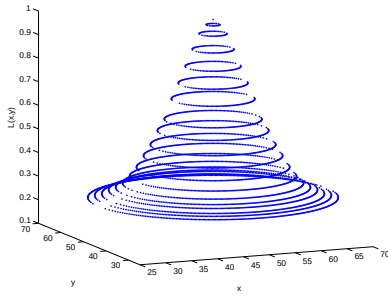


Figura 4.1: $L(x, y)$ para a emissão de 880 nm .

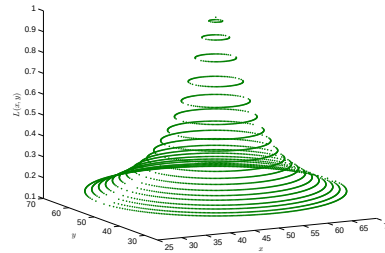


Figura 4.2: $L(x, y)$ para a emissão de 1060 nm .

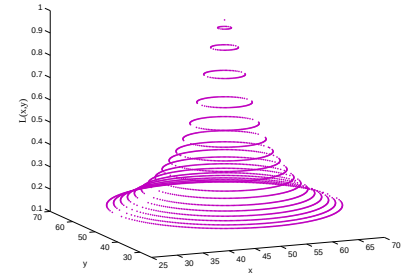


Figura 4.3: $L(x, y)$ para a emissão de 1330 nm .

Propomos modelos fuzzy para o cálculo da luminescência nos pontos da amostra vítrea para cada uma das emissões. Nestes modelos as variáveis estão correlacionadas com a luminescência por uma base de regras fuzzy que têm como entrada a posição do fóton na matriz vítrea. Assim as variáveis de entrada e saída para o SBRF são as medidas, x , y e $L(x, y)$, respectivamente.

A função *ANFIS* determina os parâmetros das funções de pertinência das variáveis de entrada e dos polinômios dos consequentes de cada regra. As Figuras 4.4 e 4.5 apresentam as funções de pertinência das variáveis de entrada do SBRF, construído a partir dos dados coletados utilizando os íons de Neodímio (Nd^{3+}) com emissão em torno de 880 nm . Foram

utilizadas cinco termos linguísticos: “muitíssimo pequeno” (PP), “muito pequeno” (MP), “pequeno” (P), “médio” (M), “grande” (G), “muito grande” (MG) e “muitíssimo grande” (GG). Funções de pertinência semelhantes foram obtidas para as emissões em torno de $1060nm$ e $1330nm$.

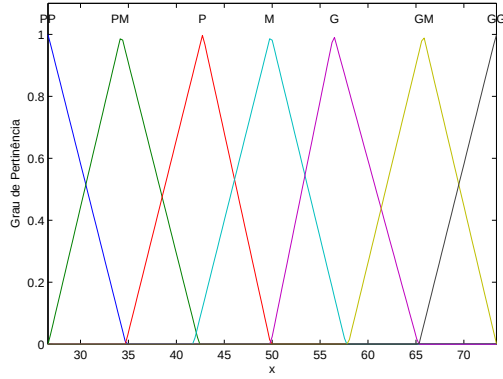


Figura 4.4: Função de Pertinência da variável de entrada x (emissão de $880nm$).

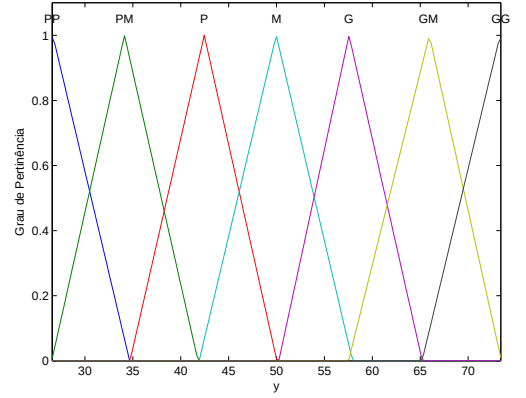


Figura 4.5: Função de Pertinência da variável de entrada x (emissão de $880nm$).

Cada um dos SBRFs tem uma base de regras constituída por quarenta e nove regras. A regra “Se x é PP e y é PP então $L(x,y) = 0.0115x - 0.006y - 0.0099$ ” apresenta um dos polinômios que representam a variável de saída do modelo fuzzy construído para a emissão em torno de $880nm$.

Os sistemas obtidos permitem a representação da luminescência para os pontos (x,y) próximos da incidência do laser. As Figuras 4.6, 4.7 e 4.8 apresentam aproximações para a luminescência nos pontos da amostra vítrea, obtidas pelo SBRF, para as emissões $880nm$, $1060nm$, e $1330nm$, respectivamente.

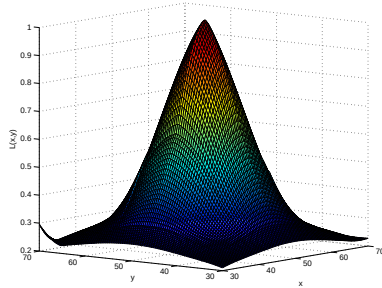


Figura 4.6: $L(x,y)$ para a emissão de $880nm$.

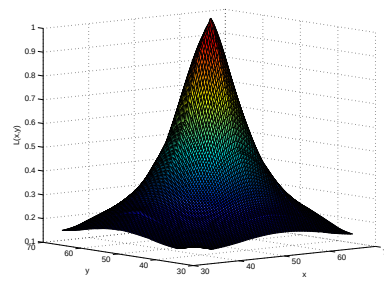


Figura 4.7: $L(x,y)$ para a emissão de $1060nm$.

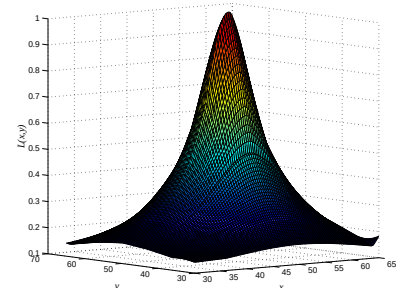


Figura 4.8: $L(x,y)$ para a emissão de $1330nm$.

A diferença absoluta entre os valores obtidos experimentalmente e os valores obtidos através dos modelos fuzzy é inferior a 0,017 para a emissão $880nm$, 0,036 para a emissão $1060nm$ e 0,026 para a emissão de $1330nm$, conforme as Figuras 4.9, 4.10, 4.11, 4.12, 4.13 e 4.14.

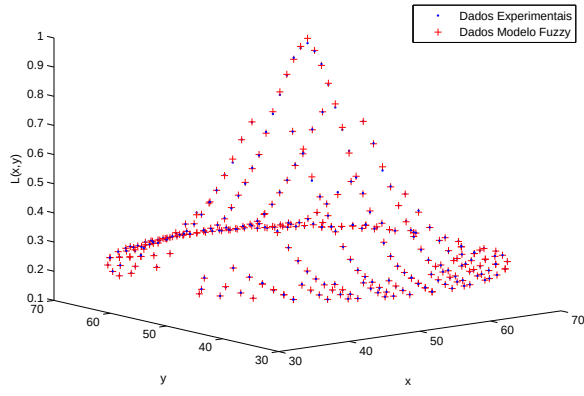


Figura 4.9: $L(x,y)$ para a emissão 880nm.

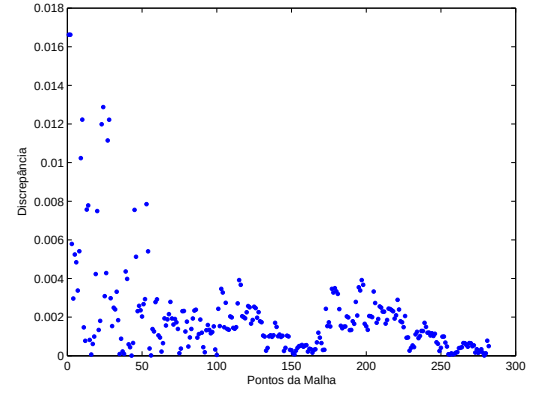


Figura 4.10: Discrepância para a emissão 880nm.

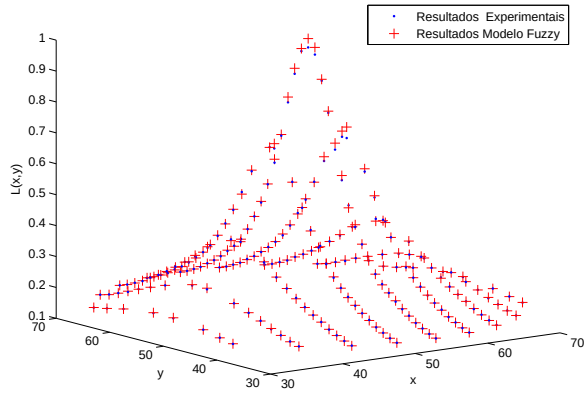


Figura 4.11: $L(x,y)$ para a emissão de 1060nm.

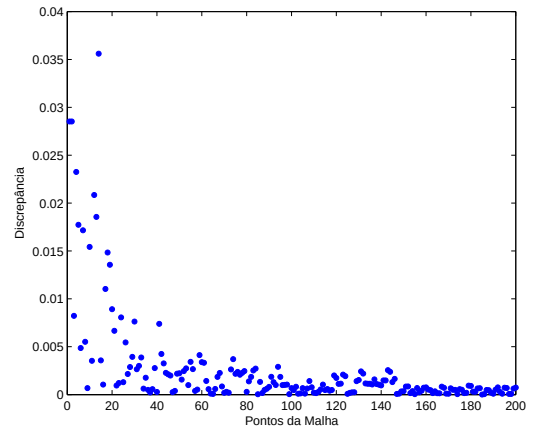


Figura 4.12: Discrepância para a emissão 1060nm.

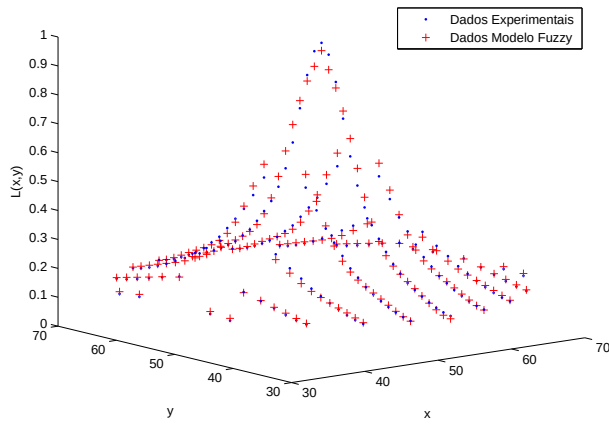


Figura 4.13: $L(x,y)$ para a emissão de 1330nm.

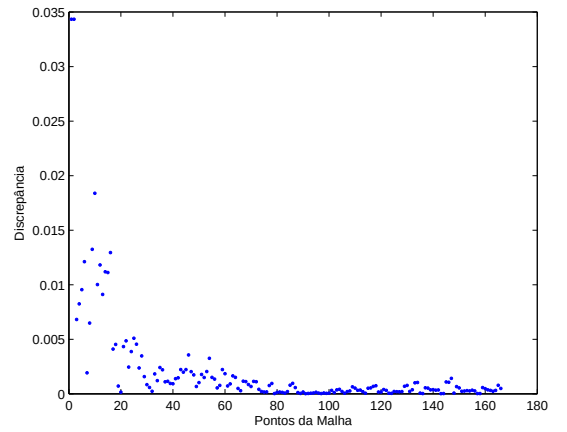


Figura 4.14: Discrepância para a emissão 1330nm.

Analisando a projeção da luminescência no plano obtidas pelo SBRF, Figuras 4.15, 4.16 e 4.17, concluimos que a emissão de $880nm$ proporciona uma maior difusão de fótons nos pontos da amostra vítrea. Este resultado demonstra a confiabilidade e aplicabilidade dos modelos fuzzy construídos, pois é compatível com os resultados encontrados em [28], [29].

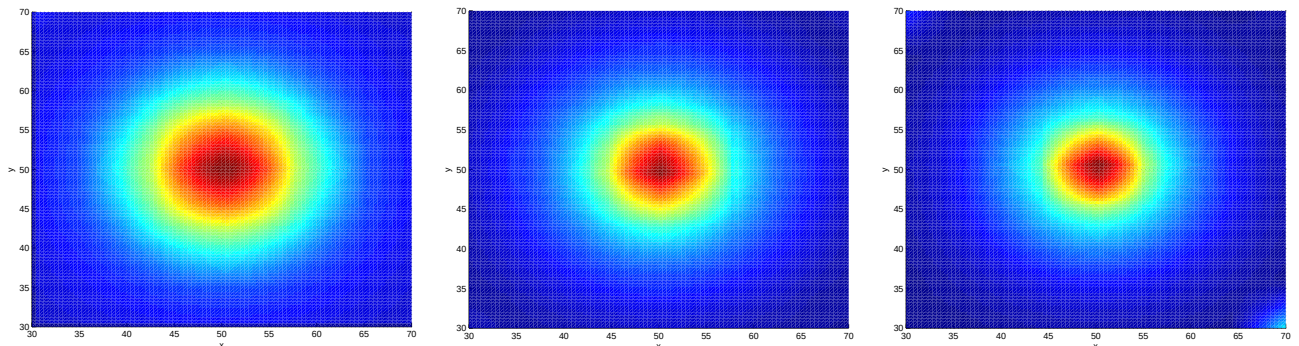


Figura 4.15: Projeção de $L(x, y)$, emissão de $880nm$. Figura 4.16: Projeção de $L(x, y)$, emissão de $1060nm$. Figura 4.17: Projeção de $L(x, y)$, emissão de $1330nm$.

4.3 Interface Gráfica para o Cálculo da Luminescência

Com o objetivo de facilitar a manipulação dos dados, implementamos uma interface gráfica, apresentada na Figura 4.18, para obter as aproximações para luminescência utilizando os modelos fuzzy construídos para todos os pontos da placa. A luminescência obtida em cada uma das emissões podem ser visualizadas pelos gráficos que são apresentados após a escolha da emissão desejada.

Para determinar a luminescência em cada ponto do plano na superfície da amostra vítrea, escolhemos inicialmente a emissão desejada, utilizando o menu apresentado, em seguida escolhemos com o cursor a posição sob a placa para qual desejamos calcular a luminescência. Após a escolha do ponto, o valor da luminescência neste ponto é apresentado na interface. Este valor é obtido através dos SBRF contruídos anteriormente, utilizando dados experimentais. Além da luminescência do ponto escolhido, a interface apresenta a posição e a distância deste ponto em relação ao ponto de incidência do laser, observe a Figura 4.18.

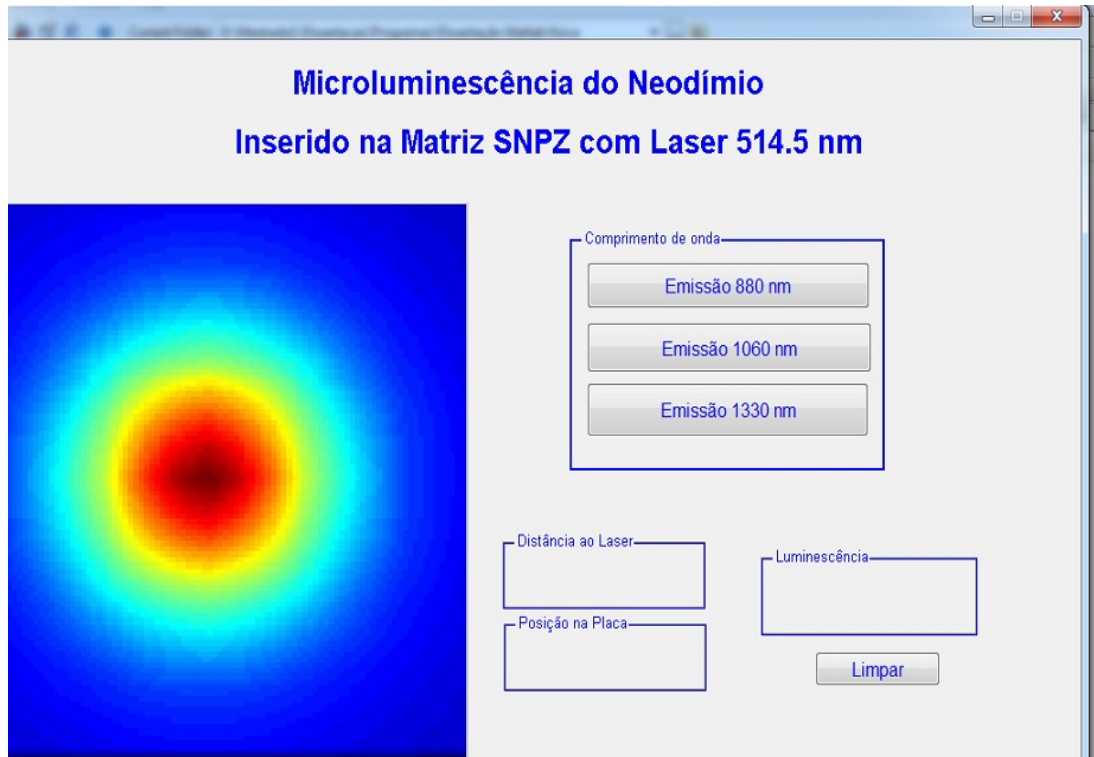


Figura 4.18: Programa para o cálculo da Luminescência.

4.4 Sistema p-fuzzy Aplicado ao Cálculo do Valor da Potência

No modelo p-fuzzy as variáveis estão correlacionadas com suas variações por uma base de regras fuzzy que têm como entrada as variáveis de estado e como saída as variações [1]. A potência de emissão nos pontos do plano na superfície da amostra vítrea é modelada pela equação diferencial parcial dada por [15]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - L = 0.$$

Desta forma, o SBRF obtido pode ser visto como um modelo p-fuzzy cujas entradas são as variáveis x e y enquanto a saída é uma aproximação da segunda derivada parcial em relação a x e y da potência no ponto (x, y) . Utilizando o modelo p-fuzzy e o método de integração de Simpson para integral dupla, calcula-se a potência $u(x, y)$ para cada ponto da amostra vítrea. As Figuras 4.19, 4.20 e 4.21 apresentam as soluções fuzzy em cada ponto (x, y) , para cada uma das emissões.

Relacionando os valores da potência obtida com os valores da luminescência obtemos, através

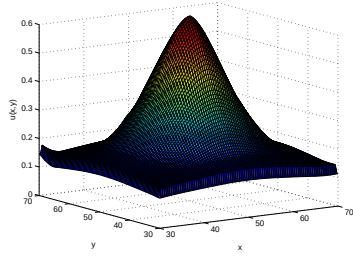


Figura 4.19: Aproximação de $u(x,y)$ utilizando o modelo p-fuzzy, emissão 880nm.

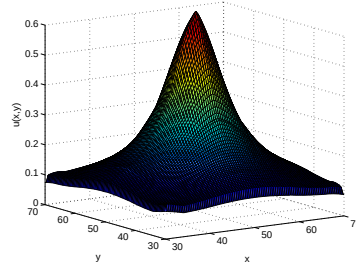


Figura 4.20: Aproximação de $u(x,y)$ utilizando o modelo p-fuzzy, emissão 1060nm.

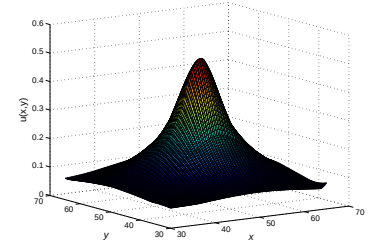


Figura 4.21: Aproximação de $u(x,y)$ utilizando o modelo p-fuzzy, emissão 1330nm.

do método de mínimos quadrados, o ajuste por retas para o conjunto de dados de cada tipo de emissão do laser.

Para a emissão do laser 880nm obtemos o melhor ajuste dado pela equação da reta $L(u) = 1.5439u + 0.0067$. As retas obtidas para as emissões 1060nm e 1330nm são, respectivamente, $L(u) = 1.5490u + 0.0042$ e $L(u) = 1.5511u + 0.0035$. Os gráficos lineares são apresentados na Figura 4.22.

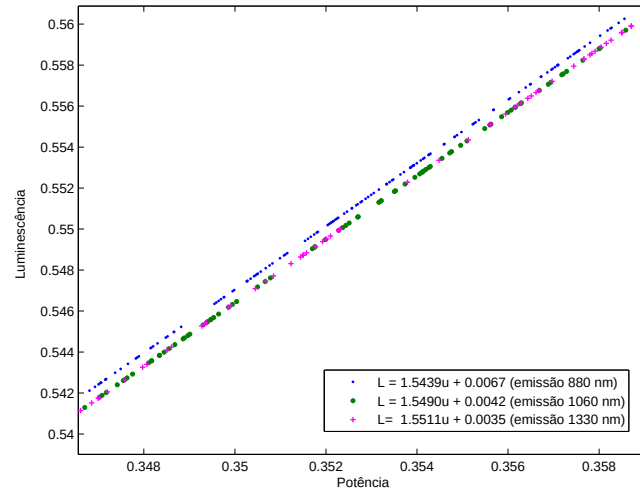


Figura 4.22: Luminescência em função da potência para as emissões 880nm, 1060nm e 1330nm.

A linearidade da relação entre a luminescência e a potência obtida através do modelo fuzzy confirma a confiabilidade das aproximações, sendo coerente com a homogeneidade da amostra utilizada.

O estudo desenvolvido, neste capítulo, demonstra a aplicabilidade do SBRF para modelar a luminescência em todos os pontos do plano na superfície da amostra vítrea, particularmente nos pontos próximos ao ponto de incidência do laser de excitação. Observa-se que a discrepância

entre os valores medidos e os valores obtidos através do modelo fuzzy, nestes pontos, é inferior a 3.6%, evidenciando o seu potencial para determinar aproximações do valor da luminescência espacial utilizando outras amostras.

Neste sentido ressaltamos que o método proposto possibilita o tratamento da luminescência nos pontos do plano da superfície da amostra vítrea próximos da incidência do laser, resultado de grande importância para a pesquisa científica, pois este tratamento não era possível utilizando a equação (4.2) encontrada em [28] e [29].

Os modelos construídos podem ser utilizados através do ambiente computacional. A interface desenvolvida facilita o acesso ao valor da luminescência em qualquer ponto da placa para as diferentes emissões. A interface apresenta os modelos desenvolvidos para as três emissões de íons de Neodímio, assim os dados podem ser facilmente comparados sem a necessidade de equações ou métodos algébricos.

A partir do modelo fuzzy obtido pode-se ainda determinar aproximações para a potência em todos os pontos da malha. A relação existente entre a potência e a luminescência obtidas através dos modelos propostos está coerente com os resultados apresentados na literatura, evidenciando a confiabilidade dos modelos construídos.

O conhecimento adquirido neste estudo permitirá o desenvolvimento de SBRF para modelar emissões de outros materiais luminescentes.

Conclusão

A teoria de conjuntos fuzzy tem sido amplamente aplicadas em várias áreas. Conforme apresentado no capítulo introdutório, atualmente esta teoria tem sido utilizada com grande êxito no estudo de fenômenos descritos por equações diferenciais ordinárias e parciais.

Ao longo desta dissertação foi apresentado um estudo da teoria fuzzy aplicada às equações diferenciais parciais. Essa teoria oferece uma alternativa para o desenvolvimento de sistemas baseados em regras fuzzy, particularmente sistemas p-fuzzy, aplicados em situações cuja modelagem é difícil pela existência de incertezas e imprecisões. Muitos destas situações podem ser modeladas e solucionadas pelo uso de sistemas p-fuzzy.

É possível desenvolver sistemas p-fuzzy relacionando, através da base de regras, as variáveis de estado com suas variações parciais. Neste trabalho propomos que as funções de pertinência e a base de regras sejam obtidas a partir das características do fenômeno estudado. Assim as relações existentes entre as variáveis e suas variações parciais são representadas por regras que incorporam as imprecisões do fenômeno em questão.

No capítulo 3 utilizamos os sistemas p-fuzzy na modelagem de sistemas dinâmicos comparando com resultados determinados utilizando a modelagem clássica. Desta análise pode-se concluir que os sistemas p-fuzzy permitem incluir no modelo informações imprecisas e facilitam o processo para obter as aproximações, já que estas podem ser obtidas a partir de dados experimentais. As aproximações obtidas a partir dos sistemas p-fuzzy são coerentes com as soluções obtidas pelos métodos numéricos e analíticos. Os sistemas p-fuzzy mostraram resultados compatíveis aos obtidos numericamente na solução de equações diferenciais parciais elípticas e parabólicas com evolução no tempo.

A aplicação deste método na modelagem de um fenômeno da Física, apresentada no Capítulo 4, demonstra o potencial dos sistemas p-fuzzy e SBRF na modelagem de fenômenos descritos por equações diferenciais parciais, dispensando o equacionamento dos fenômenos estudados. A subjetividade incorporada ao modelo possibilitou o tratamento da luminescência nos pontos próximos da incidência do laser, este tratamento não era possível utilizando os resultados

encontrados em [28] e [29], uma vantagem com relação aos resultados obtidos sem a modelagem fuzzy.

Neste estudo verificamos a aplicabilidade dos sistemas fuzzy e p-fuzzy na modelagem de dados obtidos experimentalmente sem a necessidade de utilizar métodos numéricos para a solução de equações diferenciais.

Analisando os resultados alcançados podemos concluir que a utilização dos sistemas p-fuzzy é sem dúvida, uma ferramenta útil para a modelagem de certos fenômenos que envolvem taxas de variações parciais, inclusive com evolução no tempo.

Outros trabalhos poderão ser desenvolvidos, como por exemplo:

Aplicar os sistemas p-fuzzy na solução de EDPs hiperbólicas com evolução no tempo;

Aplicar sistemas p-fuzzy utilizando o método de inferência de Mamdani no estudo das equações diferenciais parciais;

Aplicar os sistemas p-fuzzy para modelar emissões de outros materiais luminescentes.

Estudar a estabilidade os sistemas p-fuzzy aplicados às EDPs.

Referências Bibliográficas

- [1] BARROS, L. C.; BASSANEZI, R. C.; *Tópicos de Lógica Fuzzy e Biomatemática*, IMECC, Universidade Estadual de Campinas, São Paulo, 2006.
- [2] BASSANEZI, R. C.; *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática*, 2 ed., Edit. Contexto, São Paulo, 2004.
- [3] BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N.; *Modelagem matemática no ensino*, Editora Contexto, São Paulo, 2000.
- [4] CECCONELLO, M. S.; *Modelagem Alternativa para Dinâmica Populacional: Sistemas Dinâmicos Fuzzy*, Dissertação de Mestrado, IMECC, Universidade Estadual de Campinas, São Paulo, 2006.
- [5] CUNHA, M. C. C.; *Métodos Numéricos*, Editora da Unicamp, São Paulo, 2000.
- [6] CHEN, Y. Y.; CHANG, Y. T.; CHEN, B. S.; *Fuzzy Solutions to Partial Differential Equations: Adaptive Approach*, IEEE Transactions on Fuzzy Systems, Vol. 17, nº1, 2009.
- [7] FERREIRA, D. P. L.; *Análise de Diversas Configurações de Controladores Nebulosos*, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, 1997.
- [8] FERREIRA, D. P. L.; JAFELICE, R. M.; *Modelo p-Fuzzy Aplicado às Equações Diferenciais Parciais*, Anais do Congresso Brasileiro de Sistemas Fuzzy, 2010.
- [9] FERREIRA, D. P. L.; JAFELICE, R. M.; SERQUEIRA, E. O. *Sistemas Fuzzy Aplicados ao Estudo da Luminescência de Íons de Neodímio*, Congresso de Matemática Aplicada e Computacional da Região Sudeste, CMAC-SE, 2011 (aceito).
- [10] FRANCO, N. B.; *Cálculo Numérico*, Ed. Pearson Prentice Hall, São Paulo, 2006.
- [11] JAFELICE, R. M.; BARROS, L. C.; BASSANEZI, R. C.; GOMIDE, F.; *Teoria de Conjuntos Fuzzy com Aplicações*, Uma Publicação da SBMAC, Ed. Plêiade, 17, 2005.

- [12] JAFELICE, R. M.; ALMEIDA, C.; MEYER, J. F. C. A.; VASCONCELOS, H. L.; *Fuzzy Parameters in a Partial Differential of Equation Model for Population Dispersal of Leaf-cutting Ants*, Nonlinear Analysis: Real World Applications, 12, 2011, 3397-3412.
- [13] JANG, J. S. R.; *ANFIS: Adaptive-Network-based Fuzzy Inference Systems*, IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, 23, 1993, 665-685.
- [14] LEITE, J.; BASSANEZI, R. C.; *Sistemas Dinâmicos Fuzzy Aplicados a Sistemas Difusivos*, Biomatemática 20, 2010.
- [15] HEALD, M. A.; MARION, J. B.; *Classical Electromagnetic Radiation*, Third Edition, Saunders College Publishing, 1995.
- [16] MATLAB REFERENCE. *Fuzzy Logic Toolbox*, 2005.. Disponível em <http://www.mathworks.com/access/helpdesk/help/toolbox/fuzzy/index.htm>. Acesso em julho de 2011.
- [17] OLIVEIRA, C. C.; MELO, P. H. C.; JAFELICE, R. M.; *Solução de uma Equação Diferencial com Parâmetro Fuzzy: Uma colcha no varal*. In: Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional 33, 2010, Anais do CNMAC, Publicação SBMAC.
- [18] MISSIO, M.; *Modelos de EDP Integrados a Lógica Fuzzy e Métodos Probabilísticos no Tratamento de Incertezas: um aplicação à febre aftosa em bovinos*, IMECC, Universidade Estadual de Campinas, São Paulo, 2008.
- [19] MONTE A. F. G.; CRUZ J. M. R.; MORAIS P. C.; *An experimental design for microluminescencia*, Rev. Sci. Instrum., 68, 1997, 3890-3892.
- [20] OBERGUGGENBERGER, M.; *Fuzzy and Weak Solutions to Differential Equations*, Proceedings of the 10th International Conference, IPMU, 2004.
- [21] PEDRYCZ, W.; GOMIDE, F.; *An Introduction to Fuzzy Sets: Analysis and design*, The MIT Press, Massachusetts, 1998.
- [22] MANDANI, E. H.; ASSILIAN, S.; *An experiment in linguistic synthesis with a fuzzy logic controller*, International Journal Man-Machine Studies, 7, 1975, 1-13.
- [23] PEIXOTO, M. S.; *Sistemas Dinâmicos e Controladores Fuzzy: um estudo da dispersão da morte súbita dos citros em São Paulo*, Tese de Doutorado, IMECC, Universidade Estadual de Campinas, São Paulo, 2005.

- [24] SANTOS, L. R.; *Estratégias para Controle de Pragas: sistemas p-fuzzy com controle híbrido*, Dissertação de Mestrado, IMECC, Universidade Estadual de Campinas, São Paulo, 2008.
- [25] RICARD, M. R.; GONZÁLES, C. T.; BASSANEZI, R. C.; *Traveling Waves for a Model of Direct Transmission with Heterogeneity*, Proceedings of the 2005 International Symposium on Mathematical and Computational Biology, 2005.
- [26] RICARD, M. R.; GONZÁLES, C. T.; BASSANEZI, R. C.; *Epidemiological Model with Fast Dispersion*, Proceedings of the BIOMAT, 2005.
- [27] SPERANDIO, D.; MENDES, J.T.; SILVA, L.H.M.; *Cálculo Numérico - Características Matemáticas e Computacionais dos Métodos Numéricos*, Ed. Pearson/Prentice Hall, São Paulo, 2003.
- [28] SERQUEIRA, E. O.; DANTAS, N. O.; MORAIS, C. P.; MONTE, A.; *Mean free path for excitation energy migration in Nd³⁺ doped glasses as a function of concentration*, Journal of Applied. Physics, International, 99, 2006.
- [29] SERQUEIRA, E. O.; DANTAS, N. O.; MORAIS, C. P.; MONTE, A.; *Spatial energy transfer in Nd³⁺ doped glasses as a function of concentration*, Journal of Non-Crystalline Solids, 352, 2006.
- [30] TAKAGI, T.; SUGENO, M.; *Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control*, IEEE TRans. Systems Man Cybernetics, 15 1985, 116-132.
- [31] SILVA, J. S. M.; *Análise de Estabilidade de Sistemas Dinâmicos P-Fuzzy com Aplicações em Biomatemática*, Tese de Doutorado, IMECC, Universidade Estadual de Campinas, São Paulo, 2005.
- [32] ZADEH L. A. *Fuzzy Sets*, Information and Control 8(3), 1965.