

RENATA FERREIRA MARTINS ROCHA

**MODELAGEM MATEMÁTICA DO SPOOL 3D EM
ELEMENTOS FINITOS**



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA**

2017

RENATA FERREIRA MARTINS ROCHA

**MODELAGEM MATEMÁTICA DO SPOOL 3D EM ELEMENTOS
FINITOS**

Monografia apresentada à Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para obtenção do título de **BACHAREL EM ENGENHARIA AERONÁUTICA.**

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos e Vibração.

Orientador: Prof. Dr. João Marcelo Vedovoto

Uberlândia – MG

2017

AGRADECIMENTOS

À Universidade Federal de Uberlândia e à Faculdade de Engenharia Mecânica pela oportunidade de realizar este Curso.

Aos professores Aldemir Aparecido Cavalini Junior e João Marcelo Vedovoto pelas oportunidades e por toda ajuda.

À Petrobras pelo apoio financeiro.

À minha família, ao meu namorado e aos meus amigos pelos conselhos, pelo apoio e pela motivação.

ROCHA, R. F. M. Modelagem Matemática do Spool 3D em Elementos Finitos. 2017. 40 f. Monografia, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia.

Resumo

O objetivo deste trabalho é desenvolver a modelagem matemática do Spool 3D em elementos finitos e verificar, com o software Ansys®, o código escrito em linguagem Fortran90 em termos das frequências naturais e das respostas temporais do Spool. O método de elementos finitos tem sido muito utilizado na solução de problemas estruturais porque oferece resultados muito satisfatórios. Os resultados obtidos neste trabalho serão utilizados futuramente em um problema de interação fluido-estrutura envolvendo o Spool submerso em águas marítimas. Por esse fato, esse trabalho apresenta uma breve descrição a respeito dos fenômenos que fazem parte do tema interação fluido-estrutura e a importância dessa área de estudo. Esse trabalho apresenta ainda uma breve introdução ao método de elementos finitos e expõe um pouco mais a respeito do Spool e para que essa estrutura é utilizada. Por último, esse trabalho apresenta a verificação do código em Fortran90 com o software Ansys® a qual mostrou resultados satisfatórios, com pequenos erros nas respostas temporais que podem ser justificados com base nas diferentes técnicas de integração numérica que as duas plataformas utilizadas na verificação do código apresentam.

Palavras Chave: Elementos Finitos. Análise Transiente. Frequências Naturais. Estruturas Submersas. Interação Fluido-Estrutura.

LISTA DE SÍMBOLOS

β	constante de amortecimento proporcional associada à matriz de rigidez
θ	rotação em torno de Z
λ	constante de amortecimento proporcional associada à matriz de massa
$\mathbf{\Lambda}$	matriz dos cossenos diretores definida pela Eq. (2.42)
ν	coeficiente de Poisson
ρ	massa por unidade de volume
φ	rotação em torno de X
ϕ	rotação em torno de Y
ϑ	variável que traduz o efeito de cisalhamento
CFD	Computational Fluid Dynamics
d_e	diâmetro externo da estrutura do Spool
d_i	diâmetro interno da estrutura do Spool
$\mathbf{D}$	matriz de amortecimento
$\mathbf{D}_p$	matriz de amortecimento proporcional
E	módulo de Young
f_{axial}	força axial
$\mathbf{F}_{fluido}$	vetor das forças produzidas pelo fluido
G	módulo de cisalhamento
I	momento de inércia de área da seção transversal da viga
J	momento polar de inércia
k	coeficiente de forma da seção ao cisalhamento
$\mathbf{K}$	matriz de rigidez
$\mathbf{K}_A$	matriz de rigidez associada aos movimentos de translação ao longo do eixo Y
$\mathbf{K}_c$	matriz de rigidez associada aos movimentos das direções X e Z
$\mathbf{K}_e$	matriz de rigidez do elemento finito de viga
$\mathbf{K}_{e,0}$	matriz de rigidez do elemento finito de viga escrita em R_0
$\mathbf{K}_f$	matriz geométrica

$\mathbf{K}_{fe}$	matriz de rigidez geométrica do elemento finito de viga
$\mathbf{K}_{fe,0}$	matriz de rigidez geométrica do elemento finito de viga escrita em R_0
$\mathbf{K}_R$	matriz de rigidez associada aos movimentos de rotação em torno do eixo Y
$\mathbf{K}_S$	matriz definida pela Eq. (2.32)
l	cosseno diretor em relação ao eixo X
L	comprimento do elemento finito de viga
m	cosseno diretor em relação ao eixo Y
$\mathbf{M}$	matriz de massa
$\mathbf{M}_A$	matriz de massa associada aos movimentos de translação da direção Y
$\mathbf{M}_e$	matriz de massa do elemento finito de viga
$\mathbf{M}_{e,0}$	matriz de massa do elemento finito de viga escrita em R_0
$\mathbf{M}_R$	matriz de massa associada aos movimentos de rotação da direção Y
$\mathbf{M}_S$	matriz de massa associada aos movimentos de translação das direções X e Z
$\mathbf{M}_T$	matriz de massa associada aos movimentos de rotação das direções X e Z
n	cosseno diretor em relação ao eixo Z
$\mathbf{N}(y)$	vetor formado pelos polinômios de interpolação do elemento finito de viga
$\mathbf{q}$	vetor de deslocamentos
$\mathbf{q}_0$	vetor de deslocamentos nodais escrito em R_0
$\mathbf{q}_\phi$	vetor de graus de liberdade definido pela Eq. (2.17)
$\mathbf{q}_u$	vetor de graus de liberdade definido pela Eq. (2.4)
$\mathbf{q}_v$	vetor de graus de liberdade definido pela Eq. (2.16)
$\mathbf{q}_w$	vetor de graus de liberdade definido pela Eq. (2.5)
R	referencial fixo ao corpo
R_0	referencial fixo no espaço
S	área da seção transversal
T	energia cinética
$\mathbf{T}$	matriz de transformação definida pela Eq. (2.42)
u	translação ao longo de X
U	energia de deformação
v	translação ao longo de Y
VIV	Vortex Induced Vibration
w	translação ao longo de Z
$\mathbf{W}$	força peso

SUMÁRIO

CAPÍTULO I – Introdução	8
1.1. Spool e objetivos	8
1.2. Interação fluido estrutura	9
1.3. Vibração Induzida por vórtices	13
1.4. Método de elementos finitos	14
CAPÍTULO II – Teoria de Timoshenko para Modelagem 3D	16
2.1. Equação do Movimento	16
2.2. Matrizes Associadas à Energia Cinética	17
2.3. Matrizes Associadas à Energia de Deformação.....	22
2.4. Matriz de Transformação	25
CAPÍTULO III – Verificação do Código Estrutural	28
3.1. Considerações Iniciais	28
3.2. Frequências Naturais.....	30
3.3. Análise Transiente	32
CAPÍTULO IV – Conclusão	38
CAPÍTULO V – Referências Bibliográficas	39

CAPÍTULO I

Introdução

1.1. Spool e objetivos

Um spool é uma tubulação utilizada para transporte de fluidos e geralmente promove a conexão de um sistema mais amplo. Um tubo é um conduto fechado, oco, geralmente de seção transversal circular destinado principalmente ao transporte de fluidos. Uma tubulação é um conjunto de tubos, conexões, válvulas e acessórios.

O Spool 3D considerado nessa monografia é uma tubulação metálica a qual é utilizada para transportar óleo ou gás. Essa estrutura é empregada nas proximidades do fundo do mar e suas extremidades são conectadas a outras partes do sistema em que o Spool está inserido. O material do Spool 3D é o aço API 5L X65 e sua superfície é revestida com pintura epóxi que não é considerada nas análises. O processo de fabricação dos tubos que compõem o Spool 3D é sem costura e a estrutura completa possui aproximadamente 40 metros de comprimento. O Spool 3D é uma estrutura flexível e dessa forma os tubos que compõem a tubulação do sistema são flexíveis.

Os tubos são classificados quanto à sua aplicação, podendo ser considerados do tipo pipe ou do tipo tube. Os tubos do tipo pipe são destinados à condução de fluidos, enquanto que os tubos do tipo tube são destinados à troca térmica, sendo que estes últimos são, portanto, empregados em caldeiras, fornos e trocadores de calor. Dessa forma, os tubos do Spool considerado são tubos do tipo pipe porque são destinados à condução de fluidos como hidrocarbonetos ou vapor com temperaturas de até 400°C, conforme norma de especificação do material. Sua fabricação é sem costura devido ao fato de o Spool transportar fluido que oferece risco ao meio ambiente em caso de vazamento. Nota-se que não há preocupação a respeito da temperatura do fluido que um tubo tipo pipe transporta que não seja manter uma temperatura abaixo daquela em que o material do tubo não resistirá, isso se deve ao

fato de que a função de um tubo tipo pipe é somente transportar o fluido de um ponto a outro.

A principal diferença entre tubos do tipo pipe e tubos do tipo tube está no dimensionamento da espessura. Quando se fala no tube, a preocupação é no sentido de serem respeitadas as dimensões conforme a necessidade da troca térmica da aplicação. A espessura nesse caso não pode ser maior ou menor que determinado valor uma vez que ela precisa ser exata para que a troca térmica aconteça de modo a obedecer aos parâmetros e condições definidos no projeto. O pipe por sua vez necessita de uma espessura mínima que suporte a pressão sob a qual o tubo irá trabalhar e quanto maior for essa espessura maior será a vida útil do tubo.

Essa monografia tem como objetivos realizar a modelagem matemática do Spool 3D em elementos finitos conforme a teoria de Timoshenko para análise de vigas e, também, a verificação do código implementado em Fortran90 com o software comercial Ansys®. Para a verificação do código será realizada a solução das análises modal e transiente do Spool 3D com a teoria de modelagem apresentada. Essa monografia tem o intuito de desenvolver a solução do domínio estrutural (Spool 3D) para que seja utilizada em futura aplicação de interação fluido-estrutura. Dessa forma, na próxima seção serão abordados brevemente os problemas com interação fluido estrutura e suas aplicações. Também será feita uma breve introdução a respeito do método de elementos finitos utilizado.

1.2. Interação fluido estrutura

A interação fluido-estrutura é uma área bastante ampla de estudo. Interação fluido estrutura nada mais é do que o estudo do acoplamento das leis físicas que regem os fluidos e as estruturas. As leis que regem os fluidos são as leis da fluidodinâmica e as leis que regem as estruturas são as leis da dinâmica de estruturas.

O interesse ao se estudar a respeito da interação fluido estrutura se faz a partir do momento em que surge a preocupação do impacto desses fenômenos nas estruturas que a engenharia vem desenvolvendo. Não somente por esse motivo, há também outros, tais como a preocupação em se preservar a qualidade de vida das comunidades quando a interação entre fluido e estrutura provoca, por exemplo, ruído capaz de comprometer o bem-estar.

Dessa maneira, a interação fluido-estrutura se dá, segundo Borges (2007), quando se tem uma estrutura em contato direto com o fluido, caracterizando um problema que abrange diversas áreas da engenharia. A título de exemplo pode-se

citar o famoso caso da ponte Tacoma Narrows, muito comentado até hoje desde o ocorrido em 1940 onde os ventos causaram o colapso da ponte.

Com isso, na área da engenharia civil tem surgido muita preocupação a cerca dos efeitos dos ventos sobre edifícios altos e pontes. Na área da engenharia aeronáutica tem-se a preocupação muito comum com um fenômeno chamado flutter que pode acarretar no colapso de estruturas, como uma asa, também causado pela interação entre fluido e estrutura, em que o fluido nesse caso é o ar em torno da asa.

Na área da engenharia de petróleo, pode-se citar a preocupação que se tem a respeito das tubulações submersas no mar, as quais muitas das vezes são utilizadas para transporte de substâncias nocivas ao meio ambiente e, dessa forma, quando as correntes marítimas interagem com essas tubulações o engenheiro projetista precisa assegurar que a tubulação resistirá e não se romperá, deixando, com isso, vaziar substâncias tóxicas no meio ambiente e gerando enorme prejuízo à empresa petrolífera. Na área da engenharia nuclear tem se procurado armazenar essa forma de energia em estruturas capazes de resistir inclusive a terremotos uma vez que um vazamento em uma usina nuclear fornece sérios riscos à população devido à exposição à radiação química.

Nesse sentido, para impedir que ocorram acidentes graves e prejuízos irreparáveis à comunidade, a engenharia vem trabalhando para desenvolver ferramentas cada vez mais eficazes para a solução das análises de interação fluido estrutura.

As ferramentas das quais se dispõe nos dias de hoje tem se mostrado muito superiores às antigas e continuam em processo de evolução na busca de resultados cada vez mais precisos, e uma vez que a solução numérica de problemas de interação fluido estrutura tem alto custo computacional, o desenvolvimento é também no sentido tecnológico e, com isso, objetiva-se obter resultados cada vez mais precisos, em um menor espaço de tempo e com o menor custo computacional possível.

As análises de interação fluido estrutura podem ser separadas em dois métodos, o método de acoplamento fraco e o método de acoplamento forte. O método de acoplamento fraco é o mais simples sendo o primeiro método desenvolvido para esse tipo de análise e é pouco preciso embora apresente menor custo computacional.

No método de acoplamento fraco, basicamente, é realizada uma análise do fluido em um software de CFD e os carregamentos gerados são exportados para uma análise de elementos finitos estrutural. O contrário também é feito, resolvendo as equações da estrutura e exportando para uma análise de CFD. O principal problema desse método é evidente uma vez que ele não garante a resolução da interação fluido estrutura de fato porque quando a estrutura se deforma devido ao carregamento do

fluido sabe-se que essas deformações da estrutura provocam alterações no fluido que são significativas para uma análise correta. Também as alterações que a estrutura provoca no fluido fazem com que o fluido exerça novas excitações na estrutura devido à mudança de comportamento do fluido. Tudo isso precisa ser estimado por meio das análises para assegurar o bom funcionamento das obras de engenharia.

Dessa forma surgiu a necessidade de um processo iterativo, ou seja, um processo que permite a comunicação em dois sentidos. O método de acoplamento forte, embora apresente um custo computacional maior, tem se mostrado muito superior ao método de acoplamento fraco porque através dele se conseguiu promover um processo iterativo.

No método de acoplamento forte é realizada uma análise de CFD que então é exportada para a análise estrutural. Os deslocamentos da análise estrutural são obtidos e exportados para que uma nova análise de CFD seja realizada. Essa nova análise de CFD é novamente exportada para a análise estrutural e o ciclo se repete. Esse ciclo precisa ser realizado quantas vezes forem necessárias até que a convergência seja alcançada. O detalhamento dos métodos não será apresentado porque não faz parte do escopo deste trabalho.

Os fenômenos causados pela interação fluido-estrutura são muitos. Naudascher and Rockwell (1994) dividiu esses fenômenos em três grupos principais, a saber, Induções Externas de Excitação (EIE), Excitações Induzidas por Instabilidade (IIE) e Excitações Induzidas por Movimento (MIE).

Segundo Borges (2007), EIE são flutuações de velocidade ou pressão do escoamento e que não foram causadas pela estrutura ou pelo movimento dessa, contudo, tais flutuações excitam a estrutura. Um exemplo muito conhecido disso é o fenômeno chamado buffeting. Segundo Fernandes (2016), o buffeting é um fenômeno caracterizado pelo regime de vibração forçada ocasionada pelo desprendimento de esteiras de vórtices à montante da estrutura. Esse fenômeno pode levar à ressonância quando o desprendimento dos vórtices se der de maneira periódica e a frequência coincidir com uma das frequências naturais da estrutura.

Ainda assim, segundo Hirsch (1994), mesmo que a ressonância não ocorra, os problemas relativos à fadiga do material mostram-se de grande importância. Como um exemplo prático de buffeting pode-se citar, no ramo da aeronáutica, as aeronaves de alta manobrabilidade. É muito comum a ocorrência de buffeting nesse tipo de aeronave onde se tem vibrações causadas pela esteira gerada por outras partes da aeronave, por exemplo, a interferência da esteira da asa na empenagem.

Conforme Borges (2007), IIE são causadas, na maioria dos casos, por instabilidades oriundas do escoamento. Um escoamento instável é um escoamento

que deixou de ser linear e iniciou a transição à turbulência ou até mesmo já se degenerou em um regime turbulento. Via de regra, quando ocorre uma excitação induzida por instabilidade, a instabilidade do escoamento é inerente ao escoamento criado pela estrutura considerada. Como exemplo pode-se citar o VIV associado ao escoamento marítimo através de estruturas de tubulação submersas no mar. Mais detalhes acerca de VIV serão mostrados na próxima seção. Nesses casos, a simples presença da tubulação provoca a formação de vórtices à jusante do corpo cilíndrico e essa instabilidade, inerente ao escoamento modificado pela estrutura, pode causar a vibração da estrutura.

Fontanella (2015), explicou o fenômeno conhecido por vortex shedding na literatura, sendo esse fenômeno associado à ocorrência de VIV. Segundo Fontanella (2015), vortex shedding é caracterizado quando um escoamento atinge uma estrutura e apresenta, com isso, um ponto de descolamento a partir do qual ocorre a formação de uma esteira de vórtices, normalmente alternados de um lado e outro da estrutura. Os vórtices formados provocam flutuação de pressão sobre as faces perpendiculares à direção do vento e apresenta ressonância quando a frequência de emissão dos vórtices coincide com uma das frequências naturais da estrutura. Novamente, não só a ressonância preocupa, mas também a fadiga do material da estrutura que tais oscilações podem causar.

Por último, segundo Borges (2007), MIE são fenômenos que ocorrem devido a uma instabilidade dinâmica de um corpo oscilante, dada por um aumento de energia transferida de um fluxo principal para o oscilador. Um caso de MIE muito conhecido no ramo na engenharia aeronáutica é o flutter.

Segundo Tavares (2009), o fenômeno flutter pode ocorrer, por exemplo, na asa de uma aeronave e para que o fenômeno ocorra depende da velocidade do escoamento incidente sobre o corpo, no caso, a asa.

Tavares (2009) explica que o aumento progressivo dessa velocidade faz com que o amortecimento da estrutura aumente até um ponto máximo a partir do qual ele começa a decair. O valor da velocidade para o qual o amortecimento se anula é definida como velocidade crítica de flutter e, dessa forma, para velocidades maiores do que a velocidade crítica, qualquer perturbação induzirá violentas oscilações instáveis da estrutura.

1.3. Vibração Induzida por vórtices

Vibração induzida por vórtices (VIV) é um fenômeno que ocorre quando o escoamento em torno de uma estrutura se torna instável de maneira inerente ao escoamento perturbado pela estrutura considerada fazendo com que a estrutura vibre devido ao desprendimento de vórtices à jusante do corpo. Ássi (2005) considerou um cilindro e um escoamento transversal ao comprimento do cilindro para explicar esse fenômeno.

Segundo Ássi (2005) o conceito de vibrações induzidas por vórtices é aplicado a corpos rombudos (corpos não são aerodinâmicos) e o desprendimento alternado de vórtices gera um campo de pressões que varia ciclicamente com o tempo. Como uma consequência disso, ocorre flutuação periódica da força transversal de sustentação com frequência igual à frequência de emissão de vórtices. Assim, a força de excitação provocada pelo fluido é produzida através da alternância da emissão de vórtices e flutuação periódica do campo de pressões na superfície do cilindro.

Dessa maneira, conforme explica Ássi (2005), quando um vórtice está sendo formado há uma queda de pressão no seu lado do cilindro, gerando uma força de sustentação nessa direção e em um ciclo completo, a força de sustentação sai do seu máximo positivo, vai para seu máximo negativo (quando o vórtice do lado oposto está sendo formado) e volta a assumir o valor máximo positivo. Tão logo, a flutuação da força de sustentação tem a mesma frequência da emissão dos vórtices.

Ainda segundo Ássi (2005), a flutuação que ocorre também com a força de arrasto provoca vibração longitudinal, contudo, essa vibração longitudinal é menos significativa que a vibração transversal causada pela flutuação da força de sustentação porque a força de arrasto não muda de direção, somente de magnitude e a força de sustentação muda tanto de magnitude como de direção.

A amplitude de oscilação na direção do arrasto é menor (pelo motivo já mencionado) e tem o dobro da frequência porque ao longo de um ciclo, um vórtice de cada lado é emitido e com isso o campo de pressões que causa a força de arrasto é modificado duas vezes.

Segundo Lopes (2006) o fato de a esteira ser periódica foi associado com a formação de vórtices por Bernard em 1908 e com um caminho estável por Von Karman em 1912. Quando um fluido passa por um obstáculo, uma camada limite se forma junto ao obstáculo e a velocidade dessa camada limite varia desde zero, junto ao obstáculo, até o valor característico da velocidade do escoamento. Essa variação de magnitude da velocidade transversal à direção do escoamento significa que há um escoamento rotacional dentro da camada limite.

Conforme a velocidade do escoamento, a camada limite se desprende do obstáculo formando uma esteira de vórtices. É sabido que tal velocidade é associada ao número de Reynolds (Re) que representa a relação entre as forças de inércia e as forças viscosas. Para a aplicação em problemas de estruturas submersas no mar, o número de Reynolds é de aproximadamente 10^5 e, segundo os estudos de Von Karman datados em 1912, esse valor de número de Reynolds caracteriza um problema de vórtices com desprendimento desorganizados, sendo um fator desafiador para esse caso de estudo.

1.4. Método de elementos finitos

O método de elementos finitos é destinado à resolução de problemas modelados por equações diferenciais sendo uma técnica de análise numérica esse método fornece soluções aproximadas porque ele é, em sua essência, um processo de discretização que propõe transformar um problema infinito-dimensional em finito-dimensional, ou seja, com número finito de incógnitas. Esse método é empregado na resolução de problemas complexos de engenharia onde as soluções analíticas em forma fechada tornam-se inviáveis ou mesmo impossível. Esse método consiste em dividir um determinado domínio de interesse em várias regiões que se conectam entre si sendo essas regiões chamadas de elementos e cada elemento possui determinada quantidade de pontos que podem estar localizados no seu interior ou na sua fronteira. A esses pontos dá-se o nome de nós e ao conjunto composto pelos elementos da discretização do domínio dá-se o nome de malha.

Dessa maneira, as incógnitas do problema são os valores que as variáveis de campo assumem nos nós. A essas incógnitas dá-se o nome de graus de liberdade e a quantidade (finita) de incógnitas do problema é chamada número de graus de liberdade. Com isso, uma vez que se conhecem os valores dos graus de liberdade, o problema se resume agora em resolver aqueles pontos que não são nós, ou seja, no interior dos elementos. Isso é feito através das chamadas funções de interpolação ou funções de forma que fornecem valores aproximados para as variáveis de campo. Por fim, vale ressaltar que devem ser impostas algumas condições para assegurar a continuidade da solução para aqueles nós que pertencem a mais de um elemento.

A principal vantagem em se utilizar o método de elementos finitos para resolução dos problemas envolvendo estruturas de engenharia, é pelo fato de que é o método que apresenta os melhores resultados e isso é explicado pelo fato de que esse método pode empregar elementos de diferentes formas e tamanhos para

discretizar domínios complexos e também pelo fato de que a divisão do contínuo em regiões facilita a modelagem de problemas não homogêneos e ainda esse método possui grande facilidade de ser implementado computacionalmente porque pode ser todo formulado matricialmente.

Os tipos de elementos conhecidos e empregados nesse método são os unidimensionais, os bidimensionais e os tridimensionais. A experiência constatou que o elemento mais conveniente para se utilizar em se tratando de discretização de estruturas que se assemelham de vigas e barras é o elemento unidimensional. Na grande maioria das vezes as funções de interpolação são funções polinomiais devido à facilidade que apresentam para derivação e integração sendo o grau do polinômio correspondente ao número de graus de liberdade por nó. As funções de interpolação devem ainda satisfazer as condições de contorno.

CAPÍTULO II

Teoria de Timoshenko para Modelagem 3D

Esta seção trata da modelagem matemática do Spool 3D em elementos finitos. Para isso é descrita a equação que representa o comportamento dinâmico da estrutura e, conforme a teoria de vigas de Timoshenko, são obtidas as matrizes de massa, rigidez e rigidez geométrica. A matriz de rigidez geométrica é aquela que corresponde ao efeito de uma força de tração aplicada na direção axial da estrutura.

2.1. Equação do Movimento

A equação diferencial que descreve o movimento dinâmico do Spool é dada pela Eq. (2.1).

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \begin{bmatrix} f_{axial} & \mathbf{K}_f \end{bmatrix} \mathbf{q} = \mathbf{W} + \mathbf{F}_{fluido} \quad (2.1)$$

onde $\mathbf{M}$ é a matriz de massa, $\mathbf{D}$ é a matriz de amortecimento (amortecimento proporcional que deve ser somado ao amortecimento devido aos suportes¹), $\mathbf{K}$ é a matriz de rigidez e $\mathbf{K}_f$ representa a matriz geométrica (enrijecimento do sistema devido à força axial f_{axial}). O vetor de deslocamentos é representado por $\mathbf{q}$, a força peso é representada por $\mathbf{W}$ e $\mathbf{F}_{fluido}$ é o vetor das forças produzidas pelo fluido.

¹ Amortecimento proporcional dado por $\mathbf{D}_p = \lambda \mathbf{M} + \beta \mathbf{K}$, com λ e β constantes. (CAVALINI, 2013)

2.2. Matrizes Associadas à Energia Cinética

Em um primeiro momento, o Spool será modelado considerando um elemento finito de viga com seção transversal circular constante com dados diâmetros externo e interno. Assim, será adotado elemento unidimensional de viga. Sendo L o comprimento do elemento finito, conforme a Fig. 2.1, em cada extremidade do elemento existe um nó sendo o nó 1 aquele localizado na origem do sistema e o nó 2 aquele localizado na extremidade oposta. Os graus de liberdade incluem seis deslocamentos (u_1, u_2, v_1, v_2, w_1 e w_2) e seis rotações ($\theta_1, \theta_2, \phi_1, \phi_2, \varphi_1$ e φ_2).

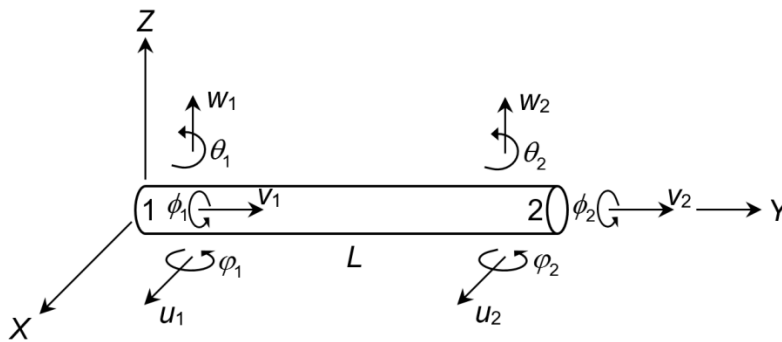


Figura 2.1 – GDL associados ao elemento finito de viga.

As relações entre os deslocamentos u e w e as rotações θ e φ são fornecidas pelas Eqs. (2.1) e (2.2).

$$\varphi = \frac{\partial w}{\partial y}, \quad (2.1)$$

$$\theta = -\frac{\partial u}{\partial y}. \quad (2.2)$$

O vetor de deslocamentos nodais do elemento finito de viga é escrito como na Eq. (2.3).

$$\mathbf{q} = [u_1 \quad v_1 \quad w_1 \quad \theta_1 \quad \phi_1 \quad \varphi_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad w_2 \quad \theta_2 \quad \phi_2 \quad \varphi_2]^T. \quad (2.3)$$

O vetor de deslocamentos nodais inclui os vetores $\mathbf{q}_u$ e $\mathbf{q}_w$, correspondendo aos deslocamentos nas direções X e Z dados pelas Eqs. (2.4) e (2.5), respectivamente.

$$\mathbf{q}_u = [u_1 \quad \theta_1 \quad u_2 \quad \theta_2]^T, \quad (2.4)$$

$$\mathbf{q}_w = [w_1 \quad \varphi_1 \quad w_2 \quad \varphi_2]^T. \quad (2.5)$$

O elemento finito é construído a partir das relações das Eqs. (2.6) e (2.7).

$$u = \mathbf{N}_1(y) \cdot \mathbf{q}_u, \quad (2.6)$$

$$w = \mathbf{N}_2(y) \cdot \mathbf{q}_w. \quad (2.7)$$

Os vetores $\mathbf{N}_1(y)$ e $\mathbf{N}_2(y)$ são formados por coeficientes de equações polinomiais e representam o caso típico de uma viga em flexão, conforme Lalanne e Ferraris (1998). Esses vetores são escritos como nas Eqs. (2.8) e (2.9).

$$\mathbf{N}_1(y) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{3y^2}{L^2} + \frac{2y^3}{L^3} & -y + \frac{2y^2}{L} - \frac{y^3}{L^2} & \frac{3y^2}{L^2} - \frac{2y^3}{L^3} & \frac{y^2}{L} - \frac{y^3}{L^2} \end{bmatrix}, \quad (2.8)$$

$$\mathbf{N}_2(y) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{3y^2}{L^2} + \frac{2y^3}{L^3} & y - \frac{2y^2}{L} + \frac{y^3}{L^2} & \frac{3y^2}{L^2} - \frac{2y^3}{L^3} & -\frac{y^2}{L} + \frac{y^3}{L^2} \end{bmatrix}. \quad (2.9)$$

Segundo Lalanne e Ferraris (1998), a energia cinética T do elemento de viga é dada pela Eq. (2.10).

$$T = \frac{\rho S}{2} \int_0^L (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dy + \frac{I}{2} \int_0^L (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2) dy, \quad (2.10)$$

onde ρ é a massa por unidade de volume, S é a área da seção transversal do eixo e I é o momento de inércia de área da seção transversal da viga. Conforme Cavalini (2013), na Eq. (2.10), a primeira integral representa a energia da viga em flexão e a segunda integral retrata o efeito secundário da inércia de rotação (Rayleigh).

Substituindo as Eqs. (2.6) e (2.7) na Eq. (2.10) e se obtém a Eq. (2.11).

$$T = \frac{\rho S}{2} \int_0^L \left[\dot{\mathbf{q}}_u^T \mathbf{N}_1^T \mathbf{N}_1 \dot{\mathbf{q}}_u + \dot{\mathbf{q}}_w^T \mathbf{N}_2^T \mathbf{N}_2 \dot{\mathbf{q}}_w \right] dy + \frac{\rho I}{2} \int_0^L \left[\dot{\mathbf{q}}_u^T \frac{d\mathbf{N}_1^T}{dy} \frac{d\mathbf{N}_1}{dy} \dot{\mathbf{q}}_u + \dot{\mathbf{q}}_w^T \frac{d\mathbf{N}_2^T}{dy} \frac{d\mathbf{N}_2}{dy} \dot{\mathbf{q}}_w \right] dy. \quad (2.11)$$

Substituindo as Eqs. (2.8) e (2.9) na Eq. (2.11) e, após realizar as integrais, chega-se à Eq. (2.12).

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}_u^T \mathbf{M}_1 \dot{\mathbf{q}}_u + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}_w^T \mathbf{M}_2 \dot{\mathbf{q}}_w + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}_u^T \mathbf{M}_3 \dot{\mathbf{q}}_u + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}_w^T \mathbf{M}_4 \dot{\mathbf{q}}_w, \quad (2.12)$$

onde as matrizes $\mathbf{M}_1$ e $\mathbf{M}_2$ são as matrizes clássicas de massa e $\mathbf{M}_3$ e $\mathbf{M}_4$ dão a influência do efeito secundário da inércia de rotação. A aplicação das equações de Lagrange na Eq. (2.12) leva à Eq. (2.13).

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} = (\mathbf{M}_S + \mathbf{M}_T) \ddot{\mathbf{q}}, \quad (2.13)$$

onde as matrizes $\mathbf{M}_S$ e $\mathbf{M}_T$ são obtidas respectivamente das matrizes $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$ e $\mathbf{M}_3$, $\mathbf{M}_4$. Essas matrizes são dadas, segundo Lalanne e Ferraris (1998), pelas Eqs. (2.14) e (2.15).

$$\mathbf{M}_S = \frac{\rho S L}{420} \begin{bmatrix} 156 & 0 & 0 & -22L & 54 & 0 & 0 & 13L \\ & 156 & 22L & 0 & 0 & 54 & -13L & 0 \\ & & 4L^2 & 0 & 0 & 13L & -3L^2 & 0 \\ & & & 4L^2 & -13L & 0 & 0 & -3L^2 \\ & & & & 156 & 0 & 0 & 22L \\ & & & & & 156 & -22L & 0 \\ & & & & & & 4L^2 & 0 \\ & & & & & & & 4L^2 \end{bmatrix}, \quad (2.14)$$

SIM.

$$\mathbf{M}_T = \frac{\rho I}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ & & 4L^2 & 0 & 0 & -3L & -L^2 & 0 \\ & & & 4L^2 & 3L & 0 & 0 & -L^2 \\ & & & & 36 & 0 & 0 & 3L \\ & & & & & 36 & -3L & 0 \\ & & & & & & 4L^2 & 0 \\ SIM. & & & & & & & 4L^2 \end{bmatrix}. \quad (2.15)$$

Segundo Imbert (1995) e Lalanne e Ferraris (1998), o vetor de deslocamentos nodais do elemento finito da viga dado pela Eq. (2.3) inclui os vetores $\mathbf{q}_v$ e $\mathbf{q}_\phi$ dados pelas Eqs. (2.16) e (2.17), respectivamente, ambos correspondendo aos movimentos na direção Y.

$$\mathbf{q}_v = [v_1 \quad v_2]^T, \quad (2.16)$$

$$\mathbf{q}_\phi = [\phi_1 \quad \phi_2]^T. \quad (2.17)$$

O elemento finito é construído a partir das seguintes relações dadas pelas Eqs. (2.18) e (2.19).

$$v = \mathbf{N}_3(y) \cdot \mathbf{q}_v, \quad (2.18)$$

$$\phi = \mathbf{N}_3(y) \cdot \mathbf{q}_\phi. \quad (2.19)$$

O vetor $\mathbf{N}_3(y)$ é dado pela Eq. (2.20), conforme Imbert (1995) e Lalanne e Ferraris (1998).

$$\mathbf{N}_3(y) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{y}{L} & \frac{y}{L} \end{bmatrix}. \quad (2.20)$$

A energia cinética T do elemento de viga correspondendo aos movimentos na direção Y é dada pela Eq. (2.21).

$$T = \frac{\rho S}{2} \int_0^L \dot{v}^2 dy + \frac{I}{2} \int_0^L \dot{\zeta}^2 dy. \quad (2.21)$$

Na Eq. (2.21), a primeira integral representa a energia da viga em movimento axial e a segunda integral retrata o efeito da inércia devido à torção. Substituindo as Eqs. (2.18) e (2.19) na Eq. (2.21), se obtém a Eq. (2.22).

$$T = \frac{\rho S}{2} \int_0^L \dot{\mathbf{q}}_v^T \mathbf{N}_3^T \mathbf{N}_3 \dot{\mathbf{q}}_v dy + \frac{I}{2} \int_0^L \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{N}_3^T \mathbf{N}_3 \dot{\mathbf{q}} dy. \quad (2.22)$$

Substituindo a Eq. (2.20) na Eq. (2.22) e efetuando as integrais, chega-se à Eq. (2.23).

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}_v^T \mathbf{M}_5 \dot{\mathbf{q}}_v + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}_6 \dot{\mathbf{q}}. \quad (2.23)$$

A aplicação das equações de Lagrange na Eq. (2.23) considerando os vetores $\mathbf{q}_v$ e $\mathbf{q}_\phi$, separadamente, leva às matrizes de massa $\mathbf{M}_A$ e $\mathbf{M}_R$ mostradas na Eq. (2.24).

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} = (\mathbf{M}_A + \mathbf{M}_R) \ddot{\mathbf{q}}. \quad (2.24)$$

As matrizes elementares $\mathbf{M}_A$ e $\mathbf{M}_R$ formuladas apenas para os movimentos na direção Y são apresentadas pelas Eqs. (2.25) e (2.26), segundo Lalanne e Ferraris (1998).

$$\mathbf{M}_A = \frac{\rho S L}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad (2.25)$$

$$\mathbf{M}_R = \frac{\rho I L}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (2.26)$$

É importante notar que as matrizes $\mathbf{M}_S$, $\mathbf{M}_A$ e $\mathbf{M}_R$ (Eqs. (2.14), (2.25) e (2.26), respectivamente) devem ser combinadas ordenadamente conforme o vetor de deslocamentos nodais (veja Eq. (2.3)) de forma a representar o elemento finito da viga

mostrado na Fig. 2.1. Adicionalmente, a matriz $\mathbf{M}_T$ (Eq. (2.15)) deve ser expandida de forma conveniente utilizando entradas nulas.

2.3. Matrizes Associadas à Energia de Deformação

Segundo Lalande e Ferraris (1998), a energia de deformação do elemento de viga mostrado na Fig. 2.1 considerando apenas os movimentos nas direções X e Z é dada pela Eq. (2.27).

$$U = \frac{EI}{2} \int_0^L \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy + \frac{f_{axial}}{2} \int_0^L \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dy, \quad (2.27)$$

onde E é o módulo de elasticidade ou módulo de Young do material da viga.

Substituindo as Eqs. (2.6) e (2.7) na Eq. (2.27), se obtém a Eq. (2.28).

$$U = \frac{EI}{2} \int_0^L \left[\mathbf{q}_u^T \frac{d^2 \mathbf{N}_1^T}{dy^2} \frac{d^2 \mathbf{N}_1}{dy^2} \mathbf{q}_u + \mathbf{q}_w^T \frac{d^2 \mathbf{N}_2^T}{dy^2} \frac{d^2 \mathbf{N}_2}{dy^2} \mathbf{q}_w \right] dy + \frac{f_{axial}}{2} \int_0^L \left[\mathbf{q}_u^T \frac{d \mathbf{N}_1^T}{dy} \frac{d \mathbf{N}_1}{dy} \mathbf{q}_u + \mathbf{q}_w^T \frac{d \mathbf{N}_2^T}{dy} \frac{d \mathbf{N}_2}{dy} \mathbf{q}_w \right] dy. \quad (2.28)$$

Substituindo as Eqs. (2.8) e (2.9) na Eq. (2.28) e efetuando as integrais, chega-se à Eq. (2.29).

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{q}_u^T \mathbf{K}_1 \mathbf{q}_u + \frac{1}{2} \mathbf{q}_w^T \mathbf{K}_2 \mathbf{q}_w + \frac{1}{2} \mathbf{q}_u^T \mathbf{K}_3 \mathbf{q}_u + \frac{1}{2} \mathbf{q}_w^T \mathbf{K}_4 \mathbf{q}_w, \quad (2.29)$$

onde as matrizes $\mathbf{K}_1$ e $\mathbf{K}_2$ são as matrizes clássicas de rigidez e $\mathbf{K}_3$ e $\mathbf{K}_4$ são matrizes resultantes do efeito da força axial f_{axial} . A aplicação das equações de Lagrange na Eq. (2.29) leva à Eq. (2.30).

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}} = (\mathbf{K}_c + f_{axial} \mathbf{K}_f) \mathbf{q}. \quad (2.30)$$

Segundo Lalande e Ferraris (1998), a matriz elementar $\mathbf{K}_c$ formulada a partir da energia de deformação da viga considerando apenas os movimentos nas direções X e

Z é apresentada pela Eq. (2.31) e é obtida através das matrizes $\mathbf{K}_1$ e $\mathbf{K}_2$. O efeito do esforço cisalhante, segundo a teoria de vigas de Timoshenko, deve ser incluído na matriz $\mathbf{K}_c$ seguindo a formulação apresentada por Imbert (1995).

$$\mathbf{K}_c = \frac{EI}{L^3(1+\vartheta)} \mathbf{K}_s. \quad (2.31)$$

Em que a matriz $\mathbf{K}_s$ é dada pela Eq. (2.32).

$$\mathbf{K}_s = \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & -6L & -12 & 0 & 0 & -6L \\ & 12 & 6L & 0 & 0 & -12 & 6L & 0 \\ & & (4+\vartheta)L^2 & 0 & 0 & -6L & (2-\vartheta)L^2 & 0 \\ & & & (4+\vartheta)L^2 & 6L & 0 & 0 & (2-\vartheta)L^2 \\ & & & & 12 & 0 & 0 & 6L \\ & & & & & 12 & -6L & 0 \\ & & & & & & (4+\vartheta)L^2 & 0 \\ SIM. & & & & & & & (4+\vartheta)L^2 \end{bmatrix}. \quad (2.32)$$

O efeito do cisalhamento é dado pela variável ϑ e sua definição é dada pela Eq. (2.33).

$$\vartheta = \frac{12EI}{kGSL^2}. \quad (2.33)$$

Neste caso, G é o módulo de cisalhamento do material do eixo e k é o coeficiente de forma da seção ao cisalhamento, conforme Hutchinson, 2001. O coeficiente de forma da seção circular é definido pela Eq. (2.34).

$$k = \frac{6(1+\nu)^2}{7+12\nu+4\nu^2}, \quad (2.34)$$

onde ν é o coeficiente de Poisson.

A matriz elementar $\mathbf{K}_f$ é dada pela Eq. (2.35).

$$\mathbf{K}_f = \frac{1}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ & 36 & 36L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ & & 4L^2 & 0 & 0 & -3L & -L^2 & 0 \\ & & & 4L^2 & 3L & 0 & 0 & -L^2 \\ & & & & 36 & 0 & 0 & 3L \\ & & & & & 36 & -3L & 0 \\ & & & & & & 4L^2 & 0 \\ SIM. & & & & & & & 4L^2 \end{bmatrix}. \quad (2.35)$$

Considerando o elemento de viga mostrado na Fig. 2.1 e apenas os movimentos na direção Y , a energia de deformação do elemento de viga é dada pela Eq. (2.36).

$$U = \frac{ES}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 dy + \frac{GJ}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 dy, \quad (2.36)$$

onde J é o momento polar de inércia da viga. Na Eq. (2.36), a primeira integral representa a energia da viga em movimento axial e a segunda integral retrata a torção.

Substituindo as Eqs. (2.18) e (2.19) na Eq. (2.36), se obtém a Eq. (2.37).

$$U = \frac{ES}{2} \int_0^L \mathbf{q}_v^T \mathbf{N}_3^T \mathbf{N}_3 \mathbf{q}_v dy + \frac{GJ}{2} \int_0^L \mathbf{q}_\phi^T \mathbf{N}_3^T \mathbf{N}_3 \mathbf{q}_\phi dy. \quad (2.37)$$

Substituindo a Eq. (2.20) na Eq. (2.37) e efetuando as integrais, chega-se à Eq. (2.38).

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{q}_v^T \mathbf{K}_5 \mathbf{q}_v + \frac{1}{2} \mathbf{q}_\phi^T \mathbf{K}_6 \mathbf{q}_\phi. \quad (2.38)$$

A aplicação das equações de Lagrange na Eq. (2.38) considerando os vetores $\mathbf{q}_v$ e $\mathbf{q}_\phi$, separadamente, leva à Eq. (2.39).

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}} = (\mathbf{K}_A + \mathbf{K}_R) \mathbf{q}. \quad (2.39)$$

As matrizes elementares $\mathbf{K}_A$ e $\mathbf{K}_R$ formuladas apenas para os movimentos na direção Y são apresentadas pelas Eqs. (2.40) e (2.41), conforme Imbert (1995) e Lalanne e Ferraris (1998).

$$\mathbf{K}_A = \frac{ES}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.40)$$

$$\mathbf{K}_R = \frac{GJ}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.41)$$

É importante notar que as matrizes $\mathbf{K}_C$, $\mathbf{K}_A$ e $\mathbf{K}_R$ (Eqs. (2.31), (2.40) e (2.41), respectivamente) devem ser combinadas ordenadamente conforme o vetor de deslocamentos nodais (veja Eq. (2.3)) de forma a representar o elemento finito da viga mostrado na Fig. 2.1. Adicionalmente, a matriz $\mathbf{K}_f$ (Eq. (2.35)) deve ser expandida de forma conveniente utilizando entradas nulas.

2.4. Matriz de Transformação

Na construção do modelo global de elementos finitos do Spool 3D, as matrizes elementares de massa, rigidez e rigidez geométrica formuladas nas seções anteriores (matrizes 12×12 de acordo com a Fig. 2.1) devem ser agrupadas considerando um mesmo sistema de referência $R_0(X_0, Y_0, Z_0)$. Desta forma, o sistema de referência $R(X, Y, Z)$ mostrado na Fig. 2.1 deve ser escrito de maneira conveniente, conforme a posição do elemento finito no espaço tridimensional. A Fig. 2.2 mostra a representação de ambos os sistemas de referência mencionados.

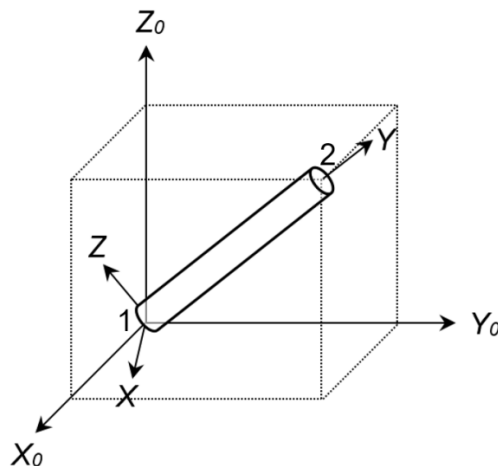


Figura 2.2 – Sistemas de referência associados ao elemento finito de viga.

A transformação das matrizes elementares de massa, rigidez e rigidez geométrica formuladas nas seções anteriores do referencial $R(X,Y,Z)$ para o $R_0(X_0,Y_0,Z_0)$ é realizada através da matriz $\mathbf{T}$ (matriz 12 x 12) apresentada na Eq. (2.42).

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Lambda} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Lambda} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{\Lambda} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{\Lambda} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix}. \quad (2.42)$$

onde $\mathbf{0}$ é uma matriz 3 x 3 com entradas nulas e l_1 , m_1 e n_1 são os cossenos diretores do eixo X em relação aos eixos X_0 , Y_0 , e Z_0 , respectivamente. De maneira análoga, l_2 , m_2 e n_2 são os cossenos diretores do eixo Y em relação aos eixos X_0 , Y_0 , e Z_0 , respectivamente, e l_3 , m_3 e n_3 são os cossenos diretores do eixo Z em relação aos eixos X_0 , Y_0 , e Z_0 , respectivamente.

Dessa forma, os graus de liberdade que definem os deslocamentos nodais do elemento finito de viga (veja a Eq. (2.3)) são representados em $R_0(X_0,Y_0,Z_0)$ como na Eq. (2.43).

$$\begin{aligned} u_{1,0} &= l_1 u_1 + m_1 v_1 + n_1 w_1, & u_{2,0} &= l_1 u_2 + m_1 v_2 + n_1 w_2, \\ v_{1,0} &= l_2 u_1 + m_2 v_1 + n_2 w_1, & v_{2,0} &= l_2 u_2 + m_2 v_2 + n_2 w_2, \\ w_{1,0} &= l_3 u_1 + m_3 v_1 + n_3 w_1, & w_{2,0} &= l_3 u_2 + m_3 v_2 + n_3 w_2, \end{aligned} \quad (2.43)$$

$$\begin{aligned} \theta_{1,0} &= l_1 \theta_1 + m_1 \phi_1 + n_1 \varphi_1, & \theta_{2,0} &= l_1 \theta_2 + m_1 \phi_2 + n_1 \varphi_2, \\ \phi_{1,0} &= l_2 \theta_1 + m_2 \phi_1 + n_2 \varphi_1, & \phi_{2,0} &= l_2 \theta_2 + m_2 \phi_2 + n_2 \varphi_2, \\ \varphi_{1,0} &= l_3 \theta_1 + m_3 \phi_1 + n_3 \varphi_1, & \varphi_{2,0} &= l_3 \theta_2 + m_3 \phi_2 + n_3 \varphi_2. \end{aligned}$$

onde $u_{1,0}$, $v_{1,0}$, ..., $u_{2,0}$, $v_{2,0}$, ... são os graus de liberdade que formam o vetor de deslocamentos nodais do elemento finito da viga representados em $R_0(X_0,Y_0,Z_0)$.

Tão logo, o vetor de graus de liberdade no sistema $R_0(X_0,Y_0,Z_0)$ pode ser dado pela Eq. (2.44).

$$\mathbf{q}_0 = \mathbf{T} \mathbf{q}, \quad (2.44)$$

onde $\mathbf{q}_0$ é o vetor de deslocamentos nodais do elemento finito da viga representado em $R_0(X_0,Y_0,Z_0)$.

Considerando as Eqs. (2.12) e (2.23), a matriz de massa $\mathbf{M}_e$ do elemento finito mostrado na Fig. 2.1 pode ser determinada como mostra a Eq. (2.45).

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}_e \dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}_0^T \mathbf{T}^T \mathbf{M}_e \mathbf{T} \dot{\mathbf{q}}_0. \quad (2.45)$$

Assim, a matriz de massa $\mathbf{M}_{e,0}$ descrita em $R_0(X_0, Y_0, Z_0)$ é dada pela Eq. (2.46).

$$\mathbf{M}_{e,0} = \mathbf{T}^T \mathbf{M}_e \mathbf{T}. \quad (2.46)$$

Considerando as Eqs. (2.29) e (2.38), as matrizes de rigidez $\mathbf{K}_e$ e rigidez geométrica $\mathbf{K}_{fe}$ do elemento finito de viga mostrado na Fig. 2.1 pode ser determinada como na Eq. (2.47).

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K}_e \mathbf{q} + \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K}_{fe} \mathbf{q} = \frac{1}{2} \mathbf{q}_0^T \mathbf{T}^T \mathbf{K}_e \mathbf{T} \mathbf{q}_0 + \frac{1}{2} \mathbf{q}_0^T \mathbf{T}^T \mathbf{K}_{fe} \mathbf{T} \mathbf{q}_0. \quad (2.47)$$

Dessa maneira, as matrizes de rigidez $\mathbf{K}_{e,0}$ e rigidez geométrica $\mathbf{K}_{fe,0}$ descritas em $R_0(X_0, Y_0, Z_0)$ são dadas pela Eq. (2.48).

$$\mathbf{K}_{e,0} = \mathbf{T}^T \mathbf{K}_e \mathbf{T}, \quad (2.48)$$

$$\mathbf{K}_{fe,0} = \mathbf{T}^T \mathbf{K}_{fe} \mathbf{T}.$$

As transformações apresentadas nas Eqs. (2.46) e (2.48) devem ser realizadas para cada elemento finito que compõe o modelo global do Spool, conforme a Eq. (2.1).

CAPÍTULO III

Verificação do Código Estrutural

3.1. Considerações Iniciais

A verificação do código estrutural escrito em linguagem Fortran90 será realizada em termos das frequências naturais e da análise transiente a partir dos resultados obtidos através do *software* Ansys®. A Fig. 3.1 apresenta o desenho esquemático do Spool considerado na verificação.

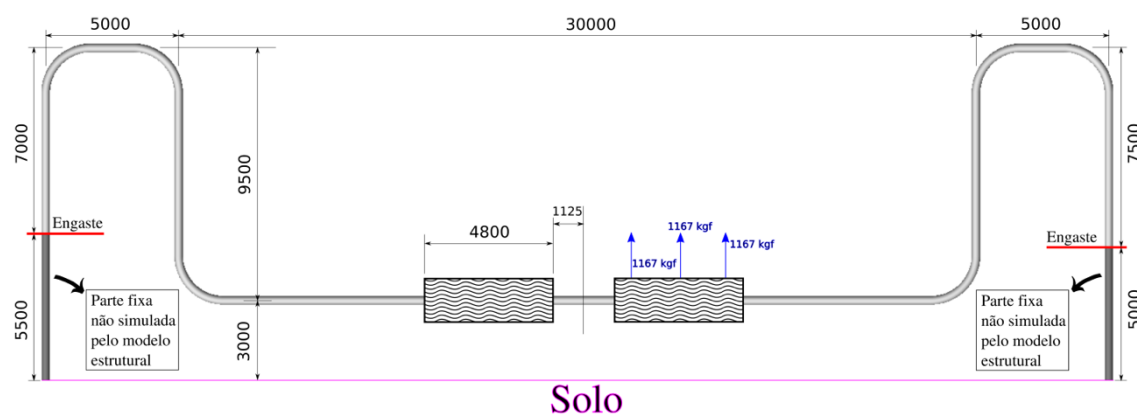


Figura 3.1 – Spool considerado para a verificação do código estrutural (dimensões em milímetros).

A verificação do código é realizada considerando as seguintes hipóteses:

- i) O diâmetro interno da estrutura $d_i = 0,27305$ m;
- ii) O diâmetro externo da estrutura $d_e = 0,32385$ m;
- iii) O revestimento é desconsiderado;
- iv) O módulo de elasticidade do material $E = 207,0 \times 10^9$ Pa;
- v) A densidade do material $\rho = 7850$ kg/m³;
- vi) O coeficiente de Poisson $\nu = 0,29$;
- vii) Os efeitos do fluido são desconsiderados;
- viii) A massa do fluido interno é desconsiderada;
- ix) A pressão exercida pelo fluido interno é desconsiderada;
- x) O sistema é engastado nos locais indicados na Fig. 3.1.

Para a construção da malha, foram utilizados 668 elementos finitos distribuídos uniformemente ao longo da geometria do Spool. A Fig. 3.2 apresenta a discretização adotada no modelo de elementos finitos construído.

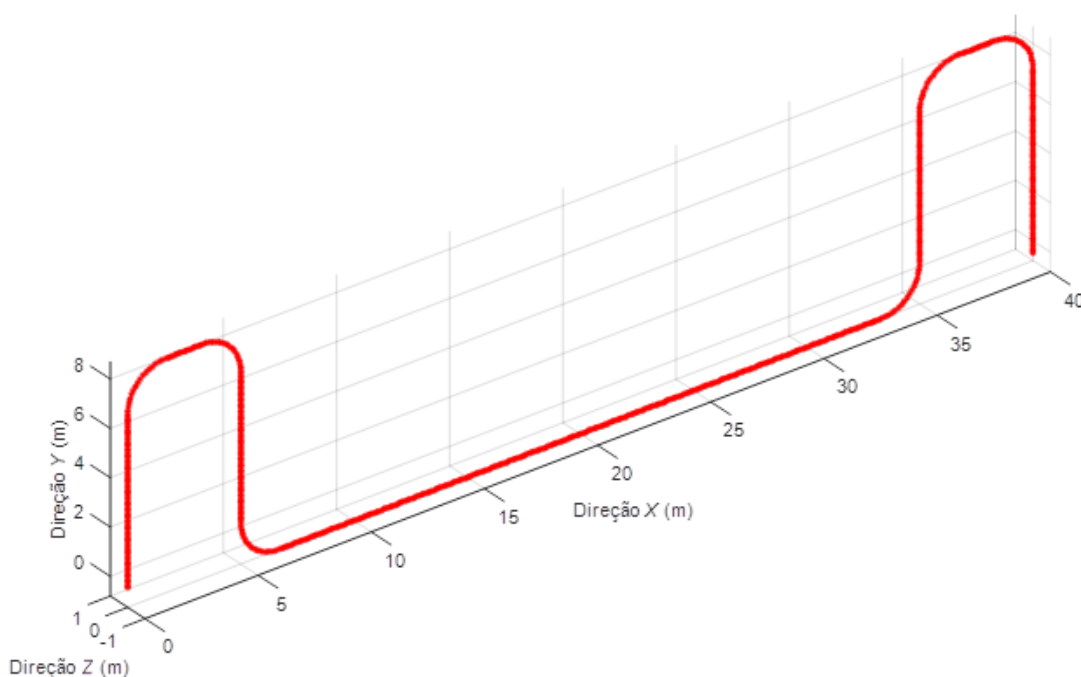


Figura 3.2 – Modelo de elementos finitos do Spool considerado para a verificação do código estrutural.

3.2. Frequências Naturais

A Tab. 3.1 apresenta as 34 primeiras frequências naturais do Spool determinadas através do código estrutural em linguagem Fortran90, anteriormente mencionado, e do software Ansys®. Os erros relativos aos resultados obtidos pelo software Ansys® também são apresentados. É possível observar que as frequências naturais determinadas pelo código escrito em linguagem Fortran90 se aproximaram dos resultados obtidos pelo software Ansys®, apresentado erros inferiores a 1%.

É importante destacar que as análises basearam-se na teoria de vigas de Timoshenko para realização dos cálculos determinados pelo código Fortran90 e pelo software Ansys®.

Tabela 1.1 – Frequências naturais (Hz) do Spool.

Frequências	Ansys®	Fortran90	Erro (%)
1	0,50309	0,50340	0,06225
2	0,96575	0,96435	0,14472
3	1,16190	1,16228	0,03279
4	1,22740	1,22779	0,03209
5	1,64630	1,64570	0,03632
6	1,71890	1,71394	0,28842
7	2,02320	2,02170	0,07400
8	2,52850	2,53092	0,09601
9	2,81400	2,81614	0,07629
10	5,05520	5,05647	0,02516
11	5,38460	5,39379	0,17079
12	5,68900	5,69674	0,13610
13	5,90640	5,91679	0,17592
14	6,56790	6,55618	0,17836
15	6,95080	6,95541	0,06640
16	10,3290	10,3482	0,18664
17	10,4050	10,4288	0,2292
18	15,0050	15,0345	0,19669
19	15,0510	15,0904	0,26235
20	16,9890	17,0302	0,24294
21	17,0060	17,0359	0,17618
22	19,9430	19,9791	0,18118
23	20,0460	20,1062	0,30065
24	23,9330	23,9798	0,19554
25	24,2100	24,2825	0,29970
26	26,8590	26,9373	0,29158
27	27,1820	27,3010	0,43779
28	30,3930	30,5087	0,38076
29	30,6200	30,7845	0,53735
30	37,5190	37,7316	0,56679
31	37,5500	37,7423	0,51214
32	42,4670	42,6546	0,44187
33	42,9350	43,2132	0,64796
34	47,6790	48,0164	0,70781

3.3. Análise Transiente

A Tab. 3.2 apresenta as condições de simulação adotadas para a verificação da resposta transiente do Spool obtida pelo código escrito em linguagem Fortran90 com aquela obtida pelo *software* Ansys®. O sistema foi amortecido a partir de um modelo de amortecimento proporcional e não foi considerado o efeito da gravidade. Para essa análise foi aplicada uma força senoidal com amplitude de 10000 N e frequência de 10 Hz ora na direção X, ora na direção Y e ora na direção Z, compondo, portanto, três simulações, e as respostas foram obtidas, para cada um dos três casos de força, nas direções X, Y e Z. As Figs. (3.3) a (3.5) mostram as condições de força aplicada, assim, três casos foram analisados. As Figs. (3.6) a (3.10) mostram as respostas transientes obtidas de maneira conveniente comparando as respostas das duas plataformas consideradas (código em Fortran90 e Ansys®).

Analisando as respostas obtidas na mesma direção em que a força foi aplicada, nota-se que a amplitude do movimento é maior nas direções Y e Z. Essas mesmas respostas comparadas àquelas em que a força foi aplicada numa direção diferente da direção de resposta se mostraram com maiores amplitudes de movimento porque como a gravidade está sendo desprezada, a amplitude do movimento tende a ser maior quando a força é aplicada na mesma direção em que a resposta é obtida. Por fim, alguns resultados não estão ilustrados pelo fato de que não apresentaram amplitudes significativas. Estes foram os casos das respostas nas direções X e Y para a força aplicada em Z, as respostas na direção Z para a força aplicada na direção X e na direção Y, nas três simulações realizadas. As pequenas diferenças nas respostas temporais obtidas devem-se ao fato de que o integrador numérico utilizado no código Fortran90 é diferente daquele utilizado pelo *software* Ansys®.

Tabela 3.2 – Condições de simulação adotadas.

Dados	Descrição/Comentários
Teoria empregada	Timoshenko
Número de elementos	668
Nó de excitação	335
Nó de medição	335
Amortecimento proporcional	$1E-3 * \text{Massa} + 1E-5 * \text{Rigidez}$
Tempo de simulação	0,001 – 10 s (passo = 0,001 s)
Condição de contorno	Engaste

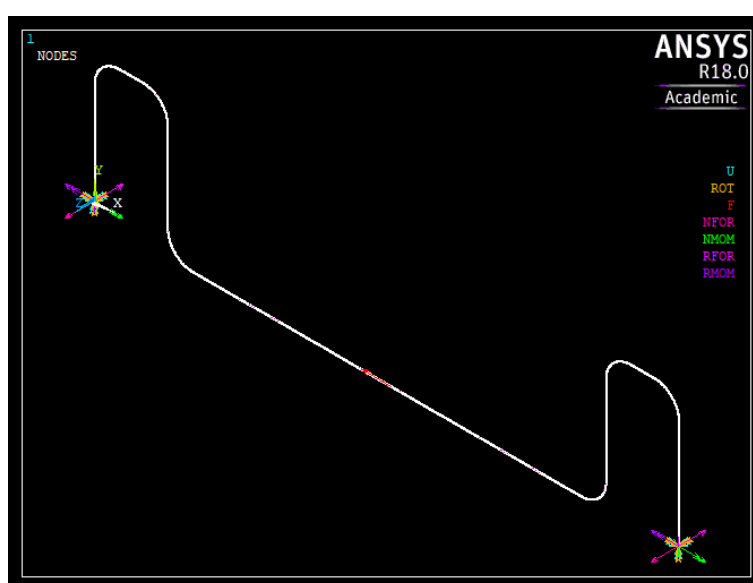


Figura 3.3 – Modelo de elementos finitos do Spool construído no software Ansys® e a força aplicada na direção X.

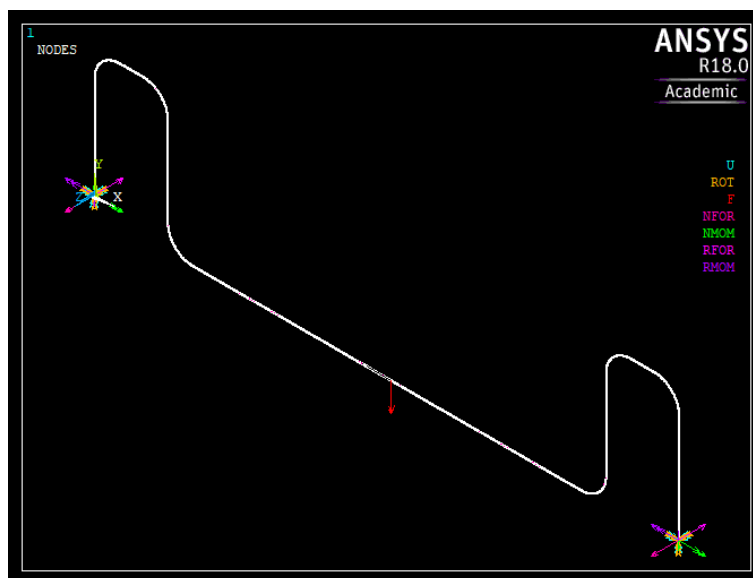


Figura 3.4 – Modelo de elementos finitos do Spool construído no software Ansys® e a força aplicada na direção Y.

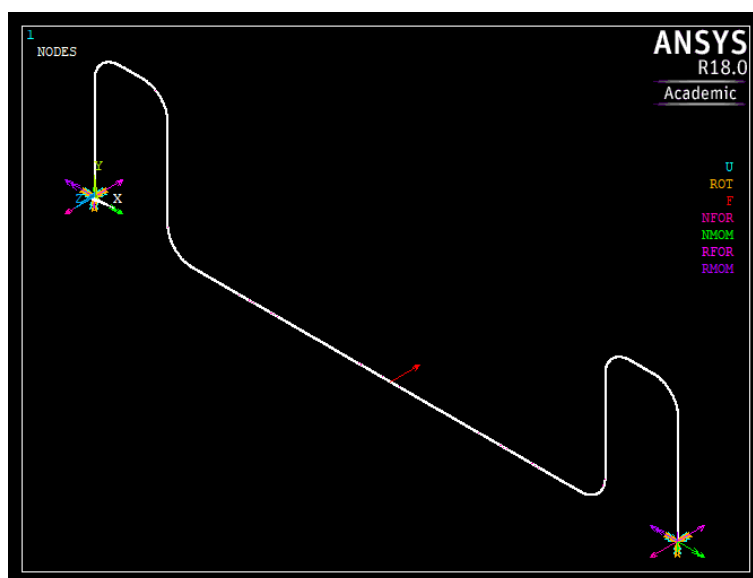


Figura 3.5 – Modelo de elementos finitos do Spool construído no software Ansys® e a força aplicada na direção Z.

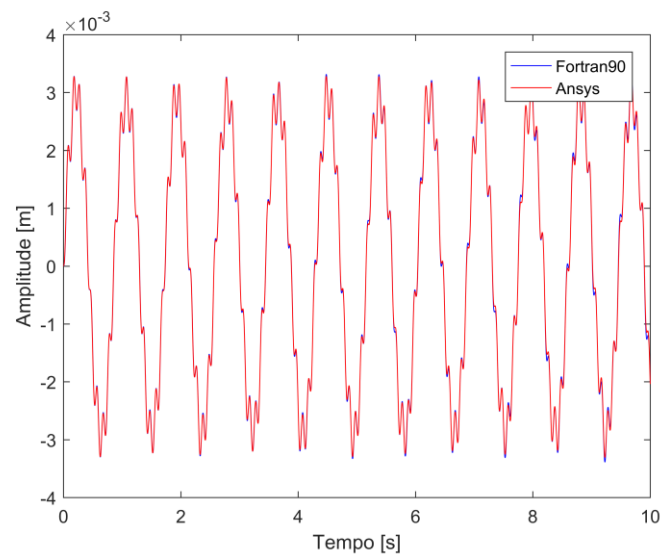


Figura 3.6 – Resposta transiente do Spool considerando a força aplicada na direção X e resposta obtida na direção X.

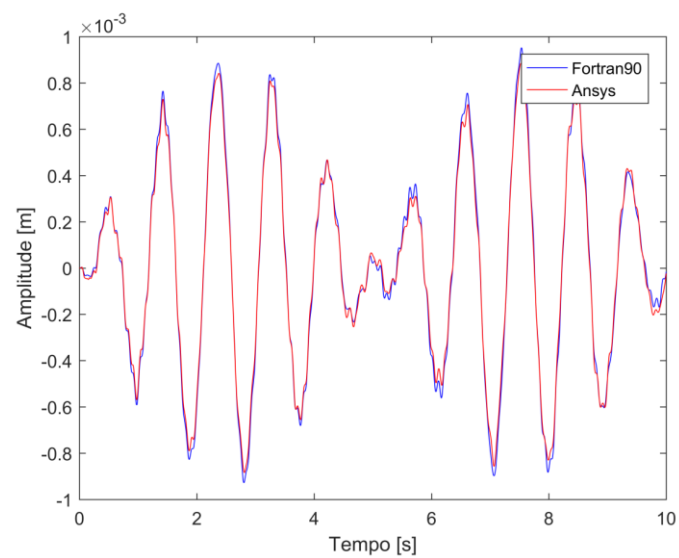


Figura 3.7 – Resposta transiente do Spool considerando a força aplicada na direção X e resposta obtida na direção Y.

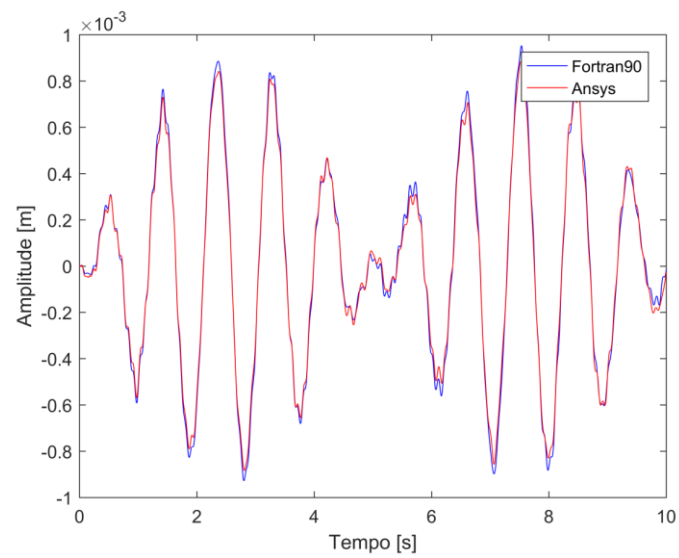


Figura 3.8 – Resposta transiente do Spool considerando a força aplicada na direção Y e resposta obtida na direção X.

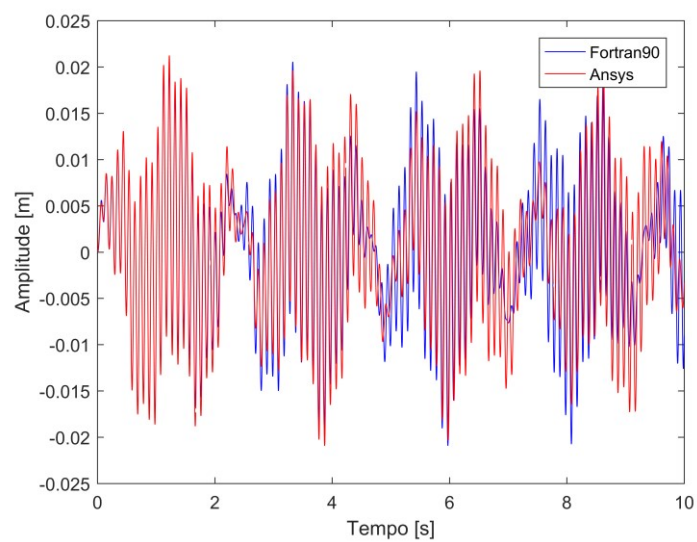


Figura 3.9 – Resposta transiente do Spool considerando a força aplicada na direção Y e resposta obtida na direção Y.

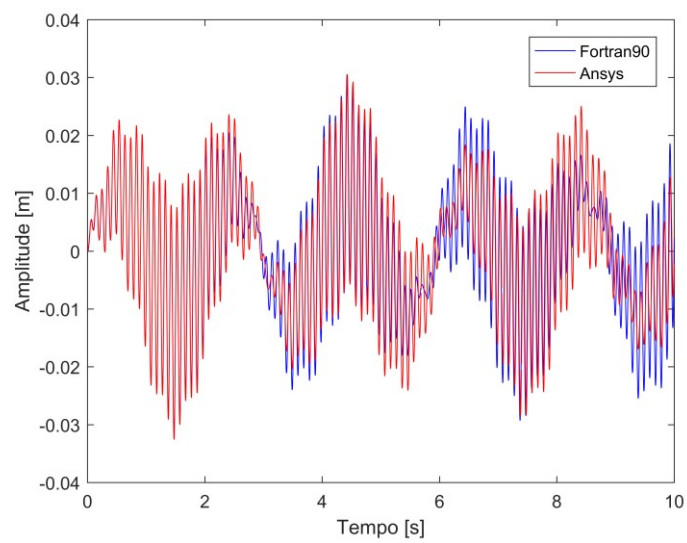


Figura 3.10 – Resposta transiente do Spool considerando a força aplicada na direção Z e resposta obtida na direção Z.

CAPÍTULO IV

Conclusão

A validação do Spool 3D em termos das frequências naturais da estrutura obteve erros menores que 1% e por isso admite-se que o código em Fortran90 promove resultados tão precisos quanto o software de elementos finitos Ansys®. A validação das respostas da estrutura no domínio do tempo também apresentou resultados próximos e plausíveis. Contudo, algumas respostas temporais apresentaram pequenos erros que se acredita que estes possam ser associados ao fato de que o integrador numérico utilizado no código em Fortran ser diferente daquele utilizado pelo software Ansys®. Com os resultados obtidos das simulações conclui-se ainda que a estrutura não apresenta respostas significativas dependendo da direção da força de excitação e observa-se também que para aquelas respostas obtidas na mesma direção de aplicação da força ao longo do eixo longitudinal da estrutura as respostas tem amplitudes menores. A sugestão de trabalhos futuros é a realização da verificação do código no domínio da frequência por meio de análise harmônica e verificar uma análise estática do problema, futuramente, pode-se realizar a solução do problema de interação fluido-estrutura uma vez que esse trabalho oferece resultados iniciais para esse objetivo.

CAPÍTULO V

Referências Bibliográficas

ÁSSI, G. R. S. Estudo Experimental do Efeito de Interferência no Escoamento ao Redor de Cilindros Alinhados. 2005. Dissertação de Mestrado – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo. p. 50-53.

BORGES, A. S.; PAULO, W. L.; RADE, D. A, Análise Fluido Estrutural Utilizando o Ansys®. In: 17º SIMPÓSIO DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA, 2007, Uberlândia.

CAVALINI, A. A. Detecção e Identificação de Trincas Transversais Incipientes em Eixos Horizontais Flexíveis de Máquinas Rotativas. 2013. Tese de Doutorado – Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia.

FERNANDES, J. W. D. Interação Fluido-Estrutura com Escoamentos Incompressíveis Utilizando o Método dos Elementos Finitos. 2016. Dissertação de Mestrado – Universidade de São Paulo, São Carlos. p. 20-30.

FONTANELLA, L. G. Metodologia para Análise de Vibrações Induzidas pelo Vento em Chaminés. 2015. Monografia – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Rio Grande do Sul. p. 2-5.

HIRSCH, G. H. Damping measures to control Wind-induced Vibrations. 1994. New York. p. 1-51.

IMBERT, J. F. Analyse des structures par éléments finis. Cépaduès, 1991.

LALANNE, M.; FERRARIS, G. Rotordynamics Prediction in Engineering. John Wiley, 1998.

LOPES, R. K. D. Análise de Estruturas Sujeitas a Vibrações Induzidas por Vórtices. 2006. Dissertação de Mestrado – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro. p. 10-13.

NAUDASCHER, E.; ROCKWELL. Flow-Induced Vibrations - An Engineering Guide Book. 1994.

TAVARES, E. J. Modelo Experimental para Ensaio de Flutter de uma Seção Típica Aeroelástica. 2009. Dissertação de Mestrado – Universidade de São Paulo, São Carlos. p. 29-35.