

BRUNO HENRIQUE DA SILVEIRA

FLUTTER DE SEÇÕES TÍPICAS COM FOLGA



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA

FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

2017

BRUNO HENRIQUE DA SILVEIRA

FLUTTER DE SEÇÕES TÍPICAS COM FOLGA

Projeto de conclusão de curso apresentado ao curso de graduação em Engenharia Aeronáutica da Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para a obtenção do título de **Engenheiro Aeronáutico**.

Área de Concentração: Dinâmica de Sistemas Mecânicos.

Orientador: Prof. Dr. Leonardo Sanches

UBELÂNDIA – MG

2017

DEDICATÓRIA

Aos meus pais e à Deus.

AGRADECIMENTOS

Antes de mais nada agradeço a Deus, à Ele toda honra e toda glória.

Aos meus pais, Cláudia e Reginaldo, minha irmã, Laís, por todo suporte, apoio, amor e carinho que me permitiu seguir em frente a todo instante. Sem a presença deles nada disso seria possível.

Aos meus amigos da graduação, agradeço por todas experiências compartilhadas ao longo dessa caminhada. E agradeço profundamente meus grandes amigos, que sempre me motivaram e me ajudam até hoje.

A Universidade Federal de Uberlândia e a Faculdade de Engenharia Mecânica por toda a infraestrutura e docência que me foi proporcionado ao longo desses anos para que eu pudesse atingir um ótimo aprendizado.

Ao meu grande orientador e amigo, por toda atenção e compreensão para que esse trabalho pudesse ser concluído.

DA SILVEIRA, B. H., **Flutter de seções típicas com folga**, 2017, 68 f. Trabalho de conclusão de curso, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, Brasil.

Resumo

A ciência que está interessada na interação entre a deformação de uma estrutura elástica em um escoamento e em suas forças aerodinâmicas resultantes é denominada aeroelasticidade. Certos problemas no campo da aeroelasticidade são naturalmente não lineares e, portanto, apresentam comportamentos que não são bem descritos através de ferramentas de análises de sistemas lineares. Sendo assim, novos métodos são necessários para a previsão e modelagem destes sistemas, com o intuito de reduzir os riscos e melhorar a eficiência das aeronaves. Estudos com aerofólios com superfície de controle de 3 GDL vem sendo feitos incorporando certas não linearidades para caracterizar os seus efeitos no comportamento dinâmico. Exemplos desta aplicação trata-se da consideração de folgas (*"freeplay"*) em superfícies de controle ou em outros tipos de junções. Este tipo de problema é relevante pois pode levar a comportamentos indesejáveis, diminuindo consideravelmente a margem de segurança de operação da aeronave, ocasionando problemas estruturais, fadiga de material e respostas trágicas. Devido a interação das forças e momentos aerodinâmicos atuantes no aerofólio, é necessária uma análise da aerodinâmica não-estacionária, o qual será baseada em ângulos de ataques inferiores a 20° e frequência reduzida menor que 0,1. Logo mais, uma análise mecânica da seção típica com superfície de comando é tomada para formulação das equações do movimento através das equações de Lagrange. De modo a incorporar a não linearidade no sistema dinâmico do aerofólio, é feito um ajuste de curvas usando uma aproximação de uma função hiperbólica da folga, chegando a uma função polinomial de 3° grau. Caracterizado e construído todo o sistema aeroelástico em questão, é possível identificar os efeitos do sistema com folga. Considerando um escoamento subsônico, é conduzido uma série de simulações computacionais com o objetivo de destacar as diferenças mais relevantes entre os sistemas dinâmicos com e sem folga. Por fim, através dos resultados obtidos aliados a uma análise orbital da superfície de controle, os efeitos observados são de um notável aumento nas amplitudes de resposta para o sistema não linear e o aparecimento das oscilações de ciclo limite após a velocidade de flutter.

Palavras chaves: Aeroelasticidade não linear, flutter, folga, ciclo-limite.

DA SILVEIRA, B. H., **Flutter on typical sections with freeplay**, 2017. Final Project, Federal University of Uberlandia, Brazil.

Abstract

The science interested in the interaction between the deformation of an elastic structure in an airflow and the aerodynamics forces is called Aeroelasticity. Many problems in Aeroelasticity are naturally nonlinear and, for that reason, its behavior is not described very well with the linear analysis. Thus, new tools are necessary to predict and study the nonlinear aeroelasticity with the purpose to reduce the flying risks and enhance the aircraft efficiency. Recently, studies in 3-DOF airfoils with control surfaces are using certain nonlinearities to characterize the effects on its dynamics system. These methods consider on implementing the freeplay on control surfaces or other types of joints. This sort of problem is relevant because it can lead to unlikeable performance, reducing significantly the fly envelope, heading to structural failures, material fatigue and adverse aircraft responses. Therefore, it is essential to identify the structural dynamics effects induced by the nonlinearity freeplay on the control surface. Due to aerodynamics forces and momentums acting together on the airfoil section is fundamental to do a nonstationary aerodynamics analysis, on which will be based in angles of attack smaller than 20 and with values smaller than 0.1 of reduced frequencies. Furthermore, a dynamic analysis for the airfoil section with control surface is done using the Lagrange equations to figure the equations of motion. The nonlinearity enters in the dynamic system by a curve fitting utilizing a hyperbolic function approximation coming to a third-degree polynomial. This function would be added to the DOF related to control surface in the stiffness matrix. As the entire system was build and characterized, it is possible to find the effects on the system with freeplay. For instance, a subsonic airstream is conducted to a several computational simulations with the main goal is to characterize the more relevant differences between the aeroelastic system with and without the freeplay. Finally, the results observed is larger amplitudes on DOF responses for the system with freeplay and the appearance of the limit cycle oscillations after the flutter.

Key words: Nonlinear Aeroelasticity, freeplay, flutter, LCO.

LISTA DE FIGURAS

1.	Campos de estudo da Aeroelasticidade. (Adaptado COLLAR, 1946)	13
2.1	Resultados de uma análise aerodinâmica em uma aeronave usando CFD. (Fonte: Google Images)	17
2.2	Diagrama aeroelástico de Collar. (Adaptado WRIGHT; COOPER, 2007)	18
2.3	Fotos da Ponte de Tacoma, EUA. (Fonte: Getty Images)	20
2.4	Bomber Handley Page O/400. (Fonte: tangmere-museum.org.uk)	21
2.5	Aeronave P-80. (Fonte: Google Images)	22
2.6	F-14 em voo. (Fonte: foxtrotalpha.jalopnik.com)	22
2.7	F-18 – Sofreu problemas de não linearidades aeroelásticas gerando LCO. (Fonte: aircraftrecognition.co.uk)	23
2.8	Em 1986, o T-46A sofreu em seu teste de voo um flutter no aileron (FRENCH et al, 1987).	24
2.9	Representação das não linearidades aeroelásticas estruturais concentradas (WORDEN; TOMLINSON, 2001).	25
2.10	Representação da resposta estável e instável do LCO (PEREIRA, 2015).	28
3.1	Seção típica de 3GDL com SC. (PEREIRA, 2015)	29
3.2	Representação da não linearidade de folga.	36
4.1	Parte real dos Autovalores.	45
4.2	Parte Imaginária dos Autovalores.	46
4.3	Resposta do sistema linear no domínio do tempo nas velocidades de 5 e 10 m/s.	46
4.4	Resposta do Sistema linear no domínio do tempo nas velocidades de flutter e 12 m/s.	47
4.5	Gráfico da função polinomial da não linearidade de folga.	50
4.6	Comparação do sistema com folga de 2 graus submetidos a escoamentos com velocidades de 8m/s e 10m/s.	52
4.7	Comparação do sistema com folga de 2 graus sob um escoamento na velocidade de flutter.	53
4.8	Visão aumentada do GDL da SC com 2 graus de folga.	53

4.9	Comparação do sistema com folgas e escoamento a 8m/s e 10 m/s.	54
4.10	Comparação do sistema com folgas e escoamento na velocidade de flutter.	54
4.11	Visão aumentada do GDL da SC com 4 graus de folga.	55
4.12	Representação dos LCO em $U=13$ m/s.	56
4.13	Representação dos LCO em $U=13.5$ m/s.	56
4.14	Análise de órbitas para a superfície de controle. ($U=8$ m/s)	57
4.15	Análise de órbitas para a superfície de controle. ($U=10$ m/s)	58
4.16	Análise de órbitas para a superfície de controle na velocidade de flutter.	58
4.17	Análise de órbitas para a superfície de controle. ($U=13$ m/s)	59

LISTA DE TABELAS

1.	Modelos da aerodinâmica não estacionária. (PEREIRA, 2015)	34
2.	Dados utilizados para os cálculos. (PEREIRA, 2015)	39
3.	Evolução dos valores dos coeficientes polinomiais para cada valor de folga.....	40
4.	Comparação das frequências naturais obtidas computacionalmente.....	46
5.	Evolução dos valores dos coeficientes polinomiais para cada valor de folga.....	51

LISTA DE SÍMBOLOS

a	Distância adimensional entre o eixo elástico e a corda média.
$a_i (i = 0,1,2,3)$	Coefficiente polinomial de ajuste de curva.
b	Semicorda do aerofólio.
c	Distância adimensional entre o EE da SC e a corda média.
$C(k)$	Função de Theodorsen.
$c_i (i = 0,2,..4)$	Constantes da aproximação de Sears.
d_i	Elementos que compõe a matriz de amortecimento.
$F(\beta)$	Não linearidade do tipo folga presente na seção transversal.
h	Movimento de flexão (<i>plunge</i>).
I_α	Momento de inercia da asa em relação ao EE da mesma.
I_β	Momento de inercia da SC em relação ao EE da mesma.
k	Frequência reduzida.
k_h, k_α, k_β	Rigidez de flexão, de torção e da SC respectivamente.
L^{NC}	Termo não circulatório de sustentação.
L^C	Termo circulatório de sustentação.
$L(t)$	Força de sustentação.
L	Função de Lagrange.
M_α^{NC}	Termo não circulatório do momento aerodinâmico da asa.
M_β^{NC}	Termo não circulatório do momento aerodinâmico da SC.
M_α^C	Termo circulatório do momento aerodinâmico da asa.
M_β^C	Termo circulatório do momento aerodinâmico da SC.
$M_\alpha(t)$	Momento aerodinâmico de torção em relação ao EE.
$M_\beta(t)$	Momento aerodinâmico em relação ao EE da SC.
m_w	Massa da asa.
m_T	Massa total do sistema.
n	Número de graus de liberdade do sistema.
q_i	Graus de liberdade do sistema.
$\dot{q}_i$	Derivada dos graus de liberdade do sistema.
r_α	Raio de giração da asa.
r_β	Raio de giração da SC.

S_α	Momento estático da asa em relação ao EE da mesma.
S_β	Momento estático da SC em relação ao EE da mesma.
T	Energia cinética.
$T_i (i = 1, 2 \dots 13)$	Constantes de Theodorsen.
U	Velocidade do escoamento do ar.
x_α	Distância adimensional do EE até o CG do aerofólio.
x_β	Distância adimensional do EE da SC até o CG da mesma.
$\bar{x}, \dot{\bar{x}}$	Variável aerodinâmica aumentada e a sua derivada no tempo.
A	Matriz de estados.
B_s	Matriz de parâmetros de amortecimento.
B^{NC}	Matriz não circulatória de amortecimento.
E_1, E_2, D	Matriz de termos de acoplamento.
f_i	Vetor dos esforços externos não conservativos.
F	Termos aerodinâmicos dos estados aumentados.
K_s	Matriz de parâmetros de rigidez.
K^{NC}	Matriz não circulatória de rigidez.
M_s	Matriz de parâmetros inerciais.
M^{NC}	Matriz não circulatória de massa.
R	Matriz associada a termos circulatórios.
S_1, S_2, S_3	Vetores associados aos termos circulatórios.
X	Vetor de estados.
α	Movimento de torção (<i>pitch</i>).
β	Movimento de superfície de controle.
μ_e	Razão entre a massa total e a massa da asa.
$\xi(t)$	Razão entre o deslocamento de flexão e a semicorda.
ρ	Densidade do ar.
σ	Variável de integração.
τ	Tempo adimensional.
$\phi(\tau)$	Função de Wagner.
$\omega_h, \omega_\alpha, \omega_\beta$	Frequência natural de flexão, de torção e de SC respectivamente.

ACRÔNIMOS

<i>CG</i>	Centro de gravidade.
<i>CFD</i>	<i>“Computer Fluid Dynamics”</i> ou Dinâmica de fluidos computacional.
<i>EE</i>	Eixo elástico.
<i>GDL</i>	Grau de liberdade.
<i>LCO</i>	<i>“Limit cycle oscillation”</i> ou oscilações em ciclo limite.
<i>SC</i>	Superfície de controle ou superfície de comando.

SUMÁRIO

	Página
1. Capítulo I - Introdução	14
2. Capítulo II - Revisão bibliográfica	16
2.1. Aerodinâmica não-estacionária.....	16
2.2. Aeroelasticidade.....	17
2.3. Flutter.....	18
2.4. Sistemas aeroelásticos com não linearidades.....	20
3. Capítulo III – Modelo Matemático.....	33
3.1. Modelagem do Sistema Dinâmico.....	33
3.1.1 Equações de Movimento na Forma de Espaço de Estados.....	33
3.2. Modelagem dos Esforços Aerodinâmicos.....	35
3.3. Modelagem da Não Linearidade de Folga.....	35
4. Capítulo IV – Análise de resultados e discussão.....	37
4.1 Análise sem folga do sistema.....	44
4.2. Análise com folga do sistema.....	48
4.2.1 Representação da não linearidade de folga.....	49
4.2.2 Influência da não linearidade no sistema.....	51
4.3 Análise das Órbitas.....	56
5. Capítulo V – Conclusões.....	60
Apêndice A.....	62
Apêndice B.....	63
Apêndice C.....	65
Referências.....	66

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

A ciência que está interessada na interação entre a deformação de uma estrutura elástica em um escoamento e em suas forças aerodinâmicas resultantes é denominada aeroelasticidade (HODGES, 2011). A Figura 1, ilustra a correlação deste campo de estudo com vários outros, sendo estes, a relação entre as grandes áreas: elasticidade, dinâmica e aerodinâmica.

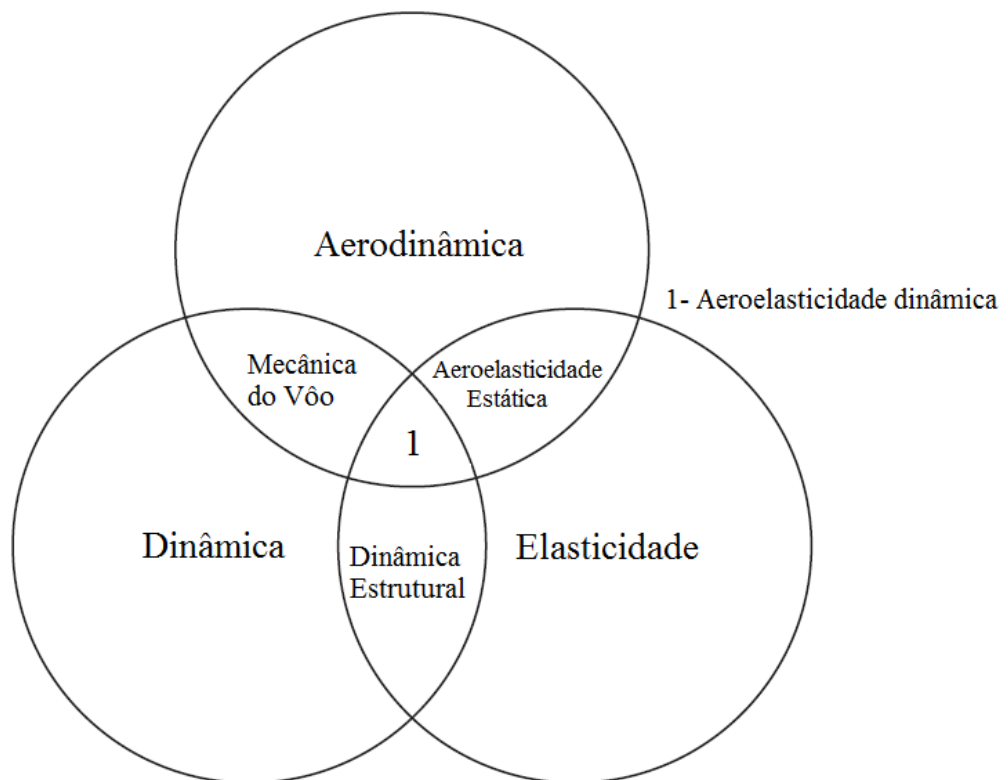


Figura 1 - Campos de estudo da Aeroelasticidade. (Adaptado COLLAR, 1946).

A aeroelasticidade vem influenciando o desenvolvimento da aviação desde os primeiros voos realizados. Os irmãos Wright em 1903 fizeram o uso de deformações elásticas da asa para adquirirem o controle lateral de seu avião, o que foi essencial para terem sucesso (REED, Wilmer H. e GARRICK, I. E., 1981). Desde a década de 90, é possível perceber na aviação a necessidade de se conhecer e estudar melhor os fenômenos aeroelásticos.

O primeiro estudo documentando do flutter por Lanchester (1916) representou um grande desenvolvimento onde foi analisado os motivos que o *Handley Page 0/400 Bomber* experimentou violentas oscilações antissimétricas da fuselagem e cauda. Os fenômenos aeroelásticos são por natureza não lineares, logo, reações como caos, bifurcações e oscilações em ciclo limite estarão presentes (SHETA et al, 2002).

Sistemas aeroelásticos são inerentemente não lineares, portanto sujeitos a comportamentos distintos dos previstos através de métodos convencionais de aproximação linear das equações de movimento. Sendo assim, são necessários novos métodos para a previsão e modelagem dos comportamentos aeroelásticos não lineares, com o intuito de reduzir os riscos e melhorar a eficiência das aeronaves (PEREIRA, 2015).

A presença de efeitos não lineares resulta em modificações no comportamento aeroelástico, tornando mais complexa a previsão de fenômenos de instabilidade. Por exemplo, sabe-se que na presença de não linearidades, o fenômeno de flutter passa a apresentar características muito diferentes daquelas previstas por modelos lineares. Respostas não lineares podem incluir transições abruptas que podem levar a instabilidades com consequências catastróficas sem aviso. (MARQUES et al., 2006; DE MARQUI JR.; MARQUES, 2007).

A não linearidade causada por folgas em superfícies de controle ou em outros tipos de junções pode levar a todos os tipos de comportamentos indesejáveis, diminuindo consideravelmente a margem de segurança de operação da aeronave, podendo levar a problemas estruturais, fadiga de material e respostas trágicas (CONNER et al., 1996; FUNG, 1993; LEE; GONG; WONG, 1997; LI; GUO; XIANG, 2010; TANG; DOWELL, 2010).

Estudos com aerofólios com superfície de controle de 3 GDL vem sendo feitos incorporando certas não linearidades para caracterizar os seus efeitos no comportamento dinâmico. Exemplos desta aplicação trata-se da consideração de folgas (*“freeplay”*) em superfícies de controle ou em outros tipos de junções. Desta maneira torna-se imprescindível identificar os efeitos dinâmicos estruturais causados pela não linearidade de folga associada pela superfície de controle. Caracterizando, toda a

dinâmica estrutural e aerodinâmica contida no problema. Identificando e representando a não linearidade através de um ajuste polinomial de terceiro grau e incorporando no sistema aeroelástico. Com o intuito de caracterizar os efeitos da folga em um sistema de 3GDL com superfície de controle presentes neste acoplamento. Para tanto, o trabalho foi dividido em cinco capítulos principais onde foram apresentados o estudo, o modelo matemático, os resultados e as conclusões da seguinte forma:

Capítulo I – Apresenta a problemática do trabalho, introduz o leitor ao tema e suas características principais expondo os seus objetivos;

Capítulo II – Consiste da revisão bibliográfica que serviu como base de conhecimento teórico para o trabalho, onde expõe o histórico e evolução de toda problemática envolvendo os fenômenos aeroelásticos lineares e não lineares;

Capítulo III – Contém a metodologia aplicada para a formulação das equações matemáticas, de aerodinâmica não-estacionária, as equações do movimento e modelagem da não linearidade de folga aplicada no sistema.

Capítulo IV – Exibe todas as análises e a discussão dos resultados adquiridos.

Capítulo V – Contém as conclusões obtidas no trabalho.

E após o último capítulo seguem as referências bibliográficas utilizadas para confecção deste trabalho.

CAPÍTULO II

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo serão abordados a história do flutter, os primeiros casos estudados e como estes desenvolveram os estudos envolvidos neste fenômeno. A evolução dos estudos do comportamento do flutter em seções típicas com e sem superfícies de controle também serão discutidos. Finalmente, os estudos na literatura de flutter associados com não linearidade de folga.

2.1. Aerodinâmica não-estacionária

Escoamentos aerodinâmicos não estacionários são aqueles que ocorrem ao redor de corpos que se movem no tempo, induzindo também um movimento do fluido. Estes movimentos podem ser decompostos em uma parcela estacionária e outra não estacionária. A primeira ocorre em torno da forma aerodinâmica do corpo, enquanto que a segunda pode ser considerada como pequeno movimento ao redor da condição de estado estacionário oscilando a pequenos movimentos em arfagem.

As equações que caracterizam o escoamento são tais como da massa, velocidade e sua energia. O primeiro modelo não-estacionário de grande importância usado para cálculos aeroelásticos para uma seção típica da asa foi dado por Theodorsen em 1935.

Uma revisão sobre aerodinâmica não-estacionária foi apresentada por Mabey (1999) e basicamente classifica os casos como de aerodinâmica do escoamento colado e do escoamento separado. No primeiro caso, os fluxos são normalmente relacionados às análises de flutter, características dinâmicas e manobrabilidade da aeronave, e resposta a rajadas. O escoamento separado normalmente é utilizado em análises de buffeting e ciclos limites.

Para aplicações que não são teóricas, a análise qualitativa das equações da mecânica dos fluidos pode ser conseguida através de métodos numéricos e computacionais. Dinâmica dos fluidos computacional é a ciência da determinação de soluções numéricas para as equações de mecânica dos fluidos (ANDERSON, 1995), como pode ser visto na Figura 2.1 resultados utilizando-se desta.

Consequentemente, a aplicação atual dos métodos da dinâmica dos fluidos computacional em engenharia tem crescido muito. No entanto, mesmo com os progressos na área de computação, existe muito espaço para pesquisas na determinação de métodos matemáticos e estatísticos alternativos e de ordem reduzida, baseados em dados experimentais e em outras formas de modelagem do comportamento da dinâmica dos fluidos, como é o caso do uso de funcionais (MARQUES, 1997).. Dentre os problemas relacionados às metodologias alternativas existentes estão: perdas na análise do fenômeno físico e pouca flexibilidade para avaliar diferentes regimes de escoamento através do mesmo modelo. Tais problemas podem ser decisivos em estudos da interação entre fluido e corpos elásticos.

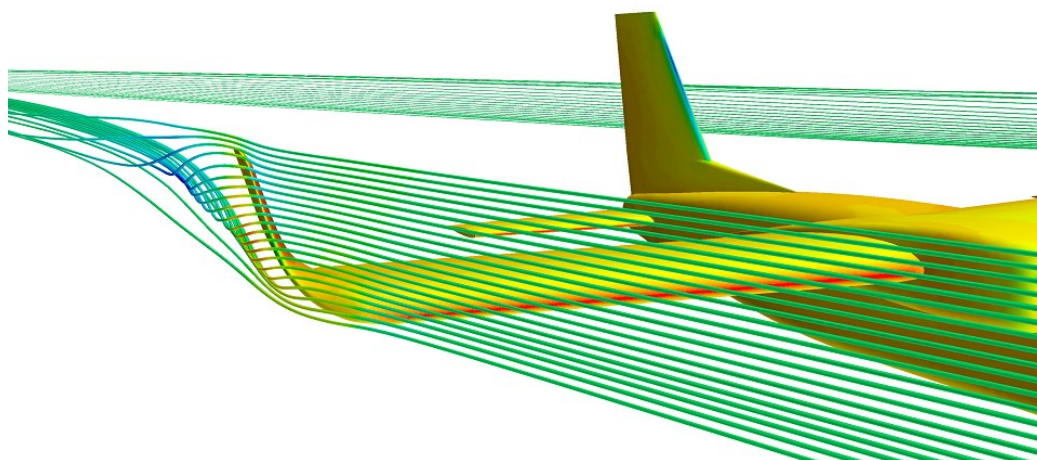


Figura 2.1 – Resultados de uma análise aerodinâmica em uma aeronave pelo uso de CFD. (Fonte: Site Fine Art America, 2017¹)

¹ Imagem disponível em: <https://fineartamerica.com/featured/harrier-airplane-and-air-displacement-nasa.html>. Acesso em Fevereiro, 2017.

2.2. Aeroelasticidade

A aeroelasticidade é o estudo que descreve a interação das forças aerodinâmicas, elásticas e inercias para uma estrutura flexível e os fenômenos resultantes destas. Para aeronaves de asas fixas existem dois campos principais: a aeroelasticidade estática, onde a deformação da aeronave influencia na distribuição de sustentação, podendo levar para a condição instável de divergência e normalmente reduzirá a efetividade de comando da superfície de controle e a aeroelasticidade dinâmica, que inclui a crítica área de flutter, esta pode levar uma aeronave a chegar numa condição dinamicamente instável onde a estrutura extrai energia do escoamento livre (WRIGHT, J. R. e COOPER, J. E., 2007).

Hodges e Pierce (2011) cita que aeroelasticidade é o termo usado para indicar o campo de estudo preocupado com a interação entre a deformação de uma estrutura elástica em um escoamento de ar e as forças aerodinâmicas resultantes. A Figura 2.2 mostra bem como é esta relação interdisciplinar desta área de estudo que envolve três tópicos principais: elasticidade, dinâmica e aerodinâmica. A primeira estuda as forças atuantes em um corpo dado sua forma, a segunda faz o cálculo de um corpo elástico sob uma força qualquer e a última introduz os efeitos das forças inerciais.

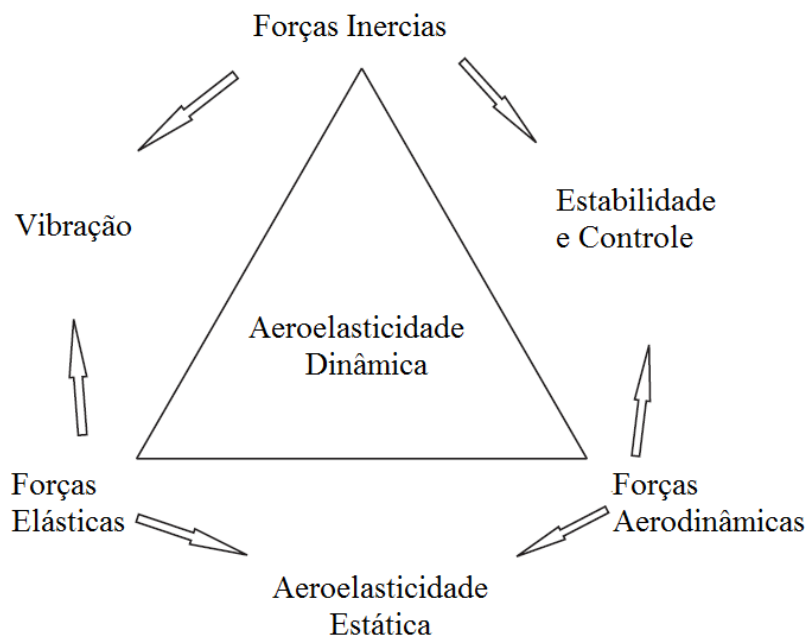


Figura 2.2 – Diagrama aeroelástico de Collar.

(Fonte: Adaptado WRIGHT; COOPER, 2007)

A aeroelasticidade estática estuda os fenômenos e os problemas associados com o comportamento estático e a estabilidade de um sistema aeroelástico no seu estado de equilíbrio (PEREIRA,2015). Os seus principais fenômenos são:

a) Reversão de comando: Existem várias causas para este evento como erro do piloto, alta velocidade de voo, erros do sistema de controle, acoplamento de diversas forças na aeronave. Pois bem, a flexibilidade da maioria das superfícies aerodinâmicas afeta a efetividade das superfícies de controle. O que pode ocasionar em uma perda da resposta esperada, por exemplo, do aileron, devido a deformação da asa.

b) Divergência: É um fenômeno de deflexão estática no qual as forças aerodinâmicas da asa excedem as forças elásticas restauradoras da mesma (HOLLOWELL, S. J. e DUGUNDJI, J., 1984), ou seja, quando uma superfície de sustentação sofre deflexão ao carregamento aerodinâmico e supera a carga limite, esta pode levar a uma falha estrutural.

A área da aeroelasticidade que engloba a associação mútua da dinâmica, elasticidade e das forças inerciais é chamada de aeroelasticidade dinâmica. Esta estuda os efeitos oscilatórios das interações aeroelásticas, seus principais fenômenos são:

a) Flutter: O que leva a uma falha estrutural catastrófica de uma aeronave é o flutter. Hodges definiu flutter como Uma instabilidade dinâmica de uma aeronave associada com a interação das forças aerodinâmicas, elásticas e inerciais.

b) Buffeting: é a resposta estrutural à excitação produzida pelo choque induzido por separação do escoamento, ou seja, a separação causada por movimentos turbulentos das camadas de ar em torno da própria aeronave. (SERRANO, 2010)

O primeiro incidente aeronáutico documentado e relacionado a um problema aeroelástico implicou na catastrófica do Aeródromo de Samuel Langley, em 1903. O acidente foi causado por uma divergência devido ao alto camber da asa.

Os fenômenos da aeroelasticidade não aparece somente em aeronaves, mas em qualquer corpo flexível que esteja sujeito a deformações elásticas sob o efeito de forças aerodinâmicas. O famoso caso da ponte de Tacoma (Figura 2.3a) representa bem o que foi dito; esta se localizava no estado de Washington nos Estados Unidos e entrou em colapso em 1940 devido a um dos fenômenos mais críticos da aeroelasticidade dinâmica, o flutter. Movimentos externos periódicos causados pela ação da força dos ventos, eram de mesma frequência que a frequência natural da

estrutura, o que fizesse com que a ponte entrasse em colapso, como pode ser visto na Figura 2.3b.



(a) Tacoma Narrows Bridge.



(b) Tacoma após entrar em colapso.

Figura 2.3 – Fotos da Ponte de Tacoma, EUA. (Fonte: Site Getty Images, 2017²)

2.3. Flutter

A aeroelasticidade, em particular o flutter, tem influenciado o desenvolvimento tecnológico aeronáutico desde os primeiros voos da história. Uma aeronave precisa ser leve levando a deformações consideráveis sob a ação de forças. As quais mudam a distribuição da carga aerodinâmica, que por sua vez modificam esses deslocamentos. Esse processo de interação entre as forças que atuam sob um corpo aeronáutico pode levar ao flutter, oscilação auto excitada, frequentemente destrutiva, onde a energia é adquirida do escoamento. Sistemas dinâmicos estruturais possuem amortecimento que pode ser medido quando não existem cargas aerodinâmicas agindo no mesmo. Quando é aumentada a velocidade do ar, o amortecimento acresce devido à parcela de amortecimento vinda da aerodinâmica. Contudo, quando a velocidade do escoamento atinge um determinado valor, o amortecimento passa a diminuir rapidamente (PEREIRA, 2015). Desta maneira, existe uma velocidade crítica de flutter onde o amortecimento resultante é zero e o sistema, ao receber uma força externa, fica instável,

² Imagem disponível em: <http://www.gettyimages.com/detail/news-photo/3301726#7th-november-1940-tacoma-narrows-suspension-bridge-in-puget-sound-picture-id3301726>. Acesso em Fevereiro, 2017.

com oscilações auto excitadas. É um tipo de evento que no geral deve ser completamente eliminado em projeto ou evitado dentro do envelope de voo. A iniciação do flutter depende diretamente da rigidez e indiretamente na robustez da aeronave, analogamente depende da inclinação da curva de sustentação em vez da sustentação máxima. Isto implica que a aeronave deve ser tratada não como um corpo rígido, mas sim como uma estrutura elástica (GARRICK e REED, 1981).

No primeiro voo feito pelos irmãos Wright foi utilizado uma deformação controlada das asas para conseguir controle lateral. O que foi essencial para o sucesso deles no ar pois esta aeronave era lateralmente instável devido ao anedro das asas (MCFARLAND, 1953).



Figura 2.4 – Bomber Handley Page O/400. (Fonte: Site Tangmere Museum, 2017³)

O primeiro estudo de flutter de uma aeronave registrado e documentado ocorreu em 1916. O bomber Handley Page O/400 (Fig. 2.4) experimentou oscilações violentas na cauda oriundas do acoplamento do modo de torção da fuselagem com um modo assimétrico oscilatório dos profundores (HODGES, PIERCE; 2011). Os profundores deste avião possuíam mecanismos de acionamento independentes. A solução para o problema foi a interconexão da superfície de controle com um tubo de torque (LANCASTER, 1969).

³ Imagem disponível em: <http://www.tangmere-museum.org.uk/aircraft-month/handley-page-o400>. Acesso em Março, 2017.



Figura 2.5 – Aeronave P-80. (Fonte: Site Fiddlers Green, 2017⁴)

Flutter em superfícies de controle começaram a aparecer durante a primeira Guerra Mundial. Acoplamento entre os modos do aileron e da asa foram vastamente encontrados durante este tempo (COLLAR, 1978). Von Baumhauer e Koning sugeriram o uso de uma massa de balanceamento na linha de articulação da superfície de controle com o intuito de evitar este tipo de flutter.



Figura 2.6 – F-14 em voo. (Fonte: Site Foxtrot Alpha, 2017⁵)

⁴ Imagem disponível em: <http://foxtrotalpha.jalopnik.com/an-elite-f-14-airman-explains-why-the-tomcat-was-so-imp-1610043625>. Acesso em Abril, 2017.

⁵ Imagem disponível em: <http://foxtrotalpha.jalopnik.com/an-elite-f-14-airman-explains-why-the-tomcat-was-so-imp-1610043625>. Acesso em Abril, 2017.

Depois da primeira Guerra Mundial, velocidades de cruzeiro maiores e mudanças geométricas nas aeronaves subsequentes resultaram em mais incidentes de flutter. Pilotos de corrida vivenciaram vários incidentes de flutter entre 1920 e 1930 por tentarem quebrar recordes de velocidades no ar (TOLVE, 1958).



Figura 2.7 – F-18 – Sofreu problemas de não linearidades aeroelásticas gerando LCO.
(Fonte: Site Aircraft Recognition, 2017⁶)

Novos problemas aeroelásticos surgiram quando as aeronaves passaram a voar em velocidades transônicas. Em 1944, durante um teste de voo do avião P-80 (Fig. 2.5), pilotos da NACA reportaram amplitudes bem altas de oscilação do aileron (GARRICK, 1981). De 1947 a 1956, registrou-se mais de 21 incidentes de flutter (Fig. 2.7 e 2.8) envolvendo oscilações das superfícies de controle. Protótipos de ambos F-100 e F-14 (Fig. 2.6) tiveram incidentes de mesma forma no leme. Hoje, voos em regime transônico ainda são considerados os mais críticos do ponto de vista aeroelástico (DOWELL, 2014). O fenômeno de flutter de painel, que aparece mais frequentemente em determinados regimes de voos transônicos e supersônicos, é uma instabilidade dinâmica auto excitada que ocorre em placas finas e cascas dos componentes de um veículo aeroespacial, levando o dispositivo a apresentar oscilações em ciclo limite (do inglês, limit cycle oscillation, LCO) com grandes deslocamentos transversais que podem causar falha por fadiga estrutural (FUNG, 1963; DOWELL, 1970).

⁶ Imagem disponível em: <http://www.aircraftrecognition.co.uk/f-18.html>. Acesso em Abril, 2017.



Figura 2.8 –T-46A sofreu em seu teste de voo um flutter no aileron. (Fonte: FRENCH *et al*, 1987).

2.4. Sistemas aeroelásticos não lineares

Vários problemas na aeroelasticidade são naturalmente não lineares e não muito bem descritos através da análise linear. Graças ao avanço da literatura no entendimento da dinâmica dos sistemas não lineares, isto permitiu uma correlação completa entre a análise experimental e teórica para se adquirir o contexto não linear total (TRICKEY et al., 2002). As não linearidades na aeroelasticidade podem ser provenientes da estrutura ou aerodinâmica.

Os efeitos de viscosidade e compressibilidade estão relacionados as não linearidades aerodinâmicas, como por exemplo, ondas de choque nos escoamentos transônicos, vórtices de ponta de asa e estol (JINWU et al., 2014). A solução analítica das equações da mecânica dos fluidos é praticamente não existente, acarretando num estudo mais difícil e complicado dos efeitos aerodinâmicos não lineares.

Podem ser de dois tipos as não linearidades estruturais: distribuídas ou concentradas. No caso de não linearidades distribuídas, seus efeitos são considerados espalhados ao longo de uma estrutura, enquanto as concentradas se restringem aos efeitos pontuais, ou àqueles que podem ser assumidos assim (LEE et al, 1999; DE MARQUI et al, 2007; JINWU et al., 2014). A inserção dos efeitos de não linearidades

concentradas podem ser feitas por meio de modelos de molas, representando momentos de restauração elástica, ou através de forças generalizadas. Outros problemas também podem ser tratados com a inclusão de efeitos de folga e de histerese (VASCONCELLOS, 2012). Os tipos mais comuns de não linearidades concentradas em sistemas dinâmicos aeroelásticos são as associadas à rigidez polinomial, nas quais o comportamento da mola varia com a amplitude do deslocamento, ficando mais rígida (*hardening*) ou menos rígida (*softening*), amortecimento não linear, seguidas por folga (ou *freeplay*), fricção e histerese (PEREIRA, 2015). O gráfico da função de cada tipo de não linearidade estrutural concentrada está descrito na Figura 2.9, ilustrando como é o comportamento destes em sistemas dinâmicos.

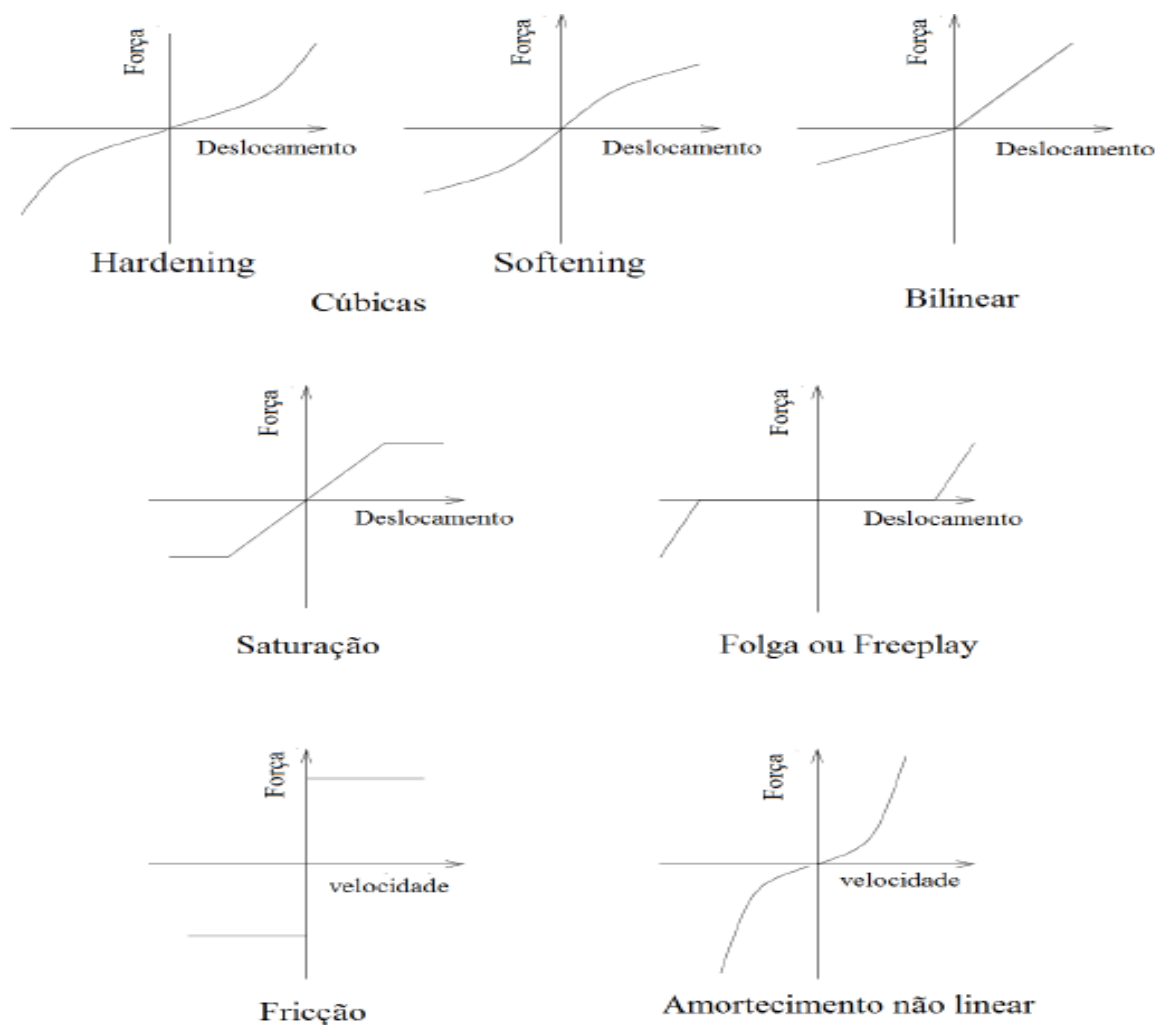


Figura 2.9 – Representação das não linearidades aeroelásticas estruturais concentradas (WORDEN; TOMLINSON, 2001).

As não linearidades estruturais concentradas estão vinculadas às articulações das superfícies de comando das aeronaves. Ao longo do tempo, é comum verificar o aparecimento de folgas acarretando em uma redução na rigidez do mecanismo de acionamento (JINWU et al., 2014; MISSOUM et al., 2010). Estas folgas podem gerar as oscilações em ciclo limite (LCO) que são caracterizadas por movimentos periódicos com amplitudes moderadas. Essas LCOs puderam ser observadas em superfícies de controle em aeronaves comerciais bem conhecidas da Airbus, nos modelos A319, A320 e A321 (TRICKEY et al., 2002; DOWELL et al., 2003).

O sistema aeroelástico associado com uma não linearidade de folga possuirá um comportamento subcrítico que é chamado de bifurcação de Hopf. Na Figura 2.10, a amplitude de oscilação em ciclo limite é plotado em função da velocidade do ar, que são considerados os diagramas de bifurcação clássico tanto para o comportamento subcrítico quanto para o supercrítico. Se um sistema depende da condição inicial e possui diferentes soluções quando a velocidade do escoamento está aumentando e diminuindo próximo à velocidade crítica de flutter, a bifurcação é chamada subcrítica e as LCOs podem existir abaixo da velocidade de flutter (DOWELL, 2002). Nesse caso considera-se o LCO como sendo instável. Entretanto, se o sistema é independente da condição inicial e a sua estabilidade muda somente depois da velocidade de flutter, a bifurcação é chamada de supercrítica e o sistema apresenta somente LCOs estáveis (PEREIRA, 2015).

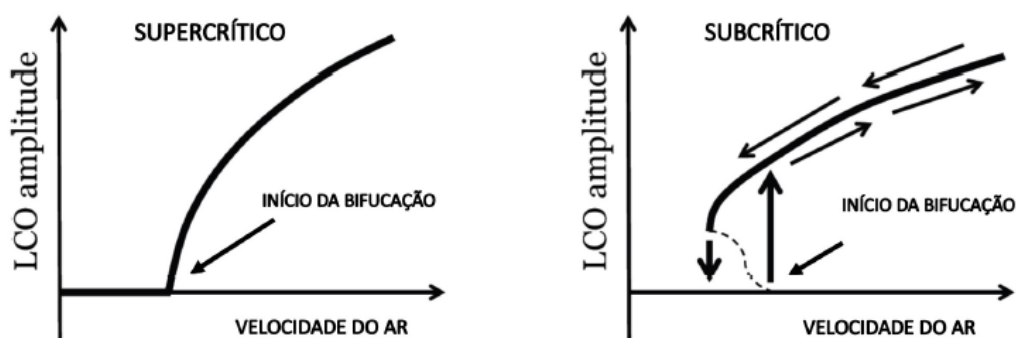


Figura 2.10 – Representação da resposta estável e instável do LCO (PEREIRA, 2015).

Muitos pesquisadores nos últimos anos consideraram os efeitos estruturais de rigidez não linear em um aerofólio com ou sem uma superfície de controle. Lee e Tron (1997) e Price et al. (1994) consideraram o efeito da folga para apresentar resultados demonstrando a existência dos LCOs, estes caóticos e periódicos. Virgin et al. (1999) estudou o complexo movimento dinâmico possível em um modelo de aerofólio com 3 GDL com uma superfície de controle com folga e aplicando a teoria aerodinâmica prevista por Thedorsen. Conner (1996) e Conner et al. (1997) usaram um modelo de espaço-estado proposto por Edwards et al. (1979) para uma seção típica de 3GDL com folga em um flape. Trickey et al. (2002) apresentou resultados locais e globais da dinâmica com base estudos experimentais e numéricos de um aerofólio com não linearidade de folga. Lee et al. (1997) e Lee et al. (2005) usou uma função cúbica não linear associada aos amortecimentos aos graus de liberdade para se avaliar o escoamento subsônico e analisar as respostas dinâmicas de um sistema aeroelástico de uma seção típica de 2GDL. Li et al (2015) utilizou-se de uma função cúbica não linear associada ao amortecimento para avaliar a resposta dinâmica aeroelástica de uma seção típica de 3GDL para aplicar ao sistema uma malha de controle. Vasconcellos et al. (2013) Vasconcellos et al. (2014), Vasconcellos (2012), Pereira (2015) e Pereira et al. (2016) não só avalia a folga mas também as não linearidades de enrijecimento, sendo que está última é calculada através de uma aproximação de razão de polinômios, enquanto que a folga é avaliada por uma função de tangentes hiperbólicas, todos estes são aplicados ao sistema para se estudar e caracterizar os efeitos das não linearidades em seções típicas de 3 GDL com superfície de controle.

Visto a relevância e importância de se estudar as não linearidades associadas a aeroelasticidade, como pode afetar as aeronaves que existem, este trabalho tem como foco estudar um aerofólio com 3 GDLs sob um escoamento subsônico com uma rigidez não linear da superfície de comanda associada ao sistema dinâmico, especificamente, a análise dos efeitos não lineares da folga (*freeplay*).

CAPÍTULO III

MODELO MATEMÁTICO

Nesta unidade, o modelo dinâmico de uma seção típica com três graus de liberdade, sendo uma a deflexão da superfície de controle, é exposto, além de suas características e hipóteses consideradas. As equações do movimento são determinadas juntamente com as equações que caracterizam a aerodinâmica não estacionária do problema aeroelástico (EDWARDS et al., 1979; CONNER et al., 1997). Os modos de vibração presentes no sistema serão avaliados, permitindo identificar o modo de vibração crítico que leva o sistema à instabilidade. Além disso, afim de se inserir a folga no sistema aeroelástico, uma interpolação polinomial é realizada que será posteriormente utilizada na análise dinâmica.

3.2 Modelagem dos Esforços Aerodinâmicos

O sistema aeroelástico em questão é dependente das forças e momentos aerodinâmicos que são resultados da integração da distribuição de pressão em torno de um aerofólio (ANDERSON, 2001). Para resolver essas integrais pode-se utilizar dos programas de dinâmica dos fluidos computacionais, os quais possuem métodos e hipóteses para aproximação de resultados das equações de Navier-Stokes. (WHITE, 2006). A resolução por estes meios tem alto custo computacional associado e podem levar dias ou até meses de simulação, o que tornaria a análise do problema inviável. Faz-se necessário buscar outros meios, portanto, a partir de hipóteses que simplificam a dinâmica dos fluidos. Ao final deste procedimento, os esforços aerodinâmicos não-estacionários atuantes em uma seção típica com deflexão de superfície de controle são representados, com precisão, a partir de expressões analíticas.

De acordo com a Tabela 1 tem-se algumas situações da aerodinâmica não estacionária nas quais deve-se considerar para modelagem do problema aeroelástico. Uma é considerado uma frequência reduzida menor a 0,1 e as outras duas consideram

a frequência maior que 0,1 só que uma com ângulo de ataque inferior a 20 graus e a outra com ângulos maiores que 20 graus.

Tabela 1. Modelos da aerodinâmica não estacionária. (PEREIRA, 2015)

$k < 0,1$	$k > 0,1 \text{ e } \alpha < 20^\circ$	$k > 0,1 \text{ e } \alpha > 20^\circ$
Aerodinâmica Quase-estacionária	2D 1) Peters (PETERS, 2008); 2) Theodorsen (THEODORSEN, 1935). 3D 1) Reissner (REISSNER, 1947); 2) Método de malha de vórtices (KATZ; PLOTKIN, 2006).	3D 1) Modelos numéricos para solução de Euler. 2) Dinâmica dos fluidos computacional (CFD).

Se tratando do estudo em vigor é escolhido o método onde $k = \frac{\omega b}{U}$, a frequência reduzida, é maior que 0,1 e α , ângulo de ataque, menor que 20° . Deve-se então, assumir forças e momentos não estacionários e um escoamento potencial incompressível sobre um aerofólio (THEODORSEN, 1935). Os resultados obtidos estão de acordo com as Eqs. (3.1), (3.2) e (3.3):

$$L = L^{NC} + L^C \quad (3.1)$$

$$M_\alpha(t) = M_\alpha^{NC} + M_\alpha^C \quad (3.2)$$

$$M_\beta(t) = M_\beta^{NC} + M_\beta^C \quad (3.3)$$

Onde os termos não circulatórios e circulatórios são descritos a partir do modelo proposto por Theodorsen (1935) nas Eqs. (3.4) a (3.9):

$$L^{NC} = \pi \rho b^2 \left[\ddot{h} + U \dot{\alpha} - b a \ddot{\alpha} - \frac{U}{\pi} T_4 \dot{\beta} - \frac{b}{\pi} T_1 \ddot{\beta} \right] \quad (3.4)$$

$$M_\alpha^{NC} = \pi \rho b^2 \left\{ b a h - U b \left(\frac{1}{2} - a \right) \alpha - b^2 \left(\frac{1}{8} + a^2 \right) \alpha - \frac{U^2}{\pi} (T_4 + T_{10}) \beta + \frac{U b}{\pi} \left[-T_1 + T_8 + (c - a) T_4 - \frac{1}{2} T_{11} \right] \beta + \frac{b^2}{\pi} [T_7 + (c - a) T_1] \beta \right\} \quad (3.5)$$

$$M_\beta^{NC} = \pi \rho b^2 \left\{ \frac{b}{h} T_1 h + \frac{U b}{\pi} \left[2 T_9 + T_1 - \left(a - \frac{1}{2} \right) T_4 \right] \alpha - \frac{2 b^2}{\pi} T_{13} \alpha - \frac{U^2}{\pi^2} (T_5 - T_4 T_{10}) \beta + \left(\frac{U b T_4 T_{11}}{2 \pi^2} \right) \beta + \left(\frac{b^2 T_3}{\pi^2} \right) \beta \right\} \quad (3.6)$$

$$L^C = 2\pi\rho UbC(k)f(t) \quad (3.7)$$

$$M_\alpha^C = 2\pi\rho b^2 \left(a + \frac{1}{2}\right) C(k)f(t) \quad (3.8)$$

$$M_\beta^C = -\rho Ub^2 T_{12} C(k)f(t) \quad (3.9)$$

onde $C(k)$ é a função de Theodorsen e $f(t)$ é dado por,

$$f(t) = U\alpha + \dot{h} + \dot{\alpha}b \left(\frac{1}{2} - a\right) + \frac{U}{\pi} T_{10}\beta + \frac{b}{2\pi} T_{11}\dot{\beta} \quad (3.10)$$

As variáveis T_n ($n = 1, 2, 3, 4, \dots$) são denominadas de constantes de Theodorsen com suas respectivas fórmulas dadas no Apêndice A (THEODORSEN, 1935). As forças e momentos aerodinâmicos obtidos acima dependem da função de Theodorsen $C(k)$.

$$C(k)f(t) = f(0)\phi(\tau) + \int_0^\tau \frac{\partial f(\sigma)}{\partial \sigma} \phi(\tau - \sigma) d\sigma \quad (3.11)$$

sendo $\phi(\tau)$ a função de Wagner, σ a variável de integração e $\tau = \frac{tU}{b}$ o tempo adimensional.

Com a inserção da não linearidade no sistema, esta modelagem não é suficiente, devido à complexidade dos movimentos gerados pela influência da folga. Sendo necessário, a alteração da função de Theodorsen $C(k)$ para movimentos arbitrários.

A análise dos carregamentos não estacionários provocados por movimentos transientes foi estudada por Wagner que calculou a reposta da sustentação de um aerofólio às entradas de grau na incidência, concluindo que a superposição de soluções elementares poderia ser utilizada para calcular o carregamento não estacionário em movimentos arbitrários (VASCONCELLOS, 2012). E que através da aproximação de Sears (1940) a função de Wagner pode ser dada por:

$$\phi(\tau) \approx c_0 - c_1 e^{-c_2 \tau} - c_3 e^{-c_4 \tau} \quad (3.12)$$

Onde $c_0 = 1,0$, $c_1 = 0,165$, $c_2 = 0,0455$, $c_3 = 0,335$ e $c_4 = 0,3$.

Substituindo a aproximação da função de Wagner na Eq. (3.12) e integrando-a por partes, obtém-se a Eq. (3.13) (BAKER, 1974):

$$C(k)f(t) = (c_0 - c_1 - c_3)f(t) + c_2 c_4 (c_1 + c_3) \bar{x} + (c_1 c_2 + c_3 c_4) \dot{\bar{x}} \quad (3.13)$$

onde $\dot{\bar{x}}$ e $\bar{x}$ são variáveis aerodinâmicas que foram introduzidas no problema, aumentando a ordem do espaço de estados.

Para mais detalhes e informações em como se obter e efetuar os cálculos do modelo aerodinâmico não estacionário nos trabalhos de EDWARDS et al., 1979; LEE et al., 1997; TRICKEY, 2000; LEE et al., 2005; LI et al., 2010 e LI et al., 2011.

3.2 Modelagem do Sistema Dinâmico

A Figura 3.1, apresenta o modelo da seção típica com três graus de liberdade, a saber: flexão (h), torção (α) e deflexão da superfície de controle (β). O desenvolvimento das equações que caracterizam o sistema aeroelástico a ser estudado, é feito utilizando um referencial de deslocamento da seção transversal sendo negativo para cima e positivo para baixo e outro para rotações sentido anti-horário negativo e rotações de sentido horário positivo.

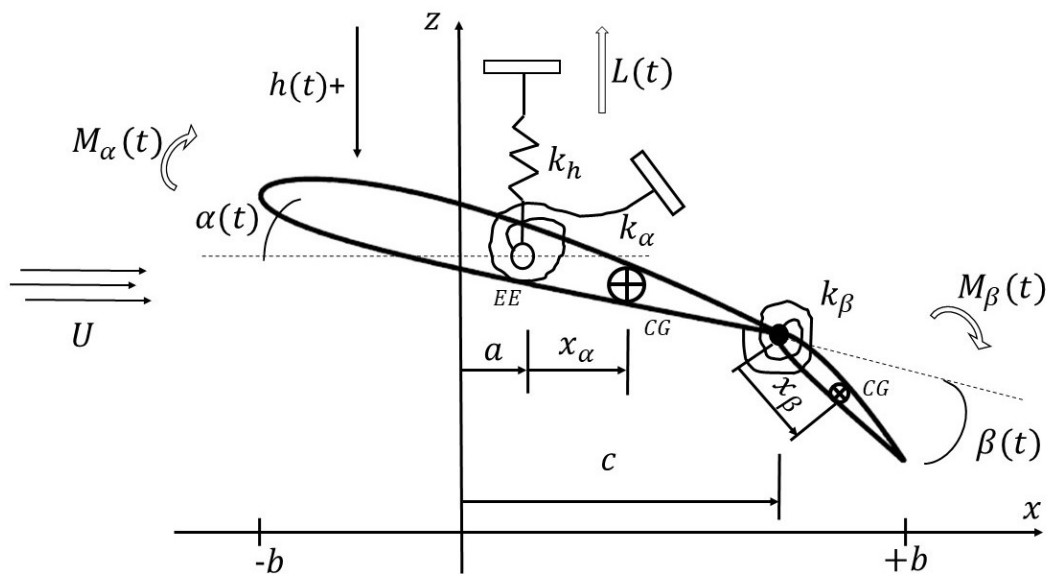


Figura 3.1 – Seção típica de 3GDL com SC.

Na Figura 3.1, $L(t)$ é a força de sustentação, $M_\alpha(t)$ é o momento aerodinâmico de torção em relação ao EE e $M_\beta(t)$ é o momento aerodinâmico da SC em relação ao EE. Sendo a a distancia entre a semi-corda e o EE, o comprimento da corda é dado por b e a distancia entre a corda média aerodinâmica e o eixo de articulação da superfície de controle é dado por c , x_α e x_β representam a porcentagem do comprimento da

distância entre o eixo elástico até o centro gravitacional (CG) e da superfície de controle até o seu CG, respectivamente. A rigidez à flexão do perfil aerodinâmico é dada por k_h , k_α a rigidez torcional, k_β a rigidez de articulação da superfície de comando. A velocidade do escoamento livre é dada por U .

Os sistemas de interação fluido-estrutura possuem um extenso e complexo desenvolvimento e por isso requerem uma minuciosa análise das equações dinâmicas para caracterização do problema em questão (HODGES e PIERCE, 2011; CRAIG E KURDILA, 2006). Inicialmente é necessário utilizar as equações de Lagrange dadas por:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = f_i \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n) \quad (3.14)$$

onde, L trata do lagrangeano que é dado pela diferença entre a energia cinética e potencial do sistema; o número de graus de liberdade do sistema é dado por n , q_i e $\dot{q}_i$ são os deslocamentos e velocidades das coordenadas generalizadas, a saber: h , α e β . Por último, f_i representa a força não conservativa associada à coordenada generalizada q_i presente no sistema.

Após a aplicação das equações de Lagrange para cada um dos graus de liberdade (FUNG, 1993; BISPLINGHOFF; ASHLEY; HALFMAN, 1996), as equações do movimento são dadas por:

$$m_T \ddot{h}(t) + S_\alpha \ddot{\alpha}(t) + S_\beta \ddot{\beta}(t) + k_H h(t) = -L(t) \quad (3.15)$$

$$S_\alpha \ddot{h}(t) + I_\alpha \ddot{\alpha}(t) + [I_\beta + b(c - a)S_\beta] \ddot{\beta}(t) + k_\alpha \alpha(t) = M_\alpha(t) \quad (3.16)$$

$$S_\beta \ddot{h}(t) + I_\beta \ddot{\beta}(t) + [I_\beta + b(c - a)S_\beta] \ddot{\alpha}(t) + k_\beta \beta(t) = M_\beta(t) \quad (3.17)$$

A adimensionalização das Eq. (3.15) à (3.17) é dada pela multiplicação do fator $\frac{1}{m_w b}$ na primeira equação e $\frac{1}{m_w b^2}$ nas demais equações. m_w representa a massa da asa.

$$\mu_e \left(\frac{\ddot{h}(t)}{b} \right) + x_\alpha \ddot{\alpha}(t) + x_\beta \ddot{\beta}(t) + \omega_H^2 \left(\frac{\ddot{h}(t)}{b} \right) = -\frac{L(t)}{m_w b} \quad (3.18)$$

$$x_\alpha \left(\frac{\ddot{h}(t)}{b} \right) + r_\alpha^2 \ddot{\alpha}(t) + [r_\beta^2 + x_\beta(c - a)] \ddot{\beta}(t) + r_\alpha^2 \omega_\alpha^2 \alpha(t) = \frac{M_\alpha(t)}{m_w b^2} \quad (3.19)$$

$$x_\beta \left(\frac{\ddot{h}(t)}{b} \right) + r_\beta^2 \ddot{\beta}(t) + [r_\beta^2 + x_\beta(c - a)] \ddot{\alpha}(t) + r_\beta^2 \omega_\beta^2 \beta(t) = \frac{M_\beta(t)}{m_w b^2} \quad (3.20)$$

Sendo,

$$x_\alpha = \frac{S_\alpha}{m_w b}, x_\beta = \frac{S_\beta}{m_w b}, r_\alpha^2 = \frac{I_\alpha}{m_w b}, r_\beta^2 = \frac{I_\beta}{m_w b}, r_\alpha^2 = \frac{I_\alpha}{m_w b}, \omega_h^2 = \frac{k_h}{m_w}, \omega_\alpha^2 = \frac{k_\alpha}{I_\alpha}, \omega_\beta^2 = \frac{k_\beta}{I_\beta}$$

onde I_α e I_β é o momento de inércia da asa em relação ao EE e o momento de inércia da superfície móvel em relação ao eixo de articulação, respectivamente; r_α e r_β são os raios de giração da seção típica e da superfície de controle, respectivamente; x_α e x_β são as distâncias entre o EE e CG do aerofólio e entre a articulação da SC e o CG. O parâmetro μ_e é a massa adimensionalizada, que no caso ideal de seção típica seria dado por um.

A matriz de amortecimento é composta pelos elementos $d_{i,j}$, conhecidos como os coeficientes de amortecimento relativos a cada grau de liberdade, conforme na Eq. (3.21). Estes coeficientes são calculados utilizando do conceito do amortecimento de Rayleigh, dado através da combinação entre as matrizes de rigidez e de massa (CLOUGH; PENZIEN, 2003).

Por último, o termo que multiplica a rigidez da superfície de controle, $F(\beta)$, é a função que incorpora o efeito não linear da folga no sistema. Substituindo $\frac{h(t)}{b}$ por $\xi(t)$, tem-se a equação matricial não linear do movimento:

$$\begin{bmatrix} \mu_e & x_\alpha & x_\beta \\ x_\alpha & r_\alpha^2 & [r_\beta^2(c-a)x_\beta] \\ x_\beta & [r_\beta^2(c-a)x_\beta] & r_\beta^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\xi}(t) \\ \ddot{\alpha}(t) \\ \ddot{\beta}(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{1.1} & d_{1.2} & d_{1.3} \\ d_{2.1} & d_{2.2} & d_{2.3} \\ d_{3.1} & d_{3.2} & d_{3.3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\xi}(t) \\ \dot{\alpha}(t) \\ \dot{\beta}(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_h^2 & 0 & 0 \\ 0 & r_\alpha^2 \omega_\alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & r_\beta^2 \omega_\beta^2 \left(\frac{F(\beta)}{\beta(t)} \right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi(t) \\ \alpha(t) \\ \beta(t) \end{Bmatrix} = \left(\frac{1}{b^2 m_w} \right) \begin{Bmatrix} -bL(t) \\ M_\alpha(t) \\ M_\beta(t) \end{Bmatrix} \quad (3.21)$$

Mais detalhes na obtenção das equações do movimento estão no Apêndice B e também nos trabalhos de PEREIRA, 2015 e VASCONCELLOS, 2012.

3.1.1 Equações de movimento na forma de espaço de estados

Devido à complexidade do sistema se faz necessário a introdução de variáveis aumentadas nas equações diferenciais parciais de segunda ordem que descrevem o movimento deste sistema aeroelástico, as mesmas têm o intuito de facilitar o cálculo

dos carregamentos aerodinâmicos. Para estas equações ordinárias poderem ser resolvidas através de métodos numéricos computacionais é preciso que seja feito um reagrupamento dos termos. Reescrevendo todos os elementos, a equação final do movimento para seção típica de 3GDL com SC, é dada pela Eq. (3.22):

$$(M_s - M^{NC})x + (B_s - B^{NC} - \frac{1}{2}RS_2)x + (K_s - K^{NC} - \frac{1}{2}RS_1)x - RS_3x_a = 0 \quad (3.22)$$

onde $x = [\xi \ \alpha \ \beta]^T$, $x_a = [x \ x]^T$.

As matrizes representadas na Eq. (3.22) são escritas uma a uma, abaixo:

$$\begin{aligned} M_s &= \begin{bmatrix} \mu_e & x_a & x_\beta \\ x_\alpha & r_\alpha^2 & [r_\beta^2(c-a)x_\beta] \\ x_\beta & [r_\beta^2(c-a)x_\beta] & r_\beta^2 \end{bmatrix} \\ B_s &= \begin{bmatrix} d_{1.1} & d_{1.2} & d_{1.3} \\ d_{2.1} & d_{2.2} & d_{2.3} \\ d_{3.1} & d_{3.2} & d_{3.3} \end{bmatrix} \\ K_s &= \begin{bmatrix} \omega_h^2 & 0 & 0 \\ 0 & r_\alpha^2 \omega_\alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & r_\beta^2 \omega_\beta^2 \left(\frac{F(\beta)}{\beta(t)} \right) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} M^{NC} &= -\frac{\rho}{m_w} \begin{bmatrix} \pi b^2 & -\pi a b^2 & -T_1 b^2 \\ -\pi a b^2 & \pi b^2 \left(\frac{1}{8} + a^2 \right) & -[T_7 + (c-a)T_1]b^2 \\ -T_1 b^2 & 2T_{13}b^2 & -\frac{T_3 b^2}{\pi} \end{bmatrix} \\ B^{NC} &= -\frac{\rho U b}{m_w} \begin{bmatrix} 0 & \pi & -T_4 \\ 0 & \pi \left(\frac{1}{2} - a \right) & [T_1 - T_8 - (c-a)T_4 + \frac{T_{11}}{2}] \\ 0 & [-2T_9 - T_1 + T_4 \left(a - \frac{1}{2} \right)] & \frac{-T_4 T_{11}}{2\pi} \end{bmatrix} \\ K^{NC} &= -\frac{\rho}{m_w} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (T_4 + T_{10}U^2) \\ 0 & 0 & \frac{(T_5 - T_4 T_{10})U^2}{\pi} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$R = \frac{1}{m_w} \begin{bmatrix} -2\pi\rho U & 2\pi\rho U \left(a + \frac{1}{2} \right) & -\rho U T_{12} \end{bmatrix}^T \quad (3.25)$$

$$S_1 = \begin{bmatrix} 0 & U & \frac{T_{10}U}{\pi} \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

$$S_2 = \begin{bmatrix} b & b \left(\frac{1}{2} - a \right) & \frac{b T_{11}}{2\pi} \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

$$S_3 = \begin{bmatrix} \frac{c_2 c_4 (c_1 + c_3) U^2}{b} & (c_1 c_2 + c_3 c_4) U \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

Para se calcular essas equações é necessário a transformação para a forma de espaço de estados:

$$\dot{X} = AX \quad (3.29)$$

onde,

$$X = [\xi \ \alpha \ \beta \ \dot{\xi} \ \dot{\alpha} \ \dot{\beta} \ \bar{x} \ \dot{\bar{x}}]^T \quad (3.30)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ -M_t^{-1}K_t & -M_t^{-1}B_t & -M_t^{-1}D \\ E_1 & E_2 & F \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

onde,

$$\begin{aligned} M_t &= (M_s - M^{NC}) \\ B_t &= \left(B_s - B^{NC} - \frac{1}{2}RS_2 \right) \\ K_t &= \left(K_s - K^{NC} - \frac{1}{2}RS_1 \right) \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$D = RS_3 \quad (3.33)$$

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{U}{b} & \frac{UT_{10}}{\pi b} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

$$E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \left(\frac{1}{2} - a \right) & \frac{T_{11}}{2\pi} & 1 \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-c_2c_4U^2}{b^2} & \frac{-(c_2+c_4)U}{b} \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

3.3 Modelagem da não linearidade de folga

A não linearidade associada à folga de uma estrutura é ilustrada na Figura 3.2, e sua representação é feito através de uma função descontínua (HENON, 1982; CONNER et al. 1997; PATIL, M. J e HODGES, D. H., 1998). No problema tratado neste trabalho, a folga está associada à deflexão da superfície de comando (β).

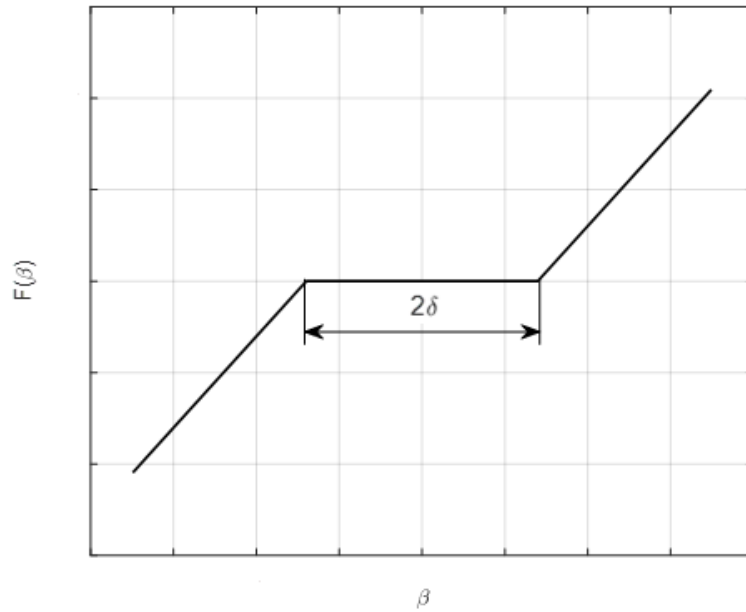


Figura 3.2 – Representação da não linearidade de folga.

A função matemática não linear que descreve a folga é dada pela seguinte função:

$$F(\beta) = \begin{cases} 0, & |\beta| \leq \delta \\ \beta - \delta, & |\beta| > \delta \end{cases} \quad (3.37)$$

sendo δ o comprimento da folga.

Devido a descontinuidade desta curva, são necessários alguns ajustes para então poder analisar o sistema. Para então integrá-la nas equações de movimento, a técnica de interpolação inversa pode ser aplicada (CONNER et al., 1997). Vasconcellos (2012), através de uma associação de tangentes hiperbólicas, representa a não linearidade de folga como:

$$F(\beta) = \frac{1}{2} [1 - \tanh(\epsilon(\beta + \delta))] (\beta + \delta) + \frac{1}{2} [1 + \tanh(\epsilon(\beta - \delta))] (\beta - \delta) \quad (3.38)$$

onde ϵ é o coeficiente responsável em suavizar e dar forma a função e quanto maior for este valor mais próxima a curva será da função descontínua original.

Além disso, a expansão polinomial, através de coeficientes de aproximação (ABDELKEFI et al., 2011, ABDELKEFI et al., 2012), pode ser empregada para representar a folga em sistemas aeroelásticos.

Para o presente trabalho em questão será realizado então um ajuste de curvas por polinômios, utilizando-se da equação descrita pelas tangentes hiperbólicas (VASCONCELLOS, 2012). Uma regressão polinomial de terceira ordem será utilizada e esta função será incorporada no sistema para as análises subsequentes.

Dado um conjunto de pontos, neste trabalho em específico foi considerado uma lista de ângulos, $(\beta_1, f(\beta_1)), (\beta_2, f(\beta_2)), \dots, (\beta_m, f(\beta_m))$ com $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$, pertencentes a um intervalo $[a, b]$ (RUGGIERO, M. A. G. e LOPES, V. R., 1996). O problema de ajuste de curvas consiste em encontrar uma função $\varphi(\beta)$ que o desvio em cada ponto β_i , é definido por:

$$\Delta_i = f(\beta_i) - \varphi(\beta_i) \quad (3.39)$$

Onde $\varphi(\beta_i)$ é uma combinação linear de funções contínuas $g_k(\beta), k = 1, 2, \dots, n$, que são analisadas de acordo com a particularidade do estudo.

A escolha das funções contínuas $g_k(\beta)$ podem se dar através de gráficos dos pontos dados ou tomando como base fundamentos teóricos do experimento que forneceu estes números. A partir disso, pode-se obter n constantes $a_0, a_1, \dots, a_n$ sendo possível chegar na Eq. (3.40):

$$\varphi(\beta) = a_0 + a_1 g_1(\beta) + \dots + a_n g_n(\beta) \quad (3.40)$$

onde $a_0, \dots, a_n$ são as constantes que dão forma a curva obtidas através da solução do sistema.

Este método consiste em determinar as constantes de $\varphi(\beta)$ que minimizam a função dada pela Eq. (3.41) demonstrada por Castilho (2003):

$$F(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = \sum_{i=1}^m [f(\beta_i) - (a_1 g_1(\beta) + \dots + a_n g_n(\beta))]^2 \quad (3.41)$$

A função F é uma função que satisfaz $F(\beta) \geq 0$ tal que $\beta \in \mathbf{R}^n$. Isto é, uma função limitada inferiormente e, portanto, esta tem um ponto mínimo (CASTILLO, 2003). Que pode ser encontrado através do teste da primeira derivada, sendo:

$$\left. \frac{\partial F}{\partial \beta_i} \right|_{\beta_1, \dots, \beta_n} = 0 \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.42)$$

A partir da Eq. (3.42) é encontrado um sistema linear da forma $n \times n$ que só possui uma única solução se os vetores formados por $g_k(\beta)$ forem linearmente dependentes. A resolução desta equação é encontrada no Apêndice C.

Desta forma, o ajuste de curvas para o trabalho em questão resulta em uma função polinomial de terceiro grau, da seguinte forma:

$$F(\beta) = a_0 + a_1g_1(\beta) + a_2g_2(\beta)^2 + a_3g_3(\beta)^3 \quad (3.43)$$

CAPITULO IV

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Neste capítulo serão apresentados e analisados os resultados do trabalho. O estudo foi dividido em análise do sistema sem folga e com folga, neles são amostrados, a velocidade crítica de flutter, tamanho de folga adotado e entre outros parâmetros. Logo após, é feita uma conferência entre as orbitas dos dois sistemas. Além disso, foi realizado o tratamento dos resultados em formas de gráficos comparativos. Gráficos serão bastante utilizados neste trabalho para expor as diversas situações com o objetivo de entender o comportamento de uma seção típica sujeito aos efeitos da folga (*freeplay*).

4.1 – Análise sem folga do sistema

A aeroelasticidade possui duas grandes áreas, a aeroelasticidade estática, a qual estuda os fenômenos associados com a interação das forças aerodinâmicas induzidas por um escoamento estável e as deformações elásticas resultantes de uma estrutura flexível sustentadora (HODGES e PIERCE, 2011) e a aeroelasticidade dinâmica que se concentra a estudar os fenômenos de instabilidade dinâmica em uma aeronave que estão associados com a interação das forças aerodinâmicas, elásticas e inerciais (DOWELL, 2002). Desta forma, toda a análise vai focar em estudar o flutter, um dos fenômenos principais da aeroelasticidade dinâmica. O sistema linear deste trabalho é caracterizado pela seção típica de 3GDL com superfície de controle sem folga e o sistema não linear é marcado pela presença da folga. Os parâmetros e dados utilizados no problema para o aerofólio em questão encontram-se na Tabela 2 (PEREIRA, 2015). Os parâmetros foram obtidos experimentalmente através de ensaios e da construção de um aerofólio pelo trabalho de Pereira (2015), o qual efetuou uma investigação modal com túnel de vento desligado com o objetivo de identificar e caracterizar o sistema dinâmico-estrutural do dispositivo construído. A partir deste

experimento foi possível descobrir para cada GDL, as suas frequências naturais, que serão necessárias para as simulações numéricas subsequentes. Também, através desta análise é possível determinar também os fatores de amortecimento para os GDL de torção, flexão e superfície de controle. Outros parâmetros geométricos da asa, como a posição de CG, massa e momento de inércia para obtenção dos raios de giração, foram descobertos por ele através de um desenho em software de projeto e desenho computacional.

Tabela 2. Dados utilizados para os cálculos. (PEREIRA, 2015)

Variáveis	Especificações	Valores (S.I.)
b	Semi-corda	0,125
a	Porcentagem da distância da semi corda até o eixo elástico	0,5
c	Porcentagem da dobradiça da SC em relação a semi corda	0,5
ρ	Densidade do ar	1,078
m_W	Massa da asa	1,5
m_T	Massa da asa e suportes	4,372
ω_h	Frequência desacoplada de flexão	27,326
ω_α	Frequência desacoplada de torção	12,111
ω_β	Frequência desacoplada da superfície de controle	52,106
x_α	Porcentagem da distância entre o CG e o eixo elástico	0,66
x_β	Porcentagem da distância entre o CG e o eixo da superfície de controle	0,0028
r_β	Raio de giração (torção)	0,7303
μ	Raio de giração (flexão)	28,346
ζ_h	Fator de amortecimento de flexão	0,0106
ζ_α	Fator de amortecimento de torção	0,3697
ζ_β	Fator de amortecimento da SC	0,1275

Os valores para a matriz de amortecimento são então calculados e definidos nesta sessão, a qual é obtida através de uma aproximação numérica de Rayleigh, dadas pela Eq. (4.1):

$$[C] = Rf_0[M] + Rf_1[K] \quad (4.1)$$

onde Rf_0 e Rf_1 são denominados de fatores de Rayleigh, $[C]$, $[M]$ e $[K]$ são as matrizes de amortecimento, de massa e de rigidez.

Os fatores de Rayleigh descritos acima são encontrados através da solução de um par de equações simultânea, onde os fatores de amortecimento, ζ_m e ζ_n , associados com duas frequências naturais desacopladas específicas, ω_m e ω_n , forem conhecidas, os quais são dados por:

$$\begin{Bmatrix} Rf_0 \\ Rf_1 \end{Bmatrix} = 2 \left(\frac{\omega_m \omega_n}{\omega_n^2 - \omega_m^2} \right) \begin{bmatrix} \omega_n & -\omega_m \\ -1 & 1 \\ \omega_n & \omega_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \zeta_m \\ \zeta_n \end{Bmatrix} \quad (4.2)$$

Para solucionar a Eq. (4.2) foram assumidos os seguintes valores:

$$\begin{aligned} \zeta_m &= \zeta_\alpha \\ \zeta_n &= \zeta_\beta \\ \omega_m &= \omega_\alpha \\ \omega_n &= \omega_\beta \end{aligned} \quad (4.3)$$

Feito a substituição dos respectivos valores na Eq. (4.2) é possível calcular a matriz de amortecimento estrutural através da Eq. (4.1) e sua solução encontra-se na Tabela 3, onde se encontram os valores para cada termo da matriz.

Tabela 3. Valores dos coeficientes de amortecimento. (PEREIRA, 2015)

Coeficientes de amortecimento	Valores (Ns/m)
$d_{1,1}$	25,0423
$d_{1,2}$	6,2304
$d_{1,3}$	0,0264
$d_{2,1}$	6,2304
$d_{2,2}$	4,7756
$d_{2,3}$	0,0784
$d_{3,1}$	0,0264
$d_{3,2}$	0,0784
$d_{3,3}$	0,0059

Através da análise da aerodinâmica não-estacionaria prevista por Theodorsen (1935) é possível descrever e encontrar a equação para os momentos e esforços aerodinâmicos. Assume-se para problema em questão com o intuito de encontrar os valores da função de Theodorsen, $C(k)$, valores de frequência reduzida (k) maior que

0,1 e ângulos de ataque menor que 20 graus, fazendo-se o uso de uma variável aumentada com o auxílio da função de Wagner. Depois de determinar o modelo aerodinâmico, as equações do movimento encontradas no capítulo III são aplicadas e transformadas para a forma de espaço de estados. Feito isso, a equação final é resolvida através de um método numérico de solução de equações ordinárias diferenciais, o Runge-Kutta de quarta ordem, um dos mais preciosos para obter soluções aproximadas de valor inicial.

Nas figuras 4.1 e 4.2 têm-se a evolução dos autovalores do sistema aeroelástico através da solução do problema de autovalor para o aerofólio de 3GDL com superfície de controle, onde o vetor k , a frequência reduzida, usado no programa de resolução do problema é variado de 1 a 16000 para obtenção dos valores reais e imaginários dos autovalores, sendo possível identificar na figura 4.1 a velocidade crítica de flutter. Esta velocidade ocorre onde dois ou mais modos de vibrar estruturais da asa estão acoplados e excitados por cargas aerodinâmicas, ou seja, este fenômeno ocorre quando um componente de uma aeronave, apresenta oscilações auto excitadas a partir de uma determinada velocidade de voo, a velocidade crítica de flutter. Este ponto é determinado quando a parte real do autovalor atinge o valor zero, onde ocorre o acoplamento de dois ou mais modos de vibrar da aeronave, atingindo um valor crítico no qual a oscilação se mantém com amplitude fixa. Este ponto crítico foi encontrado uma velocidade do escoamento de 11,445 m/s. Na figura 4.2 é possível identificar as frequências naturais do sistema quando a velocidade de escoamento é igual a zero para cada GDL, que são: 1,56Hz, 3,27Hz e 8,32Hz. Estes valores de frequências são confrontados com os resultados computacionais obtidos por Pereira (2015), conforme mostrado na Tabela 4:

Tabela 4 – Comparação das frequências naturais obtidas computacionalmente.

Frequências (Hz) (PEREIRA, 2015)	Frequências (Hz)	Erro Relativo (%)
1,54	1,56	1,17
3,26	3,27	0,21
8,01	8,32	3,81

Também, pode-se destacar como os modos das frequências de 1,6 Hz e 3,7 Hz possuem a tendência de se coalescer quando se aproximam de velocidades próximas à de flutter (Figura 4.2).

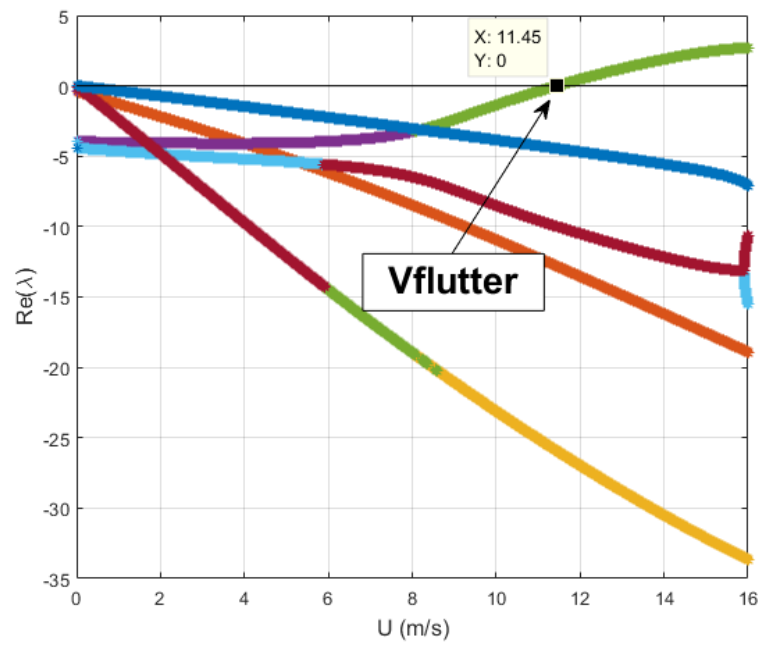


Figura 4.1 - Parte real dos autovalores.

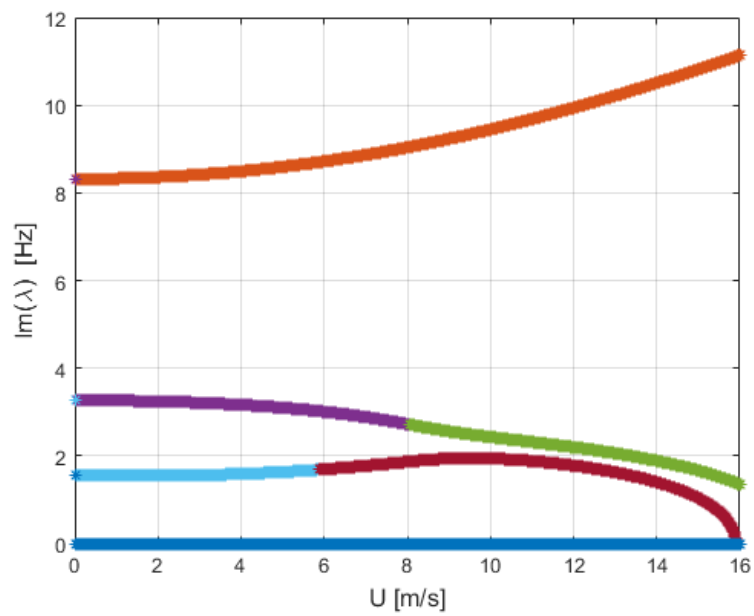


Figura 4.2 - Parte imaginária dos autovalores.

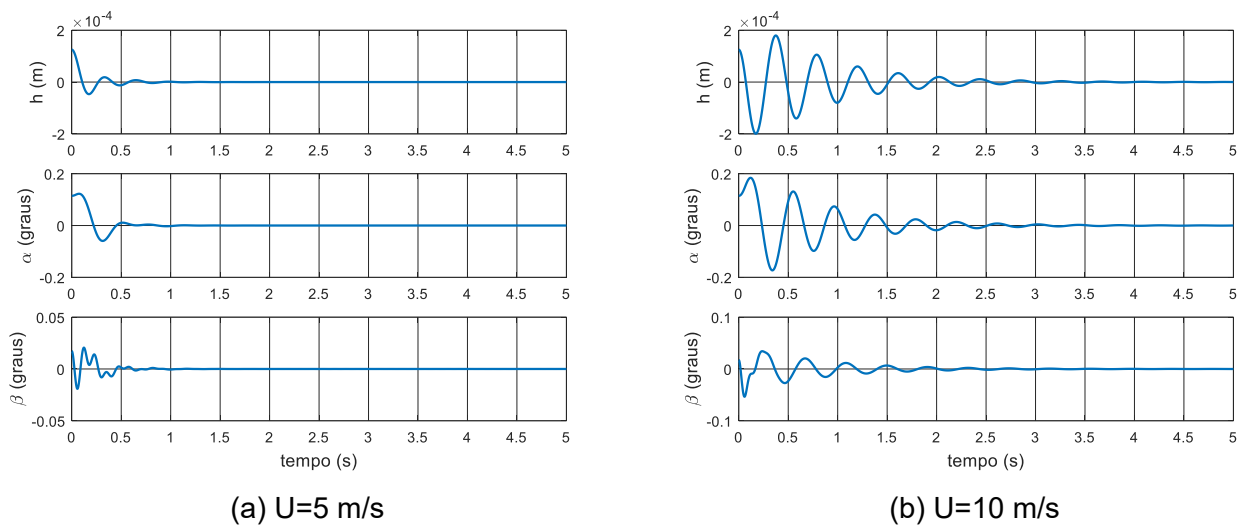


Figura 4.3 – Resposta do sistema linear no domínio do tempo nas velocidades de 5 e 10 m/s.

Foram escolhidas algumas situações para melhor caracterizar o sistema sem folga. A análise se dá por quatro situações, $U=5$ m/s, $U=10$ m/s, $U=12$ m/s e na velocidade de flutter. Utilizou-se um $\Delta t = 1 \times 10^{-3}$ para integração numérica com as seguintes condições iniciais:

$$\begin{aligned}
 X_0 = & \begin{aligned} & \xi_0 = 1 \times 10^{-6} \\ & \alpha_0 = 0 \\ & \beta_0 = 0 \\ & \dot{\xi}_0 = 0 \\ & \dot{\alpha}_0 = 0 \\ & \dot{\beta}_0 = 0 \\ & \overline{x_0} = 0 \\ & \dot{\overline{x_0}} = 0 \end{aligned}
 \end{aligned}$$

A integração numérica, como dita anteriormente, se baseou na resolução das equações ordinárias diferenciais através do método de Runge-Kutta, a partir de funções disponibilizadas em Matlab®. A primeira o escoamento sobre o aerofólio está em uma velocidade baixa caracterizando a resposta do sistema a um fator de amortecimento bem, na segunda tem-se a aceleração do escoamento para o dobro da velocidade sendo possível estudar o comportamento da seção típica a este aumento uma diminuição no fator de amortecimento, a terceira se dá num momento pós flutter, observa-se como o sistema vai se comportar e reagir e a última, o aerofólio se encontra em sua velocidade de flutter, podendo então observar e validar as oscilações e características para este evento amplamente conhecido na literatura.

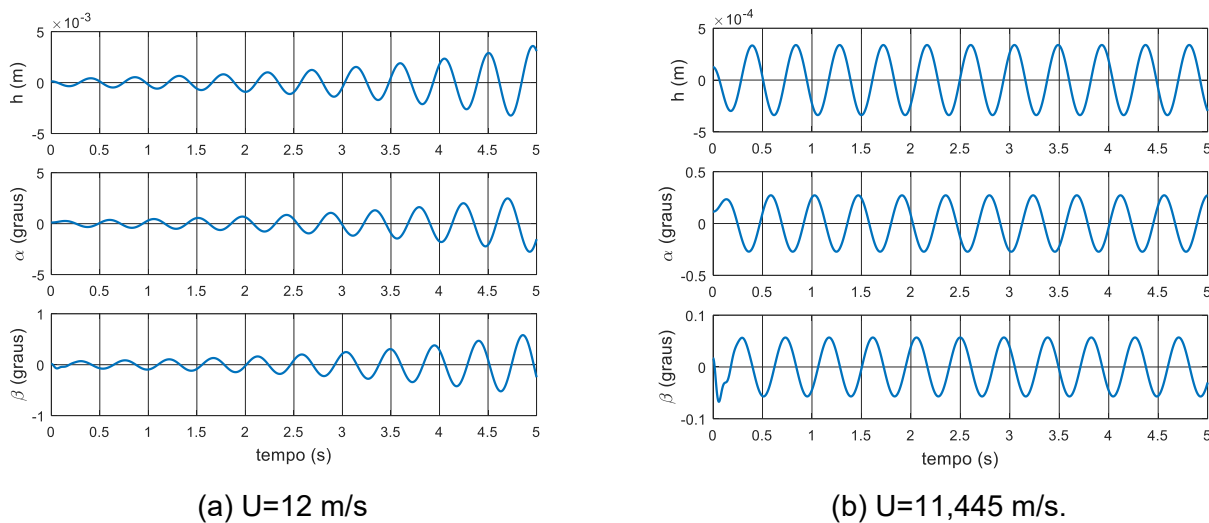


Figura 4.4. – Resposta do Sistema linear no domínio do tempo nas velocidades de flutter e 12 m/s.

Na figura 4.3a tem-se o comportamento do sistema a um escoamento livre de 5 m/s. Percebe-se a característica de um sistema dinâmico subamortecido que em menos de 1s volta ao seu ponto de equilíbrio. Neste gráfico, o comportamento do GDL associado à superfície de controle é o que sofre uma oscilação transiente no início do movimento, diferentemente dos demais GDL. Enquanto que na figura 4.3b, com o dobro da velocidade avaliado na figura 4.3a, o sistema possui valores de amplitude maiores e se estabiliza somente por volta dos 3s. O GDL de β possui um período maior de oscilação e uma amplitude de rotação menor que se comparado com o GDL de torção que possui amplitudes com valores de aproximadamente o triplo das de superfície de controle. E para a torção, da figura 4.3a para a 4.3b este aumenta o dobro de sua amplitude para os primeiros segundos, estabilizando por volta de 1s na figura 4.3a e aproximadamente em torno dos 3s na figura 4.3b.

Na figura 4.4a percebe-se como o sistema tem um comportamento divergente, aumentando gradativamente a sua amplitude e não voltando para seu ponto de equilíbrio, caracterizando então que o sistema já passou da sua velocidade crítica e encontra-se instável. Destaca-se o que a amplitude de arfagem é quase 5 vezes maior que o nível de oscilação da superfície de controle aos 5s. Enquanto que na figura 4.4b a seção típica analisada está na situação crítica, tendo as suas amplitudes de oscilação constantes, caracterizando que está exatamente em sua velocidade de flutter. Para os 3 GDLs pode ser observado que da figura 4.4b para 4.4a a ordem destes aumenta em

10x, como o grau de flexão que possui valores máximos em torno de $5 \times 10^{-4} m$ na figura 4.4b e de $5 \times 10^{-3} m$ na figura 4.4a.

4.2 – Análise com folga do sistema

Nesta seção será feito a análise do sistema com folga, a qual é incorporada nas equações do sistema dinâmico aeroelástico do aerofólio com superfície de comando, seus efeitos e características foram estudados e descritos abaixo.

A função que descreve esta não linearidade é apresentado na seção 4.2.1, no qual um ajuste de curvas polinomial do 3 grau é utilizado. Esta não-linearidade é acoplada ao sistema dinâmico por meio da matriz de rigidez, através da inclusão da expressão não-linear. As simulações computacionais, de maneira análoga à apresentada na seção anterior, são realizadas a partir da resolução das equações diferenciais ordinárias através do método de Runge-Kutta de 4ª ordem.

Existem duas principais consequências para os efeitos não lineares nos sistemas aeroelásticos. Uma primeira consequência consiste na existência das oscilações de ciclo limite (LCO), caracterizada por um nível constante de oscilação quando a seção típica operar em velocidades aerodinâmicas maiores que a velocidade crítica de flutter. Este comportamento difere do comportamento instável obtido pelo sistema linear, conforme discutido na seção anterior. Isto se dá, especificamente, devido à presença da não linearidade. A segunda principal consequência é inteiramente prejudicial a estrutura, em se tratando de uma LCO com amplitudes altas. A LCO estável existirá quando uma pequena perturbação, o movimento retorna para a mesma LCO depois de um certo tempo. E a LCO instável é aquela que para qualquer pequena perturbação causará a instabilidade destas LCO aumentando cada vez mais suas amplitudes (DOWELL,2002). Tem-se o interesse em caracterizar os efeitos da implementação da folga no sistema, o aparecimento das oscilações em ciclo limite e como se comportam.

4.2.1 – Representação da não linearidade de folga

Recapitulando, a função que melhor representa a não linearidade de folga é dada pela Eq. (3.37):

$$F(\beta) = \begin{cases} 0, & |\beta| \leq \delta \\ \beta - \delta, & |\beta| > \delta \end{cases}$$

sendo, δ o comprimento da folga.

Sabe-se que devido a descontinuidade da curva, conforme pode ser visto na figura 4.5, tem-se a necessidade de uma reformulação para incorporá-la no sistema dinâmico da seção típica de 3GDL com superfície de controle. Para então integrá-la nas equações de movimento, a técnica de interpolação inversa pode ser aplicada (CONNER et al., 1997). Vasconcellos (2012), através de uma associação de tangentes hiperbólicas, representada pela Eq. (3.38).

Para este trabalho será realizado um ajuste de curvas através de polinômios, usando como referência a formulação descrita pelas tangentes hiperbólicas (VASCONCELLOS, 2012). Este ajuste consiste em encontrar uma função $\varphi(\beta)$ que representa a combinação linear de funções contínuas $g_k(\beta)$ que são analisadas de acordo com a particularidade do estudo, esta função continua por exemplo neste caso representa uma lista de ângulos de deslocamento da superfície de controle, visto que a folga é encontrada nesta. Agora, é necessário determinar o grau do polinômio dado na Eq. (3.40) que representará a função $\varphi(\beta)$. Neste estudo será utilizado um polinômio de grau 3 para modelagem da não linearidade de folga. A partir disso, através de um método demonstrado por Castilho (2003) é possível encontrar a solução para as constantes do polinômio da função $\varphi(\beta)$, este método consiste na resolução de vários sistemas lineares da forma $n \times n$, conforme Apêndice C. Varia-se arbitrariamente o valor da folga entre 1 a 4 graus para obtenção das constantes do polinômio de terceiro grau que dará a forma para a folga.

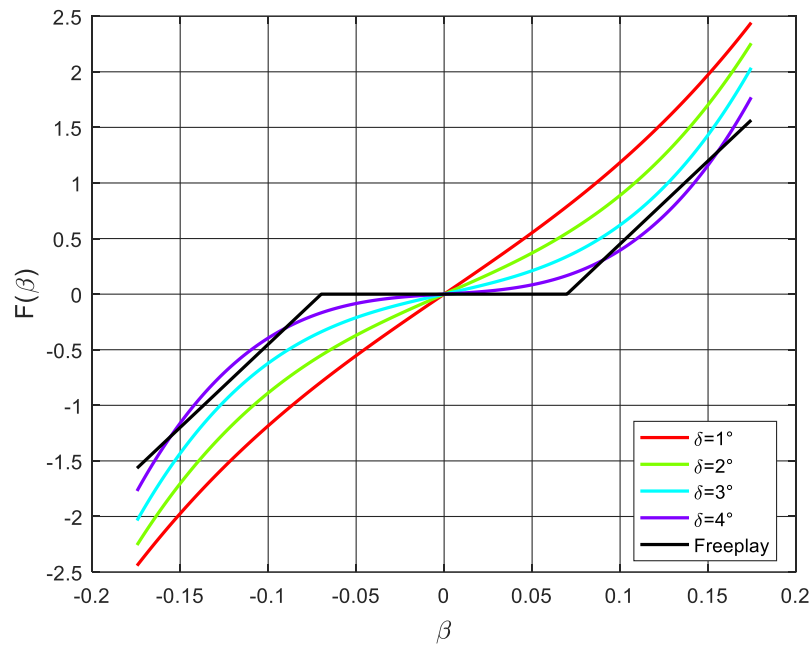


Figura 4.5 – Gráfico da função polinomial da não linearidade de folga.

Tabela 5 – Evolução dos valores dos coeficientes polinomiais para cada valor de folga.

	a_0	a_1	a_2	a_3
$\delta = 1^\circ$	0	0,3929	0	8,1014
$\delta = 2^\circ$	0	0,1504	0	13,4338
$\delta = 3^\circ$	0	0,0553	0	17,1710
$\delta = 4^\circ$	0	0,0190	0	19,5863

A figura 4.5 representa os resultados obtidos do ajuste de curvas mencionados acima, para os valores de 1 a 4 graus de folga e além do mais a representação não linear da folga. A Tabela 5 mostra os valores das constantes que deram origem aos gráficos da figura acima, estes serão substituídos na Eq. (3.43) conforme se segue:

$$F(\beta) = a_0 + a_1 g_1(\beta) + a_2 g_2(\beta)^2 + a_3 g_3(\beta)^3$$

onde com os valores da Tabela 5, é possível então dar forma para o polinômio de terceiro grau que será incorporado na matriz das equações de movimento do aerofólio estudado.

4.2.2 – Influência da não linearidade no sistema

Nesta seção são apresentados os resultados obtidos no domínio do tempo para o problema aeroelástico não linear. Para ser observado os efeitos e características das oscilações da seção típica com o adição da não linearidade no sistema dinâmico são escolhidos dois valores de folga, 2° e 4° , com estes números será possível identificar pontualmente as principais diferenças e semelhanças nas diversas condições de simulações numéricas estudadas abaixo.

As figuras 4.6 a 4.8 mostram a comparação da resposta da seção típica linear com a resposta do sistema com folga na superfície de controle com amplitude de 2° . São avaliadas as respostas dinâmicas de todos os graus de liberdade: flexão, torção e superfície de controle.

Na figura 4.6a tem-se o sistema aeroelástico em questão sob um escoamento de 8m/s. É notável que este sistema dinâmico possui uma característica de sistema subamortecido para as duas condições analisadas. Além do mais, os graus de liberdade sofrem variações na amplitude, onde os gráficos de resposta de flexão e torção também terão um acréscimo em suas oscilações enquanto que para a superfície de controle ocorre o contrário. Agora com o aumento da velocidade de escoamento para 10m/s conforme a figura 4.6b, na comparação da solução para a superfície de controle os resultados continuam praticamente constante para os observados na figura 4.6a. Já para as outras duas soluções, flexão e torção, temos um aumento nas amplitudes e uma diferença de fase entre as amplitudes, o sistema linear tende a se estabilizar em um período menor que o sistema com folga, sendo que o último apresenta amplitudes um pouco maiores que o primeiro.

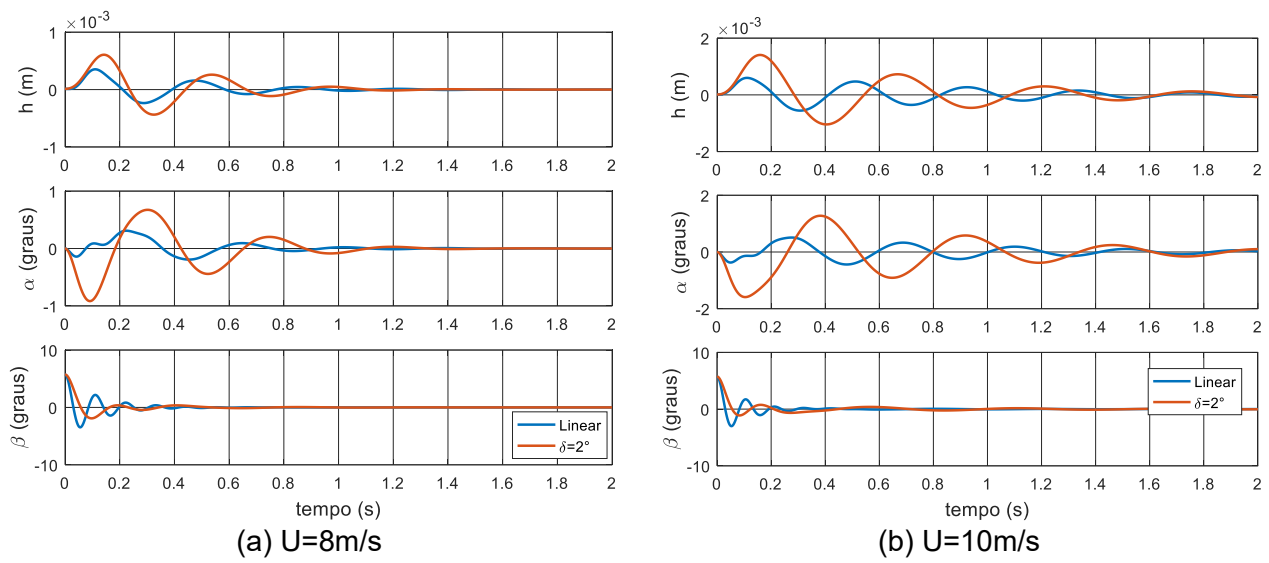


Figura 4.6 – Comparação do sistema com folga de 2 graus submetidos a escoamentos com velocidades de 8 m/s e 10 m/s.

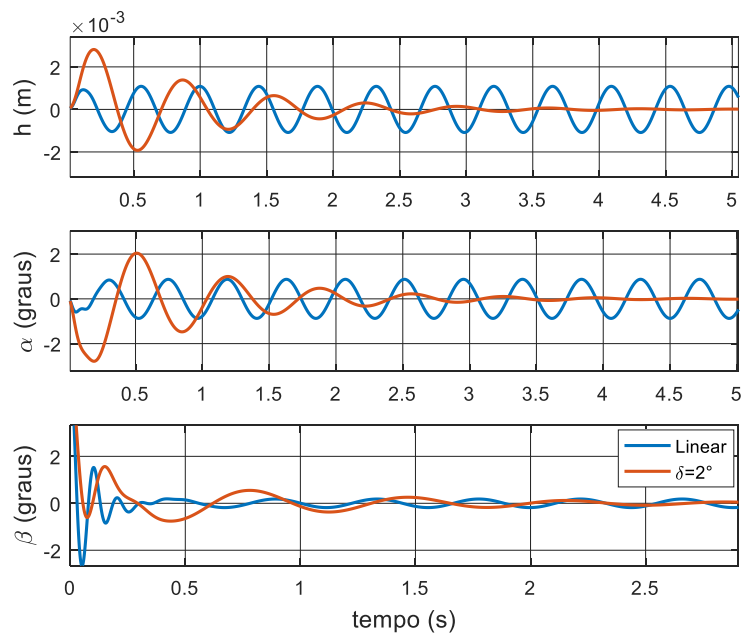


Figura 4.7 – Comparação do sistema com folga de 2 graus sob um escoamento na velocidade de flutter.

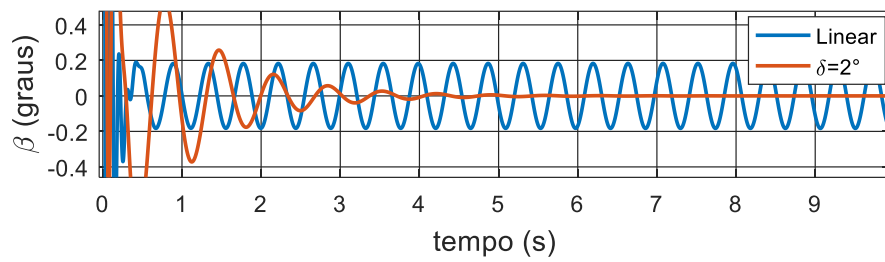


Figura 4.8 – Visão aumentada do GDL da SC com 2 graus de folga.

Na figura 4.7, o sistema aeroelástico com folga de 2 graus na velocidade de flutter apresenta ainda um decaimento da amplitude ao decorrer do tempo, demonstrando então que a não linearidade alterou as características dinâmicas do sistema linear. Nota-se ainda que há um grande aumento na amplitude nos segundos iniciais do movimento, principalmente para o grau de liberdade representado pela superfície de controle que é preciso ampliar-se a imagem para melhor visualizar a característica do sistema linear na velocidade de flutter, como amostrado na figura 4.8, a oscilação constante e para o sistema com folga, a energia adquirida devido a excitação é dissipada em torno dos 4s.

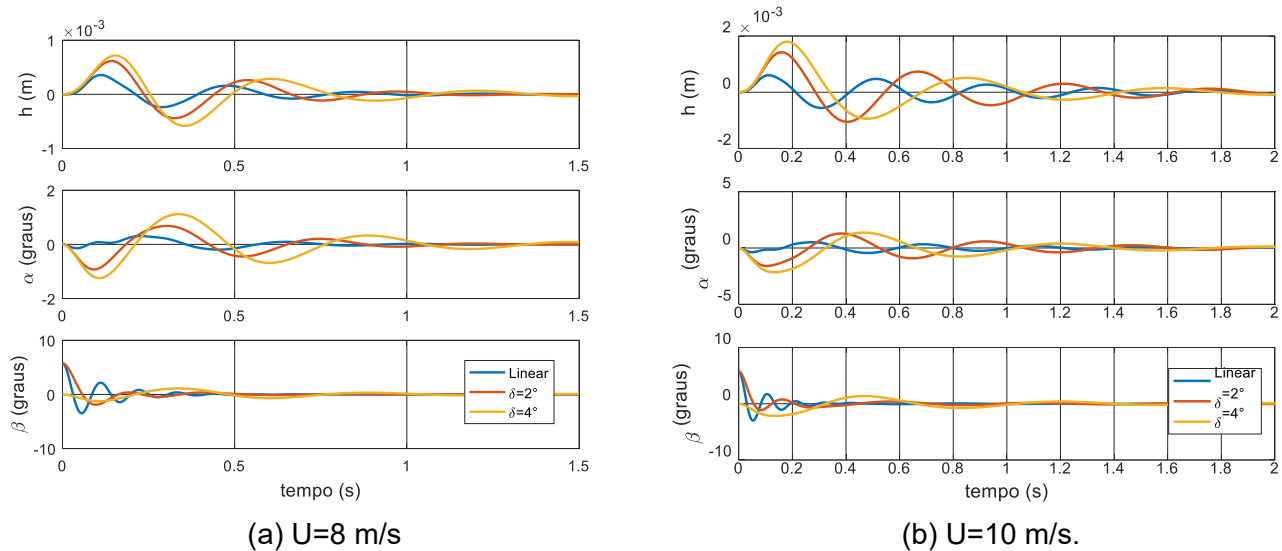


Figura 4.9 – Comparação do sistema com folgas e sob escoamento de 8 m/s e 10 m/s.

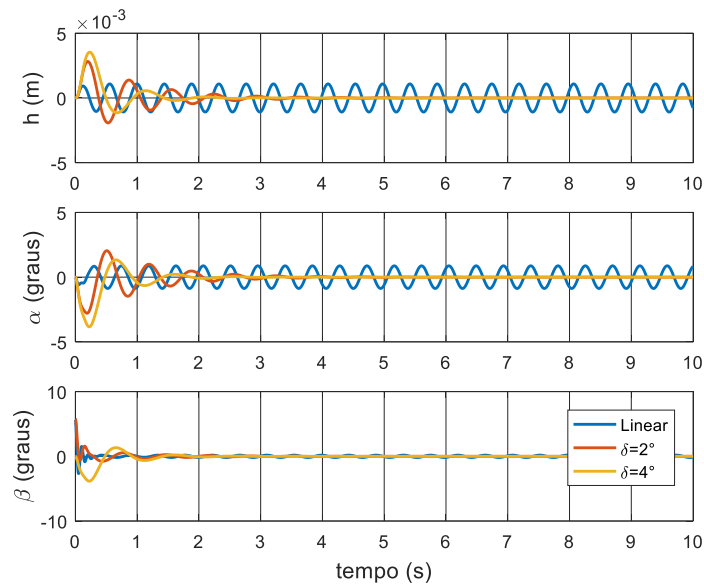


Figura 4.10 – Comparação do sistema com folgas e escoamento na velocidade de flutter.

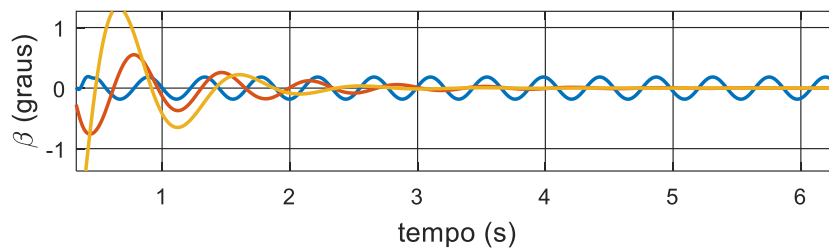


Figura 4.11 – Visão aumentada do GDL da SC com 4 graus de folga.

Nas figuras 4.9 a 4.11 é feito a comparação da seção típica em três situações: linear, folga de 2 graus e folga de 4 graus. Com o aumento do tamanho da folga percebe-se que mesmo para a velocidade de 8 m/s (Figura 4.9a) é possível perceber um aumento de amplitude nos graus de liberdade, destacando-se nas respostas da flexão e de torção enquanto que para a superfície de controle ocorre uma diminuição. Para estes dois há também um aumento no período de oscilação. Na figura 4.9b, o ciclo de oscilação do sistema de folga de 4 graus terá variações consideráveis comparados com os demais, tendo uma diminuição na amplitude somente para o terceiro grau de liberdade enquanto que para os demais graus de liberdade a amplitude de oscilação terá um acréscimo se comparadas com os da figura 4.9a.

Na velocidade crítica, o sistema com folga de 4 graus apresenta na figura 4.10 um comportamento bem diferente dos demais, demonstrando uma grande mudança na

característica dinâmica do sistema inicial para o com implementação da folga. Na figura 4.11, onde tem-se a análise ampliada da resposta da superfície de controle, pode ser observado o grande aumento de amplitude com o acréscimo do tamanho da folga.

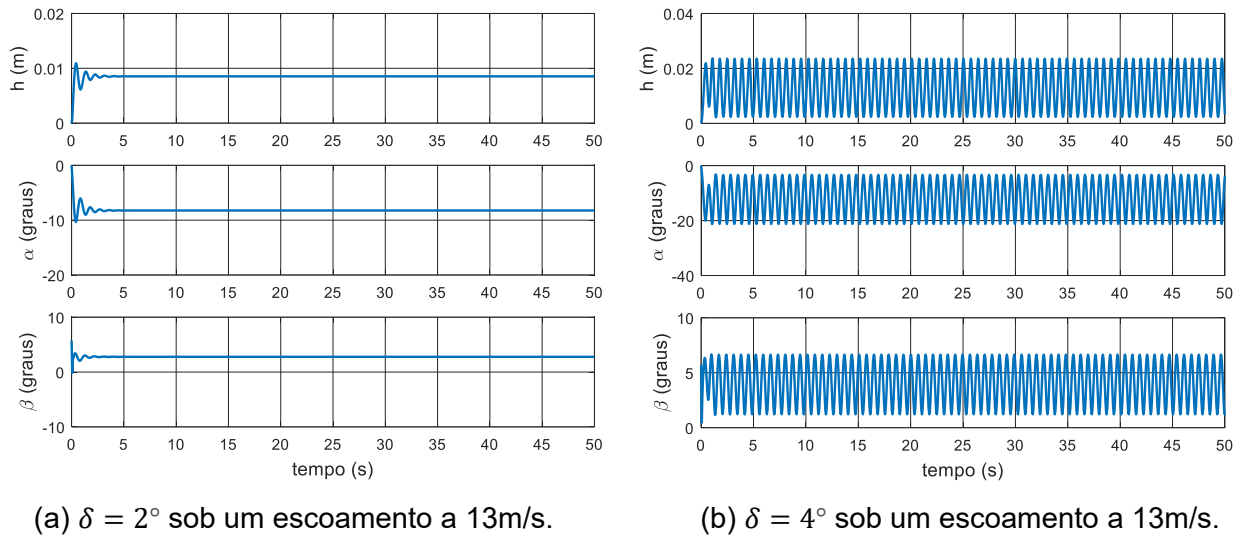


Figura 4.12 – Representação dos LCO em $U=13$ m/s.

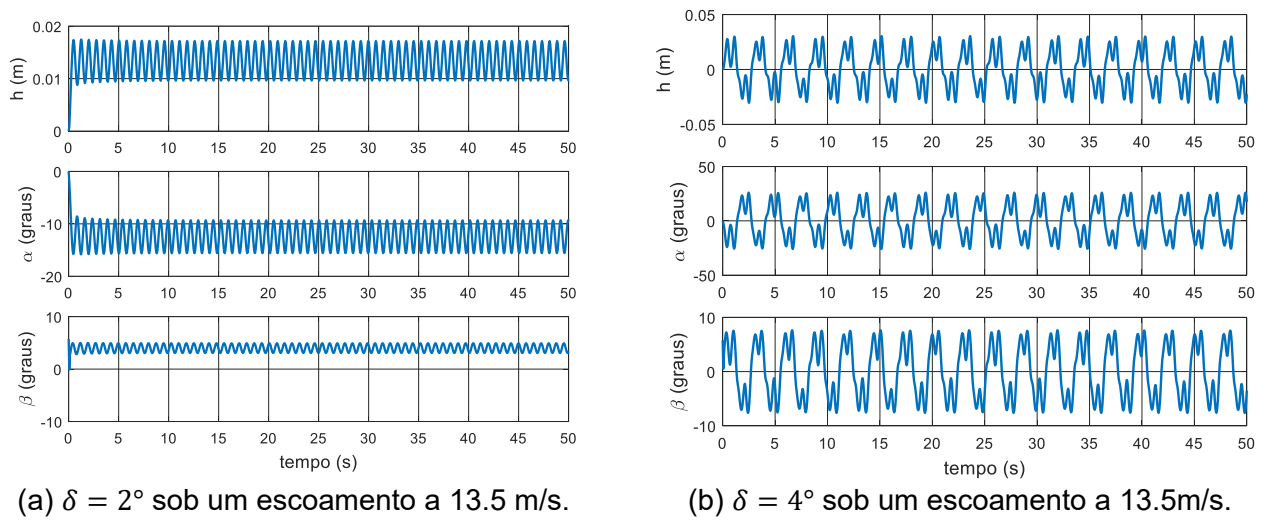
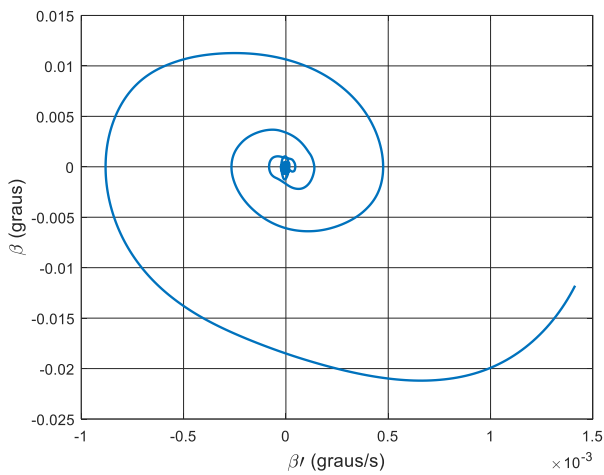


Figura 4.13 – Representação dos LCO em $U=13.5$ m/s.

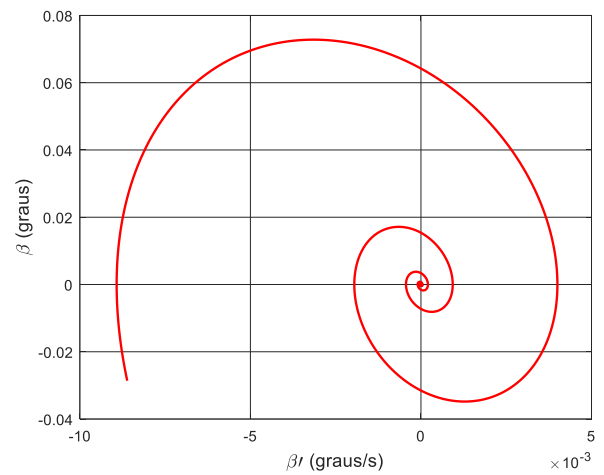
Para o resultado de flutter obtido pelo sistema linear é inferido que pequenas perturbações irão crescer exponencialmente em velocidades maiores que a velocidade de flutter. Mas para o sistema não linear como a amplitude de oscilação cresce, também a rigidez não linear irá aumentar de valor e assim as vibrações não crescerá para o infinito mas convergirá para os ciclos limites de oscilação (LCO) (PATIL, M. J. e HODGES, D. H., 1998), os quais estão representados nas figuras 4.12 e 4.13, para ambos os casos, 2 e 4 graus de folga. Na figura 4.12a, percebe-se que o sistema ainda não experienciou o fenômeno descrito anteriormente para uma velocidade de 13m/s. Em contrapartida na figura 4.12b, para o mesmo escoamento só que com para o sistema com folga de 4 graus pode perceber as LCOs. Agora, na figura 4.13a para um pequeno aumento da velocidade de escoamento, o sistema com folga de 2 graus já chega ao ponto onde pode ser notado as LCOs. Finalmente, para a figura 4.13b a distorção nas oscilações das soluções dos autovalores é devido a rigidez não linear introduzida no sistema. Com velocidades menores o sistema com um comprimento de folga maior adquire um LCO de amplitude maior e com uma frequência de oscilação maior, comparando os dois casos de folga, 2 e 4 graus.

4.3 – Análise das Órbitas

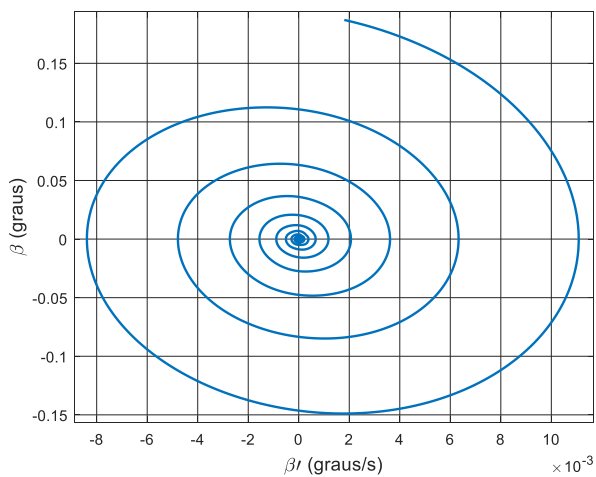
Abaixo apresentam-se as análises das orbitas para o terceiro grau de liberdade (superfície de controle - $\beta(t)$), o deslocamento e sua velocidade, respectivamente. Para as figuras 4.14a e 4.14b, o escoamento está sob 8m/s, as figuras 4.15a e 4.15b a velocidade do escoamento livre é de 10m/s, enquanto que para as figuras 4.16a e 4.16b o sistema se encontra na velocidade de flutter do sistema linear e por fim as figuras 4.17a e 4.17b já se encontra em uma velocidade de 13m/s, condição pós flutter, com o intuito de evidenciar o efeito da orbita com a geração do ciclo limite de oscilação para o sistema não linear com folga.



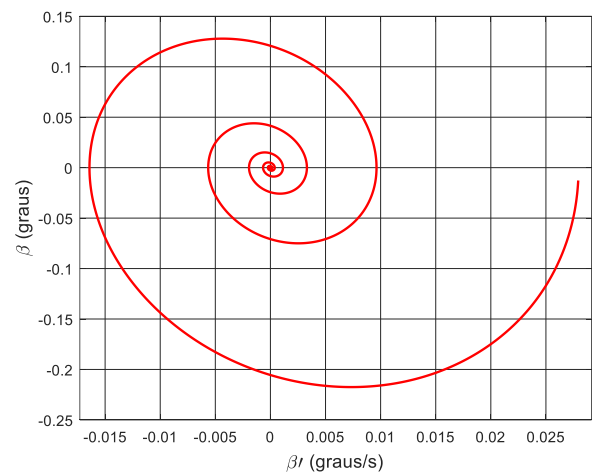
(a) Sem folgas.

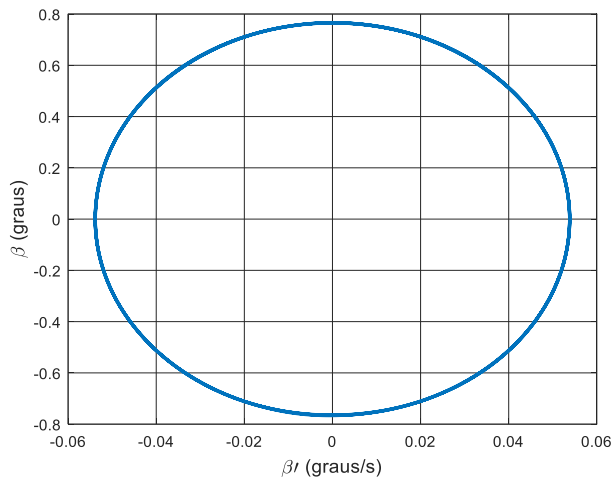
(b) Caso não linear. ($\delta = 4$)Figura 4.14 – Análise de órbitas para a superfície de controle. $U=8\text{m/s}$

Percebe-se da figura 4.14b o aumento na amplitude de oscilação comparado com o da figura 4.14a, onde chega a valores um pouco maiores que 0,01 enquanto que para o sistema com folga este aproxima a valores de 0,08. Também, a mudança na frequência oscilação do sistema, com velocidades maiores que o sem folga.



(a) Sem folgas.

(b) Caso não linear. ($\delta = 4$)Figura 4.15 – Análise de órbitas para a superfície de controle. $U=10\text{m/s}$



(a) Sem folgas.

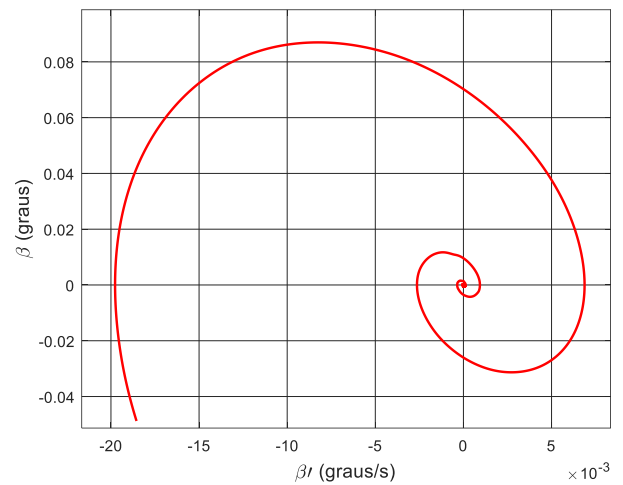
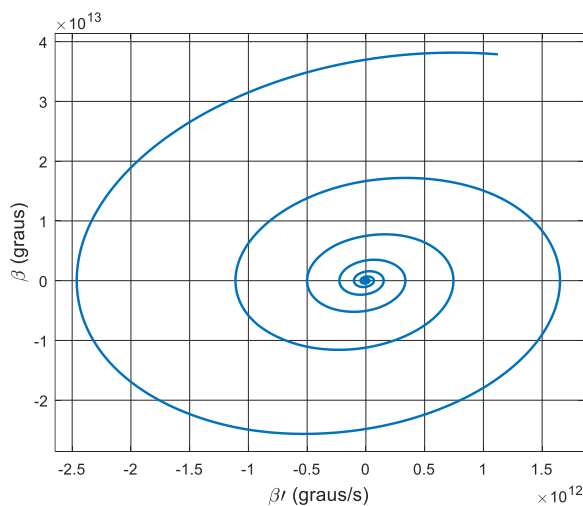
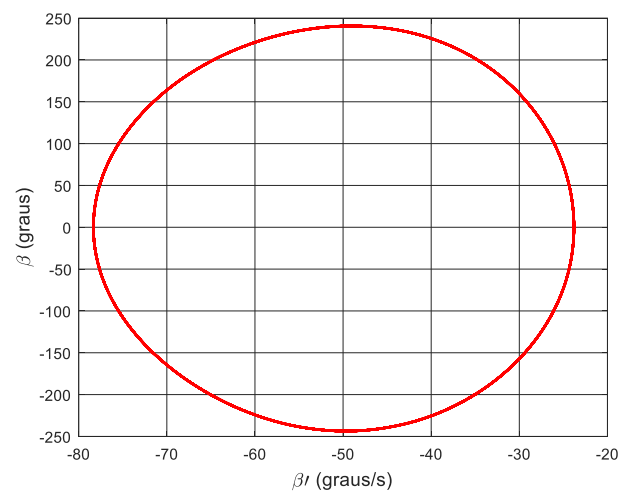
(b) Caso não linear. ($\delta = 4$)

Figura 4.16 – Análise de órbitas para a superfície de controle na velocidade de flutter.

Para o escoamento a uma velocidade de 10m/s a figura 4.14 apresenta quase que nenhuma variação de amplitude para os dois casos. Destacando-se que para figura 4.15a o sistema está com uma frequência de oscilação maior que o caso com folgas, a figura 4.15b está com uma forma similar com a do caso linear da figura 4.14a, porém com amplitudes com valores maiores.



(a) Sem folgas.

(b) Caso não linear. ($\delta = 4$)Figura 4.17 – Análise de órbitas para a superfície de controle. $U=13\text{m/s}$

O sistema linear em sua velocidade crítica apresenta uma órbita bem definida, de acordo com a figura 4.16a, enquanto que na figura 4.16b pode-se notar como o caso não linear não está totalmente instável ainda, apresentando um movimento peculiar de suas órbitas.

Em velocidades um pouco mais altas que a de flutter, já é possível ser observado os ciclos limite de oscilação, como na figura 4.17b, apresentando um formato diferente que o da figura 4.17a, uma órbita com uma certa assimetria, enquanto que o sistema linear da figura 4.17a, continua a aumentar a sua amplitude exponencialmente por não possuir uma rigidez não linear, gerando este efeito com amplitudes altíssimas.

CAPÍTULO V

CONCLUSÕES

Neste trabalho foi apresentado um estudo sobre os efeitos da não linearidade estrutural de folga incorporados no sistema dinâmico aeroelástico de uma seção típica de três graus de liberdade com superfície de controle. A não linearidade de folga é aplicada no movimento da superfície de controle.

Para a modelagem matemática que sucedeu nas análises de resultados, foi utilizado a aerodinâmica não-estacionaria combinada com a dinâmica estrutural de um sistema mecânico. A aerodinâmica não estacionária segue o que é detalhado por Theodorsen (1935), um modelo tridimensional com ângulos de ataque menor que 20 graus e frequência reduzida para movimentos arbitrários de uma seção típica. As equações do movimento se deram através do princípio das equações de Lagrange, que relaciona energia cinética e potencial da seção típica de 3GDL em questão. A partir de um ajuste de curvas polinomial cúbico da função descontínua de folga é então introduzida na matriz de rigidez.

De acordo com os dados experimentais e numéricos retirados da referência Pereira (2015) obteve-se um valor de velocidade de flutter do sistema linear aeroelástico com apenas 0,17% de erro relativo, o que mostra um resultado satisfatório dos cálculos. A análise prévia do sistema sem folgas é caracterizada por ser um sistema mecânico subamortecido pelo modo com que o mesmo se responde a perturbações e tende ao voltar ao seu equilíbrio.

Existem duas principais consequências para os efeitos não lineares nos sistemas aeroelásticos. Uma primeira consequência consiste na existência das oscilações de ciclo limite (LCO), caracterizada por um nível constante de oscilação quando a seção típica operar em velocidades aerodinâmicas maiores que a velocidade crítica de flutter. Este comportamento difere do comportamento instável obtido pelo sistema linear, conforme discutido na seção anterior. Isto se dá, especificamente, devido

à presença da não linearidade. A segunda principal consequência é inteiramente prejudicial a estrutura, em se tratando de uma LCO com amplitudes altas. A LCO estável existirá quando uma pequena perturbação, o movimento retorna para a mesma LCO depois de um certo tempo. E a LCO instável é aquela que para qualquer pequena perturbação causará a instabilidade destas LCO aumentando cada vez mais suas amplitudes (DOWELL,2002).

De acordo com os resultados obtidos, as não linearidades de folgas ao ser incorporadas ao sistema mudam as características dinâmicas, período de oscilação, fator de amortecimento, amplitudes. É notável que o sistema aeroelástico com folga não deixa de possuir uma vibração subamortecido quando comparado ao sistema linear, possuindo variações apenas nas frequências de oscilação e na amplitude, à medida que se acresce o valor de folga. E por fim, a aparição dos ciclos limites de oscilação após a velocidade de flutter, dando a característica de um LCO instável, este que para qualquer pequena perturbação não voltará a uma situação de equilíbrio e assim cada vez mais aumenta o valor de suas amplitudes. Caracterizando o sucesso na implementação do ajuste de curvas para representação das LCOs.

Para trabalhos futuros, pode ser feito um trabalho não só numérico, mas também experimental, com a confecção da asa, seção típica, para serem testadas e analisadas em um túnel de vento. Este trabalho permitirá adquirir ensaios e valores autênticos para todos os parâmetros modais, geométricas do sistema dinâmico em questão, adquirindo os valores de frequências naturais, fatores de amortecimento, definições de massa, posição de CG e momentos de inércia.

Também seria interessante um estudo de controle ativo visando a melhoria do comportamento do sistema aeroelástico para minimizar os efeitos das LCO, aumentar o envelope de voo aumentando a velocidade crítica de flutter, reduzir as vibrações que aparecem nas velocidades de voo subcríticas e melhorar o comportamento pós-flutter do sistema.

APÊNDICE A

FUNÇÕES T DE THEODORSEN

Foram utilizadas as seguintes funções propostas por Theodorsen (1935).

$$T_1 = -\frac{2+c^2}{3}\sqrt{1-c^2} + c\cos^{-1}c \quad (\text{A.1})$$

$$T_3 = -\frac{1-c^2}{8}(5c^2 + 4) + \frac{1}{4}c(7 + 2c^2)\sqrt{1-c^2}\cos^{-1}c - \left(\frac{1}{8} + c^2\right)(\cos^{-1}c)^2 \quad (\text{A.2})$$

$$T_4 = c\sqrt{1-c^2} - \cos^{-1}c \quad (\text{A.3})$$

$$T_5 = -(1-c^2) - (\cos^{-1}c)^2 + 2c\sqrt{1-c^2}\cos^{-1}c \quad (\text{A.4})$$

$$T_7 = c\left(\frac{7+2c^2}{8}\right)\sqrt{1-c^2} - \left(\frac{1}{8} + c^2\right)\cos^{-1}c \quad (\text{A.5})$$

$$T_8 = -\frac{1}{3}(1 + 2c^2)\sqrt{1-c^2} + c\cos^{-1}c \quad (\text{A.6})$$

$$T_9 = \frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{1-c^2}(1-c^2)}{3} + aT_4\right] \quad (\text{A.7})$$

$$T_{10} = \sqrt{1-c^2} + \cos^{-1}c \quad (\text{A.8})$$

$$T_{11} = (2-c)\sqrt{1-c^2} - (1-2c)\cos^{-1}c \quad (\text{A.9})$$

$$T_{12} = (2+c)\sqrt{1-c^2} - (1+2c)\cos^{-1}c \quad (\text{A.10})$$

$$T_{13} = -\frac{1}{2}[T_7 + (c-a)T_1] \quad (\text{A.11})$$

APÊNDICE B

Com o intuito de se definir as equações que regem o movimento do sistema aeroelástico em questão é necessário utilizar as equações dadas por Lagrange, que se inicia a partir da equação 3.1:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = f_i \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n) \quad (\text{B.1})$$

A função de Lagrange, L é dado pela diferença da energia cinética com a energia potencial, como na equação que se segue:

$$L = E_c - E_p \quad (\text{B.2})$$

Onde E_c é a energia cinética e E_p é a energia potencial.

A energia cinética é definida através da expressão,

$$E_c = \frac{1}{2} \int \|\dot{\vec{r}}\|^2 dm \quad (\text{B.3})$$

Onde $\dot{\vec{r}}$ é a velocidade generalizada de um ponto na superfície da seção típica. Sendo $\dot{\vec{r}}_\alpha$ para a seção típica e $\dot{\vec{r}}_\beta$ para a superfície de controle.

Em Trickey (2000), Vasconcellos (2012) e Pereira (2015) é feito esse desenvolvimento das equações e os mesmos se utilizam de uma representação geométrica dada pela figura D.1, onde são mostrados os vetores posição da seção típica e da seção transversal com referência a uma origem fixa, respectivamente.

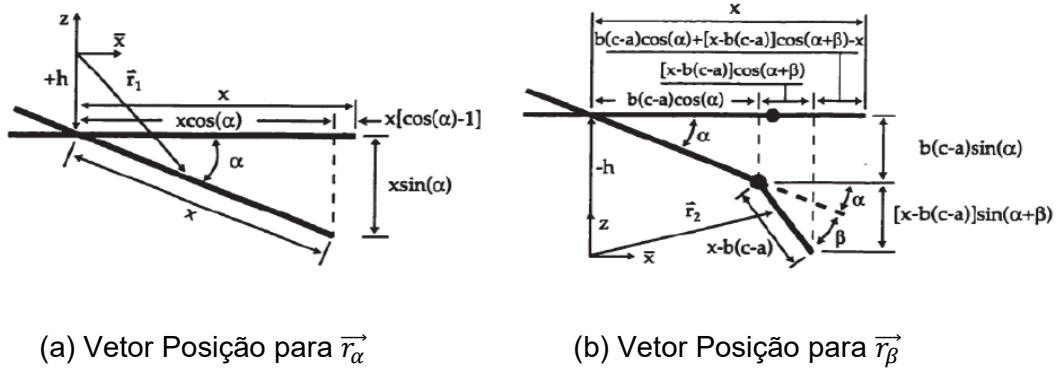


Figura D.1 – Esquema dos vetores de posição e relações geométricas do aerofólio.

Através das relações trigonométricas que podem ser observadas na Figura D.1 pode-se chegar nos vetores posição:

$$\vec{r}_\alpha = x[\cos(\alpha) - 1]\vec{i} + [-h - x\sin(\alpha)]\vec{k} \quad (\text{B.4})$$

$$\vec{r}_\beta = [b(c - a)\cos(\alpha) + [x - b(c - a)]\cos(\alpha + \beta) - x]\vec{i} + [-h - b(c - a)\sin(\alpha) - [x - b(c - a)\sin(\alpha + \beta)]\vec{k} \quad (\text{B.5})$$

Onde $\vec{i}$ e $\vec{k}$ são os vetores unitários dos eixos x e z, respectivamente.

Para definir-se a velocidade é então assumido a aproximação de pequenos deslocamentos para a seção típica analisada, logo $\cos(\alpha) = 1$ e $\sin(\alpha) = \alpha$, as equações acima ficam iguais a:

$$\dot{\vec{r}}_\alpha = [-\dot{h} - x\dot{\alpha}]\vec{k} \quad (\text{B.6})$$

$$\dot{\vec{r}}_\beta = [-\dot{h} - x\dot{\alpha} - [x - b(c - a)]\dot{\beta}]\vec{k} \quad (\text{B.7})$$

Substituindo as equações das velocidades e aplicando as análises feitas por Trickey (2000) e Pereira (2015), é possível então chegar a equação final da energia cinética para uma seção típica de três graus de liberdade com SC:

$$E_c = \frac{1}{2}m_T\dot{h}^2 + S_\alpha\dot{h}\dot{\alpha} + S_\beta\dot{h}\dot{\beta} + \frac{1}{2}I_\alpha\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}I_\beta\dot{\beta}^2 + [I_\beta + b(c - a)S_\beta]\dot{\alpha}\dot{\beta} \quad (\text{B.8})$$

Seguindo, a energia potencial é dada pela somatória das energias potenciais elásticas das molas de flexão, torção e da articulação da seção transversal, que é dada por:

$$E_p = \frac{1}{2}k_\beta\beta^2 + \frac{1}{2}k_\alpha\alpha^2 + \frac{1}{2}k_hh^2 \quad (\text{B.9})$$

E por fim, nos resta definir o vetor dos esforços não conservativos da SC:

$$f_i = [-L(t) \quad M_\alpha(t) \quad M_\beta(t)]^T \quad (\text{B.10})$$

Aplicando então a equação 3.14 para cada grau de liberdade são obtidas as equações de movimento, 3.15, 3.16 e 3.17.

APÊNDICE C

O desenvolvimento do sistema linear encontrado a partir da equação 3.42 será dado através deste apêndice, como se segue:

$$\left. \frac{\partial F}{\partial \beta_i} \right|_{\beta_1, \dots, \beta_n} = 0 \quad i = 1, \dots, n \quad (\text{C.1})$$

Pelo teste da primeira derivada tem-se,

$$-2 \sum_{i=1}^m [f(\beta_i) - (a_1 g_1(\beta) + \dots + a_n g_n(\beta))] g_k(\beta_i) = 0 \quad (\text{C.2})$$

Evidenciando cada termo desta somatória na Eq. (C.3):

$$\begin{cases} \beta_1 \sum_{i=1}^m g_1(\beta_i) g_1(\beta_i) + \beta_2 \sum_{i=1}^m g_1(\beta_i) g_2(\beta_i) + \dots + \beta_n \sum_{i=1}^m g_1(\beta_i) g_n(\beta_i) = \sum_{i=1}^m f(\beta_i) g_1(\beta_i) \\ \beta_1 \sum_{i=1}^m g_2(\beta_i) g_1(\beta_i) + \beta_2 \sum_{i=1}^m g_2(\beta_i) g_2(\beta_i) + \dots + \beta_n \sum_{i=1}^m g_2(\beta_i) g_n(\beta_i) = \sum_{i=1}^m f(\beta_i) g_2(\beta_i) \\ \vdots \\ \beta_1 \sum_{i=1}^m g_n(\beta_i) g_1(\beta_i) + \beta_2 \sum_{i=1}^m g_n(\beta_i) g_2(\beta_i) + \dots + \beta_n \sum_{i=1}^m g_n(\beta_i) g_n(\beta_i) = \sum_{i=1}^m f(\beta_i) g_n(\beta_i) \end{cases}$$

Que por sua vez, tem a forma de um sistema linear $n \times n$:

$$\begin{cases} a_{1,1}\beta_1 + a_{1,2}\beta_2 + a_{1,3}\beta_3 + \dots + a_{1,n}\beta_n = b_1 \\ a_{2,1}\beta_1 + a_{2,2}\beta_2 + a_{2,3}\beta_3 + \dots + a_{2,n}\beta_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}\beta_1 + a_{n,2}\beta_2 + a_{n,3}\beta_3 + \dots + a_{n,n}\beta_n = b_n \end{cases} \quad (\text{C.4})$$

Onde,

$$a_{i,j} = \sum_{k=1}^m g_k(\beta_i) g_j(\beta_i) \quad (\text{C.5})$$

$$b_i = \sum_{k=1}^m f(\beta_i) g_k(\beta_i) \quad (\text{C.6})$$

Este sistema linear da forma $n \times n$ só possuirá uma única solução se os vetores formados por $g_k(\beta)$ forem linearmente dependentes. (RUGGIERO, 2003)

REFERÊNCIAS

ABDELKEFI, A.; VASCONCELLOS, R.; MARQUES, F. D.; HAJJ, M. R. Bifurcation analysis of an aeroelastic system with concentrated nonlinearities. *Nonlinear Dynamics*, DOI 10.1007/s11071-011-0245-6, 2011.

ABDELKEFI, A.; VASCONCELLOS, R.; MARQUES, F. D.; HAJJ, M. R. Modeling and identification of freeplay nonlinearity. *Journal of Sound and Vibration*, doi:10.1016/j.jsv.2011.12.021, 2012.

ABDELKEFI, A.; VASCONCELLOS, R.; MARQUES, F.; HAJJ, M. Bifurcation analysis of an aeroelastic system with concentrated nonlinearities. *Nonlinear Dynamics*, Springer Netherlands, v. 69, n. 1-2, p. 57–70, 2012.

ANDERSON, J. D. *Computational fluid dynamics: the basics with applications*. 1. ed. [S.l.]: McGraw-Hill series in mechanical engineering, 1995.

COLLAR, A. R. The First Fifty Years of Aeroelasticity. *Aerospace*, vol. 5, no. 2, (Royal Aeronautical Society), February 1978, pp. 12-20.

CONNER, M. D.; TANG, D. M.; DOWELL, E. H.; VIRGIN, L. N. Nonlinear behavior of a typical airfoil section with control surface freeplay. *Journal of Fluids and Structures*, n.11, p.89-109, 1997.

CONNER, M. D., TANG D. M., DOWELL E. H., VIRGIN L. N. Nonlinear behavior of a typical airfoil section with control surface freeplay: a numerical and experimental study. *Journal of Fluids and Structures* 11, p 89-109, 1997.

DE MARQUI JR., C.; MARQUES, F. D. Nonlinear behavior of a typical airfoil section with control surface nonlinearities. In: *Proceedings of the 6th Brazilian Conference on Dynamics, Control and Their Applications - DINCON 2007*. São José do Rio Preto, Brazil: [s.n.], 2007.

EDWARDS, J. W.; ASHLEY, H.; BREAKWELL, J. V. Unsteady aerodynamic modeling for arbitrary motions. *AIAA J.*, v. 17, p. 365-374, 1979.

GARRICK, I.E and REED, W.H.. Historical Development of Aircraft Flutter, *AIAA 81-0491, J. Aircraft*, vol.18, no.11, November 1981, pp. 897-912.

HENON, M. On the numerical computation of Poincaré maps. *Physica D*, n. 5, p. 412-414, 1982.

HODGES, D. H.; PIERCE, G. A. Introduction to structural dynamics and aeroelasticity. [S.l.]: cambridge university press, 2011.

KATZ, J.; PLOTKIN, A. Low-speed aerodynamics: from wing theory to panel methods. 2nd. ed. New York: McGraw-Hill, 2006.

LANCASTER, F.W. Torsional Vibrations of the Tail of an Aeroplane. Reports and Memoranda, no. 276, July 1916, in *AIAA Selected Reprint Series, Volume V, Aerodynamic Flutter*, I. E. Garrick, ed., March 1969, pp. 12-15.

LEE, B.; LIU, L.; CHUNG, K. Airfoil motion in subsonic flow with strong cubic nonlinear restoring forces. *Journal of Sound and Vibration*, v. 281, p. 699 – 717, 2005.

LI, D.; GUO, S.; XIANG, J. Aeroelastic dynamic response and control of an airfoil section with control surface nonlinearities. *Journal of Sound and Vibration*, v. 329, n. 22, p. 4756 – 4771, 2010.

MARQUES, F. D.; BELO, E. M.; OLIVEIRA, V. A.; ROSOLEN, J. R.; SIMONI, A. R. On the investigation of state space reconstruction of nonlinear aeroelastic response time series. *Shock and Vibration*, Hindawi Publishing Corporation, v. 13, n. 4-5, p. 393–407, 2006.

PATIL, M. J. e HODGES, D. H., Nonlinear aeroelasticity and flight dynamics of aircraft in subsonic flow. Published by the International Council of the Aeronautics Sciences and the American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1998.

PEREIRA, D.A.; VASCONCELLOS, R. M.; HAJJ, M. R.; ALMEIDA, D. P.; MARQUES, F. D. Effects of combined hardening and free-play nonlinearities on the response of a typical aeroelastic section. *Aerospace Science and Technology*, Elsevier, v.50, p. 44-54, 2016.

PEREIRA, D.A. Efeito de não linearidades estruturais na resposta aeroelástica de aerofólios. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2015.

PETERS, D. A. Two-dimensional incompressible unsteady airfoil theory - an overview. *Journal of Fluids and Structures*, Elsevier, v. 24, n. 3, p. 295–312, 2008.

REISSNER, E. Effect of Finite Span on the Airload Distributions for Oscillating Wings. 1- *Aerodynamic Theory of Oscillating Wings of Finite Span*. [S.I.], 1947.

RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. R. Cálculo Numérico: Aspectos teóricos e computacionais. São Paulo: Makron Books, 1996.

SEARS, W. R. Operational methods in the theory of airfoils in non-uniform motion. *California Institute of Technology*, 1940.

THEODORSEN, T. General theory of aerodynamic instability and the mechanism of flutter. *NACA Report 496*, n. 496, 1935.

TOLVE, L.A. History of Flight Flutter Testing, in *Proceedings of the 1958 Flight Flutter Testing Symposium*, NASA SP-385, 1958, pp. 159-166.

MUKHOPADHYAY, V. Historical Perspective on Analysis and Control of Aeroelastic Responses. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 26, No. 5, 2003.

VASCONCELLOS, R. M.; ABDELKEFI, A.; HAJJ, M. R.; ALMEIDA, D. P.; MARQUES, F. D. Airfoil control surface discontinuous nonlinearity experimental assessment and numerical model validation. *Journal of Vibration and Control*, published online before print, 2014.

VASCONCELLOS, R. M. G. Caracterização e detecção da não linearidade associada à folga em sistemas aeroelásticos. Tese (Doutorado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2012.

VASCONCELLOS, R. M. G.; MARQUES, F. D.; PEREIRA, D. A. Time series and spectral analysis of nonlinear aeroelastic oscillations. In: 22nd International Congress of Mechanical Engineering. [S.l.: s.n.], 2013.