

MARCELO HENRIQUE BELONSI

**CONTRIBUIÇÃO AOS MÉTODOS DE REDUÇÃO DE
MODELOS DE SISTEMAS DINÂMICOS NÃO
LINEARES ESTOCÁSTICOS**



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
UBERLANDIA

2017

MARCELO HENRIQUE BELONSI

**CONTRIBUIÇÃO AOS MÉTODOS DE REDUÇÃO DE MODELOS DE
SISTEMAS DINÂMICOS NÃO LINEARES ESTOCÁSTICOS**

Tese de Doutorado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de **DOUTOR EM ENGENHARIA MECÂNICA**.

Área de concentração: Mecânica dos sólidos e vibrações

Orientador: Prof. Dr. Antônio Marcos Gonçalves de Lima

Uberlândia – MG

2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFU, MG, Brasil.

- B452c
2017
- Belonsi, Marcelo Henrique, 1968-
Contribuição aos métodos de redução de modelos de sistemas
dinâmicos não lineares estocásticos / Marcelo Henrique Belonsi. - 2017.
98 f. : il.
- Orientador: Antonio Marcos Gonçalves de Lima.
Tese (doutorado) - Universidade Federal de Uberlândia, Programa
de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.
Disponível em: <http://dx.doi.org/10.14393/ufu.te.2018.32>
Inclui bibliografia.
1. Engenharia mecânica - Teses. 2. Sistemas não lineares - Teses. 3.
Vibração - Teses. 4. Elementos finitos - Teses. I. Lima, Antonio Marcos
Gonçalves de, 1975- II. Universidade Federal de Uberlândia. Programa
de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. III. Título.

CDU: 621

Maria Salete de Freitas Pinheiro – CRB6/1262

MARCELO HENRIQUE BELONSI

**CONTRIBUIÇÃO AOS MÉTODOS DE REDUÇÃO DE MODELOS DE
SISTEMAS DINÂMICOS NÃO LINEARES ESTOCÁSTICOS**

Tese **APROVADA** pelo Programa de Pós-
graduação em Engenharia Mecânica da
Universidade Federal de Uberlândia

Área de concentração: Mecânica dos sólidos e
vibrações

Uberlândia – MG

2017



SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA



ALUNO: Marcelo Henrique Belonsi

NÚMERO DE MATRÍCULA: 11413EMC010

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: Mecânica dos Sólidos e Vibrações

LINHA DE PESQUISA: Dinâmica de Sistemas Mecânicos

PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA: NÍVEL DOUTORADO

TÍTULO DA TESE:

“Contribuição aos Métodos de Redução de Modelos de Sistemas Dinâmicos Não Lineares Estocásticos”

ORIENTADOR: Prof. Dr. Antonio Marcos Gonçalves de Lima

A Tese foi **APROVADA** em reunião pública, realizada na Sala 313 - Bloco 1M, Campus Santa Mônica, em 27 de novembro de 2017, às 09:00 horas, com a seguinte Banca Examinadora:

NOME	ASSINATURA
Prof. Dr. Antonio Marcos Gonçalves de Lima	UFU
Prof. Dr. Aldemir Ap. Cavalini Júnior	UFU
Prof. Dr. Roberto Mendes Finzi Neto	UFU
Prof. Dr. José Juliano de Lima Júnior	UNIFEI
Prof. Dr. Romes Antônio Borges	UFG

Uberlândia, 27 de novembro de 2017

Dedico este trabalho a minha esposa Estela e filhos Arhur e Isabella, a meus pais Paulo (in memoriam), mãe Maria, irmãos Paulo e Rosário (in memoriam) e a toda família.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, por sempre estar comigo, protegendo-me, guiando-me e ensinando-me a ser uma pessoa cada vez melhor.

A meus pais Paulo (*in memoriam*) e Maria pelo exemplo de humildade, força e fé. Pelos inúmeros esforços em proporcionar-me educação, por estarem sempre presentes e, pelo incentivo incessante para que pudesse concluir os cursos de graduação e pós-graduação.

A meu irmão Paulo e irmã Rosário (*in memoriam*) que sempre se fizeram presentes e dispostos a participar dos momentos felizes e, principalmente, tristes buscando sempre externar seus carinho e afeto.

Agradeço a minha esposa, Estela, que sempre esteve presente nos momentos alegres e tristes, pela dedicação e carinho dispensado a mim e aos filhos, por não medir esforços para manter sempre a unidade familiar, pela compreensão e incentivo ao longo do período de desenvolvimento deste trabalho.

Aos meus filhos Arthur e Isabella pelos momentos felizes que ambos têm me proporcionado ao longo de todos os dias de nossas vidas.

Um agradecimento especial a meu orientador Prof. Dr. Antonio Marcos pela disposição, paciência, dedicação e por estar sempre disposto a partilhar seus conhecimentos e experiências de forma a ajudar-me a superar os momentos de dificuldades no desenvolvimento e conclusão deste trabalho.

Aos professores membros da banca pela disposição e, especialmente, contribuições que proporcionaram a este trabalho.

Aos amigos Andre, Thales e Luis Fernando pelos auxílios prestados, inúmeras vezes, durante o desenvolvimento deste trabalho.

Agradeço a Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade de Engenharia Mecânica e LMet pela disponibilização de seu espaço, aos professores e colaboradores que influenciaram de alguma forma meu desenvolvimento e aos colegas de laboratório, que sempre me ajudaram nos incontáveis momentos de dificuldade por meio do compartilhamento de ideias, informações, etc..

A Universidade Estadual de Goiás, pelo incentivo proporcionado mediante liberação da carga docente promovido em seu programa de qualificação docente.

BELONSI, M.H., **Contribuição aos Métodos de Redução de Modelos de Sistemas Dinâmicos Não Lineares Estocásticos**, 2017. Tese de doutorado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, Brasil.

Resumo

Este trabalho enfoca os procedimentos de modelagem por elementos finitos determinísticos e estocásticos de sistemas estruturais do tipo placas finas sujeitas a não linearidades distribuídas e discretas na presença de incertezas. Neste caso, o método de Newmark não linear combinado com o método de Newton-Raphson foi utilizado para resolução direta das equações do movimento e obtenção dos envelopes das respostas no tempo dos sistemas não lineares. Com o objetivo de reduzir o esforço computacional requerido para resolver os problemas não lineares, especialmente para os casos envolvendo a presença de incertezas, foi proposto o método modal enriquecido e o método das aproximações combinadas melhorado. No que diz respeito à consideração da inserção de incertezas no modelo determinístico optou-se pela construção de um modelo estocásticos do sistema com não linearidades distribuídas, utilizando-se para isto da técnica de discretização de campos aleatórios de Karhunen-Loève para sistemas bi-dimensionais. Já, para a obtenção das respostas dinâmicas aleatórias, foi utilizado o método de simulação Hyper-Cubo-Latino. Através dos vários exemplos de simulações com estruturas do tipo placas finas não amortecidas e amortecidas sujeitas a diferentes níveis de força e condições de contorno, pode-se ilustrar os desenvolvimentos abordados ao longo deste trabalho. Em particular, pode-se concluir sobre a eficiência e necessidade da utilização de métodos de redução para a avaliação dinâmica de sistemas não lineares, principalmente para sistemas não lineares mais complexos ou na presença de incertezas. Por fim, deve-se salientar a importância de se considerar as incertezas na análise e no projeto de sistemas não lineares para lidar com situações mais realísticas de interesse prático.

Palavras-chave: Sistemas não lineares, redução de modelos, incertezas paramétricas, elementos finitos estocásticos.

BELONSI, M. H., Contribution to the Reduction Methods Applied to Nonlinear Dynamic Stochastic Systems, 2017. Doctor of Thesis, Federal University of Uberlândia, Brazil.

Abstract

This work is devoted to the deterministic and stochastic finite element modeling of thin flat plates under large displacements and subjected to geometric and discrete non-linearities. In order to solve the resulting non-linear equations of motion in the time-domain, the non-linear Newmark strategy combined with the Newton-Raphson method has been used herein. With the aim of reducing the computational cost required to solve the non-linear problems, especially for the cases in which the uncertainties are considered, the modal method based on the construction of an enriched reduction basis and an improved version of the combined approximations technique have been retained in the present study. With regard to the insertion of uncertainties in the deterministic model opted by the construction of a stochastic model of the system with no distributed linearity, using for this the Karhunen-Loève expansion technique in bi-dimensional form. In order to generate the envelopes of the dynamic responses of the non-linear systems in time-domain, it has been used the so-called Hyper-Cube-Latino. Based on the numerical simulations with plate structures subjected to various levels of excitation and boundary conditions it is possible to illustrate the methodology presented in this work. In particular, it can be concluded about the efficiency and necessity of performing efficient and accurate model reduction methods to deal with non-linear systems. Finally, it is also important to discuss about the interest in considering uncertainties in the analysis and design of non-linear systems in order to deal with more realistic non-linear situations.

Keywords: Non-linear systems, reduction methods, parametric uncertainties, stochastic finite element method.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Ilustração de um sistema de um grau de liberdade com a presença de força restauradora não linear (adaptado de Savi (2006)).....	2
Figura 2.1 – Ilustração de uma placa fina.....	9
Figura 2.2 – Rotações da placa após a deformação (adaptado de Dinis (2002)).....	10
Figura 2.3 – Ilustração dos gdl's elementares do elemento de placa.....	13
Figura 2.4 – Esquema de integração de Newmark com correção.....	22
Figura 3.1 – Esquema numérico para a obtenção dos envelopes de soluções do problema estocástico não linear.....	32
Figura 4.1 – Exemplo de um sistema viscoelástico (adaptado de Lima et al. (2015)).....	35
Figura 4.2 – Exemplo de um sistema viscoelástico incluído molas não lineares (adaptado de Lima <i>et al.</i> (2015)).....	37
Figura 4.3 – Etapas do processo de construção da base e de resolução das equações do movimento do sistema amortecido contendo não linearidades discretas.....	40
Figura 4.4 – Etapas do processo de redução de sistemas contendo não linearidades geométricas.....	45
Figura 5.1 – Atrator de Lorenz.....	48
Figura 5.2 – Divergência de trajetórias inicialmente próximas (adaptado de Viana (2011)).....	50
Figura 5.3 – (a) gráfico de $x(t)$ para duas condições iniciais; (b) Diferenças instantâneas a partir de duas condições iniciais próximas.....	52
Figura 5.4 – (a) gráfico de $y(t)$ para duas condições iniciais; (b) Diferenças instantâneas a partir de duas condições iniciais próximas.....	53
Figura 5.5 – Ilustração do Mapa de Poincaré em dimensão R^3	54

Figura 5.6 – Mapa de Poincaré para o sistema dinâmico de Lorenz.....	55
Figura 5.7 – (a) Orbitas; (b) Seção de Poincaré para a variável de estado $x(t)$	56
Figura 5.8 – (a) Orbitas; (b) Seção de Poincaré para a variável de estado $y(t)$	56
Figura 5.9 – (a) Contribuição do termo, k_{nl} , a partir da excitação tipo $f(t) = \cos(t)$ N; (b) Diagrama de fase do sistema mecânico para diferentes k_{nl}	57
Figura 5.10 – (a) Contribuição da excitação do tipo $f(t) = F_0 \cos(t)$, considerando $k_{nl} = 0,1 N/m$; (b) Diagrama de fase do sistema mecânico para diferentes níveis de excitação.....	57
Figura 5.11 – Mapa (a) seção de Poincaré (b) para $k_{nl} = 0 N/m$	58
Figura 5.12 – Mapa (a) e seção de Poincaré (b) para $k_{nl} = 10^4 N/m$	59
Figura 5.13 – (a) Evolução dos expoentes de Lyapunov em relação a rigidez não linear; (b) Seção de Poincaré para $k_{nl} = 10^2 N/m$	59
Figura 5.14 – Representação dos termos a_n e b_n	60
Figura 5.15 – Aproximação de uma onda quadrada por meio da série de Fourier truncada em N termos: (a) $N = 1$; (b) $N = 5$; (c) $N = 13$	61
Figura 5.16 – FFT do sinal incorporando não linearidade cúbica (Extraído de Souza, (2008)).....	62
Figura 5.17 – FFT do sinal do deslocamento para o modelo de Duffing:(a) $k_{nl} = 0 N/m$;(b) $k_{nl} = 10^{-1} N/m$; (c) $k_{nl} = 10^6 N/m$	63
Figura 6.1 – Modelo de EF da placa fina de alumínio bi-engastada.....	65
Figura 6.2 – Comparação das dez primeiras frequências dos modelos lineares implementados em ANSYS e MATLAB.....	66
Figura 6.3 – Erro entre as frequências dos modelos lineares implementados em ANSYS e MATLAB.....	66
Figura 6.4 – Respostas temporais da placa fina com não linearidade geométrica para a condição de contorno bi-engastada: (a) $F_0 = 8N$; (b) $F_0 = 200N$	67
Figura 6.5 – Diagrama de fase (a) e FFT do sinal do deslocamento (b) para $F_0 = 8N$	68

Figura 6.6 – Diagrama de fase (a) e FFT do sinal do deslocamento (b) para $F_0 = 200N$	68
Figura 6.7 – Análise de estabilidade da placa bi-engastada via Lyapunov.....	69
Figura 6.8 – Análise de estabilidade da placa bi-engastada conforme Poincaré.....	70
Figura 6.9 – Modelo de EF da placa sanduíche viscoelástica bi-engastada.....	71
Figura 6.10 – Respostas temporais dos deslocamentos dos sistemas de referência e reduzido para as bases T_1 e T_2 - Sistema viscoelástico linear.....	72
Figura 6.11 – Ilustração da placa sanduíche viscoelástica com molas não lineares.....	73
Figura 6.12 – Repostas temporais dos deslocamentos dos sistemas de referência e reduzido para as bases T_2 e T_3 e $F_0 = 30N$ - Sistema viscoelástico não linear.....	74
Figura 6.13 – Comparação entre os deslocamentos dos sistemas de referência e reduzido para a base T_3 , $F_0 = 50N$ e $F_0 = 100N$ - Sistema viscoelástico não linear.....	75
Figura 6.14 – Modelo de EF da placa fina de alumínio engastada-livre.....	75
Figura 6.15 – Repostas dos deslocamento e velocidade, instantânea, dos sistemas completo e reduzido para a base, T_{ACM} : (a) $F_0 = 0,05N$, (b) $F_0 = 0,1N$ e (c) $F_0 = 15N$	76
Figura 6.16 – Tempo de cálculo entre os sistemas completo e reduzido pelo método ACM...77	77
Figura 6.17 – Evolução da base de redução ACM em função do tempo de integração.....	78
Figura 6.18 – Análise de convergência para dois níveis de força e incertezas na espessura da placa em grandes deslocamentos: (a) 8N, 5%; (b) 8N, 20%; (c) 200N, 5%; (d) 200N, 20%...80	80
Figura 6.19 – Envelopes das respostas transversais da placa com não linearidades geométricas: (a) 8N, 5%; (b) 8N, 20%; (c) 200N, 5%; (d) 200N, 20%.....	81
Figura 6.20 – Diagramas de fase da placa estocástica com não linearidades geométricas (a) 8N, 5%; (b) 8N, 20%; (c) 200N, 5%; (d) 200N, 20%.....	82
Figura 6.21 – Expoentes de Lyapunov para a placa estocástica com não linearidades geométricas: (a) 5%; (b) 20%.....	82
Figura 6.22 – Expoentes de Lyapunov para a placa estocástica com não linearidades geométricas: (a) 8N; (b) 200N.....	80
Figura 6.23 – Ilustração do modelo de EF da placa fina com não linearidades discretas.....	83

Figura 6.24 – Análise de convergência para dois níveis de força e incertezas na rigidez não linear das molas: (a) 1N, 5%; (b) 1N, 20%; (c) 20N, 5%; (d) 20N, 20%.....	84
Figura 6.25– Envelopes das respostas transversais da placa com não linearidades discretas para força de 1N: (a) 5%; (b) 20%.....	85
Figura 6.26 – Diagramas de fase da placa estocástica com não linearidades discretas para força de 1N: (a) 5%; (b) 20%.....	86
Figura 6.27– Envelopes das respostas transversais da placa com não linearidades discretas para força de 20N: (a) 5%; (b) 20%.....	86
Figura 6.28 – Diagramas de fase da placa estocástica com não linearidades discretas para força de 20N: (a) 5%; (b) 20%.....	87
Figura 6.29 – Expoentes de Lyapunov para a placa estocástica com não linearidades discretas: (a) 1N, 5%; (b) 20N, 20%.....	87
Figura A.1 – Transformação de coordenada entre o sistema global (x,y) e local (ξ,η) para elementos retangulares.....	100

LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1 – Ordem da série de Taylor.....	39
Tabela 5.1 – Expoentes de Lyapunov para os espaços de estados do sistema dinâmico de Lorenz.....	49
Tabela 6.1 – Propriedades físicas e geométricas do modelo de EF da placa fina.....	61
Tabela 6.2 – Propriedades físicas e geométricas da placa sanduíche viscoelástica.....	67

LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

SIGLAS (SI)

$C(x_1, x_2)$	Função de covariância
B^f	Matriz contendo as funções de interpolação associada ao efeito de flexão
B^m	Matriz contendo as funções de interpolação associada ao efeito de membrana
D^m e D^f	Matrizes com as propriedades do material
D	Matriz de amortecimento estrutural
E	Modulo de elasticidade [GPa]
E_{xx}, E_{yy}, E_{xy}	Deformação da placa no plano xOy
E_{ij}	Tensor de Green-Lagrange de 2ª ordem
E^m	Deformação da placa associada ao efeito de membrana
E^f	Deformação da placa associada ao efeito de flexão
E^c	Deformação da placa associada ao acoplamento dos efeitos de membrana e flexão
(λ_r, f_r)	Autovalores e autofunções associados a $C(x_1, x_2)$
$F(t)$	Força de excitação externa [N]
$f_{nl}(X)$	Força atuante no sistema contendo as parcelas lineares e não lineares [N]
$df_{nl}(X)$	Gradiente espacial da força não linear
F_{nl}^{nd}	Carregamento não linear – não linearidade discreta [N]
F_{Δ}	Força puramente não linear – não linearidade discreta [N]
G	Matriz contendo as funções de interpolação associada ao efeito de acoplamento
G_0	Valor do modulo de cisalhamento viscoelástico em baixa frequência
$G(\omega, T)$	Modulo de cisalhamento
h	Espessura da placa [m]
$H(X, \theta)$	Campo aleatório
$\hat{H}(X, \theta)$	Campo aleatório aproximado
I	Matriz identidade
I_x e $I_{\tilde{x}}$	Vetores coluna booleano que identifica dentre os gdl's globais que a subestrutura é aplicada
J	Jacobiano
K	Temperatura em Kelvin [K]
k^{nl}	Rigidez não linear da mola [N/m]
K^l	Matriz dos termos lineares de rigidez da placa [N/m]
ΔK^{nl}	Matriz de rigidez associada às não linearidades geométricas [N/m]

$\hat{\mathbf{K}}(\mathbf{X}_{i-1})$	Matriz jacobiana
$\mathbf{K}(\mathbf{X}, \theta)$	Matriz de rigidez estocástica [N/m]
$\mathbf{K}_r^m(\theta)$	Matriz de rigidez linear estocástica elementar – membrana [N/m]
$\mathbf{K}_r^f(\theta)$	Matriz de rigidez linear estocástica elementar – flexão [N/m]
$\Delta \mathbf{K}_r^{a,b,c}(\theta)$	Matrizes de rigidezes não lineares estocásticas elementares [N/m]
$\mathbf{K}_v^*$	Matriz de rigidez viscoelástica [N/m]
$\mathbf{K}_e^l$	Matriz de rigidez puramente elástica [N/m]
$\mathbf{K}_m^l$	Rigidez da subestrutura puramente elástica – não linearidade discreta [N/m]
$\mathbf{K}_m^{nl}$	Rigidez da subestrutura não linear elástica – não linearidade discreta [N/m]
$\mathbf{K}^t$	Matriz de rigidez tangente [N/m]
L_x, L_y	Comprimento de correlação nas direções x e y do elemento finito [m]
$\mathbf{M}$ e $\mathbf{M}(\theta)$	Matrizes de massa determinísticas e estocásticas, respectivamente [kg]
$\mathbf{M}^f$	Vetor do momento fletor
$\mathbf{M}_r^f(\theta)$	Matriz de massa estocástica elementar relativa ao efeito de flexão [kg]
$\mathbf{M}_r^m(\theta)$	Matriz de massa estocástica elementar relativa ao efeito de membrana [kg]
$N, \mathbf{N}^w$	Funções de interpolação
$r(\mathbf{X}_i^k)$	Função resíduo
$\mathbf{R}_v$	Resíduos dos esforços viscoelásticos
$\mathbf{S}$	Tensor tensão de 2 ^a . ordem
T	Temperatura [°C]
$\mathbf{T}$	Matriz de transformação de graus de liberdade
T_0	Energia cinética [J]
$\mathbf{T}_{ACM}$	Matriz de transformação de base do método das Aproximações Combinadas Melhorado
$\mathbf{T}^m$	Vetor dos esforços cortantes
$\{U(x, y, z, t)\}$	Vetor deslocamento instantâneo de um ponto (x, y, z)
U_0	Energia potencial total [N.m]
U_{def}	Energia de deformação mecânica [N.m]
U_{pot}	Energia potencial dos esforços externos [N.m]
$(\mathbf{X}(t), \dot{\mathbf{X}}(t), \ddot{\mathbf{X}}(t))$	Vetores de deslocamento, velocidade e aceleração transversal
$w(x, y, t)$	Deslocamento transversal [m]
β e γ	Parâmetros de Newmark
$\delta \Pi$	Trabalho virtual [J]
$\delta \Pi_{ine}$	Trabalho virtual da energia cinética [J]
$\delta \Pi_{ext}$	Trabalho virtual da energia potencial [J]
(θ_x^i, θ_y^i)	Graus de liberdades de rotações do nó i
λ	Expoente Lyapunov

ν	Coefficiente de Poisson
υ	Ordem da série de Taylor
Ξ_{def}	Energia de deformação [J]
$\xi_r(\theta)$	Váriáveis aleatórias gaussianas
$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$	Tensões normais nas direções x, y e z, respectivamente
φ_0	Autovetores
η e ξ	Dominio de integração do método de Gauss-Legendre
ω	Frequência
Ω_m	Plano médio da placa [m ²]
Ω_x e Ω_y	Dominios das funções de covariância [m]

ABREVIATURAS

AC	Aproximações Combinadas
ACM	Aproximações Combinadas Melhorado
EF	Elementos Finitos
gdl's	graus de liberdades
HcL	Hiper-cubo Latino
KL	<i>Karhunen-Loève</i>
MEF	Método dos Elementos Finitos
MC	Monte Carlo
N	Número de gdl's
NR	Número de gdl's reduzido
RMSD	Erro quadrático médio
SCA	Sistema Conservativo Associado
SFEM	<i>Stochastic Finite Element Method</i>

Sumário

CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO	1
1.1. Contexto do estudo	1
1.2. Conteúdo da tese	6
CAPÍTULO II - MODELAGEM POR ELEMENTOS FINITOS DE PLACAS FINAS EM GRANDES DESLOCAMENTOS	8
2.1. Relações deformações-deslocamentos para a placa em grandes deslocamentos	8
2.2. Princípio do trabalho virtual	11
2.3. Discretização pelo método dos elementos finitos (MEF)	12
2.4. Determinação da matriz de rigidez tangente	16
2.5. Método de resolução das equações do movimento do sistema não linear	19
CAPÍTULO III - MODELAGEM ESTOCÁSTICA DE PLACAS FINAS EM GRANDES DESLOCAMENTOS	24
3.1. Definições iniciais.	24
3.2. Discretização dos campos aleatórios	26
3.3. Matrizes elementares estocásticas.....	28
CAPÍTULO IV - MÉTODOS DE REDUÇÃO DE MODELOS APLICADOS A SISTEMAS DINÂMICOS NÃO LINEARES	34
4.1. Base de redução para sistemas lineares amortecidos viscoelasticamente.	34
4.2. Resíduos estáticos associados com não linearidades discretas.....	37
4.3. Método das aproximações combinadas melhorado	40

CAPITULO V - IDENTIFICAÇÃO DE NÃO LINEARIDADES E ESTABILIDADE EM SISTEMAS DINÂMICOS	46
5.1. Introdução.....	46
5.2. Caos determinístico.....	47
5.3. Expoente de Lyapunov.....	48
5.3.1. Cálculo do expoente de Lyapunov.....	50
5.4. Mapa e Seção de Poincaré.....	54
5.5. Identificação do efeito não linear no sistema dinâmico.....	60
CAPÍTULO VI - SIMULAÇÕES NUMÉRICAS	64
6.1. Verificação do modelo linear conservativo associado	64
6.2. Verificação do modelo com não linearidades geométricas.....	67
6.3. Redução de modelos para sistemas incorporando não linearidades discretas....	70
6.4. Redução de modelos para sistemas com não linearidades geométricas.....	75
6.5. Sistemas não lineares estocásticos.....	79
6.5.1. Não linearidades geométricas	79
6.5.2. Não linearidades discretas	83
CAPÍTULO VII - CONCLUSÕES GERAIS E PERSPECTIVAS FUTURAS	89
7.1. Resumo e avaliação.....	89
7.2. Sugestões de trabalhos futuros.....	91
BIBLIOGRAFIA.....	93
ANEXO A - MATRIZES DE RIGIDEZ ELEMENTARES	99

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

1.1. Contexto do estudo

Este trabalho de tese está inserido no contexto das temáticas de pesquisa que vem sendo desenvolvidas no Laboratório de Mecânica de Estruturas (LMEst), da Faculdade de Engenharia Mecânica (FEMEC), da Universidade Federal de Uberlândia (UFU), que trata da **modelagem determinística e estocástica e redução de modelos de sistemas não lineares para o controle de vibrações e ruído**.

Nesse sentido, durante as etapas de investigação dinâmica de sistemas mecânicos envolvendo a concepção, projeto, análise e teste pressupõe aplicação de procedimentos de modelagem matemática e implementação computacional para prever os níveis de vibrações nestes sistemas. Diante disso, os trabalhos de Duvaut e Lions (1972), Jiang, Pierre e Shaw (2005), Ohayon (2006) dentre outros que tratam do estudo de vibrações em sistemas mecânicos visam considerar muitas vezes os sistemas mecânicos somente em comportamento linear, de forma a delimitar regiões de operação para os sistemas de forma que os efeitos das vibrações mecânicas não sejam suficientemente elevado a fim de produzir nestes sistemas os efeitos não lineares.

Apesar de existirem trabalhos dedicados ao estudo de vibrações em sistemas mecânicos deve-se levar em consideração que a tendência cada vez maior de utilização de estruturas mais extensas e leves e do aumento considerável da velocidade de operação das máquinas e equipamentos, agravam sobremaneira os problemas de vibração e ruído, de forma observar o surgimento de fenômenos que não obedecem a uma relação linear entre os fatores de causa e efeito, delineando a ocorrência dos fenômenos não lineares, neste caso pode-se mencionar o trabalho de Lima *et al.* (2015).

Nestas situações, os fenômenos não lineares que são, muitas vezes, correntes nestes sistemas, sendo o comportamento linear de tal sorte, uma exceção (GERGES, 2013; LIMA *et al.* 2015). Além

disso, a característica potencialmente imprevisível de um sistema dinâmico não linear pode levá-lo com mais facilidade a uma falha catastrófica (CASTILLO e CRUCHAGA, 2012). Por exemplo, na indústria aeronáutica, os movimentos não lineares podem ter graves consequências sobre a vida útil de componentes estruturais como fuselagens e asas. Já no setor automobilístico, os sistemas de freio e suspensão do motor possuem inerentemente um comportamento não linear. Diante disso, uma das diretrizes desse trabalho consiste na consideração do efeito não linear nos sistemas mecânicos.

Nesse sentido, as não linearidades podem apresentar-se sob diversas formas em um sistema dinâmico, por exemplo elas podem ter origem geométrica, no comportamento do material, podem estar associadas à presença de esforços não lineares, ou ainda, devido às condições de contorno mecânicas e a junção entre as peças de uma estrutura. Assim, no que diz respeito às não linearidades geométricas, elas estão associadas ao movimento do sistema, podendo ser causadas por grandes deslocamentos e rotações (SAVI, 2006), podendo ser caracterizadas de natureza local ou global. Nos dois casos, o comportamento não linear pode se manifestar como resultado do deslocamento aplicado.

Por outro lado, as não linearidades locais aparecem em pontos particulares de uma estrutura e a relação entre o esforço e o deslocamento é normalmente modelada por um polinômio de ordem dois ou três. Um exemplo clássico é o oscilador de Duffing ilustrado na Fig. 1.1. Neste sistema de um grau de liberdade, o termo não linear está associado a uma rigidez que assume comportamento linear para pequenos deslocamentos e não linear à medida que os deslocamentos aumentam (SAVI, 2006).

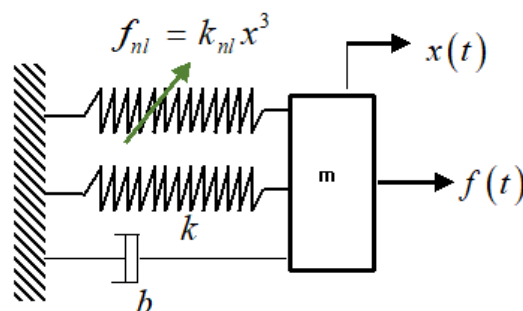


Figura 1.1 – Ilustração de um sistema de um grau de liberdade com a presença de força restauradora não linear (adaptado de Savi (2006)).

As não linearidades geométricas são geralmente causadas por grandes deslocamentos e têm origem na energia de deformação da estrutura. Assim, este trabalho considera estudar o comportamento de sistemas mecânicos não lineares focando, especialmente, apenas os tipos de não linearidades geométricas e localizadas.

Conforme mencionado, inúmeras, formulações matemáticas consideram as relações de deformação e deslocamento lineares. No entanto, quando estas deformações se tornam maiores devido ao processo de carregamento, esta consideração já não fornece bons resultados, sendo necessária a utilização de teorias que levam em consideração as relações não lineares advindas do acoplamento entre os efeitos de membrana e flexão, em especial, no que diz respeito a estruturas composta por placas finas em grandes deslocamentos, (ZIENKIEWICZ e TAYLOR, 2000).

Assim, considerando o tipo de não linearidade existem trabalhos que tratam dos estudos dos fenômenos não lineares em sistemas mecânicos como em Touzé e Amabili (2006) no que diz respeito a não linearidades geométricas e Krifa *et al.* (2017) focando não linearidades localizadas, com destaque para Gerges (2013) que focou o estudo de ambos os tipo de não linearidades. Assim, apesar de já existirem estudos de sistemas dinâmicos incorporando não linearidades geométricas e localizadas nenhum deles considera a inserção de incertezas paramétricas ou não às estruturas mecânicas, sendo esta uma das principais contribuições deste trabalho.

É importante destacar que além do reconhecimento do tipo de não linearidade presente em um sistema dinâmico, é importante conhecer as ferramentas a serem empregadas na análise de tais sistemas. Por exemplo, Worden e Thomlinson (2001) mostram algumas características inerentes a sistemas não lineares como a não aplicação do princípio da superposição pelo fato da possibilidade de ocorrer distorções harmônicas que devem ser analisadas tanto no que diz respeito ao deslocamento, quanto na velocidade e aceleração.

Os trabalhos de Savi (2006), Thompson e Stewart (1986) e Purcina (2016) mostram, respectivamente, as ferramentas normalmente utilizadas para a análise e o reconhecimento de possíveis não linearidades em um sistema e, as possíveis conclusões e interpretações que podem ser obtidas através de análises qualitativas de curvas integrais, trajetórias, órbitas e diagramas de fase.

Nesse sentido, de posse das informações dos tipos de não linearidades presentes no sistema dinâmico deve-se obter a modelagem das equações do movimento de forma a possibilitar o uso de uma técnica numérica de resolução das equações do movimento. Atualmente, uma técnica numérica bastante difundida para a modelagem de sistemas dinâmicos é sem dúvidas o método dos elementos finitos (MEF). Entretanto, dependendo da complexidade dos sistemas dinâmicos não lineares, um dos principais inconvenientes do MEF passa a ser o custo computacional envolvido no cálculo das respostas do sistema dinâmico

não linear. Soma-se a isto o fato de que, para tais sistemas, há que se considerar a capacidade de armazenamento em memória das matrizes de EF lineares e não lineares durante o processo de integração, conforme sua discretização em relação ao domínio espacial (LIMA *et al.* 2015; GERGES, 2013).

Diante disso, considerando, ainda o grande apelo industrial associado a estes sistemas dinâmicos este custo computacional tende a ser agravado substancialmente. Por fim, o comportamento não linear necessita de uma avaliação do esforço não linear a cada avaliação temporal (pois os esforços não lineares dependem diretamente dos deslocamentos instantâneos), o que agrava ainda mais o problema do custo computacional envolvido nas análises (BELONSI *et al.* 2015; FONSECA Jr., 2016). Portanto, objetivando diminuir o custo de cálculo, a redução de modelos adaptada a sistemas não lineares através do emprego de bases de redução se mostra uma alternativa bastante interessante.

A redução de modelos de sistemas dinâmicos vem, sobretudo potencializar o cálculo das respostas dos sistemas dinâmicos não lineares em especial no que tange aos sistemas dinâmicos de interesse industrial, pois neste casos fontes de incerteza podem estar associadas tanto ao processo de fabricação quanto de operação. Nesse sentido Gerges (2013) apresentou resultados interessantes ao propor em seu trabalho métodos de redução para a resolução de sistemas não lineares incorporando não linearidades geométricas e localizadas, porém em seu trabalho não considera a inserção de incertezas nas estruturas mecânicas modeladas para fins de produzir modelos de sistemas mecânicos mais adaptados mais precisos e adaptados à realidade.

Assim, outro aspecto importante que deve ser considerado durante a modelagem de sistemas dinâmicos é o tratamento de incertezas nos modelos de EF, uma vez que as mesmas podem influenciar sobremaneira no desempenho, na durabilidade, na segurança e no atendimento aos requisitos de projeto (KOROISHI *et al.* 2012; MATTHIES *et al.* 1997).

No contexto do presente trabalho, a ferramenta utilizada para a inserção de incertezas ao modelo dinâmico de placa fina incorporando não linearidade geométrica, foi o Método dos Elementos Finitos Estocásticos (*Stochastic Finite Element Method* - SFEM) (GHANEM E SPANOS, 1991), o qual se caracteriza por meio da extensão da abordagem determinística do método dos elementos finitos clássico para o contexto estocástico, ou seja, para a solução de problemas estocásticos (estático e/ou dinâmico), cujos parâmetros de projeto são aleatórios.

Entretanto, poucos são os trabalhos que tratam da introdução de incertezas em modelos de EF de sistemas não lineares (BORGES, LIMA e STEFFEN JR., 2010; CUNHA e

SAMPAIO, 2014), a fim de mensurar a influência de pequenas variações nos parâmetros de projeto com vistas a uma representação mais realística do problema não linear. Desta forma, o SFEM possibilita uma combinação da análise de sistemas não lineares por elementos finitos e a análise estatística (LIMA *et al.* 2010).

Diante disso, o estudo proposto nesta tese foi realizado com o objetivo de responder principalmente às seguintes, necessidades enumeradas:

- Proposição de uma modelagem por elementos finitos de sistemas estruturais do tipo placas finas sujeitas a não linearidades geométricas e/ou localizadas e para condições gerais de carregamento e de condições de contorno. Neste caso, os modelos não lineares devem ser capazes de representar as vibrações lineares e não lineares do sistema, dependendo do carregamento e das condições de contorno, visando sua aplicação em situações mais realísticas de interesse industrial. É importante salientar que mesmo sendo observado na literatura trabalhos sobre vibrações não lineares de sistemas estruturais do tipo placas, uma pequena contribuição com o desenvolvimento desta etapa foi a implementação de critérios de avaliação da estabilidade e convergência no método de integração de Newmark em conjunto com o método de Newton-Raphson;
- A necessidade de avaliação rápida e eficiente do comportamento dinâmico dos sistemas lineares e/ou não lineares. Para tanto, duas técnicas de redução de modelos bem adaptadas a sistemas não lineares amortecidos ou não foram propostas nesta tese na tentativa de reduzir o esforço computacional necessário à obtenção das respostas vibratórias. Estas são consideradas grandes contribuições do trabalho;
- Extensão da teoria dos elementos finitos estocásticos, inicialmente desenvolvida para os elementos elásticos e lineares, para o caso de placas não lineares estocásticas, que permitem não somente identificar os limites da modelagem por EF determinística do sistema não linear, mas também a influência de variáveis incertas nas respostas dinâmicas dos sistemas linear e não linear. Esta, também é considerada uma grande contribuição deste trabalho.

1.2. Conteúdo da tese.

Além deste capítulo introdutório, o presente trabalho de tese é composto, ainda, pelos seguintes capítulos:

O Capítulo II é dedicado à modelagem por EF de placas finas em grandes deslocamentos. Neste caso, é utilizado o tensor de segunda ordem de Green-Lagrange para obter os campos de deformações em função dos campos de deslocamentos globais da placa fina em flexão e da expressão do deslocamento de um ponto material conforme pode ser observado na mecânica do contínuo (MARVERN, 1969). Isto permite caracterizar os efeitos linear e não linear do sistema de forma separada, sendo que o efeito não linear está associado ao acoplamento entre os efeitos de membrana e flexão. Neste capítulo, é mostrada também a técnica de resolução numérica das equações do movimento do sistema não linear empregando o método de Newmark combinado com o método de Newton-Raphson.

No Capítulo III é apresentada a extensão da modelagem determinística para o caso estocástico de placas finas em grandes deslocamentos. O interesse é dispor de uma modelagem que permita o projeto e a análise do sistema dinâmico não linear na presença de incertezas em parâmetros físicos e/ou geométricos que influem na sua dinâmica. Neste trabalho, optou-se pela expansão de Karhunen-Loève para a obtenção das matrizes de rigidez linear e não linear do sistema estocástico através de modificações do processo de integração das matrizes.

O Capítulo IV apresenta os métodos de redução propostos neste trabalho para lidar com sistemas dinâmicos não lineares. O método de redução modal enriquecido com resíduos estáticos de primeira ordem associados aos esforços presentes na estrutura é o primeiro a ser utilizado, já o segundo é o método de redução utilizando base adaptativa tendo como foco o método das aproximações combinadas proposto por Kirch e Liu (1995).

O Capítulo V faz uma breve revisão sobre as ferramentas de análise de sistemas dinâmicos não lineares como o uso da transformada de Fourier para a identificação de não linearidades em sistemas dinâmicos. Além disso, para a análise de estabilidade, a Seção de Poincaré e os expoentes de Lyapunov são apresentados para a análise de sistemas dinâmicos não lineares, no que diz respeito tanto a não periodicidade (Poincaré) quanto à sensibilidade (Lyapunov). Ainda neste capítulo é mostrado aplicações de tais métodos em um sistema mecânico simples de um grau de liberdade.

No Capítulo VI são apresentados os resultados das simulações numéricas realizadas com o objetivo de avaliar a eficiência dos procedimentos de modelagem dos sistemas não lineares determinísticos e estocásticos e dos métodos de redução dos sistemas não lineares.

Finalmente, no Capítulo VII são apresentadas as conclusões gerais e as perspectivas de trabalhos futuros.

CAPÍTULO II

MODELAGEM POR ELEMENTOS FINITOS DE PLACAS FINAS EM GRANDES DESLOCAMENTOS

Este capítulo apresenta a teoria geral de elementos finitos do problema não linear de placas finas sujeitas a grandes deslocamentos, baseados nos desenvolvimentos de Zienkiewicz e Taylor (2000) e Gerges (2013). Neste caso, as hipóteses assumidas são válidas para o domínio elástico e isotrópico, onde as rotações assumidas são moderadas. Na prática, este tipo de comportamento é observado quando o deslocamento transversal da placa fina ultrapassa o valor de sua espessura.

2.1. Relações deformações-deslocamentos para a placa em grandes deslocamentos

Placas são estruturas frequentemente utilizadas na concepção de diversos sistemas em engenharia tais como carcaças de automóveis, fuselagens e asas de aeronaves, compressores de refrigeração, instrumentos musicais de percussão, etc. (GERGES, 2013). Entretanto, uma vez que são bastante sensíveis às vibrações, quanto mais fina a placa, mais suscetível a presença de fenômenos não lineares, tais como as não linearidades geométricas (ZIENKIEWICZ e TAYLOR, 2000). Diante disso, Zienkiewicz e Taylor (2000) estabelecem considerar uma placa fina utilizando a métrica da espessura em relação às outras dimensões, neste caso a métrica estabelecida é de 1 para 20, ou seja, a medida da espessura é 20 (vinte) vezes inferior ao comprimento (ou largura) da placa.

Considerando a placa fina conforme ilustrada na Fig. 2.1, neste caso esta placa estará sujeita a carregamentos transversais dos quais produzem grandes deslocamentos, ou seja, relação deslocamentos transversais/espessura superiores a um. Nesta configuração a teoria utilizada neste trabalho toma por base a teoria de placas finas em grandes deslocamentos

desenvolvida por von Kármán, onde são assumidas as seguintes hipóteses de Kirchhoff-Love (TIMOSHENKO, 1959): (i) material elástico, homogêneo e isotrópico; (ii) o plano médio é inicialmente plano; (iii) as seções normais ao plano médio permanecem normais após a flexão (o cisalhamento transversal é negligenciável). Além disso, a tensão na direção normal ao plano médio, σ_{zz} , é muito pequena quando comparada com as tensões σ_{xx} e σ_{yy} , assim, $\sigma_{zz} = 0$.

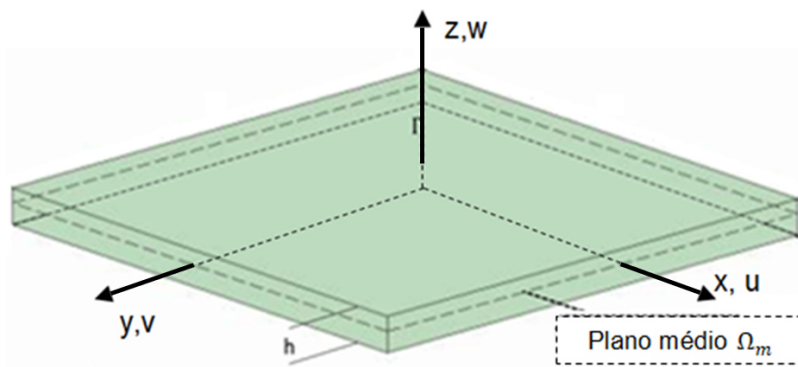


Figura 2.1 – Ilustração da placa fina.

A título de ilustração, a Fig. 2.2 mostra as rotações de um ponto qualquer $P(x, y, z)$ da placa fina após a flexão. Portanto, uma vez mantidas as hipóteses de Kirchhoff-Love, pode-se escrever os campos de deslocamentos de um ponto qualquer, $P(x, y, z)$, da placa fina da seguinte forma:

$$\mathbf{U}(x, y, z, t) = \begin{Bmatrix} u(x, y, t) \\ v(x, y, t) \\ w(x, y, t) \end{Bmatrix} - z \begin{Bmatrix} w_x(x, y, t) \\ w_y(x, y, t) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.1)$$

onde $u(x, y, t)$ e $v(x, y, t)$ são os deslocamentos longitudinais da projeção de $P(x, y, z)$ sobre o plano médio da placa, e $w(x, y, t)$ representa o deslocamento transversal.

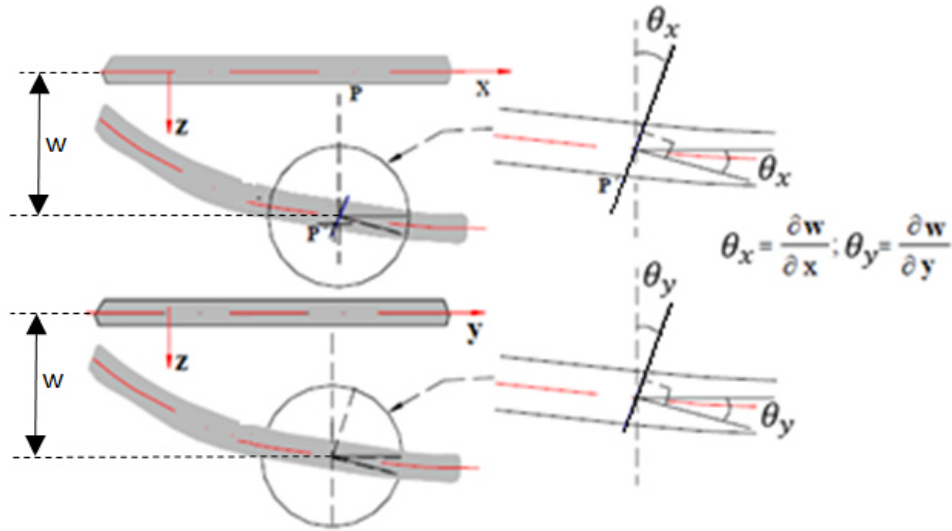


Figura 2.2 – Rotações da placa após a deformação (Adaptado de Dinis (2002)).

Uma vez que o sistema dinâmico será submetido a carregamentos que podem levar a grandes deslocamentos (não linearidades geométricas), será considerado o seguinte tensor de Green-Lagrange de 2ª ordem para obter as relações entre as deformações e os deslocamentos:

$$\mathbf{E}_{IJ} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_I}{\partial X_J} + \frac{\partial U_J}{\partial X_I} + \frac{\partial U_K}{\partial X_I} \frac{\partial U_K}{\partial X_J} \right) \quad (2.2)$$

A partir do campo de deslocamentos da Eq. (2.1), da hipótese de pequenas deformações e rotações moderadas, é possível então obter as relações deformações-deslocamentos para o estado plano de tensões:

$$\mathbf{E} = \begin{Bmatrix} E_{xx} \\ E_{yy} \\ E_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_y + v_x \end{Bmatrix} - z \begin{Bmatrix} w_{xx} \\ w_{yy} \\ 2w_{xy} \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} (w_x)^2 \\ (w_y)^2 \\ 2w_x w_y \end{Bmatrix} \quad (2.3)$$

sendo $\bullet_x = \partial \bullet / \partial x$, $\bullet_y = \partial \bullet / \partial y$, $\bullet_{xx} = \partial^2 \bullet / \partial x^2$, $\bullet_{yy} = \partial^2 \bullet / \partial y^2$ e $\bullet_{xy} = \partial^2 \bullet / \partial x \partial y$. Como são consideradas rotações moderadas na expressão, Eq. (2.3), foi desconsiderado todos os termos contendo z^2 . Além disso, segundo as hipóteses de Kirchhoff-Love tem-se que, $w_{xy} = w_{yx}$.

Na Eq. (2.3), o termo $\mathbf{E}^m$ é o vetor das deformações do efeito de membrana, $\mathbf{E}^f = \mathbf{z}\mathbf{K}^f$ são as deformações de flexão e $\mathbf{E}^c$ é o vetor das deformações não lineares que traduz o acoplamento membrana-flexão no plano médio da placa.

É importante salientar que o termo $\mathbf{E}^c$ não aparece no caso de vibrações lineares e os problemas de flexão e membrana são resolvidos de forma independente. Já para o caso de vibrações não lineares, a influência do acoplamento entre ambos os efeitos deve ser levada em conta nas análises dinâmicas.

2.2. Princípio do trabalho virtual

Considerando a formulação variacional, pode-se escrever o princípio do trabalho virtual entre dois instantes quaisquer t_0 e t_f da seguinte forma (GERGES, 2013):

$$\delta\Pi = \delta \int_{t_0}^{t_f} (U_0 + T_0) dt = 0 \quad (2.4)$$

sendo $U_0 = U_{def} + U_{pot}$ é a energia potencial total composta pela energia de deformação mecânica, U_{def} , e pela energia potencial dos esforços externos, U_{pot} , T_0 é a energia cinética. Essas energias são calculadas como segue:

$$T_0 = \frac{1}{2} \int_V \rho \dot{\mathbf{U}}^T \dot{\mathbf{U}} dV \quad (2.5a)$$

$$U_0 = U_{pot} + \frac{1}{2} \int_V \mathbf{E} \mathbf{S} dV \quad (2.5b)$$

sendo $\mathbf{S}$ é o tensor tensão de segunda ordem de Piola-Kirchhoff (SZILARD, 1974).

Portanto, levando-se em conta as relações Eq. (2.1), (2.2) e (2.5), o princípio do trabalho virtual Eq. (2.4) pode ser reescrito como segue,

$$\delta\Pi = \int_V (\delta \mathbf{E}^m + \delta \mathbf{E}^c)^T \mathbf{S} dV - \int_V (\delta \mathbf{K}^f)^T \mathbf{z} \mathbf{S} dV + \delta\Pi_{ine} - \delta\Pi_{ext} = 0 \quad (2.6a)$$

ou ainda sob a seguinte forma:

$$\delta\Pi = \int_S (\delta\mathbf{E}^m + \delta\mathbf{E}^c)^T \mathbf{T}^m dS - \int_S (\delta\mathbf{K}^f)^T \mathbf{M}^f dS + \delta\Pi_{ine} - \delta\Pi_{ext} = 0 \quad (2.6b)$$

sendo $\delta\Pi_{ine} = \delta \frac{1}{2} \int_V \rho \dot{\mathbf{U}}^T \dot{\mathbf{U}} dV$ e $\delta\Pi_{ext} = -\delta \frac{1}{2} \int_V U_0 dV$ os trabalhos virtuais associados às energias cinética e potencial, respectivamente, $\mathbf{T}^m = \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{S} dz$ é o vetor dos esforços cortantes

e $\mathbf{M}^f = - \int_{-h/2}^{h/2} z \mathbf{S} dz$ é o vetor dos momentos de flexão.

A partir da lei do comportamento do material elástico e isotrópico,

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{T}^m \\ \mathbf{M}^f \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}^m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}^f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{E}^m + \mathbf{E}^c \\ \mathbf{K}^f \end{Bmatrix} \quad (2.7)$$

de forma que $\mathbf{D}^m = \frac{Eh}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{D}^f = \frac{h^2}{12} \mathbf{D}^m$, pode-se então escrever a

expressão do princípio do trabalho virtual a ser discretizada em elementos finitos:

$$\delta\Pi = \int_S (\delta\mathbf{E}^m + \delta\mathbf{E}^c)^T \mathbf{D}^m (\mathbf{E}^m + \mathbf{E}^c) dS + \int_S (\delta\mathbf{K}^f)^T \mathbf{D}^f \mathbf{K}^f dS + \delta\Pi_{ine} - \delta\Pi_{ext} = 0 \quad (2.8)$$

2.3. Discretização pelo método dos elementos finitos (MEF)

Nesta seção, será apresentada a formulação das matrizes elementares de massa e rigidezes do elemento finito de placa fina na presença de não linearidades geométricas. Para isto, tem-se como ponto de partida a formulação variacional Eq. (2.8) do problema que admite três variáveis variacionais independentes, (u, v, w) , já que as rotações são obtidas através da derivação espacial do campo de deslocamento transversal, w .

Neste trabalho, será adotado um elemento de placa plana formado por quatro nós e cinco graus de liberdade (gdl's) por nó, a saber: os gdl's de translação, (U^i, V^i, W^i) , e os gdl's de rotações, (θ_x^i, θ_y^i) , com $(i = 1 \text{ a } 4)$, como ilustrado na Fig. 2.3. Portanto, pode-se escrever as aproximações dos campos de deslocamentos da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} u(x, y, t) \\ v(x, y, t) \\ w(x, y, t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N^i(x, y) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N^i(x, y) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N^w(x, y) & N^{\theta_x^i}(x, y) & N^{\theta_y^i}(x, y) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U^i(t) \\ V^i(t) \\ W^i(t) \\ \theta_x^i(t) \\ \theta_y^i(t) \end{Bmatrix} \quad (2.9a)$$

ou ainda, de forma simplificada,

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N^w & N^{\theta_x} & N^{\theta_y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} \quad (2.9b)$$

sendo $N(x, y) = [1 \ x \ y \ xy]$ e $N^w(x, y) = [1 \ x \ y \ x^2 \ xy \ y^2 \ x^3 \ x^2y \ xy^2 \ y^3 \ x^3y \ xy^3]$ as funções de interpolação (ou funções de forma) adotadas para aproximar os campos de deslocamentos longitudinais, (u, v) , e transversal, w , respectivamente. Neste caso, $N^{\theta_x}(x, y) = \partial N^w / \partial x$ e $N^{\theta_y}(x, y) = \partial N^w / \partial y$.

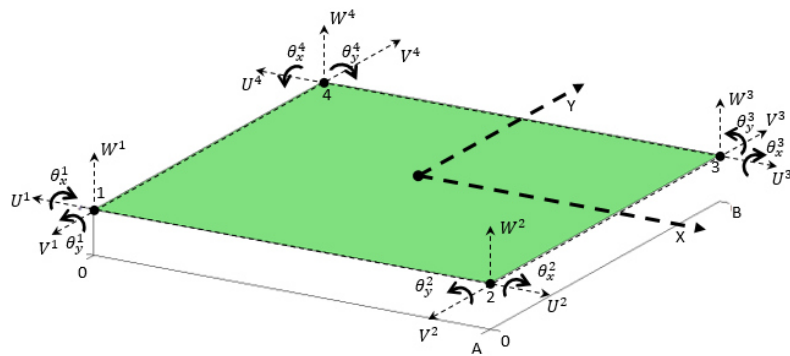


Figura 2.3 – Ilustração dos gdl's elementares do elemento de placa.

A partir das aproximações dos campos de deslocamentos e rotações definidos na Eq. (2.9b), pode-se obter as deformações associadas aos efeitos de membrana, flexão e de acoplamento (membrana-flexão) para o elemento de placa em grandes deslocamentos:

$$\mathbf{E}^m = \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_y + v_x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_x U \\ N_y V \\ N_y U + N_x V \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_x & 0 \\ 0 & N_y \\ N_y & N_x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ V \end{Bmatrix} = \mathbf{B}^m \tilde{\mathbf{U}} \quad (2.10)$$

$$\mathbf{K}^f = \begin{Bmatrix} w_{xx} \\ w_{yy} \\ 2w_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_{xx}^w W + N_{xx}^{\theta_x} \theta_x + N_{xx}^{\theta_y} \theta_y \\ N_{yy}^w W + N_{yy}^{\theta_x} \theta_x + N_{yy}^{\theta_y} \theta_y \\ 2(N_{xy}^w W + N_{xy}^{\theta_x} \theta_x + N_{xy}^{\theta_y} \theta_y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{xx}^w & N_{xx}^{\theta_x} & N_{xx}^{\theta_y} \\ N_{yy}^w & N_{yy}^{\theta_x} & N_{yy}^{\theta_y} \\ 2N_{xy}^w & 2N_{xy}^{\theta_x} & 2N_{xy}^{\theta_y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = \mathbf{B}^f \tilde{\mathbf{W}} \quad (2.11)$$

$$\mathbf{E}^c = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} (w_x)^2 \\ (w_y)^2 \\ 2w_x w_y \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \underbrace{\begin{bmatrix} w_x & 0 \\ 0 & w_y \\ w_y & w_x \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}^{nl}(\tilde{\mathbf{W}})} \underbrace{\begin{bmatrix} N_x^w & N_x^{\theta_x} & N_x^{\theta_y} \\ N_y^w & N_y^{\theta_x} & N_y^{\theta_y} \end{bmatrix}}_{\mathbf{G}} \underbrace{\begin{Bmatrix} W \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{W}}} = \frac{1}{2} \mathbf{B}^{nl}(\tilde{\mathbf{W}}) \tilde{\mathbf{W}} \quad (2.12)$$

sendo $\tilde{\mathbf{U}} = [U \quad V]^T$, $\tilde{\mathbf{W}} = [W \quad \theta_x \quad \theta_y]^T$ e o termo $\mathbf{H}(\tilde{\mathbf{W}})$ pode ser escrito sob a forma discretizada a partir das funções de interpolação, deslocamento transversal e rotações como:

$$\mathbf{H}(\tilde{\mathbf{W}}) = \begin{bmatrix} N_x^w & N_x^{\theta_x} & N_x^{\theta_y} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_y^w & N_y^{\theta_x} & N_y^{\theta_y} \\ N_y^w & N_y^{\theta_x} & N_y^{\theta_y} & N_x^w & N_x^{\theta_x} & N_x^{\theta_y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W & 0 \\ \theta_x & 0 \\ \theta_y & 0 \\ 0 & W \\ 0 & \theta_x \\ 0 & \theta_y \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

A partir da Eq. (2.3), o tensor de Green de segunda ordem e sua correspondente forma variacional são então obtidos como segue,

$$\mathbf{E} = \mathbf{B}^m \tilde{\mathbf{U}} + \frac{1}{2} \mathbf{B}^{nl}(\tilde{\mathbf{W}}) \tilde{\mathbf{W}} - z \mathbf{B}^f \tilde{\mathbf{W}} \quad (2.14a)$$

$$\delta E = \mathbf{B}^m \delta \tilde{U} + \frac{1}{2} \mathbf{B}^{nl}(\tilde{\mathbf{W}}) \delta \tilde{\mathbf{W}} - z \mathbf{B}^f \delta \tilde{\mathbf{W}} \quad (2.14b)$$

o que permite obter a forma discretizada do princípio do trabalho virtual (2.8) relacionada às deformações mecânicas:

$$\delta \Pi_{def} = \int_S \left(\mathbf{B}^m \delta \tilde{U} + \mathbf{B}^{nl}(\tilde{\mathbf{W}}) \delta \tilde{\mathbf{W}} \right)^T \mathbf{D}^m \left(\mathbf{B}^m \tilde{U} + \frac{1}{2} \mathbf{B}^{nl}(\tilde{\mathbf{W}}) \tilde{\mathbf{W}} \right) dS + \int_S \left(\mathbf{B}^f \delta \tilde{\mathbf{W}} \right)^T \mathbf{D}^f \mathbf{B}^f \tilde{\mathbf{W}} dS \quad (2.15)$$

ou ainda, sob a seguinte forma matricial:

$$\delta \Pi_{def} = \delta \mathbf{X}^T \left[\mathbf{K}^l + \Delta \mathbf{K}^{nl}(\tilde{\mathbf{W}}) \right] \mathbf{X} \quad (2.16)$$

de forma que $\mathbf{K}^l = \int_S \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{mT} \mathbf{D}^m \mathbf{B}^m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}^{fT} \mathbf{D}^f \mathbf{B}^f \end{bmatrix} dS$ representa a contribuição dos termos

lineares da rigidez da placa, $\Delta \mathbf{K}^{nl}(\tilde{\mathbf{W}}) = \int_S \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \frac{1}{2} \mathbf{B}^{mT} \mathbf{D}^m \mathbf{B}^{nl}(\tilde{\mathbf{W}}) \\ \mathbf{B}^{nl}(\tilde{\mathbf{W}})^T \mathbf{D}^m \mathbf{B}^m & \frac{1}{2} \mathbf{B}^{nl}(\tilde{\mathbf{W}})^T \mathbf{D}^m \mathbf{B}^{nl}(\tilde{\mathbf{W}}) \end{bmatrix} dS$ é a

parcela da rigidez associada às não linearidades geométricas e $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \tilde{U} & \tilde{\mathbf{W}} \end{bmatrix}^T$.

Pode-se notar que o problema não linear aparece como uma perturbação ou uma modificação do problema linear de placas finas em flexão, oferecendo vantagens para a aplicação de técnicas de redução de modelos, como detalhado em capítulos posteriores.

Finalmente, é possível escrever as equações do movimento da placa fina em grandes deslocamentos no domínio do tempo da seguinte forma:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{X}}(t) + \overbrace{\mathbf{K}(\mathbf{X})}^{f_{nl}(\mathbf{X})} \mathbf{X}(t) - \mathbf{F}(t) = \mathbf{0} \quad (2.17)$$

onde $\mathbf{K}(\mathbf{X}) = \mathbf{K}^l + \Delta \mathbf{K}^{nl}(\mathbf{X})$ e $\mathbf{M} = \int_S \rho \dot{\mathbf{U}}^T \dot{\mathbf{U}} dS$.

O procedimento de integração das matrizes elementares de massa e rigidez via Gauss-Legendre é apresentado no *Anexo A*.

2.4. Determinação da matriz de rigidez tangente

A resolução da Eq. (2.17) depende geralmente da natureza da excitação, $F(t)$. Além disso, a maioria dos métodos numéricos disponíveis na literatura para a resolução de equações diferenciais não lineares de segunda ordem requerem o conhecimento da matriz de rigidez tangente ou gradiente espacial da força não linear, $df_{nl}(X)$. Portanto, a minimização da Eq. (2.17) leva ao seguinte problema:

$$Md\ddot{X} + df_{nl}(X) - dF = 0 \quad (2.18)$$

sendo $df_{nl}(X) = \frac{\partial f_{nl}(X)}{\partial X} dX = K^t dX$, de forma que o termo, $K^t = \partial f_{nl}(X)/\partial X$, é conhecido como matriz de rigidez tangente.

Uma vez que a força não linear pode ser escrita sob a forma,

$$f_{nl}(X) = \begin{Bmatrix} f_{\tilde{U}} \\ f_{\tilde{W}} \end{Bmatrix} \quad (2.19)$$

o termo, $df_{nl}(X)$, pode ser determinado como segue:

$$df_{nl} = df_{\tilde{U}}(X) + df_{\tilde{W}}(X) = \begin{Bmatrix} \frac{\partial f_{\tilde{U}}}{\partial \tilde{U}} d\tilde{U} + \frac{\partial f_{\tilde{U}}}{\partial \tilde{W}} d\tilde{W} \\ \frac{\partial f_{\tilde{W}}}{\partial \tilde{U}} d\tilde{U} + \frac{\partial f_{\tilde{W}}}{\partial \tilde{W}} d\tilde{W} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{\tilde{U}}}{\partial \tilde{U}} & \frac{\partial f_{\tilde{U}}}{\partial \tilde{W}} \\ \frac{\partial f_{\tilde{W}}}{\partial \tilde{U}} & \frac{\partial f_{\tilde{W}}}{\partial \tilde{W}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\tilde{U} \\ d\tilde{W} \end{Bmatrix} = K^t dX \quad (2.20)$$

Portanto, para se calcular, $df_{nl}(X)$, de forma que se possa resolver a Eq. (2.20), deve-se encontrar os termos $df_{\tilde{U}}(X)$ e $df_{\tilde{W}}(X)$, como será feito na sequência.

- Determinação do termo $df_{\tilde{U}}(X)$.

$$\begin{aligned}
df_{\tilde{U}}(X) &= d \left(\int_S \mathbf{B}^{m^T} \mathbf{D}^m \mathbf{B}^m \tilde{U} dS + \int_S \frac{1}{2} \mathbf{B}^{m^T} \mathbf{D}^m \mathbf{B}^{nl}(\tilde{\mathbf{W}}) \tilde{\mathbf{W}} dS \right) \\
&= \int_S \mathbf{B}^{m^T} \mathbf{D}^m \mathbf{B}^m dS d\tilde{U} + \int_S \frac{1}{2} \mathbf{B}^{m^T} \mathbf{D}^m \frac{\partial(\mathbf{B}^{nl}(\tilde{\mathbf{W}}) \tilde{\mathbf{W}})}{\partial \tilde{\mathbf{W}}} d\tilde{\mathbf{W}} dS \\
&= \int_S \mathbf{B}^{m^T} \mathbf{D}^m \mathbf{B}^m d\tilde{U} dS + \int_S \frac{1}{2} \mathbf{B}^{m^T} \mathbf{D}^m \left(\frac{\partial \mathbf{B}^{nl}(\tilde{\mathbf{W}})}{\partial \tilde{\mathbf{W}}} \tilde{\mathbf{W}} + \mathbf{B}^{nl}(\tilde{\mathbf{W}}) d\tilde{\mathbf{W}} \right) dS
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Como, $\mathbf{B}^{nl}(\tilde{\mathbf{W}})$, é linear em $\tilde{\mathbf{W}}$, tem-se que, $\frac{\partial \mathbf{B}^{nl}(\tilde{\mathbf{W}})}{\partial \tilde{\mathbf{W}}} \tilde{\mathbf{W}} = \mathbf{B}^{nl}(\tilde{\mathbf{W}})$, resultando na seguinte expressão para $df_{\tilde{U}}(X)$:

$$df_{\tilde{U}}(X) = \int_S \mathbf{B}^{m^T} \mathbf{D}^m \mathbf{B}^m dS d\tilde{U} + \int_S \mathbf{B}^{m^T} \mathbf{D}^m \mathbf{B}^{nl}(\tilde{\mathbf{W}}) d\tilde{\mathbf{W}} dS \tag{2.22}$$

- Determinação do termo $df_{\tilde{\mathbf{W}}}(X)$

$$\begin{aligned}
df_{\tilde{\mathbf{W}}}(X) &= d \left(\int_S \mathbf{B}^{nl^T}(\tilde{\mathbf{W}}) \mathbf{D}^m \mathbf{B}^m \tilde{U} dS + \int_S \left(\frac{1}{2} \mathbf{B}^{nl^T}(\tilde{\mathbf{W}}) \mathbf{D}^m \mathbf{B}^{nl}(\tilde{\mathbf{W}}) + \mathbf{B}^{f^T} \mathbf{D}^f \mathbf{B}^f \right) \tilde{\mathbf{W}} dS \right) \\
&= \int_S \mathbf{B}^{nl^T}(\tilde{\mathbf{W}}) \mathbf{D}^m \mathbf{B}^m d\tilde{U} dS + \int_S d(\mathbf{B}^{nl^T}(\tilde{\mathbf{W}})) \mathbf{D}^m \mathbf{B}^m \tilde{U} dS + \int_S \frac{1}{2} d(\mathbf{B}^{nl^T}(\tilde{\mathbf{W}})) \mathbf{D}^m \mathbf{B}^{nl}(\tilde{\mathbf{W}}) \tilde{\mathbf{W}} dS + \\
&\quad + \int_S \frac{1}{2} \mathbf{B}^{nl^T}(\tilde{\mathbf{W}}) \mathbf{D}^m d(\mathbf{B}^{nl}(\tilde{\mathbf{W}}) \tilde{\mathbf{W}}) dS + \int_S \mathbf{B}^{f^T} \mathbf{D}^f \mathbf{B}^f d\tilde{\mathbf{W}} dS
\end{aligned} \tag{2.23}$$

como, $\mathbf{E}^m = \mathbf{B}^m \tilde{\mathbf{U}}$ e $\mathbf{E}^c = \frac{1}{2} \mathbf{B}^{nl}(\tilde{\mathbf{W}}) \tilde{\mathbf{W}}$

$$\begin{aligned}
\int_S d(\mathbf{B}^{nl^T}(\tilde{\mathbf{W}})) \mathbf{D}^m \mathbf{B}^m \tilde{U} dS + \int_S \frac{1}{2} d(\mathbf{B}^{nl^T}(\tilde{\mathbf{W}})) \mathbf{D}^m \mathbf{B}^{nl}(\tilde{\mathbf{W}}) \tilde{\mathbf{W}} dS &= \\
&= \int_S d(\mathbf{B}^{nl^T}(\tilde{\mathbf{W}})) \mathbf{D}^m \left(\mathbf{B}^m \tilde{\mathbf{U}} + \frac{1}{2} \mathbf{B}^{nl}(\tilde{\mathbf{W}}) \tilde{\mathbf{W}} \right) dS, \\
&= \int_S d(\mathbf{B}^{nl^T}(\tilde{\mathbf{W}})) \mathbf{D}^m (\mathbf{E}^m + \mathbf{E}^c) dS
\end{aligned}$$

o termo, $d(\mathbf{B}^{nl^T}(\tilde{\mathbf{W}})) \mathbf{D}^m (\mathbf{E}^m + \mathbf{E}^c)$, pode ser colocado na seguinte forma:

$$\begin{aligned}
d\left(\mathbf{B}^{nl^T}(\tilde{\mathbf{W}})\right)\mathbf{D}^m(\mathbf{E}^m + \mathbf{E}^c) &= \mathbf{G}^T d\left(\mathbf{H}(\tilde{\mathbf{W}})^T\right)\mathbf{D}^m(\mathbf{E}^m + \mathbf{E}^c) = \mathbf{G}^T d\left(\mathbf{H}(\tilde{\mathbf{W}})^T\right)\mathbf{T}^m \\
&= \mathbf{G}^T \begin{bmatrix} dw_x & 0 & dw_y \\ 0 & dw_y & dw_x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_x^m \\ T_y^m \\ T_{xy}^m \end{Bmatrix} \\
&= \mathbf{G}^T \begin{bmatrix} T_x^m & T_{xy}^m \\ T_{xy}^m & T_y^m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dw_x \\ dw_y \end{Bmatrix} \\
&= \mathbf{G}^T \begin{bmatrix} T_x^m & T_{xy}^m \\ T_{xy}^m & T_y^m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_x^w & N_x^{\theta_x} & N_x^{\theta_y} \\ N_y^w & N_y^{\theta_x} & N_y^{\theta_y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dw \\ d\theta_x \\ d\theta_y \end{Bmatrix} \\
&= \mathbf{G}^T \mathbf{T}^m \mathbf{G} d\tilde{\mathbf{W}}
\end{aligned}$$

Portanto, $d\mathbf{f}_{\tilde{\mathbf{W}}}(X)$, é calculado pela expressão:

$$d\mathbf{f}_{\tilde{\mathbf{W}}} = \int_S \left(\mathbf{B}^{nl^T}(\tilde{\mathbf{W}}) \mathbf{D}^m \mathbf{B}^m d\tilde{\mathbf{U}} + \mathbf{G}^T \mathbf{T}^m \mathbf{G} d\tilde{\mathbf{W}} + \mathbf{B}^{nl^T}(\tilde{\mathbf{W}}) \mathbf{D}^m \mathbf{B}^{nl}(\tilde{\mathbf{W}}) d\tilde{\mathbf{W}} + \mathbf{B}^{f^T} \mathbf{D}^f \mathbf{B}^f d\tilde{\mathbf{W}} \right) dS \quad (2.24)$$

Finalmente, chega-se à expressão final da matriz de rigidez tangente a ser calculada numericamente:

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}^t &= \int_S \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{m^T} \mathbf{D}^m \mathbf{B}^m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}^{f^T} \mathbf{D}^f \mathbf{B}^f \end{bmatrix} dS + \\
&+ \int_S \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \frac{1}{2} \mathbf{B}^{m^T} \mathbf{D}^m \mathbf{B}^{nl}(\tilde{\mathbf{W}}) \\ \mathbf{B}^{nl^T}(\tilde{\mathbf{W}}) \mathbf{D}^m \mathbf{B}^m & \frac{1}{2} \mathbf{B}^{nl^T}(\tilde{\mathbf{W}}) \mathbf{D}^m \mathbf{B}^{nl}(\tilde{\mathbf{W}}) \end{bmatrix} dS + \\
&+ \int_S \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \frac{1}{2} \mathbf{B}^{m^T} \mathbf{D}^m \mathbf{B}^{nl}(\tilde{\mathbf{W}}) \\ \mathbf{0} & \frac{1}{2} \mathbf{B}^{nl^T}(\tilde{\mathbf{W}}) \mathbf{D}^m \mathbf{B}^{nl}(\tilde{\mathbf{W}}) + \mathbf{G}^T \mathbf{T}^m \mathbf{G} \end{bmatrix} dS
\end{aligned} \quad (2.25a)$$

$$\mathbf{K}^t = \mathbf{K}^l + \Delta \mathbf{K}^{nl} + \Delta \mathbf{K}^t \quad (2.25b)$$

Para um sistema dinâmico não linear pouco amortecido formado por N gdl's, a equação do movimento (2.17) pode, então, ser reescrita:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}}(t) + \mathbf{D}\dot{\mathbf{X}}(t) + \mathbf{K}^l \mathbf{X}(t) = \mathbf{F}(t) - \mathbf{f}_{nl}(\mathbf{X}, t) \quad (2.26)$$

sendo $f_{nl}(X, t) = [\Delta K^{nl}(X) + \Delta K^t(X)]X(t)$ e $D = \alpha M + \lambda K^l$. Sendo α e λ constantes arbitrárias pequenas para descrever proporcionalidade das matrizes de massa e rigidez do sistema conservativo.

2.5. Método de resolução das equações do movimento do sistema não linear

Para o caso de uma excitação qualquer, $F(t)$, a utilização de métodos numéricos tais como o método do balanço harmônico ou o método assintótico numérico (GERGES, 2013) não são os mais indicados para a resolução do problema (2.26), principalmente para modelos de elementos finitos de sistemas não lineares mais complexos de interesse industrial. Neste caso, a integração temporal direta é mais indicada para esse tipo de problema.

A integração temporal é uma ferramenta numérica que permite prever o estado de um sistema dinâmico num intervalo de tempo, onde o estado inicial é normalmente conhecido. Neste caso, a equação diferencial não linear de segunda ordem, Eq. (2.26), que caracteriza a dinâmica do sistema é transformada numa equação diferencial de primeira ordem para posterior aplicação dos métodos de resolução (DOKAINISH e SUBBARAJ, 1989).

Entretanto, um dos grandes inconvenientes dos métodos que operam em sistemas de primeira ordem é a necessidade de transformação do sistema original de N gdl's para um sistema de $2N$ gdl's. Isto leva a uma dificuldade suplementar quando se trabalha com modelos de elementos finitos de sistemas não lineares mais complexos formados por um grande número de gdl's, ou quando o mesmo está sujeito a incertezas paramétricas, sendo necessário, neste caso, a avaliação de um conjunto de amostras para a obtenção dos envelopes de soluções.

Neste cenário, o método de Newmark (NEWMARK, 1959; GERGES, 2013) passa a ser um método numérico bastante atrativo que permite resolver diretamente a equação dinâmica de segunda ordem do sistema não linear. Neste caso, o método parte do seguinte desenvolvimento em série de Taylor do estado do sistema, $[X_i \quad \dot{X}_i]^T$, truncado à terceira ordem,

$$X_i = X_{i-1} + \Delta t \dot{X}_{i-1} + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{X}_{i-1} + \frac{\Delta t^3}{6} \ddot{\ddot{X}}_{i-1} \quad (2.27a)$$

$$\dot{X}_i = \dot{X}_{i-1} + \Delta t \ddot{X}_{i-1} + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\ddot{X}}_{i-1} \quad (2.27b)$$

considerando a introdução dos parâmetros γ e β para estabelecer uma nova formulação:

$$\mathbf{X}_i = \mathbf{X}_{i-1} + \Delta t \dot{\mathbf{X}}_{i-1} + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\mathbf{X}}_{i-1} + \beta \Delta t^3 \ddot{\mathbf{X}}_{i-1} \quad (2.28a)$$

$$\dot{\mathbf{X}}_i = \dot{\mathbf{X}}_{i-1} + \Delta t \ddot{\mathbf{X}}_{i-1} + \gamma \Delta t^2 \ddot{\mathbf{X}}_{i-1} \quad (2.28b)$$

Assumindo-se uma relação linear para a aceleração entre dois instantes quaisquer de tempo, $\ddot{\mathbf{X}}_{i-1} = (\ddot{\mathbf{X}}_i - \ddot{\mathbf{X}}_{i-1}) / \Delta t$, é possível então obter o seguinte estado:

$$\mathbf{X}_i = \mathbf{X}_{i-1} + \Delta t \dot{\mathbf{X}}_{i-1} + \Delta t^2 \left(\frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{\mathbf{X}}_{i-1} + \Delta t^2 \beta \ddot{\mathbf{X}}_i \quad (2.29a)$$

$$\dot{\mathbf{X}}_i = \dot{\mathbf{X}}_{i-1} + (1 - \gamma) \Delta t \ddot{\mathbf{X}}_{i-1} + \gamma \Delta t \ddot{\mathbf{X}}_i \quad (2.29b)$$

Isolando-se o termo, $\ddot{\mathbf{X}}_i$, da Eq. (2.29a) e introduzindo o resultado na Eq. (2.29b), chega-se às seguintes expressões finais para o estado do sistema não linear:

$$\dot{\mathbf{X}}_i = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} (\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_{i-1}) + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta} \right) \dot{\mathbf{X}}_{i-1} + \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta} \right) \Delta t \ddot{\mathbf{X}}_{i-1} \quad (2.30a)$$

$$\ddot{\mathbf{X}}_i = \frac{1}{\beta \Delta t^2} (\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_{i-1}) - \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{\mathbf{X}}_{i-1} + \left(1 - \frac{1}{2\beta} \right) \ddot{\mathbf{X}}_{i-1} \quad (2.30b)$$

A introdução das Eqs. (2.30a) e (2.30b) na Eq. (2.26) permite reescrevê-la na seguinte forma equivalente a ser resolvida numericamente para um instante qualquer de tempo, t_i , (GERGES, 2013):

$$\hat{\mathbf{K}}(\mathbf{X}_{i-1}) \Delta \mathbf{X}_i = \hat{\mathbf{F}} \quad (2.31a)$$

$$\hat{\mathbf{K}}(\mathbf{X}_{i-1}) = \mathbf{K}^l + \Delta \mathbf{K}^{nl} + \Delta \mathbf{K}^t + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \mathbf{D} + \frac{1}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M} \quad (2.31b)$$

$$\mathbf{F}_{i-1} = [\mathbf{M} \ddot{\mathbf{X}}_{i-1} + \mathbf{D} \dot{\mathbf{X}}_{i-1} + (\mathbf{K}^l + \Delta \mathbf{K}^{nl} + \Delta \mathbf{K}^t) \mathbf{X}_{i-1}] \quad (2.31c)$$

$$\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{F}_i - \mathbf{F}_{i-1} + \left(\frac{1}{\beta \Delta t} \mathbf{M} + \frac{\gamma}{\beta} \mathbf{D} \right) \dot{\mathbf{X}}_{i-1} + \left(\frac{1}{2\beta} \mathbf{M} + \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) \Delta t \mathbf{D} \right) \ddot{\mathbf{X}}_{i-1} \quad (2.31d)$$

sendo $\hat{\mathbf{K}}(\mathbf{X}_{i-1})$ a matriz jacobiana ou matriz de iteração do sistema, $\hat{\mathbf{F}}$ a força dinâmica instantânea, $\Delta \mathbf{X}_i = \mathbf{X}_i - \mathbf{X}_{i-1}$ representa a variação do campo de deslocamentos entre os instantes de tempo t_{i-1} e t_i e $\mathbf{F}_{i-1}$, o vetor de esforços instantâneos.

Na Eq. (2.31a), a predição da força não linear desconhecida no instante, t_i , é obtida da seguinte forma:

$$\mathbf{f}_{nl}(\mathbf{X}_i) = \mathbf{f}_{nl}(\mathbf{X}_{i-1}) + \frac{\partial \mathbf{f}_{nl}}{\partial \mathbf{X}}(\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_{i-1}) = \mathbf{f}_{nl}(\mathbf{X}_{i-1}) + \mathbf{K}^t \Delta \mathbf{X}_i \quad (2.32)$$

de forma que o termo, $\mathbf{K}^t = \partial \mathbf{f}_{nl} / \partial \mathbf{X}$, descreve a variação da força não linear atuante no sistema em função do deslocamento.

De acordo com Gerges (2013), a aproximação da força não linear utilizada na Eq. (2.32) não permite obter uma predição exata no tocante à resolução do problema não linear da forma (2.31). Neste caso, uma sequência de, k , correções são necessárias para assegurar a convergência do estado, $\mathbf{X}_i^k$, tendo em vista o equilíbrio dinâmico do problema quasi-estático (2.31). Neste caso, é feita a minimização da seguinte função resíduo, $r(\mathbf{X}_i^k)$:

$$r(\mathbf{X}_i^k) = \mathbf{M} \ddot{\mathbf{X}}_i^k + \mathbf{D} \dot{\mathbf{X}}_i^k + \mathbf{K}(\mathbf{X}_i^k) \mathbf{X}_i^k - \mathbf{F}_i = \mathbf{0} \quad (2.33)$$

considerando $\mathbf{K}(\mathbf{X}_i^k) = (\mathbf{K}^l + \Delta \mathbf{K}^{nl} + \Delta \mathbf{K}^t)$.

Sendo $r(\mathbf{X}_i^k)$ desconhecido, ele pode ser aproximado na vizinhança de $r(\mathbf{X}_i^{k-1})$ da seguinte forma:

$$r(\mathbf{X}_i^k) = r(\mathbf{X}_i^{k-1}) + \hat{\mathbf{K}}(\mathbf{X}_i^k - \mathbf{X}_i^{k-1}) \quad (2.34)$$

Uma vez que, $\Delta \mathbf{X}_i^k = \mathbf{X}_i^k - \mathbf{X}_i^{k-1}$, a partir das Eqs. (2.33) e (2.34), pode-se estimar os termos $\Delta \dot{\mathbf{X}}_i^k$ e $\Delta \ddot{\mathbf{X}}_i^k$ como segue:

$$\Delta \dot{X}_i^k = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \Delta X_i^k \quad \text{e} \quad \Delta \ddot{X}_i^k = \frac{1}{\beta \Delta t^2} \Delta X_i^k \quad (2.35)$$

Neste trabalho, será utilizado os seguintes critérios para a análise de convergência e de estabilidade de, $r(X_i^k)$:

$$ER_1 = \|r(X_i^k)\| < \varepsilon_1 \quad \text{e} \quad ER_2 = \frac{\|r(X_i^k)\| - \|r(X_i^{k-1})\|}{\|r(X_i^k)\|} < \varepsilon_2 \quad (2.36)$$

onde ε_1 e ε_2 são escalares relativamente pequenos definidos pelo usuário.

A Fig. 2.4 resume o esquema de integração de Newmark e Newton-Raphson implementado em ambiente de programação MATLAB para a resolução das equações diferenciais de segunda ordem de sistemas dinâmicos não lineares, considerando os parâmetros de Newmark $\gamma = 1/2$ e $\beta = 1/4$.

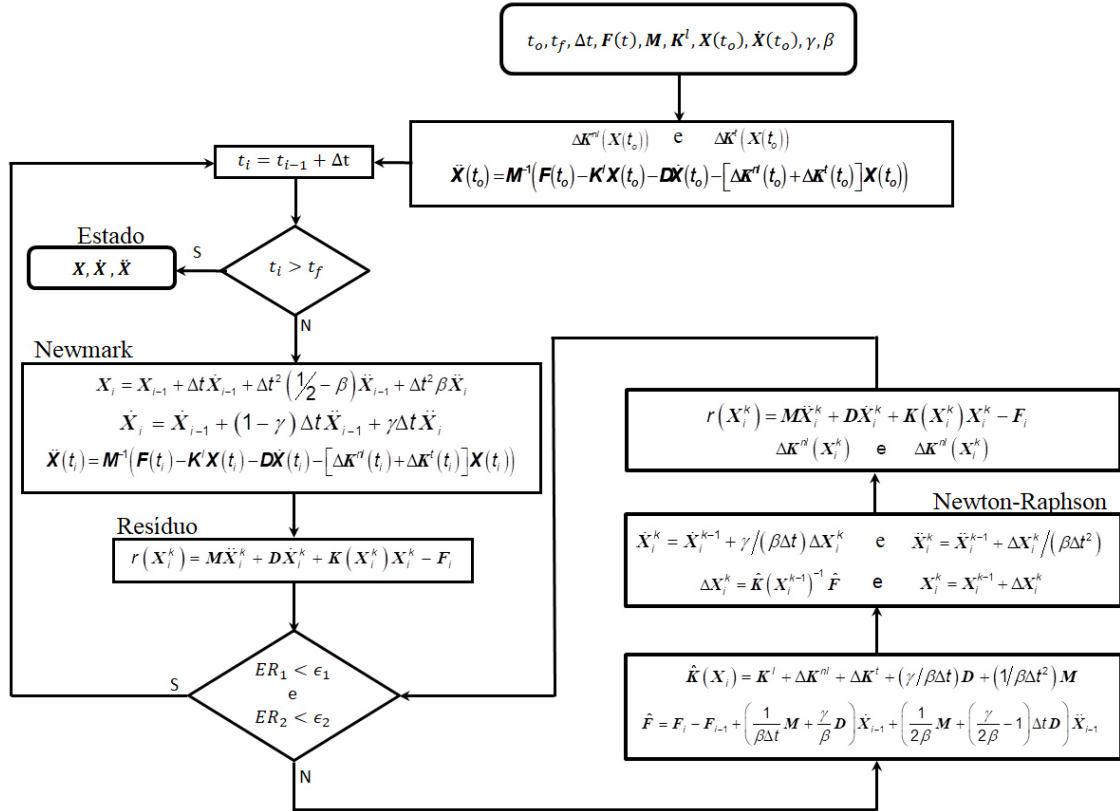


Figura 2.4 – Esquema de integração de Newmark com correção.

É importante salientar que, independente do método numérico a ser utilizado para resolver a equação diferencial não linear, Eq. (2.26), o cálculo, ainda sim, será demasiadamente oneroso devido ao espaço de memória para a estocagem dos dados a cada passo de tempo e da estimação da força não linear a cada iteração. Isto se torna mais agravante quando os sistemas não lineares são de interesse industrial, formados por um número elevado de gdl's e ainda sujeitos a considerações de incertezas em parâmetros físicos e geométricos (em nível de projeto) e de operação (forças externas, durabilidade, etc), sendo praticamente impossível calcular as respostas dinâmicas de tais sistemas diretamente a partir da integração numérica da Eq. (2.26).

Estes fatos motivam o uso de procedimentos de redução de modelos bem adaptados aos sistemas dinâmicos não lineares, como o método proposto neste trabalho, que visa diminuir a ordem do modelo numérico não linear sem perder sua capacidade de predição, principalmente na presença de incertezas paramétricas.

CAPITULO III

MODELAGEM ESTOCÁSTICA DE PLACAS FINAS EM GRANDES DESLOCAMENTOS

Neste capítulo, será proposto um modelo de propagação de incertezas aplicado a placas finas em grandes deslocamentos. As incertezas são introduzidas em parâmetros geométricos que influenciam na resposta dinâmica do sistema não linear por meio da modificação das funções de forma levando em conta os campos aleatórios do modelo de elementos finitos apresentado no capítulo anterior. Para tanto, será empregada a expansão de Karhunen-Loève para a obtenção das matrizes estocásticas exatas da placa fina sujeita a não linearidades geométricas.

3.1. Definições iniciais.

Devido ao crescente desenvolvimento tecnológico observado nos últimos anos na área informática, tornou-se possível a utilização de modelos mais precisos e realistas de sistemas de engenharia. Como resultado, nota-se também a constante proposição de modelos matemáticos cada vez mais sofisticados envolvendo algum tipo de processo estocástico (GHANEM e SPANOS, 1991). Portanto, inúmeras estruturas complexas de interesse industrial estão sendo modeladas por meio de sistemas distribuídos acoplados com elementos discretos.

Por outro lado, devido à variabilidade de parâmetros físicos e/ou geométricos, os modelos numéricos resultantes, certamente, estarão sujeitos a algum tipo de incerteza. Além disso, hipóteses equivocadas sobre condições de contorno ou sobre a linearidade do sistema em análise pode ser feita, o que resulta nas chamadas incertezas de modelo. Portanto, fica evidente que para aumentar a representatividade desses modelos preditivos, é extremamente

importante quantificar tais incertezas (SOIZE, 2013).

De maneira geral, as incertezas são consideradas nos modelos segundo a aproximação não paramétrica o que permite sua introdução diretamente nas matrizes globais do modelo (SOIZE, 1999; 2000), e pela aproximação paramétrica, utilizando-se principalmente o método dos elementos finitos estocásticos (*Stochastic Finit Element Method - SFEM*), que permite uma combinação da análise clássica por elementos finitos e a análise estatística (GHANEM e SPANOS, 1991; SCHUELLER, 2001).

Assim, baseado nos trabalhos de Dessombz *et al.* (2001) e Lima (2007) define-se as incertezas no estado de concepção em duas etapas: as incertezas estatísticas, modeladas por variáveis aleatórias, no qual se conhece bem a lei de probabilidade; e as variáveis incertas e limitadas, que são modeladas por intervalos definidos pela física do problema. Além disso, as incertezas podem ser classificadas em quatro grandes categorias, a saber (GUEDRI *et al.* 2007):

- **Parâmetros aleatórios:** são os parâmetros físicos ou mecânicos no qual se conhecem as tolerâncias. Como exemplo, pode-se citar a espessura de chapas metálicas modeladas com frequência por uma lei Gaussiana;
- **Parâmetros mal conhecidos:** neste caso, as condições de limite são problemas típicos as diferentes montagens mecânicas, como soldagem, colagem, etc, que são difíceis de serem modeladas;
- **Parâmetros variáveis:** podem-se distinguir os parâmetros relacionados as variáveis no tempo que são difíceis de serem modelados, como por exemplo, a degradação ou o envelhecimento de um material viscoelástico no tempo;
- **Incerteza no modelo:** podem-se citar as leis do comportamento adotadas que representam mal ou de forma incompleta os fenômenos físicos, os erros associados à escolha da malha de elementos finitos, o número de elementos na malha, o tipo de elemento escolhido, etc. Em geral, essas incertezas são difíceis de serem avaliadas.

Outro aspecto importante a ser considerado quanto à modelagem de sistemas mecânicos na presença de incertezas, é a escolha da melhor técnica de resolução a ser empregada para a obtenção da variabilidade das soluções dos sistemas estocásticos. Neste caso, podem-se citar

os seguintes métodos, frequentemente, empregados para resolver tais problemas (BENAROYA e REHAK, 1988; IBRAHIM, 1987; SCHUELLER, 2001):

- a simulação de Monte Carlo (MC) (SCHINOZURA, 1972; RUBINSTEIN, 1981; PAPADRAKAKIS e KOTSOPULOS, 1999) usada frequentemente como referência por não ser um método intrusivo (SOIZE, 2001), mas que possui o inconveniente de requerer um alto custo computacional, uma vez que requer um número elevado de cálculos para a convergência (CUNHA, *et al.*, 2014). Como alternativa, o método do Hyper-Cubo-Latino (HCL) (IMAN e CONOVERS, 1980; FLORIAN, 1992; MANTEUFEL AND RANDALL, 2000; VIANA, *et al.*, 2008) foi proposto, com o objetivo de reduzir o número de cálculos necessário para a convergência da simulação de Monte Carlo, conservando o nível de predição;
- os métodos de perturbação que são baseados nas expansões em série de Taylor (KLEIBER e HIEN, 1992; ALVIN, 1998) ou série de Neumann (YAMAZAKI e SCHINOZUKA, 1988; LEI e QIU, 2000), das respostas ao redor das médias das variáveis aleatórias;
- os métodos espectrais que utilizam as funções de base no espaço de Hilbert associadas aos problemas aleatórios (GHANEM e SPANOS, 1991; GHANEM e KRUGER, 1996). Estas funções podem ser polinômios ortogonais de uma maneira geral, ou um caos polinomial em particular. Neste caso, utilizam-se as variáveis aleatórias onde os campos aleatórios contínuos são discretizados.

Neste trabalho de tese, para a análise dinâmica da placa fina em grandes deslocamentos na presença de incertezas será utilizado o método de simulação Hyper-Cubo-Latino (HCL).

3.2. Discretização dos campos aleatórios

Similarmente à modelagem determinística por elementos finitos, onde funções são representadas por conjuntos de parâmetros relacionados à própria função e suas derivadas nos pontos nodais, o problema estocástico está associado à representação de um processo aleatório através de conjuntos de variáveis aleatórias que discretizam o processo (LIMA, 2007).

Uma das grandes dificuldades na incorporação de processos aleatórios na análise por elementos finitos, principalmente, em sistemas não lineares é a necessidade de trabalhar com

espaços abstratos que limitam o suporte físico (GHANEM e SPANOS, 1991). Neste contexto, a base do espaço abstrato de Hilbert do método de elementos finitos torna-se bastante útil, uma vez que pode ser facilmente estendida para trabalhar com funções aleatórias.

Entretanto, a maior dificuldade conceitual envolvida neste tipo de problema está relacionada às funções definidas nos espaços abstratos, conhecidas como variáveis aleatórias e que são definidas no campo dos eventos probabilísticos (SUDRET, 2007). Neste caso, o método HCL pode ser utilizado para resolver tais sistemas. Entretanto, como já destacado anteriormente, ele requer normalmente um número elevado de pontos de forma a obter uma boa aproximação da resposta.

Diante disso, uma aproximação teórica mais atraente é então expandir as funções em uma série como a de *Karhunen-Loève* (KL) para problemas bi-dimensionais:

$$H(x, y, \theta) = \mu + \sum_{r=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_r} f_r(x, y) \xi_r(\theta) \quad (3.1)$$

sendo $H(x, y, \theta)$ o campo aleatório, $\xi_r(\theta)$ ($i=1, \dots, n$) as variáveis aleatórias gaussianas centradas (média zero e variância unitária), θ pertence ao espaço dos eventos aleatórios e $(\lambda_r, f_r(x, y))$ são, respectivamente, os autovalores e autofunções determinísticas obtidas pela resolução da seguinte integral (GHANEM e SPANOS, 1991):

$$\lambda_r f_r(x, y) = \int_{\Omega} C(x, y) f_r(x, y) dx dy \quad (3.2)$$

de forma que $C(x, y)$ é a função de covariância conhecida associada a $H(x, y, \theta)$.

$$C(x_1, x_2) = \sum_{r=1}^{\infty} \lambda_r f_r(x_1) f_r(x_2) \quad (3.3)$$

A expressão (3.3) indica que a função de covariância a ser escolhida deve levar em conta que tal função deve ser dotada pela propriedade de separabilidade dentro do seu domínio de existência. Diante disso, a Seção 3.3 visa estabelecer a função de correlação para fins de determinar as matrizes elementares estocásticas do sistema mecânico incorporando não linearidade geométrica.

3.3. Matrizes elementares estocásticas

De acordo com Ribeiro e Lima (2015) é possível descrever as expressões das matrizes elementares de massa e rigidez de sistemas dinâmicos estocásticos por meio das equações do modelo determinístico fatorado, onde os parâmetros de interesse a serem considerados incertos são fatorados fora das matrizes de elementos finitos. Dessa forma, a equação do movimento (2.26) do sistema determinístico não linear pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}^m & 0 \\ 0 & \mathbf{M}^f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\tilde{\mathbf{U}}} \\ \ddot{\tilde{\mathbf{W}}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha \mathbf{M}^m + \lambda \mathbf{K}^m & 0 \\ 0 & \alpha \mathbf{M}^f + \lambda \mathbf{K}^f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\tilde{\mathbf{U}}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{W}}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}^m & 0 \\ 0 & \mathbf{K}^f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{U}} \\ \tilde{\mathbf{W}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{\Delta \mathbf{K}^a}{2} \\ \Delta \mathbf{K}^{d^T} & \frac{\Delta \mathbf{K}^b}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{\Delta \mathbf{K}^a}{2} \\ 0 & \Delta \mathbf{K}^c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{U}} \\ \tilde{\mathbf{W}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_{\tilde{\mathbf{U}}} \\ \mathbf{F}_{\tilde{\mathbf{W}}} \end{Bmatrix} \quad (3.4)$$

sendo $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}^m & 0 \\ 0 & \mathbf{M}^f \end{bmatrix}$, $\mathbf{K}^l = \begin{bmatrix} \mathbf{K}^m & 0 \\ 0 & \mathbf{K}^f \end{bmatrix}$, $\Delta \mathbf{K}^a = \mathbf{B}^{m^T} \mathbf{D}^m \mathbf{B}^{nl}(\tilde{\mathbf{W}})$, $\Delta \mathbf{K}^b = \mathbf{B}^{nl^T}(\tilde{\mathbf{W}}) \mathbf{D}^m \mathbf{B}^{nl}(\tilde{\mathbf{W}})$ e

$$\Delta \mathbf{K}^c = \frac{1}{2} \Delta \mathbf{K}^b + \mathbf{G}^T \mathbf{T}^m \mathbf{G}, \quad \mathbf{D}^m = \frac{1}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{D}^f = \frac{\mathbf{D}^m}{12}.$$

Por outro lado, as variáveis incertas são modeladas por meio de campos aleatórios e a discretização desses campos é feita via emprego da expansão de KL definida na Eq. (3.1). Para o problema bidimensional em questão, considera-se que todas as variáveis de interesse fatoradas das matrizes elementares que representam processos aleatórios bidimensionais Gaussianos, podendo ser associado à seguinte função de covariância:

$$C((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = C(x_1 - x_2, y_1 - y_2) = \exp\left(-\frac{|x_1 - x_2|}{L_x} - \frac{|y_1 - y_2|}{L_y}\right) \quad (3.5)$$

onde $(x_1, x_2) \in \Omega_x$ e $(y_1, y_2) \in \Omega_y$. L_x e L_y designam os comprimentos de correlação para os domínios $\Omega_x = [-a, +a]$ e $\Omega_y = [-b, +b]$, respectivamente.

A consequência da escolha da função de covariância do tipo exponencial definida na Eq. (3.5) reside, principalmente, na utilização da propriedade da separabilidade inerente a este tipo de função, decorrendo, assim que o problema em duas dimensões pode ser tratado como um problema de autovalores e autovetores unidimensionais independentes. Nesse sentido, é

possível escrever a expressão das autofunções e autovalores descritos na Eq. (3.1) sob a forma:

$$f_r(x, y) = f_i(x)f_j(y) \quad \text{e} \quad \lambda_r = \lambda_i\lambda_j \quad (3.6)$$

Os termos $(\lambda_i, f_i(x))$, soluções do autop problema (autofunções e autovalores) associado a Eq. (3.2) são obtidos através da resolução da expansão de KL com um comprimento de correlação $L_x \in \Omega_x$. Em contrapartida, os termos $(\lambda_j, f_j(y))$ são obtidos resolvendo-se o mesmo problema, mas para um comprimento de correlação de $L_y \in \Omega_y$. Esses termos são detalhados em Ghanem e Spanos (1991) e obtidos por meio das seguintes equações:

- **Quando i e j são ímpares: $i \geq 1$ e $j \geq 1$:**

$$\lambda_i = \frac{2c_1}{\omega_i^2 + c_1^2}; \quad f_i(x) = \alpha_i \cos(\omega_i x) \quad (3.7a)$$

$$\lambda_j = \frac{2c_2}{\omega_j^2 + c_2^2}; \quad f_j(y) = \alpha_j \cos(\omega_j y) \quad (3.7b)$$

sendo os termos α_i e α_j , obtidos por meio das Eq. (3.8).

$$\alpha_i = \frac{1}{\sqrt{a + \frac{\sin(2\omega_i a)}{2\omega_i}}} \quad (3.8a)$$

$$\alpha_j = \frac{1}{\sqrt{b + \frac{\sin(2\omega_j b)}{2\omega_j}}} \quad (3.8b)$$

Os termos ω_i e ω_j representam as soluções das seguintes equações transcendentais:

$$c_1 - \omega_i \tan(\omega_i a) = 0; \quad c_2 - \omega_j \tan(\omega_j b) = 0 \quad (3.9)$$

nos domínios $\left[\left(i - \frac{l}{2} \right) \frac{\pi}{a}, \left(i - \frac{l}{2} \right) \frac{\pi}{a} \right]$ e $\left[\left(j - \frac{l}{2} \right) \frac{\pi}{b}, \left(j - \frac{l}{2} \right) \frac{\pi}{b} \right]$. $c_1 = l/L_x$ e $c_2 = l/L_y$.

- **Quando i e j são pares: $i \geq 2$ e $j \geq 2$:**

$$\lambda_i = \frac{2c_1}{\omega_i^2 + c_1^2}; \quad f_i(x) = \alpha_i \sin(\omega_i x) \quad (3.10a)$$

$$\lambda_j = \frac{2c_2}{\omega_j^2 + c_2^2}; \quad f_j(y) = \alpha_j \sin(\omega_j y) \quad (3.10b)$$

sendo os termos α_i e α_j , obtidos por meio das Eq. (3.11).

$$\alpha_i = \frac{l}{\sqrt{a - \frac{\sin(2\omega_i a)}{2\omega_i}}} \quad (3.11a)$$

$$\alpha_j = \frac{l}{\sqrt{b - \frac{\sin(2\omega_j b)}{2\omega_j}}} \quad (3.11b)$$

Os termos ω_i e ω_j são, respectivamente, as soluções das equações transcendentais seguintes:

$$\omega_i + c_1 \tan(\omega_i a) = 0; \quad \omega_j + c_2 \tan(\omega_j b) = 0 \quad (3.12)$$

nos domínios $\left[\left(i - \frac{l}{2} \right) \frac{\pi}{a}, i \frac{\pi}{a} \right]$ e $\left[\left(j - \frac{l}{2} \right) \frac{\pi}{b}, j \frac{\pi}{b} \right]$, respectivamente.

Para mostrar a construção das matrizes elementares estocásticas do modelo de elementos finitos da placa fina em grandes deslocamentos conforme os desenvolvimentos apresentados no Capítulo 2 toma-se como exemplo a parte estocástica da matriz de massa no domínio discretizado Ω (Cf. Seção 2.3, Capítulo 2):

$$\mathbf{M}_r^m(\theta) = \rho \int_S H_r(x, y) (\dot{\mathbf{U}}^m)^T \dot{\mathbf{U}}^m dS \quad (3.13a)$$

$$\mathbf{M}_r^f(\theta) = \rho \int_S H_r(x, y) (\dot{\mathbf{U}}^f)^T \dot{\mathbf{U}}^f dS \quad (3.13b)$$

Como $H_r(x, y) = \sqrt{\lambda_r} f_r(x, y) \xi(\theta)$, pode-se obter as seguintes expressões avaliadas para r pares e ímpares, respectivamente.

$$\mathbf{M}_r^m(\theta) = \xi_1(\theta) \alpha_i \alpha_j \sqrt{\lambda_i} \sqrt{\lambda_j} \rho \int_{\Omega_y} f_j(y) \int_{\Omega_x} f_i(x) (\dot{\mathbf{U}}^m)^T \dot{\mathbf{U}}^m d\Omega_x d\Omega_y \quad (3.14a)$$

$$\mathbf{M}_r^f(\theta) = \xi_1(\theta) \alpha_i \alpha_j \sqrt{\lambda_i} \sqrt{\lambda_j} \rho \int_{\Omega_y} f_j(y) \int_{\Omega_x} f_i(x) (\dot{\mathbf{U}}^f)^T \dot{\mathbf{U}}^f d\Omega_x d\Omega_y \quad (3.14b)$$

Este procedimento é realizado para todas as matrizes elementares do modelo de placa fina com não linearidades geométricas, no qual se intervem diretamente no processo de integração, para cada matriz associada aos efeitos de membrana, flexão e acoplamento flexão/membrana, através das funções de forma, com o objetivo de obter todas as matrizes elementares estocásticas pares e ímpares, que são utilizadas na série truncada de KL, assim:

$$\mathbf{K}_r^m(\theta) = \xi_2(\theta) \alpha_i \alpha_j \sqrt{\lambda_i} \sqrt{\lambda_j} \int_{\Omega_y} f_j(y) \int_{\Omega_x} f_i(x) \mathbf{K}_r^m d\Omega_x d\Omega_y \quad (3.15a)$$

$$\mathbf{K}_r^f(\theta) = \xi_3(\theta) \alpha_i \alpha_j \sqrt{\lambda_i} \sqrt{\lambda_j} \int_{\Omega_y} f_j(y) \int_{\Omega_x} f_i(x) \mathbf{K}_r^f d\Omega_x d\Omega_y \quad (3.15b)$$

$$\Delta \mathbf{K}_r^a(X, \theta) = \xi_4(\theta) \alpha_i \alpha_j \sqrt{\lambda_i} \sqrt{\lambda_j} \int_{\Omega_y} f_j(y) \int_{\Omega_x} f_i(x) \Delta \mathbf{K}_r^a d\Omega_x d\Omega_y \quad (3.15c)$$

$$\Delta \mathbf{K}_r^b(X, \theta) = \xi_4(\theta) \alpha_i \alpha_j \sqrt{\lambda_i} \sqrt{\lambda_j} \int_{\Omega_y} f_j(y) \int_{\Omega_x} f_i(x) \Delta \mathbf{K}_r^b d\Omega_x d\Omega_y \quad (3.15d)$$

$$\Delta \mathbf{K}_r^c(X, \theta) = \xi_4(\theta) \alpha_i \alpha_j \sqrt{\lambda_i} \sqrt{\lambda_j} \int_{\Omega_y} f_j(y) \int_{\Omega_x} f_i(x) \Delta \mathbf{K}_r^c d\Omega_x d\Omega_y \quad (3.15e)$$

sendo $\xi_i(\theta)$, com $i=1...4$, são as expressões das variáveis aleatórias quando são introduzidas as incertezas nos parâmetros de projeto como espessura da placa fina, módulo de elasticidade,

etc. Finalmente, a equação do movimento do sistema estocástico submetido a uma excitação harmônica determinística (não considerando incertezas à excitação externa) fica reescrita por:

$$\mathbf{M}(\theta)\ddot{\mathbf{X}}(t, \theta) + \overbrace{\mathbf{K}(\mathbf{X}, \theta)}^{f_{nl}(\mathbf{X}, \theta)}\mathbf{X}(t, \theta) - \mathbf{F}(t) = \mathbf{0} \quad (3.16)$$

A Fig. 3.1 ilustra de forma esquemática as principais etapas do procedimento numérico-computacional utilizado neste trabalho para o cálculo das respostas dinâmicas (envelopes de soluções) do sistema estocástico não linear representado na Eq. (3.16).

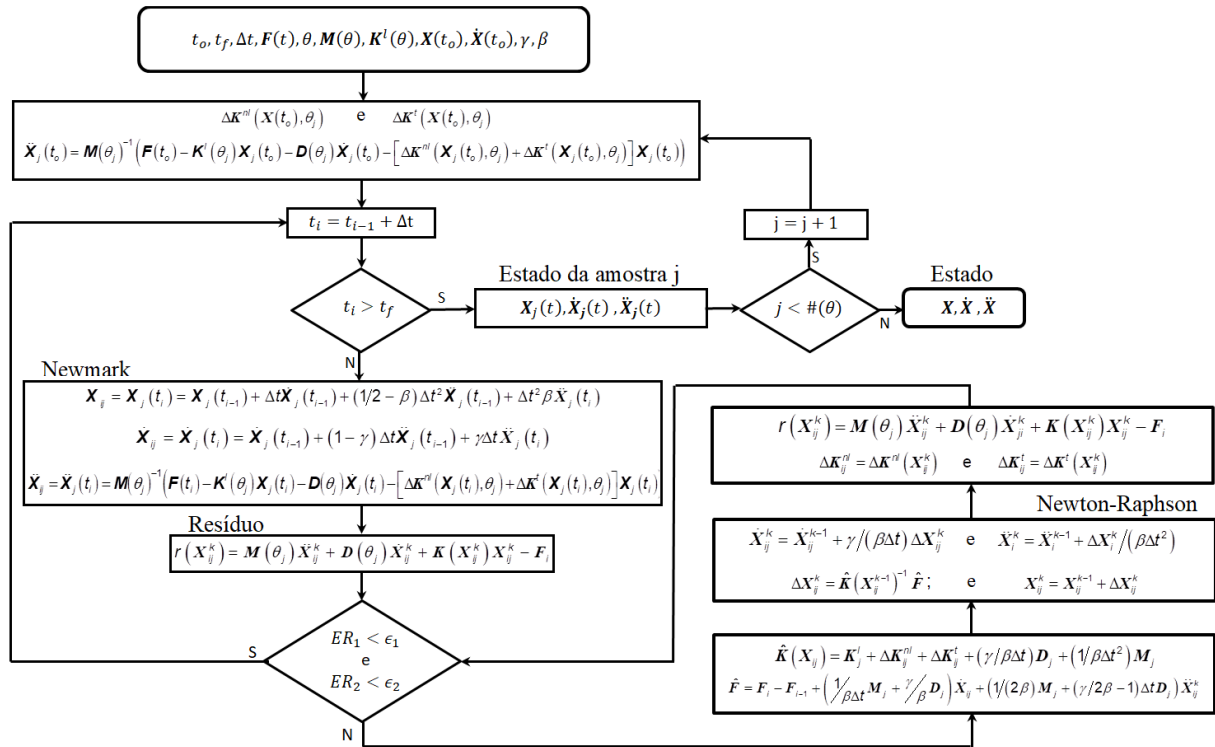


Figura 3.1 – Esquema numérico para a obtenção dos envelopes de soluções do problema estocástico não linear.

O método de KL leva a uma modelagem estocástica do problema na presença de incertezas, mas, a um custo computacional elevado, principalmente para o caso de sistemas não lineares, uma vez que há a necessidade de se avaliar a matriz de rigidez tangente para cada instante de tempo e para todas as amostras. Portanto, torna-se imprescindível o emprego de métodos de redução de modelos adaptados aos sistemas estocásticos não lineares evocados neste trabalho, como será tratado no Capítulo 4.

Por fim, é importante destacar que o sistema estocástico, Eq. (3.16), é resolvido utilizando o método HCL que foi introduzido por Iman e Conovers (1980), depois melhorado por Florian (1992). Em resumo, ele consiste em dividir o intervalo de variação das variáveis incertas em n intervalos, nos quais as probabilidades de se obter os valores inclusos nestes intervalos são iguais. Em cada intervalo faz-se a escolha de um valor particular, podendo ser este, definido como o centro do intervalo ou determinado de maneira aleatória. Na sequência, é escolhido aleatoriamente um valor particular entre os, n , valores de cada parâmetro incerto e em seguida feito os cálculos necessários. Após a escolha de um valor da variável, ela é retirada, não podendo ser selecionada uma segunda vez, restando, neste caso, $n - 1$ cálculos a serem efetuados. Esse processo é repetido continuamente até que se executem todos os cálculos.

CAPÍTULO IV

MÉTODOS DE REDUÇÃO DE MODELOS APLICADOS A SISTEMAS DINÂMICOS NÃO LINEARES

O elevado custo computacional envolvido nas análises dinâmicas do sistema estocástico não linear proposto no Capítulo III, com o intuito de avaliar a influência das incertezas nos parâmetros de concepção do modelo obriga o projetista a utilizar técnicas de condensação de modelos. Neste trabalho, será proposto o método das Aproximações Combinadas Melhorado (ACM) para os sistemas não lineares estocásticos de interesse deste trabalho além de propor também uma base de redução para sistemas não lineares via técnicas de enriquecimento por resíduos estáticos, que levam em conta não somente os efeitos das forças externas, mas também dos esforços não lineares e eventuais esforços devidos ao amortecimento (quando considerado).

4.1. Base de redução para sistemas lineares amortecidos viscoelasticamente.

Para o caso da modelagem por elementos finitos de um sistema dinâmico linear contendo amortecimento viscoelástico como, por exemplo, o ilustrado na Fig. 4.1, a Eq. (2.26) assume a seguinte forma (LIMA *et al.* 2006).

$$M\ddot{X}(t) + (K_e^l + K_v^*)X(t) = F(t) \quad (4.1)$$

com K_e^l a matriz de rigidez correspondente à subestrutura linear puramente elástica, $K_v^* = K_v(\omega, T) = G(\omega, T)\bar{K}_v$ representa a matriz de rigidez da subestrutura viscoelástica que é fortemente dependente da frequência da excitação, ω , da temperatura de operação, T , de $G(\omega, T)$ sendo, este, o módulo de cisalhamento do material viscoelástico fatorado fora da

matriz de rigidez matriz de rigidez da subestrutura viscoelástica.



Figura 4.1 – Exemplo de um sistema viscoelástico (adaptado de Lima *et al.* (2015)).

Para avaliar a dependência em frequência e temperatura do comportamento dinâmico do material viscoelástico ISD112-3M™ utilizado neste trabalho, emprega-se a expressão do módulo complexo, Eq. (4.2), sugerido por Drake e Soovere (1984), válida no intervalo de $210 \leq T \leq 360 \text{ K}$ e $1.0 \leq \omega \leq 1.0 \times 10^6 \text{ Hz}$.

$$G(\omega_r) = 0.4307 + \frac{1200}{1 + 3.24 \times \left(\frac{i\omega_r}{1543000} \right)^{-0.18} + \left(\frac{i\omega_r}{1543000} \right)^{-0.6847}} \text{ [MPa]} \quad (4.2a)$$

$$\alpha(T) = 10^{\left(-37584 \times \left(\frac{1}{T} - 0.00345 \right) - 22506 \times \log(0.00345T) + 0.23273 \times (T - 290) \right)} \quad (4.2b)$$

sendo $\alpha(T)$ a função deslocamento e $\omega_r = \alpha(T)\omega$ chamado frequência reduzida (NASHIF, JONES e HENDERSON, 1985).

Os métodos de redução consistem em reduzir a ordem das matrizes de massa, rigidez e amortecimento do sistema. Neste caso, as respostas são aproximadas, buscando-se a solução em um subespaço, isto é, a aproximação modal, que consiste em projetar as equações do movimento Eq. (4.1), em uma base de redução, $\mathbf{T}$, através da hipótese de que as respostas exatas, $\mathbf{X}(t) \in R^N$, são aproximadas por soluções dentro de um subespaço reduzido, $\mathbf{X}_r(t) \in R^{NR}$, da seguinte forma:

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{T} \mathbf{X}_r(t) \quad (4.3)$$

sendo $\mathbf{T} \in C^{N \times NR}$ a base de redução ou base de Ritz e NR é o número de modos retidos na base de redução.

A partir das Eqs. (4.1) e (4.3), pode-se chegar à seguinte expressão do sistema dinâmico reduzido:

$$\mathbf{M}_r \ddot{\mathbf{X}}_r(t) + (\mathbf{K}_{er}^l + \mathbf{K}_{vr}^*) \mathbf{X}_r(t) = \mathbf{F}_r(t) \quad (4.4)$$

de forma que as matrizes de massa e rigidezes reduzidas são obtidas por meio da pré e pós multiplicação da base redução pela matrizes de massa e rigidezes do sistema com todo os gdl's, ou seja, $\mathbf{M}_r = \mathbf{T}^T \mathbf{M} \mathbf{T}$, $\mathbf{K}_{er}^l = \mathbf{T}^T \mathbf{K}_e^l \mathbf{T}$ e $\mathbf{K}_{vr}^* = \mathbf{T}^T \mathbf{K}_v^* \mathbf{T}$.

A construção da base de redução para o sistema dinâmico linear amortecido viscoelasticamente tem por princípio a obtenção de uma primeira base nominal, $\boldsymbol{\varphi}_0$, contendo os modos próprios do sistema conservativo associado (SCA) obtidos através da resolução do seguinte problema de autovalores:

$$\begin{aligned} (\mathbf{K}_0 - \lambda_i \mathbf{M}) \boldsymbol{\varphi}_i &= 0 \quad i = 1, \dots, N \\ \boldsymbol{\varphi}_0 &= [\boldsymbol{\varphi}_1 \quad \boldsymbol{\varphi}_2 \quad \dots \quad \boldsymbol{\varphi}_{NR}], \quad \mathbf{A}_0 = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_{NR}) \end{aligned} \quad (4.5)$$

sendo $\mathbf{K}_0 = \mathbf{K}_e^l + G_0 \bar{\mathbf{K}}_v$ a matriz de rigidez total, com G_0 designando o valor real do módulo de cisalhamento do material viscoelástico em baixa frequência (LIMA, 2007), sendo este valor é obtido a partir da Eq. (4.2).

Para enriquecer esta base, Balmès e Germès (2002) e Lima, *et al*, (2006) propuseram o uso de resíduos estáticos baseados nos deslocamentos associados aos esforços externos, que podem ser obtidos através da seguinte expressão:

$$\mathbf{R} = \mathbf{K}_0^{-1} \mathbf{b} \quad (4.6)$$

sendo $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{N \times f}$ uma matriz Booleana que permite selecionar, dentre os gdl's, àqueles em que são aplicados os esforços externos. Este procedimento é chamado de correção estática de primeira ordem, que é completada através do cálculo da resposta estática dos carregamentos produzidos pelos esforços viscoelásticos (LIMA, *et al.*, 2006):

$$\mathbf{R}_v = \mathbf{K}_0^{-1} \bar{\mathbf{K}}_v \boldsymbol{\varphi}_0 \quad (4.7)$$

Estes resíduos são associados aos efeitos do amortecimento (forças viscoelásticas) presente no sistema linear. Dessa forma, a base de redução nominal enriquecida pode ser expressa da seguinte forma:

$$T_0 = [\varphi_0 \quad R \quad R_v] \quad (4.8)$$

É importante ressaltar que a base de redução da Eq. (4.8) é bastante utilizada para reduzir modelos de elementos finitos de sistemas lineares amortecidos ou não com grande razoabilidade de precisão (LIMA *et al.* 2006). A experiência demonstra que ela não é eficaz quando se trata de sistemas dinâmicos com comportamento não linear, uma vez que não considera as modificações oriundas dos esforços não lineares. Neste caso, uma primeira proposição de base de redução para lidar com sistemas dinâmicos não lineares é de incluir também na base de redução, Eq. (4.8), os resíduos estáticos associados aos esforços não lineares. Entretanto, este procedimento de enriquecimento é válido somente para o caso de não linearidades discretas, como discutido em Lima *et al.* (2015). Para o caso das não linearidades geométricas, um melhoramento ao método de redução baseado nas aproximações combinadas é proposto neste trabalho, como será discutido mais tarde neste capítulo.

4.2. Resíduos estáticos associados com não linearidades discretas.

O comportamento não linear localizado pode ser frequentemente encontrado em inúmeros sistemas práticos de engenharia como em conexões e/ou juntas mecânicas, ou ainda em condições de contorno. Portanto, o objetivo desta seção é de estender o método de redução apresentado na seção anterior, inicialmente proposto para sistemas lineares amortecidos viscoelásticamente relacionados ao caso de sistemas dinâmicos incorporando não linearidades discretas, Fig. 4.2.

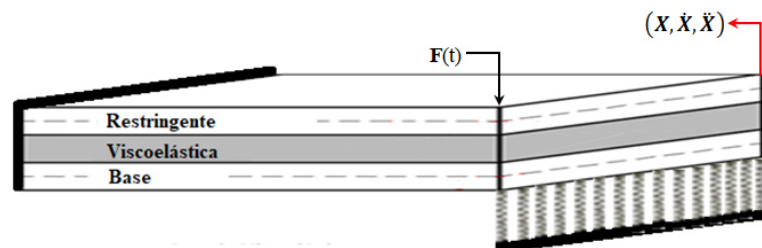


Figura 4.2 – Exemplo de um sistema viscoelástico incluído molas não lineares (adaptado de Lima *et al.* (2015)).

Neste caso, a inclusão dos efeitos não lineares no sistema dinâmico pode ser feita via emprego de molas não lineares e, quanto às equações do movimento Eq. (4.1), isto é feito empregando-se o conceito de transformação estrutural dyadic (MAIA e MONTALVÃO E SILVA, 1997). Esta transformação faz com que o carregamento exercido por uma mola não linear sobre o sistema aplicada em um nó, nd , seja expressa na seguinte forma vetorial para o caso de não linearidade do tipo cúbica:

$$\mathbf{F}_{nl}^{nd}(t) = \mathbf{K}_l^{nd} \mathbf{X}_{nd}(t) + \mathbf{K}_{nl}^{nd} \tilde{\mathbf{X}}_{nd}(t) \quad (4.9)$$

sendo $\mathbf{X}_{nd}(t) = [u \ v \ w \ \theta_x \ \theta_y]^T$ e $\tilde{\mathbf{X}}_{nd}(t) = [u_1^3 \ v_1^3 \ w^3 \ \theta_x^3 \ \theta_y^3]^T$ os vetores dos gdl's associados às contribuições lineares e não lineares, respectivamente, da mola não linear aplicada no nó, nd , no sistema de coordenadas global.

Portanto, o sistema de equações do movimento da estrutura não linear amortecida viscoelasticamente pode ser expressa por:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{X}}(t) + (\mathbf{K}_e^l + \mathbf{K}_m^l + \mathbf{K}_v^*) \mathbf{X}(t) = \mathbf{F}(t) - \mathbf{F}_\Delta(t) \quad (4.10a)$$

$$\mathbf{K}_m^l = \mathbf{I}_X^T (\mathbf{K}_m^l) \mathbf{I}_X \quad (4.10b)$$

$$\mathbf{K}_m^{nl} = \mathbf{I}_{\tilde{X}}^T (\mathbf{K}_m^{nl}) \mathbf{I}_{\tilde{X}} \quad (4.10c)$$

$$\mathbf{F}_\Delta(t) = \mathbf{K}_m^{nl} \tilde{\mathbf{X}}(t) \quad (4.10d)$$

sendo $\mathbf{K}_m^l$ a matriz de rigidez da subestrutura linear puramente elástica, $\mathbf{K}_m^{nl}$ a matriz de rigidez da subestrutura não linear puramente elástica, $\mathbf{I}_X$ and $\mathbf{I}_{\tilde{X}}$ os vetores colunas de ordem N referentes às posições $\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{X}}$, que permitem identificar, dentre os gdl's globais, aqueles em que as molas não lineares são aplicadas e $\mathbf{F}_\Delta(t)$ o vetor dos esforços não lineares.

A Eq. (4.10a) mostra que o comportamento não linear pode ser interpretado como sendo uma perturbação indicada pelo termo de força, $\mathbf{F}_\Delta(t)$, do sistema dinâmico linear, sendo vista como uma modificação introduzida no sistema dinâmico linear. Entretanto, como será ilustrado nas simulações numéricas, a estratégia de representar o comportamento dinâmico de sistemas contendo não linearidades discretas só é válida para pequenas não linearidades.

Portanto, o método de redução apresentado na seção anterior pode ser estendido para o caso de sistemas não lineares amortecidos viscoelásticos através da técnica de enriquecimento da base, incluindo os modos normais do sistema linear (SCA) perturbado pelas não linearidades discretas advindas das molas não lineares. Estes modos podem ser obtidos através da resolução do seguinte problema de autovalores:

$$(\tilde{\mathbf{K}}_0 - \lambda_i \mathbf{M}) \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_i^0 = 0 \quad i = 1, \dots, N \quad (4.11)$$

sendo $\tilde{\mathbf{K}}_0 = \mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_m^l$.

Baseado no fato de que os modos de vibração do sistema perturbado não diferem muito aos modos do sistema conservativo, é possível assumir que, $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_i = \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_i^0 + \Delta\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_i$, onde $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_i^0$ designa os modos do sistema conservativo associado obtido pela resolução do problema (4.11) e $\Delta\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_i$ representa a perturbação associação às não linearidades localizadas, as quais podem ser interpretadas como esforços externos aplicados no modelo linear, $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_i^0$. Assim, o conjunto de respostas estáticas podem ser geradas da seguinte forma:

$$\Delta\tilde{\boldsymbol{\varphi}} \approx \tilde{\mathbf{K}}_0^{-1} \tilde{\mathbf{b}}_\Delta \quad (4.12)$$

sendo $\tilde{\mathbf{b}}_\Delta \in R^{N \times N_m}$ uma matriz Booleana que permite selecionar os gdl's não lineares aos quais forças unitárias são aplicadas e respostas estáticas são obtidas, e N_m é o número dos gdl's não lineares.

Portanto, a base de redução final fica reescrita da seguinte forma:

$$\mathbf{T} = [\mathbf{T}_0 \quad \Delta\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_1 \quad \dots \quad \Delta\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_m] \quad (4.13)$$

sendo $\mathbf{T}_0$ determinada por meio da Eq. (4.8).

Vale ressaltar que os resíduos, $\Delta\tilde{\boldsymbol{\varphi}}$, não são de *rank* máximo. Neste caso, com o objetivo de limitar o número de vetores residuais na base e evitar problemas numéricos, é conveniente selecionar as direções dominantes da base através da decomposição em valores singulares da base, $\mathbf{T}$, para identificar seus valores singulares dominantes.

Aplicando-se a base de redução (4.13), a equação do movimento (4.10) pode ser reescrita sob a forma:

$$M_r \ddot{X}_r(t) + (K_{er}^l + K_{mr}^l + K_{vr}^*) X_r(t) = F_r(t) - F_{\Delta r}(t) \quad (4.14)$$

sendo $\hat{M}_r = T^T M T$, $K_{er}^l = T^T K_e^l T$, $K_{mr}^l = T^T K_m^l T$, $K_{vr}^* = T^T K_v^* T$, $F_r(t) = T^T F(t)$ e $F_{\Delta r}(t) = T^T F_{\Delta}(t)$.

A Fig. 4.3 ilustra de forma esquemática as principais etapas do procedimento numérico de utilização da base de redução e resolução da equação do movimento, Eq. (4.14).

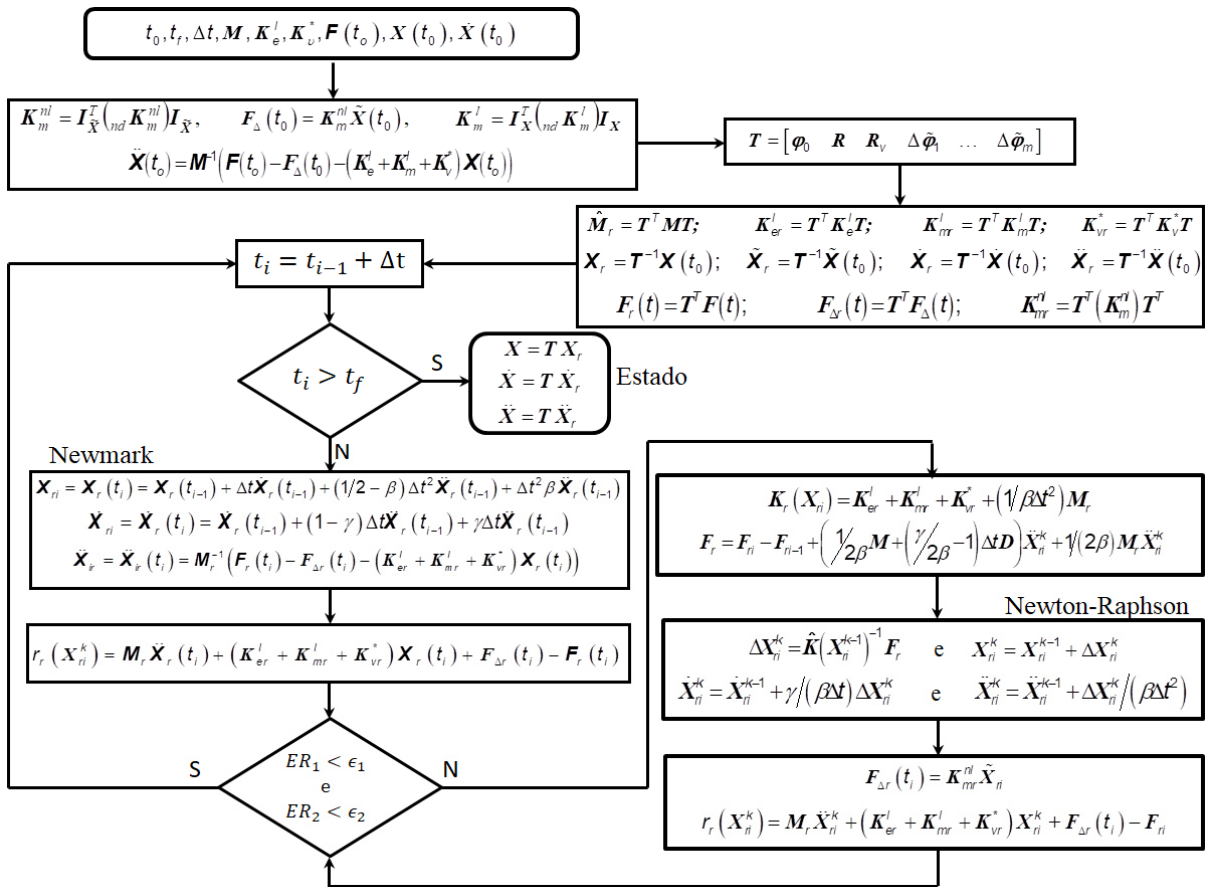


Figura 4.3 – Etapas do processo de construção da base e de resolução das equações do movimento do sistema amortecido contendo não linearidades discretas.

4.3. Método das aproximações combinadas melhorado

Conforme discutido no Capítulo II, o termo, $K(X)$, que aparece na Eq. (2.17) do sistema contendo não linearidades geométricas é um termo que depende das coordenadas globais e do tempo. Diante disso, os métodos de redução apresentados nas Seções (4.1) e (4.2), não se mostram eficientes para este tipo de não linearidade. Isto se deve ao fato de que as modificações estruturais induzidas pelo termo de não linearidade geométrica ser mais

complexo para ser descrito por uma lei paramétrica no processo de redução (GERGES, 2013). Portanto, técnicas clássicas de construção de bases de Ritz não são mais aplicáveis e, neste caso, o método das aproximações combinadas (AC) (KIRCH e LIU, 1995) torna-se uma opção bastante interessante.

Neste trabalho, foi proposto um método AC melhorado (ACM) para lidar com problemas não lineares em dinâmica ou estática, amortecidos ou não. Portanto, será construída uma base de redução do modelo não linear sem passar pelo cálculo do problema de autovalores do sistema, que é caro computacionalmente. Neste contexto, a Eq. (2.17) que modela o problema de vibrações não lineares pode ser interpretada como um problema de re-análise, de forma que a decomposição da força não linear, $f_{nl}(X)$, gera um termo associado à rigidez linear, K^l , e um termo de perturbação não linear, $\Delta K^{nl}(\tilde{W})$.

Entretanto, uma vez que o termo $\Delta K^{nl}(\tilde{W})$ evolui com o tempo (ou com a frequência), a base de redução também deve evoluir com o tempo (ou com a frequência). Além disso, devido ao acoplamento dos efeitos de flexão e membrana, o uso do critério de truncamento modal baseado unicamente na escolha da banda de frequência de interesse não é mais aplicável neste caso.

Portanto, partindo-se da definição de um problema de re-análise aproximada (LIMA, *et al*, 2010) como mostrado na Eq. (4.15), nota-se que sendo o termo $(K_0 + \Delta K)$ variável, onde, $\Delta K = \Delta K^{nl}(X) + \Delta K^l(X)$, o inconveniente de se usar métodos clássicos de redução é o procedimento de inversão deste termo a cada passo de tempo num processo de integração numérica. Neste caso, o método ACM apresenta a vantagem de requerer somente uma inversão da matriz, K_0 , que é constante.

$$\left[(K_0 + \Delta K) - \lambda_i (M_0 + \Delta M) \right] \varphi_i = 0 \quad i = 1, \dots, N \quad (4.15)$$

Através da multiplicação da Eq. (4.15) pelo termo, K_0^{-1} , e a partir das definições $r_0 = K_0^{-1}(M_0 + \Delta M)\varphi_i^0$ e $B_0 = K_0^{-1}\Delta K$, a base de redução assume a seguinte forma:

$$T = (I + B_0)^{-1} r_0 \quad (4.16)$$

de forma que o termo $(I + B_0)^{-1}$ pode ainda ser expandido em uma série de Taylor, o que permite aproximar a base de redução a uma ordem, ν , desejada:

$$T = \left(I - B_0 + B_0^2 - \dots + (-B_0)^{\nu-1} \right) r_0 \quad (4.17)$$

O método ACM consiste justamente em substituir a soma dos termos da série de Taylor por um enriquecimento sucessivo da base do sistema original, r_0 . As principais etapas do procedimento de construção da base de redução do método ACM proposto neste trabalho são:

Etapa 1: Decomposição de Cholesky de K_0 : $K_0 = LL^T$ e $S_0 = K_0^{-1} = (L^{-1})^T L^{-1}$

Etapa 2: Cálculo de $r_0 = \alpha S_0 M T$, onde α é um vetor, e $r_0^T M_0 r_0 = I$

Etapa 3: Cálculo de $B_0 = S_0 \Delta K$

Etapa 4: Cálculo de $r_i = -\alpha_i B_0 r_{i-1}$, onde $(i = 1, \dots, \nu - 1)$, α_i é um escalar e

$$r_i^T M_0 r_i = I$$

Etapa 5: Montagem das sub-bases r_i : $T_{ACM} = [r_0 \dots r_i \dots r_{\nu-1}]$

Etapa 6: Decomposição em valores singulares da Base de Redução T_{ACM}

O método ACM proposto neste trabalho, assim, como estabelecido em Kirsch e Bogomolni (2007) leva em consideração pequenas perturbações não lineares, ΔK , este fato tem sua justificativa a partir das simulações realizadas no Capítulo VI, quando a base adaptativa perde sua capacidade preditiva em decorrência do aumento do nível de não linearidade imposto ao sistema.

Além disso, deve-se ficar atento à escolha da ordem do desenvolvimento da série de Taylor para que o comportamento dinâmico do sistema aproximado seja o mais próximo possível do sistema não linear exato. Isto faz com que, para o caso de sistemas não lineares de grande escala formados um grande número de gdl's, a estimação do erro com a aplicação desta estratégia seja difícil de ser avaliada. Em contrapartida, o valor do erro possui uma relação direta com o termo, ΔK , que descreve o nível das não linearidades geométricas.

Neste caso, o deslocamento relativo que define a relação entre o deslocamento transversal e a espessura da placa fina em grandes deslocamentos é uma medida quantitativa

do nível de não linearidade do sistema. Por exemplo, para o caso da análise estática de sistemas estruturais esbeltos, grandes deslocamentos são considerados a partir de um deslocamento relativo unitário.

No caso do presente trabalho, é difícil o monitoramento do deslocamento relativo do sistema não linear a cada passo de tempo, uma vez que questões como qual o nó a escolher e o tipo de resposta transitória (harmônicas ou não) impõe dificuldades no uso do deslocamento relativo máximo. Portanto, a estratégia proposta aqui é de utilizar um critério energético baseado na relação entre a energia de deformação não linear e a energia de deformação total do sistema dinâmico não linear. A expressão do critério é escrita como segue:

$$\Xi_{def} = \frac{X^T \left[\overbrace{\Delta K^{nl}(X) + \Delta K^t(X)}^{\Delta K} \right] X}{X^T \left[K^l + \Delta K^{nl}(X) + \Delta K^t(X) \right] X} \quad (4.18)$$

Zienkiewicz e Taylor (2000), ainda, utilizam a expressão (4.18) para caracterizar a estabilidade do sistema em relação aos níveis de não linearidades:

$$\Xi_{def} \begin{cases} < 1 & \text{Estável} \\ = 1 & \text{Limite estabilidade} \\ > 1 & \text{Instável} \end{cases} \quad (4.19)$$

A Tab. 4.1 permite então estabelecer uma relação entre os termos a serem retidos na série de Taylor com o deslocamento relativo máximo, $|w_{\max}/h|$, baseado no critério energético (4.18).

Tabela 4.1 – Ordem da série de Taylor.

Ξ_{def}	0 – 0.2	0.3 – 0.4	0.4 – 0.6	0.6 – 0.8	> 0.8
$ w_{\max}/h $	0 – 0.5	0.5 - 1	1 - 1.5	1.5 - 2	> 2
Ordem	0	1	2	3	4

Neste ponto, vale salientar que no processo de resolução numérica do sistema não linear com redução de modelos, a evolução da base de redução pode ser feita tanto no sentido crescente quanto no sentido decrescente. Além disso, dependendo da aplicação, não é necessário realizar a atualização da base em todos os instantes de tempo. Portanto, a

atualização será necessária a partir da alteração da faixa de operação da energia de deformação, Ξ_{def} , conforme estabelece a Tab. 4.1, ou seja, quando a energia aumenta ou diminui significativamente.

A Fig. 4.4 exhibe esquematicamente, as principais etapas do procedimento numérico utilizado no cálculo das respostas do sistema dinâmico não linear com redução de modelos:

- (i) início do processo, t_o , define-se as propriedades do material E, ν, ρ , passo de tempo, Δt , o tempo final de simulação, t_f , espessura da placa, h , parâmetros do método Newmark, β e γ , das matrizes do sistema não linear, condições de contorno mecânicas e condições iniciais de deslocamento e velocidade $(X(t_0), \dot{X}(t_0))$;
- (ii) em seguida, são determinadas as matrizes de rigidez não lineares e a aceleração, $\ddot{X}(t_0)$, a partir das equações do movimento. Um problema de autovetores é resolvido a partir do sistema conservativo para obter os modos de vibrar do sistema e extrair alguns dos modos associados aos efeitos de membrana e flexão. Esta etapa é importante para garantir que a base de redução nominal, Φ_0 , contenha o máximo de informações sobre as formas modais do sistema dinâmico. Assim, considerando-se o resíduo da força de excitação externa definido na Eq. (4.6), obtêm-se a primeira base de redução, $T = [\Phi_0 \quad R]$. A partir desta primeira base de redução, é possível realizar a primeira redução na ordem das matrizes e vetores do sistema dinâmico, gerando assim as matrizes $M_r, K_r^l, \Delta K_r^{nl}$ e ΔK_r^t , bem como os vetores $X_r, \dot{X}_r, \ddot{X}_r, F_r, f_r^{nl}$;
- (iii) na sequência, o processo iterativo é iniciado no tempo conforme o método de Newmark, testando-se a exatidão da aproximação via cálculo do resíduo. Assim, caso se faça necessário corrigir os estados $(X_r(t_i), \dot{X}_r(t_i), \ddot{X}_r(t_i))$, utiliza-se para isto o método de Newton-Raphson avaliando-se, neste instante, novos valores para as matrizes de rigidez não lineares. Este processo segue até a convergência do resíduo. Vale salientar que o método ACM tem por característica evoluir (incrementar ou decrementar o número de vetores) a base de redução dependendo da energia calculada. Dessa forma, se faz necessário o cálculo dos

estados $(X(t_i), \dot{X}(t_i), \ddot{X}(t_i))$, a partir do critério de energia. Portanto, com base na estimativa da energia calculada no processo de convergência, procede-se a reorganização de uma nova base de redução (caso necessário), conforme descrito no método ACM. Faz-se então a redução dos vetores e matrizes do sistema segundo esta nova base e, finalmente, o passo de tempo é incrementado e o processo iterativo (iii) se repete até percorrer todo o domínio de tempo pré-estabelecido.

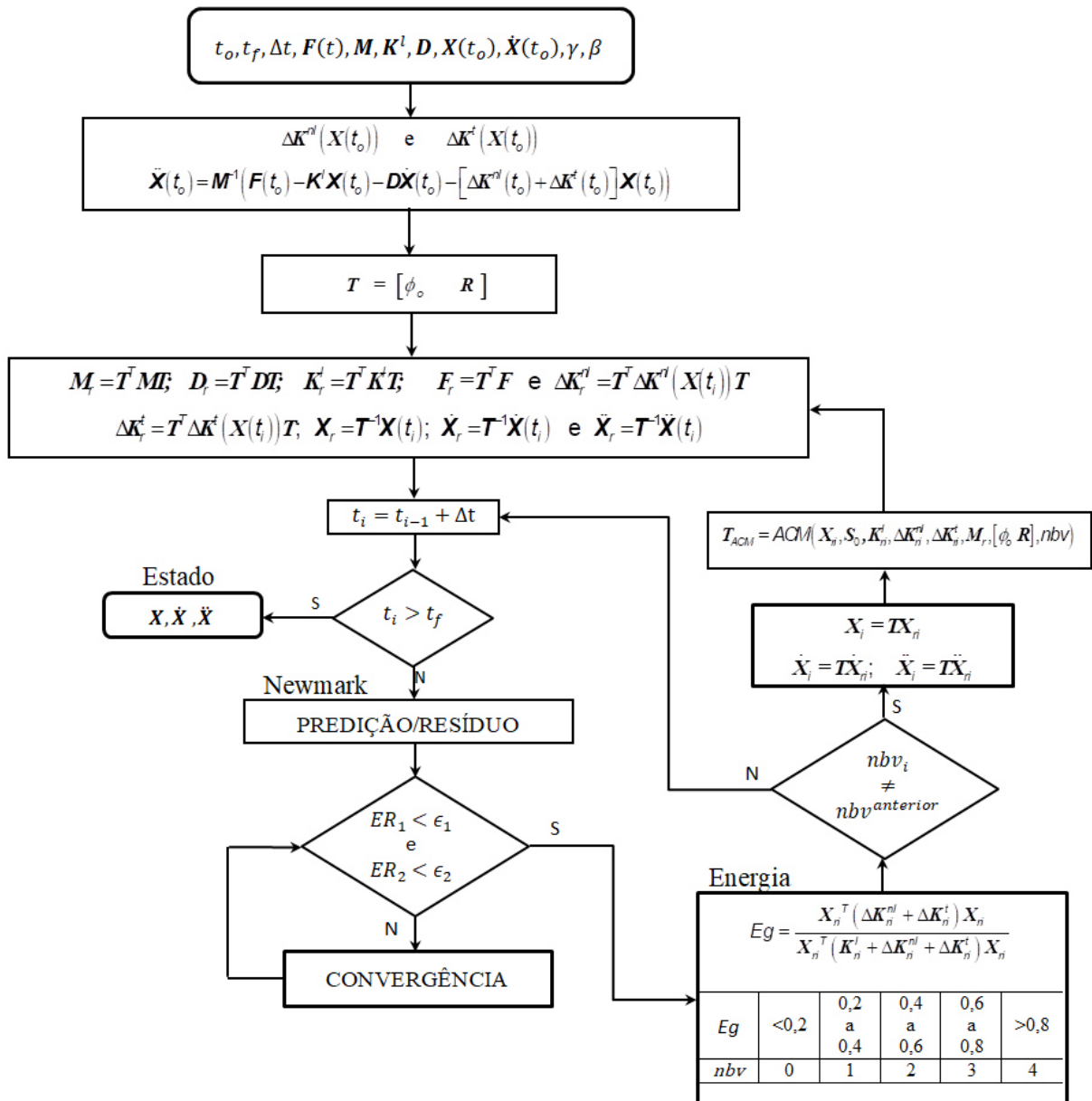


Figura 4.4 – Etapas do processo de redução de sistemas contendo não linearidades geométricas.

CAPITULO V

IDENTIFICAÇÃO DE NÃO LINEARIDADES E ESTABILIDADE EM SISTEMAS DINÂMICOS

Neste Capítulo, serão apresentadas algumas ferramentas matemáticas utilizadas para analisar sistemas dinâmicos não lineares quanto à sua não linearidade e caoticidade. Nesse sentido, a técnica da transformada rápida de Fourier para analisar o efeito não linear e os métodos de Lyapunov e Poincaré com vistas à caoticidade, são apresentados. No Capítulo VI, serão apresentados resultados utilizando os desenvolvimentos deste Capítulo no caso da placa fina em grandes deslocamentos e não linearidades localizadas.

5.1. Introdução.

A dinâmica não linear é uma teoria matemática que estuda sistemas de equações de evolução, ou seja, equações onde o tempo é uma variável independente (WIGGINS, 1990). Se tais equações forem lineares, há soluções gerais que permitem determinar o comportamento do sistema em um estado qualquer a partir do conhecimento do seu estado atual. Porém, no trato de equações não lineares, essas soluções exatas, em geral, não existem na forma fechada ou analítica. Tais sistemas dinâmicos podem, assim, produzir comportamentos, alguns deles bastante complicados, os quais se destacam: as órbitas periódicas e quase periódicas, ciclos limite, transientes e caos (ALLIGOOD, SAUER e YORKE, 1997) e (SAVI, 2010)

A dinâmica não linear concentra-se nos comportamentos a longos períodos do sistema que está sendo estudado. O comportamento futuro a pequenos tempos, normalmente, pode ser facilmente obtido pela solução numérica das equações de evolução. No entanto, neste tipo de estudo, interessa-se, particularmente, em suas propriedades gerais, como equilíbrio, estabilidade, tipos de convergência ou divergência, etc.

Diante disso, o campo de aplicações da dinâmica não linear é muito extenso, pois abrange qualquer sistema físico, biológico, das ciências sociais, etc., que possa ser descrito por equações de evolução. Porém, neste trabalho, especial atenção será dada aos sistemas da mecânica clássica e estocástica.

Os sistemas dinâmicos não lineares tiveram uma de suas origens no estudo do problema de N ($N > 2$) corpos. Para o caso de $N=3$ existem resultados analíticos aproximados em alguns casos especiais, como o problema restrito de três corpos, onde um deles possui massa muito superior aos outros dois, de tal modo que a interação mútua entre os dois corpos (de massa inferiores) interfere em seus movimentos, não afetando no equilíbrio do conjunto (SYMON, 1971).

Encontrar uma solução geral fechada e analítica para o problema dos N corpos persistiu por anos até que o matemático francês Henri Poincaré demonstrou, de forma rigorosa, que tal solução não pode ser encontrada (POINCARÉ, 1890). Seus manuscritos acerca do problema de N corpos contêm ideias essenciais a respeito da moderna teoria de sistemas dinâmicos, entre os quais, o conceito de caos determinístico (PETERSON, 1993).

5.2. Caos determinístico.

Segundo Schuster (1993) o caos determinístico provém da existência de comportamento irregular, ou aperiódico, e com dependência sensível das condições iniciais. Assim, Viana (2011) estabelece que um modelo não linear determinístico ao incorporar o caos, tem sua previsibilidade do comportamento futuro agravado intensamente. Dessa forma, não se pode prever o comportamento futuro do sistema, pelo menos para um tempo arbitrariamente longo, a partir de condições iniciais ligeiramente próximas. Segundo Wisdon e Mignard (1984), embora os processos gerados por condições iniciais próximas possam divergir com o tempo, essa discrepância só é significativa a partir de um horizonte, conforme pode ser evidenciado na Fig. 5.3.

Por outro lado, embora Poincaré tenha vislumbrado a possibilidade de comportamentos caóticos, que desafiam a ideia de haver uma solução fechada e válida para quaisquer instantes de tempo, foi Lorenz (1963) quem edificou as teorias e consequências do caos determinístico utilizando a teoria qualitativa dos sistemas dinâmicos introduzida por Poincaré. Assim, ele utilizou um sistema de equações não lineares que exibiam uma dependência sensível às condições iniciais, conforme pode ser observado na Eq. (5.1).

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = \rho x - y - xz \\ \dot{z} = xy - \beta z \end{cases} \quad (5.1)$$

sendo σ, ρ e β termos positivos.

Lorenz determinou a solução do sistema de Eqs. (5.1), considerando $\sigma=10$, $\rho=28$ e $\beta=8/3$, e imaginou um espaço abstrato cujos eixos coordenados foram representados pelas soluções do sistema para cada instante de tempo, conforme mostrado na Fig. 5.1.

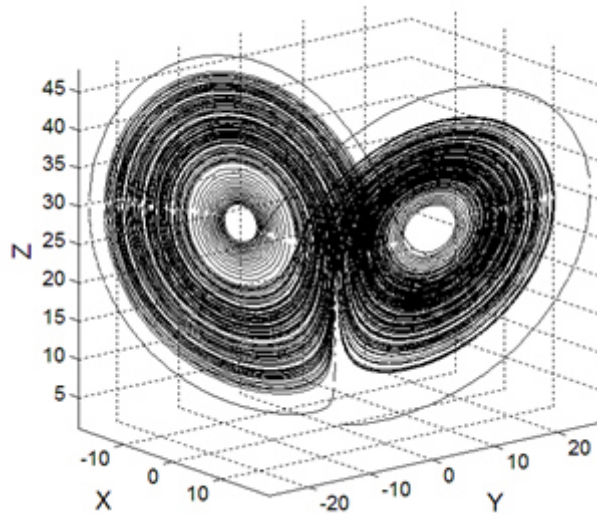


Figura 5.1 – Atrator de Lorenz.

Segundo Lorenz (1993), o caos é um comportamento típico de sistemas não lineares, o qual se associa a imprevisibilidade e sensibilidade às condições iniciais. Além disso, o caos é um comportamento dinâmico muito rico, com várias possibilidades de respostas, possuindo infinitas trajetórias periódicas e não periódicas, além de uma possibilidade infinita de atratores.

5.3. Expoente de Lyapunov.

Duas propriedades básicas que caracterizam o comportamento caótico são: (i) não periodicidade ou não regularidade; (ii) sensibilidade extrema às condições iniciais. A

propriedade de não periodicidade pode ser observada de forma relativamente fácil a partir das órbitas do sistema dinâmico por meio da determinação do chamado mapa de Poincaré (VIANA, 2011).

Por outro lado, além da ausência de periodicidade ou regularidade, observada na evolução dos pontos de uma órbita caótica, muitos sistemas dinâmicos manifestam, também, extrema sensibilidade às condições iniciais, ou seja, duas condições iniciais muito próximas levam a órbitas que se afastam com o passar do tempo, até perder qualquer correlação mútua.

Um fato importante consiste que este afastamento ocorre de forma crescente e, a uma taxa exponencial, taxa esta denominada expoente de Lyapunov, λ , da órbita. Assim, se λ for positivo, tem-se a ocorrência de caos. Existem inúmeros trabalhos na literatura que ilustram a utilização do método de Lyapunov em sistemas mecânicos, dos quais, pode-se destacar Viana (2011) e Purcina (2016). Este último apresenta também outras técnicas para o estudo e análise da estabilidade de sistemas dinâmicos não lineares, em especial o método de Poincaré.

Segundo Viana (2011), o método de Lyapunov consiste em analisar as respostas, em longo prazo, do sistema dinâmico não linear a partir de duas condições iniciais próximas entre si:

$$d_0 = |x_0^* - x_0| \quad (5.2)$$

Após uma iteração, a distância entre os pontos correspondentes é dada como segue:

$$d_1 = |x_1^* - x_1| = |f(x_0^*) - f(x_0)| \quad (5.3)$$

De uma forma geral, a distância após, n , iterações no tempo, produzidas pelas respostas do sistema a partir de x_0 e x_0^* estarão distantes conforme a Eq. (5.4) e, com sua representação na Fig. 5.2.

$$d_n = |f^{(n)}(x_0^*) - f^{(n)}(x_0)| \quad (5.4)$$

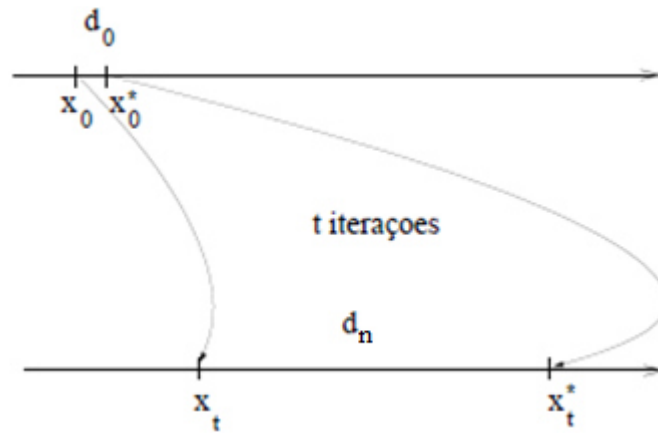


Figura 5.2 – Divergência de trajetórias inicialmente próximas (adaptado de Viana (2011))

Admitindo-se que, d_n , depende exponencialmente do tempo medido em número de iterações, é possível estabelecer a seguinte expressão:

$$d_n \approx d_0 e^{t\lambda} \quad (5.5)$$

sendo λ o expoente de Lyapunov, que pode ser obtido, da Eq. (5.5), da seguinte forma:

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \left[\lim_{d_0 \rightarrow 0} \ln \left(\frac{d_n}{d_0} \right) \right] \quad (5.6)$$

A partir da Eq. (5.6), é possível afirmar que um sistema com comportamento caótico, λ , será positivo. Por outro lado, pontos fixos e órbitas periódicas, estão sempre associados a λ não positivo, ou seja, as órbitas convergem exponencialmente com o passar do tempo. Diante disso, pode-se definir um critério de verificação da estabilidade de sistemas dinâmicos não lineares por meio do expoente de Lyapunov. Nesse sentido, Savi (2010) estabelece um critério para caracterizar a estabilidade de sistemas dinâmicos não lineares a partir do cálculo do expoente dominante de Lyapunov ao qual considera a regularidade do sistema dinâmico quando este expoente é não positivo e a irregularidade (caoticidade) caso contrário.

5.3.1. Cálculo do expoente de Lyapunov.

Substituindo-se a Eq. (5.4) na Eq. (5.6) do expoente de Lyapunov, chega-se à seguinte expressão:

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \left[\lim_{d_0 \rightarrow 0} \ln \left(\frac{|f^{(n)}(x_0 + d_0) - f^{(n)}(x_0)|}{d_0} \right) \right] \quad (5.7)$$

sendo $x_0^* = x_0 + d_0$. Além disso, o termo, $\lim_{d_0 \rightarrow 0} \ln \left(\frac{|f^{(n)}(x_0 + d_0) - f^{(n)}(x_0)|}{d_0} \right)$, é o limite de uma razão incremental quando o incremento tende a zero, ou seja, é a derivada da função, $f^{(n)}(x)$. Assim, é possível escrever:

$$\left(\frac{df^{(n)}(x)}{dx} \right)_{x=x_0} = \frac{df^{(n)}(x_0)}{dx} \quad (5.8)$$

Logo, substituindo-se a Eq. (5.8) em (5.7), pode-se encontrar a expressão para o cálculo do coeficiente de Lyapunov:

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \left| \frac{df^{(n)}(x_0)}{dx} \right| \quad (5.9)$$

De forma que a derivada da função $f^{(n)}(x)$ pode ser obtida por meio da regra da cadeia como o produto das $n - 1$ derivadas da função em cada ponto, x_i , com $i=1,2,\dots,n-1$, expressa da forma:

$$\frac{df^{(n)}(x_0)}{dx} = \prod_{i=1}^{n-1} f'(x_i) \quad (5.10)$$

Assim, substituindo-se a Eq. (5.10) em (5.9), tem-se:

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \left| \prod_{i=1}^{n-1} f'(x_i) \right| \quad (5.11)$$

Utilizando a propriedade de logaritmos, escreve-se a expressão final para o cálculo do expoente de Lyapunov:

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{i=1}^{n-1} \ln |f'(x_i)| \quad (5.12)$$

A partir da Eq. (5.12), pode-se concluir que o expoente de Lyapunov é determinado a partir da soma da derivada primeira da função do sistema dinâmico nos pontos amostrados. Para sistemas mecânicos, tal qual o sistema representado pela Eq. (2.26), este resultado se retrata no conhecimento da derivada primeira do campo de deslocamento.

Para ilustrar a utilização do método de Lyapunov na caracterização da caoticidade a partir da propriedade de sensibilidade extrema às condições iniciais, considere novamente o sistema não linear (5.1) definido por Lorenz. Assim, a partir da sua solução numérica obtem-se espaços de estados $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$ no intervalo $[t_0; t_f]$, sendo a curva de resposta temporal para a variável $x(t)$ ilustrada na Fig. 5.3.

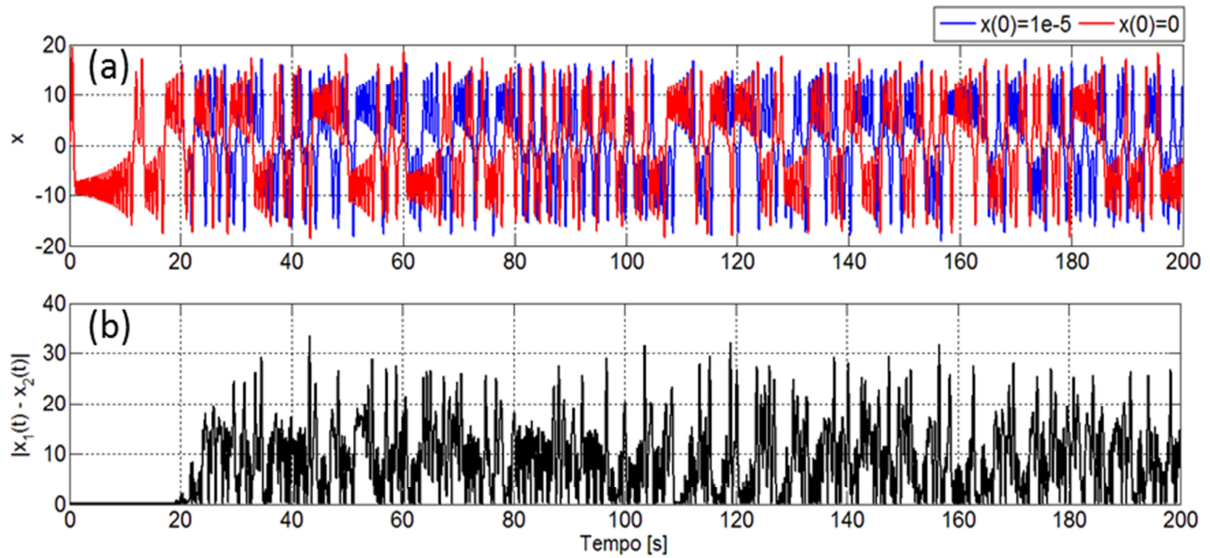


Figura 5.3 – (a) gráfico de $x(t)$ para duas condições iniciais; (b) Diferenças instantâneas a partir de duas condições iniciais próximas.

A Fig. 5.4 mostra a curva de resposta para a variável $y(t)$, juntamente com a diferença das respostas a partir das condições iniciais próximas.

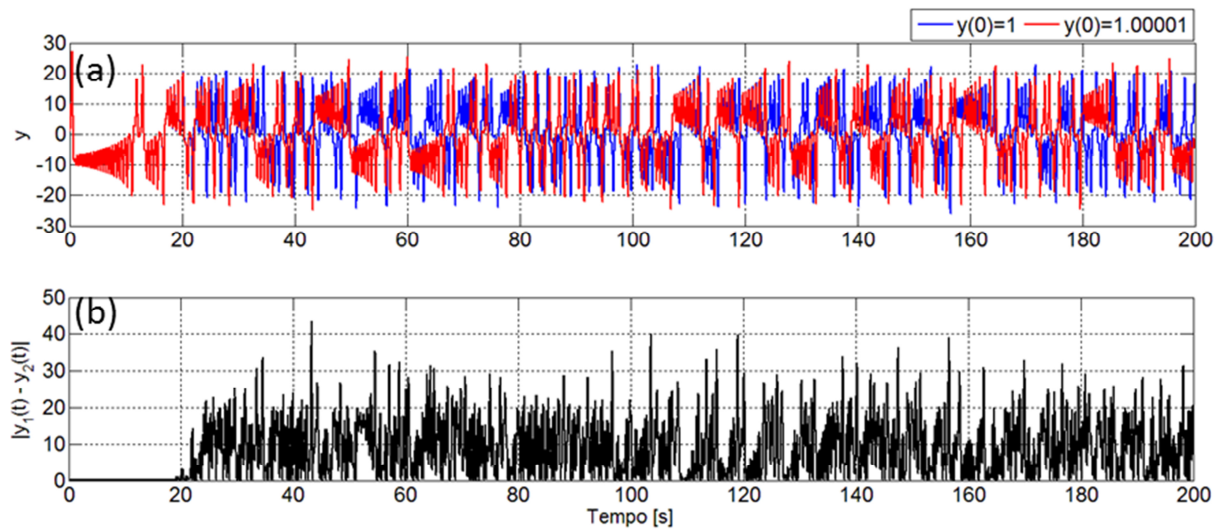


Figura 5.4 – (a) espaço de estado de $y(t)$ para duas condições iniciais; (b) Diferenças instantâneas a partir das duas condições iniciais próximas.

As Figs. 5.3 e 5.4 ilustram a caracterização do sistema dinâmico definido por Lorenz por meio da propriedade de sensibilidade às condições iniciais. Nas Figs. 5.3(a) e 5.4(a), são observadas as curvas dos estados $x(t)$ e $y(t)$ no período de tempo de 0 a 200 [s]. Já as Figs. 5.3(b) e 5.4(b) ilustram a diferenças das respostas a partir de condições iniciais relativamente próximas: $x(0)=0$, $x(0)=1 \times 10^{-5}$ e $y(0)=1$, $y(0)=1,00001$, de forma que estas diferenças são relativamente pequenas se comparadas à própria condição inicial. Nota-se, ainda, grande aproximação entre as respostas do sistema até o instante de 20s para ambos os estados, evidenciando assim a dificuldade de previsão das respostas para instantes arbitrariamente longos.

As Figs. 5.3(b) e 5.4(b) ilustram a sensibilidade do sistema a partir do instante de tempo limite, $t_i=20$ s. Isto evidencia a propriedade de sensibilidade extrema do sistema não linear às condições iniciais, para fins de caracterizar o sistema dinâmico de Lorenz como caótico. Isto é especialmente verdadeiro quando se calcula os expoentes de Lyapunov dominante dos estados a partir da Eq. (5.12) como mostrado na Tab. 5.2 abaixo.

Tabela 5.1 – Expoentes de Lyapunov para os espaços de estados do sistema dinâmico de Lorenz.

	$x(t)$	$y(t)$	$z(t)$
λ	3,1784	3,2529	3,8463

Da Tab. 5.1, pode-se notar que os espaços de estados $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$ do sistema dinâmico definido na Eq. (5.1) possuem expoentes de Lyapunov positivos, o que permite concluir que este sistema possui característica de caoticidade.

5.4. Mapa e Seção de Poincaré.

Conforme mencionado, os sistemas dinâmicos não lineares apropriam-se das propriedades de não periodicidade e/ou sensibilidade às condições iniciais, sendo que esta última foi tratada na seção anterior. Nesse sentido, vislumbra-se apresentar uma forma de tratamento da propriedade de não periodicidade ou não regularidade do sistema dinâmico não linear.

O Mapa de Poincaré consiste em uma sequência de pontos no espaço de estado gerado pela penetração de uma trajetória de evolução contínua através de um plano generalizado no espaço (RASBAND, 1990). Para sistemas dinâmicos excitados periodicamente, um Mapa de Poincaré pode ser obtido por amostragem estroboscópica do estado do sistema em cada período de resposta (SAVI, 2002). Desta forma, o mapa de Poincaré de um sistema dinâmico excitado periodicamente é construído por amostragem da resposta do sistema em um intervalo fixo igual ao período (mínimo) da excitação.

Segundo Devaney (1989), um sistema dinâmico de dimensões N cujas variáveis de estado são denotadas por, $(x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t))$ é comumente definido como uma sequência de pontos (órbitas) gerados pelas penetrações das trajetórias contínuas em um hiperplano de dimensão $N - 1$. Dessa forma, as trajetórias das variáveis de estado cruzarão o hiperplano de forma a marcar pontos no mesmo. Ao conjunto de pontos de interseção dá-se o nome de Mapa de Poincaré do sistema e o hiperplano é chamado seção de Poincaré (THOMPSON e STEWART, 1986), conforme ilustrado na Fig. 5.5.

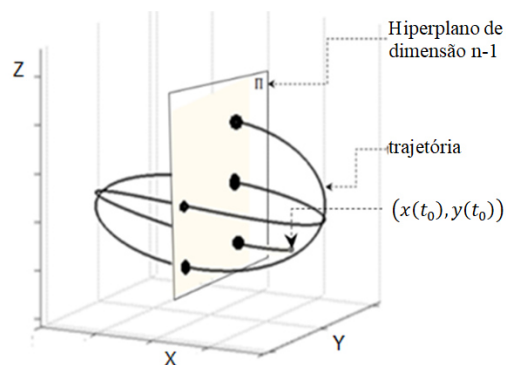


Figura 5.5 – Ilustração do Mapa de Poincaré em $\mathbb{R}^3$.

Diante disso, as seções de Poincaré são úteis na verificação ou não de periodicidade em um sistema dinâmico. A Fig. 5.6 ilustra a seção de Poincaré para o sistema dinâmico definido na Eq. (5.1), para a condição inicial: $x(0)=0$, $y(0)=1$ e $z(0)=1,05$.

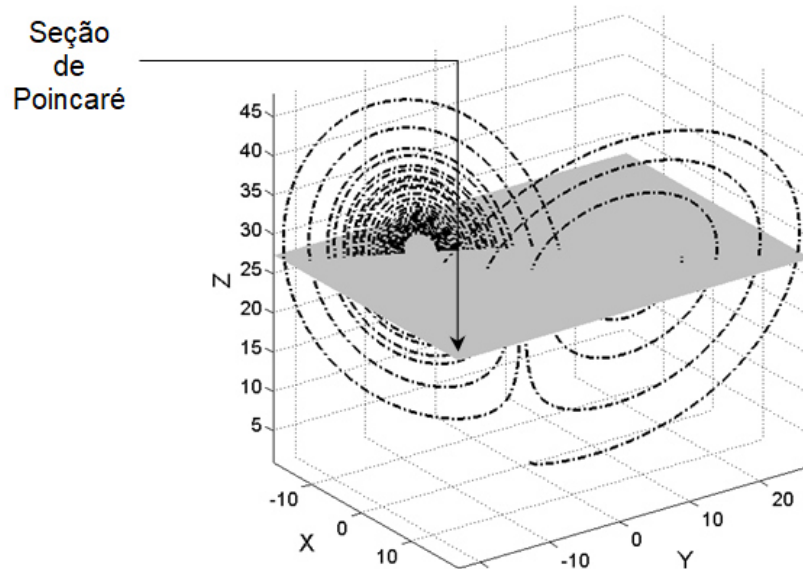


Figura 5.6: Seção de Poincaré para o sistema dinâmico de Lorenz.

De acordo com a Fig. 5.6, é possível constatar que o sistema dinâmico possui uma infinidade de pontos na seção de Poincaré, definindo a não periodicidade das órbitas do sistema. Portanto, exibe indicativo de caos, como já observado pela análise dos expoentes de Lyapunov. Por fim, é importante salientar que a construção da seção de Poincaré define de forma, razoavelmente, simples a caracterização da propriedade de não regularidade em sistemas dinâmicos não lineares, estabelecendo-se uma outra forma de caracterizar a caoticidade em sistemas dinâmicos não lineares.

Outra forma de analisar o sistema dinâmico de Lorenz por meio das seções de Poincaré é considerar separadamente as variáveis de estado, conforme apresentada nas Figs. 5.7 e 5.8. Em particular, a Fig. 5.7(a) exibe a resposta dinâmica da variável de estado $x(t)$ e a Fig. 5.7(b) mostra a sua respectiva seção de Poincaré.

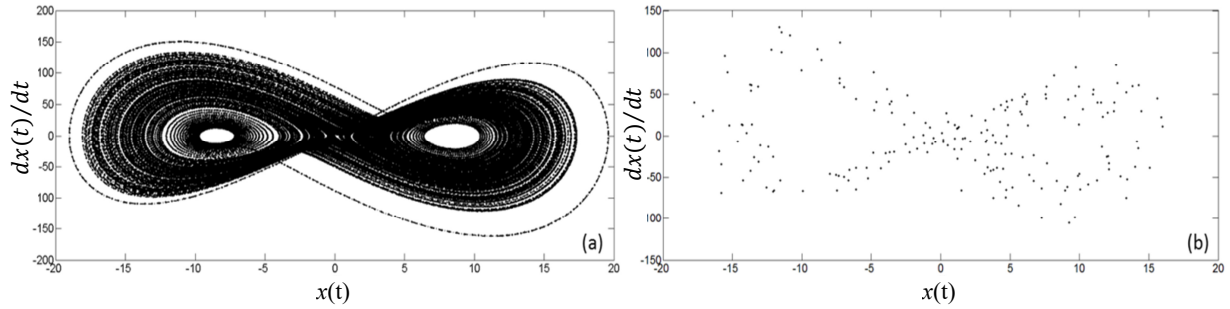


Figura 5.7: (a) Orbitas; (b) Seção de Poincaré para a variável de estado $x(t)$.

A Fig. 5.8 apresenta as orbitas para a equação de estado $y(t)$ e a seção de Poincaré, para fins de avaliar a estabilidade do sistema dinâmico.

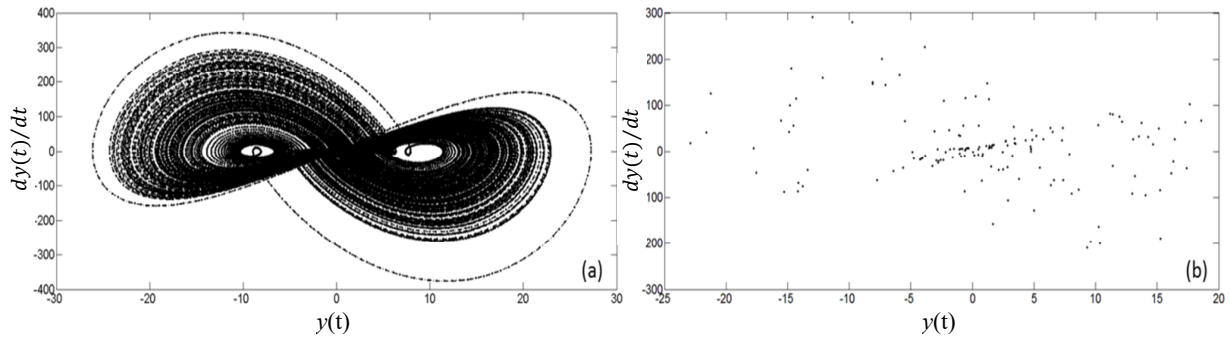


Figura 5.8 – (a) Orbitas; (b) Seção de Poincaré para a variável de estado $y(t)$.

Diante das Figs. 5.7(b) e 5.8(b) nota-se uma distribuição de pontos por todo o plano, indicando, segundo a técnica da seção de Poincaré, uma não regularidade das órbitas do sistema. Dessa forma, o sistema dinâmico deve ser caracterizado como caótico segundo esta técnica.

Por outro lado para apresentar estes resultados no sistema incorporando não linearidade cúbica caracterizado pelo oscilador de Duffing (SAVI, 2006), constituído por uma massa, m [kg], um amortecedor viscoso de coeficiente, b [Ns/m], um conjunto de molas linear e não linear com rigidezes k [N/m] e k_{nl} [N/m], e sujeito a uma força externa, $f(t)$ [N], com equação do movimento desse sistema dinâmico é definida por:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx + k_{nl}x^3 = f(t) \quad (5.13)$$

Para valores pequenos de rigidez não linear, k_{nl} , o sistema possui comportamento não linear, dependendo do tipo e do nível da excitação externa. Isto pode ser observado nas Figs. 5.9 e 5.10, para os seguintes valores: $m=1$ kg, $k=1$ N/m, $b=0,1$ Ns/m, em todos os casos analisados, considerando, ainda, faixa de domínio temporal de forma a descartar o lapso temporal do regime transiente do sistema. A Fig. 5.9(a) mostra as respostas do oscilador para diferentes valores de, k_{nl} , mostrando a sua grande influência na resposta não linear do sistema (ver Figs. 5.9(a) e 5.9(b)).

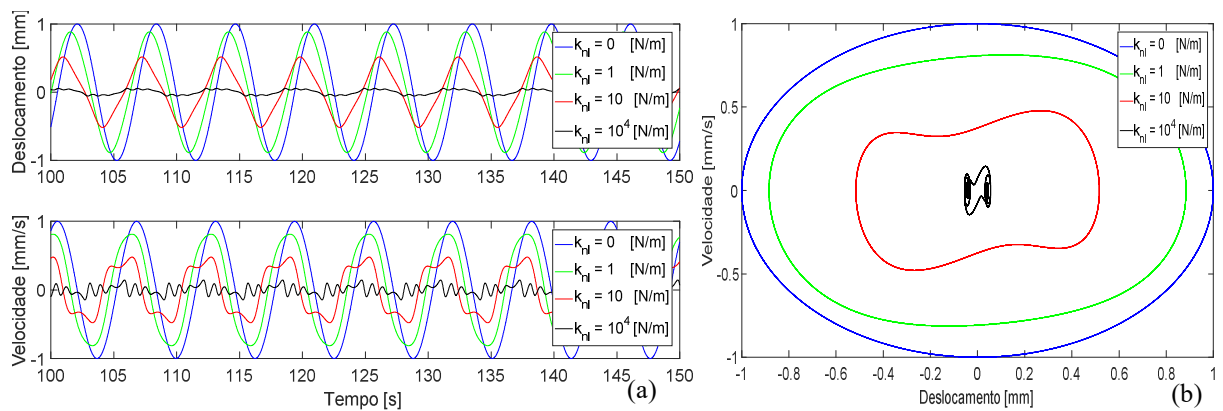


Figura 5.9 – (a) Contribuição do termo, k_{nl} , a partir da excitação tipo $f(t) = \cos(t)$ N; (b) Diagrama de fase do sistema mecânico para diferentes k_{nl} .

O diagrama de fase da Fig. 5.9(b) traduz a característica periódica da solução obtida, sendo a distorção observada associada à predominância do efeito não linear. A Fig. 5.10 mostra as respostas do sistema para diferentes níveis de excitação harmônica e, para uma pequena rigidez não linear, $k_{nl} = 0,1$ N/m.

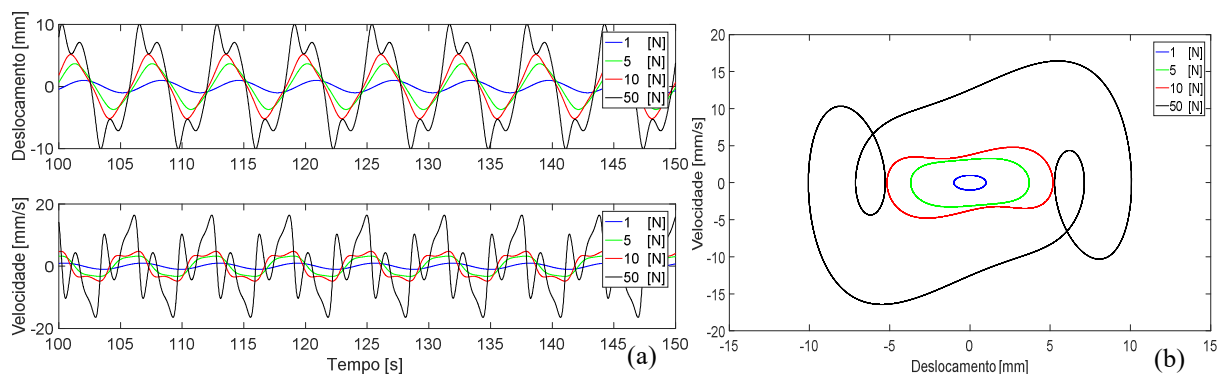


Figura 5.10 – (a) Contribuição da excitação do tipo $f(t) = F_0 \cos(t)$, considerando $k_{nl} = 0,1$ N/m; (b) Diagrama de fase do sistema mecânico para diferentes níveis de excitação.

O diagrama de fase da Fig. 5.10(b) mostra a evolução do fenômeno não linear a partir da amplitude da força de 1N. A partir da Fig. 5.9(b) é possível observar que o efeito não linear tem influência no sistema a partir de rigidez não linear não nula. Por outro lado a Fig. 5.10(b) ilustra o comportamento do efeito não linear a partir de uma pequena rigidez não linear, evidenciando a influência do nível de excitação no comportamento não linear do sistema.

As Figs. 5.11 e 5.12 mostram os mapas de Poincaré para fins de caracterização do sistema dinâmico de Duffing quanto a sua caoticidade em relação à evolução da rigidez não linear.

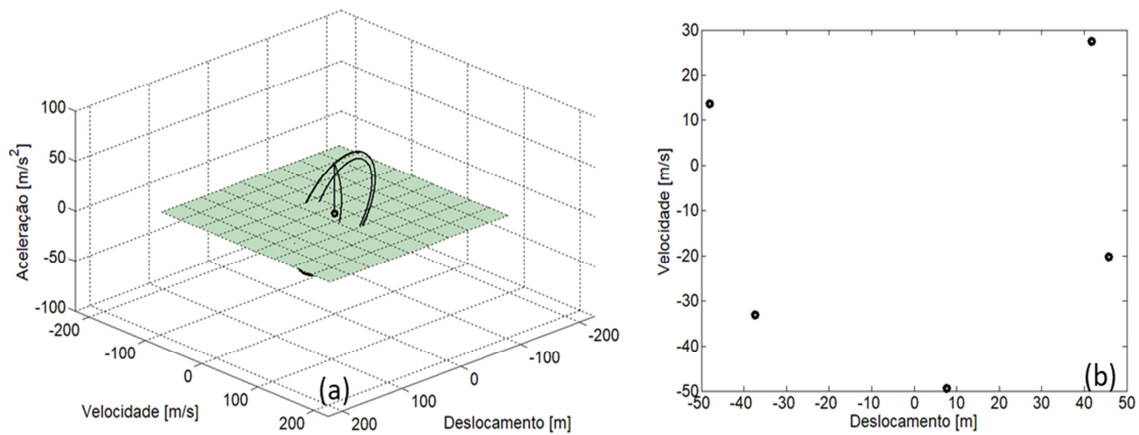


Figura 5.11 – Mapa (a) seção de Poincaré (b) para $k_{nl} = 0 \text{ N/m}$.

As Figs. 5.11(a) e 5.11(b) mostram a construção do mapa e seção de Poincaré quando o sistema se comporta, predominantemente, de forma linear (ver Fig. 5.9). Nesse sentido, tanto o mapa quanto a seção exibem quantidades finitas de pontos, mostrando que o sistema possui uma forte regularidade das variáveis de estado. Em contrapartida, as Figs. 5.12(a) e 5.12(b) demonstram uma irregularidade nas mesmas variáveis, isso decorre, pois (conforme ilustrado na Fig. 5.9(a)) o efeito não linear influenciado pelo fator de rigidez não linear, levando-o, por conseguinte, a um regime caótico segundo Poincaré.

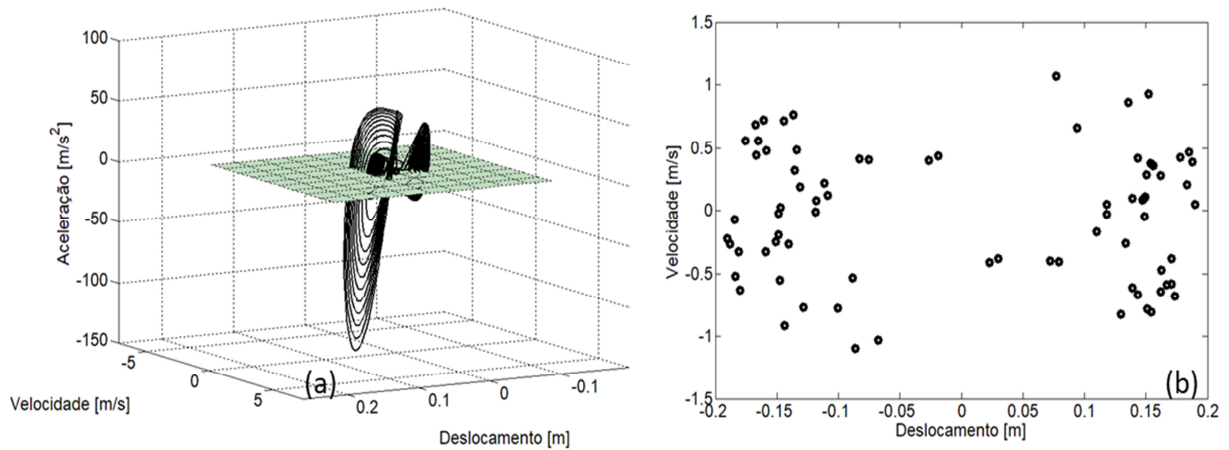


Figura 5.12 – Mapa (a) e seção de Poincaré (b) para $k_{nl} = 10^4 \text{ N/m}$.

Por outro lado, a Fig. 5.13(a) mostra a evolução do sistema em relação à característica de caoticidade, por meio do cálculo do expoente de Lyapunov. Pode-se afirmar que o sistema passa a ter um comportamento caótico a partir do nível de rigidez não linear de 10^2 N/m . Tal comportamento também pode ser observado a partir da seção de Poincaré do sistema para a rigidez não linear mencionada (Fig. 5.13(b)).

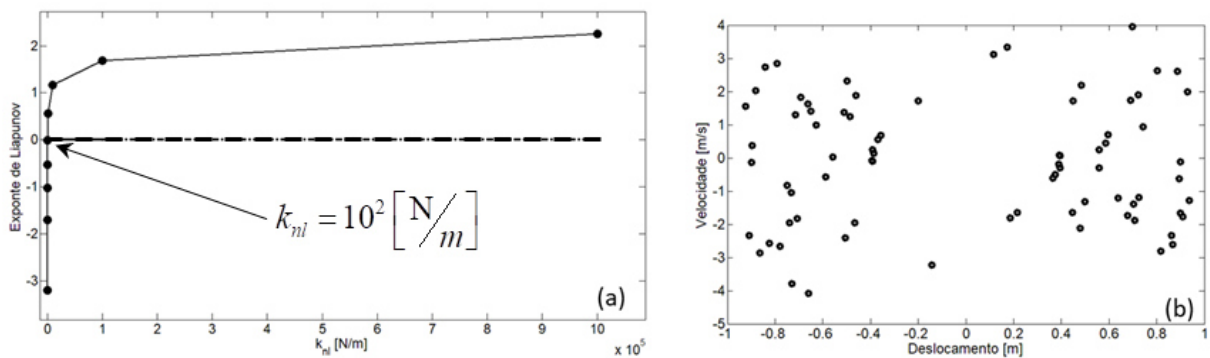


Figura 5.13 – (a) Evolução dos expoentes de Lyapunov em relação a rigidez não linear; (b) Seção de Poincaré para $k_{nl} = 10^2 \text{ N/m}$.

Apesar das técnicas do expoente dominante de Lyapunov e seção de Poincaré possuírem a premissa de classificar um sistema dinâmico não linear quanto a sua caoticidade, convém esclarecer que tais métodos visam analisar propriedades distintas presentes em sistemas dinâmicos caóticos (VIANA, 2011). Enquanto, o método do expoente de Lyapunov tem como objetivo a caracterização da caoticidade a partir da quantificação do nível de sensibilidade a duas condições iniciais próximas entre si, à seção de Poincaré visa avaliar a regularidade das variáveis de estado do sistema não linear. Diante disso, espera-se que ambos

os métodos produzam uma mesma evidência quanto à caracterização da caoticidade. Entretanto, há que se considerar que tais métodos possam apresentar resultados divergentes em uma região limítrofe de caoticidade.

5.5. Identificação do efeito não linear no sistema dinâmico

Segundo Caetano (1992), Gonçalves (2004) e Ritto (2005), a análise de um sinal pode processar-se no domínio da frequência por meio de sua decomposição num conjunto finito ou infinito de harmônicos de amplitude e frequência variáveis. A via mais imediata de proceder tal decomposição, no caso de funções periódicas, consiste na utilização da expansão em série de Fourier, definida como segue:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) \quad (5.14)$$

sendo $a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt$, $a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos(2\pi n t/T) dt$ e $b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin(2\pi n t/T) dt$, em que a_n e b_n são ilustrados na Fig. 5.14 e, representam a composição de $x(t)$ em termos dos harmônicos em $\omega_n = 2\pi n/T$, com $n = 1, 2, 3, \dots$.

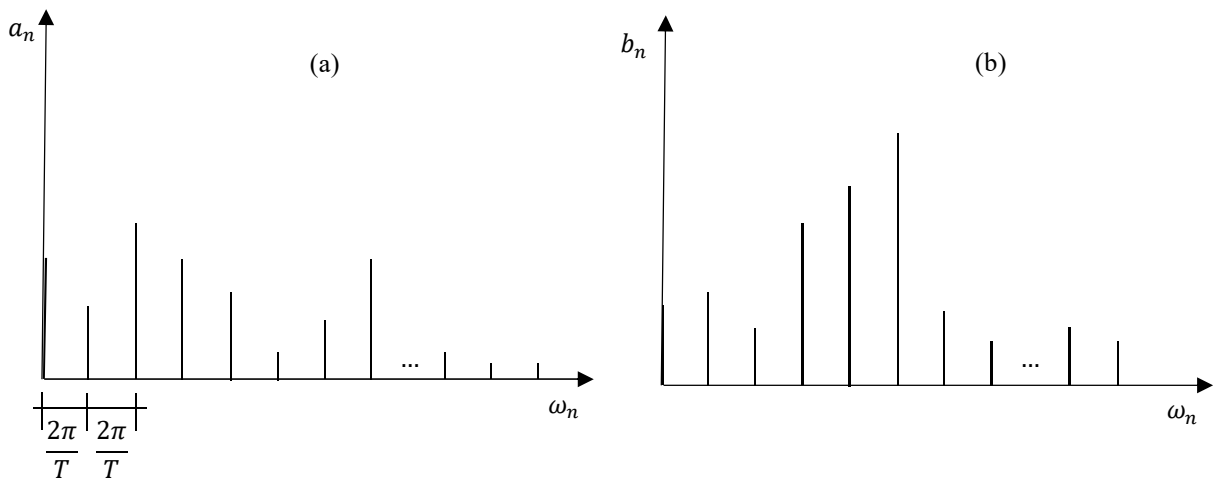


Figura 5.14 – Representação dos termos a_n e b_n (Adaptado de Caetano (1992)).

A decomposição de um sinal em uma série infinita é, evidentemente, impraticável. Assim, a utilização de uma série truncada com apenas N harmônicos, fornece uma

aproximação do sinal que será melhor quanto maior o valor deste parâmetro, como ilustrado na Fig. 5.15 que mostra a decomposição em série de Fourier de um sinal periódico representando uma onda quadrada com um, cinco e treze harmônicos.

A Fig. 5.15 mostra que, para representar o sinal é preciso combinar uma ou mais funções periódicas, conforme a Eq. (5.14), afetando assim, a condição de linearidade da aproximação. Portanto, tal combinação se apresenta na transformada de Fourier por meio de diversos harmônicos com o objetivo de representar os coeficientes a_n e b_n (CAETANO, 1992).

Diante disso, é possível identificar o fenômeno não linear através da análise dos harmônicos presentes no sinal. Nesse sentido, Souza (2008) utiliza, dentre outras, a técnica da Transformada Rápida de Fourier (*Fast Fourier Transform* - FFT) para identificar e caracterizar não linearidades em sistemas dinâmicos.

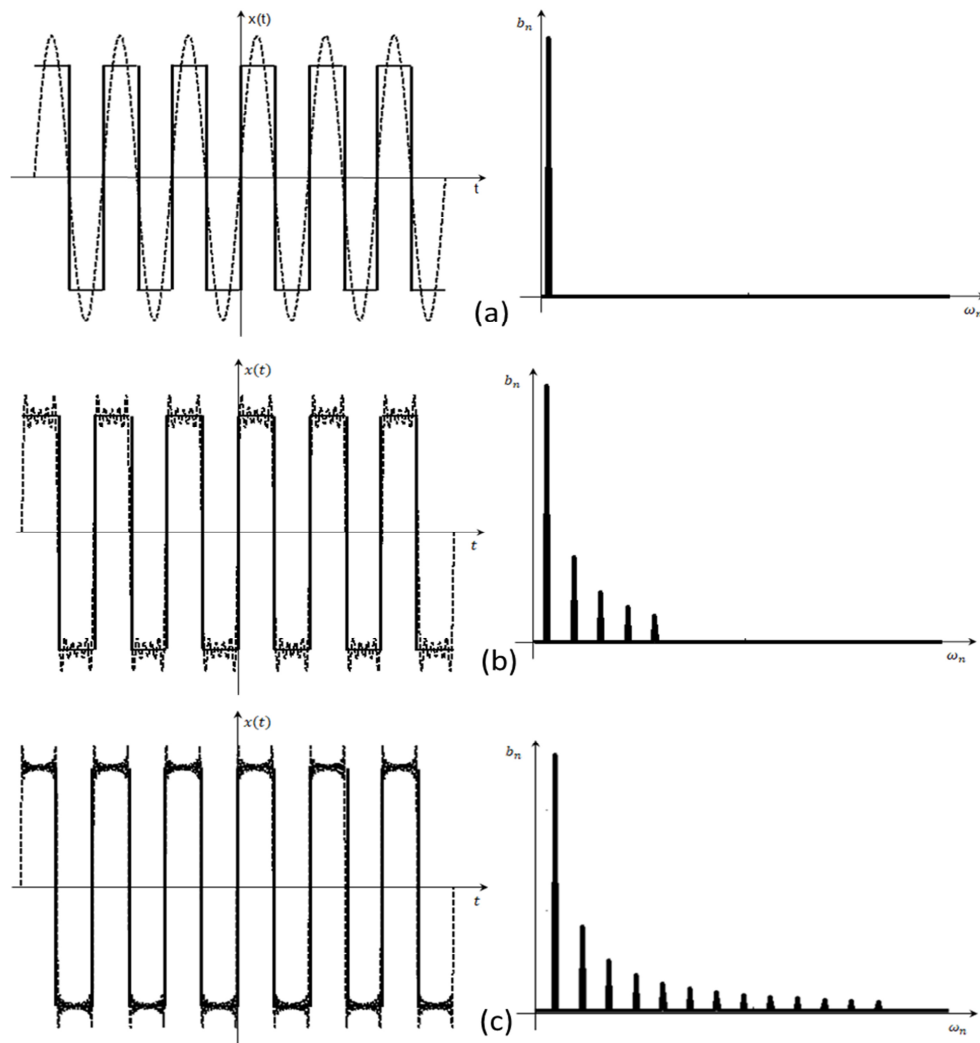


Figura 5.15 – Aproximação de uma onda quadrada por meio da série de Fourier truncada em N termos: (a) $N = 1$; (b) $N = 5$; (c) $N = 13$.

Segundo Souza (2008) para identificar a presença do efeito não linear em um sistema dinâmico por meio da FFT é necessário que a resposta obtida via transformada demonstre a existência de diferentes harmônicos em uma faixa de frequência de interesse, ou a presença de harmônico distorcido, equivalendo a existência de diferentes harmônicos em uma pequena vizinhança de uma frequência específica. A Fig. 5.16 ilustra estes dois cenários de identificação do efeito não linear em um sistema dinâmico. Ainda, segundo Souza (2008), esta técnica possui o inconveniente de não ser confiável quando o sinal advém de um experimento físico, alertando sobre a necessidade de empregos de filtros de eliminação de ruídos em conjunto com a técnica.

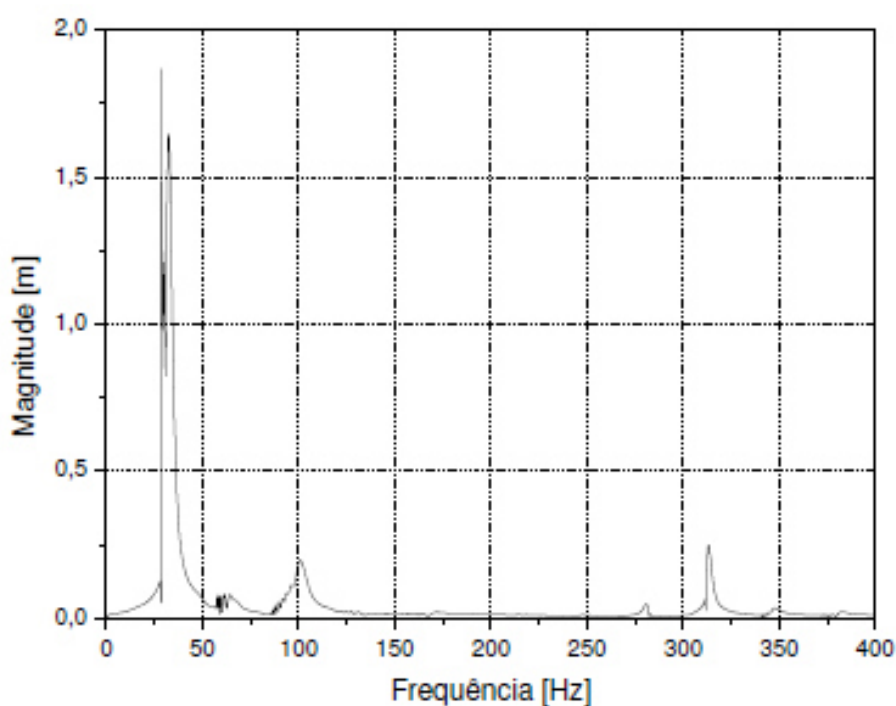


Figura. 5.16 – FFT do sinal incorporando não linearidade cúbica (Extraído de Souza, (2008)).

Assim, a título de ilustração, a Fig. 5.17 mostra a amplitude das funções de resposta em frequência normalizadas do modelo de Duffing obtidas a partir da FFT do sinal do deslocamento para diferentes valores de rigidez não linear e amplitude de excitação igual a 50N. Nota-se a presença de harmônicos à medida que o efeito não linear se torna mais pronunciando e sob as mesmas condições iniciais.

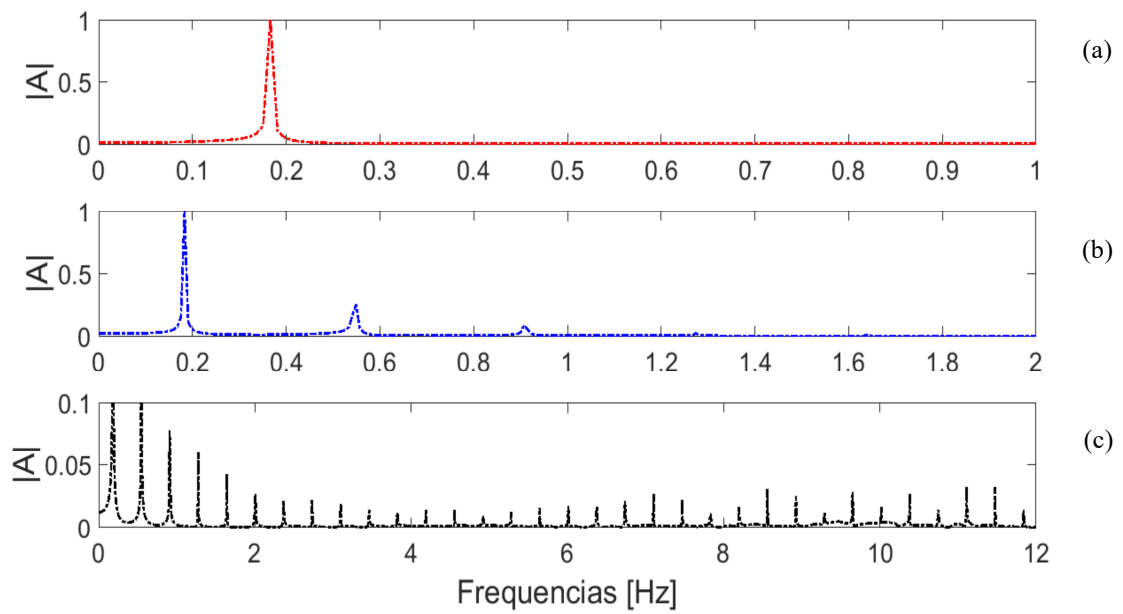


Figura 5.17 – FFT do sinal do deslocamento para o modelo de Duffing:

(a) $k_{nl} = 0 \text{ N/m}$; (b) $k_{nl} = 10^{-1} \text{ N/m}$; (c) $k_{nl} = 10^6 \text{ N/m}$

CAPÍTULO VI

SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

Neste capítulo, são apresentados os principais resultados das simulações numéricas realizadas a partir dos modelos de elementos finitos determinísticos e estocásticos dos sistemas não lineares desenvolvidos nos capítulos anteriores. Todos os procedimentos computacionais próprios foram implementados em ambiente de programação MATLAB[®] e comparados, quando necessário, com implementações feitas no código de elementos finitos ANSYS[®] para efeito de validação da modelagem determinística de placas finas em grandes deslocamentos. Além disso, são apresentados os resultados das simulações para os sistemas não lineares reduzidos via emprego do método de redução proposto neste trabalho. Na sequência, foram gerados os envelopes das respostas dinâmicas dos sistemas estocásticos não lineares objetivando avaliar a influência das incertezas paramétricas nas respostas dos sistemas, evidenciando a capacidade da modelagem estocástica proposta nesta tese para lidar com sistemas dinâmicos não lineares na presença de incertezas.

6.1. Verificação do modelo linear conservativo associado

Nas aplicações que seguem, foi utilizado uma placa fina de alumínio conforme a discretização e condições de contorno mostradas na Fig. 6.1. O modelo de EF da placa fina em grandes deslocamentos foi desenvolvido no Capítulo II sendo composto por 144 elementos de placa retangular não linear, resultando um total de $N = 845$ graus de liberdade (gdl's), sem considerar as condições de contorno mecânicas. As propriedades físicas e geométricas do modelo são definidas na Tab. 6.1.

Tabela 6.1 – Propriedades físicas e geométricas do modelo de EF da placa fina.

Medida em y (m)	Medida em x (m)	Espessura, h (m)	Módulo de Elasticidade (GPa)	Coefficiente de Poisson	Massa Específica (kg/m ³)
0,654	0,527	0,0015	70	0,33	2700

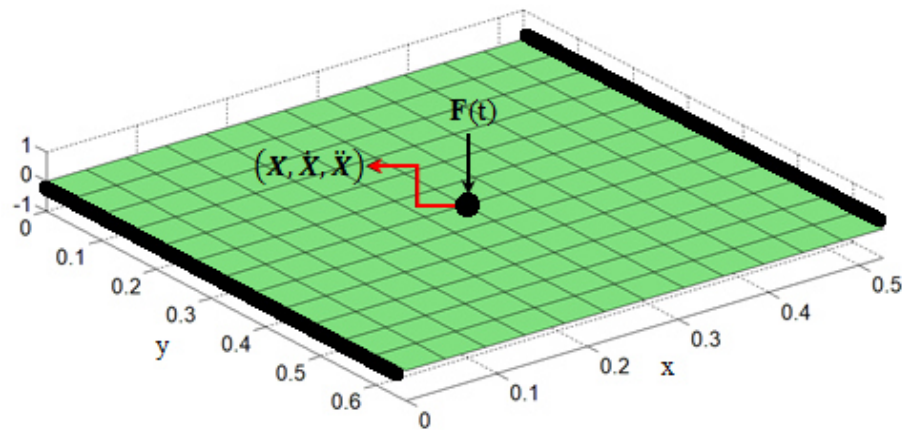


Figura 6.1 – Modelo de EF da placa fina de alumínio bi-engastada.

Num primeiro momento, foi feita a verificação da modelagem por elementos finitos determinística do sistema conservativo linear associado, tendo como base as frequências naturais do sistema. Neste caso, as frequências naturais foram obtidas através da resolução do seguinte problema de autovalores, formulado a partir da Eq. (2.26):

$$[K' - \omega_j^2 M] \varphi_j = 0 \quad (6.1)$$

sendo φ_j e ω_j , respectivamente, os autovetores e as frequências naturais do sistema dinâmico linear, com $j=1$ a N .

A Fig. 6.2 permite comparar as dez primeiras frequências naturais de dois modelos de EF, a saber: (i) o primeiro é o modelo implementado no código ANSYS, considerado como sendo a referência neste trabalho. Neste caso, foi utilizado o elemento *SHELL63* de quatro nós e seis gdl's por nó com capacidade para a modelagem de sistemas lineares ou com não linearidades geométricas; (ii) o segundo é o modelo de EF desenvolvido no presente trabalho utilizando o ambiente MATLAB, conforme os desenvolvimentos apresentados no Capítulo II.

De imediato, pode-se notar uma boa proximidade entre as frequências naturais dos dois modelos lineares, permitindo, nesta fase, validar os procedimentos de modelagem do sistema dinâmico no regime linear. Isto pode ser confirmado pela análise do erro relativo definido na

Eq. (6.2) entre as frequências naturais obtidas dos modelos ANSYS e MATLAB, conforme mostrado na Fig. 6.3.

$$Erro = \frac{|f_j^A - f_j^M|}{f_j^A} \times 100\% \quad (6.2)$$

sendo f_j^A e f_j^M são as frequências naturais em Hz dos modelos implementados em ANSYS e MATLAB, respectivamente.

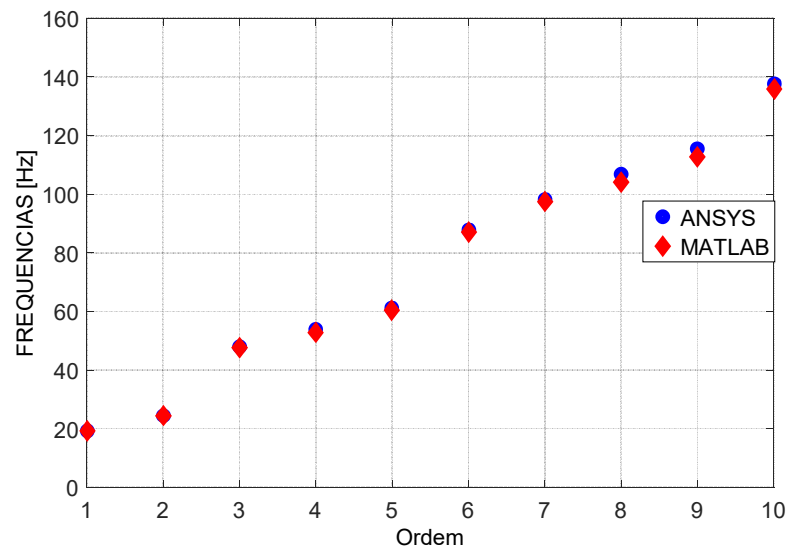


Figura 6.2 – Comparação das dez primeiras frequências naturais dos modelos lineares implementados em ANSYS e MATLAB.

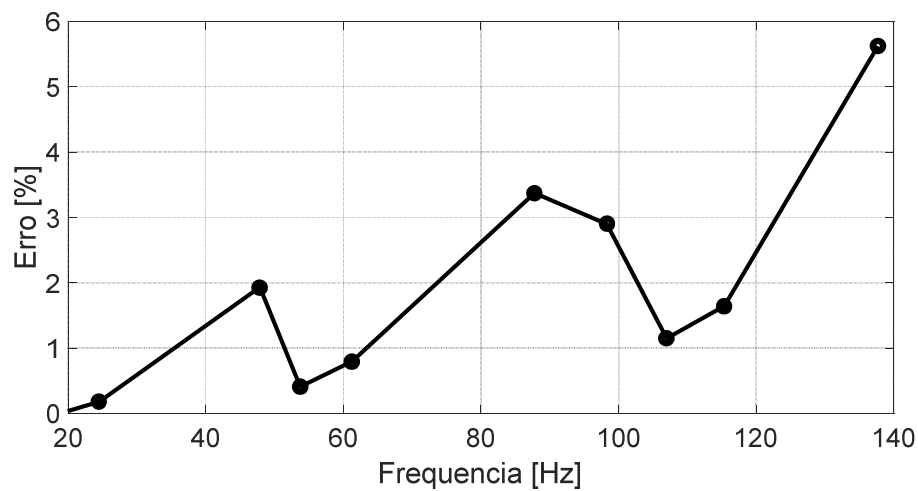


Figura 6.3 – Erro entre as frequências naturais dos modelos lineares implementados em ANSYS e MATLAB.

A diferença obtida em ambos os métodos se deve, essencialmente, aos tipos de elementos finitos utilizados em ambos os modelos, bem como aos métodos de integração utilizados.

6.2. Verificação do modelo com não linearidades geométricas

Para verificar o código próprio implementado em MATLAB para a análise de sistemas dinâmicos contendo não linearidades geométricas, conforme as etapas definidas na Fig. 2.4, o mesmo modelo de EF da Fig. 6.1 é considerado nesta aplicação. O interesse é comparar as respostas dinâmicas do sistema relativas ao mesmo nó de aplicação de uma força harmônica da forma, $F(t) = F_0 \sin(\omega t)$, obtidas pelos modelos implementados em MATLAB e ANSYS, onde ω e F_0 são, respectivamente, a frequência e a amplitude da força. Neste caso, para uma frequência da excitação constante de, $f = 20\text{Hz}$, próxima à primeira frequência natural do sistema no regime linear da Fig. 6.2, são consideradas as forças, $F_0 = 8\text{N}$ e $F_0 = 200\text{N}$.

A Fig. 6.4 compara os resultados obtidos em termos do deslocamento transversal normalizado em relação à espessura, w/h , e da velocidade, $\dot{w}$, normalizados em relação à velocidade máxima, do mesmo ponto de aplicação da força indicado na Fig. 6.1, para ambos os modelos implementados em MATLAB e ANSYS.

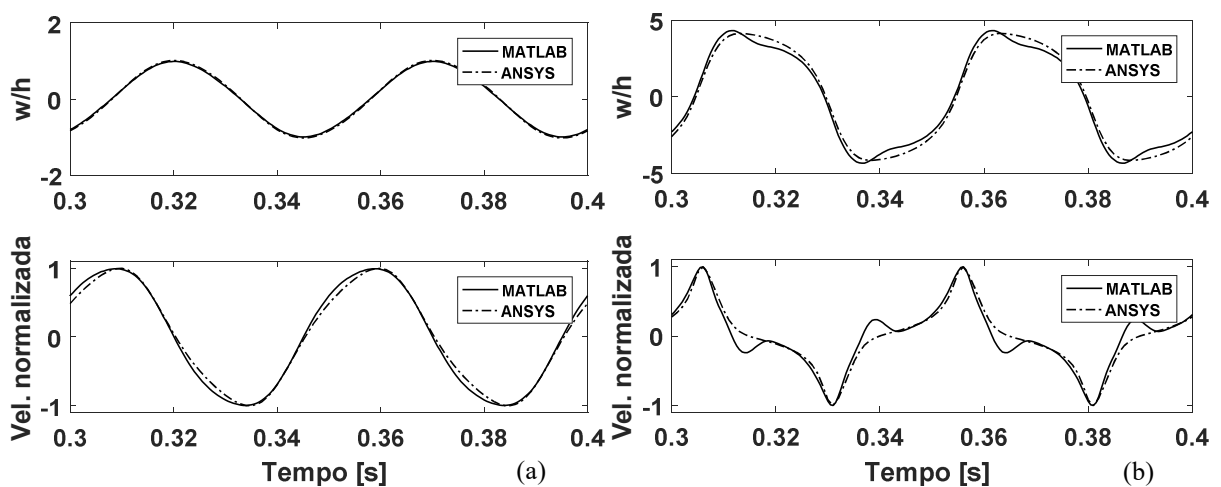


Figura 6.4 – Respostas temporais da placa fina com não linearidade geométrica para a condição de contorno bi-engastada: (a) $F_0 = 8\text{N}$; (b) $F_0 = 200\text{N}$.

Percebe-se que o modelo de placa fina não linear desenvolvido neste trabalho representa de forma satisfatória o comportamento não linear do sistema implementado no ANSYS, mesmo para níveis elevados da força externa, 200 N . As pequenas diferenças observadas nas respostas temporais entre os dois modelos podem estar associadas ao algoritmo de integração temporal de Newmark melhorado que foi implementado neste trabalho, conforme a Fig. 2.4. Além disso, deve-se destacar que para níveis de não linearidades superiores a 3,5 ($w/h \geq 3,5$) as diferenças entre as respostas temporais dos modelos implementados em ANSYS e MATLAB se tornam bastante expressivas.

A partir da análise do diagrama de fase para a força de, $F_0 = 8\text{ N}$, como mostrado na Fig. 6.5, pode-se constatar, sem dificuldades, que o sistema não linear possui comportamento linear.

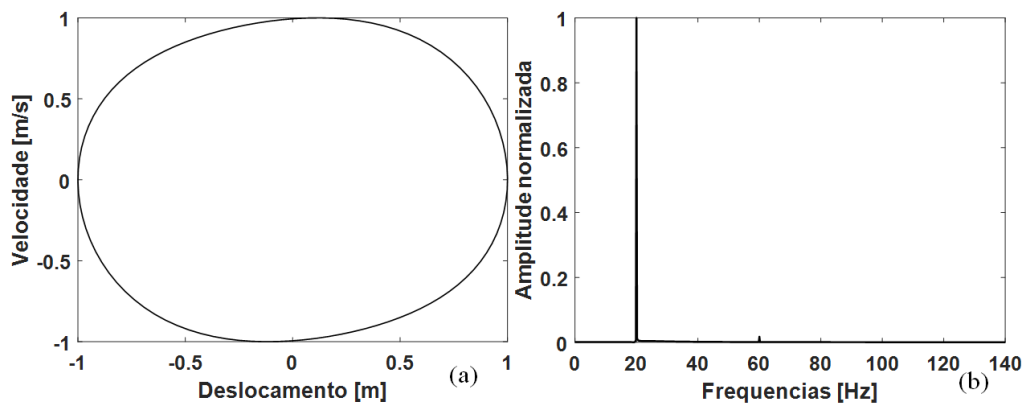


Figura 6.5 – Diagrama de fase (a) e FFT do sinal do deslocamento (b) para $F_0 = 8\text{ N}$.

A Fig. 6.6 ilustra o diagrama de fase e a FFT do sinal do deslocamento para um nível de excitação harmônica de $F_0 = 200\text{ N}$, evidenciando o comportamento não linear do sistema.

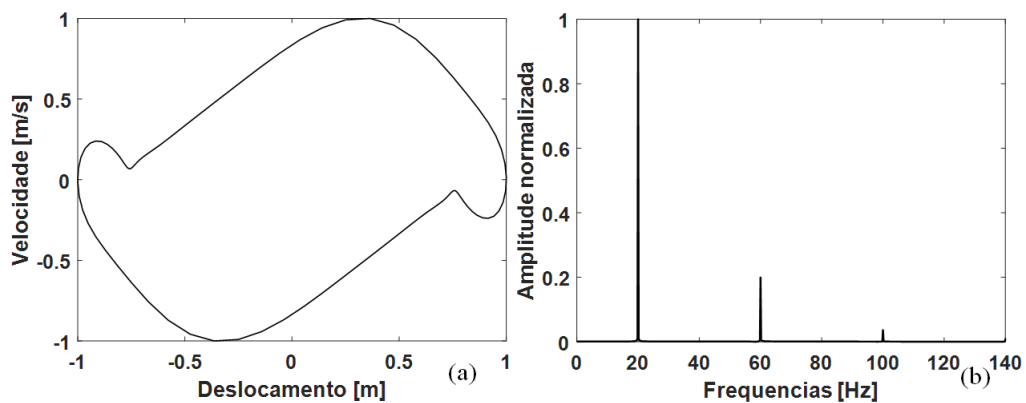


Figura 6.6 – Diagrama de fase (a) e FFT do sinal do deslocamento (b) para $F_0 = 200\text{ N}$.

Diante das Figs 6.5(b) verifica-se a presença de um único pico de ressonância em frequência na resposta FFT normalizada do sinal do deslocamento transversal. Já, para a força de, $F_0 = 200N$, a deformação observada no diagrama de fase da Fig. 6.6(a) permite concluir sobre a influência do efeito decorrente da não linearidade geométrica na dinâmica do sistema, alterando a sua condição de comportamento linear, como mostrado na resposta FFT normalizada da Fig. 6.6(b). Nota-se a presença de pelo menos três harmônicos, indicando uma predominância do comportamento não linear para o nível de força de, $F_0 = 200N$.

A Fig. 6.7 mostra o resultado da aplicação do método do expoente de Lyapunov, para a análise da estabilidade do sistema dinâmico em relação à evolução dos efeitos das não linearidades geométricas em função do nível da força externa.

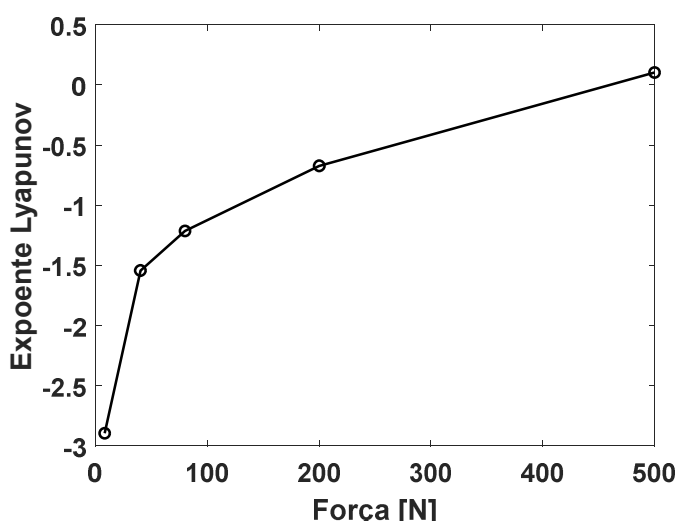


Figura 6.7 – Análise de estabilidade da placa bi-engastada via Lyapunov.

A partir da Fig. 6.7 é possível constatar a estabilidade do sistema dinâmico para um nível de excitação externa, aproximadamente, de até 400N. Assim, diante da Fig. 6.7 pode-se estabelecer um domínio de validade (excitação não superior a 200N) para o estudo do sistema dinâmico no que diz respeito à sua estabilidade, especialmente, ainda pelo fato de levar-se em consideração a incorporação de incertezas ao modelo, o que certamente afetará tanto o efeito não linear quanto a estabilidade do sistema.

Estabelecendo o domínio da validade para o nível de excitação não superior a 200N a Fig. 6.8 possibilita a análise da estabilidade por meio da seção de Poincaré em função do

comportamento não linear do sistema influenciado a partir de diferentes níveis de excitação harmônica, na faixa de interesse de análise do sistema.

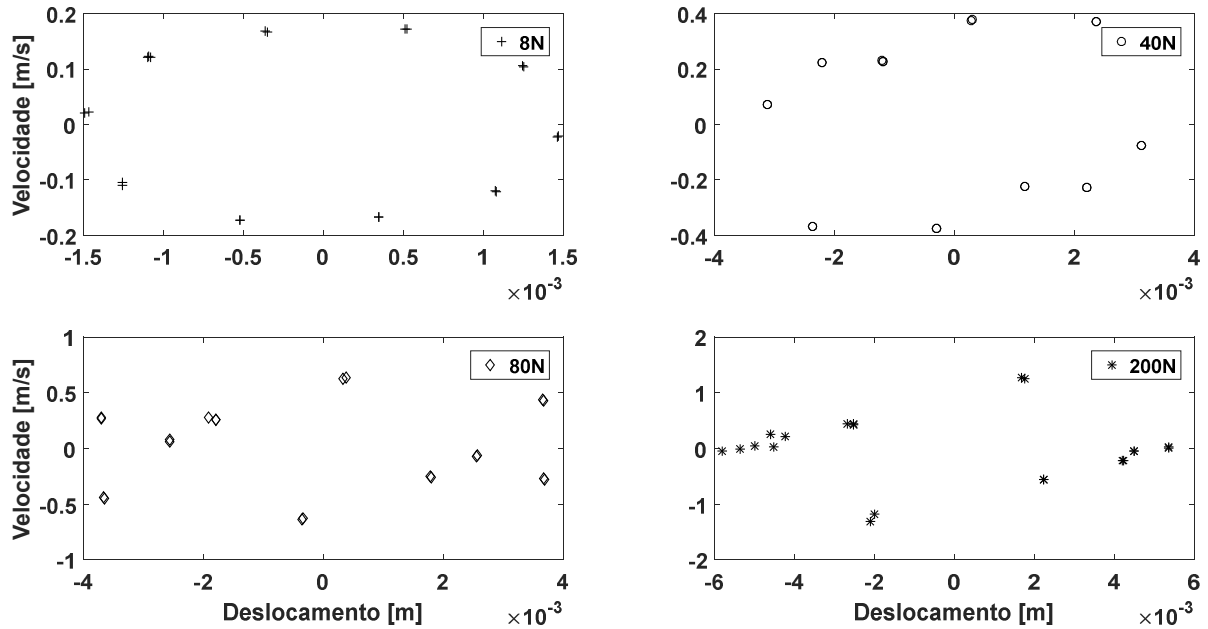


Figura 6.8 – Análise de estabilidade da placa bi-engastada conforme Poincaré.

Mediante as Figs. 6.7 e 6.8 é possível constatar que o sistema dinâmico representado a placa fina em flexão da Fig. 6.1 opera em regime de estabilidade nos cenários de excitação investigados nesta aplicação.

6.3. Redução de modelos para sistemas incorporando não linearidades discretas

Nesta seção, será avaliada a eficiência do primeiro método de redução de modelos proposto neste trabalho, baseado na construção de uma base modal enriquecida com resíduos estáticos de primeira ordem associados aos esforços externos e de amortecimento presentes no sistema e dos esforços não lineares, conforme os desenvolvimentos apresentados na Seção 4.2 do Capítulo IV.

Num primeiro momento, o interesse é realizar testes numéricos com o modelo de EF da placa sanduíche de três camadas bi-engastada mostrada na Fig. 6.9 a seguir, ainda no contexto linear, para verificar a eficiência da base de redução nominal, T_0 , enriquecida com resíduos associados aos esforços externos e de amortecimento viscoelástico, conforme definidos na Eq.

(4.8). Detalhes do procedimento de modelagem por EF de placas sanduíches viscoelásticas podem ser encontrados em Lima (2007).

As dimensões geométricas do modelo, o ponto de aplicação da excitação externa e de obtenção das respostas temporais também estão indicadas na Fig. 6.9.

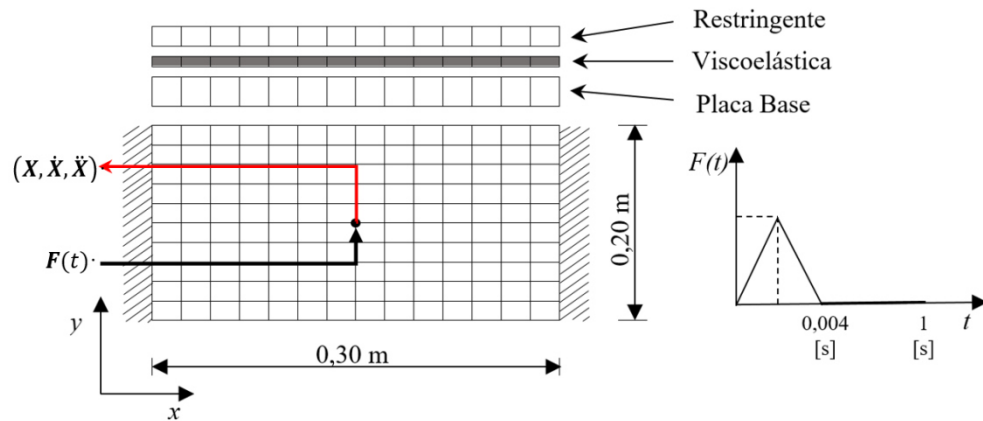


Figura 6.9 – Modelo de EF da placa sanduíche viscoelástica bi-engastada.

A Tab. 6.2 apresenta as propriedades físicas de cada camada da placa sanduíche viscoelástica. Vale salientar que, uma vez que o comportamento dinâmico dos materiais viscoelásticos depende fortemente da frequência de excitação e da temperatura de operação do material (LIMA *et al.* 2015), será utilizado a expressão do módulo complexo do material viscoelástico ISD112 da 3M definida na Eq. (4.2) para avaliar o módulo de cisalhamento da camada central da placa sanduíche para uma dada condição de operação de interesse.

Tabela 6.2 – Propriedades físicas e geométricas da placa sanduíche viscoelástica.

Camadas	Módulo de Elasticidade $E [N/m^2]$	Densidade $\rho [kg/m^3]$	Espessura $h [m]$	Coefficiente de Poisson ν
Estrutura-base	70	2700	1×10^{-3}	0,30
Viscoelástica	Eq. (4.2)	950	254×10^{-6}	0,49
Restringente	70	2700	5×10^{-4}	0,30

Fonte: de Lima, *et al.*, (2015)

A Fig. 6.10 ilustra os resultados das respostas dos deslocamentos normalizados, $(w/L) \times 10^3$, para dois tipos de esforços: harmônico e impulso.

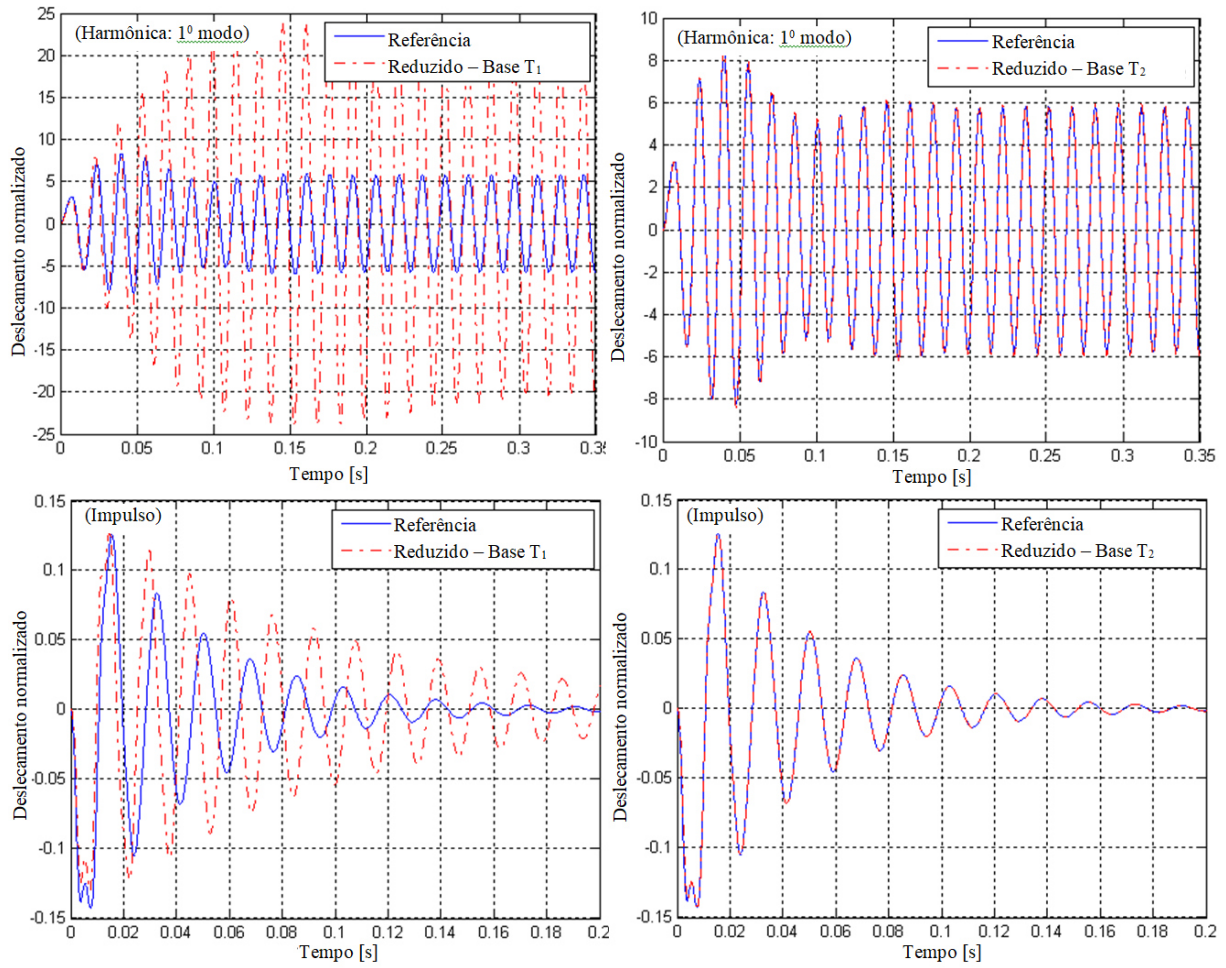


Figura 6.10 – Respostas temporais dos deslocamentos dos sistemas de referência e reduzido para as bases T_1 e T_2 - Sistema viscoelástico linear.

Sendo os esforços: (i) uma força harmônica, sendo $f = 76,47 \text{ Hz}$ a frequência da excitação escolhida próxima à primeira frequência natural do sistema conservativo associado (ver Seção 4.1, Capítulo IV), obtida através da resolução do problema de autovalores definido pela Eq. (4.5), e $F_0 = 10 \text{ N}$; (ii) uma força do tipo impulso triangular como ilustrado na Fig. 6.9. As simulações numéricas foram realizadas no intervalo de tempo de, $t \in [t_0 = 0 \text{ s}, t_f = 0,35 \text{ s}]$, com uma resolução constante de, $\Delta t = 0,01 \text{ ms}$.

A Fig. 6.10 permite comparar, assim, os resultados obtidos em termos dos deslocamentos transversais normalizados para os sistemas de referência e reduzido para as duas condições de força externa e para as seguintes bases de redução: (i) $T_1 = [\varphi_0 \quad \mathbf{R}]$ (19 autovetores, 1 vetor residual calculados conforme a Eq. (4.6)); $T_2 = [\varphi_0 \quad \mathbf{R} \quad \mathbf{R}_v^0]$ (19

autovetores, 1 vetor residual obtido pela Eq. (4.6), 14 resíduos viscoelásticos, calculados conforme a Eq. (4.7)).

Pela análise da Fig. 6.10 fica evidente a eficiência do procedimento de enriquecimento da base com resíduos estáticos dos esforços externos de amortecimento do sistema dinâmico linear para melhorar a aproximação da resposta dinâmica.

Nesta aplicação envolvendo placas finas em flexão, a escolha da base modal inicial, φ_0 , está relacionada ao número de harmônicos que podem intervir *a priori* na resposta dinâmica do sistema. Por exemplo, se forem os harmônicos 1, 3 e 5 que intervêm na resposta, a base, φ_0 , de vetores próprios de natureza de flexão deve conter os modos relativos às frequências superiores ou igual a 5 (cinco) vezes a frequência da excitação (primeiro harmônico). Para os modos de membrana, eles são normalmente associados a altas frequências, sendo, neste caso, difícil adotar um critério similar baseado na escolha *a priori*, de uma frequência de corte para a base inicial. Entretanto, pode-se adotar um critério *a posteriori* baseado na evolução do erro relativo entre as respostas dos modelos reduzido e completo.

Na sequência, será considerada a mesma placa sanduíche viscoelástica semelhante a Fig. 6.9. Entretanto, ela será engastada em um dos bordos e sujeita a condições de contorno não lineares no bordo oposto. Tais condições de contorno são representadas aqui por molas discretas com características não lineares, atuando na direção transversal, como ilustrado na Fig. 6.11. Na mesma figura, são mostrados os pontos de aplicação da força e de obtenção da resposta dinâmica do sistema não linear no domínio do tempo.

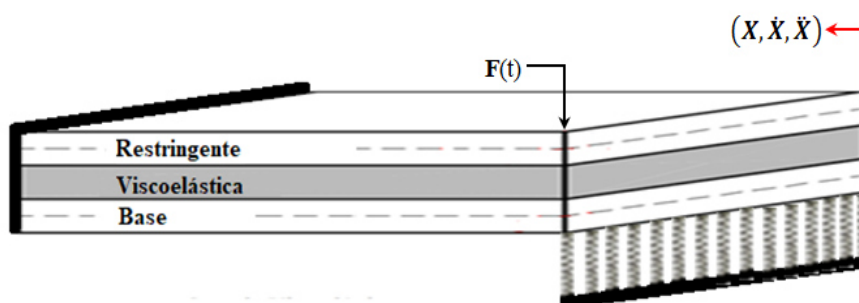


Figura 6.11 – Ilustração da placa sanduíche viscoelástica com molas não lineares.

Como foi discutido na Seção 4.2 do Capítulo IV, no contexto de uma modelagem por EF, o esforço exercido por uma mola com características não lineares pode ser representado pela Eq. (4.9), e a Eq. (4.10) e, representa o sistema de equações do movimento do sistema

dinâmico não linear contendo amortecimento viscoelástico a ser resolvido pelo processo de integração, cujas etapas estão definidas na Fig. 4.3.

As simulações foram realizadas para os seguintes valores de parâmetros: coeficientes de rigidez linear e não linear de cada mola, $k^l = 100 \text{ N/m}$ e $k^{nl} = 10^9 \text{ N/m}^3$; frequência da força de excitação harmônica, $f = 24 \text{ Hz}$; diferentes valores de amplitude da força, $F_0 = 30 \text{ N}$, $F_0 = 50 \text{ N}$ e $F_0 = 100 \text{ N}$. O interesse é avaliar a eficiência das seguintes bases de redução: (i) $T_2 = [\varphi_0 \quad R \quad R_v^0]$ (19 autovetores do sistema conservativo associado contendo tanto modos de flexão quanto modos de membrana, 1 resíduo estático da força externa, conforme a Eq. (4.6), 14 resíduos viscoelásticos, definidos pela Eq. (4.7); (ii) $T_3 = [T_2 \quad \Delta\tilde{\varphi}]$ (a base, T_2 , e 11 resíduos estáticos dos esforços não lineares, calculados a partir da Eq. (4.12).

A Fig. 6.12 exibe uma precisão razoável entre as respostas dinâmicas obtidas para ambos os modelos completo e reduzido é obtida quando se utiliza a base de redução, T_3 .

Diante da exibição dos resultados observados na Fig. 6.12 é possível perceber que a precisão é menos satisfatória para o caso da base, T_2 , permitindo concluir, assim para o caso de sistemas dinâmicos com não linearidades discretas e com amortecimento, a consideração dos resíduos estáticos associados às não linearidades discretas consiste em uma estratégia, bastante, interessante para a obtenção das respostas dinâmicas aproximadas.

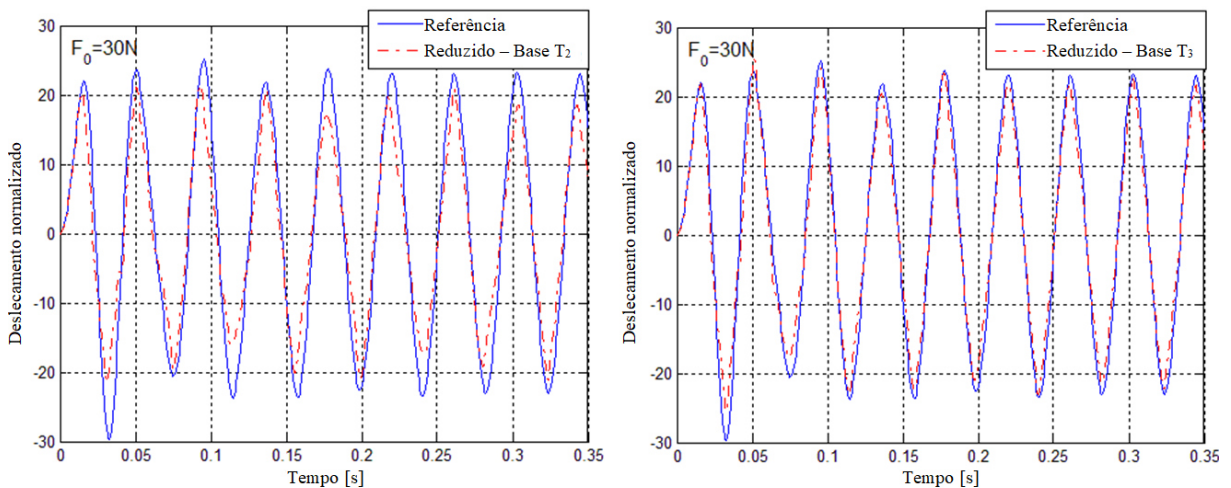


Figura 6.12 – Repostas temporais dos deslocamentos dos sistemas de referência e reduzido para as bases T_2 e T_3 e $F_0 = 30 \text{ N}$ - Sistema viscoelástico não linear.

Entretanto, é importante salientar que esta técnica de redução de modelos de sistemas não lineares baseada no emprego de base modal enriquecidas possui a limitação quanto ao

nível de não linearidades discretas impostas ao sistema. Isto pode ser verificado pela análise dos resultados da Fig. 6.13 para níveis de não linearidades obtidos a partir do gradativo aumento da amplitude de excitação externa, sendo possível notar a dependência da capacidade preditiva da base em relação ao nível de não linearidade imposta ao sistema, por meio da amplitude de excitação externa, $F_0 = 50N$ e $F_0 = 100N$. Diante disso, quanto maior o nível de não linearidade menor é a precisão da aproximação. Isto mostra a degeneração da precisão da base modal enriquecida à medida que o nível de não linearidade se torna elevado, implicando em uma necessidade de atualização dos resíduos conforme o efeito não linear evolui.

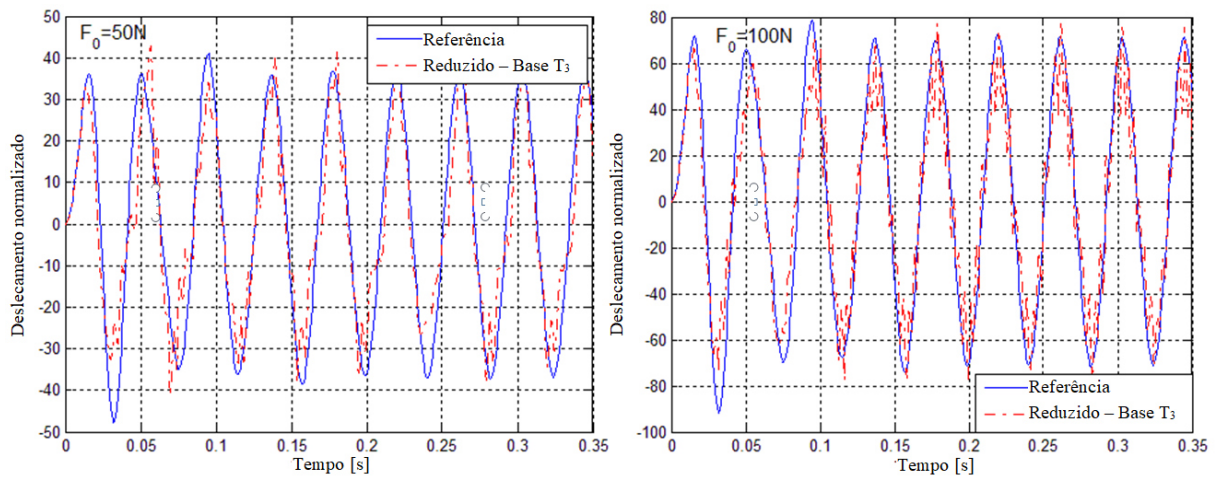


Figura 6.13 – Respostas temporais dos deslocamentos dos sistemas de referência e reduzido para a base T_3 , $F_0 = 50N$ e $F_0 = 100N$ - Sistema viscoelástico não linear.

6.4. Redução de modelos para sistemas com não linearidades geométricas.

Nesta seção, será avaliada a nova base, T_{ACM} , definida na Eq. (4.17) e com as etapas do processo de redução e integração do sistema de equações reduzidas descritas na Fig. 4.4, para sistemas com não linearidades geométricas.

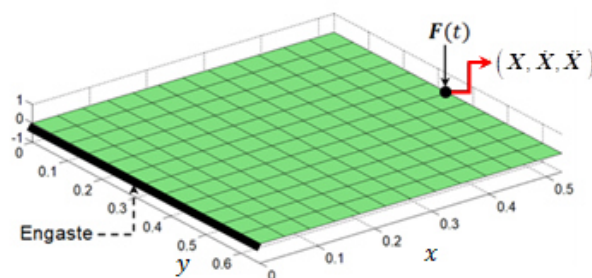


Figura 6.14 – Modelo de EF da placa fina de alumínio engastada-livre.

O modelo de EF a ser utilizado nesta aplicação é o mesmo apresentado na Fig. 6.1, mas para a condição de contorno engastada-livre e frequência de excitação constante igual a $f = 3\text{Hz}$, como ilustrado na Fig. 6.14. Nesta mesma figura está indicado o ponto de aplicação da força externa (do tipo harmônica) e de obtenção das respostas dinâmicas do sistema.

A Fig. 6.15 exibe o deslocamento normalizado em relação à espessura da placa, a velocidade normalizada em relação à velocidade máxima e o diagrama de fase normalizado em ambos os eixos.

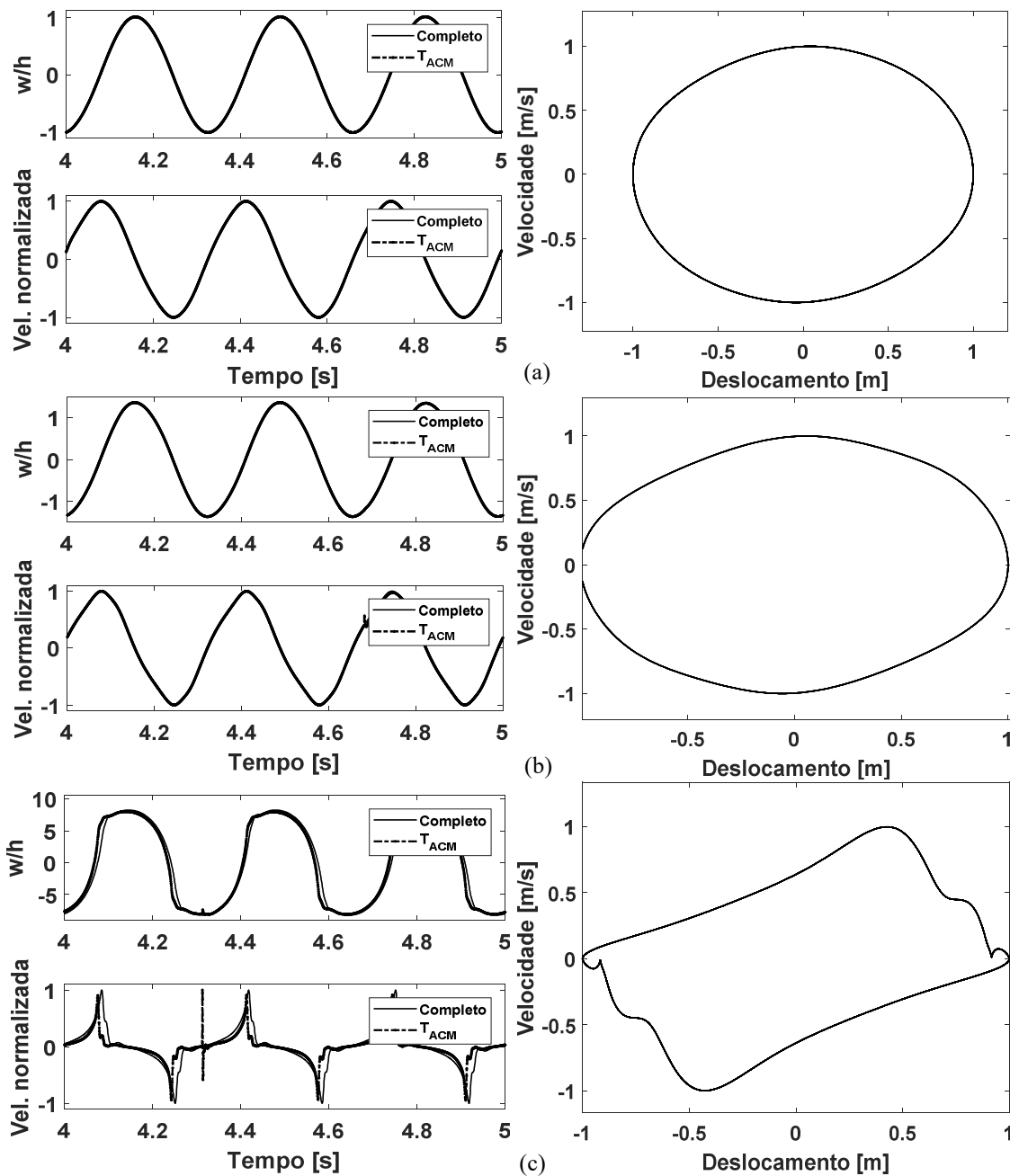


Figura 6.15 – Respostas dos deslocamentos e velocidade, instantânea, dos sistemas completo e reduzido para a base, T_{ACM} : (a) $F_0 = 0,05\text{N}$, (b) $F_0 = 0,1\text{N}$ e (c) $F_0 = 15\text{N}$.

A Fig. 6.15 ilustra a evolução do efeito não linear a partir de diferentes níveis de excitação, a saber: $F_0 = 0,05N$, $F_0 = 0,1N$ e $F_0 = 15N$, considerando a primeira base de transformação definida por $\mathbf{T}_{ACM} = [\varphi_0 \quad \mathbf{R}]$, contendo 20 autovetores do sistema conservativo associado, escolhidos nas proximidades da frequência natural de interesse (nesta caso a primeira) e um resíduo estático de primeira ordem relacionado à força de excitação unitária.

De imediato, pode-se notar a grande eficiência da base, $\mathbf{T}_{ACM}$, proposta neste trabalho para aproximar as respostas dinâmicas de sistemas com não linearidades geométricas. Além disso, percebe-se que o método ACM se mostra eficaz tanto para os casos de comportamento linear, conforme a Fig 6.15(a) e (b), quanto para o caso em que o comportamento não linear, w/h , se torna mais evidente, como mostrado na Fig. 6.15(c).

Pela análise da Fig. 6.15(c) fica também evidente que a partir do momento em que o nível da força aumenta, levando a um nível de não linearidade geométrica, (w/h) , mais significativa, a precisão do método de redução ACM diminui. Nestes casos, o instante de atualização da base ACM (caracterizadas pelos esforços não lineares, $\Delta \mathbf{K}(X)$) não é suficientemente rica com informações sobre o estado (instantâneo) da estrutura.

A Fig. 6.16 permite avaliar a eficiência do método ACM em termos do tempo de processamento relativo, $t_r = (t_{ACM}/t_c) \times 100\%$, para a obtenção das respostas aproximadas via método ACM, t_{ACM} , em comparação com o tempo para a obtenção das respostas do modelo completo, t_c , para diferentes níveis de não linearidade. Nota-se que o ganho de tempo de cálculo em regiões predominantemente lineares do sistema não é relevante, sendo que, para alguns casos se torna até mesmo prejudicial. Porém, em faixas de operação não lineares o método ACM permite constatar um ganho computacional significativo da ordem de até 27% em relação ao tempo de cálculo do modelo completo.

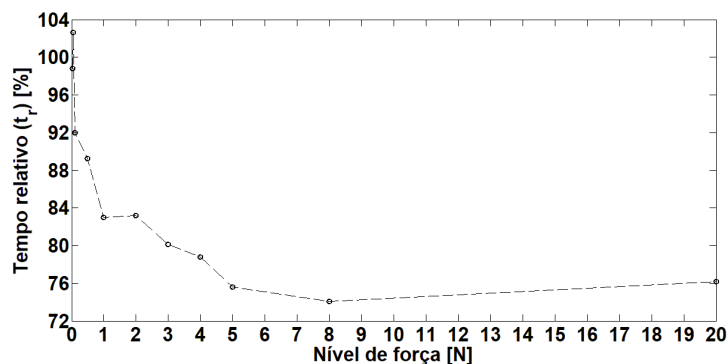


Figura 6.16 – Tempo de cálculo entre os sistemas completo e reduzido pelo método ACM.

Este ganho de tempo ocorre, principalmente, em regiões, predominantemente, não lineares do sistema e, se deve ao procedimento de atualização da base, T_{ACM} . Esta atualização leva em conta a energia de deformação do sistema não linear, conforme a Eq. (4.18) e as etapas de integração mostradas na Fig. 4.4. Neste caso, o interesse é ajustar a base de redução no intuito de obter sempre um mínimo de vetores pelo processo de ortogonalização de Gram-Schmidt (KIRSCH, BOGOMOLNI e SHEINMAN, 2006) em conjunto com identificação dos modos dominantes, de forma que ruídos incorporados à base durante o processo possam ser atenuados, ou até eliminados.

A Fig. 6.17 mostra a evolução da dimensão da base, T_{ACM} , em função do tempo para $F_0 = 0,05N$ e $F_0 = 15N$, sendo responsáveis pela predominância dos comportamentos linear e não linear do sistema, respectivamente. Pode-se notar maior variabilidade da base para o sistema no regime linear ($F_0 = 0,05N$). Isto explica, em partes, o custo computacional elevado do método ACM neste regime de operação.

Para o sistema com comportamento não linear ($F_0 = 15N$), apesar de existir uma grande variabilidade do número de elementos da base ACM, percebe-se maior constância de uma mesma base ao longo do período analisado. Este é um dos fatores mais importantes que contribui para redução no tempo de processamento da resposta aproximada do sistema não linear. Este fato justifica a utilização do fator enérgico definido na Eq. (4.18) do Capítulo IV que estabelece a necessidade ou não da atualização da base redução durante o processo de integração temporal.

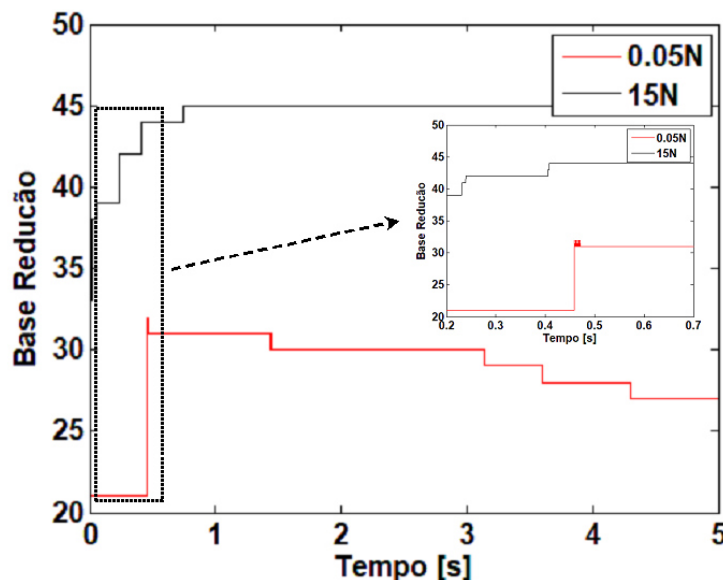


Figura 6.17 – Evolução da base de redução ACM em função do tempo de integração.

Em contrapartida, é possível observar, a partir da Fig. 6.17, períodos temporais (quando o sistema possui comportamento linear) que a base de redução deve sofrer atualizações adivindas do cálculo de energia de forma a adaptar para dimensões inferiores, ocasionando maior variabilidade em determinados lapsos temporais. Isto eleva tempo de processamento do sistema com comportamento linear utilizando a base adaptativa ACM em relação ao tempo de processamento do método completo.

6.5. Sistemas não lineares estocásticos.

Nesta seção, são apresentados alguns resultados das simulações que foram realizadas com o sistema não linear estocástico proposto neste trabalho. Apesar das propriedades físicas e mecânicas do modelo de EF parametrizado poderem ser assumidas como variáveis incertas para efeito de estudo da influência de pequenas perturbações nas variáveis de estado do sistema dinâmico, conforme discutido no Capítulo III, nas simulações realizadas, somente a espessura da placa fina em grandes deslocamentos foi considerada incerta.

6.5.1. Não linearidades geométricas

Para verificar a estratégia de introdução de incertezas no modelo de EF do sistema com não linearidades geométricas, utiliza-se o mesmo modelo de EF da Fig. 6.1(a) com as mesmas propriedades físicas e geométricas (valores nominais), e as mesmas posições de aplicação da força externa e de obtenção da resposta dinâmica. Neste caso, a decomposição das matrizes de EF estocásticas, através do método KL, se deu até a décima ordem para representar a série definida na Eq. (3.1) do Capítulo III, este fator de truncamento foi utilizado com base em trabalhos já disponíveis na literatura, como em Ribeiro e Lima (2015) e Rosa (2016).

Num primeiro momento foi encontrado o número mínimo de amostras, n_a , necessário para se obter uma convergência razoável da resposta no tempo do sistema não linear. Para tanto, foi implementado o método de simulação Hyper Cubo Latino (HCL) que é uma variante do método de Monte Carlo (SCHINOZURA, 1972; RUBINSTEIN, 1981; PAPADRAKAKIS e KOTSOPULOS, 1999). A convergência da solução foi avaliada em termos do valor do erro quadrático médio entre o deslocamento médio, $\bar{w}$, e o deslocamento de cada amostra, $w(\theta)$, conforme a seguinte equação:

$$RMSD = \sqrt{\frac{1}{n_a} \sum_{i=1}^{n_a} |\bar{w} - w_i(\theta)|^2} \quad (6.3)$$

A Fig. 6.18 mostra que a partir de 200 amostras pode-se obter uma convergência razoável da resposta transversal do sistema para vários níveis de não linearidades. Portanto, este será o número de amostras a ser utilizado nas simulações que seguem.

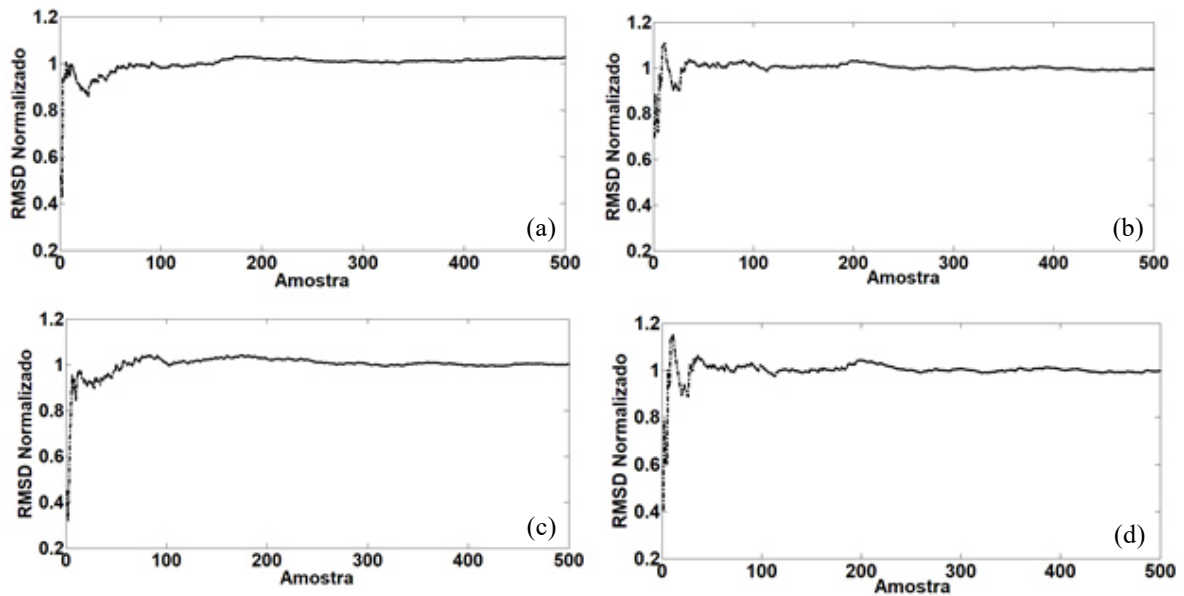


Figura 6.18 – Análise de convergência para dois níveis de força e incertezas na espessura da placa em grandes deslocamentos: (a) 8N, 5%; (b) 8N, 20%; (c) 200N, 5%; (d) 200N, 20%.

A Fig. 6.19 representa as dispersões da resposta transversal aleatória em termos dos valores médios e dos extremos estatísticos (valores máximos e mínimos) para os cenários de incertezas de 5% e 20% e, para os níveis de excitação de 8N e 200N.

Em relação a Fig. 6.19, para ambos os níveis de não linearidade, pode-se constatar, sem dificuldades, à medida que o nível de incerteza (na espessura) aumenta de 5% para 20%, o envelope da solução também aumenta. Entretanto, nota-se maior influência das incertezas no comportamento linear, Fig. 6.19 (a) e (b) em comparação com o comportamento não linear Fig. 6.19 (c) e (d). Isto pode ser explicado pelo fato de que o parâmetro incerto afetar mais fortemente as matrizes de massa e rigidez do sistema conservativo (determinístico e estocástico), tendo em vista que tais fatores produzem contribuições de ordem cúbica nessas matrizes, o mesmo não ocorrendo no caso das matrizes de rigidezes não lineares.

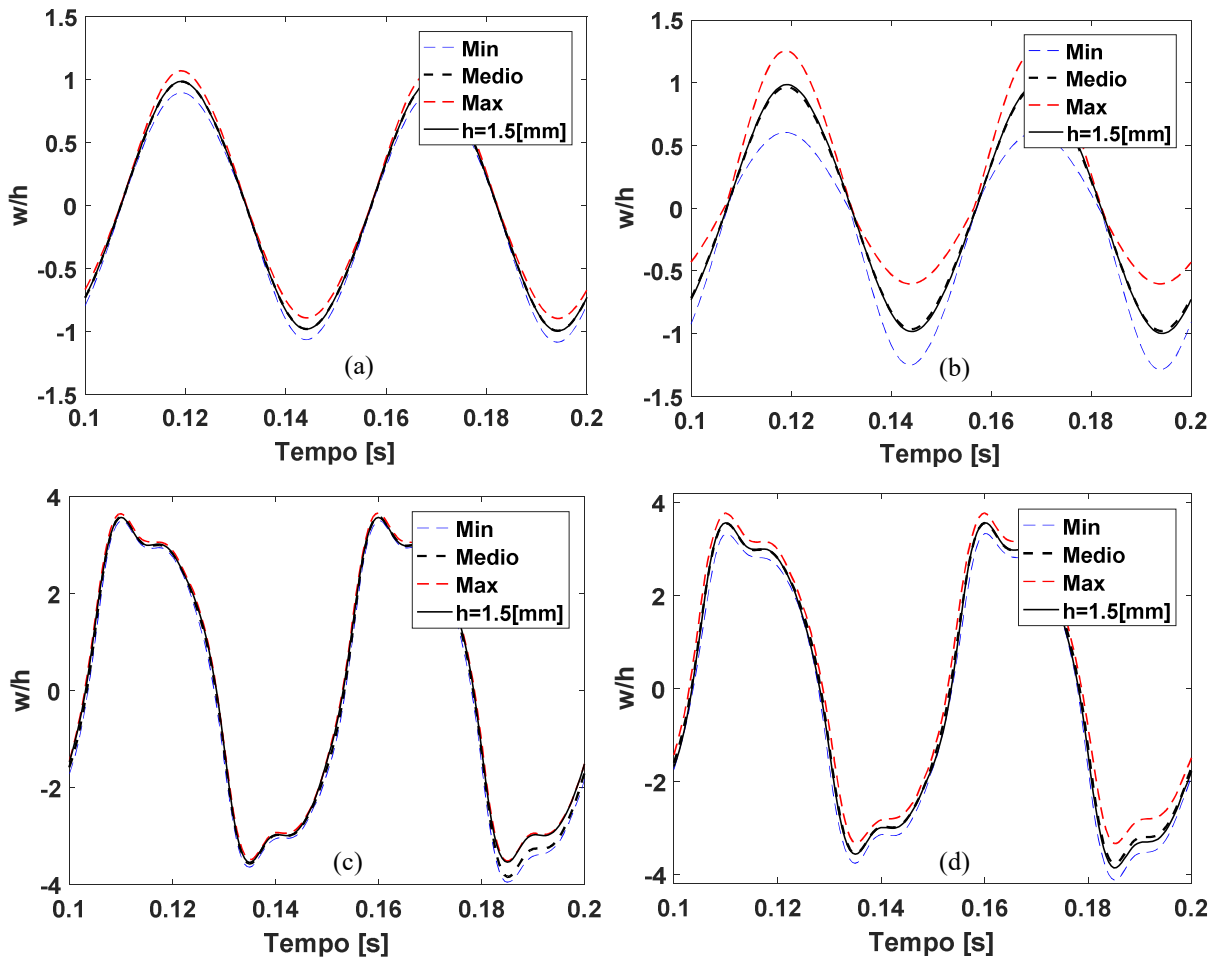


Figura 6.19 – Envelopes das respostas transversais da placa com não linearidades geométricas: (a) 8N, 5%; (b) 8N, 20%; (c) 200N, 5%; (d) 200N, 20%.

A Fig. 6.20 os diagramas de fases normalizados nos dois eixos e, considerando dois níveis de excitação harmônica e incertezas associadas à espessura da placa, de forma que em ambos. De acordo com as Figs. 6.19 e 6.20 é possível verificar maior influência das incertezas para os cenários de comportamento lineares do sistema, pois em ambos os cenários de incertezas simulados as amplitudes maximais dos envelopes relativos ao comportamento linear (considerando um mesmo nível de força) são aproximadamente 11% e 28% superiores quando comparado aos envelopes com comportamento não linear. Novamente, convém mencionar, que isto está associado à origem das não linearidades geométricas modeladas neste trabalho. Como elas são advindas do acoplamento entre as deformações de flexão e membrana da placa fina, é de se esperar que, para obter mudança significativa no comportamento não linear da placa em grandes deslocamentos, uma mudança também significativa deverá ocorrer no parâmetro espessura.

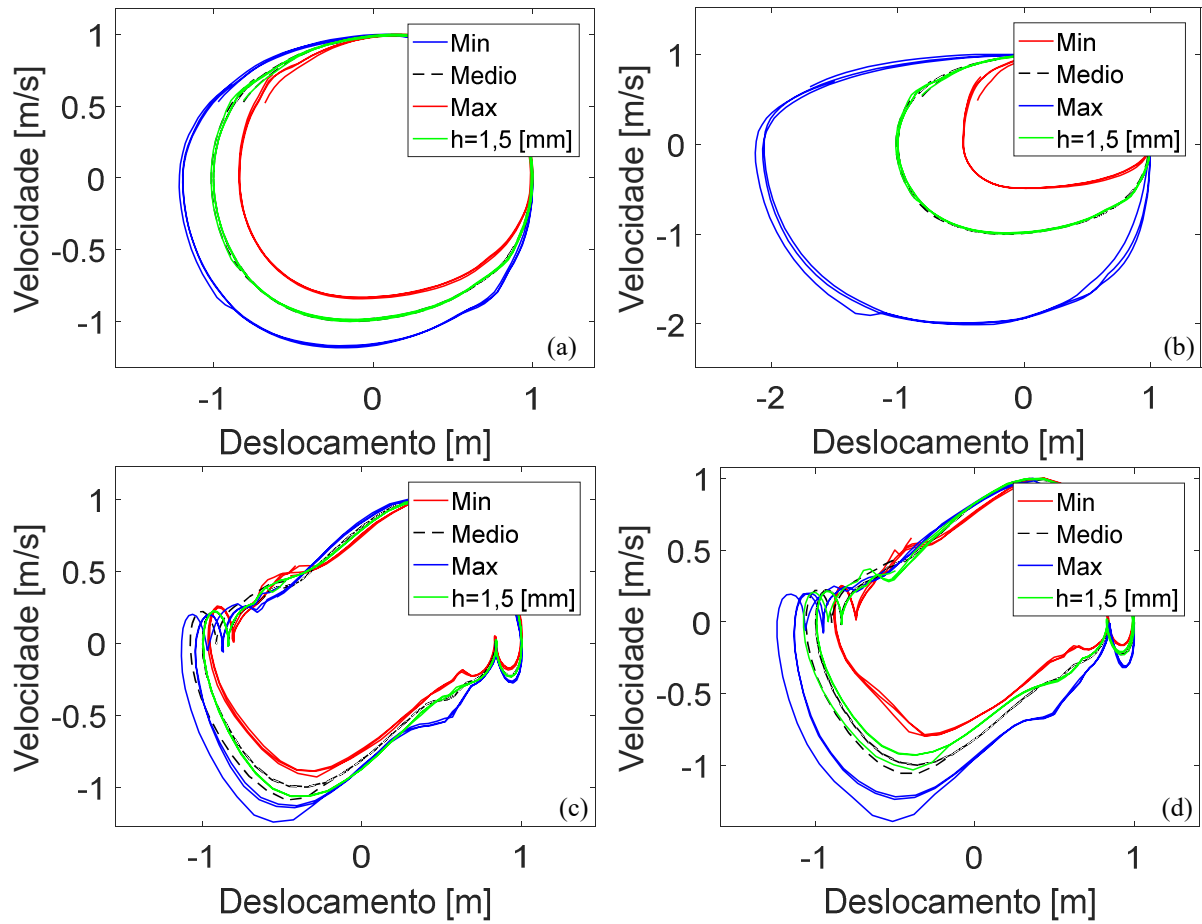


Figura 6.20 – Diagramas de fase da placa estocástica com não linearidades geométricas: (a) 8N, 5%; (b) 8N, 20%; (c) 200N, 5%; (d) 200N, 20%.

A análise das Figs. 6.21 e 6.22 permite concluir sobre o comportamento do sistema não linear em regime de estabilidade para os níveis de força de 8N a 200N, e para as incertezas de 5%, 10% e 20%.

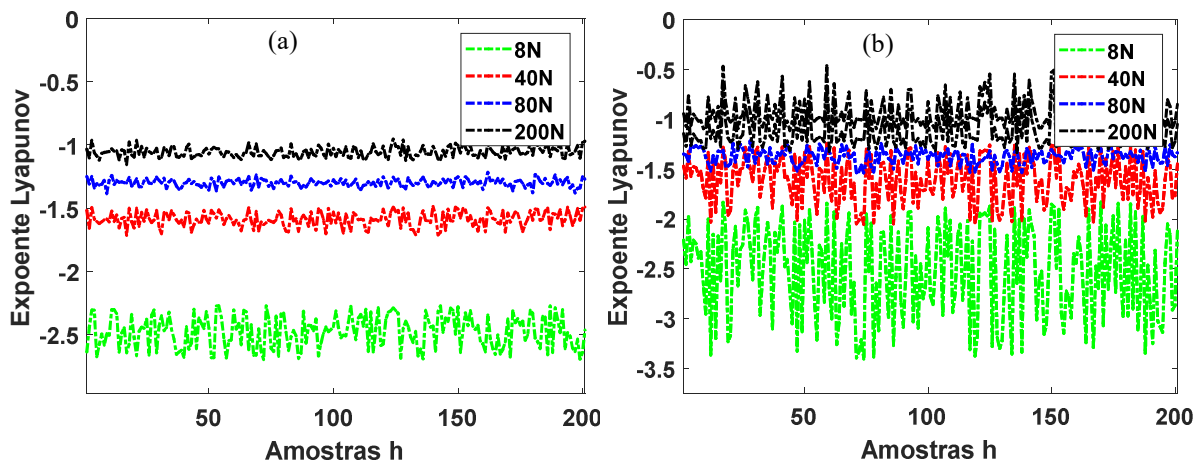


Figura 6.21 – Expoentes de Lyapunov para a placa estocástica com não linearidades geométricas: (a) 5%; (b) 20%.

Conforme pode ser visto nas Figs. 6.21(b) e 6.22(b), apesar do sistema não linear não recair em regiões de instabilidade para os cenários de força e incertezas analisados nesta aplicação, observa-se uma contribuição significativa de ambos os parâmetros no sentido de levar o sistema não linear a regiões de instabilidade.

Em função da impossibilidade de avaliação das respostas aleatórias do sistema não linear estocástico completo, tendo em vista o elevado custo computacional envolvido nas análises (alguns anos de simulação), nesta aplicação foi utilizado o modelo não linear estocástico reduzido através do método ACM.

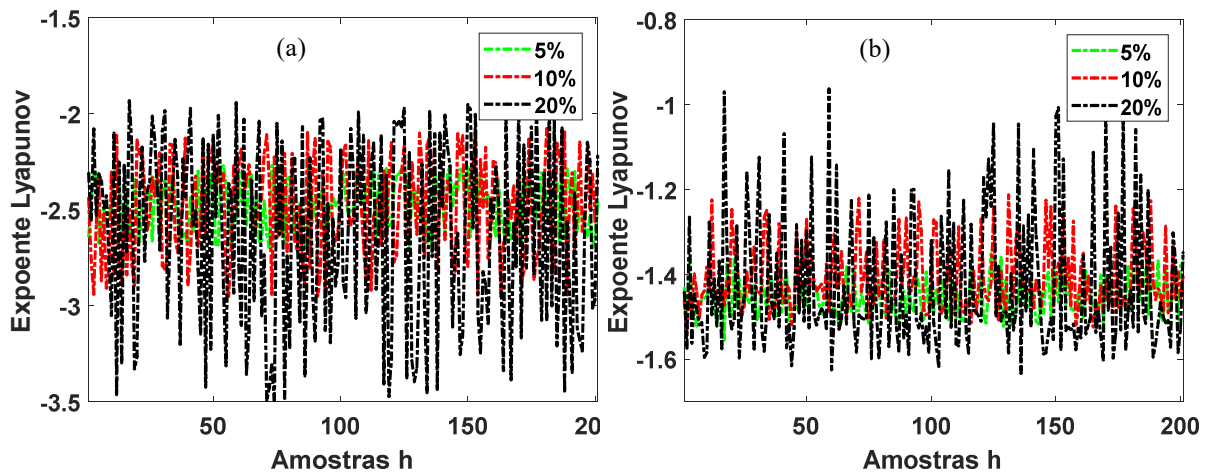


Figura 6.22 – Expoentes de Lyapunov para a placa estocástica com não linearidades geométricas: (a) 8N; (b) 200N.

6.5.2. Não linearidades discretas

Para o caso de aplicações com a placa fina estocástica incorporando não linearidades discretas, foi utilizado modelo discretizado em EF da placa fina mostrada na Fig. 6.23, com as respectivas condições de contorno.

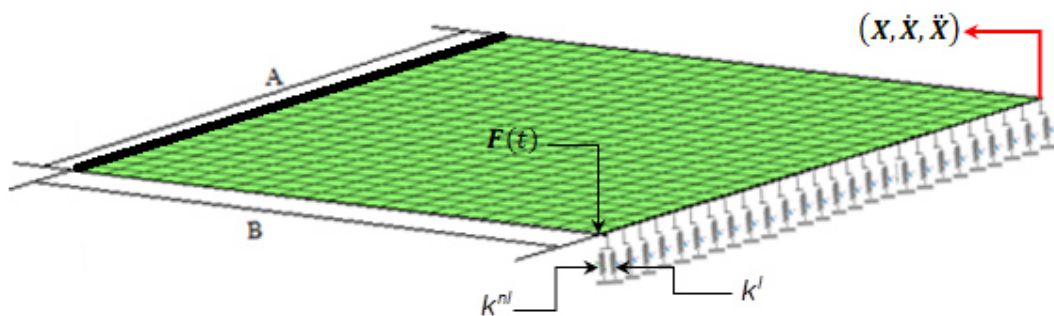


Figura 6.23 – Ilustração do modelo de EF da placa fina com não linearidades discretas.

Neste caso, a placa considera engastamento em um dos bordos e no bordo oposto, são aplicadas 26 (vinte e seis) molas com características não lineares para representar as condições de contorno não lineares, como já discutido na Seção 6.3 deste capítulo. Na mesma figura, são mostrados ainda os pontos de aplicação da força harmônica com frequência constante, $f=11Hz$, e o ponto de obtenção das respostas dinâmicas aleatórias. Os valores nominais dos parâmetros que definem as molas não lineares são os mesmos assumidos na Seção 6.3, $k^l=100N/m$ e $k^{nl}=10^9 N/m$, e as propriedades físicas e geométricas da placa são as mesmas definidas na Tab. 6.1 da Seção 6.1, exceto para espessura considerada de 3,0 [mm].

Da mesma forma que na seção anterior, num primeiro momento foi determinado o número mínimo de amostras necessárias para obter uma convergência razoável da resposta aleatória para dois valores de incerteza (5% e 20%) no parâmetro não linear das molas e dois níveis de força ou não linearidade (1N e 20N). Os resultados da Fig. 6.24 evidenciam que, para esta aplicação do sistema estocástico com não linearidade discreta, o número mínimo de amostras para se chegar a uma convergência razoável é da ordem de 1000 amostras. Portanto, mais uma vez fica claro a necessidade de utilização dos métodos de redução propostos neste trabalho (modal enriquecido) para permitir as avaliações deste sistema não-linear estocástico na presença de incertezas.

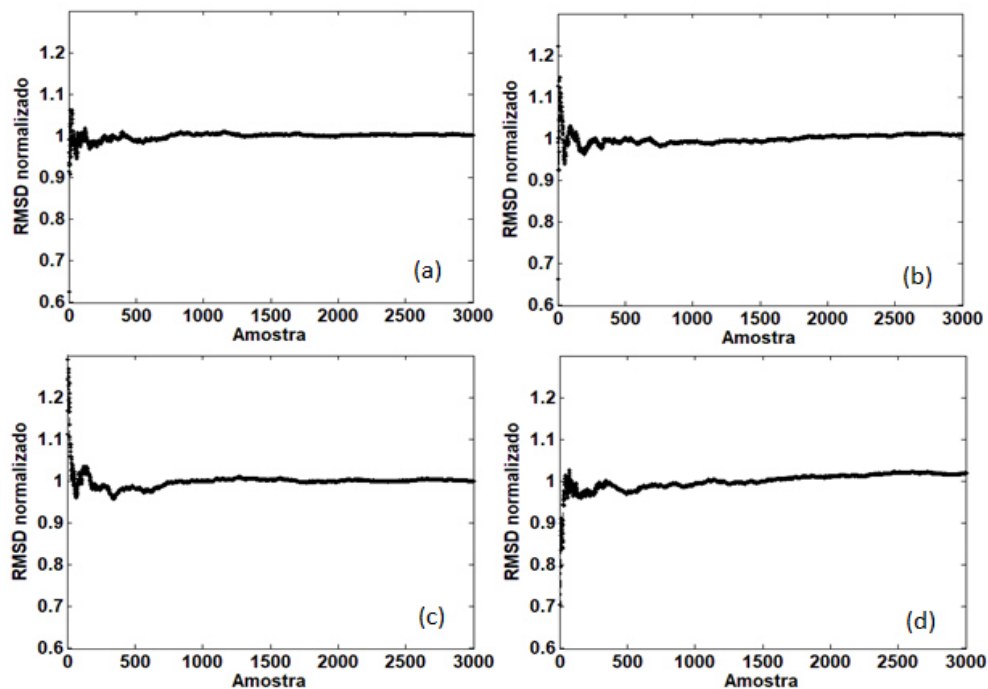


Figura 6.24 – Análise de convergência para dois níveis de força e incertezas na rigidez não linear das molas: (a) 1N, 5%; (b) 1N, 20%; (c) 20N, 5%; (d) 20N, 20%.

A Fig. 6.25 ilustra os envelopes das respostas aleatórias do sistema estocástico para as incertezas de 5% e 20% na rigidez não linear das molas e para o nível de excitação harmônica de 1N, buscando proporcionar o subsídio para analisar a influencia do fator de incerteza em relação ao comportamento linear do sistema.

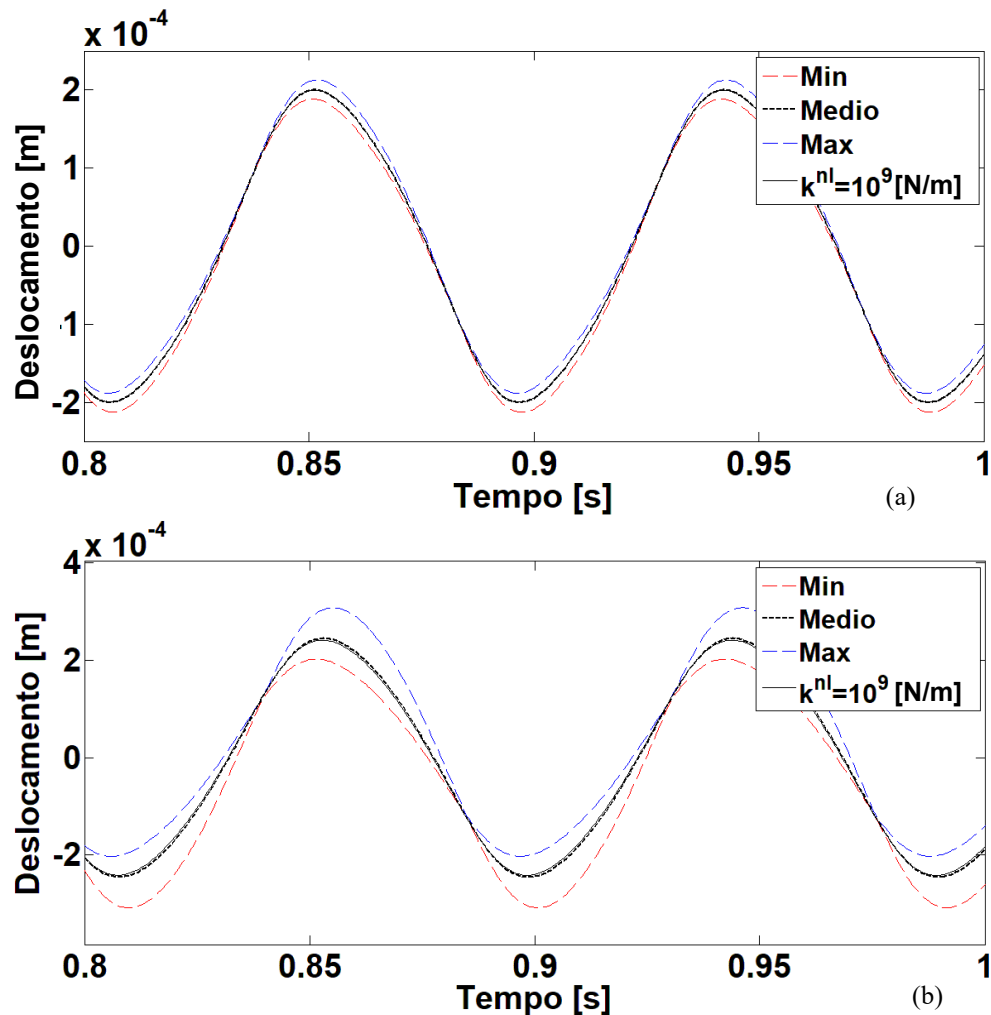


Figura 6.25– Envelopes das respostas transversais da placa com não linearidades discretas para uma força de 1N: (a) 5%; (b) 20%.

A Fig. 6.26 mostra os envelopes dos diagramas de fase para níveis de incerteza de 5% e 20% considerando a força de excitação harmônica com amplitude de 1N, esta figura visa mostrar a configuração do comportamento linear do sistema.

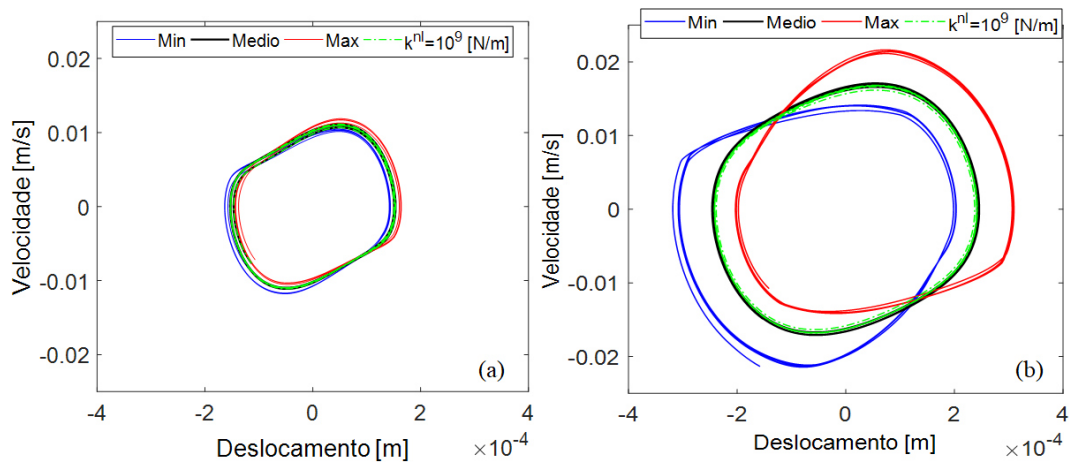


Figura 6.26 – Diagramas de fase da placa estocástica com não linearidades discretas para a força de 1N: (a) 5%; (b) 20%.

As Figs. 6.27 e 6.28 busca evidenciar os envelopes de respostas dos deslocamentos e diagrama de fase para os mesmos níveis de incerteza das Figs. 6.25 e 6.26, considerando o nível de excitação harmônica de 20N, de forma a caracterizar o comportamento não linear do sistema.

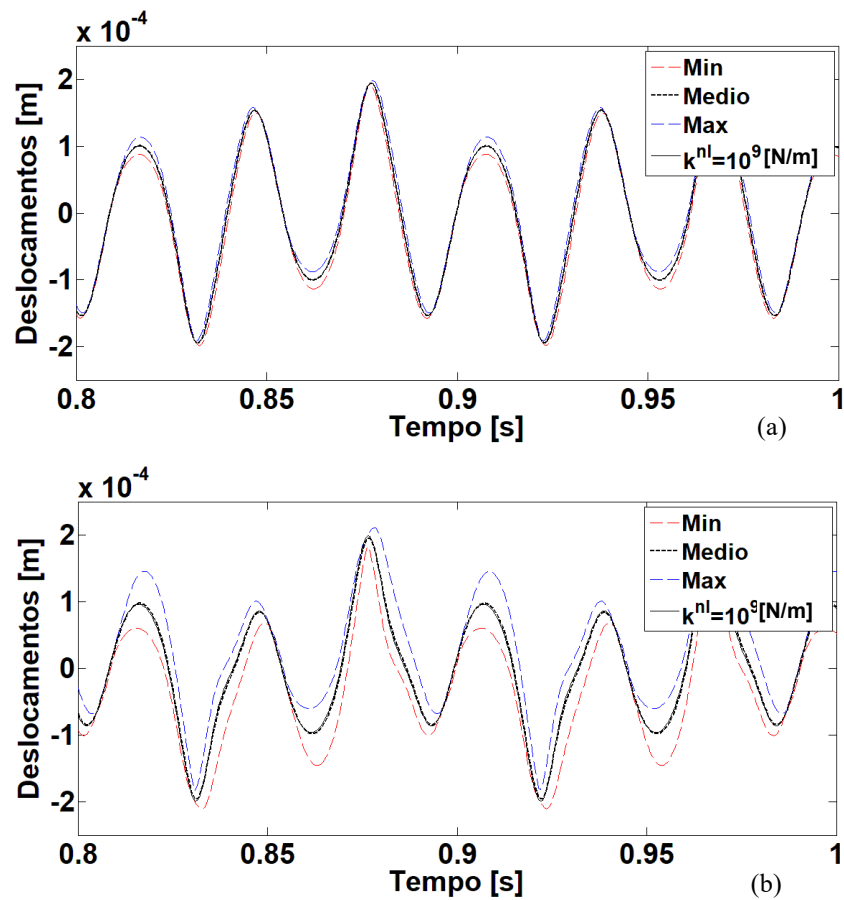


Figura 6.27– Envelopes das respostas transversais da placa com não linearidades discretas para uma força de 20N: (a) 5%; (b) 20%.

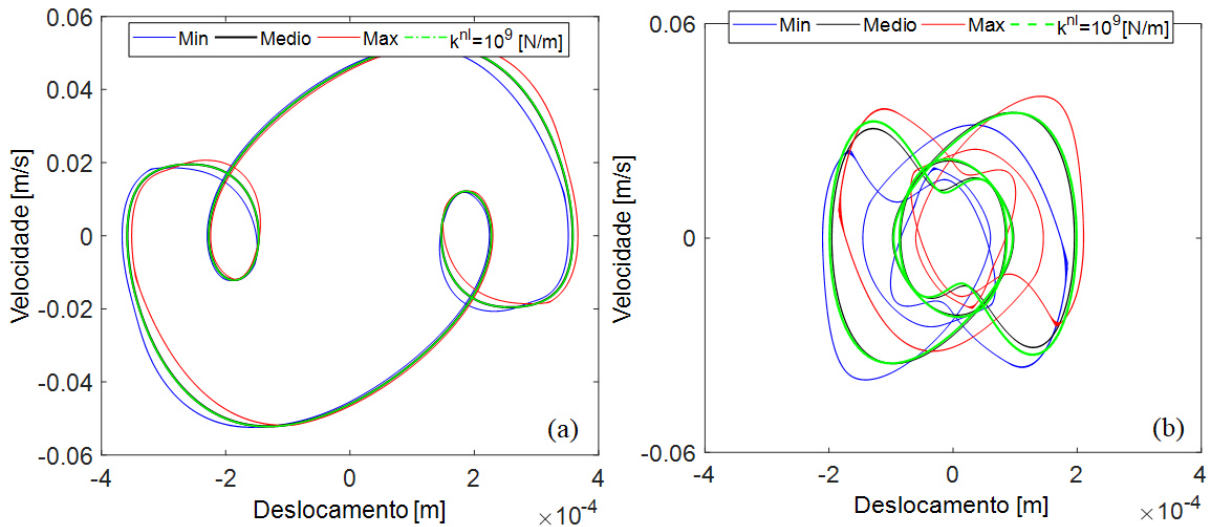


Figura 6.28 – Diagramas de fase da placa estocástica com não linearidades discretas para a força de 20N: (a) 5%; (b) 20%.

Os resultados evidenciam uma influência significativa das incertezas no parâmetro não linear sobre a resposta aleatória do sistema estocástico. Entretanto, os diagramas de fase da Fig. 6.28 ilustram o comportamento não linear do sistema a partir do nível de excitação aplicado, em contrapartida é possível observar na Fig. 6.28(b) uma singularidade no efeito não linear. Tal singularidade pode estar associada à influência que o fator incerto acarreta no sistema em comportamento não linear ou devido o sistema estar operando no cenário de instabilidade. Diante disso, é exposto na Fig. 6.29 os expoentes de Lyapunov do sistema considerando os níveis de incerteza de 5% e 20% para duas amplitudes de excitação harmônica, 1N e 20N.

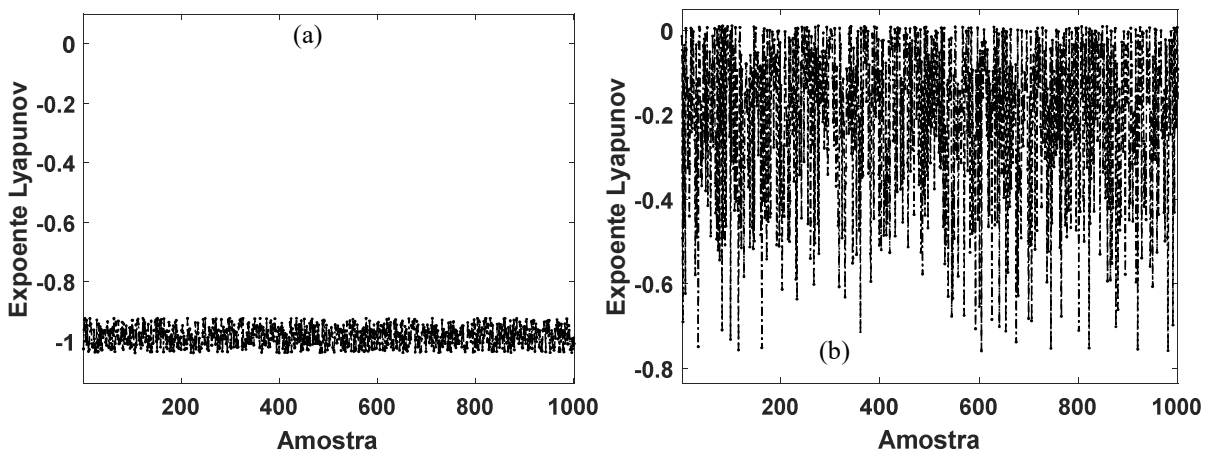


Figura 6.29 – Expoentes de Lyapunov para a placa estocástica com não linearidades discretas: (a) 1N, 5%; (b) 20N, 20%.

A Fig. 6.29(b) deixa evidente que o sistema opera em uma região limítrofe de estabilidade, contudo pode-se afirmar de acordo com o método do expoente Lyapunov que para as incertezas e níveis de excitações considerados o sistema possui comportamento estável. Isto mostra que a singularidade observada na Fig. 6.28(b) é decorrente da influência da incerteza no comportamento não linear do sistema.

Diante disso, é possível afirmar que a rigidez não linear das molas produz influência direta na força não linear associada ao sistema dinâmico, conforme estabelece a Eq. 4.10, Seção 4.2, Capítulo IV. Porém, deve-se ressaltar que o cenário de incerteza refletido nas Figs. 6.27(b) e 6.27(b) coloca o sistema em uma região limiar de estabilidade, como mostrado na Fig. 6.29(b).

CAPÍTULO VII

CONCLUSÕES GERAIS E PERSPECTIVAS FUTURAS

7.1. Resumo e avaliação.

Este trabalho de tese representa uma contribuição aos métodos de redução de modelos para sistemas dinâmicos não lineares estocásticos com e sem amortecimento. As não linearidades investigadas neste trabalho foram as seguintes: (i) não linearidades geométricas, onde sistemas estruturais do tipo placas finas em grandes deslocamentos e rotações moderadas foram modeladas pelo método dos elementos finitos; (ii) não linearidades localizadas, onde molas discretas com características não lineares foram introduzidas em modelos de EF de sistemas dinâmicos para representar, por exemplo, condições de contorno mecânicas. Além disso, este trabalho é o resultado de uma parceria em pesquisa entre o Laboratório de Mecânica de Estruturas (LMEst) da Faculdade de Engenharia Mecânica da UFU e o Laboratoire de Mécanique Appliquée FEMTO-LMARC, em Besançon na França.

Na primeira parte do trabalho, foram apresentadas as modelagens por elementos finitos determinística e estocástica de placas finas em grandes deslocamentos através da formulação da matriz de rigidez não linear tangente. Para a integração no domínio do tempo das equações dinâmicas dos sistemas não lineares determinísticos e estocásticos, foi utilizado o método de Newmark combinado com o Newton-Raphson, conforme mostrados, respectivamente, nas Figs. 2.4 e 3.1. Para melhorar a eficiência do método de integração, foram definidos critérios para avaliar a convergência e a estabilidade do sistema não linear. Neste caso, o uso do método de discretização de KL para a obtenção do sistema não linear estocástico é vista como uma das contribuições deste trabalho.

Na sequência, foram propostos dois novos métodos de redução de modelos para lidar com sistemas dinâmicos não lineares determinísticos e/ou estocásticos, a saber: (i) o método

modal baseado na construção de bases enriquecidas com resíduos estáticos de primeira ordem associados aos esforços presentes no sistema dinâmico não linear (forças externas, forças de amortecimento, esforços não lineares, etc.), conforme descrito na Fig. 4.3; (ii) método das aproximações combinadas melhorado (ACM), através da construção de uma base de redução a ser atualizada constantemente durante o processo de integração, conforme um critério de energia de deformação utilizado para melhorar a eficiência do método de redução, principalmente para comportamentos altamente não lineares, como mostrado no diagrama da Fig. 4.4 (BELONSI *et al.* 2015). O uso de métodos de redução de bases adaptativas exige a representação das respostas do sistema dinâmico em termos de todos os gdl's e reduzidos (e vice-versa) a partir da evolução da base, isso acarreta a utilização de uma transformação de base inversa. Diante disso, neste trabalho utilizou-se uma técnica de transformação de base inversa considerando os gdl's reduzidos, isto também contribui com a diminuição do tempo de processamento do sistema. Além de serem, também, grandes contribuições deste trabalho, a redução de modelos é imprescindível para as análises numéricas dos sistemas não lineares estocásticos mais complexos de interesse industrial, onde um grande número de avaliações das equações do sistema são normalmente requeridas para a obtenção dos envelopes das soluções.

Os resultados das simulações numéricas apresentadas neste trabalho permitiram concluir, primeiramente, acerca da eficiência da metodologia de modelagem por EF de sistemas dinâmicos não lineares determinísticos e/ou estocásticos e dos métodos de redução de modelos de sistemas não lineares amortecidos ou não. Neste sentido, as principais conclusões foram:

1) para sistemas viscoelásticos contendo não linearidades discretas, os resultados mostraram que, dependendo dos níveis de perturbações estruturais e não linearidades localizadas, a redução do sistema não linear amortecido empregando a base modal de Ritz enriquecida com resíduos dos esforços não lineares e das forças de amortecimento pode não ser suficiente para aproximar as respostas dinâmicas dos sistemas não lineares. Neste caso, sugere-se a utilização de uma base adaptativa para considerar as perturbações locais para uma determinada faixa de operação do sistema (LIMA *et al.* 2015);

2) foi constatado também que a eficiência da base adaptativa ACM proposta neste trabalho para sistemas contendo não linearidades geométricas é garantida para o seguinte nível de não linearidade geométrica, $w/h < 3,5$. Portanto, há que se considerar esta relação de

não linearidade que define o limite de aplicação do método ACM proposto aqui para reduzir sistemas não lineares em grandes deslocamentos;

3) em termos do custo computacional de cálculo, pode-se concluir que para cenários predominantemente lineares do sistema não linear, o ganho de tempo com o uso da base adaptativa ACM é praticamente irrelevante. Porém, para faixas de operação não lineares dos sistemas, a base ACM leva a ganhos significativos da ordem de até 27%, dependendo da complexidade do sistema e do nível de não linearidade. Claro que para sistemas não lineares, o maior custo de cálculo está associado à avaliação da força não linear. Neste caso, o critério da energia de deformação do sistema e da avaliação da série de Taylor da natureza das modificações do sistema não linear propostos aqui se mostraram bastantes eficientes para verificar a necessidade ou não de atualização da base durante o processo de integração e redução, conforme a Fig. 4.4. Em resumo, isto permite acelerar o processo de redução e obtenção das aproximações;

4) os modelos não lineares estocásticos reduzidos com a base ACM permitiram a obtenção dos envelopes das respostas dos sistemas não lineares na presença de incertezas na espessura. Neste caso, verifica-se maior influência das incertezas no cenário de predominância linear em relação ao predominantemente não linear. Isto pode ser explicado pela relação do parâmetro espessura no termo fonte das não linearidades geométricas (acoplamento entre flexão e membrana);

5) já os modelos com não linearidades localizadas reduzidos através da base modal enriquecida com resíduos dos esforços não lineares, externos e de amortecimento, permitiram identificar uma maior influência das incertezas nos envelopes do cenário de predominância não linear em comparação com o cenário linear. Isto pode ser explicado pela dependência direta da força não linear em relação ao parâmetro aleatório;

7.2. Sugestões de trabalhos futuros.

Este trabalho de tese proporcionou a idealização de inúmeros outros trabalhos relacionados, que podem dar continuidade ao já realizado. Alguns dos principais temas são listados abaixo:

1) extensão da modelagem por elementos finitos de placas finas para o caso de placas espessas e placas sanduíches viscoelásticas contendo não linearidades geométricas e na presença de incertezas paramétricas;

2) verificação da eficiência do método de redução de modelos ACM: (i) para lidar com sistemas dinâmicos não lineares de grande porte de interesse industrial, como painéis aeronáuticos em grandes deslocamentos; (ii) sistemas aeroelásticos não lineares;

3) emprego do método multimodal de Galerkin combinado com o método do balanço harmônico para a obtenção das respostas dinâmicas de sistemas não lineares no domínio da frequência;

4) emprego de técnicas de otimização multiobjetivo combinadas com o método ACM para sistemas não lineares na presença de incertezas paramétricas com vistas à obtenção de um projeto robusto de sistemas não lineares em geral;

5) avaliar a influência nos sistemas dinâmicos não lineares estocásticos a partir do fator de truncamento e do tipo de função de covariância estabelecidos via método KL no desenvolvimento da série de Taylor para a obtenção das auto-funções e autovalores;

6) estabelecimento de um critério para avaliar a necessidade ou não do cálculo dos deslocamentos instantâneos do sistema não linear durante a integração, para fins de estabelecer regiões de linearidades do sistema (caso existam) de forma a evitar a atualização das matrizes de rigidez não lineares em todos os instantes de tempo;

7) avaliar a possibilidade de utilizar uma Unidade de Processamento Gráfico (GPU) de forma a obter as respostas dos sistemas estocásticos reduzidos em domínio temporal.

Bibliografia

ALLIGOOD, K.; SAUER, T.; YORKE, J. A. **Chaos: an introduction to dynamical systems**. 1. ed. New York: Springer Verlag, 1997. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-59281-2>

ALVIN, K. F. Kleiber M. and Hien, T. D. **American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal**, v. 35, 1998.

BALMÈS, E.; GERMÈS, S. **Analysis and design tools for structures damped by Viscoelastic materials**. International Modal Analysis Conference. [S.l.]: [s.n.]. 2002.

BELONSI, M. H. et al. **An efficient time-domain finite element model reduction method for nonlinear systems**. 23rd ABCM International Congress of Mechanical Engineering. Rio de Janeiro, RJ, Brazil: [s.n.]. 2015.

BENAROYA, H.; REHAK, M. Finite element methods in probabilistic structural analysis: A selective review. **Applied Mechanics Reviews**, v. 41, p. 201-213, 1988. <https://doi.org/10.1115/1.3151892>

BORGES, R. A.; LIMA, A. M. G.; STEFFEN JR., V. Robust optimal design of a nonlinear dynamic vibration absorber combining sensitivity analysis. **Shock and Vibration**, v. 17, n. 4, 5, p. 507-520, 2010.

CAETANO, E. D. S. **Identificação Experimental de Parâmetros Dinâmicos em Sistemas Estruturais**. Universidade do Porto. Porto, Portugal, p. 234. 1992.

CASTILLO, E. F.; CRUCHAGA, M. A. Experimental vibration analysis for a 3D scaled model of a three-floor steel structure. **Latin American Journal of Solids and Structures**, Rio de Janeiro, v. 9, n. 5, 2012.

CUNHA, A.; SAMPAIO, R. Effects of a Random Cubic Spring on the Longitudinal Dynamics of a Bar Excited by a Gaussian White Noise. **Proceedings of the 2nd International Symposium on Uncertainty Quantification and Stochastic Modeling**, Rouen, France, 23 June 2014.

DE LIMA, A. F. R.; DE LIMA, A. M. G.; BORGES, R. A. SIMULAÇÃO NUMÉRICO-COMPUTACIONAL DE PLACAS FINAS EM GRANDES DESLOCAMENTOS. **Blucher Mathematical Proceedings**, 1, 2015. 886-893.

DESSOMBZ, O. et al. Analyse Dynamique de Structures Comportant des Paramètres Incertains. **Journal of Sound and Vibration**, v. 239, p. 949-968, 2001. <https://doi.org/10.1006/jsvi.2000.3191>

DEVANEY, R. **An Introduction to Chaotic Dynamical Systems**. 2. ed. Redwood: Addison-Wesley, 1989.

DINIS, L. M. J. S. **Teoria Classica das Placas Finas**. Porto. 2002.

DOKAINISH, M. A.; SUBBARAJ, K. A Survey of Direct Time-Integration Methods in Computacional Structural Dynamics. **Computers and Structures**, v. 32, 1989.

DRAKE, M. L.; SOOVERE, J. A design guide for damping of aerospace structures. **Proceedings of vibration damping workshop**, Ohio, 1984.

DUVAUT, G.; LIONS, J. **Les Inéquations em mécanique et en physique**. [S.l.]: [s.n.], 1972.

FLORIAN, A. An efficient sampling scheme: updates Latin Hypercube sampling. **Probabilistic Engineering Mechanics**, v. 7, p. 123-130, 1992. [https://doi.org/10.1016/0266-8920\(92\)90015-A](https://doi.org/10.1016/0266-8920(92)90015-A)

FONSECA JUNIOR, L. A. **Técnica de redução de modelos improved reduced system enriched aplicada ao estudo do comportamento de sistemas mecânicos não lineares**. Universidade Federal de Goiás - Mestrado em Modelagem e Otimização. Catalão, p. 121. 2016.

GERGES, Y. **Méthodes de reduction de modèles en vibroacoustique non-linéaire**. Besançon: [s.n.], 2013.

GHANEM, R. G.; KRUGER, R. M. Numerical solution of spectral stochastic finite element system. **Computers Methods Applied Mechanics Engineering**, v. 129, p. 289-303, 1996. [https://doi.org/10.1016/0045-7825\(95\)00909-4](https://doi.org/10.1016/0045-7825(95)00909-4)

GHANEM, R. G.; SPANOS, P. D. **Stochastic Finite Elements: A Spectral Approach**. New York: Spring-Verlag, 1991.

GONÇALVES, L. A. **Um Estudo sobre a Transformada Rápida de Fourier e seu uso em Processamento de Imagens**. URGs-Instituto de Matemática. Porto Alegre. 2004.

GUEDRI, M. et al. **Eléments Finis Viscoélastiques Stochastiques pour la Conception Robuste des Structures Mécaniques**. 8 Colloque National en Calcul des Structures (GIENS). [S.I.]: [s.n.]. 2007.

IBRAHIM, R. A. Structural dynamics with parameter uncertainties. **Applied Mechanics Reviews**, v. 40, p. 309-328, 1987. <https://doi.org/10.1115/1.3149532>

IMAN, R. L.; CONOVERS, W. J. Small sample sensitivity analysis techniques for computer models, with an application to risk assessment. **Communications Statistics**, v. A9, p. 1749-1842., 1980. <https://doi.org/10.1080/03610928008827996>

JIANG, D.; PIERRE, C.; SHAW, S. W. Nonlinear normal modes for vibratory systems under harmonic excitation. **Journal of Sound and Vibration**, v. 288, p. 791-812, 2005. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2005.01.009>

KIRCH, U.; LIU, S. Exact structural reanalysis by a first-order reduced basis approach. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 10, n. 3, p. 153-158, 1995.

KIRSCH, U.; BOGOMOLNI, M. Nonlinear and dynamic structural analysis using combined approximations. **Computers and Structures**, v. 85, p. 566-578, 2007. <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2006.08.073>

KIRSCH, U.; BOGOMOLNI, M.; SHEINMAN. Nonlinear dynamic reanalysis of structures by combined approximations. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, v. 195, p. 4420-4432, 2006.

KLEIBER, M.; HIEN, T. D. **The stochastic finite element method, basic perturbation technique and computer implementation**. 1. ed. [S.I.]: John Wiley & Sons, 1992.

KOROISHI, E. H. et al. Stochastic Modeling of Flexible. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, Rio de Janeiro, v. 34, p. 574-583, 2012.

KRIFA, M. et al. **INVESTIGATION OF THE LIMITS OF THE MODAL DAMPING ASSUMPTION FOR STRUCTURES WITH NONLINEAR LOCALIZED DAMPERS**. DINAME 2017 - Proceedings of the XVII International Symposium on Dynamic Problems of Mechanics. São Sebastião - São Paulo - Brazil: [s.n.]. 2017.

LEI, Z.; QIU, C. Neumann dynamic stochastic finite element method of vibration for structures with stochastic parameters to random excitation. **Computers and Structures**, v. 77, p. 651-657, 2000. [https://doi.org/10.1016/S0045-7949\(00\)00019-5](https://doi.org/10.1016/S0045-7949(00)00019-5)

LIMA, A. M. G. Modélisation et Optimisation Robuste de l'amortissement Viscoélastique de Systèmes Mécaniques. **Université de Franche-Comté**, Besançon, 2007.

LIMA, A. M. G. et al. Sensitivity Analysis of Viscoelastic Structures. **Sock and Vibration**, v. 13, p. 545-558, 2006. <https://doi.org/10.1155/2006/917967>

LIMA, A. M. G. et al. Component mode synthesis combining ribust enriched Ritz approach for viscoelastically damped structures. **Engineering Structures**, v. 32, p. 1479-1488, 2010. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2010.01.028>

LIMA, A. M. G. et al. A time-domain finite element model reduction method for vis-coelastic linear and nonlinear systems. **Latin Americam Journal of Solids and Structures**, n. 6, p. 1182 - 1201, 2015.

LORENZ, E. **A Essência do Caos**. 1. ed. Brasília: UnB, 1993.

LORENZ, E. N. Deterministic Nonperiodic Flow. **Journal of the Atmospheric Sciences**, v. 20, p. 130-141, 1963. [https://doi.org/10.1175/1520-0469\(1963\)020<0130:DNF>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0469(1963)020<0130:DNF>2.0.CO;2)

MAIA, N. M. M.; MONTALVÃO E SILVA, J. M. **Theoretical and experimental modal analysis**. England: Reserch Studies Press, 1997.

MARVERN, L. E. **Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium**. New Jersey: Englewood Chffs, 1969.

MATTHIES, G. et al. stochastic finite elements. **Uncertainties in probabilistic numerical analysis of structures and solids**, 1997. 286-336.

NASHIF, A. D.; JONES, D. I. G.; HENDERSON, J. P. **Vibration damping**. 1. ed. New York: John Wiley & Sons, 1985.

NEWMARK, N. A method of computation for structural dynamics. **Journal of Vibration Acoustics**, v. 85, p. 67-94, 1959.

OHAYON, R. Linear vibrations of structures coupled with an internal fluid. **Eccomas School**, 3, 2006.

PAPADRAKAKIS, M.; KOTSOPULOS, A. Parallel solution methods for stochastic finite element analysis using Monte Carlo Simulation. **Computers Methods Applied Mechanics Engineering**, v. 168, p. 305-320, 1999. [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(98\)00147-9](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(98)00147-9)

PETERSON, L. **Newton's clock: chaos in the solar system**. 1. ed. New York: Freeman, 1993.

POINCARÉ, H. J. Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique. **Acta Mathematica**, 13, 1890.

PURCINA, A. B. **ANÁLISE DE ESTABILIDADE EM SISTEMAS MECÂNICOS NÃO LINEARES COM VISTAS A ATENUAÇÃO DE VIBRAÇÕES**. Universidade Federal de Goiás. Catalão, p. 81. 2016.

RASBAND, S. N. **Chaotic Dynamics of Nonlinear Systems**. 1. ed. New York: Dover Publications, 1990.

RIBEIRO, L. P.; LIMA, A. M. G. **Stochastic Modeling of a Five-Layer Composite Beam**. COBEM - 23rd ABCM International Congress of Mechanical Engineering. Rio de Janeiro: [s.n.]. 2015.

RITTO, T. G. **Análise de Vibrações de Sistemas Lineares e Não-Lineares no Contexto da Formulação Fraca, Análise Modal e Decomposição de Karhunen-Loève**. Rio de Janeiro: [s.n.], 2005.

ROSA, U. L. **ANÁLISE DE FADIGA DE SISTEMAS ESTOCÁSTICOS SUBMETIDOS A CARREGAMENTOS ALEATÓRIOS MULTIAXIAIS**. Universidade Federal de Uberlândia. Uberlândia, p. 101. 2016.

RUBINSTEIN, R. Y. **Simulation and the Monte Carlo Method**. New York: John Wiley and Sons, 1981. <https://doi.org/10.1002/9780470316511>

SAVI, M. A. Caos em sistemas mecânicos. **Congresso de Dinâmica, Controle e Aplicações da SBMAC**, São José do Rio Preto - SP, 2002.

SAVI, M. A. **Dinâmica Não-Linear e Caos**. 1. ed. Rio de Janeiro: E-papers, 2006.

SAVI, M. A.. **Introdução à Dinâmica Não-linear e Caos**. 1. ed. Rio de Janeiro: E-papers, 2010.

SCHINOZURA, M. Monte Carlo Solution of Structural dynamics. **Computers and Structures**, v. 2, p. 855-874, 1972. [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(72\)90043-0](https://doi.org/10.1016/0045-7949(72)90043-0)

SCHUELLER, G. I. Computational stochastic mechanics - recent advances. **Journal of Computers and Structures**, v. 79, p. 2225-2234, 2001. [https://doi.org/10.1016/S0045-7949\(01\)00078-5](https://doi.org/10.1016/S0045-7949(01)00078-5)

SCHUSTER, H. G. **Deterministic Chaos**. 1. ed. Weinheim: VCH, 1993.

SOIZE, C. Reduced models for structures in the medium-frequency range coupled with internal acoustic cavities. **The Journal of the Acoustical Society of America**, v. 106, p. 3362-3374, 1999. <https://doi.org/10.1121/1.428190>

SOIZE, C. A nonparametric model of random uncertainties for reduced matrix models in structural dynamics. **Probabilistic Engineering Mechanics, Elsevier**, v. 15, n. 3, p. 277-294, 2000. [https://doi.org/10.1016/S0266-8920\(99\)00028-4](https://doi.org/10.1016/S0266-8920(99)00028-4)

SOIZE, C. Maximum entropy approach for modeling random uncertainties in transient elastodynamics. **International Journal of Engineering Sciences**, v. 52, p. 52-64, 2001. <https://doi.org/10.1121/1.1360716>

SOIZE, C. Stochastic modeling of uncertainties in computational structural dynamics - recent theoretical advances. **Journal of Sound and Vibration**, v. 332, p. 2379-2395, 2013. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2011.10.010>

SOUZA, M. G. D. **Identificação e caracterização de não-linearidades em dinâmica estrutural**. Universidade de São Paulo. São Paulo. 2008. <https://doi.org/10.11606/D.18.2008.tde-19012011-120002>

SUDRET, B. **Uncertainty propagation and sensitivity analysis in mechanical models—Contributions to structural reliability and stochastic spectral methods**. Université Blaise Pascal. [S.l.]. 2007.

SYMON, K. R. **Mechanics**. 3. ed. Redwood: AddisonWesley, 1971.

SZILARD. **THEORY AND ANALYSIS OF PLATES. Classical and numerical methods**. [S.l.]: Prentice-Hall Inc., 1974.

THOMPSON, J. M. T.; STEWART, H. B. **Nonlinear dynamics and chaos: Geometric methods for engineers and scientists**. New York: Wiley, 1986.

TIMOSHENKO, S. P. **THEORY OF PLATES AND SHELLS**. 2. ed. New York: McGraw-Hill, 1959.

TOUZÉ, C.; AMABILI, M. Nonlinear normal modes for damped geometrically nonlinear systems: Application to reduced-order modelling of harmonically forced structures. **Journal of Sound and Vibration**, v. 298, p. 958-981, 2006. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2006.06.032>

VIANA, F. A. C. et al. Tuning dynamic vibration absorbers by using ant colony optimization. **Computers and Structures**, v. 86, n. 13, p. 1539-1549, 2008. <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2007.05.009>

VIANA, R. L. **Introdução à Dinâmica Não-Linear e Caos**. Universidade Federal do Paraná. Curitiba, p. 269. 2011.

WIGGINS, S. **Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos**. 1. ed. New York: Springer Verlag, 1990. <https://doi.org/10.1007/978-1-4757-4067-7>

WISDOM, S. J. P.; MIGNARD, E. The chaotic rotation of Hyperion. **Icarus**, v. 58, p. 137-152, 1984. [https://doi.org/10.1016/0019-1035\(84\)90032-0](https://doi.org/10.1016/0019-1035(84)90032-0)

WORDEN, K.; TOMLINSON, G. **Nonlinearity in structural dynamic: detection, identification, and modeling**. [S.I.]: Taylor & Francis, 2001. <https://doi.org/10.1887/0750303565>

YAMAZAKI, F.; SCHINOZUKA, M. Neumann expansion for stochastic finite element analysis. **Journal of Engineering Mechanics ASCE**, v. 114, p. 1335-1354, 1988. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(1988\)114:8\(1335\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(1988)114:8(1335))

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. **The finite element method: Solid mechanics**. 5. ed. [S.I.]: Butterworth-Heinemann, v. Vol. 2, 2000.

ANEXO A

MATRIZES DE RIGIDEZ ELEMENTARES

Ao utilizar o MEF para a modelagem de uma estrutura, deve-se interpolar a sua geometria, ou seja, as coordenadas dos pontos, assim como as variáveis ou os campos espaciais a serem calculados. Assim, aplicam-se as funções de interpolação ou funções de forma para as aproximações desses campos. Considere o elemento retangular de placa da Fig. A.1 nos sistemas de coordenadas global e local.

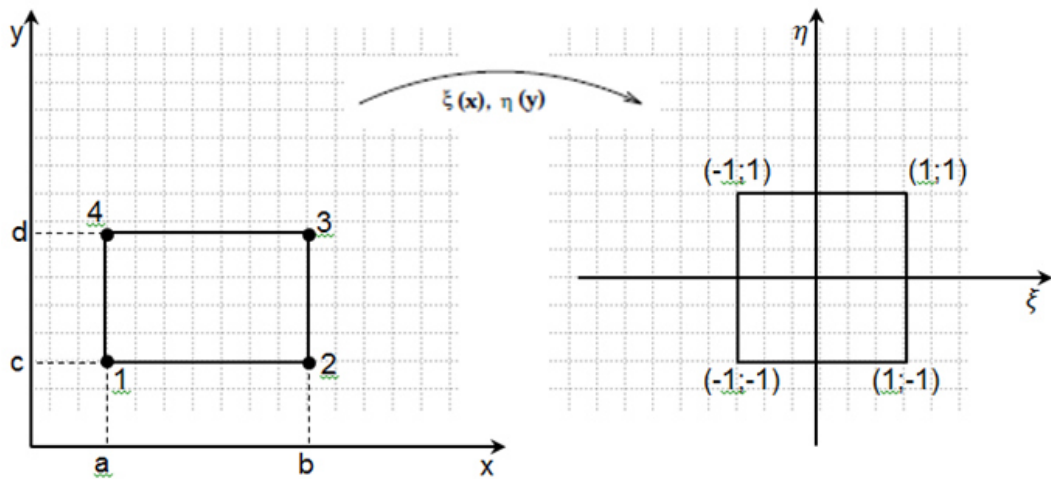


Figura A.1 – Transformação de coordenada entre o sistema global (x, y) e local (ξ, η) para elementos retangulares

O sistema cartesiano Oxy é denominado de sistema de referência global e o $O\xi\eta$ é o local. A vantagem de se utilizar um sistema local está relacionada à mudança dos limites de integração nas expressões para o cálculo das matrizes elementares de massa e rigidez do sistema.

As expressões para o cálculo das matrizes de rigidez do elemento finito não linear de placa fina, definidas na Eq. (2.25), envolvem derivadas das funções de forma em relação às

coordenadas globais x e y . Entretanto, pode-se realizar a integração dessas matrizes no sistema de referência local via emprego da matriz Jacobiana, $[J]$, de transformação da seguinte forma:

$$\mathbf{K}^l(\xi, \eta) = Eh \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\mathbf{B}^m)^T \mathbf{D}^m \mathbf{B}^m \det[\mathbf{J}] d\xi d\eta + Eh^3 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\mathbf{B}^f)^T \mathbf{D}^f \mathbf{B}^f \det[\mathbf{J}] d\xi d\eta \quad (\text{A.1})$$

$$\mathbf{K}^{nl}(\xi, \eta) = Eh \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}(\mathbf{B}^m)^T \mathbf{D}^m \mathbf{B}^{nl}(\tilde{\mathbf{W}}) \\ \mathbf{B}^{nl}(\tilde{\mathbf{W}})^T \mathbf{D}^m \mathbf{B}^m & \frac{1}{2} \mathbf{B}^{nl}(\tilde{\mathbf{W}})^T \mathbf{D}^m \mathbf{B}^{nl}(\tilde{\mathbf{W}}) \end{bmatrix} \det[\mathbf{J}] d\xi d\eta \quad (\text{A.2})$$

$$\Delta \mathbf{K}^{nl}(\xi, \eta) = Eh \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}(\mathbf{B}^m)^T \mathbf{D}^m \mathbf{B}^{nl}(\tilde{\mathbf{W}}) \\ 0 & \frac{1}{2} \mathbf{B}^{nl}(\tilde{\mathbf{W}})^T \mathbf{D}^m \mathbf{B}^{nl}(\tilde{\mathbf{W}}) + \mathbf{G}^T \mathbf{T}^m \mathbf{G} \end{bmatrix} \det[\mathbf{J}] d\xi d\eta \quad (\text{A.3})$$