
CAPÍTULO 6

Conclusões e Sugestões



ESTE CAPÍTULO apresenta as principais conclusões referentes ao estudo teórico-experimental da sedimentação gravitacional em batelada e propõe sugestões para o desenvolvimento de trabalhos futuros.

6.1 Conclusões

- A sistematização dos desvios das medidas e a otimização dos testes na etapa preliminar do desenvolvimento do trabalho experimental contribuiu significativamente para a eliminação dos erros sistemáticos e consequentemente favoreceu a confiabilidade de parâmetros fundamentais para descrição da sedimentação em batelada;
- Testes preliminares para a análise do comportamento de sistemas sólido-líquidos com base nas propriedades físicas dos materiais sólidos (caulim, carbonato de cálcio e microesferas de vidro) apontaram que as diferenças significativas entre os sólidos não se restringem apenas à diferença de densidade das fases, mas também na forma das partículas e nas distribuições de tamanhos, além de possíveis efeitos cruzados entre tais variáveis. Os resultados qualitativos mostraram que os comportamentos específicos dos sólidos nas dinâmicas de separação e nas acomodações do material nos sedimentos podem ser melhor descritos ao se introduzir as informações específicas quanto à forma e tamanho das partículas;

- O material sólido constituído por microesferas de vidro apresentou velocidade de sedimentação cerca de 30 vezes superior ao caso observado para o sólido carbonato de cálcio, que por sua vez apresentou os menores diâmetros. Tal observação pode ser justificada pela alta esfericidade das partículas que garantem menores efeitos de resistividade do meio. As consolidações das partículas nos sedimentos também são funções da forma e da distribuição de tamanhos dos sólidos. Partículas com formas irregulares produzem sedimentos menos compactados com os maiores gradientes de concentrações;
- O efeito isolado da distribuição de tamanhos de partículas mostrou-se bastante significativo, uma vez que partículas maiores possuem mais massa e então sedimentam mais rapidamente. A concentração local aumenta na nova condição de estabilidade à medida que, nas mesmas condições experimentais, ocorre em sua maioria partículas de pequenos diâmetros;
- Análises do efeito isolado da forma das partículas na acomodação dos sedimentos indicou que partículas de formas mais regulares, ou maior esfericidade, apresentam os menores sedimentos e as maiores concentrações na base. Em contrapartida o caulim, cujas partículas possuem forma mais irregular, apresentam os sedimentos mais compressíveis. Além disso, os efeitos de camada limite sob o conjunto de partículas de maior esfericidade é menor que quando comparado com partículas irregulares, sendo que tal efeito não deve ser negligenciado;
- A Técnica de Atenuação de Raios Gama (TARG) mostrou-se bastante eficiente para a determinação de distribuições de concentrações de diferentes tipos de materiais sólidos. Testes estáticos e dinâmicos reproduzidos com confiabilidade estatística indicaram que a TARG é uma boa alternativa como técnica não destrutiva em análises de sistemas de separação sólido-líquidos;
- A atenuação de raios gama mostrou-se eficiente na determinação das curvas de equi-concentrações em testes de proveta. Os resultados mostraram que inicialmente as equi-concentrações de baixas concentrações são retas que partem da origem dos tempos e das posições. Entretanto, concentrações mais elevadas desenvolvem tendências não-lineares pela própria compressão do sólido, além do que se verifica que as mesmas não partem da origem dos tempos conforme sugeriu Kynch (1952), como antes verificado por Concha e Bustos (1987) e Ruiz (2000);
- Um estudo referente à obtenção e análise de equações constitutivas apontou que ambas as metodologias de Damasceno (1992) e França et al. (1995) empregadas na estimação de parâmetros de pressão nos sólidos obtiveram resultados bastante significativos. Entretanto, os resultados mostraram que o modelo de Tiller e Leu (1980) para a pressão nos sólidos é bastante sensível à uma estimativa inicial dos parâmetros;

- Através de uma análise de sensibilidade dos parâmetros da equação de Tiller e Leu (1980) para a pressão nos sólidos conclui-se que o modelo apresenta dependência entre os parâmetros ε_{sc} e P_a conduzindo à um número infinito de soluções. Para que o modelo de Tiller e Leu (1980) forneça resultados fidedignos é necessário aplicar uma estimativa inicial para o parâmetro ε_{sc} com base em análises experimentais.
- Através dos resultados das simulações numéricas do modelo proposto foi possível concluir que ao se introduzir os conceitos físicos do modelo de D'Ávila (1978), a abordagem matemática apresentou uma inconsistência verificada através da qualidade das soluções obtidas para sólidos que produzem sedimentos com elevadas permeabilidades, fato que fere a condição $f_{bk}(\varepsilon_{sm})=0$. Tal aproximação é equivalente à dizer que a permeabilidade do meio poroso é igual a zero na concentração máxima de 27% de caulim no estudo em questão;
- Uma análise geral dos estudos de casos permite concluir que o modelo matemático descreve a sedimentação em campo gravitacional de maneira consistente com o fenômeno físico. O desenvolvimento de uma metodologia numérica através dos uso dos métodos acoplados de Diferenças Finitas, MUSCL de segunda ordem e *Moving Mesh* contribuiu para o aperfeiçoamento das técnicas de resolução dos problemas descontínuos de natureza mista hiperbólica-parabólica.

6.2 Sugestões para trabalhos futuros

- Aprimorar o desenvolvimento de equações constitutivas para a pressão nos sólidos e permeabilidade do meio poroso, além de avaliar a hipótese da dependência exclusiva da concentração local de sólidos;
- Desenvolver um modelo para a sedimentação unidimensional à partir de balanços populacionais introduzindo novas variáveis com informações específicas de cada sólido em particular, tais como a sua esfericidade e distribuição de tamanhos;
- Avaliar a aplicação do modelo misto hiperbólico-parabólico em simulações numéricas dos estados estacionários e transientes de sedimentadores contínuos convencionais e não-convencionais;
- Ampliar este estudo para outra fonte radioativa de maior energia;
- Ampliar este estudo para outros sólidos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ADORJÁN, L. A. A theory of sediment compression. *In 11th International Mineral Congress*, 1975.
- ADORJÁN, L. A. A. Determination of thickener dimension from sediment compression and permeability test results. *Trans. Results. Trans. Inst. Min. Met.*, N.85, p. 157–163, 1976.
- ALLEN, T. *Particle Size Measurement*. [S.l.]: London, 1981.
- AROUCA, F. O. *Obtenção Experimental das Equações Constitutivas para o Espessamento e Filtração Utilizando Técnica de Atenuação de Radiações de Altas Energias*. Dissertação (Mestrado) — FEQUI/UFU, 2003.
- AROUCA, F. O.; BARROZO, M. A. S.; DAMASCENO, J. J. R. Analysis of techniques for measurement of the size distribution of solid particles. *Braz. Journ. Chem. Engng.*, v. 22(1), p. 135–142, 2005a.
- AROUCA, F. O.; DAMASCENO, J. J. R. Concentration profiles and iso-concentration curves for batch settling using the gamma rays attenuation technique. *Fifth International Latin-American Conference on Powder Technology - PTECH*, 2005a.
- AROUCA, F. O.; DAMASCENO, J. J. R. Analysis of the behavior of solid-liquid systems based on the shape, size distribution and density of the solid particles. *Proceedings of Fifth International Latin-American Conference on Powder Technology - PTECH*, 2005b.
- AROUCA, F. O.; DAMASCENO, J. J. R. The use of high energies radiations to characterise solid-liquid systems. *Materials Science Forum*, v. 498-499, p. 49–54, 2005c.
- BARROZO, M. A. S. Notas de aula da disciplina planejamento de experimentos. *Programa de Pós-Graduação em Engenharia Química. FEQ/UFU.*, 2001.
- BECKER, R. Continuous thickening, design and simulation of thickeners. *Habilitación professional: University of Conceptción*, 1982.

- BEEN, K.; SILLS, G. C. Self-weight consolidation of soft soils: an experimental and theoretical study. *Géotechnique*, v. 31, p. 519–535, 1981.
- BRENAN, K. E.; CAMPBELL, S. L.; PETZOLD, L. R. *Numerical Solution of Initial-Value Problems in Differential-Algebraic Equations*. [S.l.]: SIAM, 1996.
- BURGER, R.; CONCHA, F. Mathematical model and numerical simulation of settling of flocculated suspensions. *International Journal of Multiphase Flow*, v. 24, p. 1005–1023, 1998.
- BURGER, R.; CONCHA, F. A century of research in sedimentation and thickening. *Kona*, v. 20, p. 38–70, 2002.
- BURGER, R.; CONCHA, F. Thickening in the 20th century: A historical perspective. *Minerals & Metallurgical Processing*, v. 20(2), p. 57–67, 2003.
- BURGER, R.; CONCHA, F.; TILLER, F. M. Applications of the phenomenological theory to several published experimental cases of sedimentation processes. *Chemical Engineering Journal*, v. 80, p. 105–117, 2000.
- BURGER, R.; DAMASCENO, J. J. R.; KARLSEN, K. H. A mathematical model for batch and continuous thickening of flocculated suspensions in vessels with varying cross-section. *International Journal of Mineral Processing*, 2003.
- BURGER, R.; KARLSEN, K. H. On some upwind difference schemes for the phenomenological sedimentation-consolidation model. *Journal of Engineering Mathematics*, v. 41, p. 145–166, 2001.
- CHEN, W. Simulation of transient states in continuous thickener. *Fluid/Particle Separation Journal*, v. 1(1), p. 61–66, 1988.
- COE, H. S.; CLEVINGER, G. H. Methods of determining the capacities of slime-settling tanks. *Trans. Am. Inst. Min. Engrs.*, p. 356–384, 1916.
- COMINGS, E. W. Thickening calcium carbonate slurries. *In. Eng. Chem.*, v. 32(5), p. 663–667, 1940.
- CONCHA, F.; BUSTOS, M. C. Modification of the Kynch theory of sedimentation. *AIChE Journal*, p. 312–315, 1987.
- CONCHA, F. J.; BASCUR, O. Phenomenological model of sedimentation. *XII International Mineral Processing Congress*, 1977.
- DAMASCENO, J.; BARROZO, M.; HENRIQUE, H. M. Estudo da dinâmica de um sedimentador filtrante. *Anais do XV Encontro Sobre Escoamento Em Meios Porosos*, p. 303–307, 1987.
- DAMASCENO, J. J. R. *Uma Contribuição ao Estudo do Espessamento Contínuo*. Tese (Doutorado) — COPPE/UFRJ, 1992.
- DAMASCENO, J. J. R. Notas de aula de fenômenos de transporte. *FEQ/UFU*, 2002.

- DAMASCENO, J. J. R.; HENRIQUE, H. M.; MASSARANI, G. Um modelo para a sedimentação não estacionária. *XIX Encontro sobre Escoamento em Meios Porosos*, 1991.
- DAMASCENO, J. J. R.; MASSARANI, G. Estudo de um sedimentador com fundo filtrante. *Anais do XIV Encontro Sobre Escoamento Em Meios Porosos*, p. 283–290, 1986.
- DAMASCENO, J. J. R.; MASSARANI, G. Uma análise do método de kynch para o projeto de sedimentadores. *Anais do XVII Encontro sobre Escoamento em Meios Porosos*, p. 283–290, 1990.
- DAMASCENO, J. J. R.; MASSARANI, G. Cálculo da capacidade de sedimentadores através da determinação da permeabilidade do sedimento. *Anais do XXI Encontro sobre Escoamento em Meios Porosos*, p. 233–242, 1993.
- DAMASCENO, J. J. R.; SOUZA, R.; MASSARANI, G. Determinação do perfil de concentrações em sedimentador contínuo através da técnica de atenuação de raios gama. *Anais do XVII Encontro sobre Escoamento em Meios Porosos*, p. 97–108, 1989.
- DREHER, T. Non intrusive measurement of particle concentration and experimental characterization of sedimentation. *Preprint 97/34. Sonderforschungsbereich 404*, 1997.
- D'ÁVILA, J. S. Uma análise da teoria de kynch para a sedimentação. *Revista Brasileira de Tecnologia*, p. 447–453, 1976.
- D'ÁVILA, J. S. *Um Modelo Matemático para a Sedimentação*. Tese (Doutorado) — COPPE/UFRJ, 1978.
- D'ÁVILA, J. S.; SAMPAIO, R. Equações de estado para a pressão no sólido. *II Congresso Brasileiro de Engenharia Química*, 1977a.
- D'ÁVILA, J. S.; SAMPAIO, R. Projeto de um sedimentador usando as equações da continuidade e do movimento. *III Simpósio Brasileiro de Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos*, 1977b.
- D'ÁVILA, J. S.; SAMPAIO, R. Influência de equações de estado para a pressão no sólido no projeto de um sedimentador contínuo. *Anais do V Encontro sobre Escoamento em Meios Porosos*, v. 3, p. 1–11, 1977c.
- EVJE, S.; BURGER, R.; KARLSEN, K. H. On strongly degenerate convection-difusion problems modeling sedimentation-consolidation process. *J. Math. Anal. Appl.*, v. 247, p. 517–556, 2000.
- FITCH, E. B. Current theory and thickener design. *Ind. Eng. Chem.*, v. 58(10), p. 18–28, 1966.
- FITCH, E. B. Current theory and thickener design, part 1. *Filtration & Separation*, v. 12(4), p. 355–359, 1975a.

- FITCH, E. B. Current theory and thickener design, part 2. *Filtration & Separation*, v. 12(5), p. 480–488 e 553, 1975b.
- FITCH, E. B. Current theory and thickener design, part 3. *Filtration & Separation*, v. 12(6), p. 636–638, 1975c.
- FITCH, E. B. Kynch theory and compression zones. *AIChE Journal*, p. 940–946, 1983.
- FONT, R. Calculation of the compression zone height in continuous in thickeners. *AIChE Journal*, v. 36(1), p. 3–12, 1990.
- FONT, R.; LAVEDA, M. L. Design method of continuous thickeners from semi-batch tests of sedimentation. *Chemical Engineering Science*, v. 55(22), p. 5007–5015, 1996.
- FONT, R.; RUIZ, F. Simulation of batch and continuous thickeners. *Chemical Engineering Science*, v. 48(11), p. 2039–2047, 1993.
- FRANÇA, S.; JR, E. C. B.; MASSARANI, G. Estimação de parâmetros em equações constitutivas de sedimentos. *XXVII Congresso Brasileiro de Sistemas Particulados*, 1995.
- FRANÇA, S. C. A. *Operação de Espessadores Não-Convencionais*. Dissertação (Mestrado) — COPPE/UFRJ, 1996.
- FRANÇA, S. C. A.; MASSARANI, G.; JR, E. C. B. Sobre a simulação da sedimentação em batelada: Lec. *XXVII Congresso Brasileiro de Sistemas Particulados*, 1999.
- FREITAS, K.; T.A., S.; DAMASCENO, J. Espessadores cônico-cilíndricos: Uma avaliação experimental. *XXVII Congresso Brasileiro de Sistemas Particulados*, 1999.
- FREITAS, K. A. *Efeito da Vazão de Alimentação Sobre a Altura do Leito Poroso Expandido em um Sedimentador Filtrante Operando em Estado Estacionário*. Dissertação (Mestrado) — FEQ/UFU, 2002.
- GARDNEY, R.; ELY-JR, R. Radioisotope measurement applications in engineering. *Reinhold Publishing Corporation*, 1967.
- HAMACHER, M. E. *Um Estudo da Sedimentação Utilizando o Método da Atenuação de Raios Gama*. Dissertação (Mestrado) — COPPE/UFRJ, 1978.
- HARRIS, C. C.; SOMASUNDARAN, P.; JENSEN, R. R. Sedimentation of compressible materials: Analysis of batch sedimentation curve. *Powder Technology*, v. 11, p. 75–84, 1975.
- HAZEM, A. On sedimentation. *Trans. Amer. Soc. Civ. Engrs.*, v. 53, p. 45–71, 1904.
- HUANG, W.; REN, Y.; RUSSELL, R. D. Moving mesh partial differential equations (mmpdes) based on the equidistribution principle. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, v. 113, p. 279–290, 1994.
- KYNCH, G. J. A theory of sedimentation. *Trans. Amer. Soc.*, p. 166–176, 1952.

- LANDMAN, K. A.; WHITE, L. R.; R., B. The continuous-flow gravity thickener: Steady state behavior. *AIChE Journal*, v. 34 (2), p. 239–252, 1988.
- LENNERTZ, L. C.; MASSARANI, G.; D'ÁVILA, J. S. Projeto de um sedimentador contínuo. *Anais do III Encontro sobre Escoamentos em Meios Porosos*, p. 203–213, 1975.
- MISHLER, R. T. Settling slimes at the tigre mill. *Engng. Min. J.*, v. 94, p. 643–646, 1912.
- NOLL, J. Moving grid methods. *Project Report from the Undergraduate Research Internship Summer 2002*, p. 1–13, 2002.
- PEREZ, M.; FONT, R.; PASTOR, C. A mathematical model to simulate batch sedimentation with compressions behaviour. *Comp. Chem. Engng.*, v. 22(11), p. 1531–1541, 1998.
- PINTO, J. C.; LAGE, P. L. C. *Métodos Numéricos em Problemas de Engenharia Química*. [S.l.]: E-papers Servicos Editoriais Ltda, 1997.
- RODRIGUES, M. V. *Análise do Desempenho de um Ciclone com Mangas*. Dissertação (Mestrado) — UFU, 2001.
- RUIZ, M. I. *Estudo da Sedimentação em Batelada com o Auxílio da Técnica de Atenuação de Raios Gama*. Dissertação (Mestrado) — FEQ/UFU, 2000.
- RUIZ, M. I.; FERNANDES, R. S.; DAMASCENO, J. J. R. Mapeamento de concentração de sólidos em função da posição e do tempo para ensaios de sedimentação em batelada. *XXV Congresso Brasileiro de Sistemas Particulados*, 1997a.
- RUIZ, M. I.; FERNANDES, R. S.; DAMASCENO, J. J. R. Uma análise crítica sobre o uso da técnica de atenuação de raios gama na obtenção da granulometria de sólidos. *XXV Congresso Brasileiro de Sistemas Particulados*, 1997b.
- SCOTT, K. J. Theory of thickening factors affecting settling rate of solids in flocculated pulps. *Trans. Instn. Min. Metall - Mineral Process Rxt. Metall.*, p. 85–87, 1968.
- SCOTT, K. J. Continuous thickening of flocculated suspensions. *Ind. Eng. Chem. Fundamentals*, p. 422–427, 1970.
- SHANNON, P. T.; STRUPE, E.; TORY, E. M. Batch and continuous thickening. *Ind. Eng. Chem. Fundamentals*, N.9, p. 422–427, 1970.
- SILVA, M. A. P.; MEDRONHO, R. A. Um método simples de determinação de distribuição granulométrica. *Anais do XIV Encontro sobre Escoamento em Meios Porosos*, 1986.
- SILVA, T. A. *Estudo Teórico-Experimental da Operação de Sedimentadores Divergentes*. Dissertação (Mestrado) — FEQ/UFU, 2004.
- SMITH, R. R.; MCCALL, D. Systems of hiperbolic partial differential equations. *Communications of ACM*, v. 13(9), p. 567–570, 1970.

- STORM, E.; ISRAEL, H. I. Photon cross sections from 1 kev to 1000 mev for elements $z=1$ to $z=100$. *Nuclear Data Tables*, p. 565–681, 1970.
- TALMAGE, W. P.; FITCH, E. B. Determining thickener unit areas. *Ind. Eng. Chem.*, p. 38–41, 1955.
- THIRRIOT, C. et al. Análise da força resistiva no escoamento de fluidos em meios porosos. *V Congresso Interamericano de Engenharia Química*, 1973.
- TILLER, F. M. Revision of kynch theory. *AIChE Journal*, p. p. 823–829, 1981.
- TILLER, F. M.; CHEN, W. Limiting operating condition for continuous thickeners. *Chem. Engng. Sci.*, v. 43(7), p. 1695–1704, 1988.
- TILLER, F. M.; HSYNG, N. B.; CONG, D. Z. Role of porosity in filtration: Xii filtration with sedimentation. *AIChE Journal*, v. 41(5), p. 1153–1164, 1995.
- TILLER, F. M.; HSYUNG, N. B.; SHEN, Y. L. Catscan analysis of sedimentation and constant pressure filtration. *Proceedings of the Fifth World Congress on Filtration 2*, v. 2, p. 80–85, 1991.
- TILLER, F. M.; LEU, W. Basic data fitting in filtration. *Journal Chin. Inst. Chem. Engrs.*, p. 61–70, 1980.
- TRUESDEL, C. Suelle basi de la termomeccanica. *English Translator in Rotational Mechanics of Materials. Int. Sci. Rev. Serv.*, p. 292–305, 1965.
- WAKEMAN, R. J.; HOLDICH, R. G. Theoretical and experimental modeling of solids and liquid pressures in batch sedimentation. *Filtration & Separation*, p. 420–422, 1984.
- WATERS, A. G.; GALVIN, K. P. Theory and application of thickener design. *Filtration & Separation*, v. 28(2), p. 110–116, 1991.
- ZHENG, Y.; BAGLEY, D. M. Numerical simulation of batch settling process. *Journal of Environmental Engineering*, v. 125(11), p. 1007–1013, 1999.

Anexo A

Fundamentos da estatística aplicados no tratamento de resultados experimentais

Medidas de erros

ALGUNS CONCEITOS DE ESTATÍSTICA podem ser de grande utilidade quando aplicados de forma correta para o planejamento de experimentos e tratamento de resultados experimentais, assim como podem tornar possível a eliminação de erros em testes preliminares do trabalho. Tais conceitos são de extrema importância para a otimização de ensaios experimentais e tratamentos dos resultados obtidos em laboratório. Uma réplica de um determinado experimento realizado sob as mesmas condições do ensaio principal pode apresentar dois tipos de erros característicos (BARROZO, 2001):

- Erro experimental: causado por variações incontroláveis e aleatórias de instrumentos de medidas. Equivale a flutuação que ocorre nos dados de uma repetição para a outra sob as mesmas condições de reprodutibilidade. Os erros experimentais não podem ser eliminados, mas sim quantificados;
- Erro sistemático: está relacionado a equipamentos incorretamente ajustados ou calibrados ou ao uso de procedimentos incorretos por parte do operador. Tais erros devem ser eliminados em testes preliminares.

Medidas de centralidade e espalhamento dos dados

É de extrema importância para um determinado tratamento de resultados experimentais, o conhecimento da medida de centralidade e variabilidade dos mesmos.

Uma população estatística é o conjunto de medidas ou características que correspondem a coleção inteira de unidades (população de interesse) para os quais uma determinada inferência é feita. A média de uma população pode ser calculada pela Equação (A.1).

$$\eta = \frac{\sum_{i=1}^N y_i}{N} \quad (\text{A.1})$$

na qual N é o número de observações da população. O desvio padrão populacional é dado pela Equação (A.2),

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (y_i - \eta)^2}{N}} \quad (\text{A.2})$$

Uma amostra da população equivale ao conjunto de medidas que são realmente selecionadas na população estatística no decorrer de uma determinada investigação. A média amostral é uma medida da centralidade dos dados e é dada pela média aritmética das observações.

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} \quad (\text{A.3})$$

na qual n é o número de observações da amostra. O desvio padrão amostral é dado pela Equação (A.4),

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{n - 1}} \quad (\text{A.4})$$

É importante ressaltar que o número de observações para uma população idealizada para os dados é infinito e que para fins de cálculos adota-se N um número finito, porém tão grande quanto possível.

Teorema do Limite Central

Observações repetidas que diferem devido a erro experimental freqüentemente variam em torno de um valor central numa distribuição simétrica na qual ocorrem mais desvios pequenos que desvios grandes, conhecida como distribuição normal. O Teorema do Limite Central da estatística demonstra que, sob certas condições na experimentação, a distribui-

ção de erros tende para a normalidade quando o número de medidas é grande (BARROZO, 2001).

Quadro de análise de variância (ANOVA)

O quadro de análise de variância é um método que pode, dentre outras aplicações, testar a igualdade de três ou mais médias populacionais baseando-se na análise de variância de uma população a fim de fazer inferências sobre a mesma. Tal dispositivo pode ser indicado para investigar se existe uma real diferença sobre a média dos valores associados a diferentes tratamentos de um conjunto de dados. A maioria dos dados que precisam ser tratados a partir de hipóteses estatísticas são experimentos para comparar com k tratamentos. Os cálculos que melhor exploram tais hipóteses são baseados na distribuição de *F de Fisher* e da elaboração de um quadro de ANOVA.

Estimativa da Variabilidade Entre e Dentro de Tratamentos

Uma estimativa da consistência interna dos dados pode ser obtida agrupando as variações de amostras individuais obtidas dentro de cada conjunto de dados que correspondem aos diferentes tratamentos. Em geral, supondo que k variâncias estimam a mesma variância σ^2 :

$$\begin{aligned} s_R^2 &= \frac{\nu_1 s_1^2 + \nu_2 s_2^2 + \cdots + \nu_k s_k^2}{\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_k} = \\ &= \frac{S_1 + S_2 + \cdots + S_k}{(n_1 - 1) + (n_2 - 1) + \cdots + (n_k - 1)} = \frac{S_R}{N - k} = \frac{S_R}{\nu_R} \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

onde S_k é a soma dos quadrados dos desvios da média do tratamento (SQ), ν_k é o grau de liberdade, n_k é o número de observações dentro dos tratamentos, k é o número de tratamentos, N é a soma do número de observações dentro dos tratamentos e s_R^2 é um estimador ponderado da variância populacional comum σ^2 . Algebricamente, se y_{ti} denota a i -ésima observação no t -ésimo tratamento, a soma de quadrados dentro do t -ésimo tratamento é:

$$S_t = \sum_{i=1}^{n_t} (y_{ti} - \bar{y}_t)^2 \quad (\text{A.6})$$

A soma de quadrados dentro de todos tratamentos é dada pela Equação (A.7):

$$S_R = S_1 + S_2 + \cdots + S_k = \sum_{t=1}^k \sum_{i=1}^{n_t} (y_{ti} - \bar{y}_t)^2 \quad (\text{A.7})$$

e o quadrado médio dentro dos tratamentos é:

$$s_R^2 = \frac{S_R}{N - k} = \sum_{t=1}^k \sum_{i=1}^{n_t} \frac{(y_{ti} - \bar{y}_t)^2}{N - k} \quad (\text{A.8})$$

A média geral $\bar{y}$ é a média aritmética de todas as observações. Se não existe diferença real entre as médias dos tratamentos, uma segunda estimativa de σ^2 poderá ser obtida através da variabilidade das médias de tratamentos em torno de $\bar{y}$.

$$s_T^2 = \frac{\sum_{t=1}^k n_t (\bar{y}_t - \bar{y})^2}{k - 1} \quad (\text{A.9})$$

A relação da soma de quadrados entre tratamento é:

$$S_T = \sum_{t=1}^k n_t (\bar{y}_t - \bar{y})^2 \quad (\text{A.10})$$

O número de graus de liberdade entre tratamentos é $\nu_T = k - 1$.

Uma medida da variabilidade para todas as observações é dada pela variância amostral para as N observações (A.11).

$$S_D = \sum_{t=1}^k \sum_{i=1}^{n_t} (y_{ti} - \bar{y})^2 \quad (\text{A.11})$$

A soma de quadrados total dos desvios da média $\bar{y}$ e dividida pelo número de graus de liberdade $\nu_D = N - 1$ é dada pela Equação (A.12):

$$s_D^2 = \frac{\sum_{t=1}^k \sum_{i=1}^{n_t} (y_{ti} - \bar{y})^2}{N - 1} = \frac{S_D}{\nu_D} \quad (\text{A.12})$$

A propriedade aditiva da soma de quadrados devido a identidade algébrica, torna possível a seguinte identidade:

$$\sum_{t=1}^k \sum_{i=1}^{n_t} (y_{ti} - \bar{y})^2 = \sum_{t=1}^k n_t (\bar{y}_t - \bar{y})^2 + \sum_{t=1}^k \sum_{i=1}^{n_t} (y_{ti} - \bar{y}_t)^2 \quad (\text{A.13})$$

ou ainda,

$$S_D = S_T + S_R \quad (\text{A.14})$$

isto é, a soma de quadrados total dos desvios da média $\bar{y}$ é igual a soma de quadrados entre tratamentos mais a soma de quadrados dentro de tratamentos (resíduo).

A média geral $\bar{y}$ tem sua contribuição definida na expressão,

$$S_D = \sum_{t=1}^k \sum_{i=1}^{n_t} y_{ti}^2 - N\bar{y}^2 \quad (\text{A.15})$$

onde $N\bar{y}^2$ é a soma de quadrados devido à média $\bar{y}(S_A)$, interpretada como uma correção para a média,

$$S_A = N\bar{y}^2 \quad (\text{A.16})$$

na qual G é dado pela expressão,

$$G = \sum_{i=1}^N y_i = \bar{y}N \quad (\text{A.17})$$

conduzindo a

$$S_A = \frac{G^2}{N} \quad (\text{A.18})$$

A Tabela A.1 apresenta um modelo generalizado para o quadro de análise de variância.

Tabela A.1: Quadro de análise de variância.

Fonte de Variação	Soma dos Quadrados	Graus de Liberdade	Quadrado da média
Média	$S_A = N\bar{y}^2 = \left(\sum_{t=1}^k \sum_{i=1}^{n_t} y_{ti} \right)^2 / N$	$\nu_A=1$	$s_A^2 = S_A/\nu_A$
Entre Tratamentos	$S_T = \sum_{t=1}^k n_t (\bar{y}_t - \bar{y})^2$	$\nu_T=k-1$	$s_T^2 = S_T/\nu_T$
Dentro do Tratamento	$S_R = \sum_{t=1}^k \sum_{i=1}^{n_t} (y_{ti} - \bar{y}_t)^2$	$\nu_R=N-k$	$s_R^2 = S_R/\nu_R$
Total	$S = \sum_{t=1}^k \sum_{i=1}^{n_t} y_{ti}^2$	N	-

A soma de quadrados total é dada pela Equação (A.19),

$$S = \sum_{t=1}^k \sum_{i=1}^{n_t} y_{ti}^2 = N\bar{y}^2 + \sum_{t=1}^k n_t (\bar{y}_t - \bar{y})^2 + \sum_{t=1}^k \sum_{i=1}^{n_t} (y_{ti} - \bar{y}_t)^2 \quad (\text{A.19})$$

ou

$$S = S_A + S_T + S_R \quad (\text{A.20})$$

O correspondente número de graus de liberdade é dado por:

$$N = 1 + (k - 1) + (N - k) \quad (\text{A.21})$$

Testes de hipóteses

Os testes de hipóteses são afirmações inferidas sobre uma população. Sua validade é inferida a partir da informação obtida da amostra da população.

Quando uma investigação é relacionada a um fato baseado na amostra, a negação deste fato é considerada como hipótese de nulidade (H_0) e o fato a ser comprovado pelos dados é considerado como hipótese alternativa (H_1). A estatística do teste prevê a existência de dois tipos de erros possíveis (BARROZO, 2001):

- i) H_0 é verdadeira, mas o teste leva a rejeição de H_0 (Erro do tipo I);
- ii) H_0 é falsa, mas o teste leva a não rejeição de H_0 (Erro do tipo II).

Define-se nível de significância (α) como sendo a probabilidade máxima de ocorrer um erro do tipo I em um teste de hipóteses.

O quadro de análise de variância (ANOVA) auxilia a formulação de um teste de hipóteses para a comparação de mais de dois tratamentos. Com as hipóteses $H_0: \eta = \eta_1 = \dots = \eta_k$ (as médias k tratamentos são todas iguais), $H_1: \eta \neq \eta_1 \neq \dots \neq \eta_k$ (as médias k tratamentos apresentam diferenças significativas) aplicadas quando $k > 2$, F_{obs} observado numa distribuição F de Fisher é comparado com F_{ν_T, ν_R} , onde ν_T e ν_R são, respectivamente, o grau de liberdade entre diferentes tratamentos e o grau de liberdade dentro de tratamentos, obtidos através do quadro de ANOVA. Uma região abaixo da curva de distribuição de F e delimitada aa esquerda por F_{ν_T, ν_R} é conhecida por região crítica ou região de rejeição, equivalente ao conjunto de todos os valores da estatística de teste que determinam a rejeição da hipótese de nulidade. Assim caso $F_{obs} > F_{\nu_T, \nu_R}$ tem-se confiabilidade estatística para poder rejeitar a hipótese de nulidade H_0 , sendo válida a hipótese alternativa H_1 . Caso $F_{obs} < F_{\nu_T, \nu_R}$ assume-se a hipótese H_0 como sendo verdadeira.

Anexo B

Métodos Numéricos e Adaptativos

Método das Diferenças Finitas

 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS (EDP's) são freqüentemente usadas para modelar uma variedade de fenômenos físicos. Soluções numéricas podem ser obtidas empregando-se adequadamente métodos numéricos na discretização do sistema de EDPs original.

O método das Diferenças Finitas é um método numérico que pode ser utilizado para resolver problemas de valor de contorno ou valor inicial, envolvendo equações diferenciais ordinárias ou parciais. A forma geral de um problema de valor de contorno é dada por (PINTO; LAGE, 1997):

$$f(x, u(x), u'(x), u''(x)) = 0 \quad (\text{B.1})$$

$$x = x_0, \quad g_0(x, u, u') = 0 \quad (\text{B.2})$$

$$x = x_f, \quad g_f(x, u, u') = 0 \quad (\text{B.3})$$

no domínio $x_0 < x < x_f$, onde x é a variável independente, usualmente uma coordenada espacial, u é o vetor de variáveis dependentes, u' e u'' são as suas derivadas primeira e segunda, respectivamente, em relação a x , f é um vetor de funções e g_0 e g_f são vetores de funções que representam as condições de contorno nos limites do domínio do sistema de equações.

O objetivo do método das Diferenças Finitas é transformar um problema composto

por equações diferenciais em um problema formado por equações algébricas. O primeiro passo nesta direção é a chamada discretização do domínio da variável independente. A discretização consiste em dividir o domínio de cálculo em um certo número de subdomínios. Em um domínio finito o número de subdomínios também é finito. Em qualquer caso, estipulam-se os pontos que delimitem os subdomínios, que, no caso de um domínio finito, são iguais a $(i+1)$ em número, sendo i um contador.

O segundo passo é gerar aproximações para as derivadas das variáveis dependentes que aparecem nas equações diferenciais, nos pontos discretos x_i , isto é, obter u' e u'' utilizando apenas os valores de u nestes pontos discretos, u_i . Desta forma, as equações diferenciais são aplicadas aos pontos discretos x_i , substituindo-se as aproximações obtidas para u'_i e u''_i . Isto gera sistemas de equações algébricas na forma:

$$F(u_i) = 0 \quad (\text{B.4})$$

no qual F é um vetor de equações algébricas que depende dos valores desconhecidos y_i , sendo que tal dependência varia conforme o tipo de problema, de contorno ou inicial. Este sistema de equações algébricas quer seja linear ou não-linear, deve ser resolvido para a obtenção da solução do sistema de equações diferenciais original. A solução assim obtida para o problema consistirá em uma seqüência de pontos x_i , onde se conhecem os valores de u , u_i .

Aproximação das Derivadas por Diferenças Finitas

Um dos passos necessários na solução de equações diferenciais por diferenças finitas é a aproximação das derivadas presentes em tais equações, aplicadas a um dado ponto arbitrário, x_i . Uma maneira simples de se obter estas aproximações é através do uso da expansão de uma função em série de *Taylor* em torno de um dado ponto. Seja x_i este ponto base, podemos escrever o valor de $u(x_{i+1})=u_{i+1}$, pela seguinte série infinita:

$$u_{i+1} = u_i + u'_i(x_{i+1} - x_i) + u''_i \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2} + u'''_i \frac{(x_{i+1} - x_i)^3}{3!} + \dots \quad (\text{B.5})$$

enquanto que o valor de $u(x_{i-1})=u_{i-1}$ é dado por:

$$u_{i-1} = u_i - u'_i(x_i - x_{i-1}) + u''_i \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{2} - u'''_i \frac{(x_i - x_{i-1})^3}{3!} + \dots \quad (\text{B.6})$$

Considerando-se a necessidade de se aproximar o valor de u'_i pode-se escrever tais equações de forma mais compacta através da definição do comprimento do domínio i ,

para uma malha fixa e uniforme,

$$h = x_i - x_{i-1} \quad (\text{B.7})$$

de modo que as Equações (B.5) e (B.6) após as devidas manipulações (PINTO; LAGE, 1997) se tornam aproximações das derivadas aplicadas nos pontos x_i . Tais aproximações podem ser por diferenças finitas centrais, à frente (*forward*) ou à ré (*backward*), a depender dos pontos em x utilizados na discretização.

Algumas aproximações para derivadas de primeira e segunda ordens são:

Diferenças Finitas Centrais:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_i = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} + O(h^2) \quad (\text{B.8})$$

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_i = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + O(h^2) \quad (\text{B.9})$$

Diferenças à ré (*backward*):

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_i = \frac{u_i - u_{i-1}}{h} + O(h) \quad (\text{B.10})$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_i = \frac{3u_i - 4u_{i-1} + u_{i-2}}{2h} + O(h^2) \quad (\text{B.11})$$

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_i = \frac{u_i - 2u_{i-1} + u_{i-2}}{h^2} + O(h) \quad (\text{B.12})$$

Diferenças à frente (*forward*):

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{h} + O(h) \quad (\text{B.13})$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_i = \frac{-3u_i + 4u_{i+1} - u_{i+2}}{2h} + O(h^2) \quad (\text{B.14})$$

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_i = \frac{u_i - 2u_{i+1} + u_{i+2}}{h^2} + O(h) \quad (\text{B.15})$$

Método da Malha Adaptativa (*Moving Mesh*)

O método das Diferenças Finitas apresentado nas seções anteriores consiste em discretizar uma ou mais equações diferenciais ordinárias ou parciais, aplicando as derivadas em pontos conhecidos de uma malha fixa e resolvendo-se um conjunto de equações algébricas

obtido a partir do sistema original. A solução é gerada a partir da escolha da malha temporal ou espacial. Entretanto a qualidade da solução depende da escolha adequada do refinamento da malha. Se o *grid* é pouco refinado em áreas de grandes variações da solução, não somente sua precisão, mas o comportamento da solução calculada computacionalmente pode diferenciar bastante da solução real. Em contrapartida, um refinamento excessivo da malha pode ser desnecessário em determinadas regiões aumentando consideravelmente o esforço computacional. Na maioria das vezes é impossível conhecer no início do processamento da solução as regiões da malha que necessitam de um maior ou menor refinamento.

Os métodos de malhas adaptativas ou *moving mesh methods* são métodos recentes desenvolvidos para resolver EDP's dependentes do tempo em uma dimensão espacial (NOLL, 2002). Esta classe de métodos ajusta as malhas espacial e temporal baseando-se na estimativa da qualidade da solução computada. A correspondente malha espacial deve ser bastante refinada em regiões de grandes derivadas para resolver a solução corretamente. Além disso, grandes derivadas espaciais podem não ser apresentadas inicialmente, mas certamente após um determinado tempo de execução do problema aumentando a dificuldade em se formular uma malha fixa adequada para todo o intervalo.

A malha variável dependente dos valores da solução gerados em cada passo de integração tem a capacidade de se adaptar em grande derivadas espaciais quando as mesmas aparecem na solução. Os métodos adaptativos deixam os números de pontos do *grid* constante, mas ajustam suas localizações no tempo baseando-se em estimativas da qualidade da solução.

Desenvolvimento do Método da Malha Adaptativa (NOLL, 2002)

Considerando-se um problema de valor de contorno e inicial através da EDP na forma:

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = f(u(x, t)) \quad (\text{B.16})$$

no domínio $x_L < x < x_R, t > 0$ que deve ser resolvido nas seguintes condições:

$$u(x_L, t) = u(x_R, t) = 0, t > 0 \quad (\text{B.17})$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad (\text{B.18})$$

sendo $f(u(x, t))$ dado por:

$$f(u(x, t)) = -\frac{\partial}{\partial x} c(u(x, t)) + \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) + g(u(x, t)) \quad (\text{B.19})$$

com $\varepsilon > 0$.

Os métodos de malhas adaptativas são baseados na transformação de coordenadas. Em substituição às variáveis físicas, tais como $x \in [x_L, x_R]$, são introduzidas variáveis computacionais $s \in [s_L, s_R]$. Para $t \geq 0$ a transformação entre tais variáveis é denotada por:

$$x = x(s, t), \quad s \in [s_L, s_R] \quad (\text{B.20})$$

Assumindo-se que para $t \geq 0$ a função s aplicada em $x(s, t)$ satisfaz:

$$x(s_L, t) = x_L \quad (\text{B.21})$$

$$x(s_R, t) = x_R \quad (\text{B.22})$$

Nas coordenadas do sistema pode-se escrever que:

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x(s, t), t) = \frac{\partial}{\partial x} u(x, t) \Big|_{x=x(s, t)} \frac{\partial}{\partial t} x(s, t) \Big|_{x=x(s, t)} + \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) \Big|_{x=x(s, t)} \quad (\text{B.23})$$

Usando a Equação (B.16) obtém-se:

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) \Big|_{x=x(s, t)} = - \frac{\partial}{\partial x} u(x, t) \Big|_{x=x(s, t)} \frac{\partial}{\partial t} x(s, t) \Big|_{x=x(s, t)} + f(u(x, t)) \quad (\text{B.24})$$

ou pela definição apresentada na Equação (B.19) tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u(x(s, t), t) \Big|_{x=x(s, t)} &= - \frac{\partial}{\partial x} u(x, t) \Big|_{x=x(s, t)} \frac{\partial}{\partial t} x(s, t) \Big|_{x=x(s, t)} + \\ &- \frac{\partial}{\partial x} c(u(x, t)) + \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) + g(u(x(s, t), t)) \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

Discretizações por diferenças finitas são aplicadas para aproximar derivadas espaciais. No caso particular pode-se escrever:

$$\frac{\partial}{\partial x} u(x, t) \Big|_{x=x(s, t)} \approx \frac{u(x(s_{i+1}, t), t) - u(x(s_{i-1}, t), t)}{x(s_{i+1}, t) - x(s_{i-1}, t)} \quad (\text{B.26})$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) \Big|_{x=x(s, t)} \approx \frac{\frac{u(x(s_{i+1}, t), t) - u(x(s_i, t), t)}{x(s_{i+1}, t) - x(s_i, t)} - \frac{u(x(s_i, t), t) - u(x(s_{i-1}, t), t)}{x(s_i, t) - x(s_{i-1}, t)}}{x(s_{i+1}, t) - x(s_{i-1}, t)} \quad (\text{B.27})$$

$$\frac{\partial}{\partial x} c(u(x, t)) \Big|_{x=x(s, t)} \approx \frac{c(u(x(s_{i+1}, t), t)) - c(u(x(s_{i-1}, t), t))}{x(s_{i+1}, t) - x(s_{i-1}, t)} \quad (\text{B.28})$$

Nota-se através das aproximações das derivadas apresentadas pelas Equações (B.26)

a (B.28) que no método da malha adaptativa x passa a ser uma variável que deve ser determinada como solução do sistema para cada tempo de integração, diferentemente do caso de malha fixa. Assim, uma ou mais EDP's podem ser transformadas em um conjunto de equações diferenciais ordinária (EDO's) através de um sistema na forma $X_i(t) \approx x(s_i, t)$ e $U_i(t) \approx u(x(s_i, t), t)$.

O sistema discretizado por diferenças finitas pode ser reescrito na forma:

$$U'_i(t) = X'_i(t) \left[\frac{U_{i+1}(t) - U_{i-1}(t)}{X_{i+1}(t) - X_{i-1}(t)} \right] + F_i(U(t), X(t)) \quad (\text{B.29})$$

para $1 \leq i \leq N$ e

$$\begin{aligned} F_i(U(t), X(t)) = & -\frac{c(U_{i+1}(t)) - c(U_{i-1}(t))}{X_{i+1}(t) - X_{i-1}(t)} + \\ & \frac{U_{i+1}(t) - U_i(t)}{X_{i+1}(t) - X_i(t)} - \frac{U_i(t) - U_{i-1}(t)}{X_i(t) - X_{i-1}(t)} \\ & + 2\varepsilon \frac{X_{i+1}(t) - X_i(t)}{X_{i+1}(t) - X_{i-1}(t)} + g(U_i(t)) \end{aligned} \quad (\text{B.30})$$

Apêndice A

Resultados das Simulações Numéricas

ESTE APÊNDICE apresenta os resultados das simulações numéricas do modelo alternativo para a sedimentação gravitacional em batelada de suspensões aquosas de caulim nas concentrações iniciais de 2%, 3% e 5% em malha fixa. Os resultados gráficos da simulação do modelo matemático de Burger e Concha (1998) aplicando *Moving Mesh* também são apresentados para ilustração do método.

Resultados da simulação numérica ($\varepsilon_{s0}=2\%$ e $N=26$)

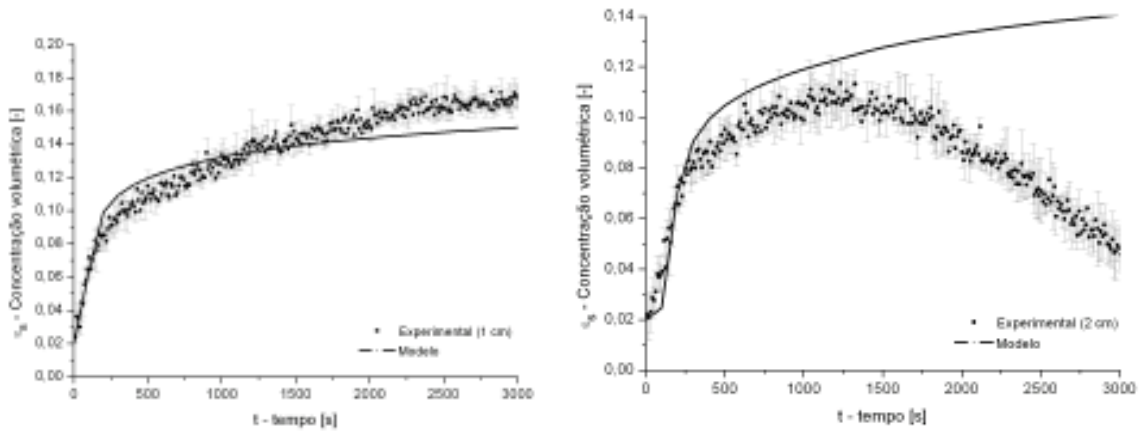


Figura A.1: Concentração em função do tempo nas posições 1 e 2 cm ($\varepsilon_{s0}=2\%$).

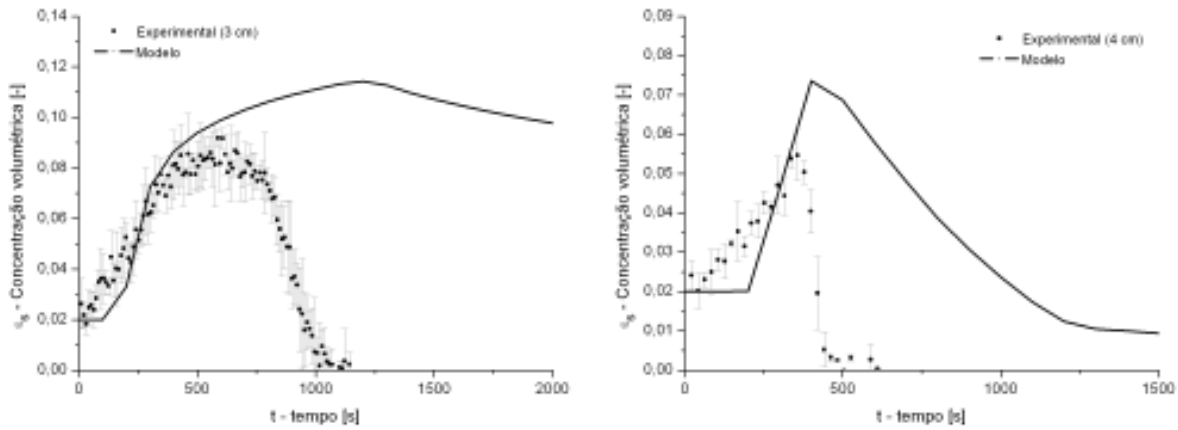


Figura A.2: Concentração em função do tempo nas posições 3 e 4 cm ($\varepsilon_{s0}=2\%$).

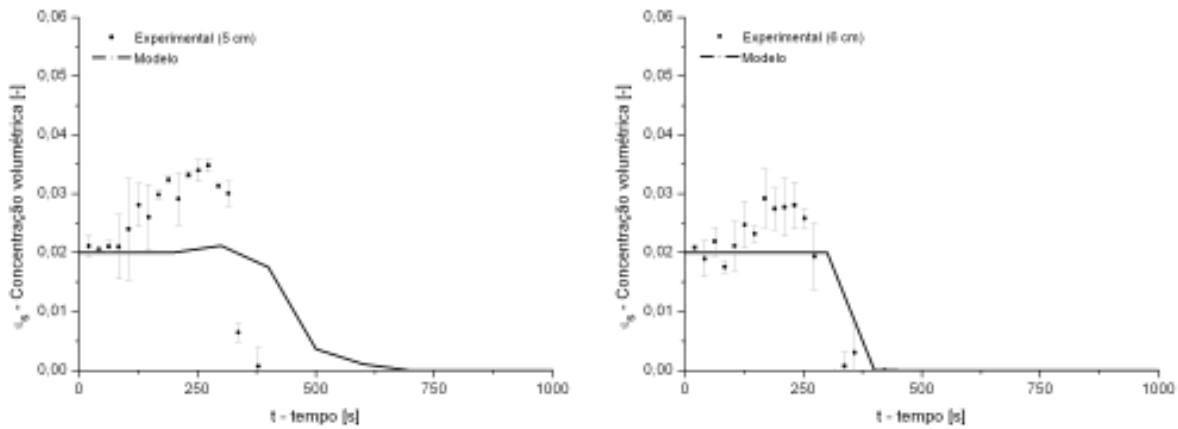


Figura A.3: Concentração em função do tempo nas posições 5 e 6 cm ($\varepsilon_{s0}=2\%$).

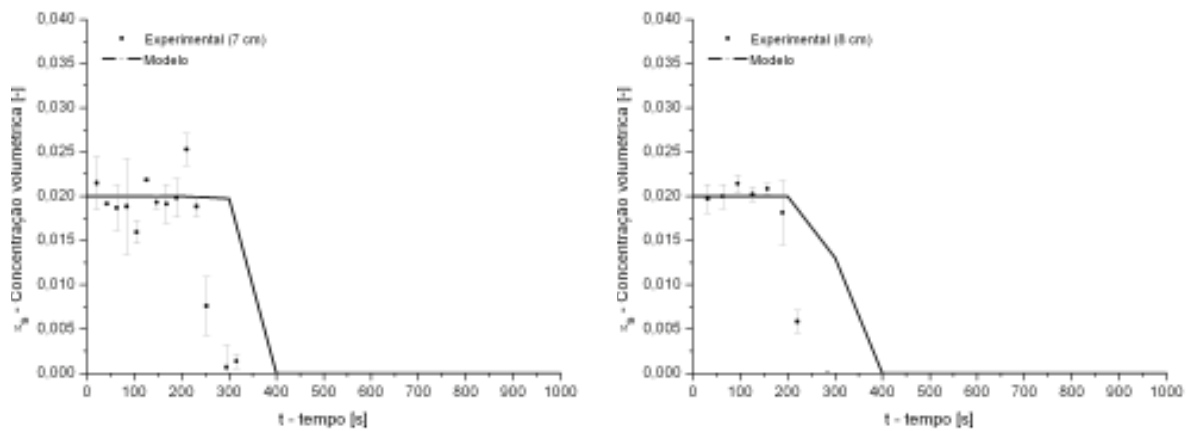


Figura A.4: Concentração em função do tempo nas posições 7 e 8 cm ($\varepsilon_{s0}=2\%$).

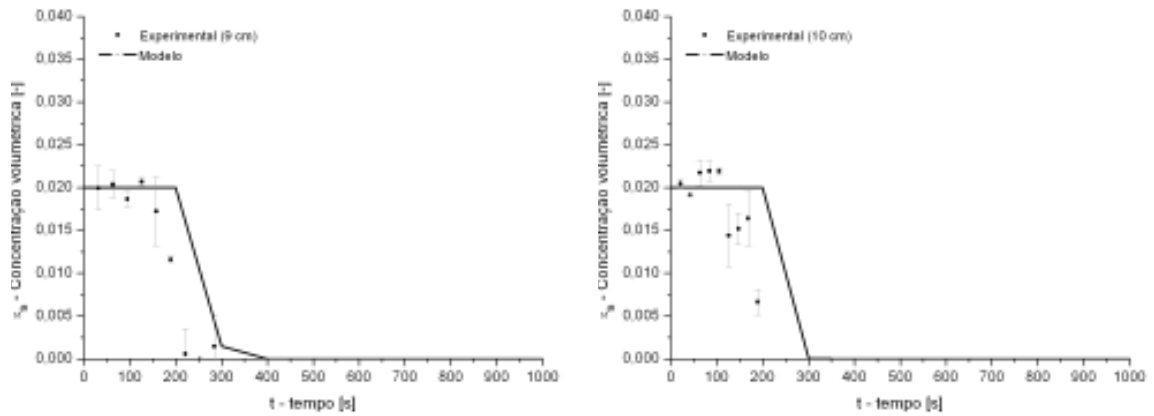


Figura A.5: Concentração em função do tempo nas posições 9 e 10 cm ($\epsilon_{s0}=2\%$).

Resultados da simulação numérica ($\epsilon_{s0}=3\%$ e $N=26$)

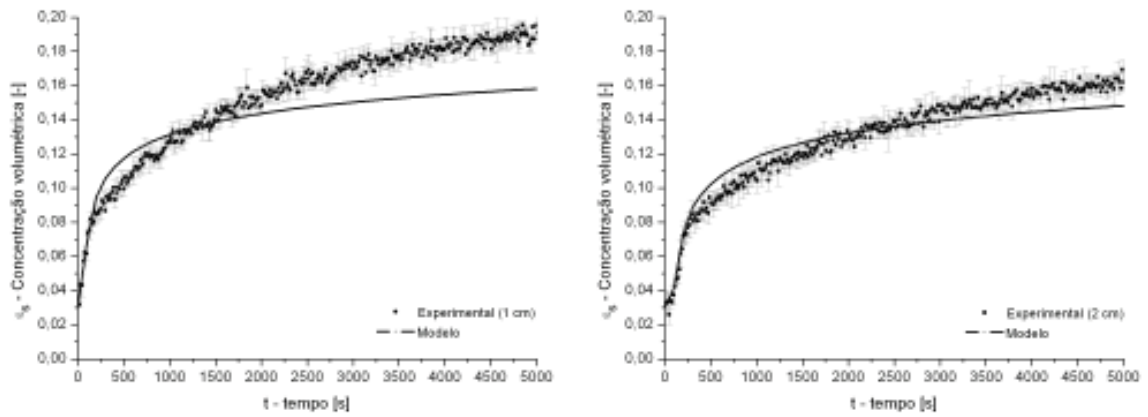


Figura A.6: Concentração em função do tempo nas posições 1 e 2 cm ($\epsilon_{s0}=3\%$).

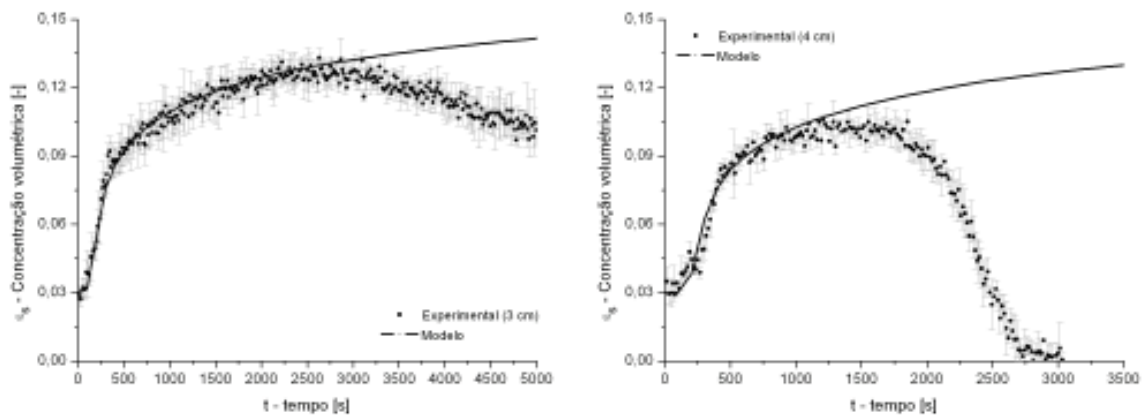


Figura A.7: Concentração em função do tempo nas posições 3 e 4 cm ($\epsilon_{s0}=3\%$).

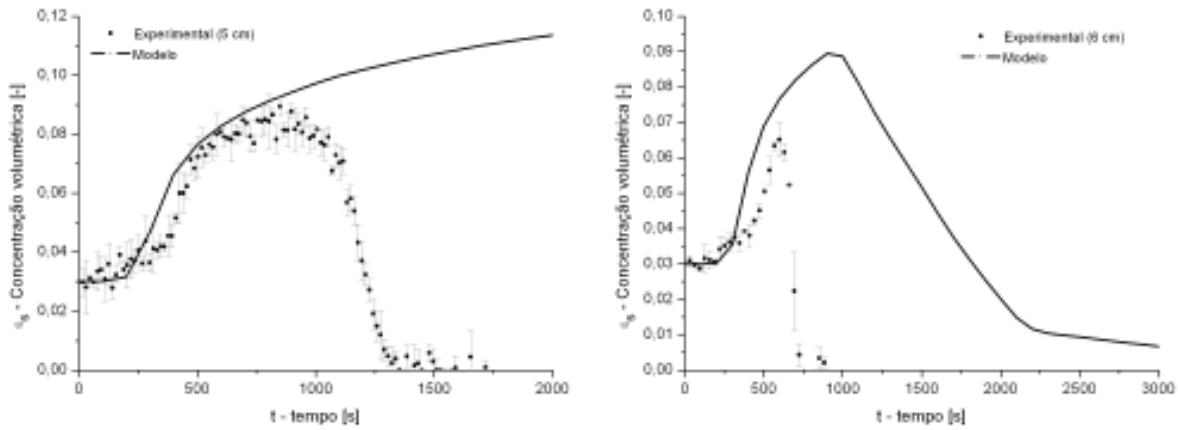


Figura A.8: Concentração em função do tempo nas posições 5 e 6 cm ($\epsilon_{s0}=3\%$).

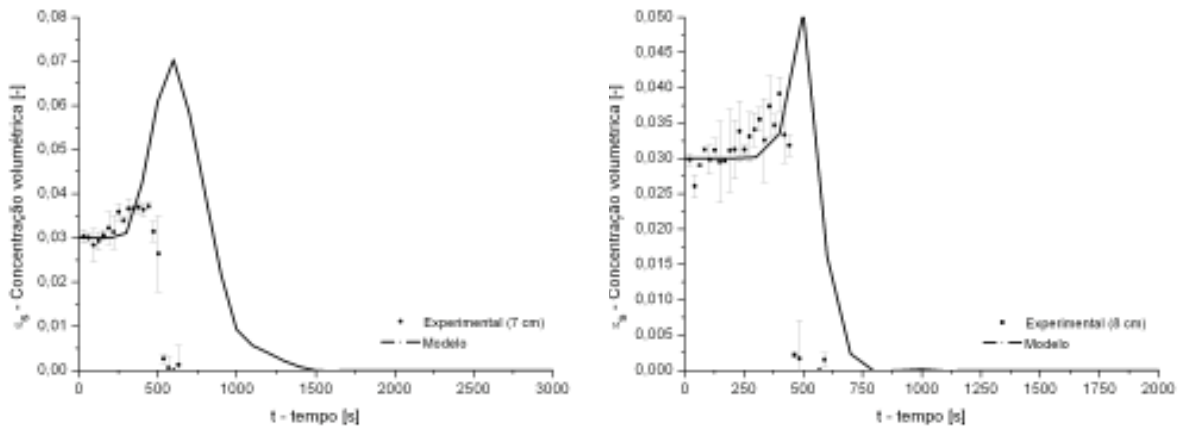


Figura A.9: Concentração em função do tempo nas posições 7 e 8 cm ($\epsilon_{s0}=3\%$).

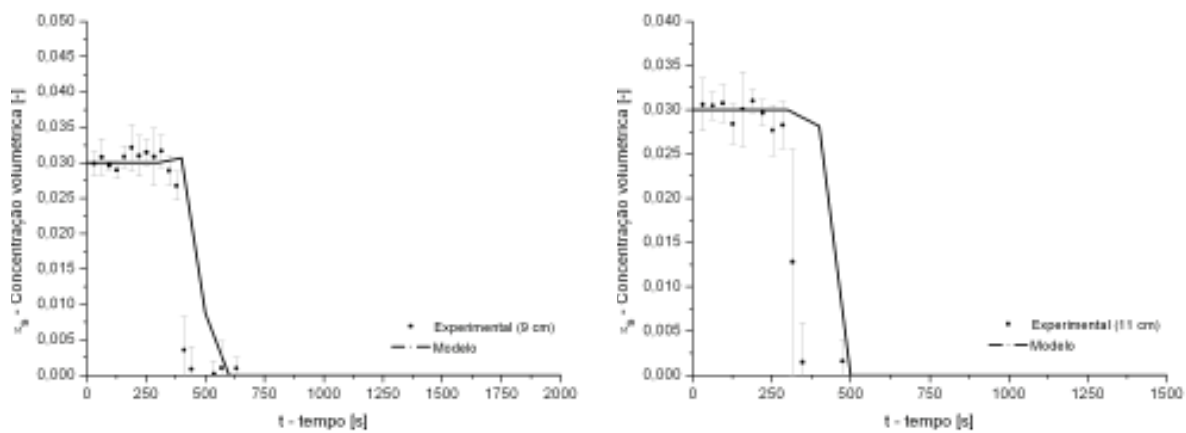


Figura A.10: Concentração em função do tempo nas posições 9 e 11 cm ($\epsilon_{s0}=3\%$).

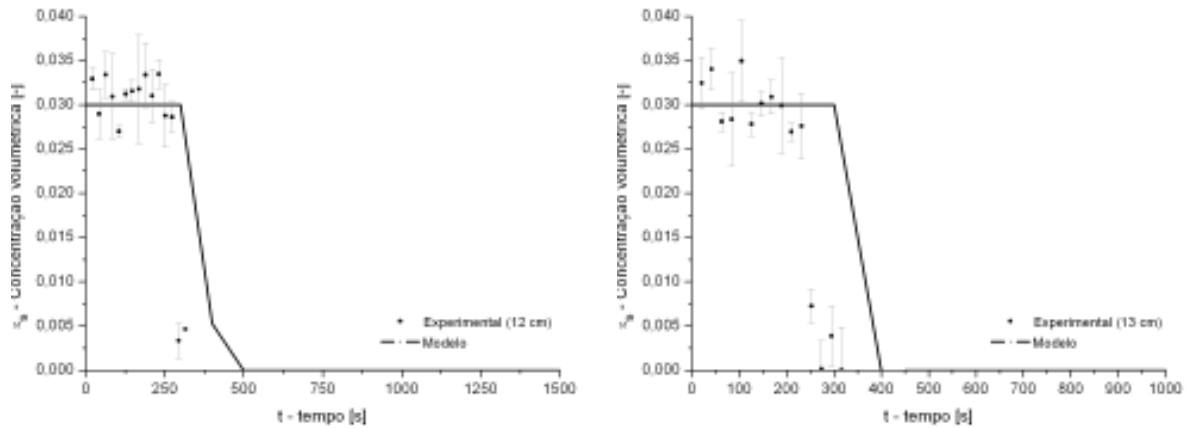


Figura A.11: Concentração em função do tempo nas posições 12 e 13 cm ($\varepsilon_{s0}=3\%$).

Resultados da simulação numérica ($\varepsilon_{s0}=5\%$ e $N=26$)

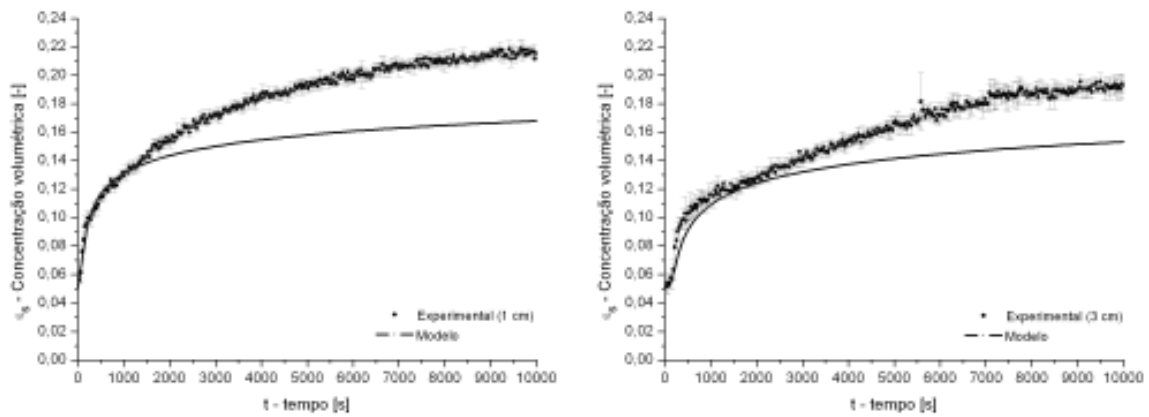


Figura A.12: Concentração em função do tempo nas posições 1 e 3 cm ($\varepsilon_{s0}=5\%$).

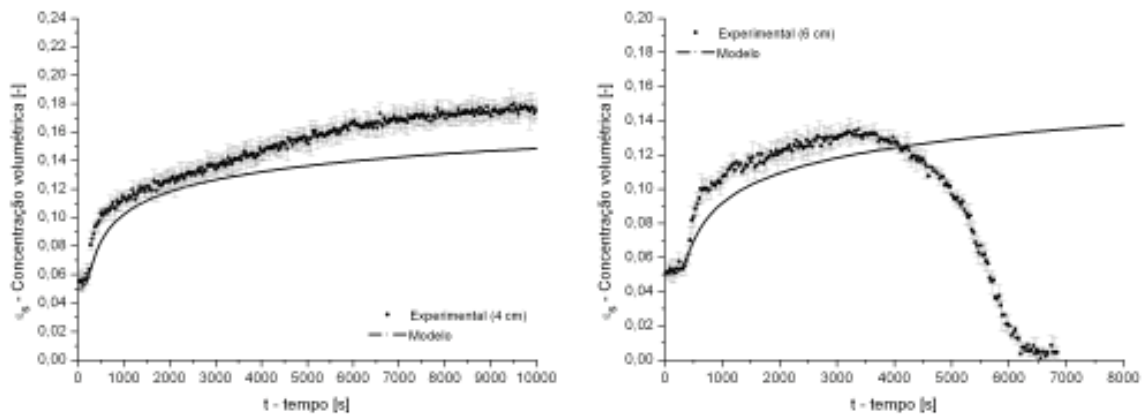


Figura A.13: Concentração em função do tempo nas posições 4 e 6 cm ($\varepsilon_{s0}=5\%$).

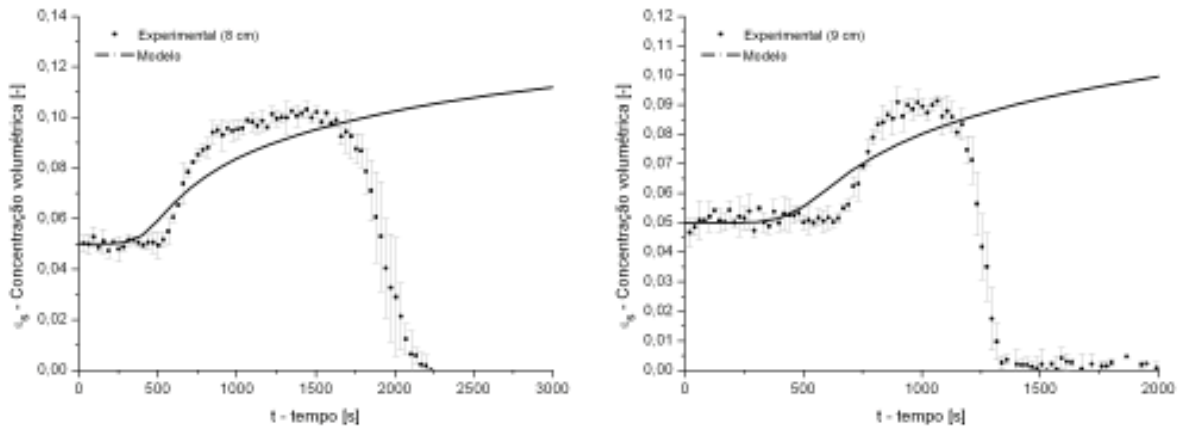


Figura A.14: Concentração em função do tempo nas posições 8 e 9 cm ($\varepsilon_{s0}=5\%$).

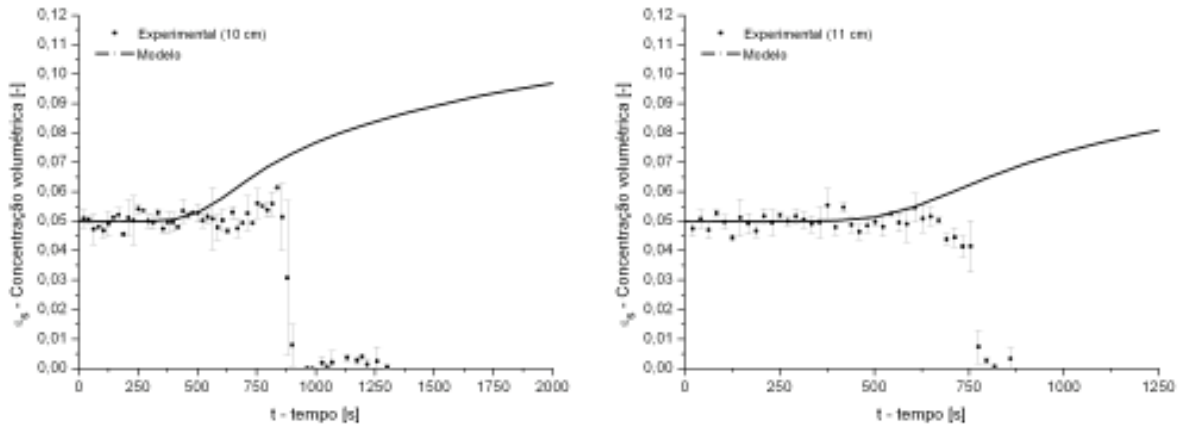


Figura A.15: Concentração em função do tempo nas posições 10 e 11 cm ($\varepsilon_{s0}=5\%$).

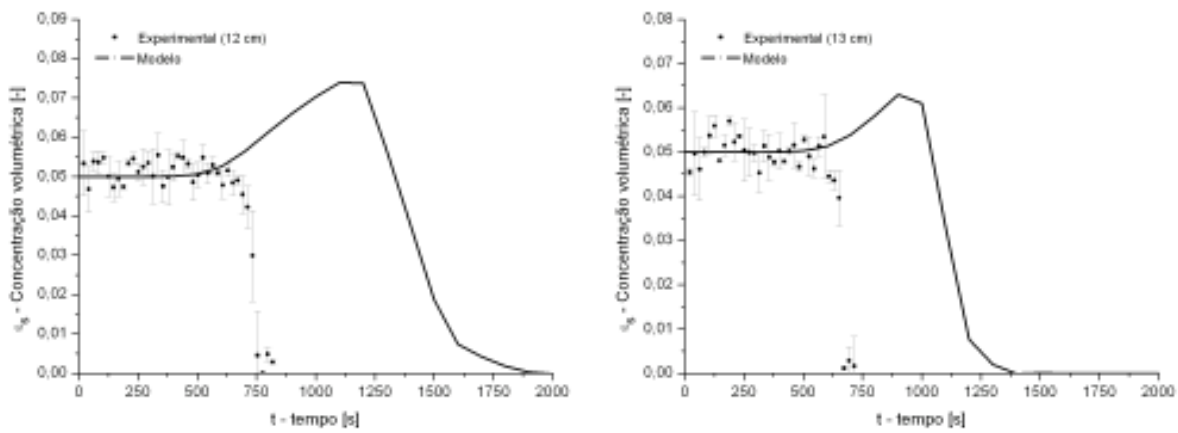


Figura A.16: Concentração em função do tempo nas posições 12 e 13 cm ($\varepsilon_{s0}=5\%$).

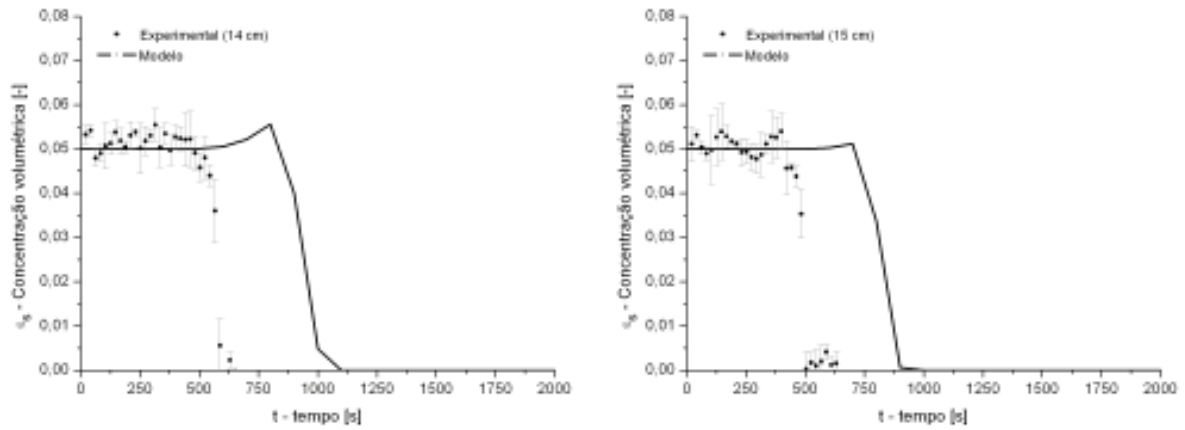


Figura A.17: Concentração em função do tempo nas posições 14 e 15 cm ($\varepsilon_{s0}=5\%$).

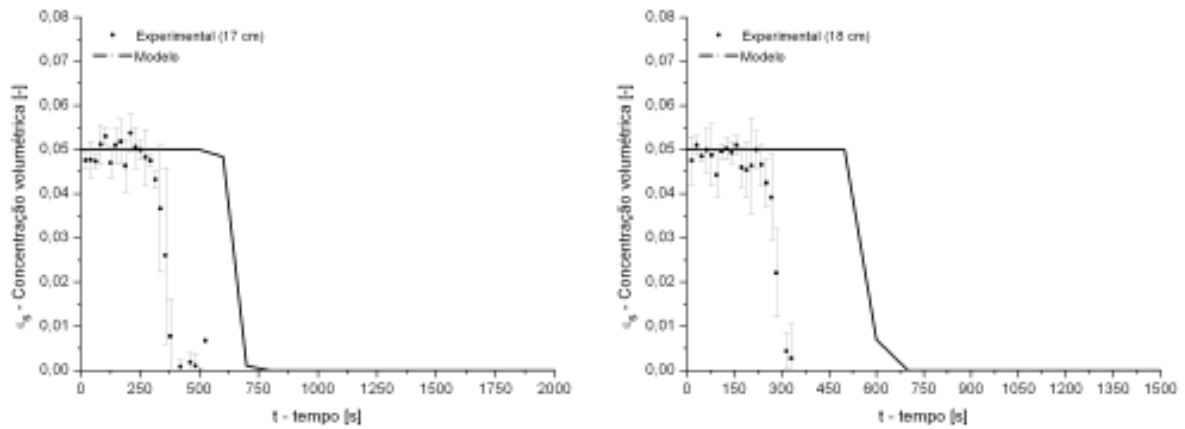


Figura A.18: Concentração em função do tempo nas posições 17 e 18 cm ($\varepsilon_{s0}=5\%$).

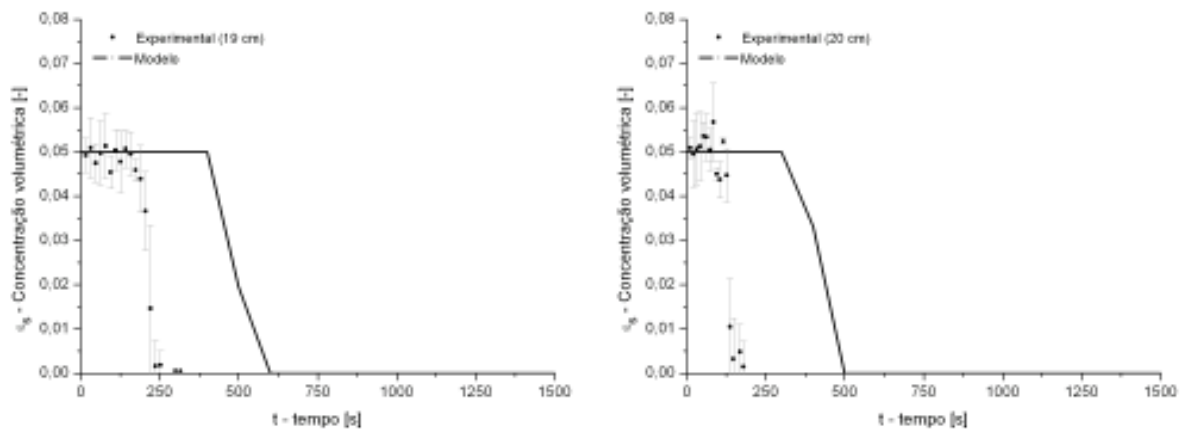


Figura A.19: Concentração em função do tempo nas posições 19 e 20 cm ($\varepsilon_{s0}=5\%$).

Resultados da simulação numérica do modelo de Burger e Concha (1998) utilizando o método de *Moving Mesh*

A avaliação da qualidade numérica de simulações em malha variável da sedimentação em batelada de suspensões floculadas foi conduzida usando equações constitutivas baseadas nos resultados experimentais de Been e Sills (1981).

O objetivo principal foi verificar a adequação das metodologias numéricas (método das Diferenças Finitas acoplado aos métodos MUSCL de segunda ordem e *Moving Mesh*) empregadas para descrever o comportamento de partículas sólidas utilizando o modelo de Burger e Concha (1998).

Been e Sills (1981) utilizaram a Técnica de Atenuação de Raios-X para monitorar a concentração de sólidos em lamaz ($\Delta\rho=1689,7 \text{ kg/m}^3$) com concentração inicial equivalente à 2,954%. A altura da coluna de sedimentação foi equivalente a $L=1,802 \text{ m}$. As equações constitutivas para f_{bk} e σ_e são apresentadas pelas Equações (5.33) à (5.35) no Capítulo 5.

As equações constitutivas baseadas nos resultados de Been e Sills (1981) foram usadas na malha adaptativa ($N=20$) e os resultados são apresentados na Figura A.20, que apresenta as distribuições de concentrações de sólidos na coluna para o tempo total de 30000 s de sedimentação.

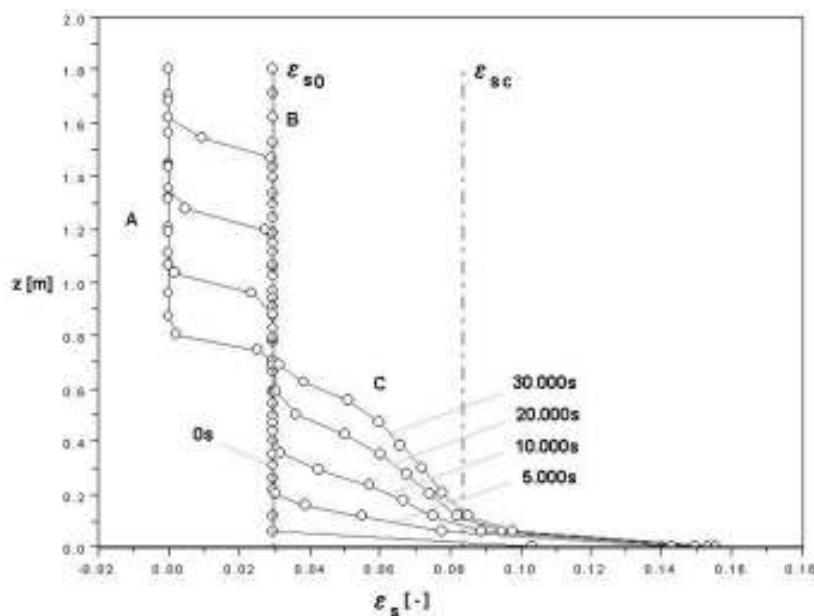


Figura A.20: Resultados da simulação numérica do modelo de Burger e Concha (1998) em malha variável.

Pode-se notar que a metodologia proposta foi eficiente para simular o problema misto hiperbólico-parabólico sendo que reportou bem os dados disponíveis na literatura mesmo

para uma resolução grosseira. Os nós internos do *grid* para a malha adaptativa são apresentados na Figura A.21 para as posições $z(t)$ iguais a 0,12, 0,4, 0,5 and 0,7 m. As variações dos nós internos estão relacionadas ao comportamento das derivadas das funções.

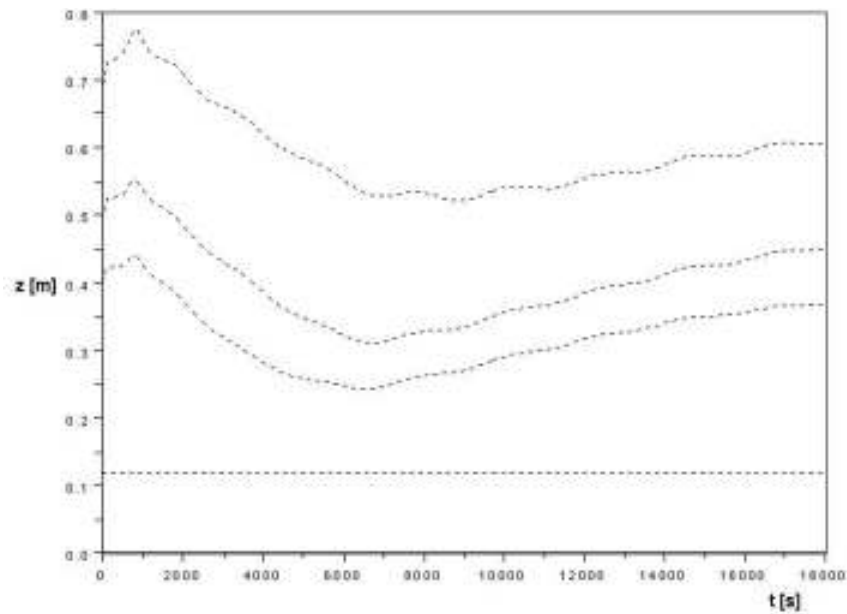


Figura A.21: Comportamento da malha variável para a solução do modelo de Burger e Concha (1998).

O Apêndice A apresentou os principais resultados das simulações numéricas da sedimentação em batelada.

Apêndice B

Programação Computacional



PROGRAMAÇÃO COMPUTACIONAL desenvolvida para simular a operação de sedimentadores nos estados transiente e estacionário é apresentada neste apêndice. As simulações numéricas foram obtidas utilizando-se o *software* de resolução numérica *Scilab*® v.3.1.1. O pacote computacional DASSL foi utilizado para resolução do sistema de equações algébrico-diferencial. Os métodos de Diferenças Finitas, MUSCL de segunda ordem, *Moving Mesh* e o método das Linhas (MOL) foram as principais métodos empregados na resolução do problema.

```
//=====
// ROTINA IMPLEMENTADA PARA SOLUÇÃO NUMÉRICA DA SEDIMENTAÇÃO
// Tese de Doutorado
// Fábio de O. Arouca, Luís Cláudio O. Lopes, J.J. Ribeiro Damasceno
//=====
//-----
clear;
mode(-1);
lines(0)
clc
sda();
clf(winsid(),'clear')
//-----
function [s]=plota_experimento(Exp,arquivo);
//graf=winsid();
//ngraf=graf();
ngraf=7;
disp(' **** Preparando gráficos: Aguarde ****')
//arquivo='C:\Dados.xls'
Sheets = readxls(arquivo)
typeof(Sheets)
```

```

//s1=Sheets(1)
//s2=Sheets(2)
//s3=Sheets(3)
v=[1;2;3;4;5;6];
dad=[2 11;3 14;5 21];
select Exp
case 10 then
s=Sheets(1)
for i=1:dad(1,2)
    x(i)=i-1;
end
// 2%
for i=1:dad(1,2)
    scf(ngraf+i)
    plot(s.value(:,v(1)),s.value(:,v(2)),'r.')
    plot(s.value(:,v(3)),s.value(:,v(4)),'b.')
    plot(s.value(:,v(5)),s.value(:,v(6)),'g.')
    v=v+7;
    xtitle([' Sistema a 2%: ' +string(x(i))+'cm'],'tempo(s)','fi[-]')
end
// 3%
//v=[1;2;3;4;5;6];
case 11 then
s=Sheets(2)
for i=1:dad(2,2)
    x(i)=i-1;
end
for i=1:dad(2,2)
    scf(ngraf+i)
    plot(s.value(:,v(1)),s.value(:,v(2)),'r.')
    plot(s.value(:,v(3)),s.value(:,v(4)),'b.')
    plot(s.value(:,v(5)),s.value(:,v(6)),'g.')
    v=v+7;
    xtitle([' Sistema a 3%: ' +string(x(i))+'cm'],'tempo(s)','fi[-]')
end
// 5%
//v=[1;2;3;4;5;6];
case 12 then
s=Sheets(3)
for i=1:dad(3,2)
    x(i)=i-1;
end
for i=1:dad(3,2)
    scf(ngraf+i)
    plot(s.value(:,v(1)),s.value(:,v(2)),'r.')
    plot(s.value(:,v(3)),s.value(:,v(4)),'b.')
    plot(s.value(:,v(5)),s.value(:,v(6)),'g.')
    v=v+7;
    xtitle([' Sistema a 5%: ' +string(x(i))+'cm'],'tempo(s)','fi[-]')
end
else
    disp("Experimento nao estudado!!.....")
    beep();
    s=[];
end
disp(' **** Gráficos: F I M ****')
endfunction
//-----

```

```

function gama=fcgama(fi,L,cte_a,cte_b,cte_c)
    if (fi>0) then
        gama=-L*cte_a*fi*(1-fi/cte_b)^cte_c;
    else
        gama=0;
    end
endfunction
//-----
function dgama=fcdgama(fi,cte_a,cte_b,cte_c,L)
    if (fi>0) then
        dgama=-L*(cte_a*(1-fi/cte_b)^cte_c-((cte_a*fi*cte_c*((1-fi/cte_b)^
        cte_c))/(cte_b*(1-fi/cte_b))));
    else
        dgama=0;
    end
endfunction
//-----
function [dPs]=dpress_sol(fi,Escp,Pa,inv_beta,a_ps,b_ps,c_ps,modPs)
if modPs==1 then
//dPs=derivative(press_sol,fi);
    dPs=Pa*inv_beta*(fi/Escp)^(inv_beta-1)/Escp;
else
    dPs=a_ps+b_ps*(c_ps+1)*(fi)^(c_ps);
end
endfunction
//-----
function dx=calc_dx(x)
    N1=length(x);
    for i=1:N1-1
        dx(i)=x(i+1)-x(i);
    end
endfunction
//-----
function [xind]=des(yy,xx)
    xind=[];
    tam=size(yy);
    for i=1:tam(2)
        s=find(yy(:,i)>0);
        ind=s(\$);
        aux=xx(ind,i);
        xind=[xind;aux];
    end
endfunction
//-----
// função que interpola YY para vetor de x desejado
function YYY=interpola(xbus,YY)
//          t0  t1  t2  ...
// YYY=[ x  y0  y1  y2  ... ]
    [nlin,ncol]=size(YY);
    YYY=[xbus];
    // interpola para valor dado vetor xbus
    for i=1:ncol
        ybusca=YY(2:(nlin-1)/2+1,i);
        xbusca=YY((nlin-1)/2+2:nlin,i);
        yy2=interp1(xbusca,ybusca,xbus,'linear');
        YYY=[YYY yy2]
    end
    YYY=clean(YYY);
end

```

```

endfunction
//-----
function [t,yydes,zz]=interpola2(YY,yydes,xbus)
[nlin,ncol]=size(YY);
t=[YY(1,:)];
yy=YY(2:(nlin-1)/2+1,:);
C = splin2d(xbus, t, yy,"not_a_knot");
[XX,YY] = ndgrid(yydes,t);
zz = interp2d(XX,YY, xbus, t, C);
endfunction
//-----
function ind=localiza_t(YY,ydes)
[nlin,ncol]=size(YY);
yy=YY(2:(nlin-1)/2+1,:);
y(1,:)=min(yy,'r');
y(2,:)=max(yy,'r');
aux=y-ydes;
aux2=sign(aux(1,:).*aux(2,:))
ind=find(aux2==1);
endfunction
//-----
function [tempo,xiso]=plotaequi(YY,ydes)
ind=localiza_t(YY,ydes)
xbus=[0:0.1:1]';
YYY=interpola(xbus,YY);
xiso=[]
for i=1:length(ind)
jM=max(find((YYY(:,ind(i)+1)-ydes)>=0));
acha=find(YYY(:,ind(i)+1)==YYY(jM,ind(i)+1));
jM=max(acha);
jm=jM+1;
xM=xbus(jM);xm=xbus(jm);
yM=YYY(jM,ind(i)+1);
ym=YYY(jm,ind(i)+1);
xdes=xM-(yM-ydes)/(yM-ym)*(xM-xm);
xiso=[xiso;xdes];
end
tempo=[YY(1,ind)]';
endfunction
function [tempot,xind]=plotadesc(YY)
[nlin,ncol]=size(YY);
ybusca=YY(2:(nlin-1)/2+1,:);
xbusca=YY((nlin-1)/2+2:nlin,:);
[xind]=des(ybusca,xbusca);
tempot=YY(1,:);
endfunction
//-----
function [dfbk,fbkcor,fbk,sigmaE,dsigmaE]=eq_const(fi,fic,Exp,cte_a,cte_b,cte_c,L,
Pa,inv_beta,a_ps,b_ps,c_ps,Escp,modPs)
select Exp
case 1 then
for i=1:length(fi)
if fi(i)<=fic then //Been and Sills (1981)
sigmaE(i)=0;
dsigmaE(i)=0;
fbk(i)=-1.211e-4*fi(i)*(1-7.226*fi(i))^5.15;
dfbk(i)=-.1211e-3*(1-7.226*fi(i))^5.15+.4506603290e-2*fi(i)*(1-7.226*
fi(i))^4.15;

```

```

    aux=.1211e-3;
    fbkcor(i)=fbk(i)/aux;
  else
    sigmaE(i)=15.56*exp(14.01*fi(i));
    dsigmaE(i)=14.01*15.56*exp(14.01*fi(i));
    fbk(i)=-1.433e-8*fi(i)^2*exp((0.6168*(1-fi(i)))/fi(i));
    dfbk(i)=-.2866e-7*fi(i)*exp(.6168*(1-fi(i))/fi(i))-1.433e-7*fi(i)^2*(-.6168/
    fi(i)-.6168*(1-fi(i))/fi(i)^2)*exp(.6168*(1-fi(i))/fi(i));
    aux=.1211e-3;
    fbkcor(i)=fbk(i)/aux;
  end
end
case 2 then
for i=1:length(fi)
  if fi(i)<fic then //Becker (1982)
    sigmaE(i)=0;
    dsigmaE(i)=0;
    fbk(i)=-6.05e-4*fi(i)*(1-fi(i))^12.59;
    dfbk(i)=-.605e-3*(1-fi(i))^12.59+.761695e-2*fi(i)*(1-fi(i))^11.59;
    aux=.605e-3;
    fbkcor(i)=fbk(i)/aux;
  else
    sigmaE(i)=5.35*exp(17.9*fi(i));
    dsigmaE(i)=17.9*5.35*exp(17.09*fi(i));
    fbk(i)=-6.05e-4*fi(i)*(1-fi(i))^12.59;
    dfbk(i)=-.605e-3*(1-fi(i))^12.59+.761695e-2*fi(i)*(1-fi(i))^11.59;
    aux=.605e-3;
    fbkcor(i)=fbk(i)/aux;
  end
end
case 3 then
for i=1:length(fi)
  if fi(i)<=fic then //Been and Sills (1981)
    sigmaE(i)=0;
    dsigmaE(i)=0;
    fbk(i)=-1.39e-4*fi(i)*(1-fi(i))^28.59;
    dfbk(i)=-.139e-3*(1-fi(i))^28.59+.397401e-2*fi(i)*(1-fi(i))^27.59;
    aux=.139e-3;
    fbkcor(i)=fbk(i)/aux;
  else
    sigmaE(i)=4*exp(21.265*fi(i));
    dsigmaE(i)=21.265*4*exp(21.265*fi(i));
    fbk(i)=-8.0e-9*fi(i)^2*exp(0.7675*(1-fi(i))/fi(i));
    dfbk(i)=-.160e-7*fi(i)*exp(.7675*(1-fi(i))/fi(i))-.80e-8*fi(i)^2*(-.7675/
    fi(i)-.7675*(1-fi(i))/fi(i)^2)*exp(.7675*(1-fi(i))/fi(i));
    aux=.139e-3;
    fbkcor(i)=fbk(i)/aux;
  end
end
case 4 then
for i=1:length(fi)
  if fi(i)<=fic then //Tiller e Kwon (1992)
    sigmaE(i)=0;
    dsigmaE(i)=0;
    fbk(i)=-3.082736e-4*fi(i)*((1-2*fi(i))^21.5);
    dfbk(i)=-.3082736e-3*(1-2*fi(i))^21.5+.1325576480e-1*fi(i)*(1-2*fi(i))^20.5;
    aux=.3082736e-3;
    fbkcor(i)=fbk(i)/aux;
  end
end

```

```

else
    sigmaE(i)=0.4*((fi(i)/0.07)^5-1);
    dsigmaE(i)=1189980.367*fi(i)^4;
    fbk(i)=-3.082736e-4*fi(i)*((1-2*fi(i))^21.5);
    dfbk(i)=-.3082736e-3*(1-2*fi(i))^21.5+.1325576480e-1*fi(i)*(1-2*fi(i))^20.5;
    aux=.3082736e-3;
    fbkcor(i)=fbk(i)/aux;
end
end
case 5 then
for i=1:length(fi)
    if fi(i)<=fic then //Been and Sills (1981)
        sigmaE(i)=0;
        dsigmaE(i)=0;
        fbk(i)=-1.101e-4*fi(i)*(1-7.226*fi(i))^5.15;
        dfbk(i)=-.1101e-3*(1-7.226*fi(i))^5.15+.4097250390e-2*fi(i)*(1-7.226*
        fi(i))^4.15;
        aux=.1101e-3;
        fbkcor(i)=fbk(i)/aux;
    else
        sigmaE(i)=15.56*exp(14.01*fi(i));
        dsigmaE(i)=217.9956*exp(14.01*fi(i));
        fbk(i)=-1.303e-8*(fi(i)^2)*exp(0.6168*(1-fi(i))/fi(i));
        dfbk(i)=-.2606e-7*fi(i)*exp(.6168*(1-fi(i))/fi(i))-1.303e-7*fi(i)^2*(-.6168/
        fi(i)-.6168*(1-fi(i))/fi(i)^2)*exp(.6168*(1-fi(i))/fi(i));
        aux=.1101e-3;
        fbkcor(i)=fbk(i)/aux;
    end
end
case 6 then
for i=1:length(fi)
    if fi(i)<=fic & fi(i)>0.07 then //Dreher (1997)
        sigmaE(i)=0;
        dsigmaE(i)=0;
        fbk(i)=(-3.8178*(fi(i)^2)+0.7482*fi(i)-0.0373)*1e-4;
        dfbk(i)=-.76356e-3*fi(i)+.7482e-4;
        aux=.3175e-4;
        fbkcor(i)=fbk(i)/aux;
    elseif fi(i)<=0.07 & fi(i)>=0 then
        sigmaE(i)=0
        dsigmaE(i)=0
        fbk(i)=(3.7942*(fi(i)^2)-0.3175*fi(i))*1e-4;
        dfbk(i)=.75884e-3*fi(i)-.3175e-4;
        aux=.3175e-4;
        fbkcor(i)=fbk(i)/aux;
    else
        sigmaE(i)=11*(((fi(i)/0.096)^5)-1);
        dsigmaE(i)=6745381.620*fi(i)^4;
        fbk(i)=-4.877e-4*((fi(i)^2)*exp(-45.078*fi(i))/(1-fi(i)));
        dfbk(i)=-.9754e-3*fi(i)*exp(-45.078*fi(i))/(1-fi(i))+.219845406e-1*fi(i)^2*
        exp(-45.078*fi(i))/(1-fi(i))-4.877e-3*fi(i)^2*exp(-45.078*fi(i))/(1-fi(i))^2;
        aux=.3175e-4;
        fbkcor(i)=fbk(i)/aux;
    end
end
case 7 then
for i=1:length(fi)
    if fi(i)<=fic then //Damasceno (1992)

```

```

        sigmaE(i)=0;
        dsigmaE(i)=0;
        fbk(i)=-1.9802137e-4*fi(i)*((1-(fi(i)/0.3))^5.647);
        dfbk(i)=-.19802137e-3*(1-3.33333333*fi(i))^5.647+.3727422254e-2*fi(i)*
        (1-3.33333333*fi(i))^4.647;
        aux=.19802137e-3;
        fbkcor(i)=fbk(i)/aux;
    else
        sigmaE(i)=5.7*(((fi(i)/0.1)^9.09)-1);
        dsigmaE(i)=.6374391583e11*fi(i)^8.09;
        fbk(i)=-5.517e-13*(fi(i)^(-7.47));
        dfbk(i)=.4121199e-11/fi(i)^8.47;
        aux=.19802137e-3;
        fbkcor(i)=fbk(i)/aux;
    end
end
case 10 then
    for i=1:length(fi) //TESE
        sigmaE(i)=1;
        dsigmaE(i)=dpress_sol(fi(i),Escp,Pa,inv_beta,a_ps,b_ps,c_ps,modPs);
        fbk(i)=fcgama(fi(i),L,cte_a,cte_b,cte_c)
        dfbk(i)=fcdgama(fi(i),cte_a,cte_b,cte_c,L);
        fbkcor(i)=1;
    end
case 11 then
    for i=1:length(fi)
        sigmaE(i)=1; //TESE
        dsigmaE(i)=dpress_sol(fi(i),Escp,Pa,inv_beta,a_ps,b_ps,c_ps,modPs);
        fbk(i)=fcgama(fi(i),L,cte_a,cte_b,cte_c)
        dfbk(i)=fcdgama(fi(i),cte_a,cte_b,cte_c,L);
        fbkcor(i)=1;
    end
case 12 then
    for i=1:length(fi)
        sigmaE(i)=1;
        dsigmaE(i)=dpress_sol(fi(i),Escp,Pa,inv_beta,a_ps,b_ps,c_ps,modPs);
        fbk(i)=fcgama(fi(i),L,cte_a,cte_b,cte_c)
        dfbk(i)=fcdgama(fi(i),cte_a,cte_b,cte_c,L);
        fbkcor(i)=1;
    end
end
endfunction
//-----
function [aa,dfbk,fbk,sigmaE,dsigmaE]=adif(fi,fic,L,Drho,g,Exp,cte_a,cte_b,
cte_c,Pa,inv_beta,a_ps,b_ps,c_ps,Escp,modPs)
    [dfbk,fbkcor,fbk,sigmaE,dsigmaE]=eq_const(fi,fic,Exp,cte_a,cte_b,cte_c,L,
    Pa,inv_beta,a_ps,b_ps,c_ps,Escp,modPs);
    for i=1:length(fi)
        if fi(i) < fic then
            aa(i)=0;
        else
            aa(i)=-fbk(i)*dsigmaE(i)/Drho/g/fi(i);
        end
    end
endfunction
//----
function [k]=permeabilidade(fi,Esck,eta,ko)
// k [=] cm^2 -->r^2=0.999

```

```

k=ko*(fi/Esck)^(-eta);
endfunction
//----
function [a,fbk]=fc_dif(fi,Esck,Escp,fic,mi,L,eta,ko,Pa,inv_beta,a_ps,b_ps,
c_ps,cte_a,cte_b,cte_c,modPs)
if fi < fic then
a=0;
else
a=permeabilidade(fi,Esck,eta,ko).*dpress_sol(fi,Escp,Pa,inv_beta,a_ps,
b_ps,c_ps,modPs).*(fi/mi);//(fi/L^2/mi);/*
end
[dfbk,fbkcor,fbk,sigmaE,dsigmaE]=eq_const(fi,fic,Exp,cte_a,cte_b,cte_c,L,Pa,
inv_beta,a_ps,b_ps,c_ps,Escp,modPs);
endfunction
//-----
// Função discretizada
//-----
function [r,ires]=fun(t,u,dudt,L,Drho,g,fic,fio,fimax,Exp,tau,rep,af,cte_a,
cte_b,cte_c,Pa,inv_beta,a_ps,b_ps,c_ps,Esck,Escp,modPs,moda)

//-----
//      i=1      i=2      i=3              i=N      i=N+1
//      |-----|-----|-----| o o o -|-----|
//      x=0      h      2h              (N-1)*h      N*h
//-----
// Calculo do vetor dx

x=u(N+2:2*N+2);
dx=calc_dx(u(N+2:2*N+2));
hf=dx(1);
if moda==1 then
[a,dfbk,fbk,sigmaE,dsigmaE]=adif(u(1:N+1),fic,L,Drho,g,Exp,cte_a,cte_b,cte_c,
Pa,inv_beta,a_ps,b_ps,c_ps,Escp,modPs)
else
[a,fbk]=fc_dif(u(1:N+1),Esck,Escp,fic,mi,L,eta,ko,Pa,inv_beta,a_ps,b_ps,c_ps,
cte_a,cte_b,cte_c,modPs)
dsigmaE=dpress_sol(u(1:N+1),Escp,Pa,inv_beta,a_ps,b_ps,c_ps,modPs);
end
fbk=fbk/L;
a=a/L^2;
dBN1=-u(N+1)/dx(N);
dAN1=(u(N+1)-u(N))/dx(N);
s(N+1)=1/2*(sign(dAN1)+sign(dBN1))*min(abs(dAN1),abs(dBN1))
fiL(N+1)=u(N+1)-dx(N)/2*s(N+1);
fiR(N+1)=u(N+1)+dx(N)/2*s(N+1);
// 1
dB1=(u(2)-u(1))/dx(1);
dA1=dB1;
s(1)=1/2*(sign(dA1)+sign(dB1))*min(abs(dA1),abs(dB1))
fiL(1)=u(1)-dx(1)/2*s(1);
fiR(1)=u(1)+dx(1)/2*s(1);
// i=2:N-1 -> pontos internos
for i=2:N
derivadaB=(u(i+1)-u(i))/dx(i);
derivadaA=(u(i)-u(i-1))/dx(i-1);
s(i)=1/2*(sign(derivadaA)+sign(derivadaB))*min(abs(derivadaA),abs(derivadaB))
fiL(i)=u(i)-dx(i)/2*s(i);
fiR(i)=u(i)+dx(i)/2*s(i);

```

```

end
if moda==1 then
    [aL,dfbkL,fbkL,sigmaEL,dsigmaEL]=adif(fiL,fic,L,Drho,g,Exp,cte_a,cte_b,
    cte_c,Pa,inv_beta,a_ps,b_ps,c_ps,Escp,modPs)
    [aR,dfbkR,fbkR,sigmaER,dsigmaER]=adif(fiR,fic,L,Drho,g,Exp,cte_a,cte_b,cte_c,
    Pa,inv_beta,a_ps,b_ps,c_ps,Escp,modPs)
    [amax,dfbkmax,fbkmax,sigmaEmax,dsigmaEmax]=adif(fimax,fic,L,Drho,g,Exp,cte_a,
    cte_b,cte_c,Pa,inv_beta,a_ps,b_ps,c_ps,Escp,modPs)
else
    [aL,fbkL]=fc_dif(fiL,Esck,Escp,fic,mi,L,eta,ko,Pa,inv_beta,a_ps,b_ps,c_ps,cte_a,
    cte_b,cte_c,modPs)
    [aR,fbkR]=fc_dif(fiR,Esck,Escp,fic,mi,L,eta,ko,Pa,inv_beta,a_ps,b_ps,c_ps,cte_a,
    cte_b,cte_c,modPs)
    [amax,fbkmax]=fc_dif(fimax,Esck,Escp,fic,mi,L,eta,ko,Pa,inv_beta,a_ps,b_ps,c_ps,
    cte_a,cte_b,cte_c,modPs)
end
fbkL=fbkL/L;
aL=aL/L^2;
fbkR=fbkR/L;
aR=aR/L^2;
fbkmax=fbkmax/L;
amax=amax/L^2;
if u(1) < fic then
    derivada=(-3*fbk(1)+4*fbk(2)-fbk(3))/2/hf;
    // i=1    -> x=0
    r(1)=derivada+dudt(1);
else
    r(1)=(-3*u(1)+4*u(2)-u(3))*dsigmaE(1)/2/dx(1)+L*Drho*g*u(1);
end
for i=2:N-1
    derivada=(fctfeo(fiR(i),fiL(i+1),L,umin,cte_a,cte_b,cte_c,Pa,inv_beta,
    a_ps,b_ps,c_ps,Escp,modPs)-fctfeo(fiR(i-1),fiL(i),L,umin,cte_a,cte_b,
    cte_c,Pa,inv_beta,a_ps,b_ps,c_ps,Escp,modPs))/((dx(i-1)+dx(i))/2);
    if u(i) <= fic then
        r(i)=derivada+dudt(i);
    else
        dd2i= ((u(i+1)-u(i))/(x(i+1)-x(i))-(u(i)-u(i-1))/(x(i)-
        x(i-1)))/(x(i+1)-x(i-1)));
        dadxi=(a(i+1)-a(i-1))/(x(i+1)-x(i-1));
        dudxi=(u(i+1)-u(i-1))/(x(i+1)-x(i-1));
        r(i)=(-derivada+a(i)*dd2i+dadxi*dudxi)-dudt(i);
    end
end
end
// i=N    -> ponto N
derivada=(fctfeo(fiR(N),fiL(N+1),L,umin,cte_a,cte_b,cte_c,Pa,inv_beta,
a_ps,b_ps,c_ps,
Escp,modPs)-fctfeo(fiR(N-1),fiL(N),L,umin,cte_a,cte_b,cte_c,Pa,inv_beta,
a_ps,b_ps,c_ps,
Escp,modPs))/((dx(N)+dx(N-1))/2); // hipótese média aritmética para dx
r(N)=derivada+dudt(N);
// i=N+1    -> x=1
derivada=(fctfeo(fiR(N+1),0,L,umin,cte_a,cte_b,cte_c,Pa,inv_beta,a_ps,
b_ps,c_ps,Escp,
modPs)-fctfeo(fiR(N),fiL(N+1),L,umin,cte_a,cte_b,cte_c,Pa,inv_beta,a_ps,
b_ps,c_ps,
Escp,modPs))/dx(N); // hipótese média aritmética para dx(N)=média
r(N+1)=derivada+dudt(N+1);
//-----

```

```

    if rep(1)<3 then
        for i=N+2:2*N+2
            r(i)=dudt(i);
        end
    else
//-----
//=====      M   O   V   I   N   G      M   E   S   H      =====
// |-----|-----|-----|-----|...|-----|-----|
// i=1          i=2          i=3          i=4                                i=N          i=N+1
//x1=0          x2          x3          x(1)                                x(N-3)      xNM2=1
//v(1)          v(2)                                u(N)          uNP1
//|-->  malha fixa <--|          |-->      Malha adaptativa      <--|
//              M0          M(1)                                M(N-3)      MNM2
//              SMO          SM(1)                                SM(N-3)      SMNM2
//-----
// ajuste do vetor x
x1=x(1);
x2=x(2);
x3=x(3);
xNM2=x(N+1);
xx=x(4:\$-1);
// tau=1e-3; // 1e-5; // Parametro de sintonia do metodo
284 para valores de tau
n=N-2;
uNP1=u(N+1);
uNP2=0; // Hipótese usada acima
// M - Funcao de monitoramento:
M0=sqrt(1+af*((u(4)-u(2))/(xx(1)-x2))^2);
M(1)=sqrt(1+af*((u(5)-u(3))/(xx(2)-x3))^2);
for i = 5:N-1
    M(i-3)=sqrt(1+af*((u(i+1)-u(i-1))/(xx(i-2)-xx(i-4)))^2);
end
M(N-3)=sqrt(1+af*((uNP1-u(N-1))/(xNM2-xx(N-4)))^2);
MNM2=sqrt(1+af*((uNP2-u(N))/(2*(xNM2-xx(N-3))))^2);
//-----
// SM - Funcao de amortecimento espacial (gamma=2 e p=2):
SM0=sqrt((9*M0^2+6*M(1)^2+4*M(2)^2)/19);
SM(1)=sqrt((6*M0^2+9*M(1)^2+6*M(2)^2+4*M(3)^2)/25);
SM(2)=sqrt((4*M0^2+6*M(1)^2+9*M(2)^2+6*M(3)^2+4*M(4)^2)/29);
for j=3:N-5
    SM(j)=sqrt((4*M(j-2)^2+6*M(j-1)^2+9*M(j)^2+6*M(j+1)^2+4*M(j+2)^2)/29);
end
SM(N-4)=sqrt((4*M(N-6)^2+6*M(N-5)^2+9*M(N-4)^2+6*M(N-3)^2+4*MNM2^2)/29);
SM(N-3)=sqrt((4*M(N-5)^2 + 6*M(N-4)^2+9*M(N-3)^2+6*MNM2^2)/25);
SMNM2=sqrt((4*M(N-4)^2 + 6*M(N-3)^2 + 9*MNM2^2)/19);
//-----
// regio para x fixo -> dxdt=0
for i=1:3
    r(N+1+i)=dudt(i+N+1);
end
//-----
// r -- Entrar com a MMPDE: HUANG (1994), pag 280
E(1)= (SM(2)+SM(1))/((((1-2*hf)/n)^2))*((xx(2)-xx(1))- (SM(1)+SM0)/((((1-2*hf)/n)^2))*((xx(1)-x3);
r(N+5)=(1/((((1-2*hf)/n)^2))*((dudt(5+N+1)-2*dudt(4+N+1))+E(1)/tau;
for i=2:N-4

```

```

E(i)= (SM(i+1)+SM(i))/((((1-2*hf)/n)^2))*(xx(i+1)-xx(i))- (SM(i)+SM(i-1))/
((((1-2*hf)/n)^2))*(xx(i)-xx(i-1));
r(i+N+4)=(1/((((1-2*hf)/n)^2))*(dudt(i+4+N+1)-2*dudt(i+N+4)+dudt(i-1+N+4))
+E(i)/tau;
end
E(N-3)= (SMNM2+SM(N-3))/((((1-2*hf)/n)^2))*(xNM2-xx(N-3))- (SM(N-3)+SM(N-4))/
((((1-2*hf)/n)^2))*(xx(N-3)-xx(N-4));
r(2*N+1)=(1/((((1-2*hf)/n)^2))*(dudt(N+1+N+1)-2*dudt(N+N+1)+dudt(N-1+N+1))+
E(N-3)/tau;
//-----
r(2*N+2)=dudt(2*N+2);
//-----
end
ires=0;
r=real(r);
endfunction
//-----
// Condição inicial para velocidade dos nós
//-----
function der0=calcula_condicao(NN,ff,E,tau)
// NN dimensão da matriz de coeficientes
Mat0=eye(NN,NN)*(-2*ff);
for i=1:NN
for j=1:NN
if (j==i+1) | (j==i-1) then
Mat0(i,j)=ff;
end
end
end
der0=inv(Mat0)*(-E)/tau;
endfunction
//-----
// Bisseccção
//-----
function [sol,erro,fc,kit]=bis(a,b,delta,L,deltarho,g,h,u2,u3,uc,Exp,
cte_a,cte_b,cte_c,Pa,inv_beta,a_ps,b_ps,c_ps,Escp,modPs)
ya=fct3(a,L,deltarho,g,h,u2,u3,uc,Exp,cte_a,cte_b,cte_c,Pa,inv_beta,
a_ps,b_ps,c_ps,Escp,modPs);
yb=fct3(b,L,deltarho,g,h,u2,u3,uc,Exp,cte_a,cte_b,cte_c,Pa,inv_beta,
a_ps,b_ps,c_ps,Escp,modPs);
if ya*yb > 0, break, end
max1=1+round((log(b-a)-log(delta))/log(2));
kit=0;
for k=1:max1
kit=kit+1;
c=(b+a)/2;
yc=fct3(c,L,deltarho,g,h,u2,u3,uc,Exp,cte_a,cte_b,cte_c,Pa,inv_beta,
a_ps,b_ps,c_ps,Escp,modPs);
if yc==0
a=c;
b=c;
elseif yb*yc>0
b=c;
yb=yc;
else
a=c;
ya=yc;
end
end

```

```

        if abs(b-a)<delta, break, end
    end
    sol=(a+b)/2;
    erro=abs(b-a);
    fc=fct3(sol,L,deltarho,g,h,u2,u3,uc,Exp,cte_a,cte_b,cte_c,Pa,inv_beta,a_ps,
        b_ps,c_ps,Escp,modPs);
endfunction
//-----
function [f]=fct3(x,L,Drho,g,h,v2,v3,fic,Exp,cte_a,cte_b,cte_c,Pa,inv_beta,
a_ps,b_ps,c_ps,Escp,modPs)
    [dfbk,fbkcor,fbk,sigmaE,dsigmaE]=eq_const(x,fic,Exp,cte_a,cte_b,cte_c,L,
    Pa,inv_beta,a_ps,b_ps,c_ps,Escp,modPs);
    f=(-3*x+4*v2-v3)*dsigmaE(1)/2/h+L*Drho*g*x;
endfunction
//-----
function [dumin]=dfbkumin(x,fic,Exp,cte_a,cte_b,cte_c,Pa,inv_beta,a_ps,b_ps,
c_ps,Escp,modPs)
    [dfbk,fbkcor,fbk,sigmaE,dsigmaE]=eq_const(x,fic,Exp,cte_a,cte_b,cte_c,L,Pa,
    inv_beta,a_ps,b_ps,c_ps,Escp,modPs);
    dumin=dfbk;
endfunction
//-----
function [dxdt]=fcaract(t,x,u,fic,L,Drho,g,Exp,cte_a,cte_b,cte_c,Pa,inv_beta,
a_ps,b_ps,c_ps,Escp,modPs)
    [a,dfbk,fbk,sigmaE,dsigmaE]=adif(u,fic,L,Drho,g,Exp,cte_a,cte_b,cte_c,Pa,
    inv_beta,a_ps,b_ps,c_ps,Escp,modPs)
    dfbk=dfbk/L;
    dxdt=-dfbk;
endfunction
//-----
function feo=fctfeo(u,v,L,umin,cte_a,cte_b,cte_c,Pa,inv_beta,a_ps,b_ps,c_ps,
Escp,modPs)
    if u <=umin then
        if v<= umin then
            [dfbk,fbkcor,feo,sigmaE,dsigmaE]=eq_const(v,fic,Exp,cte_a,cte_b,cte_c,L,
            Pa,inv_beta,a_ps,b_ps,c_ps,Escp,modPs);
            feo=feo/L;
        else
            [dfbk,fbkcor,feo,sigmaE,dsigmaE]=eq_const(umin,fic,Exp,cte_a,cte_b,cte_c,
            L,Pa,inv_beta,a_ps,b_ps,c_ps,Escp,modPs);
            feo=feo/L;
        end
    end
    else
        if v<= umin then
            [dfbk,fbkcor,feov,sigmaE,dsigmaE]=eq_const([u;v;umin],fic,Exp,cte_a,
            cte_b,cte_c,L,Pa,inv_beta,a_ps,b_ps,c_ps,Escp,modPs);
            feov=feov/L;
            feo=feov(1)+feov(2)-feov(3);
        else
            [dfbk,fbkcor,feo,sigmaE,dsigmaE]=eq_const(u,fic,Exp,cte_a,cte_b,cte_c,L,Pa,
            inv_beta,a_ps,b_ps,c_ps,Escp,modPs);
            feo=feo/L;
        end
    end
endfunction
//-----
//-----
//
P R O G R A M A          P R I N C I P A L

```

```

//-----
//-----
txt=['Experimento','Nós internos =','Cond. z=0','Tempo final='];
valor=x_mdilog('Entre com os dados:',txt,['10','22','3','3000']);
Exp=evstr(valor(1));Ni=evstr(valor(2));condicao=evstr(valor(3));tfinal
=evstr(valor(4));
// Valor de tau para o método de moving mesh
tau=1e-3;//1e-5; // Parametro de sintonia do metodo
para valores de tau
printf(" ***** S I M U L A C A O      D E      S E D I M E N T A D O R
E M      B A T E L A D A *****\n");
// Permeabilidade
ko= 1.69152e-7;
Esck=0.128734;
eta= 2.47367;
//Pressão modPs=1
Pa=1.012542;//0.1954;//0.2183;
inv_beta=8.7236948;
//Pressão modPs=2
a_ps=1647.2428;
b_ps=1.8723993e15;
c_ps=19.8795;
// Gama
cte_a=0.686968287;//0.218437;
cte_b=-0.00035328;//-0.00067419;
cte_c=-1.43112159;//-1.3458025;
select Exp
case 1 then
    titulo='Been e Sills (1981)';
    fio=0.02954;
    fic=1/12;
    L=1.802;
    Drho=1689.7;
    g=9.81;
    fimax=0.3084;
case 2 then
    titulo='Becker (1982)';
    fio=0.123;
    fic=0.23;
    L=6; //original
    Drho=1500;
    g=9.81;
    fimax=1;
case 3 then
    titulo='Been e Sills (1981)';
    fio=0.05264;
    fic=1/12;
    L=1.742;
    Drho=1689.7;
    g=9.81;
    fimax=0.5;
case 4 then
    titulo='Tiller e Kwon (1992)';
    fio=0.05;
    fic=0.07;
    L=0.16;
    Drho=1562;
    g=9.81;

```

```
fimax=0.5;
case 5 then
    titulo='Been and Sills (1981)';
    fio=0.09231;
    fic=0.083;
    L=0.643;
    Drho=1536.1;
    g=9.81;
    fimax=0.26;
case 6 then
    titulo='Dreher (1997)';
    fio=0.07;
    fic=0.096;
    L=1.19;
    Drho=1560;
    g=9.81;
    fimax=0.23;
case 7 then
    titulo='Damasceno (1992)';
    fio=0.05;
    fic=0.18;
    L=2;
    Drho=1660;
    g=9.81;
    fimax=0.30;
case 10 then
    // Parâmetros Constitutivos
    Drho=1.577;
    g=981;
    mi=0.01;
    titulo='Arouca 2%';
    fio=0.02;
    L=22.8;
    Escp=0.104199;
    fic=0.104199;
    fimax=0.27;
case 11 then
    Drho=1.577;
    g=981;
    fimax=0.27;
    mi=0.01;
    Escp=0.104199;
    titulo='Arouca 3%';
    fio=0.03;
    L=23.0;
    fic=0.104199;
case 12 then
    Drho=1.577;
    g=981;
    fimax=0.27;
    mi=0.01;
    Escp=0.104199;
    fic=0.104199;
    titulo='Arouca 5%';
    fio=0.05;
    L=23.6;
else
    disp("Experimento nao estudado!!.....")
```

```

    beep();
end
Nt=Ni+2;
N=Nt-1;
txt=['No. Curvas (z versus u)','Plota x (0..N+1)','Plota equi (S/N)'];
valor=x_mdialog('Saída de Resultados:',txt,['5','5','N']);
Ncurvas=evstr(valor(1));plotax=evstr(valor(2));equi=valor(3);
finaliza=%F;
if (plotax > 0 & Ncurvas > 0) then
    txt=['Instantes para Curvas','Pontos x'];
    while finaliza==%F then
        valor=x_mdialog('Entre com dados:',txt,['0;500;1000;2000;3000','
        '1;3;6;7;9']);
        tcurvas=evstr(valor(1)); tx=evstr(valor(2))
        if (length(tcurvas)==Ncurvas & length(tx)== plotax & max(tx)< Nt) then
            finaliza=%T;
        end
    end
else
    txt=['Instantes para Curvas'];
    while finaliza==%F then
        valor=x_mdialog('Entre com dados:',txt,['0;500;1000;2000;3000']);
        tcurvas=evstr(valor(1));
        if (length(tcurvas)==Ncurvas) then
            finaliza=%T;
        end
    end
end
modPs=1;moda=1;
if Ncurvas > 0 then
    icurvas=[];
    for i=1:Ncurvas
        icurvas=[icurvas;(tcurvas(i)/100)+1];
    end
end
// cond =1 -> fi(x=0)=fio
// cond =2 -> fi(x=0)=fic
// cond =3 -> fi(x=0)=fic+delta
l1=list('Tipo de Malha',1,['Malha Fixa (h)','Fixa Híbrida (hf,hmm)',
'Moving Mesh (hf,hmm)']);
//l2=list('Malha Inicial',2,['3hf+i*hmm','3hf+i/(N+1)','h iguais']);
rep=x_choices('Especificação do Problema de Simulação Desejado',list(l1));
if rep(1)==1 then
    h=1/(Nt-1);
    x=[0:h:1];
    hf=h;
else
    txt=[' h para parte fixa='];
    valor=x_mdialog('Entre com os dados:',txt,['0.0333']);
    hf=evstr(valor(1));
    l2=list('Malha Inicial',1,['3hf+i*hmm','3hf+i/(N+1)']);
    rep2=x_choices('Especificação do Problema de Simulação Desejado',list(l2));
    // hf hf hm hm .... 1
    Nmm=Ni-2;
    hmm=(1-2*hf)/(Nmm+1);
    if rep2(1)==2 then
        x(1:3)=[0:hf:2*hf];
        for i=N+1:-1:4

```

```

        x(i)=i/(N+1);
    end
    elseif rep2(1)==1 then
        // Condição inicial para x
        x=[[0:hf:2*hf]'; [2*hf+hmm:hmm:1]'];
    end
end
end
uo=fio;
uc=fic;
af=(L/fimax)^2; // Especifica escalonamento de função de Monitoramento
af=1; //
// Calculo do valor de u para fbkmin
x0=1e-4; // fio/2;
falha=0;
dflista=list(dfbkumin,fic,Exp,cte_a,cte_b,cte_c,Pa,inv_beta,a_ps,b_ps,
c_ps,Escp,modPs);
[umin,fv,iflag]=fsolve(x0,dflista)
if iflag <> 1 then
    falha=1;
    disp(' fbk monotônico?')
    return
end
//-----
//if rep(2)<3 then
//Especificando o vetor de condições iniciais e os parâmetros de DASSL:
// Calculo do N para parte com moving mesh
// Nmm=N-2;
// hmm=(1-2*h)/(Nmm+1);
//end
// representação visual da Condição de contorno discretizada com h
yyy=[];delta=0.001;fff=[];
aaa=[];
fi=0.00000001
while fi < fimax
    yy=fct3(fi,L,Drho,g,hf,fio,fio,fic,Exp,cte_a,cte_b,cte_c,Pa,inv_beta,
a_ps,b_ps,c_ps,Escp,modPs);
    if moda==1 then
        [aa,dfbk,fbk,sigmaE,dsigmaE]=adif(fi,fic,L,Drho,g,Exp,cte_a,cte_b,
cte_c,Pa,inv_beta,a_ps,b_ps,c_ps,Escp,modPs);
        aaa=[aaa;aa];
    else
        [a,fbk]=fc_dif(fi,Esck,Escp,fic,mi,L,eta,ko,Pa,inv_beta,a_ps,b_ps,
c_ps,cte_a,cte_b,cte_c,modPs)
        aaa=[aaa;a];
    end
    yyy=[yyy;yy];
    fff=[fff;fi]
    fi=fi+delta
end
xset("window",0)
plot(fff,yyy,'r-')
plot([fic fic],[-8e-6;8e-6],'b--')
plot([fimax fimax],[-8e-6;8e-6],'b--')
xset("window",1)
plot(fff,aaa,'r-')
plot([fic fic],[-8e-6;8e-6],'b--')
plot([fimax fimax],[-8e-6;8e-6],'b--')
// Condição Inicial

```

```

y0=zeros(2*N+2,1);
y0(1:N+1)=ones(N+1,1)*fio;
y0(N+1)=(1.0)*fio;
// Determinação de y(1) para Consistência de CC em x=0
select condicao,
case 1 then
    disp(' Nada acontece?')
case 2 then
    if Exp == 2 then
        [sol,erro,func,kit]=bis(fic,fimax,1e-15,L,Drho,g,hf,fio,fio,fic,Exp,cte_a,
cte_b,cte_c,Pa,inv_beta,a_ps,b_ps,c_ps,Escp,modPs)
        printf(" Condicao inicial para u(1)= %f\n",sol);
        if mod==1 then
            [ac1,dfbk1,fbkc1,sigmaE1,dsigmaE1]=adif(sol,fic,L,Drho,g,Exp,cte_a,cte_b,
cte_c,Pa,inv_beta,a_ps,b_ps,c_ps,Escp,modPs)
        else
            [ac1,fbkc1]=fc_dif(sol,Esck,Escp,fic,mi,L,eta,ko,Pa,inv_beta,a_ps,
b_ps,c_ps,cte_a,cte_b,cte_c,modPs)
        end
        fbkc1=fbkc1/L;
        y0(1)=sol;
        if abs(func) > 1e-10 then
            disp('Não há valor de u(1) que torne a EAD consistente em t=0')
            falha=1;
            beep();
        end
    else
        y0(1)=fic;
        yd0(1)=-(-3*fbkc+4*fbk0-fbk0)/2/hf;
    end
case 3 then
    [sol,erro,func,kit]=bis(fic*1.0000001,fimax,1e-15,L,Drho,g,hf,fio,fio,fic,
Exp,cte_a,cte_b,cte_c,Pa,inv_beta,a_ps,b_ps,c_ps,Escp,modPs)
    printf(" Condicao inicial para u(1)= %f\n",sol);
    printf(" Valor de u para min de fbk= %f\n",umin);
    if moda==1 then
        [a0,dfbk0,fbk0,sigmaE0,dsigmaE0]=adif(fio,fic,L,Drho,g,Exp,cte_a,cte_b,
cte_c,Pa,inv_beta,a_ps,b_ps,c_ps,Escp,modPs)
        [ac1,dfbk1,fbkc1,sigmaE1,dsigmaE1]=adif(sol,fic,L,Drho,g,Exp,cte_a,cte_b,
cte_c,Pa,inv_beta,a_ps,b_ps,c_ps,Escp,modPs)
    else
        [a0,fbk0]=fc_dif(fio,Esck,Escp,fic,mi,L,eta,ko,Pa,inv_beta,a_ps,
b_ps,c_ps,cte_a,cte_b,cte_c,modPs)
        [ac1,fbkc1]=fc_dif(sol,Esck,Escp,fic,mi,L,eta,ko,Pa,inv_beta,a_ps,
b_ps,c_ps,cte_a,cte_b,cte_c,modPs)
    end
    fbk0=fbk0/L;
    fbkc1=fbkc1/L;
    if abs(func) > 1e-9 then
        disp('Nao ha valor de u(1) que torne a EAD consistente em t=0')
        falha=1;
        beep();
    end
    y0(1)=sol;
    if y0(1) < fic then
        derivada=(-3*fbkc1+4*fbk0-fbk0)/2/hf;
        yd0(1)=-derivada
    else

```

```

        yd0(1)=0;
    end
else
    disp(' Condicao Inicial para x=0 nao eh opcao valida')
    beep();
end
falha=1
if falha==0 then
    y0(N+2:2*N+2)=x(1:N+1);
//-----
// Estimativa da Condição Inicial da derivada
dx=calc_dx(y0(N+2:2*N+2));
if moda==1 then
    [a,dfbk,fbk,sigmaE,dsigmaE]=adif(y0(1:N+1),fic,L,Drho,g,Exp,cte_a,
    cte_b,cte_c,Pa,inv_beta,a_ps,b_ps,c_ps,Escp,modPs)
else
    [a,fbk]=fc_dif(y0(1:N+1),Esck,Escp,fic,mi,L,eta,ko,Pa,inv_beta,a_ps,
    b_ps,c_ps,cte_a,cte_b,cte_c,modPs)
end
fbk=fbk/L;
a=a/L^2;
dBN1=-y0(N+1)/dx(N);
dAN1=(y0(N+1)-y0(N))/dx(N);
s(N+1)=1/2*(sign(dAN1)+sign(dBN1))*min(abs(dAN1),abs(dBN1))
fiL(N+1)=y0(N+1)-dx(N)/2*s(N+1);
fiR(N+1)=y0(N+1)+dx(N)/2*s(N+1);
// 1
dB1=(y0(2)-y0(1))/dx(1);
dA1=dB1;
s(1)=1/2*(sign(dA1)+sign(dB1))*min(abs(dA1),abs(dB1))
fiL(1)=y0(1)-dx(1)/2*s(1);
fiR(1)=y0(1)+dx(1)/2*s(1);
// i=2:N-1 -> pontos internos
for i=2:N
    derivadaB=(y0(i+1)-y0(i))/dx(i);
    derivadaA=(y0(i)-y0(i-1))/dx(i-1);
    s(i)=1/2*(sign(derivadaA)+sign(derivadaB))*min(abs(derivadaA),
    abs(derivadaB))
    fiL(i)=y0(i)-dx(i)/2*s(i);
    fiR(i)=y0(i)+dx(i)/2*s(i);
end
if moda==1 then
    [aL,dfbkL,fbkL,sigmaEL,dsigmaEL]=adif(fiL,fic,L,Drho,g,Exp,cte_a,cte_b,
    cte_c,Pa,inv_beta,a_ps,b_ps,c_ps,Escp,modPs)
    [aR,dfbkR,fbkR,sigmaER,dsigmaER]=adif(fiR,fic,L,Drho,g,Exp,cte_a,cte_b,
    cte_c,Pa,inv_beta,a_ps,b_ps,c_ps,Escp,modPs)
    [amax,dfbkmax,fbkmax,sigmaEmax,dsigmaEmax]=adif(fimax,fic,L,Drho,g,Exp,
    cte_a,cte_b,cte_c,Pa,inv_beta,a_ps,b_ps,c_ps,Escp,modPs)
else
    [aL,fbkL]=fc_dif(fiL,Esck,Escp,fic,mi,L,eta,ko,Pa,inv_beta,a_ps,b_ps,c_ps,
    cte_a,cte_b,cte_c,modPs)
    [aR,fbkR]=fc_dif(fiR,Esck,Escp,fic,mi,L,eta,ko,Pa,inv_beta,a_ps,b_ps,c_ps,
    cte_a,cte_b,cte_c,modPs)
    [amax,fbkmax]=fc_dif(fimax,Esck,Escp,fic,mi,L,eta,ko,Pa,inv_beta,a_ps,b_ps,
    c_ps,cte_a,cte_b,cte_c,modPs)
end
fbkL=fbkL/L;
aL=aL/L^2;

```

```

fbkR=fbkR/L;
aR=aR/L^2;
fbkmax=fbkmax/L;
amax=amax/L^2;
if y0(1) < fic then
    derivada= (-3*fbkc1+4*fbk0-fbk0)/2/hf;
    // i=1    -> x=0
    yd0(1)=-derivada;
else
    yd0(1)=0;
end
for i=2:N-1
    derivada=(fctfeo(fiR(i),fiL(i+1),L,umin,cte_a,cte_b,cte_c,Pa,inv_beta,
    a_ps,b_ps,c_ps,Escp,modPs)-fctfeo(fiR(i-1),fiL(i),L,umin,cte_a,cte_b,
    cte_c,Pa,inv_beta,a_ps,b_ps,c_ps,Escp,modPs))/(dx(i-1)+dx(i))/2;
    if y0(i) <= fic then
        yd0(i)=-derivada;
    else
        dd2i= ((y0(i+1)-y0(i))/(x(i+1)-x(i))-(y0(i)-y0(i-1))/(x(i)-x(i-1)))/
        (x(i+1)-x(i-1)));
        dadxi=(a(i+1)-a(i-1))/(x(i+1)-x(i-1));
        dudxi=(y0(i+1)-y0(i-1))/(x(i+1)-x(i-1));
        yd0(i)=(-derivada+a(i)*dd2i+dadxi*dudxi);
    end
end
// i=N    -> ponto N
derivada=(fctfeo(fiR(N),fiL(N+1),L,umin,cte_a,cte_b,cte_c,Pa,inv_beta,
a_ps,b_ps,c_ps,Escp,modPs)-fctfeo(fiR(N-1),fiL(N),L,umin,cte_a,cte_b,
cte_c,Pa,inv_beta,a_ps,b_ps,c_ps,Escp,modPs))/(dx(N)+dx(N-1))/2;
yd0(N)=-derivada;
// i=N+1    -> x=1
derivada=(fctfeo(fiR(N+1),0,L,umin,cte_a,cte_b,cte_c,Pa,inv_beta,a_ps,b_ps,
c_ps,Escp,modPs)-fctfeo(fiR(N),fiL(N+1),L,umin,cte_a,cte_b,cte_c,Pa,
inv_beta,a_ps,b_ps,c_ps,Escp,modPs))/dx(N);
yd0(N+1)=-derivada;
//-----
    if rep(1)<3 then
        for i=N+2:2*N+2
            yd0(i)=0.0;
        end
    else
        // ajuste do vetor x
        x1=x(1);
        x2=x(2);
        x3=x(3);
        xNM2=x(N+1);
        xx=x(4:$-1);
        n=N-2;
        uNP1=y0(N+1);
        uNP2=0; // Hipótese usada acima
// M - Funcao de monitoramento:
        M0=sqrt(1+af*((y0(4)-y0(2))/(xx(1)-x2))^2);
        M(1)=sqrt(1+af*((y0(5)-y0(3))/(xx(2)-x3))^2);
        for i = 5:N-1
            M(i-3)=sqrt(1+af*((y0(i+1)-y0(i-1))/(xx(i-2)-xx(i-4)))^2);
        end
        M(N-3)=sqrt(1+af*((uNP1-y0(N-1))/(xNM2-xx(N-4)))^2);
        MNM2=sqrt(1+af*((uNP2-y0(N))/(2*(xNM2-xx(N-3))))^2); //

```

```

//-----
// SM - Funcao de amortecimento espacial (gamma=2 e p=2):
SM0=sqrt((9*M0^2+6*M(1)^2+4*M(2)^2)/19);
SM(1)=sqrt((6*M0^2+9*M(1)^2+6*M(2)^2+4*M(3)^2)/25);
SM(2)=sqrt((4*M0^2+6*M(1)^2+9*M(2)^2+6*M(3)^2+4*M(4)^2)/29);
for j=3:N-5
    SM(j)=sqrt((4*M(j-2)^2+6*M(j-1)^2+9*M(j)^2+6*M(j+1)^2+4*M(j+2)^2)/29);
end
SM(N-4)=sqrt((4*M(N-6)^2+6*M(N-5)^2+9*M(N-4)^2+6*M(N-3)^2+4*MNM2^2)/29);
SM(N-3)=sqrt((4*M(N-5)^2 + 6*M(N-4)^2+9*M(N-3)^2+6*MNM2^2)/25);
SMNM2=sqrt((4*M(N-4)^2 + 6*M(N-3)^2 + 9*MNM2^2)/19);
//-----
// regiao para x fixo -> dxdt=0
for i=1:3
    yd0(N+1+i)=0;
end
ff=(1/(((1-2*hf)/n)^2));
//-----
// r -- Entrar com a MMPDE: HUANG (1994), pag 280
E(1)= (SM(2)+SM(1))/(2*(((1-2*hf)/n)^2))*(xx(2)-xx(1))- (SM(1)+SM0)/(2*
(((1-2*hf)/n)^2))*(xx(1)-x3);
for i=2:N-4
    E(i)= (SM(i+1)+SM(i))/(2*(((1-2*hf)/n)^2))*(xx(i+1)-xx(i))-
    (SM(i)+SM(i-1))/(2*(((1-2*hf)/n)^2))*(xx(i)-xx(i-1));
end
E(N-3)= (SMNM2+SM(N-3))/(2*(((1-2*hf)/n)^2))*(xNM2-xx(N-3))-
    (SM(N-3)+SM(N-4))/(2*(((1-2*hf)/n)^2))*(xx(N-3)-xx(N-4));
//-----
yd0(2*N+2)=0;
//-----
der0=calcula_condicao(N-3,ff,E,tau)
yd0(N+5:2*N+1)=der0;
end
//-----
tin=0.0;
t0=tin;
flist=list(fun,L,Drho,g,uc,uo,fimax,Exp,tau,rep,af,cte_a,cte_b,cte_c,
Pa,inv_beta,a_ps,b_ps,c_ps,Esck,Escp,modPs,moda);
[r,ires]=fun(tin,y0,yd0,L,Drho,g,uc,uo,fimax,Exp,tau,rep,af,cte_a,cte_b,
cte_c,Pa,inv_beta,a_ps,b_ps,c_ps,Esck,Escp,modPs,moda);
if norm(r) < 1 then
    printf(' ** Condicao Inicial Consistente-> norm(r)= %f\n',norm(r));
    printf(' ** Calculando...\n');
    info=list([],0,[],[],[],0,0);
    YY=[t0;y0];
    //      h h dx(3) dx(4)          ...          dx()
    //  |--|--|-----:-----:-----:-----:-----|
    //  x1 x2 x3  x(1)   x(2)   x(3)
    yin=[y0,yd0];
    delta=100;
    t=[tin:delta:tfinal];
    [yy]=dassl(yin,tin,t,1e-4,1e-6,flist,info);
else
    printf(' ** Condicao Inicial Inconsistente-> norm(r)= %f\n',norm(r));
    flag=1;
    beep(); beep(); beep();
    return
end

```

```

//-----
[nl,nc]=size(yy)
//Formando o vetor x variável (retirado de yy) para cada instante -> X
cor=['ro','bo','mo','ko','r+','b+','m+','k+','r<','b<','m<','k<','rv','bv','mv','kv'];
cor=[cor;cor;cor;cor];
X=clean(yy(N+3:2*N+3,:));
xset("window",2)
for i=icurvas
    plot(yy(2:N+2,i),X(:,i)*L,'m-')
    plot(yy(2:N+2,i),X(:,i)*L,'ko')
end
plot([fic fic],[0;L],'b-.')
plot([fio fio],[0;L],'b-.')
plot([fimax fimax],[0;L],'b-.')
xlabel('u [-]', 'z [m]')
// Preparando YY
if (equi=='S' | plotaequi=='s') then
    eps=[0.03;0.04;0.05;0.06];
    YY=[];
    for i=1:nc
        aux=[yy(1:N+2,i); X(:,i)];
        YY=[YY aux];
    end
    [tempo,xiso]=plotaequi(YY,fic)
    xset("window",3)
    xbas();
    plot(tempo3,xiso3*L,'r-.')
    plot(tempo4,xiso4*L,'b:')
    plot(tempo5,xiso5*L,'r^')
    xlabel(" ", "tempo [s]", "z [m] ")
end
xset("window",4)
for i=tx
    plot(t,X(i,:)*L,'b-.')
end
xlabel(" ", "tempo [s]", "x [m] ")
Y=clean(yy(2:N+1,:));
xset("window",5)
for i=1:N
    plot(yy(1,:),Y(i,:),cor(i))
xset("window",6)
for i=1:N
    plot(yy(1,:),Y(i,:),cor(i))
end
end
xset("window",7)
for i=1:2:length(X(1,:))
    plot(yy(2:N+2,i),X(:,i)*L,'m-')
    plot(yy(2:N+2,i),X(:,i)*L,'ko')
end
plot([fic fic],[0;L],'b-.')
plot([fio fio],[0;L],'b-.')
plot([fimax fimax],[0;L],'b-.')
xlabel('u [-]', 'z [m]')
arquivo='C:\Dados.xls'
[s]=plota_experimento(Exp,arquivo);
// Sobrepondo simulação

```

```
if N==23 then
select Exp
case 10 then
    ngraf=11,
case 11 then
    ngraf=14,
case 12 then
    ngraf=21,
end
for i=1:ngraf
    scf(7+i),
    plot(yy(1,:),Y(i,:), 'b-')
    plot(yy(1,:),Y(i,:), 'm.')
end
end
fprintfMat('C:\x.txt',X*L,'%10.7f')
fprintfMat('C:\t_eps.txt',[yy(1,:),clean(Y)], '%10.7f')
end
//-----
disp('Fim do processamento!')
beep();
//-----
```