Année 2008

Ecole doctorale SPMII

Thèse

Présenté à

l'Institut National de Sciences Appliquées (INSA) de Rouen

et à

l'Université Fédérale d'Uberlândia

Pour obtenir

Le grade de Docteur
Spécialité : Sciences pour l'ingénieur

Méthodologie d'analyse de fiabilité basée sur des techniques heuristiques d'optimisation et modèles sans maillage: applications aux systèmes mécaniques

Par

Jhojan Enrique ROJAS

Soutenue le 4 Avril 2008 devant la commission d'examen :

BOUHADDI N.	Rapporteur	Professeur, Université de Franche-Comté
EL HAMI A.	Directeur de thèse	Professeur, INSA de Rouen
RADE D. A.	Directeur de thèse	Professeur, Université Fédérale d'Uberlândia
RADE R. S. L.	Examinateur	Professeur, Université Fédérale d'Uberlândia
SOUZA DE CURSI E.	Examinateur	Professeur, INSA de Rouen
STEFFEN Jr. V.	Rapporteur	Professeur, Université Fédérale d'Uberlândia

Laboratoire de Mécanique de Rouen (LMR) Institut National des Sciences Appliquées de Rouen

LMR / INSA de Rouen / Technopole du Madrillet, Avenue de l'Université
76801 Saint Etienne du Rouvray cedex France

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

R741m Rojas, Jhojan Enrique, 1978-
Méthodologie d'analyse de fiabilité basée sur des techniques heuristiques d'optimisation et modèles sans maillage : applications aux systèmes mécaniques / Jhojan Enrique Rojas. - Rouen, 2008.
218 f. : il.

Orientadores: Domingos Alves Rade, Abdelkhalak El Hami.
Tese (doutorado) – I'Institut National de Sciences Appliqués (INSA) de Rouen e a Universidade Federal de Uberlândia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.
Inclui bibliografia.
1. Vibração - Teses. 2. Método dos elementos finitos - Teses. 3. Dinâmica - Teses. I. Rade, Domingos Alves. II. El Hami, Abdelkhalak. III. I'Institut National de Sciences Appliqués (INSA) de Rouen. IV. Universidade Federal de Uberlândia. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. IV. Título.

621:534 (043.3)

Elaborado pelo Sistema de Bibliotecas da UFU / Setor de Catalogação e Classificação

À mon Père Céleste
À mes bien-aimés Emilio, Clemencia, Everth et Ximena

Remerciements

La reconnaissance est la mémoire du cœur (Jean-Baptiste Massieu, 1742-1822)

La thèse rapportée dans ce mémoire est fruit d'une collaboration scientifique entre le Laboratoire de Mécanique de Rouen (LMR) de l'Institut National de Sciences Appliquées de Rouen, France, et le Laboratoire de Mécanique des Structures (LMEst) Prof. José Eduardo Tannus Reis, de la Faculté de Génie Mécanique (FEMEC) de l'Université Fédérale d'Uberlândia, au Brésil, sous la co-direction de M. Domingos Alves RADE et M. Abdelkhalak EL HAMI.

Je suis profondément reconnaissant envers M. Domingos Alves RADE qui m'a encadré pendant ces années de thèse. Il a mis en place les conditions propices au bon développement de mes travaux et a su prodiguer des inestimables réflexions. Ses conseils en matière d'enseignement et recherche on été toujours précieux. Je suis heureux de pouvoir lui exprimer ici mes remerciements.

Toute ma reconnaissance aussi à M. Abdelkhalak EL HAMI pour m'avoir accueilli en France sur des conditionnes favorables, pour avoir suivi une partie très significative de mes travaux. Sa inappréciable assistance a été a tout moment palpable pour cela je désire qu'il accepte mes profonds remerciements.

Mes cordiaux remerciements s'adressent également à M. Noureddine BOUHADDI qui a accepté d'être rapporteur et a bien voulu au jugement de ce mémoire de thèse.

Ma gratitude à l'égard de M. Valder STEFFEN Jr. pour avoir accepté examiner ce travail comme rapporteur de thèse, pour son aimable intérêt vers mes travaux.

Je suis très reconnaissant envers Mme. Raquel RADE pour avoir acceptée examiner mon travail comme membre du jury. Merci pour tous ses encouragements et conseils.

Je tiens à remercier vivement M. Eduardo SOUZA DE CURSI pour avoir consenti d'être examinateur de ce mémoire de thèse. Lorsque que j'ai eu besoin il a démontre disponible à m'aider au LMR.

Je souhaite remercier à mes amis et collaborateurs M. Felipe VIANA et M. Othmane BENDAOU. Les développements des outils informatiques en optimisation utilisés dans les travaux sont fruit de la collaboration de Felipe. L'extension des applications en systèmes fluide structure et synthèse modale n'aurait pas été possible sans le concours de Othmane.

Chacun des membres des laboratoires LMEst et LMR mérite ma reconnaissance. D'une manière ou une autre ont contribué à ce que le période des travaux soient agréables et enrichissantes. Parmi eux, Adailton BORGES, Albert FARIA, Alexandre BEZERRA, Anderson SILVA, Antonio DE LIMA, Danuza SANTANA, Paulo LIMA, Nubia FERREIRA, Rodrigo DE FRANÇA, Rômes BORGES au LMEst et Abder MACKHLOUFI, Fabrice BARBE, Ha HOANG, Henrique ODAM, Ioana NISTEA, A. ABO AL-KHEER, Nadir BENMEZIANE, Salem MEFTAH au LMR. Je souhaite remercier à Annie SPIN, Pierre MARADON et Sylvain LAMBERT pour les gentilles suggestions dans la rédaction en français et Rafael HOLDORF pour la récente collaboration. Je remercie vivement aussi au personnel administratif de FEMEC et LMR pour avoir permis à ce travail d'être mené à cette étape dans les meilleures conditions. Un grand merci a tous.

Je tiens à remercier la Fondation CAPES (Coordination de Perfectionnement du Personnel de Niveau Supérieur) pour m'avoir concédée une bourse de doctorat pendant trois ans d'études au Brésil.

Je suis reconnaissant envers le Programme Alβan (Programme de bourses de haut niveau de la Union Européenne pour l'Amérique Latine) pour m'avoir accordé une bourse (N° E06D103742BO) de doctorat durant une année en France.

Il m'aurait été impossible de réaliser ce travail sans l'affection et le soutien de ma famille, Andrea et amis en Bolivie, au Brésil et en France qui surent m'épauler pendant toute la durée de mes travaux.

METHODOLOGIE D'ANALYSE DE FIABILITE BASEE SUR DES TECHNIQUES HEURISTIQUES D'OPTIMISATION ET MODELES SANS MAILLAGE: APPLICATIONS AUX SYSTEMES MECANIQUES

Table des matières

Résumé des travaux **xi**

Abstract **xiii**

Resumo **xv**

Liste de Tableaux **xvii**

Liste de Figures **xxi**

CHAPITRE I

INTRODUCTION GENERALE **1**

1.1. Commentaires initiaux **1**

1.1.1. Fiabilité des structures et méthodes 5

1.1.2. Méthodes d'optimisation heuristique en fiabilité des structures 6

1.1.3. Méthodes sans maillage en mécanique 7

1.1.4. Matériaux composites modélisés par méthodes sans maillage 8

1.1.5. Méthodes d'optimisation fiabiliste 9

1.2. Justification et description des travaux **10**

1.3. Objectifs de la thèse **15**

1.4. Organisation du Mémoire de thèse **16**

CHAPITRE II

MÉTHODES D'ANALYSE DE FIABILITE DES STRUCTURES **19**

2.1. Concepts fondamentaux de l'analyse de fiabilité **19**

2.1.1. Un bref historique 20

2.1.2. Définitions 21

2.1.3. Facteurs qui influencent l'analyse de fiabilité 22

2.1.4. Concept mathématique de fiabilité 24

2.2. Simulation de Monte Carlo **24**

2.3. Méthode d'analyse de fiabilité de premier ordre **26**

2.3.1. Méthode du deuxième moment du premier ordre 26
2.3.2. Méthode du deuxième moment du premier ordre améliorée 28
2.4. Méthode d'analyse de fiabilité de second ordre **37**
2.5. Méthode de fiabilité basée sur de méthodes d'optimisation métaheuristiques **42**
2.5.1. Algorithmes génétiques 43
2.5.2. Optimisation par essaims particulaires 45
2.5.3. Optimisation par colonie de fourmis 47
2.6. Conclusion **50**
CHAPITRE III
APPLICATIONS NUMERIQUES DES METHODES D'ANALYSE DE FIABILITE DES STRUCTURES **51**
3.1. Analyse de fiabilité d'une poutre en acier en statique, basée sur la modélisation analytique 51
3.2. Analyse de fiabilité d'une poutre en béton en statique, basée sur la modélisation analytique 52
3.3. Analyse de fiabilité d'une plaque basée sur la méthode de Ritz **55**
3.3.1. Premier scénario 56
3.3.2. Second scénario 58
3.3.3. Troisième scénario 58
3.3.4. Quatrième scénario 58
3.4. Analyse de fiabilité d'une poutre basée sur la méthode des éléments finis **59**
3.5. Analyse de fiabilité d'une poutre en statique basée sur le couplage entre MEF et HBRM **62**
3.5.1. Premier scénario 64
3.5.2. Second scénario 67
3.5.3. Troisième scénario 69
3.6. Analyse de fiabilité d'un système oscillant **71**
3.7. Analyse de fiabilité de la dynamique d'un dôme basée sur modélisation par EF **73**
3.7.1. Premier scénario 78
3.7.2. Second scénario 79
3.7.3. Troisième scénario 81
3.7.4. Quatrième scénario 82
3.8. Conclusion **82**

Chapitre IV
ANALYSE DE FIABILITE DES PROBLEMES D'INTERACTION FLUIDE-STRUCTURE AVEC REDUCTION DE MODELES **85**

4.1 Analyse de fiabilité d'un problème d'interaction fluide-structure sur une poutre **86**
4.1.1. Analyse modale déterministe 87
4.1.2. Analyse modale stochastique 88
4.1.3. Analyse de fiabilité 89
4.2. Analyse de fiabilité d'un problème de interaction fluide-structure sur une plaque **90**
4.2.1. Analyse modale déterministe 92
4.2.2. Analyse modale stochastique 92
4.2.3. Analyse de fiabilité 93
4.3. Application industrielle d'analyse de fiabilité combinée avec réduction de modèle **94**
4.3.1. Analyse modale déterministe 96
4.3.2. Analyse modale stochastique 96
4.3.3. Analyse de fiabilité 97
3.11. Conclusion **99**

CHAPITRE V
METHODES DE MODELISATION SANS MAILLAGE EN MECANIQUE **101**

5.1. Etat de l'art des méthodes sans maillage **101**
5.2. Moindres carrés mobiles **105**
5.2.1. Propriétés des fonctions de forme MCM 111
5.2.2. Fonctions de base 113
5.2.3. Fonctions poids 114
5.3. Méthode sans maillage de Galerkin **116**
5.4. Imposition des conditions limites essentielles **121**
5.4.1. Principe variationnel modifié avec multiplicateurs de Lagrange 121
5.4.2. Principe variationnel modifié sans multiplicateurs de Lagrange 123
5.4.3. Principe variationnel modifié avec une pénalité 124
5.4.4. Connexion avec un maillage d'éléments finis 125
5.5. Intégration dans la méthode EFG **126**
5.6. Description des algorithmes de la méthode EFG **128**
5.7. Exemple d'application **130**
5.8. Conclusion **135**

CHAPITRE VI
ANALYSE DE LA FIABILITÉ DES STRUCTURES POUR MATERIAUX COMPOSITES : MODELISATION PAR LA METHODE SANS MAILLAGE DE GALERKIN **137**

6.1. Analyse de fiabilité d'une barre encastrée basée sur la méthode EFG **138**
6.1.1. Validation du modèle de la barre encastrée 138
6.1.2. Analyse de fiabilité de la barre encastrée 139
6.2. Analyse de fiabilité d'une poutre encastrée basée sur la méthode EFG **141**
6.2.1. Validation du modèle de la poutre encastrée 142
6.2.2. Analyse de fiabilité de la poutre encastrée 145
6.3. Analyse de fiabilité d'une plaque isotrope basée sur la méthode EFG **148**
6.3.1. Validation du modèle de plaque isotrope 148
6.3.2. Analyse de fiabilité de la plaque isotrope 150
6.4. Analyse de fiabilité d'une plaque orthotrope basée sur la méthode EFG **152**
6.4.1. Validation du modèle de la plaque orthotrope 153
6.4.2 Analyse de fiabilité de la plaque orthotrope 156
6.5. Conclusion **161**

CHAPITRE VII
APPLICATIONS NUMERIQUES D'OPTIMISATION FIABILISTE **163**

7.1 Optimisation fiabiliste des structures **163**
7.1.1 Méthode des facteurs optimaux de sûreté 165
7.2. Optimisation fiabiliste d'une poutre basée sur la méthode OSF **169**
7.3. Optimisation fiabiliste d'une plaque orthotrope basée sur le couplage entre MEF et OSF **173**
7.4. Conclusion **176**

CHAPITRE VIII
CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES **177**

8.1. Aperçu général **177**
8.2. Conclusions et contributions **179**
8.3. Perspectives de continuité **183**
8.3.1. L'analyse de fiabilité 184
8.3.2. La méthode sans maillage de Galerkin lié à l'analyse de fiabilité 184

REFERENCES **187**

ANNEXE A

MISE EN ŒVRE D'UNE PROCEDURE GENERALE D'ANALYSE DE FIABILITE **205**

ANNEXE B
FONCTIONS DENSITÉ DE PROBABILITÉ ET LOIS DE TRANSFORMATION **207**

ANNEXE C
SYNTHÈSE MODALE, MODÉLISATION DE L'INTERACTION FLUIDE-STRUCTURE ET MÉTHODE DE PERTURBATION DE MUSCOLINO **209**

C.1. Synthèse modale **209**

C.1.1. Equations pour les sous-structures 209

C.1.2. Formulations variationnelles 210

C.1.3. Discrétisation par éléments finis 210

C.1.4. Calcul des modes locaux 211

C.1.5. Réduction du modèle 213

C.2. Modélisation de l'interaction fluide-structure **214**

C.3. Méthode de perturbation de Muscolino **216**

C.3.1. Méthode de perturbation de Muscolino avec synthèse modale 218

Résumé des travaux

Les projets d'Ingénierie Structurale doivent s'adapter aux critères de performance, de sécurité, de fonctionnalité, de durabilité et autres, établis dans la phase d'avant-projet. Traditionnellement, les projets utilisent des informations de nature déterministe comme les dimensions, les propriétés des matériaux et les charges externes. Toutefois, la modélisation des systèmes structuraux complexes implique le traitement des différents types et niveaux d'incertitudes. Dans ce sens, la prévision du comportement doit être préférablement faite en termes de probabilités puisque l'estimation de la probabilité de succès d'un certain critère est une nécessité primaire dans l'Ingénierie Structurale. Ainsi, la fiabilité est la probabilité rapportée à la parfaite opération d'un système structural donné durant un certain temps en des conditions normales d'opération pour trouver le meilleur compromis entre coût et sécurité pour l'élaboration des projets. Visant à pallier les désavantagés des méthodes traditionnelles FORM et SORM (*First and Second Order Reliability Method*), cette thèse propose une méthode d'analyse de fiabilité basée sur des techniques d'optimisation heuristiques (HBRM, *Heuristic-based Reliability Method*). Les méthodes heuristiques d'optimisation utilisées par cette méthode sont : Algorithmes Génétiques (*Genetic Algorithms*), Optimisation par Essaims Particulaires (*Particle Swarm Optimisation*) et Optimisation par Colonie de Fourmis (*Ant Colony Optimization*). La méthode HBRM ne requiert aucune estimation initiale de la solution et opère selon le principe de la recherche multi-directionnelle, sans besoin de calculer les dérivées partielles de la fonction d'état limite par rapport aux variables aléatoires. L'évaluation des fonctions d'état limite est réalisée en utilisant modèles analytiques, semi analytiques et numériques. Dans ce but, la mise en œuvre de la méthode de Ritz (via MATLAB®), la méthode des éléments finis (via MATLAB® et ANSYS®) et la méthode sans maillage de Galerkin (*Element-free Galerkin* sous MATLAB®) a été nécessaire. La combinaison d'analyse de fiabilité, des méthodes d'optimisation et méthodes de modélisation, ci-dessus mentionnées, configure la méthodologie de conception fiabiliste proposée dans ce mémoire. L'utilisation de différentes méthodes de modélisation et d'optimisation a eu pour objectif de mettre en évidence leurs avantages et désavantages pour des applications spécifiques, ainsi pour démontrer l'applicabilité et la robustesse de la méthodologie de conception fiabiliste en utilisant ces techniques numériques. Ce qui a été possible grâce aux bons résultats trouvés dans la plupart des applications. Dans ce sens, des applications uni, bi et tridimensionnelles en statique, stabilité et dynamique des structures explorent l'évaluation explicite et implicite des fonctions d'état limite de plusieurs variables aléatoires. Procédures de validation déterministe et analyses stochastiques, et la méthode de perturbation de Muscolino, donnent les bases de l'analyse de fiabilité des applications en problèmes d'interaction fluide-structure bi et tridimensionnelles. La méthodologie est particulièrement appliquée à une structure industrielle. Résultats de applications uni et bidimensionnelles aux matériaux composites stratifiés, modélisés par la méthode EFG sont comparés avec les obtenus par éléments finis. A la fin de la thèse, une extension de la méthodologie à l'optimisation fiabiliste est proposée à travers la méthode des facteurs optimaux de sûreté. Pour cela, sont présentes des applications pour la minimisation du poids, en exigent un indice de fiabilité cible, aux systèmes modélisés par la méthode de EF et par la méthode EFG.

Mots clés : *analyse de fiabilité multi objectifs, méthodes heuristiques d'optimisation, méthode sans maillage de Galerkin, méthode des éléments finis, méthode des facteurs optimaux de sûreté*

Abstract

Structural Engineering designs must be adapted to satisfy performance criteria such as safety, functionality, durability and so on, generally established in pre-design phase. Traditionally, engineering designs use deterministic information about dimensions, material properties and external loads. However, the structural behaviour of the complex models needs to take into account different kinds and levels of uncertainties. In this sense, this analysis has to be made preferably in terms of probabilities since the estimate the probability of failure is crucial in Structural Engineering. Hence, reliability is the probability related to the perfect operation of a structural system throughout its functional lifetime; considering normal operation conditions. A major interest of reliability analysis is to find the best compromise between cost and safety. Aiming to eliminate main difficulties of traditional reliability methods such as First and Second Order Reliability Method (FORM and SORM, respectively) this work proposes the so-called Heuristic-based Reliability Method (HBRM). The heuristic optimization techniques used in this method are: Genetic Algorithms, Particle Swarm Optimization and Ant Colony Optimization. The HBRM does not require initial guess of design solution because it's based on multidirectional research. Moreover, HBRM doesn't need to compute the partial derivatives of the limit state function with respect to the random variables. The evaluation of these functions is carried out using analytical, semi analytical and numerical models. To this purpose were carried out the following approaches: Ritz method (using MATLAB®), finite element method (through MATLAB® and ANSYS®) and Element-free Galerkin method (via MATLAB®). The combination of these reliability analyses, optimization procedures and modelling methods configures the design based reliability methodology proposed in this work. The previously cited numerical tools were used to evaluate its advantages and disadvantages for specific applications and to demonstrate the applicability and robustness of this alternative approach. Good agreement was observed between the results of bi and three-dimensional applications in statics, stability and dynamics. These numerical examples explore explicit and implicit multi limit state functions for several random variables. Deterministic validation and stochastic analyses lied to Muscolino perturbation method give the bases for reliability analysis in 2-D and 3-D fluid-structure interaction problems. This methodology is applied to an industrial structure lied to a modal synthesis. The results of laminated composite plates modelled by the EFG method are compared with their counterparts obtained by finite elements. Finally, an extension in reliability based design optimization is proposed using the optimal safety factors method. Therefore, numerical applications that perform weight minimization while taking into account a target reliability index using mesh-based and meshless models are proposed.

Key words : *multy objectif reliability analysis, heuristic optimization techniques, element-free Galerkin method, finite element method, optimal safety factors method*

Resumo

Os projectos de Engenharia Estrutural devem se adaptar a critérios de desempenho, segurança, funcionalidade, durabilidade e outros, estabelecidos na fase de anteprojeto. Tradicionalmente, os projectos utilizam informações de natureza deterministica nas dimensões, propriedades dos materiais e carregamentos externos. No entanto, a modelagem de sistemas complexos implica o tratamento de diferentes tipos e níveis de incertezas. Neste sentido, a previsão do comportamento deve preferivelmente ser realizada em termos de probabilidades dado que a estimativa da probabilidade de sucesso de um critério é uma necessidade primária na Engenharia Estrutural. Assim, a confiabilidade é a probabilidade relacionada à perfeita operação de um sistema estrutural durante um determinado tempo em condições normais de operação. O principal objetivo desta análise é encontrar o melhor compromisso entre custo e segurança. Visando a paliar as principais desvantagens dos métodos tradicionais FORM e SORM (*First and Second Order Reliability Method*), esta tese propõe um método de análise de confiabilidade baseado em técnicas de optimização heurísticas denominado HBRM (*Heuristic-based Reliability Method*). Os métodos heurísticos de otimização utilizados por este método são: Algoritmos Genéticos (*Genetic Algorithms*), Optimização por Bandos Particulares (*Particle Swarm Optimisation*) e Optimização por Colónia de Formigas (*Ant Colony Optimization*). O método HBRM não requer de uma estimativa inicial da solução e opera de acordo com o princípio de busca multidirecional, sem efetuar o cálculo de derivadas parciais da função de estado limite em relação às variáveis aleatórias. A avaliação das funções de estado limite é realizada utilizando modelos analíticos, semi analíticos e numéricos. Com este fim, a implementação do método de Ritz (via MATLAB®), o método dos elementos terminados (via MATLAB® e ANSYS®) e o método sem malha de Galerkin (*Element-free Galerkin* via MATLAB®) foi necessária. A combinação da análise de confiabilidade, os métodos de optimização e métodos de modelagem, acima mencionados, configura a metodologia de projeto proposta nesta tese. A utilização de diferentes métodos de modelagem e de otimização teve por objetivo destacar as suas vantagens e desvantagens em aplicações específicas, assim como demonstrar a aplicabilidade e a robustez da metodologia de análise de confiabilidade utilizando estas técnicas numéricas. Isto foi possível graças aos bons resultados encontrados na maior parte das aplicações. As aplicações foram uni, bi e tridimensionais em estática, estabilidade e dinâmica de estruturas, as quais exploram a avaliação explícita e implícita de funções de estado limite de várias variáveis aleatórias. Procedimentos de validação déterministica e de análises estocásticas, aplicando o método de perturbação de Muscolino, fornecem as bases da análise de confiabilidade nas aplicações de problemas de iteração fluído-estrutura bi e tridimensionais. A metodologia é testada com uma estrutura industrial. Resultados de aplicações bidimensionais em estratificados compostos, modelados pelo método EFG são comparados com os obtidos por elementos finitos. No fim da tese, uma extensão da metodologia à optimização baseada em confiabilidade é proposta aplicando o método dos factores óptimos de segurança. Finalmente são apresentadas as aplicações para a minimização do peso em sistemas modelados pelo método de EF e o método EFG que exigem um índice de confiabilidade alvo.

Palavras chave : *análise de confiabilidade multi objectivo, métodos heurísticos de otimização, método sem malha de Galerkin, método dos elementos finitos, método dos factores óptimos de segurança*

Liste de Tableaux

Tableau 1.1 - Logiciels commerciaux de fiabilité des structures (modifié de BECK, 2006) 12
Tableau 2.1 - Méthodes d'optimisation d'ordre un et d'ordre deux pour la recherche du point de conception (adapté de Lemaire (2005)). 33
Tableau 2.2 - Analogie de la nature et l'optimisation par AG 44
Tableau 2.3 - Analogie de la nature et la procédure de PSO 47
Tableau 2.4 - Analogie de la nature et la procédure de ACO 48
Tableau 2.5 - Critères d'arrêt de l'ACO 48
Tableau 3.1 - Résultats obtenus à travers FORM et SORM pour la poutre en acier 52
Tableau 3.2 - Caractéristiques des variables aléatoires pour la poutre en béton 54
Tableau 3.3 - Résultats obtenus par FORM et SORM pour la poutre en béton 54
Tableau 3.4 - Caractéristiques statistiques des variables aléatoires de la plaque 56
Tableau 3.5 - Résultats de l'analyse de fiabilité de la plaque pour le premier scénario 57
Tableau 3.6 - Résultats de l'analyse de fiabilité par HBRM de la plaque pour les différents scénarios définis 59
Tableau 3.7 - Paramètres des variables aléatoires de la poutre encastrée-libre 61
Tableau 3.8 - Résultats de l'analyse de fiabilité de la poutre en acier 62
Tableau 3.9 - Valeurs des paramètres déterministes de la poutre en profil I 63
Tableau 3.10 - Caractéristiques statistiques de la poutre à section droite en profil I 64
Tableau 3.11 - Résultats de l'analyse de fiabilité pour le premier scénario (un seul calcul) 65
Tableau 3.12 - Résultats pour le premier scénario (20 tests - GA) 66
Tableau 3.13 - Résultats pour le premier scénario (20 tests - PSO) 67
Tableau 3.14 - Résultats pour le premier scénario (20 tests - ACO) 67
Tableau 3.15 - Résultats pour le deuxième scénario (20 tests - GA) 68
Tableau 3.16 - Résultats pour le deuxième scénario (20 tests - PSO) 68
Tableau 3.17 - Résultats pour le deuxième scénario (20 tests - ACO) 68
Tableau 3.18 - Résultats pour le troisième scénario (20 tests - GA) 69
Tableau 3.19 - Résultats pour le troisième scénario (20 tests - PSO) 70

Tableau 3.20 - Résultats pour le troisième scénario (20 tests – ACO) 70
Tableau 3.21 - Paramètres statistiques du système oscillant 72
Tableau 3.22 - Résultats de l'analyse de fiabilité pour le système oscillant 73
Tableau 3.23 - Variables aléatoires et caractéristiques statistiques des paramètres ADV 76
Tableau 3.24 - Résultats de l'analyse de fiabilité du ADV 77
Tableau 3.25 - Résultats de l'analyse de fiabilité du dôme avec ADV pour le premier scénario 79
Tableau 3.26 - Résultats de l'analyse de fiabilité du dôme avec ADV par FORM et SORM 79
Tableau 3.27 - Résultats de l'analyse de fiabilité du dôme avec ADV pour le second scénario 80
Tableau 3.28 - Résultats de l'analyse de fiabilité du dôme avec ADV pour le troisième scénario 81
Tableau 3.29 - Résultats de l'analyse de fiabilité du dôme avec ADV pour le quatrième scénario 82
Tableau 4.1 - Fréquences propres du système couplé poutre-fluide 88
Tableau 4.2 - Caractéristiques statistiques des fréquences propres du système poutre-fluide 89
Tableau 4.3 - Caractéristiques statistiques des variables aléatoires de la poutre et fluide couplés 89
Tableau 4.4 - Résultats de l'analyse de fiabilité pour le système poutre-fluide 90
Tableau 4.5 - Fréquences propres du système bloc fluide couplé 92
Tableau 4.6 - Caractéristiques statistiques des fréquences propres du système plaque-fluide, obtenues par SMC 93
Tableau 4.7 - Paramètres statistiques des variables aléatoires de la plaque et du fluide 93
Tableau 4.8 - Résultats de l'analyse de fiabilité pour le système plaque-fluide 94
Tableau 4.9 - Fréquences propres de l'hélice de navire 96
Tableau 4.10 Moyennes des fréquences propres de l'hélice de navire 97
Tableau 4.11 - Ecarts types des fréquences propres de l'hélice de navire 97
Tableau 4.12 - Paramètres statistiques des variables aléatoires de l'hélice de navire 98
Tableau 4.13 - Résultats de l'analyse de fiabilité basée sur le modèle d'hélice complet 98
Tableau 4.14 - Résultats de l'analyse de fiabilité pour le modèle d'hélice réduit 99

Tableau 5.1 - Fonctions de base à une, deux et trois dimensions 113
Tableau 5.2 - Propriétés géométriques et mécaniques de la plaque trouée 131
Tableau 5.3 - Déplacements et contraintes de la plaque trouée 134
Tableau 6.1 - Moyenne des variables de conception de la barre encastrée 139
Tableau 6.2 - Résultats de l'analyse de fiabilité de la barre encastrée 140
Tableau 6.3 - Déplacement maximum vertical de la poutre pour différentes densités des points 143
Tableau 6.4 - Comparaison des valeurs de la deuxième fréquence propre de la poutre 144
Tableau 6.5 - Caractéristiques statistiques des variables aléatoires de la poutre 145
Tableau 6.6 - Résultats de l'analyse de fiabilité de la poutre en utilisant les méthodes EFG et MEF pour le premier scénario 146
Tableau 6.7 - Résultats de l'analyse de fiabilité de la poutre en utilisant les méthodes EFG et MEF pour le second scénario 147
Tableau 6.8 - Paramètres de la plaque isotrope 148
Tableau 6.9 - Déplacements maximaux de la plaque isotrope 149
Tableau 6.10 - Caractéristiques statistiques des variables aléatoires de la plaque isotrope 151
Tableau 6.11 - Résultats de l'analyse de fiabilité de la plaque isotrope en utilisant EFG 151
Tableau 6.12 - Résultats de l'analyse de fiabilité de la plaque isotrope en utilisant la MEF 152
Tableau 6.13 - Propriétés géométriques et de charge de la plaque orthotrope 153
Tableau 6.14 - Propriétés mécaniques de la plaque orthotrope 153
Tableau 6.15 - Déplacements maximaux de la plaque orthotrope 155
Tableau 6.16 - Caractéristiques statistiques des variables aléatoires de la plaque orthotrope, cas 1 156
Tableau 6.17 - Résultats de l'analyse de fiabilité de la plaque orthotrope pour la méthode EFG, cas 1 157
Tableau 6.18 - Résultats de l'analyse de fiabilité de la plaque orthotrope pour la MEF, cas 1 158
Tableau 6.19 - Caractéristiques statistiques des variables aléatoires de la plaque orthotrope, cas 2 158
Tableau 6.20 - Résultats de l'analyse de fiabilité de la plaque orthotrope pour la méthode EFG, cas 2 160
Tableau 6.21 - Résultats de l'analyse de fiabilité de la plaque orthotrope pour la 161

MEF, cas 2
Tableau 7.1 - Résultats de l'analyse de fiabilité de la poutre de profil I 171
Tableau 7.2 - Résultats de l'optimisation fiabiliste de la poutre de profil I 172
Tableau 7.3 - Résultats de l'analyse de fiabilité de la plaque orthotrope 174
Tableau 7.4 - Résultats de l'optimisation fiabiliste de la plaque orthotrope en utilisant le modèle d'éléments finis 174
Tableau 7.5 - Résultats de l'optimisation fiabiliste de la plaque orthotrope en utilisant le modèle sans maillage 175
Tableau 8.1 - Méthodes d'optimisation pour la recherche du point de conception au sein des méthodes FORM, SORM et HBRM 183
Tableau B.1 - Variables aléatoires continues 207
Tableau B.2 - Valeurs extrêmes des variables aléatoires 208

Liste de Figures

Figure 1.1 - Vue générale et d'une section du pont San Francisco-Oakland qui a fait l'objet d'une analyse de fiabilité (http://peer.berkeley.edu) 4

Figure 1.2 - Evaluation numérique des composantes d'une voiture (*FEA-opt Technology*, www.fea-optimization.com) 4

Figure 2.1 - Espace des variables physiques et réduites 30

Figure 2.2 - Premier algorithme FORM pour l'estimation de l'indice de fiabilité 35

Figure 2.3 - Second algorithme FORM pour l'estimation de l'indice de fiabilité 36

Figure 2.4 - Rotation de coordonnées dans la méthode SORM 39

Figure 2.5 - Algorithme HBRM proposé pour l'estimation de l'indice de fiabilité 43

Figure 3.1 - Schéma de la poutre sur des appuis simples en acier 52

Figure 3.2 - Schéma de la poutre sur des appuis simples en béton armé 53

Figure 3.3 - Schéma général de la plaque modélisée par la méthode de Ritz 55

Figure 3.4 - Poutre encastrée-libre dont l'analyse de fiabilité a été faite par couplage avec le code ANSYS® 60

Figure 3.5 - Modèle d'éléments finis et distribution des contraintes normales de la poutre encastrée-libre [N/m^2] 61

Figure 3.6 - Schéma de la poutre en profil I et définition des variables aléatoires 63

Figure 3.7 - Schéma du système oscillant 71

Figure 3.8 - Modèle d'éléments finis du dôme 74

Figure 3.9 - Fonctions de réponse en fréquence du dôme 77

Figure 4.1 - Poutre simplement appuyée couplée à une masse de fluide 87

Figure 4.2 - Système plaque-fluide 91

Figure 4.3 - Géométrie de l'hélice de navire 95

Figure 4.4 - Modèle EF de l'hélice et schéma de sous-structuration 95

Figure 5.1 - Illustration de la méthode des éléments finis et de la méthode sans maillage 105

Figure 5.2 - Méthode des moindres carrés mobiles (Lancaster et Salkauskas 1981) 107

Figure 5.3 - Représentation des points et leurs paramètres pour MCM 116

Figure 5.4 - Intégration dans la méthode EFG (Duflot, 2004) 126

Figure 5.5 - Paramètres de intégration dans la méthode EFG 127

Figure 5.6 - Schéma de la plaque trouée 130
Figure 5.7 - Modèles de plaque trouée pour les méthodes EFG et MEF 132
Figure 5.8 - Configuration déformée du modèle de plaque de trouée 132
Figure 5.9 - Points de Gauss dans la plaque trouée 133
Figure 5.10 - Déplacements sur la plaque trouée (*m*) 133
Figure 5.11 - Contraintes dans les directions x et y de la plaque trouée (*N/m*^{2}) 134
Figure 6.1 - Schéma de la barre encastrée 138
Figure 6.2 - Déplacements sur la barre obtenus par la méthode EFG, la MEF et le modèle analytique 139
Figure 6.3 - Probabilité de défaillance de la barre encastrée pour différents écarts types 140
Figure 6.4 - Schéma de la poutre encastrée 142
Figure 6.5 - Configuration déformée et non déformée du modèle de poutre sans maillage 143
Figure 6.6 - Déplacements verticaux de la poutre obtenus par les différentes méthodes (*m*) 144
Figure 6.7 - Schéma de la plaque isotrope 148
Figure 6.8 - Configurations non déformées et déformées de la plaque isotrope obtenues par les modèles EFG et la MEF 149
Figure 6.9 - Déplacements (*m*) horizontaux et verticaux de la plaque isotrope obtenus par les modèles MEF et EFG 150
Figure 6.10 - Schéma de la plaque orthotrope 153
Figure 6.11 - Configurations non déformées et déformées de la plaque orthotrope obtenues par les techniques EFG et la MEF 154
Figure 6.12 - Déplacements (*m*) horizontaux et verticaux de la plaque orthotrope obtenus par les méthodes MEF et EFG 155
Figure 7.1 - Modélisation du point de conception et du point optimal (Kharmanda et al. 2007) 166
Figure 7.2 - Schéma de la poutre en profil I et définition des variables aléatoires 170
Figure A.1 - Procédure générale d'analyse de fiabilité 205

CHAPITRE I

INTRODUCTION GENERALE

L'incertitude n'est pas dans les choses mais dans notre tête : l'incertitude est une méconnaissance (Jacques Berboulli, 1654-1705)

Ce chapitre d'introduction est consacré à la caractérisation du sujet et à la description de la méthodologie adoptée dans ce travail de thèse, tenant compte du contexte scientifique dans lequel elle se situe. Ainsi, l'état de l'art du sujet de travail est décrit par rapport aux principaux aspects considérés pour le développement de la thématique abordée. L'état de cet art permet d'avoir un panorama des développements récemment atteints tels qu'ils sont rapportés dans la littérature. Le chapitre met aussi en évidence les objectifs du travail de recherche et décrit la façon dont ce mémoire de thèse est organisé.

1.1. Commentaires initiaux

L'incapacité de prévoir avec précision le comportement réel des systèmes structuraux exige l'adoption d'une série d'hypothèses et le choix de certaines variables qu'ont admet avoir le plus d'influence sur le comportement des systèmes considérés. Ainsi, la simplification du comportement réel des systèmes, pour l'élaboration de leurs projets et l'analyse de leur comportement, est inévitable. Même en considérant un nombre limité de variables, il est généralement impossible de décrire de manière exacte l'interaction entre elles et d'avoir la certitude absolue de leurs valeurs. Cela est dû à leurs caractéristiques aléatoires et aux incertitudes associées.

Les projets d'Ingénierie Structurale doivent s'adapter aux critères de performance, de sécurité, de fonctionnalité, de durabilité et autres, établis dans la phase d'avant-projet. Dans

cette phase sont habituellement utilisées des procédures de modélisation numérique pour décrire le comportement mécanique des structures. Cette étape est indispensable en diverses applications de l'Ingénierie pour améliorer ses méthodologies de conception.

Ces dernières décennies, l'amélioration des algorithmes numériques et l'augmentation de la puissance de calcul des ordinateurs ont permis une avancée importante dans l'étude du comportement mécanique des structures complexes à travers les simulations numériques.

Traditionnellement, les projets utilisent des informations de nature déterministe comme les dimensions, les propriétés des matériaux et les charges externes. Toutefois, la modélisation des systèmes structuraux complexes implique le traitement des différents types et niveaux d'incertitudes. Dans ce sens, la prévision du comportement doit être préférablement faite en termes de probabilités. Les incertitudes sont liées à la variabilité des paramètres physiques, géométriques, aux fluctuations des conditions de charge, des conditions aux limites de contrainte et aussi aux lois physiques et hypothèses simplificatrices utilisées dans la construction de modèles. Ainsi, des prévisions sur la performance structurale peuvent être données uniquement dans un sens probabiliste.

À partir de la vérification de la présence d'incertitudes dans les modèles et dans les charges, émerge la nécessité de les caractériser qualitativement et quantitativement. Ce qui peut être fait en employant la théorie mathématique des probabilités, variables aléatoires, processus aléatoires et statistiques. Ces incertitudes, naturellement, se propagent sur les prévisions obtenues à partir des modèles.

Actuellement il existe une claire tendance pour considérer, dans les procédures d'analyse structurale, les incertitudes présentes, en remplaçant des analyses déterministes par des analyses probabilistes (Schueller, 2000). Dans ce contexte, les principales appréciations sont : la modélisation et propagation d'incertitudes dans les modèles des éléments finis stochastiques (Van den Nieuwenhof, 2003) ; l'analyse de fiabilité de systèmes structuraux, basée sur le couplage mécano-fiabiliste (Haldar et Mahadevan, 2000); l'optimisation robuste (Evgrafov et al., 2002). D'autres aspects qui complémentent ces études sont : les techniques d'échantillonnage de grandeurs aléatoires (expansion par chaos polynomial, expansion de Karhunen-Loève, représentation spectrale, (Schueller, 2000)) ; la construction de méta modèles ou surfaces de réponse (Chen et al., 2004) ; l'analyse de sensibilité (Melchers et Ahammed, 2003).

L'un des principaux objectifs de toutes ces analyses est d'établir une relation entre la probabilité du succès d'une certaine exigence et les incertitudes des paramètres de projet. En effet, l'estimation de la probabilité de succès d'un certain critère est une nécessité primaire dans l'Ingénierie Structurale. La nécessité d'établir des niveaux de sécurité dans la

présence de phénomènes naturels (comme les séismes, les ouragans, etc.) de barrages, de sites nucléaires, et d'installations industrielles démontre l'importance de ces études. Dans ce contexte, une série de méthodes et des outils pour l'insertion des informations probabilistes dans les modèles de structures, ont été développés (Melchers, 1987).

L'analyse de fiabilité est l'évaluation probabiliste du risque ou de la défaillance d'un système sur certaines limites spécifiées dans le projet (Haldar et Mahadevan, 2000b). Selon Melchers (1987), la fiabilité est la probabilité rapportée à la parfaite opération d'un système structural donné durant un certain temps (appelé temps de vie utile) en des conditions normales d'opération.

Un autre des principaux objectifs des analyses citées ci-dessus est de donner le support de calcul nécessaire pour la conception fiable des structures. Dans ce contexte, l'analyse de fiabilité des structures prévoit de trouver le meilleur compromis entre coût et sécurité pour l'élaboration des projets fiables et économiques, en considérant la variabilité statistique des paramètres de conception (Haldar et Mahadevan, 2000b).

L'utilisation des méthodologies d'analyse de fiabilité dans les structures civiles ou industrielles complexes devient un processus de plus en plus présent. A titre d'exemple, les applications suivantes illustrent cette utilisation :

- Applications en génie civil : l'analyse de fiabilité de structures complexes et anciennes à travers les simulations par éléments finis et les tests expérimentaux. Par exemple, Haukaas (2003) et le *Pacific Earthquake Engineering Research* présentent l'analyse de fiabilité pour la section I-880 du pont San Francisco-Oakland (Figure 1.1).

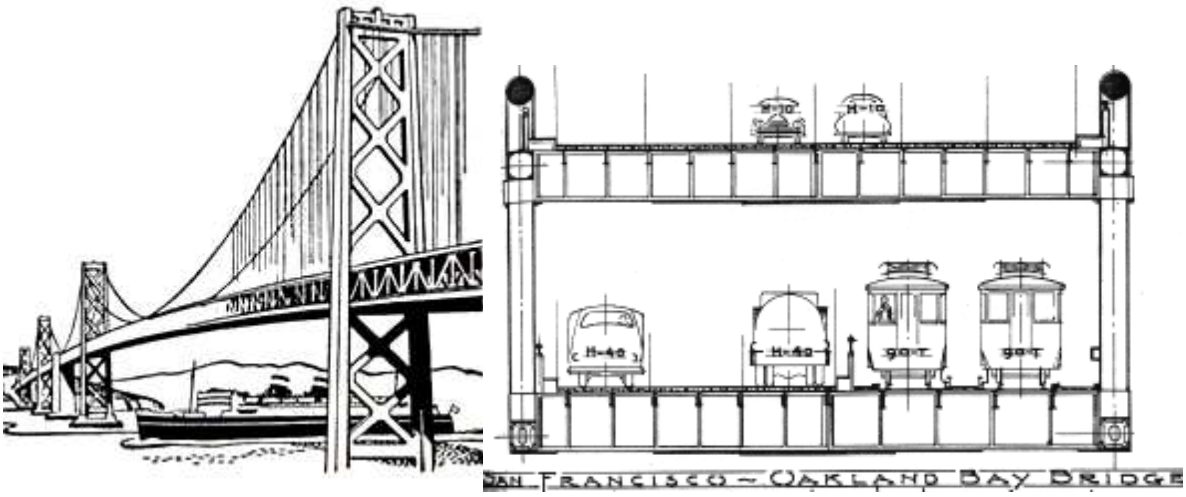


Figure 1.1 - Vue générale et d'une section du pont San Francisco-Oakland qui a fait l'objet d'une analyse de fiabilité (http://peer.berkeley.edu)

- Applications en industrie automobile : le secteur des applications automobiles a un fort intérêt à l'analyse de fiabilité. L'objectif est que la fiabilité et durabilité deviennent prévisibles dès le début du projet pour que la sécurité et le confort des occupants soient assurés. La Figure 1.2 illustre une étude sur l'évaluation de défaillance d'une voiture à travers des simulations numériques.

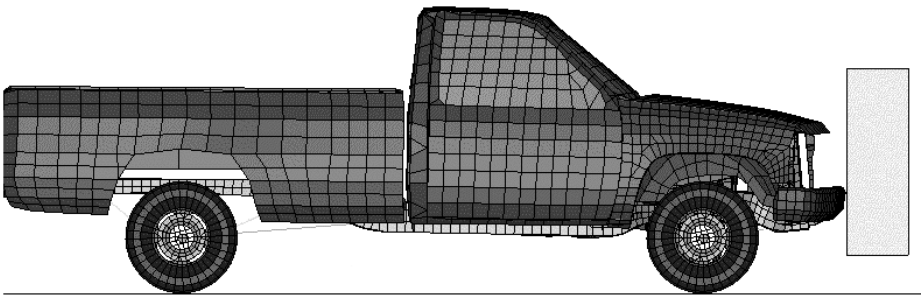


Figure 1.2 - Evaluation numérique des composantes d'une voiture (*FEA-opt Technology*, www.fea-optimization.com)

D'autres applications de l'analyse de fiabilité des structures sont rapportées dans l'industrie spatiale et aéronautique.

Dans toutes ces applications sont utilisés des critères de performance exprimés en fonction de déplacements, de contraintes, de niveaux vibratoires, de stabilité, de plasticité, de comportement non linéaire, de contact, d'impact, de fatigue, etc.

1.1.1. Fiabilité des structures et méthodes

L'analyse de fiabilité abordée dans cette thèse est invariable par rapport au temps, c'est-à-dire, les variables prises en compte dans l'analyse sont aléatoires mais leur variabilité ne dépend pas du temps. Dans un sens strictement conceptuel, les processus stochastiques sont des « configurations improbables » qui apparaissent dans les événements aléatoires (Melchers, 1987). Il est aussi important de souligner que le choix entre les analyses dépendantes et indépendantes du temps n'est pas forcément lié à la nature du problème physique traité. Ainsi, on peut effectuer des analyses de fiabilité dépendante du temps basées sur la réponse statique du système ou des analyses indépendantes du temps basées sur la réponse dynamique.

Une bonne synthèse des techniques d'analyse de fiabilité appliquées à des systèmes structuraux est présentée dans les ouvrages de Haldar et de Mahadevan (2000a), Melchers (1987) et Lemaire (2005). Parmi les principales méthodes numériques développées pour l'analyse de fiabilité des structures, on peut citer : la simulation de Monte Carlo (SMC), les méthodes d'approximation locale de premier et deuxième ordre (FORM - *First Order Reliability Method* et SORM - *Second Order Reliability Method*) et la méthode de surface de réponse liée a ces dernières techniques.

En ce qui concerne la SMC appliquée à l'analyse de fiabilité, les derniers contributions travaillent sur : des applications aux structures dans le domaine de la plasticité (Papadrakakis et al., 1996) ; des applications de la méthode aux matériaux composites (Sciuva et Lomario, 2003) ; la sensibilité des estimations de fiabilité par rapport aux variables de conception pour réduire le coût de calcul (Melchers et Ahammed, 2004).

Pour effectuer l'analyse de fiabilité, la SMC évalue la fonction de performance en utilisant les techniques de génération de numéros aléatoires. Ces techniques permettent de créer des échantillons des variables aléatoires selon une fonction densité de probabilité. Ainsi, la probabilité de défaillance est obtenue par rapport au nombre d'évaluations de la fonction de performance et le nombre de vérifications de la défaillance dans cette fonction. De ce fait, la SMC utilise une évaluation déterministe des critères de défaillance dans les échantillons des variables aléatoires des structures.

Les méthodes FORM et SORM sont basées sur le concept du point de défaillance le plus probable et sur la linéarisation de la fonction de performance au point de défaillance le plus probable. L'approximation FORM constitue la base de l'approximation SORM.

Dans le but d'apporter des améliorations aux méthodes FORM et SORM, des publications récentes sont dédiées à l'étude des aspects suivants :

- l'estimation de multiples points de conception (Der Kiureghian et Dakessian, 1998);
- l'estimation de la fiabilité par rapport à la variation des paramètres propres de FORM et SORM (Zhao et Ono, 1999) ;
- la modélisation non Gaussienne des variables aléatoires intervenant dans les méthodes (Phoon et Nadim, 2004) ;
- des approximations via les distributions asymptotiques (Adhikari, 2005);
- des effets de la variabilité des transformations en fonction du type de distribution des variables aléatoires (Qin, et al., 2006).

Même les méthodes de fiabilité classiques comme les méthodes FORM et SORM, font toujours l'objet d'intenses recherches.

L'analyse de fiabilité en dynamique des structures prend une partie importante dans le cadre de cette thèse. Parmi les publications identifiées dans ce domaine, on peut citer celles qui sur :

- L'amortissement les vibrations des systèmes décrits en fonctions des variables probabilistes (Spencer et al., 1992, Spencer et al., 1994 ; Breitung et al., 1998) ;
- L'estimation de la fiabilité en systèmes dynamiques (De Lacalle et al., 1996) ;
- Les vibrations libres de poutres en matériaux composites (Oh et Librescu, 1997) ;
- Les systèmes mécaniques soumis à des excitations aléatoires (Chen et al., 1996 ; Ching et al., 2005) ;
- Les non linéarités aléatoires dans certaines structures (Chen et Li, 2005) ;
- Les systèmes dynamiques de grande taille (Taflanidis et Beck, 2005).

1.1.2. Méthodes d'optimisation heuristique en fiabilité des structures

La proposition de méthodologies alternatives d'optimisation dans les méthodes d'analyse de fiabilité est une des contributions récentes de la communauté scientifique.

Hurtado et Alvarez (2001) présentent une étude comparative d'analyse de fiabilité en utilisant différents réseaux de neurones artificiels pour substituer des modèles aux éléments finis dans l'évaluation des fonctions d'état limite. Schueremans et Van Gemert (2005) ; Deng et al. (2005) et Elhewy et al. (2006) ont proposé une méthode basée sur des surfaces de réponse basées sur les réseaux de neurones artificiels et les splines pour éliminer les inconvénients de la SMC et FORM. Des algorithmes génétiques en fiabilité des structures sont présentées par Deng et al. (2005) ; cette technique concerne les variables aléatoires qui ont plus d'influence dans la défaillance des systèmes. Elegbede (2005) a été le premier à utiliser l'Optimisation par Essaims Particulaires (Particle Swarm Optimisation - PSO) associé

à la fiabilité des structures. Mais son travail se limite à l'évaluation des fonctions d'état limite analytiques, c'est-à-dire que la méthodologie a été testée sur des systèmes simples pour lesquels les fonctions d'état peuvent être obtenues. Obadage et Harnpornchai (2006) suggèrent la détermination du point de conception en utilisant des algorithmes génétiques avec un schéma de pénalité appliquée sur de fonctions d'états limite non linéaires.

Dans cette thèse on a un intérêt particulier pour les méthodes d'optimisation heuristique dans la fiabilité des structures : Algorithmes Génétiques (Genetic Algorithms-GA), PSO et Optimisation par Colonie de Fourmis (Ant Colony Optimization - ACO).

1.1.3. Méthodes sans maillage en mécanique

La plupart des méthodes classiques de modélisation en mécanique sont basées sur la discrétisation du domaine continu en employant des maillages. Parmi les plus connues sont les méthodes des éléments finis (MEF), des volumes finis et des différences finies. Ces techniques dépendent fortement du maillage du système pour formuler et résoudre les équations qui décrivent les problèmes mécaniques. D'autre part, il existe des méthodes sans maillage qui n'exigent pas des mailles structurées. Elles adoptent seulement un ensemble de points ou nœuds dispersés dans le domaine d'intérêt.

Parmi les méthodes sans maillage les plus courantes, on peut citer : *Element-free Galerkin Method* (EFG) de Belytschko et al. (1994), *Reproducing Kernel Particle Method* de Liu et al. (1995), *Particle-in-cell Method* de Sulsky et al. (1995), *H-p Clouds Method* de Duarte et Oden (1996b), *Partition of Unity Finite Element Method* de Melenk et Babuska (1996), *Finite Point Method* de Oñade et al. (1996), *Free Mesh Method* de Yagata et Yamada (1996), *Boundary Node Method* de Zhu et al. (1998), *Meshless Local Petrov-Galerkin Method* de Atluri et Zhu (1998), *Node-by-node Meshless Method* de Nagashima (1999), *Method of Finite Spheres* de De et Bathe (2000), *Point-interpolation Method* de Liu et Gu (2001), *Finite Cloud Method* de Aluru et Li (2001), *Meshless Finite Element Method* de Idelsohn et al. (2003), *Least-squares Meshfree Method* de Kwon et al. (2003).

D'autres publications se sont consacrées sur les contributions et applications spécifiques des méthodes citées ci-dessus. On constate ainsi que ces dernières années, considérable attention a été concentrée sur plusieurs méthodes sans maillage.

Dans le but de répondre à une question d'importance primordiale, Fernandez (2004) présente une étude comparative entre les méthodes sans et avec maillage structurée pour essayer de déterminer dans quelles applications les méthodes sans maillage ont plus d'avantages par rapport aux méthodes qui utilisent des maillages. En particulier cet auteur met en évidence que l'analyse modale à travers la méthode EFG présente une meilleure performance par rapport à la méthode des éléments finis. Askes et al. (1999), Bouillard et

Suleau (1998) montrent que pour certains cas (applications des analyses elastoplastiques et des problèmes numériques de Helmhotz propres à la théorie acoustique) la même méthode possède une meilleure performance que les éléments finis.

Plusieurs applications avec l'utilisation des méthodes sans maillage ont été proposées ces dix derniers années, portant sur diverses types de problèmes tels que : problèmes d'impact (CMAME, 1996), fissuration (Hegen, 1997 ; Belytschko et al., 1995) et interaction fluide structure (Oñade et Idelsohn, 1998); en problèmes d'acoustique (Bouillard et Suleau, 1998) ; corrections sur le calcul des gradients en problèmes de fluides (Bonet et Lok, 1999) ; corrections sur l'intégration en problèmes de simulation de mise en forme (Bonet et Kulasegaram, 2000).

Il a été démontré que les méthodes sans maillage ont plus d'avantages dans les processus de remaillage, comme les cas des applications cités ci-dessus. D'autres travaux, comme par exemple celui de Liu et al. (1997) présentent des estimations *a priori* de l'erreur pour la plupart des méthodes sans maillage. Ces études ont permis à Huerta et al., (1999) d'effectuer une distribution adaptative de points sur certains zones d'intérêt dans le domaine des structures. Les mêmes auteurs ont aussi fait l'estimation de l'erreur *a posteriori* dans leurs applications.

La méthode EFG, qui a été employée dans l'étude rapportée dans ce mémoire, utilise des théories d'approximation basées sur des fonctions de forme construites entièrement à partir de points arbitrairement distribués (Belytschko et al., 1994). Elle est basée sur la résolution de la forme faible des équations aux dérivées partielles par une méthode de Galerkin. L'approximation du champ des déplacements qui est construite pour être introduite dans la forme faible ne nécessite pas de maillage, mais seulement un ensemble de points distribués sur le domaine.

Au niveau des applications de la méthode sans maillage de Galerkin on remarque les travaux de Belytschko et al. (1995) qui exposent leur méthode pour résoudre les problèmes de propagation de fissures. Quelques études proposent l'utilisation de formulations mixtes d'interpolations des éléments finis et interpolations sans maillage de Galerkin, parce que dans ces applications (propagation de fissures) cette alliance est justifiée (Fernandez, 2004). La modélisation de stratifiés composites à travers la méthode EFG est proposée par Chen et al. (2003) pour le calcul des fréquences propres.

1.1.4. Matériaux composites modélisés par méthodes sans maillage

Il est reconnu que les systèmes structuraux constitués des matériaux composites possèdent une meilleure performance mécanique que des systèmes formés par des matériaux métalliques isotropes. Le principal avantage des matériaux composites est la

meilleure relation résistance/poids en comparaison avec les matériaux traditionnels. Les matériaux composites permettent aussi d'étendre la vie utile des structures grâce à leurs caractéristiques mécaniques (rigidité, résistance à la fatigue) et chimiques (résistance à la corrosion). Aujourd'hui les matériaux composites sont utilisés pour les structures de satellites, pour les réflecteurs paraboliques dans l'industrie aérospatiale ; fusées, pièces de renfort structural des structures aéronautiques ; pour les barres sous torsion, les portiques de châssis dans l'industrie automobile ; pour les membres artificiels, les dispositifs orthopédiques, les implants, les équipements médicaux et les rotors et pales des turbines éoliques (Jones, 1999).

Généralement, pour la modélisation des structures en matériaux composites sont utilisées les méthodes des éléments finis, des éléments de frontière. Plusieurs éléments de plaque et coque ont été élaborés et appliqués dans l'analyse des matériaux composites (Jones, 1999). En contrepartie, les études rapportées dans la littérature portant sur la modélisation de matériaux composites par des méthodes sans maillage ne sont pas nombreuses. Les travaux de Chen et al. (2003) ; Liu et al. (2006) ; Belinha et Dinis (2006) ; Belinha et Dinis (2007) sont quelques uns de ces travaux. Dans ces publications l'intérêt des applications est de comparer la capacité prédictive de la méthode EFG avec la MEF ou proposer des modèles analytiques pour améliorer la performance et inclure d'autres potentialités d'analyse.

L'évaluation de la fiabilité de matériaux composites formés de stratifiés à fibres longues et modélisés en utilisant la méthode EFG a été l'objet d'une partie des applications numériques présentées dans ce mémoire.

1.1.5. Méthodes d'optimisation fiabiliste

Le principal objectif de l'optimisation fiabiliste est de trouver une solution optimale des structures en satisfaisant simultanément un certain niveau de fiabilité. Généralement, un problème d'optimisation fiabiliste est formulé comme un problème général d'optimisation classique en prenant en compte l'indice de fiabilité dans les contraintes.

Les premiers travaux qui traitent le problème d'optimisation fiabiliste sont basés sur des analyses de sensibilité (Frangopol, 1985). En considèrent la probabilité de défaillance comme une contrainte, Feng et Moses (1986) ont résolu un problème d'optimisation. Enevoldsen et Sorensen (1993) suggèrent quatre procédures pour résoudre le problème des systèmes en séries et en parallèles. Postérieurement, la méthode FORM a été utilisée pour évaluer l'indice de fiabilité dans la solution de pr Lee et al. (2002) ont comparé l'optimisation fiabiliste classique avec une approche de performance cible et pour conclure que cette dernière approche était informatiquement plus efficace et robuste. Papadrakis et Lagaros

(2002) ont présenté une méthodologie pour l'optimisation fiabiliste avec un tirage d'importance pour évaluer la fiabilité tandis que un réseau de neurones exécutait l'optimisation.

La solution d'un problème d'optimisation fiabiliste est onéreuse et présente difficultés de convergence puisque dépend de la solution de deux problèmes simultanément : l'optimisation et l'analyse de fiabilité (Akbora et al., 1993). En travaillant dans l'espace physique et réduit, Kharmanda et al. (2002) ont proposé une approche appelée méthode hybride en intégrant le problème d'analyse de fiabilité. Une version améliorée de cette méthode est proposée par Mohsine (2006). Dans le but de réduire le coût de calcul de ces méthodes et amoindrir la dépendance de l'expérience des ingénieurs dans la définition des facteurs de sécurité, Kharmanda et al. (2004) suggèrent une méthode semi-analytique dénommée méthode des facteurs optimaux de sûreté.

En raison de la simplicité de mise en œuvre de la méthode des facteurs optimaux de sûreté (OSF) et de ses avantages par rapport aux méthodes d'optimisation fiabiliste citées ci-dessus, cette méthode a été l'objet des application numériques et intégrée à la méthode d'analyse de fiabilité présenté dans ce mémoire.

1.2. Justification et description des travaux

Les méthodes d'analyse de fiabilité les plus souvent utilisées dans les travaux de recherche sont les méthodes FORM, SORM et SMC, sachant que sont celle considérées les plus connues et plus robustes (Haldar et Mahadevan, 2000 a ; Lemaire, 2005). Dans le cadre de la méthode FORM et SORM, la recherche du point de défaillance le plus probable dans le domaine réduit, pose un problème d'optimisation. Dans ce sens, plusieurs méthodes d'optimisation numérique sont utilisées pour estimer l'indice de fiabilité et les probabilités de défaillance. Traditionnellement, la recherche de ce point pour les algorithmes FORM et SORM est réalisée par des processus d'optimisation du type Newton-Raphson (N-R).

Le fait que le calcul itératif de l'indice de fiabilité à travers FORM et SORM requière le choix d'une estimation initiale du vecteur des variables de conception, ainsi que le calcul des dérivées partielles des fonctions d'état limite par rapport aux variables de conception constituent les principaux inconvénients de ces méthodes. En effet, dans la pratique une solution initiale convenable des variables de conception n'est pas toujours facile à estimer, d'autant plus que ce choix peut avoir un effet sur la convergence du processus de calcul et l'obtention des solutions finales correspondant à des minima locaux ou au minimum global.

En plus, le besoin de calculer les dérivées partielles (gradients) augmente le coût de calcul et peut aussi engendrer des erreurs d'approximation.

Visant à surmonter les difficultés des méthodes FORM et SORM mentionnées ci-dessus, on peut constater que l'un des champs d'actuation des travaux de recherche récents concerne la proposition de méthodologies alternatives d'optimisation capables de pallier les inconvénients des méthodes classiques d'optimisation. Dans ce sens, la méthode proposée au sein de cette thèse est appelée méthode de fiabilité basée sur des techniques d'optimisation heuristiques (HBRM, *Heuristic-based Reliability Method* en Anglais). Cette méthode prend comme base la méthode FORM et utilise les méthodes heuristiques d'optimisation. Ces méthodes cherchent à imiter le comportement observé dans les systèmes biologiques et sont : Algorithmes Génétiques (*Genetic Algorithms* - GA), Optimisation par Essaims Particulaires (*Particle Swarm Optimisation* - PSO) et Optimisation par Colonie de Fourmis (*Ant Colony Optimization* - ACO).

La méthode HBRM ne requiert aucune estimation initiale de la solution et opère selon le principe de la recherche multi-directionnelle, sans besoin de calculer les dérivées partielles de la fonction d'état limite par rapport aux variables aléatoires. D'autre part, il est largement reconnu qu'en général les méthodes d'optimisation heuristiques impliquent des temps de calcul plus élevés, ce qui est leur plus grand désavantage.

La quasi inexistence de références bibliographiques, résumée dans la section 1.1.2, sur la recherche alternative du point de conception par des méthodes heuristiques, montrent la nécessité de continuer ces travaux, sachant que le gain peut être significatif.

Les avancements scientifiques peuvent être incorporés de diverses formes aux applications d'intérêt de l'industrie. Dans le cas de la modélisation numérique et de l'analyse de fiabilité, l'une des manières d'insertion est l'apparition de logiciels commerciaux de calcul qui les prennent en compte dans leurs analyses.

Dan ce contexte, il y a dans l'actualité au niveau mondial quelques logiciels qui ont été conçus pour la solution de problèmes d'analyse d'incertitudes et de fiabilité des structures. Quelques uns font spécifiquement des analyses probabilistes (groupe A), d'autres incluent la MEF dans l'analyse de fiabilité (Groupe B) tandis qu'autres effectuent l'analyse de sensibilité en utilisant la MEF pour évaluer la fiabilité (Groupe C).

Le Tableau 1.1 résume quelques caractéristiques des logiciels commerciaux les plus importantes.

Tableau 1.1 - Logiciels commerciaux de fiabilité des structures (modifié de BECK, 2006)

Logiciel/Pays/ An de origine	**Origine**	**Caractéristiques**
NESSUS USA 1989	Southwest Research Institute	Module de EF stochastiques intégré ; modélisation des champs stochastiques ; interfaçage avec ANSYS et NASTRAN.
PROBAN Norvège 1989	Veritas Sesam Systems	Paramètres de distribution aléatoire ; modules spéciaux pour l'inspection et maintenance ; fiabilité des systèmes.
STRUREL Allemagne 1992	RCP Gmbh	Problèmes de fiabilité dépendante du temps intégré avec son logiciel de EF ; analyse statistique de données.
ISPUD Autriche 1986	University of Innsbruck	Intégration numérique adaptative ; échantillonnage par importance.
CalREL USA 1989	University of California	Interface avec son logiciel de EF (CALREL-FEAP).
COMPASS Canada 1992	Martec Limited, Halifax	Interface avec son logiciel de EF (STOVAST)

Dans la classification ci-dessus, on considère comme analyse probabiliste l'étude de la propagation d'incertitudes aux réponses des systèmes qui possèdent des variables aléatoires. Alors on considère comme analyse de fiabilité, l'étude de l'estimation de l'indice de fiabilité et de la probabilité de défaillance. Dans le premier groupe (A) s'incluent : CalREL (Liu et al., 1989), ComREL/SysREL (*Reliability Consulting Programs*, 2003), ISPUD (IfM, 2003), PROBAN (Det Norske Veritas, 2003) et UNIPASS (Prediction Probe Inc., 2003). Dans la deuxième catégorie se trouvent : CalREL, FEAP (Taylor, 2003) et UNIPASS qui utilise le logiciel de éléments finis NASTRAN (MSC Software, 2003). Le troisième groupe (C) est formé par COSSAN (IfM, 2003), DAKOTA (Sandia National Laboratories, 2003), FERUM (Haukaas et al., 2003), NESSUS (Southwest Research Institute, 2003) et STRUREL SysREL (*Reliability Consulting Programs*, 2003).

Seuls FEAP et NESSUS travaillent avec des analyses non linéaires, alors que les autres logiciels qu'utilisent la MEF sont limités aux études linéaires.

Le Tableau 1.1 et les paragraphes précédents montrent que les logiciels commerciaux ont dans la plupart des cas un interfaçage avec des codes EF pour réaliser l'analyse de fiabilité. Cela indique que les méthodes de modélisation alternatives comme les méthodes sans maillage n'ont pas encore trouvé d'espace dans les logiciels commerciaux. Ceci est dû au fait que, même au niveau de la recherche, l'étude de celles-ci est beaucoup moins développée.

Dans la mécanique numérique, les méthodes basées sur le maillage rencontrent des difficultés dans le traitement des problèmes lorsque des conditions géométriques ou des frontières sont mobiles ou discontinues. Par exemple, dans les processus de mise en forme comportant de grandes déformations, propagation de fissures et simulations de défauts. Habituellement, la stratégie la plus viable, employée conjointement avec des méthodes basées en maillage pour traiter ces discontinuités mobiles, est le remaillage des modèles. Ce processus conduit normalement à la dégradation de l'exactitude et à l'augmentation de la complexité des algorithmes de modélisation et, en conséquence, à l'augmentation du coût de calcul. Ainsi, ces problèmes peuvent être résolus de façon mois coûteuse avec des méthodes sans maillage. Fernandez (2004) montre encore que le coût de calcul n'est pas négligeable en applications tridimensionnelles par la MEF en étudiant les problèmes de convection et fermeture (locking) volumétrique. En contrepartie, les méthodes sans maillage peuvent travailler avec une redistribution de points sur la structure sans un coût additionnel au fait que l'interpolation ne dépend pas de la connectivité des points ou nœuds.

Quelques autres inconvénients des méthodes traditionnelles sont le coût et la difficulté pour générer une maille de qualité. Pour des applications complexes, le temps de prétraitement des modèles est supérieur au temps d'exécution de l'analyse (Fernandez, 2004). C'est-à-dire, le coût d'élaboration des maillages de qualité par rapport au temps de modélisation total est considérable.

Pour résumer, les méthodes sans maillage essayent d'éliminer la dépendance du maillage des méthodes classiques à travers la construction d'une approximation en fonction de points sur la structure.

En raison de leur origine récente et de leurs domaines d'application, les méthodes sans maillage exigent plus d'attention de la part des chercheurs sachant que à l'heure actuelle, leur application est limitée à des systèmes relativement simples. On ne peut pas nier que actuellement, la FEM est plus compétitive que les méthodes sans maillage pour résoudre plusieurs problèmes en mécanique numérique. Emerge alors la nécessité de comparer la performance des méthodes sans maillage avec celle des éléments finis, ce qui constitue un champ d'étude encore ouvert à plusieurs travaux.

Parmi les méthodes sans maillage, la méthode de Galerkin est particulièrement intéressante en raison de la relative simplicité de sa formulation comparativement aux autres car sa formulation est semblable à la MEF (Rahman et Rao, 2001). Un autre avantage de la méthode EFG est la possibilité de diverses applications avec bonne performance (Fernandez, 2004). Sans doute, la méthode EFG est la méthode sans maillage la plus souvent aperçue dans la littérature (Belytschko et al., 1996), étant appliquée en plusieurs champs de la mécanique des solides : propagation de fissures (Lu et al., 1994 ; Hegen, 1996 ; Krongauz et Belytschko, 1996 ; Kaljevic et Saigal, 1997 ; Ponthot et Belytschko, 1998 ; Yu et Saigal, 1998), problèmes de convection et fermeture (locking) volumétrique (Dolbow et Belytschko, 1999), acoustique (Bouillard et Suleau, 1998). Les champs d'application illustrent la potentialité que cette méthode détient pour réaliser l'analyse de fiabilité. Dans ce contexte, le choix de la méthode EFG parmi les méthodes sans maillage pour l'utilisation en applications de fiabilité des structures est justifié au sein de cette thèse.

Depuis le début des années 90, les méthodes sans maillage ont été l'objet des efforts de recherche par la communauté scientifique mais la plupart de leurs développements ont été concentrés sur l'application à des problèmes de nature déterministe. Dans ce sens, la combinaison des méthodes d'analyse probabiliste avec les techniques de modélisation sans maillage nécessite plus d'attention et demeure un riche champ de recherche, relativement inexploré.

Même l'utilisation de la MEF en combinaison avec l'analyse de fiabilité est récente. Le premier couplage entre la MEF et la FORM a été réalisé par Der Kiureghian et Taylor (1983). Depuis lors, un nombre considérable de travaux ont été rapportés, en incluant ceux de Liu et Der Kiureghian (1991), Gutierrez et al. (1994), Zhang et Der Kiureghian (1997), Sudret et Der Kiureghian (2000), Imai et Frangopol (2000) et Frier et Sorensen (2003), parmi d'autres.

Quelques uns des premiers travaux que couplent les méthodes sans maillage et l'analyse de fiabilité en problèmes de élasticité linéaire où les caractéristiques des matériaux varient aléatoirement, sont ceux de Rao et Rahman (2000 et 2002) et Rahman et Xu (2005). Récemment, Rahman et Rao (2001 et 2002) ont présenté l'analyse probabiliste, des structures en élasticité linéaire qui possèdent des propriétés mécaniques aléatoires en utilisant la méthode EFG.

Le but des commentaires précédents est de montrer l'évolution de divers aspects en ce qui concerne l'évaluation de la fiabilité des structures, les méthodes d'optimisation heuristiques, la modélisation de structures par des techniques sans maillage en structures composites et l'optimisation fiabiliste. Par ailleurs, cette revue de l'état de l'art actuel est importante pour exposer les aspects qui seront abordés et approfondis dans les prochains chapitres et pour situer les contributions apportées par ce travail de thèse.

1.3. Objectifs de la thèse

L'étude présentée dans ce mémoire de thèse s'insère dans une thématique de recherche commune des équipes de recherche du Laboratoire de Mécanique des Structures Prof. José Eduardo Tannús Reis (LMEst), de la Faculté de Génie Mécanique de l'Université Fédérale d'Uberlândia (FEMEC-UFU, Brésil) et de l'équipe FIMEN (Fiabilité et Incertitudes en Mécanique Numérique) du Laboratoire de Mécanique de Rouen (LMR), Institut National des Sciences Appliquées de Rouen (INSA-Rouen, France). Cette thématique concerne la conception optimale et fiabiliste de structures mécaniques en elastodynamique, visant, en particulier, des applications en matériaux composites et intelligents.

Dans le but de positionner correctement le domaine des travaux de recherche conduits, il convient de mettre en évidence les champs d'étude, les hypothèses et les limites de ce travail.

Nous proposons dans cette thèse, une étude des champs suivants :

- la fiabilité invariante par rapport au temps et ses méthodes, considérée comme un sous domaine de la fiabilité des structures ;
- la méthode sans maillage de Galerkin (EFG, *Element-free Galerkin method*) parmi les méthodes de modélisation sans maillage en mécanique linéaire ;
- les matériaux composites, considérés comme objet d'intérêt pour l'application des méthodes de fiabilité des structures ;
- les méthodes d'optimisation heuristiques, parmi les méthodes numériques d'optimisation, employées pour la recherche du point de conception dans l'analyse de fiabilité.

Les travaux de recherche combinent les champs précédents dans le cadre d'une méthodologie mécano-fiabiliste pour des applications en elastodynamique.

Dans le contexte de la conception fiabiliste de structures, on est souvent confronté aux situations et nécessités suivantes qui ont été admises comme motivation pour les travaux de recherche rapportés dans ce mémoire :

- L'analyse de fiabilité nécessite des méthodes numériques en mécanique fiables, efficaces et capables de modéliser une diversité de problèmes puisque son champ d'actuation est très vaste ;

- En fonction de cette dernière situation, émerge la nécessité de comparer la performance des méthodes numériques de modélisation dans l'évaluation de l'analyse de fiabilité ;
- Le besoin également de méthodes d'optimisation pour la recherche du point le plus probable de défaillance ainsi que des méthodes de transformation et traitement des variables aléatoires se font sentir ;
- Les méthodes sans maillage doivent être améliorées pour qu'elles puissent être incorporées dans les logiciels d'analyse de fiabilité, afin d'optimiser les algorithmes et amplifier leur applicabilité ;
- Le besoin d'étendre l'analyse de fiabilité aux problèmes fiabilistes multi objectifs, en considérant plusieurs fonctions d'état limites simultanément est aussi nécessaire.

L'objectif principal de cette thèse est de contribuer au développement d'une méthodologie de conception des structures en mécanique numérique. Cette méthodologie vise les applications en elastodynamique linéaire et, en particulier, aux matériaux composites, modélisées par des méthodes sans maillage couplées à l'analyse de fiabilité. Cette analyse à son tour, utilise des méthodes d'optimisation heuristique pour la recherche du point de conception.

Les objectifs spécifiques sont établis en vue de satisfaire ou répondre aux besoins énumérés ci-dessus.

Il est clair qu'il n'existe pas une seule méthode capable de répondre à touts les besoins en mécanique numérique et fiabilité des structures. Ce fait conduit à l'objectif supplémentaire de comparer la performance de différentes variantes pour savoir lesquelles sont les plus convenables pour être utilisées en certaines applications tels que les applications en dynamique des structures, matériaux composites, problèmes d'interaction fluide structure.

1.4. Organisation du Mémoire de thèse

Le Mémoire de thèse est organisé en six chapitres, hormis ce Chapitre I d'introduction, dont le contenu est le suivant :

Le Chapitre II résume les aspects théoriques fondamentaux de l'analyse de fiabilité, et décrit les méthodes classiques d'estimation de l'indice de fiabilité (FORM, SORM et SMC). Dans ce chapitre, nous proposons une méthode alternative d'analyse de fiabilité dénommée HBRM. Cette méthode est basée sur l'utilisation de techniques d'optimisation heuristiques

(GA, PSO et ACO) et elle est combinée aux méthodes FORM et SORM. Cette combinaison constitue la méthodologie d'analyse de fiabilité proposée dans ce mémoire.

Le Chapitre III illustre l'applicabilité et l'efficacité de la méthodologie d'analyse de fiabilité, décrite au Chapitre II, à travers plusieurs applications numériques. Les applications simples en statique, stabilité et dynamique exploitent différents aspects de la méthodologie. Par exemple, l'évaluation explicite et implicite des fonctions d'état limite aussi que l'évaluation de ces fonctions à travers des méthodes analytiques et numériques (méthode de Ritz et méthodes des éléments finis) de systèmes uni, bi et tridimensionnels sont abordées.

A manière de continuation du Chapitre III, le Chapitre IV présente des applications numériques plus complexes, à savoir, des applications en problèmes d'interaction fluide-structure bi et tridimensionnelles aussi qu'une application industrielle en dynamique. Ce chapitre comporte ainsi, une analyse de validation déterministe, une analyse stochastique (par la SMC et la méthode de Muscolino) et une analyse de fiabilité des applications mentionnées. En particulier pour l'application industrielle, la méthode de Muscolino est combinée avec la théorie de synthèse modale pour la réduction des temps de calcul dans ces analyses.

Dans le Chapitre V on passe en revue de la littérature concernant les méthodes de modélisation sans maillage et la théorie formelle de la méthode EFG. Les développements des algorithmes numériques de la méthode EFG prend le contenu du chapitre comme base pour sa mise en œuvre. Sont décrits aussi, l'approximation des moindres carrés mobiles, l'utilisation de la forme faible des équations de l'élasticité pour déterminer les valeurs des inconnues nodales, l'imposition des conditions aux limites et l'intégration sur le domaine d'intérêt dans l'approximation de Galerkin. A la fin du chapitre, un résumé des algorithmes en œuvre de la méthode EFG et présentée et une application numérique bidimensionnelle valide la méthode implémentée.

Le Chapitre VI est consacré à des applications uni et bidimensionnelles de l'analyse de fiabilité en stratifiés de matériaux composites modélisés par la méthode EFG et la comparaison avec la MEF. Ainsi, les algorithmes de la méthode EFG sont couplés à la méthodologie d'analyse de fiabilité. Le contenu du chapitre permet de comparer la performance des méthodes sans et avec maillage dans les applications considérées. La versatilité et l'applicabilité de la méthodologie de conception sont évaluées et testées en utilisant les méthodes FORM, SORM et HBRM.

Le Chapitre VII présente une stratégie d'optimisation fiabiliste qui combine la méthode des facteurs optimaux de sûreté (OSF) avec des algorithmes d'optimisation heuristique (GA, PSO et ACO) et avec les méthodes de modélisation sans et avec maillage. Dans le but de

montrer l'applicabilité et efficience de cette stratégie, sont présentes des applications pour la minimisation du volume, en exigent un indice de fiabilité cible.

Une vision générale des travaux de recherche, de ses principales conclusions, contributions et perspectives de continuité est fournie par le Chapitre VIII.

CHAPITRE II

MÉTHODES D'ANALYSE DE FIABILITE DES STRUCTURES

La connaissance progresse en intégrant en elle l'incertitude, non en l'exorcisant
(Edgar Morin, 1921)

Ce chapitre décrit les concepts fondamentaux de l'analyse de fiabilité invariant avec le temps, les méthodes classiques d'estimation de l'indice de fiabilité FORM, SORM et SMC. Nous proposons une méthode alternative à ces dernières basée sur l'utilisation de méthodes d'optimisation métaheuristiques, dénommée HBRM.

La méthode proposée (HBRM) prend comme basse la méthode FORM et utilise des méthodes métaheuristiques d'optimisation pour chercher le point de conception, parmi elles : Algorithmes Génétiques (GA), Optimisation par Essaims Particulaires (PSO) et Optimisation par Colonie de Fourmis (ACO). La HBRM ne requière pas d'une estimation initiale de la solution ni du calcul des dérivées de la fonction d'état limite par rapport à variables aléatoires puisque emploi une recherche multi directionnelle.

La méthodologie qui intègre les techniques d'analyse de fiabilité présentées dans ce chapitre a été mise en œuvre sous plateforme MATLAB®. L'Annexe A détaille cette méthodologie et le Chapitre III illustre sa application. L'Annexe B résume les principales fonctions de distribution de probabilité et les lois de transformation possibles d'être utilisées par la méthodologie d'analyse de fiabilité.

2.1. Concepts fondamentaux de l'analyse de fiabilité

Il est bien connu le fait que la plupart des phénomènes observables dans la nature contiennent un certain degré d'incertitude. D'ailleurs, la répétition de mesures des phénomènes physiques produit des résultats différents, quelques uns se montrant plus

fréquents que d'autres. La présence de résultats qui ne suivent pas un comportement « prévisible » traduit l'incertitude et peut être caractérisé pour les propriétés probabilistes et statistiques.

En sachant que tous les paramètres d'intérêt dans le Génie des Structures possèdent un certain degré d'incertitude, ceux-ci doivent être considérés comme des variables aléatoires (Melchers, 1987).

Dans ce contexte, la présence d'incertitudes fait qu'on ne puisse pas assurer une performance satisfaisante de manière absolue, déterministe. Au contraire, cette performance peut être assuré seulement en termes de probabilité pour qu'un certain critère de performance soit satisfait. Dans la terminologie de l'ingénierie, cette probabilité est appelée fiabilité.

2.1.1. Un bref historique

Les concepts de probabilité associés aux risques sont employés depuis long temps. Pierre-Simon, Marquis de Laplace (1749-1827), a publié une recherche mathématique appliquée à ces concepts.

Dans les années 1940, s'est produit le développement de la théorie mathématique qui a une relation directe avec l'analyse de fiabilité. Robert Lusser a développé une équation associée à la fiabilité d'un système en série (Lafraia, 2001). A la même époque sont apparues les premières tentatives de chercher une amélioration de la qualité de fonctionnement des systèmes alliée à la manutention préventive. Cela fut à travers l'amélioration de projets, l'amélioration d'équipements et d'instruments de mesure et l'utilisation du matériel plus résistants.

Avec le démarrage de l'industrie aérospatiale et électronique, accompagné de l'établissement de l'industrie nucléaire, dans les années 1950, une grande avancée dans le développement de méthodologies de calcul et des applications de fiabilité a été vérifié. A ce moment-là, les analystes ont reconnu la nécessité d'application de l'analyse de fiabilité, principalement dans la phase de projet, contrairement à la façon d'élaborer les projets, c'est-à-dire, concentration de ressources pour la manutention après la vérification de présence de défaillances.

À partir de 1960, le développement des techniques d'analyse de nature théorique et expérimentale initiée dans la décennie de 1950 ont continué leurs avancés, notamment la théorie d'analyse d'arbre de défaillances. Cette époque marque l'établissement des bases de l'analyse de fiabilité appliquée à des systèmes mécaniques. Les premiers travaux ont été basés sur les modèles d'efforts et de résistance.

Dans la décennie des années 1970, l'analyse de fiabilité est consolidée dans divers secteurs, principalement dans le nucléaire. Apparaissent aussi les premiers modèles d'analyse de fiabilité mises en oeuvre avec des outils informatiques.

Finalement, à partir du début de 1980, se vérifie que les pays détenteurs de technologie de pointe mettent en œuvre définitivement les techniques d'analyse de fiabilité dans les divers secteurs de l'ingénierie.

2.1.2. Définitions

La nécessité de considérer les incertitudes des paramètres de conception a conduit Freudenthal (1956) à créer le concept de projet basé sur le risque, qui constitue la base de l'analyse de fiabilité. Selon Ang et Tang (1984), la fiabilité est une mesure probabiliste de sécurité avec laquelle un certain système fonctionne. D'après Melchers (1987), la fiabilité est la probabilité attribué à la parfaite opération d'un certain système structural pendant une période de temps spécifié (plus connu comme temps de vie utile) sous les conditions normales d'utilisation. Selon Lafraia (2001), fiabilité est la probabilité d'opération d'un système structural dans certaines limites spécifiées dans le projet, c'est-à-dire, sans la vérification de défaillances du même durant un période de temps prévu.

Le point le plus important de ce rappel de définitions est de comprendre que la définition de la fiabilité doit tenir compte de quatre aspects fondamentaux : la quantification de la fiabilité en termes de probabilité, la définition de la performance exigée, la spécification de la période d'opération et la définition des conditions d'utilisation.

En considérant que la fiabilité est la probabilité de succès d'un critère de performance, le concept inverse est connu comme la probabilité de défaillance ou risque. Par rapport au génie des structures, il existe la nécessité de l'étude des facteurs qui influencent le risque et la sûreté d'un système structural. Il vise à éviter l'occurrence de défaillances à travers l'utilisation des coefficients de sécurité, qui sont introduits de façon à surestimer les charges auxquelles la structure est soumise ou sous-estime la capacité des structures de supporter les charges. Les valeurs de ces coefficients sont adoptées de façon relativement arbitraire, faisant appel à l'expérience préalable de l'analyste. D'autre part, l'analyse de fiabilité permet de définir les limites de sûreté en fonction des paramètres de conception aléatoires dans un cadre probabiliste pour optimiser l'utilisation des ressources. Il est connu le fait que les coefficients de sécurité augmentent et/ou diminuent quelques paramètres de conception avec l'objectif de garantir la sécurité des systèmes structuraux. Avec l'application de celui-ci il est obtenu un projet qui n'utilise pas strictement des paramètres optimaux. Nonobstant, l'analyse de fiabilité établit les bases pour fournir des informations exigées pour l'élaboration de projets optimaux. Le principal intérêt de l'analyse de fiabilité est donc d'établir la relation

entre la probabilité de défaillance et les incertitudes paramétriques considérées dans le projet.

La probabilité de défaillance est exprimée en fonction des dénommés *états limites*. Les exigences essentielles de service, sécurité et robustesse peuvent être formulées mathématiquement sous la forme d'équations qui traduisent les états limites, qui établissent les limites entre les zones de sécurité et de défaillance. Dans ce sens, la défaillance représente un état indésirable de la structure par rapport aux état limites.

Les critères de performance exprimés par des fonctions d'état limite peuvent être classées en trois types : états limites ultimes, états limites d'opération et états limites de fatigue (Melchers, 1987). Parmi les applications les plus connues du premier type il y a : les évaluations de la résistance maximale, formation de courbure plastique, écrasement du béton à la compression, défaillance à cause du cisaillement, perte de stabilité, flambage et rupture des matériaux. Les applications le plus fréquentes du second type sont : fissuration du matériaux, déviation maximale, niveaux de vibration, déformations permanentes. Le troisième type inclut des applications en fatigue.

2.1.3. Facteurs qui influencent l'analyse de fiabilité

Comme l'analyse de fiabilité requiert des informations sur les incertitudes il est indispensable de comprendre que il existent différents types d'incertitudes dans les systèmes structuraux ; pour chaque type il est exigé une approximation différente pour l'ensemble des données qui seront utilisées lors de l'analyse de fiabilité. Selon Haldar et Mahadevan (2000 b), les incertitudes dans un système peuvent être de nature cognitive (qualitative) et non cognitive (quantitative).

Les incertitudes de nature non cognitive peuvent être classées en trois types :

- Incertitudes aléatoires inhérentes à toute observation physique, en sachant que les mesures d'une grandeur physique sont toujours différentes, dû à des nombreuses fluctuations de l'environnement, procédures expérimentales, instruments de mesure, observateur, etc ;
- Incertitudes statistiques, dues au manque de précision des informations disponibles sur la variabilité de la grandeur physique. Par exemple, lorsque on admet un modèle de distribution pour une variable aléatoire basée sur un histogramme, on utilise un teste d'hypothèse qui révèle que telle information est vraie avec un niveau de probabilité ;
- Incertitudes de modélisation, en sachant que les modèles des systèmes sont des représentations approximatives du comportement réel des systèmes. L'incertitude

de modélisation pouvant être représentée par une variable aléatoire, sa distribution de probabilité serait alors définie en faisant des comparaisons entre les mesures issues des essais expérimentaux et la variable associée au modèle ;

- Incertitudes de prévision, dans le cas d'une prévision des conditions d'opération futures d'un processus ou système. Dans la plupart des cas, l'information disponible est limitée à une certaine période de temps, mais l'on extrapolée sur la vie utile du système.

Les incertitudes de nature cognitive révèlent de la présence d'imprécisions provenant d'abstractions intellectuelles de la réalité. Celles-ci peuvent se produire :

- Dans la définition de certains paramètres, comme par exemple la performance structurale, qualité, détérioration, impact de l'environnement dans les projets et la définition des conditions externes.
- Incertitudes de décision par rapport à la définition d'un événement donné. Les états limites de service, par exemple, n'ont pas une frontière très clairement définie. Néanmoins, l'utilisation des équations d'état limite exige la définition d'une frontière fixée entre les conditions de défaillance et la sécurité.
- Comme conséquence des limitations d'observation de l'être humain.
- Dans l'interprétation des lois entre les paramètres intervenant dans les systèmes complexes.

Il est important de remarquer que l'analyse de fiabilité des structures peut être réalisée au niveau des éléments qui composent le système ou bien au niveau global où la structure est considérée dans son ensemble. Lorsque s'agit des modes multiples de défaillance plusieurs éléments structuraux, s'utilise le concept de fiabilité de systèmes, qui consiste à estimer la fiabilité de l'ensemble des éléments à partir des fiabilités pour chaque élément individuel, pour lequel des critères de performance sont établis. En tenant compte des dépendances entre les modes de défaillances des éléments, une analyse complète inclut l'évaluation locale des composants du système dans une première étape et l'évaluation de la fiabilité du système global dans une deuxième phase. Cette procédure n'est pas abordée dans ce mémoire, car l'étude a été limité à considérer uniquement des modes de défaillances globaux, pour lesquels des fonctions d'état limites ont pu être établies.

2.1.4. Concept mathématique de fiabilité

Pour définir la fiabilité sous le point de vue mathématique, il faut, premièrement définir le(s) critère(s) de performance et les paramètres de conception (variables aléatoires) $x_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$ ainsi que leurs interrelations. Mathématiquement, la fonction de performance est écrite comme $Z = G(x_1, x_2, ..., x_n)$ et la surface de défaillance ou d'état limite est définie par la condition $Z = 0$. Cette surface marque la frontière entre les régions de sécurité et de défaillance dans l'espace des paramètres aléatoires de conception. Les variables aléatoires peuvent apparaître explicitement ou implicitement dans la fonction d'état limite. La probabilité de défaillance est calculée selon :

$$p_f = \int \ldots \int_{G(\ )<0} f_x(x_1, x_2, ..., x_n) dx_1 dx_2 \ldots dx_n \tag{2.1}$$

où $f_x(x_1, x_2, ..., x_n)$ est la Fonction Densité de Probabilité (FDP) conjointe des variables aléatoires. Si ces variables sont statistiquement indépendantes, alors la FDP accumulé pourra être substituée dans l'intégrale par le produit des n FDPs individuelles. La dernière équation constitue l'expression fondamentale de l'analyse de fiabilité. En général, le nombre de variables aléatoires est élevé et ils n'apparaissent pas explicitement dans la fonction de performance, de telle sorte que la FDP accumulé est impossible d'obtenir. En d'autres mots, l'évaluation de l'intégrale multiple résulte extrêmement compliquée en fonction de la corrélation des variables et de la complexité de l'intégration. Pour surmonter à ces difficultés, des méthodes d'approximation ont été élaborées. Parmi ces méthodes, les plus utilisées sont la Simulation de Monte Carlo (SMC) et les méthodes de résolution analytique : méthode d'analyse de fiabilité du premier ordre et du deuxième ordre (FORM et SORM, respectivement), la méthode de la valeur moyenne et la méthode du point de défaillance le plus probable (Haldar et Mahadevan, 2000 b).

Les méthodes qu'ont été utilisées dans les simulations numériques présentées dans ce mémoire, SMC, FORM et SORM sont décrites succinctement dans les sections suivantes.

2.2. Simulation de Monte Carlo

La Simulation de Monte Carlo est considérée comme l'une des techniques les plus utilisées pour l'évaluation de la sécurité et du risque. Elle est reconnue comme une méthode d'ordre zéro puisqu'elle ne nécessite pas de calcul de dérivées. Néanmoins, c'est le moyen

le plus coûteux mais certainement le plus fiable pour l'évaluation de la probabilité de défaillance.

La mise en œuvre de la SMC est facile par rapport aux autres méthodes de fiabilité des structures. Par contre le coût de calcul de la SMC est haut lorsque l'évaluation de la fonction de performance dépend de modèles numériques puisque cette évaluation est faite pour chaque échantillon des variables aléatoires. La plupart des cas, ces modèles sont basés sur une analyse par éléments finis.

L'adoption d'une approximation peut éviter ces inconvénients. Dans ce contexte la méthodes FORM, SORM et HBRM évitent à surmonter les inconvénients de la SMC.

Comme toutes les méthodes numériques, la SMC a des avantages et désavantages. Parmi l'un de leurs principaux avantages, la SMC permet de travailler avec des variables explicites et implicites dans la fonction de performance. Par rapport à sa précision, la SMC est considérée comme une méthode de référence par le plus part des chercheurs en fiabilité structurale (Haldar et Mahadevan, 2000 b, Robertson, 2003).

Selon Haldar et Mahadevan (2000 b), la SMC est mise en œuvre en six étapes :

1. définition du problème en termes de toutes les variables aléatoires ;
2. modélisation des variables en fonction de leurs FDPs ;
3. génération de n échantillons des variables aléatoires ;
4. évaluation du taux de défaillance en utilisant la fonction de performance pour chaque ensemble de valeurs produites de toutes les variables aléatoires ;
5. extraction des informations probabilistes à partir du nombre de évaluations effectuées ;
6. détermination de la précision et efficacité de la simulation.

Dans l'étape 4, normalement sont utilisés les modèles éléments finis pour évaluer les fonctions de performance. L'estimation de la probabilité de défaillance est faite avec l'équation suivante (Kwak, 2004):

$$p_f \approx \frac{n_F}{n} \quad \text{ou} \quad p_f = \int I[G(x_i) \leq 0] f(x_i) dx_i \approx \frac{1}{n} \sum_{1}^{n} I[G(x_i) \leq 0] \tag{2.2}$$

où n_F est le nombre de fois qui la défaillance est vérifié, mesuré à l'aide du compteur I. Hamed et Bedient (1999) adoptent un compteur d'ordre zéro :

$$I(x)=\begin{cases}1 & si \quad G(x)\leq 0\\ 0 & si \quad G(x)>0\end{cases} \tag{2.3}$$

Une partie considérable de la SMC dépend de la génération des échantillons. Chaque échantillon contient n numéros aléatoires générés selon une fonction densité de probabilité. Quelques techniques de génération de numéros aléatoires sont expliquées par Rubinstein (1981).

Une stratégie adoptée pour réduire le coût de calcul consiste à utiliser des techniques d'échantillonnage par importance (importance-based sampling techniques). Dans ce contexte, quelques variantes de la méthode incluent des méthodes d'échantillonnage efficace et des techniques de réduction de variance (Robertson, 2003).

2.3. Méthode d'analyse de fiabilité du premier ordre

Parmi les approximations analytiques FORM et SORM sont basées sur le concept du point de défaillance le plus probable. Les méthodes du premier ordre FORM sont basées sur la linéarisation de la fonction de performance au point de défaillance le plus probable (Haldar et Mahadevan, 2000 b). Parmi les méthodes du premier ordre les méthodes suivantes ont été la base de la méthode FORM : la méthode du deuxième moment du premier ordre (MDMPO) et la méthode du deuxième moment du premier ordre améliorée (MDMPOA).

2.3.1. Méthode du deuxième moment du premier ordre

La probabilité de défaillance, donnée en fonction de l'indice de fiabilité (β) peut être définie comme :

$$p_f = 1-\Phi(\beta) \tag{2.4}$$

où Φ représente la fonction de probabilité gaussienne accumulée (FDA). En considérant par exemple le cas où $Z = x_1 - x_2$ pour des variables aléatoires x_1 et x_2 qui sont statistiquement indépendantes, obéissant des distributions normales et que la fonction état limite est linéaire, l'indice de fiabilité de Hasofer-Lind (β) est donné par :

$$\beta = \frac{\mu_{x_1} - \mu_{x_2}}{\sqrt{\sigma_{x_1}^2 + \sigma_{x_2}^2}} \tag{2.5}$$

De tel sorte que la probabilité de défaillance dépend de la relation entre la valeur de la moyenne Z et de son écart type. Cette relation est connue comme l'indice de fiabilité.

Si la distribution est log-normale on a :

$$\beta = \frac{\ln\left(\mu_{x_1} / \mu_{x_2}\right)}{\sqrt{\delta_{x_1}^2 + \delta_{x_2}^2}} \text{, où } \delta_{x_1} = \frac{\sigma_{x_1}}{\mu_{x_1}} \tag{2.6}$$

En supposant que la fonction de performance soit différenciable dans les proximités du point correspondant aux valeurs moyennes des variables aléatoires, il est possible de faire une expansion en séries de Taylor autour de la moyenne selon l'équation suivante :

$$Z = G(\mu_x) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial G}{\partial x_i}\left(x_i - \mu_{x_i}\right) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 G}{\partial x_i \partial x_j}\left(x_i - \mu_{x_i}\right)\left(x_j - \mu_{x_j}\right) + \ldots \tag{2.7}$$

où x_i désigne la i-ème variable aléatoire, μ_{x_i} et σ_{x_i} sont la moyenne et l'écart type de la variable x_i, respectivement. En tronquant la série de l'équation ci-dessus, on obtient la moyenne et la variance du premier ordre de Z selon :

$$\mu_Z \approx G\left(\mu_{x_1}, \mu_{x_2}, \ldots, \mu_{x_n}\right) \tag{2.8}$$

$$\sigma_Z^2 \approx \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial G}{\partial x_i}\frac{\partial G}{\partial x_j} \operatorname{cov}\left(x_i, x_j\right) \tag{2.9}$$

Si les variables ne sont pas corrélées :

$$\sigma_Z^2 \approx \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial G}{\partial x_i}\right)^2 \operatorname{var}\left(x_i, x_j\right) \tag{2.10}$$

Dans l'Equation (2.7), la MDMPO utilise une approximation du premier ordre, c'est-à-dire, néglige les termes dans lesquels interviennent des dérivées d'ordre supérieure à un. En

plus, les dérivées sont évaluées pour les valeurs des moyennes des variables x_i. Lorsque la fonction d'état limite est non linéaire. Une erreur significative est introduite dans l'estimation de la fiabilité dû au fait que les termes d'ordre supérieure sont négligés.

2.3.2. Méthode du deuxième moment du premier ordre améliorée

La MDMPOA est aussi connue comme la méthode de Hasofer-Lind et peut être appliquée pour des variables aléatoires normales (Haldar et Mahadevan, 2000 a). Premièrement, elle requiert la transformation des variables originales en variables réduites :

$$x_i^{'} = \frac{x_i - \mu_{x_i}}{\sigma_{x_i}}, \qquad i = 1,2,...,n \tag{2.11}$$

où $x_i^{'}$ sont des variables aléatoires normales à moyenne nulle et écart type unitaire. L'équation précédente transforme la fonction d'état limite originale $G(\mathbf{x}) = 0$ dans la fonction d'état limite réduite $G(\mathbf{x}') = 0$.

Sachant que la FDA normale, dans l'espace réduit, diminue exponentiellement avec la distance à partir de l'origine de cet espace, le point sur la surface limite avec la probabilité de défaillance maximale est le point de distance minimale à l'origine de cette espace, dénoté par $\mathbf{x}*$ dans l'espace original et $\mathbf{x}'*$ dans l'espace des variables réduites. Ainsi, dans la méthode MDMPOA l'indice de fiabilité est donné par la distance minimale entre l'origine du système réduit et la surface de défaillance (voir Figure 2.1), exprimée selon :

$$\beta = \sqrt{\left(\mathbf{x}^{'*}\right)^T \left(\mathbf{x}^{'*}\right)} \tag{2.12}$$

En fonction des dérivées partielles de la fonction d'état limite par rapport au point de conception dont coordonnées $x_1^{'*}, x_2^{'*},..., x_n^{'*}$, l'indice de fiabilité est exprimé par :

$$\beta = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{'} \left(\frac{\partial G}{\partial x_i^{'}}\right)^*}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial G}{\partial x_i^{'}}\right)^{*2}}} \tag{2.13}$$

Le point de conception pour l'espace de variables réduites est exprimé selon :

$$x_i^{'*} = -\alpha_i \beta \tag{2.14}$$

où les cosinus directeurs au long des axes coordonnés sont :

$$\alpha_i = \frac{\left(\frac{\partial G}{\partial X_i^{'}}\right)^*}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial G}{\partial X_i^{'}}\right)^{*2}}} \tag{2.15}$$

L'Equation (2.11) permet de définir le point de conception dans l'espace de variables physiques par :

$$x_i^* = \mu_{x_i} - \alpha_i \sigma_{x_i} \beta \tag{2.16}$$

Pour les cas des variables de distribution non normales le MDMPOA est plus connu comme FORM.

La Figure 2.1 illustre la transformation de deux variables du système de coordonnées original (domaine physique) au système de coordonnées normé ou réduit. La figure illustre aussi l'approximation de premier (FORM) et second ordre (SORM) de la fonction de performance. On voit que, selon la méthode FORM, la courbe d'état limite est remplacée par un hyper-plan tangent au point de conception. D'autre part, pour la méthode du second ordre SORM, la courbe d'état limite est remplacée par une hyper-quadrique au point de conception.

La précision de l'approximation FORM dépend de la forme de la courbe d'état limite au point de défaillance le plus probable. La solution n'est pas exacte que si cette courbe est linéaire dans l'espace des variables réduites. Cela se vérifie simultanément l'état limite est linéaire dans l'espace des variables physiques et lorsque les variables son normales, simultanément.

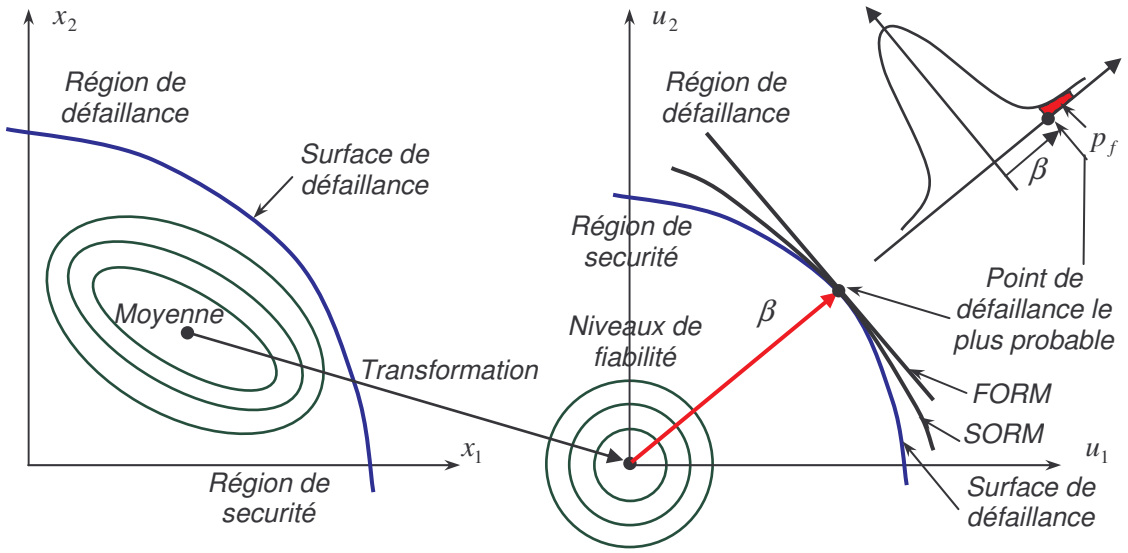


Figure 2.1 - Espace des variables physiques et réduites

Avant d'aborder le problème de recherche du point de conception, quelques commentaires sur l'optimisation qui dans l'espace de variables aléatoires et non aléatoires se font nécessaires.

Dans la conception optimale traditionnelle, le problème d'optimisation est exprimé dans l'espace des variables physiques. Un problème général d'optimisation consiste en la minimisation ou maximisation d'une fonction objective comme celle-ci :

$$\min f(\mathbf{y}), \tag{2.17}$$

soumis à des contraintes de $G_k(\mathbf{y}) \leq 0$, où $\mathbf{y}$ désigne le vecteur de variables de conception déterministe.

En sachant que même dans l'optimisation déterministe la solution optimale est une estimation, pour l'analyse de fiabilité qui considère des variables aléatoires $\mathbf{x}$, la solution optimale déterministe est considérée comme un candidat a point le plus probable de défaillance. Ainsi pour l'analyse de fiabilité, la fonction d'état limite est exprimée par $G(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0$. Cette surface établie la frontière entre la région de sécurité $G(\mathbf{x},\mathbf{y}) > 0$ et la région de défaillance $G(\mathbf{x},\mathbf{y}) < 0$ dans l'espace de conception. La probabilité de défaillance dévient alors $P_f = prob[G(\mathbf{x},\mathbf{y}) \leq 0]$.

Pour l'estimation de l'indice de fiabilité, la transformation suivante est nécessaire $\mathbf{x}' = T(\mathbf{x},\mathbf{y})$. Cette transformation permet le passage de l'espace des variables physiques au espace des variables réduites. De telle sorte que l'indice de fiabilité est la distance minimale

entre l'origine du système réduit et la surface de défaillance $H(\mathbf{x}', \mathbf{y})$. Lorsque la fonction d'état limite est non linéaire, la solution du problème d'optimisation suivante permet l'estimation de l'indice de fiabilité :

$$\beta = \min \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(x_i^{'}\right)^2} \ , \tag{2.18}$$

soumis à des contraintes $H(\mathbf{x}', \mathbf{y}) = 0$.

La transformation suivante est utilisée pour les variables normales :

$$x_i^{'} = \frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i} \tag{2.19}$$

Pour les variables log-normales :

$$x_i^{'} = \frac{\ln(x_i) - \lambda_i}{\zeta_i} \ , \tag{2.20}$$

où $\lambda_i = \ln \mu_i$, $\zeta_i = \sqrt{\ln\left(1 + \delta_i^2\right)}$, $\delta_i = \sigma_i / \mu_i$.

L'annexe B résume la transformation décrite ci-dessus pour les variables aléatoires qui ont une autre distribution. La méthodologie d'analyse de fiabilité présentée dans ce mémoire considère ces lois de transformation, c'est-à-dire, différentes distributions de probabilité des variables aléatoires.

Autres types de transformation de l'espace original à l'espace réduit sont citées dans le travail de Hamed et Bedient (1999), comme par exemple, la transformation de Nadaf et de Rosenblatt. Le modèle de Nadaf comprend une transformation en variables normales équivalentes et l'élimination de la corrélation entre celles-ci (Beck, 2006). La transformation de Rosenblatt utilise des distributions de probabilité conditionnelles qui rarement sont connues (Beck, 2006).

Pour le cas des fonctions d'état limite non linéaires, la détermination de la distance minimale [Équation (2.11)] devient, comme déjà montré, un problème d'optimisation non linéaire pour la cherche du point de conception. Pour cela, différents algorithmes d'optimisation sont capables de résoudre ce problème. Dans ce sens la méthode HBRM est proposée dans le cadre de cette thèse.

Les critères de choix de l'algorithme de recherche de β sont : l'efficacité et la robustesse (Lemaire, 2005). L'efficacité doit être donnée en fonction du nombre d'évaluations de la fonction d'état limite nécessaire pour atteindre la convergence à un seuil de précision numérique prédéfini.

La robustesse est entendue comme la capacité de l'algorithme à estimer un point de conception convenable, quelle que soit l'estimation initiale de la solution. La capacité est évaluée en fonction du nombre des variables aléatoires traitées dans le problème et de la complexité des fonctions d'état limites qui dépendent de ces variables.

Le Tableau 2.1, adapté de (Lemaire, 2005), montre les diverses méthodes d'optimisation d'ordre un et d'ordre deux existantes pour la recherche du point de conception. L'ordre un, signifie que le calcul des dérivées de premier ordre est nécessaire (gradients) et l'ordre deux signifie que le Hessien soit déterminé, c'est-à-dire, les dérivées du second ordre. Dans le Tableau 2.1, SQP représente la programmation quadratique séquentielle, HLRF est la méthode de Hasofer-Lind-Rackwitz-Fiessler (i : indicant la version améliorée), BFGS est la méthode de Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno.

Autres méthodes d'optimisation ont été proposées par plusieurs auteurs comme par exemple Chen et Lind (1983), Wu et Wirsching (1987).

Parmi les algorithmes de recherche, l'un des plus connu est celui-ci de Hasofer et de Lind (1974) et Rackwitz et Fiessler (1978). Ces algorithmes et versions améliorées seront résumes dans ce chapitre.

Liu et Der Kiureghian (1991) ont examiné les méthodes de Hasofer et Lind (1974) et Rackwitz et Fiessler (1978) avec l'objectif d'évaluer l'applicabilité (s'il existait quelque limitation dans la nature des restrictions et des fonctions de performance), la nécessité de calcul de la hessienne, la robustesse (évaluation de la capacité de résoudre les problèmes de convergence globale avec une certaine précision), l'efficacité (mesurée en termes du nombre d'évaluations des fonctions de performance et leurs gradients), et la capacité (nombre maximum de variables qui peuvent être traitées par les méthodes). Ces auteurs ont analysé aussi quelques méthodes d'optimisation restreinte, appliquées à l'analyse de fiabilité. Basés sur les résultats de cinq applications, les auteurs ont conclu que la méthode SQP, la méthode du gradient projeté, les méthodes de Hasofer-Lind (1974) et de Rackwitz-Fiessler (1978) sont techniques suffisamment robustes pour l'utilisation en applications de fiabilité des structures. Cela justifie le choix des algorithmes basés sur les méthodes HLRF au sein du FORM (expliqués ci-dessus) dans les applications numériques.

Tableau 2.1 - Méthodes d'optimisation d'ordre un et d'ordre deux pour la recherche du point de conception (adapté de Lemaire (2005)).

Méthode	Dérivées	Convergence	Caractéristiques	
			Positives	Négatives
Pénalité	Dépendantes de la technique	Dépendantes des paramètres de la technique	Robuste, capable de gérer plusieurs états limites	Choix arbitraire des pénalités, lenteur numérique
Lagrangien-Augmenté	Dépendantes de la technique	Dépendantes des paramètres de la technique	Très robuste, bon compromis entre les méthodes du Lagrangien et de pénalité	Choix arbitraire des pénalités, performance numérique moyenne
Gradient projeté	Gradient	Linéaire	Très robuste, couplage facile avec une stratégie d'activation-désactivation de contraintes	Inadaptée aux problèmes à forte courbure de l'état limite
HLRF	Gradient	Linéaire	Simple à mettre en œuvre, adaptée au problème de fiabilité, coût de calcul très réduit	Pas de convergence en cas de forte courbure, échec sur l'état limite sphérique
iHLRF	Gradient	Linéaire	Adaptée au problème de fiabilité, très bonne robustesse	Coût de calcul élevé pour la recherche du pas optimal
Newton-Abdo-Rackwitz	Gradient	Super linéaire	Bonne efficacité, faible coût de calcul, adaptée au nombre élevé de variables	Mauvaise approximation du Hessien
BFGS	Gradient	Super linéaire	Très bonne efficacité, robustesse proche de la SQP, adaptée au nombre élevé de variables	Hessien approché, surtout lors des premières itérations
SQP	Gradient	Quadratique	Très haute efficacité, très robuste surtout lorsqu'une recherche du pas optimal est adoptée	Calcul du Hessien

Der Kiureghian (1989) a considéré en détail le problème de l'estimation de l'indice de fiabilité en considérant les incertitudes et les erreurs du modèle d'estimation. Il a défini une

série de conditions fondamentales que l'estimation de l'indice de la fiabilité doit satisfaire, à savoir :

1. **Consistance**. L'indice de fiabilité devra être une approximation asymptotique et devra être interprété comme le meilleur estimateur de l'indice de fiabilité exact.
2. **Intégralité**. L'indice de fiabilité incorporera toutes les informations disponibles sur les incertitudes paramétriques.
3. **Invariance**. Pour un certain état de connaissance du problème, l'indice de fiabilité devra être invariable pour les formulations mutuellement cohérentes du problème de fiabilité. Ainsi, l'indice de fiabilité améliorera l'état de connaissance du problème en intégrant l'analyse de fiabilité a celui-ci.
4. **Ordre**. Quelconques indices de fiabilité ont une correspondante au niveau de la sécurité pour la probabilité prescrite.
5. **Simplicité**. L'effort informatique exigé pour l'estimation de l'indice de fiabilité devra être le plus faible possible en considérant sa nature approximative.

Lorsque les premières méthodes FORM ont été conçues, l'indice de fiabilité n'était trouvé que pour les variables aléatoires statistiquement indépendantes avec distribution normale et si la fonction d'état limite était linéaire. Rackwitz et Fiessler (1978), Chen et Lind (1983) et autres d'auteurs ont proposé d'éliminer ces limitations en ajoutant les informations des distributions des variables aléatoires pour des fonctions d'état limite linéaires et non linéaires. Dans ce contexte, la probabilité de défaillance est estimée en utilisant des approximations de premier et de deuxième ordre de la fonction de performance au point de conception.

Le FORM a meilleure performance lorsque que la fonction d'état limite est une fonction linéaire des variables normales non corrélées ou lorsque la fonction de performance est non linéaire, mais représentée par une approximation linéaire (premier ordre) en fonction de variables normales équivalentes. La Figure 2.2 illustre le premier algorithme FORM utilisé dans les simulations numériques pour l'estimation de l'indice de fiabilité. Cet algorithme a été proposé par Ayyub et Haldar (1984) et constitue une amélioration de la méthode de Hassofer-Lind (1974).

Dans cet algorithme, δ est la tolérance exigée à β, et les α_i sont les cosinus directeurs des composantes du gradient par rapport aux axes de coordonnés, étant calculés par l'Equation (2.15).

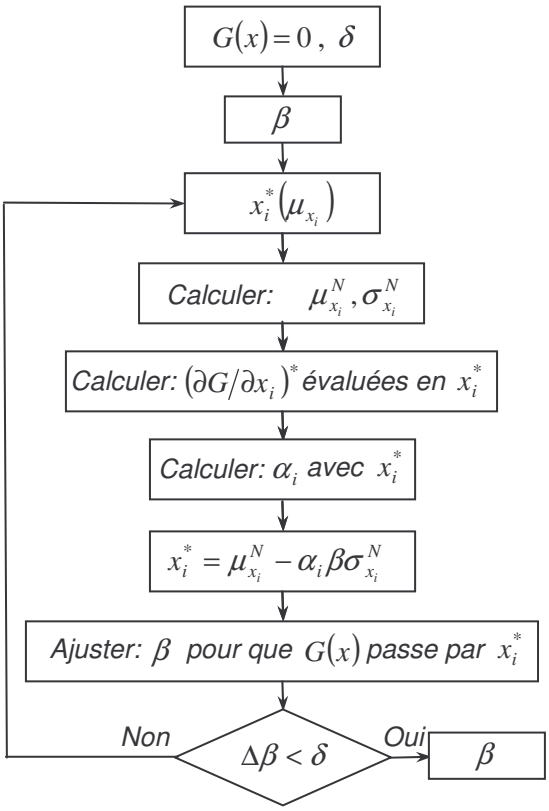


Figure 2.2 - Premier algorithme FORM pour l'estimation de l'indice de fiabilité

Les moyennes et les écarts type dans l'espace réduit sont désignés respectivement par $\mu_{x_i}^N$ et $\sigma_{x_i}^N$ et sont donnés en fonction de la FDP [$f_x(x_i)$] et la FDA [$\Phi(x_i)$] des variables aléatoires par les expressions :

$$\mu_{x_i}^N = x_i - \Phi^{-1}(x_i)\sigma_{x_i}^N \tag{2.21}$$

$$\sigma_{x_i}^N = \frac{\Phi(x_i)}{f_x(x_i)} \tag{2.22}$$

Il est possible de vérifier que dans l'algorithme la fonction de performance doit être ajustée pour déterminer les nouveaux points de conception au cours des itérations. Ceci peut être difficile lorsque les fonctions sont non linéaires et/ou complexes. Dans quelques applications pratiques, la fonction de performance n'est pas disponible de forme analytique dans ces cas, il est impossible d'exécuter cette procédure.

Un deuxième algorithme a été proposé par Rackwitz (1978) et aussi utilisée dans les simulations numériques présentées dans ce mémoire. Il est schématisé dans la Figure 2.3.

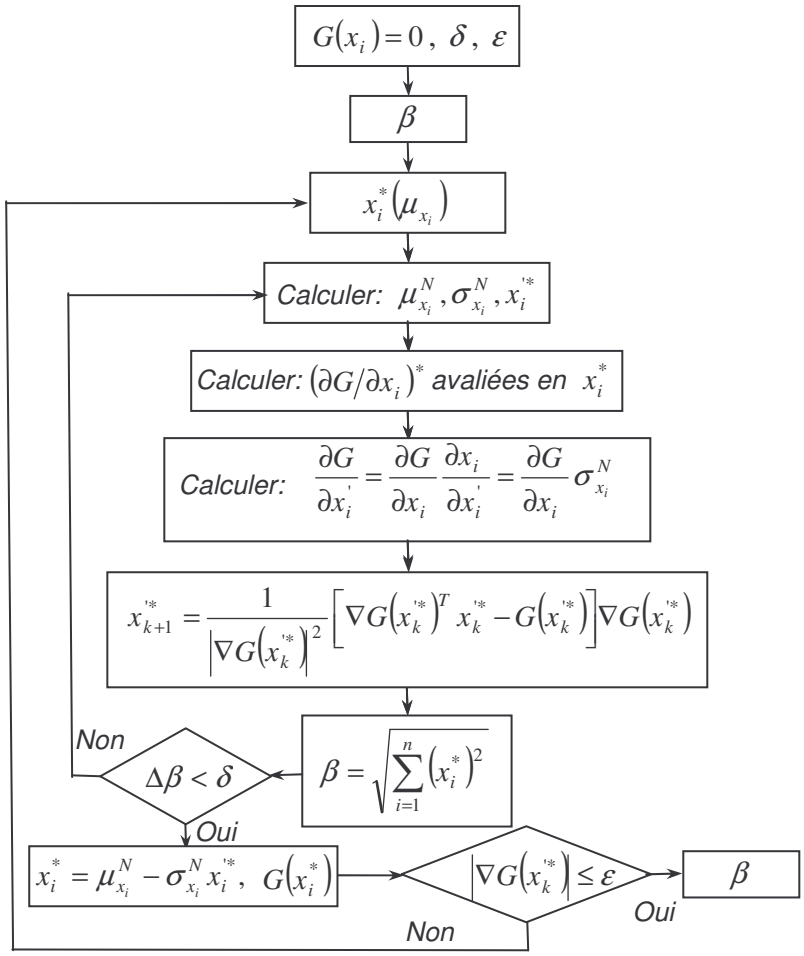


Figure 2.3 - Second algorithme FORM pour l'estimation de l'indice de fiabilité

L'algorithme de la Figure 2.3 est semblable au premier algorithme en ce qui concerne la linéarisation de la fonction de performance à chaque itération. Néanmoins, en lieu d'ajuster explicitement β dans la fonction de performance, l'algorithme utilise une procédure récursive du type Newton-Raphson (N-R) pour trouver le prochain point de conception. Cela permet d'élimer les inconvénients remarqués pour la procédure du premier algorithme.

La procédure récursive du type N-R utilise le gradient pour trouver le prochain point de conception. En particulier, cette méthode est utile quand la fonction de performance est implicite, c'est-à-dire, lorsque elle ne peut pas être exprimé comme une forme fonctionnelle explicite des variables aléatoires.

Dans les algorithmes FORM décrits auparavant il est possible de remarquer qu'une estimation initiale de β et du vecteur des variables de conception est nécessaire. Evidement, les résultats sont dépendants de cette estimation et en quelques applications il se peut être qu'elle ne soit pas disponible. Dans ce cas, l'estimation initiale assume les valeurs des moyennes des variables aléatoires.

2.4. Méthode d'analyse de fiabilité de second ordre

La méthode SORM estime la probabilité de défaillance à travers une approximation quadratique de la fonction de performance autour du point de conception, ou pour les cas de variables aléatoires normales corrélées, à travers une approximation linéaire de la fonction de performance. La courbure de la fonction de performance est approchée par la dérivée seconde de cette fonction par rapport aux variables de conception. De cette façon, la méthode SORM constitue une amélioration de la méthode FORM en sachant que la non linéarité de la fonction de performance (comme illustré dans la Figure 2.1) est considérée à travers des paramètres de courbure.

Une première approximation a été présentée par Fiessler et al. (1979) mais les résultats obtenus n'ont pas été adéquats pour quelques applications (Beck, 2006). Des études postérieures ont été développées par Breitung (1984), Tvedt (1990), Der Kiureghian ; Dakessian (1998) pour l'utilisation pratique du SORM.

En employant une expansion par série de Taylor autour des valeurs x_i^*, une fonction de performance non linéaire quelconque peut être approchée comme suit :

$$G(x_i) = G(x_i^*) + \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i^*) \frac{\partial G}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (x_i - x_i^*)(x_j - x_j^*) \frac{\partial^2 G}{\partial x_i \partial x_j} + \ldots \tag{2.23}$$

où les dérivées sont évaluées au point de conception x_i^*. Pour l'analyse de fiabilité, cette approximation est adoptée dans l'espace normal équivalent des variables au point de conception. Si les variables ne sont pas corrélées, on effectue la transformation suivante originalement introduite par Fiessler et al., (1979):

$$y_i = \frac{(x_i - \mu_{x_i}^N)}{\sigma_{x_i}^N} \tag{2.24}$$

où x_i et y_i sont les variables aléatoires dans le système original et dans l'espace réduit non corrélé, respectivement ; $\mu_{x_i}^N$ et $\sigma_{x_i}^N$ sont la moyenne et l'écart type de x_i au point de conception x_i^*, respectivement.

Fiessler et al. (1979) ont exploré pour la première fois une approximation de second ordre en adoptant différentes fonctions quadratiques. En utilisant l'approximation de Fiessler et al. (1979) et une analyse asymptotique, Breitung (1984) a proposé une autre approximation a travers l'ajustement de une courbe à l'équation d'état limite et la détermination d'un système d'axes orthogonaux. Le n-éme axe v_n du système est choisi de façon à positionner le point de conception à la origine de celui-ci :

$$v_n = \frac{\nabla G(x^*)}{\left\| \nabla G(x^*) \right\|} \tag{2.25}$$

et les autres axes sont déterminés à partir d'une procédure d'orthogonalisation de Gram-Shmidt comme on explique par la suite. Les conditions d'optimalité de deuxième ordre conduit à une approximation asymptotique du deuxième ordre de la probabilité de défaillance (Breitung, 1984) :

$$p_f \approx \Phi(-\beta)\left\{ \left[\det(\mathbf{I} + \beta.\mathbf{A}) \right]^{-1/2} \right\} \tag{2.26}$$

La matrice $\mathbf{A}$ sera définie, par la suite, pour l'approximation SORM utilisée dans ce mémoire.

Un cas particulier est trouvé lorsque le système orthogonal est choisi en coïncidant avec les courbures principales de l'équation d'état limite au point de conception. Dans ce cas, les vecteurs v_i sont les valeurs propres de la matrice Hessien, la matrice $\mathbf{A}$ dévient diagonal et leurs valeurs propres correspondent aux courbures prédominantes k_i de l'approximation quadratique. Ainsi, Breitung (1984) a proposé l'approximation suivante pour l'estimation de la probabilité de défaillance :

$$p_f \approx \Phi(-\beta) \prod_{i=1}^{n-1} (1 + \beta.k_i)^{-1/2} \tag{2.27}$$

où k_i dénote les courbures de la fonction de performance au point de conception et β est l'indice de fiabilité estimé par la méthode FORM.

Le sens de la courbure a une influence sur la probabilité de défaillance. Une courbure positive (convexité tournée vers l'origine) a tendance à diminuer la probabilité de défaillance par rapport à la approximation FORM. De façon quantitative, cette influence est calculée

asymptotiquement par la formule de Breitung (1989). L'approximation est dite asymptotique parce que si on effectue une affinité (dilatation) de l'espace par des coefficients de plus en plus grands, on peut calculer la limite du coefficient de correction à appliquer à la probabilité donnée par la formule FORM pour obtenir une approximation tenant compte des courbures (Lemaire, 2005).

La précision de la formule de Breitung [Équation (2.27)] lorsque les conditions asymptotiques ne sont pas satisfaites a été considérée par Hohenbichler et Rackwitz (1988). En utilisant une série de Taylor pour approximer la fonction de distribution de probabilité de variables normales, les mêmes auteurs ont proposé l'approximation suivante :

$$p_f \approx \Phi(-\beta)\prod_{i=1}^{n-1}\left(1-\frac{k_i\phi(-\beta)}{\Phi(-\beta)}\right)\gamma_0 \tag{2.28}$$

où γ_0 est un paramètre de correction à être déterminé à partir de simulations obtenues en employant l'échantillonnage par importance.

Les algorithmes SORM mis en œuvre dans ce mémoire ont pris comme approximation celle exprimée par l'Équation (2.27) pour être l'une des plus couramment utilisées. La procédure suivante a été aussi adoptée dans les algorithmes.

Pour déterminer k_i, les variables y_i doivent subir une rotation afin d'obtenir un ensemble de variables $y_i^{'}$, de façon à ce que ces variables coïncident avec α (vecteur gradient unitaire de la fonction de performance au point de conception). Cette procédure est illustrée dans la Figure 2.4 pour le cas de deux variables aléatoires.

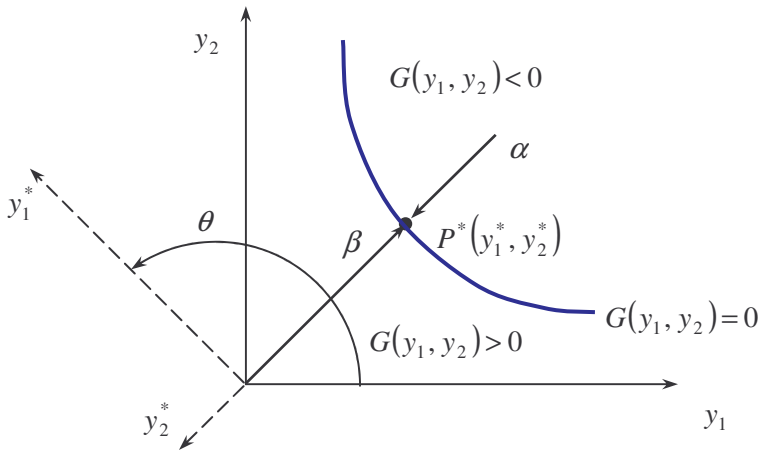


Figure 2.4 - Rotation de coordonnées dans la méthode SORM

La transformation de l'espace des variables y_i vers l'espace $y_i^{'}$ est une transformation orthogonale du type $y_i^{'} = \mathbf{R} y_i$. Pour calculer la matrice de rotation $\mathbf{R}$, la matrice $\mathbf{R_0}$ est initialement définie comme :

$$\mathbf{R_0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix} \tag{2.29}$$

où α_i représente les cosinus directeurs qui sont les composantes du vecteur gradient unitaire α, exprimée dans l'Équation (2.15).

Postérieurement, il est appliquée la procédure d'orthogonalisation de Gram-Schmidt sur la matrice $\mathbf{R_0}$ pour l'obtention de $\mathbf{R}$. La n-éme ligne de la matrice $\mathbf{R}$ est $r_n = r_{0n}$, les autres lignes sont déterminées en utilisant l'expression suivante :

$$r_k = r_{0k} - \sum_{j=k+1}^{n} \frac{r_j r_{0k}^T}{r_j r_j^T} r_j \tag{2.30}$$

où l'exposant T représente la transposée du vecteur ligne.

Une fois obtenue $\mathbf{R}$, les éléments de la matrice $\mathbf{A}$ sont calculés en utilisant l'équation:

$$a_{ij} = \frac{\left(\mathbf{RDR}^T\right)_{ij}}{\left|\nabla G\left(y^*\right)\right|}, \qquad i, j = 1,2,...,n-1 \tag{2.31}$$

où $\mathbf{D}$ est la matrice $n \times n$ des dérivées secondes de la fonction de performance dans l'espace réduit évaluées au point de conception et $\left|\nabla G\left(y^*\right)\right|$ est le module du vecteur gradient évalué au point de conception.

Comme dans l'espace après la rotation, la dernière variable y_n coïncide avec le β du FORM, la dernière ligne et dernière colonne de $\mathbf{A}$ et de la dernière ligne de $y^{'}$ sont éliminés.

Pour obtenir les courbures prédominantes k_i, les valeurs propres de $\mathbf{A}$ sont calculées. Avec ces paramètres, la formule de Breitung [Équation (2.27)] peut être employée pour estimer la probabilité de défaillance à travers la méthode SORM.

L'estimation de la probabilité de défaillance à travers la SORM exige le calcul de dérivées de deuxième ordre de l'équation d'état limite. Selon Beck (2006), ce calcul exige l'évaluation de l'équation d'état limite en $2n^2$ points (n est le nombre de variables aléatoires). Cela engendre un coût de calcul élevé lorsque cette équation est évaluée numériquement. Une alternative pour réduire ce coût est de construire l'approximation quadratique par points pour approcher l'équation d'état limite au point de conception. Cette procédure évite le calcul de $\mathbf{D}$ (Der Kiureghian et Dakesian, 1998). Cette alternative n'est pas abordée dans ce mémoire de thèse. Pour la mise en œuvre des algorithmes FORM et SORM, la méthode de différences finies a été utilisée pour approximer les dérivés de premier et deuxième ordre, respectivement.

Il est important de remarquer que le vecteur de variables de conception de la FORM et de la SORM sont les mêmes, vu que le point de défaillance le plus probable des deux méthodes coïncident, mais pour différentes approximations de la fonction de performance qui délimitent des différentes régions. Par conséquence, la valeur de la probabilité de défaillance aussi sera différente. Ce commentaire est illustré dans la Figure 2.1.

Dû à leur approximation linéaire, la FORM estime la même fiabilité pour des fonctions d'état limite linéaires et non linéaires. Par contre, l'estimation de la SORM pour des fonctions non linéaires est différente (généralement peu mineur) que celles des fonctions linéaires, dû à la différence des régions limitées par ces fonctions (Robertson, 2003). Une autre raison pour la différence des résultats de la FORM et la SORM, devient du fait que la SORM emploie comme valeur initiale l'indice de fiabilité la valeur estimé par la FORM.

Du point de vue optimisation, on sait que la solution du problème d'optimisation exprimée par l'Equation (2.12) a des difficultés. Cela est dû au fait que méthodes d'optimisation classiques comme la méthode de Newton-Raphson sont basées sur le calcul des dérivées. L'existence de minimaux locaux dans l'espace de conception constitue aussi autre difficulté pour ces méthodes. Les méthodes d'analyse de fiabilité classiques comme la FORM et SORM prennent pour elles les désavantages des méthodes classiques d'optimisation pour la recherche du point de conception. Dans quelques cas aussi, la convergence des algorithmes et l'estimation d'une solution globale ne peuvent pas être assurées. Ces aspects ont motivé la proposition d'une méthode alternative pour la recherche du point de conception dans ce mémoire. La présentation de cette méthode est faite dans la section suivante.

2.5. Méthode de fiabilité basée sur les méthodes d'optimisation métaheuristiques

La méthode dénommée HBRM est une approximation alternative à la SMC, FORM et SORM. Elle est basée sur la FORM et l'utilisation de méthodes d'optimisation métaheuristiques.

Nous avons proposée une méthode originale nommée HBRM, initialement publiée par Rojas et al. (2007). Elle utilise les méthodes d'optimisation inspirées dans la nature pour chercher le point de conception tant que la FORM le fait à travers l'approximation de Newton-Raphson. La HBRM ne requière pas d'une estimation initiale de la solution ni du calcul des dérivées de la fonction d'état limite par rapport à variables aléatoires puisque emploi une recherche multi directionnelle.

Parmi les méthodes métaheuristiques d'optimisation que nous proposons dans la HBRM se trouvent : Algorithmes Génétiques (GA), Optimisation par Essaims Particulaires (PSO) et Optimisation par Colonie de Fourmis (ACO). Ces algorithmes sont introduites dans la méthode HBRM dû à leurs principales caractéristiques, parmi elles : la capacité de résoudre avec efficience des problèmes d'optimisation globale et la non nécessité su calcul des dérivées.

Nous décrivons l'algorithme de la méthode HBRM dans la Figure 2.5. Dans l'algorithme, les paramètres λ, γ et C représentent les facteurs de pénalité de la méthode HBRM. Dans les simulations numériques les valeurs $: C = 0.5$, $\lambda = 2$ et $\gamma = 2$ ont été utilisées, selon la recommandation de Vanderplats (1999). La fonction de pénalité U est donnée en termes de la fonction coût F (minimisation de β) selon :

$$U = F + (C.i)^{\lambda} \left(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{f}^{\gamma} \right) \tag{2.32}$$

où $\mathbf{f} = \{\mathbf{G} \quad \mathbf{H}\}$, $\mathbf{G}$ et $\mathbf{H}$ sont les vecteurs de fonctions de inégalité et égalité et n est le nombre de fonctions.

Comme une remarque finale, la HBRM est dite d'ordre zéro parce q'elle n'a pas besoin du calcul des dérivées pour évaluer la fonction d'état limite.

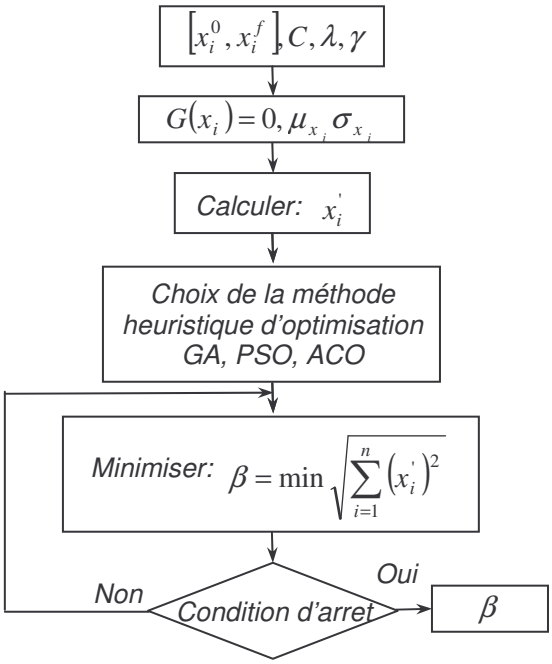


Figure 2.5 - Algorithme HBRM proposé pour l'estimation de l'indice de fiabilité

Le plupart des logiciels utilisés dans les applications industrielles utilisent des algorithmes basés sur le calcul des dérivées (Venter et Sobiski, 2002). A nos jours, l'optimisation métaheuristiques inspirée dans la nature a retenu l'attention de la communauté scientifique. En dépit de son coût de calcul élevé par rapport à ceux des techniques traditionnelles, ces méthodes ont plusieurs avantages, comme par exemple : la facilité à des mis en œuvre, l'efficacité pour se servir des architectures de calcul parallèles, la capacité de surmonter des difficultés numériques de convergence et les possibilités de traiter des variables discrètes et continues simultanément.

Les métaheuristiques forment une famille d'algorithmes d'optimisation qui progressent vers un optimum global par échantillonnage d'une fonction coût. Les métaheuristiques sont inspirées par des systèmes naturels pris en physique (Recuit Simulé), biologie de l'évolution (GA) ou éthologie (PSO et ACO). Un bref résumé des méthodes métaheuristiques d'optimisation utilisées dans ce mémoire sont présentes dans les sections suivantes.

2.5.1. Algorithmes génétiques

La méthode des Algorithmes Génétiques est une approximation utilisée pour l'estimation des solutions à travers l'application des principes de la biologie évolutive à l'informatique. Les GA emploient des techniques dérivées de la biologie comme la transmission héréditaire, la mutation, la sélection naturelle, et la recombinaison (ou le croisement).

Les GA sont basés sur la théorie de Darwin pour la survie et l'évolution des espèces Haupt et Haupt (2004) et Michalewicz (1994) expliquent avec plusieurs détails la méthode. L'algorithme prend une population aléatoire des individus, vue comme candidats à la solution du problème. Durant le processus évolutif, chaque individu de la population évolue, reflétant ses possibilités d'adaptation à l'environnement. Certains de ces individus sont préservés tandis que d'autres sont rejetés en imitant le processus de sélection naturelle proposée par Darwin. Le groupe d'individus restant est appareillé afin de produire de nouveaux individus pour remplacer les individus rejetés par le processus de sélection naturelle. Ainsi, certains d'entre eux peuvent être soumis à la mutation, par conséquence, les chromosomes de ces individus sont changés. Ce processus se répète jusqu'à qu'une solution convenable soit trouvée.

Les GA sont mises en œuvre en sept étapes :

1. Définir les paramètres des GA (taille de population, méthode de sélection, méthode de croisement, taux de mutation, etc.) ;
2. Créer aléatoirement une population initiale ;
3. Évaluer la fonction coût et prise de sa valeur comme l'indice d'adaptation de chaque individu ;
4. Appairage des individus pour le croisement ;
5. Reproduire et remplacement des individus les moins adaptés de la population ;
6. Introduire de mutations ;
7. Retour au pas 3 et répétition jusqu'à la convergence.

Les premiers algorithmes de la méthode ont été consacrés que à des variables discrètes, mais dans la littérature des méthodes améliorées sont disponibles pour traiter des variables discrètes et continues. Des informations détaillées sur les AGs peuvent être trouvées dans les travaux de Haupt and Haupt (2004) et de Michalewicz (1994).

Le Tableau 2.2 illustre l'analogie qu'existe entre ce qui se produit dans la nature et dans la procédure d'optimisation à travers GA.

Tableau 2.2 - Analogie de la nature et l'optimisation par GA

Nature	**Optimisation par des GA**
Sélection naturelle	Croisement
Individus meilleur adaptés	Solution optimale
Processus d'évolution	Procédure d'optimisation

2.5.2. Optimisation par essaims particulaires

La méthode PSO a été développée originalement par James Kennedy et Russell Eberhart (Kennedy et Eberhart, 1995).

La PSO s'appuie notamment sur un modèle développé par le biologiste Graig Renolds permettant de simuler le déplacement d'un groupe d'oiseaux. Ainsi, la méthode a été élaborée à partir d'expériences réalisées avec des algorithmes qui modélisent le comportement social observé dans beaucoup d'espèces d'oiseaux (Pomeroy, 2003). Une autre source d'inspiration, revendiquée par les auteurs, est la socio-psychologie.

L'algorithme PSO se base sur un modèle simplifié de la théorie des nuées et la collaboration des individus entre eux. Les oiseaux ou les particules utilisent leurs expériences individuelles et de l'expérience de la population pour trouver la source d'aliment (point de conception optimale). Grâce à des règles de déplacement simples (dans l'espace de recherche), les particules peuvent converger progressivement vers un minimum. De cette façon, une particule trouve la solution optimale attire à elle même le reste de la population, jusqu'à toute la population trouve la même solution. Essentiellement, chaque particule essaye de se positionner près de la population sans heurter avec les membres de celle-ci.

Considérant la vitesse de recherche des particules, la PSO mis en jour leur position, leur degré de connaissance et ce de la population. Ceci imite le comportement social de quelques espèces d'oiseaux. L'algorithme de la PSO consiste dans les étapes suivantes (Venter, 2002) :

1. Créer une population initiale avec distribution aléatoire de particules et de leurs vitesses ;
2. Calculer le vecteur de vitesse pour chaque particule, en utilisant l'expérience de chaque particule et l'acquisition de vitesse de la population ;
3. Mise à jour la position de chaque particule en utilisant le vecteur de vitesse et la position précédente ;
4. Evaluer la convergence.

La position des particules est mis à jour selon l'équation suivante (Kennedy et Eberhart, 1995) :

$$x_{k+1}^{i} = x_{k}^{i} + v_{k+1}^{i}\Delta t \tag{2.33}$$

où x_{k+1}^{i} représente la position de la particule i dans l'itération $k+1$, v_{k+1}^{i} représente le vecteur de vitesse et Δt correspond au pas de temps. Le vecteur de vitesse est mis à jour selon :

$$v_{k+1}^{i} = wv_{k}^{i} + c_1 r_1 \frac{(p^i - x_k^i)}{\Delta t} + c_2 r_2 \frac{(p_k^s - x_k^i)}{\Delta t} \tag{2.34}$$

où r_1 et r_2 sont des numéros aléatoires qui varient entre 0 et 1, p^i est la meilleure position trouvée par le particule et p_k^s est la meilleure position de la population dans l'itération k.

Il y a trois paramètres à définir : l'inertie de la particule (w), et les paramètres de confiance c_1 et c_2 qui indiquent combien la particule confie dans elle-même et dans la population, respectivement. L'inertie contrôle la capacité d'exploration de l'algorithme, valeurs hautes déterminent le comportement de la recherche du point de conception d'une manière globale, valeur bas pour la recherche locale (Venter, 2002).

La population initiale est crée généralement par des particules distribuées aléatoirement sur l'espace de conception, chaque particule a un vecteur de vitesse aléatoire initiale. La littérature conseille l'utilisation de $c_1 = c_2 = 2$ et $0.8 < w < 1.4$ (Venter, 2002).

À travers une formulation correcte du problème d'optimisation, l'algorithme PSO peut travailler avec des restrictions. Une possibilité consiste à utiliser des fonctions de pénalité quadratique étendue (*quadratic extended penalty function*) (Vanderplaats, 1999). De cette façon est crée une fonction pseudo coût définie par :

$$\tilde{f}(x) = f(x) + \upsilon \sum_{i=1}^{m} \max[0, g_i(x)]^2 \tag{2.35}$$

où $f(x)$ est la fonction coût originale, υ est le paramètre de pénalité, $g_i(x)$ est l'ensemble de toutes les fonctions de restriction.

Le Tableau 2.3 montre l'analogie qui existe entre ce qui se produit dans la nature et dans la procédure d'optimisation vue PSO.

Tableau 2.3 - Analogie de la nature et la procédure de PSO

Nature	**PSO**
Aire de vol	Espace de conception ou recherche
Aliment	Solution optimale
Recherche de l'aliment	Procédure d'optimisation

2.5.3. Optimisation par colonie de fourmis

L'ACO a été développée originalement par Dorigo (1992) et est inspiré du comportement des fourmis et leur manière de communication en employant la traînée de phéromone. L'idée originale provient de l'observation de l'exploitation des ressources alimentaires chez les fourmis. Celles-ci, bien qu'ayant individuellement des capacités cognitives limitées, sont capables collectivement de trouver le parcours le plus court entre une source d'aliment et leur nid. Une série d'expériences ont permis d'observer qu'une colonie de fourmis ayant le choix entre deux parcours d'inégale longueur avait tendance à utiliser le parcours le plus court.

Une fourmi parcourt l'environnement autour de la colonie et qui découvre une source d'aliment, elle rentre quasi directement au nid en laissant sur son parcours une traîne de phéromone. Cette traîne étant attractive, les fourmis à proximité vont avoir tendance à suivre. En revenant au nid, ces mêmes fourmis vont renforcer la traîne. Si deux parcours sont possibles pour atteindre la même source d'aliment, celui étant le parcours le plus court sera, dans le même temps, parcouru par plus de fourmis (Socha, 2004). La piste courte, qui a une densité de phéromone élevée, sera donc de plus en plus renforcée et attractive, la piste longue finira par disparaître, les phéromones étant volatiles. Le comportement collectif qui émerge des agents participants alors est une forme de rétroaction positive, c'est-à-dire, plus les fourmis suivent une traînée, plus la traînée devient forte pour être suivi. Dans ce contexte, l'ACO prend quelques concepts comme base, pour la recherche du point de conception (Socha, 2004) :

- La recherche du point de conception par une population d'agents indépendants.
- La construction progressive des solutions.
- Le choix probabiliste des composants de la solution basés sur l'information stigmergique de la traîne de la phéromone. Un processus stigmergique est le processus par lequel les résultats des activités des insectes sont stimulus d'autres activités.
- Aucune communication directe entre les fourmis.

Une comparaison entre ce qui se produit dans la nature et ce qui est semblable dans l'algorithme d'ACO est montré dans le Tableau 2.4.

Tableau 2.4 - Analogie de la nature et la procédure de ACO

Nature	**ACO**
Parcours possibles entre la colonie et la source d'aliment	Ensemble des solutions possible (vecteur des variables de conception)
Parcours le pus court	Solution optimale
Communication par de phéromone en action	Procédure d'optimisation

L'algorithme ACO utilisée dans les simulations numériques suit les étapes suivantes :

1. Définir les paramètres des ACO (taille de la colonie, traîne de phéromone initiale, taux de dissolution du phéromone).
2. Créer une première colonie, aléatoirement distribuée dans l'espace de recherche.
3. Évaluer la fonction coût et la prendre comme une mesure de la longueur du parcours pour chaque fourmi.
4. Réaliser la simulation du parcours entre la source d'aliment et la colonie.
5. Mis à jour de la traîne de phéromone.
6. S'adresser au pas 3 et répéter jusqu'à ce que les critères d'arrêt soient satisfaits.

Les critères d'arrêt mis en application pour l'ACO sont exposés dans le Tableau 2.5.

Tableau 2.5 - Critères d'arrêt de l'ACO

Critère	**Description**
Itérations	Nombre fixe de générations à réaliser
Temps	Temps total (en secondes) de réalisation de la procédure d'optimisation
Itérations limite	Si après ce nombre d'itérations il n'a y pas une amélioration la simulation s'arrête
Temps limite	Si après cette période (en secondes) d'itérations il n'a y pas une amélioration la simulation s'arrête

L'ACO modèle la traînée de phéromone comme une quantité. Comme suggéré par Socha (2004) et Pourtakdoust et Nobahari (2004), l'exécution du algorithme pour des variables continues peut être réalisé en employant une fonction de distribution de probabilité (FDP) normale. La traînée de phéromone, peut être décrite selon :

$$\tau_i(x) = e^{-\frac{(x-x_i^*)^2}{2\sigma_i^2}} \tag{2.36}$$

où x_i^* est la i-ème coordonnée du meilleur point trouvé par l'optimisation dans l'espace de conception jusqu'à l'itération courante, σ_i est un indice associée à l'agroupement de fourmis autour du minimum courant pour la i-ème coordonnée de l'espace de conception.

En prenant y comme la i-ème colonne de la matrice de colonie $\mathbf{C}$, σ_i est donnée par :

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{1}{m-1}\sum_{j=1}^{m}(y_j - \bar{y})} \tag{2.37}$$

où $\bar{y}$ est la valeur moyenne du vecteur y.

Par rapport au processus de mise à jour des valeurs de chaque variable de conception pour toute la colonie, chaque fourmi place les valeurs pour la solution d'essai basée sur la FDP et l'Equation (2.36). Du point de vu calcul, ceci peut être réalisé par un générateur de nombres aléatoire basé sur la FDP normale qui travail comme une règle de transition des variables (mise à jour) pour choisir la prochaine variable de conception associée à chaque fourmi.

Une convergence prématurée est vérifié dans le cas d'une densité de la traîne de phéromone élevée, dans ce cas, des procédures de mise à jour mal adaptées peuvent être possibles (Socha, 2004). La dissolution du phéromone est utilisée comme une technique pour éviter ce comportement. Cela consiste à écarter la quantité de phéromone en changeant l'écart type courant (de chacun variable) selon l'équation suivante :

$$\sigma_{new} = \gamma\sigma_{old} \tag{2.38}$$

où $\gamma > 1$ est le taux de la dissolution.

Le nombre de fourmis et le nombre maximum des itérations peuvent améliorer substantiellement la qualité des estimations vue ACO, mais peuvent également augmenter l'effort de calcul. Au contraire, le taux de dissolution qui affecte la vitesse de la convergence permet la meilleure exploration de l'espace de conception par l'algorithme ACO.

2.6. Conclusion

Les aspects théoriques fondamentaux de l'analyse de fiabilité, les méthodes classiques d'estimation de l'indice de fiabilité (FORM, SORM et SMC) et la HBRM sont présentés dans ce chapitre.

La HBRM proposé dans ce mémoire est présentée comme une méthode d'analyse de fiabilité alternative a celles classiques FORM et SORM. Elle prend comme base la méthode FORM et utilise des méthodes métaheuristiques d'optimisation, parmi elles : Algorithmes Génétiques (GA), Optimisation par Essaims Particulaires (PSO) et Optimisation par Colonie de Fourmis (ACO). Les fondamentaux théoriques de ces méthodes est aussi présentés.

Le contenu de ce chapitre a permit la mise en œuvre de la méthodologie qui intègre les techniques d'analyse de fiabilité exposées dans ce chapitre. Les applications de cette méthodologie seront illustrées par des applications numériques exposés dans le chapitre suivant.

CHAPITRE III

APPLICATIONS NUMERIQUES DES METHODES D'ANALYSE DE FIABILITE DES STRUCTURES

Il n'y a rien de plus beau qu'une clef tant qu'on ne sait pas ce quelle ouvre (Maurice Maeterlinck, 1862-1949)

Dans ce chapitre nous presentons des exemples des méthodes d'analyse de fiabilité dont les aspects théoriques ont été présentés au chapitre précédant. Ceci dans le but de valider les procédures numériques mises en œuvre, d'évaluer differentes caracteristiques opérationnelles des méthodes et, en particulier, de mettre en évidence les contributions apportées dans le cadre de cette thèse, notamment en ce qui concerne le traitement de problèmes aux multiples fonctions d'état limite et l'utilisation de la méthode HBRM. On s'intéresse particulièrement aux applications dans les domaines de la mécanique des structures d'inspiration Génie Civil.

3.1. Analyse de fiabilité en statique d'une poutre en acier, basée sur la modélisation analytique

Dans cette section on décrit des exemples d'utilisation des méthodes FORM et SORM appliquées à l'analyse de fiabilité des structures d'une poutre métalique en statique pour laquelle on dispose d'une fonction d'état limite exprimée analytiquement en fonction d'un ensemble de variables déterministes et aléatoires. Ces résultats ont été préalablement publiés par Rojas et Rade (2005).

On considère une poutre sur des appuis simples en acier A36, soumise à un moment de flexion $M = 1140$ *kip-in* comme illustré sur la Figure 3.1.

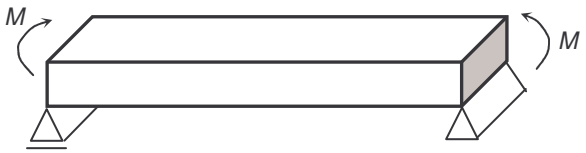


Figure 3.1 - Schéma de la poutre sur des appuis simples en acier

En admettant que la contrainte normale nominale ultime de l'acier soit $F_y = 36$ *ksi* et que le module résistent nominal des sections droites soit $Z = 54$ *in*^{3} (on rappelle que la contrainte maximale de flexion sur la section droite est obtenue selon $\sigma = MZ$), on propose de déterminer l'indice de fiabilité β admettant M et F_y soient des variables aléatoires avec des FDP (fonctions densité de probabilité) connues et charactéristiques les suivantes : $\mu_{F_y} = 38$ ksi, $\sigma_{F_y} = 3{,}8$ *ksi*, $\delta_{F_y} = 0{,}1$ e $\mu_Z = 54$ *in*^{3}, $\sigma_Z = 2{,}7$ *in*^{3}, $\delta_Z = 0{,}05$.

Sur le Tableau 3.1 on montre les expressions des fonctions d'état limites, les distributions de probabilité admises pour les variables aléatoires, ainsi que les valeurs obtenues de l'indice de fiabilité β en utilisant les méthodes FORM et SORM.

Tableau 3.1 - Résultats obtenus à travers FORM et SORM pour la poutre en acier

Méthode	***G***	***F$_y$***	***Z***	***β***	***P$_f$*(%)**
FORM	$G = F_y Z - M$	Log-normale	Normale	5,151	1,30x10^{-5}
SORM	$G = F_y Z - M$	Log-normale	Normale	5,139	1,38x10^{-5}

Étant donné que la méthode SORM utilise une approximation du second ordre, on peut considérer que ses résultats sont plus précis que ceux obtenus à travers FORM. Dans le cas présent, la valeur de β fournie par SORM est légèrement plus faible que celle donnée par FORM.

3.2. Analyse de fiabilité en statique d'une poutre en béton, basée sur la modélisation analytique

Dans cet exemple on applique les méthodes de fiabilité FORM et SORM à un problème plus complexe, contenant un nombre plus important de variables aléatoires avec plusieures combinaisons de distributions de probabilité.

On considere la poutre en béton armé à section droite rectangulaire, sur des appuis simples, soumise à des moments M appliqués aux extrémités, comme illustré en Figure 3.2. Pour cette poutre, préalablement étudié par Haldar et Mahadevan (2000 b), on définie la fonction d'état limite suivante :

$$G(A_S, f_y, d, \eta, b, f_c^{'}, M) = M_R - M \tag{3.1}$$

où M_R est le moment resistant de la poutre, donné par l'expression :

$$M_R = A_S f_y d \left[1 - \eta \left(\frac{A_S f_y}{b d f_c^{'}} \right) \right] \tag{3.2}$$

où A_S est la surface de la section droite, f_y est la limite élastique, d est la distance maximale entre les points de la section droite et le plan neutre, η est le paramètre de contrainte du béton, $f_c^{'}$ est la contrainte ultime à compression du béton et b est la largeur de la section droite.

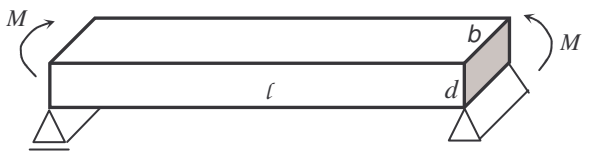


Figure 3.2 - Schéma de la poutre sur des appuis simples en béton armé

Dans cet exemple, différentes combinaisons de types de distributions de probabilités des variables aléatoires sont considérées, comme indiqué sur le Tableau 3.2.

Les résultats des calculs pour l'estimation des indices de fiabilité et probabilités de défaillance sont montrés au Tableau 3.3. Pour chaque cas considéré, la méthode FORM a été premièrement utilisée, à titre de validation par comparaison avec les résultats présentés par Haldar et Mahadevan (2000 b). Bien que cette comparaison ne soit pas montrée, les deux ensembles de résultats sont pratiquement identiques. Ensuite, SORM a été utilisée pour chaque cas.

Tableau 3.2 - Caractéristiques des variables aléatoires pour la poutre en béton

Variables	Moyenne	Coef. de variation	Distributions de probabilité			
			Cas A	Cas B	Cas C	Cas D
A_S (*in*^{2})	1,56	0,036	Normale	Normale	Log-normale	Log-normale
f_y (*ksi*)	47,7	0,15	Normale	Normale	Log-normale	Log-normale
$f_c^{'}$ (*ksi*)	3,50	0,21	Normale	Normale	Log-normale	Log-normale
b (*in*)	8,00	0,045	Normale	Normale	Log-normale	Log-normale
d (*in*)	13,20	0,086	Normale	Normale	Log-normale	Log-normale
η	0,59	0,05	Normale	Normale	Log-normale	Log-normale
M (*kip-in*)	326,25	0,17	Normale	Log-normale	Normale	Log-normale

Tableau 3.3 - Résultats obtenus par FORM et SORM pour la poutre en béton

Variables	Valeurs des variables aux points de conception			
	Cas A	Cas B	Cas C	Cas D
A_S (*in*^{2})	1,54	1,54	1,52	1,53
f_y (*ksi*)	24,70	27,094	31,01	33,68
$f_c^{'}$ (*ksi*)	3,35	3,33	3,08	3,14
b (*in*)	7,99	7,98	7,95	7,96
d (*in*)	11,78	11,78	11,04	11,41
η	0,59	0,59	0,59	0,59
M (*kip-in*)	415,39	452,13	466,87	524,73
β - FORM	3,83	3,76	4,39	4,09
β - SORM	3,73	3,67	4,27	4,01
P_f (%) - FORM	$6{,}33 \times 10^{-5}$	$8{,}45 \times 10^{-5}$	$5{,}73 \times 10^{-6}$	$2{,}15 \times 10^{-5}$
P_f (%) - SORM	$9{,}56 \times 10^{-5}$	$1{,}24 \times 10^{-4}$	$9{,}65 \times 10^{-6}$	$3{,}03 \times 10^{-5}$

Les résultats démontrent la sensibilité des valeurs de la probabilité de défaillance par rapport aux distributions de probabilité adoptées pour les variables aléatoires et confirment que les valeurs de l'indice de fiabilité prévues par SORM sont plus petites que celles prévues par FORM.

3.3. Analyse de fiabilité d'une plaque basée sur la méthode de Ritz

Cette application vise à illustrer l'utilisation des méthodes de modélisation numérique pour l'évaluation des fonctions d'état limite lorsque ces fonctions ne sont pas des fonctions explicites des variables aléatoires.

L'emploi des méthodes d'optimisation heuristiques pour l'estimation de l'indice de fiabilité dans le contexte de la HBRM est aussi illustré dans cette section.

La méthode de modélisation approchée de Ritz est choisie pour réaliser la modélisation de plaques rectangulaires soumises à des chargements statiques transverses.

Un schéma du problème traité est présenté en Figure 3.3 pour une situation plus générale où la plaque est soumise à charges dans son plan et aussi hors plan, simultanément. Pour le cas spécifique consideré ici, seulement les charges transversales sont prises en compte. En ce qui concerne les conditions aux limites, la plaque est admise simplement appuie sur ses quatre bords.

Cette même plaque a été utilisée par Rojas (2004) and Rade et al. (2005) pour investiguer l'influence des contraintes normales et de cisaillement sur les caractéristiques dynamiques rélatives aux vibrations de flexion dans le contexte de problèmes directes et inverses.

Pour la modélisation selon la méthode de Ritz on utilise quatre fonctions propres de poutres dans chaque direction.

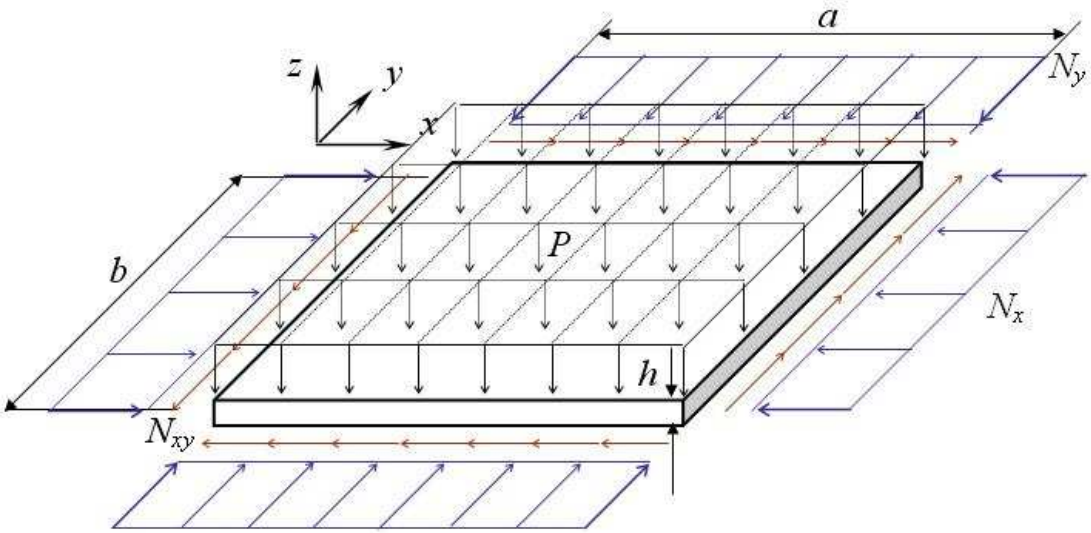


Figure 3.3 - Schéma général de la plaque modélisée par la méthode de Ritz

L'analyse de fiabilité présentée ici est basée sur les méthodes FORM, SORM et HBRM et considère différents scénarios concernant le nombre et la nature de fonctions d'état limite. Lorsque plus d'une fonction d'état limite sont considérées simultanément, on a un problème de fiabilité dit multicritères.

Dans les tests numériques, les paramétres deterministes sont : $b = 0{,}2$ m, $\nu = 0{,}37$, $N_y = 0$, $N_{xy} = 0$ et les variables aléatoires sont : a, h, E, ρ, N_x et P.

Le Tableau 3.4 résume les caractéristiques statistiques des variables aléatoires, où CV répresent le coefficient de variation.

Tableau 3.4 - Caractéristiques statistiques des variables aléatoires de la plaque

Variables	**Distribution**	**Moyenne**	**CV**
ρ (*kg/m*^{3})	Normale	1200	3 %
E (*Pa*)	Log-normale	2,4x10^9	3 %
h (*m*)	Normale	0,0015	3 %
a (*m*)	Normale	0,25	3 %
N_x (*N/m*)	Log-normale	202,7	6 %
P (*Pa*)	Log-normale	100	6 %

Les analyses de fiabilité ont été faites en couplant le modèle de Ritz et les algorithmes FORM, SORM et HBRM, tous implementés en MATLAB®. Pour FORM et SORM, les valeurs initiales des solutions ont été choisies comme étant les valeurs moyennes des variables de conception.

On examine, par la suíte, les différents scénarios définis pour les tests numériques.

3.3.1. Premier scénario

Le premier scénario est consacré à l'analyse de fiabilité basée sur une seule fonction d'état limite, ayant pour objectif de placer la valeur de la première fréquence propre de la plaque à l'intérieur d'une plage fréquentielle souhaitée. Pour ce cas, on défini la fonction d'état limite suivante, sachant qu'on ne dispose pas d'une expression explicite faisant intervenir toutes les variables de conception. Ainsi, cette fonction doit être évaluée en utilisant le modèle numérique de Ritz dévélopé.

$$G_1(\rho, E, h, a, N_x, P) = \left| f_1 - f_1^m \right| - \Delta f \tag{3.3}$$

où :

- f_1 est la première fréquence propre de la plaque (*Hz*)
- f_1^m est la valeur souhaitée de la première fréquence propre de la plaque (*Hz*)
- $\Delta f = 8$ *Hz* est la plage fréquentielle adoptée.

Il est utile de remarquer que le problème en question peut être considéré comme un problème de recalage de modèle, et peut être étendu pour tenir compte de plusieurs fréquences propres simultanément.

Le Tableau 3.5 permet de comparer les résultats obtenus à travers les méthodes FORM, SORM et HBRM (cette dernière utilisant GA, PSO et ACO successivement). Dans ce tableau, N_G est le nombre d'évaluations de la fonction d'état limite efféctuées et T est le temps total de calcul requis pour chaque méthode.

On remarque que les méthodes d'optimisation heuristiques impliquent des temps de calculs plus élevés que FORM et SORM. Toutefois, le fait que les premières ne nécessitent pas d'estimations initiales des variables de conception ni le calcul approché du gradient de la fonction d'état limite peut représenter un avantage déterminant pour certaines applications.

Tableau 3.5 - Résultats de l'analyse de fiabilité de la plaque pour le premier scénario

	FORM	**SORM**	**GA**	**PSO**	**ACO**
ρ (*kg/m*^{3})	1160,3	1160,3	1094,6	1193,1	1219,71
E (*Pa*)	2,50x10^9	2,50x10^9	2,32x10^9	2,41x10^9	2,48x10^9
h (*m*)	0,0016	0,0016	0,0015	0,0016	0,0015
a (*m*)	0,24	0,24	0,25	0,26	0,26
N_x (*N/m*)	196,40	196,40	187,35	186,25	188,74
P (*Pa*)	99,82	99,82	115,13	99,21	98,09
N_G	35	64	100	100	100
T (*s*)	170,52	353,03	632,3	636,23	637,77
β	3,6734	3,6669	4,1352	2,8472	2,4381
P_f (%)	0,012	0,012	0,002	0,22	0,74
R_l (%)	99,99	99,99	99,998	99,78	99,26

On peut constater que des résultats similaires, tous considères comme satisfaisants, ont été obtenus à travers les différentes méthodes. En ce qui concerne la méthode HBRM,

les Algorithmes Génétiques ont présenté une meilleure performance (ce qui a été confirmé par d'autres applications qui ne sont pas présentées ici), raison pour laquelle ils seront les seuls utilisés dans les scénarios suivants.

3.3.2. Second scénario

Dans ce scénario une deuxième fonction d'état limite est additionnée à celle du scénario précèdent, dans le but d'illustrer l'évaluation de la fiabilité multicritères. Il est important de souligner que les FORM et SORM traditionnelles ne sont pas capables de traiter directement ce type de problème (Haldar and Mahadevan, 2000).

La deuxième fonction d'état limite est définie selon :

$$G_2(\rho, E, h, a, N_x, P) = \delta - \delta_{\text{lim}} \tag{3.4}$$

où:

- δ est le déplacement transversal au centre de la plaque ;
- δ_{lim} est le déplacement transversal maximal admis au centre de la plaque (0,005 *m*).

Différemment de G_1, cette fonction d'état limite introduit un critère statique que vise à limiter la valeur maximale du déplacement transversal de la plaque.

3.3.3. Troisième scénario

Dans ce scénario, une troisième fonction d'état limite, similaire à G_1, est rajoutée aux deux fonctions préalables. Elle est définie selon :

$$G_3(\rho, E, h, a, N_x, P) = \left| f_2 - f_2^m \right| - \Delta f \tag{3.5}$$

avec $\Delta f = 6$ Hz.

3.3.4. Quatrième scénario

Dans ce scénario, une quatrième fonction d'état limite est incluse, visant à éviter le flambage de la plaque par l'application de la charge de compression dans son plan. Il s'agit, donc, d'un critère lié à la stabilité structurale de la plaque. Cette fonction d'état limite est exprimée sous la forme :

$$G_4(\rho, E, h, a, N_x, P) = N_x - N_x^{crit} \tag{3.6}$$

où N_x^{crit} est la charge critique de flambage.

Les résultats de l'analyse de fiabilité pour les trois derniers scénarios sont présentés dans le Tableau 3.6, étant considérés très satisfaisants. On constate que, d'une manière générale, la fiabilité décroît lorsque le nombre de fonctions d'état limite croît.

Tableau 3.6 - Résultats de l'analyse de fiabilité par HBRM de la plaque pour les différents scénarios définis

	Scénario 2	**Scénario 3**	**Scénario 4**
ρ (*kg/m*^{3})	1267	1183,1	1195,7
E (*Pa*)x10^9	2,45	2,60	2,31
h (*m*)	0,0015	0,015	0,0014
a (*m*)	0,25	0,25	0,26
N_x (*N/m*)	171,69	188,19	192,13
P (*Pa*)	101,48	104,82	100,33
N_G	100	100	100
T (*s*)	634,42	633,88	632,83
β	3,4217	3,1377	2,2956
P_f (%)	0,03	0,009	1,08
R_l (%)	99,97	99,91	98,92

3.4. Analyse de fiabilité d'une poutre basée sur la méthode des éléments finis

Avec cette application on vise à étendre l'analyse de fiabilité aux cas où la fonction d'état limite n'est pas explicite et on utilise des modeles aux éléments finis pour l'évaluer. Ainsi, Il a été développé une procedure d'inerfaçage entre les codes informatiques d'analyse de fiabilité, écrits en language MATLAB®, et le programme commercial d'analyse par éléments finis ANSYS®.

On considère ici le comportement statique linéaire d'une poutre en acier encastrée-libre soumise à l'action d'une charge transversale distribuée, comme montré sur la Figure 3.4. Étant donné qu'il est possible de modéliser le système structural par la théorie de

poutres d'Euler-Bernoulli, à titre de validation de la procédure basée sur la MEF, nous presentons également l'analyse de fiabilité realisée tenant pour base cette théorie (Rojas et Rade, 2005).

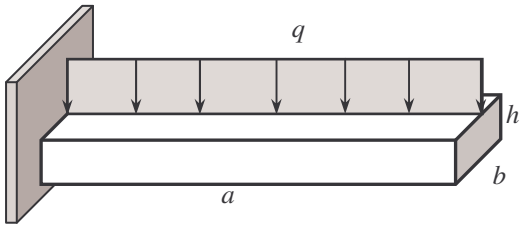


Figure 3.4 - Poutre encastrée-libre dont l'analyse de fiabilité a été faite par couplage avec le code ANSYS®

À partir du problème proposé par López de Lacalle et al. (1996), on établit les deux fonctions d'état limite (Equations 3.7 et 3.8), où la premiére est dérivée de la théorie des poutres d'Euler-Bernoulli, tandis que la deuxième est basée sur l'utilisation d'un modèle aux éléments finis pour calculer la valeur de la contrainte normale maximale $f_{\max}$. Dans les deux fonctions, $f_{\lim}$ désigne la contrainte normale ultime.

$$G(q,a,b,h) = f_{\lim} - \frac{3qa^2}{bh^2} \tag{3.7}$$

$$G(q,a,b,h) = f_{\lim} - f_{\max}(q,a,b,h) \tag{3.8}$$

Pour l'analyse de fiabilité, López de Lacalle et al. (1996) ont utilisé une approximation du premier ordre basée sur l'Équation (3.7).

Les variables de conception, ainsi que leurs caractéristiques statistiques, sont présentés dans le Tableau 3.7.

La Figure 3.5 illustre le maillage du modèle d'éléments finis construit sur ANSYS® en utilisant des éléments SOLID45 (élément solid formé par 8 noueds) ainsi que la distribution des contraintes normales dans la direction x.

Tableau 3.7 - Paramètres des variables aléatoires de la poutre encastrée-libre

Variable	Distribution	Moyenne	Écart type
h (*m*)	Normale	0,003	0,0003
a (*m*)	Normale	0,40	0,04
b (*m*)	Normale	0,15	0,015
q (*N/m*)	Normale	500	50
$f_{\max}$ (*Pa*)	Normale	$4{,}02 \times 10^8$	$9{,}8 \times 10^8$

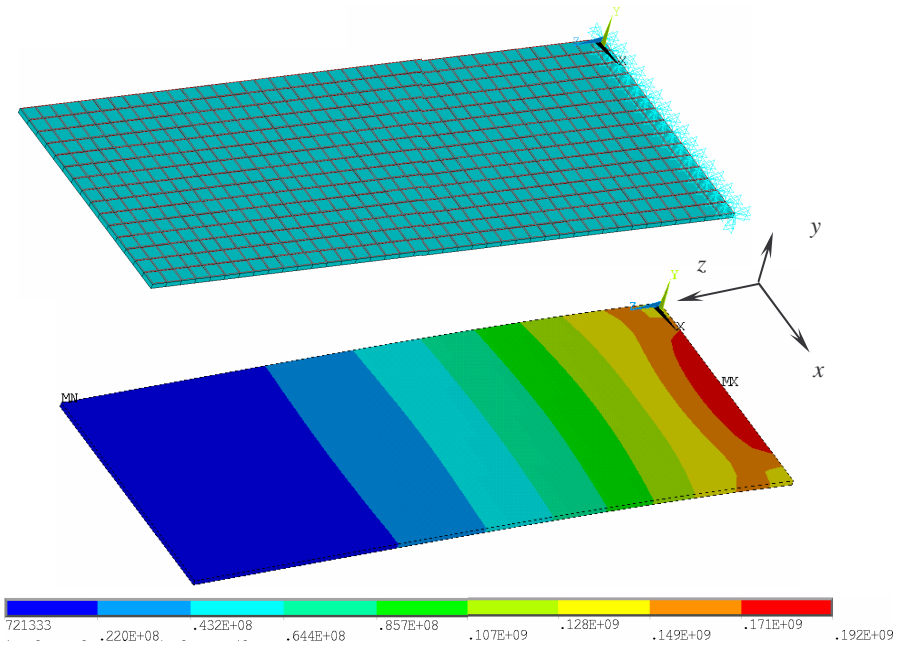


Figure 3.5 - Modèle d'éléments finis et distribution des contraintes normales de la poutre encastrée-libre [*Pa*]

Au Tableau 3.8 on présente les résultats de l'analyse de fiabilité obtenus, confrontés à ceux présentés par López de Lacalle et al. (1996) (en utilisant FORM). On peut remarquer que les résults obtenus en utilisant la théorie d'Euler-Bernoulli pour évaluer l'équation d'état limite sont pratiquement identiques à ceux trouvés dans la litérature. Néanmoins, ces résultats diffèrent de ceux obtenus en utilisant la MEF, ce qui montre l'influence du type de modèle utilisé.

Tableau 3.8 - Résultats de l'analyse de fiabilité de la poutre en acier

Variable	López de Lacalle et al. (1996)	Approache analytique	Éléments finis
h (*m*)	0,0025	0,0025	0,003
a (*m*)	0,453	0,453	0,488
b (*m*)	0,138	0,138	0,126
q (*N/m*)	535	535,17	558,13
$f_{\max}$ (*Pa*)	$4x10^8$	$4x10^8$	$3,99x10^8$
β - FORM	2,52	2,53	2,96
β - SORM	-	2,51	2,99
P_f (%) - FORM	0,58	0,58	0,16
P_f (%) - SORM	-	0,61	0,14

3.5. Analyse de fiabilité en statique d'une poutre basée sur le couplage entre MEF et HBRM

L'exemple de cette section vise à montrer que les résultats de l'analyse de fiabilité peuvent être améliorés à travers d'une stratégie qui consiste à lancer plusieures fois successives les calculs HBRM, ce qui se justifie par la nature aléatoire des méthodes d'optimisation heuristiques.

Pour ces tests numériques, des fonctions d'état limite ont été choisies en considérant la réponse statique d'une poutre appuiée-appuiée, illustrée en Figure 3.6. Ce même exemple a été étudié par Vittal et Haleja (2004) qui ont utilisé FORM et SORM. Rojas et al. (2006) et Rojas et al. (2007) donnent plus de details sur cet exemple.

Pour l'évaluation des fonctions d'état limite, un modèle d'éléments finis a été construit sous le code commercial ANSYS®, contenant 20 éléments BEAM4 (poutre 3-D), 21 nœuds, 6 d.d.l. par nœuds et un nombre total 122 d.d.l. après l'imposition des conditions aux limites.

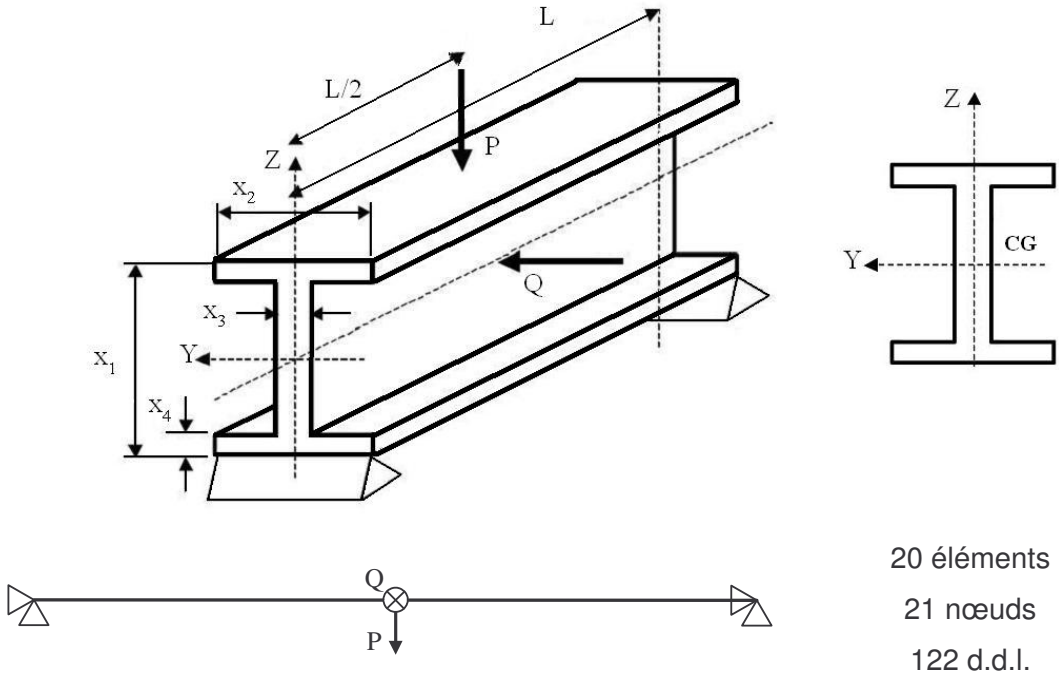


Figure 3.6 - Schéma de la poutre en profil I et définition des variables aléatoires

Les valeurs des paramètres déterministes sont données au Tableau 3.9. Dans ce tableau, k_g et E designent la contrainte limite d'écoulement et le module d'Young du matériau, respectivement, et M_y et M_z designent les moments de flexion maximaux autour des axes y et z axes, respectivement.

Tableau 3.9 - Valeurs des paramètres déterministes de la poutre en profil I

Var.	P (kN)	Q (kN)	E (kN/cm^2)	k_g (kN/cm^2)	L (cm)	M_y (kN.cm)	M_z (kN.cm)
Valueur	600	50	2x10^4	16	200	30000	2500

L'analyse de fiabilité a été effectuée en utilisant un programme écrit en langage MATLAB®, qui établit l'interface entre le code ANSYS® et le code d'optimisation basé sur la HBRM.

Les variables aléatoires x_i $(i = 1,2..4)$ définissent la géométrie de la section droite, comme illustre la Figure 3.6 de telle sorte que elles dépendent l'aire et les moments quadratiques de la section droite, qui sont des paramètres d'entrée de l'élément BEAM4, utilisé pour modéliser la poutre.

Le Tableau 3.10 présente les caractéristiques statistiques des variables de conception.

Tableau 3.10 - Caractéristiques statistiques de la poutre à section droite en profil I

Variable	Distribution	Moyenne	Écart type
x_1 (*cm*)	Normale	45,00	4,50
x_2 (*cm*)	Normale	30,00	3,00
x_3 (*cm*)	Normale	2,95	0,30
x_4 (*cm*)	Normale	2,95	0,30

3.5.1. Premier scénario

Le premier scénario est dédié à l'analyse de fiabilité basée sur une seule fonction d'état limite, liée à la contrainte de flexion maximale à laquelle la poutre est soumise. Dans ce cas, la fonction d'état limite peut être obtenue sous une forme explicite des variables aléatoires, tenant pour base la théorie d'Euler-Bernoulli, selon l'expression suivante :

$$G_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z} - k_g \tag{3.9}$$

où les modules de résistence à la flexion pour le section droite de la poutre sont donnés par :

$$W_y = \frac{x_2 x_1^3 - (x_2 - x_3)(x_1 - 2x_4)^3}{6x_1} \tag{3.10}$$

$$W_z = \frac{2x_4 x_2^3 + (x_3^3)(x_1 - 2x_4)}{6x_2} \tag{3.11}$$

Le Tableau 3.11 montre la comparaison entre les résultats fournis par les méthodes FORM, SORM, et HBRM, cette dernière utilisant GA, PSO et ACO, successivement. Ces résultats sont aussi bons que ceux obtenus par Vittal et Haleja (2004), qui ont utilisé FORM et SORM.

Pour les méthodes FORM et SORM, les estimations initiales de la solution ont été considérées comme étant les valeurs moyennes des variables aléatoires. Il est important de souligner quelques caractéristiques importantes des méthodes examinées : pour FORM et

SORM, les résultats dépendent seulement des estimations initiales, si les critères de convergence sont maintenus constants. Cela signifie que les résultats seront les mêmes pour tous les calculs pour lesquels une même solution initiale est adoptée. Ceci n'est pas le même cas pour la méthode HBRM, car, une fois que les solutions initiales concurrentes sont générées aléatoirement, une solution différente sera obtenue à chaque fois que le calcul est lancé. Ainsi, une procedure convenable consiste à lancer le calcul d'un certain nombre de fois et adopter comme solutions du problème les valeurs moyennes des paramètres obtenues dans l'ensemble des calculs. En plus, les valeurs des variances obtenues pour les différents paramètres peuvent être interprétées comme des indicateurs de la sensibilité de la fonction d'état limite par rapport à ces paramètres, la tendance étant d'avoir des variances plus importantes pour les paramètres vis-a-vis desquels la fonction d'état limite se montre moins sensible. Une faible sensibilité signifie que la valeur de la fonction d'état limite ne varie pas fortement lorsqu'un paramètre varie.

Les résultats de l'analyse de fiabilité du premier scénario sont ressemblés dans le Tableau 3.11. Ces résultats montrent que la méthode HBRM a meilleure performance que les méthodes FORM et SORM. Parmi les méthodes métaheuristiques, GA a les meilleurs estimations de l'indice de fiabilité.

Tableau 3.11 - Résultats de l'analyse de fiabilité pour le premier scénario (un seul calcul)

	Approche Classique		**HBRM**		
	FORM	**SORM**	**GA**	**PSO**	**ACO**
x_1 (*cm*)	57,68	57,68	64,26	54,80	56,25
x_2 (*cm*)	39,74	39,74	38,70	35,19	37,44
x_3 (*cm*)	3,00	3,00	3,75	2,77	3,24
x_4 (*cm*)	3,34	3,34	3,77	3,02	3,67
β	4,50	4,60	6,46	2,86	4,39
P_f (%)	$3{,}33 \times 10^{-6}$	$2{,}11 \times 10^{-6}$	$5{,}17 \times 10^{-9}$	$2{,}14 \times 10^{-1}$	$5{,}56 \times 10^{-4}$
R_l (%)	≈ 100	≈ 100	≈ 100	99,79	≈ 100

L'ordre de grandeur des résultats est reporté à 10^{-2} près. Ainsi, lorsque il est nécessaire les valeurs de la probabilité de défaillance (P_f) et du niveau de fiabilité (R_l) sont approximés a 0 et 100, respectivement.

Les Tableaux 3.12 à 3.14 montrent les résultats obtenus pour un ensemble de 20 calculs HBRM, en utilisant différentes heuristiques. Dans ces tableaux :

- Min. β correspond à la configuration la moins fiable obtenue dans l'ensemble des calculs ;
- Max. β correspond à la configuration la plus fiable obtenue dans l'ensemble des calculs ;
- A est la surface de la section droite (cm^2). Ce paramétre n'intervient pas dans l'analyse de fiabilité, toutefois, il est considéré pour évaluer la quantité de matériau pour la construction de la poutre en sachant que A dépend directement des variables aléatoires x_i (cm) ;
- Min. A est associé à la configuration la moins coûteuse (car correspond à la moindre quantité de matériau pour la construction de la poutre) ;
- μ_i designe les valeurs moyennes des variables de conception sur l'ensemble des 20 calculs ;
- σ_i designe les écarts-types des variables de conception sur l'ensemble des 20 calculs ;
- δ_i indique les coefficients de variation des variables de conception sur l'ensemble des 20 calculs.

On peut constater que les variances obtenues pour les paramètres sont relativement faibles, ce qui signifie que les solutions obtenues à travers HBRM sont proches l'une de l'autre dans l'espace des variables de conception.

Tableau 3.12 - Résultats pour le premier scénario (20 tests - GA)

	x_1	x_2	x_3	x_4	A	β	P_f (%)	R_l (%)
Min. β	50,92	40,47	3,18	3,43	417,89	4,15	0,002	99,998
Max. β	54,12	39,18	3,68	5,35	578,65	9,25	≈ 0	≈ 100
Min. A	66,66	40,54	1,40	3,32	352,72	8,04	≈ 0	≈ 100
μ_i	59,20	41,38	3,09	3,62	455,52	6,68	0,0001	≈ 100
σ_i	5,84	3,35	0,85	0,74	55,74	–	–	–
δ_i	0,10	0,08	0,28	0,20	0,12	–	–	–

Tableau 3.13 - Résultats pour le premier scénario (20 tests - PSO)

	x_1	x_2	x_3	x_4	A	β	P_f (%)	R_l (%)
Min. β	45,98	37,26	3,07	2,70	326,01	2,60	0,47	99,53
Max. β	55,83	37,12	2,35	3,62	383,37	4,55	0,0003	≈ 100
Min. A	45,98	37,26	6,07	2,70	326,01	2,60	0,47	99,53
μ_i	53,57	36,05	3,08	3,35	385,67	3,44	0,09	99,91
σ_i	2,59	1,18	0,31	0,29	25,90	–	–	–
δ_i	0,05	0,03	0,10	0,09	0,07	–	–	–

Tableau 3.14 - Résultats pour le premier scénario (20 tests - ACO)

	x_1	x_2	x_3	x_4	A	β	P_f (%)	R_l (%)
Min. β	55,18	36,68	2,97	3,65	410,40	3,97	0,004	99,996
Max. β	56,13	37,47	3,66	3,67	453,60	4,90	≈ 0	≈ 100
Min. A	52,99	36,52	2,24	3,47	356,67	4,11	0,002	99,998
μ_i	55,75	37,29	3,04	3,64	418,64	4,43	0,0008	≈ 100
σ_i	0,70	0,29	0,47	0,059	25,73	–	–	–
δ_i	0,013	0,008	0,16	0,016	0,062	–	–	–

3.5.2. Second scénario

Dans ce scénario, une deuxième fonction d'état limite est ajoutée additivement à la première, ainsi caractérisant le problème comme un problème d'analyse de fiabilité multi-critères.

La deuxième fonction d'état limite, donnée par l'Equation (3.12), tient compte de la fiabilité structurale en termes du déplacement transversal maximal admis.

$$G_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = \delta_Z - \delta_Z^{\lim} \tag{3.12}$$

où δ_Z et $\delta_Z^{\lim}$ designent le déplacement maximal selon la direction Z et la valeur limite admise (selon les normes de calcul, on adopte $\delta_Z^{\lim} = L/200$).

Les Tableaux 3.15 à 3.17 montrent les résultats des analyses de fiabilité.

Tableau 3.15 - Résultats pour le deuxième scénario (20 tests - GA)

	x_1	x_2	x_3	x_4	A	β	P_f (%)	R_l (%)
Min. β	54,83	40,44	2,88	3,12	392,27	4,15	0,002	99,998
Max. β	48,91	38,91	4,80	4,29	527,51	8,34	≈ 0	≈ 100
Min. A	57,70	35,98	3,46	2,14	339,29	4,74	0,0001	≈ 100
μ_i	58,76	40,46	3,26	3,54	452,82	6,41	0,0002	≈ 100
σ_i	5,48	5,40	0,77	0,66	61,10	–	–	–
δ_i	0,09	0,13	0,24	0,19	0,13	–	–	–

Tableau 3.16 - Résultats pour le deuxième scénario (20 tests - PSO)

	x_1	x_2	x_3	x_4	A	β	P_f (%)	R_l (%)
Min. β	54,49	34,16	3,22	2,95	357,88	2,69	0,36	99,64
Max. β	53,90	37,35	2,85	3,63	403,78	3,91	0,005	99,995
Min. A	49,46	33,13	2,23	3,62	334,40	3,63	0,01	99,99
μ_i	53,84	35,72	2,95	3,34	377,72	3,39	0,06	99,94
σ_i	1,62	1,54	0,35	0,24	20,09	–	–	–
δ_i	0,03	0,04	0,12	0,07	0,05	–	–	–

Tableau 3.17 - Résultats pour le deuxième scénario (20 tests - ACO)

	x_1	x_2	x_3	x_4	A	β	P_f (%)	R_l (%)
Min. β	52,83	34,15	2,66	3,44	357,09	2,93	0,17	99,83
Max. β	56,05	37,07	3,61	3,68	448,88	4,77	0,0001	≈ 100
Min. A	52,83	34,15	2,66	3,44	357,09	2,93	0,17	99,83
μ_i	55,63	37,18	3,13	3,59	418,63	4,22	0,01	99,99
σ_i	1,05	0,73	0,36	0,07	24,10	–	–	–
δ_i	0,02	0,02	0,11	0,02	0,06	–	–	–

Similairement à ce qui a été obtenu pour le scénario précédent, les valeurs des paramètres obtenues pour les 20 calculs HBRM présentent des dispersions relativement faibles, comparées à leurs valeurs moyennes.

3.5.3. Troisième scénario

Dans ce troisième scénario, on ajoute au deuxième scénario une troisième fonction d'état limite, concernant le déplacement transversal maximal admis pour la poutre dans la direction Y :

$$G_3(x_1, x_2, x_3, x_4) = \delta_Y - \delta_Y^{\lim} \tag{3.13}$$

où δ_Y et $\delta_Y^{\lim}$ designent le déplacement maximal selon la direction Y et la valeur limite admise ($\delta_Y^{\lim} = L/200$).

Les Tableaux 3.18 à 3.20 montrent les résultats des analyses de fiabilité. Similairement à ce qui a été obtenu pour les scénarios précédents, les valeurs des paramètres obtenues pour les 20 calculs HBRM présentent des dispersions relativement faibles, comparées à leurs valeurs moyennes.

Tableau 3.18 - Résultats pour le troisième scénario (20 tests - GA)

	x_1	x_2	x_3	x_4	A	β	P_f (%)	R_l (%)
Min. β	61,72	40,73	3,19	3,38	451,26	5,43	≈ 0	≈ 100
Max. β	61,31	44,81	4,96	2,17	476,64	9,54	≈ 0	≈ 100
Min. A	76,77	41,17	2,30	2,37	361,04	8,51	≈ 0	≈ 100
μ_i	61,69	40,50	3,34	3,44	461,16	6,96	≈ 0	≈ 100
σ_i	8,06	2,12	1,04	0,62	42,05	–	–	–
δ_i	0,13	0,05	0,31	0,18	0,09	–	–	–

Tableau 3.19 - Résultats pour le troisième scénario (20 tests - PSO)

	x_1	x_2	x_3	x_4	A	β	P_f (%)	R_l (%)
Min. β	47,26	37,12	3,13	3,20	365,19	2,64	0,42	99,58
Max. β	55,36	37,41	3,30	3,66	432,53	4,32	0,0008	≈ 100
Min. A	56,02	37,24	2,50	2,63	322,36	3,92	0,004	≈ 100
μ_i	52,65	36,39	3,08	3,38	386,44	3,50	0,05	99,95
σ_i	2,72	1,03	0,32	0,33	26,50	–	–	–
δ_i	0,05	0,03	0,10	0,10	0,07	–	–	–

Tableau 3.20 - Résultats pour le troisième scénario (20 tests – ACO)

	x_1	x_2	x_3	x_4	A	β	P_f (%)	R_l (%)
Min. β	55,17	35,83	3,33	3,64	420,60	4,01	0,003	99,997
Max. β	26,23	37,17	3,69	3,67	452,87	4,91	≈ 0	≈ 100
Min. A	56,27	37,17	3,51	2,45	362,05	4,29	0,0009	≈ 100
μ_i	55,92	37,11	3,09	3,51	411,43	4,42	0,0008	≈ 100
σ_i	0,39	0,49	0,51	0,36	29,52	–	–	–
δ_i	0,01	0,01	0,16	0,10	0,07	–	–	–

Dans tous les scénarios étudiés, les méthodes GA, PSO et ACO ont trouvé de bons résultats. Les GA présentent une meilleure performance par rapport aux autres techniques métaheuristiques. On constate que, d'une manière générale, la fiabilité décroît lorsque le nombre de fonctions d'état limite croît.

D'autre part, la moyenne, l'écart type et le coefficient de variation des variables de projet permettent de conclure la méthode HBRM signale ses résultats dans une région étroite de l'espace de conception. Pour tous les cas, les valeurs moyennes des paramètres obtenues dans l'ensemble des calculs sont adoptés comme solution du problème. Les valeurs de la surface de la section droite sont considérées dans le but de vérifier si il est nécessaire l'adoption d'une procédure d'optimisation fiabiliste. Dans ce sens, une analyse fiabiliste peut trouver simultanement un indice de fiabilité convenable et minimiser la surface de la section droite.

3.6. Analyse de fiabilité d'un système oscillant

Cette application consiste à comparer les résultats des méthodes d'analyse de fiabilité obtenus par FORM, SORM et HBRM avec ceux reportés par Shueremans et Van Gemert (2005) qui ont utilisé la SMC combinée aux méthodes de métamodélisation. La fonction d'état limite évalue le comportement vibratoire d'un système oscillant d'un degré de liberté. Cette fonction est évaluée en utilisant un modèle analytique du système.

La Figure 3.6 schématise le système oscillant d'un degré de liberté sans amortisement étudie dans cette section. Ce même système a été étudié par : Gomes et Awruch (2004) ; Faravelli (1989) ; Gayton et al. (2003). Ces auteurs emploient et comparent les résultats de l'analyse de fiabilité obtenus par la SMC liée à des différentes meta-modèles. Les méthodes de surface de réponse et réseaux de neurones sont utilisées comme méthodes de metamodélisation dans les applications d'analyse de fiabilité. Dans le but de diminuer le coût de calcul, Shueremans et Van Gemert (2005) ont continué ces études en proposant une procédure adaptative de metamodélisation. Cette procédure est basée sur un polynôme d'ordre bas dans une méthode de surface de reponse, une méthode utilisant des splines et des réseaux de neurones.

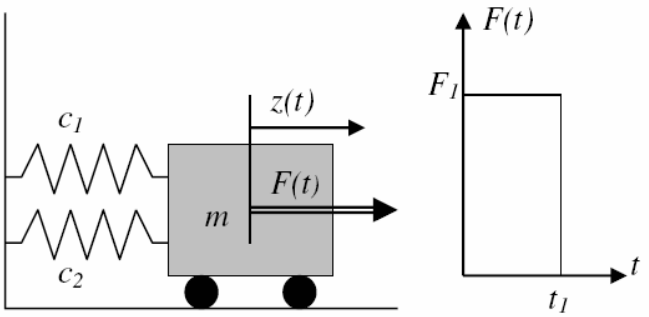


Figure 3.7 - Schéma du système oscillant

Dans le but de réduire l'effet de la force F sur le système en question, l'analyse de fiabilité est basée sur une seule fonction d'état limite. Les variables de conception interviennent explicitement sur l'expression de cette fonction, selon :

$$G = 3r - \left|Z_{\max}\right| \tag{3.14}$$

où:

$$Z_{\max} = \frac{2F_1}{m\omega_0^2}\sin\left(\frac{\omega_0 t_1}{2}\right) \tag{3.15}$$

étant $\omega_0 = \sqrt{c_1 + c_2/m}$. Les variables aléatoires considérés dans l'analyse de fiabilité sont : m, c_1, c_2, r, F_1 et t_1. Le Tableau 3.21 présente les caractéristiques statistiques des variables aléatoires du système.

Tableau 3.21 - Paramètres statistiques du système oscillant

	Distribution	**Moyenne**	**Écart type**
m	Normale	1,0	0,05
c_1	Normale	1,0	0,10
c_2	Normale	0,1	0,01
r	Normale	0,5	0,05
F_1	Normale	1,0	0,20
t_1	Normale	1,0	0,20

Les résultats de l'analyse de fiabilité sont reportés dans le Tableau 3.22. En rapellant que N_G est le nombre d'évaluations de la fonction d'état limite efféctuées.

Les méthodes employées par les références mentionnées ci-dessus sont les suivantes: DS (Directional Sampling), RS (response surface), SP (Splines), NN (feed-forward neural network). Le Tableau 3.22 contient les valeurs des parametres rapportés par ces références. Shueremans et Van Gemert (2005) indiquent la méthode NN comme la plus convenable parmi les autres.

Les résultats obtenus par les méthodes FORM et SORM sont considérés satisfaisants. Pour évaluer la robustesse de ces méthodes, on a admi que les estimations initiales des variables de conception soient égales : aux valeurs moyennes et aux valeurs aléatoires (gérés avec une distribution normale). Les résultats du Tableau 3.22 correspondent au second cas (valeurs aléatoires). Les valeurs du premier cas permettent d'obtenir de très bons résultats aussi. Ces derniers résultats ne sont pas présentés ici. On remarque que FORM et SORM présentent des niveaux de fiabilité proches à ceux de NN mais pour un tiers des évaluations de la fonction d'état limite.

Tableau 3.22 - Résultats de l'analyse de fiabilité pour le système oscillant

	DS	RS	SP	NN	FORM	SORM	HBRM-a	HBRM-b
m	-	-	-	-	0,99	0,99	0,97	0,89
c_1	-	-	-	-	0,96	0,96	0,94	0,80
c_2	-	-	-	-	0,10	0,10	0,10	0,09
r	-	-	-	-	0,46	0,46	0,42	0,40
F_1	-	-	-	-	1,24	1,24	1,09	0,92
t_1	-	-	-	-	1,21	1,21	1,02	1,20
N_G	1281	62	76	86	25	35	100	1000
T (s)	-	-	-	-	0,16	0,28	1,30	3,80
β	1,81	1,82	1,83	1,91	1,87	1,88	1,90	3,73
P_f (%)	3,50	3,40	3,40	2,80	3,11	2,99	2,89	0,01
R_l (%)	96,50	96,60	96,60	97,20	96,89	97,01	97,11	99,99

Quant à l'approximation par HBRM, deux cas ont été testés, dans le premier (a), 100 évaluations de la fonction d'état limite sont réalisées et dans le second (b) 1000 évaluations sont effectuées. Le test (a) présente un niveaux de fiabilité semblable à celui de NN pour une valeur de N_G très proche à celui de HBRM. D'autre part, pour le test (b) le niveaux de fiabilité est plus élevé malgré le plus grand nombre d'évaluations de la fonction d'état limite. Cela indique que lorsqu'on utilise une population plus grande dans les méthodes métaheuristiques ou plus d'itérations sont permises, les résultas peuvent être améliorés. La potentialité de la méthode HBRM appliquée à des problèmes plus complexes est indiquée à l'issue de cette application.

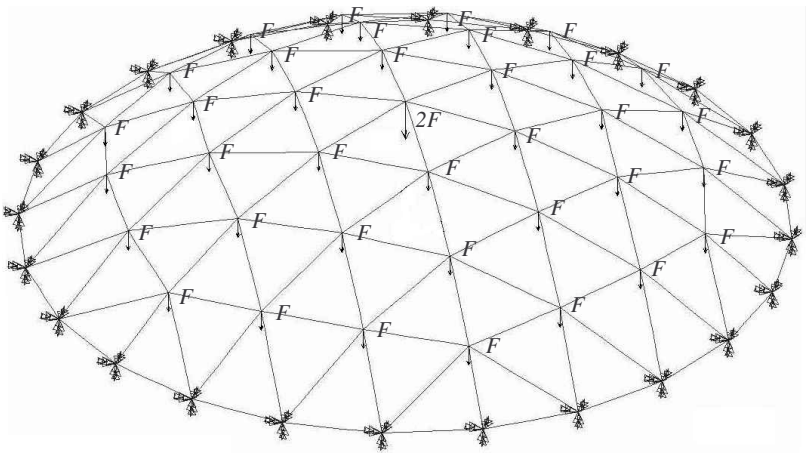
3.7. Analyse de fiabilité de la dynamique d'un dôme basée sur modélisation par EF

Cette section présente l'analyse de fiabilité d'une coupole, dans le contexte de la dynamique des structures en ingénierie civile. L'objectif de cette analyse est d'évaluer la méthodologie proposée appliquée à des systèmes structuraux plus complexes en dynamique de structures. En particulier, l'application traite l'utilisation d'absorbeurs dynamiques de vibration (ADV) pour réduire les niveaux de vibration des structures, et a été l'objet de l'étude réalisée par Rojas et al. (2006).

Les amortisseurs dynamiques de vibration, dans leur forme la plus simple, sont des systèmes constitués par masse, ressort et amortisseur, qu'une fois couplés à un système mécanique (nommé structure primaire), permet d'atténuer les vibrations de celle-ci dans une gamme de fréquences données. La procédure classique pour ajuster l'ADV, c'est à dire, pour choisir un ensemble adéquat de valeurs de ses paramètres, est basée sur l'existence des nommés points fixes des fonctions de réponses fréquentielles (Den Hartog, 1956). Toutefois, cette procédure est limitée aux cas les plus simples, étant basée sur un certain nombre d'hypothèse qui ne se justifient dans tous les cas. Ce fait conduit à l'utilisation de procédures plus générales d'optimisation numérique pour le projet des ADV.

Le but de cette application est de concevoir l'ADV qui réduit au maximum des amplitudes de vibration dans une bande de fréquence donnée avec un niveau de fiabilité élevée.

Les prochaines figures montrent des détails du modèle d'éléments finis du dôme avec un ADV. La Figure 3.8 illustre une vue oblique avec les conditions de charge de frontière et la Figure 3.9 montre la forme du mode cible (à fréquence propre $f = 32{,}2$ Hz), et illustre l'arrangement du ADV, ainsi que les valeurs des propriétés des barres qui forment la structure. Le modèle d'éléments finis est construit sur ANSYS® en utilisant des éléments BEAM4 (poutre 3-D).



782 éléments - 686 nœuds - 3972 d.d.l.

Figure 3.8 - Modèle d'éléments finis du dôme

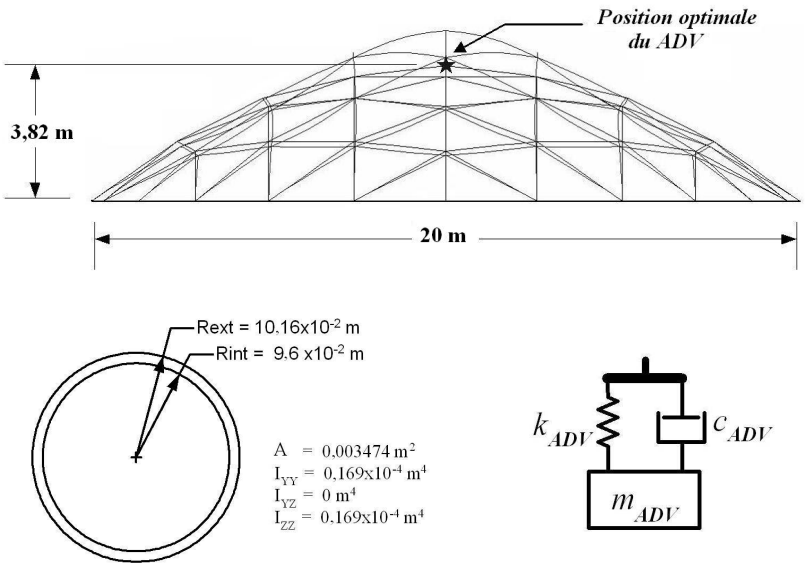


Figure 3.9 - Une section transversale du dôme avec l'ADV

Tout d'abord, la conception déterministe du ADV est traitée à travers la résolution d'un problème d'optimisation dont le but est de réduire les amplitudes de vibration du mode de vibration illustré sur le schéma 3.8, considérant que les variables aléatoires sont : $m_{ADV}, c_{ADV}, k_{ADV}$ et F. Comme suggéré par Rade et Steffen Jr. (2000, 2001) ce problème d'optimisation est défini par la minimisation de la fonction objectif donnée par :

$$J(m_{ADV}, c_{ADV}, k_{ADV}) = \max_{26 \le f \le 36} \{|H(f)|\} \tag{3.16}$$

où $H(f)$ indique l'amplitude d'une fonction de réponse en fréquence du système avec le l'ADV. À l'issue de ce calcul d'optimisation, les valeurs optimales pour des paramètres du ADV obtenues sont $m_{ADV} = 72{,}96$ *kg*, $k_{ADV} = 2406493{,}62$ *N/m* et $c_{ADV} = 6250{,}24$ *N.s/m*.

Dans une deuxième étape, on considère le problème de fiabilité de cette configuration optimale, tenant compte de la variabilité incident sur les paramètres de conception. Pour cela, la fonction d'état limite est définie comme suit :

$$G(F, m_{ADV}, c_{ADV}, k_{ADV}) = \max_{26 \le f \le 36} (|H(f)|) - H_{\lim} \tag{3.17}$$

où: $\max_{26 \le f \le 36} (|H(f)|)$ et $H_{\lim} = 58{,}2857\,[\mathrm{dB}]$ sont, respectivement, l'amplitude maximale dans la bande de fréquence d'intérêt et l'amplitude courrante de $H(f)$.

La valeur $\max_{26 \le f \le 36} \left(\left| H(f) \right| \right)$ pour l'ensemble des variables aléatoires est obtenue à partir du modèle aux éléments finis.

Dans l'Équation (3.17) on peut voir que la fonction d'état de limite est définie de telle manière que si $G < 0$, l'amplitude maximale de la FRF est plus haute que la valeur admissible. Ceci est interprété comme une condition d'opération insuffisante du ADV. L'opposé (exécution satisfaisante) correspondent à la condition $G > 0$.

Le Tableau 3.23 récapitule les paramètres de conception et leurs moments statistiques considérés dans cet exemple. Pour les conceptions initiales deux cas ont été considérés. Dans le cas 1 les valeurs des paramètres trouvés dans l'optimisation déterministe sont employées comme estimation initiale de la FORM et SORM, tandis que dans le cas 2 une autre conception arbitraire a été employée comme solution initiale. Dans les deux cas, les valeurs moyennes sont les mêmes.

Il est important de souligner que l'intérêt d'inclure les charges F comme variable aléatoire est lié au fait qu'on prévoit que l'effet de raidissement par contraintes peut avoir une influence sur le comportement dynamique du système structural. Cet effet a été étudié par Rojas (2004).

Tableau 3.23 - Variables aléatoires et caractéristiques statistiques des paramètres ADV

Variable	Distribution	Moyenne	Écart type	Cas 1	Cas 2
m_{ADV} (*Kg*)	Normale	72,96	7,296	72,96	50,97
k_{ADV} (*N/m*)	Normale	2406493,62	240649,362	2406493,62	2086279,43
c_{ADV} (*Ns/m*)	Normale	6250,24	625,024	6250,24	2062,40
F (*N*)	Normale	100	10,0	100	100

Le Tableau 3.24 montre les résultats de l'analyse de fiabilité obtenus en utilisant les méthodes FORM et SORM.

Il est important de préciser que les ensembles de valeurs obtenues pour FORM et SORM pour les variables de conception pour les deux cas sont proches l'un de l'autre. Ceci signifie que, pour cet exemple, les deux techniques mènnent à des conceptions les plus fiables. Cependant, les indices de fiabilité prévus par FORM et SORM sont considérablement différents l'un de l'autre parce que la fonction d'état limite est approchée différemment par les deux techniques.

Tableau 3.24 - Résultats de l'analyse de fiabilité du ADV

	Cas 1		Cas 2	
	FORM	**SORM**	**FORM**	**SORM**
m_{ADV} (*Kg*)	69,50	69,50	69,52	69,52
k_{ADV} (*N/m*)	2555839,83	2555839,83	2556300,77	2556300,77
c_{ADV} (*Ns/m*)	6192,22	6192,22	6192,04	6192,04
F (*N*)	99,96	99,96	100	100
β	0,7868	1,9846	0,7868	1,6174
P_f (%)	21,57	2,36	21,57	5,29
R_l (%)	78,43	97,64	78,43	94,71

La Figure 3.10 montre les FRFs obtenues pour le dôme avec et sans l' ADV, pour les deux cas (courbes superposées). Les valeurs des paramètres de l'ADV et de la charge F, correspondant au pont de conception sont donnés dans le Tableau 3.23. On peut remarquer que dans la plage de fréquences d'intérêt ($26 \leq f \leq 36$ *Hz*), les amplitudes de vibration satisfont la condition imposée par la fonction d'état limite.

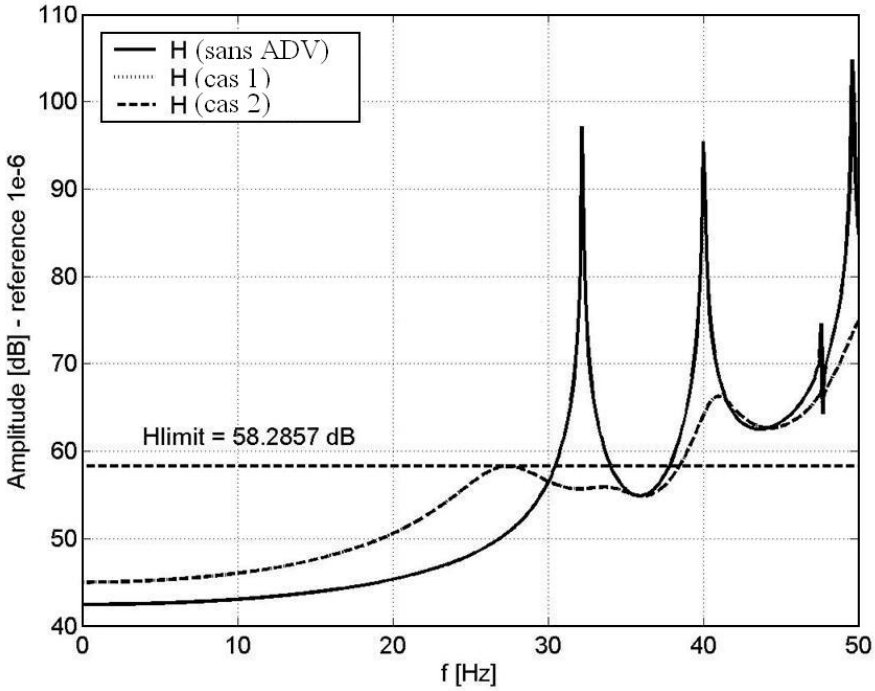


Figure 3.10 - Fonctions de réponse en fréquence du dôme

Des simulations numériques supplémentaires ont démontré que l'amplitude de vibration est très sensible à la variation des paramètres de conception. Cela ne permet pas d'obtenir des bons niveaux de fiabilité, ce que oblige à continuer cette étude par rapport a l'influence des variables aléatoires sur l'amplitude de vibration aussi que un avant analyse de probabilité pour définir les paramètres statistiques des variables aléatoires.

Il est importante de remarquer qu'au moment que les simulations numériques ont été réalisées, aucune référence dans la littérature n'a été pas trouvé qui utilise l'amplitude de vibration comme variable des fonctions d'état limite en analyse de fiabilité des structures. Dans ce sens, malgré les niveaux de fiabilité bas il existe une contribution dans cette application.

De retour au problème de fiabilité, un autre objectif de cette étude est la conception du ADV dans quatre scénarios différents. Ces scénarios vont du cas d'une seule fonction d'état de limite au cas des fonctions d'état de limite multiples. Dans ce cas-ci la moyenne et l'écart type de la charge F valent 40000 N et 4000 N, respectivement.

3.7.1. Premier scénario

Le premier scénario est basé sur une seule fonction d'état limite comme :

$$G_1\left(F, m_{ADV}, c_{ADV}, k_{ADV}\right) = \left|f_3 - f_3^{dome}\right| - \Delta f \tag{3.18}$$

où :

- f_3 est la troisième fréquence propre de la structure composée (dôme + ADV),
- f_3^{dome} est la troisième fréquence propre du dôme, et
- $\Delta f = 5$ Hz est la bande de fréquence d'intérêt.

Ainsi, l'analyse de fiabilité cherche à mesurer l'accord entre la troisième fréquence propre du dôme et la troisième fréquence propre de la structure composée.

Les Tableaux 3.25 et 3.26 montrent les résultats obtenus à partir de 20 calculs de la HBRM (via ACO). Par ces analyses, on constate qu'il est possible de définir le nombre de tests de la HBRM visant l'équilibre entre l'effort informatique en fonction des paramétres d'arrêt de cette méthode. On observe que les meilleurs résultats sont obtenus au prix d'un nombre plus elévés de tests et d'un effort informatique plus important.

On peut observer que les écarts types (σ_i) pour chaque variable de conception sont petits une fois comparés aux valeurs moyennes. Ceci signifie que la HBRM se montre capable pour atteindre les solutions plus proches entre elles dans l'espace de conception.

Tableau 3.25 - Résultats de l'analyse de fiabilité du dôme avec ADV pour le premier scénario

	F	m_{ADV}	k_{ADV}	c_{ADV}	β	P_f (%)	R_l (%)
Min. β	39681,78	71,78	2337996,69	5995,30	0,53	29,83	70,17
Max. β	46205,01	75,07	2324807,72	6511,53	1,67	4,77	95,23
μ_i	40558,45	72,10	2435668,64	6295,67	0,95	17,82	82,18
σ_i	2269,95	3,49	95362,35	320,81	-	-	-
δ_i	0,06	0,05	0,04	0,05	-	-	-

Parmi les 20 tests numériques, le meilleur résultat a été obtenu par le test numéro 14, avec un niveau de fiabilité de 95.23%, qui est considéré satisfaisant comme conception finale. Le plus mauvais résultat a été obtenu en expérience numéro 8 avec un niveau de fiabilité de 70.17%, qui est considéré comme une mauvaise conception finale.

Dans une deuxième étape les valeurs des variables de conception obtenues en expérience numéro 8 ont été employées pour alimenter une procédure du type cascade avec les méthodes FORM et le SORM, c'est à dire que ces dernières méthodes ont été utilisées pour raffiner une solution qui n'était pas considérée satisfaisant. Le tableau 3.26 montre les résultats obtenus à travers cette procédure. On peut voir que les mêmes résultats sont obtenus à travers FORM et SORM, tous les deux favorisant une significative amélioration de la solution initiale issue de l'expérience numéro 8.

Tableau 3.26 - Résultats de l'analyse de fiabilité du dôme avec ADV par FORM et SORM

	F	m_{ADV}	k_{ADV}	c_{ADV}	β	P_f (%)	R_l (%)
FORM	39681.78	85.01	1585039.72	5995.30	3.71	0.01	99.99
SORM	39681.78	85.01	1585039.72	5995.30	3.71	0.01	99.99

3.7.2. Second scénario

Ici on ajoute au premier scénario une deuxième fonction d'état de limite donnée par :

$$G_2(F, m_{ADV}, c_{ADV}, k_{ADV}) = \delta_y - \delta_y^{\lim} \tag{3.19}$$

où:

- δ_y est le déplacement statique dans la direction verticale du point d'attache de l'ADV.
- $\delta_y^{\lim}$ est la limite assumée pour le déplacement statique dans la direction verticale du point d'attache de l'ADV.

Selon les normes techniques (ABNT/CB 02, 2007), cette valeur limite est établie comme étant $\delta_y^{\lim} = L/200$, où L est le diamètre du dôme. La fonction d'état limite G_2 vise à assurer que le déplacement maximal soit inférieur à la valeur limite prédéfinie.

Le Tableau 3.27 montre les résultats obtenus à partir de 20 tests de la HBRM. Comme pour le scénario précédent, les écarts types pour chaque variable de conception sont petits comparés à leurs valeurs moyennes.

Le meilleur résultat a été obtenu en expérience numéro 15, avec un niveau de fiabilité de 90.65%, qui n'est pas un résultat très satisfaisant mais peut être considéré comme acceptable. Le plus mauvais résultat a été obtenu en expérience numéro 17 avec un niveau de fiabilité de 68.15%.

On peut observer dans le Tableau 3.27 que les écarts types des paramètres sont assumés de 10% de leurs valeurs moyennes. Bien évidemment, la probabilité d'échec augmente avec la dispersion des paramètres.

Tableau 3.27 - Résultats de l'analyse de fiabilité du dôme avec ADV pour le second scénario

	F	m_{ADV}	k_{ADV}	c_{ADV}	β	P_f (%)	R_l (%)
Min. β	38970,60	72,60	2490490,97	6362,26	0,47	31,85	68,15
Max. β	36157,08	78,93	2481119,65	6393,75	1,32	9,35	90,65
μ_i	39953,01	72,66	2413646,73	6369,26	1,00	16,39	83,61
σ_i	2469,73	3,82	119889,67	235,92	-	-	-
δ_i	0,06	0,05	0,05	0,04	-	-	-

3.7.3. Troisième scénario

Dans ce scénario, une troisième fonction d'état limite est ajoutée, défine selon :

$$G_3(F, m_{ADV}, c_{ADV}, k_{ADV}) = F_{\max} - F_y^{\lim} \tag{3.20}$$

où :

- $F_{\max}$ est la force maximale de réaction aux appuis de la structure de dôme, et
- $F_y^{\lim}$ est la limite admise pour la force de réaction aux appuis de la structure.

Selon la littérature (Haldar et Mahadevan, 2000) $F_y^{\lim}$ est donné par $F_y^{\lim} = f_{yk} A$, où $f_{yk} = 250$ *MPa* est la valeur de la contrainte d'écoulement pour l'acier et A est la surface de la section droite. Cette fonction essaye d'assurer que la force maximale de réaction soit inférieure à la limite prédéfinie.

Le Tableau 3.28 montre les résultats obtenus à partir de 20 tests numériques d'ACO. De nouveau, les écarts types pour chaque variable de conception sont petits une fois comparés aux valeurs moyennes correspondantes, ce qui démontre que les solutions obtenues pour chaque test sont proches entre elles.

Tableau 3.28 - Résultats de l'analyse de fiabilité du dôme avec ADV pour le troisième scénario

	F	m_{ADV}	k_{ADV}	c_{ADV}	β	P_f (%)	R_l (%)
Min. β	40322,51	70,42	2372503,89	6434,26	0,48	31,43	68,57
Max. β	34221,59	73,34	2382159,46	6616,36	1,56	5,90	94,10
μ_i	40242,74	74,10	2403407,09	6127,73	0,98	17,57	82,43
σ_i	2504,88	3,81	70244,92	334,29	-	-	-
δ_i	0,06	0,05	0,03	0,05	-	-	-

Parmi les 20 tests numériques le test numéro 7 a fournit le meilleur résultat, avec un niveau de fiabilité de 94.10%, qui est un résultat satisfaisant considéré comme conception finale, tandis que le plus mauvais résultat a été obtenu pour le test numéro 18 avec un niveau de fiabilité de 68.57%.

3.7.4. Quatrième scénario

Ici, une quatrième fonction est ajoutée au problème contraint d'optimisation associé à l'analyse de fiabilité, définie selon :

$$G_4(F, m_{ADV}, c_{ADV}, k_{ADV}) = F - F^{crit} \tag{3.21}$$

où F^{crit} est la charge de flambage de la structure de dôme. Cette fonction est particulière puisque F est une variable explicite dans la fonction d'état limite.

De forme similaires aux scénarios précédents, le Tableau 3.29 montre les résultats obtenus à travers 20 tests numériques d'ACO. Encore une fois, les écarts types pour chaque variable de conception sont petits en comparaison avec leurs valeurs moyennes.

Tableau 3.29 - Résultats de l'analyse de fiabilité du dôme avec ADV pour le quatrième scénario

	F	m_{ADV}	k_{ADV}	c_{ADV}	β	P_f (%)	R_l (%)
Min. β	38925,15	72,18	2387927,58	6139,25	0,35	36,39	63,61
Max. β	38114,12	69,99	2644614,33	6883,82	1,55	6,09	93,91
μ_i	40233,96	71,33	2404621,49	6197,09	1,14	13,60	86,40
σ_i	2299,97	3,25	156146,44	412,96	-	-	-
δ_i	0,06	0,05	0,06	0,07	-	-	-

Au test numéro 1, il a été obtenu le meilleur résultat, avec un niveau de fiabilité de 93.91%, tandis que le plus mauvais résultat a été obtenu en expérience numéro 10 avec un niveau de fiabilité de 63.61%.

3.8. Conclusion

Diverses applications numériques de la méthodologie d'analyse de fiabilité HBRM proposée dans cette thèse ont été présentées dans ce chapitre.

Initialement, les algorithmes ont été validés confrontant leurs résultats avec leur similaires de la littérature. La performance de cette méthodologie a été évaluée dans chaque exemple. Dans le but de la test, applications bi et tridimensionnelles relèvant de la statique,

stabilité, dynamique ont été considérées dans des analyses de fiabilité multicritères. Ceci dans l'intérêt d'aborder differentes classes de problèmes d'actualité dans le domaine de la Mécanique et du Génie Civil.

Les tests numériques on permis de montrer les avantages associées aux faits que la HBRM n'utilise pas d'estimations initiales ni les gradients, et que sa performance est satisfaisante pour la plus part des applications examinées. Ainsi, malgré des temps de calcul généralement plus élevés que ceux requis par FORM et SORM, cette méthode est jugée performante. Dans le contexte de la HBRM, les GA ont montré meilleure performance par rapport aux méthodes PSO et ACO.

Dans le chapitre suivant sont présentés des exemples d'analyse de fiabilité appliquée au problème d'interaction fluide structure.

CHAPITRE IV

ANALYSE DE FIABILITE DES PROBLEMES D'INTERACTION FLUIDE-STRUCTURE AVEC REDUCTION DE MODELES

Ce qu'il est statique et homogène est ennuyeux. Ce qui est dynamique et hétérogène est embrouillant. Entre l'art de mensonges (Modifie de John A. Locke, 1632-1704)

Ce chapitre présente des applications numériques de la méthodologie d'analyse de fiabilité proposée dans ce mémoire. Ainsi, nous présentons des applications pour des problèmes d'interaction fluide-structure bi et tridimensionnelles en dynamique, aussi une application industrielle. Ceci avec l'objectif de montrer l'applicabilité de cette méthodologie dans des applications plus complexes.

La compréhension des problèmes d'interactions entre un fluide et un solide élastique est fondamentale dans plusieurs applications industrielles. Lorsqu'une structure vibre en présence d'un fluide, il existe l'interaction entre les ondes propres de chacun des milieux : le mouvement du fluide produit une déformation structurelle et/ou le mouvement du solide provoque le déplacement du fluide (Bendaou et al., 2005). Dans ce contexte, ces applications requièrent un couplage efficace entre l'acoustique du fluide et la dynamique des structures. Pavanello (1991) présente une synthèse des modèles les plus utilisés pour l'étude de l'interaction fluide-structure.

L'une des principales hypothèses de l'analyse des structures qui prennent en compte l'interaction fluide-structure est que les modèles utilisées sont déterministes, c'est-à-dire, les paramètres utilisés par les modèles sont constants. Néanmoins, la connaissance de la variation de la réponse des systèmes couplés (fluide et solide) comportant des incertitudes sur la géométrie, les propriétés des matériaux, les conditions aux limites ou la charge, est indispensable dans un processus de conception. Ainsi, se manifeste la nécessité d'utiliser des méthodes numériques pour prendre en compte ces incertitudes. Parmi ces méthodes, la

Simulation de Monté Carlo (Shinozuka, 2000), qui est utilisée jusqu'à présent par la plupart des logiciels spécialisés, mais, cette méthode a l'handicap d'être coûteuse en temps CPU. Muscolino (1999) et Kleiber (1992) suggèrent l'emploi des méthodes de perturbation pour la solution de ces problèmes. Ces méthodes sont efficaces et nécessitent beaucoup moins de temps de calcul que celle de la SMC.

L'étude du comportement dynamique des systèmes couplés est généralement coûteuse et complexe en raison des limitations de la capacité de prévision des modèles employés (Sarsi, 2005). Les méthodes de sous-structuration constituent souvent une alternative de résolution du problème de coût sans la perte de la capacité d'estimation des modèles. L'une des stratégies de sous-structuration dynamique les plus utilisées et les plus efficaces est basée sur une technique de synthèse modale (Craig, 1995).

L'étude de l'interaction fluide-structure est définie comme l'analyse du comportement couplé de deux milieux de nature différent (Pavanello, 1991). Le premier, constitué par une structure élastique et le second, par un fluide :

- Si le fluide est incompressible, le problème est dit Hydro-Elastique ;
- Si le fluide est compressible, le problème est dit Elasto-Acoustique ou Vibro-Acoustique.

Pour les applications présentés dans ce chapitre nous supposons que : la structure est élastique, linéaire, isotrope et sans contrainte ni déformation initiale aussi que le fluide est parfait autour de sa position d'équilibre et on considère de petites perturbations en évolution adiabatique.

L'Annexe C résume les aspects théoriques, appliqués dans les exemples numériques présentés dans ce chapitre, de la modélisation de l'interaction fluide-structure par la méthode d'EF, de la synthèse modale et de la méthode de perturbation de Muscolino.

4.1. Analyse de fiabilité d'un problème d'interaction fluide-structure sur une poutre

Cette application vise à montrer l'utilisation de la méthodologie d'analyse de fiabilité en applications de problèmes d'interaction fluide-structure bidimensionnelles en dynamique. Dans ce but sont présentés des analyses déterministes et stochastiques en complément à l'analyse de fiabilité. L'analyse déterministe permet la validation du modèle d'une poutre couplée à un fluide. La méthode de Muscolino permet de réaliser l'analyse stochastique de certains paramètres du système. Finalement, l'analyse de fiabilité évalue une fonction d'état

limite en utilisant un modèle éléments finis en considérant comme variables aléatoires les paramètres de l'analyse stochastique. Les résultats de cette application ont été publiés par Rojas et al. (2007 a).

L'application en question consiste sur l'étude des vibrations transversales d'une poutre en acier dont sa surface supérieure est en contact avec une masse de fluide de dimension $L \times H$. Initialement, le système couplé (poutre-fluide) est sur repos. La Figure 4.1 illustre le problème d'interaction fluide-structure entre une poutre simplement appuyée et un fluide incompressible, ainsi que les conditions limites de pression.

Dans le modèle des éléments finis, le fluide est discrétisée par des éléments rectangulaires de 8 nœuds et la poutre par des éléments linéaires de 2 nœuds. L'interaction fluide-structur a été modélisée en utilisant un code numérique développé en langage MATLAB® par Bendaou et al. (2007).

Les valeurs des caractéristiques de la poutre sont $L = 3$ *m*, $ra = 0{,}2$ *m*, $rb = 0{,}05$ *m*, $E = 2{,}1 \times 10^{11}$ *Pa* et $\rho_S = 7800$ *kg/m³* et du fluide sont $H = 6$ *m*, $\rho_f = 1000$ *kg/m³*.

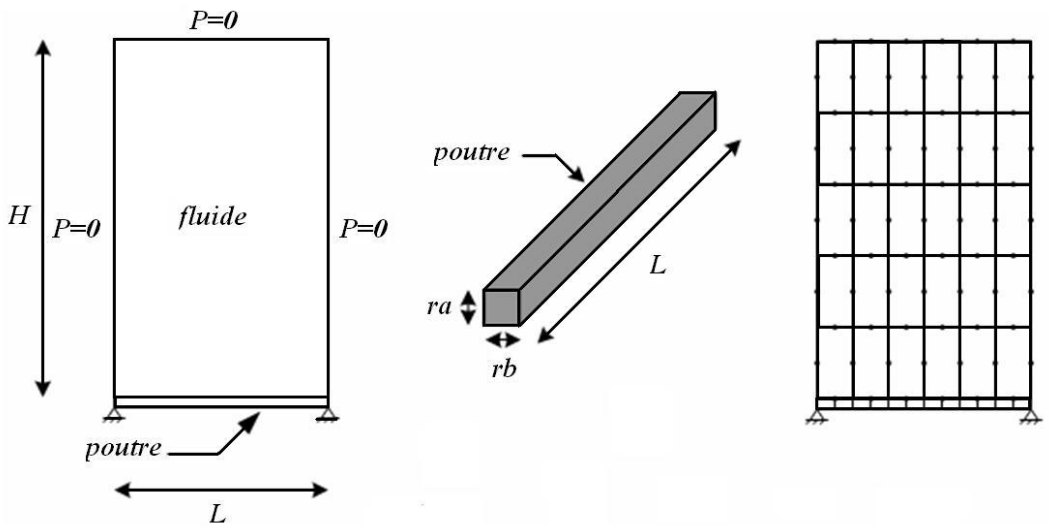


Figure 4.1 - Poutre simplement appuyée couplée à une masse de fluide

4.1.1 Analyse modale déterministe

Le Tableau 4.1 présente les valeurs des fréquences propres (*Hz*) obtenues à partir du modèle EF et les valeurs obtenues à travers un modèle analytique par Pavanello (1991), ces dernières étant considérées comme valeurs de référence. Les faibles écarts entre les deux ensembles de résultats permettent de conclure sur la validation de la modélisation numérique par éléments finis.

Tableau 4.1 - Fréquences propres du système couplé poutre-fluide

	Modèle analytique		Modèle éléments finis	
Mode	**Poutre**	**Poutre et fluide**	**Poutre**	**Poutre et fluide**
1	52,3	41,2	52,3 (0,0%)	41,2 (0,0%)
2	209,1	182,9	209,2 (0,0%)	183,0 (0,0%)
3	470,6	428,7	470,7 (0,0%)	429,5 (0,1%)
4	836,6	778,7	837,2 (0,0%)	782,7 (0,4%)
5	1307,1	1233,2	1309,7 (0,1%)	1247,3 (1,1%)

On peut constater que le couplage avec le fluide a pour conséquence la réduction des valeurs des fréquences propres, ce qui s'explique par l'effet de la masse de fluide ajoutée (Pavanello (1991).

4.1.2 Analyse modale stochastique

L'analyse stochastique du problème d'interaction fluide-structure est réalisée par la méthode de perturbation de Muscolino (Muscolino et al. 1999) et la simulation de Monte Carlo.

Cette analyse prend en compte les variables aléatoires suivantes : le module d'élasticité (E), la masse volumique de la poutre (ρ_s), la masse volumique du fluide (ρ_f) et la hauteur de la poutre (ra). Dans ce but, on pose : $E = 2{,}1\times10^{11}\left(1+0{,}01\delta_1\right)$ *Pa*, $\rho_f = 1000\left(1+0{,}01\delta_2\right)$ *Kg/m³*, $\rho_s = 7800\left(1+0{,}01\delta_3\right)$ *Kg/m³* et $ra = 0{,}2\left(1+0{,}01\delta_4\right)$ *m*, où δ_i représente des variables aléatoires à distributions normales telles que $E\left(\delta_i\right)=0$ (moyennes) et $E_t\left(\delta_i\right)=1$ (écarts types) pour $i=1,2,3,4$.

Le Tableau 4.2 présente les valeurs des moyennes et des écarts types des fréquences propres de la poutre pour les méthodes de Muscolino et la SMC (les résultats de cette dernière sont considérés comme référence et ont été obtenus pour 2000 échantillons). On indique, entre parenthèses, les différences relatives entre les résultats obtenues à travers les deux méthodes. Leurs faibles valeurs montrent l'efficacité de la méthode de Muscolino, notamment en termes de temps de calcul.

Tableau 4.2 - Caractéristiques statistiques des fréquences propres du système poutre-fluide

	Simulation de Monte Carlo		**Méthode de Perturbation de Muscolino**	
Fréq.	Moyenne (*Hz*)	Ecart type (*Hz*)	Moyenne (*Hz*)	Ecart type (*Hz*)
1	41,2	8,60	41,2 (0,0 %)	8,62 (0,2 %)
2	183,1	37,63	183,0 (0,0 %)	37,66 (0,0 %)
3	429,6	87,63	429,5 (0,0 %)	87,68 (0,0 %)
4	782,9	158,96	782,7 (0,0 %)	158,99 (0,0 %)
5	1247,5	252,33	1247,3 (0,0 %)	252,34 (0,0 %)
	Temps de calcul : 15,1 s		Temps de calcul : 0,3 s	

4.1.3. Analyse de fiabilité

Le Tableau 4.3 présente les caractéristiques statistiques des variables aléatoires du système couplé poutre-fluide. Deux cas sont analysés, pour deux valeurs différentes d'écart type.

Tableau 4.3 - Caractéristiques statistiques des variables aléatoires de la poutre et fluide couplés

	Distribution	**Moyenne**	**Ecart type**	
			Cas 1	**Cas 2**
E (*Pa*) $\times 10^{11}$	Normale	2,1	0,105	0,0525
ρ_s (*kg/m*^{3})	Normale	7800	468	234
ρ_f (*kg/m*^{3})	Normale	1000	80	40
ra (*m*)	Normale	0,2	0,008	0,004

L'analyse de fiabilité est basée sur une fonction d'état limite qui a pour but de limiter la valeur de la première fréquence propre (f_1) du système couplé. En raison de la complexité du problème, les variables aléatoires ne peuvent pas être explicitées dans cette fonction, qui s'exprime selon :

$$G(E, \rho_s, \rho_f, ra) = f_1 - f_{\lim} \tag{4.1}$$

où $f_{\lim} = 45$ *Hz* est choisie comme valeur limite.

Dans le Tableau 4.4 sont comparés les résultats de l'analyse de fiabilité à travers les méthodes FORM, SORM et HBRM (cette dernière utilisant ACO). Comme prévu, le deuxième cas fournit les meilleurs résultats puisque les dispersions des variables aléatoires pour ce cas sont faibles. On constate aussi que pour les deux cas, la HBRM se montre plus performante que les méthodes FORM et SORM en ce qui concerne les niveaux de fiabilité atteints. Les résultats sont considérés comme satisfaisants et démontrent l'applicabilité de la méthodologie de fiabilité aux problèmes relevant du couplage fluide-structure.

Tableau 4.4 - Résultats de l'analyse de fiabilité pour le système poutre-fluide

	Cas 1			**Cas 2**		
	FORM	**SORM**	**HBRM**	**FORM**	**SORM**	**HBRM**
E (*Pa*) $\times 10^{11}$	2,19	2,19	1,97	2,18	2,18	1,99
ρ_s (*kg/m*^{3})	7486,19	7486,19	7441,83	7486,19	7486,19	7311,33
ρ_f (*kg/m*^{3})	958,71	958,71	845,85	958,71	958,71	858,68
ra (*m*)	0,21	0,21	0,19	0,21	0,21	0,21
β	1,91	1,92	2,75	3,82	3,83	5,48
P_f (%)	2,80	2,77	0,30	0,01	0,01	$2{,}17 \times 10^{-6}$
R_l (%)	97,20	97,23	99,70	99,99	99,99	≈ 100

Ainsi comme dans le chapitre précédant, les valeurs de la probabilité de défaillance (P_f) et du niveau de fiabilité (R_l) sont approximés a 0 et 100, respectivement, en raison de l'ordre de grandeur des résultats présentés.

4.2. Analyse de fiabilité d'un problème d'interaction fluide-structure d'un solide

Dans le but de continuer à montrer l'applicabilité de la méthodologie d'analyse de fiabilité sur des problèmes d'interaction fluide-structure, cette application concerne une structure tridimensionnelle en dynamique.

De façon similaire à ce qui a été fait pour l'application bidimensionnelle précédente, sont présentées des analyses déterministes, stochastiques et de fiabilité d'un système formé

par un solide et un fluide incompressible. Une validation du modèle du système permet de réaliser l'analyse stochastique du système par la méthode de Muscolino en considèrent les paramètres E, ρ_S, ρ_f. L'analyse de fiabilité est basée sur une fonction d'état limite évaluée en utilisant un modèle éléments finis en considérant comme variables aléatoires les paramètres de l'analyse stochastique. Les résultats de cette application ont été publiés par Rojas et al. (2007 a).

Cette application est consacrée à l'analyse de la vibration transversale d'un solide en acier encastré (de dimensions $l \times b \times h$) submergée dans un fluide (de dimensions $L \times B \times H$). Initialement, le système couplé (solide-fluide) est au repos. La Figure 4.2 illustre le problème d'interaction fluide-structure entre un solide encastré et un fluide incompressible, ainsi que les conditions limites de pression.

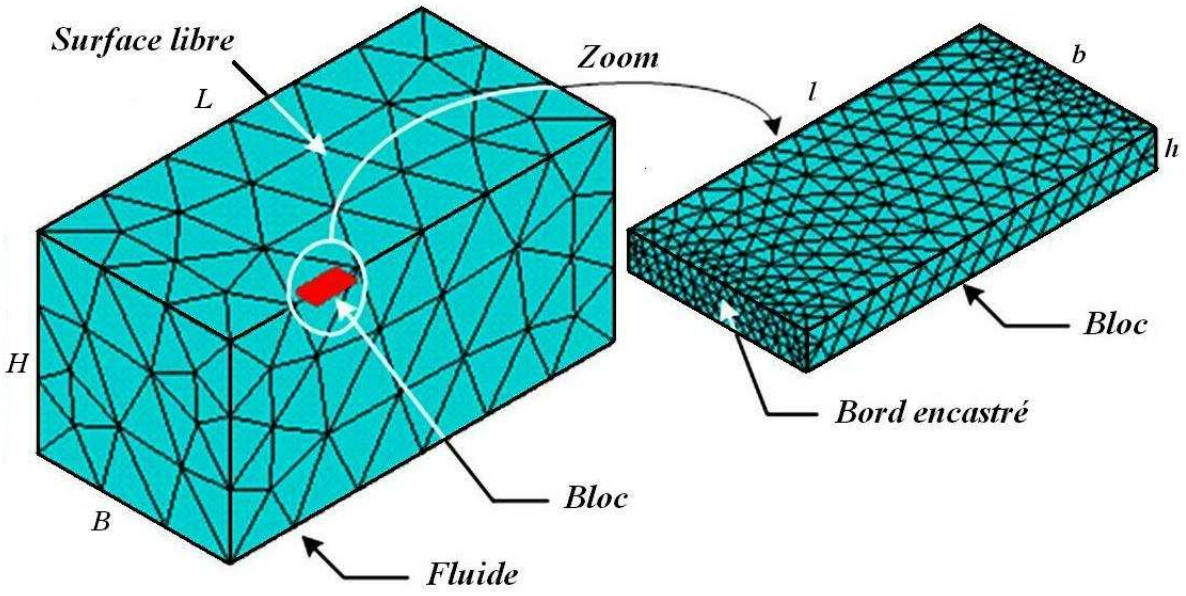


Figure 4.2 - Système solide-fluide

Les propriétés géométriques et matérielles du bloc sont $l = 2$ *m*, $b = 2$ *m*, $h = 0{,}2$ *m*, $E = 2{,}1 \times 10^{11}$ *Pa* et $\rho_s = 7860$ *kg/m*^{3}. Pour le fluide sont $L = 20$ *m*, $B = 10$ *m*, $H = 10$ *m* et $\rho_f = 1000$ *kg/m*^{3}.

Le modèle de plaque couplé au fluide élaboré en utilisant ANSYS® est illustré dans la Figure 4.2. L'élément FLUID30, contenant 8 noeuds et 4 degrés de liberté par nœud (déplacements sur les directions cartésiennes et une pression), est utilisé pour discrétiser le domaine fluide. D'autre part, l'élément SOLID45, composé par 8 noeuds et 3 degrés de la liberté par nœud (déplacements sur les directions cartésiennes), est employé pour

discrétiser le domaine solide. Ainsi, le modèle EF du système couplé possède 1809 noeuds et 10182 éléments.

4.2.1 Analyse modale déterministe

Le Tableau 4.5 montre les valeurs des dix premières fréquences propres de la plaque isolée et pour la plaque submergée dans le fluide. Encore une fois, on constate que le couplage fluide-structure conduit à la réduction des valeurs des fréquences propres de la plaque, en raison de l'effet de la masse fluide ajoutée.

Tableau 4.5 - Fréquences propres du système bloc fluide couplé

Mode	**Fréquences propres (*Hz*)**	
	Plaque	**Plaque submergé**
1	54,422	47,527
2	182,59	180,89
3	235,40	221,45
4	351,83	313,68
5	652,21	647,91
6	697,81	687,43
7	725,57	692,99
8	873,21	802,43
9	1293,4	1235,7
10	1333,9	1284,3

4.2.2. Analyse modale stochastique

Dans l'analyse modale stochastique sont considères les variables aléatoires suivantes : $E = 2{,}1\times10^{11}\left(1+0{,}025\delta_1\right)$ *Pa*, $\rho_f = 1000\left(1+0{,}04\delta_2\right)$ *kg/m³* et $\rho_s = 7800\left(1+0{,}03\delta_3\right)$ *kg/m³*, où δ_i représente les variables aléatoires à distributions normales telles que $E\left(\delta_i\right)=0$ (moyennes) et $E_t\left(\delta_i\right)=1$ (écarts types) pour $i=1,2,3$.

Le calcul stochastique sous ANSYS® est effectué en utilisant son module pour la conception probabiliste de systèmes (*Propability Design System* - PDS). Les algorithmes du PDS sont basés sur la méthode de Monte Carlo. Ainsi sont obtenus les moyennes et les écarts types des fréquences propres (en *Hz*) de la plaque submergée, pour 100 échantillons (voir Tableau 4.6).

Tableau 4.6 - Caractéristiques statistiques des fréquences propres du système plaque-fluide, obtenues par SMC

Mode	Moyenne	Ecart type
1	47,55	0,832
2	181,0	3,459
3	221,6	4,034
4	313,8	5,541
5	648,3	12,43
6	687,8	12,59
7	693,4	13,29
8	802,8	14,40
9	1236	22,81
10	1285	23,90

4.2.3. Analyse de fiabilité

Les paramètres statistiques des variables aléatoires du système plaque-fluide sont présentés dans le Tableau 4.7.

Tableau 4.7 - Paramètres statistiques des variables aléatoires de la plaque et du fluide

Paramètre	Distribution	Moyenne	Ecart type
E (*Pa*) $\times 10^{11}$	Normale	2,1	0,53
ρ_s (*kg/m*^{3})	Normale	7860	707
ρ_f (*kg/m*^{3})	Normale	1000	40

Similairement à la dernière application, la fonction d'état limite adoptée pour l'analyse de fiabilité (Equation 4.2) limite la valeur de la première fréquence propre de la plaque couplée au fluide à la valeur $f_{\lim} = 49{,}5$ *Hz*.

$$G(E, \rho_s, \rho_f) = f_1 - f_{\lim} \tag{4.2}$$

Les résultats de l'analyse de fiabilité par les méthodes FORM, SORM et HBRM (utilisant ACO) sont montrés dans le Tableau 4.8. On remarque que la HBRM fournit de meilleurs résultats que ceux obtenus pour les approximations classiques (FORM et SORM). Les bons résultats montrent, encore une fois, l'applicabilité de ces techniques heuristiques pour l'analyse de fiabilité des problèmes tridimensionnels d'interaction fluide-structure.

Tableau 4.8 - Résultats de l'analyse de fiabilité pour le système plaque-fluide

	Méthode		
	FORM	**SORM**	**HBRM**
E (*Pa*) $\times 10^{11}$	2,17	2,17	2,06
ρ_s (*kg/m*^{3})	7466,88	7466,88	7032,94
ρ_f (*kg/m*^{3})	955,81	955,81	998,77
β	2,37	3,19	3,59
P_f (%)	0,88	0,07	0,02
R_l (%)	99,12	99,93	99,98

4.3. Application industrielle d'analyse de fiabilité combinée avec réduction de modèle

Afin d'évaluer la méthodologie d'analyse de fiabilité à des applications industrielles, cette section est consacrée au comportement dynamique d'une hélice de navire. Comme pour les études précédentes, cette section comporte une analyse de validation déterministe, une analyse stochastique (par la méthode de Muscolino combinée avec synthèse modale) et une analyse de fiabilité.

La géométrie du modèle EF d'une hélice de navire à quatre pales (Figure 4.3 et 4.4) a été réalisée en utilisant les logiciels SOLIDWORKS® et ANSYS® (ce dernier utilisant des éléments tétraédriques SOLID45).

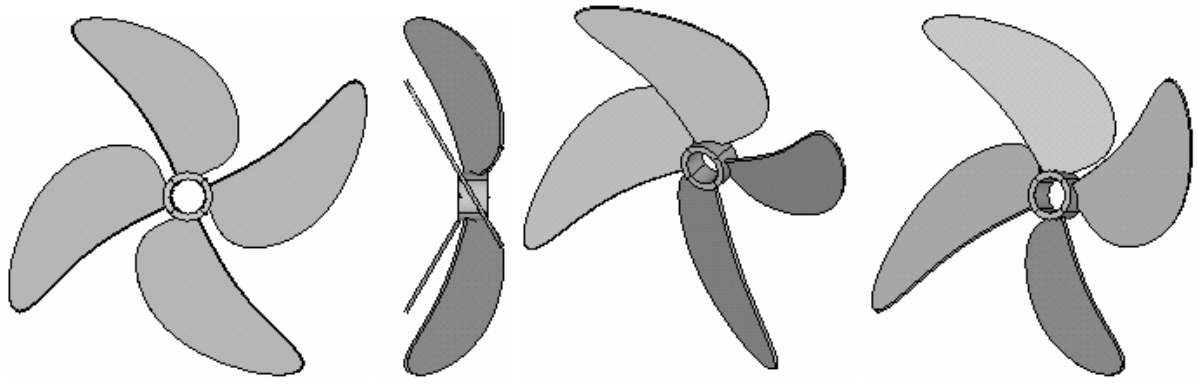


Figure 4.3 - Géométrie de l'hélice de navire

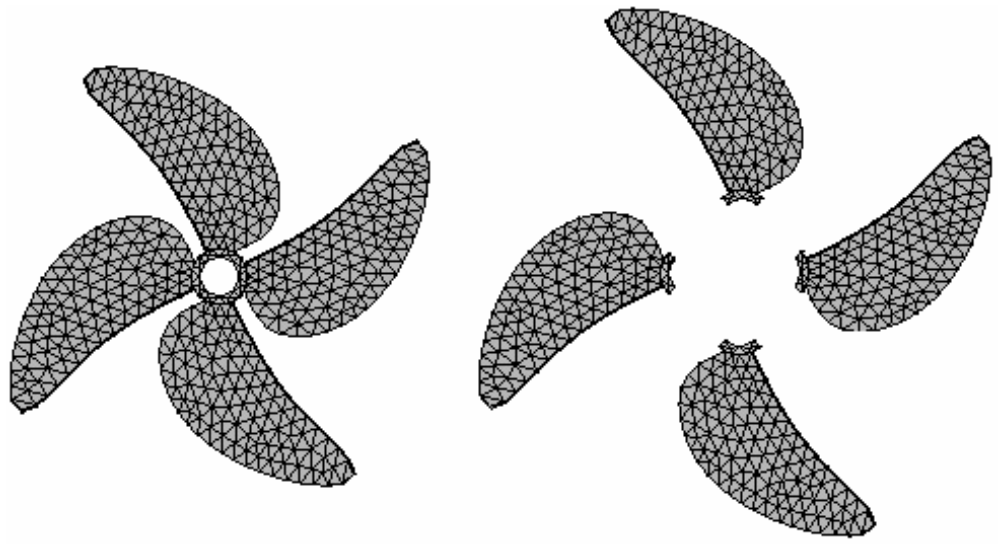


Figure 4.4 - Modèle EF de l'hélice et schéma de sous-structuration

Pour la synthèse modale (réduction des d.d.l.) l'hélice est divisée en quatre sous-structures. Le calcul déterministe du modèle complet est effectué à travers le programme ANSYS® et un code développé sous MATLAB®. Le calcul à travers ANSYS® est utilisé pour la comparaison avec des résultats de la synthèse modale obtenus par le code en MATLAB®. Ainsi, les analyses déterministe, stochastique et de fiabilité du modèle complet et réduit sont réalisées sous MATLAB® en prenant la liste des nœuds et d'éléments du modèle ANSYS®.

4.3.1. Analyse modale déterministe

Les résultats de l'analyse modale (valeurs des six premières fréquences propres, indiquées en *Hz*) des modèles complet et réduit de l'hélice de navire sont présentés dans le Tableau 4.9. Entre parenthèses sont indiquées les déviations des valeurs des fréquences obtenues à travers les codes MATLAB, par rapport à celles fournies par le code ANSYS®. Dans les calculs, les valeurs suivantes des propriétés du matériau ont été considérées : $E = 2{,}1x10^{11}$ *Pa*, $\rho = 7860$ *Kg/m³* et $\nu = 0{,}3$.

Tableau 4.9 - Fréquences propres de l'hélice de navire

Mode	Modèle complet		Modèle réduit
	Ansys	Matlab	Matlab
1	100	100 (0.0 %)	100 (0.0 %)
2	295	295 (0.0 %)	295 (0.0 %)
3	346	346 (0.0 %)	346 (0.0 %)
4	915	914 (0.1 %)	914 (0.1 %)
5	1225	1224 (0.1 %)	1224 (0.1 %)
6	1519	1518 (0.1 %)	1518 (0.1 %)
	2286 d.d.l.		96 d.d.l.

Il est important de remarquer que le calcul basé sur le modèle complet sous MATLAB® prend 6 *min* 30 *s* et pour le modèle réduit 62 *s*. Ceci permet d'évaluer la réduction significative du temps de calcul rendue possible par la réduction du modèle, sans la perte de la capacité d'estimation du modèle.

4.3.2. Analyse modale stochastique

Le module d'élasticité et la masse volumique de la structure sont considérés dans l'analyse modale stochastique. Ces paramètres sont modélisés statistiquement comme des variables aléatoires gaussiennes, dont leurs moyennes et leurs écarts types sont 0 et 1, respectivement, de façon à ce que leur variabilité est exprimée selon : $E = 2{,}1x10^{11}(1 + 0{,}01\delta_1)$ *Pa* et $\rho = 7860(1 + 0{,}01\delta_2)$ *Kg/m³*.

Les moyennes et écarts types des six premières fréquences propres (Tableau 4.10 et 4.11) sont déterminées par trois procédures différentes. Sont également indiqués dans le Tableau 4.13 les temps de calculs requis par chaque procédure et les différences relatives des résultas des procédures 2 et 3 par rapport aux résultats de la procédure 1 :

- Procédure 1 : analyse classique (référence) par la SMC en créant 100 échantillons ;
- Procédure 2 : appliquant la méthode de perturbation de Muscolino et le modèle complet ;
- Procédure 3 : associant la sous-structuration du modèle et la méthode de Muscolino.

Tableau 4.10 - Moyennes des fréquences propres de l'hélice de navire

Mode	Procédure 1	Procédure 2	Procédure 3
1	100	100 (0,0 %)	100 (0,0 %)
2	295	295 (0,0 %)	295 (0,0 %)
3	346	346 (0,0 %)	346 (0,0 %)
4	914	914 (0,0 %)	914 (0,0 %)
5	1224	1224 (0,0 %)	1224 (0,0 %)
6	1519	1518 (0,1 %)	1518 (0,1 %)
T	17 h 36 min	26 min 30 s	4 min

Tableau 4.11 - Ecarts types des fréquences propres de l'hélice de navire

Mode	Procédure 1	Procédure 2	Procédure 3
1	12	12 (0,0 %)	12 (0,0 %)
2	35	35 (0,0 %)	35 (0,0 %)
3	41	41 (0,0 %)	41 (0,0 %)
4	109	109 (0,0 %)	109 (0,0 %)
5	146	145 (0,7 %)	145 (0,7 %)
6	181	180 (0,5 %)	180 (0,5 %)

On constate que les trois procédures conduisent pratiquement aux mêmes résultats, mettant en évidence l'intérêt d'utiliser les stratégies de Muscolino et la sous-structuration en vue de la réduction du temps de calcul.

4.3.3. Analyse de fiabilité

Le Tableau 4.12 présente les paramètres statistiques des variables aléatoires traitées dans l'analyse de fiabilité.

Tableau 4.12 - Paramètres statistiques des variables aléatoires de l'hélice de navire

Paramètre	Distribution	Moyenne	Ecart type
E (*Pa*)×10^{11}	Normale	2,1	0,021
ρ (*Kg/m*^{3})	Normale	7860	78,60

Pour cette application aussi, la fonction d'état limite de l'analyse de fiabilité (Equation 4.3) limite la valeur de la première fréquence propre de l'hélice de navire à $f_{\lim} = 98$ *Hz*.

$$G(E, \rho_s, \rho_f) = f_1 - f_{\lim} \tag{4.3}$$

Les résultats des calculs pour l'estimation des indices de fiabilité et probabilité de défaillance utilisant les méthodes FORM, SORM et HBRM (via ACO) sont montrés aux Tableaux 4.13 et 4.14, pour deux stratégies de modélisation : modèle EF complet et modèle réduit par sous-structuration.

Tableau 4.13 - Résultats de l'analyse de fiabilité basée sur le modèle d'hélice complet

Paramètre	FORM	SORM	HBRM
E (*Pa*)×10^{11}	2,16	2,16	2,13
ρ (*Kg/m*^{3})	7580,5	7580,5	7571,7
T (*min*)	138,6	138,6	230,1
β	3,87	3,87	3,33
P_f (%)	5,34×10^{-3}	5,34×10^{-3}	0,043
R_l (%)	99,99	99,99	99,96

L'observation des résultats permet de vérifier que les estimations d'analyse de fiabilité sont très satisfaisantes pour l'application industrielle. On constate aussi, la considérable réduction du temps de calcul impliqué dans l'analyse de fiabilité par l'utilisation du modèle réduit.

Tableau 4.14 - Résultats de l'analyse de fiabilité pour le modèle d'hélice réduit

Paramètre	FORM	SORM	HBRM
E $(Pa)\times10^{11}$	2,16	2,16	2,13
ρ (Kg/m^3)	7580,5	7580,5	7571,7
T (min)	21,5	21,5	34,9
β	3,87	3,87	3,33
P_f (%)	$5{,}34\times10^{-3}$	$5{,}34\times10^{-3}$	0,043
R_l (%)	99,99	99,99	99,96

En ce qui concerne FORM et SORM, ces méthodes convergent vers des solutions très proches l'une de l'autre en utilisant le modèle complet et aussi le modèle réduit, ce qui montre que la réduction permet la diminution du temps de calcul sans modifier les estimations.

La performance de la HBRM est remarquable dans cette application en rappelant que cette méthode n'utilise pas des estimations initiales comme FORM et SORM le font. Ainsi, son temps de calcul plus élevé est compensé par cette caractéristique.

L'analyse de fiabilité combinée à la sous-structuration mène à un gain très important en temps-CPU.

4.4. Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté des applications numériques de la méthodologie d'analyse de fiabilité HBRM en applications aux problèmes d'interaction fluide-structure bi et tridimensionnelles en dynamique.

Les résultats des applications ont permis d'exhiber les avantages de la méthode HBRM dans le sens qu'elle n'utilise pas d'estimations initiales ni les gradients. Sa performance est satisfaisante pour toutes les applications étudiées. Ainsi, en dépit des temps de calcul généralement plus élevés que ceux requis par FORM et SORM, cette méthode est plus performante.

Une autre conclusion importante à mettre en évidence est liée aux nettes avantages qui résultent de l'utilisation de la méthode de Muscolino pour l'analyse de propagation d'incertitudes et de la combinaison des méthodes d'analyse de fiabilité structurale avec la méthode de réduction de modèle basée sur la synthèse modale. Ces deux stratégies

conduisent à de réduction très significative des temps de calculs impliqués sans aucune perte de la capacité prédictive des modèles.

Enfin nous appliquons cette méthodologie sur une application industrielle.

CHAPITRE V

METHODES DE MODELISATION SANS MAILLAGE EN MECANIQUE

Je vis dans l'approximatif et je m'en rapproche de plus en plus
(Julos Beaucarne, 1936)

Les méthodes sans maillage sont une alternative à la méthode des éléments finis. Ces méthodes offrent une grande diversité dans la construction des fonctions d'approximation. Dans ce chapitre on passe en revue la littérature concernant les différentes méthodes de modélisation sans maillage, qui constituent un sujet relativement récent de recherche. Dans le contexte de cette thèse, l'objectif n'est pas de faire le tour des méthodes sans maillage, mais de justifier le choix de la méthode EFG (*Element Free Galerkin*) et de donner sa description pour ensuite l'utiliser en couplage avec des méthodes d'analyse de fiabilité. En conséquence, ce chapitre décrit la théorie formelle de la méthode EFG. Cette description est nécessaire à la compréhension des développements réalisés au sein de la méthode EFG. En effet, ce chapitre condense les différentes méthodes sans maillage, décrit l'approximation des moindres carrés mobiles et explique l'utilisation de la forme faible des équations de l'élasticité pour déterminer les valeurs des inconnues nodales dans l'approximation sans maillage de Galerkin. Ensuite, deux aspects particuliers de la méthode sans maillage de Galerkin sont abordés: l'imposition des conditions limites et l'intégration sur le domaine d'intérêt. Finalement, un aperçu des algorithmes mis en œuvre de la méthode EFG est proposé et une application numérique bidimensionnelle illustre son application.

5.1. Etat de l'art des méthodes sans maillage

Une brève citation des diverses méthodes sans maillage, ainsi que les similarités et différences entre leurs formulations, sont présentées dans cette section.

La nécessité des outils mathématiques permettant la reconstruction exacte de fonctions à partir de l'information stockée en un ensemble de points dispersés aléatoirement a accéléré le développement de puissantes méthodes d'interpolation. Ces techniques d'interpolation liées aux méthodes traditionnelles de discrétisation ont cédé la place à une variété d'approximations permettant de résoudre des équations différentielles régissant différents types de problèmes dans le domaine de la mécanique. Elles sont dénommées méthodes de particules ou méthodes sans maillage, plus connues par la communauté scientifique sous les noms anglais *meshless methods* ou *meshfree methods*.

Un autre aspect a motivé le développement des méthodes sans maillage : c'est la limitation des méthodes de calcul conventionnel comme les éléments finis, les volumes finis et les différences finies, par exemple, dans la simulation de problèmes complexes, tels que le processus de mise en forme, propagation de fissures et des interactions fluide-structure. Dans ce type de problèmes l'existence des grandes déformations et discontinuités mobiles est vérifiée. Pour résoudre ces difficultés les méthodes basées sur maillages effectuent le re-maillage du modèle de la structure. Ce processus conduit normalement à la dégradation de l'exactitude et à l'augmentation de la complexité des algorithmes de modélisation et du coût de calcul.

L'expression « méthodes sans maillage » est utilisée pour désigner les méthodes numériques capables de résoudre des équations différentielles directement dans l'espace physique. Ces approximations sont capables d'utiliser les « informations non structurées » puisqu'elles obtiennent leur cadre de représentation spatial à travers des points (ou particules ou nœuds) régulièrement ou irrégulièrement distribuées.

Dans ce contexte, les méthodes sans maillage sont utilisées pour résoudre des problèmes de mécanique des solides avec plusieurs avantages. Ces méthodes se basent seulement sur un ensemble de points répartis dans le solide sans requérir un maillage de celui-ci comme le nécessite la méthode des éléments finis (MEF). L'approximation est construite aux alentours de chaque position du domaine global bien que certains caractères locaux soient maintenus en fonction du domaine d'influence de chaque point. Cette construction permet par exemple de résoudre les problèmes de propagation de fissures rencontrés en mécanique de la rupture car il n'est pas nécessaire de construire un maillage à chaque étape de la simulation de la propagation.

De nombreuses approches existent parmi les méthodes sans maillage. Lucy en 1977 (Lucy, 1977) a proposé la première méthode sans maillage (*Smoothed Particle Hydrodynamics,* SPH), qui était destinée à l'origine à la simulation des phénomènes astrophysiques comme les explosions d'étoiles par un ensemble de particules où il n'existe pas de conditions de contraintes. Cette méthode décrit l'approximation spatiale en utilisant

des fonctions de forme SPH et le concept d'estimation de type noyau inspiré de la fonction delta de Dirac. Comparée à d'autres méthodes, le nombre de publications la concernant reste modeste, bien qu'ensuite la recherche sur l'exactitude de cette méthode ait reçu plus d'attention (Monaghan, 1982 et 1988 ; Vila, 1999).

D'autre part, la technique d'approximation commune aux différentes méthodes sans maillage est basée sur la méthode des éléments diffus de Nayroles et al. (1992) qui utilise une fonction de base et un ensemble de points possédant chacun un certain poids pour former l'approximation du champ de déplacement. Ce travail a été le premier à utiliser dans la méthode précédente l'approximation au sein des moindres carrés mobiles (MCM) ou en anglais *Moving Least Squares* (Lancaster et Salkauskas, 1981). Puis Belytschko et d'autres auteurs (Belytschko et al., 1994) ont modifié et raffiné la méthode des éléments diffus en proposant la méthode sans maillage de Galerkin (EFG). Les méthodes des éléments diffus et de Galerkin sont reconnues comme des méthodes plus stables bien que plus coûteuses que la méthode SPH. Selon Fernandez (2001) l'interpolation MCM peut être considérée comme une amélioration de l'interpolation SPH.

La plupart des méthodes sans maillage peuvent être classifiées en deux familles, les méthodes dont l'interpolation est basée sur SPH et celles dont l'interpolation est basée sur MCM. Généralement, les interpolations SPH sont combinées avec des techniques d'intégration ou de collocation de points, tandis que les interpolations MCM sont combinées avec des formulations de Galerkin. Bien sûr, chaque méthode possède ses propres particularités, et c'est pour cela que leurs créateurs ont utilisé différents noms pour les identifier. Nous présentons ci-dessous une liste des principales méthodes et de leurs principales caractéristiques.

Méthodes basées sur approximations de moindres carrés mobiles :

- *Difuse Element Method* introduite par Nayroles et al. (1992).
- *Element Free Galerkin Method* créée par Belytschko et al. (1994).
- *Finite Point Method* de Oñade et al. (1996).
- *Free Mesh Method* de Yagata et Yamada (1996).
- *Meshless Local Petrov-Galerkin Method* de Atluri et Zhu (1998).
- *Boundary Node Method* de Zhu et al. (1998).
- *Node-by-node Meshless Method* de Nagashima (1999).
- *Meshless Finite Element Method* de Idelsohn et al. (2003).
- *Least-squares Meshfree Method* de Kwon et al. (2003).

Méthodes basées sur approximations noyau de particules :

- *Reproducing Kernel Partcicle Method* de Liu et al. (1995).
- *Particle-in-cell Method* de Sulsky et al. (1995).

Méthodes basées sur la définition de la partition de l'unité :

- *Partition of Unity Finite Element Method* que appartient à Melenk et al. (1995) et Babuska (1996).
- *H-p Clouds Method* de Duarte et Oden (1996).
- *Method of Finite Spheres* de De et Bathe (2000).
- *Finite Cloud Method* de Aluru et Li (2001).
- *Point-interpolation Method* de Liu et Gu (2001).

Perazzo (2003) résume chronologiquement les approximations, les méthodes de discrétisation et d'intégration utilisées par les différentes méthodes sans maillage.

Les similarités entre les différentes méthodes sans maillage sont nombreuses même si chacune d'entre elles utilise différentes approximations et propriétés. Par exemple, les approximations sans maillage qui utilisent MCM, la technique de noyau et la partition de l'unité sont semblables en considérant que pour cette méthode-ci il convient de réaliser un enrichissement des polynômes de base (Belytschko et al., 1996). Chaque méthode possède ses avantages et ses inconvénients, c'est pourquoi il existe différentes méthodes développées pour des applications spécifiques. Un travail de classification et de comparaison approfondi entre les méthodes sans maillage est nécessaire en effet, comme quelques auteurs le suggèrent (Fernandez, 2001), il existe des méthodes avec des noms différents mais de bases similaires voire identiques. Dans ce sens, des études plus approfondies sur ces techniques ont été effectuées par Duflot (2004), Cueto-Felgueroso (2005) et Fernandez (2001).

Parmi les méthodes sans maillage, la méthode EFG est l'une des plus connues et des plus robustes, comme le montrent les références bibliographiques. D'intéressants rapports de l'état de l'art sur la méthode EFG peuvent être trouvés dans les travaux de Duarte (1995), Belytschko et al. (1996) et Duflot (2004).

La méthode est dite sans maillage car elle ne requiert qu'un ensemble de points (ou *nœuds*) et une description de la frontière pour construire une solution approchée et n'utilise pas de maillage des éléments et des nœuds comme la méthode des éléments finis. L'opposition entre la méthode EFG et la MEF est schématisée sur la Figure 5.1.

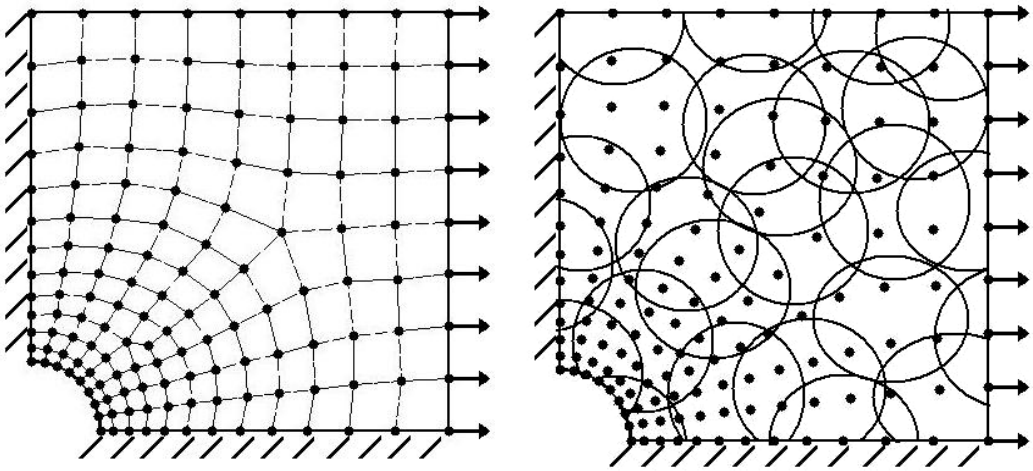


Figure 5.1 - Illustration de la méthode des éléments finis et de la méthode sans maillage

Dans la MEF, la valeur d'une fonction approchée en un point du domaine dépend de l'élément auquel ce point appartient, étant évalué par interpolation entre les valeurs de la fonction aux nœuds de l'élément. Dans la méthode EFG, chaque point a une fonction poids non nulle sur une partie du domaine, appelée *domaine d'influence*. La valeur de la fonction approchée en un point dépend des points qui se trouvent dans le domaine d'influence. Ces points interprètent le point par une technique appelée l'approximation par MCM à partir des valeurs de la fonction d'approximation des points.

5.2. Moindres carrés mobiles

La méthode MCM permet d'effectuer une approximation numérique d'une fonction qui fournit le meilleur ajustement à un ensemble de données associées à certains points.

Les paramètres essentiels des MCM sont un ensemble de fonctions de base, en ensemble de poids et une distribution de points. Les constantes inconnues de la fonction d'approximation sont déterminées à travers la minimisation de l'erreur entre cette fonction et la solution exacte. Si nécessaire, pour l'enrichissement de l'approximation, il faut introduire des monômes d'un ordre plus haut à la fonction de base, dans la plupart des cas avec l'addition d'un nouvel ensemble de points. Belytschko et Fleming (1998) présentent une forme d'enrichissement pour l'application aux problèmes de contact des structures.

Dans ce qui suit, un résumé de l'approximation classique discrète des moindres carrés est proposée pour permettre une meilleure compréhension des MCM, introduite originalement par Lancaster et Salkauskas (1981). Les MCM sont une variation très diffusée

des moindres carrés de Rivlin (1969). Fondamentalement, la différence entre ces méthodes est l'utilisation d'une fonction de poids au sein des MCM qui accompagne le point où l'on veut définir l'approximation.

On considère ici les problèmes unidimensionnels pour une certaine fonction inconnue u de la variable x, en connaissant quelques valeurs u_i aux points d'échantillonnage x_i, appelés nœuds, en numéro N on cherche une approximation de la fonction dénotée par $u^h(x)$, basée sur ces valeurs. L'approximation de la fonction $u^h(x)$ est choisie sous la forme d'un polynôme d'ordre v :

$$u^h(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^v \tag{5.1}$$

où $\mathbf{a} = [a_0 \quad a_1 \quad \ldots \quad a_m]^{\mathrm{T}}$ est le vecteur de paramètres à déterminer. Pour obtenir la courbe d'approximation des valeurs échantillonnées, on utilise la norme d'ordre deux de l'écart entre la solution approchée et les valeurs connues aux N points d'échantillonnage:

$$J = \sum_{i=1}^{N} \left[u^h(x_i) - u_i \right]^2 \tag{5.2}$$

et on obtient $a_j \quad j = 1,2,\ldots m$ en minimisant cette somme. Il est possible d'accorder un poids différent à chaque valeur de l'écart :

$$J = \sum_{i=1}^{N} w_i \left[u^h(x_i) - u_i \right]^2 \tag{5.3}$$

où w_i est le poids que l'on donne à la valeur u_i, qui doit être positif pour que la fonction d'approximation s'approche des valeurs connues.

La Figure 5.2 illustre le problème d'ajustement des courbes en utilisant MCM dans un champ unidimensionnel. L'extension de l'approximation aux cas bidimensionnel et tridimensionnel est immédiate.

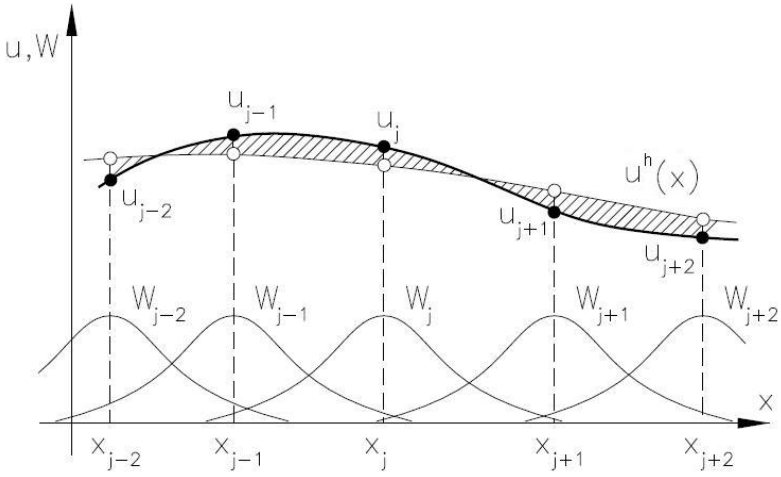


Figure 5.2 - Méthode des moindres carrés mobiles (Lancaster et Salkauskas 1981)

Sous une forme matricielle, l'approximation est donnée par $u^h(x) = \mathbf{p}^{\mathrm{T}}(x)\mathbf{a}$ avec les deux fonctions de base $\mathbf{p}^{\mathrm{T}}(x) = \begin{bmatrix} 1 & x & \ldots & x^v \end{bmatrix}$. La norme pondérée s'exprime :

$$J = \sum_{i=1}^{N} w_i \left[\mathbf{p}^{\mathrm{T}}(x_i)\mathbf{a} - u_i\right]^2 \tag{5.4}$$

Pour trouver les coefficients, il faut imposer la condition : $\partial J / \partial a = 0$, soit : $\sum_{i=1}^{N} 2 w_i \mathbf{p}(x_i)\left[\mathbf{p}^{\mathrm{T}}(x_i)\mathbf{a} - u_i\right] = \mathbf{0}$.

En résolvant le système linéaire suivant on trouve les coefficients (Lancaster et Salkauskas, 1981) :

$$\mathbf{A}\mathbf{a} = \mathbf{b} \tag{5.5}$$

La matrice carrée est donnée par :

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{N} w_i \mathbf{p}(x_i)\mathbf{p}^{\mathrm{T}}(x_i) \tag{5.6}$$

où $\mathbf{b} = \sum_{i=1}^{N} w_i \mathbf{p}(x_i) u_i$, donnée en fonction des valeurs connues u_i.

Pour les problèmes bidimensionnels, il est possible de trouver la solution d'approximation par des fonctions linéaires $\mathbf{p}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x}) = [1 \quad x \quad y]$ ou par des fonctions quadratiques en utilisant la base à six fonctions $\mathbf{p}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x}) = [1 \quad x \quad y \quad x^2 \quad y^2 \quad xy]$, donc six coefficients sont à déterminer. En généralisant, on obtient $\mathbf{p}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x}) = [p_1(\mathbf{x}), p_2(\mathbf{x}),..., p_m(\mathbf{x})]$, où $\mathbf{x}$ désigne le vecteur des variables indépendantes.

Selon Duflot (2004), pour que la matrice $\mathbf{A}$ soit inversible, il faut que les points soient en nombre suffisant, c'est-à-dire $N > m$ où m est la taille du vecteur des fonctions de base $\mathbf{p}$, en d'autres termes, il faut au moins m éléments au vecteur parmi les N matrices des produits dyadiques $\mathbf{p}(x_i)\mathbf{p}^{\mathrm{T}}(x_i)$ linéairement indépendantes.

L'idée principale de l'approximation MCM est de reconstruire la valeur de $u(\mathbf{x})$ dans un point $\mathbf{x}$ à travers un ajustement par moindres carrés pondérés autour de $\mathbf{x}$. Dans ce sens, l'approximation des MCM cherche à construire une approximation locale au voisinage du point $\tilde{\mathbf{x}}$, sous la forme :

$$u_{\tilde{x}}^{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x})\mathbf{a}(\tilde{\mathbf{x}}) \tag{5.7}$$

où les coefficients $\mathbf{a}$ dépendent du point $\tilde{\mathbf{x}}$ autour duquel l'approximation est construite. La norme de l'écart entre l'approximation autour de $\tilde{\mathbf{x}}$ et les valeurs connues s'écrit comme pour l'approximation classique par moindres carrés, mais dépend du point $\tilde{\mathbf{x}}$:

$$J(\tilde{\mathbf{x}}) = \sum_{i=1}^{n} w_i(\tilde{\mathbf{x}})\left[\mathbf{p}^{\mathrm{T}}(\tilde{x}_i)\mathbf{a}(\tilde{\mathbf{x}}) - u_i\right]^2 \tag{5.8}$$

Dans cette norme, chaque point contribue à l'approximation avec un poids w_i pondéré selon la distance qui le sépare du point $\tilde{x}_i$, pour cela on écrit $w_i(\tilde{\mathbf{x}})$. Chaque fonction poids w_i prend des valeurs positives, comme dans le cas de l'approximation des moindres carrés classique, et non nulles uniquement sur un sub-domaine autour du point x_i correspondant. Ainsi, la somme dans la dernière équation se limite à un certain nombre de termes égaux à n, où n est le nombre de points au voisinage de $\mathbf{x}$ (appelé domaine d'influence) pour chaque w_i. Il est évident que $n < N$ (N est le nombre de points). La minimisation de J par rapport aux coefficients $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ donne la valeur de ces coefficients.

On continue en construisant une approximation globale autour du point local (Lancaster et Salkauskas, 1981) :

$$u^h(\mathbf{x}) = u^h_{\tilde{x}}(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x})\mathbf{a}(\mathbf{x}) \tag{5.9}$$

où le vecteur de coefficients inconnus est $\mathbf{a}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x}) = [a_1(\mathbf{x}), a_2(\mathbf{x}), ..., a_m(\mathbf{x})]$. La minimisation de l'erreur permet de trouver les coefficients de la forme suivante :

$$\mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} w_i(\mathbf{x})\mathbf{p}(\mathbf{x}_i)u_i \tag{5.10}$$

où :

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} w_i(\mathbf{x})\mathbf{p}(\mathbf{x}_i)\mathbf{p}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x}_i) \tag{5.11}$$

En explicitant $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ en (5.10) et en utilisant l'Équation (5.9), on arrive à la forme de l'approximation des MCM :

$$u^h(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x})\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\left[\sum_{i=1}^{n} w_i(\mathbf{x})\mathbf{p}(\mathbf{x}_i)u_i\right] \tag{5.12}$$

que l'on peut aussi écrire :

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N} \phi_i(\mathbf{x})u_i \tag{5.13}$$

où la fonction de forme associée au point i est donnée par:

$$\phi_i(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x})\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{p}(\mathbf{x}_i)w_i(\mathbf{x}) \tag{5.14}$$

Pour obtenir une évaluation efficace des fonctions de forme et de leurs dérivées, l'expression de la fonction de forme ultime peut être écrite:

$$\phi_i(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x})\mathbf{p}(\mathbf{x}_i)w_i(\mathbf{x}) \tag{5.15}$$

avec :

$$\mathbf{c}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{p}(\mathbf{x}) \tag{5.16}$$

Cette équation met en évidence le fait que, en un point donné, dans un premier temps il est préférable de calculer le vecteur $\mathbf{c}(\mathbf{x})$ puisqu'il est le même pour tous les points, ce qui nécessite une seule inversion de la matrice $\mathbf{A}(\mathbf{x})$. Le vecteur $\mathbf{c}(\mathbf{x})$ est déterminé à partir d'une décomposition LU de $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ et après par une substitution arrière.

A partir de l'expression (5.14) la fonction de forme donnée par Belytschko et al. (1994) est :

$$\phi_i(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{m} p_j(\mathbf{x})\left[\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x})\right]_{ji} = \mathbf{p}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}_i \tag{5.17}$$

où :

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \left[w_1(\mathbf{x})p(\mathbf{x}_1) \quad w_2(\mathbf{x})p(\mathbf{x}_2) \quad \ldots \quad w_N(\mathbf{x})p(\mathbf{x}_N)\right] \tag{5.18}$$

Une autre façon d'écrire l'Équation (5.10) est :

$$\mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u} \quad \text{ou} \quad \mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u} \tag{5.19}$$

où $\mathbf{u}$ est le vecteur des valeurs connues.

En utilisant la dernière expression dans l'Équation (5.9), il est possible d'écrire $u^h(\mathbf{x}) = \phi_i(\mathbf{x})\mathbf{u}$ [forme matricielle de (5.13)] avec $\mathbf{u}^{\mathrm{T}} = \left[u_0 \quad u_1 \quad u_2 \quad \ldots \quad u_n\right]$.

Quand l'approximation MCM est utilisée pour résoudre des équations aux dérivées partielles par une méthode sans maillage, la dérivation de l'Équation (5.16) montre qu'il est nécessaire de factoriser une seule fois la matrice $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ et de faire une substitution arrière (généralement utilisée dans la factorisation LU) une fois pour $\mathbf{c}(\mathbf{x})$ et une fois pour chacune des dérivées $\mathbf{c}_{,k}(\mathbf{x})$ avec $k = 1,\ldots,n_{\dim}$ (dimension de l'espace). En effet, les dérivées sont données par:

$$\phi_{i,k}(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}{}_{,k}(\mathbf{x})\mathbf{p}(\mathbf{x}_i)w_i(\mathbf{x}) + \mathbf{c}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x})\mathbf{p}(\mathbf{x}_i)w_{i,k}(\mathbf{x}) \tag{5.20}$$

où $(\ )_{,k} = \partial(\ )/\partial x_k$, et :

$$\begin{aligned}\mathbf{c}_{,k}(\mathbf{x}) &= \left(\mathbf{A}^{-1}\right)_{,k}(\mathbf{x})\mathbf{p}(\mathbf{x}) + \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{p}_{,k}(\mathbf{x}) \\ &= -\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{A}_{,k}(\mathbf{x})\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{p}(\mathbf{x}) + \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{p}_{,k}(\mathbf{x}) \\ &= \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\left[-\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{A}_{,k}(\mathbf{x})\mathbf{p}(\mathbf{x}) + \mathbf{p}_{,k}(\mathbf{x})\right] = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\left[\mathbf{p}_{,k}(\mathbf{x}) - \mathbf{A}_{,k}(\mathbf{x})\mathbf{c}(\mathbf{x})\right]\end{aligned} \tag{5.21}$$

et :

$$\mathbf{A}_{,k}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} w_{i,k}(\mathbf{x})\mathbf{p}(\mathbf{x}_i)\mathbf{p}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x}_i) \tag{5.22}$$

Une autre forme à partir de l'Équation (5.20) est :

$$\phi_{i,k}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{m}\left\{p_{j,k}\left(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\right)_{ji} + p_j\left(\mathbf{A}_{,k}^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}_{,k}\right)_{ji}\right\} \tag{5.23}$$

où $\mathbf{A}_{,k}^{-1} = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}_{,k}\mathbf{A}^{-1}$ et $\mathbf{B}_{,k} = \mathbf{p}(\mathbf{x}_i)w_{,k}$.

5.2.1. Propriétés des fonctions de forme MCM

La principale propriété des fonctions de forme des MCM, est qu'elles ne dépendent pas de la distribution de points, c'est-à-dire d'aucun maillage. Pour former les fonctions de forme sont nécessaires : un vecteur de fonctions de base $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ et un ensemble de points. À chacun de ces points correspond une fonction poids $w_i(\mathbf{x})$. Les fonctions de forme sont construites en trois phases :

1) la construction de la matrice $\mathbf{A}$ [Équation (5.11)], en additionnant la contribution de chaque point (ou nœud) au point considéré ;
2) l'inversion de $\mathbf{A}$;
3) le calcul des fonctions de forme [Équation (5.15)].

Les autres propriétés considérables de fonctions de forme sont les suivantes :

- Localité. La fonction de forme $\phi_i(\mathbf{x})$ est nulle en dehors du support de la fonction de poids $w_i(\mathbf{x})$. Cela s'observe sur l'Équation (5.15) par la présence du facteur $w_i(\mathbf{x})$. On note que $\phi_i(\mathbf{x})$ peut être négatif alors que $w_i(\mathbf{x})$ est toujours positif ;
- Condition d'existence. La fonction $\phi_i(\mathbf{x})$ est définie sur le domaine Ω de l'approximation si et seulement si $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ est inversible au point $\mathbf{x}$ du domaine. Une condition nécessaire est que $n > m$ en tout point $\mathbf{x}$. Par exemple, pour une base linéaire de deux dimensions, il faut et il suffit que chaque point soit couvert par au moins trois supports de points non-alignés. En d'autres termes, il faut que le domaine d'influence soit suffisamment grand pour que chaque point soit suffisamment couvert. Une mesure du conditionnement de la matrice $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ est la relation entre le maximum et minimum valeur propre de la matrice $\kappa = \lambda_{\max} / \lambda_{\min}$. Si $\kappa \to \infty$ alors la matrice $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ est singulière (Rabckuz et Wall, 2006), hautes valeurs de κ indiquent un conditionnement numérique déficient de $\mathbf{A}(\mathbf{x})$;
- Absence d'interpolation. Les fonctions de forme de MCM sont différents de l'unité aux points auxquels elles sont associées et ne sont pas nécessairement nulles aux autres points: $\phi_i(\mathbf{x}_j) \neq \delta_{ij}$. Cela constitue la différence avec des fonctions de forme de la MEF. Pour cette raison, l'approximation MCM est effectivement une approximation et non une interpolation: $u^h(\mathbf{x}_i) \neq u_i$. C'est-à-dire que l'approximation ne satisfait pas aux conditions du delta de Kronecker : $\phi_j(\mathbf{x}_i) \neq \delta_{ij}$, de telle façon que les conditions de Dirichlet ou essentielles ne peuvent être imposées directement. Ainsi, celles-ci sont introduites dans la forme faible du problème comme il le sera montré dans la section 5.4 de ce chapitre ;
- Consistance. Les fonctions de forme MCM peuvent reproduire exactement toute fonction appartenant au noyau de $\mathbf{p}(\mathbf{x})$. Si par exemple, les points (x_i, u_i) sont alignés et une base linéaire $[1 \quad x]$ est utilisée, la fonction approchée u^h est la droite passant par ces points, quelles que soient les fonctions poids choisies ;
- Continuité. Les fonctions de forme ont le même degré de continuité que les fonctions de base et les fonctions poids.

Les démonstrations de la condition d'existence et de la propriété de continuité se trouvent dans Duarte et Oden (1996) et dans Duflot (2004). Une liste des outils pour former différentes fonctions de forme pour la méthode EFG est proposée par Krysl et Belytscho (2001).

5.2.2. Fonctions de base

Théoriquement toute fonction peut travailler dans le vecteur des fonctions de base, mais comme la plupart des travaux de la littérature le montre (Belytschko et al. 1994), le choix est limité à un ensemble de monômes jusqu'à un certain ordre. Bien sûr, en cas de connaissance à priori de l'aspect des fonctions à approcher, une fonction qui prend en compte cet aspect peut être ajoutée à la base des monômes.

Les fonctions de base doivent suivre les propriétés suivantes (Belytschko et al. 1994):

- $p_1(\mathbf{x}) = 1$;
- $p_j(\mathbf{x}) \in C^l(\Omega)$, $j = 1,2,...,m$, où $C^l(\Omega)$ est l'ensemble de fonctions dérivées d'ordre j qui sont continues sur Ω ;
- $p_j(\mathbf{x})$ $j = 1,2,...,m$ doivent être linéairement indépendantes.

Le Tableau 5.1 montre les fonctions de base à une, deux et trois dimensions.

Tableau 5.1 - Fonctions de base à une, deux et trois dimensions

Fonctions	**1D**	**2D**	**3D**
Constante	$[1]$	$[1]$	$[1]$
Linéaire	$[1 \quad x]$	$[1 \quad x \quad y]$	$[1 \quad x \quad y \quad z]$
Quadratique	$[1 \quad x \quad x^2]$	$[1 \quad x \quad y \quad x^2 \quad y^2 \quad xy]$	$[1 \quad x \quad y \quad z \quad x^2 \quad y^2 \quad z^2 \quad xy \quad xz \quad yz]$

Comme les fonctions de base du Tableau 5.1 appartiennent à $C^\infty(\Omega)$, les fonctions de forme MCM ont le même degré de continuité que les fonctions poids. Belytschko et al. (1994) conseillent d'utiliser une base linéaire puisque :

- une base constante est plus économique en temps de calcul mais n'est pas capable de représenter exactement un champ linéaire, ce qui constitue une exigence pour le champ de déplacement dans la méthode de Galerkin;
- une base quadratique oblige que chaque point du domaine soit couvert par un nombre considérable de supports et une matrice $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ à inverser en chaque point de taille plus importante que pour une base linéaire. Cette économie de temps de calcul conduit au coût/performance équilibrée.

Pour ces raisons on utilise dans ce travail une base linéaire.

5.2.3. Fonctions poids

Les fonctions poids sont des fonctions que doivent attribuer un espace d'influence (Ω_i) à chaque point auquel elle est associée. Le domaine d'influence doit être non nul et évidement inclus dans le domaine Ω. Pour une dimension, on définit r comme la distance normalisée entre un point i et un point x quelconque:

$$r = \left| \frac{x - x_i}{d_i} \right| \tag{5.24}$$

où d_i est la taille du domaine d'influence du point i. La littérature reporte l'utilisation de fonctions Gaussiennes ou splines, parmi lesquelles certaines fonctions pour $w_i(x)$ sont fournies (Duflot, 2004) :

$$f_1(r) = \begin{cases} e^{-\left(\frac{s}{\alpha}\right)^2} & \text{si} \quad |r| \le 1 \\ 0 & \text{si} \quad |r| > 1 \end{cases} \qquad \text{gaussienne tronquée} \tag{5.25}$$

$$f_2(r) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\left(\frac{r}{\alpha}\right)^2} - e^{-\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2}}{1 - e^{-\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2}} & \text{si} \quad |r| \le 1 \\ 0 & \text{si} \quad |r| > 1 \end{cases} \qquad \text{gaussienne modifiée} \tag{5.26}$$

$$f_3(r) = \begin{cases} \dfrac{2}{3} - 4r^2 + 8r^3 & \text{si} \quad |r| \le \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{4}{3} - 4r + 4r^2 - \dfrac{4}{3}r^3 & \text{si} \quad \dfrac{1}{2} < |r| \le 1 \\ 0 & \text{si} \quad |r| > 1 \end{cases} \qquad \text{spline d'ordre 3} \tag{5.27}$$

$$f_4(r) = \begin{cases} 1 - 6r^2 + 8r^3 - 3r^4 & \text{si} \quad |r| \le 1 \\ 0 & \text{si} \quad |r| > 1 \end{cases} \qquad \text{spline d'ordre 4} \tag{5.28}$$

Dans (Duflot, 2004 ; Belytschko et al. 1994), ils confirment que les résultats varient peu par rapport à la fonction poids choisie.

Pour le cas de deux dimensions, la fonction poids suivante s'applique à un domaine circulaire (cas où r est le rayon du domaine d'influence):

$$w_i(\mathbf{x}) = f_a\left(\frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_i\|}{d_i}\right) \tag{5.29}$$

Pour un domaine rectangulaire à deux dimensions:

$$w_i(\mathbf{x}) = f_a\left(\frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_i\|}{d_i^x}\right) f_a\left(\frac{\|\mathbf{y}-\mathbf{y}_i\|}{d_i^y}\right) \tag{5.30}$$

et pour un domaine cubique à trois dimensions:

$$w_i(\mathbf{x}) = f_a\left(\frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_i\|}{d_i^x}\right) f_a\left(\frac{\|\mathbf{y}-\mathbf{y}_i\|}{d_i^y}\right) f_a\left(\frac{\|\mathbf{z}-\mathbf{z}_i\|}{d_i^z}\right) \tag{5.31}$$

Les simulations numériques du prochain chapitre montrent des applications à une et deux dimensions par un domaine circulaire où la fonction poids utilisée est une spline d'ordre 3, comment recommandée par Dolbow et Belytschko (1999 a), Belytschko et al. (1996). Pour les applications en deux dimensions, les paramètres de l'Équation (5.24) deviennent :

$$r_x = \frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_i\|}{d_{mx}}, \qquad r_y = \frac{\|\mathbf{y}-\mathbf{y}_i\|}{d_{my}} \tag{5.32}$$

où $d_{mx} = d_{\max} c_{xi}$ et $d_{my} = d_{\max} c_{yi}$. La constante $d_{\max}$ tient généralement des valeurs entre 2.0 et 4.0 pour des analyses statiques, c_{xi} et c_{yi} sont déterminées sur un point particulier en cherchant les points voisins de façon à éviter la singularité de $\mathbf{A}(\mathbf{x})$. Si les points sont espacés uniformément, les valeurs de c_{xi} et c_{yi} correspondent à la distance entre les points par rapport aux directions x et y, respectivement.

La Figure 5.3 illustre un ensemble de points du cas bidimensionnel pour les domaines d'influence circulaires et rectangulaires, les paramètres de l'approximation pour MCM étant aussi illustrés dans la Figure 5.3. Dans les cas tridimensionnels les domaines d'influence admettent la forme de sphères ou de cubes

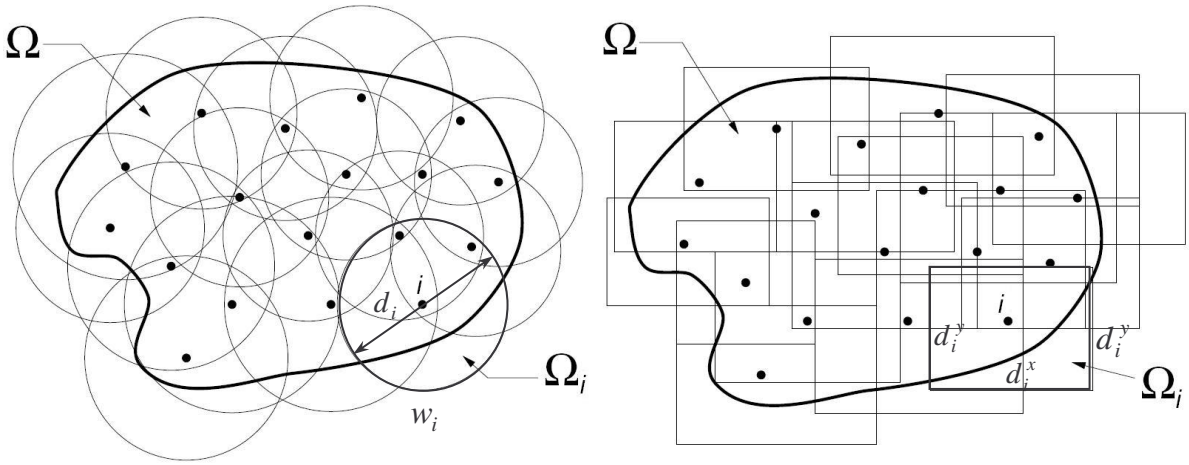


Figure 5.3 - Représentation des points et leurs paramètres pour MCM

En résumé, lorsqu'on utilise la méthode de MCM il est possible de reconstruire une fonction d'approximation et ses dérivées successives avec exactitude en utilisant des fonctions de forme. Ce fait permet l'incorporation de cette technique à n'importe quelle approximation numérique de simulation spatiale. Finalement, les MCM peuvent travailler avec des distributions irrégulières de points et être indépendants de l'existence d'une connectivité interne, même si les points sont à la frontière.

On peut trouver une large discussion sur l'approximation de MCM dans les travaux de Belytschko et al. (1994) et Mendoça et al. (2000).

5.3. Méthode sans maillage de Galerkin

Dans la méthode EFG, la discrétisation spatiale de Belytschko et al. (1994) est obtenue à travers de MCM couplée avec la formulation faible de Galerkin. La formulation de la méthode EFG est basée sur le choix, comme fonctions-test, des fonctions de forme utilisées dans l'approximation MCM.

Le principe de base de la méthode EFG est proche de celui de la MEF, cependant, pour l'imposition des conditions limites essentielles il faut la mise en œuvre d'un processus additionnel. Pour cette raison, on consacre le début de cette section à la présentation des équations valables aussi bien pour la MEF que pour la méthode EFG. Ensuite, sont décrits les principes de la méthode EFG et les principales différences entre les deux méthodes.

Pour obtenir la forme faible des équations de l'élasticité on prend en compte un corps élastique linéaire qui occupe un domaine Ω avec une frontière Γ, soumis aux forces

volumiques $\bar{b}$ dans Ω, aux tractions de surface $\bar{t}$ sur Γ_t. Le déplacement $\bar{u}$ est imposé sur Γ_u ($\Gamma_t \cap \Gamma_u = \phi$ et $\Gamma_t \cup \Gamma_u = \Gamma$). On considère aussi une fonction de déplacement test $\delta\mathbf{u}$ continûment différentiable sur Ω et nulle sur Γ_u. En multipliant l'équation d'équilibre en volume ($\nabla^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma} + \bar{b} = 0$) par la fonction de test et en intégrant ce produit sur Ω, en multipliant l'équation d'équilibre en surface ($\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n} = \bar{t}$) par la fonction test et en intégrant sur Γ_t puis soustrayant ces deux équations, on obtient (Duflot, 2004):

$$-\int_{\Omega} \delta\mathbf{u}\left(\nabla^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma} + \bar{b}\right)d\Omega + \int_{\Gamma_t} \delta\mathbf{u}\left(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n} + \bar{t}\right)d\Gamma = 0 \tag{5.33}$$

Les variables pour la formulation de la forme faible de l'élasticité ont été définies au Chapitre IV.

Après l'intégration par parties du premier terme, l'utilisation du théorème d'intégration de Gauss et la prise en compte de la symétrie du tenseur σ, on obtient la forme suivante:

$$\int_{\Omega} \nabla_s \delta\mathbf{u}^{\mathrm{T}} : \sigma d\Omega - \int_{\Omega} \delta\mathbf{u}\bar{b}\, d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta\mathbf{u}\bar{t}\, d\Gamma = 0 \tag{5.34}$$

Les champs $\mathbf{u}$, ε et σ satisfont les relations de compatibilité et les relations constitutives. Cette équation est vérifiée par construction quel que soit le déplacement du test $\delta\mathbf{u}$ si l'équilibre est atteint. La réciproque de cette affirmation est vraie : si cette équation est vérifiée quel que soit le déplacement de test $\delta\mathbf{u}$, les équations d'équilibre sont vérifiées.

La définition rigoureuse de l'espace fonctionnel suivant, appelé espace de Sobolev de premier ordre est :

$$H^1(\Omega) = \left\{ f \in L^2(\Omega) \middle| f_{,i} \in L^2(\Omega), i = 1,2,3 \right\} \tag{5.35}$$

où $L^2(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions de carré intégrable:

$$L^2(\Omega) = \left\{ f \middle| \int_{\Omega} f(x)^2\, d\Omega < +\infty \right\} \tag{5.36}$$

L'espace désigné $H^0(\Omega)$ est l'espace de Sobolev d'ordre zéro. La résolution de la forme faible des équations de l'élasticité s'énonce alors de la façon suivante (Duflot, 2004) :

« Déterminer les déplacements $\mathbf{u} \in H^1(\Omega)$, les déformations $\boldsymbol{\varepsilon} \in H^0(\Omega)$ et les contraintes $\boldsymbol{\sigma} \in H^0(\Omega)$ qui satisfont les équations $\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla_s \mathbf{u}^{\mathrm{T}}$ et $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} : \boldsymbol{\varepsilon}$ et qui sont tels que (5.34) est vérifiée pour tout $\delta\mathbf{u} \in H^1(\Omega)$ avec $\delta\mathbf{u} = 0$ sur Γ_u ».

Comme la condition de compatibilité sur la frontière ($\mathbf{u} = \overline{\mathbf{u}}$) doit être examinée par le champ de déplacement, on la désigne condition aux limites essentielles.

Les méthodes numériques recherchent la solution $\mathbf{u}$ dans un sous-espace de $H^1(\Omega)$ de dimension finie et l'équation variationnelle n'est vérifiée que pour les déplacements de test $\delta\mathbf{u}$, qui appartiennent à un sous-espace $H^1(\Omega)$. C'est-à-dire, les champs $\mathbf{u}$ et $\delta\mathbf{u}$ peuvent être approchés par une combinaison linéaire de certaines fonctions de $H^1(\Omega)$. Si l'ensemble de fonctions $\mathbf{u}$ et $\delta\mathbf{u}$ sont identiques, la méthode numérique est dénommée méthode EFG. Dans ce cas :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N} \phi_i(\mathbf{x}) \mathbf{q}_i \tag{5.37}$$

$$\delta\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N} \phi_i(\mathbf{x}) \delta\mathbf{d}_i \tag{5.38}$$

En introduisant ces approximations du déplacement réel $\mathbf{u}$ et du déplacement de test $\delta\mathbf{u}$ dans le principe variationnel, on écrit :

$$\int_{\Omega} (\nabla \delta\mathbf{u})^{\mathrm{T}} \{\sigma\} d\Omega - \int_{\Omega} \delta\mathbf{u}^{\mathrm{T}} \overline{b}\, d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta\mathbf{u}^{\mathrm{T}} \overline{t}\, d\Gamma = 0 \tag{5.39}$$

et avec la prise en compte de la loi de comportement élastique :

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \int_{\Omega} (\nabla \phi_i \mathbf{d}_i)^{\mathrm{T}} [\mathbf{D}] (\nabla \phi_j \mathbf{q}_j) d\Omega - \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} \phi_i \mathbf{d}_i{}^{\mathrm{T}} \overline{b}\, d\Omega - \sum_{i=1}^{N} \int_{\Gamma_t} \phi_i \mathbf{d}_i{}^{\mathrm{T}} \overline{t}\, d\Gamma = 0 \tag{5.40}$$

où la matrice $\mathbf{D}$ est définie au Chapitre IV en fonction du type d'analyse à effectuer, c'est-à-dire, une analyse du comportement des matériaux isotropes ou orthotropes.

Pour les éléments finis, on retire les degrés de liberté des intégrales, donc les équations deviennent :

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\mathbf{d}_i{}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}_{ij}\mathbf{q}_j-\sum_{i=1}^{N}\mathbf{d}_i{}^{\mathrm{T}}\mathbf{g}_i=0 \tag{5.41}$$

avec les éléments de la matrice de raideur suivants:

$$\mathbf{K}_{ij}=\int_{\Omega}\mathbf{B}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\mathbf{B}_j\,d\Omega\,, \tag{5.42}$$

et les éléments du vecteur des charges donné par :

$$\mathbf{g}_i=\int_{\Omega}\phi_i\bar{b}\,d\Omega+\int_{\Gamma_t}\phi_i\bar{t}\,d\Omega \tag{5.43}$$

Dans les équations ci-dessus, $\mathbf{B}_i=\nabla\phi_i$ est la matrice des opérateurs différentiels, ∇ détermine son tour le champ de déformations à partir des déplacements. À deux dimensions $\mathbf{B}_i$ prend la forme suivante :

$$\mathbf{B}_i=\begin{bmatrix}\phi_{i,x} & 0\\ 0 & \phi_{i,y}\\ \phi_{i,y} & \phi_{i,x}\end{bmatrix} \tag{5.44}$$

et à trois dimensions $\mathbf{B}_i$ est définie par :

$$\mathbf{B}_i=\begin{bmatrix}\phi_{i,x} & 0 & 0\\ 0 & \phi_{i,y} & 0\\ 0 & 0 & \phi_{i,y}\\ \phi_{i,y} & \phi_{i,x} & 0\\ \phi_{i,z} & 0 & \phi_{i,x}\\ 0 & \phi_{i,z} & \phi_{i,y}\end{bmatrix} \tag{5.45}$$

Dans la MEF, $\mathbf{u}$ représente les degrés de liberté du déplacement, $\mathbf{d}_i$ les degrés de liberté du déplacement de test qui correspond à un point de la frontière Γ_u. En sachant que

les fonctions de forme sont interpolantes, alors le déplacement de test $\delta\mathbf{u}$ est nul sur l'ensemble de Γ_u, les autres degrés de liberté $\mathbf{d}_i$ sont libres et il faut que le principe variationnel discrétisé (5.40) soit vérifié, donc :

$$\sum_{j=1}^{n_l} \mathbf{K}_{ij}\mathbf{q}_j = \mathbf{g}_i - \sum_{j=1}^{n_f} \mathbf{K}_{ij}\overline{\mathbf{u}}_j \tag{5.46}$$

où l'indice i ne prend que les valeurs des degrés de liberté libres, n_l et n_f est le nombre des degrés de liberté, respectivement, libres et fixes,. L'Équation (5.46) illustre la division des degrés de liberté du déplacement $\mathbf{q}_j$ (inconnues) et $\overline{\mathbf{u}}_j$ (fixés). La propriété d'interpolation des fonctions de forme des éléments finis est valide pour la fixation des degrés de liberté à la valeur du déplacement imposé, qui conduise à $\mathbf{u} = \overline{\mathbf{u}}_j$ sur l'ensemble de Γ_u. Le système linéaire (Équation 5.46) permet de déterminer les inconnues $\mathbf{q}_j$ aux nœuds libres grâce à des équations en nombre égal au nombre des inconnues.

La matrice de raideur globale $\mathbf{K}$ est assemblée à partir des sous matrices $\mathbf{K}_{ij}$ en vue de la résolution du système linéaire et un vecteur de charge $\mathbf{g}$ est assemblé à partir des $\mathbf{g}_i$. On constate dans l'Équation (5.43) que les $\mathbf{g}_i$ ne sont pas nuls uniquement sur le domaine où la fonction de forme ϕ_i n'est pas nulle, c'est-à-dire sur les éléments auxquels appartient le point i. De la même façon, on vérifie que dans l'Équation (5.42), la matrice $\mathbf{K}_{ij}$ n'est pas nulle seulement si les fonctions de forme ϕ_i et ϕ_j ne sont nulles simultanément. Cela signifie que $\mathbf{K}$ est creuse car la sous matrice $\mathbf{K}_{ij}$ n'est pas nulle que si les points i et j appartiennent à un même élément et que le maillage constitue une base parfaitement appropriée pour réaliser numériquement les intégrales de (5.42) e (5.43) (Duflot, 2004).

Au contraire, la méthode EFG consiste à utiliser des fonctions de forme de l'approximation MCM. Cette approximation est construite sans l'existence d'un maillage du domaine dans la discrétisation de chacune des composantes du champ de déplacement et du champ de déplacement de test introduit dans le principe variationnel. Comme il a été montré précédemment, les équations (5.38) a (5.46) (qui décrivent la MEF) restent valables pour décrire la méthode EFG.

Le choix des fonctions de forme différentes constitue en fait les différences principales entre la MEF et la méthode EFG.

D'abord, comme les fonctions de forme MCM ne satisfont pas à la propriété d'interpolation, les degrés de liberté $\mathbf{q}_i$ ne sont pas les valeurs du déplacement aux points.

Par conséquent, les conditions limites essentielles ne sont pas appliquées tout simplement en égalant les degrés de liberté des points sur Γ_u aux valeurs qui sont imposées. Différentes techniques pour satisfaire ces conditions sont abordées dans la section 5.4 de ce chapitre.

Deuxièmement, la MEF remplit davantage la matrice $\mathbf{K}$. En effet, il y a une sous matrice $\mathbf{K}_{ij}$ non nulle pour toutes les paires de domaines d'influence qui ont une intersection. Ainsi, le nombre de ces intersections est plus élevé que pour la MEF pour que l'approximation soit correctement définie.

Troisièmement, la méthode EFG ne dispose pas de maillage comme support pour l'intégration dans le domaine. Cet aspect est abordé dans les sections suivantes.

5.4. Imposition des conditions limites essentielles

Comme on l'a montré dans la section précédente, les fonctions de forme MCM ne prennent pas la valeur unitaire au point auquel elles sont associées (caractère non interpolateur de l'approximation). Pour cette raison, il n'est pas possible de fixer directement les valeurs des inconnues aux points qui se trouvent sur la frontière Γ_u. Dans ce sens, l'une des plus grandes difficultés pour la mise en œuvre de la méthode EFG est l'imposition des contraintes. Les différentes méthodes proposées dans la littérature sont passes en revue dans cette section dans l'ordre chronologique de leur apparition. On remarque que dans ce travail on a utilisée la première méthode, par conséquent, elle sera la plus détaillée.

5.4.1. Principe variationnel modifié avec multiplicateurs de Lagrange

Cette méthode proposée par Belytschko et al. (1994) constitue une des méthodes les plus précises pour l'imposition de conditions aux limites essentielles, étant d'application relativement simple dans les cas des problèmes élémentaires.

La méthode se base sur la forme faible du principe variationnel suivant :

$$\int_{\Omega} \nabla_s \delta\mathbf{u}^{\mathrm{T}} : \sigma d\Omega - \int_{\Omega} \delta\mathbf{u}\bar{b}\, d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta\mathbf{u}\bar{t}\, d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \delta\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \delta\mathbf{u}\boldsymbol{\lambda}\, d\Gamma = 0 \tag{5.47}$$

où les multiplicateurs de Lagrange $\boldsymbol{\lambda}$ sont utilisés pour imposer les conditions limites sur le déplacement. L'interprétation physique des multiplicateurs de Lagrange sont les efforts de réaction imposés par la fixation. Ainsi, le problème général de l'élasticité consiste à :

« Déterminer les déplacements $\mathbf{u} \in H^1(\Omega)$, les déformations $\boldsymbol{\varepsilon} \in H^0(\Omega)$, les contraintes $\boldsymbol{\sigma} \in H^0(\Omega)$ et les multiplicateurs de Lagrange qui satisfont aux équations $\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla_s \mathbf{u}^{\mathrm{T}}$ et $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} : \boldsymbol{\varepsilon}$ et qui sont tels que le principe variationnel ci-dessus est vérifié pour tout $\delta\mathbf{u} \in H^1(\Omega)$ et $\delta\boldsymbol{\lambda} \in H^0(\Omega)$ ».

La forme faible de l'Équation (5.47) est discrétisée en utilisant une approximation MCM pour $\mathbf{u}$ et $\delta\mathbf{u}$ comme ci-dessus et une interpolation pour le champ des multiplicateurs de Lagrange (défini seulement sur Γ_u).

$$\boldsymbol{\lambda} = \sum_k \psi_k(s)\boldsymbol{\lambda}_k \tag{5.48}$$

$$\delta\boldsymbol{\lambda} = \sum_k \psi_k(s)\delta\boldsymbol{\lambda}_k \tag{5.49}$$

où les ψ_k sont des fonctions de forme d'interpolation de Lagrange dont la variable est la coordonnée curviligne s au long de Γ_u. En substituant les approximations dans le principe variationnel, on arrive à un système linéaire qui permet de déterminer les inconnues $\mathbf{q}_i$ et $\boldsymbol{\lambda}_k$. Ainsi pour l'analyse statique, on aboutit à :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{g} \\ \mathbf{h} \end{Bmatrix}, \tag{5.50}$$

où $\mathbf{K}$ est écrite dans l'Équation (5.42), $\mathbf{g}$ dans l'Équation 5.43 et :

$$\mathbf{G}_{ik} = -\int_{\Gamma_{ut}} \phi_i \psi_k \mathbf{S} d\Gamma \tag{5.51}$$

$$\mathbf{h}_k = -\int_{\Gamma_{ut}} \psi_k \mathbf{S}\bar{\mathbf{u}} d\Gamma \tag{5.52}$$

où $\mathbf{S}$ est une matrice diagonale dont l'élément $\mathbf{S}_{ii}$ vaut 1 si le déplacement est imposé selon x_i et 0 dans le cas contraire.

Et, pour l'analyse modale le problème de valeurs et vecteurs propres est le suivant :

$$\left(\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mathbf{f} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix}\right) \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\Delta} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{Bmatrix} = \{\mathbf{0}\}, \tag{5.53}$$

où les éléments de la matrice de masse obéissent à l'équation suivante :

$$\mathbf{M}_{ij} = \int_{\Omega} \rho \phi_i \phi_j d\Omega , \tag{5.54}$$

étant ρ la densité volumique du matériaux.

Belytschko et al. (1996) vérifièrent une augmentation de la largeur de la bande de la matrice de raideur par rapport à la formulation de Galerkin utilisée dans la MEF. A ceci il s'ajoute le fait que la matrice de raideur n'est pas définie positive bien que symétrique. Par conséquent, le coût des calculs pour la résolution du système des équations augmente.

5.4.2. Principe variationnel modifié sans multiplicateurs de Lagrange

Cette méthode, proposée par Lu et al. (1994), repose sur la forme faible précédente où les multiplicateurs de Lagrange sont identifiés dès le début aux efforts de réaction de la fixation. Autre travail référentiel sur cette méthode celui de Belytschko et al. (1994). La méthode s'énonce alors :

« Déterminer les déplacements $\mathbf{u} \in H^1(\Omega)$, les déformations $\boldsymbol{\varepsilon} \in H^0(\Omega)$ et les contraintes $\boldsymbol{\sigma} \in H^0(\Omega)$ qui satisfont les équations $\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla_s \mathbf{u}^{\mathrm{T}}$ et $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} : \boldsymbol{\varepsilon}$ et qui sont tels que le principe variationnel suivant est vérifié pour tout $\delta\mathbf{u} \in H^1(\Omega)$ ».

$$\int_{\Omega} \nabla_s \delta\mathbf{u}^{\mathrm{T}} : \sigma d\Omega - \int_{\Omega} \delta\mathbf{u}\bar{b}\, d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta\mathbf{u}\bar{t}\, d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \delta\mathbf{t}(\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \delta\mathbf{u}\mathbf{t} d\Gamma = 0 \tag{5.55}$$

avec $\mathbf{t} = (\mathbf{D} : \nabla_s \mathbf{u}).\mathbf{n}$ et $\delta\mathbf{t} = (\mathbf{D} : \nabla_s \delta\mathbf{u}).\mathbf{n}$

En substituant les approximations dans le principe variationnel, on arrive à un système linéaire qui permet de déterminer les inconnues $\mathbf{q}_i$

$$\mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{g} , \tag{5.56}$$

où:

$$\mathbf{K}_{ij} = \int_{\Omega} \mathbf{B}_i^{\mathrm{T}} \mathbf{D} \mathbf{B}_j d\Omega - \int_{\Gamma_u} \left(\phi_i \mathbf{S} \mathbf{N} \mathbf{D} \mathbf{B}_j + \mathbf{B}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{T}} \mathbf{D}^{\mathrm{T}} \mathbf{N}^{\mathrm{T}} \mathbf{S} \phi_j \right) d\Gamma \,, \tag{5.57}$$

$$\mathbf{g}_i = \int_{\Omega} \phi_i \bar{b} \, d\Omega + \int_{\Gamma_t} \phi_i \bar{t} \, d\Omega - \int_{\Gamma_u} \mathbf{B}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{T}} \mathbf{D}^{\mathrm{T}} \mathbf{N}^{\mathrm{T}} \mathbf{S} \bar{\mathbf{u}} \, d\Gamma \tag{5.58}$$

où $[\mathbf{N}]^{\mathrm{T}} \{\boldsymbol{\sigma}\} = \{\bar{t}\}$.

La taille du système linéaire à résoudre est plus petite que celle de la méthode précédente. La matrice de raideur est encore symétrique non définie positive.

5.4.3. Principe variationnel modifié avec une pénalité

Proposée par Belytschko et al. (1994) et adaptée par Zhu et Atluri (1998), cette méthode consiste à additionner un terme de pénalité (γ) à la forme faible comme suit :

$$\int_{\Omega} \nabla_s \delta \mathbf{u}^{\mathrm{T}} : \sigma d\Omega - \int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \bar{b} \, d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta \mathbf{u} \bar{t} \, d\Gamma - \frac{\gamma}{2} \delta \left(\int_{\Gamma_u} \left\| \mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}} \right\|^2 d\Gamma \right) = 0 \tag{5.59}$$

ce qui conduit au système linéaire :

$$\mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{g} \,, \tag{5.60}$$

où :

$$\mathbf{K}_{ij} = \int_{\Omega} \mathbf{B}_i^{\mathrm{T}} \mathbf{D} \mathbf{B}_j d\Omega - \gamma \int_{\Gamma_u} \phi_i \phi_j d\Gamma \,, \tag{5.61}$$

$$\mathbf{g}_i = \int_{\Omega} \phi_i \bar{b} \, d\Omega + \int_{\Gamma_t} \phi_i \bar{t} \, d\Omega - \gamma \int_{\Gamma_u} \phi_i \bar{\mathbf{u}} \, d\Gamma \tag{5.62}$$

Dans ce cas, il faut chercher un compromis pour le choix de la valeur de γ ; une valeur trop élevée conduit à un système mal conditionné ; pour une valeur trop faible, la condition sur le déplacement n'est pas précisément imposée.

5.4.4. Connexion avec un maillage d'éléments finis

Cette méthode, qui couple la méthode EFG et la MEF a été proposée par Krongauz et Belytschko (1996). D'autres travaux référentiels sont : Belytschko et al. (1995), Huerta ; Fernandez (2001) ; Wagner et Liu (2001). Selon ses créateurs (Krongauz et Belytschko, 1996) cette méthode est la plus avantageuse du point de vue pratique.

Le principe de la méthode consiste à discrétiser par éléments finis dans le voisinage des limites du domaine et en employant interpolation sans maillage sur le reste du domaine. Ainsi, les conditions essentielles peuvent être imposées avec la procédure traditionnelle de la MEF. Belytschko et al. (1995) définissent une aire de transition entre les nœuds des éléments finis et les points de la méthode EFG.

La méthode considère que dans une zone du domaine, le déplacement est approximé à l'aide des fonctions de forme MCM et dans une autre, il est approximé par les fonctions de forme des éléments finis. Une couche de transition est nécessaire pour garantir la continuité du déplacement. Le déplacement est approximé par $R.u_{sm} + (1-R)u_{ef}$ où R est une fonction rampe variant entre 0 et 1 (ef pour éléments finis et sm pour la méthode sans maillage). Si la frontière Γ_u entoure uniquement la des éléments finis, les conditions essentielles peuvent être imposées comme dans la MEF. Cette technique est aussi utile pour limiter les s sans maillage où le calcul est plus coûteux ou par exemple profiter des avantages que cette méthode offre. Huerta et Fernandez (2001) suggèrent une interpolation générale en supprimant les fonctions rampe et sans substitution des points, selon les auteurs, pour préserver la consistance et la continuité de la solution.

D'autres méthodes d'imposition des conditions limites essentielles sont : fonctions de forme modifiées (Gosz et Liu, 1996 ; Wagner at Liu, 2000) et Lagrangiens perturbés (Belytschko et al., 1995).

Il y a deux aspects importants à considérer avant l'implémentation de la méthode EFG. Premièrement, comment localiser les points voisins au point où on calcule la fonction de forme, c'est-à-dire, comment identifier les points qui ont une fonction de forme non nulle dans ce point. Deuxièmement, comment évaluer les intégrales qui apparaissent dans la forme faible en sachant que cette forme n'est pas évidente dans la MEF (Fernandez, 2001).

Les points voisins sont les points qui sont dans le domaine d'influence. L'intégration peut être évaluée avec la prise en compte de : points d'intégration (points de quadrature de Gauss par exemple) ou cellules d'intégration (quadrature numérique en chaque cellule). Selon Bonet et Kulasegaram (2000) l'intégration à travers des points d'intégration est plus rapide bien qu'avec des méthodes de collocation, il existe des problèmes d'instabilité de la solution. Les mêmes auteurs offrent des possibilités de trouver des solutions précises.

5.5. Intégration dans la méthode EFG

Avant tout, comme la construction de l'approximation via MCM produit une fonction qui doit être recalculée pour chaque point il est impossible d'effectuer l'intégration analytique. Alors, pour conserver la philosophie de modélisation sans maillage de Galerkin les chercheurs (Belytschko et al., 1996) ont proposé différentes méthodes d'intégration comme l'intégration nodale, par cellules d'intégration et mailles auxiliaires des éléments.

Dans la méthode EFG, le calcul de la matrice de raideur, de masse et du vecteur de charge demande l'évaluation de certaines intégrales. Une intégration sur le domaine du corps pour la contribution des forces de volume sur le vecteur de charge et sur la matrice de raideur (Équation 5.52) est nécessaire. Pour la contribution de l'imposition des conditions limites essentielles (sur la matrice de raideur) et naturelles (sur le vecteur de charge), l'intégration sur certains contours est nécessaire selon la méthode choisie.

Dans le cas bidimensionnel, deux méthodes d'intégration sont les plus utilisées. Elles sont illustrées dans la Figure 5.4. L'intégration au travers des cellules ou par des éléments.

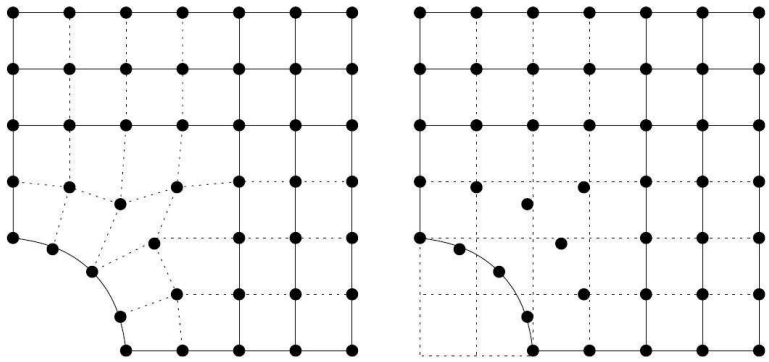


Figure 5.4 - Intégration dans la méthode EFG (Duflot, 2004)

La partie gauche de la Figure 5.4 illustre un découpage de la pièce en éléments formant un maillage de points. Le découpage illustré est un maillage d'éléments finis construit sur l'ensemble des points de l'approximation MCM. Il faut préciser que le découpage ne doit pas nécessairement satisfaire les mêmes exigences qu'un maillage éléments finis. Cette technique permet de représenter avec précision la géométrie du domaine.

La technique qui consiste à utiliser une division uniforme de cellules dans laquelle est incluse la pièce est illustrée dans la partie droite de la Figure 5.4. L'intégration de Gauss est réalisée sur chaque cellule en attribuant un poids nul aux points de Gauss qui se trouvent en

dehors de la pièce. Cette alternative présente l'inconvénient de ne pas représenter exactement la géométrie du domaine.

Dans ce travail on utilise la technique illustrée à gauche de la Figure 5.4. Les paramètres d'intégration de Gauss d'ordre 4 en deux dimensions sont illustrés dans la Figure 5.5. En général une quadrature 4x4 est adéquate dans le processus d'intégration, sauf dans le cas de cellules qui ont de hauts gradients de tension (problèmes de fissuration). Une quadrature 8x8 est suggérée par Rahman et Nao (2001) pour ce type de problèmes. Belytschko et al. (1996) ont cherché la quadrature optimale sur des applications en élasticité pour établir la meilleure relation entre coût et précision, ainsi ils suggèrent une quadrature 6x6. Comme Belytschko et al. (1996) le suggèrent, on a donné la préférence au nombre des nœuds du maillage auxiliaire plutôt qu'au nombre de points d'intégration dans chaque élément.

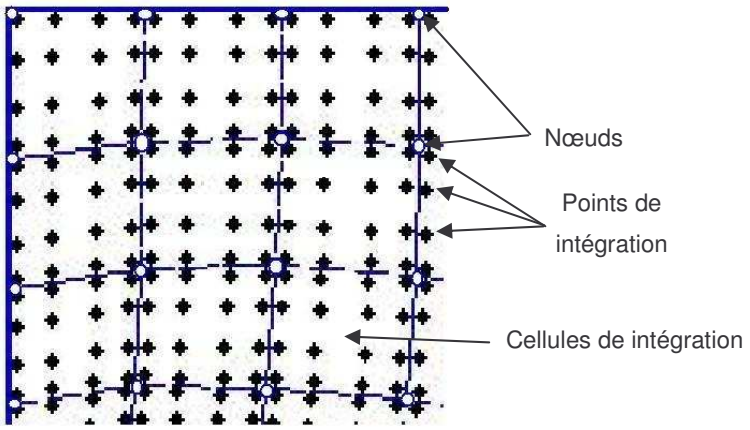


Figure 5.5 - Paramètres de intégration dans la méthode EFG

Habituellement, la technique d'intégration numérique la plus utilisée est la définition d'un ensemble de cellules auxiliaires d'intégration qui recouvrent le domaine mais qui ne sont pas connectées. Dans ces cellules sont définies des quadratures de Gauss d'ordre différent pour intégrer les fonctions de forme des MCM. Fernandez (2001) révèle le processus en utilisant des cellules d'intégration, et met en évidence leurs avantages et inconvénients. Une discussion sur le processus d'intégration, ses sources d'erreurs sont décrites par Barros (2002) et Santana (2004).

Belytschko et al. (1994) donnent la possibilité du calcul des intégrales numériques à travers la quadrature de Gauss. Ils suggèrent la division du domaine en cellules d'intégration où les points de Gauss sont distribués. Hegen (1997) explique une manière de distribuer ces cellules sur le domaine.

Les intégrations sur le contour s'évaluent numériquement avec la description des frontières. Dans cette situation, il faut découper les frontières en intervalles sur lesquels une

intégration de Gauss est réalisée. A deux dimensions, les intervalles d'intégration sont des morceaux de courbes sur lesquels une intégration de Gauss simple est réalisée.

L'intégration numérique sur le domaine est plus difficile puisqu'on connaît seulement la pièce par la description de ses frontières à l'intérieur desquelles un ensemble de points est distribué. En sachant que les fonctions de forme (base d'intégration) ne sont pas supportées par un maillage, il utilise l'intégration de Gauss sur chaque cellule.

Les principaux avantages de la méthode EFG sont associés à la simplicité de la définition de la discrétisation et à la flexibilité pour effectuer des modifications sur celle-ci, en dispensant de l'utilisation de techniques sophistiquées de génération de mailles. En même temps, la méthode EFG demande des efforts significatifs de calcul pour construire les fonctions de forme, imposer les conditions limites et intégrer les équations résultantes.

Le coût de calcul de la méthode EFG est analysé par Belytschko et al. (1996). Ces auteurs ont vérifié que le coût de calcul est proportionnel au nombre de points à l'intérieur du domaine d'influence. Également ont étudiée la relation entre coût et précision de la méthode EFG en applications d'élasticité.

La prochaine section résume l'algorithme développé pour la résolution de problèmes en elastodynamique linéaire par la méthode EFG. Les paramètres de la méthode EFG considérés dans les simulations proviennent des études rapportées dans la littérature. Dans la plupart de ces études s'analyse l'influence de ces paramètres sur le coût, la précision, la convergence et la stabilité des résultats. Parmi eux, on cite : Belytschko et al. (1996), Krysl et Belytschko (1996), Lu et al. (1996), Liu et al. (1997), Beissel et Belytschko (1996), Belytschko et al., (2000), Fernandez (2001).

5.6. Description des algorithmes de la méthode EFG

Les algorithmes décrits dans cette section ont été développés en plateformes MATLAB® visant l'application à des problèmes unidimensionnels ou bidimensionnels d'élasticité linéaire. Les étapes sont les suivantes :

Entrée des données :

- Définir la géométrie du problème.
- Choisir le type d'analyse et les propriétés de matériaux (E : module de Young, G : module de cisaillement, ν : coefficient de Poisson) :

- Matériaux isotrope : E et ν, état plan de contrainte ou état plan de déformation,
- Matériaux orthotrope avec quatre variables indépendantes : E_1, E_2, ν_{12} et G_{12},
- Matériel orthotrope avec neuf variables indépendantes : E_1, E_2, E_3, ν_{12}, ν_{13}, ν_{23}, G_{12}, G_{23} et G_{31}.

- Entrer avec la charge externe.

Création de points et définition de leurs paramètres :

- Définir les points du domaine : distribution uniforme (géométrie rectangulaire via MATLAB®) ou distribution variée (géométrie non rectangulaire via ANSYS®) ou dans le cas de raffinement de maillage (via ANSYS®),
- Définir les points où sont appliquées les forces et les points de frontières,
- Choisir les paramètres de la fonction poids associée au point :
  - Type : rectangulaire,
  - Aspect : spline d'ordre 3.
- Définir les points d'intégration et leurs poids pour la quadrature de Gauss
- Définir les multiplicateurs de Lagrange : deux points pour les cas unidimensionnel ou quatre points pour les cas bidimensionnel.

Prétraitement des paramètres d'intégration :

- Initialiser la matrice de raideur et le vecteur de charge,
- Définir le domaine d'influence des points,
- Localiser les points sur le domaine d'influence.

Intégration sur le domaine :

- Montage des fonctions MCM et leurs dérivées pour chaque point à l'intérieur du domaine d'influence en utilisant :
  - Les fonctions poids et leurs dérivées,
  - Les fonctions de base linéaire unidimensionnelle ou bidimensionnelle,
  - La décomposition LU.
- Montage des matrices $\mathbf{B}$, $\mathbf{K}$ et $\mathbf{M}$.

Intégration sur la frontière en utilisant les multiplicateurs de Lagrange, points sur le domaine d'influence, fonctions MCM, et vecteurs $\mathbf{g}$, $\mathbf{h}$ et matrice $\mathbf{G}$.

Résolution du système linéaire et du problème des valeurs propres

Traitement des résultats de déplacements, contraintes, fréquences propres

5.7. Exemple d'application

Cet exemple vise à illustrer l'applicabilité des algorithmes décrits dans la section précédente à travers des simulations numériques. Ainsi, une procédure de validation d'un modèle est proposée en utilisant la méthode sans maillage EFG. Cette section illustre aussi la fonctionnalité des algorithmes par rapport à la distribution irrégulière des points sur des s d'intérêt avec la combinaison des algorithmes de création automatique des points du logiciel ANSYS®.

La Figure 5.6 illustre une plaque rectangulaire trouée, notamment la symétrie du problème. Pour cela, la modélisation par la méthode EFG ne concerne qu'un quart de la plaque.

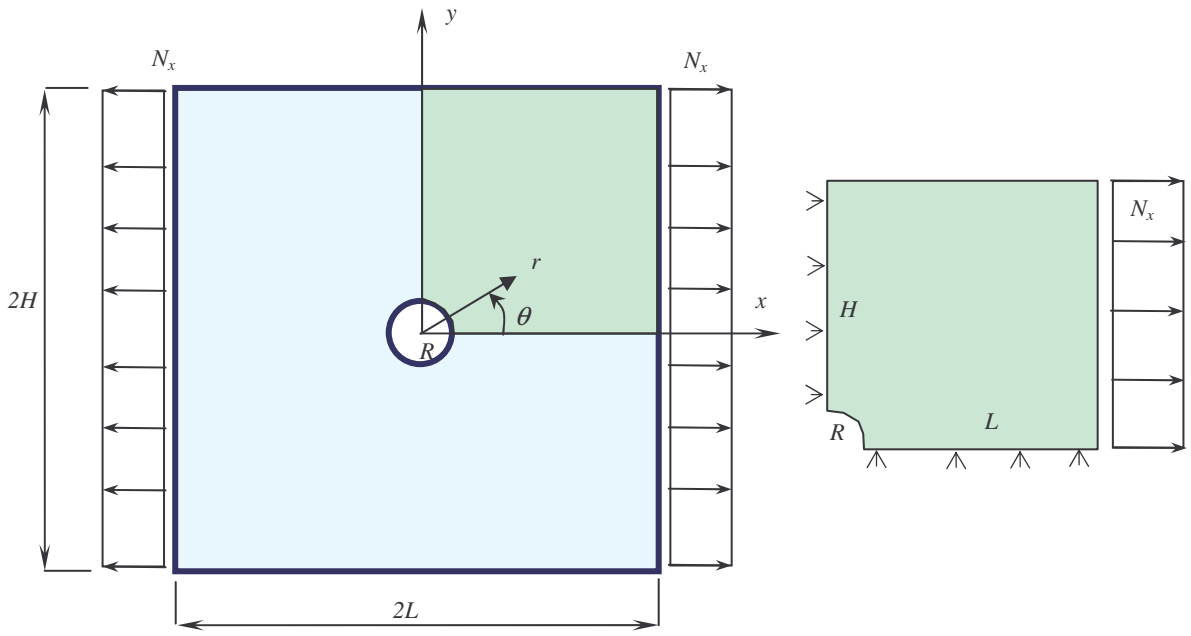


Figure 5.6 - Schéma de la plaque trouée

Les conditions de continuité sont imposées aux limites du quart de plaque pour la modélisation des conditions essentielles aux points des limites de la plaque. Les conditions naturelles sont introduites à cause de l'application du champ de contraintes.

Timoshenko et Goodier (1987) détaillent analytiquement les contraintes sur une plaque infinie avec un trou au milieu. Elle est soumise à une traction normale (N_x) dans la direction x. Les distributions des contraintes dans la plaque (σ_{xx}, σ_{yy} et σ_{xy}) trouée est décrite par les équations suivantes :

$$\sigma_{xx} = N_x\left[1 - \frac{R^2}{r^2}\left(\frac{3}{2}\cos(2\theta) + \cos(4\theta)\right) + \frac{3R^4}{2r^4}\cos(4\theta)\right] \tag{5.63}$$

$$\sigma_{yy} = N_x\left[-\frac{R^2}{r^2}\left(\frac{1}{2}\cos(2\theta) - \cos(4\theta)\right) - \frac{3R^4}{2r^4}\cos(4\theta)\right] \tag{5.64}$$

$$\sigma_{xy} = N_x\left[-\frac{R^2}{r^2}\left(\frac{1}{2}\sin(2\theta) + \sin(4\theta)\right) + \frac{3R^4}{2r^4}\sin(4\theta)\right] \tag{5.65}$$

où $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $\theta = \arctan(y/x)$.

Les propriétés géométriques et mécaniques sont résumées dans le Tableau 5.2.

Table 5.2 - Propriétés géométriques et mécaniques de la plaque trouée

L (m)	H (m)	R (m)	E (N/m^2)	ν	N_x (N/m)
0.1524	0.1524	0.0254	2.1x10^{11}	0.3	6.8942x10^6

La Figure 5.7 compare les distributions de points de la méthode EFG et des nœuds pour la MEF. Les simulations en éléments finis utilisent l'élément PLANE42 du ANSYS®. En sachant que ANSYS® emploi des algorithmes de création de maillages optimisés, la procédure de modélisation via EFG couple la génération de points d' ANSYS® dans ses procédures. Pour comparer les résultats, la même distribution des points est utilisée.

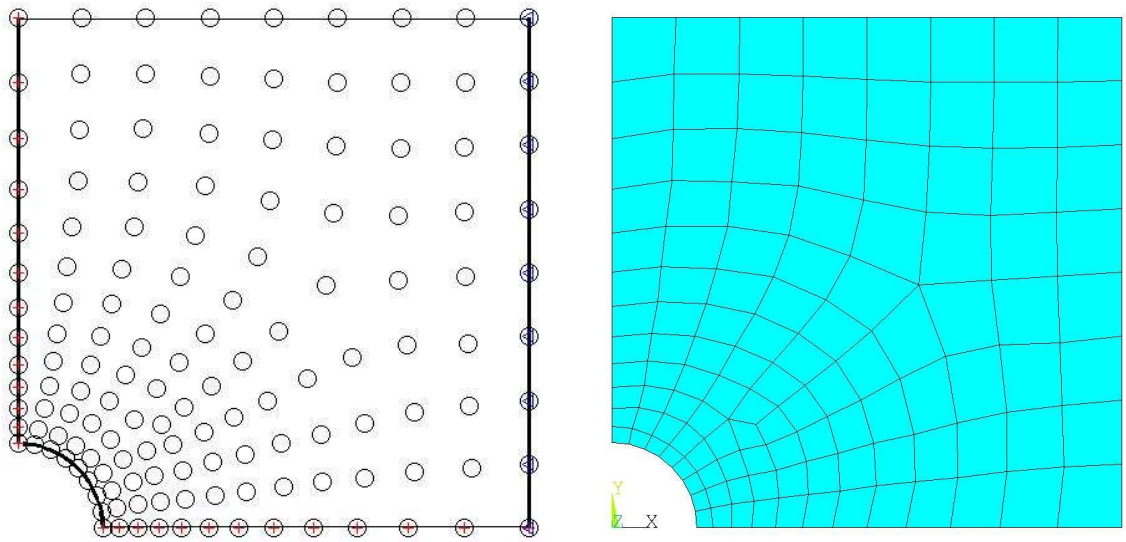


Figure 5.7 - Modèles de plaque trouée pour les méthodes EFG et MEF

La comparaison des configurations déformées trouvées par les méthodes est représentée par la Figure 5.8 où sont illustrées les déplacements horizontaux et verticaux.

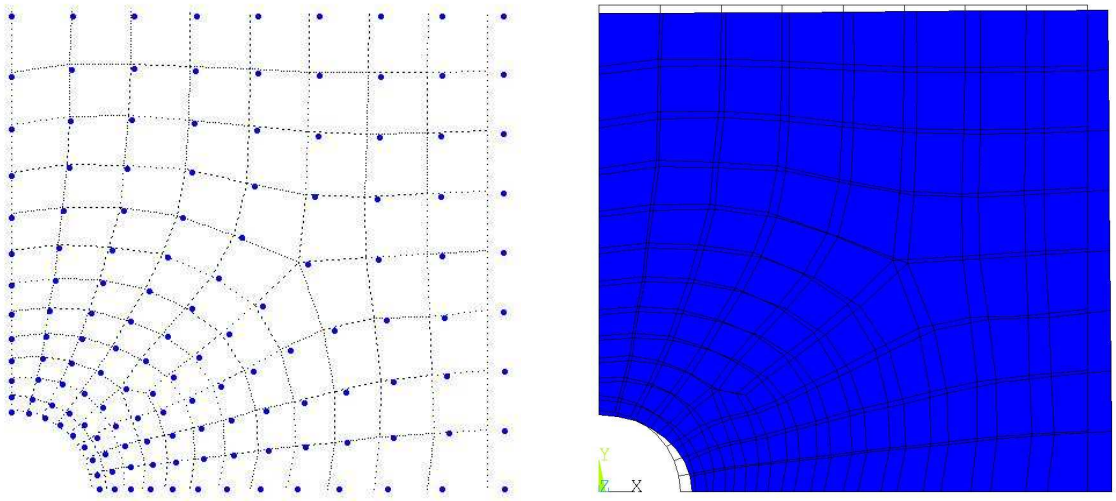


Figure 5.8 - Configuration déformée du modèle de plaque de trouée

La Figure 5.9 illustre la distribution des points de Gauss qui ont aidé dans le processus d'intégration.

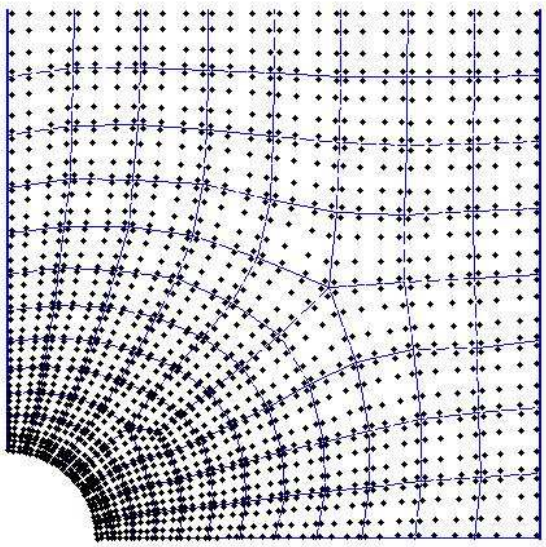
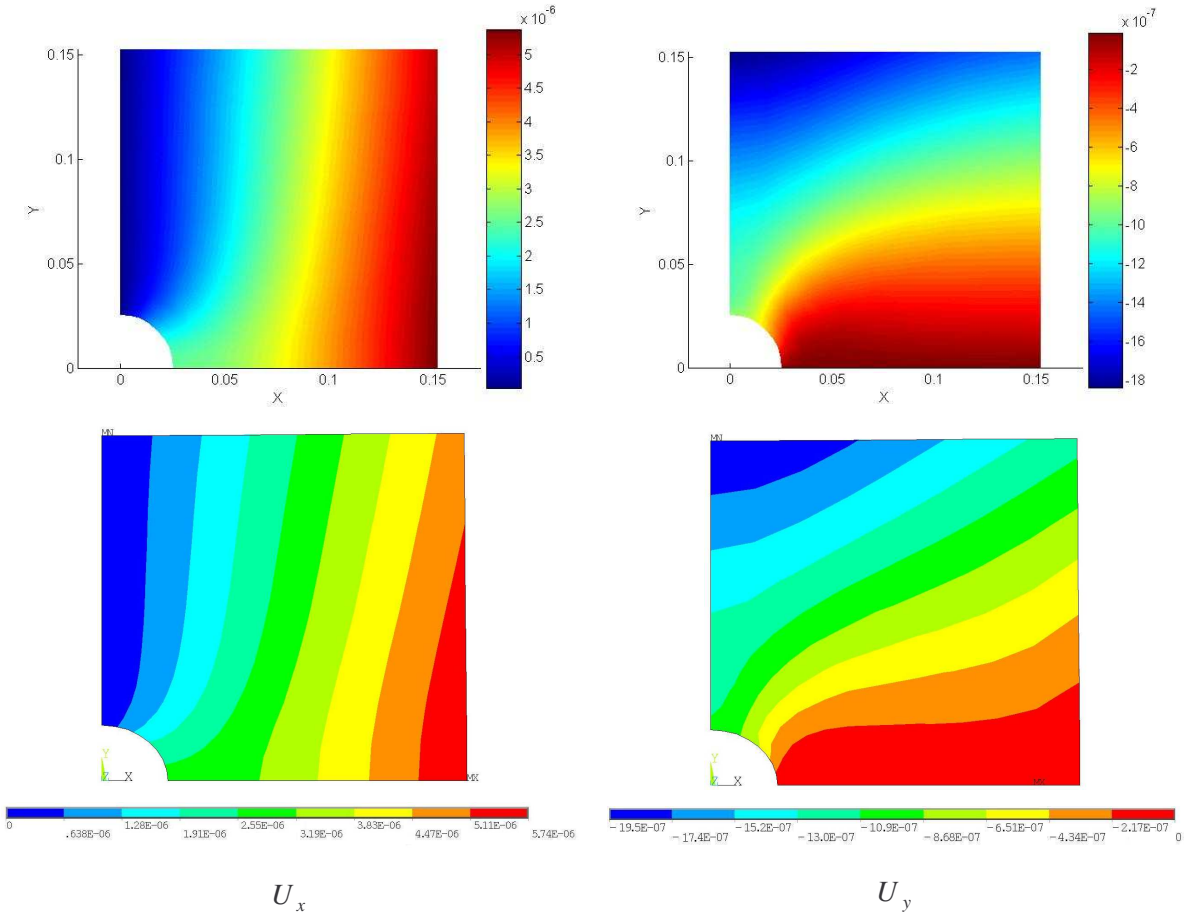


Figure 5.9 - Points de Gauss dans la plaque trouée

Les figures suivantes permettent de comparer les déplacements horizontaux et verticaux sur les plaques sans (EFG) et avec maillage (MEF).



U_x U_y

Figure 5.10 - Déplacements sur la plaque trouée (*m*)

La Figure 5.11 permet de comparer les contraintes dans les directions x et y de la plaque de trou.

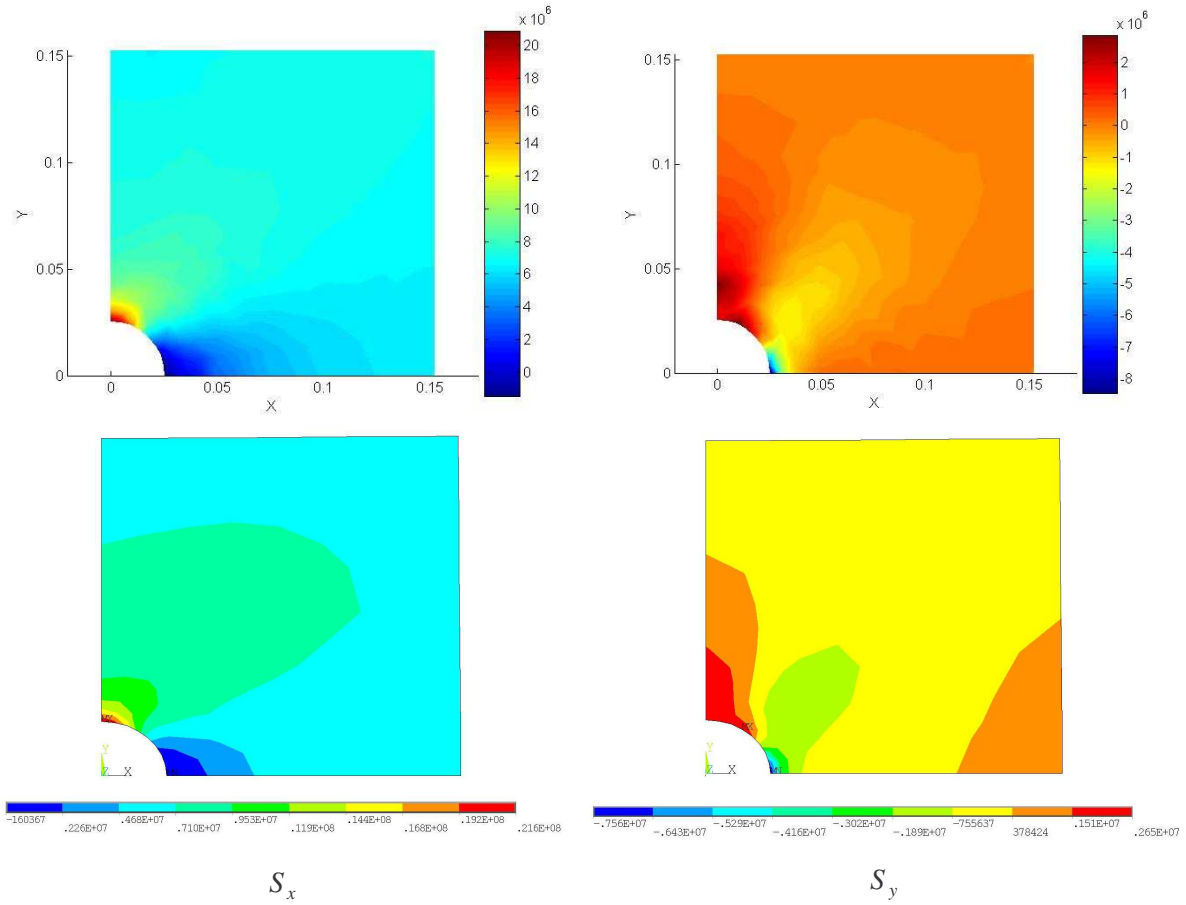


Figure 5.11 - Contraintes dans les directions x et y de la plaque trouée (*N/m²*)

La comparaison des déplacements et contraintes maximales obtenus par les méthodes EFG et MEF sont résumés dans la Tableau 5.3 ainsi que leur différences perceptuelles.

Tableau 5.3 - Déplacements et contraintes de la plaque trouée

Paramètre	**EFG**	**FEM**	**Erreur (%)**
U_x (*m*)	5.75×10^{-6}	5.74×10^{-6}	0.1742
U_y (*m*)	-1.88×10^{-6}	-1.95×10^{-6}	3.5897
S_x (*N/m²*)	2.1×10^{6}	2.16×10^{6}	2.7778
S_y (*N/m²*)	2.6×10^{6}	2.65×10^{6}	1.9531

Les résultats présentés dans cette section permettent de valider la méthode EFG implémentée pour la modélisation de structures bidimensionnelles.

5.8. Conclusion

La base théorique pour l'incorporation de la modélisation sans maillage dans la méthodologie d'analyse de fiabilité est présentée dans ce chapitre. Il passe en revue la littérature concernant les différentes méthodes de modélisation sans maillage.

Ce chapitre décrit la théorie formelle de la méthode sans maillage de Galerkin et ses aspects particuliers, à savoir, l'approximation des moindres carrés mobiles, l'application de la forme faible des équations de l'élasticité dans l'approximation sans maillage de Galerkin, l'imposition des conditions limites et l'intégration sur le domaine d'intérêt des structures.

Une section de ce chapitre résume les algorithmes de la méthode EFG pour la modélisation de structures uni et bidimensionnels en élasticité linéaire. Ces algorithmes ont été développés en plateformes MATLAB®.

Enfin une application numérique d'une plaque trouée est présentée dans le but de valider la méthode EFG implémentée.

CHAPITRE VI

ANALYSE DE LA FIABILITE DES STRUCTURES POUR MATERIAUX COMPOSITES : MODELISATION PAR LA METHODE SANS MAILLAGE DE GALERKIN

Je ne crains pas des ordinateurs. Je crains de ce qu'il manque en eux
(Isaac Asimov, 1920-1992)
Les ordinateurs sont inutiles. Ils peuvent seulement vous donner des réponses
(Pablo Picasso, 1881-1973)

Ce chapitre présente les applications numériques de la méthodologie d'analyse de fiabilité où les structures composites sont modélisées en suivant la méthode EFG. Cette méthodologie a été décrite initialement dans le Chapitre II et illustrée dans le Chapitre III. Les concepts fondamentaux sur les matériaux composites et la méthode EFG (Chapitre V) ont été le support théorique pour la modélisation sans maillage des systèmes composites uni et bi dimensionnels.

Les exemples d'applications présentés dans ce chapitre illustrent la versatilité et l'applicabilité de la méthodologie mentionnée. Les analyses de fiabilité sont réalisées en couplant la méthode EFG aux algorithmes FORM, SORM et HBRM, tous implémentés sous MATLAB®. Une procédure de validation des modèles de chaque application précède l'analyse de fiabilité. La validation des modèles sans maillage est réalisée par la comparaison des résultats obtenus par la MEF. Ainsi, les fonctions d'état limite sont évaluées en utilisant des modèles sans maillage et des modèles éléments finis.

Les principes fondamentaux des matériaux composites forment la base de la modélisation du comportement mécanique des structures à travers la méthode EFG. La théorie macro-mécanique des stratifiés et le comportement mécanique des stratifiés basé sur la théorie de premier ordre sont résumés dans cet annexe.

6.1. Analyse de fiabilité en statique d'une barre encastrée basée sur la méthode EFG

Pour la première application est utilisée la méthode EFG pour l'évaluation d'une fonction d'état limite, lorsque elle n'est pas une fonction explicite des variables aléatoires, dans l'analyse de fiabilité en statique réalisée par FORM, SORM et HBRM. Ces résultats ont été préalablement publiés par Rojas et al. (2007 b).

En prenant en compte une barre encastrée soumise à une charge de distribution linéaire $f(x)=x$ dans la direction de la longueur L, schématisée par la Figure 6.1. La barre a une aire de la section transverse unitaire ($A=t.h$,où t et h sont l'épaisseur et la hauteur de la barre, respectivement). Dans la Figure 6.1 est illustré une discrétisation uniforme sans maillage de 21 points.

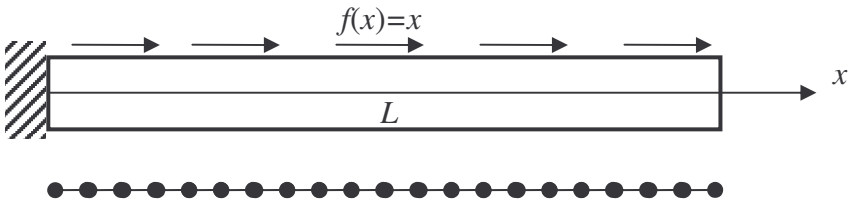


Figure 6.1 - Schéma de la barre encastrée

6.1.1. Validation du modèle de la barre encastrée

Dans le but de valider le modèle de la barre encastré, un modèle adimensionnel de dimensions unitaires est considéré. L'équation d'équilibre de ce problème est décrite par l'expression (Timoshenko et Goodier, 1987) :

$$E_{u,xx}+x=0\ ,\ 0<x<1$$
$$x'=\frac{x}{L} \tag{6.1}$$

les conditions de frontière du déplacement dans la direction x sont : $u(0)=0$ et $u_{,x}(1)=0$.

La solution analytique (considérée exacte) du problème est donnée par :

$$u_t(x)=\frac{1}{E}\left[\frac{1}{2}x-\frac{x^3}{6}\right] \tag{6.2}$$

Sur la Figure 6.2 sont comparés les déplacements le long de la barre obtenus par la méthode EFG, par la MEF et analytiquement. L'approximation EF est obtenue en utilisant 20 éléments de barre LINK1 du logiciel d'éléments finis ANSYS®. Ces résultats ont permis de valider le modèle sans maillage de la barre encastrée.

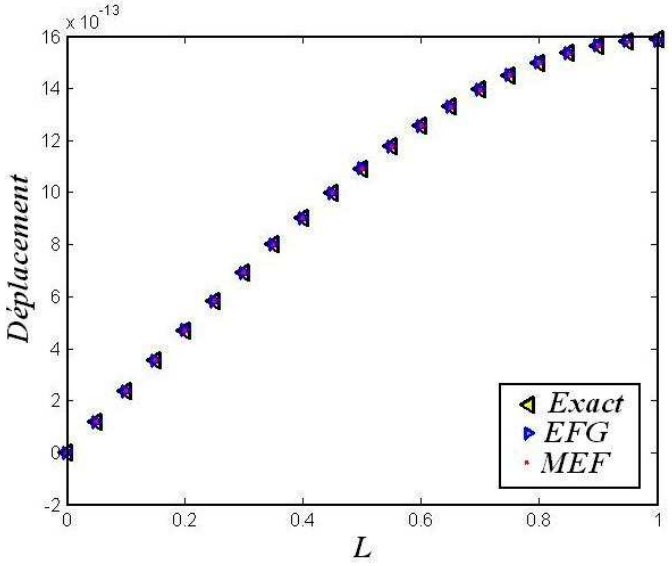


Figure 6.2 - Déplacements sur la barre obtenus par la méthode EFG, la MEF et le modèle analytique

6.1.2. Analyse de fiabilité de la barre encastrée

Pour l'analyse de fiabilité nous sommes intéressés à estimer la probabilité de défaillance en utilisant la fonction d'état limite $G(L,t,h,E)=u-u_0$.

Le Tableau 6.1 réunit les valeurs moyennes des paramètres de conception (L,t,h,E) pour cet exemple.

Tableau 6.1 - Moyenne des variables de conception de la barre encastrée

Variable	L	t	h	E (N/m^2)
Distribution	Normale	Normale	Normale	Normale
Moyenne	1	1	1	$2{,}1\times10^{11}$

La Figure 6.3 montre la variation de la probabilité de défaillance en fonction de l'écart type (1%, 1,5%, 2%, 2,5% et 3% des moyennes). Cette analyse de fiabilité est réalisée par la

combinaison des méthodes FORM et EFG. Comme prévu, la probabilité de défaillance augmente lorsque l'écart type augmente.

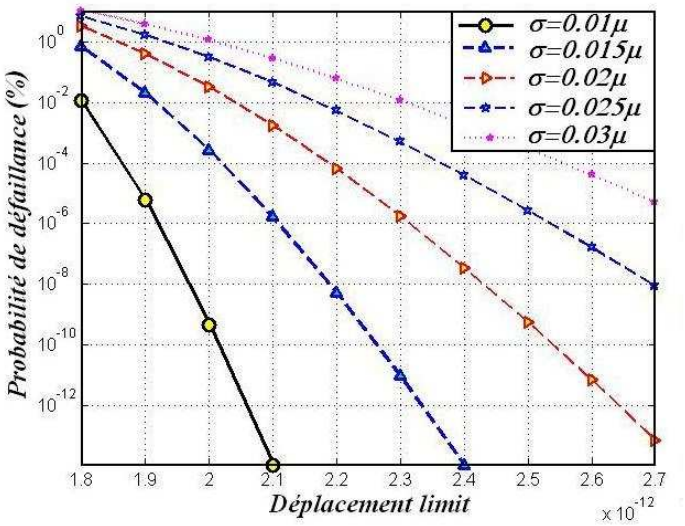


Figure 6.3 - Probabilité de défaillance de la barre encastrée pour différents écarts types

Le Tableau 6.2 permet de comparer les résultats de l'analyse de fiabilité obtenus par les méthodes FORM, SORM et HBRM (cette dernière en utilisant ACO). Les fonctions d'état limite ont été évaluées en utilisant la méthode EFG, la MEF et le modèle analytique. Les caractéristiques statistiques des variables de conception sont, respectivement : $\sigma_L = 0{,}03$ (*m*), $\sigma_t = 0{,}03$ (*m*), $\sigma_h = 0{,}03$ (*m*), $\sigma_E = 0{,}105 \times 10^{11}$ *N/m²* pour déplacement limite de $u_0 = 2{,}4 \times 10^{-12}$ *m*.

Tableau 6.2 - Résultats de l'analyse de fiabilité de la barre encastrée

	Analytique			**MEF**			**EFG**		
	FORM	**SORM**	**HBRM**	**FORM**	**SORM**	**HBRM**	**FORM**	**SORM**	**HBRM**
L	1,00	1,00	1,02	1,04	1,04	1,05	1,09	1,09	1,07
t	1,00	1,00	1,04	0,95	0,95	0,93	0,97	0,97	1,03
h	1,00	1,00	1,00	0,95	0,95	1,04	0,97	0,97	0,96
E x10^{11}	1,67	1,67	2,41	1,78	1,78	2,01	1,90	1,90	2,20
N_G	27	43	20	79	95	20	27	43	20
T (s)	0,81	1,29	3,10	141,34	169,97	63,41	0,43	0,69	1,42
β	4,13	4,14	3,84	4,10	4,67	3,29	3,77	3,76	3,03

P_f (%)	0,01	0,01	0,01	2x10^{-4}	1x10^{-4}	0,05	0,01	0,01	0,12
R_l (%)	99,99	99,99	99,99	≈ 100	≈ 100	99,95	99,99	99,99	99,88

L'ordre de grandeur des résultats est reporté à 10^{-2} près. Ainsi, lorsque pertinent les valeurs de la probabilité de défaillance (P_f) et du niveau de fiabilité (R_l) sont approximés a 0 et 100, respectivement.

Les résultats de l'analyse de fiabilité obtenus par FORM et SORM se montrent meilleurs que ceux obtenus par HBRM. Cependant, la HBRM nécessite moins d'évaluations de la fonction d'état limite associée au modèle sans maillage. On remarque aussi que la HBRM permet de meilleurs résultats si plusieures répétitions de calcul sont réalisées (comme illustré dans le Chapitre III).

Pour obtenir la convergence des méthodes FORM et SORM, un plus grand nombre d'évaluations de la fonction de performance (N_G) est nécessaire par rapport aux autres méthodes. Le même nombre d'évaluations de la fonction de performance est nécessaire pour le modèle analytique et pour l'EFG, avec de meilleurs résultats pour le premier modèle. Ainsi, la méthode EFG est la moins coûteuse en temps de calcul (T en secondes).

Pour tous les cas le niveau de fiabilité (R_l) est considéré adéquat. Ainsi, les résultats sont satisfaisants et démontrent l'applicabilité de ces techniques pour des problèmes de fiabilité de barres modélisées par des méthodes sans et avec maillage.

6.2. Analyse de fiabilité d'une poutre encastrée basée sur la méthode EFG

Dans cette section les méthodes FORM, SORM et HBRM sont appliquées à l'analyse de fiabilité d'une poutre encastrée en statique et en dynamique. Pour l'évaluation des fonctions d'état limite, la poutre est modélisée en utilisant la méthode EFG. Les variables aléatoires n'apparaissent pas sous forme explicite dans ces fonctions. Les résultats de cette application ont été auparavant publiés par Rojas et al. (2007 b).

On considère ici une poutre encastrée de longueur L , de hauteur H soumise à l'action d'une force transversale concentrée P à l'extrémité libre (Figure 6.4). Dans cet exemple on admet les valeurs suivantes des paramètres : $L = 30$ *m*, $t = 2$ *m*, $H = 8$ *m*, $P = 500000$ *N*, $E = 2{,}1 \times 10^{11}$ *N/m*^{2} et $\nu = 0.3$.

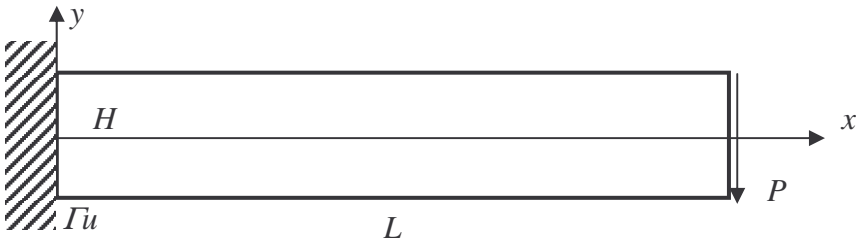


Figure 6.4 - Schéma de la poutre encastrée

6.2.1. Validation du modèle de la poutre encastrée

Belytschko et al. (1996) ont examiné la convergence des approximations en utilisant la méthode sans maillage SPH pour cet exemple.

La solution analytique des déplacements de ce problème est donnée par (Timoshenko et Goodier, 1987) :

$$u_x = \frac{Py}{6EI}\left[(6L-3x)x+(2+\nu)\left(y^2-\frac{H^2}{4}\right)\right] \tag{6.3}$$

$$u_y = \frac{P}{6EI}\left[3\nu y^2(L-x)+(4+5\nu)\left(\frac{H^2x}{4}\right)+x^2(3L-x)\right] \tag{6.4}$$

Les contraintes respectives sont exprimées selon :

$$\sigma_x(x,y) = \frac{Py(L-x)}{I} \tag{6.5}$$

$$\sigma_y(x,y) = 0\,, \tag{6.6}$$

où le moment de l'inertie I de la poutre est donné par $I = tH^3/12$.

La Figure 6.5 illustre le modèle sans maillage de la poutre déformée et non déformée (pour 25x11 points uniformément distribués).

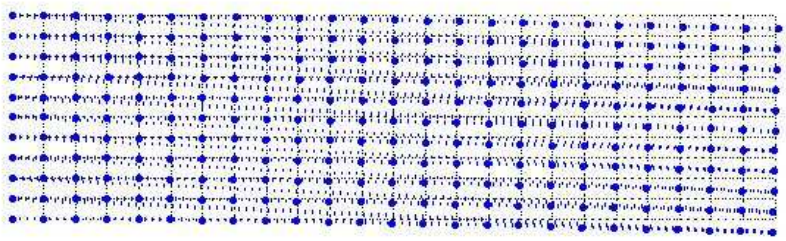


Figure 6.5 - Configuration déformée et non déformée du modèle de poutre sans maillage

Le Tableau 6.3 contient le déplacement vertical maximal de la poutre estimé à partir des modèles analytiques, de la MEF et de la méthode EFG pour différentes distributions des points pour les méthodes numériques. La variation relative entre les résultats analytiques et ceux obtenus par la méthode EFG est aussi reporté dans le Tableau 6.3. Comme prévu, les modèles qui ont une densité de points plus élevée fournissent des résultats plus proches des résultats analytiques.

Les approximations par EF sont obtenus en utilisant des éléments de poutre BEAM3 du logiciel ANSYS®.

Tableau 6.3 - Déplacement maximum vertical de la poutre pour différentes densités des points

Points	**Exact (*m*)**	**EFG (*m*)**	**MEF (*m*)**	**Erreur (%)**
11x5	$-2{,}63\times10^{-4}$	$-2{,}58\times10^{-4}$	$-2{,}65\times10^{-4}$	1,98
15x7	$-2{,}63\times10^{-4}$	$-2{,}61\times10^{-4}$	$-2{,}66\times10^{-4}$	0,94
19x9	$-2{,}63\times10^{-4}$	$-2{,}62\times10^{-4}$	$-2{,}68\times10^{-4}$	0,54
25x11	$-2{,}63\times10^{-4}$	$-2{,}63\times10^{-4}$	$-2{,}69\times10^{-4}$	0,30

La Figure 6.6 illustre la comparaison des distributions des déplacements verticaux le long de la poutre, obtenues par les trois modèles. Ces résultats ont permis de valider le modèle de la poutre à travers la méthode EFG et montre que la convergence est atteinte pour le maillage 15x7.

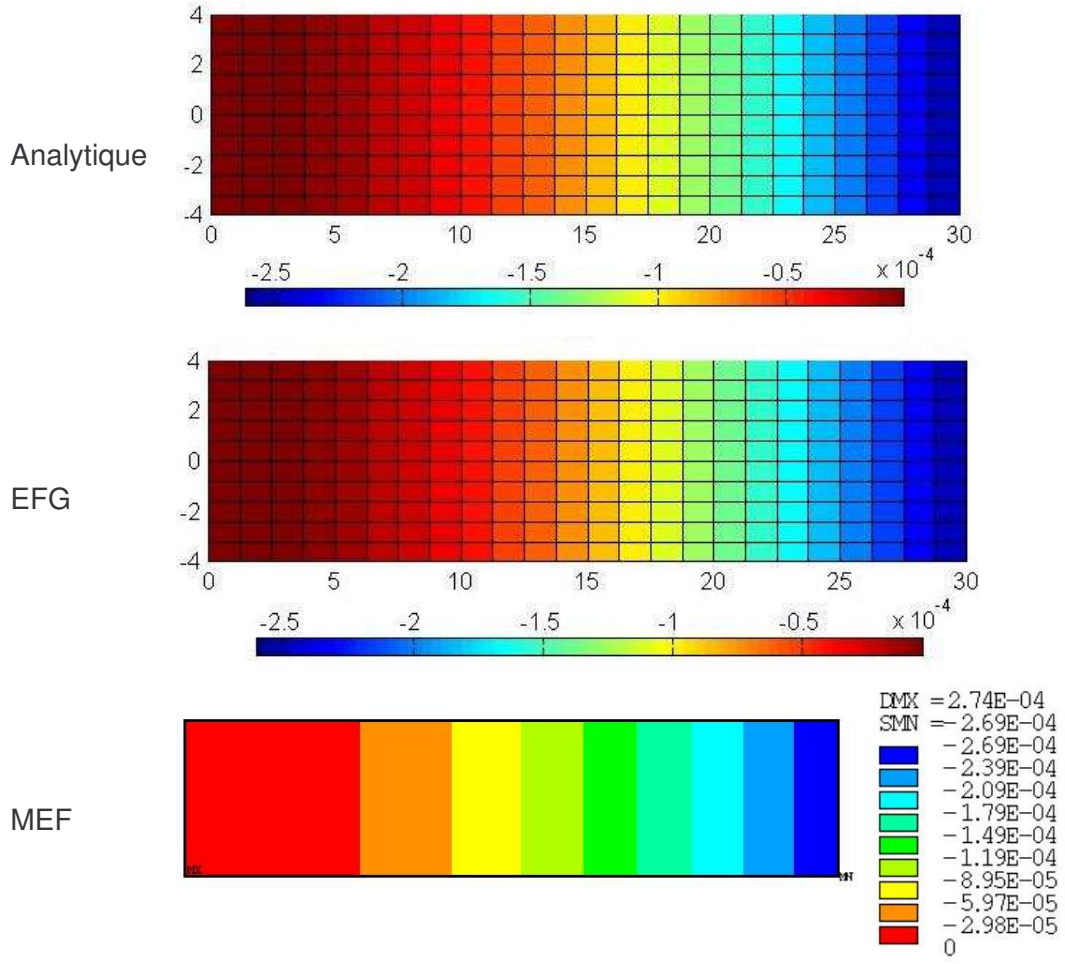


Figure 6.6 - Déplacements verticaux de la poutre obtenus par les différentes méthodes (*m*)

En regard des résultats du Tableau 6.3, la distribution de points 15x7 est reprise dans les calculs qui suivent.

La deuxième fréquence propre est choisie pour réaliser l'analyse de fiabilité. Pour cela, le Tableau 6.4 présente les valeurs de la deuxième fréquence propre de la poutre pour une distribution de points 15x7, obtenues par les deux méthodes numériques. La variation relative entre les deux ensembles de résultats est aussi rapportée dans le même tableau.

Tableau 6.4 - Comparaison des valeurs de la deuxième fréquence propre de la poutre

Points	**MEF (*Hz*)**	**EFG (*Hz*)**	**Différence (%)**
15x7	7,1114	7,4291	4,4675

Ces résultats permettent de valider le modèle sans maillage de la poutre encastrée dans la modélisation des problèmes en dynamique.

6.2.2 Analyse de fiabilité de la poutre encastrée

Le but de l'analyse de fiabilité est d'estimer la probabilité de défaillance P_f en considérant t, H, L, P comme variables de conception. L'intérêt d'ajouter la charge P comme variable aléatoire est d'associer à l'influence de celle-ci le comportement statique et dynamique de la structure à travers le raidissement par contraintes de la poutre (Rojas, 2004).

Un premier scénario est étudié dans l'analyse de fiabilité pour une seule fonction d'état limite définie selon $G_1(t, H, L, P) = u_y - u_y^{\lim}$, où :

- u_y est le déplacement vertical de l'extrémité libre de la poutre;
- $u_y^{\lim}$ est le déplacement vertical maximal admit comme 0,001 *m*.

Cette fonction introduit un critère statique visant à limiter la valeur maximale du déplacement vertical de la poutre encastrée.

Le Tableau 6.5 résume les caractéristiques statistiques des variables aléatoires.

Tableau 6.5 - Caractéristiques statistiques des variables aléatoires de la poutre

Variable	**Distribution**	**Moyenne**	**CV**
t (*m*)	Normale	2	8 %
H (*m*)	Normale	8	8 %
L (*m*)	Normale	30	8 %
P (*N*)	Log-normale	500000	8 %

Dans l'analyse de fiabilité, la fonction d'état limite est évaluée par un modèle sans maillage EFG et par un modèle EF. Le modèle EF utilise des éléments de poutre d'Euler-Bernoulli mis en œuvre sous MATLAB® par Rojas (2004). Dans cet exemple, le modèle EF développé avec ANSYS® est exclu dans l'intérêt de comparer la performance des méthodes EFG et MEF en utilisant le même outil informatique (MATLAB®).

Le Tableau 6.6 permet de comparer les résultats obtenus par les approches FORM, SORM et HBRM (cette dernière en utilisant ACO) qui évaluent la fonction d'état limite à travers la modélisation par EF et par EFG.

Tableau 6.6 - Résultats de l'analyse de fiabilité de la poutre en utilisant les méthodes EFG et MEF pour le premier scénario

	MEF			**EFG**		
	FORM	**SORM**	**HBRM**	**FORM**	**SORM**	**HBRM**
t (*m*)	1,87	1,87	2,00	1,87	1,87	1,85
H (*m*)	6,09	6,09	6,75	6,09	6,09	6,66
L (*m*)	34,72	34,72	31,09	34,71	34,71	34,22
P (*N*)	529459	529459	518395	530366	530366	544132
N_G	45	61	200	45	45	200
T (*s*)	4,00	4,25	14.70	175	241.5	1512.88
β	3,74	3,73	2,07	3,75	3,73	3,10
P_f (%)	0,01	0,01	1,92	0,01	0,01	0,10
R_l (%)	99,99	99,99	98,08	99,99	99,99	99,90

On remarque que les résultats obtenus par FORM et SORM sont légèrement meilleurs si comparés à ceux obtenus par HBRM. Comparés à ceux obtenus en utilisant la MEF, les résultats obtenus à travers l'EFG sont meilleurs pour quasiment le même nombre d'évaluations de la fonction d'état limite, notamment pour le cas où la HBRM est utilisée.

Comme il a été montré préalablement, il peut s'avérer intéressant d'utiliser les résultats de la HBRM comme estimation initiale pour FORM et SORM, mais pour cette application-ci, cela n'est pas considéré nécessaire. Ainsi, on peut vérifier que des résultats similaires, tous considérés comme satisfaisants ont été obtenus à travers les différentes combinaisons de modèles et de méthodes d'évaluation de la fiabilité.

En dépit des temps de calcul plus élevés, la méthode EFG reste performante aussi que la MEF pour un même nombre d'évaluations de la fonction d'état limite.

Une deuxième fonction d'état limite est ajoutée additivement à celle du scénario précèdent dans l'objectif de placer la valeur de la deuxième fréquence propre de la poutre à l'intérieur d'une plage fréquentielle souhaitée. Cette fonction est exprimée selon :

$$G_2(t, H, L, P) = \left| f_2 - f_2^m \right| - \Delta f \tag{6.7}$$

où:

- f_2 est la deuxième fréquence propre de la poutre (*Hz*)
- f_2^m est la valeur souhaitée de la deuxième fréquence propre de la poutre (*Hz*)
- $\Delta f = 3$ *Hz* est la plage fréquentielle adoptée.

Comme dans des applications similaires précédentes, le problème en question peut être considéré comme un problème de recalage de modèle, et peut être étendu pour tenir compte de plusieurs fréquences propres simultanément.

Les résultats de l'analyse de fiabilité en utilisant HBRM pour ce second scénario sont présentés dans le Tableau 6.7, et sont considérés satisfaisants. Les résultats obtenus par EFG sont meilleurs que ceux obtenus par la MEF et, si comparés avec ceux du Tableau 6.6, on peut conclure que la fiabilité décroît lorsque le nombre de fonctions d'état limite croît.

Tableau 6.7 - Résultats de l'analyse de fiabilité de la poutre en utilisant les méthodes EFG et MEF pour le second scénario

	MEF	**EFG**
t (*m*)	1,86	1,82
H (*m*)	7,50	7,36
L (*m*)	33,20	34,61
P (*N*)	537231	533801
N_G	130	200
β	2,01	2,59
P_f (%)	2,24	0,48
R_l (%)	97,76	99,52

En rappelant que la validation de modèles de plaques par la méthode EFG a été présentée au Chapitre V, la section suivante décrit l'analyse de fiabilité des plaques isotropes et orthotropes.

6.3. Analyse de fiabilité d'une plaque isotrope basée sur la méthode EFG

Dans cette section sont décrits des exemples d'utilisation des méthodes FORM, SORM et HBRM appliqués à l'analyse de fiabilité d'une plaque isotrope en statique modélisée par la méthode EFG et la MEF. La Figure 6.7 représente une plaque rectangulaire, sur appui simple sur ses bords à gauche et inférieur, les deux autres bords restant libres. La plaque est soumise à un chargement de traction dans sont plan N_x sur son bord droite.

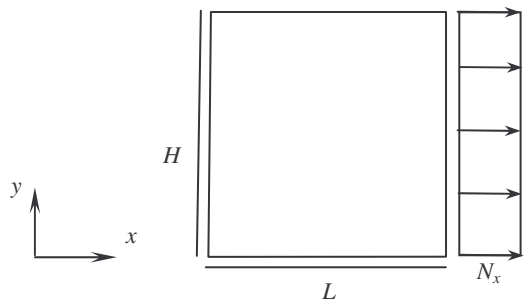


Figure 6.7 - Schéma de la plaque isotrope

6.3.1. Validation du modèle de plaque isotrope

Les paramètres du modèle de plaque isotrope sont décrits au Tableau 6.8.

Tableau 6.8 - Paramètres de la plaque isotrope

L (*m*)	H (*m*)	E (*Pa*)	ν	N_x (*N/m*)
5	5	$4{,}5\text{x}10^{10}$	0,3	$1\text{x}10^{6}$

La plaque modélisée par EF utilise des éléments d'élasticité plane PLANE42 qui est formé par 4 nœuds et 2 d.d.l. (u_x et u_y) par nœud. Ainsi le modèle de plaque isotrope a 394 d.d.l.s. Une évaluation du modèle en EF prend ≈ 3 *s*.

Le nombre d'équations utilisé par le modèle sans maillage est de 504, mais pour former ce système d'équations, 4 procédures d'intégration sont réalisés à savoir : pour le domaine et pour les 3 bords de la plaque soumis à des conditions aux limites (déplacements et forces). Une évaluation du modèle sans maillage prend ≈ 105 *s*.

La Figure 6.8 permet de comparer les configurations non déformées et déformées obtenues par les modèles EFG et MEF en utilisant le logiciel ANSYS®.

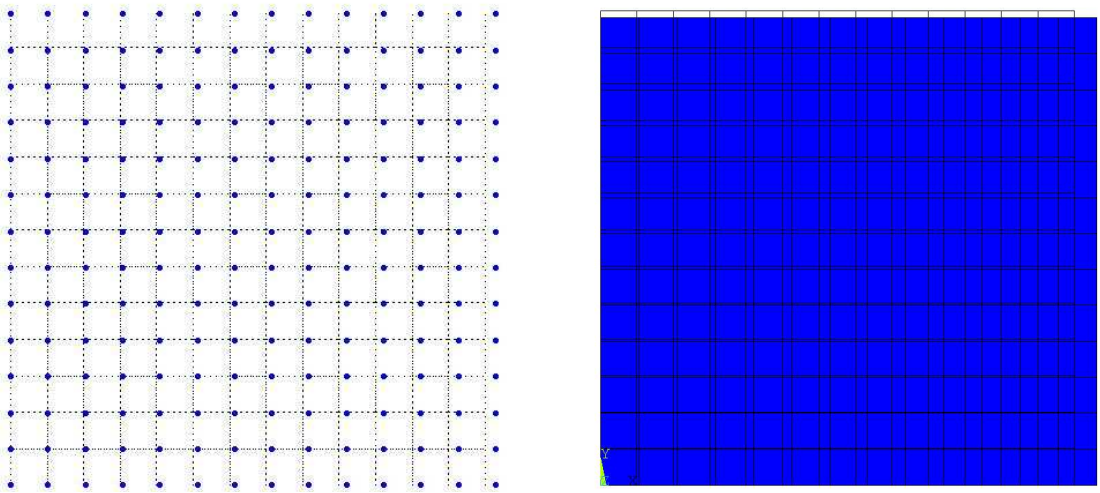


Figure 6.8 - Configurations non déformées et déformées de la plaque isotrope obtenues par les modèles EFG et la MEF

Les déplacements maximaux obtenus par des modèles numériques sont rassemblés dans le Tableau 6.9, ainsi que les erreurs relatives.

Tableau 6.9 - Déplacements maximaux de la plaque isotrope

Déplacement	**EFG**	**MEF**	**Erreur (%)**
u_x (m)	1,11x10^{-4}	1,11x10^{-4}	0,01
u_y (m)	-3,33x10^{-5}	-3,33x10^{-5}	0,11

Les distributions des déplacements horizontaux et verticaux de la plaque, modélisée selon les deux stratégies, sont présentées dans la Figure 6.9. Les deux distributions des déplacements obtenues par les deux méthodes de modélisation sont très proches.

Ces résultats ont permis de valider le modèle sans maillage de la plaque isotrope et de les utiliser dans l'analyse de fiabilité présentée par la suite.

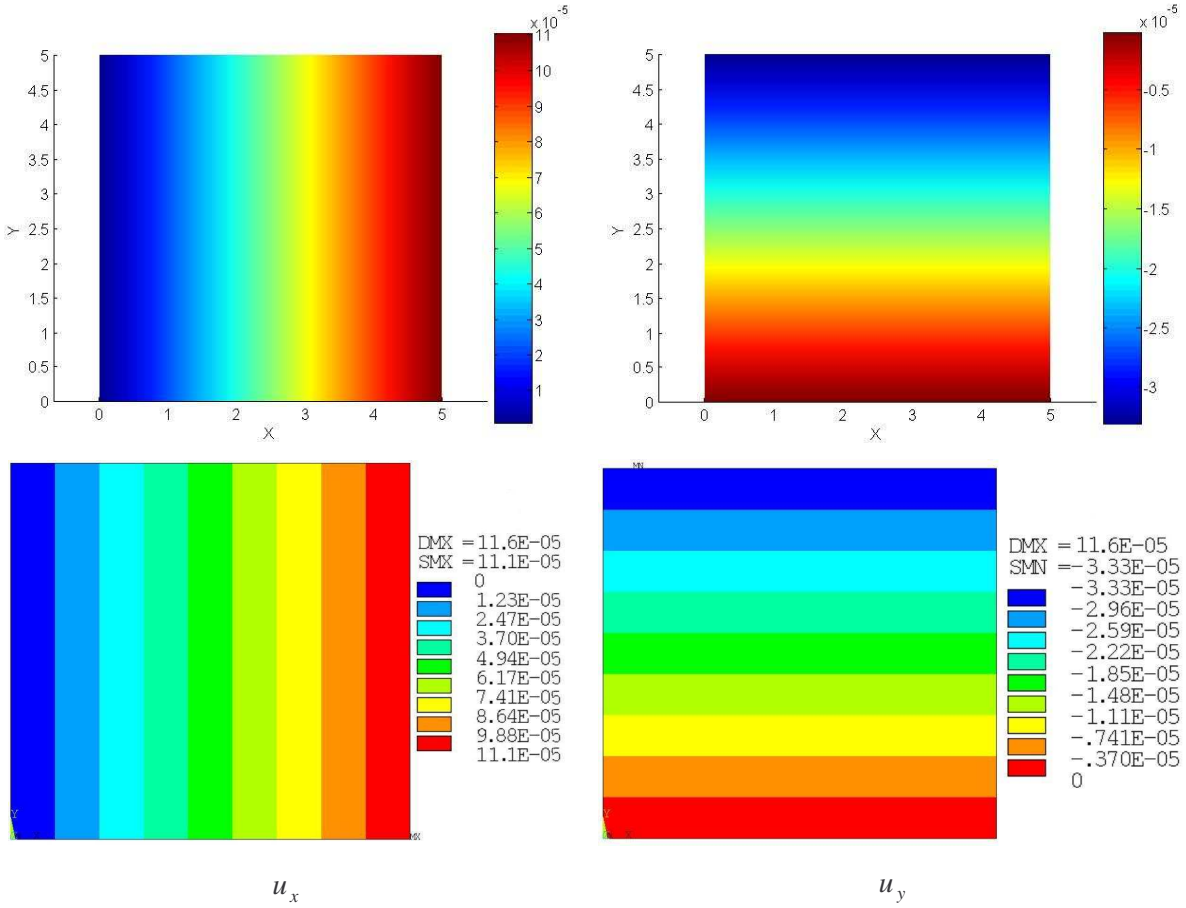


Figure 6.9 - Déplacements (*m*) horizontaux et verticaux de la plaque isotrope obtenus par les modèles MEF et EFG

6.3.2. Analyse de fiabilité de la plaque isotrope

Les caractéristiques statistiques des variables aléatoires sont décrites au Tableau 6.10. La fonction d'état limite adoptée, exprimée selon $G(E,\nu,N_x)=u_x-u_x^{\lim}$ introduit un critère statique qui vise à limiter la valeur maximale du déplacement horizontal de la plaque à $u_x^{\lim}=2.22x10^{-4}$ *m*.

Les résultats de l'analyse de fiabilité obtenus par les méthodes FORM, SORM et HBRM, utilisent la méthode EFG pour évaluer la fonction d'état limite, sont présentés dans le Tableau 6.11.

Tableau 6.10 - Caractéristiques statistiques des variables aléatoires de la plaque isotrope

Variable	Distribution	Moyenne	CV
E (x10^{10}*N/m*^{2})	Log-normale	4,5	10%
ν	Log-normale	0,3	10%
N_x (x10^6*N/m*)	Log-normale	1	10%

En ce qui concerne HBRM, il y a eu l'intérêt de comparer les performances de trois différentes techniques d'optimisation heuristiques, à savoir GA, PSO et ACO. Les résultats obtenus, en termes des niveaux de fiabilité atteints, sont considérés comme étant très satisfaisants pour les méthodes FORM et SORM et insuffisants pour HBRM/PSO.

Tableau 6.11 - Résultats de l'analyse de fiabilité de la plaque isotrope en utilisant EFG

	Approche classique		**HRBM**		
	FORM	**SORM**	**GA**	**PSO**	**ACO**
E (x10^{10}*N/m*^{2})	3,17	3,17	4,31	4,72	4,72
ν	0,30	0,30	0,28	0,30	0,33
N_x (x10^6*N/m*)	1,41	1,41	0,93	1,01	1,03
N_G	28	39	40	40	40
T (*min*)	48,67	67,793	129,61	124,38	112,93
β	4,91	4,91	2,09	0,76	2,07
P_f (%)	4,64x10^{-5}	4,64x10^{-5}	1,84	22,36	1,92
R_l (%)	$\approx$ 100	$\approx$ 100	98,16	77,63	98,08

Le Tableau 6.12 présente les résultats de l'analyse de fiabilité : via FORM, SORM et HBRM en utilisant le modèle EF pour évaluer la fonction d'état limite. De nouveau, très bons résultats sont obtenus par FORM et SORM et des résultats moins satisfaisants sont fournis par HBRM.

Les résultats des Tableaux 6.11 et 6.12 sont considérés, d'une manière générale, comme satisfaisants. Ils permettent d'observer que les approximations classiques aboutissent à des valeurs de l'indice de fiabilité plus grands que ceux obtenus par HBRM.

Tableau 6.12 - Résultats de l'analyse de fiabilité de la plaque isotrope en utilisant la MEF

	Approche classique		HRBM		
	FORM	**SORM**	**GA**	**PSO**	**ACO**
E (x10^{10}*N/m*^{2})	3,17	3,17	4,73	4,56	4,18
ν	0,30	0,30	0,32	0,32	0,32
N_x (x10^6*N/m*)	1,41	1,41	0,86	1,04	0,92
N_G	28	39	40	40	40
T (*min*)	0,83	1,16	2,06	1,92	1,99
β	4,91	5,33	3,61	1,44	2,45
P_f (%)	4,47x10^{-5}	4,99x10^{-6}	0,016	7,65	0,72
R_l (%)	≈ 100	≈ 100	99,98	92,35	99,28

En général, les méthodes d'analyse de fiabilité combinées à la MEF donnent des valeurs de fiabilité supérieures à celles obtenues en utilisant les modèles sans maillage. L'utilisation de la méthode EFG implique des temps de calculs plus élevés que la MEF mais pour un même nombre d'évaluations (N_G) de la fonction d'état limite.

Par ailleurs, on vérifie que pour quasiment le même nombre d'évaluations de la fonction d'état limite, les approximations métaheuristiques sont aussi performantes. Ceci en rappelant que, comme il a été montré précédemment, lorsqu'on réalise plusieurs calculs, les résultats fournis par HBRM sont nettement améliorés. Pour tous les cas, les GA donnent de meilleurs résultats en comparaison avec PSO et ACO pour toutes les deux méthodes de modélisation. Les résultats obtenus par HBRM peuvent être utilisés comme des estimations initiales convenables dont les méthodes FORM et SORM ont besoin.

6.4. Analyse de fiabilité d'une plaque orthotrope basée sur la méthode EFG

Cette application concerne l'utilisation des méthodes FORM, SORM et HBRM appliquées à l'analyse de fiabilité d'une plaque orthotrope en statique modélisée à partir de la méthode EFG et MEF. La plaque stratifiée (Figure 6.10) a les mêmes conditions d'appui et de charge que la plaque isotrope étudiée dans la section précédente. En revanche elle est formée par 4 plis. Sur la Figure 6.10, t et θ représentent l'épaisseur et l'angle de rotation des plis.

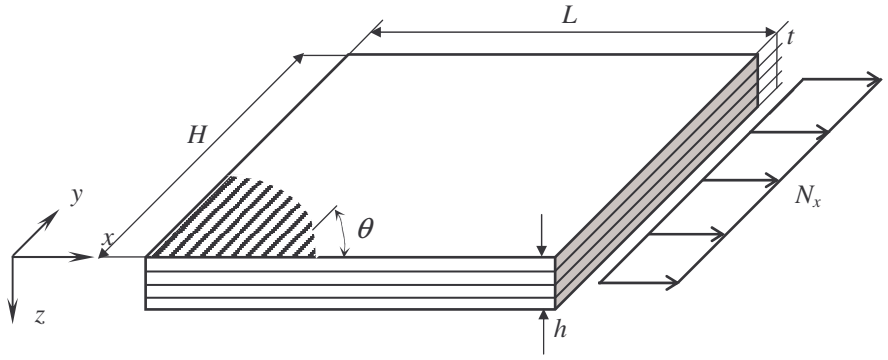


Figure 6.10 - Schéma de la plaque orthotrope

La modélisation numérique de la plaque orthotrope est basée sur l'état plan des contraintes.

6.4.1. Validation du modèle de la plaque orthotrope

Les propriétés géométriques et de charge de la plaque orthotrope (S-glass/epoxy) sont rassemblées dans Tableau 6.13 tandis que les propriétés mécaniques le sont dans le Tableau 6.14. Les dimensions de la plaque montrent qui elle ne s'agit pas d'une plaque réelle mais que par effets d'application numérique peut être utilisée.

Tableau 6.13 - Propriétés géométriques et de charge de la plaque orthotrope

L (*m*)	H (*m*)	h (*m*)	t (*m*)	θ (degrés)	N_x (*N/m*)
0,05	0,05	$4x10^{-3}$	$1x10^{-3}$	-30/30/30/-30	$1x10^{4}$

Tableau 6.14 - Propriétés mécaniques de la plaque orthotrope

E_1 (*Pa*)	E_2 (*Pa*)	G_{12} (*Pa*)	ν_{12}
$5,5x10^{10}$	$1,6x10^{10}$	$0,76x10^{10}$	0,26

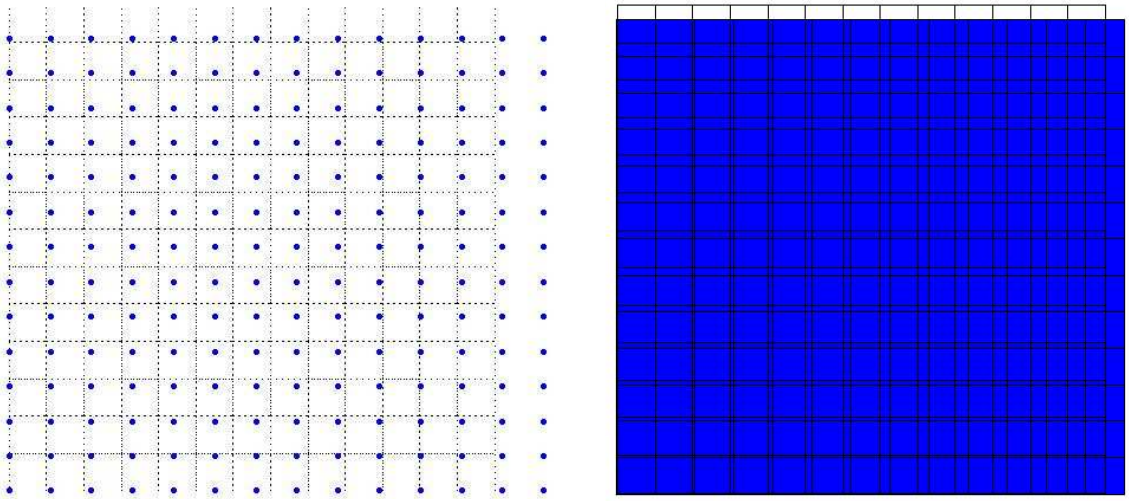
L'équation suivante exprime la relation entre les propriétés mécaniques ci-dessus :

$$\nu_{21} = \frac{\nu_{12} E_2}{E_1} \tag{6.8}$$

La Figure 6.11 illustre les configurations non déformées et déformées obtenues à travers une modélisation sans et avec maillage. La plaque orthotrope est modélisée en EF en utilisant le logiciel ANSYS® et par la méthode EFG.

Le modèle des éléments finis utilise l'élément de plaque SHELL99 qui est formé par 8 nœuds et 6 d.d.l (3 déplacements et 3 rotations) par nœud. Ainsi le modèle de plaque orthotrope a 1626 d.d.l.s. Une évaluation du modèle en EF prends $\approx 3{,}06$ *s*.

Comme pour la plaque isotrope, le modèle de plaque orthotrope résout un système d'équations 504x504 par 4 procédures d'intégration. Elles forment le système d'équations. Une évaluation du modèle sans maillage prend ≈ 106 *s*.



EFG MEF

Figure 6.11 - Configurations non déformées et déformées de la plaque orthotrope obtenues par les techniques EFG et la MEF

La Figure 6.12 représente les distributions des déplacements horizontaux et verticaux de la plaque orthotrope, modélisée par les deux techniques numériques. En regard de cette figure il est possible de constater que les distributions de déplacements sont très proches pour les deux méthodes de modélisation.

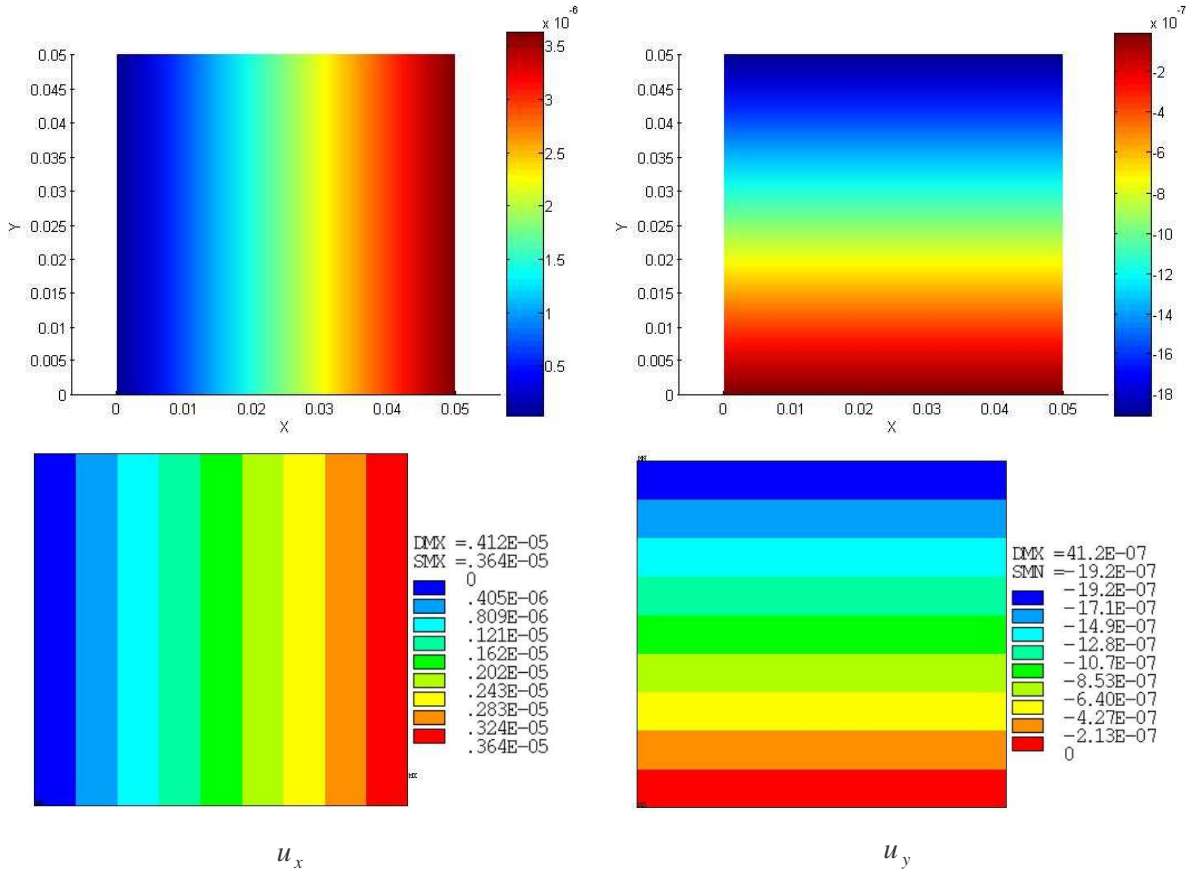


Figure 6.12 - Déplacements (*m*) horizontaux et verticaux de la plaque orthotrope obtenus par les méthodes MEF et EFG

Le Tableau 6.15 permet de comparer les déplacements maximaux obtenus à travers les deux méthodes de modélisation.

Tableau 6.15 - Déplacements maximaux de la plaque orthotrope

Déplacement	**EFG**	**MEF**	**Erreur (%)**
u_x (*m*)	3,64x10^{-6}	3,64x10^{-6}	6,30x10^{-6}
u_y (*m*)	-1,92x10^{-6}	-1,92x10^{-6}	0,005

Les résultats obtenus ci-dessus permettent de valider la modélisation de la plaque orthotrope par la méthode EFG, et d'assurer l'adéquation de cette technique pour l'analyse de fiabilité.

6.4.2. Analyse de fiabilité de la plaque orthotrope

Deux analyses de fiabilité sont considères dans cette application. La première pour le cas de 7 variables aléatoires et la deuxième pour 12 variables.

Cas 1 : 7 variables aléatoires

Pour le premier cas, les caractéristiques statistiques des variables aléatoires sont présentées au Tableau 6.16.

Tableau 6.16 - Caractéristiques statistiques des variables aléatoires de la plaque orthotrope, cas 1

Variable	**Distribution**	**Moyenne**	**CV**
h (x10^{-3}*m*)	Normale	4	10%
θ (degrés)	Normale	30	10%
E_1 (x10^{10}*Pa*)	Log-normale	5,5	10%
E_2 (x10^{10}*Pa*)	Log-normale	1,6	10%
ν_{12}	Log-normale	0,26	10%
G_{12} (x10^{9}*Pa*)	Log-normale	7,6	10%
N_x (x10^{4}*N/m*)	Log-normale	1	10%

La fonction d'état limite est exprimée selon : $G(h,\theta,E_1,E_2,\nu_{12},G_{12},N_x)=u_x-u_x^{\lim}$ en fonction du déplacement maximal dans la direction x, étant $u_x^{\lim}=7{,}29\times10^{-6}$ *m*.

Le Tableau 6.17 détaille les résultats de l'analyse de fiabilité pour le cas 1, obtenus par FORM, SORM et HBRM, en utilisant les modèles sans maillage de la plaque orthotrope.

Tableau 6.17 - Résultats de l'analyse de fiabilité de la plaque orthotrope pour la méthode EFG, cas 1

	Approche classique		HRBM		
	FORM	**SORM**	**GA**	**PSO**	**ACO**
h (x10^{-3}*m*)	3,05	3,05	3,60	3,83	4,48
θ (degrés)	35,05	35,05	24,18	32,51	32,19
E_1 (x10^{10}*Pa*)	5,04	5,04	4,34	5,15	4,25
E_2 (x10^{10}*Pa*)	1,59	1,59	1,25	1,85	1,58
ν_{12}	0,26	0,26	0,26	0,25	0,25
G_{12} (x10^{9}*Pa*)	6,87	6,87	7,76	8,55	7,13
N_x (x10^{4}*N/m*)	1,19	1,19	0,84	0,93	1,11
N_G	48	85	40	40	40
T (*min*)	79,07	140,02	87,93	89,75	89,79
β	3,64	3,59	4,34	2,39	3,21
P_f (%)	0,013	0,017	7,23x10^{-4}	0,83	0,067
R_l (%)	99,99	99,98	$\approx$ 100	99,17	99,93

Dans le Tableau 6.18 sont reportées les estimations de l'analyse de fiabilité par les méthodes FORM, SORM et HBRM en utilisant le modèle EF de la plaque orthotrope pour le cas 1.

Les résultats précédents sont considérés comme satisfaisants. La méthode HBRM (via GA) se montre plus performante que FORM et SORM en ce qui concerne le nombre d'évaluations N_G et au niveau de fiabilité.

Les résultats des méthodes FORM et SORM ne convergent pas vers des valeurs proches pour les deux types de modélisation mais font un même nombre d'évaluations de la fonction d'état limite.

En ce qui concerne la HBRM, pour tous les cas sa performance est considérée très satisfaisante par rapport au niveau de fiabilité et au nombre d'évaluations de la fonction d'état limite. Les GA fournissent de meilleurs résultats en comparaison avec PSO et ACO.

Tableau 6.18 - Résultats de l'analyse de fiabilité de la plaque orthotrope pour la MEF, cas 1

	Approche classique		HRBM		
	FORM	**SORM**	**GA**	**PSO**	**ACO**
h (x10^{-3}*m*)	4	4	3,25	3,94	4,09
θ (degrés)	38,26	38,26	29,10	26,17	31,07
E_1 (x10^{10}*Pa*)	4,96	4,96	4,68	6,12	5,64
E_2 (x10^{10}*Pa*)	1,59	1,59	1,60	1,73	1,77
ν_{12}	0,26	0,26	0,28	0,28	0,33
G_{12} (x10^{9}*Pa*)	6,30	6,30	9,19	7,03	6,25
N_x (x10^{4}*N/m*)	1,33	1,33	1,19	1,00	0,90
N_G	119	156	40	40	40
T (*min*)	4,68	6,14	2,67	2,43	2,66
β	4,52	6,09	3,70	2,25	3,51
P_f (%)	3,14x10^{-4}	5,47x10^{-5}	0,011	1,21	0,022
R_l (%)	≈ 100	≈ 100	99,99	98,79	99,98

Cas 2 : 12 variables aléatoires

La fonction d'état limite est la même que pour le premier cas.

Dans le deuxième cas, 12 variables aléatoires sont considérées, leurs caractéristiques statistiques étant présentées dans le Tableau 6.19. Dans ce tableau t_i et θ_i représentent respectivement l'épaisseur et l'angle de rotation des 4 plis de la plaque orthotrope.

Tableau 6.19 - Caractéristiques statistiques des variables aléatoires de la plaque orthotrope, cas 2

Variable	Distribution	Moyenne	CV
t_1 (x10^{-3}*m*)	Normale	1	10%
t_2 (x10^{-3}*m*)	Normale	1	10%
t_3 (x10^{-3}*m*)	Normale	1	10%
t_4 (x10^{-3}*m*)	Normale	1	10%

θ_1 (degrés)	Normale	-30	10%
θ_2 (degrés)	Normale	30	10%
θ_3 (degrés)	Normale	30	10%
θ_4 (degrés)	Normale	-30	10%
E_1 (x10^{10}*Pa*)	Log-normale	5,5	10%
E_2 (x10^{10}*Pa*)	Log-normale	1,6	10%
G_{12} (x10^{9}*Pa*)	Log-normale	7,6	10%
N_x (x10^{4}*N/m*)	Log-normale	1	10%

Les résultats de l'analyse de fiabilité du cas 2, obtenus à travers les méthodes FORM, SORM et HBRM en utilisant les modèles sans maillage, sont rapportés au Tableau 6.20.

Le Tableau 6.21 rassemble les résultats de l'analyse de fiabilité du cas 2, obtenus à travers les méthodes FORM, SORM et HBRM en utilisant les modèles EF.

Les résultats du second cas sont considérés aussi satisfaisants. Les résultats de la HBRM, via ACO en utilisant le modèle sans maillage et via GA en utilisant le modèle éléments finis, sont meilleurs que ceux obtenus par FORM et SORM. Cette comparaison est faite en fonction du nombre d'évaluations et du niveau de fiabilité estimée.

Les méthodes FORM et SORM convergent vers des valeurs très proches l'une de l'autre pour les deux modèles utilisés. Ceci pour un même nombre d'évaluations de la fonction d'état limite.

Par rapport à la HBRM, pour tous les cas sa performance est considérée très satisfaisante en examinant le niveau de fiabilité et le nombre d'évaluations de la fonction d'état limite.

Les temps de calcul impliqué dans les évaluations de la fonction d'état limite en utilisant la méthode EFG est plus grand que celui de la MEF. Cependant, les estimations de l'analyse de fiabilité sont très proches pour toutes les méthodes pour un même nombre d'évaluations de la fonction d'état limite aussi bien par la méthode EFG que par la MEF. C'est-à-dire, pour les méthodes FORM et SORM le même nombre d'évaluations est effectué jusqu'à leur convergence et pour la HBRM jusqu'à ce que le critère d'arrêt soit atteint.

Le temps de calcul est très différent pour les techniques de modélisation en raison des caractéristiques d'intégration et la dimension du système d'équation résolu par ces techniques. Ces caractéristiques ont été détaillées dans la procédure de validation des modèles.

Tableau 6.20 - Résultats de l'analyse de fiabilité de la plaque orthotrope pour la méthode EFG, cas 2

	Approche classique		HRBM		
	FORM	**SORM**	**GA**	**PSO**	**ACO**
t_1 (x10^{-3}*m*)	0,91	0,91	0,92	1,01	1,19
t_2 (x10^{-3}*m*)	0,89	0,89	0,93	1,02	0,95
t_3 (x10^{-3}*m*)	0,89	0,89	1,18	1,01	1,15
t_4 (x10^{-3}*m*)	0,91	0,91	1,18	0,88	1,24
θ_1 (degrés)	-32,14	-32,14	-34,36	-24,64	-29,17
θ_2 (degrés)	32,52	32,52	31,83	22,368	28,22
θ_3 (degrés)	32,52	32,52	27,62	34,77	30,05
θ_4 (degrés)	-32,14	-32,14	-26,87	-31,91	-30,74
E_1 (x10^{10}*Pa*)	4,54	4,54	6,37	6,09	5,72
E_2 (x10^{10}*Pa*)	1,59	1,59	1,16	1,56	1,65
G_{12} (x10^{9}*Pa*)	6,45	6,45	8,60	7,29	5,07
N_x (x10^{4}*N/m*)	1,41	1,41	0,96	0,79	1,22
N_G	73	165	40	40	40
T (*min*)	121,42	274,45	86,57	88,98	89,10
β	4,92	4,89	5,14	4,55	5,72
P_f (%)	4,26x10^{-5}	5,00x10^{-5}	1,39x10^{-5}	2,65x10^{-4}	5,33x10^{-7}
R_l (%)	$\approx$ 100	$\approx$ 100	$\approx$ 100	$\approx$ 100	$\approx$ 100

Tableau 6.21 - Résultats de l'analyse de fiabilité de la plaque orthotrope pour la MEF, cas 2

	Approche classique		HRBM		
	FORM	**SORM**	**GA**	**PSO**	**ACO**
t_1 (x10^{-3}*m*)	0,99	0,99	0,71	1,24	0,77
t_2 (x10^{-3}*m*)	0,99	0,99	1,03	0,87	0,98
t_3 (x10^{-3}*m*)	0,99	0,99	1,20	0,93	1,17
t_4 (x10^{-3}*m*)	0,99	0,99	0,92	1,07	0,91
θ_1 (degrés)	-33,18	-33,18	-34,32	-30,85	-28,06
θ_2 (degrés)	32,47	32,47	24,38	30,95	29,49
θ_3 (degrés)	32,47	32,47	32,98	30,58	32,25
θ_4 (degrés)	-33,18	-33,18	-21,99	-25,64	-41,44
E_1 (x10^{10}*Pa*)	4,43	4,43	5,37	6,42	5,79
E_2 (x10^{10}*Pa*)	1,35	1,35	2,13	1,78	1,42
G_{12} (x10^{9}*Pa*)	6,26	6,26	6,32	8,16	6,81
N_x (x10^{4}*N/m*)	1,49	1,49	1,32	1,00	1,34
N_G	197	207	40	40	40
T (*min*)	8,58	8,98	2,63	2,31	2,64
β	5,56	5,99	6,83	3,85	5,99
P_f (%)	1,33x10^{-6}	1,02x10^{-7}	4,35x10^{-10}	0,006	1,05x10^{-7}
R_l (%)	≈ 100	≈ 100	≈ 100	99.99	≈ 100

6.5. Conclusion

Ce chapitre présente plusieurs applications de l'analyse de fiabilité des structures uni et bidimensionnelles modélisées par deux techniques différentes, à savoir : EFG et MEF, tenant cette dernière comme référence pour comparaisons. On s'intéresse, en particulier au comportement statique de structures composites. Ainsi, la modélisation de matériaux composites à travers la méthode EFG est intégrée à la méthodologie de conception proposée initialement au Chapitre II. Les résultats permettent de comparer la performance

des méthodes sans et avec maillage dans les applications considérées. La flexibilité et l'applicabilité de cette méthodologie sont évaluées en utilisant les méthodes FORM, SORM et HBRM.

Dans les applications unidimensionnels le temps de calcul de leur modélisation sans et avec maillage est pratiquement la même. En contrepartie, pour des applications bidimensionnels, les modèles sans maillage ont un temps de calcul plus élevé que ceux avec un maillage. Ceci est dû aux caractéristiques détaillées dans Chapitre V concernant l'imposition des conditions limites dans les cas bidimensionnels qui exige plus de temps de calcul. Naturellement, le coût de calcul de la modélisation se reflète dans le coût de calcul de l'analyse de fiabilité. Cette observation encourage à l'amélioration et l'optimisation des algorithmes de modélisation par la méthode EFG.

En ce qui concerne l'analyse de fiabilité, les méthodes FORM, SORM et HBRM ont donné de bons résultats dans toutes les applications effectuées. Sur tout la HBRM est montrée plus performante dans les applications bidimensionnelles aux matériaux composites.

Les résultats de l'analyse de fiabilité montrent que malgré des temps de calcul plus élevés, la méthode EFG reste performante pour les cas bidimensionnels. Lorsque l'on observe le nombre d'évaluations de la fonction d'état limite par des modèles sans et avec maillage, on vérifie que ce nombre est pratiquement le même pour les deux méthodes. En sachant que l'un des critères de comparaison de performance des méthodes d'optimisation est le nombre d'évaluations des modèles dans la fonction coût on peut affirmer que la méthode EFG a une performance équivalente à la MEF dans l'analyse de fiabilité pour les applications présentées. En prenant en compte le temps total de calcul, la MEF est plus performante que la méthode EFG. Ainsi, il est possible de prévoir que dans les applications où la MEF présente quelques limitations de modélisation, la méthode EFG aura une meilleure performance.

CHAPITRE VII

APPLICATIONS NUMERIQUES D'OPTIMISATION FIABILISTE

Petit à petit je me débarrasse de ma méconnaissance et je me regarde devant la connaissance infinie

Ce dernier chapitre d'applications présente les résultats issus des simulations numériques mettant en œuvre une stratégie d'optimisation fiabiliste qui combine la méthode des facteurs optimaux de sûreté (OSF Optimum Safety Factors) avec des algorithmes d'optimisation heuristiques (GA, PSO et ACO) intégrés dans le logiciel SOT (*Simple Optimization Toolbox*). De brefs commentaires sur l'optimisation classique, l'optimisation fiabiliste classique, l'optimisation fiabiliste hybride et l'optimisation fiabiliste hybride améliorée permettent de justifier le choix de la méthode OSF. En cherchant à montrer l'applicabilité et l'efficacité de cette stratégie, ce chapitre présente des applications pour la minimisation du poids des structures, en établissant un niveau de fiabilité cible. Pour vérifier le fonctionnement de cette stratégie, les résultats d'une analyse de fiabilité des systèmes étudiés sont comparés à ceux obtenus par l'optimisation fiabiliste. L'évaluation du comportement de ces systèmes est réalisée par EF et par la méthode EFG.

7.1. Optimisation fiabiliste des structures

Un bref état de l'art sur l'optimisation fiabiliste est présenté dans cette section.

Un problème d'optimisation déterministe est généralement formulé pour la minimisation ou la maximisation d'une fonction coût $f(\mathbf{y})$ soumise à $g_i(\mathbf{y}) \leq 0$ ($i = 1,...,m$) et à $h_j(\mathbf{y}) = 0$ ($j = 1,..., p$). g_i et h_j sont respectivement les contraintes d'inégalité et d'égalité, fonctions des variables de conception déterministes $\mathbf{y} \in S$, étant S l'espace de recherche.

Si des informations aléatoires sont prises en compte, il devient nécessaire de reformuler le problème d'optimisation précédent. Dans ce problème, la sûreté d'un système est prise en compte en introduisant des facteurs de sûreté.

Dans ce sens, la résolution d'un problème d'optimisation fiabiliste consiste à trouver un équilibre entre le niveau de fiabilité et le coût de conception optimale d'une structure. Dans le domaine de l'optimisation fiabiliste des variables de conception aléatoires $\mathbf{x}$ représentent les incertitudes du système sont considérées (Akbora et al., 1993). Ainsi, un problème d'optimisation fiabiliste classique visant à minimiser la fonction coût $f(\mathbf{y})$ est formulé en intégrant la contrainte de fiabilité ($\beta(\mathbf{x},\mathbf{y}) \geq \beta_c$) aux contraintes $g_k(\mathbf{y}) \leq 0$, en rappelant que l'indice $\beta(\mathbf{x},\mathbf{y})$ est donné par l'Equation 2.18 (Chapitre II). La convergence des algorithmes d'optimisation fiabiliste dépend des procédures d'optimisation et d'analyse de fiabilité choisies. Cela conduit à un nombre cumulé d'itérations généralement grand. Pour pallier à cette difficulté, une approche hybride a été proposée par Kharmanda et al. (2002). Cette approche est basée sur la résolution simultanée des deux problèmes dans un nouvel espace hybride des variables aléatoires et de conception.

La formulation du problème d'optimisation fiabiliste par l'approche hybride consiste à la minimisation de la fonction coût $F(\mathbf{x},\mathbf{y}) = f(\mathbf{y}) d_\beta(\mathbf{x},\mathbf{y})$ sous $G(\mathbf{x},\mathbf{y}) \leq 0$, $d_\beta(\mathbf{x},\mathbf{y}) \geq \beta_c$ et $g_k(\mathbf{y}) \leq 0$. Dans ce problème $f(\mathbf{y})$ est la fonction coût, $d_\beta(\mathbf{x},\mathbf{y})$ est l'image de l'indice de fiabilité dans l'espace hybride, $G(\mathbf{x},\mathbf{y})$ est la fonction d'état limite. De multiples scénarios de défaillances peuvent être prises en compte par la méthode hybride, comme par exemple celui basé sur les fréquences propres décrit par Mohsine (2006).

Une version améliorée de la méthode hybride est proposée par Mohsine (2006). Elle s'exprime pour la minimisation de $F(\mathbf{x},\mathbf{y}) = f(\mathbf{y}) d_\beta(\mathbf{x},\mathbf{y}) f(\mathbf{m}_\mathbf{x})$ sous $G(\mathbf{x},\mathbf{y}) \leq 0$, $d_\beta(\mathbf{x},\mathbf{y}) \geq \beta_c$, $g_k(\mathbf{y}) \leq 0$ et $g_j(\mathbf{m}_\mathbf{x}) \leq 0$. Dans ce problème $\mathbf{m}_\mathbf{x}$ est le vecteur des valeurs moyennes de $\mathbf{x}$, $f(\mathbf{m}_\mathbf{x})$ est la fonction coût de la conception optimale et $g_j(\mathbf{m}_\mathbf{x}) \leq 0$ sont les contraintes qui contrôlent la configuration optimale dans le processus d'optimisation.

Pour toutes ces approches d'optimisation fiabiliste les valeurs initiales des variables déterministes et aléatoires doivent être fournies (Kharmanda et al., 2004). Ainsi, l'influence de l'estimation initiale sur les résultats de l'analyse de fiabilité, ainsi vérifiée pour les méthodes FORM et SORM, peut être dissipée en utilisant des méthodes d'optimisation métaheuristiques.

Selon Kharmanda et al. (2004), la méthode hybride permet de diminuer les coûts de calcul par rapport à la méthode d'optimisation fiabiliste, très coûteuse et sujet à des problèmes de convergence. Aussi la solution de la méthode hybride améliorée est plus

performante que celle de la méthode hybride. Dans le but de réduire le coût de calcul de ces méthodes et amoindrir la dépendance de l'expérience des ingénieurs dans la définition des facteurs de sécurité, Kharmanda et al. (2004) suggèrent une méthode semi-analytique dénommée méthode des facteurs optimaux de sûreté. En raison de la simplicité de mise en œuvre de la méthode OSF et de ses avantages par rapport aux méthodes d'optimisation fiabiliste citées ci-dessus, cette méthode est choisie pour être appliquée et intégrée à la méthode d'analyse de fiabilité déjà exposée.

7.1.1. Méthode des facteurs optimaux de sûreté

Partant du principe qu'une analyse de sensibilité joue un rôle très important pour l'étude de l'influence des variables de conception sur le comportement mécanique des systèmes, la méthode OSF associe l'analyse de sensibilité à l'analyse de fiabilité. Ainsi, avec cette combinaison sont réduits les principaux désavantages de l'optimisation classique et de l'optimisation fiabiliste. Parmi ces désavantages, l'optimisation déterministe ne considère pas l'existence des incertitudes sur la conception des systèmes et l'optimisation fiabiliste mène à augmenter le temps de calcul.

En prenant deux variables dans l'espace réduit u_1 et u_2 pour une défaillance définie par $H(\mathbf{u}) \leq 0$ illustrés dans la Figure 7.1, le point de conception est calculé selon :

$$\min \quad d^2 = u_1^2 + u_2^2 \tag{7.1}$$

soumis à :

$$H(u_1, u_2) \leq 0 \tag{7.2}$$

Pour la méthode OSF, le point de conception se situe à l'origine de l'espace d'optimisation et la fonction d'état limite $H(\mathbf{u}) = 0$ passe aussi par ce point (voir Figure 7.1). La solution optimale est un point trouvé sur le cercle de rayon β_t, dont le centre coïncide avec le point de conception. La fonction d'état limite coïncide avec le cercle en limitant les régions de conception faisable et infaisable. Afin de déterminer la position exacte du point de conception optimale, une analyse de sensibilité est nécessaire.

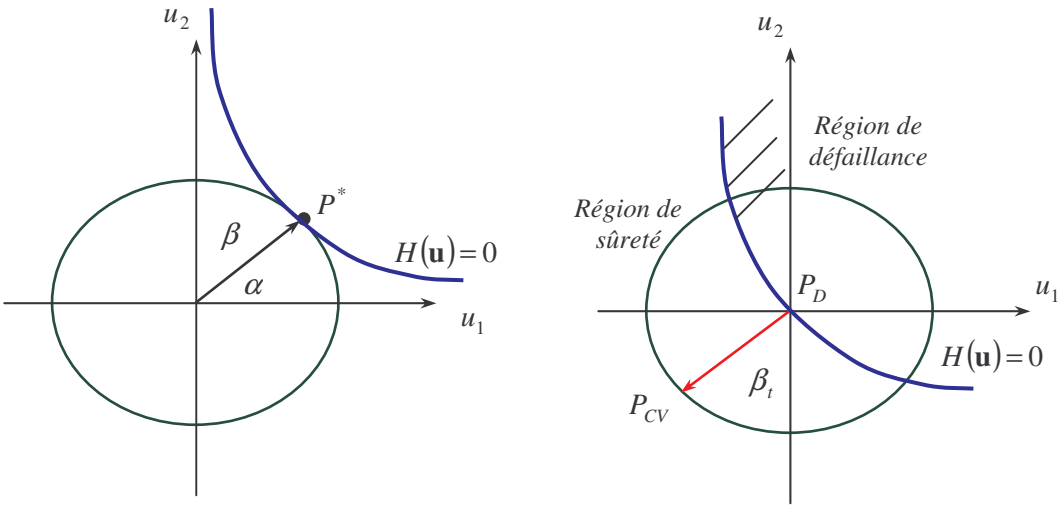


Figure 7.1 - Modélisation du point de conception et du point optimal (Kharmanda et al. 2004)

A partir de la Figure 7.1 nous observons que pour le point de conception P^*, la tangente de α est donnée par :

$$\tan(\alpha)=\frac{u_2}{u_1}=\frac{\dfrac{\partial H}{\partial u_2}}{\dfrac{\partial H}{\partial u_1}} \tag{7.3}$$

Cette équation montre la relation entre les éléments du vecteur de variables réduits et la sensibilité de la fonction d'état limite (Kharmanda, 2007). A partir de l'Equation 7.1 on obtient l'indice de fiabilité. Une autre façon d'écrire l'Equation 7.1 pour le cas de l'indice de fiabilité cible β_t de la Figure 7.1 est $\beta_t^2=u_1^2+u_2^2$, ainsi on peut exprimer :

$$\beta_t^2=u_2^2\frac{\left(\dfrac{\partial H}{\partial u_1}\right)^2}{\left(\dfrac{\partial H}{\partial u_2}\right)^2}+u_2^2 \tag{7.4}$$

Il est possible de remarquer que le vecteur des variables réduites dépend de la relation entre les gradients, selon :

$$u_2 = \beta_t \sqrt{\frac{\left(\frac{\partial H}{\partial u_2}\right)^2}{\left(\frac{\partial H}{\partial u_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial u_2}\right)^2}} \tag{7.5}$$

Pour une distribution normale, on a la loi de transformation suivante: $u_i = (x_i - \mu_i)/\sigma_i$ (pour $i = 1,...,n$ variables aléatoires), avec $\sigma_i = \delta_i \mu_i$. On introduit alors le facteur de sûreté $x_i = S_{f_i} \mu_i$ associé à x_i puis, en remplaçant l'écart type σ_i et x_i dans la loi de transformation, on aboutit à l'expression suivante :

$$u_i = \frac{S_{f_i} - 1}{\delta_i} \tag{7.6}$$

A partir de l'Equation 7.5 et 7.6 :

$$\frac{S_{f_2} - 1}{\delta_2} = \beta_t \sqrt{\frac{\left(\frac{\partial H}{\partial u_2}\right)^2}{\left(\frac{\partial H}{\partial u_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial u_2}\right)^2}}\ , \tag{7.7}$$

ou par rapport à S_{f_2} :

$$S_{f_2} = 1 + \delta_2 \beta_t \sqrt{\frac{\left(\frac{\partial H}{\partial u_2}\right)^2}{\left(\frac{\partial H}{\partial u_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial u_2}\right)^2}}\ , \tag{7.8}$$

D'un point de vue pratique, le calcul de $\partial H / \partial u_i$ n'est pas obtenu directement car le système est modélisé dans le domaine physique. En utilisant la règle de la chaîne :

$$\frac{\partial H}{\partial u_i} = \frac{\partial G}{\partial x_k} \frac{\partial T_k^{-1}(\mathbf{u},\mathbf{x})}{\partial u_i}, \qquad i = 1,\ldots,n\,, \quad k = 1,\ldots,K \tag{7.9}$$

où $T_k^{-1}(\mathbf{u},\mathbf{x})$ est l'inverse de la loi de transformation et en manipulant la dernière équation, on obtient une expression pouvant être utilisée directement dans le domaine physique :

$$\frac{\partial H}{\partial u_i} = \sqrt{\left|\frac{\partial G}{\partial x_i}\right|}, \qquad i = 1,\ldots,n \tag{7.10}$$

La distribution des éléments du vecteur $\mathbf{u}$ peut être mesurée à travers l'analyse de sensibilité de la fonction d'état limite par rapport au vecteur des variables au point de conception $\mathbf{x}$, de telle façon que :

$$S_{f_2} = 1 \pm \delta_2 \beta_t \sqrt{\frac{\left|\frac{\partial G}{\partial x_2}\right|}{\left|\frac{\partial G}{\partial x_1}\right| + \left|\frac{\partial G}{\partial x_2}\right|}} \tag{7.11}$$

Pour le cas général, on obtient :

$$S_{f_i} = 1 \pm \delta_i \beta_t \sqrt{\frac{\left|\frac{\partial G}{\partial x_i}\right|}{\sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial G}{\partial x_i}\right|}}, \qquad i = 1,\ldots,n \tag{7.12}$$

L'Equation (7.12) donne la position du point de conception optimale satisfaisant le niveau de fiabilité exigé (Kharmanda, 2007). Dans la dernière équation le signe de la dérivée décrit la valeur du facteur de sûreté, selon :

$$\begin{aligned} &\frac{\partial G}{\partial x_i} > 0 \Rightarrow S_{f_i} > 1 \\ &\frac{\partial G}{\partial x_i} < 0 \Rightarrow S_{f_i} < 1 \end{aligned} \tag{7.13}$$

La méthode OSF est mise en œuvre en suivant trois étapes (Kharmanda, 2007) :

- Détermination du point de conception en prenant la fonction de contrainte $g_k(\mathbf{y}) \leq 0$ comme la contrainte la plus active. Ainsi, le problème d'optimisation consiste à minimiser la fonction coût soumise aux fonctions d'état limite et aux contraintes déterministes.
- Calcul des facteurs de sûreté : afin de calculer ces facteurs une analyse de sensibilité des variables de conception par rapport à la fonction d'état de limite est exigée.
- Calcul de la solution optimale à partir de la solution de la dernière étape en introduisant les valeurs des facteurs de sûreté dans le calcul des valeurs des variables de conception afin de déterminer la solution optimale de la structure.

Dans les sections suivantes on présente des applications de la méthodologie d'optimisation fiabiliste (par OSF) qui associe une méthode d'optimisation classique et des méthodes d'optimisation métaheuristiques. La méthode classique choisie est la Programmation Quadratique Séquentielle (PQS) de MATLAB® et parmi les techniques heuristiques, on utilise les GA, PSO et ACO, algorithmes intégrés dans le logiciel dénommé SOT (*Simple Optimization Toolbox*) (Viana, 2006). Ce dernier intègre les méthodes d'optimisation métaheuristiques GA, PSO et ACO pour résoudre les problèmes d'optimisation classique. Il est important de remarquer que la méthode HBRM utilise quelques algorithmes du programme SOT pour réaliser l'analyse de fiabilité.

L'optimisation fiabiliste a été effectuée en utilisant un programme écrit en langage MATLAB® tant pour la méthode OSF que pour la méthode PQS.

7.2. Optimisation fiabiliste d'une poutre basée sur la méthode OSF

Cet exemple vise à montrer l'application de la méthode OSF comme stratégie d'optimisation fiabiliste. Cette application est similaire à celle de la section 3.5 du Chapitre III.

Dans le but de minimiser le volume de la poutre à profil I illustrée sur la Figure 7.2, on considère la fonction coût suivante :

$$J_1 = w_1\left(\frac{f_1}{L_1}\right) + w_2\left(\frac{f_2}{L_2}\right), \tag{7.14}$$

où w_1 et w_2 sont des facteurs de poids qui, pour les tests réalisés sont égaux à 1.

Sachant que pour une densité du matériau constante, la minimisation est donnée en fonction de l'aire f_1 de la section droite de la poutre, l'aire f_1 étant exprimée selon :

$$f_1 = 2x_2x_4 + x_3(x_1 - 2x_4), \tag{7.15}$$

Dans l'Equation 7.14, l'aire limite et le déplacement limite valent respectivement $L_1 = 468$ *cm²* et $L_2 = 8{,}5\times10^{-2}$ *cm*.

La fonction f_2 représente le déplacement maximal exprimé selon :

$$f_2 = \frac{PL^3}{48E\left(\dfrac{x_2x_1^3 - (x_2 - x_3)(x_1 - 2x_4)^3}{12}\right)}, \tag{7.16}$$

Les valeurs des paramètres déterministes sont données au Tableau 3.9 (Chapitre III).

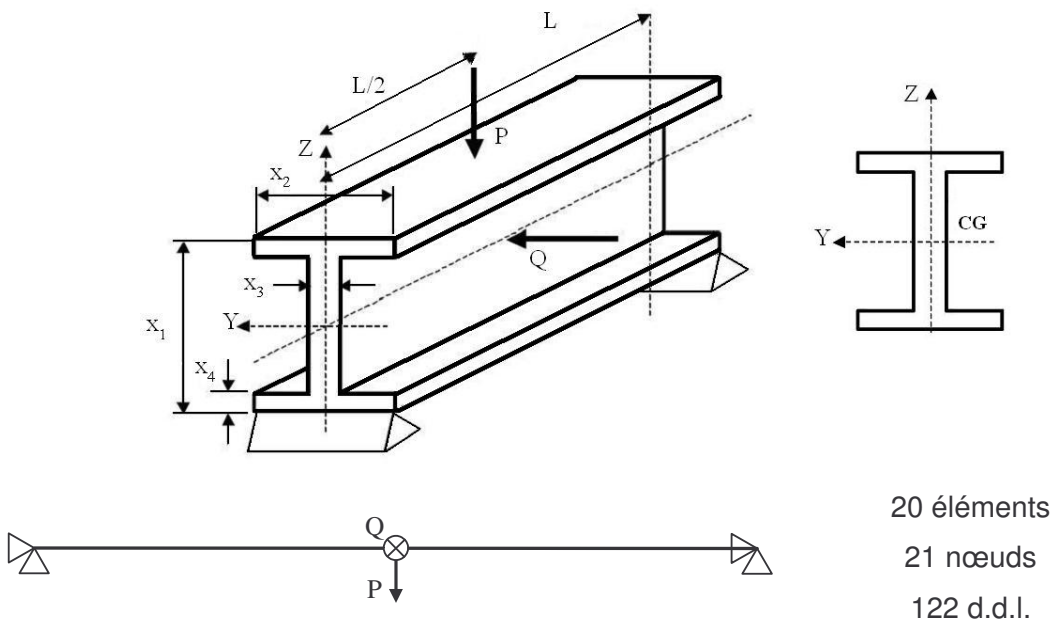


Figure 7.2 - Schéma de la poutre en profil I et définition des variables aléatoires

La poutre est soumise à la contrainte de flexion maximale ('Equation 3.9), exprimée selon :

$$G_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z} - k_g \tag{7.17}$$

où les modules de résistance à la flexion pour la section droite de la poutre sont donnés par :

$$W_y = \frac{x_2 x_1^3 - (x_2 - x_3)(x_1 - 2x_4)^3}{6x_1} \tag{7.18}$$

$$W_z = \frac{2x_4 x_2^3 + (x_3^3)(x_1 - 2x_4)}{6x_2} \tag{7.19}$$

Les contraintes latérales des variables aléatoires sont (en *cm*) :

$$10 \le x_1 \le 80, \quad 10 \le x_2 \le 50, \quad 0.9 \le x_3 \le 5, \quad 0.9 \le x_4 \le 5 \tag{7.20}$$

On présente dans un premier temps les résultats de l'analyse de fiabilité pour montrer le fonctionnement de la méthode OSF. L'analyse de fiabilité est basée sur la fonction d'état limite exprimée par l'Equation 7.14 laquelle est évaluée analytiquement.

Les caractéristiques statistiques des variables de conception ont été présentées dans le Tableau 3.10.

Le Tableau 7.1 montre la comparaison entre les résultats fournis par les méthodes FORM, SORM, et HBRM, cette dernière utilisant GA. La valeur de l'aire est aussi rapportée dans ce tableau.

Tableau 7.1 - Résultats de l'analyse de fiabilité de la poutre de profil I

	FORM	**SORM**	**HBRM**
x_1 (cm)	66	66	65
x_2 (cm)	33	33	26
x_3 (cm)	2,9	2,9	2,6
x_4 (cm)	3,1	3,1	2,6
β	4,779	4,864	5,019
A (cm^2)	370	380	290

Ces résultats montrent que la méthode HBRM amène à une meilleure solution que les méthodes FORM et SORM. Cependant toutes les solutions obtenues sont considérées satisfaisantes.

Les résultats de l'optimisation fiabiliste obtenus en utilisant la méthode OSF associée aux méthodes PQS et SOT pour deux problèmes d'optimisation sont montrés dans le Tableau 7.2. Le premier problème d'optimisation ne considère pas de contraintes, c'est-à-dire, il est basé uniquement sur la minimisation de la fonction coût J_1. Le second problème est basé sur la minimisation de J_1 soumis à la fonction de contrainte G_1.

Tableau 7.2 – Résultats de l'optimisation fiabiliste de la poutre de profil I

	Problème 1				**Problème 2**			
	PQS	**SOT**	**OSF**		**PQS**	**SOT**	**OSF**	
			PQS	**SOT**			**PQS**	**SOT**
$x_1\ (cm)$	80	80	71,78	41,09	80	74,53	75,58	38,28
$x_2\ (cm)$	50	37,58	49,30	50,02	50	22,42	52,60	33,33
$x_3\ (cm)$	0,9	0,90	1,37	1,34	0,9	2,31	1,23	3,44
$x_4\ (cm)$	0,94	1,34	0,94	2,08	1,4	1,95	1,84	2,9
β	-	-	4,864	4,864	-	-	4,864	4,864
$A\,(cm^2)$	164,33	170,64	185,77	257,60	209,92	250,82	282,37	304,99
$T\ (s)$	-	-	1,03	2,17	-	-	0,79	2,16

Le premier problème est étudié pour comparer les résultats de l'analyse de fiabilité avec les résultats de l'optimisation fiabiliste. Ainsi, on remarque que l'aire diminue principalement en raison de l'optimisation fiabiliste. Dans le Tableau 7.2 l'optimisation classique par PQS et SOT ont des performances similaires mais en raison de leur caractéristiques, on considère les résultats de la méthode SOT comme plus satisfaisantes que ceux de la méthode PQS. Tout comme la HBRM, les algorithmes de SOT n'ont pas besoin d'une estimation initiale ni de calcul de dérivées.

En ce qui concerne le problème 2, comme attendu, les valeurs de l'aire augmentent en raison de la présence de la contrainte considérée dans le problème. Ces résultats prennent en compte un niveau de fiabilité pour un problème d'optimisation plus exigent. Pour ce problème aussi, les résultats obtenus par la méthode SOT sont considérés meilleurs par rapport à ceux obtenus par PQS.

7.3. Optimisation fiabiliste d'une plaque orthotrope basée sur le couplage entre MEF et OSF

Dans cette section l'optimisation fiabiliste d'une plaque orthotrope basée sur la méthode OSF en utilisant un modèle éléments finis est traitée. L'objectif de cette étude est d'évaluer la méthodologie d'optimisation fiabiliste appliquée à des structures plus complexes. Il est utile de remarquer que l'analyse de fiabilité d'une application similaire a été déjà décrite dans le chapitre précèdent (section 6.4).

Avec l'objectif de minimiser l'épaisseur de la plaque orthotrope illustrée dans la Figure 6.10, l'optimisation fiabiliste est basée sur la fonction coût suivante : $G(t_1, t_2, t_3, t_4, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4) = u_x - u_x^{\lim}$, laquelle est exprimée en fonction du déplacement maximal dans la direction x, avec $u_x^{\lim} = 7{,}29 \times 10^{-6}$ *m*. Dans cette équation, t_i et θ_i représentent respectivement l'épaisseur et l'angle de rotation des 4 plis de la plaque orthotrope.

Dans un premier temps l'analyse de fiabilité a été réalisée pour la comparaison avec le même problème d'optimisation fiabiliste. Elle est basée sur la fonction d'état limite exprimée par G laquelle est évaluée en utilisant un modèle en EF (sur le logiciel ANSYS®) et la méthode sans maillage EFG.

Les propriétés géométriques et de charge de la plaque orthotrope ainsi que les propriétés mécaniques sont rassemblées dans les Tableau 6.13 et 6.14.

Les résultats de l'analyse de fiabilité obtenus à travers les méthodes FORM, SORM et HBRM (via GA), en utilisant le modèle en EF, sont rapportés au Tableau 7.3. La valeur de l'épaisseur h est aussi rapportée dans le même tableau.

Les résultats obtenus par la méthode SORM s'avèrent plus performants que ceux obtenus par les méthodes FORM et HBRM, bien que tous soient satisfaisants.

La Tableau 7.4 contient les résultats de l'optimisation fiabiliste obtenus par la méthode OSF associée aux méthodes PQS et SOT (via GA). L'optimisation fiabiliste test deux cas, dans le premier on utilise $\beta = 3{,}90$ et dans le second $\beta = 4{,}28$. Les valeurs de l'indice de fiabilité correspondent aux valeurs obtenues par FORM et SORM.

Tableau 7.3 - Résultats de l'analyse de fiabilité de la plaque orthotrope

	FORM	SORM	HBRM
t_1 (x10^{-3}m)	0,99	0,99	0,92
t_2 (x10^{-3}m)	0,99	0,99	0,93
t_3 (x10^{-3}m)	0,99	0,99	1,18
t_4 (x10^{-3}m)	0,99	0,99	1,18
θ_1 (degrés)	-36,76	-36,76	-34,36
θ_2 (degrés)	34,76	34,76	31,83
θ_3 (degrés)	34,76	34,76	27,62
θ_4 (degrés)	-36,76	-36,76	-26,87
T (*min*)	2,33	4,28	2,50
β	3,90	4,28	3,46
h (*m*)	3,99	3,99	4,20

Tableau 7.4 - Résultats de l'optimisation fiabiliste de la plaque orthotrope en utilisant le modèle d'éléments finis

	PQS	SOT	OSF			
			PQS	PQS	SOT	SOT
t_1 (x10^{-3}m)	0,82	0,60	1,13	1,17	0,60	0,60
t_2 (x10^{-3}m)	1,18	0,70	1,18	1,18	0,70	0,70
t_3 (x10^{-3}m)	0,59	0,70	0,59	0,59	0,70	0,70
t_4 (x10^{-3}m)	0,24	0,60	0,24	0,24	0,70	0,70
θ_1 (degrés)	-43,16	-66,56	-59,99	-61,93	-66.56	-66,56
θ_2 (degrés)	32,31	72,78	19,71	18,48	52,58	50,61
θ_3 (degrés)	38,33	74,74	23,38	21,92	54,26	52,27
θ_4 (degrés)	-45,13	-87,05	-27,53	-25,81	-87,05	-87,05
β	-	-	3,90	4,28	3,90	4,28
h (*m*)	2,36	2,60	2,67	2,71	2,70	2,70
T (*min*)	-	-	6,88	7,02	32,61	33,03

En comparant l'optimisation classique par PQS et via SOT, une fois encore et en raison de ses caractéristiques, les algorithmes de SOT sont considérés plus performantes comparés à ceux de PQS. Comme espéré, on constate que l'épaisseur obtenue par l'analyse de fiabilité est supérieure à celle issue de l'optimisation fiabiliste pour un même niveau de fiabilité.

Les résultats de l'optimisation fiabiliste obtenus par la méthode OSF associée aux méthodes PQS et SOT (via GA) à travers EFG sont résumés dans le Tableau 7.5. Pour cette application l'indice de fiabilité cible est égal à 4.07.

Tableau 7.5 - Résultats de l'optimisation fiabiliste de la plaque orthotrope en utilisant le modèle sans maillage

	PQS	**SOT**	**OSF**	
			PQS	**SOT**
t_1 (x10^{-3}m)	1,04	1,00	1,03	0,90
t_2 (x10^{-3}m)	1,05	1,00	0,64	1,30
t_3 (x10^{-3}m)	0,93	1,20	1,22	1,11
t_4 (x10^{-3}m)	0,75	1,20	1,23	1,20
θ_1 (degrés)	-20,78	-10,00	-12,68	-10,00
θ_2 (degrés)	61,96	10,44	37,80	10,46
θ_3 (degrés)	87.12	15,63	50,90	15,65
θ_4 (degrés)	-14.53	-37,87	-39.90	-37,91
β	-	-	3,90	3,90
h (m)	3,77	4,40	4,12	4,51
T (min)	-	-	191,99	1038,80

Les résultats obtenus par PQS et OSF en utilisant le modèle avec maillage sont meilleurs que ceux utilisant le modèle sans maillage. Un comportement contraire se vérifie dans les résultats obtenus par SOT et OSF. En fonction de ses caractéristiques, les algorithmes de SOT sont considérés plus performantes à ceux de PQS. Comme espéré, on constate que l'épaisseur obtenue par l'analyse de fiabilité est supérieure à celle issue de l'optimisation fiabiliste pour un même niveau de fiabilité.

7.4. Conclusion

Des applications pour la minimisation du poids prenant en compte un niveau de fiabilité cible en problèmes de statique sont présentés dans ce chapitre. Les résultats sont obtenus par l'application d'une stratégie d'optimisation fiabiliste couplant la méthode des facteurs optimaux de sûreté (OSF) avec des algorithmes d'optimisation heuristiques (GA, PSO et ACO) intégrés dans SOT.

Les résultats de l'optimisation fiabiliste sont considérés comme très satisfaisants par rapport à la précision et au temps de calcul pour les procédures d'optimisation classique et l'analyse de fiabilité. L'évaluation du comportement mécanique des systèmes analysés est possible grâce à l'application de modèles sans et avec maillage. Les résultats de la méthode OSF, obtenus par PQS et par SOT, en utilisant le modèle sans maillage sont meilleurs que ceux obtenus en utilisant la MEF.

CHAPITRE VIII

CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES

La science sans religion est boiteuse, la religion sans science est aveugle (Albert Einstein, 1879-1955)

Le commencement de la sagesse, c'est de révérer l'Éternel; Et la science des saints, c'est l'intelligence (Proverbes 9 :10)

Dans ce dernier chapitre, on cherche essentiellement à fournir un aperçu général du travail de recherche réalisé dans le cadre de la thèse, les principales conclusions, contributions et perspectives de continuité.

8.1. Aperçu général

Cette thèse de doctorat, a été développée sous la modalité cotutelle dans le cadre de la collaboration scientifique entre le Laboratoire de Mécanique de Rouen, appartenant à l'Institut National des Sciences Appliquées de Rouen et la Faculté de Génie Mécanique, liée à l'Université Fédérale d'Uberlândia, au Brésil.

Les travaux de recherche visent à contribuer aux développements des méthodologies de conception fiabiliste, visant, en particulier, son application en dynamique des structures et aux matériaux composites, modélisées par les méthodes des éléments finis et les méthodes sans maillage. On cherche à proposer des améliorations aux algorithmes d'optimisation utilisés dans l'analyse de fiabilité, à travers une évaluation des caractéristiques et performances des algorithmes dits heuristiques, basés sur les phénomènes biologiques, dans le cadre de la stratégie nommée HBRM. Les travaux de recherche ont été adressés à la modélisation du comportement statique et dynamique des structures simples et plus ou moins complexes qui possèdent des variables aléatoires.

Au début des travaux de recherche, une revue détaillée de la littérature à propos de l'objet de la thèse été réalisée, ce qui a permis le positionnement du sujet, la caractérisation de l'état de l'art et, par conséquent, l'identification des possibles contributions des travaux de recherche au développement du thème abordé.

Le Chapitre I fait un bilan des développements les plus récents des lignes de recherche abordées et résume la revue bibliographique ci-dessus mentionnée. Les objectifs du travail de recherche sont proposés et l'organisation de la thèse est mise en évidence aussi dans ce chapitre d'introduction.

Le Chapitre II propose un résumé des principaux concepts de l'analyse de fiabilité et ses méthodes classiques (FORM, SORM, SMC) et la méthode proposée (HBRM). Les algorithmes de la méthode HBRM sont présentés et comparés avec ceux des méthodes FORM et SORM. De ce fait, sont présentés les fondamentaux des méthodes métaheuristiques d'optimisation (GA, PSO et ACO) que la HBRM utilise. Alors, la combinaison des méthodes d'optimisation et d'analyse de fiabilité, ci-dessus mentionnées, configure la méthodologie de conception fiabiliste proposée dans ce mémoire.

Les applications numériques du Chapitre III permettent de montrer l'applicabilité et l'efficacité de la méthodologie de conception fiabiliste. Des problèmes relèvent de la statique, stabilité, dynamique sont considérés. Les systèmes mécaniques sont modélisés par la méthode des éléments finis, la méthode de Ritz et analytiquement pour évaluer la fonction de performance. L'analyse de fiabilité lorsque des fonctions d'état limite ne sont pas exprimées explicitement en fonction des variables de conception. Dans ce sens, les applications uni, bi et tridimensionnelles explorent l'évaluation explicite et implicite des fonctions d'état limite de plusieurs variables aléatoires. Les résultats obtenus dans ces applications ont permis de valider la méthodologie numérique qui couple les méthodes d'analyse de fiabilité et la MEF.

Dans le même but du Chapitre III, le Chapitre IV est consacrée particulièrement pour des applications numériques plus complexes. De cette façon, le chapitre présente des applications des problèmes d'interaction fluide-structure bi et tridimensionnelles. Procédures de validation déterministe et analyses stochastiques, à travers la SMC et la méthode de perturbation de Muscolino, donnent les bases de l'analyse de fiabilité de ces applications. La méthode de Muscolino combinée avec la synthèse modale et à l'analyse de fiabilité est particulièrement appliquée à une structure industrielle.

En visant à fournir la base théorique pour l'incorporation de la modélisation sans maillage dans la méthodologie d'analyse de fiabilité, le Chapitre V décrit la théorie formelle de la méthode EFG. Ce chapitre condense aussi : une revue de la littérature concernant les différentes méthodes de modélisation sans maillage, l'approximation des moindres carrés

mobiles et l'application de la forme faible des équations de l'élasticité dans l'approximation sans maillage de Galerkin. Les aspects de la méthode EFG comme l'imposition des conditions limites et l'intégration sur le domaine d'intérêt des structures, sont abordés. À la fin du chapitre, un aperçu des algorithmes en œuvre de la méthode EFG est proposé et une application numérique bidimensionnelle valide ces outils numériques.

Dans le Chapitre VI sont présentées les applications uni et bidimensionnelles de l'analyse de fiabilité (via FORM, SORM et HBRM) aux matériaux composites stratifiés, modélisés par la méthode EFG. Les résultats obtenus sont comparés avec les résultats obtenus en utilisant la MEF pour la modélisation. La performance et l'applicabilité de cette méthodologie sont prouvées encore une foi. La validation des modèles de chaque application précède l'analyse de fiabilité. De cette manière, la modélisation des matériaux composites à travers la méthode EFG est intégrée à la méthodologie de conception fiabiliste. Les résultats numériques du chapitre permettent valider ce couplage.

Le Chapitre VII présente les applications numériques de la stratégie d'optimisation fiabiliste laquelle combine la méthode des facteurs optimaux de sûreté (OSF) avec des algorithmes d'optimisation heuristique (GA, PSO et ACO). Dans le but de montrer l'applicabilité et efficience de cette stratégie, sont présentes des applications pour la minimisation du poids, en exigeant un indice de fiabilité cible, des systèmes analysés dans les autres chapitres. Les résultats de l'analyse de fiabilité donne le support pour vérifier le fonctionnement efficient de cette stratégie. Le comportement de ces systèmes est modélisé par EF et par la méthode EFG.

8.2. Conclusions et contributions

Les conclusions particulières basées sur les résultats obtenus et remarques faites dans les chapitres précédents donnent surtout la motivation pour amplifier la recherche et le développement des outils numériques capables de réaliser la conception fiabiliste des structures mécaniques considérant leur optimisation dans différents types d'analyse en statique, dynamique et multi physique.

Initialement, le travail a consisté la mise en œuvre et validation des outils numériques. Pour ce-là, divers exemples de la littérature on été reproduits et résultats d'autres méthodes ont été utilisés pour effectuer des comparaisons. L'objectif de cette étape a été de posséder des outils numériques fiables aussi bien pour les méthodes de fiabilité que pour les méthodes de modélisation.

Dans ce contexte, une contribution de cette thèse consiste en la proposition de une méthodologie d'analyse de fiabilité dénommée HBRM. Cette méthode a été proposée dans le but de pallier les inconvénients des méthodes de fiabilité classiques comme le FORM, SORM et SMC dans la recherche du point de conception. La méthode HBRM a comme principal avantage le fait de pas avoir besoin d'une estimation initiale des variables de conception ni du calcul des dérivées partielles des fonctions d'état limite par rapport à ces variables. L'approximation par HBRM est basée sur les principes de la méthode FORM et incorpore des méthodes heuristiques d'optimisation inspirées dans les systèmes biologiques. Cette approximation englobe les méthodes des Algorithmes Génétiques (GA), Optimisation par Essaim de Particules (PSO) et Optimisation par Colonie de Fourmies (ACO), techniques heuristiques de recherche multi-directionnelle. Il est important de remarquer que les méthodes heuristiques ne concourent pas avec les méthodes traditionnelles ; elles sont plutôt incluses dans la méthodologie fiabiliste en raison de leur capacité à résoudre efficacement des problèmes d'optimisation globale. Toutes ces méthodes de fiabilité ont été mises en œuvre sous plateforme MATLAB®.

Des nombreuses simulations numériques ont permis d'évaluer la performance des procédures de modélisation et d'optimisation développées comme un outil d'analyse de fiabilité et de conception des systèmes mécaniques.

L'augmentation de la complexité de l'analyse de fiabilité dans les applications a été accompagnée par l'amélioration des algorithmes numériques. Cette complexité a été établie par rapport au nombre de fonctions d'état limite, type de réponse évaluée dans ces fonctions et à la complexité géométrique de la structure étudiée (uni, bi ou tri dimensionnelle). Ainsi, l'analyse de fiabilité fut réalisée dans les contextes mono et multi critère en utilisant des variables qui interviennent implicitement ou explicitement dans les fonctions d'état limite. Les réponses demandées par des fonctions d'état limite font résultat d'analyses statiques, de stabilité, de dynamique, d'interaction fluide-structure et de matériaux composites. Dans ce sens, une contribution des travaux de recherche comporte l'utilisation de diverses méthodes de modélisation des structures (analytiques, semi analytiques et numériques) pour évaluer les fonctions d'état limite. Ainsi, la mise en œuvre de la méthode de Ritz (via MATLAB®), la méthode des éléments finis (via MATLAB® et ANSYS®) et la méthode sans maillage de Galerkin (sous MATLAB®) a été nécessaire. La méthode EFG a reçu une attention particulière car c'est une méthode récente et qui présente des avantages par rapport à la méthode des éléments finis.

L'utilisation de différentes méthodes de modélisation et d'optimisation a eu pour objectif de mettre en évidence leurs avantages et désavantages pour des applications spécifiques, ainsi pour démontrer l'applicabilité et la robustesse de la méthodologie de

conception fiabiliste en utilisant ces techniques numériques. Ce qui a été possible grâce aux bons résultats trouvés dans la plupart des applications. Cette diversité de méthodes de modélisation combinée a la méthodologie d'analyse de fiabilité et la stratégie d'optimisation fiabiliste constitue une des contributions de cette thèse.

Comme dans les autres applications, dans celles du problème d'interaction fluide-structures et l'application industrielle, les résultats ont permis d'exhiber les avantages de la méthode HBRM puisque sa performance est satisfaisante pour ces applications. Les avantages qui résultent de l'utilisation de la méthode de perturbation de Muscolino et de la combinaison des méthodes d'analyse de fiabilité structurale avec la méthode de réduction de modèle basée sur la sous-structuration sont évidents aussi. Ces stratégies dirigent à de réduction très significative des temps de calculs sans aucune perte de la capacité prédictive des modèles. Le couplage de la méthodologie d'analyse de fiabilité avec méthodes de synthèse modale et la méthode de Muscolino constitue une contribution inédite des travaux.

Les procédures de modélisation sans maillage développées se sont avérées efficaces pour caractériser le comportement statique et dynamique des barres, poutres et plaques rectangulaires, notamment en ce qui concerne les matériaux composites stratifiés.

Une autre contribution originale consiste dans l'estimation du niveau de fiabilité de matériaux composites modélisés à travers la méthode sans maillage de Galerkin. Ceci, en rappellent que cette estimation a été possible avec l'utilisation des algorithmes heuristiques dans l'analyse de fiabilité.

Dans quelques applications de l'analyse de fiabilité, la méthode sans maillage a montré des meilleures performances en comparaison avec la méthode des éléments finis. Néanmoins, dans la plupart des cas, le temps de calcul de la modélisation sans maillage a été supérieur, en raison du processus d'intégration et de la procédure nécessaire pour l'imposition des conditions aux limites essentielles. Plusieurs auteurs suggèrent des études plus approfondies pour améliorer ces méthodes, d'autres utilisent des approximations mixtes pour esquiver cet inconvénient. Ainsi, il est possible que le coût de calcul impliqué dans l'analyse de fiabilité couplée avec les modèles sans maillage puisse être allégé. Ainsi, malgré des temps de calcul plus élevés, la méthode HBRM combinée à la méthode EFG reste performante. En prenant en compte le temps total de calcul, la MEF est plus performante que la méthode EFG.

Les résultats de l'optimisation fiabiliste à travers la méthode du facteurs optimaux de sûreté (OSF) combinée aux méthodes de modélisation sans et avec maillage et à des algorithmes d'optimisation heuristique (GA, PSO et ACO) intègres dans le SOT (*Simple Optimization Toolbox*) sont très satisfaisantes. Cette combinaison constitue aussi une autre contribution des travaux de recherche.

Pour évaluer la méthodologie d'analyse de fiabilité, trois critères sont pris en compte : l'efficacité, la robustesse et la capacité. Selon les définitions de Lemaire (2005) ces critères sont analysés dans la méthodologie présentée.

Trois critères ont été pris en compte pour évaluer la méthodologie d'analyse de fiabilité: l'efficacité, la robustesse et lacapacité. Du point de vu de l'efficacité, la méthodologie qu'utilise FORM et SORM est dite efficace parce que le nombre d'appels à la fonction d'état limite (au modèle du système) pour arriver à la convergence a un seuil de précision numérique prédéfini. L'approximation FORM nécessite peu d'évaluations de la fonction d'état limite pour l'obtention d'une bonne approximation dans la plus part des cas. Lorsqu'on utilise HBRM les conditions d'arrêt son différentes de ceux adoptés pour FORM et SORM mais cela n'empêche pas que les résultats de HBRM soient satisfaisants malgré un coût de calcul plus élevé.

En ce qui concerne la robustesse, lorsque FORM et SORM sont utilisées est ce n'est pas toujours évident la vérification de la robustesse parce que ces méthodes dépendent des estimations initiales du point de conception et de l'indice de fiabilité. Par contre, la HBRM se montre robuste parce qu'elle ne nécessite pas ces données pour trouver des « bons » points de conception. La robustesse de la HBRM est opposée par le coût de calcul pour les applications de matériaux composites modélisés avec la méthode sans maillage.

Lorsqu'on analyse la capacité des méthodes FORM, SORM et HBRM, celle-ci est démontrée à travers la dimension des modèles, le nombre de variables aléatoires et, pour le cas de la HBRM, le nombre d'évaluations des fonctions d'états limites explicites, implicites, mono et multi critère en diverses applications de génie civil et en mécanique.

Dans le contexte de FORM et SORM, les méthodes d'optimisation classique (d'ordre un et deux) ont le grand avantage de demander un faible nombre d'évaluations de la fonction d'état limite, ce que mène à une convergence rapide. Par contre, ces méthodes ne sont pas capables de traiter des minimums locaux puisqu'elles travaillent avec un seul point de conception dans l'espace de conception et avec les informations sur des gradients (c'est-à-dire, recherche unidirectionnelle). En face aux minimums locaux, ces méthodes ont la tendance de ne pas avancer dans la recherche du point de conception, en convergent prématurément et par fois sans trouver le point de conception global. Par contre, dans le cas des méthodes heuristiques d'optimisation au sein de la HBRM, la fonction d'état limite est évaluée plusieurs fois en travaillant avec plusieurs points de conception au même temps dans une même interaction. Cela augmente le coût de calcul des ces méthodes, néanmoins elles ont plus de possibilités de trouver le minimum global puisque elles suivent une stratégie de recherche multidirectionnelle. Il y aura, bien sûr, des relations de compromis à établir lors

du choix de la méthode à utiliser. Pour ce choix, la nature du problème et les possibilités offertes par les méthodes de simulation mécanique devront être considérés.

En ce qui concerne la performance des méthodes d'optimisation utilisées pour la recherche du point de conception dans l'analyse de fiabilité via FORM, SORM et HBRM, le Tableau 8.1 résume une comparaison des ces méthodes. Leurs principales caractéristiques, points positifs et négatifs sont mis en évidence à l'issue de cette comparaison.

Tableau 8.1 - Méthodes d'optimisation pour la recherche du point de conception au sein des méthodes FORM, SORM et HBRM

Méthode	**Dérivées**	**Convergence**	**Caractéristiques**	
			Positives	**Négatives**
N-R	Gradient	Linéaire	Coût de calcul réduit, adaptée à problèmes de fiabilité, bonne efficacité	Robustesse moyenne, calcul des dérivées, dépendance des estimations initiales
GA, PSO, ACO	Non nécessaire	Dépendante des paramètres de la méthode	Très robuste (pas besoin d'une solution initiale), capable de gérer plusieurs états limites, adaptée au problème de fiabilité et des méthodes de pénalité	Coût de calcul élevé, efficacité moyenne, convergence dépendante des paramètres

Comme dans les problèmes de conception optimale, le choix des outils d'analyse de fiabilité dépend fortement du problème d'analyse considéré. Il n'existe pas une méthode universelle permettant de faire face à la diversité des situations de la réalité pratique.

Cette étude est à peine le début d'un vaste champ de applications où l'analyse de fiabilité peut être utilisée. Pour ce-la, le travail développé apporte une contribution vers un outil numérique pour les applications d'analyse de fiabilité en mécanique générale.

8.3. Perspectives de continuité

Quelques options de continuité des travaux de recherche ont pu être identifiés au long de l'étude réalisée, à savoir :

8.3.1. L'analyse de fiabilité

- Tester les méthodologies pour d'autres applications en dynamique des structures, par exemple applications non linéaires, en contrôle des vibrations, dans le domaine vibroacoustique ;
- Effectuer des analyses de sensibilité pour identifier l'influence de la variation des variables de conception sur l'état du système mécanique afin de sélectionner les variables plus significatives. Cette évaluation peut être faite par rapport à l'influence sur les fonctions d'état limite (étude deterministe des sensibilités mécaniques) ou sur l'indice de fiabilité (sensibilité fiabiliste). De plus, la sensibilité de l'indice de fiabilité peut être évaluée par rapport : aux variables de conception, aux paramètres des lois de distribution, aux paramètres de la fonction de performance. Ceci sachant que une fois les dérivées sont calculées par FORM l'analyse de sensibilité peut être réalisée dans la suite ;
- Construire des fonctions conjointes de distribution de probabilité de variables de conception pour améliorer l'analyse de fiabilité. Cette voie de continuité est conseillée en sachant que dans la plupart de cas on ne travaille qu'avec des fonctions de distributions marginales. Dans les problèmes d'analyse de fiabilité en général ils n'existent pas d'observations ou registres simultanés de toutes les variables du problème. Les fonctions de distribution marginales sont obtenues à partir de observations isolées de chaque variable aléatoire. ;
- Incorporer la corrélation entre les variables aléatoires de conception en raison de l'existence de cette caractéristique statistique dans les structures réelles ;
- Mettre en œuvre les méthodes de surface de réponse en sachant par les références bibliographiques que les techniques d'échantillonnage sont capables de réduire le nombre de simulations dans la SMC et qu'en problèmes où l'équation d'état limite est numérique, ce nombre peut être encore prohibitif. Dans ces cas l'utilisation de surfaces de réponse peut réduire le nombre d'évaluations de l'équation d'état limite ;
- Optimisation fiabiliste des structures en prenant en compte des contraintes d'égalité et d'inégalité.

8.3.2. La méthode sans maillage de Galerkin liée à l'analyse de fiabilité

- Amélioration des algorithmes de l' EFG visant à la diminution du temps de calcul et application dans les analyses de probabilité ;

- Approfondissement de la méthode sans maillage de Galerkin pour des applications où elle a des avantages par rapport à la MEF, comme par exemple : applications 3D ; problèmes non linéaires en statique et dynamique ; propagation de fissures. Dans ce sens, toutes les nouvelles contributions sur des méthodes sans maillage liées à l'analyse de probabilité ou de fiabilité auront déjà une double contribution.

REFERENCES

ABDALLA, J. E. **Qualitative and Discretization Error Analysis of Laminated Composite Plate Models**. 1992. p. 202, PhD Dissertation, University of Colorado, Boulder, CO.

ADHIKARI, S. Asymptotic Distribution Method for Structural Reliability Analysis in High Dimensions. Proceedings of Royal Society A, v. 461, p. 3141–3158, 2005.

AKBORA, B. A. ; COROTIS, R. B. ; ELLIS, H. J. Optimization of Structural Frames with Elastic and Plastic Constraints. Civil Engineering System, v. 10, p. 147-169, 1993.

ALURU, N. R.; LI, G. Finite Cloud Method: A True Meshless Technique Based on a Fixed Reproducing Kernel Approximation. International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 50, p. 2373–2410, 2001.

ASKES, H.: DE BORST, R.; HEERES, O. Conditions for Locking-free Elasto-plastic Analyses in the Element-free Galerkin Method. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v. 173, p. 99-109, 1999.

ATLURI, S. N.; ZHU, T. A New Meshless Local Petrov-Galerkin Approach in Computational Mechanics. Computational Mechanics, v. 22, p. 117–127, 1998.

BABUSKA, I.; MELENK, J. **The Partition of the Unity Finite Element Method**. Maryland, 1995. Institute for Physical Science and Technology, University of Maryland, Technical Report BN-1185.

BARROS, F. B. **Métodos sem Malha e Método dos Elementos Finitos Generalizados em Analise Nao-linear de Estruturas**. 2002, p. 222. Tese de doutorado, Escola de Engenharia de Sao Carlos, Universidade de Sao Paulo, Sao Carlos, Brasil.

BECK, A. T. Curso de Confiabilidade Estrutural. Agosto de 2006. p. 210. Universidade de Sao Paulo, Escola de Enegenharia de Sao Carlos, Departamento de Engenharia de Estruturas, Sao Carlos. Apostila.

BEISSEL, S.; BELYTSCHKO, T. Nodal Integration of the Element-free Galerkin Method. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v. 139, p. 49-74, 1996.

BELINHA, J.; DINIS, L. M. J. S. Analysis of Plates and Laminates Using the Element Free Galerkin Method. Composite Structures, v. 84, p. 1547-1559, 2006.

BELINHA, J.; DINIS, L. M. J. S. Nonlinear Analysis of Plates and Laminates Using the Element Free Galerkin Method. Composite Structures, v. 78, p. 337-350, 2007

BENDAOU, O. ; EL HAMI, A. ; AANNAQUE, A. ; AGOUZOUL, M. Reduction Size for Fluid-structure Interaction Problems, In: XII INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON DYNAMIC PROBLEMS OF MECHANICS, XII DINAME, 26/02-2/03/2007, Ilha Bela, SP, Brazil, 2007.

BELYTSCHKO, T.; LU, Y. Y.; GU, L. Element-free Galerkin Methods. International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 37, p. 229-256, 1994.

BELYTSCHKO, T.; ORGAN, D.; KRONGAUZ, Y. A Coupled Finite Element-free Galerkin Method. Computational Mechanics, v. 17, p. 186-195, 1995.

BELYTSCHKO, T.; KRONGAUZ, Y.; ORGAN, D.; FLEMING, M.; KRYSL, P. Meshless Methods: An Overview and Recent Developments. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v. 139, p. 3-47, 1996.

BELYTSCHKO, T.; FLEMING, M. Smoothing, Enrichment and Contact in the Element-free Galerkin Method. Computers and Structures, v. 71, p. 173-195, 1998.

BELYTSCHKO, T.; GUO, Y.; LIU, W. K.; XIAO, S. P. A Unified Stability Analysis of Meshless Particle Methods. International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 48, p. 1359-1400, 2000.

BOUILLARD, P.; SULEAU, S. Element-free Galerkin Method for Helmholtz Problems: Formulation and Numerical Assessment of the Pollution Effect. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v. 162, p. 317-335, 1998.

BONET, P.; LOK, T. Variational and Momentum Preservation Aspects of Smooth Particle Hydrodynamic Formulations. CMAME, v. 180, p. 97-115, 1999.

BONET, J.; KULASEGARAM, S. Correction and Stabilization of Smooth Particle Hydrodynamics Methods with Applications in Metal Forming Simulations. IJNME, v. 47, p. 1189-1214, 2000.

BREITUNG, K.; CASCIATI, F. FARAVELLI, L. Reliability Based Stability Analysis For Actively Controlled Structures, Engineering Structures, v. 20, n. 3, p. 211-215, 1998.

CHEN, X. L.; LIU, G. R.; LIM, S. P. An Element Free Galerkin Method for the Free Vibration Analysis of Composite Laminates of Complicated Shape. Composite Structures, v. 59, p. 279-289, 2003.

CHEN, J. J.; ZENG, Y. G.; SUN, H. A. Dynamic Reliability Analysis of Antenna Reflector Accuracy Under Wind Excitation, Computers & Structures, v. 59, n. 5, p. 819-822, 1996.

CHEN, J.-B.; LI, J. Dynamic Response and Reliability Analysis of Non-linear Stochastic Structures. Probabilistic Engineering Mechanics, v. 20, p. 33-44, 2005.

CHING, J.; AU, S. K.; BECK, J. L. Reliability Estimation for Dynamical Systems Subject to Stochastic Excitation Using subset Simulation with Splitting, Computer Methods in Applied Mechanics Engineering, v. 194, p. 1557-1579, 2005.

CMAME, Special Issue of the Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering (<http://www.elsevier.com/locate/cma>), 1996.

CUETO-FELGUEROSO L. **Partículas, Volúmenes Finitos y Mallas no Estructuradas: Simulación Numérica de Problemas de Dinámica de Fluidos**. 2005, p. 108. Tesis Doctoral, Universidad de Coruña, E. T. S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, Coruña, España.

CRAIG R. R. Substructure Methods in Vibration. Transactions of the ASME, Journal of Vibration and Acoustics, v. 117, p. 207-213, 1995.

DE, S.; BATHE, K. J. The Method of Finite Spheres. Computational Mechanics, v. 25, p. 329–345, 2000.

DE LACALLE, L. N. L.; VIADERO, F.; HERNÁNDEZ, J. M. Applications of Dynamic Measurements to Structural Reliability Updating, Probabilistic Engineering Mechanics, v. 11, p. 97-105, 1996.

DENG, L.; GHOSN, M.; SHAO, S. Development of a Shredding Genetic Algorithm for Structural reliability. Structural Safety, v. 27, p. 113-131, 2005.

DER KIUREGHIAN, A.; DAKESSIAN, T. Multiple Design Points in First and Second-order Reliability, Structural Safety, v. 20, p. 37-49, 1998.

DER KIUREGHIAN, A.; TAYLOR, R. L. Numerical Methods in Structural Reliability. Proceedings of the ICASP4, Florence, Italy, 1983.

DER KIUREGHIAN, A.; DAKESSIAN, T. Multiple Design Points in First and Second-order Reliability, Structural Safety, v. 20, p. 37-49, 1998.

DET NORSKE VERITAS. <http://www.dnv.com/software/products/sesam>. PROBAN. Hovik, Norway, 2003.

DI SCIUVA, M.; D. LOMARIO, A Comparison Between Monte Carlo and Forms in Calculating the Reliability of a Composite Structure, Composite Structures, v. 59, p. 155-162, 2003.

DOLBOW, J.; BELYTSCHKO, T. Numerical Integration of the Galerkin Weak Form in Meshfree Methods, Computational Mechanics, v. 23, p. 219-230, 1999 a.

DOLBOW, J.; BELYTSCHKO, T. Volumetric Locking in the Element Free Galerkin Method. International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 46, p. 925-942, 1999 b.

DORIGO, M. **Optimization, Learning and Natural Algorithms**. 1992, Ph.D. Dissertation, Politecnico di Milano, Italy.

DORIGO, M.; MANIEZZO, V. AND COLORNI, A. The Ant System: Optimization by a colony of cooperating agents. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics–Part B, v. 26, n. 1, p. 1-13, 1996.

DUARTE, C. A.; ODEN, J. T. Hp Clouds an Hp Meshless Method. Numerical Methods for Partial Differential Equations, v. 12, p. 673-705, 1996.

DUARTE, C. A. **A Review of Some Meshles Methods to Solve Partial Differential Equations**. 1995. Technical Report 06.

DUFLOT, M. **Application des Méthodes sans Maillage en Mécanique de la Rupture**. 2004. Thèse de Doctorat en Sciences Appliquées, Université de Liège, Belgique.

EL HAMI, A. ; LALLEMENT, G. ; MINOTTI, P. ; BELHADJ, H. ; COGAN, S. Methods Combining Finite Group Theory with Component Modes Synthesis in the Analysis of Repetitive Structures. Computer and Structures, v. 48, n. 6, p. 975-982, 1993.

ENEVOLDSEN, I. ; SORENSEN, J. D. Reliability-based Optimization of Series Systems and Parallel Systems. Journal of Structural Engineering, v. 119, p. 1069-1084, 1993.

ENEVOLDSEN, I. ; SORENSEN, J. D. Reliability-based Optimization in Structural Engineering. Structural Safety, v. 15, p. 169-196, 1994.

FARAVELLI, L., Response Surface Approach for Reliability Analysis, Journal of Engineering Mechanic, v. 115, n. 12, p. 2763-2781, 1989.

FENG, Y. S. ; MOSES, F. A Method of Structural Optimisation Based on Structural System Reliability. Journal of Structural Mechanics, v. 14, p. 437-453, 1986.

FERNANDEZ, M. S. **Mesh-free Methods and Finite Elements : Friend or Foe?** 2001, pp. 144. Doctoral thesis, Universitat Politècnica de Catalunya, Facultat de Matemàtiques i Stadistica, Escola Tècnica Superior d'Enginyers de Camins, Canals I Ports de Barcelona.

FRANGOPOL, D. M. Structural Optimization Using Reliability Concept. Journal of Engineering Structures, ASCE, v. 111, p. 2288-2301, 1985.

FRIER, C.; SORENSEN, J. Stochastic Finite Element Analysis of Non-linear Structures Modelled by Plasticity Theory. In: NINTH INTERNATIONAL CONFERENCE ON APPLICATIONS OF STATISTICS AND PROBABILITY IN CIVIL ENGINEERING, 2003, Proceedings of the ICASP9, San Francisco, California. Eds: A. Der Kiureghian and S. Madanat and J. Pestana.

GAYTON, N., BOURINET, J. M., LEMAIRE, M. CQ2RS: A New Statistical Approach to the Response Surface Method for Reliability Analysis, Structural Safety, v. 25, n. 1, p. 99-121, 2003.

Guedri, M. ; Bouhaddi, N. ; Majed, R. Reduction of the Stochastic Finite Element Models Using a Robust Dynamic Condensation Method, Journal of Sound and Vibration, v. 297, p. 123–145, 2006.

GOMES, H. M., AWRUCH, A. M., Comparison of Response Surface and Neural Network with other Methods for Structural Reliability Analysis, Structural Safety, v. 26, p. 49-67, 2004.

GOSZ, J.; LIU, W. K. Admissible Approximations for Essential Boundary Conditions in the Reproducing Kernel Particle Methods. Computational Mechanics, v. 19, p. 120-135, 1996.

GUTIERREZ, M., CARMELIET, J., AND DE BORST, R. Finite Element Reliability Methods Using Diana. Diana Computational Mechanics 1994. Eds: G.M.A. Kusters and M.A.N. Hendricks, 1994.

HALDAR, A.; MAHADEVAN, S. **Reliability Assessment Using Stochastic Finite Element Analysis**. John Wiley & Sons, Inc., New York, USA, 2000 a.

HALDAR, A.; MAHADEVAN, S. **Probability, Reliability and Statistical Methods in Engineering Design**, John Wiley & Sons, Inc., New York, USA, 2000 b.

HAUKAAS, T.; HAHNEL, A.; SUDRET, B.; SONG, J.; FRANCHIN, P. <http://www.ce.berkeley.edu/haukaas/ferum/ferum.html>. FERUM. 2003, Department of Civil and Environmental Engineering, University of California, Berkeley, CA.

HAUKAAS, T. **Finite Element Reliability and Sensitivity Methods for Performance-Based Engineering**. 2003. Dissertation Submitted to the University of California, Berkeley, USA.

HASOFER, A. M.; LIND, N. C. Exact and Invariant Second Moment Code Format, Journal of Engineering Mechanics, v. 100, n. 1, p. 111-121, 1974.

HASOFER, A.M.; LIND, N.C. Exact and invariant second-moment code format. Journal of Engineering Mechanics, ASCE, v. 100, n. 1, p. 111-121, 1974.

HAUPT, R.L.; HAUPT, S.E. **Practical Genetic Algorithms**. 2nd ed. Wiley-Interscience Publication, New York, USA, 2004.

HEGEN, D. **An Element-free Galerkin Method for Crack Propagation in Brittle Materials**. 1997. Doctoral Thesis, Faculty of Mechanical Engineering of Eindhoven University of Technology.

HEGEN, D. Element-free Galerkin Methods in Combination with Finite Element Approaches. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v. 135, p. 143-166, 1996.

HUERTA, A.; RODRIGUEZ-FERRAN, A.; DIEZ, P.; SARRATE, J. Adaptative Finite Element Strategies Based on Error Analysis. International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 46, p. 1803-1818, 1999.

HUERTA A.; FERNANDEZ M. S. Enrichment and Coupling of the Finite Element and Meshless Methods. International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 48, p. 1615-1636, 2000.

IDELSOHN, S. R.; OÑATE, E.; CALVO, N.; DELPIN, F. The Meshless Finite Element Method. International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 58, p. 893-912, 2003.

IFM, <http://mechanik.uibk.ac.at/softwaredevelopment> COSSAN and ISPUD. Innsbruck, Austria, 2003.

IMAI, K.; FRANGOPOL, D. M. Geometrically Nonlinear Finite Element Reliability Analysis of Structural Systems. I: Theory II: Applications. Computers and Structures, v. 77, n. 6, p. 677-709, 2000.

JONES, R. M. **Mechanics of Composite Materials**. 1th ed. Hemisphere Publishing Corporation, New York, 1975.

JONES, R. M. **Mechanics of Composite Materials**. 2nd ed., Taylor and Francis, Philadelphia, 1999.

KALJEVIC, I.; SAIGAL, S. An Improved Element Free Galerkin Formulation, International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 40, p. 2953 -2974, 1997.

KENNEDY, J.; EBERHART, R. C. Particle Swarm Optimization. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON NEURAL NETWORKS, Proceedings of the IEEE 1995, Perth, Australia, p. 1942-1948.

KHARMANDA, G. ; MOHAMED, A. ; LEMAIRE, M. Efficient Reliability-based Design Optimization Using a Hybrid Space with Application to Finite Element Analysis. Structural Multidisciplinary Optimization, v. 24. p. 233-245, 2002.

KHARMANDA, G. ; OLHOFF, N. ; EL HAMI, A. Optimum Values of Structural Safety Factors for a Predefined Reliability Level with Extension to Multiple Limit States, Structural and Multidisciplinary Optimization, v. 27, pp. 421-434, 2004.

KLEIBER, M. ; T. D. HIEN. **The Stochastic Finite Element Method**. Ed. John Wiley, 1992.

KRYSL, P.; BELYTSCHKO, T. Analysis of Thin Shells by Element-free Galerkin Method. International Journal of Solids & Structures, v. 33, p. 3057-3080, 1996.

KRYSL, P.; BELYTSCHKO, T. ESFLIB: A Library to Compute the Element Free Galerkin Shape Functions. Computer Methods in Applied Mechanics Engineering, v. 190, p. 2181-2205, 2001.

KRONGAUZ, Y.; BELYTSCHKO, T. Enforcement of Essential Boundary Conditions in Meshless Approximations Using Finite Elements, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v.131, p. 133-145, 1996.

KWON, K.-C.; PARK, S.-H.; JIANG, B.-N.; YOUN, S.-K. The Least-squares Meshfree Method for Solving Linear Elastic Problems. Computational Mechanics, v. 30, p. 196-211, 2003.

LANCASTER, P.; SALKAUSKAS, K. Surfaces Generated by Moving Least Squares Methods. Mathematics of Computation, v. 37, p. 141-158, 1981.

LEE, J. O. ; YANG, T. S. ; RANG, W. S. A Comparative Study on Reliability-index and Target-performance-based Probabilistic Structural Design Optimization. Computers and Structures, v. 80, p. 257-267, 2002.

LIU, P.-L.; LIN, H.-Z.; DER KIUREGHIAN, A. **CalREL User Manual**. Berkeley, 1989. Department of Civil and Environmental Engineering, University of California, Berkeley, CA, Report No. UCB/SEMM-89/18.

LIU, P.-L.; DER KIUREGHIAN, A. Finite Element Reliability of Geometrically Nonlinear Uncertain Structures. Journal of Engineering Mechanics, v. 17, n. 8, p. 1806-1825, 1991.

LIU, W. K., JUN, S.; ZHANG, Y. F. Reproducing Kernel Particle Methods. International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 20, p. 1081-1106, 1995.

LIU, W. K.; LI, S.; BELYTSCHKO, T. Moving Least Square Reproducing Kernel Methods. (I) Methodology and Convergence. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v. 143, p. 113-154, 1997.

LIU, G. R.; GU, Y. T. A Point Interpolation Method for Two-dimensional Solids. International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 50, p. 937-951, 2001.

LIU, L.; CHUA, L. P.; HISTA, D. N. Element-free Galerkin Method for Static and Dynamic Analysis of Spatial Shell Structures, Journal of Sound and Vibration, v. 295, p. 388-406, 2006.

LU, Y.; BELYTSCHKO, T; GU, L. A New Implementation of the Element Free Galerkin Method. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v. 113, p. 397-414, 1994.

LUCY, L. B. A Numerical Approach to the Testing of the Fission Hypothesis. The Astronomical Journal, v. 82, p. 1013-1024, 1977.

MACLAUGHLIN, M., Regress +, A Compendium of Common Probability Distributions, Version 2.3, Third Printing, Appendix A, 2001.

MELCHERS, R. E. **Structural Reliability Analysis and Prediction**. Ellis Horwood Limited, England, 1987.

MELCHERS, R. E.; M. AHAMMED, A Fast Approximate Method for Parameter Sensitivity Estimation in Monte Carlo Structural Reliability, Computers and Structures, v. 82, p. 55-61, 2004.

MELENK, J. M.; BABUŠKA, I. The Partition of Unity Finite Element Method: Basic Theory and Applications. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v. 139, p. 289-314, 1996.

MENDONÇA, P. T. R.; BARCELLOS, C. S.; DUARTE, A. Investigations on the Hp-cloud Method by Solving Timoshenko Beam Problems. Computational Mechanics, v. 25, p. 286-295, 2000.

MICHALEWICZ, Z. **Genetic Algorithms + Data Structures = Evolution Programs**. 2nd ed., Springer-Verlag, New York, USA, 1994.

MONAGHAN, J. J. Why Particle Methods Work. SIAM. Journal of Scientific and Statistical Computing, v. 3, p. 422-439, 1982.

MONAGHAN, J. J. An Introduction to SPH. Computer Physics Communications, v. 48, p. 89-96, 1988.

MONMARCHÉ N.; RAMAT E.; DROMEL G.; SLIMANE M.; VENTURINI G. On the **Similarities Between AS, BSC and PBIL: Toward the Birth of a New Meta-heuristic**,

Tours, 1999. Ecole d'Ingénieurs en Informatique pour l'Industrie, Université de Tours, Technical Report E3i, 215.

MSC Software. <http://www.mscsoftware.com>. MSC:NASTRAN. Santa Ana, CA, 2003.

MUSCOLINO G.; RICCIARDI G.; IMPOLLONIA N. Improved Dynamic Analysis of Structures with Mechanical Uncertainties under Deterministic Input. Probabilistic Engineering Mechanics, v. 15, p. 199-212, 1999.

NAGASHIMA, T. Node-by-node Meshless Approach and its Applications to Structural Analyses. International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 46, p. 341-385, 1999.

NAYROLES, B.; TOUZOT, G.; VILLON, P. Generalizing the Finite Element Method: Diffuse Approximation and Diffuse Elements. Computational Mechanics, v. 10, p. 307-318, 1992.

OH, D. H.; LIBRESCU, L. Free Vibration and Reliability of Composite Cantilevers Featuring-Uncertain Properties, Reliability Engineering and System Safety, v. 56, p. 265-272, 1997.

OÑATE, E.; IDELSOHN, S.; ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L.; SACCO, C. A Stabilized Finite Point Method for Analysis of Fluid Mechanics Problems. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v. 39, p. 315-346, 1996.

PAPADRAKAKIS, M.; VISSARION P.; NIKOS D.; LAGAROS P. Structural Reliability Analysis of Elastic-Plastic Structures Using Neural Networks and Monte Carlo Simulation, Computer Methods in Applied Mechanics Engineering, v. 136, p. 145-163, 1996.

PAPADRAKAKIS, M.; LAGAROS P. Relisability-based Structural Optimization Using Neural Networks and Monte Carlo Simulation. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v. 191, p. 3491-3507, 2002.

PAVANELLO, R. **Contribution à l'étude Hydro-elastique des Structures à Symétrie Cyclique**. 1991. Thèse de Doctorat en Sciences pour l'Ingénieur, Institut National de Sciences Appliquées de Lyon, INSA-Lyon, France.

PERAZZO, M. F. Introducción a los Métodos Numéricos sin Malla, Fundamentos Teóricos, Curo de Introducción a los Métodos Numéricos sin Malla, III CONGRESO BOLIVARIANO DE INGENIERÍA MECÁNICA, 22 al 24 de julio del 2003.

PHOON, K.-K.; FARROKH NADIM, Modeling Non-Gaussian Random Vectors for FORM: State-of-the-Art Review, INTERNATIONAL WORKSHOP ON RISK ASSESSMENT IN SITE CHARACTERIZATION AND GEOTECHNICAL DESIGN, Indian Institute of Science, Bangalore, India, November 26-27, 2004, 55-85 (Keynote paper).

POMEROY, P. An Introduction to Particle Swarm Optimization. URL: <http://www.adaptiveview.com>, [cited 15 September 2003], 2003.

PONTHOT, J.P.; BELYTSCHKO,T. Arbitrary Lagrangian - Eulerian Formulation for Element-free Galerkin Method, Computer Methods In Applied Mechanics and Engineering, v. 152, p. 19-46, 1998.

POURTAKDOUST, S. H.; NOBAHARI, H. An Extension of Ant Colony to Continuous Optimization Problems. In: FOURTH INTERNATIONAL WORKSHOP ON ANT COLONY OPTIMIZATION AND SWARM INTELLIGENCE, 2004, Brussels, Belgium, Proceedings of the ANTS 2004, Dorigo, M. ed.

PREDICTIONPROBE, Inc. <http://www.predictionprobe.com>. UNIPASS. New-port Beach, CA, 2003.

QIN, Q.; LIN, D.; MEI, G.; CHEN, H. Effects of Variable Transformations on Error in FORM Results, Journal of Reliability Engineering & System Safety, v. 91, p. 112-118, 2006.

RABCZUK, T.; WALL, W. A. Extended Finite Element and Meshfree Methods, Computational Mechanics of Technical University of Munich, Version 2006/2007.

RAHMAN, S.; RAO, B.N. An Element-free Galerkin Method for Probabilistic Mechanics and Reliability. International Journal of Solids and Structures, v. 38, p. 9313-9330, 2001.

RAHMAN, S.; RAO, B.N. Probabilistic Fracture Mechanics by Galerkin Meshless Methods – Part II: Reliability Analysis. Computational Mechanics, v. 28, p. 365-374, 2002.

RAHMAN, S.; XU, H. A Meshless Method for Computational Stochastic Mechanics. International Journal of Computational Methods in Engineering Science and Mechanics, v. 64, p. 41-58, 2005.

RAO, B.N.; RAHMAN, S. Probabilistic Fracture Mechanics by Galerkin Meshless Methods – Part I: Rates of Stress Intensity Factors. Computational Mechanics, v. 28, p. 351-364, 2002.

RAO, B.N.; RAHMAN, S. An efficient Meshless Method for Fracture Analysis of Cracks. Computational Mechanics, v. 26, p. 398-408, 2000.

REDDY, J. N. **Mechanics of Laminated Composite Plates: Theory and Analysis**. 1ª ed., CRC Press, Boca Raton, 1997.

RELIABILITY CONSULTING PROGRAMS. <http://www.strurel.de>. STRUREL: COMREL*;* SYSREL*;* NASCOM*;* NASREL. Munich, Germany, 2003.

ROBERT C.; REUTER, JR. Concise Property Transformation Relations for an Anisotropic Lamina, Journal of Composite Materials, p. 270-272, April 1971.

RIVLIN, T. J. **An Introduction to the Approximations of Functions**. Blasidell Publishing Company, 1969.

ROJAS, J. E.; BENDAOU, O.; EL HAMI A.; RADE D. A. Reliability Prediction in Fluid-Structure Interaction Problems. In: ELEVENTH INTERNATIONAL CONFERENCE ON CIVIL, STRUCTURAL AND ENVIRONMENTAL ENGINEERING COMPUTING, 2007 a. B.H.V. Topping, (Editor), Civil-Comp Press, Stirlingshire, United Kingdom, Proceedings of the 11th ICCSEEC, paper 43.

ROJAS, J. E.; VIANA, F. A. C.; EL HAMI A.; RADE D. A. A Procedure for Structural Reliability Analysis based on Meshless Methods. In: ELEVENTH INTERNATIONAL CONFERENCE ON CIVIL, STRUCTURAL AND ENVIRONMENTAL ENGINEERING COMPUTING, 2007 b. B.H.V. Topping, (Editor), Civil-Comp Press, Stirlingshire, United Kingdom, Proceedings of the 11th ICCSEEC, paper 41.

ROJAS, J. E.; VIANA, F. A. C.; RADE D. A.; STEFFEN JR., V. Identification of External Forces in Mechanical Systems by Using LifeCycle Model and Stress-stiffening Effect. Mechanical Systems and Signal Processing, v. 21, n. 7, p. 2900-2917, 2007 c.

ROJAS, J. E.; VIANA, F. A. C.; RADE D. A. Natured-inspired Optimization Techniques Applied to Structural Reliability Analysis. In: 7th MULTIDISCIPLINARY INTERNATIONAL CONFERENCE QUALITY AND RELIABILITY, Qualita 2007, March 20-22, 2007, Tangier, Morocco, 2007 d.

ROJAS, J. E.; VIANA, F. A. C.; RADE D. A.; STEFFEN JR., V. A Procedure for Structural Reliability Analysis Based on Finite Element Modelling. In: IV CONGRESSO NACIONAL DE ENGENHARIA MECÂNICA, 22 a 25 de Agosto 2006, Recife-PE, Brasil.

ROJAS, J. E.; VIANA, F. A. C.; RADE D. A. Métodos de Analise de Confiabilidade de Primeira e Segunda orden Aplicados a Sistemas Estruturais. In: VII SIMPOSIO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL, 31 de maio a 2 de junio de 2006, CEFET-Araxa, Minas Gerais, Brasil.

ROJAS, J. E.; RADE, D. A. Tecnicas de Analise de Confiabilidade: Estado de arte e Aplicaçoes. In: SIMPOSIO DO PROGRAMA DE POS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECANICA, 15º POSMEC, Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade de Enegenharia Mecânica, dezembro de 2005.

ROJAS, J. E.; BEZERRA, A. C.; VIEIRA JR. A. B., D. A. RADE. Influence of Stress-stiffening on the Dynamic Behavior of Plates: Direct and Inverse Problems. In: XI INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON DYNAMIC PROBLEMS OF MECHANICS, XI DINAME, 28/02-4/03/2005, Ouro Preto, MG, Brazil, 2005.

ROJAS, J. E.; VIANA, F. A. C.; RADE D. A.; STEFFEN JR. Identification of External Loads in Mechanical Systems through Heuristic-based Optimization Methods and Dynamic Responses. Latin American Journal of Solids and Structures, v.1, n. 3, p. 297-318, 2004.

ROJAS, J. E. **Characterization of Stress-stiffening Effect and Identification of Loads in Structures from Dynamic Responses**. (In Portuguese), 2004, p. 120. Master Sciences Dissertation - Federal University of Uberlândia, Uberlândia, Brazil.

RUBINSTEIN, R.Y. **Simulation and the Monte Carlo Method**, John Wiley & Sons, New York, 1981, p. 278.

SANDIA NATIONAL LABORATORIES. <http://www.sandia.gov>. DAKOTA. Albuquerque, NM and Livermore, CA, 2003.

SANTANA, W. C. **Um Método Robusto de Elementos Finitos Generalizados Aplicado à Mecânica da Fratura**. 2004, p. 158. Tese de Doutorado - Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brazil.

SARSRI, D. **Contribution à l'analyse des Structures Comportant des Paramètres Incertains par les Méthodes de Synthèse Modale**. 2005. Thèse de Doctorat en Sciences pour l'Ingénieur, Institut National de Sciences Appliquées de Rouen, INSA-Rouen, France.

SHUEREMANS, L.; VAN GEMERT, D. Benefit of Splines and Neural Networks in Simulation Based Structural Reliability Analysis. Structural Safety, v. 27, p. 246-261, 2005.

SHINOZUKA, M. Monte Carlo Solution of Structural Dynamics. International Journal Computer Structural, v. 2, p. 855-874, 1972.

SOCHA, K. ACO for Continuous and Mixed-Variable Optimization. Dorigo, M., ed. In: FOURTH INTERNATIONAL WORKSHOP ON ANT COLONY OPTIMIZATION AND SWARM INTELLIGENCE, 2004, Brussels, Belgium, Proceedings of the ANTS 2004.

SOUTHWEST RESEARCH INSTITUTE. <http://www.nessus.swri.org>. NESSUS. San Antonio, TX, 2003.

SPENCER, B. F. JR.; SAIN, M. K.; KANTOR, J. C.; MONTEMAGNO, C. Probabilistic Stability Measures for Controlled Structures Subject to Real Parameter Uncertainties, Smart Materials and Structures, v. 1, p. 294–305, 1992.

SPENCER, B. F. JR.; KASPARI J. R.; SAIN, M. K. Structural Control Design: A Reliability-Based Approach, In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE, June 1994, Baltimore, Maryland, Proceedings of the ACC.

SUDRET, B.; DER KIUREGHIAN, A. Stochastic Finite Element Methods and Reliability. A State-of-the-Art Report. Department of Civil and Environmental Engineering, University of California, Berkeley, 2000, Report No. UCB/SEMM-2000/08.

SULSKY, D.; ZHOU, S. J.; SCHREYER, H. J. Application of a Particle-in-cell Method to Solid Mechanics. Computer Physics Communications, v. 87, p. 236-252, 1995.

TAFLANIDIS, A. A.; BECK, J. L. Analytical Reliability Calculation of Linear Dynamical Systems in Higher Dimensions, In: EURODYN 2005, C. Soize & G. I. Shuëller (eds.) ©2005 Millpress, Rotterdam, ISBN 90 5966 033 1.

TAYLOR, R. L. <http://www.ce.berkeley.edu/rlt/feap>. FEAP. Department of Civil and Environmental Engineering, University of California, Berkeley, CA, 2003.

TVEDT, L. Distribution of Quadratic Forms in Normal Space - Application to Structural Reliability. Journal of Engineering Mechanics, ASCE, v. 116, n. 6, p. 1183-1197, June 1990.

TIMOSHENKO, S.P.; GOODIER, J. N. **Theory of Elasticity**. (Third Ed.), New York, McGraw Hill, 1987.

VAN DEN NIEUWENHOF, B. **Stochastic Finite Elements for Elastodynamics: Random Field and Shape Uncertainty Modeling Using Direct and Modal Perturbation-based Approaches**. Doctoral Thesis, Université Catholique de Louvain, Louvain-la-Neuve, Belgique, 2003.

VANDERPLAATS, G. N. **Numerical Optimization Techniques for Engineering Design**. Vanderplaats Research and Development, Inc., 3rd edition, 1999.

VENTER, G.; SOBIESKI, J. S. Particle Swarm Optimization. In: STRUCTURAL DYNAMICS AND MATERIALS CONFERENCE, Proceedings of the 43rd AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, 2002 April 22-25, Denver, CO, USA, v. AIAA-2002-235.

VIANA, F. A. C.; ROJAS, J. E.; RADE, D. A.; V. STEFFEN JR. Experimental Force Identification by Using Natural Optimization, In: SIXTH WORLD CONGRESS ON STRUCTURAL AND MULTIDISCIPLINARY OPTIMIZATION, 2005, Rio de Janeiro, Brazil, Proceedings of the 6th WCSMO.

VIANA, F. A. C.; V. STEFFEN JR. **Simple Optimization Toobox**. User's Guide Version 2, November, 2006.

VILA, J. P. On Particle Weighted Method and Smooth Particle Hydrodynamics. Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, v. 9, p. 161-209, 1999.

VITTAL, S., HALEJA, P. Probabilistic Design & Optimization of Aging Structures. 10th AIAA/ISSMO Multidisciplinary Analysis and Optimization Conference, 30 August – 1 September 2004, Albany, New York, AIAA 2004-4617.

WAGNER, G. J.; LIU, W. K. Application of Essential Boundary Conditions in Mesh-free methods: A Correct Collocation Method. International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 47, p. 1367-1379, 2000.

WAGNER, G. J.; LIU, W. K. Hierarchical Enrichment for Brinding Scales and Mesh-free Boundary Conditions. International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 50, p. 507-524, 2001.

YAGAWA, G.; YAMADA, T. Free Mesh Method: A New Meshless Finite Element Method. Computational Mechanics, v. 18, p. 383–386, 1996.

YU, X.; SAIGAL, S. An Element Free Galerkin Formulation for Stable Crack Growth in an Elastic Solid, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v. 154, p. 331-343, 1998.

ZHANG, Y.; DER KIUREGHIAN, A. Finite Element Reliability Methods for Inelastic Structures. Department of Civil and Environmental Engineering, University of California, Berkeley, CA, 1997, Report No. UCB/SEMM-97/05.

ZHAO, Y.-G.; TETSURO O. A General Procedure for First/second-order Reliability Method (FORM/SORM). Structural Safety, v. 21, p. 95-112, 1999.

ZHU, T.; ZHANG, J.-D.; ATLURI, S. N. A Local Boundary Integral Equation Method in Computational Mechanics and a Meshless Discretization Approach. Computational Mechanics, v. 21, p. 223-235, 1998.

ZHU, T.; ATLURI, S. A Modified Collocation Method and Penalty Formulation for Enforcing the Essential Boundary Conditions in the Element-free Galerkin Method. Computational Mechanics, v. 21, p. 211-222, 1998.

ANNEXE A

MISE EN ŒUVRE D'UNE PROCEDURE GENERALE D'ANALYSE DE FIABILITE

La Figure A.1 illustre la stratégie d'analyse de fiabilité proposée dans cette thèse. Pour cela une procédure d'interfaçage et remplacement entre différentes méthodes de modélisation et d'analyse de fiabilité a été mise en ouvre.

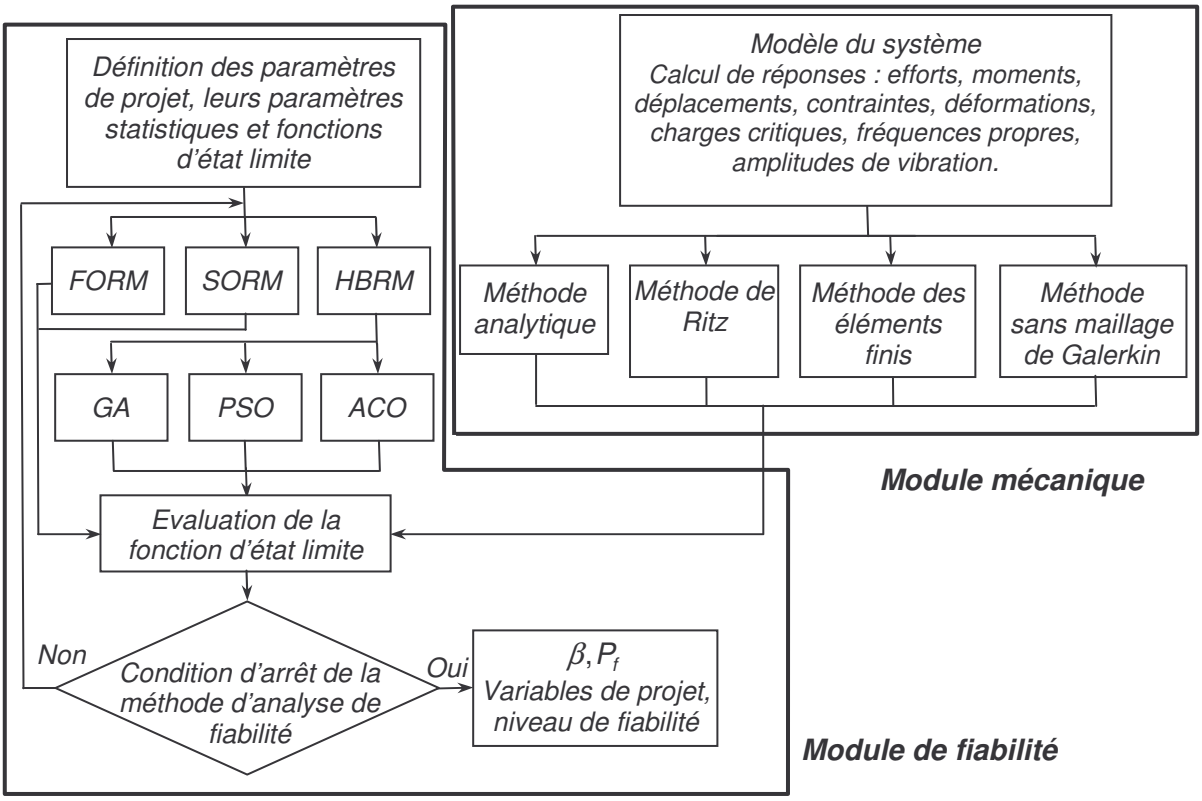


Figure A.1 - Procédure générale d'analyse de fiabilité

ANNEXE B

FONCTIONS DENSITE DE PROBABILITE ET LOIS DE TRANSFORMATION

Les tableaux suivants expriment les lois de transformation des variables aléatoires et leurs paramètres statistiques pour différents types de distributions densité de probabilité. Ces lois ont été utilisées pour la mise en œuvre des algorithmes d'analyse de fiabilité, décrits dans le Chapitre II et dont les applications se trouvent dans les Chapitres III et VI.

Des informations détaillées sur ces lois peuvent être trouvées dans les travaux de Beck (2006), Maclaughlin (2001) et Qin et al.(2006).

Tableau B.1 - Variables aléatoires continues

Distribution	**Loi de transformation**	**Moment statistique**	
		Premier	**Second**
Normale	$x_i^{'} = \dfrac{(x_i - \mu_i)}{\sigma_i}$	μ_i	σ_i
Logistique	$x_i^{'} = \dfrac{1}{1 + \exp\left[-\dfrac{\pi}{\sqrt{3}}\left(\dfrac{x_i - \mu_i}{\sigma_i}\right)\right]}$	μ_i	σ_i
Log normale	$x_i^{'} = \dfrac{\ln(x_i) - \lambda_i}{\zeta_i}$	$\lambda_i = \ln(\mu_i) - \dfrac{1}{2}\zeta_i^{\,2}$	$\zeta_i = \sqrt{\ln\left(1 + \delta_i^2\right)}$, $\delta_i = \dfrac{\sigma_i}{\mu_i}$
Uniforme	$x_i^{'} = \dfrac{x_i - a_i}{b_i - a_i}$	$a_i = \mu_i - \sqrt{3}\sigma_i$	$b_i = \mu_i + \sqrt{3}\sigma_i$
Exponentiel	$x_i^{'} = 1 - \exp\left[-\nu_i\left(x_i - \varepsilon_i\right)\right]$	$\varepsilon_i = \mu_i - \sigma_i$	$\nu_i = \dfrac{1}{\sigma_i}$

Rayleigh	$x_i^{'} = 1 - \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i - \varepsilon_i}{\eta_i}\right)^2\right]$	$\eta_i = \frac{\sigma_i}{\sqrt{2 - \frac{\pi}{2}}}$	$\varepsilon_i = \mu_i - \eta_i\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

Tableau B.2 - Valeurs extrêmes des variables aléatoires

Distribution	**Loi de transformation**	**Moment statistique**	
		Premier	**Second**
Type I-Gumbel Max	$x_i^{'} = \exp\{-\exp[-\alpha_i(x_i - u_i)]\}$	$\alpha_i = \frac{\pi}{\sqrt{6}\sigma_i}$	$u_i = \mu_i - \frac{\gamma}{\alpha_i}$
Type I-Gumbel Min	$x_i^{'} = 1 - \exp\{-\exp[\alpha_i(x_i - u_i)]\}$	$\alpha_i = \frac{\pi}{\sqrt{6}\sigma_i}$	$u_i = \mu_i + \frac{\gamma}{\alpha_i}$
Type II-Frechet Max	$x_i^{'} = \exp\left[-\left(\frac{u_i}{x_i}\right)^{\alpha_i}\right]$	$\mu_i = u_i\Gamma\left(1 - \frac{1}{\alpha_i}\right)$	σ_i
Type II-Frechet Min	$x_i^{'} = 1 - \exp\left[-\left(\frac{u_i}{x_i}\right)^{\alpha_i}\right]$	$\mu_i = u_i\Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha_i}\right)$	σ_i
Type III-Weibull Max	$x_i^{'} = \exp\left[-\left(\frac{\varepsilon_i - x_i}{\varepsilon_i - u_i}\right)^{\alpha_i}\right]$	$\mu_i = \varepsilon_i + (u_i - \varepsilon_i)\Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha_i}\right)$	σ_i
Type III-Weibull Min	$x_i^{'} = 1 - \exp\left[-\left(\frac{x_i - \varepsilon_i}{u_i - \varepsilon_i}\right)^{\alpha_i}\right]$	$\mu_i = \varepsilon_i + (u_i - \varepsilon_i)\Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha_i}\right)$	σ_i

ANNEXE C

SYNTHESE MODALE, MODELISATION DE L'INTERACTION FLUIDE-STRUCTURE ET METHODE DE PERTURBATION DE MUSCOLINO

Les aspects théoriques de la synthèse modale, de la modélisation de l'interaction fluide-structure liée à la méthode de perturbation de Muscolino sont présentés dans cette annexe. Pour plusieurs détails de ces aspects la lecture des travaux de Pavanello (1991), Bendaou et al. (2007) et Bendaou et al. (2005) est conseillée.

C.1. Synthèse modale

Soit une structure de volume Ω divisé en N_s sous-structures, occupant chaque sous-structure un volume noté par Ω^s.

L'interface $I^{ss'}\Omega^s + \Omega^{s'}$ désigne la jonction entre la sous-structure s et la sous-structure s', et $I^{ss'} = \Theta$ si ces deux domaines ne sont pas en contact.

C.1.1. Equations pour les sous-structures

On suppose chaque sous-structure élastique linéaire isotrope, sans contrainte ni déformation initiale. En l'absence de source volumique, l'équation qui gouverne leurs comportements vibratoires est donnée par :

$$\nabla.\sigma^s - \rho_s u^s = 0, \qquad s = 1,...,Ns \tag{C.1}$$

où ρ_s, u^s et σ^s sont respectivement la masse volumique, le champ de déplacement et le tenseur des contraintes de la sous-structure s.

Dénotant par Γ_u^s les frontières de déplacement imposé Γ_f^s celles de l'effort extérieur imposé, les conditions aux limites associées à la sous-structure s s'écrivent :

$$u^s\Big|_{\Gamma_u^s} = \bar{u}^s, \qquad \sigma^s.n\Big|_{\Gamma_f^s} = \bar{f}^s \tag{C.2}$$

Aux interfaces entre les sous-structures $I^{ss'}$, la continuité du déplacement et de la composante normale du tenseur des contraintes doit être assurée. Ces conditions s'écrivent:

$$\left(u^s - u^{s'}\right)\Big|_{I^{ss'}} = 0 \tag{C.3}$$

$$\left(\sigma^s.n - \sigma^{s'}.n\right)\Big|_{I^{ss'}} = 0 \tag{C.4}$$

C.1.2. Formulations variationnelles

Soit u^{s*} un champ virtuel associé à la sous-structure s. L'Equation (C.1) est intégrée sur le domaine Ω^s. Après intégration par parties puis application des conditions (C.2) et (C.3), le problème variationnel consiste à trouver u^s tel que $\left\{u^s\Big|_{\Gamma_u^s} = \bar{u}^s\right\}$ et :

$$\begin{gathered}\int_{\Omega^s} \rho_s u^{s*}.\ddot{u}^s dV + \int_{\Omega^s} \varepsilon^{s*} : \sigma^s dV = \int_{\Gamma_f^s} u^{s*}.\bar{f}^s dS + \sum_{\substack{s'=1\\ s'\neq s}}^{Ns} \int_{I^{ss'}} u^{s*}.\left(\sigma^{s'}.n\right) dS \\ \forall u^{s*} / \left\{u^{s*}\Big|_{\Gamma_u^s} = 0\right\} \qquad s = 1,\ldots,Ns\end{gathered} \tag{C.5}$$

où ε désigne le tenseur des déformations et *n* représente la normale sortante de Ω^s.

C.1.3. Discrétisation par éléments finis

La discrétisation par éléments finis des problèmes variationnels structuraux (C.5) et l'application de la méthode de Galerkin aboutit à la forme algébrique suivante :

$$\left[M^s\right]\left\{\ddot{u}^s\right\} + \left[K^s\right]\left\{u^s\right\} = \left\{f^s\right\} + \sum_{\substack{s'=1\\ s'\neq s}}^{Ns} \left\{f_I^{ss'}\right\} \qquad s = 1,\ldots,Ns \tag{C.6}$$

Le vecteur $\{u^s\}$ contient tous les degrés de liberté inconnus associés au déplacement structural (les degrés de liberté sur les frontières Γ_u^s, connus, ne sont pas contenus dans ce vecteur). Les matrices $[M^s]$, $[K^s]$ et $\{f^s\}$ désignent respectivement la matrice de masse de la sous-structure s, sa matrice de rigidité et son vecteur des forces équivalents extérieurs (incluant les excitations inhérentes à la frontière Γ_u^s, de type déplacement imposé).

Le terme $\{f_I^{ss'}\}$ représente physiquement les forces interfaciales exercées sur la sous-structure s par la sous-structure adjacente s'.

En assemblant les Ns sous-structures selon un vecteur global contenant tous les degrés de liberté, organisé selon la forme suivante :

$$\langle u \rangle = \langle u^1 \quad u^2 \quad \dots \quad u^{Ns} \rangle \tag{C.7}$$

l'assemblage de la formulation (C.6) conduit au système d'équations suivant :

$$[M]\{\ddot{u}\} + [K]\{u\} = \{f\} + \{f_I\} \tag{C.8}$$

où :

$$[M] = \begin{bmatrix} M^1 & & \\ & \ddots & \\ & & M^{Ns} \end{bmatrix}, \qquad [K] = \begin{bmatrix} K^1 & & \\ & \ddots & \\ & & K^{Ns} \end{bmatrix} \tag{C.9}$$

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} f^1 \\ \vdots \\ f^{Ns} \end{Bmatrix}, \qquad \{f_I\} = \begin{Bmatrix} \sum_{s' \neq 1} f_I^{1s'} \\ \vdots \\ \sum_{s' \neq Ns} f_I^{Nss'} \end{Bmatrix} \tag{C.10}$$

C.1.4 Calcul des modes locaux

Le vecteur des degrés de liberté de chaque sous-structure s est partitionné suivant les degrés de libertés internes (indice i) et ceux de jonctions (indice j). Ces derniers correspondent aux degrés de liberté situés aux interfaces entre la sous-structure s et toutes les autres sous-structures adjacentes. Ainsi :

$$\left\langle u^s \right\rangle = \left\langle u_i^s \middle| u_j^s \right\rangle, \qquad \left[M^s\right] = \begin{bmatrix} M_{ii}^s & M_{ij}^s \\ M_{ji}^s & M_{jj}^s \end{bmatrix}, \qquad \left[K^s\right] = \begin{bmatrix} K_{ii}^s & K_{ij}^s \\ K_{ji}^s & K_{jj}^s \end{bmatrix} \tag{C.11}$$

Suivant la méthode de Craig et Bampton (Guedri et al. 2006), les modes locaux choisis correspondent aux modes à interfaces $I^{ss'}$ fixes. Ils vérifient le problème aux valeurs propres suivant :

$$\left[K_{ii}^s - \omega^2 M_{ii}^s\right] \left\{\psi_i^s\right\} = \{0\} \qquad s = 1,\ldots,Ns \tag{C.12}$$

Ces modes, orthogonaux sont enrichis par des modes statiques de liaison. Ces derniers sont définis comme étant la déformation statique de la sous-structure considérée, lorsqu'un déplacement unitaire est appliqué tour à tour à chacun de ses degrés de liberté de jonction, les autres étant forcés à zéro.

La base modale locale d'une sous-structure s est ainsi donnée par :

$$\left[\varphi^s\right] = \begin{bmatrix} \Psi^s & -K_{ii}^{s\,-1} K_{ij}^s \\ 0 & I_{jj}^s \end{bmatrix} \tag{C.13}$$

où $\left[\Psi^s\right]$ représente la matrice des modes à interfaces fixes retenus après troncature et qui sont disposés en colonnes. La stratégie de choix du nombre de modes retenus de chaque sous-structure consiste à garder tous les modes de sous-structure contenus dans la bande multiple de la fréquence utile (f_u), soit deux fois la bande utile $([0\ \ 2f_u])$ (El Hami et al., 1993).

Les degrés de liberté physiques de chaque sous-structure peuvent alors être décomposés sur leur base modale locale respective, soient :

$$\left\{u^s\right\} = \left[\varphi^s\right] \left\{\alpha^s\right\} \qquad s = 1,\ldots,Ns \tag{C.14}$$

où $\left\{\alpha^s\right\}$ est le vecteur des coordonnées généralisées associées à la sous-structure s contenant d'une part les coefficients associés aux modes d'interfaces fixes, d'autre part les degrés de liberté physiques (déplacements nodaux et rotations) de jonction structurale.

C.1.5. Réduction du modèle

Les décompositions locales (C.14) peuvent être assemblées comme suit :

$$\{u\} = [\varphi]\ \{p\} \tag{C.15}$$

avec :

$$[\varphi] = \begin{bmatrix} \varphi^1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \varphi^{Ns} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \{p\} = \begin{Bmatrix} \alpha 1 \\ \vdots \\ \alpha^{Ns} \end{Bmatrix}, \tag{C.16}$$

Ainsi l'équation (C.8) devient après projection :

$$[M_p]\ \{\ddot{p}\} + [K_p]\ \{p\} = \{f_p\} + [\varphi]^t \{f_I\} \tag{C.17}$$

où :

$$[M_p] = [\varphi]^t [M][\varphi], \qquad [K_p] = [\varphi]^t [K][\varphi], \qquad [f_p] = [\varphi]^t [f] \tag{C.18}$$

Il faut maintenant tenir compte des conditions de continuité aux interfaces structure/structure. En effet, les degrés de liberté de {*p*} ne sont pas linéairement indépendants. Les relations linéaires entre ces degrés de liberté sont issues de l'égalité des déplacements aux interfaces structure/structure. Elles peuvent s'exprimer par une matrice globale de connectivité $[S]$:

$$\{p\} = [S]\{q\} \tag{C.19}$$

où $\{q\}$ ne contient plus que des degrés de liberté linéairement indépendants. La matrice $[S]$ caractérise la connectivité des sous-structures entre elles. Pour une méthode de type Craig et Bampton comme c'est le cas ici, la matrice $[S]$ est booléenne et facile à exprimer puisque les degrés de liberté physiques de jonction font partie explicitement des inconnues généralisées $\{p\}$.

D'après les conditions (C.4), les équations de compatibilité sont les suivantes :

$$\{f^{ss'}\}+\{f^{s's}\}=\{0\} \tag{C.20}$$

Ainsi les équations impliquent que :

$$[S]^t[\varphi]^t\{f_I\}=[S]^t\{f_I\}=0 \tag{C.21}$$

Et le système final à résoudre s'écrit :

$$[M_q]\{\ddot{q}\}+[K_q]\{q\}=\{f_q\} \tag{C.22}$$

où :

$$[M_q]=[S]^t[M_p][S], \qquad [K_q]=[S]^t[K_p][S], \qquad [f_q]=[\varphi]^t[f_p] \tag{C.23}$$

Comparé au système (C.8), ce modèle est considérablement réduit en pratique puisque sa taille correspond au nombre total de modes locaux orthogonaux retenus après troncature, auquel il faut ajouter le nombre total de degrés de liberté de jonction.

C.2. Modélisation de l'interaction fluide-structure

L'étude de l'interaction fluide-structure peut être définie comme l'analyse du comportement couplé de deux milieux de nature différente. Le premier, constitué par une structure élastique et le second, par un fluide (Pavanello, 1991):

- Si le fluide est incompressible, le problème est dit : hydro-Elastique ;
- Si le fluide est compressible, le problème est dit : elasto-Acoustique.

On suppose que :

- la structure est élastique, linéaire, isotrope et sans contrainte ni déformation initiale,
- le fluide est parfait autour de sa position de repos et on considère de petites perturbations en évolution adiabatique.

L'équation du mouvement pour la structure s'exprime :

$$\nabla\sigma-\rho_s\ddot{u}=0 \tag{C.24}$$

et les conditions aux limites associées à la structure sont :

$$u\big|_{\Gamma_u} = \overline{u} \qquad \sigma.n\big|_{\Gamma_F} = \overline{F} \tag{C.25}$$

où Γ_u représente la frontière de type déplacement imposé, Γ_F est la frontière de type effort imposé.

L'équation du fluide pour une formulation en fonction de la pression P est la suivante :

$$\Delta P - \frac{1}{c^2}\ddot{P} = 0 \tag{C.26}$$

Les conditions aux limites associées au fluide sont données selon :

$$P\big|_{\Gamma_P} = \overline{P} \qquad \left.\frac{\partial P}{\partial n}\right|_{\Gamma_a} = -\rho_f \overline{a} \tag{C.27}$$

où Γ_P représente la frontière de F de type pression impose, Γ_a est la frontière de F de type accélération normale imposée.

Les conditions de couplage à l'interface fluide-structure sont exprimées en fonction de C (qui représente l'interface fluide-structure, ainsi, les conditions de couplage se traduisent par :

- la continuité de l'accélération normale $\left.\frac{\partial P}{\partial n}\right|_C = -\rho_f \ddot{u}$,
- la continuité de la composante normale du tenseur des contraintes $\sigma.n\big|_C = P.n$.

Après la discrétisation et l'approximation par éléments finis on aboutit aux équations matricielles, pour la structure :

$$[M]\ \{\ddot{u}\} + [K]\{u\} = [L]\{P\} \tag{C.28}$$

et pour le fluide :

$$[E]\{\ddot{P}\} + [H]\{P\} = -\rho[L]^t\{\ddot{u}\} \tag{C.29}$$

Finalement, les équations pour le système couplé sont exprimées par :

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ \rho_f L^t & E \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{P} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K & -L \\ 0 & H \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ P \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{C.30}$$

Pour déterminer les modes et les fréquences propres du système couplé, il convient que les matrices soient symétriques, ce qui n'est pas le cas. Ainsi il est utilisé un procédure de symétrisation tel que celui de Irons (Pavanello, 1991).

Il est important de remarquer que pour un problème hydro-elastique (fluide incompressible) la célérité du fluide est très grande ($c^2 \to \infty$), ainsi le système d'équations déviant :

$$\left([M] + \rho_f [L][H]^{-1} [L]^t \right) \{\ddot{u}\} + [K]\{u\} = \{0\} \tag{C.31}$$

Le calcul stochastique du problème d'interaction fluide structure des applications présentées au Chapitre IV est réalisée par l'application de la méthode de perturbation de Muscolino.

C.3. Méthode de perturbation de Muscolino

Les méthodes de perturbation sont très largement employées dans le domaine des éléments finis stochastiques. Elles sont basées sur un développement en série de Taylor de la fonction de réponse en fréquence (respectivement les fréquences propres ou la réponse dynamique) du système par rapport aux variables aléatoires physiques de base, propriétés mécaniques, caractéristiques géométriques ou efforts appliqués. Les méthodes de perturbation calculent la moyenne et l'écart type de la réponse d'une structure mécanique à variables incertaines. Cette méthode est utilisée dans de nombreux domaines, pour résoudre des problèmes linéaires et non linéaires, aussi bien en statique qu'en dynamique.

La méthode de perturbation de Muscolino est une méthode de perturbation basée sur un développement en série de Taylor d'ordre un. Elle est utilisée que pour les systèmes dont les paramètres aléatoires sont indépendants.

Admettant que les matrices de masse et de rigidité sont fonctions des variables aléatoires $\{\alpha_p\}_{(p=1,.....,P)}$, que λ_i est la i-ème fréquence propre, $\{\overline{\alpha}\}$ est le vecteur des paramètres moyens, étant $\{d\alpha\} = \{\alpha\} - \{\overline{\alpha}\}$.

Pour simplifier il est adopté la notation suivante pour les dérivées d'une quantité A :

$$[A]^0 = [A]_{\{\overline{\alpha}\}}, \qquad [A]^n = \left.\frac{\partial [A]}{\partial \alpha_n}\right|_{\{\overline{\alpha}\}} \tag{C.32}$$

Dans ce cas $[A]^0$ *et* $[A]^n$ sont déterministes et la répétition de l'indice n deux fois implique une somme.

Selon la méthode de perturbation de Muscolino, on pose :

$$[K_T] = [K_T]^0 + [K_T]^n \{d\alpha_n\} \tag{C.33}$$

$$[M_T] = [M_T]^0 + [M_T]^n \{d\alpha_n\} \tag{C.34}$$

$$\lambda_i = (\lambda_i)^0 + (\lambda_i)^n \{d\alpha_n\} \tag{C.35}$$

L'équation aux valeurs-vecteurs propres d'ordre 0 s'écrit :

$$\left([\mathrm{K}]^0 - (\lambda_\mathrm{i})^0 [\mathrm{M}]^0\right)\{\phi_\mathrm{i}\}^0 = 0 \tag{C.36}$$

L'équation aux valeurs-vecteurs propres d'ordre 1 est exprimée selon :

$$(\lambda_i)^n = \frac{{}^t\{\phi_i\}^0 \left([K]^n - (\lambda_i)^0 [M]^n\right)\{\phi_i\}^0}{{}^t\{\phi_i\}^0 \left([M]^0\right)\{\phi_i\}^0} \tag{C.37}$$

Les moyennes sont données par :

$$E[\lambda_i] = (\lambda_i)^0 \tag{C.38}$$

Les variances sont données par :

$$Var[\lambda_i] = \left((\lambda_i)^n\right)^2 Var(\alpha_n) \tag{C.39}$$

C.3.1. Méthode de perturbation de Muscolino avec synthèse modale

Pour un système mécanique dont les d.d.l.s sont réduits par la méthode de synthèse modale, la méthode de perturbation de Muscolino admet les bases modales de réductions déterministes. Cette hypothèse est justifiée puisque la méthode de perturbation n'est appliquée qu'aux systèmes dont les paramètres varient faiblement (Sarsri, 2005). Ainsi :

$$\left[M_q\right]^0 = [S]^t [\varphi]^t [M]^0 [\varphi][S] \qquad \left[M_q\right]^n = [S]^t [\varphi]^t [M]^n [\varphi][S] \tag{C.40}$$

$$\left[K_q\right]^0 = [S]^t [\varphi]^t [K]^0 [\varphi][S] \qquad \left[K_q\right]^n = [S]^t [\varphi]^t [K]^n [\varphi][S] \tag{C.41}$$

Pour des perturbations importantes ou bien des perturbations qui modifient le spectre modal de la structure notamment pour les structures avec des modes voisins, il faut étendre la base de Craig- Bampton (Guedri et al. 2006).