



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE ENGENHARIA QUÍMICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA QUÍMICA



**UMA CONTRIBUIÇÃO AO ESTUDO DE CONTROLADORES
ROBUSTOS**

CLÁUDIO HOMERO FERREIRA DA SILVA

Uberlândia – MG

2009



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE ENGENHARIA QUÍMICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA QUÍMICA



UMA CONTRIBUIÇÃO AO ESTUDO DE CONTROLADORES ROBUSTOS

Cláudio Homero Ferreira da Silva

Orientador: Humberto Molinar Henrique

Co-orientador: Luís Cláudio Oliveira-Lopes

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Química da Universidade Federal de Uberlândia como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Engenharia Química

Uberlândia – MG

2009

FICHA CATALOGRÁFICA

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

S586c Silva, Cláudio Homero Ferreira da, 1973-
Uma contribuição ao estudo de controladores robustos / Cláudio Homero Ferreira da Silva. - 2009.
218 f. : il.

Orientador: Humberto Molinar Henrique.
Co-orientador: Luís Cláudio Oliveira-Lopes.

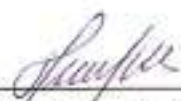
Tese (doutorado) – Universidade Federal de Uberlândia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Química.
Inclui bibliografia.

1. Controle de processo - Teses. I. Henrique, Humberto Molinar. II. Lopes, Luís Cláudio Oliveira. III. Universidade Federal de Uberlândia. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Química. III. Título.

CDU: 681.51

TESE DE DOUTORADO SUBMETIDA AO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA QUÍMICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA COMO PARTE DOS REQUISITOS PARA OBTENÇÃO DO TÍTULO DE DOUTOR EM ENGENHARIA QUÍMICA, EM 06/02/2009.

BANCA EXAMINADORA:



Prof. Dr. Humberto Molinar Henrique
Orientador - PPG-EQ/FEQUI/UFU



Prof. Dr. Luís Cláudio Oliveira Lopes
Co-Orientador - PPG-EQ/FEQUI/UFU



Prof. Dr. Maurício Bezerra de Souza Jr.
DEQ/EQ/UFRJ



Profa. Dra. Cristiane Holanda Sodré
DEQ/UFAL

À minha amada **Maria Teresinha** e à minha família:
Homero, Iolanda e Cristiano, que acreditaram em meu
potencial e sempre me incentivaram...

Agradeço a Deus e a todos aqueles que contribuíram de forma direta ou indireta para a realização deste trabalho.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS.....	i
LISTA DE TABELAS.....	iv
LISTA DE ABREVIATURAS.....	v
LISTA DE SÍMBOLOS.....	vii
RESUMO	xi
ABSTRACT	xii
CAPÍTULO 1	1
1 INTRODUÇÃO.....	2
1.1 Justificativas.....	2
1.2 Delimitações e Objetivos deste Trabalho	3
1.3 Resumo do Trabalho.....	4
1.4 Publicações	5
CAPÍTULO 2	8
2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	9
2.1 Controle Preditivo Baseado em Modelos - MPC.....	9
2.1.1 Formulação Clássica – IHMPC (<i>Infinite Horizon Model Predictive Control</i>)	23
2.1.2 Controlador MPC com Trajetória de Referência - MPC-RS (<i>Model Predictive Control with Reference System</i>).....	25
2.2 Controle Robusto	30
2.3 RMPC (<i>Robust Model Predictive Control</i>)	38
2.3.1 Formulação Clássica de MPC Robusto – O problema Mín-Máx	47
2.4 Desigualdades Matriciais Lineares e o Controle Robusto	51
2.4.1 Formulação Clássica - LMI-RMPC	54
2.5 RMPC com Incerteza na Forma de Perturbação Aditiva	57
2.6 Considerações Finais	61
CAPÍTULO 3	63
3 DESENVOLVIMENTOS EM RMPC	64
3.1 Introdução	64
3.1.1 Restrição de Robustez.....	65
3.2 Formulação de MPC Robusto Mín-Máx com Restrição de Robustez Adicionada – RMPC-MMR	67
3.3 Formulação de MPC Robusto Baseado em LMI – LMI-RMPCR.....	70
3.4 Considerações Finais	75

CAPÍTULO 4	76
4 SIMULAÇÃO.....	77
4.1 Introdução	77
4.2 CSTR Isotérmico	78
4.3 Modelo Estável/Planta Instável em Malha Aberta.....	87
4.4 Coluna de Destilação	90
4.5 Coluna de Flotação	95
4.6 Implementação Computacional.....	99
4.7 Considerações Finais	100
CAPÍTULO 5	101
5 O SISTEMA EXPERIMENTAL - DESCRIÇÃO	102
5.1 Introdução	102
5.2 O Sistema Experimental	104
5.2.1 O Reator	104
5.2.2 Equipamentos.....	105
5.2.3 Instrumentação	109
5.2.4 O Sistema de Aquisição de Dados	113
5.3 <i>Softwares</i> Utilizados	114
5.4 Considerações Finais	116
CAPÍTULO 6	117
6 MODELAGEM DO SISTEMA EXPERIMENTAL	118
6.1 Modelo Fenomenológico	118
6.2 Modelo na Forma de Espaço de Estados	130
6.3 Considerações Finais	131
CAPÍTULO 7	132
7 MPC E RMPC APLICADOS AO SISTEMA EXPERIMENTAL: SIMULAÇÕES, RESULTADOS E DISCUSSÕES	133
7.1 Introdução	133
7.2 Modificações nos Controladores em Função da Linearização Sucessiva.....	134
7.3 Controladores Preditivos na Forma LTV	135
7.4 Observador de Estado	142
7.5 Operação em Malha Fechada.....	151
7.5.1 Resultados Experimentais.....	153
7.6 Problemas Apresentados Durante a Operação em Tempo Real.....	174
7.7 Seção Comparativa	185
7.8 Considerações Finais	186
CAPÍTULO 8	187
8 CONCLUSÕES	188

8.1 Sugestões para Trabalhos Futuros.....	190
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	191
APÊNDICE	202
APÊNDICE A.....	203

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 - Genealogia aproximada para algoritmos MPC linear - adaptado de Qin e Badgwell (2003).....	12
Figura 2.2 - MPC e áreas de interface.	22
Figura 2.3 - Horizonte de ações, centro da teoria de MPC.....	23
Figura 2.4 - Processo com incerteza dinâmica negligenciada ou não-modelada.....	31
Figura 2.5 - Processo com incerteza multiplicativa na entrada.	32
Figura 2.6 - Interconexão do sistema para o Teorema do Pequeno Ganho.	37
Figura 4.1 - Comportamento do sistema em estado estacionário.	79
Figura 4.2 - Resposta do sistema submetido ao controle IHMPC com restrição e processo não linear com incerteza aleatória.	81
Figura 4.3 - Resposta do sistema submetido ao controle RMPC-MMTV com restrição aplicada ao sistema não linear com incerteza aleatória.....	82
Figura 4.4 - Resposta do sistema submetido ao controle RMPC-MMR.	83
Figura 4.5 - Resposta do sistema submetido ao controle LMI-RMPCR.	84
Figura 4.6 - Respostas dos diversos controladores aplicados ao processo da seção 4.2.	85
Figura 4.7 - Sistema submetido ao controle MPC (Matlab [®]): problema regulador.	86
Figura 4.8 - Sistema submetido ao controle MPC (Matlab [®]): problema servo.	86
Figura 4.9 - Comportamento do sistema para modelo instável e planta estável: LMI_RMPC.	88
Figura 4.10 - Comportamento do sistema para modelo instável e planta estável LMI-RMPCR.	89
Figura 4.11 - Comparação dos controladores LMI-RMPC x LMI-RMPCR.	90
Figura 4.12 - Malha aberta: sistema coluna de destilação mal condicionado.....	91
Figura 4.13 - Comportamento do sistema com RMPC-MMR: caso 1.	92
Figura 4.14 - Comportamento do sistema com RMPC-MMR: caso 2.	92
Figura 4.15 - Comportamento do sistema com LMI-RMPCR: caso 1.	93
Figura 4.16 - Comportamento do sistema com LMI-RMPCR: caso 2.	93
Figura 4.17 - Comparação RMPC-MMR x LMI-RMPCR caso 1.....	94
Figura 4.18 - Comparação RMPC-MMR x LMI-RMPCR caso 2.....	94
Figura 4.19 - Esquema de uma coluna de flotação (BERGH e YANATOS, 2003).....	95
Figura 4.20 - Comportamento do sistema de flotação com o controle RMPC-MMR.....	98
Figura 4.21 - Comportamento do sistema de flotação com o controle RMPC-MMR.....	98
Figura 5.1 - Curva de titulação: medidas experimentais x modelo simulado variando a vazão de tampão.	103
Figura 5.2 - Foto do sistema de neutralização.	105
Figura 5.3 - Filtro adaptado no sistema de enchimento de água nos tanques.....	106
Figura 5.4 - Elementos filtrantes utilizado no período de testes experimentais em Maio/2008.	106
Figura 5.5 - Tanque alternativo para armazenamento de água filtrada.....	107
Figura 5.6 - Bomba de engrenagem dotada de <i>Gear Pump Drive</i>	108
Figura 5.7 - Agitador mecânico do reator.	109
Figura 5.8 - Sensor de pH.	110
Figura 5.9 - Foto do transmissor de pH.	110

Figura 5.10 - Sensor de vazão de infravermelho tipo turbina.....	111
Figura 5.11 - Transmissor-conversor pulso-corrente.....	111
Figura 5.12 - Sensor-transmissor de nível.	112
Figura 5.13 - Representação esquemática do chassi SCXI-1000 e a placa de aquisição de dados.	113
Figura 5.14 - Representação esquemática do sistema experimental e da aquisição de dados.	114
Figura 5.15 - Sistema de aquisição e do microcomputador utilizado no trabalho.....	116
Figura 6.1 - Diagrama esquemático do reator de neutralização em malha aberta.	118
Figura 6.2 - Válvulas de saída do sistema de neutralização para estimação de parâmetros. ..	121
Figura 6.3 - Excitação das vazões de ácido e de base para estimação de parâmetros da válvula.	123
Figura 6.4 - Excitação da vazão de ácido: valor de referência x valor experimental.	123
Figura 6.5 - Excitação da vazão de ácido: valor de referência x valor experimental – Ampliação de escala para os instantes iniciais da corrida.....	124
Figura 6.6 - Excitação da vazão de base: valor de referência x valor experimental.....	124
Figura 6.7 - Respostas experimental e teórica – Etapa de estimação.	125
Figura 6.8 - Respostas experimental e teórica – Etapa de validação.	126
Figura 6.9 - Erro na predição da altura.	126
Figura 6.10 - Vazões de ácido para corrida em malha aberta.....	127
Figura 6.11 - Vazões de base para corrida em malha aberta.	127
Figura 6.12 - Dados experimentais de corrida em malha aberta x Predição de altura usando modelo fenomenológico com passo 1.....	127
Figura 6.13 - Dados experimentais de corrida em malha aberta x Predição de altura usando modelo fenomenológico com passo infinito.	128
Figura 6.14 - Malha aberta: resultados teóricos e experimentais.	129
Figura 7.1 - Simulação para observador de estado: caso modelo perfeito.	144
Figura 7.2 - Simulação para observador de estado – $q_3 = 0$ após 160 min no modelo Plant...	146
Figura 7.3 - Simulação para observador de estado – $q_3 = 0$ após 160 min em Model.....	147
Figura 7.4 - Simulação: MPC-RS com observador de estado.	149
Figura 7.5 - Corrida em malha fechada – MPC-RS: problemas com observador de estado. .	150
Figura 7.6 - Diagrama de blocos da malha fechada para controladores MPC e RMPC.....	152
Figura 7.7 - Variação dos <i>setpoints</i> para as saídas em malha fechada – MPC-RS.....	155
Figura 7.8 - Corrida experimental para sintonia fina no MPC-RS – Destaque para variação da amplitude da ação de controle nos pontos modificados.....	156
Figura 7.9 - Simulação em malha fechada – MPC-RS: entradas e saídas.	157
Figura 7.10 - Simulação em malha fechada – MPC-RS: variável de folga.	158
Figura 7.11 - Corrida experimental com MPC-RS: saídas para transições no pH.	158
Figura 7.12 - Corrida experimental do pH com MPC-RS: entradas e variável de folga.	159
Figura 7.13 - Corrida experimental com MPC-RS: saídas para transições no nível.	160
Figura 7.14 - Corrida experimental do nível com MPC-RS: variável de folga.	161
Figura 7.15 - Variação dos <i>setpoints</i> para corrida em malha fechada – IHMPC.....	163
Figura 7.16 - Simulação para malha fechada - IHMPC.....	164
Figura 7.17 - Tempo de cálculo para o IHMPC.	165
Figura 7.18 - Corrida experimental IHMPC: transição do nível.	166
Figura 7.19 - Corrida experimental IHMPC: tradição do pH.	167
Figura 7.20 - Erro nas entradas: (a) transições de nível; (b) transições de pH.	168

Figura 7.21 - Simulação do sistema com o controlador RMPC-MMR.	169
Figura 7.22 - Tempo de cálculo do controlador RMPC-MMR em simulação do sistema.	170
Figura 7.23 - Máxima Incerteza calculada – RMPC-MMR: (a) Incerteza em q_1 ; (b) Incerteza em q_2 ; (c) Ampliação.	170
Figura 7.24 - Resultados de simulação – LMI-RMPCR: caso nominal.	171
Figura 7.25 - Resultados de simulação – LMI-RMPCR: caso nominal.	172
Figura 7.26 - Resultados de simulação – LMI-RMPCR: caso com politopo.	173
Figura 7.27 - Resultados de simulação – LMI-RMPCR: caso com politopo.	174
Figura 7.28 - Região de transição para a agitação do reator.	175
Figura 7.29 - Motor do agitador: fonte de ruídos no sistema.	175
Figura 7.30 - Pontos de vazamentos de solução no sistema: bombas.	176
Figura 7.31 - Pontos de vazamentos de solução: saída do tanque de armazenamento.	176
Figura 7.32 - Filtro de partículas: bolhas no sistema.	176
Figura 7.33 - Ruído causado pela passagem de bolhas no sistema.	177
Figura 7.34 - Visualização da passagem de bolhas no sistema.	177
Figura 7.35 - Ruídos de ordem elétrica na vazão de base.	178
Figura 7.36 - Ruídos de processo na vazão de base.	178
Figura 7.37 - Alterações indesejadas na vazão de ácido.	179
Figura 7.38 - Ruídos na vazão de base.	179
Figura 7.39 - Ruído na medição da altura do reator.	179
Figura 7.40 - Malha aberta: resultados teóricos e experimentais - ruídos.	180
Figura 7.41 - MPC-RS: resultados experimentais e ruídos.	181
Figura 7.42 - Malha fechada MPC-RS: ruídos.	181
Figura 7.43 - Malha fechada IHMPC: inicialização incorreta.	182
Figura 7.44 - Sistema de aquisição de dados.	182
Figura 7.45 - Circuitos elétricos da instrumentação da planta experimental.	183
Figura A.1 - Painel Frontal do VI Malha Aberta.	204
Figura A.2 - Diagrama de blocos da VI Malha Aberta.	205
Figura A.3 - Painel frontal da sub-VI do Controlador PID.	206
Figura A.4 - Diagrama de blocos da sub-VI Controlador PID.	206
Figura A.5 - Painel Frontal da sub-VI Filtro Digital.	206
Figura A.6 - Diagrama de blocos da sub-VI Filtro Digital.	207
Figura A.7 - Curva de calibração e regressão linear dos dados – Vazão de Ácido.	208
Figura A.8 - Curva de calibração e regressão linear dos dados – Vazão de Base.	208
Figura A.9 - Curva de calibração e regressão linear dos dados – Vazão de solução tampão.	209
Figura A.10 - Curva de calibração e regressão linear dos dados – Altura (h).	209
Figura A.11 - Curva de calibração e regressão linear dos dados – pH.	210
Figura A.12 - Painel Frontal da VI implementado para MPC-RS.	211
Figura A.13 - Diagrama de blocos da VI implementado para MPC-RS.	212
Figura A.14 - Painel Frontal da VI implementado para IHMPC.	213
Figura A.15 - Diagrama de blocos da VI implementado para IHMPC.	214
Figura A.16 - Destaque para bloco do controlador – IHMPC, condição “True”.	215
Figura A.17 - Destaque para bloco do controlador – IHMPC, condição “False”.	216
Figura A.18 - Destaque para a condição “False” para excitação de <i>setpoint</i>	217
Figura A.19 - Painel Frontal da VI implementado para os controladores RMPC.	218

LISTA DE TABELAS

TABELA 2.1: MPC LINEAR INDUSTRIAL – TECNOLOGIA DISPONÍVEL	12
TABELA 4.1: AJUSTES PARA CONTROLADORES.	80
TABELA 4.2: AJUSTES PARA CONTROLADORES.	87
TABELA 4.3: AJUSTES PARA CONTROLADORES.	91
TABELA 5.1: VARIÁVEIS CHAVES E PARÂMETROS DO REATOR.	104
TABELA 7.1: PARÂMETROS DE SINTONIA DOS CONTROLADORES.....	154
TABELA 7.2: SÍNTESE DO DESEMPENHO ENTRE OS CONTROLADORES ESTUDADOS.....	185

LISTA DE ABREVIATURAS

Adersa, Aspen Tech, HoneyWell, Invensys e Shell Global - Empresas de *softwares* para Controle

affine - Função linear definida na seção 2.3.1

adm. - Adimensional

co - *Convex Hull*

CSTR - *Continuous Stirred Tank Reactor*

DMC - *Dynamic Matrix Control*

Estim - Relacionado com observador ou estimador de estado ou valores estimados

Exp - Experimental

Exp. Sim. - Simulação na planta experimental

Exp. Real - Implementação na planta experimental

Glide - Pacote de identificação

h - Hora

H_∞ - Controle ótimo H_∞

H_2 - Controle ótimo H_2

HIECON - *Hierarchical Constraint Control*

IDCOM - *Identification and Command*

IHMPC - *Infinite Horizon Model Predictive Control*

IMC - *Internal Model Control*

LFT - *Linear Fractional Transformation*

LMI - *Linear Matrix Inequalities*

LMI-RMPC - Controle Preditivo robusto – Kothare *et al.* (1996)

LMI-RMPCR - Controle Preditivo robusto usando LMI e com restrição de estabilidade na forma de função de Lyapunov

LP - *Linear Programation*

LQR - *Linear Quadratic Regulator*

LQG - *Linear Quadratic Gaussian*

LTi - *Linear Time Invariant*

LTV - *Linear Time Variant*

MAC - *Model Algorithmic Control*

MC - Problema de mal condicionamento

máx - Maximização

MIMO - *Multiple input multiple output*

MI/PE - Problema de modelo instável e planta estável

mín - Minimização

min - Minuto

mín-máx - *Mín-máx Optimization*

Model - Modelo

MPC - *Model Predictive Control*

MPC-ML - *Model Predictive Control – Toolbox MPC/Matlab®*

MPC-RS - *Model Predictive Control with Referece System*

MPHC - *Model Predictive Heuristic Control*

NC - Número condicional

NP - *Nominal Performance*

NS - *Nominal Stability*

PFC - *Predictive Functional Control*

PI - Controlador proporcional e integral
PID - Controlador proporcional, integral e derivativo
Plant - Relacionado com a planta
ML-PRBS - *Multi Level Pseudorandom binary signal*
QDMC - *Quadratic Dynamic Matrix Control*
QP - *Quadratic Programation*
Ref - Relacionado com trajetória de referência
RGA - *Relative Gain Array*
RMPC - Controle preditivo robusto
RMPC-MM - Controle preditivo robusto mín-máx
RMPC-MMR - Controle preditivo robusto mín-máx com restrição de robustez na forma de função de Lyapunov adicionada
RMPC-MMTV - Controle preditivo robusto com incerteza variante no tempo – Algoritmo Lee e Cooley (2000)
RMPC-AD - Controle preditivo Robusto usando incerteza na forma de perturbação externa, Löfberg (2003)
RMPCT - Tecnologia de controle preditivo robusto
RP - *Robust Performance*
RS - *Robust Stability*
s - Segundo
SDP - *Semidefine Programation*
SP - Relacionado com *setpoint* ou valor de referência
SGT - *Small Gain Teorem*
SISO - *Single input single output*
SVD - *Singular Value Decomposition*
TM - Problema de diferenças no tempo morto
Teo - Relacionado com valores teóricos
UFU - Universidade Federal de Uberlândia
VI - *Virtual Instrument* – Programas em Labview[®]

LISTA DE SÍMBOLOS

- $[\]$ - Concentração – modelo fenomenológico experimental
 $\frac{d}{dt}$ - Derivada
 e^n - Exponencial
 $| |$ - Módulo
 $\| \|$ - Norma
 $\| \|_{\infty}$ - Norma- ∞
 $\| \|_1$ - Norma-1
 $\| \|_2$ - Norma-2 ou Euclidiana
 Ξ_k^* - Versão deslocada para o valor ótimo de Ξ_{k-1}
 Ξ - Vetor de entradas
 $\mathbf{X}$ - Vetor de estados
 $\overline{\mathbf{Q}}$ - Matriz da equação de Lyapunov
 $\sum$ - Somatório
 Ω - Conjunto/espaco invariante
 ϕ - Custo de estágio
 ∂ - Derivada parcial
 ω - Domínio de frequência
 α - Escalar
 β, γ - Constantes do problema de flotação
 Θ - Espaço invariante da incerteza
 $\subseteq$ - Está contido
 $\subsetneq$ - Está contido
 Ψ - Função custo terminal
 ϑ - Ganho
 δ - Incerteza
 Δ - Incerteza estruturada, incerteza bloco diagonal
 ∞ - Infinito
 η - Matriz de deslocamento
 ζ - Matriz de entrada dos vetores singulares
 ξ - Matriz de saída dos vetores singulares
 β - Matriz diagonal crescente dos valores singulares não-negativos
 $\forall$ - Para todo e qualquer
 $\in$ - Pertence
 Π - Politopo
 Ξ - Seqüência de ações de controle
 θ - Vetor de incerteza
 $\mu, \Lambda, \overline{\mathbf{A}}, \overline{\mathbf{B}}$ - Matrizes definidas para problema RMPC mín-máx
 $\chi, \mathbf{A}_{lmi}, \mathbf{B}_{lmi}, \mathbf{C}_{lmi}, \mathbf{R}_{lmi}, \mathbf{Q}_{lmi}, \mathbf{U}_{lmi}, \mathbf{Y}_{lmi}, \mathbf{X}_{lmi}, \mathbf{D}_{lmi}, \mathbf{E}_{ulmi}, \mathbf{E}_{xlmi}, \mathbf{F}_{ulmi}, \mathbf{F}_{xlmi}, \mathbf{B}_{lmi}, \Gamma, \gamma, \mathbf{T}$ - Variáveis definidas dentro do problema LMI-RMPCR ou RMPC-AD

$\Re H_\infty$ - Reais racionais do conjunto de funções limitadas em $\text{Re}(s) = 0$ incluindo até ∞ das funções analíticas em $\text{Re}(s) > 0$
 Δt - Intervalo de tempo
 $\Delta \mathbf{u}$ - Variação dos sinais de entrada
 $\Delta \mathbf{x}$ - Variação dos estados
 $|$ - Tal que
 $\mathbf{0}$ - Matriz de zeros
 $\mathbf{A}$ - Matriz da planta
 A, B, C, D - Elementos químicos – problema de van der Vusse
 A_r - Área do reator
 $\mathbf{B}$ - Matriz de entradas
 C - Conjunto fechado
 $\mathbf{C}$ - Matriz de saídas
 c_v, p_7 - Parâmetros de ajuste para o modelo de nível – processo experimental
 $\mathbf{d}$ - Vetor de perturbação
 $\mathbf{D}, \mathbf{b}, \varepsilon, v$ - Matrizes definidas para o problema MPC-RS
 diag - Diagonal
 Dim - Dimensão
 $\text{dzdy}, \text{dzdWa}, \text{dzdWb}$ - Funções resultantes da diferenciação implícita do modelo fenomenológico
 e - Erro entre a planta e o modelo informado ao controlador – implementação experimental
 $\mathbf{E}_u, \mathbf{f}_u$ - Variáveis utilizadas na definição de $\mathbf{U}$ no LMI-RMPCR e RMPC-AD
 $\mathbf{E}_x, \mathbf{f}_x$ - Variáveis utilizadas na definição de $\mathbf{X}$ no LMI-RMPCR e RMPC-AD
 f - Função
 $\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H}$ - Matrizes construídas para o problema IHMPC
 $\mathbf{f}, \mathbf{O}$ - Termos definidos para a linearização de sistemas não lineares
 FC - Sensor de vazão
 FT - Transmissor de vazão
 G, H - Função de transferência
 h - Altura do reator experimental
 H, H^+ - Íons de hidrogênio
 hm - Sensor de nível
 $\mathbf{I}$ - Matriz identidade
 i, q, l - Índices
 $\mathbf{I1}, \mathbf{I2}$ - Incerteza definida no problema RMPC-MMR
 J - Índice de desempenho da função de otimização
 j - Número complexo
 k - Instante de amostragem
 $\mathbf{K}$ - Matriz de realimentação ou controlador
 k_1, k_2, k_3 - Constante de tempo de reação – problema de van der Vusse
 ka_1, ka_2 - Constantes de reação – problema de controle de nível e pH
 k_w - Constante de dissociação da água
 $\mathbf{L}$ - Matriz positiva definida para problema LMI
 $\mathbf{L_K}$ - Ganho do observador de estado
 LT - Transmissor de nível
 m - massa – problema experimental
 $\mathbf{M}$ - Sistemas na forma de LFT
 N - Horizonte

n - número
 $\mathbf{P}$ - Matriz positiva definida usada na Equação de Lyapunov
 pH - pH do reator experimental
 pHm - Sensor de pH
 pHT - Transmissor de pH
 $\mathbf{Q}$ - Matriz de pesos dos estados
 q_1 - Vazão de ácido do reator experimental
 q_2 - Vazão de base do reator experimental
 q_3 - Vazão de solução tampão do reator experimental
 q_4 - Vazão de saída do reator experimental
 $\mathbf{QN}$ - Matriz de pesos terminal
 $\mathbf{R}$ - Conjunto de números reais
 $\mathbf{R}$ - Matriz de pesos das entradas
 R^2 - Coeficiente de correlação
 $\mathbf{S}$ - Matriz de pesos da variação dos sinais de entrada
 s - Variável de Laplace
 t - Tempo
 T_d - Tempo de amostragem
 T_s - Tempo de assentamento
 $\mathbf{U}$ - Domínio das entradas / Espaço compacto e convexo das entradas
 $\mathbf{u}$ - Vetor de entradas
 V - Função de Lyapunov
 V_r - Volume reacional – unidade experimental
 V_0, V_1, V_2, V_3 - Tensões do sistema de aquisição de dados
 w - Função peso
 $\mathbf{W}, \tau, \mathbf{T}$ - Variáveis LMI-RMPC
 W_a - Invariante reacional do ácido
 W_b - Invariante reacional da base
 $\mathbf{X}$ - Domínio dos estados
 $\mathbf{x}$ - Vetor de estados
 x, y - Equação da reta
 x_F - Concentração de A na alimentação – problema de van der Vusse
 $\mathbf{X}_T$ - Conjunto de restrição terminal
 $\mathbf{y}$ - Vetor de saídas
 $\mathbf{z}$ - Estado real
 z - Variável de domínio discreto
 λ - Variável de folga definida no problema MPC-RS
 σ - Valor singular
 Φ - Matriz exponencial
 Ψ - Matriz definida no problema MPC-RS

Sobrescritos

- - Derivada
- - Maior valor singular
- * - Vetor de entradas completo
- ^ - Variável estimada
- ' - Variável desvio
- 0 - Inicial
- 1 - Inversa
- H - Transposta conjugada
- M - Número de modelos
- n - Ordem
- nu - Número de entradas
- nx - Número de estados
- ny - Número de saídas
- sp - *Setpoint*
- T - Transposto

Subscrito

- θ - Incerteza
- ∞ - Infinito
- ι - Ordem da norma
- $\underline{\quad}$ - Menor valor
- $\bar{d}$ - Perturbação
- I - Entrada
- i, q, l - Índice
- k - Instante de amostragem
- $k+i|k$ - Cálculo de variável no instante $k+i$ feito no instante k
- lmi - Definido no problema LMI
- m - Horizonte de controle
- M - Número de modelos no politopo
- máx - Máximo
- Med - Relacionado a medição
- mín - Mínimo
- Mod - Modelo
- n - Nominal
- obs - Relacionado com o observador de estado
- opt - Ótimo
- p - Horizonte de predição
- P1, P2 - horizonte de predição
- RS - Trajetória de referência
- s - Estado estacionário
- S - Planta
- SP - Referente ao valor de referência
- SP - *Setpoint*
- T - Terminal
- u** - Associado com a entrada
- x** - Associado com os estados
- y** - Associado com a saída

RESUMO

Uma Contribuição ao Estudo de Controladores Robustos

O controlador preditivo baseado em modelo (MPC) tem sido aplicado com sucesso na indústria, com especial destaque na indústria petroquímica. A característica básica dos algoritmos preditivos baseados em modelos é a formulação de um problema de otimização, para o cálculo da seqüência de ações de controle que minimizem uma função de desempenho num horizonte temporal com a melhor informação disponível a cada instante, e submetida a restrições de operação e ao modelo da planta. A presença de incertezas no modelo pode resultar em perda de desempenho da planta controlada baseada em controladores com modelo nominal ou até mesmo na instabilidade da malha fechada. A classe de controladores preditivos robustos (RMPC) baseia-se na consideração explícita das incertezas. Este trabalho apresenta dois algoritmos de RMPC. Um algoritmo que adiciona ao problema de controle robusto, com incerteza invariante no tempo na forma de otimização mín-máx, um conjunto de restrições com garantia de estabilidade robusta (RMPC-MMR). E outro algoritmo que desenvolve o RMPC usando desigualdades de matrizes lineares (LMI) e incerteza na forma de politopo (LMI-RMPCR). Os algoritmos são avaliados, através de simulações computacionais, aplicados em diversos sistemas típicos dos processos industriais, comparando-se as respostas dos mesmos com as respostas de controladores clássicos. Foram implementados experimentalmente os algoritmos de controle clássico IHMPC (*Infinite Horizon Model Predictive Control*) e MPC-RS (*Model Predictive Control with Reference System*) em uma planta piloto de controle de nível e pH, construída na Unidade Experimental da Faculdade de Engenharia Química da Universidade Federal de Uberlândia. Os resultados de simulação dos controladores robustos foram avaliados com as repostas de simulação e experimentais dos controladores clássicos implementados na planta. Os resultados indicam a aplicabilidade e as limitações dos controladores propostos.

Palavras-Chave: Controle de Processos, Incerteza, LMI, MPC, RMPC.

ABSTRACT

A Contribution for Studing of Robust Control

The model based predictive controller (MPC) has been successfully applied in industry, with particular emphasis on the petrochemical industry. The basic feature of MPC algorithms is based on the formulation of an optimization problem, for calculating the sequence of control moves that minimize a performance function in a time horizon with the best information available at every moment, and submitted to restrictions, operation and the plant model. The presence of uncertainties in the model can result in loss of performance of the model based control system or even instability in the closed loop. The class of robust predictive controllers (RMPC) is based on the explicit consideration of uncertainties. This research presents two RMPC algorithms. One of them adds a set of restrictions with robust stability guarantee (RMPC-MMR) to the problem of robust control, with uncertainty in time variant as min-max optimization. And the other develops RMPC using Linear Matrix Inequalities (LMI) and uncertainty as a polytope (LMI-RMPCR). The algorithms are evaluated through computer simulations, and are applied to a range of industrial process typical systems. The responses are compared with the responses of traditional controllers. The classical algorithms IHMPC (Infinite Horizon Model Predictive Control) and MPC-RS (Model Predictive Control with Reference System) are also assessed experimentally by the application in a pilot plant for controlling level and pH, built in the Experimental Unit of the Chemical Engineering College, at Federal University of Uberlândia. The results of RMPC simulation were evaluated with the simulation and experimental responses of the classical controllers implemented in the plant. The results indicate the applicability and limitations of the proposed controllers.

Keywords: LMI, MPC, Process Control, RMPC, Uncertainty.

CAPÍTULO 1

1 INTRODUÇÃO

O controle preditivo baseado em modelos (MPC) tornou-se uma importante estratégia de controle para aplicações industriais, devido principalmente ao sucesso de suas implementações. Os diversos algoritmos de controle preditivo diferem pela forma do modelo usado para representar o processo, o ruído e pela função custo a ser minimizada. Existem muitas aplicações bem sucedidas de controle preditivo, não apenas na indústria química como em outras áreas (QIN; BADGWELL, 2003).

O conceito de controle preditivo robusto (RMPC) está associado com a utilização explícita de um modelo para as incertezas na formulação do cálculo da lei de controle. Os algoritmos de controle preditivo robusto diferem pela forma de representação das incertezas e pela restrição de estabilidade, além das diferenças citadas para controladores MPC convencionais (MAYNE *et al.*, 2000).

1.1 Justificativas

O controle de processos com restrição é um dos mais desafiadores problemas na teoria de controle. A exigência se torna ainda maior quando se trata do projeto de controle robusto de sistemas. O problema de restrição robusta não é apenas significativo, mas um instigante problema na teoria de controle.

Durante as décadas passadas, uma sólida fundamentação teórica de MPC possibilitou a aplicação prática dessa estratégia com estabilidade garantida e certo grau de robustez. Pode-se afirmar que hoje existe um entendimento bastante apurado sobre o projeto de MPC linear robusto, mas ainda há espaço para pesquisas em versões desse controlador aplicáveis a problemas não lineares, que exploram eficientemente o conhecimento de incertezas. Como obstáculos aos algoritmos de MPC robusto, pode-se citar a alta demanda computacional e a pequena aplicabilidade decorrente da grande exigência computacional associada a esses algoritmos.

1.2 Delimitações e Objetivos deste Trabalho

A meta desse estudo foi propor algoritmos de controle preditivo robusto por construção que mantenham a estabilidade robusta e o desempenho do sistema em patamares aceitáveis.

Dois algoritmos foram propostos: um que utiliza incerteza na entrada invariante no tempo com otimização mín-máx e restrição de robustez (RMPC-MMR), e outro que utiliza incerteza na forma de politopo com o problema de otimização na forma de LMI (*Linear Matrix Inequalities*) e restrição de robustez (LMI-RMPCR). Os algoritmos foram avaliados pela simulação de diversos modelos representativos de processos industriais, que exploram de alguma forma características de estabilidade, robustez ou desempenho dos controladores. Foram implementados controladores clássicos (IHMP, RMPC-MMTV, RMPC-MM, MPC-RS, LMI-RMPC, MPC-ML), cujas formulações serão apresentadas em detalhe no Capítulo 2, a fim de se obter uma base comparativa.

Foram realizadas também as implementações experimentais dos controladores MPC: IHMPC e MPC-RS na planta piloto de controle de nível e pH, construída na Unidade Experimental da Faculdade de Engenharia Química da Universidade Federal de Uberlândia (UFU). O controle MPC-RS foi escolhido para esse trabalho, considerando-se que o Núcleo de Controle e Otimização de Processos da UFU já possuía experiência nessa classe de controladores na unidade experimental. Os controladores robustos desenvolvidos são da classe do algoritmo de controle de horizonte infinito, exemplificado pelo IHMPC. Desta forma, os resultados de simulação entre os algoritmos desenvolvidos e o IHMPC fornecem uma boa comparação para fins de aplicabilidade. Os resultados de simulação e experimentais dos controladores implementados na planta foram comparados com os resultados simulados dos controladores propostos. As considerações deste trabalho indicam a aplicabilidade e limitações dos controladores robustos.

Este trabalho buscou o treinamento em pesquisa, o desenvolvimento de algoritmos de controle MPC e RMPC e também a redução da distância entre a teoria e a prática industrial. Como contribuições, além dos desenvolvimentos teóricos dos controladores e sua implementação real, pode-se citar a divulgação e discussão dos sistemas de controle pela publicação e participação em diversos congressos e fóruns de discussão técnica e científica.

1.3 Resumo do Trabalho

O Capítulo 2 apresenta a revisão bibliográfica acerca dos seguintes assuntos: MPC, incerteza e robustez, RMPC e LMI, e ainda apresenta os algoritmos clássicos utilizados para o desenvolvimento de novas estruturas e como base comparativa dos resultados. O

Capítulo 3 trata do desenvolvimento de dois algoritmos de controle robusto baseados na adição de restrição de robustez ao problema de otimização mín-máx e incerteza na entrada invariante no tempo (RMPC-MMR) e incertezas na forma de politopos, com restrição de robustez e problema de otimização na forma de LMI (LMI-RMPCR). O Capítulo 4 mostra a simulação em diversos processos industriais. No Capítulo 5 é descrito o sistema experimental. No Capítulo 6 são apresentados os resultados de malha aberta da parte experimental. No Capítulo 7 são mostrados os resultados de simulação e experimentais de malha fechada no sistema experimental. No Capítulo 8 apresentam-se as conclusões juntamente com as sugestões de trabalhos futuros. Encerrando o trabalho, encontram-se as referências usadas na elaboração deste trabalho. No Apêndice é possível ver as curvas de calibração, que fazem a relação entre as medidas da unidade experimental, como por exemplo, vazão das soluções, com a tensão dos transmissores. Pode-se também visualizar as telas dos programas em Labview[®] que foram implementadas para a operação da unidade experimental em malha aberta e em malha fechada.

1.4 Publicações

Durante a elaboração deste trabalho de doutorado foram realizadas duas publicações em periódicos, treze publicações em anais de congressos, sendo duas delas de natureza profissional e quatro resultantes de publicações do trabalho de mestrado em controle preditivo. Houve também a participação em vinte e cinco eventos de natureza científica.

Os artigos listados abaixo tratam do desenvolvimento dos algoritmos de controle preditivo robusto e sua aplicação em diversos processos, como por exemplo, os modelos de colunas de flotação, máquinas síncronas e modelos de pequenas centrais hidrelétricas e outros sistemas lineares. Os resultados desses estudos não se encontram descritos nesta tese, mas os mesmos encontram-se alinhados com as conclusões desse trabalho.

Artigos publicados em periódicos:

SILVA, C. H. F., HENRIQUE, H. M., GOMES, L. G, OLIVEIRA-LOPES, L. C. Controle Preditivo Robusto Baseado em Inequações Matriciais Lineares Aplicado a Máquinas Síncronas. **Revista Ciências Exatas**, v.13, nº 1, p.121-129, 2007. artigo selecionado para publicação na revista dentro dos anais do 1º Congresso Internacional de Cooperação Indústria-Universidade 2005.

SILVA, C. H. F., HENRIQUE, H. M., OLIVEIRA-LOPES, L. C., GOMES, L. R. Controle Preditivo Robusto e sua Aplicação no Modelo de Máquinas Síncronas de Pequenas Centrais Hidrelétricas. **Revista Controle & Instrumentação**, v.114, p.72-77, 2006. Artigo selecionado dentro dos anais do IV Seminário Nacional de Controle e Automação, realizado em 2006.

Artigos publicados em anais de congresso:

SILVA, C. H. F., GOMES, L. G, HENRIQUE, H. M., OLIVEIRA-LOPES, L. C. Controle Preditivo Robusto: Um Estudo Comparativo. **XVI Congresso Brasileiro de Engenharia Química**, Santos, 2006.

SILVA, C. H. F., GOMES, L. G, HENRIQUE, H. M. Controle Preditivo Aplicado À Máquina Síncrona. **IV Conferência de Estudos em Engenharia Elétrica**, Uberlândia, 2005.

SILVA, C. H. F., GOMES, L. G, HENRIQUE, H. M., OLIVEIRA-LOPES, L. C. Controle Preditivo Robusto Baseado em Inequações Matriciais Lineares Aplicado a Máquinas Síncronas. **I Congresso Internacional de Cooperação Universidade-Indústria**, Ubatuba, 2005.

SILVA, C. H. F., OLIVEIRA-LOPES, L. C., HENRIQUE, H. M., GOMES, L. G Controle Preditivo Robusto de Pequenas Centrais Hidrelétricas. **IV Seminário Nacional de Controle e Automação**, Salvador, 2005.

SILVA, C. H. F., OLIVEIRA-LOPES, L. C., HENRIQUE, H. M. CONSTRAINED ROBUST Model Predictive Control for Linear Systems. **XV Congresso Brasileiro de Engenharia Química**, Curitiba, 2004.

SILVA, C. H. F., OLIVEIRA-LOPES, L. C., HENRIQUE, H. M., GOMES, L. G Controle Preditivo Robusto Aplicado a Pequenas Centrais Hidrelétricas. **IV Simpósio Nacional de Pequenas e Médias Centrais Hidrelétricas**, Recife, 2004.

SILVA, C. H. F., HENRIQUE, H. M., OLIVEIRA-LOPES, L. C. Controle Preditivo Robusto de um Sistema de Flotação. **XXX Encontro Nacional de Meios Porosos**, Uberlândia, 2004.

CAPÍTULO 2

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 Controle Preditivo Baseado em Modelos - MPC

A teoria de controle preditivo baseado em modelos teve origem no final da década de 1970 e desenvolveu-se de forma considerável desde então (CAMACHO; BORDONS, 1999; MAYNE *et al.*, 2000; NIKOLAOU, 2001; MORARI, 1993; SAFFER II e DOYLE III, 2004, RAWLINGS, 1999).

Os primeiros trabalhos foram *Model Predictive Heuristic Control* (MPHC), posteriormente conhecido como *Model Algorithmic Control* - MAC), formulado por Richalet *et al.* (1978), e *Dynamic Matrix Control* (DMC), formulado por Cutler e Ramaker em 1980, levando o controle preditivo a se tornar bastante conhecido na indústria petroquímica (CAMACHO; BORDONS, 1999). Esses controladores estão relacionados com o problema de controle ótimo de tempo mínimo e programação linear, inicialmente apresentada por Zadeh e Whalen em 1962 (GARCIA; PRETT; MORARI, 1989).

O controle MPC também pode ser formulado no contexto do controle moderno. O uso de modelos na forma de espaço de estados, em detrimento do uso de outros modelos, durante a década de 1990, foi responsável por um amadurecimento substancial na teoria de controle preditivo (LÖFBERG, 2003). O uso dessa formulação permite não apenas a aplicação de teoremas conhecidos da teoria de espaço de estado e sistemas lineares, como também facilita generalizações para casos mais complexos. Essa perspectiva leva a um simples ajuste

de regras para estabilidade e robustez (RICKER, 1990). O controlador MPC, nesse caso, pode ser interpretado como sendo um compensador baseado em observador de estado, e sua estabilidade, desempenho e robustez são determinados pelos pólos do observador, fixados diretamente por ajuste de parâmetros, e pelos pólos do regulador, determinados pelos horizontes e pelos pesos de desempenho.

O desempenho dinâmico de um sistema controlado é grandemente determinado pela localização dos pólos em malha fechada. Para se obter um bom desempenho é necessário colocá-los em uma região adequada. Para sistemas lineares sem restrição, estudos do problema de colocação de pólos ajustam a região circular para alocação dos pólos usando realimentação de estado e também das saídas. Para o problema com restrição, entretanto, a colocação de pólos situa-se dentro de uma pequena região circular, acarretando a redução substancial da viabilidade da região inicial (ZHANG E XI, 2008). Wang e Rawlings (2004a e 2004b) apresentam um excelente tutorial para a teoria de MPC indicando problemas e direções para essa importante técnica de pesquisa acadêmica e de aplicação industrial.

A primeira geração de MPC, com algoritmos como DMC e IDCOM (*Identification and Command*), teve grande impacto no controle de processos industriais e serviu para definir o paradigma inicial do MPC industrial.

O algoritmo QDMC (*Quadratic Dynamic Matrix Control*) desenvolvido por Garcia e Morshedi (1986) pode ser considerado representante da segunda geração de tecnologia MPC, caracterizando-se por desenvolver sistematicamente uma forma de programar restrições de entrada e saída. Essa formulação aperfeiçoa o MPC na medida em que posiciona o problema de controle como um problema de otimização quadrática (QP), cuja solução pode ser obtida, eficientemente, por códigos QP disponíveis. O ajuste do controlador para operação na presença de restrições pode ser muito difícil, mesmo quando o modelo do processo é perfeito. Muito esforço tem sido direcionado para a simulação da malha fechada a

fim de comissionar o controlador. Deve-se reconhecer, entretanto, que a simulação de muitas combinações possíveis da ação da restrição é de difícil execução e possui reflexos na aplicação prática.

Desta forma, parece sensata a utilização de algoritmos que sejam construídos de forma inerentemente estável para todos os casos. Na teoria de controle tais estruturas são conhecidas como algoritmos nominalmente estáveis (QIN; BADGWELL, 2003). Como exemplo de formulação de estabilidade garantida, surgiu o algoritmo de MPC com horizonte infinito (IHMPC - *Infinite Horizon Model Predictive Control*), apresentado por Muske e Rawlings (1993a), que foi adotado pelos acadêmicos como o paradigma dos anos de 1990, constituindo a terceira geração de MPC e ainda considerando a estabilidade como conceito central nos estudos de sistemas dinâmicos (NIKOLAOU, 2001; MORARI; LEE, 1999). Essa geração se distingue devido aos vários níveis de restrições desenvolvidas por vários mecanismos. A solução viável é procurada e direcionada para variações na planta em tempo real, fornecendo um rico conjunto de soluções para realimentação. Permite-se, deste modo, uma larga faixa de processos dinâmicos (estáveis, integradores, instáveis) e especificações de controle.

A quarta geração de MPC contempla preocupações como a consideração da incerteza e o controle robusto; otimização em múltiplos níveis direcionada para a priorização dos objetivos de controle; melhoria na tecnologia de identificação, dentre outras (QIN; BADGWELL, 1996 e QIN; BADGWELL, 2003).

MPC não é um novo método de projeto de controle. Ele essencialmente resolve problemas de controle ótimo padrão. O que o diferencia é o fato de que, no MPC, o problema de controle ótimo requerido possui horizonte finito, em contraste com o horizonte infinito, usualmente empregado nos controladores ótimos lineares H_2 e H_∞ .

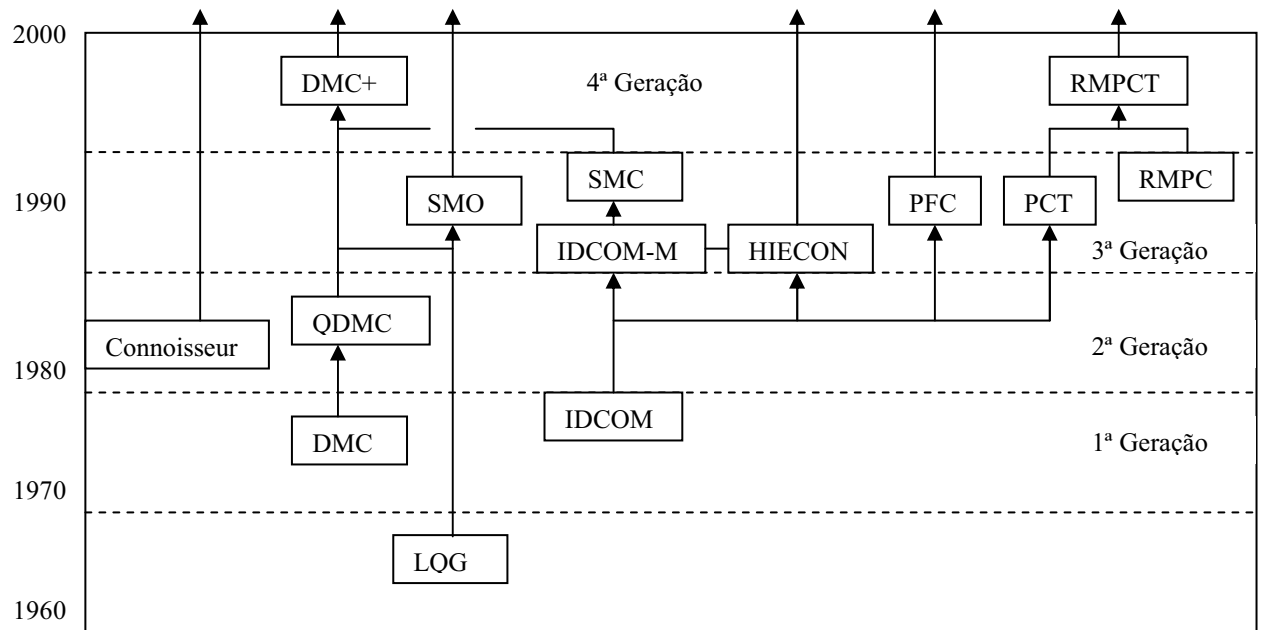


Figura 2.1 - Genealogia aproximada para algoritmos MPC linear - adaptado de Qin e Badgwell (2003).

A Figura 2.1 mostra de forma aproximada a genealogia dos algoritmos MPC industriais. A Tabela 2.1 apresenta uma síntese da tecnologia industrial sobre MPC (QIN; BADGWELL, 2003; CAMACHO; BORDONS, 1999).

TABELA 2.1: MPC LINEAR INDUSTRIAL – TECNOLOGIA DISPONÍVEL.

Companhia	Nome do Produto	Descrição
Adersa	IDCOM	Identificação e Comando
	HIECON	Controle de Restrição Hierárquico
	PFC	Controle Preditivo Funcional
	GLIDE	Pacote de Identificação
Aspen Tech	DMC-plus	Pacote de Controle por Matriz Dinâmica
	DMC-plus model	Pacote de Identificação
Honeywell	PCT	Tecnologia de Controle Preditivo
	RMPCT	Controle Preditivo Baseado em Modelos Robusto
Shell Global	SMOC-II	Controle Shell Multivariável Otimizante
Invensys	Connoisseur	Pacote de Identificação e Controle

Fonte: Qin e Badgwell (2003)

O MPC resolve o problema de controle ótimo em malha aberta em tempo real, considerando o estado corrente do sistema a ser controlado como mais que uma política de realimentação *off-line*. É necessário que esse problema de otimização seja resolvido dentro do tempo de amostragem (MAYNE *et al.*, 2000). Bemporad (2006) apresenta uma síntese sobre os controladores preditivos, com tendências e ferramentas computacionais.

Na tecnologia de MPC, áreas como estabilidade e grau de ótimo têm atingido suficiente maturidade. A razão de ser do controle MPC é sua habilidade para lidar com problemas de controle em que a computação da lei de controle *off-line* seja difícil, embora outras características, como sua capacidade para controlar plantas multivariáveis, tenham sido julgadas inicialmente como características mais importantes (MAYNE *et al.*, 2000). Cada aplicação impõe suas restrições. Os atuadores, por exemplo, possuem limites para aplicação de força. A habilidade em manusear as restrições de entrada, de saída e de estado interno pode ser atribuída como a mais significativa contribuição para o sucesso na aplicação industrial (HENSON; SEBORG, 1997; DE OLIVEIRA; MORARI, 1994; LEE, 1997).

Na ausência de erros de modelagem e perturbações, o controle MPC usando matrizes de pesos adequados e horizonte de predição suficientemente longo pode ser visto como uma implementação exata da política de controle ótimo em realimentação (LØVAAS *et al.*, *In press*).

Outras vantagens a serem consideradas são: os limites de segurança; a possibilidade de obtenção de vantagens no emprego dessa técnica em plantas não lineares sem restrição, bem como em plantas variantes no tempo; a consideração dos ruídos e dos efeitos reais do processo na formulação de restrições a serem atendidas quando da operação da planta; o melhor desempenho do controle; redução dos requerimentos de manutenção, e melhoria da flexibilidade e da agilidade (EATON; RAWLINGS, 1992).

Considerando a aplicação em processos MIMO (*Multiple Input Multiple Output*), o MPC lida diretamente com a coordenação e balanceamento das interações entre as entradas e as saídas e também com as restrições associadas (ZHANG e XI, 2008). Mas apesar de ser realmente efetivo em situações apropriadas, ele ainda possui limitações que geralmente não são mencionadas pelos vendedores, como por exemplo, dificuldades de operação, alto custo de manutenção (uma vez que exige mão-de-obra especializada) e perda de flexibilidade, que podem resultar na fragilidade do controlador. Essas limitações não estão ligadas apenas ao algoritmo propriamente dito, mas também à justificativa desses controladores, à aplicabilidade e à manutenção (HUGO, 1996).

Versões industriais de MPC não são estabilizantes automaticamente, necessitando de escolhas e considerações de forma a se obter propriedades de estabilidade. O sucesso industrial do MPC levou à investigação teórica da estabilidade. A ferramenta de análise de estabilidade por excelência é a teoria de estabilidade de Lyapunov. A estabilidade teve que ser direcionada restritivamente para sistemas lineares, configurados como MPC sem restrição. Os resultados estabeleceram a existência de controle de horizonte finito de tal forma que o MPC seja estabilizante. Hoje, o valor da função custo de controle é usado amplamente como uma função natural de Lyapunov para análise de estabilidade de MPC (MAYNE *et al.*, 2000).

A revolução de controle da década de 1960 foi grandemente influenciada pela teoria de Hamilton-Jacobi-Bellman ou programação dinâmica, cujo teor providencia condições suficientes para o grau de ótimo, um procedimento construtivo para se determinar um controlador ótimo em realimentação na forma $\mathbf{u} = \mathbf{K}\mathbf{x}$, e motiva a computação de algoritmos para a determinação de controle ótimo em malha aberta para um dado estado inicial, $\mathbf{u}^0(k; \mathbf{x})$, onde k é o instante de amostragem. O grau de ótimo não implica em estabilidade, mas sob certas condições, controladores ótimos de horizonte infinito são estabilizantes.

Nesse contexto, é conveniente citar o MPC sub-ótimo. Essa classe é constituída por controladores cujo grau de ótimo não é exigido, e sim a viabilidade da solução. Tal proposta não defende o sub-ótimo, mas permite que resultados satisfatórios de controle sejam encontrados quando o ponto ótimo se torna impraticável.

Existe ainda uma distância entre os resultados observados e a teoria (HENSON; SEBORG, 1997). Resultados experimentais, em termos de aplicação e simulação, continuam indicando um bom desempenho do MPC em uma larga classe de problemas, mas a sintonia do algoritmo para obter estabilidade ainda é usualmente necessária. Resultados teóricos requerem horizontes infinitos ou restrição terminal para assegurar a estabilidade, o que representa condições que podem ser fortes demais para a implementação prática. Como alternativas para essas aproximações, é possível garantir a estabilidade com o uso de uma função de penalidade terminal, conforme é descrito a seguir.

A viabilidade do problema de otimização a cada instante de tempo k deve ser garantida. Tipicamente, considera-se a viabilidade no tempo $k = 0$ e se escolhe a função custo e a restrição de estabilidade de tal forma que a viabilidade é preservada nos passos dos instantes seguintes (BEMPORAD; MORARI, 1999).

As técnicas populares para “forçar” a estabilidade podem ser divididas em duas classes principais:

- A primeira classe usa os valores da função custo dado por $V(k) = J(\Xi, \mathbf{x}_k, N_p, N_m)$, para atingir por minimização a seqüência de ações de controle calculada em $\Xi \equiv \{\mathbf{u}_{k+1|k}, \dots, \mathbf{u}_{k+N_m|k}\}$, em cada instante k , como uma função de Lyapunov. N_p é o horizonte de predição e N_m é o horizonte de controle.

- A segunda classe requer explicitamente que o estado $\mathbf{x}(t)$ seja encolhido segundo alguma norma. É de grande utilidade ter um simples número que seja capaz de ter informações sobre a dimensão global de um vetor, uma matriz, um sinal ou um sistema (SKOGESTAD e POSTLETHWAITE, 1997). Para atender a esse propósito são usadas as funções

chamadas de norma. A norma mais comum é a norma Euclidiana $\left(\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\sum_j |\mathbf{x}_j|^2} \right)$.

Outras normas bastante utilizadas são a norma-1 $\left(\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_j |\mathbf{x}_j| \right)$ e a norma- ∞

$\left(\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_j |\mathbf{x}_j| \right)$. As principais técnicas são sucintamente descritas a seguir

(BEMPORAD; MORARI, 1999; MAYNE *et al.*, 2000; BADGWELL, 1997a; RALHAN; BADGWELL, 2000):

- Restrição terminal: a restrição de estabilidade é dada pela Eq. 2.1. Essa forma gera uma seqüência de ações de controle na forma da Eq. 2.2. É interessante notar que no cálculo da ação de controle no instante k , após o horizonte de controle (N_m), a ação de controle deve ser igual a zero, neste caso considerando-se o problema regulador. Para o problema servo haverá um deslocamento da origem do sistema. A Eq. 2.3 mostra a forma da seqüência de controle sem esta restrição. Esta seqüência é viável no instante $k + 1$. Por conseqüência, a Eq. 2.3 é a função de Lyapunov do sistema, uma vez que se trata de uma função não-crescente.

$$\mathbf{x}_{k+N_p|k} = \mathbf{0} \quad (2.1)$$

$$\Xi_1 \equiv \{\mathbf{u}_{k+1|k}, \dots, \mathbf{u}_{k+N_m|k}, \mathbf{0}\} \quad (2.2)$$

$$V(k+1) \leq J(\Xi_1, \mathbf{x}_k, N_p, N_m) \leq J(\Xi, \mathbf{x}_k, N_p, N_m) = V(k) \quad (2.3)$$

O principal empecilho para o uso de restrição terminal é que o esforço de controle requerido para levar o estado para a origem pode ser grande, especialmente com o horizonte de predição reduzido. Desta forma, a viabilidade se torna crítica. Além do mais, o desempenho pode ser afetado negativamente devido à restrição terminal artificial. O valor da função custo associado ao problema de controle ótimo finito se aproxima do problema de controle ótimo infinito quando o horizonte se aproxima do infinito. O interesse da aplicação da restrição terminal de igualdade em MPC reside também no fato de que ela pode, ainda, ser empregada para estabilizar sistemas que não podem ser estabilizados por controladores em realimentação contínuos (MAYNE *et al.*, 2000).

- Conjunto Terminal Invariante: a idéia dessa técnica é relaxar a restrição terminal em um conjunto de restrições, como apresenta a Eq. 2.4. Novamente, a prova de estabilidade é baseada no argumento de Lyapunov. A proposta do controlador preditivo é levar o estado para Ω em um tempo finito. Dentro de Ω um controlador estabilizante é empregado. Essa forma de controlador é conhecida como modo dual.

$$\mathbf{x}_{k+N_p|k} \in \Omega \quad (2.4)$$

- Horizonte de Predição de Saída Infinito: para sistema assintoticamente estável, nenhuma restrição de estabilidade é necessária se o horizonte de predição for infinito (MUSKE; RAWLINGS, 1993a). A prova é novamente baseada de maneira similar ao argumento de Lyapunov. Marjanovic e Lennox (2004) investigam a formulação de MPC baseada em horizonte infinito e mostram que o conjunto

terminal de condições de inclusão que é associado com a lei de controle induz às limitações no sistema de controle.

- Matriz de Pesos Terminal: a estabilidade pode ser garantida sem a adição de restrição de estabilidade pela escolha de uma matriz de pesos terminal ($\mathbf{QN}$), conforme a Eq. 2.5, como solução da equação de Ricatti, dada pela Eq. 2.6. Nesse caso, é mostrada a forma para $N_p = N_m$.

$$\min_{\Xi} J(\Xi, \mathbf{x}_k, N_p, N_m) = \mathbf{x}_{N_m}^T \mathbf{QN} \mathbf{x}_{N_m} + \sum_{i=0}^{N_m-1} \mathbf{x}_{k+i|k}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}_{k+i|k} + \mathbf{u}_{k+i|k}^T \mathbf{R} \mathbf{u}_{k+i|k} \quad (2.5)$$

$$\mathbf{A}^T \mathbf{QNA} - \mathbf{QN} + \mathbf{A}^T \mathbf{QNB} (\mathbf{B}^T \mathbf{QNB} + \mathbf{R})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{QNA} + \mathbf{Q} = \mathbf{0} \quad (2.6)$$

- Restrição de contração: mais que confiar no custo ótimo $V(k)$ como uma função de Lyapunov, a idéia é requerer explicitamente que o estado reduza segundo alguma norma, como apresentado na Eq 2.7:

$$\|\mathbf{x}_{k+1|k}\| \leq \alpha \|\mathbf{x}_k\|, \alpha < 1 \quad (2.7)$$

- Função Custo Terminal: modifica-se a função custo para garantir a estabilidade da malha fechada pela adição de um custo terminal, $\Psi(\mathbf{x})$, que é não-trivial. Para o caso sem restrição terminal, $\mathbf{X}_T$ pertence ao conjunto de números reais de ordem n . O resultado dessa modificação é equivalente a ter horizonte de predição infinito e horizonte de controle finito, podendo-se demonstrar que a estabilidade é garantida se o horizonte de predição for muito maior que o horizonte de controle.

- Custo Terminal e Conjunto de Restrição Terminal: os controladores preditivos mais recentes pertencem a essa categoria. Existem boas razões para incorporar o custo terminal e um conjunto de restrição terminal no problema de controle. De maneira ideal, o custo terminal $\Psi(\mathbf{x})$ deve ser o valor da função de horizonte infinito J_∞^0 . Se esse for o caso, então o valor da função objetivo no horizonte de controle (N_m) é igual à função objetivo de horizonte infinito como se segue: $J_{N_m}^0 = J_\infty^0$. A otimização em tempo real seria desnecessária e com conhecidas vantagens do horizonte infinito, tal como a estabilidade e a robustez seriam automaticamente atingidas. O conjunto de restrição terminal $\mathbf{X}_T$ é escolhido como pertencente ao conjunto de máximas saídas admissíveis.

A complexidade do problema de otimização depende da escolha do índice de desempenho e da restrição de estabilidade. Quando o horizonte de controle é infinito ou a restrição de estabilidade apresenta uma forma adequada, o problema de otimização pode ser formulado como uma otimização quadrática.

Essa formulação é considerada a forma padrão e sua popularidade se deve à conveniência matemática. Quando a norma-2 é usada, os algoritmos de programação que utilizam cone de segunda ordem podem ser adotados convenientemente. Alternativamente, pode-se obter formulações com otimização linear (LP) por utilização de norma-1 ou norma- ∞ . Um dos principais fatores que motivam a formulação de problemas MPC na forma de LP é a percepção de que essas formulações podem ser resolvidas mais eficientemente. É certamente verdadeiro que códigos modernos podem ser eficientemente manuseados para uma larga classe de problemas, entretanto, também é verdade que ambos, LP e QP convexo, podem ser moldados como problemas de complementaridade linear e resolvidos usando o método dos pontos interiores pela formulação do problema na forma de LMI (VANDENBERGUE *et al.*, 2002).

Teorema 2.1 Suponha que as seguintes considerações se mantenham para um sistema linear, um controlador nominal $\mathbf{K}(\mathbf{x})$, um domínio de estado terminal $\mathbf{X}_T$ e um peso de estado terminal $\Psi(\mathbf{x})$, expressos a seguir pelas Eq. 2.8-2.13.

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k \quad (2.8)$$

$$0 \subseteq \mathbf{X}_T \subseteq \mathbf{X} \quad (2.9)$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{K}(\mathbf{x}) \in \mathbf{X}_T, \forall \mathbf{x} \in \mathbf{X}_T \quad (2.10)$$

$$\Psi(0) = 0, \Psi(\mathbf{x}) \geq 0, \forall \mathbf{x} \neq 0 \quad (2.11)$$

$$\Psi(\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{K}(\mathbf{x})) - \Psi(\mathbf{x}) \leq -\mathbf{x}^T \mathbf{Q}\mathbf{x} - \mathbf{K}^T(\mathbf{x})\mathbf{R}\mathbf{K}(\mathbf{x}), \forall \mathbf{x} \in \mathbf{X}_T \quad (2.12)$$

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}) \in \mathbf{U}, \forall \mathbf{x} \in \mathbf{X}_T \quad (2.13)$$

Então, admitindo a viabilidade de estado inicial, um controlador MPC usando o seguinte problema de otimização apresentado pelas Eq. 2.14-2.15 garantirá estabilidade assintótica.

$$\min_{\mathbf{u}} \sum_{i=0}^{N_m-1} \mathbf{x}_{k+i|k}^T \mathbf{Q}\mathbf{x}_{k+i|k} + \mathbf{u}_{k+i|k}^T \mathbf{R}\mathbf{u}_{k+i|k} + \Psi(\mathbf{x}_{k+N_m|k}) \quad (2.14)$$

Sujeito à,

$$\mathbf{u}_{k+i|k} \in \mathbf{U}, \mathbf{x}_{k+i|k} \in \mathbf{X}, \mathbf{x}_{k+N_m|k} \in \mathbf{X}_T \quad (2.15)$$

Prova: (MAYNE *et al.*, 2000).

Apesar da teoria do MPC apresentar considerável maturidade, profissionais ligados à prática industrial argumentam que os limites de desempenho e aplicabilidade do MPC na prática não se devem a deficiências no algoritmo, mas a questões ligadas a dificuldades de modelagem, adequação de sensores e robustez insuficiente para falhas (MORARI; LEE, 1999; QIN e BADGWELL, 2003).

Pesquisas em robustez têm levado ao entendimento do problema e às limitações inerentes ao MPC convencional (em malha aberta). Enquanto o problema tem sido estudado e bem entendido, os resultados de pesquisas são conceituais e funcionam, a princípio, mas são complexos demais para serem empregados, principalmente quando se tratam de controladores MPC mín-máx em malha fechada. No momento existem várias formulações de MPC robusto. Enquanto os esquemas existentes contribuem para um aumento no entendimento eles são, com raras exceções, computacionalmente intratáveis na aplicação prática. Desta forma, percebe-se claramente a necessidade de desenvolvimento de estratégias de MPC robusto viáveis sob o ponto de vista da implementação e que reduzam a distancia entre a teoria e a prática (FINDEISEN; ALLGÖWER, 2001). Avanços em robustez, estimação de estado e MPC adaptativo podem contribuir para a evolução de MPC com realimentação das saídas (MAYNE *et al.*, 2000). O mais importante dessa discussão é a possibilidade de implementação em tempo real, o que é um fato essencial para o MPC.

A Figura 2.2 mostra as áreas de interface com o controle MPC cujos desenvolvimentos afetam na melhoria e evolução dos controladores preditivos (RICHALET, 1993; RICHARDS, 2005). Além dessas referências bibliográficas, as idéias transmitidas pelo Prof. Dr. Karl Johan Åström (*Lund Institute of Technology* - Suécia) durante palestra proferida em 28 de novembro de 2007, por ocasião do aniversário de 80 anos da Universidade Federal de Minas Gerais, em Belo Horizonte, contribuíram para a consolidação dos conceitos da atual situação do controle de processos e para a formação das idéias de futuro indicadas na Figura 2.2.

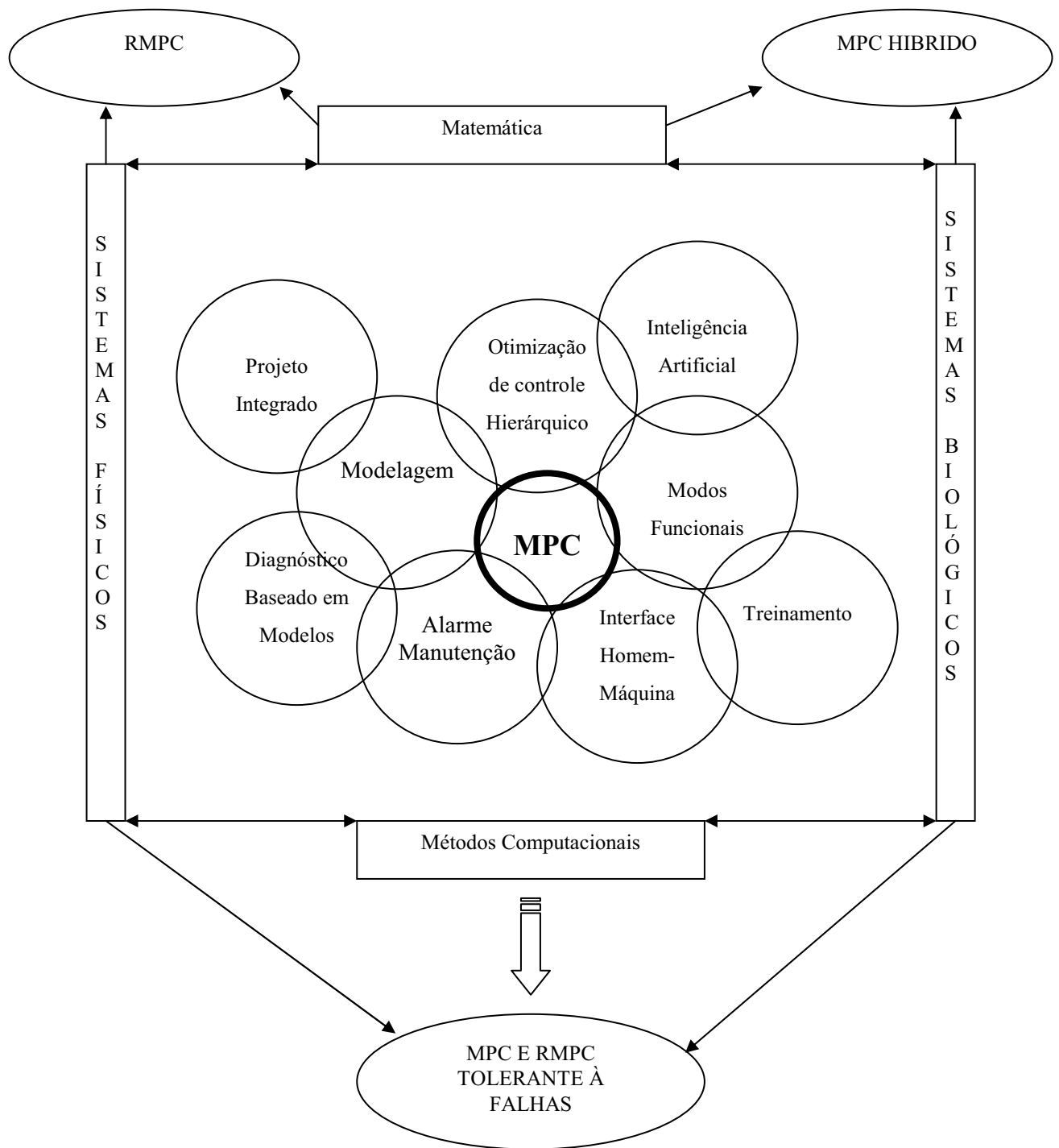


Figura 2.2 - MPC e áreas de interface.

2.1.1 Formulação Clássica – IHMPC (*Infinite Horizon Model Predictive Control*)

De maneira geral, os diferentes algoritmos de MPC são formulados no instante presente k , considerando um horizonte de predição N_p e um horizonte de controle N_m , como ilustra a Figura 2.3. Usando a resposta do modelo do processo, as variáveis manipuladas são preditas. A ação da variável manipulada é selecionada de tal forma que a resposta predita possui certas características desejadas de estabilidade e desempenho. Apenas a primeira ação é implementada e, no instante $k+1$, é feita uma atualização das medidas da planta, além de um novo cálculo para as variáveis manipuladas e saídas no horizonte de predição. Após o horizonte de controle, considera-se variação nula para a ação de controle. Para os estudos deste trabalho é feita a consideração de que o horizonte de controle é igual ao horizonte de predição, ou seja, $N_p = N_m$. Os desenvolvimentos em controle robusto serão feitos em algoritmos da família do MPC de horizonte infinito.

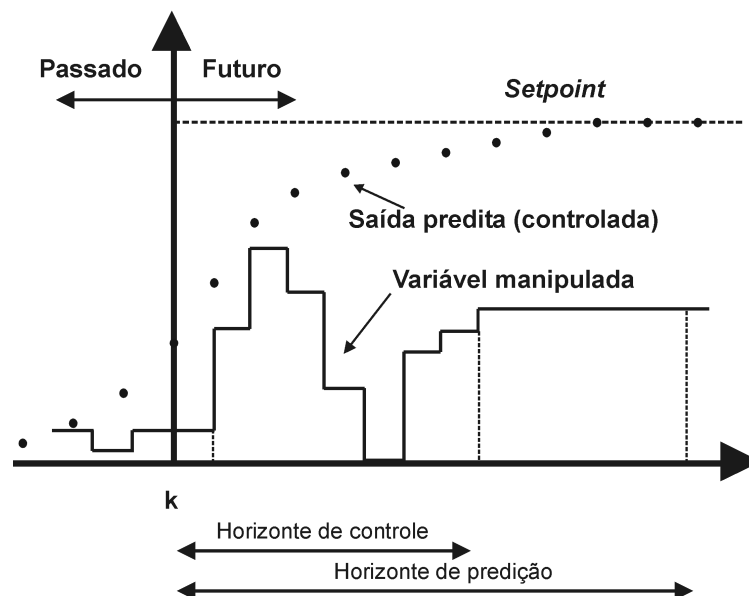


Figura 2.3 - Horizonte de ações, centro da teoria de MPC.

Um algoritmo básico é descrito a seguir:

1. Obter o novo estado $\mathbf{x}$ por medição e/ou estimação;
2. Resolver o problema de otimização $\rightarrow J(k)$
3. Aplicar apenas o primeiro movimento de controle $\mathbf{u}_{k+0|k}$;
4. $k \leftarrow k+1$, retorna para 1.

Considerando a sua importância, por se tratar de um algoritmo representativo de estabilidade nominal garantida, bem como pela simplicidade (MORARI, 1993), o algoritmo apresentado por Muske e Rawlings (1993a) será descrito a seguir, constituindo o ponto de partida para o estudo da estabilidade robusta. Será apresentada apenas a formulação para sistemas estáveis. Para sistemas instáveis, sugere-se a utilização da versão apresentada em Muske e Rawlings (1993b).

O MPC com horizonte de controle infinito (IH MPC – *Infinite Horizon Model Predictive Control*) é definido de forma que o movimento de controle $\mathbf{u}_k$, no instante de amostragem k , é dado pelo primeiro elemento $\mathbf{u}_{k|k}$ de $\mathbf{\Xi} : \{\mathbf{u}_{k|k}, \mathbf{u}_{k+1|k}, \dots, \mathbf{u}_{k+N_m-1|k}\}$ na forma da Eq. 2.16. Esta equação pode ser manipulada algebricamente resultando na Eq. 2.17, que transforma o horizonte de controle para horizonte finito. A sequência de ações de controle é a solução do problema de otimização dado pelas Eq. 2.17-2.20, com: $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T \geq \mathbf{0}$, $\mathbf{R} = \mathbf{R}^T > \mathbf{0}$, $\mathbf{S} = \mathbf{S}^T \geq \mathbf{0}$, $\bar{\mathbf{Q}} = \mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{C} + \mathbf{A}^T \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{A}$ (Equação de Lyapunov), e $\Delta \mathbf{u}_{k+j} = \mathbf{u}_{k+j} - \mathbf{u}_{k+j-1}$. No instante $k + N_m$, e posteriormente, o vetor de entradas $\mathbf{u}$ é um vetor de zeros e $\mathbf{z}$ representa o vetor de estados reais medidos ou estimados das saídas medidas.

$$J_k = \min_{\mathbf{u}} \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{y}_{k+i}^T \mathbf{Q} \mathbf{y}_{k+i} + \mathbf{u}_{k+i}^T \mathbf{R} \mathbf{u}_{k+i} + \Delta \mathbf{u}_{k+i}^T \mathbf{S} \Delta \mathbf{u}_{k+i} \quad (2.16)$$

$$J_k = \min_{\Xi} \Xi^T \mathbf{H} \Xi + 2\Xi^T (\mathbf{G}z_k - \mathbf{F}u_{k-1}) \quad (2.17)$$

Os termos do índice dado pela Eq. 2.17 são mostrados a seguir:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^T \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{B} + \mathbf{R} + 2\mathbf{S} & \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{B} - \mathbf{S} & \cdots & \mathbf{B}^T \mathbf{A}^{T^{N_m-1}} \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{A} \mathbf{B} - \mathbf{S} & \mathbf{B}^T \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{B} + \mathbf{R} + 2\mathbf{S} & \cdots & \mathbf{B}^T \mathbf{A}^{T^{N_m-2}} \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{B} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{B}^T \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{A}^{N_m-1} \mathbf{B} & \mathbf{B}^T \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{A}^{N_m-2} \mathbf{B} & \cdots & \mathbf{B}^T \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{B} + \mathbf{R} + 2\mathbf{S} \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^T \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{A} \\ \mathbf{B}^T \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{A}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{B}^T \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{A}^{N_m} \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{S} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

2.1.2 Controlador MPC com Trajetória de Referência - MPC-RS (*Model Predictive Control with Reference System*)

Essa estratégia é fundamentalmente uma transformação de um problema de otimização com restrições em um problema de programação quadrática (MONTANDON, 2005). A experiência do grupo de pesquisa nessa classe de controladores e implementações anteriores na planta piloto de controle de nível e pH foram as grandes motivações para o estudo dessa técnica. O objetivo foi utilizar conhecimentos prévios, validação das rotinas de operação em tempo real e aquisição de sensibilidade no sistema experimental. Não há nessa formulação consideração de incerteza, tratando-se de um controle MPC convencional cujos

resultados formarão uma base comparativa em termos de simulação para os controladores IHMPC e RMPC. Essa formulação será denominada nesse documento como MPC-RS (*Model Predictive Control with Reference System*).

A técnica de controle parte da linearização jacobiana do modelo dinâmico do sistema (Eq. 2.21-2.22). As matrizes $\mathbf{A}_{k-1}$, $\mathbf{B}_{k-1}$ e $\mathbf{C}_{k-1}$ são dadas pela Eq. 2.23-2.25. As variáveis $\hat{\mathbf{x}}'(k)$, $\mathbf{u}'(k)$ e $\hat{\mathbf{y}}'(k)$ passam a ser variáveis desvio em relação ao ponto imediatamente anterior ao ponto corrente de operação. Para simplificar a simbologia, fez-se, $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{k-1}$, $\mathbf{B} = \mathbf{B}_{k-1}$ e $\mathbf{C} = \mathbf{C}_{k-1}$ e $\mathbf{f} = \mathbf{f}_{k-1}$. Além disso, adotou-se, também, para efeito de simplificação, $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}'_k$, $\mathbf{u}_k = \mathbf{u}'_k$ e $\mathbf{y}_k = \mathbf{y}'_k$, conforme se apresenta nas Eq. 2.26-2.27.

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}}{dt} = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) \quad (2.21)$$

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}) \quad (2.22)$$

$$\mathbf{A}_{k-1} = \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right)_{\hat{\mathbf{x}}=\mathbf{x}(k-1), \mathbf{u}=\mathbf{u}(k-1)} \quad (2.23)$$

$$\mathbf{B}_{k-1} = \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right)_{\hat{\mathbf{x}}=\mathbf{x}(k-1), \mathbf{u}=\mathbf{u}(k-1)} \quad (2.24)$$

$$\mathbf{C}_{k-1} = \left(\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} \right)_{\hat{\mathbf{x}}=\mathbf{x}(k-1)} \quad (2.25)$$

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}'}{dt} = \mathbf{A}_{k-1} \hat{\mathbf{x}}' + \mathbf{B}_{k-1} \mathbf{u}' + \mathbf{f}_{k-1} \quad (2.26)$$

$$\hat{\mathbf{y}}' = \mathbf{C}_{k-1} \hat{\mathbf{x}}' \quad (2.27)$$

A discretização do sistema resulta na forma da Eq. 2.28. As matrizes discretas de espaço de estado (Φ, Ψ) são então definidas pela Eq. 2.29. Se, e somente se, $\mathbf{A}$ for não singular e subtraindo-se $\mathbf{x}_{k+1}$ e $\mathbf{x}_k$, chega-se à Eq. 2.30.

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \Phi \mathbf{x}_k + \Psi \mathbf{B} \mathbf{u}_k + \Psi \mathbf{f} \quad (2.28)$$

$$\Phi = e^{\mathbf{A}\Delta t} \quad \text{e} \quad \Psi = \mathbf{A}^{-1} \left(e^{\mathbf{A}\Delta t} - \mathbf{I} \right) \quad (2.29)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \hat{\mathbf{x}}_k + \Phi \Delta \mathbf{x}_k + \Psi \mathbf{B} \Delta \mathbf{u}_k \quad (2.30)$$

$\Delta \mathbf{x}_k = \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}$ que é o mesmo que $\Delta \mathbf{x}_k = \mathbf{x}_k$, uma vez que $\mathbf{x}_k$ é variável desvio e $\Delta \mathbf{u}_k = \mathbf{u}_k - \mathbf{u}_{k-1} = \mathbf{u}_k$. A avaliação dessa formulação sujeita aos horizontes de controle e de predição, juntamente com a trajetória de referência levará ao algoritmo do controlador, expresso pela função objetivo a seguir. Para maiores detalhes ver Montandon (2005).

A trajetória de referência da variável controlada é definida como uma equação diferencial linear de 1ª ordem, apresentada na Eq. 2.31. $\mathbf{K}_{RS}$ serve como um parâmetro de sintonia do controlador, $\mathbf{y}^{SP}$ é o valor desejado da variável controlada, $\mathbf{y}^{RS}$ é a trajetória de referência da variável controlada e $\hat{\mathbf{y}}$ é a predição da variável controlada.

$$\frac{d\mathbf{y}^{RS}}{dt} = \mathbf{K}_{RS} \left(\mathbf{y}^{SP} - \hat{\mathbf{y}} \right) \quad (2.31)$$

A escolha de uma trajetória de referência de 1ª ordem se deve, primeiramente, à simplicidade matemática do problema e, segundo, pelo fato de reduzir a possibilidade de ocorrência de *overshoot* no desempenho do controlador. No entanto, uma vez que uma trajetória de referência proporcional não garante a eliminação de *offset*, um estudo foi realizado por Montandon (2005) a fim de resolver este problema.

A função objetivo do problema de otimização, apresentada a seguir, já expressa a forma adequada para eliminação de *offset* e é definida na Eq. 2.32.

$$\min_{\Delta \mathbf{u}(k), \dots, \Delta \mathbf{u}(k+N_m), \lambda(k), \dots, \lambda(k+N_p)} J = \frac{1}{2} (\Delta \mathbf{u}^T \mathbf{R} \Delta \mathbf{u} + \lambda^T \mathbf{S} \lambda) \quad (2.32)$$

$\lambda = [\lambda_k, \dots, \lambda_{k+N_p}]^T$, $\mathbf{R}$ e $\mathbf{S}$ são parâmetros de sintonia do controlador. λ é o vetor da variável de folga do controlador e pode ser escrita como uma função objetivo de um problema de programação quadrática padrão dadas pelas Eq. 2.33-2.36, de forma que o mesmo se encontra sujeito a restrições de limites para as variáveis manipuladas, além da trajetória de referência:

$$\begin{aligned} \min_{v(k), \dots, v(k+N_m+N_p+2)} J &= \frac{1}{2} \mathbf{v}^T \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{v} \\ \text{Sujeito a : } \mathbf{D} \mathbf{v} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{u}_{\min} &\leq \mathbf{u} \leq \mathbf{u}_{\max} \\ -|\Delta \mathbf{u}_{\min}| &\leq \Delta \mathbf{u} \leq |\Delta \mathbf{u}_{\max}| \end{aligned} \quad (2.33)$$

Em que:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}_k \\ \Delta \mathbf{u}_{k+1} \\ \Delta \mathbf{u}_{k+2} \\ \vdots \\ \Delta \mathbf{u}_{k+N_m} \\ \dots\dots\dots \\ \lambda_k \\ \lambda_{k+1} \\ \lambda_{k+2} \\ \vdots \\ \lambda_{k+N_p} \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \vdots & [\mathbf{0}] \\ \dots\dots\dots & & \\ [\mathbf{0}] & \vdots & \mathbf{S} \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} \mathbf{C} \mathbf{B} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ (\mathbf{C} \mathbf{A} + \mathbf{K}_{\text{RS}} \mathbf{C}) \Psi \mathbf{B} & \mathbf{C} \mathbf{B} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ (\mathbf{C} \mathbf{A} + \mathbf{K}_{\text{RS}} \mathbf{C}) \Phi \Psi \mathbf{B} & (\mathbf{C} \mathbf{A} + \mathbf{K}_{\text{RS}} \mathbf{C}) \Psi \mathbf{B} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ (\mathbf{C} \mathbf{A} + \mathbf{K}_{\text{RS}} \mathbf{C}) \Phi^{N_{\text{m}}-1} \Psi \mathbf{B} & (\mathbf{C} \mathbf{A}_k + \mathbf{K}_{\text{RS}} \mathbf{C}_k) \Phi^{N_{\text{m}}-2} \Psi \mathbf{B} & \dots & \mathbf{C} \mathbf{B} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ (\mathbf{C} \mathbf{A} + \mathbf{K}_{\text{RS}} \mathbf{C}) \Phi^{N_{\text{m}}} \Psi \mathbf{B} & (\mathbf{C} \mathbf{A} + \mathbf{K}_{\text{RS}} \mathbf{C}) \Phi^{N_{\text{m}}-1} \Psi \mathbf{B} & \dots & (\mathbf{C} \mathbf{A} + \mathbf{K}_{\text{RS}} \mathbf{C}) \Psi \mathbf{B} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ (\mathbf{C} \mathbf{A} + \mathbf{K}_{\text{RS}} \mathbf{C}) \Phi^{N_{\text{m}}+1} \Psi \mathbf{B} & (\mathbf{C} \mathbf{A} + \mathbf{K}_{\text{RS}} \mathbf{C}) \Phi^{N_{\text{m}}} \Psi \mathbf{B} & \dots & (\mathbf{C} \mathbf{A} + \mathbf{K}_{\text{RS}} \mathbf{C}) \Phi \Psi \mathbf{B} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ (\mathbf{C} \mathbf{A} + \mathbf{K}_{\text{RS}} \mathbf{C}) \Phi^{N_{\text{p}}-1} \Psi \mathbf{B} & (\mathbf{C} \mathbf{A} + \mathbf{K}_{\text{RS}} \mathbf{C}) \Phi^{N_{\text{p}}-1} \Psi \mathbf{B} & \dots & (\mathbf{C} \mathbf{A} + \mathbf{K}_{\text{RS}} \mathbf{C}) \Phi^{N_{\text{p}}-N_{\text{m}}} \Psi \mathbf{B} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \\
& \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\text{RS}} (\mathbf{y}_k^{\text{SP}} - \mathbf{y}_k) - \mathbf{C} \mathbf{A} \Delta \mathbf{x}_k - \frac{\mathbf{y}_k - \mathbf{y}_{k-1}}{\Delta t} \\ \mathbf{K}_{\text{RS}} \Delta \mathbf{y}_{k+1}^{\text{SP}} - (\mathbf{C} \mathbf{A} + \mathbf{K}_{\text{RS}} \mathbf{C}) \Phi \Delta \mathbf{x}_k \\ \mathbf{K}_{\text{RS}} \Delta \mathbf{y}_{k+2}^{\text{SP}} - (\mathbf{C} \mathbf{A} + \mathbf{K}_{\text{RS}} \mathbf{C}) \Phi^2 \Delta \mathbf{x}_k \\ \vdots \\ \mathbf{K}_{\text{RS}} \Delta \mathbf{y}_{k+N_{\text{m}}}^{\text{SP}} - (\mathbf{C} \mathbf{A} + \mathbf{K}_{\text{RS}} \mathbf{C}) \Phi^{N_{\text{m}}} \Delta \mathbf{x}_k \\ \mathbf{K}_{\text{RS}} \Delta \mathbf{y}_{k+N_{\text{m}}+1}^{\text{SP}} - (\mathbf{C} \mathbf{A} + \mathbf{K}_{\text{RS}} \mathbf{C}) \Phi^{N_{\text{m}}+1} \Delta \mathbf{x}_k \\ \mathbf{K}_{\text{RS}} \Delta \mathbf{y}_{k+N_{\text{m}}+2}^{\text{SP}} - (\mathbf{C} \mathbf{A} + \mathbf{K}_{\text{RS}} \mathbf{C}) \Phi^{N_{\text{m}}+2} \Delta \mathbf{x}_k \\ \vdots \\ \mathbf{K}_{\text{RS}} \Delta \mathbf{y}_{k+N_{\text{p}}}^{\text{SP}} - (\mathbf{C} \mathbf{A} + \mathbf{K}_{\text{RS}} \mathbf{C}) \Phi^{N_{\text{p}}} \Delta \mathbf{x}_k \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{2.36}$$

2.2 Controle Robusto

O controle bem sucedido requer que se detenha algum conhecimento das características básicas do sistema em questão. Os parâmetros do controlador são ajustados com base nesse conhecimento e, quanto mais conhecimento se possui, melhor é o comportamento da malha fechada. Várias são as técnicas de controle moderno que exploram o referido conhecimento sobre o sistema, destacando-se as técnicas de controle preditivo, que se baseiam em um modelo do processo que se pretende controlar.

Naturalmente, quanto melhor o modelo matemático utilizado para representar as características reais da planta, mais eficiente será o esquema de controle baseado nesse modelo. Infelizmente, a complexidade do modelo matemático é diretamente ligada à sua representação real dos processos. Dessa forma, um controlador que se baseia em um modelo incorreto de um dado processo pode levar o sistema a um comportamento completamente diferente do previsto.

A caracterização de um conjunto de incertezas significa encontrar uma representação matemática da incerteza do modelo, baseada no conhecimento do sistema. Em sistemas MIMO a direcionalidade da planta se configura como um problema adicional.

As incertezas podem ter muitas origens, como: parâmetros de modelo linear aproximados com erro; parâmetros do modelo linear variando devido à característica não linear dos sistemas reais associados com o ponto de operação; imperfeições na medida; modelos e estruturas desconhecidos em altas frequências; escolha de modelos mais simples, negligenciando dinâmicas como incertezas; controlador implementado diferentemente do controlador sintetizado.

Como sugeriu Skogestad e Postlethwaite (1997), as principais formas de modelar incertezas são:

- Incerteza paramétrica ou incerteza estruturada, em que a estrutura do modelo é conhecida, porém alguns parâmetros são incertos, como apresentada a Eq. 2.37. G_S constitui uma classe de modelos associados ao modelo nominal G_n , cujo ganho ϑ é incerto, porém limitado a $\vartheta_{\min}$ e $\vartheta_{\max}$. As desvantagens para esse tipo de incerteza são: a demanda de um profundo conhecimento sobre o processo, a necessidade de modelo exato, juntamente com a impossibilidade de lidar com incertezas de dinâmicas não modeladas, e a exigência de perturbações reais no sistema.

$$G_S = \vartheta G_n(s); \vartheta_{\min} \leq \vartheta \leq \vartheta_{\max} \quad (2.37)$$

- Incerteza de dinâmicas negligenciadas ou não-modeladas, em que o modelo se encontra em erro, uma vez que perdeu representação de parte de sua dinâmica, usualmente em altas frequências, que foi deliberadamente negligenciado devido à complexidade de obtenção de um modelo matemático ou à dificuldade de lidar com o modelo obtido. A forma usual de representação é mostrada na Eq. 2.38, que expressa a norma infinita da incerteza Δ limitada a um número finito que, nesse caso, é a unidade, considerando-se sistemas escalados. A Figura 2.4 ilustra o sistema com esse tipo de representação de incerteza.

$$\|\Delta\|_{\infty} \leq 1 \quad (2.38)$$

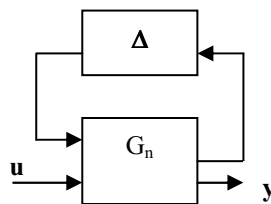


Figura 2.4 - Processo com incerteza dinâmica negligenciada ou não-modelada.

- Incerteza distribuída ou incerteza não estruturada, em que a descrição de incerteza representa uma ou muitas fontes de incerteza paramétrica e/ou não-modelada, combinadas em uma simples perturbação distribuída de uma estrutura escolhida. A Equação 2.39 expressa a incerteza multiplicativa na entrada e é ilustrada na Figura 2.5. Aqui, w_I é uma função peso que, juntamente com a incerteza Δ_I , gera regiões de incerteza centrada em G_n , s é a variável de Laplace, j é a variável complexa e ω representa o domínio da frequência. Outros tipos possíveis para essa classe de incerteza são: incerteza aditiva, incerteza multiplicativa na saída, incerteza aditiva inversa, incerteza multiplicativa na entrada inversa, e incerteza multiplicativa na saída inversa. Essas formas são semelhantes, porém a aplicação em sistemas de controle é distinta. Vale ressaltar que é uma consideração natural o estudo da incerteza no domínio de frequência, uma vez que as incertezas estão associadas às dinâmicas de altas frequências ou transitórias. Esse tipo de incerteza é uma suposição de que todas as incertezas podem ser globalizadas em um único vetor (RAMÍREZ; CAMACHO, 2002).

$$G_S(s) = G_n(s)(1 + w_I(s)\Delta_I(s)); |\Delta_I(j\omega)| \leq 1, \forall \omega \rightarrow \|\Delta_I\|_\infty \leq 1 \quad (2.39)$$

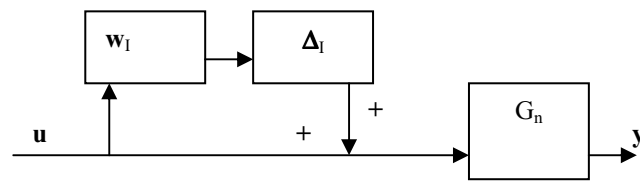


Figura 2.5 - Processo com incerteza multiplicativa na entrada.

- Uma alternativa para a aproximação na descrição de incertezas é considerar uma distribuição probabilística dos parâmetros com uma resposta média, como apresentou Kailath (1980). Esta é a incerteza estocástica. Desse modo, a saída no instante de tempo k não pode ser exatamente determinada a partir de dados passados. Considerar a incerteza,

nesse caso, significa levar em conta variáveis aleatórias presentes nos processos. Porém, essa abordagem é de difícil análise e, até certo grau, incoerente com o estudo de robustez, uma vez que, com as incertezas estocásticas, caracterizadas como ruídos na planta, o sistema se tornará estável e, na realidade, a planta poderá tornar-se instável.

- Quando a incerteza é parametrizada por uma lista finita de possíveis modelos na forma da Eq. 2.40, tem-se a forma de politopos, como mostrou Bemporad e Morari (1999). Quando é permitido que o sistema real varie dentro de uma família de sistemas definida por uma lista de modelos, obtém-se a chamada incerteza politópica, como apresenta a Eq. 2.41. Esse tipo de incerteza tem sido estudado já há muitos anos e é uma ferramenta flexível e versátil para descrever sistemas com incerteza e sistemas variantes no tempo (GRIEDER; PARRILO; MORARI, 2003).

$$\Pi \in \{\Pi_1 \quad \dots \quad \Pi_M\} \quad (2.40)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{A}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{C} \mathbf{x}_k \\ [\mathbf{A}_k \quad \mathbf{B}_k] &\in \Pi \\ \Pi &= \text{co}\{[\mathbf{A}_{k,1} \quad \mathbf{B}_{k,1}] \quad \dots \quad [\mathbf{A}_{k,M} \quad \mathbf{B}_{k,M}]\} \end{aligned} \quad (2.41)$$

O conhecimento do processo é a chave para a definição das incertezas. Para sistemas com atuadores e componentes mecânicos, pode obter-se um modelo de incertezas na entrada. Sistemas variantes no tempo e não lineares podem ter as suas incertezas melhor modeladas na forma de politopo. A definição da incerteza exige conhecimento do processo e integração com a estrutura de controle robusto que se pretende utilizar. Gustafsson e Mäkilä (2001) apresentam um roteiro para modelagem de incertezas para aplicação em controle robusto.

Um controle é robusto se ele for insensível às diferenças entre o sistema atual e o modelo utilizado para o cálculo do controlador. Os problemas de robustez estão ligados a inúmeros fatores, tais como: defeitos diversos no sistema; sensores; atuadores; envelhecimento; restrições físicas; alterações nos objetivos de controle; abertura e fechamento de malha, e problemas matemático-computacionais ligados à descrição do problema real de controle, algoritmos e convergência. Pode-se, ainda, encontrar o ponto de ótimo desempenho que seja excessivamente conservativo e proibitivo para aplicação, em particular, se o pior caso raramente acontece.

A teoria de controle H_∞ , na década de 1980, reviveu fortemente a idéia de robustez, levando a um desenvolvimento bastante rigoroso e produzindo idéias e métodos associados (ÅSTRÖM, 2001). O paradigma chave do controle robusto H_∞ é verificar se as especificações de projeto são satisfeitas mesmo para a pior condição.

O estudo de autovalores da planta não oferece a melhor análise da direcionalidade da planta. A justificativa para tal fato é que os autovalores medem o ganho para o caso especial em que as entradas e as saídas estão na mesma direção. Uma ferramenta para análise de direcionalidade é a decomposição de valores singulares (SVD), expressa pela Eq. 2.42. Algumas vantagens dessa ferramenta podem ser descritas, como: melhor informação sobre os ganhos da planta, as direções obtidas pela decomposição de valores singulares são ortogonais e podem ainda ser obtidas de plantas não quadradas. O máximo valor singular também é muito útil para o desempenho robusto. Zhu e Jutan (1998) apresentam um controlador robusto baseado no conceito de SVD. β é a matriz diagonal decrescente de valores singulares não-negativos (σ_i); ξ é a matriz de saída de vetores singulares, e ζ é a matriz de entrada de vetores singulares. O índice H indica a forma transposta conjugada (SÅGFORS; WALLER, 1998).

$$G = \xi \beta \zeta^H \quad (2.42)$$

O número de condicionamento (NC) e a matriz de ganho relativo (RGA) são ferramentas matemáticas importantes utilizadas para quantificar o grau de direcionalidade e de interação em sistemas MIMO.

O número de condicionamento é definido, na Eq. 2.43, como uma relação entre o máximo e mínimo valor singular. É interessante notar que o condicionamento do sistema depende fortemente do escalamento das entradas e saídas. Se o número condicional é grande, ele pode indicar alguns problemas de controle como, por exemplo, a presença indesejável de mínimo valor singular pequeno (SÅGFORS; WALLER, 1998). Entretanto, na prática, o sistema poder perder desempenho drasticamente devido a diferenças no tipo ou, mais geralmente, à direcionalidade da perturbação/*setpoint*. O número condicional dessa forma providencia uma medida da robustez do sistema em malha fechada contra a direcionalidade de perturbação e *setpoint* (ZHU; JUTAN, 1998).

$$NC(G) = \frac{\overline{\sigma}(G)}{\underline{\sigma}(G)} \quad (2.43)$$

A matriz de ganho relativo (RGA) é definida na Eq. 2.44 e oferece informações importantes sobre o sistema em todo o espectro de frequência. Contudo, os pontos mais utilizados para análise são os valores de RGA na forma de estado estacionário e também em frequências próximas às frequências de cruzamento.

$$RGA = G_{ii} H_{ii}, \text{ com } H = (G^{-1})^T \quad (2.44)$$

Algumas das propriedades úteis para controle, dadas pela RGA, são listadas a seguir:

- A RGA é um bom indicador da sensibilidade às incertezas nos canais de entrada (incerteza diagonal). Pode indicar, também, a impossibilidade de aplicação de desacopladores; Wolovich e Falb (1976) e Weller e Goodwin (1996) aplicam o conceito de RGA no desenvolvimento de desacopladores. Os trabalhos de busca de pareamento adequado de variáveis são feitos desde antes do conceito de RGA, como apresentados por Niederlinski (1971);
- Variações no sinal da RGA indicam a existência de zeros do lado direito do plano (considerando-se sistema contínuo);
- Análise de plantas não quadradas podendo indicar a necessidade de eliminação de entrada extra ou a impossibilidade de controle de saída;
- A RGA pode ser utilizada como medida de dominância diagonal e pode indicar o pareamento adequado para o controle;
- A RGA fornece informações sobre integridade e estabilidade para sistemas com controle descentralizado.

Embora picos de sensibilidade e elementos de RGA, dentre outros, sejam indicadores úteis de problemas de robustez, eles não indicam exatamente se uma dada fonte de incerteza promoverá instabilidade ou um desempenho pobre do sistema. Isso motiva a necessidade de melhores ferramentas para a análise dos efeitos de modelos de incerteza. É necessário que se evitem procedimentos baseados em tentativa e erro ao verificar a estabilidade e o desempenho para um grande número de plantas candidatas (CHANG; YU, 1990; GAGNEPALN; SEBORG, 1982; MCAVOY *et al.*, 2003; SKOGESTAD; MORARI, 1987; WITCHER; MCAVOY, 1977).

O conceito de estabilidade interna remete diretamente à idéia de controladores estabilizantes expressos por parametrização de Youla. A estrutura de controle preditivo IMC

pode ser compreendida como uma forma dessa classe de controladores (MORARI; ZAFIRIOU, 1989).

Considerando-se o conceito de estabilidade interna, pode-se enunciar um importante teorema, cujo resultado é a base para estudo de estabilidade robusta e derivação de demais formulações.

Teorema 2.2 (Teorema do Pequeno Ganho): Supondo $\mathbf{M} \in \mathcal{RH}_\infty$ e seja $\alpha > 0$. Então, a interconexão do sistema mostrado na Figura 2.6 é bem posta e internamente estável para todo $\Delta(s) \in \mathcal{RH}_\infty$, como mostram as Eq. 2.45-2.46:

$$\|\Delta\|_\infty \leq 1/\alpha \text{ se e somente se } \|\mathbf{M}\|_\infty < 1/\alpha \quad (2.45)$$

$$\|\Delta\|_\infty < 1/\alpha \text{ se e somente se } \|\mathbf{M}\|_\infty \leq 1/\alpha \quad (2.46)$$

Prova: ver Zhou e Doyle (1998).

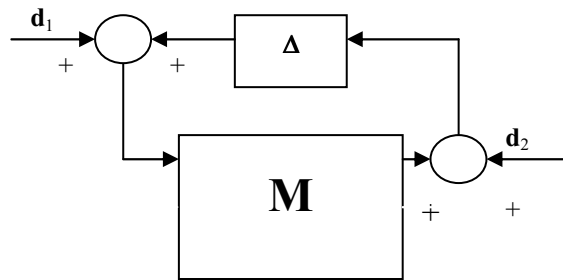


Figura 2.6 - Interconexão do sistema para o Teorema do Pequeno Ganho.

As limitações dos sistemas podem ser impostas por: tempo morto, fase não-mínima, pólos instáveis, perturbação do sistema, restrições na entrada, atraso de fase e incerteza (HOLT; MORARI, 1985a; 1985b; MORARI, ZAFIRIOU; HOLT, 1987; MORARI, 1983; HAVRE, 1998).

Dado um conjunto de modelos incertos Π e uma série de objetivos de desempenho, supondo que $G \in \Pi$ é o modelo nominal e $\mathbf{K}$ é o controlador que estabiliza internamente G , então a malha fechada é dita possuir:

- Estabilidade nominal (NS): se $\mathbf{K}$ estabiliza internamente o modelo nominal G ;
- Estabilidade robusta (RS): se $\mathbf{K}$ estabiliza internamente todas as plantas em Π ;
- Desempenho nominal (NP): se os objetivos de desempenho são satisfeitos para G ;
- Desempenho robusto (RP): se os objetivos de desempenho são satisfeitos para todas as plantas em Π .

2.3 RMPC (*Robust Model Predictive Control*)

Em 1968, Witsenhausen propôs uma técnica emergente de controle baseada na otimização da pior condição do sistema para comportamento futuro originando, assim, uma das principais idéias do controle robusto (WEINMANN, 1991).

O controle robusto trata de projetar controladores que preservem a estabilidade e o desempenho apesar das incertezas do modelo. A estabilidade robusta é um problema sério para a aplicação industrial do MPC (QIN e BADGWELL, 1996). Os diversos métodos de Lyapunov podem ser utilizados para prever o desempenho de sistema linear com incerteza de modelo e também podem ser utilizados para projetar controladores adequados a essa situação. Alguns métodos são revistos por Osburn e Bernstein (1997) e Ding *et al.* (2007).

Os modelos no MPC são utilizados para a predição do que irá acontecer nas trajetórias futuras. A forma apropriada para se descrever incerteza nesse contexto é um

modelo ou uma família de modelos, que, ao invés de gerar uma trajetória futura, possa gerar uma faixa de trajetórias na qual a trajetória do processo esteja inclusa quando a entrada for aplicada, apesar das incertezas. Deve-se esperar que, para um bom modelo, essa banda de trajetórias seja estreita, assim como o contrário também pode acontecer (CAMACHO; BORDONS, 1999).

A forma como o sistema irá encontrar a trajetória desejada será indicada pela função objetivo e dependerá dos sinais presentes e futuros de controle e da incerteza. Por consequência, pode-se notar que a faixa dos comportamentos possíveis será sempre maior que o comportamento real da dinâmica do processo. Por essa razão, o controlador projetado baseado em modelo de incerteza é sempre conservador em suas ações (CHRISTEN *et al.*, 1997).

Os modelos matemáticos, em especial os modelos para controle, podem descrever a dinâmica de um processo apenas de forma aproximada (WEINMANN, 1991). A maioria das técnicas de projeto de MPC necessita de um modelo de controle da planta com estrutura e parâmetros fixos, que serão utilizados no procedimento de projeto. O controle robusto considera explicitamente as discrepâncias entre o modelo e o processo real.

As incertezas podem ser definidas sobre a capacidade de predição do modelo (CAMACHO; BORDONS, 1999). Como parte dos esforços de modelagem, é necessário obter uma descrição apropriada para a descrição das incertezas. Por um lado, a descrição de incerteza deve ser justa, não contemplando modelos extras ou situações irreais, devendo haver o compromisso entre o realismo e o resultado da complexidade computacional da síntese e análise do controlador.

Quando o caso usual de incertezas limitadas é considerado explicitamente, os limites das trajetórias preditas podem ser calculados e parece que o controle robusto pode ser obtido se o controlador tentar minimizar a função objetivo para o pior caso, como mostrado na

Eq. 2.47. A função a ser minimizada é o *maximum* de uma norma, que mede quão bem a saída do processo segue a trajetória de referência. Diferentes tipos de normas podem ser utilizados para esse propósito. Incertezas estruturadas conduzem ao caminho natural de análise do pior caso e, por consequência, do problema mín-máx. O problema de robustez na presença de incertezas não estruturadas é usualmente tratado por introdução de graus de liberdade baseados em parametrização de Youla. Essa técnica não afeta a função de sensibilidade complementar e permite a minimização da função custo de robustez na forma do bem conhecido Teorema do Pequeno Ganho.

$$\min_{\mathbf{u} \in \mathbf{U}} \max_{\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}} J(\mathbf{u}, \boldsymbol{\theta}) \quad (2.47)$$

Mayne e Langson (2001) mostram uma forma alternativa para que a robustez possa ser adicionada em algoritmos convencionais de MPC, por meio da introdução de modificações relativamente simples. Essa transformação considera a solução nominal do sistema, o uso de um controlador estabilizante do modelo nominal e a solução ótima para o problema convencional nominal.

O comportamento do MPC pode ser muito complicado devido ao fato de a ação de controle ser determinada como um resultado de um problema de otimização em tempo real. Enquanto a intuição de engenharia pode ser freqüentemente usada na análise do comportamento ou no projeto de sistemas de MPC, a teoria pode desenvolver valiosa ajuda, ampliando o julgamento e a intuição humana no desenvolvimento e implementação de um melhor sistema RMPC que possa explorar todo seu potencial (NIKOLAOU, 2001).

A estabilidade é uma propriedade fundamental dos sistemas dinâmicos. Uma importante implicação dessa declaração é que controladores RMPC devem resultar em malhas

fechadas que sejam estáveis. Como resultado, se um ótimo sistema RMPC é projetado, apenas candidatos que pertençam ao conjunto de controladores RMPC estabilizantes devem ser considerados. Para assegurar a estabilidade robusta na presença de incerteza do modelo dois caminhos podem ser seguidos (NIKOLAOU, 2001). O primeiro é escolher os parâmetros do MPC padrão (matrizes $\mathbf{Q}$ e $\mathbf{R}$), de forma a atender a Eq. 2.48.

$$0 \leq J_{\text{opt}}(k) - J_{\text{opt}}(k+1) \quad (2.48)$$

Em outras palavras, a robustez é feita pela tentativa por meio do melhor ajuste do MPC com menor modificação em sua estrutura. A vantagem desta aproximação é que a forma do MPC padrão é mantida. A desvantagem, por sua vez, é que a otimização *on-line* pode tornar-se irreal e conservadora, dependendo da magnitude da incerteza de modelo no processo. Vuthandam *et al.* (1995) *apud* Mayne *et al.* (2000), apresentou um algoritmo no qual a estabilidade é garantida pelo atendimento de restrição que implica na redução gradual dos pesos da variação dos movimentos de controle ($\Delta \mathbf{u}$). Resultados similares podem ser encontrados para MPC com objetivo em tempo real baseado na norma-1. Variações para outras formulações de MPC também podem ser encontradas na literatura. Como exemplo, Lee e Yu (1997) apresentaram resultados de formulações de MPC empregando o problema de otimização *on-line* na forma da Eq. 2.49. Para esse caso, $\boldsymbol{\theta}$ refere-se a parâmetros de modelo do processo que são incertos ou à incerteza propriamente dita.

$$\min_{\mathbf{u}} \max_{\boldsymbol{\theta}} J[k, \mathbf{u}, \boldsymbol{\theta}] \quad (2.49)$$

A idéia dessa formulação é que a ótima entrada para o pior caso possível do processo seja computado a cada passo k . Outra forma é modificar o problema MPC de otimização *on-line* adicionando a restrição que possa ajudar a estabilizar a malha fechada do sistema. Como exemplo de restrição, pode-se citar a mesma Eq. 2.30. Dessa forma, adicionando a restrição no problema de otimização *on-line*, pode-se assegurar que o controlador MPC automaticamente pertencerá a um conjunto de controladores estabilizante. Cheng e Krogh (1996) *apud* Nikolaou (2001), desenvolveram a chamada “*stability constrained receding horizon control*”. Badgwell (1997a; 1997b) desenvolveu a formulação de MPC na qual a restrição utilizada no problema de otimização *on-line* garante a estabilidade robusta para a malha fechada do MPC para processos lineares estáveis e instáveis. Essa formulação é um problema global de otimização convexa e tem solução viável que, como resultado, garante ter uma solução ótima única. Tal aproximação tem como vantagem o fato de que o objetivo em tempo real pode ser formulado de forma a refletir o verdadeiro objetivo de controle, considerando-se a estabilidade. Por outro lado, a desvantagem reside no fato de que o problema de otimização pode tornar-se bastante complexo. Outra questão crítica é o uso de uma família de modelos. O ideal seria a utilização de uma família de modelos bastante numerosa cuja aproximação linear do processo em cada ponto capturasse as incertezas. Entretanto, a complexidade para a solução do problema aumenta na medida em que aumenta o número de modelos descritivos.

Existem considerações para melhorar o desempenho de MPC, que podem se citadas a seguir:

- Modificação na estrutura do MPC para o desempenho robusto;
- Ajuste do MPC para desempenho robusto;

- Desenvolvimento de algoritmos eficientes na solução numérica do problema de otimização *on-line* do MPC, de modo a possibilitar formulações mais complexas e realistas nos problemas de otimização *on-line* levando a uma melhoria no desempenho.

Como em um MPC nominal, considerações especiais devem ser levadas em conta a fim de garantir estabilidade robusta. O Teorema 2.3 resume os principais fatos.

Teorema 2.3: Supondo que as seguintes considerações se mantenham para o sistema com incerteza $\theta \in \Theta$, controlador nominal $\mathbf{K}(\mathbf{x})$, um domínio de estado terminal $\mathbf{X}_T$, um custo de estágio $\varphi(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k)$ e um peso de estado terminal $\Psi(\mathbf{x})$, como apresentado pelas Eq. 2.50-2.56. Então, considerando viabilidade de estado inicial, um controlador RMPC usando a seguinte formulação mín-máx, expresso pelas Eq. 2.57-2.59, irá garantir estabilidade assintótica.

$$\mathbf{x}_{k+1} = f(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \theta_k) \quad (2.50)$$

$$0 \subseteq \mathbf{X}_T \subseteq \mathbf{X} \quad (2.51)$$

$$f(\mathbf{x}_k, \mathbf{K}(\mathbf{x}_k), \theta_k) \in \mathbf{X}_T, \forall \mathbf{x}_k \in \mathbf{X}_T, \forall \theta \in \Theta \quad (2.52)$$

$$\varphi(0,0) = 0, \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = 0, \forall (\mathbf{x}, \mathbf{u}) \neq 0 \quad (2.53)$$

$$\Psi(0) = 0, \Psi(\mathbf{x}) > 0, \forall \mathbf{x} \neq 0 \quad (2.54)$$

$$\Psi(f(\mathbf{x}, \mathbf{K}(\mathbf{x}), \theta)) - \Psi(\mathbf{x}) \leq \varphi((\mathbf{x}, \mathbf{K}(\mathbf{x})), \forall \mathbf{x}_k \in \mathbf{X}_T, \forall \theta \in \Theta \quad (2.55)$$

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}) \in \mathbf{U}, \forall \mathbf{x} \in \mathbf{X}_T \quad (2.56)$$

Então:

$$\min_{\mathbf{U}} \max_{\theta} \sum_{i=0}^{N_m-1} \varphi(\mathbf{x}_{k+i|k}, \mathbf{u}_{k+i|k}) + \Psi(\mathbf{x}_{k+N_m|k}) \quad (2.57)$$

Sujeito a:

$$\mathbf{u}_{k+i|k} \in \mathbf{U}, \forall \theta \in \Theta \quad (2.58)$$

$$\mathbf{x}_{k+i|k} \in \mathbf{X}, \forall \theta \in \Theta, \mathbf{x}_{k+N_p|k} \in \mathbf{X}_T, \forall \theta \in \Theta \quad (2.59)$$

Prova: (MAYNE *et al.*, 2000).

A análise de robustez pode ser definida em duas situações distintas:

- Análise de robustez de propriedade de MPC padrão projetados para o modelo nominal sem levar em consideração a incerteza. Zheng (1999) desenvolve uma ferramenta para aplicação em algoritmos MPC que, sem alterar suas características atrativas, apresentam estabilidade assintótica nos casos nominal e robusto, pelo uso de pesos variantes no tempo, formulados como um problema convexo envolvendo LMI;
- Síntese de algoritmos MPC que são robustos por construção.

Existe a necessidade de ferramentas para análise e, devido ao fato de os algoritmos padrões de MPC tipicamente requererem um menor esforço computacional, tornam-se desejáveis para implementação em tempo real. Como ferramenta de análise, pode-se citar (BEMPORAD; MORARI, 1999): mapeamento de contração que deriva um conjunto de condições suficientes para estabilidade nominal e robusta de MPC; índice de desempenho baseado em norma 1, condição de estado terminal como uma restrição de estabilidade e teste de robustez como simples satisfação de desigualdades; teste de análise de robustez *off-line* de controle de horizonte finito com restrição que requer a solução de um conjunto de LMI.

Duas estratégias são possíveis para o caso da síntese de controladores RMPC:

- Definir um modelo nominal considerando uma perturbação nominal igual a zero e otimizar o desempenho nominal – técnica conhecida como robustez inerente;
- Resolver o problema mín-máx para otimizar o desempenho robusto. Esta opção é computacionalmente muito mais exigente que a primeira. Entretanto, sob certas considerações para as restrições e incertezas, algoritmos muito eficientes podem ser aplicados. Por outro lado, a ação de controle pode ser excessivamente conservadora. Na presença de incertezas, as restrições das variáveis de estado podem ser impostas a todas as plantas possíveis ou somente à planta nominal (SCOKAERT; RAWLINGS, 1997).

O requerimento mínimo para a malha fechada é a estabilidade robusta, ou seja, a estabilidade na presença de incertezas. Nos vários projetos de MPC a estabilidade robusta é encontrada por dois caminhos:

- Indiretamente, pela especificação de objetivos de desempenho e descrição de incertezas de tal forma que a computação do controle ótimo leve à estabilidade robusta;
- Diretamente, obrigando a um tipo de restrição de contração robusta que garanta que o estado encolherá para todas as plantas pertencentes ao conjunto de incertezas.

A generalização do índice de otimização nominal para o caso robusto expresso na formulação mín-máx da Eq. 2.49 parece ser o caminho natural. Contudo, para se assegurar a estabilidade robusta é necessário que a incerteza seja considerada como variante no tempo (Eq. 2.60). Esse fato adiciona um conservadorismo que torna a ação de controle proibitiva para aplicação (ZHENG, 1999).

$$\min_{\mathbf{u} \in \mathbf{U}} \max_{\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}} J(\mathbf{k}, \mathbf{u}_k, \boldsymbol{\theta}_k) \quad (2.60)$$

A restrição de contração apresentada na Eq. 2.61 é uma restrição de estabilidade que força a contração do estado. Para se atingir a estabilidade robusta é necessário que o estado se contraia para todos os modelos pertencentes ao conjunto de incertezas (ZHENG, 1999).

$$\|\mathbf{x}_{k+1|k}\|_1 \leq \alpha \|\mathbf{x}_k\|_1, \alpha < 1 \quad (2.61)$$

O conjunto terminal elipsoidal invariante tem sido proposto no contexto nominal como relaxação da restrição de igualdade terminal. Tal técnica pode ser estendida para a formulação de MPC robusto pelo uso de técnicas como LMI (KOTHARE *et al.*, 1996).

A predição em malha aberta avalia a direção do sistema para o pior caso de perturbação. Isso pode ser muito conservador uma vez que os efeitos da perturbação são reduzidos na malha fechada. Logo, uma forma de se melhorar o comportamento do sistema é realizar a predição considerando a malha fechada (LEE; YU, 1997). Para uma larga faixa de incertezas de modelo, Kothare *et al.* (1996) projetaram, a cada instante de tempo, uma lei de controle em realimentação que minimiza o “pior caso” de uma função objetivo de horizonte infinito, sujeita às restrições de entrada e saída. O problema foi transformado em uma minimização do limite superior na função objetivo do pior caso em uma otimização convexa envolvendo LMI resultando em um algoritmo MPC robustamente estável. Por um lado, a formulação usando predição em malha fechada reduz o conservadorismo. Por outro lado, a exigência de incerteza variante no tempo pode ser conservadora para algumas aplicações. Essa formulação será descrita na seção 2.4.1.

Outra aproximação para a questão da estabilidade robusta é um problema aumentado com restrição adicional no algoritmo MPC nominalmente estável de forma a garantir a estabilidade robusta. Essa formulação possui duas vantagens sobre a idéia mín-máx. Primeiramente, o desempenho pode ser melhorado quando o modelo nominal se torna tão próximo da planta atual, resultando num problema de otimização que pode ser significativamente menos complexo, e a outra vantagem é a potencial estabilização de sistemas instáveis em malha aberta.

O problema do desempenho robusto raramente é considerado analiticamente, mas é avaliado tipicamente por simulações numéricas. Se vários controladores forem investigados, haverá uma grande exigência computacional. Richards e How (2004) oferecem uma contribuição para a questão pela formulação de um método analítico para predição de desempenho de um sistema controlado por MPC usando a forma de MPC robusto, habilitando

uma rápida investigação dos efeitos nos parâmetros do controlador sem o uso intensivo da simulação.

A estabilidade robusta garantida reduziria significativamente o ajuste e teste de algoritmos de MPC. Muitos dos algoritmos industriais disponíveis atualmente sofrem das limitações inerentes desde a origem dessa tecnologia com DMC e IDCOM. Esses problemas incluem: escolha de modelos limitados, realimentação sub-ótima, perda de estabilidade nominal e solução sub-ótima ou ineficiente da otimização dinâmica (QIN; BADGWELL, 2003).

2.3.1 Formulação Clássica de MPC Robusto – O problema Mín-Máx

Considerando que em capítulos posteriores deste trabalho será feito o uso de formulação clássica de MPC robusto, sua descrição será feita nesta seção. O Algoritmo adotado é descrito em Lee e Cooley (2000) e, por simplicidade, será apresentado e trabalhado apenas usando a versão para sistemas estáveis. Este algoritmo foi escolhido por ser representativo do controle robusto na forma mín-máx.

O MPC mín-máx é definido de forma que o movimento de controle implementado $\mathbf{u}_k$, no instante k de amostragem, é dado pelo primeiro elemento $\mathbf{u}_{k|k}$ de $\mathbf{E}: \{\mathbf{u}_{k|k}, \mathbf{u}_{k+1|k}, \dots, \mathbf{u}_{k+N_m-1|k}\}$, que é a solução do problema de otimização dado pelas Eq. 2.62-2.66. O horizonte de controle neste caso é igual ao horizonte de predição. Essa formulação é definida como RMPC-MMTV (*Robust Model Predictive Control with Min-Max Optimization and Time Variante Uncertainty*).

$$\min_{\mathbf{u}_k, \dots, \mathbf{u}_{k+N_m-1}} \max_{\boldsymbol{\theta}_k, \dots, \boldsymbol{\theta}_{k+N_m-1}} \left[J(k) = \sum_{i=1}^{\Delta} \mathbf{x}_{k+i}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}_{k+i} + \sum_{j=0}^{N_m-1} \mathbf{u}_{k+j}^T \mathbf{R} \mathbf{u}_{k+j} \right] \quad (2.62)$$

Sujeito a:

$$\mathbf{x}_{k+i} = \mathbf{A}^i \mathbf{z}_k + \sum_{j=1}^i \mathbf{A}^{i-j} \mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}_{k+j-1}) \mathbf{u}_{k+j-1}, i = 1, \dots, \infty \quad (2.63)$$

$$\mathbf{u}_{k+i} \in \mathbf{U}, i = 0, \dots, N_m-1 \quad (2.64)$$

$$\mathbf{u}_{k+N_m+i} = 0, i \geq 0 \quad (2.65)$$

$$\boldsymbol{\theta}_{k+i} \in \boldsymbol{\Theta}, i = 0, \dots, N_m-1 \quad (2.66)$$

A definição dos termos necessários para a completa formulação do problema encontram-se a seguir:

$$\mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{A} \mathbf{z}_k + \mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}_k) \mathbf{u}_k \quad (2.67)$$

Definição: Diz-se que uma função $\mathbf{A}: \mathfrak{R}^m \rightarrow \mathfrak{R}^n$ é *affine* se existe uma função linear $\mathbf{L}: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^m$ e um vetor $\mathbf{b}$ em $\mathfrak{R}^n$ tal que $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{L}(\mathbf{x}) + \mathbf{b} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathfrak{R}^m$.

$\mathbf{B}$ são funções *affine* de $\boldsymbol{\theta}$, e $\boldsymbol{\theta}$ é um vetor desconhecido que pertence ao subespaço compacto $\boldsymbol{\Theta}$. As entradas são restritas e pertencentes ao espaço compacto e convexo $\mathbf{U}$, que incluem a origem como ponto interior. Usando uma aproximação similar como a utilizada no problema IHMPC, descrito na seção 2.1.1, é possível escrever na forma apresentada nas Eq. 2.68-2.81. Resultados dessa técnica podem ser vistos em Silva *et al.* (2006) e Silva *et al.* (2004).

$$\min_{\Xi \in \Xi^m} \max_{\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}^m} \left[J_k(\boldsymbol{\Xi}_k, \boldsymbol{\theta}_k) = \mathbf{X}_{k+1}^T \boldsymbol{\mu} \mathbf{X}_{k+1} + \boldsymbol{\Xi}_k^T \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{\Xi}_k \right] \quad (2.68)$$

Sujeito a:

$$\mathbf{X}_{k+1} = \overline{\mathbf{A}}\mathbf{z}_k + \overline{\mathbf{B}}(\boldsymbol{\theta}_k)\boldsymbol{\Xi}_k \quad (2.69)$$

Em que:

$$\mathbf{X}_{k+1} = [\mathbf{x}_{k+1} \quad \cdots \quad \mathbf{x}_{k+N_m}]^T \quad (2.70)$$

$$\boldsymbol{\Xi}_{k+1} = [\mathbf{u}_k \quad \cdots \quad \mathbf{u}_{k+N_m-1}]^T \quad (2.71)$$

$$\boldsymbol{\Theta}_{k+1} = [\boldsymbol{\theta}_k \quad \cdots \quad \boldsymbol{\theta}_{k+N_m-1}]^T \quad (2.72)$$

$$\boldsymbol{\theta}_k = [\delta_1 \quad \cdots \quad \delta_{\dim(\mathbf{u})}]^T \quad (2.73)$$

$$\overline{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{A}^{N_m} \end{bmatrix} \quad (2.74)$$

$$\boldsymbol{\mu} = \text{diag} \left[\underbrace{\mathbf{Q} \dots \mathbf{Q}}_{N_m-1} \quad \overline{\mathbf{Q}} \right] \quad (2.75)$$

$$\overline{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q} + \mathbf{A}^T \overline{\mathbf{Q}} \mathbf{A} \quad (2.76)$$

$$\boldsymbol{\Lambda} = \text{diag} \left[\underbrace{\mathbf{R} \dots \mathbf{R}}_{N_m} \right] \quad (2.77)$$

$$\mathbf{U}^{N_m} = \underbrace{\mathbf{u} \dots \mathbf{u}}_{N_m} \quad (2.78)$$

$$\mathbf{X}^{N_m} = \underbrace{\mathbf{x} \dots \mathbf{x}}_{N_m} \quad (2.79)$$

$$\overline{\mathbf{B}}(\boldsymbol{\theta}_k) = \begin{bmatrix} \mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}_k) & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}\mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}_k) & \mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}_{k+1}) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}^{N_m-1}\mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}_k) & \mathbf{A}^{N_m-1}\mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}_{k+1}) & \cdots & \mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}_{k+N_m}) \end{bmatrix} \quad (2.80)$$

$$\mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}_k) = \mathbf{B} \begin{bmatrix} 1+\delta^1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1+\delta^2 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1+\delta^{\dim(\mathbf{u})} \end{bmatrix} \quad (2.81)$$

Para se ter o algoritmo de controle robustamente estável é necessário formular o projeto do controlador usando a descrição de incerteza variante no tempo. Os maiores problemas para essa abordagem residem nos seguintes fatos (LEE e COOLEY, 2000): **(a)** o grande esforço computacional; **(b)** a natureza não convexa do problema de otimização.

A fim de minimizar essas dificuldades, estes autores propuseram uma formulação convexa usando a estrutura mín-máx com incerteza constante no tempo – RMPC-MM (*Robust Model Predictive Control with Min-Max Optimization and Time Invariant Uncertainty*). Basicamente, a diferença deste algoritmo para a forma RMPC-MMTV é que a Eq. 2.80 é reescrita na forma da Eq. 2.82 – a incerteza, nesse caso, é constante durante o horizonte de predição. Entretanto, o controlador obtido ainda demanda um grande esforço computacional e a formulação de incerteza invariante no tempo não é robustamente estável.

$$\bar{\mathbf{B}}(\boldsymbol{\Theta}_k) = \begin{bmatrix} \mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}_k) & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{AB}(\boldsymbol{\theta}_k) & \mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}_k) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}^{N_m-1}\mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}_k) & \mathbf{A}^{N_m-1}\mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}_k) & \cdots & \mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}_k) \end{bmatrix} \quad (2.82)$$

Alamo *et al.* (2008) apresentam um algoritmo de RMPC em formulação mín-máx baseado no problema de rede. A implementação computacional cresce de forma polinomial como o horizonte de predição, de forma análoga ao que ocorre no processamento dos problemas em LMI. O problema de otimização mín-máx é transformado em um único problema QP. A estabilidade do sistema com esse controlador se mantém preservada. Alamo *et al.* (2008) mostram também o desenvolvimento de RMPC associado à transformação do problema mín-máx em um problema de otimização quadrático e tratável do ponto de vista matemático-computacional. O controlador também mostra a manutenção de características de estabilidade e de desempenho.

2.4 Desigualdades Matriciais Lineares e o Controle Robusto

A idéia básica das inequações matriciais lineares (LMI – *Linear Matrix Inequalities*) em controle é interpretar um dado problema de controle como um problema de programação semidefinida (SDP), ou seja, um problema de otimização com objetivo linear e restrições positivas semidefinidas envolvendo matrizes simétricas que são *affine* nas variáveis de decisão (para maiores detalhes ver Ghaoui e Niculescu (2000)). As técnicas de LMI surgiram como uma ferramenta de análise em várias áreas da engenharia de controle, identificação de sistemas e projeto estrutural (GAHINET *et al.*, 1995).

O início da aplicação de LMI na análise de sistemas dinâmicos aconteceu há mais de cem anos atrás, quando Lyapunov publicou seu trabalho que passou a ser conhecido, desde então, como a Teoria de Lyapunov (BOYD *et al.*, 1994). O referido autor mostrou que a equação diferencial apresentada na Eq. 2.83 é estável, isto é, todas as trajetórias convergem para zero se, e apenas se, existir uma matriz positiva definida $\mathbf{P}$ tal como a Eq. 2.84. As exigências $\mathbf{P} > \mathbf{0}$ e Eq. 2.85 são chamadas de desigualdades de Lyapunov em $\mathbf{P}$, sendo esta uma forma especial de uma LMI. Lyapunov mostrou que a LMI dada pela Eq. 2.84 pode ser resolvida explicitamente, escolhendo-se qualquer matriz $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T > \mathbf{0}$ e se resolvendo o sistema de equações lineares na forma da Eq. 2.84 para $\mathbf{P}$, que é garantida ser positiva definida se o sistema da Eq.2.85 for estável.

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \quad (2.83)$$

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} < \mathbf{0} \quad (2.84)$$

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} = -\mathbf{Q} \quad (2.85)$$

Em 1984 N. Karmarkar introduziu um novo algoritmo de programação linear que resolve programas lineares em tempo polinomial, como o método elipsoidal, porém de forma muito mais eficiente na prática. Em 1988 Nesterov e Nemirovskii desenvolveram o método dos pontos interiores aplicado diretamente a problemas convexos envolvendo LMI.

Uma desigualdade de matriz linear tem a forma da Eq. 2.86:

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}) = \mathbf{L}_0 + \sum_{i=1}^M \mathbf{x}_i \mathbf{L}_i > 0 \quad (2.86)$$

$\mathbf{x}$ é a variável e $\mathbf{L}_i = \mathbf{L}_i^T$ pertencente ao conjunto de números reais de ordem apropriada, $i=0,...,M$ são dadas. A desigualdade significa que $\mathbf{L}(\mathbf{x})$ é positiva definida, isto é, $\mathbf{u}^T \mathbf{L}(\mathbf{x}) \mathbf{u} > 0$ para todo $\mathbf{u}$ pertence ao conjunto de números reais de ordem apropriada diferente de zero. Pode-se observar que a desigualdade é equivalente a um conjunto M de desigualdades polinomiais em $\mathbf{x}$. As LMI também podem ter a forma não estrita, como apresentada na Eq. 2.87.

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}) \geq 0 \quad (2.87)$$

As LMI estritas e não estritas são proximamente relacionadas, porém algumas considerações são necessárias. A LMI da Eq. 2.87 é uma restrição convexa em $\mathbf{x}$, isto é, o conjunto $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{L}(\mathbf{x}) > \mathbf{0}\}$ é convexo. Essa forma representa uma larga variedade de restrições convexas em $\mathbf{x}$. Múltiplas LMI, $\mathbf{L}^{(1)}(\mathbf{x}) > \mathbf{0}, \dots, \mathbf{L}^{(M)}(\mathbf{x}) > \mathbf{0}$, podem ser expressas como uma única e simples LMI na forma de $\text{diag}(\mathbf{L}^{(1)}(\mathbf{x}) > \mathbf{0}, \dots, \mathbf{L}^{(M)}(\mathbf{x})) > \mathbf{0}$. Quando as matrizes $\mathbf{L}_i(\mathbf{x})$ são diagonais, a LMI $\mathbf{L}(\mathbf{x}) > \mathbf{0}$ é apenas um conjunto de inequações lineares. Inequações não lineares são convertidas na forma de LMI usando o complemento Schur, conforme será

descrito a seguir: a idéia básica é mostrada nas Eq. 2.88-2.89, com: $\mathbf{Q}(\mathbf{x}) = \mathbf{Q}(\mathbf{x})^T$, $\mathbf{R}(\mathbf{x}) = \mathbf{R}(\mathbf{x})^T$ e $\mathbf{S}(\mathbf{x})$, funções lineares em $\mathbf{x}$. A forma matricial equivalente é mostrada na Eq. 2.90. Resolver um problema em LMI significa determinar se o problema é viável ou não, e, sendo viável, calcular o ponto de viabilidade com um valor objetivo mínimo global dentro de uma exatidão pré-especificada.

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(\mathbf{x}) &> \mathbf{0} \\ \mathbf{Q}(\mathbf{x}) - \mathbf{S}(\mathbf{x})\mathbf{R}(\mathbf{x})^{-1}\mathbf{S}(\mathbf{x})^T &> \mathbf{0} \end{aligned} \tag{2.88}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(\mathbf{x}) &> \mathbf{0} \\ \mathbf{R}(\mathbf{x}) - \mathbf{S}(\mathbf{x})^T \mathbf{Q}(\mathbf{x})^{-1} \mathbf{S}(\mathbf{x}) &> \mathbf{0} \end{aligned} \tag{2.89}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}(\mathbf{x}) & \mathbf{S}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{S}(\mathbf{x})^T & \mathbf{R}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} > \mathbf{0} \tag{2.90}$$

Os problemas padrões apresentados a seguir são tratáveis tanto do ponto de vista teórico, quanto pelo lado prático. Eles podem ser resolvidos em tempo polinomial, o que significa que eles possuem baixa complexidade computacional. Eles também podem ser resolvidos na prática de forma bastante eficiente e atingem o ótimo global com critérios de parada não heurísticos. É possível provar que o ótimo global pode ser obtido dentro de uma precisão pré-especificada.

2.4.1 Formulação Clássica - LMI-RMPC

A técnica de controle MPC tem recebido muita atenção devido às suas muitas vantagens. MPC pode facilmente lidar com sistemas com restrição e variantes no tempo com bom desempenho. Entretanto, uma das dificuldades da técnica é a incorporação de modelos de incerteza da planta. De forma a resolver a questão, Kothare *et al.* (1996) apresentaram uma nova abordagem de MPC robusto que permite incorporar explicitamente a descrição das incertezas da planta na formulação do problema na forma de LMI (LEE e PARK, 2008). O objetivo de tal formulação é projetar, em cada ciclo, a lei de controle em realimentação de estado que minimize o pior caso na função objetivo, considerando o sistema linear variante no tempo na forma da Eq. 2.91. A Equação 2.92 mostra a função objetivo considerando-se o horizonte infinito. O problema de otimização é apresentado na Eq. 2.93. Definindo uma função quadrática na forma $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}$ com $\mathbf{P} > \mathbf{0}$, tal que $V(\mathbf{x})$ é um limite superior em $J(k)$, como mostra a Eq. 2.94, o problema é resolvido encontrando uma lei de controle linear de realimentação de estado dada pela Eq. 2.95, tal que $V(\mathbf{x}_{k|k})$ é minimizado. Supondo que não exista restrição de estado e de entrada, e que o modelo de incertezas seja definido pelo conjunto convexo (co) definido pelos vértices $[\mathbf{A}_i, \mathbf{B}_i]$, mostrados na Eq. 2.96, qualquer planta $[\mathbf{A}, \mathbf{B}] \in \Pi$ pode ser expressa como na forma da Eq. 2.97. Nessas condições, o MPC robusto pode ser transformado no problema LMI das Eq. 2.98-2.100. Alguns resultados da aplicação dessa técnica podem ser encontrados em Silva *et al.* (2004), Silva *et al.* (2005), Silva *et al.* (2007) e Hu e Yuan (2008).

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{A}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k \\
\mathbf{y}_k &= \mathbf{C} \mathbf{x}_k \\
[\mathbf{A}_k \quad \mathbf{B}_k] &\in \Pi
\end{aligned} \tag{2.91}$$

$$J_\infty(k) = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\mathbf{x}_{k+i|k}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}_{k+i|k} + \mathbf{u}_{k+i}^T \mathbf{R} \mathbf{u}_{k+i} \right) \tag{2.92}$$

$$\min_{\mathbf{u}_{k+i|k}, i \geq 0} \max_{[\mathbf{A}_{k+i} \quad \mathbf{B}_{k+i}] \in \Pi, i \geq 0} J(k) \tag{2.93}$$

$$\max_{[\mathbf{A}_{k+i} \quad \mathbf{B}_{k+i}] \in \Pi, i \geq 0} J(k) < V(\mathbf{x}_{k|k}) \tag{2.94}$$

Com os termos definidos como a seguir:

$$\mathbf{u}_{k+i|k} = \mathbf{K} \mathbf{x}_{k+i|k} \tag{2.95}$$

$$\Pi = \text{co}\{[\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1], [\mathbf{A}_2, \mathbf{B}_2], \dots, [\mathbf{A}_M, \mathbf{B}_M]\} \tag{2.96}$$

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \sum_{i=1}^M \alpha_i [\mathbf{A}_i, \mathbf{B}_i] \text{ com } \alpha_i \geq 0 \text{ e } \sum_{i=1}^M \alpha_i = 1 \tag{2.97}$$

O problema de controle robusto formulado em LMI é expresso a seguir:

$$\min_{\tau, \mathbf{W}, \mathbf{T}} \tau \tag{2.98}$$

Sujeito a:

$$\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{z}_{k|k}^T \\ \mathbf{z}_{k|k} & \mathbf{W} \end{bmatrix} \geq 0 \tag{2.99}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W} & \mathbf{W} \mathbf{A}_i^T + \mathbf{T}^T \mathbf{B}_i^T & \mathbf{W} \mathbf{Q}^{1/2} & \mathbf{T}^T \mathbf{R}^{1/2} \\ \mathbf{A}_i \mathbf{W} + \mathbf{B}_i \mathbf{T} & \mathbf{Q} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{Q}^{1/2} \mathbf{W} & \mathbf{0} & \tau \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{R}^{1/2} \mathbf{T} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \tau \mathbf{I} \end{bmatrix} \geq 0, i = 1, \dots, M \tag{2.100}$$

Uma vez que o problema LMI seja resolvido, a lei de entrada pode ser obtida pela Eq. 2.101. Problemas que envolvam restrições de estado, restrições de entrada e outros tipos de incerteza também podem ser formulados e resolvidos como problemas LMI, como mostrou

Kothare *et al.* (1996). Vale ressaltar aqui que para cada ciclo de otimização é obtida uma matriz estacionária de ganho. A prova de estabilidade pode ser derivada dos resultados apresentados por Bernussou *et al.* (1989) *apud* Kothare *et al.* (1996), para estabilização quadrática de incertezas politópicas de sistemas contínuos e suas extensões para o caso discreto.

$$\mathbf{K} = \mathbf{W}\mathbf{T}^{-1} \quad (2.101)$$

A utilização de algoritmos de controle com aplicação de LMI tem se popularizado bastante. Kanev e Verhaegen (2006) mostram um controlador robustamente estável baseado em MPC de horizonte finito usando LMI para sistemas cuja incerteza não é restrita a alguma classe de representação de incerteza. Feng, Wang e Poh (2007) desenvolveram um controlador utilizando LMI aplicado a sistemas com incerteza formuladas na forma de LFT (*Linear Fractional Transformation*). Esse controlador parte das idéias apresentadas por Kothare em 1996, direcionando para sistemas com incerteza estruturada variante no tempo. Foram introduzidos no algoritmo variáveis de folga e parâmetros dependentes de funções de Lyapunov. Essa formulação é capaz de estabilizar sistemas para uma região de condições iniciais maiores e sob fortes restrições nas entradas. Entretanto, a formulação, considerando as variáveis de folga no problema de otimização em tempo real, resulta em um aumento considerável da demanda computacional.

2.5 RMPC com Incerteza na Forma de Perturbação Aditiva

Löfberg (2003) apresentou outra abordagem de MPC robusto utilizando LMI e, nesse caso, utilizando incerteza na forma de perturbação externa (RMPC-AD – *Robust Model Predictive Control with Additive Disturbances*). Para esse caso, o algoritmo utiliza o sistema na forma linear, discreto e invariante no tempo dado pela Eq. 2.102. Os vetores $\mathbf{x}$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{d}$ e $\mathbf{y}$ são o vetor de estados, o vetor de entradas, o vetor de perturbação externa e o vetor de saídas, respectivamente pertencentes ao conjunto de número reais de ordem apropriada. Além da dinâmica, o sistema possui restrições de estado e de entrada na forma das Eq. 2.103-2.104. A incerteza, nesse caso, é considerada na forma de uma perturbação externa limitada.

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k + \mathbf{B}_\theta \mathbf{d}_k \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{C}\mathbf{x}_k\end{aligned}\tag{2.102}$$

$$\mathbf{u} \in \mathbf{U}, \mathbf{U} = \{\mathbf{u}: \mathbf{E}_u \mathbf{u} \leq \mathbf{f}_u\}, \text{ com } \theta \in \Theta\tag{2.103}$$

$$\mathbf{x} \in \mathbf{X}, \mathbf{X} = \{\mathbf{x}: \mathbf{E}_x \mathbf{x} \leq \mathbf{f}_x\}, \text{ com } \theta \in \Theta\tag{2.104}$$

O índice de desempenho de horizonte infinito é aproximado pelo índice de desempenho finito da Eq. 2.105, considerando-se um horizonte de controle N_m , e conforme efetuado anteriormente para os controladores da classe de horizonte infinito. O horizonte de predição é igual ao horizonte de controle. As matrizes $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T > \mathbf{0}$ e $\mathbf{R} = \mathbf{R}^T > \mathbf{0}$ são matrizes de ponderação positivas definidas. A fim de se colocar o problema de otimização na forma adequada para programação quadrática, são definidos os vetores de saídas futuras, entradas futuras e estados futuros nas Eq. 2.106-2.109. Os estados preditos e as saídas podem ser

escritos convenientemente na forma da Eq. 2.110. As definições necessárias se encontram nas Eq. 2.111-2.114.

$$\min_{\mathbf{u}} \max_{\mathbf{d}} = \sum_{i=0}^{N_m-1} (\mathbf{y}_{k+i|k}^T \mathbf{Q} \mathbf{y}_{k+i|k} + \mathbf{u}_{k+i|k}^T \mathbf{R} \mathbf{u}_{k+i|k}) \quad (2.105)$$

$$\mathbf{Y}_{lmi} = (\mathbf{y}_{k|k}^T \quad \mathbf{y}_{k+l|k}^T \quad \dots \quad \mathbf{y}_{k+N_m-l|k}^T)^T \quad (2.106)$$

$$\mathbf{X}_{lmi} = (\mathbf{x}_{k|k}^T \quad \mathbf{x}_{k+l|k}^T \quad \dots \quad \mathbf{x}_{k+N_m-l|k}^T)^T \quad (2.107)$$

$$\mathbf{U}_{lmi} = (\mathbf{u}_{k|k}^T \quad \mathbf{u}_{k+l|k}^T \quad \dots \quad \mathbf{u}_{k+N_m-l|k}^T)^T \quad (2.108)$$

$$\mathbf{D}_{lmi} = (\mathbf{d}_{k|k}^T \quad \mathbf{d}_{k+l|k}^T \quad \dots \quad \mathbf{d}_{k+N_m-l|k}^T)^T \quad (2.109)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_{lmi} &= \mathbf{C}_{lmi} \mathbf{X}_{lmi} \\ \mathbf{X}_{lmi} &= \mathbf{A}_{lmi} \mathbf{x}_{k|k} + \mathbf{B}_{lmi} \mathbf{U}_{lmi} + \mathbf{B}_{\theta_{lmi}} \mathbf{D}_{lmi} \end{aligned} \quad (2.110)$$

$$\mathbf{A}_{lmi} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{A}^{N_m-1} \end{pmatrix} \quad (2.111)$$

$$\mathbf{B}_{lmi} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{AB} & \mathbf{B} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}^{N_m-2} \mathbf{B} & \dots & \mathbf{AB} & \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.112)$$

$$\mathbf{B}_{\theta_{lmi}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_{\theta} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{AB}_{\theta} & \mathbf{B}_{\theta} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}^{N_m-2} \mathbf{B}_{\theta} & \dots & \mathbf{AB}_{\theta} & \mathbf{B}_{\theta} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.113)$$

$$\mathbf{C}_{\text{lmi}} = \begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{pmatrix} \quad (2.114)$$

As matrizes $\mathbf{Q}_{\text{lmi}}$ e $\mathbf{R}_{\text{lmi}}$ são mostradas nas Eq. 2.115-2.116 e possuem ordem apropriada no conjunto dos números reais. Como as restrições são escritas na forma de desigualdades lineares, elas podem ser reescritas na forma das Eq. 2.117-2.118.

$$\mathbf{R}_{\text{lmi}} = \begin{pmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{R} \end{pmatrix} \quad (2.115)$$

$$\mathbf{Q}_{\text{lmi}} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Q} \end{pmatrix} \quad (2.116)$$

$$\mathbf{E}_{\mathbf{u}_{\text{lmi}}} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_{\mathbf{u}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{E}_{\mathbf{u}} \end{pmatrix}, \mathbf{F}_{\mathbf{u}_{\text{lmi}}} = (\mathbf{f}_{\mathbf{u}}^T \quad \mathbf{f}_{\mathbf{u}}^T \quad \dots \quad \mathbf{f}_{\mathbf{u}}^T)^T \quad (2.117)$$

$$\mathbf{E}_{\mathbf{x}_{\text{lmi}}} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_{\mathbf{x}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{E}_{\mathbf{x}} \end{pmatrix}, \mathbf{F}_{\mathbf{x}_{\text{lmi}}} = (\mathbf{f}_{\mathbf{x}}^T \quad \mathbf{f}_{\mathbf{x}}^T \quad \dots \quad \mathbf{f}_{\mathbf{x}}^T)^T \quad (2.118)$$

Nesse ponto, o problema de otimização pode ser re-escrito na forma da Eq. 2.119.

Esse problema é então escrito na forma de LMI dado pela Eq. 2.120.

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{U}_{\text{lmi}}} \mathbf{Y}_{\text{lmi}}^T \mathbf{Q}_{\text{lmi}} \mathbf{Y}_{\text{lmi}} + \mathbf{U}_{\text{lmi}}^T \mathbf{R}_{\text{lmi}} \mathbf{U}_{\text{lmi}} \\ & \text{Sujeito a :} \\ & \mathbf{E}_{\mathbf{u}_{\text{lmi}}} \mathbf{U} \leq \mathbf{F}_{\mathbf{u}_{\text{lmi}}} \\ & \mathbf{E}_{\mathbf{x}_{\text{lmi}}} \mathbf{U} \leq \mathbf{F}_{\mathbf{x}_{\text{lmi}}} \end{aligned} \quad (2.119)$$

$$\min_{\Gamma, U_{lmi}} \Gamma$$

Sujeito a :

$$\mathbf{Y}_{lmi}^T \mathbf{Q}_{lmi} \mathbf{Y}_{lmi} + \mathbf{U}_{lmi}^T \mathbf{R}_{lmi} \mathbf{U}_{lmi} \leq \Gamma \quad (2.120)$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}_{u_{lmi}} \\ \mathbf{E}_{x_{lmi}} \mathbf{B}_{lmi} \end{pmatrix} \mathbf{U}_{lmi} \leq \begin{pmatrix} \mathbf{F}_{u_{lmi}} \\ \mathbf{F}_{x_{lmi}} - \mathbf{E}_{x_{lmi}} \mathbf{A}_{lmi} \mathbf{x}_{k|k} \end{pmatrix}$$

Considerando a transformação da perturbação externa na forma de uma incerteza em bloco diagonal Δ , após manipulações algébricas, obtém-se a forma final dessa formulação em LMI dada pela Eq. 2.121. O termo Γ é o escalar a ser minimizado, $\mathbf{U}_{lmi}$ é o vetor de ações de controle, γ é a máxima incerteza e $\mathbf{T}$ é a matriz diagonal de τ_i , parâmetro relacionado com as incertezas. Torna-se importante ressaltar que, para este caso, a restrição de estado é robustamente satisfeita se $\mathbf{E}_x(\mathbf{A}\mathbf{x}_{k|k} + \mathbf{B}\mathbf{U}_{lmi}) + \gamma \leq \mathbf{F}_x$ for satisfeita. A Eq. 2.122 expressa a LMI referente à restrição de estabilidade que, adicionada ao problema, garante a estabilidade robusta. Resultados da aplicação dessa técnica podem ser vistos em Silva *et al.* (2005).

$$\min_{\Gamma, U_{lmi}, T} \Gamma$$

Sujeito a :

$$\begin{pmatrix} \Gamma - \sum_{i=1}^s \tau_i & (\mathbf{C}_{lmi}(\mathbf{A}_{lmi} \mathbf{x}_{k|k} + \mathbf{B}_{lmi} \mathbf{U}_{lmi}))^T & \mathbf{U}_{lmi} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_{lmi}(\mathbf{A}_{lmi} \mathbf{x}_{k|k} + \mathbf{B}_{lmi} \mathbf{U}_{lmi}) & \mathbf{Q}_{lmi}^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{C}_{lmi} \mathbf{B}_{\theta_{lmi}} \\ \mathbf{U}_{lmi} & \mathbf{0} & \mathbf{R}_{lmi}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & (\mathbf{C}_{lmi} \mathbf{B}_{\theta_{lmi}})^T & \mathbf{0} & \mathbf{T} \end{pmatrix} \geq \mathbf{0} \quad (2.121)$$

$$\mathbf{E}_u \mathbf{U}_{lmi} \leq \mathbf{F}_u$$

$$\mathbf{E}_x(\mathbf{A}_{lmi} \mathbf{x}_{k|k} + \mathbf{B}_{lmi} \mathbf{U}_{lmi}) + \gamma \leq \mathbf{F}_x$$

$$\begin{pmatrix} 1 - \tau & (\mathbf{A}\mathbf{z}_{k|k} + \mathbf{B}\mathbf{u}_{k|k})^T & \mathbf{0} \\ (\mathbf{A}\mathbf{z}_{k|k} + \mathbf{B}\mathbf{u}_{k|k}) & \mathbf{P}^{-1} & \mathbf{B}_\theta \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_d & \tau \mathbf{I} \end{pmatrix} \geq \mathbf{0} \quad (2.122)$$

2.6 Considerações Finais

A evolução dos sistemas de controle e de toda a teoria associada sempre esteve vinculada à resolução de problemas práticos e relevantes para a humanidade. A utilização de ferramentas matemáticas levou o controle de sistemas a utilizar-se de toda uma teoria previamente elaborada, inclusive contribuindo para o desenvolvimento de novos métodos e linhas de pesquisa. Se, por um lado, os problemas chegaram então a uma solução calculada, por outro, perdeu-se, em algum ponto dessa evolução, parte da sensibilidade de engenharia.

Com informações cada vez mais disponíveis e, máquinas e equipamentos cada vez mais acessíveis, permitiu-se a propagação das possibilidades de automação.

Diversos ramos das ciências convergem para a multidisciplinaridade e a transdisciplinaridade. Um exemplo é a utilização cada vez maior de teorias ligadas aos sistemas físicos e biológicos juntamente com ferramentas matemáticas e computacionais em aplicações de controle de processos. A visão integral dos sistemas é uma forma de recuperar a sensibilidade sobre os processos. Essa mesma convergência é responsável pelas diversas possibilidades de construção de algoritmos de controle preditivos.

Algumas técnicas de controle ainda são penalizadas por exigirem mão-de-obra especializada, e, dentre elas, encontra-se o controle robusto. No entanto, trata-se de uma linha de pesquisas de grande profundidade que realmente impressiona aqueles que resolvem estudá-la com afinco.

O estudo resultante deste capítulo é muito maior do que se apresenta. Constrói-se todo um universo de idéias que, muito além de descrever sistemas, trouxe entendimento para questões práticas e formação para resolução de problemas industriais.

O objetivo deste capítulo foi apresentar, de forma sucinta, conceitos essenciais ao estudo de controladores preditivos robustos. Ao longo do capítulo foi possível situar o controle preditivo robusto no contexto dos sistemas de controle e dos controladores preditivos. As definições de incerteza e robustez são imprescindíveis para a análise e projeto de controladores robustos. Levando-se em consideração as informações obtidas com a revisão bibliográfica deste capítulo, serão propostos algoritmos de RMPC no Capítulo 3.

CAPÍTULO 3

3 DESENVOLVIMENTOS EM RMPC

3.1 Introdução

As idéias a serem desenvolvidas neste capítulo podem ser resumidas conforme as considerações dispostas a seguir:

- RMPC-MMR (Robust Model Predictive Control with Min-Max optimization, time invariant uncertainty and constrained stability): MPC robusto baseado em otimização mín-máx considerando incerteza na entrada (matriz $\mathbf{B}$) invariante no tempo não é robustamente estável. A modificação, nesse caso, será a adição da restrição de robustez. Esse algoritmo foi baseado nas formulações de MPC robusto baseado em otimização mín-máx – Lee e Cooley (2000) – RMPC-MMTV e RMPC-MM e nas idéias para forçar a robustez segundo Badgwell (1997a);
- LMI-RMPCR (Robust Model Predictive Control with stability constrained type Lyapunov and uncertainty as polytope in LMI form): MPC robusto utilizando LMI baseado na formulação apresentada por Löfberg (2003), que usa incertezas na forma paramétrica. A incerteza adotada foi a forma de multimodelos. Esse algoritmo foi baseado utilizando-se MPC robusto baseado em LMI – Löfberg (2003) – RMPC-AD.

3.1.1 Restrição de Robustez

Existem muitas estratégias para tornar um algoritmo MPC robusto. De forma a pesquisar algoritmos de controle robustamente estável, as idéias apresentadas por Bagdwell (1997a) irão forçar a robustez na forma de uma restrição. Forçar a robustez por uma restrição se assemelha a requerer que a função custo seja menor ou igual à função custo de malha aberta (isto é, o custo obtido implementando a restrição de trajetórias ótimas previamente computadas) para todos os valores de parâmetros. Esse requerimento pode ser expresso pela Eq. 3.1. Ξ_k^* é uma versão deslocada do valor ótimo de Ξ_{k-1} para o problema de otimização mín-máx. A vantagem de tal formulação reside no fato de que a restrição de contração dada pela Eq. 3.1 se baseia diretamente no índice de desempenho e, por conseqüência, é mais intuitivo que a maior parte das restrições de contração. Os resultados de estabilidade robusta para os controladores nos quais a restrição for adicionada são confiados inteiramente às restrições de contração.

$$J_k(\Xi_k, \theta_k) \leq J_k(\Xi_k^*, \theta_k), \forall \theta_k \in \Theta \quad (3.1)$$

O MPC robustamente estável é definido de forma que o movimento de controle $\mathbf{u}_k$, no instante k de amostragem, é dado pelo primeiro elemento $\mathbf{u}_{k|k}$ de $\Xi: \{\mathbf{u}_{k|k}, \mathbf{u}_{k+1|k}, \dots, \mathbf{u}_{k+N_m-1|k}\}$, que é a solução do problema de otimização dado pelas Eq. 3.2-3.3.

$$J_k = \min_{\Xi} \max_{\Theta} \sum_{i=0}^{\infty} \Psi(\mathbf{x}_{k+i}, \mathbf{u}_{k+i}, \Delta \mathbf{u}_{k+i}) \quad (3.2)$$

Sujeito a:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{k+i|k} &\in \mathbf{U}, \forall \boldsymbol{\theta}_k \in \Theta \\ \mathbf{x}_{k+i|k} &\in \mathbf{X}, \forall \boldsymbol{\theta}_k \in \Theta \\ J_k(\Xi_k, \boldsymbol{\theta}_k) &\leq J_k(\Xi_k^*, \boldsymbol{\theta}_k), \forall \boldsymbol{\theta}_k \in \Theta \end{aligned} \quad (3.3)$$

Será apresentado aqui apenas um esboço da prova, que pode ser feita de forma semelhante às provas apresentadas por Lee e Cooley (2000).

Prova: Inicialmente é definido o conceito de deslocamento da ação de controle, dado pelo operador de deslocamento ($\boldsymbol{\eta}$) dado pela Eq. 3.4 (BAGDWELL, 1997). Note que a restrição de contração introduzida é viável e a inequação sempre se mantém, $J_k(\Xi_{k+1}^*) \leq J_k(\bar{\Xi}_{k+1}^*) = J_k(\Xi_k^*) - \Psi(\mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{u}_{k+1}, \boldsymbol{\theta}_{k+1})$. Dadas as considerações necessárias para a função custo, então $J_k(\Xi_k, \boldsymbol{\theta}_k) \geq 0$ é uma sequência convergente e os estados e entradas irão se anular para $k \rightarrow \infty$, o que faz o projeto robustamente estável. #

$$\bar{\Xi}_k^* = \boldsymbol{\eta} \Xi_{k-1}^*, \boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \vdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

3.2 Formulação de MPC Robusto Mín-Máx com Restrição de Robustez Adicionada – RMPC-MMR

Para o estudo de RMPC a escolha do problema de otimização mín-máx com incerteza nas entradas foi feita levando-se em consideração que em sistemas reais este tipo de problema é relativamente comum, devido à facilidade de simulação e pela natureza das manipulações mecânicas dos sistemas.

O MPC mín-máx é definido de forma que o movimento de controle $\mathbf{u}_k$, no instante k de amostragem, é dado pelo primeiro elemento $\mathbf{u}_{k|k}$ de $\Xi: \{\mathbf{u}_{k|k}, \mathbf{u}_{k+1|k}, \dots, \mathbf{u}_{k+N_m-1|k}\}$, que é a solução do problema de otimização dado pelas Eq. 3.5-3.9 (SILVA *et al.*, 2004; SILVA *et al.*, 2005). O horizonte de controle é igual ao horizonte de predição para a formulação descrita. Essa formulação é denominada RMPC-MMR (*Robust Model Predictive Control with min-max optimization, time invariant uncertainty and constrained stability*).

$$\min_{\mathbf{u}_k, \dots, \mathbf{u}_{k+N_m-1}} \max_{\theta_k, \dots, \theta_{k+N_m-1}} \left[J(k) = \sum_{i=1}^{\Delta} \mathbf{x}_{k+i}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}_{k+i} + \sum_{j=0}^{N_m-1} \mathbf{u}_{k+j}^T \mathbf{R} \mathbf{u}_{k+j} \right] \quad (3.5)$$

Sujeito a:

$$\mathbf{x}_{k+i} = \mathbf{A}^i \mathbf{z}_k + \sum_{j=1}^i \mathbf{A}^{i-j} \mathbf{B}(\theta_{k+j-1}) \mathbf{u}_{k+j-1}, i = 1, \dots, \infty \quad (3.6)$$

$$\mathbf{u}_{k+i} \in \mathbf{U}, i = 0, \dots, N_m-1 \quad (3.7)$$

$$\mathbf{u}_{k+N_m+i} = 0, i \geq 0 \quad (3.8)$$

$$\theta_{k+i} \in \Theta, i = 0, \dots, N_m-1 \quad (3.9)$$

Por simples manipulação algébrica, o problema de horizonte de controle infinito é transformado no problema de horizonte de controle finito expresso pelas Eq. 3.10-3.28. É

importante ressaltar que a incerteza neste tipo de algoritmo é um valor a ser obtido pelo programa de otimização. Note que $\mathbf{z}$ é o vetor de estados reais e $\mathbf{x}$ é o vetor de estados estimados.

$$\min_{\Xi \in \Xi^m} \max_{\Theta \in \Theta^m} \left[J_k(\Xi_k, \theta_k) = \mathbf{X}_{k+1}^T \boldsymbol{\mu} \mathbf{X}_{k+1} + \Xi_k^T \boldsymbol{\Lambda} \Xi_k \right] \quad (3.10)$$

Sujeito a:

$$\theta \leq \mathbf{I}|\theta| \quad (3.11)$$

$$J_k(\Xi_k, \theta_k) \leq J_k(\bar{\Xi}_k^*, \theta_k), \forall \theta_k \in \Theta \quad (3.12)$$

$$\mathbf{u}_{k+i} \in \mathbf{U}, i = 0, \dots, N_m - 1 \quad (3.13)$$

$$\mathbf{u}_{k+N_m+i} = 0, \text{ quando } i \geq 0 \quad (3.14)$$

$$\mathbf{X}_{k+1} = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{z}_k + \bar{\mathbf{B}}(\theta_k)\Xi_k \quad (3.15)$$

Com:

$$\bar{\Xi}_k^* = \boldsymbol{\eta} \bar{\Xi}_{k-1}^*, \boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \vdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \dots & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

$$\mathbf{X}_{k+1} = [\mathbf{x}_{k+1} \quad \dots \quad \mathbf{x}_{k+N_m-1}]^T \quad (3.17)$$

$$\Xi_{k+1} = [\mathbf{u}_k \quad \dots \quad \mathbf{u}_{k+N_m-1}]^T \quad (3.18)$$

$$\Theta_{k+1} = [\theta_k \quad \dots \quad \theta_{k+N_m-1}]^T \quad (3.19)$$

$$\theta_k = [\delta_1 \quad \dots \quad \delta_{\dim(\mathbf{u})}]^T \quad (3.20)$$

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{A}^{N_m} \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

$$\bar{\mathbf{B}}(\boldsymbol{\theta}_k) = \begin{bmatrix} \mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}_k) & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{AB}(\boldsymbol{\theta}_k) & \mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}_k) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}^{N_m-1}\mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}_k) & \mathbf{A}^{N_m-2}\mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}_k) & \cdots & \mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}_k) \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

$$\mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}_k) = \mathbf{B} \begin{bmatrix} 1+\delta^1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1+\delta^2 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1+\delta^{\dim(\mathbf{u})} \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

$$\boldsymbol{\mu} = \text{diag} \left[\underbrace{\mathbf{Q} \dots \mathbf{Q}}_{N_m-1} \quad \bar{\mathbf{Q}} \right] \quad (3.24)$$

$$\bar{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q} + \mathbf{A}^T \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{A} \quad (3.25)$$

$$\boldsymbol{\Lambda} = \text{diag} \left[\underbrace{\mathbf{R} \dots \mathbf{R}}_{N_m} \right] \quad (3.26)$$

$$\mathbf{U}^{N_m} = \underbrace{\mathbf{u} \dots \mathbf{u}}_{N_m} \quad (3.27)$$

$$\mathbf{X}^{N_m} = \underbrace{\mathbf{x} \dots \mathbf{x}}_{N_m} \quad (3.28)$$

Teorema 3.1: Quando as ações de controle do problema de otimização mín-máx (3.10), sujeito às restrições (3.11-3.15) e às definições (3.16-3.28), são aplicadas ao sistema de controle na forma $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{Ax}_k + \mathbf{Bu}_k$, o resultado será em laço fechado robustamente estável, em que: $\mathbf{z}_k \rightarrow \mathbf{0}$, $\mathbf{u}_k \rightarrow \mathbf{0}$ quando $k \rightarrow \infty$ para toda a condição inicial $\mathbf{z}_0$ e para todos os possíveis parâmetros da sequência $\{\mathbf{u}_k \in \mathbf{U}, k \geq 0\}$.

Prova: A estabilidade robusta pode ser provada considerando o custo de uma planta real. O valor da máxima incerteza é determinado pelo problema de maximização e encontra-se obviamente limitado a uma faixa. Sendo assim, o problema de minimização encontrará a ação

de controle para o pior caso, na formade: $V_{k+1}(\Xi_{k+1}^*, \Theta) \leq V_{k+1}(\bar{\Xi}_{k+1}^*, \Theta) = V_k(\Xi_k^*, \Theta) - \mathbf{z}_{k+1}^T \mathbf{Q} \mathbf{z}_{k+1} - \mathbf{u}_{k+1}^T \mathbf{R} \mathbf{u}_{k+1}$. Como

$V_k(\Xi_k^*, \Theta) \geq 0$ é uma seqüência convergente e $\mathbf{z}_k \rightarrow \mathbf{0}$, $\mathbf{u}_k \rightarrow \mathbf{0}$

3.3 Formulação de MPC Robusto Baseado em LMI – LMI-RMPCR

Considerando o sistema na forma linear, discreto e invariante no tempo, dado pela Eq. 3.29, os vetores $\mathbf{x}$, $\mathbf{u}$ e $\mathbf{y}$ são o vetor de estados, o vetor de entradas e o vetor de saídas, respectivamente pertencentes ao conjunto de número reais de ordem apropriada. Além da dinâmica, o sistema possui restrições de estado e de entrada na forma das Eq. 3.30-3.31. A incerteza, nesse caso, é considerada na forma politópica, como mostra a Eq. 3.32. O horizonte de controle é igual ao horizonte de predição para a formulação descrita.

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A} \mathbf{x}_k + \mathbf{B} \mathbf{u}_k \quad (3.29)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C} \mathbf{x}_k$$

$$\mathbf{u} \in \mathbf{U}, \mathbf{U} = \{\mathbf{u}: \mathbf{E}_u \mathbf{u} \leq \mathbf{f}_u\}, \text{ com } \theta \in \Theta \quad (3.30)$$

$$\mathbf{x} \in \mathbf{X}, \mathbf{X} = \{\mathbf{x}: \mathbf{E}_x \mathbf{x} \leq \mathbf{f}_x\}, \text{ com } \theta \in \Theta \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned} [\mathbf{A} \quad \mathbf{B}] &\in \Pi \\ \Pi &= \text{co}\{[\mathbf{A}_1 \quad \mathbf{B}_1] \quad \dots \quad [\mathbf{A}_M \quad \mathbf{B}_M]\} \end{aligned} \quad (3.32)$$

O índice de desempenho de horizonte de controle infinito da Eq. 3.33 é aproximado pelo índice de desempenho finito da Eq. 3.34, considerando-se um horizonte de controle N_m . A dedução, neste caso, considera que os horizontes de controle e de predição são

iguais. As matrizes $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T > \mathbf{0}$ e $\mathbf{R} = \mathbf{R}^T > \mathbf{0}$ são matrizes de ponderação positivas definidas.

A fim de se colocar o problema de otimização na forma adequada para programação quadrática, são definidos os vetores de saídas futuras, entradas futuras e estados futuros na Eq.

3.35. Os estados preditos e as saídas podem ser escritos convenientemente na forma da Eq.

3.36-3.38. As definições necessárias se encontram nas Eq. 3.39-3.41.

$$J_k = \sum_{i=0}^{\infty} (\mathbf{y}_{k+i}^T \mathbf{Q} \mathbf{y}_{k+i} + \mathbf{u}_{k+i}^T \mathbf{R} \mathbf{u}_{k+i}) \quad (3.33)$$

$$J_k = \sum_{i=1}^{N_m-1} (\mathbf{y}_{k+i}^T \mathbf{Q} \mathbf{y}_{k+i} + \mathbf{u}_{k+i+1}^T \mathbf{R} \mathbf{u}_{k+i+1}) \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_{lmi} &= \mathbf{C}_{lmi} \mathbf{X}_{lmi} \\ \mathbf{X}_{lmi} &= \mathbf{A}_{lmi} \mathbf{x}_{k|k} + \mathbf{B}_{lmi} \mathbf{U}_{lmi} \end{aligned} \quad (3.35)$$

Com os vetores e matrizes definidos conforme a seguir:

$$\mathbf{Y}_{lmi} = (\mathbf{y}_{k|k}^T \quad \mathbf{y}_{k+l|k}^T \quad \dots \quad \mathbf{y}_{k+N_m-l|k}^T)^T \quad (3.36)$$

$$\mathbf{X}_{lmi} = (\mathbf{x}_{k|k}^T \quad \mathbf{x}_{k+l|k}^T \quad \dots \quad \mathbf{x}_{k+N_m-l|k}^T)^T \quad (3.37)$$

$$\mathbf{U}_{lmi} = (\mathbf{u}_{k|k}^T \quad \mathbf{u}_{k+l|k}^T \quad \dots \quad \mathbf{u}_{k+N_m-l|k}^T)^T \quad (3.38)$$

$$\mathbf{A}_{lmi} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{A}^{N_m-1} \end{pmatrix} \quad (3.39)$$

$$\mathbf{B}_{lmi} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{AB} & \mathbf{B} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}^{N_m-2} \mathbf{B} & \dots & \mathbf{AB} & \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

$$\mathbf{C}_{\text{lmi}} = \begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{pmatrix} \quad (3.41)$$

As matrizes $\mathbf{Q}_{\text{lmi}}$, $\mathbf{R}_{\text{lmi}}$ pertencem ao conjunto de números reais de ordem apropriada e são mostradas nas Eq. 3.42-3.43. Como as restrições são escritas na forma de desigualdades lineares, elas podem ser reescritas na forma das Eq. 3.44-3.45.

$$\mathbf{R}_{\text{lmi}} = \begin{pmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{R} \end{pmatrix} \quad (3.42)$$

$$\mathbf{Q}_{\text{lmi}} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Q} \end{pmatrix} \quad (3.43)$$

$$\mathbf{E}_{\mathbf{u}_{\text{lmi}}} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_{\mathbf{u}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{E}_{\mathbf{u}} \end{pmatrix}, \mathbf{F}_{\mathbf{u}_{\text{lmi}}} = (\mathbf{f}_{\mathbf{u}}^T \quad \mathbf{f}_{\mathbf{u}}^T \quad \dots \quad \mathbf{f}_{\mathbf{u}}^T)^T \quad (3.44)$$

$$\mathbf{E}_{\mathbf{x}_{\text{lmi}}} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_{\mathbf{x}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{E}_{\mathbf{x}} \end{pmatrix}, \mathbf{F}_{\mathbf{x}_{\text{lmi}}} = (\mathbf{f}_{\mathbf{x}}^T \quad \mathbf{f}_{\mathbf{x}}^T \quad \dots \quad \mathbf{f}_{\mathbf{x}}^T)^T \quad (3.45)$$

Nesse ponto, o problema de otimização pode ser re-escrito na forma da Eq. 3.46.

Esse problema é apresentado na forma de LMI dado pela Eq. 3.47.

$$\min_{\mathbf{U}} \mathbf{Y}_{\text{lmi}}^T \mathbf{Q}_{\text{lmi}} \mathbf{Y}_{\text{lmi}} + \mathbf{U}_{\text{lmi}}^T \mathbf{R}_{\text{lmi}} \mathbf{U}_{\text{lmi}}$$

Sujeito a :

$$\mathbf{E}_{\mathbf{u}_{\text{lmi}}} \mathbf{U}_{\text{lmi}} \leq \mathbf{F}_{\mathbf{u}_{\text{lmi}}} \quad (3.46)$$

$$\mathbf{E}_{\mathbf{x}_{\text{lmi}}} \mathbf{U}_{\text{lmi}} \leq \mathbf{F}_{\mathbf{x}_{\text{lmi}}}$$

$$\min_{\chi, U_{lmi}} \chi$$

Sujeito a :

$$\mathbf{Y}_{lmi}^T \mathbf{Q}_{lmi} \mathbf{Y}_{lmi} + \mathbf{U}_{lmi}^T \mathbf{R}_{lmi} \mathbf{U}_{lmi} \leq \chi \quad (3.47)$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}_{u_{lmi}} \\ \mathbf{E}_{x_{lmi}} \mathbf{B}_{lmi} \end{pmatrix} \mathbf{U} \leq \begin{pmatrix} \mathbf{F}_{u_{lmi}} \\ \mathbf{F}_{x_{lmi}} - \mathbf{E}_{x_{lmi}} \mathbf{A}_{lmi} \mathbf{x}_{k|k} \end{pmatrix}$$

As Equações 3.48-3.50 expressam a LMI para o problema com restrição resultante que garantem a estabilidade robusta.

$$\min_{\chi, U_{lmi}} \chi \quad (3.48)$$

Sujeito a :

$$\begin{pmatrix} \chi & (\mathbf{C}_{lmi} (\mathbf{A}_{i,lmi} \mathbf{x}_{k|k} + \mathbf{B}_{i,lmi} \mathbf{U}_{lmi}))^T & \mathbf{U}_{lmi}^T \\ (\mathbf{C}_{lmi} (\mathbf{A}_{i,lmi} \mathbf{x}_{k|k} + \mathbf{B}_{i,lmi} \mathbf{U}_{lmi})) & \mathbf{Q}_{lmi}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{U}_{lmi} & \mathbf{0} & \mathbf{R}_{lmi}^{-1} \end{pmatrix} \geq 0 \quad (3.49)$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}_{u_{lmi}} \\ \mathbf{E}_{x_{lmi}} \mathbf{B}_{i,lmi} \end{pmatrix} \mathbf{U}_{lmi} \leq \begin{pmatrix} \mathbf{F}_{u_{lmi}} \\ \mathbf{F}_{x_{lmi}} - \mathbf{E}_{x_{lmi}} \mathbf{A}_{i,lmi} \mathbf{x}_{k|k} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & (\mathbf{A}_i \mathbf{z}_{k|k} + \mathbf{B}_i \mathbf{u}_{k|k})^T \\ (\mathbf{A}_i \mathbf{z}_{k|k} + \mathbf{B}_i \mathbf{u}_{k|k}) & \mathbf{P}^{-1} \end{pmatrix} \geq 0 \quad (3.50)$$

Torna-se importante ressaltar que, para este caso, a restrição de estado é robustamente satisfeita se $\mathbf{E}_x(\mathbf{A}\mathbf{x}_{k|k} + \mathbf{B}\mathbf{U}) \leq \mathbf{F}_x$ for satisfeito. A Eq. 3.50 expressa a LMI referente à restrição de estabilidade que, adicionada ao problema, garante a estabilidade robusta. Resultados da aplicação dessa técnica podem ser vistos em Silva *et al.* (2007). Outro aspecto a ser ressaltado é que a incerteza está contida na forma de um politopo. Quando a função objetivo é convexa e o modelo de incertezas gera um conjunto fechado de predições, o

atendimento dos requisitos dos vértices do politopo assegura que todos os modelos internos da região sejam atendidos, conforme indica o Teorema 3.2 (LÖFBERG, 2003).

Teorema 3.2: Seja C um conjunto fechado e seja $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ uma função complexa. Então, se f atinge o máximo sobre C , ele chega ao máximo em algum ponto extremo de C (Löfberg, 2003).

Teorema 3.3: Quando as ações de controle do problema de otimização (3.48), sujeito às restrições (3.49-3.450) e às definições (3.36-3.45) são aplicadas ao sistema de controle na forma $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k$, resultará em laço fechado robustamente estável.

Prova: por indução, considerando-se que o problema é viável para $\mathbf{x}_{k-1|k-1}$. Como o problema foi viável para $\mathbf{x}_{k-1|k-1}$, conhece-se $\mathbf{x}_{k|k} \in \mathbf{X}$. A viabilidade da solução no instante k é $V = 0$. $\mathbf{x}_{k+j+1|k} = (\mathbf{A} + \mathbf{BK})\mathbf{x}_{k+j|k}$. Para a consideração de que $\mathbf{K}$ e $\mathbf{P}$ estão contidos em $\{\mathbf{x} : \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} \leq 1\} | \mathbf{P} > \mathbf{0}$, garantindo a viabilidade das restrições de estado e de controle. A nova restrição $\mathbf{x}_{k+1} \in \{\mathbf{x} : \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} \leq 1\} | \mathbf{P} > \mathbf{0}$, se mantém para $\mathbf{u}_{k|k} = \mathbf{K}\mathbf{x}_{k|k}$ por construção. Conseqüentemente, o problema é viável no instante k . #

3.4 Considerações Finais

Foram escolhidas formas de incerteza representativas, de fácil implementação para aplicações de controle em tempo real, que buscam reduzir o esforço computacional e que incorporem novas técnicas matemáticas e computacionais. Basicamente, o objetivo deste capítulo foi apresentar algoritmos desenvolvidos e que são robustamente estáveis. Um deles foi obtido pela formulação mín-máx, em que estabilidade robusta foi adicionada através da restrição de robustez. O outro foi obtido utilizando incertezas na forma de LMI aplicado a sistemas com incerteza politópica. Espera-se que a implementação desses controladores possa ajudar a reduzir a distância entre a teoria e a prática, contribuindo ainda para a divulgação e aplicação de controladores RMPC. No Capítulo 4 serão apresentados os resultados de simulação para estas técnicas e no Capítulos 7 os resultados para comparativos em termos de simulação com controladores clássicos implementados experimentalmente na unidade de controle de nível e pH.

CAPÍTULO 4

4 SIMULAÇÃO

4.1 Introdução

De forma a demonstrar a aplicabilidade dos algoritmos de controle propostos no Capítulo 3 serão avaliados, neste capítulo, as respostas e o comportamento dos mesmos aplicados a processos comuns na indústria que, por suas características, exigem de alguma forma a robustez, o desempenho ou a estabilidade do controlador. Serão estudados processos que possuem desvio planta/modelo, discrepância entre tempo morto da planta e do modelo, fase mínima/fase não-mínima, sistema mal condicionado, modelo linear/planta não linear, discrepâncias devido à discretização do sistema e modelo estável/planta instável. Essas respostas serão comparadas aos algoritmos clássicos da literatura apresentados no Capítulo 2: IHMPC (MUSKE; RAWLINGS, 1993), RMPC-MMTV (LEE; COOLEY, 2000) e LMI-RMPC (KOTHARE *et al.*, 1996). Durante a pesquisa foram simulados diversos ajustes e são mostrados a seguir apenas os resultados comparativos e representativos dos estudos, sem que isto implique em indicar a melhor condição. Os ajustes dos controladores, como pode se ver nas seções a seguir, foram bastante similares, senão idênticos, de forma a tornar a comparação mais visível.

4.2 CSTR Isotérmico

Nesse tópico será avaliado o comportamento dos controladores frente a um sistema SISO (*Single Input Single Output*), não linear, com desvio planta/modelo inerentes ao processo de discretização e presença de fase não mínima em determinadas regiões. Considere um reator contínuo de tanque agitado (CSTR) usando a taxa de diluição como variável manipulada. O volume do reator é constante. A dinâmica e o controle desse reator são bastante estudados (HENSON; SEBORG, 1997). O modelo do reator é dado pelo sistema apresentado na Eq. 4.1-4.2, que representa as reações da Eq. 4.3-4.5. Esse sistema é conhecido com reação de Van der Vusse.

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = -k_1 \mathbf{x}_1 - k_3 \mathbf{x}_1^2 + (\mathbf{x}_F - \mathbf{x}_1) \mathbf{u} \quad (4.1)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_2 = k_1 \mathbf{x}_1 - k_2 \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_2 \mathbf{u} \quad (4.2)$$



As variáveis de estado $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$ representam as concentrações das espécies A e B, respectivamente, dadas em mol/L, $\mathbf{x}_F$ expressa a concentração de A na alimentação e $\mathbf{u}$ representa a taxa de diluição (da alimentação dado em h^{-1}). Os parâmetros $\{k_1, k_2, k_3, \mathbf{x}_F\}$ possuem os seguintes valores nominais, respectivamente: $\{50 \text{ h}^{-1}, 100 \text{ h}^{-1}, 10 \text{ L}/(\text{mol.h}), 10 \text{ mol/L}\}$. O objetivo de controle primário é manter a saída $\mathbf{y} = \mathbf{x}_2$ no valor de *setpoint* desejado.

Foi resolvido o estado estacionário do sistema, apresentado na Figura 4.1. É importante ressaltar que este sistema possui multiplicidade de estado estacionário na ação de controle nos valores de $u = 25 \text{ h}^{-1}$ e $u = 233,3 \text{ h}^{-1}$, e que para uma máxima conversão de x_2 , onde u é aproximadamente igual a 82 h^{-1} , a derivada do sinal de controle é nula representando um ponto de difícil aplicação de estratégias de controle. O programa foi feito de forma a admitir simulações de vetores de valores desejados para as saídas e perturbações simultâneas ou não. Os casos simulados foram os mesmos para todos os algoritmos a fim de tornar as respostas comparativas na mesma base.

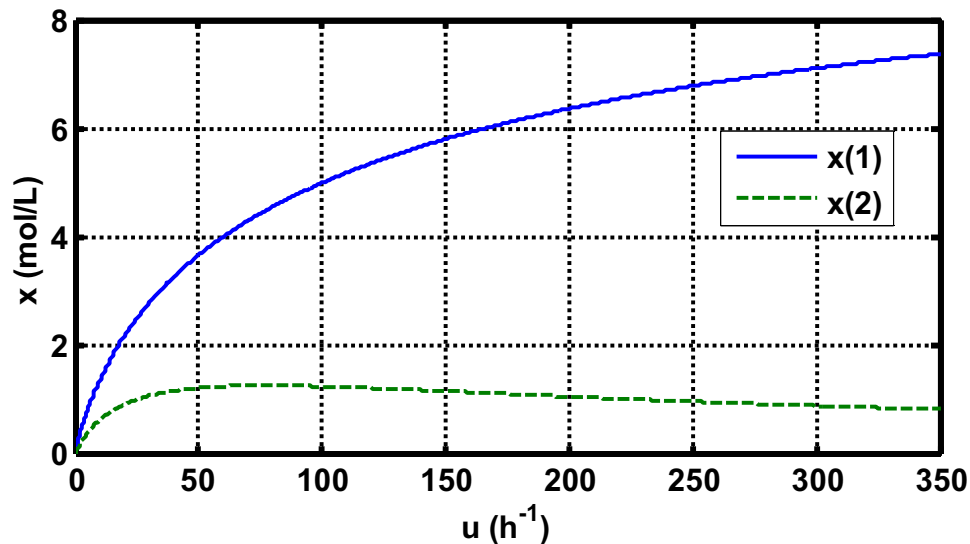


Figura 4.1 - Comportamento do sistema em estado estacionário.

O sistema não linear foi linearizado segundo a expansão em série de Taylor em torno do estado estacionário de $u = 25 \text{ h}^{-1}$, resultando nas matrizes **A** e **B** apresentadas nas Eq. 4.6-4.7. O sistema também foi discretizado com tempo de amostragem de $T_d = 0,0012 \text{ h}$, obtido conforme regra apresentada por Seborg *et al.* (2004) e expressa pela Eq. 4.8, onde T_d é o tempo de amostragem e T_s é o tempo de assentamento do processo. Com este sistema foram calculados os controladores MPC e RMPC nos diversos valores de referência. O sinal de controle calculado pelo modelo linearizado discreto foi aplicado na planta não linear e

contínua sendo retido este valor durante a amostragem. Os estados neste caso foram considerados como medidos, não sendo projetados observadores de estado.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{u} - k_1 - 2k_3 \mathbf{x}_1 & 0 \\ k_1 & -\mathbf{u} - k_2 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

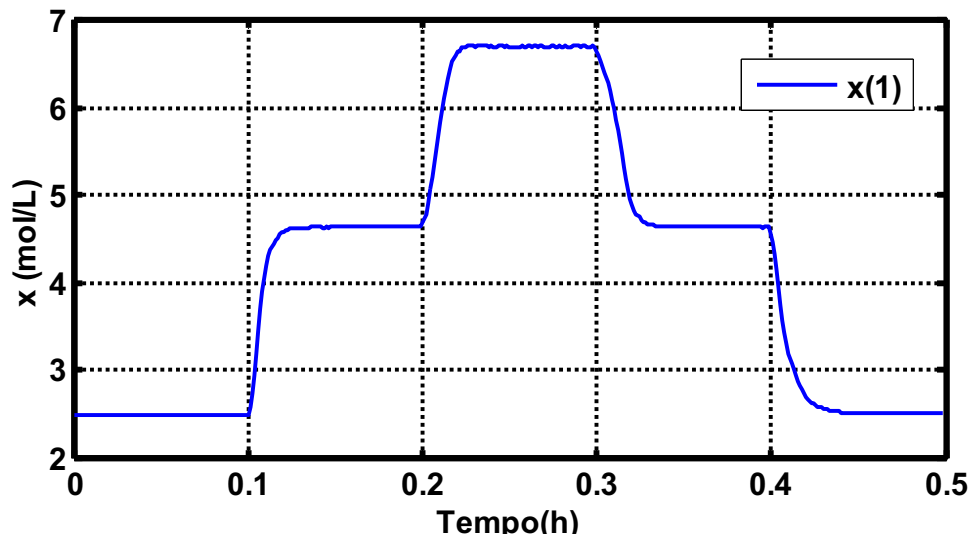
$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_F - \mathbf{x}_1 \\ -\mathbf{x}_2 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

$$\frac{T_s}{15} < T_d < \frac{T_s}{6} \quad (4.8)$$

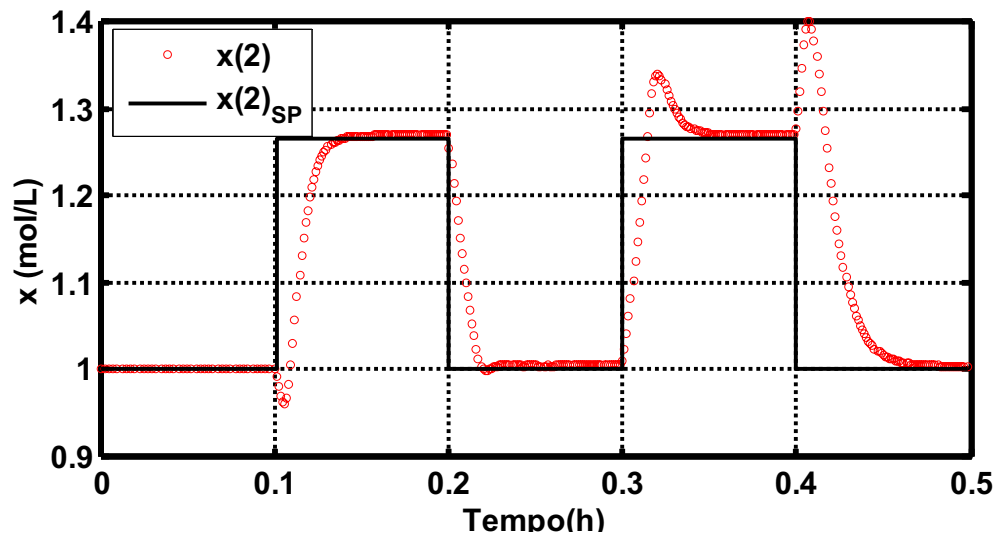
As restrições consideradas para este tópico são as seguintes: limite máximo de $\mathbf{u}$ igual a 325 h^{-1} ; limite mínimo de $\mathbf{u}$ igual a zero; limite para variação de $\mathbf{u}$ igual a 10 h^{-1} ; limite de saída igual a 10 mol/L , e limite mínimo da saída igual a zero. Os parâmetros de ajuste para todos os controladores com restrição são horizonte de controle de 5 passos, e todas as matrizes de peso iguais à matriz identidade de ordem adequada, conforme indica a Tabela 4.1. A incerteza nesse caso é limitada a 10% da entrada e o horizonte de predição é igual ao horizonte de controle. A Figura 4.2 mostra as respostas para o sistema linear com desvio planta/modelo submetido ao controlador IHMPC com restrição aplicada ao sistema não linear com incerteza aleatória (MUSKE e RAWLINGS, 1993a). O mesmo vetor de referência será aplicado a todos os controladores a seguir. Por questão de simplicidade, será mostrado o comportamento da variável $\mathbf{x}_1$ apenas no primeiro controlador mostrado a seguir. Para os demais, será mostrada apenas a saída ($\mathbf{x}_2$) e a variável manipulada ($\mathbf{u}$), variáveis estas que realmente possuem relevância para discussão deste tópico.

TABELA 4.1: AJUSTES PARA CONTROLADORES.

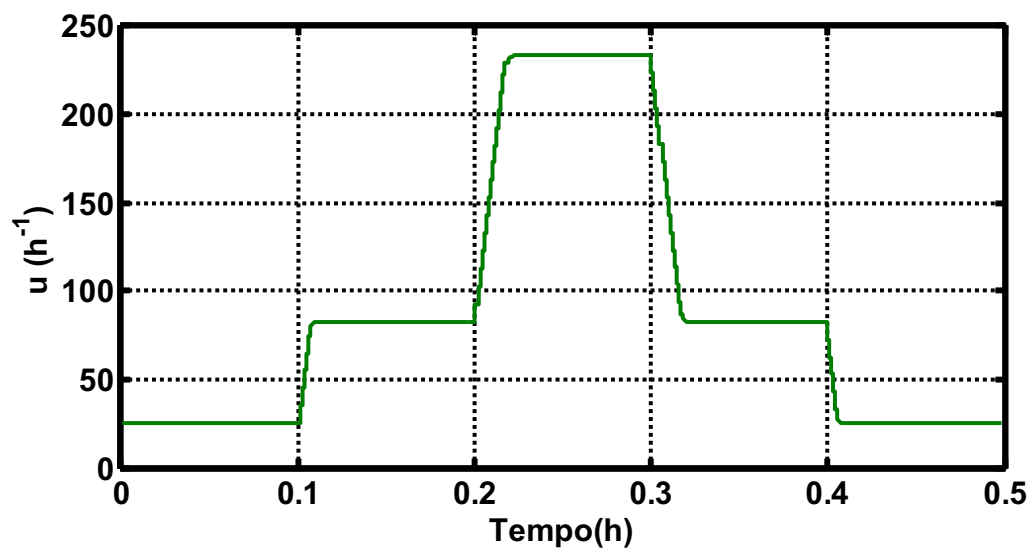
Controlador	Q	R	S	Incerteza
IHMPC	I	I	I	Não se aplica
RMPC-MMTV	I	I	I	0,1I
RMPC-MMR	I	I	I	0,1I
LMI-RMPCR	I	I	I	0,1I



(a)



(b)



(c)

Figura 4.2 - Resposta do sistema submetido ao controle IHMPC com restrição e processo não linear com incerteza aleatória.

A Figura 4.3 mostra as respostas para o sistema com controlador RMPC-MMTV (LEE e COOLEY, 2000) calculado sobre a maximização de uma incerteza de $\pm 10\%$ na entrada com restrição aplicada ao sistema não linear com incerteza aleatória.

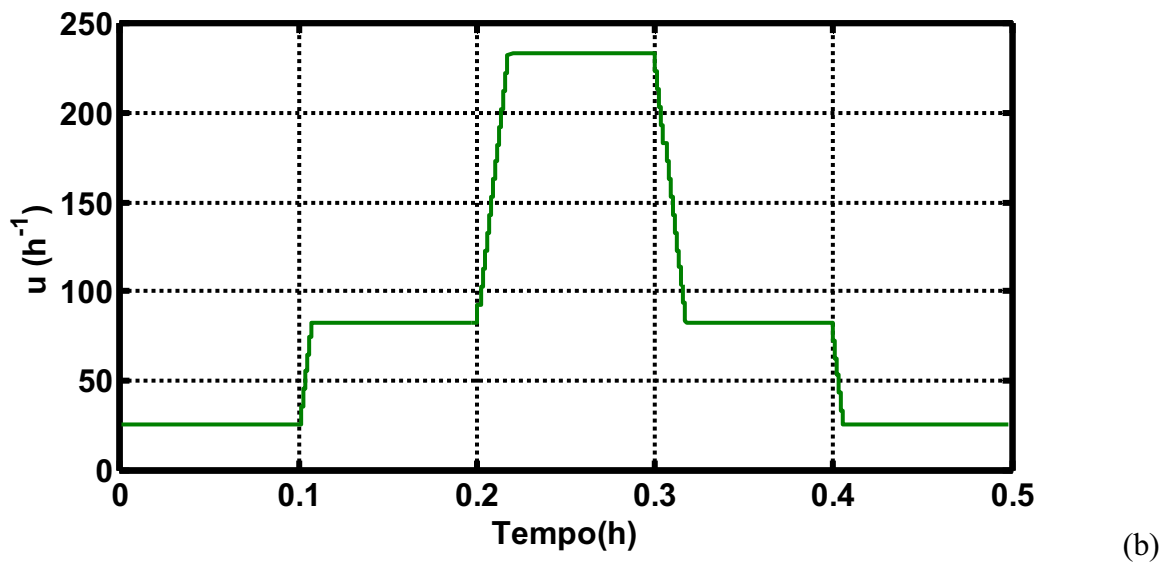
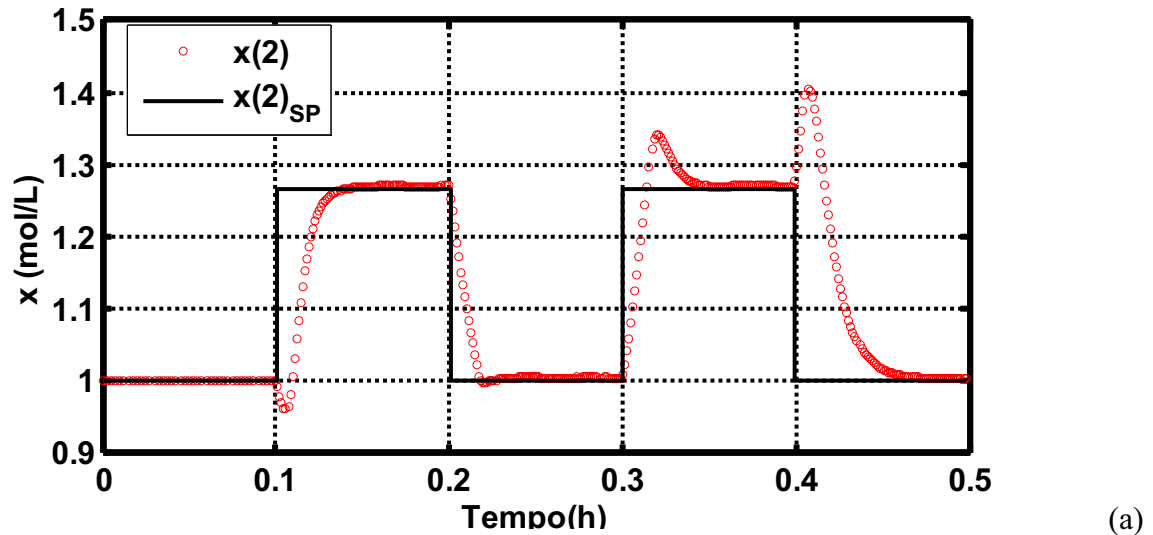


Figura 4.3 - Resposta do sistema submetido ao controle RMPC-MMTV com restrição aplicada ao sistema não linear com incerteza aleatória.

A Figura 4.4 mostra as respostas para o sistema com controlador RMPC-MMR calculado sobre a maximização de uma incerteza de $\pm 10\%$ na entrada com restrição aplicada ao sistema não linear com incerteza aleatória.

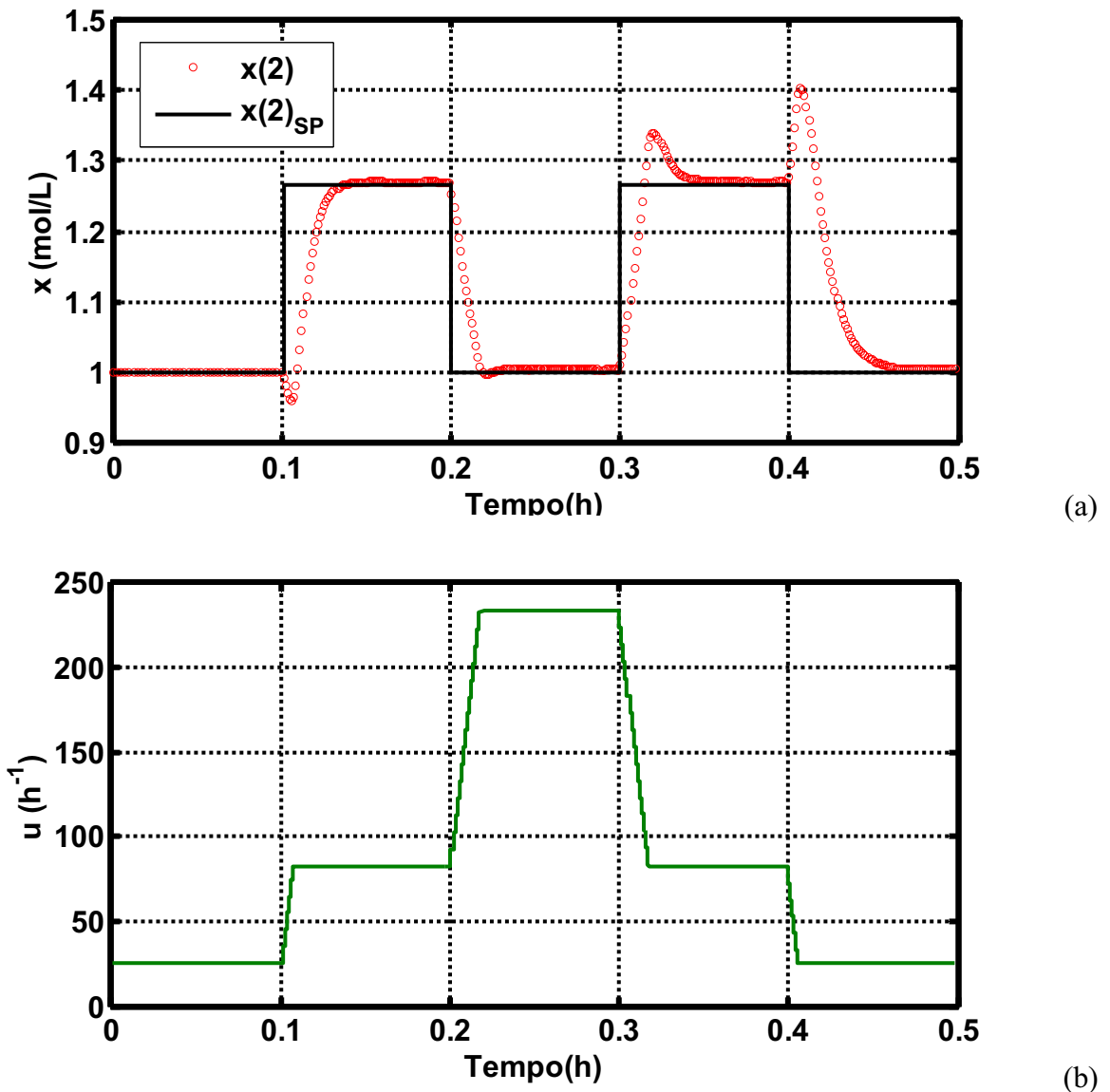


Figura 4.4 - Resposta do sistema submetido ao controle RMPC-MMR.

A Figura 4.5 mostra o comportamento do sistema para o controlador LMI-RMPCR. Neste caso, para a situação de desvio planta/modelo dada por diferenças entre modelo/planta e sistema contínuo/discreto, o sistema responde adequadamente.

As Figuras 4.2-4.5 apresentam dinâmica razoável. Pode-se perceber que o sistema não apresenta simetria quando da alteração do valor de referência, característica esperada considerando-se que neste caso o sistema onde o controlador foi aplicado é não linear e o modelo foi linearizado no ponto inicial sem atualização.

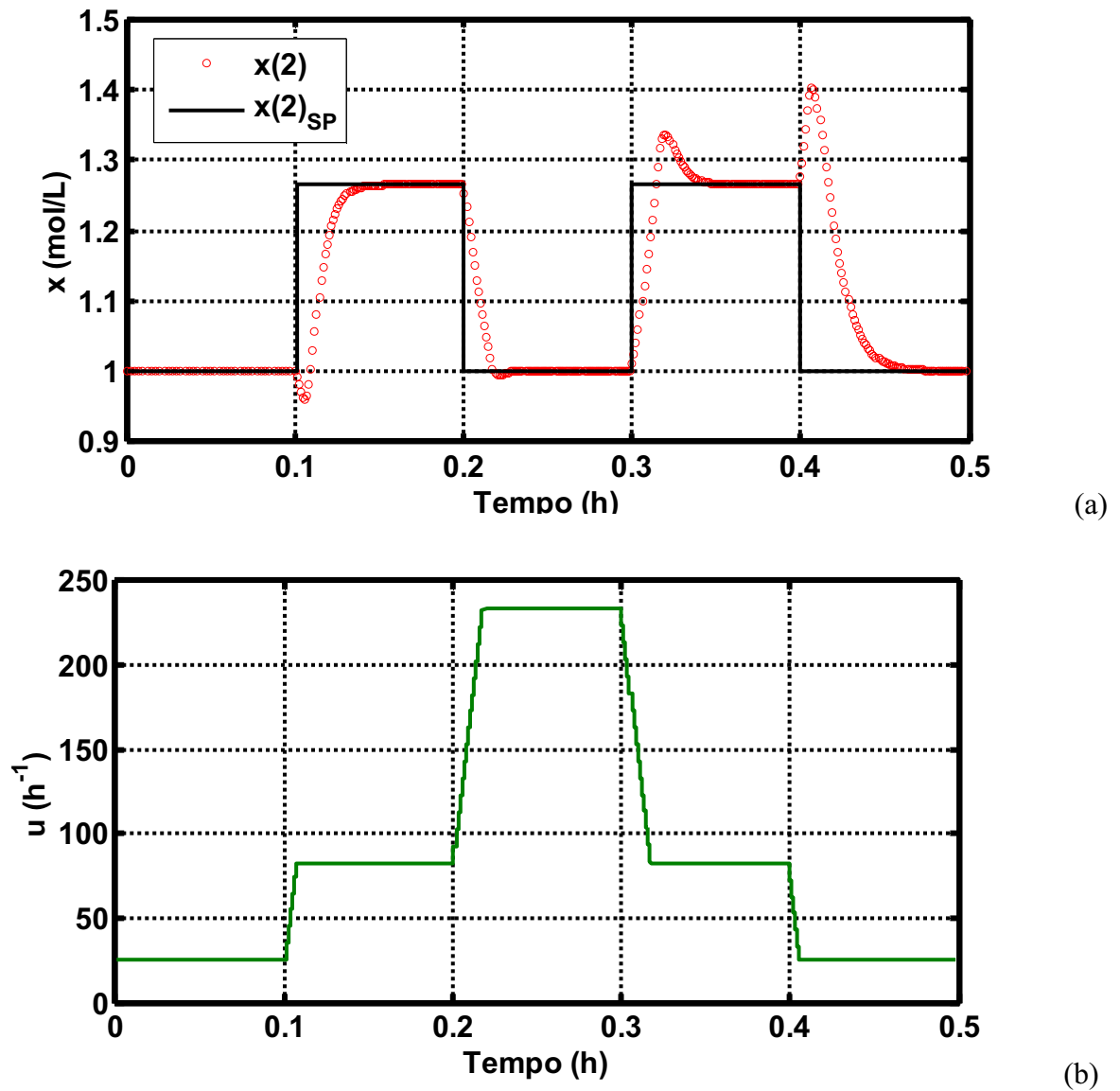


Figura 4.5 - Resposta do sistema submetido ao controle LMI-RMPCR.

A ação de controle apresentada atende aos requisitos de desempenho do sistema. Não é notada a presença de *offset*. Espera-se que o caminho do sistema de $u = 233,3 \text{ h}^{-1}$ para $u = 25 \text{ h}^{-1}$ possa ser melhorado pela utilização de modelo linear local em $u = 233,3 \text{ h}^{-1}$.

A Figura 4.6 mostra as respostas do sistema de forma comparativa, submetido aos seguintes controladores: IHMPC, RMPC-MMTV, RMPC-MMR e LMI-RMPCR.

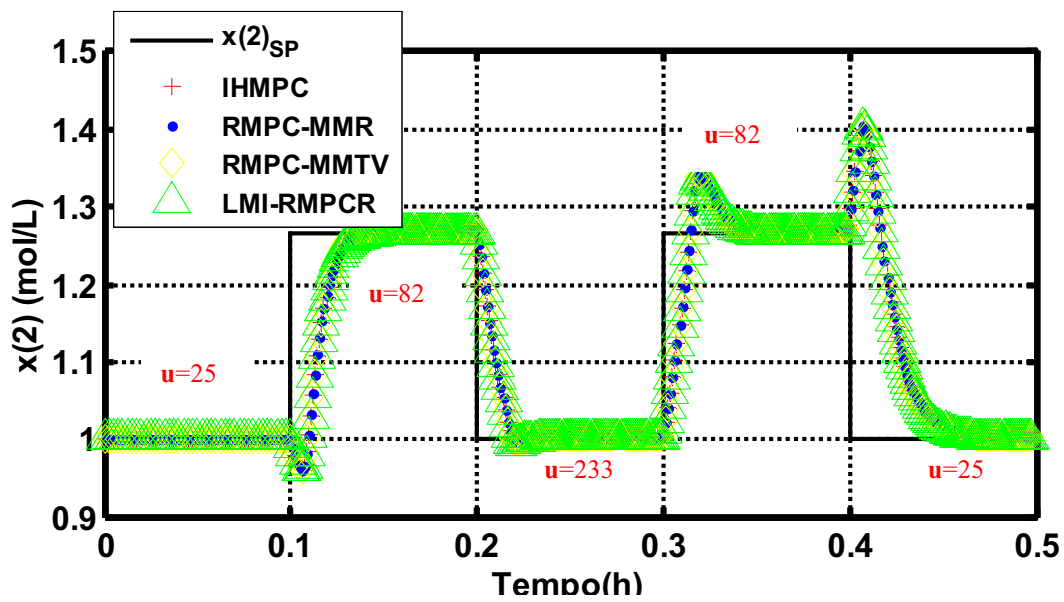


Figura 4.6 - Respostas dos diversos controladores aplicados ao processo da seção 4.2.

As Figuras 4.7-4.8 mostram o controlador projetado usando Ricker (1990), algoritmo implementado no Matlab[®], com o modelo linearizado aplicado à planta não linear. As respostas apresentam grande oscilação, indicando a perda de desempenho. Para o caso de desvio planta/modelo, o sistema mostra-se instável.

As respostas do MPC clássico (IHMPC), do RMPC clássico (RMPC-MMTV, LEE e COOLEY, 2000) e dos RMPCs: RMPC-MMR e LMI-RMPCR, mostraram-se similares. Pode-se notar diferentes comportamentos dinâmicos para a elevação de u de 25 h^{-1} para 233 h^{-1} , comparando-se com o retorno de 233 h^{-1} para 25 h^{-1} , característico da natureza não linear do problema de controle. Durante esse estudo não houve a preocupação de se buscar o melhor controlador, e sim de obter um controlador que atendesse de maneira satisfatória as exigências do processo em estabilidade e desempenho.

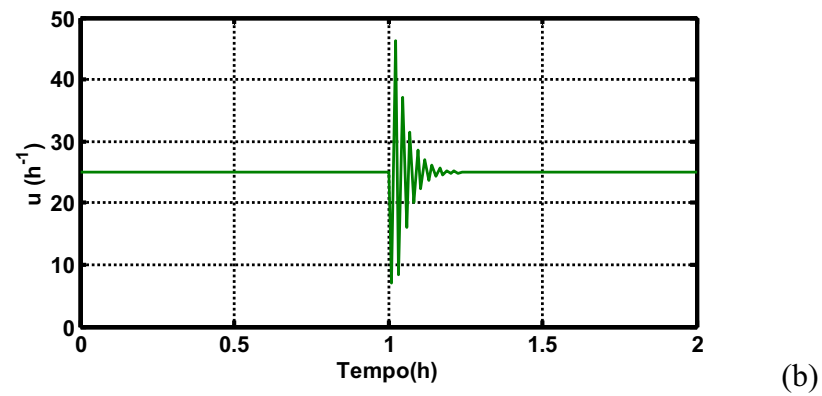
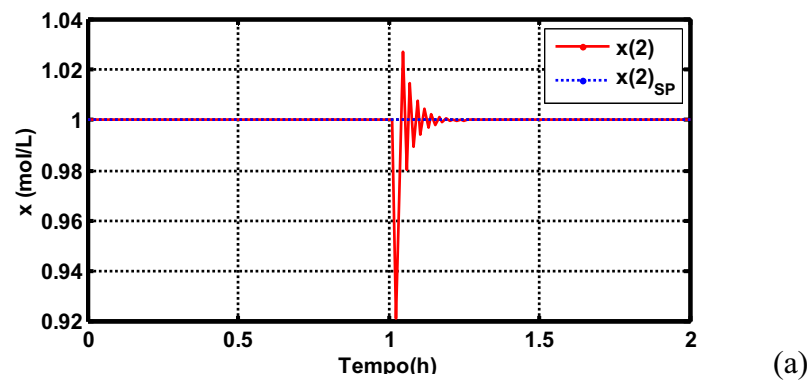


Figura 4.7 - Sistema submetido ao controle MPC (Matlab[®]): problema regulador.

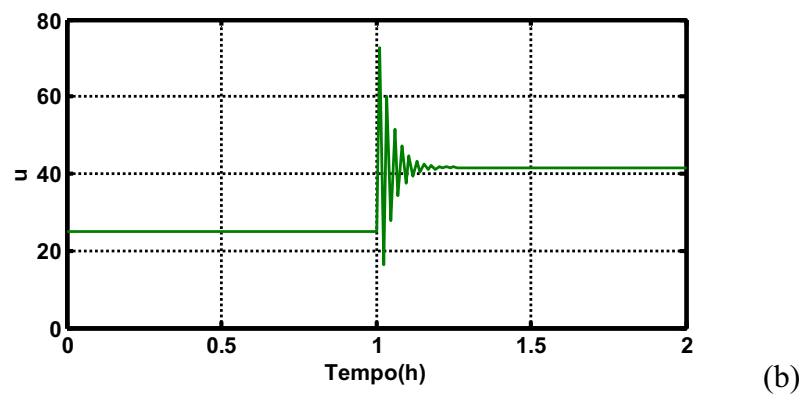
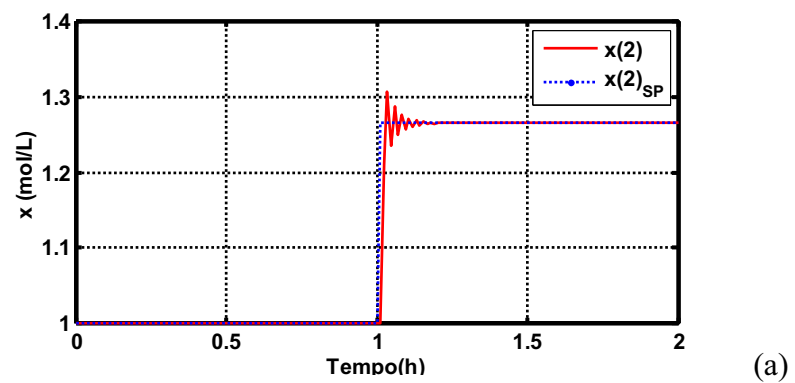


Figura 4.8 - Sistema submetido ao controle MPC (Matlab[®]): problema servo.

O controlador MPC possui características que o tornam mais adequado para determinados sistemas, como por exemplo, para a multiplicidade de estado estacionário. A adição de restrições é de fácil desenvolvimento e implementação, reforçando a adequação dessa técnica. Os controladores propostos no Capítulo 3 apresentaram respostas similares às respostas dos controladores clássicos como IHMPC e RMPC-MMTV.

4.3 Modelo Estável/Planta Instável em Malha Aberta

Este tópico visa avaliar o comportamento do sistema considerando a incerteza no modelo para o caso extremo de planta estável modelo de controle instável e/ou vice-versa (WANG e RAWLING, 2004 a e b). Para este caso, apenas as formulações LMI são aplicáveis, uma vez que a formulação apresentada para as demais é válida apenas para sistemas estáveis. Os modelos utilizados são expressos pela Eq. 4.9-4.10. O tempo de amostragem neste caso é de 1 s, o horizonte de controle (N_m) é igual a 5 com N_p é igual a N_m e as matrizes de pesos são matrizes de dimensões adequadas, conforme indica a Tabela 4.2.

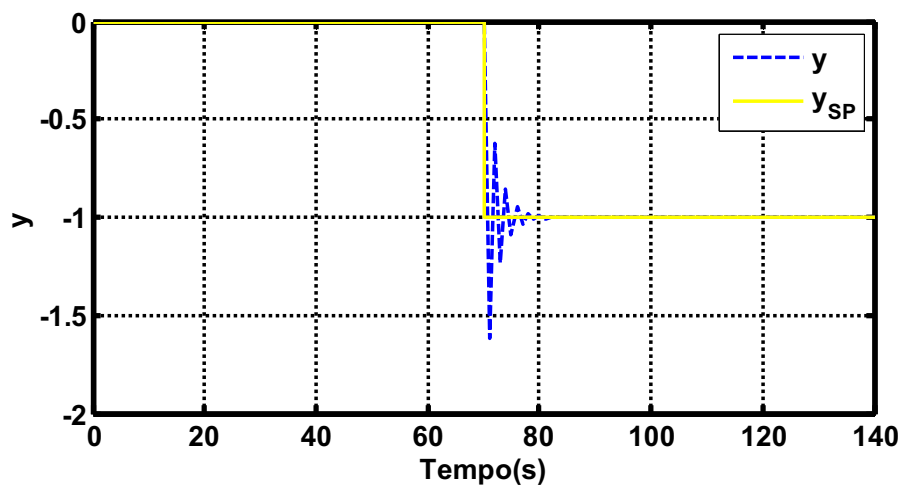
$$G_1 = \frac{1}{z - 0,5} \quad (4.9)$$

$$G_2 = \frac{1}{z - 1,6} \quad (4.10)$$

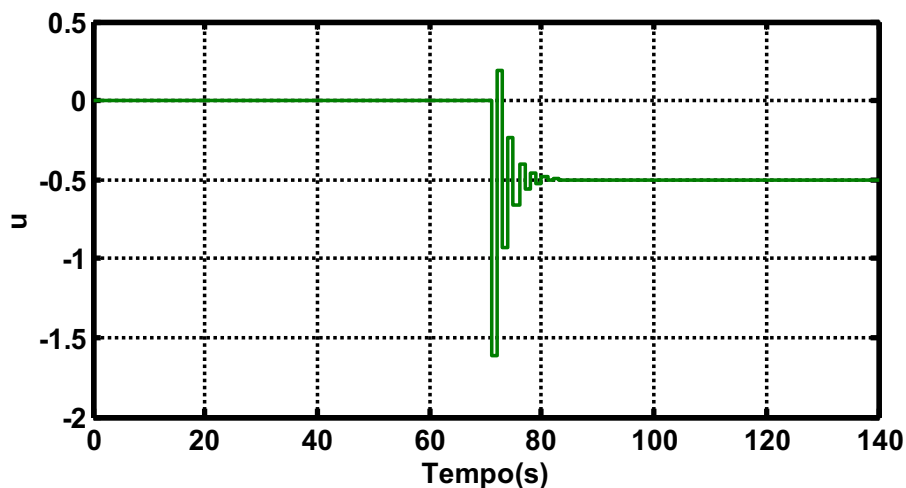
TABELA 4.2: AJUSTES PARA CONTROLADORES.

Controlador	Q	R	S	Incerteza
LMI-MPC	I	0,001I	I	Não se aplica
LMI-RMPCR	I	0,001I	I	0,1I

O objetivo de controle neste sistema SISO é que a saída passe de 0 para -1. Para aplicação com sucesso da técnica LMI_RMPCR, faz-se necessário o uso do sistema na forma de Δu , como indica Muske (1995). As restrições foram feitas de forma a não influenciar no comportamento do controlador. Para este dois casos, a planta foi adotada como o modelo G1 (estável) e o controlador foi calculado considerando-se o modelo G2 (instável). Os resultados pelo algoritmo do toolbox do MPC/Matlab[®] (RICKER,1990) apresentam-se instáveis para qualquer condição de incerteza ou de desvio planta/modelo. Na Figura 4.9 é mostrado o comportamento do sistema utilizando o controlador LMI_RMPCR. Pode-se perceber que a resposta atende a condição requerida sem *offset* e com dinâmica bastante rápida e com oscilações tanto na saída quanto na entrada.



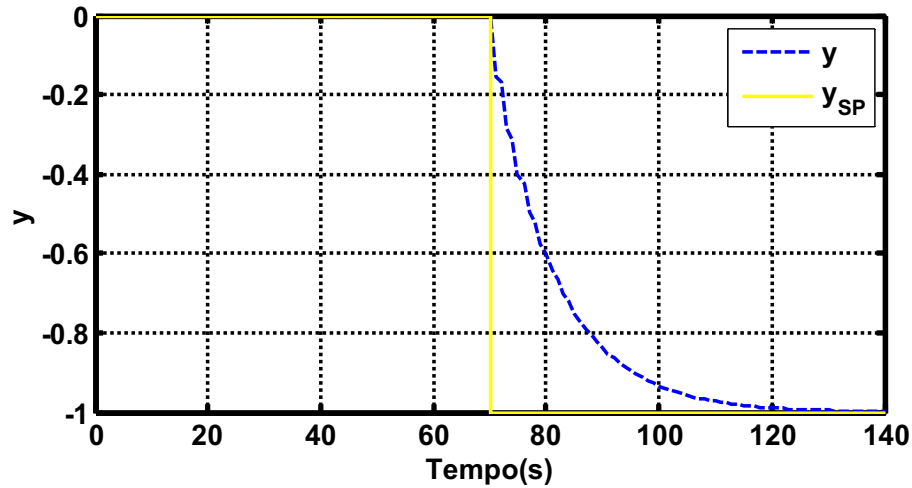
(a)



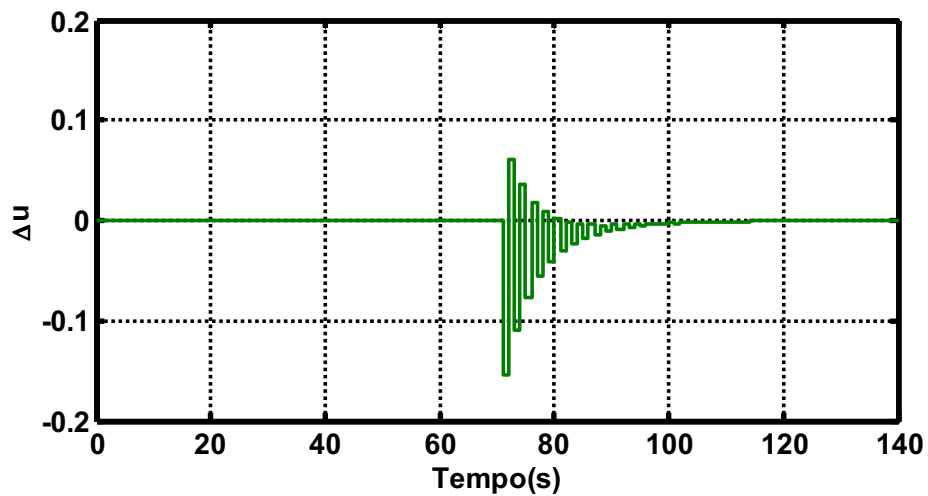
(b)

Figura 4.9 - Comportamento do sistema para modelo instável e planta estável: LMI_RMPCR.

A Figura 4.10 mostra o comportamento do sistema com controlador LMI-RMPCR que apresenta as seguintes características: saída de acordo como o valor de referência sem *offset*, variação da entrada oscilante e decrescente, e dinâmica da saída razoável.



(a)



(b)

(b)

Figura 4.10 - Comportamento do sistema para modelo instável e planta estável LMI-RMPCR.

O Controlador LMI-RMPCR se mostrou adequado no controle deste processo que explora uma condição limite de estabilidade e de forma menos oscilante que o LMI-RMPC clássico. WANG e RAWLING (2004 b) mostraram que nem todos os controladores conseguem controlar processos nesta forma. A Figura 4.11 mostra de forma comparativa os comportamentos dos controles LMI-RMPC e LMI-RMPCR.

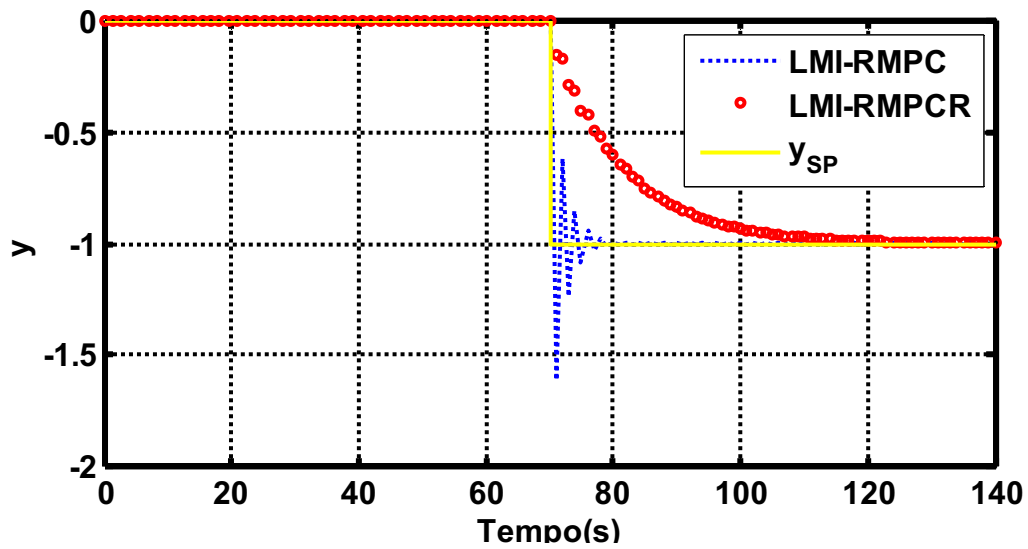


Figura 4.11 - Comparação dos controladores LMI-RMPC x LMI-RMPCR.

4.4 Coluna de Destilação

Nesse tópico será considerado o efeito da incerteza e do controle robusto em um sistema MIMO mal condicionado. O exemplo escolhido foi o da coluna de destilação, bastante estudada por Skogestad e co-autores (WANG; RAWLINGS, 2004a; 2004b). Os modelos são apresentados nas Eq. 4.11-4.12. Pela variação do elemento (1,1) da matriz $\mathbf{B}$ de 0,1591 para 0,2393, o número de condicionamento decresce de 132 para 9,33.

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 0,8187 & 0 \\ 0 & 0,8187 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 0,2393 & -0,1563 \\ 0,1958 & -0,1985 \end{bmatrix} \mathbf{u}_k \quad (4.11)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{x}$$

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 0,8187 & 0 \\ 0 & 0,8187 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 0,1591 & -0,1563 \\ 0,1958 & -0,1985 \end{bmatrix} \mathbf{u}_k \quad (4.12)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{x}$$

A Figura 4.12 mostra o comportamento em malha aberta da saída $y(1)$.

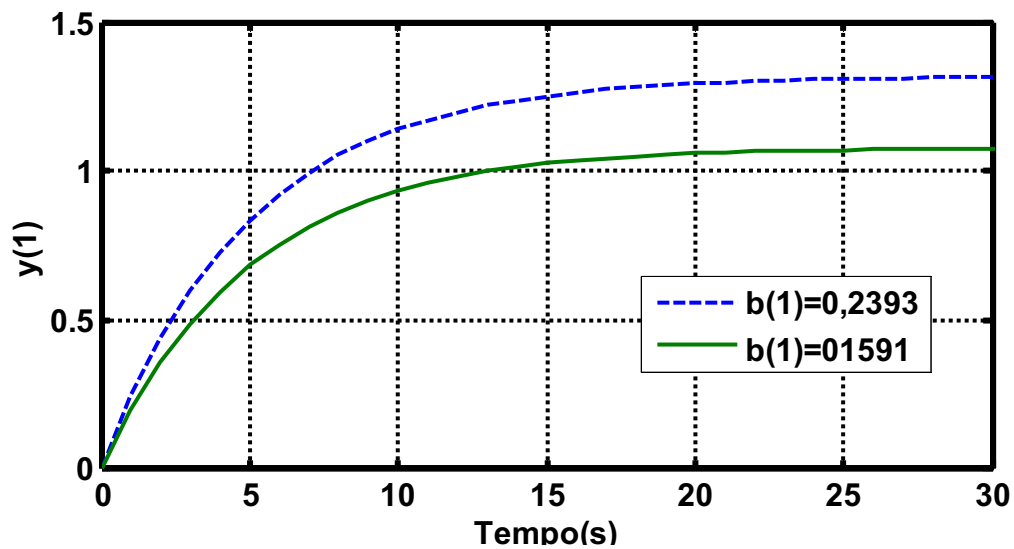


Figura 4.12 - Malha aberta: sistema coluna de destilação mal condicionado

O problema servo foi executado para o vetor de *setpoint*: $[1 \ 0,1]$. As matrizes de pesos adotadas foram iguais às matrizes de ordem apropriada conforme indicado na Tabela 4.4. O horizonte de controle adotado foi o de 5 passos, a máxima variação das entradas foi considerando o valor 10, e o horizonte de controle e o horizonte de predição são iguais. Os casos a serem analisados são: caso 1– controlador calculado em G1 e aplicado em G2, e caso 2– controlador calculado em G2 e aplicado em G1. O tempo de amostragem é de 1 s.

TABELA 4.3: AJUSTES PARA CONTROLADORES.

Controlador	Q	R	S	Incerteza
RMPC-MMR	I	I	I	0,1I
LMI-RMPCR	I	0,01I	I	0,1I

As Figuras 4.13-4.14 mostram o comportamento nos casos 1 e 2, respectivamente, para o controlador RMPC-MMR.

As Figuras 4.15-4.16 mostram o comportamento nos casos 1 e 2, respectivamente, para o controlador LMI-RMPCR.

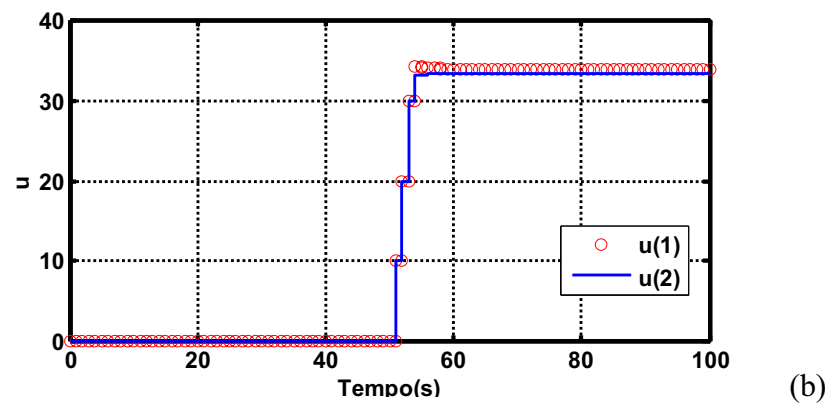
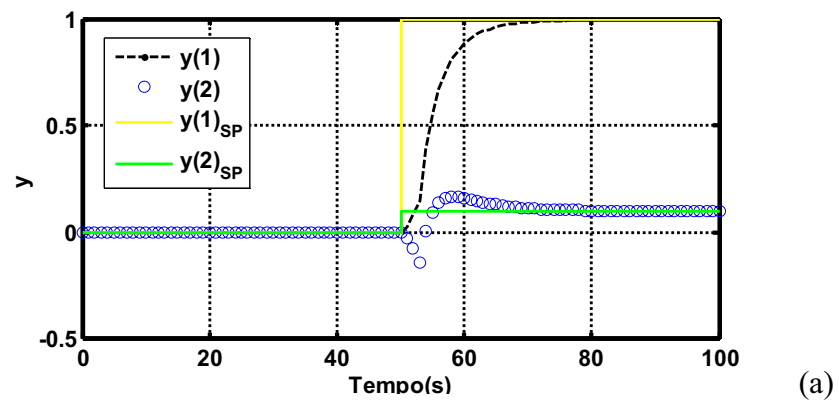


Figura 4.13 - Comportamento do sistema com RMPC-MMR: caso 1.

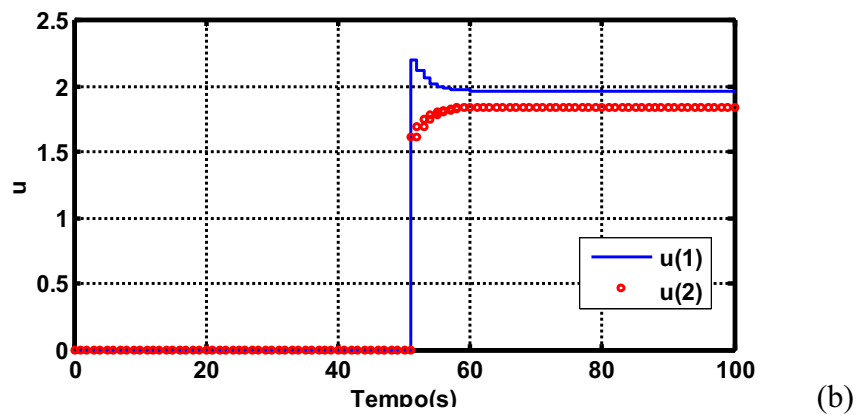
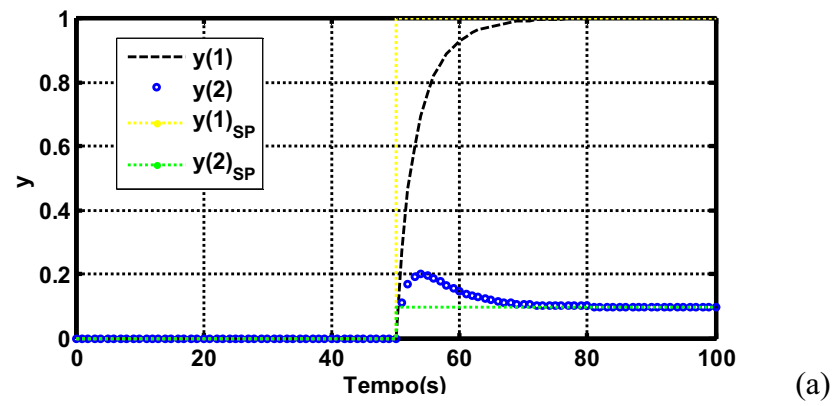


Figura 4.14 - Comportamento do sistema com RMPC-MMR: caso 2.

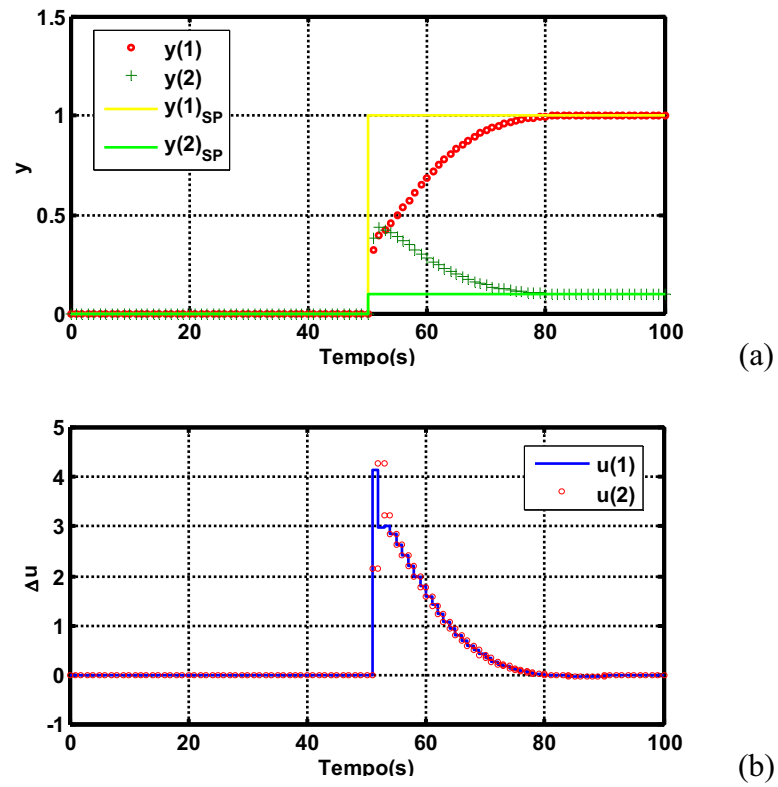


Figura 4.15 - Comportamento do sistema com LMI-RMPCR: caso 1.

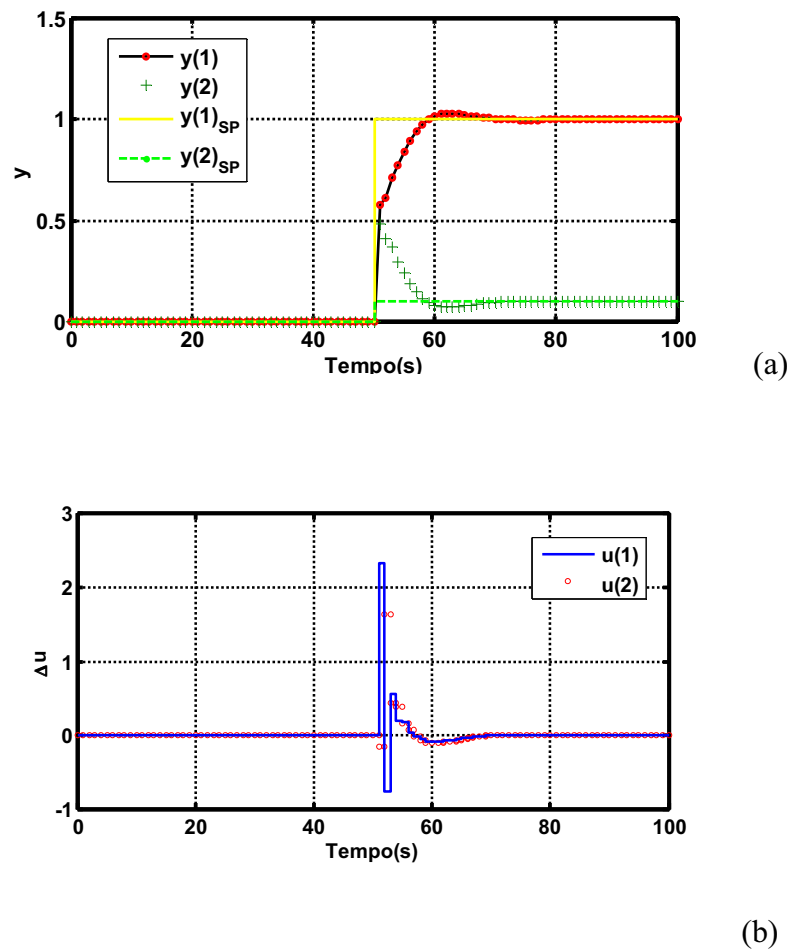


Figura 4.16 - Comportamento do sistema com LMI-RMPCR: caso 2.

As respostas mostradas nas Figuras 4.13-4.16 mostram-se plenamente satisfatórias. O controlador LMI-RMPC só funcionou na forma do sistema em $\Delta \mathbf{u}$. As saídas não exibiram *offset*. Considerando-se o algoritmo apresentado no Apêndice A, o mesmo apresenta respostas instáveis para qualquer condição de desvio/planta modelo neste caso. As Figuras 4.17-4.18 apresentam as respostas comparativas para os controladores RMPC-MMR e LMI-RMPCR para os casos 1 e 2, respectivamente.

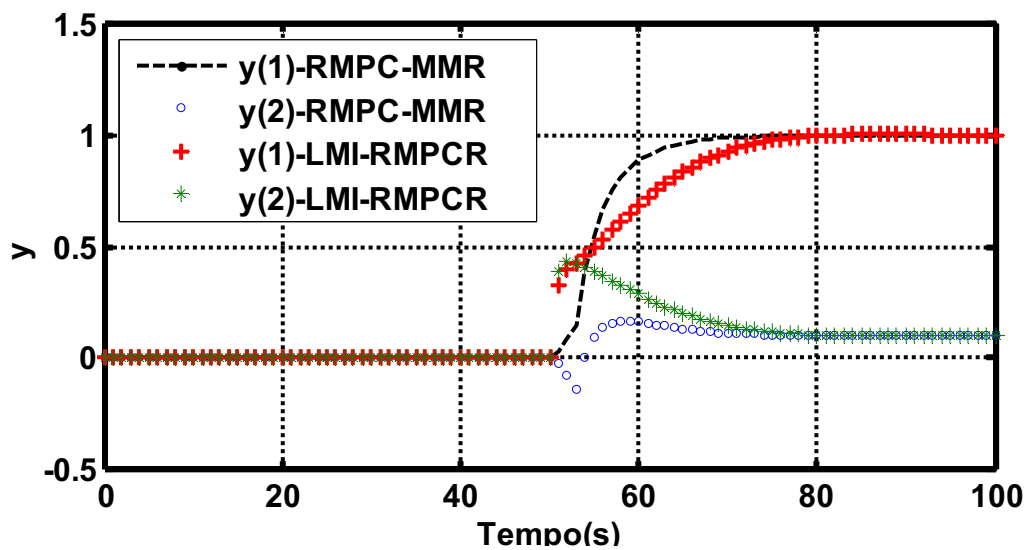


Figura 4.17 - Comparação RMPC-MMR x LMI-RMPCR caso 1.

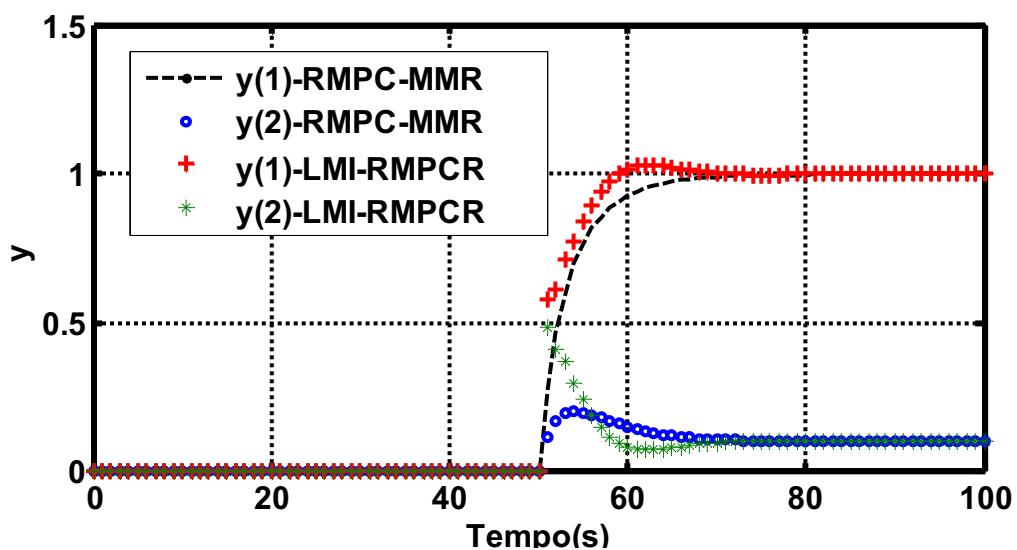


Figura 4.18 - Comparação RMPC-MMR x LMI-RMPCR caso 2.

4.5 Coluna de Flotação

Os processos de concentração de minerais são baseados nas diferenças das propriedades dos minerais constituintes. O processo de flotação utiliza como principal propriedade diferenciadora as características físico-químicas da superfície das partículas dos diferentes minerais (SILVA *et al.*, 2004). Através da adição de agentes específicos, aumenta-se ou diminui-se o grau de hidrofobicidade de uma partícula mineral. Fazendo-se passar um fluxo de bolhas de ar em condições hidrodinâmicas de baixa turbulência, através da polpa do minério, as partículas hidrofóbicas são coletadas ao longo da seção de concentração e levadas à seção de limpeza. As hidrofílicas não coletadas permanecem em meio aquoso. Os agregados bolhas-partículas transportados para a região superior da célula de flotação encontram o fluxo de água de lavagem em contracorrente, cuja finalidade é retornar para a seção de concentração as partículas hidrofílicas arrastadas hidraulicamente, como apresentaram DEL VILLAR, GRÉGOIRE e POMERLEAU (1999). A Figura 4.19 mostra um esquema básico da coluna de flotação.

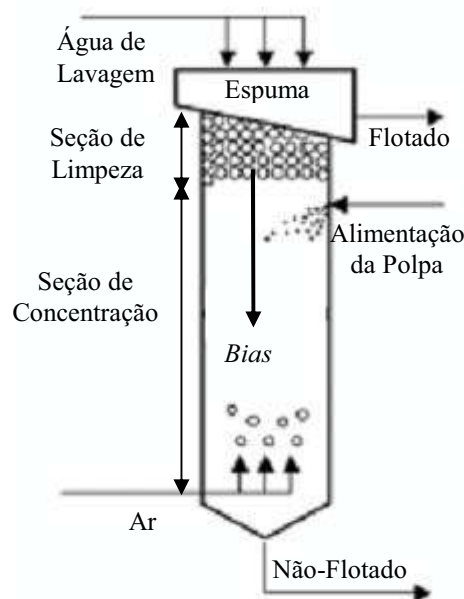


Figura 4.19 - Esquema de uma coluna de flotação (BERGH e YIANATOS, 2003).

Controle Estabilizante: Quando o objetivo da estratégia de controle se restringe a estabilizar a coluna de flotação dentro de seus limites operacionais, pode-se atribuir ao sistema de controle somente a tarefa de controlar a altura da camada de espuma (SILVA *et al.*, 2004). A principal vantagem desta estratégia é a simplicidade do esquema de controle. Contudo, para se alcançar resultados metalúrgicos razoáveis, é conveniente utilizar a estratégia de controle chamada controle otimizante.

Controle Otimizante: Esta estratégia se baseia em modelos matemáticos ou em regras heurísticas que relacionam objetivos secundários do esquema de controle (altura da camada de espuma, *holdup* de ar e *bias*) com objetivos primários (teor e recuperação) (CARVALHO, DURÃO e FERNANDES, 1999; PERSECHINI, JOTA e PERES, 2004). Contudo, a grande interação entre as variáveis de processo e a presença de não linearidades agudas na relação entre elas, são alguns dos principais fatores responsáveis pela dificuldade no planejamento de uma estratégia de controle otimizante.

A aplicação do movimento de controle foi feita utilizando a forma contínua, e o cálculo do controlador foi feito utilizando-se da forma discreta. Um pequeno erro que possa ocorrer na discretização, juntamente com uma pequena incerteza adicionada ao sistema em que foi aplicado o controle, constituem uma forma de se avaliar o comportamento do sistema sob o desvio planta/modelo. O aspecto variante no tempo da matriz de entrada utilizada no modelo para cálculo do controlador, $\mathbf{B}(\theta)$, tenta capturar os efeitos da incerteza multiplicativa composta por δ_1 , δ_2 e δ_3 , quando for o caso, uma vez que os sistemas avaliados possuem ordens diferentes. A resposta do sistema com o controle RMPC-MMR foi satisfatória. O horizonte de controle (N_m) foi fixado em 5, as matrizes Q e R são matrizes identidade de ordem adequada e a perturbação foi da ordem de 10% para cada estado.

Para o caso de aplicação de controle robusto foi utilizado o modelo, cuja descrição é mostrada a seguir:

- Modelo apresentado por Persechini, Jota e Peres (2000) de uma coluna de flotação piloto.

Neste caso, as variáveis de saída são: altura da camada de espuma ($y(1)$), *holdup* de ar na seção de limpeza ($y(2)$), e vazão de *bias* ($y(3)$). As variáveis manipuladas são: vazão de água de lavagem ($u(1)$), vazão de ar ($u(2)$) e vazão de flotado ($u(3)$). A vazão de flotado é constituída pela relação entre vazão de alimentação e a vazão de não flotado. A estrutura do sistema é apresentada na Eq. 4.13. As funções de transferência no domínio de Laplace são apresentadas nas Equações 4.14-4.22. As constantes γ e β valem, respectivamente, $-4,8 \cdot 10^4$ e $-3,84 \cdot 10^5$. O tempo de amostragem é de 10 s.

$$\begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ y(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(1) \\ u(2) \\ u(3) \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

$$G_{11} = \frac{-(1,029 \cdot 10^{-3} s + 2,3 \cdot 10^{-5})}{(s + 4,02 \cdot 10^{-4})(s + 1,92 \cdot 10^{-2})} \quad (4.14)$$

$$G_{12} = \frac{-1,59 \cdot 10^{-4} s + 4,33 \cdot 10^{-7}}{(s + 4,02 \cdot 10^{-4})(s + 7,981 \cdot 10^{-3})} \quad (4.15)$$

$$G_{13} = \frac{(1,029 \cdot 10^{-3} s + 2,3 \cdot 10^{-5})}{(s + 4,02 \cdot 10^{-4})(s + 1,92 \cdot 10^{-2})} \quad (4.16)$$

$$G_{21} = \frac{7,6 \cdot 10^{-5}}{(s + 1,92 \cdot 10^{-2})} \quad (4.17)$$

$$G_{22} = \frac{7,78 \cdot 10^{-5}}{(s + 7,981 \cdot 10^{-3})} \quad (4.18)$$

$$G_{23} = \frac{-7,6 \cdot 10^{-5}}{(s + 1,92 \cdot 10^{-2})} \quad (4.19)$$

$$G_{31} = s(\gamma G_{11} + \beta G_{21}) \quad (4.20)$$

$$G_{32} = s(\gamma G_{12} + \beta G_{22}) \quad (4.21)$$

$$G_{33} = 1 + s(\gamma G_{13} + \beta G_{23}) \quad (4.22)$$

A Figura 4.20 mostra o comportamento das saídas no domínio do tempo do sistema para uma perturbação inicial de 10 % nos estados em problema regulador. A Figura 4.21 mostra a máxima incerteza calculada, as ações de controle mínimas calculadas, o tempo de cálculo do controlador e o comportamento da função de otimização. As respostas mostram-se satisfatórias.

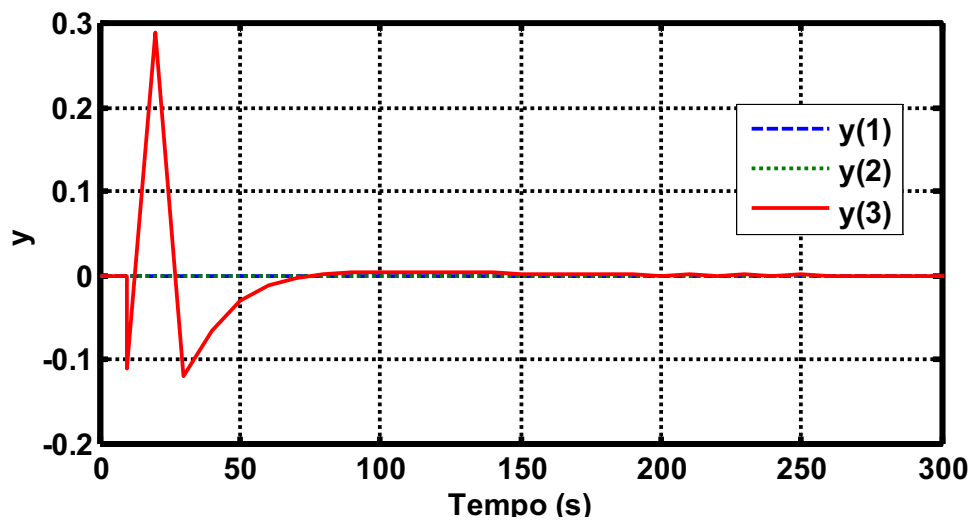


Figura 4.20 - Comportamento do sistema de flotação com o controle RMPC-MMR.

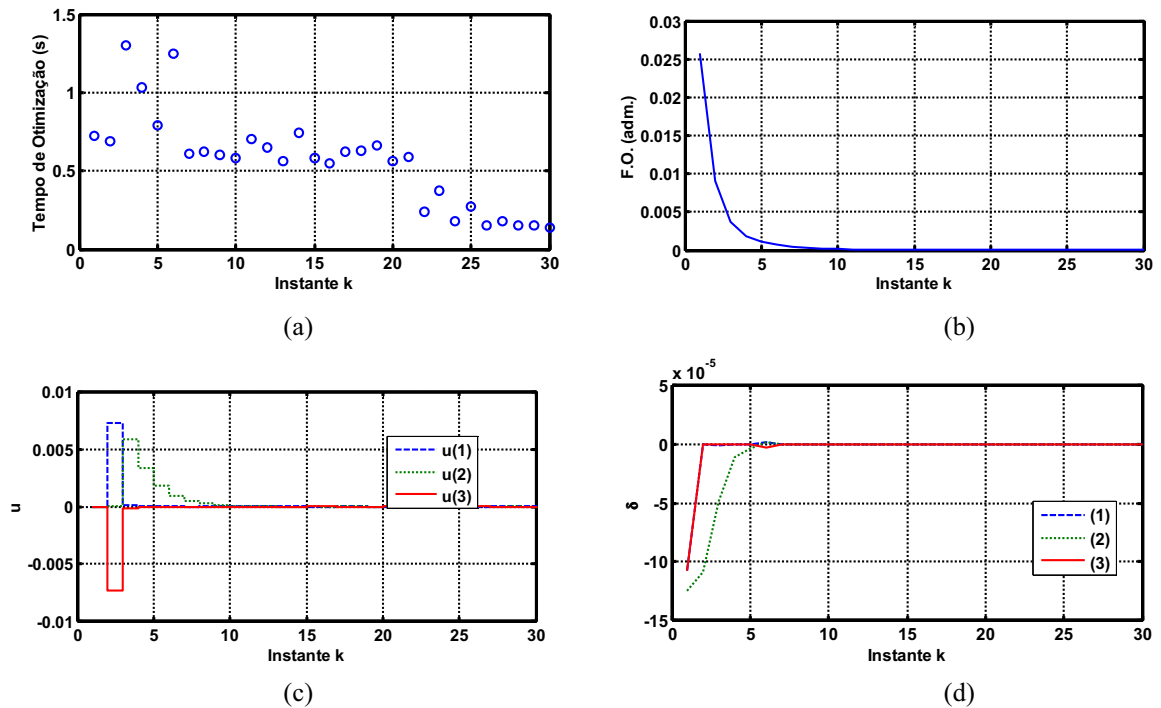


Figura 4.21 - Comportamento do sistema de flotação com o controle RMPC-MMR.

4.6 Implementação Computacional

Os algoritmos de controle MPC, IHMPC, RMPC-MMTV e RMPC-MMR tiveram as suas formulações manipuladas de maneira a se obter a forma de otimização quadrática possibilitando o uso de pacotes computacionais disponíveis. O método usado para resolver o problema de programação quadrática é uma estratégia de conjunto ativo como método de projeção (COLEMAN; ZHANG, 2000). Para isso, foi utilizado o algoritmo *quasi*-Newton, composto de duas fases que constituem a definição da direção de busca (usando o método BFGS - Broyden, Fletcher, Goldfarb, and Shanno) e a pesquisa em linha. Os algoritmos de controle robusto usando LMI foram resolvidos com a utilização do método dos pontos interiores de Nesterov e Nemirovski (GAHINET *et al.*, 1995).

Os programas foram implementados em computador pessoal com as seguintes configurações: 256 MB de memória RAM e processador AMD Athlon 1.1 GHz (máquina 1) e processador Core 2 Duo 2.2 GHz com 1 GB de memória RAM (máquina 2). As implementações de maior dificuldade, como esperado, foram as que consideram explicitamente a incerteza. Contudo, todos os resultados apresentados tiveram suas ações de controle calculadas dentro do tempo de amostragem.

4.7 Considerações Finais

Nesse capítulo foram aplicados os algoritmos de controle: IHMPC, RMPC-MMTV, RMPC-MMR, LMI-RMPC e LMI-RMPCR. Os diversos sistemas avaliados foram: CSTR (sistema de Van der Vusse), sistemas lineares discretos, aquecedor, coluna de destilação com modelo mal condicionado e sistema de flotação. Esses modelos exploram as diversas dificuldades para os sistemas de controle reais, como por exemplo: aplicação de modelo linearizado em processo não linear, discrepâncias entre tempo morto, fases, ganhos, constantes de tempo, tempo de discretização e, ainda, dificuldades associadas a sistemas MIMO, como o mal condicionamento, por exemplo.

O objetivo desse capítulo foi avaliar os controladores RMPC-MMR e LMI-RMPCR, desenvolvidos no Capítulo 3, em diversas condições que, de alguma forma, exigiram alguma característica de robustez, de estabilidade ou de desempenho. Foram feitas comparações com MPC clássico (IHMPC, *Toolbox* MPC do Matlab®) e RMPC clássicos (RMPC-MMTV e LMI-RMPC). No Capítulo 6 os controladores serão aplicados ao sistema experimental multivariável de controle de nível e pH por manipulação das vazões de entrada, que será apresentado no Capítulo 5.

CAPÍTULO 5

5 O SISTEMA EXPERIMENTAL - DESCRIÇÃO

5.1 Introdução

Nesse Capítulo descreve-se em detalhes a montagem experimental, a instrumentação, o *hardware* e o *software* empregados na construção experimental.

O sistema experimental construído é um processo de neutralização que ocorre em um reator tanque agitado. As vazões de ácido e de base são as variáveis manipuladas, a vazão de solução tampão é a perturbação não medida ou medida, a depender de como a mesma é tratada. Para o caso desse estudo, a vazão de solução tampão foi utilizada apenas nos estudos de simulação, de forma a se avaliar o comportamento do sistema em determinadas condições. Na parte experimental não foi utilizada a vazão de solução tampão em nenhum caso. A altura do nível no reator (h) e o pH são as variáveis controladas ou saídas. O sistema foi especialmente escolhido para fins de controle por apresentar um forte comportamento dinâmico não linear e por resultar em um baixo custo de operação do ponto de vista de consumo de insumos como energia elétrica e matéria-prima (MONTANDON, 2005). O sistema se torna interessante do ponto de vista de controle por se tratar de um processo, multivariável e não linear, em que o ganho estático experimenta fortes variações dentro da faixa operacional de vazões. A Figura 5.1 mostra a curva de titulação do sistema. As curvas considerando a adição de solução tampão são todas resultantes de simulação. Nessa Figura, q_1 é a vazão de ácido e q_2 é a vazão de base. Pode-se observar que o pH do processo sofre uma

mudança de 4 para 9 no intervalo $[0,87; 1,22]$ de q_2/q_1 . É justamente essa mudança no ganho estático do processo que torna o problema de neutralização difícil do ponto de vista de controle, pois pequenas modificações na relação q_2/q_1 podem causar grandes ou pequenas variações no pH, dependendo da localização do ponto corrente de operação dentro da faixa operacional. Ressalta-se que num processo analítico de titulação apenas uma gota é suficiente para deslocar o pH de 4 para 9. Desta forma, pode-se inferir a sensibilidade do processo dinâmico associado e a dificuldade para o seu controle em tempo real. Pode-se notar que a adição de solução tampão suaviza o comportamento não linear do sistema, facilitando a ação do controlador, uma vez que se o sistema fosse linear, a relação dada pelo gráfico da relação de vazões pelo pH seria uma reta, cuja aproximação pode ser percebida pela curva simulada de maior quantidade de solução tampão.

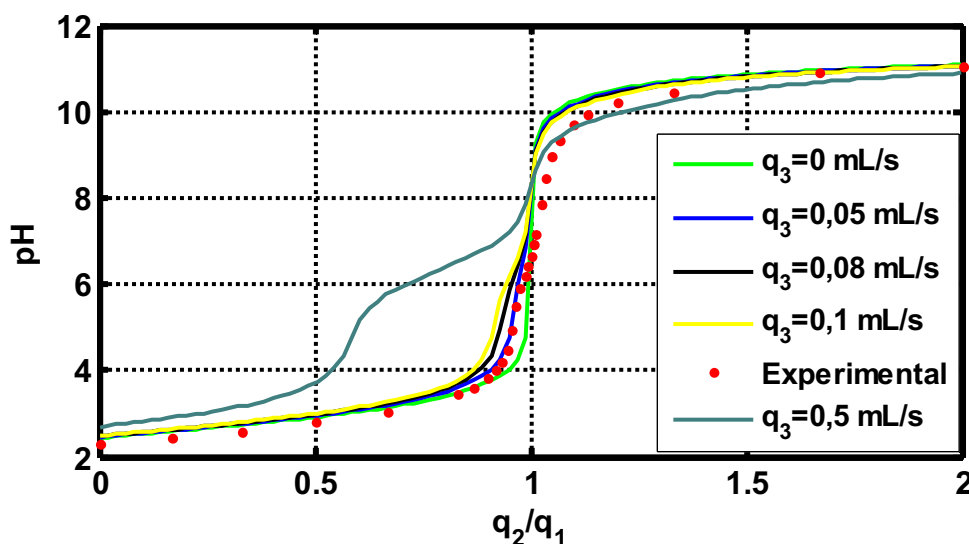


Figura 5.1 - Curva de titulação: medidas experimentais x modelo simulado variando a vazão de tampão.

5.2 O Sistema Experimental

5.2.1 O Reator

O sistema consiste de um reator tanque continuamente alimentado com uma corrente de ácido (HNO_3) e outra de base (NaOH), impulsionadas por bombas de engrenagens. O conteúdo do reator é misturado por um agitador mecânico que, juntamente com as chicanas, promovem o contato entre as moléculas do ácido e da base. Após a reação, os produtos deixam o reator por gravidade, sendo coletados em uma tubulação e enviados ao sistema de tratamento de resíduos e descarte de líquidos do laboratório. Dessa forma, possibilita-se uma interação entre as saídas do processo. O pH da solução do reator é medido na tubulação de saída. Montandon (2005) executou a medição do pH dentro do reator, sendo percebido o aparecimento de um intenso ruído durante a operação da unidade. A adoção do novo ponto de medição limitou significativamente esse ruído. Os valores nominais de cada variável chave do processo e de cada parâmetro são dados na Tabela 5.1. A Figura 5.2 apresenta uma foto do sistema experimental.

TABELA 5.1: VARIÁVEIS CHAVES E PARÂMETROS DO REATOR.

Variáveis	Símbolo	Valores nominais
Altura	h	25 cm
Área	A_r	$168,38 \text{ cm}^2$
Volume	V_r	$4209,67 \text{ cm}^3$
Vazão de ácido	q_1	11,9130 mL/s
Vazão de base	q_2	11,8235 mL/s
Vazão de Solução Tampão	q_3	0,01 mL/s
pH	pH	7,0
Conc. ácido em q_1	$[\text{HNO}_3]$	$3,510 \cdot 10^{-03} \text{ M}$
Conc. base em q_2	$[\text{NaOH}]$	$3,510 \cdot 10^{-03} \text{ M}$



Figura 5.2 - Foto do sistema de neutralização.

5.2.2 Equipamentos

Dois tanques de 200 litros confeccionados em polietileno são usados para armazenamento das soluções de ácido e de base para o abastecimento do processo. Esses tanques são inicialmente preenchidos com água de abastecimento público e, posteriormente, são adicionadas quantidades conhecidas de ácido nítrico P.A. e hidróxido de sódio P.A. de forma a se obter as soluções ácida e alcalina nas concentrações dadas pela Tabela 5.1. Com esses volumes de soluções, o sistema experimental pode operar aproximadamente por 4,5 horas sob as condições nominais. Durante as operações iniciais foi detectada a necessidade de

se adaptar um filtro na entrada de água para o sistema devido a uma grande quantidade de partículas em suspensão, como mostra a Figura 5.3. Estas partículas, além de sujar o sistema, acarretando erro de medição, danificam os transmissores de vazão. Foi então adaptado um filtro constituído de uma parte de tubo de PVC cujas extremidades continham uma tela de aço com malha fina e preenchida com algodão. Este algodão foi trocado diariamente para assegurar a eficiência na retenção de partículas. A Figura 5.4 mostra os elementos filtrantes utilizados para a operação em duas semanas durante o mês de Maio/2008, período em que foram realizados os testes experimentais finais.



Figura 5.3 - Filtro adaptado no sistema de enchimento de água nos tanques.



Figura 5.4 - Elementos filtrantes utilizado no período de testes experimentais em Maio/2008.

A adição desse acessório ao sistema, entretanto, acarreta uma lentidão no enchimento dos tanques. Uma alternativa foi a adaptação de uma bombona de 1000 L e o abastecimento da mesma em regime contínuo. A filtragem foi feita em seu abastecimento e durante a transferência para os tanques de trabalho. A Figura 5.5 mostra o tanque adaptado, localizado na área externa do laboratório onde se encontrava a unidade experimental.



Figura 5.5 - Tanque alternativo para armazenamento de água filtrada.

Além dos tanques de 200 litros, existem mais dois tanques de polietileno de 100 litros cada um, para preparação de volumes adicionais de soluções de ácido e base que são transferidos por bombas centrífugas para os tanques operacionais de 200 litros. Dessa forma, pode-se operar o sistema sem o risco de esvaziamento dos tanques de armazenamento de reagentes durante os ensaios. De forma a completar o sistema e possibilitar em outros experimentos a avaliação experimental com a solução tampão (NaHCO_3), existe um tanque de 120 L apropriado para o uso dessa solução integrando o sistema, mas que nesse trabalho não foi utilizado. Cada um dos tanques de 200 litros e da solução tampão são equipados com uma micro-bomba de engrenagem, modelo Cole-Parmer U-73004-02 dotada de um *Gear Pump Drive* modelo Cole-parmer U-07144-02, que é usada para fornecer solução ao processo

(Figura 5.6). As vazões de ácido, de base e de solução tampão podem ser reguladas através da corrente elétrica (4-20 mA) enviada às bombas de engrenagem pelo sistema de aquisição e controle de dados. Esta foi uma opção de controle do sistema, feito diretamente pelas correntes das bombas quando houve, durante os testes experimentais, a queima de um dos transdutores das bombas. No entanto, como houve a aquisição de um novo equipamento para a conclusão dos testes experimentais, optou-se pelo controle das vazões, em que a vazão entra como um valor de referência para um sistema escravo de controle de corrente para as bombas, conforme será mais detalhado no Capítulo 6.



Figura 5.6 - Bomba de engrenagem dotada de *Gear Pump Drive*.

Nas tubulações que conectam os tanques ao reator e antes das bombas de engrenagem, existem filtros para reter o material particulado e executar a purificação das correntes de ácido e base. Esses filtros removem sólidos que podem danificar os medidores de vazão e são trocados periodicamente, a cada seis meses. O conteúdo do reator é misturado usando um agitador mecânico que permite a manipulação manual da taxa de agitação. O

agitador é fixo à parede e foi ajustado de forma a tentar evitar a propagação de ruídos no sistema (Figura 5.7), conforme sugeriu Montandon (2005).



Figura 5.7 - Agitador mecânico do reator.

5.2.3 Instrumentação

A montagem experimental é equipada com instrumentos de precisão e resulta em um sistema de controle por computador dependente de medidas. O pH do efluente é medido com eletrodo de vidro da *Leeds & Northrup* modelo 7082, conforme Figura 5.8. O eletrodo é colocado na tubulação de saída do reator. Este eletrodo é conectado a um amplificador-transmissor de sinal (Figura 5.9), que tem uma faixa de 4-20 mA para o sinal transmitido.

As vazões de ácido, de base e de solução tampão são medidas usando sensores de vazão de infravermelho tipo turbina modelo Cole-Parmer U-32250-00 (Figura 5.10). Cada sensor de vazão é conectado a um transmissor-conversor pulso-corrente modelo Cole-Parmer

U-94788-11 (Figura 5.11). Esses conversores transformam um sinal de frequência em um sinal de corrente na faixa de 4-20 mA.



Figura 5.8 - Sensor de pH.



Figura 5.9 - Foto do transmissor de pH.



Figura 5.10 - Sensor de vazão de infravermelho tipo turbina.



Figura 5.11 - Transmissor-conversor pulso-corrente.



Figura 5.12 - Sensor-transmissor de nível.

O nível do reator é medido por um sensor-transmissor de pressão diferencial, cujo sinal apresenta uma relação linear com a altura de líquido, mostrado na Figura 5.12. O equipamento apresenta dois orifícios de saída, sendo que um deles está ligado à coluna de líquido dentro do reator de neutralização e o outro está aberto para a atmosfera. A diferença de pressão que surge entre estes dois pontos provoca o deslocamento de uma membrana localizada dentro do equipamento que, por sua vez, origina um sinal em voltagem que corresponde à altura de líquido dentro do reator.

5.2.4 O Sistema de Aquisição de Dados

O sistema de aquisição de dados é o SCXI, fabricado pela *National Instruments*. Este sistema possui uma arquitetura flexível e consiste em um condicionador de sinais de entrada e saída conectado a uma placa de aquisição (DAQ). Esta, por sua vez, está conectada a um computador PC/AT Pentium IV 2.4 MHz através de um *slot* ISA padrão. A Figura 5.13 mostra esquematicamente o chassi SCXI-1000 usado neste trabalho. A Figura 5.14 mostra uma representação do sistema de aquisição e da estação de trabalho utilizada. Esta configuração ilustra a entrada e saída de sinais condicionados para ambientes DAQ (aquisição de dados). O chassi abriga uma variedade de condicionadores de sinais e módulo de instrumentação. Sinais analógicos são condicionados e transmitidos para a placa de aquisição diretamente ligada ao computador. A placa ainda controla e monitora a entrada/saída de sinais digitais e sinais analógicos.

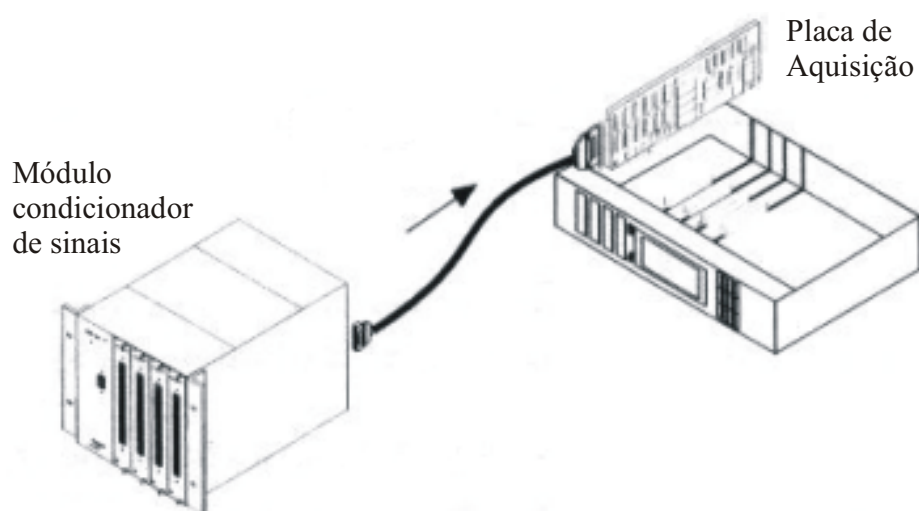


Figura 5.13 - Representação esquemática do chassi SCXI-1000 e a placa de aquisição de dados.

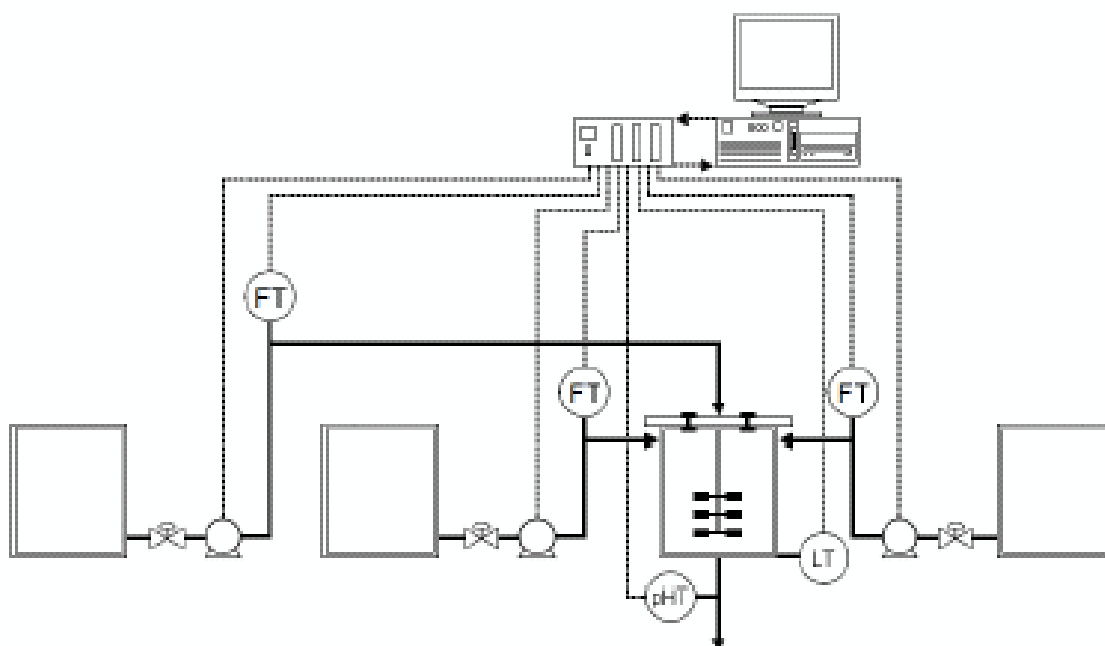


Figura 5.14 - Representação esquemática do sistema experimental e da aquisição de dados.

5.3 Softwares Utilizados

O Labview[®] é baseado na linguagem de programação G e é responsável pelo controle em tempo real do sistema. É uma programação tal como C ou BASIC que possui uma biblioteca de funções para qualquer tarefa de programação. O software inclui ainda bibliotecas para aquisição, análise e armazenamento de dados, além de ferramentas convencionais com uma execução animada por onde se vêem os dados sendo repassados através do programa. Diferencia-se das outras linguagens por ser uma linguagem gráfica e não baseada em textos. Possui características gráficas iterativas, sendo uma poderosa linguagem de programação gráfica. A versão do Labview[®] utilizada foi a 8.2.

O Matlab[®] versão 7.5 foi utilizado na etapa de solução *on-line* do problema de otimização associado ao problema de controle preditivo. A rotina “quadprog” do Matlab[®] foi utilizada para resolver um problema de programação quadrática padrão com restrições na variável manipulada. O método usado para resolver o problema de programação quadrática é uma estratégia de conjunto ativo conhecido como método da projeção (Gill *et al.*, 1984 e Gill *et al.*, 1991). O modelo dinâmico do processo utilizado nessa otimização foi o modelo fenomenológico, descrito no Capítulo 6. Foi utilizado também um pacote chamado “YALMIP” (LÖFBERG, 2004) para resolução de problemas na forma de LMI’s. Esse pacote implementa uma interface amigável e utiliza o método dos pontos interiores para resolver o problema de otimização. O método dos pontos interiores e os algoritmos para solução de LMI foram os do *Toolbox LMITool*[®]. Foi também utilizado o *Toolbox MPC*[®] para programação de controladores comparativos e cujo algoritmo encontra-se descrito no Apêndice. A Figura 5.15 mostra o sistema de aquisição e a estação de trabalho usada para executar o controle em tempo real do sistema experimental.

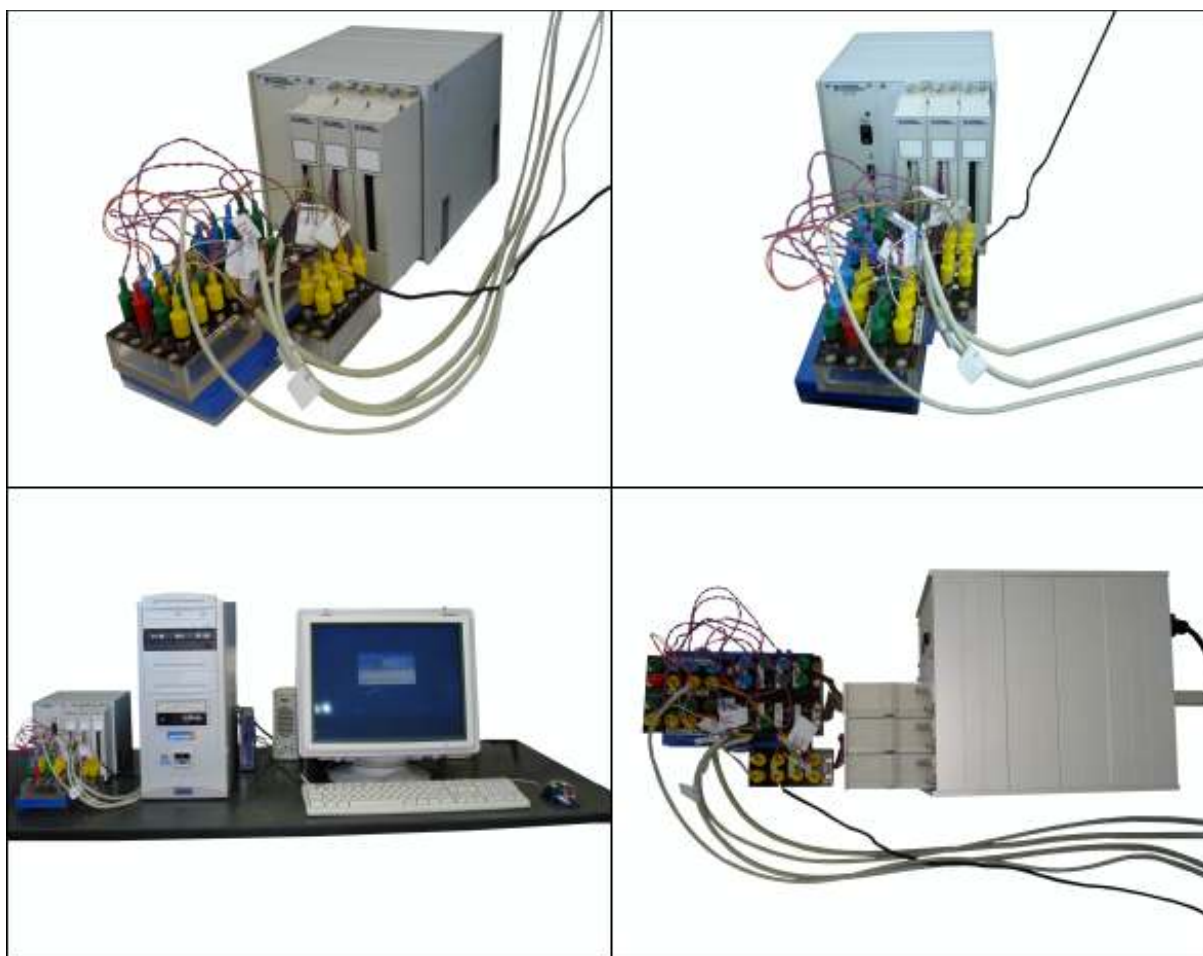


Figura 5.15 - Sistema de aquisição e do microcomputador utilizado no trabalho.

5.4 Considerações Finais

Nesse Capítulo o sistema experimental de controle de nível e pH utilizando as vazões de ácido e base foi detalhadamente descrito. Os componentes de *hardware* e *software* do sistema foram apresentados. No Capítulo 6 será mostrada a operação em malha aberta do sistema e no Capítulo 7 os resultados de simulação e experimentais.

CAPÍTULO 6

6 MODELAGEM DO SISTEMA EXPERIMENTAL

6.1 Modelo Fenomenológico

O modelo físico do processo, apresentado na Figura 6.1, foi desenvolvido por Hall (1987) e é baseado nas hipóteses de mistura perfeita, densidade constante e solubilidade completa dos íons envolvidos. As reações químicas envolvidas no processo de neutralização ácido-base ($\text{HNO}_3\text{-NaOH}$) são mostradas nas Eq. 6.1-6.5. De forma a se ter um modelo completo, será considerada a presença de solução tampão (NaHCO_3). Contudo, para os resultados experimentais, não foi utilizada essa solução.

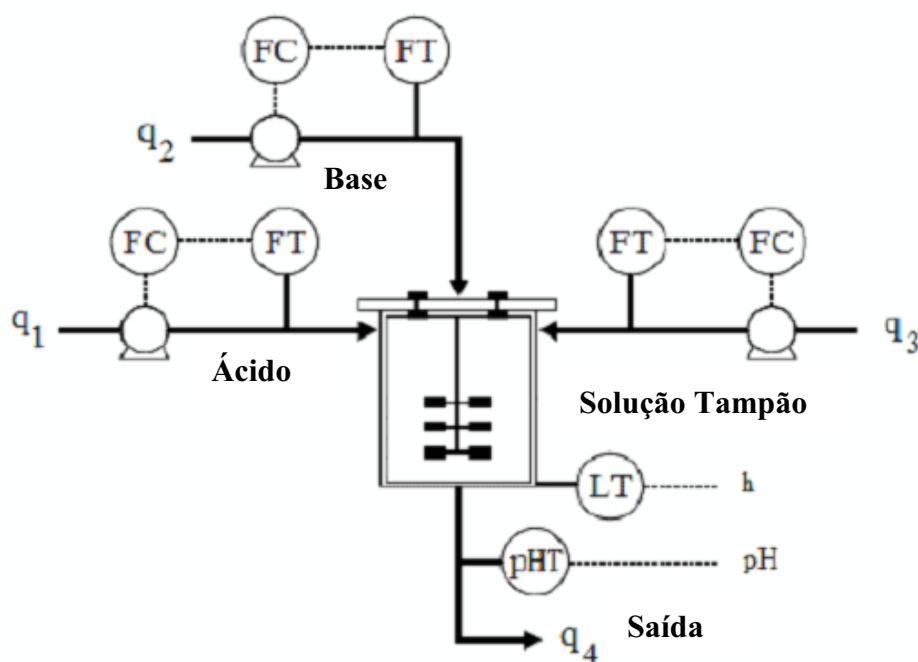
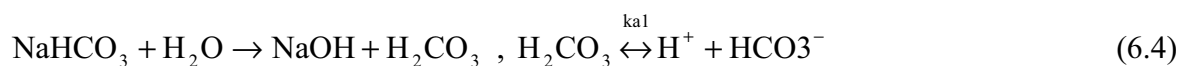


Figura 6.1 - Diagrama esquemático do reator de neutralização em malha aberta.



As quantidades W_a e W_b são definidas para o equacionamento deste problema e são chamadas de invariantes porque suas concentrações não são afetadas ao longo da reação. As reações são rápidas o bastante para permitir que o sistema seja considerado em equilíbrio. Logo, as reações de equilíbrio podem ser usadas para determinar a concentração de íons de hidrogênio através da concentração dos invariantes reacionais. As concentrações de equilíbrio são dadas pelas Eq. 6.6-6.8.

$$k_{a1} = \frac{[\text{HCO}_3^-][\text{H}^+]}{[\text{H}_2\text{CO}_3]} \quad (6.6)$$

$$k_{a2} = \frac{[\text{CO}_3^{2-}][\text{H}^+]}{[\text{HCO}_3^-]} \quad (6.7)$$

$$k_w = [\text{H}^+][\text{OH}^-] \quad (6.8)$$

Segundo Gustaffson e Waller (1983), dois invariantes da reação são definidos para a i -ésima corrente:

$$W_{ai} = [\text{H}^+]_i - [\text{OH}^-]_i - [\text{HCO}_3^-]_i - 2[\text{CO}_3^{2-}]_i \quad (6.9)$$

$$W_{bi} = [\text{H}_2\text{CO}_3]_i + [\text{HCO}_3^-]_i - 2[\text{CO}_3^{2-}]_i \quad (6.10)$$

Combinando as Eq. 6.6-6.10, a seguinte relação implícita entre $[H^+]$, W_a e W_b pode ser encontrada na Eq. 6.11:

$$W_a = [H^+] - \frac{K_w}{[H^+]} - W_b \frac{\frac{K_{a1}}{[H^+]} + 2 \frac{K_{a1}K_{a2}}{[H^+]^2}}{1 + \frac{K_{a1}}{[H^+]} + \frac{K_{a1}K_{a2}}{[H^+]^2}} \quad (6.11)$$

A Equação 6.12 é o balanço de massa (m) no reator. Uma vez que a densidade é constante por hipótese, chega-se ao sistema de equações diferenciais expresso nas Eq. 6.13-6.15.

$$\frac{dm}{dt} = \dot{m}_1 + \dot{m}_2 + \dot{m}_3 - \dot{m}_4 \quad (6.12)$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{Ar} (q_1 + q_2 + q_3 - q_4) \quad (6.13)$$

$$\frac{dW_a}{dt} = \frac{1}{V_r} (q_1 (W_{a1} - W_a) + q_2 (W_{a2} - W_a) + q_3 (W_{a3} - W_a)) \quad (6.14)$$

$$\frac{dW_b}{dt} = \frac{1}{V_r} (q_1 (W_{b1} - W_b) + q_2 (W_{b2} - W_b) + q_3 (W_{b3} - W_b)) \quad (6.15)$$

Ar é a área do reator em cm^2 ; V_r é o volume reacional em cm^3 ; h é a altura da solução no reator dado em cm ; q_1 é a vazão de ácido; q_2 é a vazão de base; q_3 é a vazão de solução tampão, e q_4 é a vazão de saída do reator. Todas as vazões são expressas em mL/s . W_a é o invariante reacional do ácido e W_b é o invariante reacional da base, que são expressos como funções da concentração de íons de hidrogênio. As Equações 6.12-6.15 permitem calcular a altura e os invariantes reacionais como uma função do tempo, admitindo-se que sejam conhecidas as condições iniciais do sistema. O pH da solução pode então ser determinado a partir da Eq. 6.11 e dos valores das concentrações dos invariantes reacionais. As condições nominais de operação foram apresentadas na Tabela 5.1.

A vazão de saída do sistema é por gravidade. Conforme mostra a Figura 6.2, uma das válvulas, que nesse caso é do tipo válvula globo, é ajustada de forma a estabelecer a vazão do sistema e cujos parâmetros (c_v e p_7) devem ser estimados para a definição completa do modelo do sistema conforme expresso na Eq. 6.16. Essa válvula é indicada em destaque na Figura 6.2. Após a corrida/estimação de parâmetros foi retirada a alavanca de movimentação da válvula, como pode ser observado na Figura 6.2, a fim de assegurar a manutenção dos parâmetros estimados durante o conjunto de corridas. Caso ocorressem alterações nas respostas, ou modificações indevidas da posição da válvula, seria necessária a execução de nova estimação de parâmetros.

$$q_4 = c_v h^{p_7} \quad (6.16)$$



Figura 6.2 - Válvulas de saída do sistema de neutralização para estimação de parâmetros.

Para estimação desses parâmetros e validação do modelo, faz-se necessária a operação da planta através de entradas que excitem todos os modos dinâmicos e em ampla faixa de frequência, de forma que as saídas contenham informações suficientes para tal procedimento. As excitações mais usuais são as do tipo: rampa, degrau e impulso. Contudo, para se obter informações em uma ampla faixa de frequência, aplicam-se entradas aleatórias

formadas por seqüências de degraus com amplitude e duração variáveis (ML-PRBS), conforme indica Montandon (2005). O tempo de amostragem para esse processo foi de 10 s. As vazões de ácido e de base variaram conforme descrito nas Eq. 6.17-6.18, com uma probabilidade de passo igual a 0,8, em que a duração de cada degrau foi de 120 s. As vazões sobre as quais incidiram as variações foram de 12 mL/s em cada uma delas e de forma a se manter a soma das vazões dentro do limite indicado na Eq. 6.19. As vazões dadas pelas Eq. 6.17-6.18 foram determinadas por simulação e avaliadas experimentalmente em testes de operação com a unidade experimental. Os valores apresentados abaixo foram definidos de forma que durante a operação o reator não esvazie e nem transborde, resultando nos limites impostos pela Eq. 6.19. Considerando a parte construtiva da unidade, o transbordamento de solução acarreta em danificação da instrumentação, sujeita nesse caso ao contato com o líquido.

$$q_1 \in [9,856 \quad 13,310] \quad (6.17)$$

$$q_2 \in [9,977 \quad 13,215] \quad (6.18)$$

$$q_1 + q_2 \in [21,5 \quad 24,5] \quad (6.19)$$

A partir do comportamento dinâmico do sistema frente às alterações aleatórias nas vazões de entrada, é possível avaliar se o modelo fenomenológico é capaz de prever o comportamento real da planta. Para o modelo utilizado na predição das saídas reais, deseja-se que o erro de modelagem seja aproximado por uma distribuição normal com média zero e variância finita, indicando que erro é aleatório e não correlacionado. A Figura 6.3 mostra a excitação para estimação de parâmetros. A Figura 6.4 mostra os resultados experimentais para a vazão de ácido. São mostrados os valores de referência, calculados pelo algoritmo de

geração de números aleatórios, e o resultados experimentais. A Figura 6.5 mostra uma ampliação nos instantes iniciais da corrida.

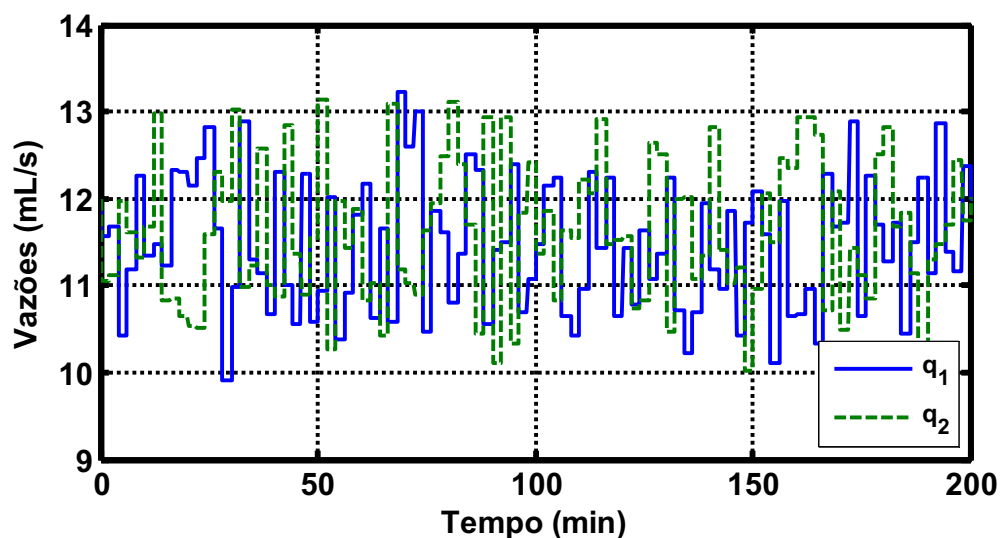


Figura 6.3 - Excitação das vazões de ácido e de base para estimação de parâmetros da válvula.

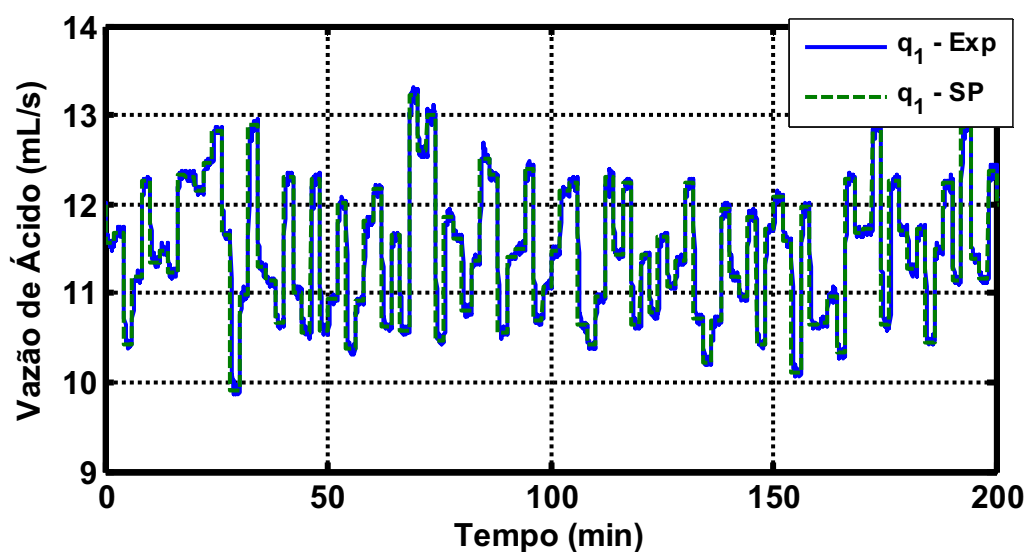


Figura 6.4 - Excitação da vazão de ácido: valor de referência x valor experimental.

Pode-se notar uma pequena diferença entre os valores de referência e experimentais que são resultantes de ruídos na entrada, oriundos do processo, da rede elétrica e da instrumentação. Existe também uma dinâmica na vazão experimental dada pela ação de controle do tipo PI, pois quando a excitação é feita no processo, na realidade o que ocorre é a alteração de *setpoint* para a malha de controle de vazão.

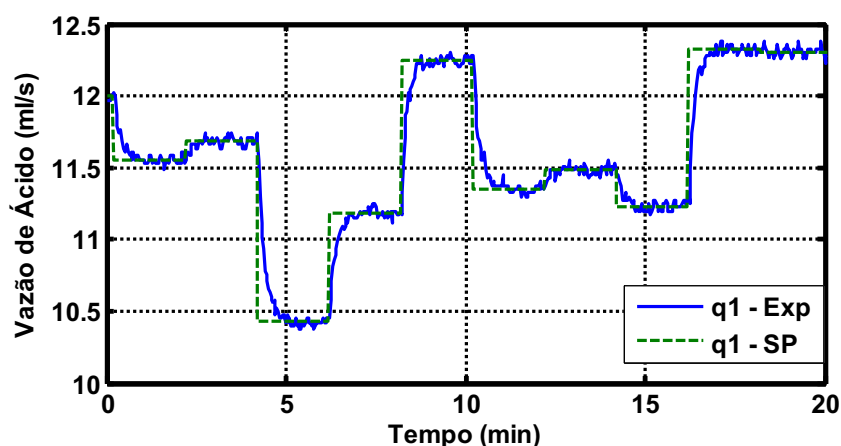


Figura 6.5 - Excitação da vazão de ácido: valor de referência x valor experimental – Ampliação de escala para os instantes iniciais da corrida.

A finalidade dessa implementação é manter a vazão controlada em parâmetros desejados, principalmente considerando-se que na medida em que os tanques de armazenamento têm o seu nível alterado, conforme a operação, podem ocorrer variações na vazão, ocasionando alguma interferência no processo em controle. Cabe ressaltar ainda que todas as medidas experimentais foram feitas usando filtros digitais, conforme indicam as Figuras A.5-A.6 e Gonçalves (2007).

A Figura 6.6 mostra os resultados experimentais para a vazão de base, considerando-se as entradas aleatórias previamente calculadas.

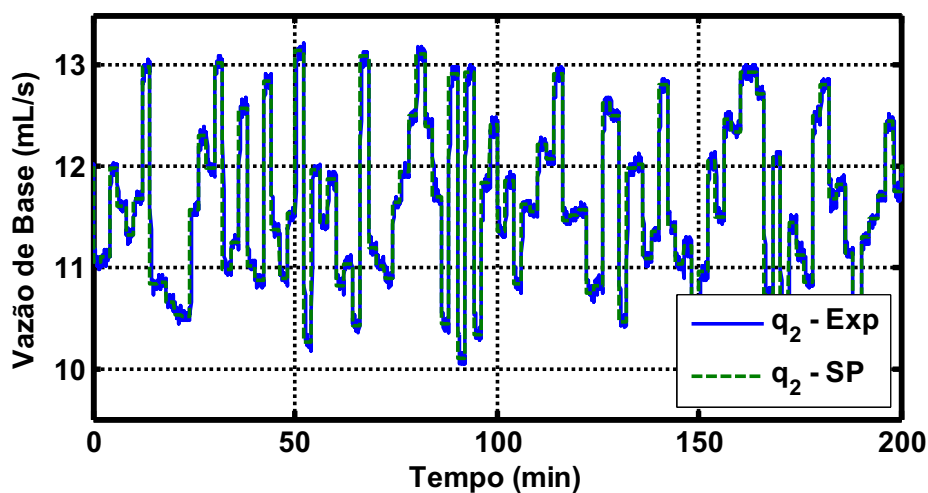


Figura 6.6 - Excitação da vazão de base: valor de referência x valor experimental.

Para a estimação dos parâmetros da Eq. 6.16 utilizou-se um conjunto de dados experimental composto por 6000 pontos de aquisição. Para a estimação foi utilizada metade dos dados e, para a validação, os dados restantes. Esse procedimento é feito de forma a assegurar que o modelo tenha capacidade de predição de dados desconhecidos. O procedimento é uma solução não linear de aproximação a uma curva, utilizando o método dos mínimos quadrados. A estimativa inicial foi dada por um valor aleatório. Os valores estimados resultantes foram: $c_v = 20,4477$ e $p_7 = 0,0523$. A Figura 6.7 mostra o resultado da etapa de estimação, que foi feita considerando-se uma predição com horizonte de passo igual a 15, isto é, a cada 15 passos é feita a atualização com o dado experimental. Este valor de passo foi adotado já que se esperava trabalhar aproximadamente nessa faixa de predição do modelo no horizonte do controlador. A Figura 6.8 mostra os resultados para a etapa de validação. A média do erro cometido na etapa de validação foi de $-0,0084$ e com um desvio padrão de $0,117$. A Figura 6.9 mostra o histograma do erro cometido na predição da altura. Pode-se notar que o gráfico se aproxima razoavelmente de uma distribuição gaussiana de média zero, indicando que a estimação não é tendenciosa e por isso válida para os propósitos de controle pretendidos.

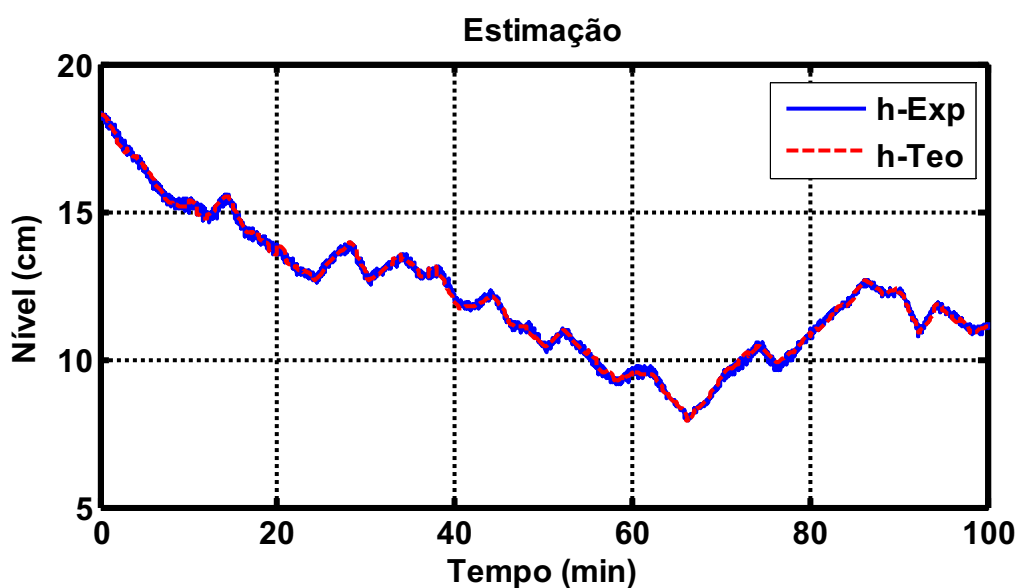


Figura 6.7 - Respostas experimental e teórica – Etapa de estimação.

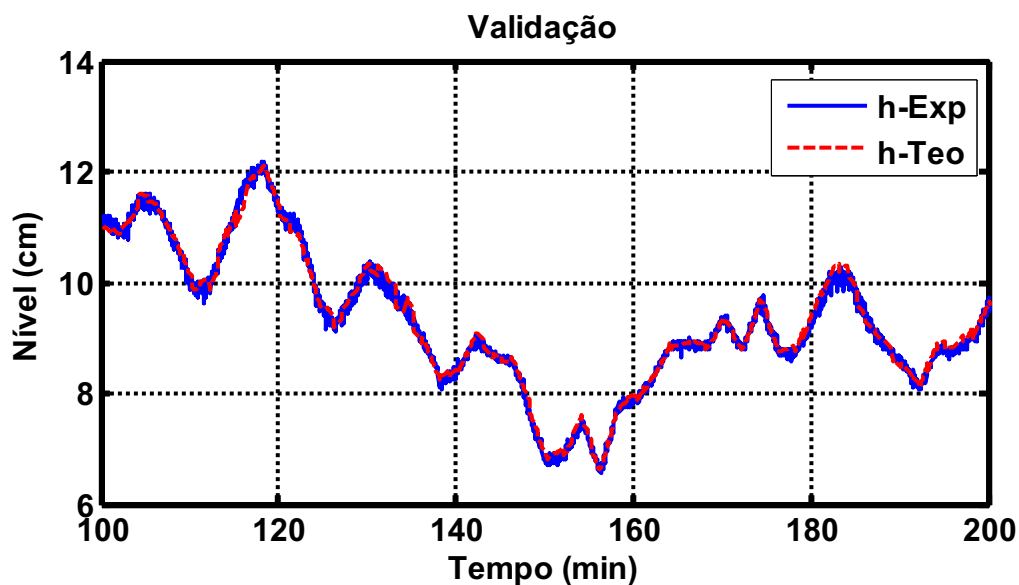


Figura 6.8 - Respostas experimental e teórica – Etapa de validação.

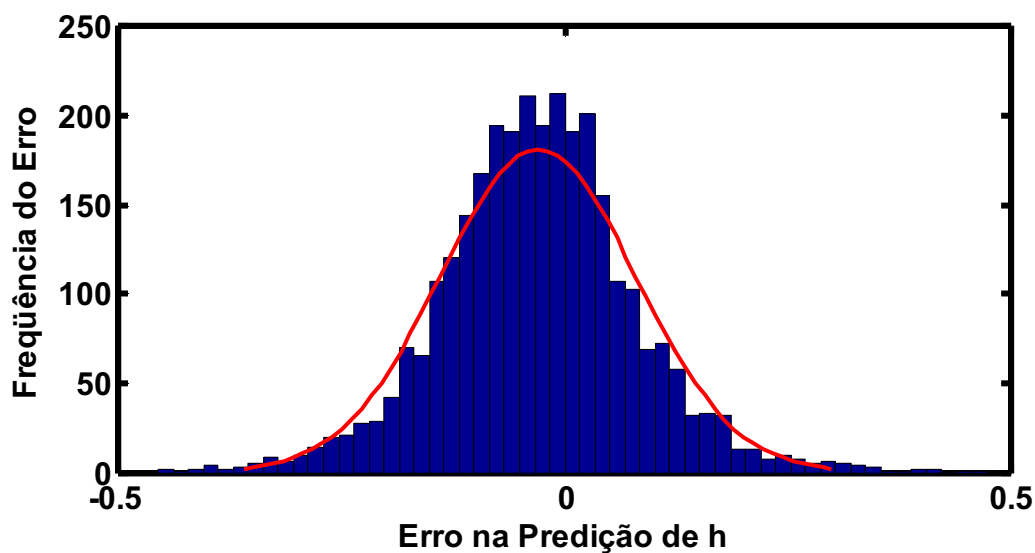


Figura 6.9 - Erro na predição da altura.

Foi então realizada outra corrida em malha aberta. Dessa vez, foram feitas alterações manuais e aleatórias, tanto em valor como em duração, variando o nível do reator entre 5 e 23 cm. As Figuras 6.10-6.11 mostram os valores experimentais para as vazões de ácido e de base. A Figura 6.12 apresenta os dados experimentais comparados com a predição da altura com passo igual a 1, isto é, a cada passo o valor do modelo é atualizado com o valor experimental, e a Figura 6.13 é o resultado para predição da altura com passo infinito.

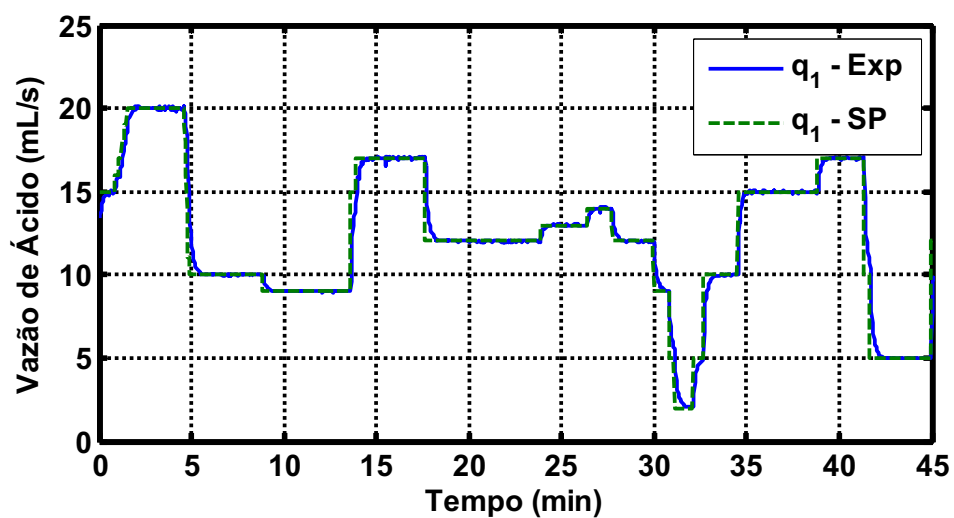


Figura 6.10 - Vazões de ácido para corrida em malha aberta.

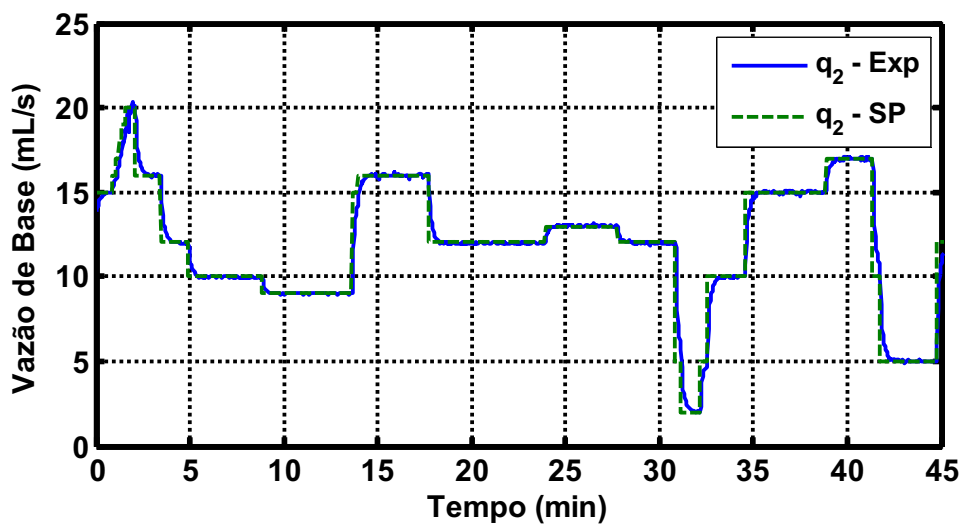


Figura 6.11 - Vazões de base para corrida em malha aberta.

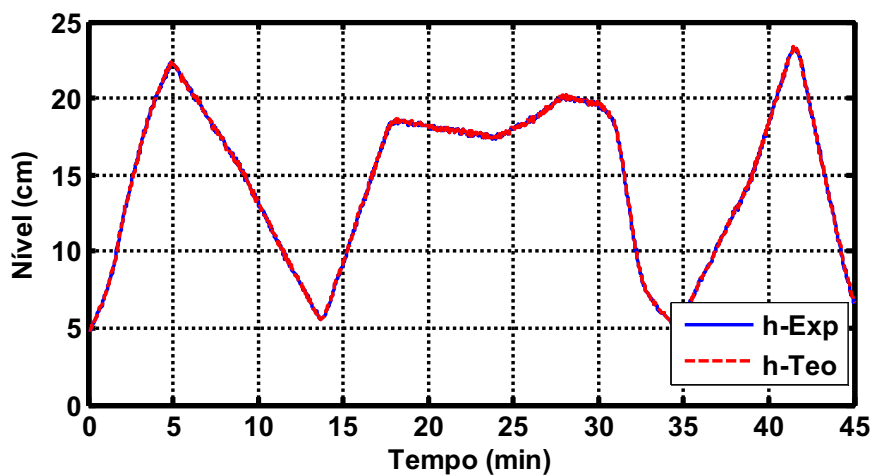


Figura 6.12 - Dados experimentais de corrida em malha aberta x Predição de altura usando modelo fenomenológico com passo 1.

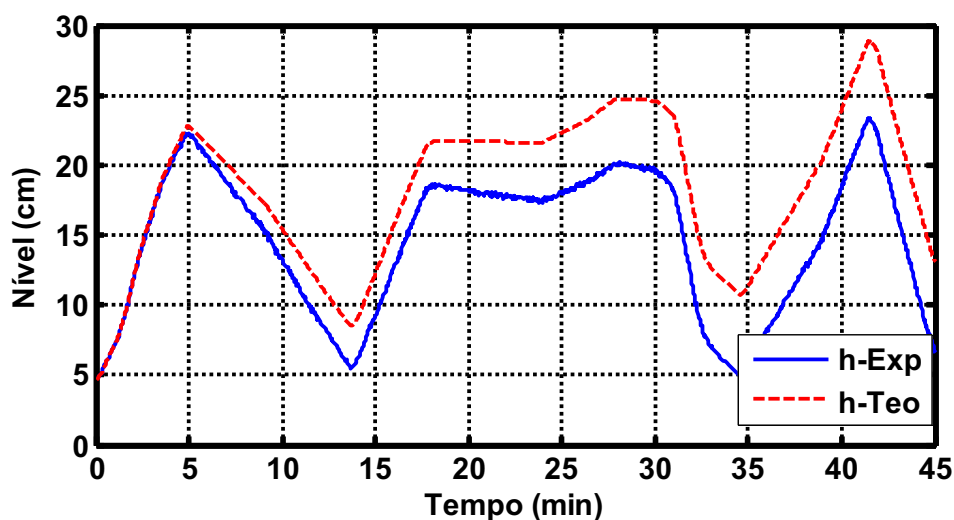


Figura 6.13 - Dados experimentais de corrida em malha aberta x Predição de altura usando modelo fenomenológico com passo infinito.

Para esse caso apenas o valor experimental inicial é utilizado fazendo-se a integração do modelo com as entradas. O distanciamento observado entre os valores teóricos e experimentais deve-se ao fato de que o sistema é muito próximo de um sistema integrante. Tal fato pôde ser comprovado na operação da unidade, uma vez que os valores de vazão simulados (12 mL/s) indicam a estabilização do nível e, na realidade, acontece um enchimento ou esvaziamento contínuo do reator. Desta forma, diferenças entre os valores usados para a simulação e o valor real se configuram em desvios que são adicionados e integrados no modelo resultando na diferença entre as curvas da Figura 6.13. O modelo fornece predições qualitativas da dinâmica do sistema, mesmo para o caso de predição com passo infinito. As informações que se afastam do valor real podem ser deslocadas para a incerteza, levando a exigir dos controladores sua característica de robustez.

A Figura 6.14 mostra uma corrida em malha aberta e os resultados para a predição do modelo. Como pode ser observado, o modelo atende aos propósitos de controle predizendo de forma muito próxima o nível, e de forma razoável o pH. Como esperado, é demonstrada uma certa dificuldade do modelo diferencial não-linear prever o pH na faixa entre os valores

de 6 e de 8 que, conforme indica a Figura 5.1 (curva de titulação), trata-se da região de alta não linearidade.

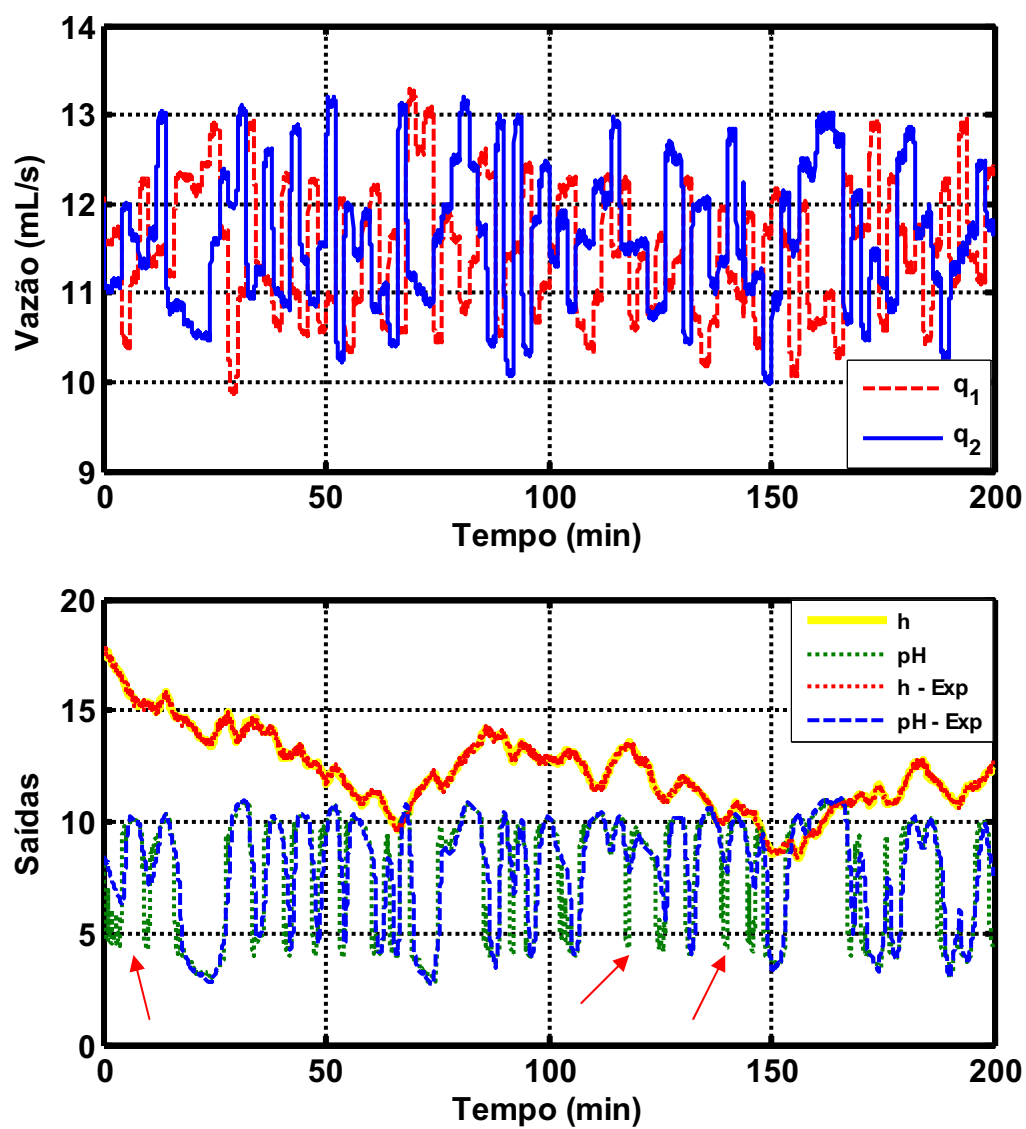


Figura 6.14 - Malha aberta: resultados teóricos e experimentais.

6.2 Modelo na Forma de Espaço de Estados

A formulação em espaço de estados resultante da manipulação algébrica é mostrada nas Eq.6.20-6.27. Os termos dW_{adz} e dW_{bdz} são resultantes da linearização da Eq. 5.11 e são apresentados nas Eq. 6.28-6.29. A Eq. 6.30 mostra a relação de $dydz$.

$$\mathbf{x} = [h \quad W_a \quad W_b] \quad (6.20)$$

$$\mathbf{u} = [q_1 \quad q_2] \quad (6.21)$$

$$\mathbf{y} = [h \quad pH] \quad (6.22)$$

$$\mathbf{d} = [q_3] \quad (6.23)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{c_y \cdot p_7 \cdot h^{p_7-1}}{Arh^2} + \frac{q_1(W_{a1} - W_a) + q_2(W_{a2} - W_a) + q_3(W_{a3} - W_a)}{Arh^2} & 0 & 0 \\ -\frac{q_1(W_{b1} - W_b) + q_2(W_{b2} - W_b) + q_3(W_{b3} - W_b)}{Arh^2} & \frac{-q_1 - q_2 - q_3}{Arh} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-q_1 - q_2 - q_3}{Arh} \end{bmatrix} \quad (6.24)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{Ar} & \frac{1}{Ar} \\ \frac{(W_{a1} - W_a)}{Arh} & \frac{(W_{a2} - W_a)}{Arh} \\ \frac{(W_{b1} - W_b)}{Arh} & \frac{(W_{b2} - W_b)}{Arh} \end{bmatrix} \quad (6.25)$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \frac{1}{Ar} \\ \frac{(W_{a3} - W_a)}{Arh} \\ \frac{(W_{b3} - W_b)}{Arh} \end{bmatrix} \quad (6.26)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & dydz / dW_{adz} & dydz / dW_{bdz} \end{bmatrix} \quad (6.27)$$

$$dW_{adz} = 1 + \frac{k_w}{H^2} - \frac{W_b \left(-\frac{ka1}{H^2} - \frac{4ka1.ka2}{H^3} \right)}{1 + \frac{ka1}{H} + \frac{ka1.ka2}{H^2}} + \frac{W_b \left(\frac{ka1}{H} + \frac{2.ka1.ka2}{H^2} \right) \left(-\frac{ka1}{H^2} + \frac{2.ka1.ka2}{H^3} \right)}{\left(1 + \frac{ka1}{H} + \frac{ka1.ka2}{H^2} \right)^2} \quad (6.28)$$

$$dW_{bdz} = \frac{\left(1 + \frac{k_w}{H^2} \right) \left(1 + \frac{ka1}{H} + \frac{ka1.ka2}{H^2} \right)}{\frac{ka1}{H} + \frac{2.ka1.ka2}{H^2}} - \frac{\left(H - \frac{k_w}{H} - W_a \right) \left(1 + \frac{ka1}{H} + \frac{ka1.ka2}{H^2} \right) \left(-\frac{ka1}{H^2} - \frac{4.ka1.ka2}{H^3} \right)}{\left(\frac{ka1}{H} + \frac{2.ka1.ka2}{H^2} \right)^2} + \frac{\left(H - \frac{k_w}{H} - W_a \right) \left(-\frac{ka1}{H^2} - \frac{2.ka1.ka2}{H^3} \right)}{\frac{ka1}{H} + \frac{2.ka1.ka2}{H^2}} \quad (6.29)$$

$$dydz = -\log_{10} \frac{e}{H^+} \quad (6.30)$$

6.3 Considerações Finais

Nesse capítulo foi apresentado o modelo diferencial não linear do sistema experimental. Foi também obtido o modelo na forma de espaço de estados, utilizado nos cálculos dos controladores preditivos. Foram desenvolvidas as rotinas no Labview[®], apresentadas no Apêndice A, para permitir a operação da planta experimental em tempo real. Realizou-se a operação em malha aberta do sistema para estimação/validação de parâmetros necessários e do modelo. Os resultados mostraram que as estimativas realizadas levaram a um modelo consistente que atende aos requisitos para a aplicação de controladores.

CAPÍTULO 7

7 MPC E RMPC APLICADOS AO SISTEMA EXPERIMENTAL: SIMULAÇÕES, RESULTADOS E DISCUSSÕES

7.1 Introdução

Nesse Capítulo serão apresentados os resultados de simulação com os seguintes controladores: IHMPC, MPC-RS, RMPC-MMR, LMI-RMPCR (forma nominal) e LMI-RMPCR (incerteza na forma de politopo). Os controladores robustos (RMPC-MMR e LMI-RMPCR) terão suas respostas comparadas com os controladores clássicos. A comparação de maior relevância nesse caso é a que foi realizada com o IHMPC. Os controladores IHMPC e os controladores RMPC desenvolvidos nesse trabalho são controladores da classe de controle de horizonte infinito.

Para a implementação em tempo real foi necessária a manipulação dos algoritmos para atender a forma da linearização local, como apresentado na Seção 7.2. O trabalho com algoritmos sucessivamente linearizado no ponto de operação leva à forma de sistemas LTV (*Linear Time Variant*), cujas formas encontram-se indicadas na Seção 7.3. O Capítulo também trás um breve estudo sobre observadores de estado, os resultados de operação em malha fechada e alguns dos principais problemas que ocorreram durante a operação da planta experimental.

Cabe ressaltar que os resultados experimentais referem-se apenas aos controladores clássicos: IHMPC e MPC-RS.

7.2 Modificações nos Controladores em Função da Linearização Sucessiva

Considerando que a linearização do sistema experimental apresentado nas Eq. 7.1-7.2 resulta nas Eq. 7.3-7.4, cuja forma difere da formulação clássica para espaço de estados, torna-se necessário modificar os algoritmos para atender a condição de linearização. Isto devido aos termos $\mathbf{f}_{k-1}$ e $\mathbf{O}_{k-1}$. Caso a linearização fosse feita na condição de estado estacionário, chegar-se-ia à forma clássica, uma vez que estes termos seriam iguais a zero. Contudo, a linearização no estado estacionário não atenderia à exigência do processo, pois devido à sensibilidade, um controlador projetado baseado neste ponto não conseguiria controlar o sistema, já que para algumas regiões o estado estacionário poderia encontrar-se muito distante do ponto desejado, mesmo com linearização sucessiva, tendo assim um modelo não representativo para controle do sistema, principalmente nas regiões de alto ganho. As modificações para esses controladores IHMPC, RMPC-MMR e LMI-RMPC seguem as idéias mostradas nessa seção. O controle MPC-RS já considera os termos resultantes da linearização em sua formulação, conforme pode ser observado no Capítulo 2.

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}}{dt} = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) \quad (7.1)$$

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}) \quad (7.2)$$

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}'}{dt} = \mathbf{A}_{k-1}\hat{\mathbf{x}}' + \mathbf{B}_{k-1}\mathbf{u}' + \mathbf{f}_{k-1} \quad (7.3)$$

$$\hat{\mathbf{y}}' = \mathbf{C}_{k-1}\hat{\mathbf{x}}' + \mathbf{O}_{k-1} \quad (7.4)$$

Existem diversas formas de tratar o problema. Uma delas é fazer a expansão dos estados conforme a Eq. 7.5, criando uma nova matriz de estados e assim pode-se manter a estrutura original do problema de otimização, conforme Capítulo 3. O termo relacionado com a linearização das saídas não acarreta problemas para o controlador, uma vez que apenas faz o mapeamento estado-saída e não interfere na dinâmica do sistema como o termo $\mathbf{f}_{k-1}$. Feita essa modificação, é possível trabalhar com o controlador definido anteriormente. Desta forma, considerando a facilidade que esta formulação oferece, a mesma foi adotada para a operação em tempo real. Outra forma pode ser obtida em Reis (2008).

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}'}{dt} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{k-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{f}_{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}' \\ 1 \end{bmatrix} + \mathbf{B}_{k-1} \mathbf{u}' \quad (7.5)$$

7.3 Controladores Preditivos na Forma LTV

No Capítulo 2 foram apresentados os controladores preditivos e robustos clássicos utilizados como base para esse trabalho. No Capítulo 3 foram desenvolvidos dois algoritmos de controle robusto. Em todos os casos citados, considerou-se que o sistema era invariante no tempo (*Linear Time Invariant* - LTI). Para a aplicação real no sistema experimental, que possui características não lineares, faz-se necessária a linearização sucessiva do modelo do processo de forma a se aplicar os algoritmos lineares. A evolução temporal do processo resulta, então, em um sistema variante no tempo cujos algoritmos são descritos a seguir.

O IHMPC com matrizes variantes no tempo é definido de forma que o movimento de controle $\mathbf{u}_k$, no instante de amostragem k , é dado pelo primeiro elemento $\mathbf{u}_{k|k}$ de

$\Xi: \{\mathbf{u}_{k|k}, \mathbf{u}_{k+1|k}, \dots, \mathbf{u}_{k+N_m-1|k}\}$ na forma da Eq. 7.6. Esta equação pode ser manipulada algebricamente resultando na Eq. 7.7, que transforma o horizonte de controle infinito para horizonte de controle finito. A seqüência de ações de controle é a solução do problema de otimização dado pelas Eq. 7.8-7.10, em que: $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T \geq \mathbf{0}$, $\mathbf{R} = \mathbf{R}^T > \mathbf{0}$, $\mathbf{S} = \mathbf{S}^T \geq \mathbf{0}$, $\bar{\mathbf{Q}}_k = \mathbf{C}_k^T \mathbf{Q} \mathbf{C}_k + \mathbf{A}_k^T \bar{\mathbf{Q}}_k \mathbf{A}_k$ (Eq. de Lyapunov), e $\Delta \mathbf{u}_{k+j} = \mathbf{u}_{k+j} - \mathbf{u}_{k+j-1}$. No instante $k + N_m$, e posteriormente, o vetor de entradas $\mathbf{u}$ é um vetor de zeros. O vetor $\mathbf{z}$ representa o vetor de estados reais medidos ou estimados das saídas medidas.

$$J_k = \min_{\mathbf{u}} \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{y}_{k+i}^T \mathbf{Q} \mathbf{y}_{k+i} + \mathbf{u}_{k+i}^T \mathbf{R} \mathbf{u}_{k+i} + \Delta \mathbf{u}_{k+i}^T \mathbf{S} \Delta \mathbf{u}_{k+i} \quad (7.6)$$

$$J_k = \min_{\Xi} \Xi^T \mathbf{H}_k \Xi + 2\Xi^T (\mathbf{G}_k \mathbf{z}_k - \mathbf{F}_k \mathbf{u}_{k-1}) \quad (7.7)$$

Com as seguintes matrizes:

$$\mathbf{H}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_k^T \bar{\mathbf{Q}}_k \mathbf{B}_k + \mathbf{R} + 2\mathbf{S} & \mathbf{B}_k^T \mathbf{A}_k^T \bar{\mathbf{Q}}_k \mathbf{B}_k - \mathbf{S} & \cdots & \mathbf{B}_k^T \mathbf{A}_k^{T^{N_m-1}} \bar{\mathbf{Q}}_k \mathbf{B}_k \\ \mathbf{B}_k^T \bar{\mathbf{Q}}_k \mathbf{A}_k \mathbf{B}_k - \mathbf{S} & \mathbf{B}_k^T \bar{\mathbf{Q}}_k \mathbf{B}_k + \mathbf{R} + 2\mathbf{S} & \cdots & \mathbf{B}_k^T \mathbf{A}_k^{T^{N_m-2}} \bar{\mathbf{Q}}_k \mathbf{B}_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{B}_k^T \bar{\mathbf{Q}}_k \mathbf{A}_k^{N_m-1} \mathbf{B}_k & \mathbf{B}_k^T \bar{\mathbf{Q}}_k \mathbf{A}_k^{N_m-2} \mathbf{B}_k & \cdots & \mathbf{B}_k^T \bar{\mathbf{Q}}_k \mathbf{B}_k + \mathbf{R} + 2\mathbf{S} \end{bmatrix} \quad (7.8)$$

$$\mathbf{G}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_k^T \bar{\mathbf{Q}}_k \mathbf{A}_k \\ \mathbf{B}_k^T \bar{\mathbf{Q}}_k \mathbf{A}_k^2 \\ \vdots \\ \mathbf{B}_k^T \bar{\mathbf{Q}}_k \mathbf{A}_k^{N_m} \end{bmatrix} \quad (7.9)$$

$$\mathbf{F}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{S} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (7.10)$$

Para o caso do controlador MPC-RS, a função objetivo do problema de otimização considerando o sistema LTV (*Linear Time Variant*) é mostrada nas Eq. 7.11-7.15.

$$\begin{aligned}
 \min_{v(k), \dots, v(k+N_m+N_p+2)} \quad & J = \frac{1}{2} \mathbf{v}^T \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{v} \\
 \text{Sujeito a:} \quad & \mathbf{D}_k \mathbf{v} = \mathbf{b}_k \\
 & \mathbf{u}_{\min} \leq \mathbf{u} \leq \mathbf{u}_{\max} \\
 & -|\Delta \mathbf{u}_{\min}| \leq \Delta \mathbf{u} \leq |\Delta \mathbf{u}_{\max}|
 \end{aligned} \tag{7.11}$$

Em que:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}_k \\ \Delta \mathbf{u}_{k+1} \\ \Delta \mathbf{u}_{k+2} \\ \vdots \\ \Delta \mathbf{u}_{k+N_m} \\ \dots\dots\dots \\ \lambda_k \\ \lambda_{k+1} \\ \lambda_{k+2} \\ \vdots \\ \lambda_{k+N_p} \end{bmatrix} \tag{7.12}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \vdots & [\mathbf{0}] \\ \dots\dots\dots & \vdots & \dots\dots\dots \\ [\mathbf{0}] & \vdots & \mathbf{S} \end{bmatrix} \tag{7.13}$$

$$\mathbf{b}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{RS}(\mathbf{y}_k^{SP} - \mathbf{y}_k) - \mathbf{C}_k \mathbf{A}_k \Delta \mathbf{x}_k - \frac{\mathbf{y}_k - \mathbf{y}_{k-1}}{\Delta t} \\ \mathbf{K}_{RS} \Delta \mathbf{y}_{k+1}^{SP} - (\mathbf{C}_k \mathbf{A}_k + \mathbf{K}_{RS} \mathbf{C}_k) \boldsymbol{\Phi}_k \Delta \mathbf{x}_k \\ \mathbf{K}_{RS} \Delta \mathbf{y}_{k+2}^{SP} - (\mathbf{C}_k \mathbf{A}_k + \mathbf{K}_{RS} \mathbf{C}_k) \boldsymbol{\Phi}_k^2 \Delta \mathbf{x}_k \\ \vdots \\ \mathbf{K}_{RS} \Delta \mathbf{y}_{k+N_m}^{SP} - (\mathbf{C}_k \mathbf{A}_k + \mathbf{K}_{RS} \mathbf{C}_k) \boldsymbol{\Phi}_k^{N_m} \Delta \mathbf{x}_k \\ \mathbf{K}_{RS} \Delta \mathbf{y}_{k+N_m+1}^{SP} - (\mathbf{C}_k \mathbf{A}_k + \mathbf{K}_{RS} \mathbf{C}_k) \boldsymbol{\Phi}_k^{N_m+1} \Delta \mathbf{x}_k \\ \mathbf{K}_{RS} \Delta \mathbf{y}_{k+N_m+2}^{SP} - (\mathbf{C}_k \mathbf{A}_k + \mathbf{K}_{RS} \mathbf{C}_k) \boldsymbol{\Phi}_k^{N_m+2} \Delta \mathbf{x}_k \\ \vdots \\ \mathbf{K}_{RS} \Delta \mathbf{y}_{k+N_p}^{SP} - (\mathbf{C}_k \mathbf{A}_k + \mathbf{K}_{RS} \mathbf{C}_k) \boldsymbol{\Phi}_k^{N_p} \Delta \mathbf{x}_k \end{bmatrix} \tag{7.14}$$

$$\mathbf{D}_k = \begin{bmatrix}
\mathbf{C}_k \mathbf{B}_k & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\
(\mathbf{C}_k \mathbf{A}_k + \mathbf{K}_{\text{RS}} \mathbf{C}_k) \Psi_k \mathbf{B}_k & \mathbf{C}_k \mathbf{B}_k & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\
(\mathbf{C}_k \mathbf{A}_k + \mathbf{K}_{\text{RS}} \mathbf{C}_k) \Phi_k \Psi_k \mathbf{B}_k & (\mathbf{C}_k \mathbf{A}_k + \mathbf{K}_{\text{RS}} \mathbf{C}_k) \Psi_k \mathbf{B}_k & \dots & \mathbf{0} & -\mathbf{I} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\
\vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\
(\mathbf{C}_k \mathbf{A}_k + \mathbf{K}_{\text{RS}} \mathbf{C}_k) \Phi_k^{N_m-1} \Psi_k \mathbf{B}_k & (\mathbf{C}_k \mathbf{A}_k + \mathbf{K}_{\text{RS}} \mathbf{C}_k) \Phi_k^{N_m-2} \Psi_k \mathbf{B}_k & \dots & \mathbf{C}_k \mathbf{B}_k & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{I} \\
(\mathbf{C}_k \mathbf{A}_k + \mathbf{K}_{\text{RS}} \mathbf{C}_k) \Phi_k^{N_m} \Psi_k \mathbf{B}_k & (\mathbf{C}_k \mathbf{A}_k + \mathbf{K}_{\text{RS}} \mathbf{C}_k) \Phi_k^{N_m-1} \Psi_k \mathbf{B}_k & \dots & (\mathbf{C}_k \mathbf{A}_k + \mathbf{K}_{\text{RS}} \mathbf{C}_k) \Psi_k \mathbf{B}_k & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{I} \\
(\mathbf{C}_k \mathbf{A}_k + \mathbf{K}_{\text{RS}} \mathbf{C}_k) \Phi_k^{N_m+1} \Psi_k \mathbf{B}_k & (\mathbf{C}_k \mathbf{A}_k + \mathbf{K}_{\text{RS}} \mathbf{C}_k) \Phi_k^{N_m} \Psi_k \mathbf{B}_k & \dots & (\mathbf{C}_k \mathbf{A}_k + \mathbf{K}_{\text{RS}} \mathbf{C}_k) \Phi_k \Psi_k \mathbf{B}_k & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{I} \\
\vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\
(\mathbf{C}_k \mathbf{A}_k + \mathbf{K}_{\text{RS}} \mathbf{C}_k) \Phi_k^{N_p-1} \Psi_k \mathbf{B}_k & (\mathbf{C}_k \mathbf{A}_k + \mathbf{K}_{\text{RS}} \mathbf{C}_k) \Phi_k^{N_p-1} \Psi_k \mathbf{B}_k & \dots & (\mathbf{C}_k \mathbf{A}_k + \mathbf{K}_{\text{RS}} \mathbf{C}_k) \Phi_k^{N_p-N_m} \Psi_k \mathbf{B}_k & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{I}
\end{bmatrix} \quad (7.15)$$

O RMPC-MMR na forma de sistema variante no tempo é definido de forma que o movimento de controle $\mathbf{u}(k)$, no instante k de amostragem, é dado pelo primeiro elemento $\mathbf{u}_{k|k}$ de $\Xi: \{\mathbf{u}_{k|k}, \mathbf{u}_{k+1|k}, \dots, \mathbf{u}_{k+N_m-1|k}\}$, que é a solução do problema de otimização dado pelas Eq. 7.16-7.34.

$$\min_{\Xi \in \Xi^m} \max_{\Theta \in \Theta^m} \left[J_k(\Xi_k, \Theta_k) = \mathbf{X}_{k+i}^T \boldsymbol{\mu} \mathbf{X}_{k+i} + \Xi_k^T \Lambda \Xi_k \right] \quad (7.16)$$

Sujeito a:

$$\Theta_k \leq \mathbf{I} |\theta_k| \quad (7.17)$$

$$J_k(\Xi_k, \Theta_k) \leq J_k(\bar{\Xi}_k^*, \bar{\Theta}_k), \forall \Theta_k \in \Theta \quad (7.18)$$

$$\mathbf{u}_{k+q} \in \mathbf{U}, j=0, \dots, N_m-1 \quad (7.19)$$

$$\mathbf{u}_{k+q+1} = 0, \text{ quando } q \geq 0 \quad (7.20)$$

$$\mathbf{X}_{k+1} = \bar{\mathbf{A}}_k \mathbf{z}_k + \bar{\mathbf{B}}_k(\Theta_k) \Xi_k \quad (7.21)$$

Cujas definições necessárias encontram-se a seguir:

$$\bar{\Xi}_k^* = \boldsymbol{\eta} \bar{\Xi}_{k-1}^*, \boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \vdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \dots & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (7.22)$$

$$\mathbf{X}_{k+1} = [\mathbf{x}_{k+1} \quad \dots \quad \mathbf{x}_{k+N_m-1}]^T \quad (7.23)$$

$$\Xi_{k+1} = [\mathbf{u}_k \quad \dots \quad \mathbf{u}_{k+N_m-1}]^T \quad (7.24)$$

$$\Theta_{k+1} = [\theta_k \quad \dots \quad \theta_{k+N_m-1}]^T \quad (7.25)$$

$$\theta_k = [\delta_1 \quad \dots \quad \delta_{\dim(\mathbf{u})}]^T \quad (7.26)$$

$$\overline{\mathbf{A}}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_k \\ \vdots \\ \mathbf{A}_k^{N_m} \end{bmatrix} \quad (7.27)$$

$$\overline{\mathbf{B}}_k(\boldsymbol{\theta}_k) = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_k(\boldsymbol{\theta}_k) & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_k \mathbf{B}_k(\boldsymbol{\theta}_k) & \mathbf{B}_k(\boldsymbol{\theta}_k) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_k^{N_m-1} \mathbf{B}_k(\boldsymbol{\theta}_k) & \mathbf{A}_k^{N_m-1} \mathbf{B}_k(\boldsymbol{\theta}_k) & \cdots & \mathbf{B}_k(\boldsymbol{\theta}_k) \end{bmatrix} \quad (7.28)$$

$$\mathbf{B}_k(\boldsymbol{\theta}_k) = \mathbf{B}_k \begin{bmatrix} 1 + \delta^1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 + \delta^2 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 + \delta^{\dim(\mathbf{u})} \end{bmatrix} \quad (7.29)$$

$$\boldsymbol{\mu} = \text{diag} \left[\underbrace{\mathbf{Q} \dots \mathbf{Q}}_{N_m-1} \quad \overline{\mathbf{Q}}_k \right] \quad (7.30)$$

$$\overline{\mathbf{Q}}_k = \mathbf{Q} + \mathbf{A}_k^T \overline{\mathbf{Q}}_k \mathbf{A}_k \quad (7.31)$$

$$\boldsymbol{\Lambda} = \text{diag} \left[\underbrace{\mathbf{R} \dots \mathbf{R}}_{N_m} \right] \quad (7.32)$$

$$\mathbf{U}^{N_m} = \underbrace{\mathbf{u} \dots \mathbf{u}}_{N_m} \quad (7.33)$$

$$\mathbf{X}^{N_m} = \underbrace{\mathbf{x} \dots \mathbf{x}}_{N_m} \quad (7.34)$$

O LMI-RMPC na forma de sistema variante no tempo é definido de forma que o movimento de controle $\mathbf{u}(k)$, no instante k de amostragem, é dado pelo primeiro elemento $\mathbf{u}_{k|k}$ de $\Xi: \{\mathbf{u}_{k|k}, \mathbf{u}_{k+1|k}, \dots, \mathbf{u}_{k+N_m-1|k}\}$, dado pelas Eq. 7.35-7.45.

$$\min_{\chi, \mathbf{U}_{\text{lmi}}} \chi \quad (7.35)$$

Sujeito à :

$$\begin{pmatrix} \chi & (\mathbf{C}_{k,\text{lmi}} (\mathbf{A}_{i,k,\text{lmi}} \mathbf{x}_{k|k} + \mathbf{B}_{i,k,\text{lmi}} \mathbf{U}_{\text{lmi}}))^T & \mathbf{U}_{\text{lmi}}^T \\ (\mathbf{C}_{k,\text{lmi}} (\mathbf{A}_{i,k,\text{lmi}} \mathbf{x}_{k|k} + \mathbf{B}_{i,k,\text{lmi}} \mathbf{U}_{\text{lmi}})) & \mathbf{Q}_{\text{lmi}}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{U}_{\text{lmi}} & \mathbf{0} & \mathbf{R}_{\text{lmi}}^{-1} \end{pmatrix} \geq 0 \quad (7.36)$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}_{\mathbf{u}_{\text{lmi}}} \\ \mathbf{E}_{\mathbf{x}_{\text{lmi}}} \mathbf{B}_{i,k,\text{lmi}} \end{pmatrix} \mathbf{U}_{\text{lmi}} \leq \begin{pmatrix} \mathbf{F}_{\mathbf{u}_{\text{lmi}}} \\ \mathbf{F}_{\mathbf{x}_{\text{lmi}}} - \mathbf{E}_{\mathbf{x}_{\text{lmi}}} \mathbf{A}_{i,k,\text{lmi}} \mathbf{x}_{k|k} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & (\mathbf{A}_{i,k} \mathbf{z}_{k|k} + \mathbf{B}_{i,k} \mathbf{u}_{k|k})^T \\ (\mathbf{A}_{i,k} \mathbf{z}_{k|k} + \mathbf{B}_{i,k} \mathbf{u}_{k|k}) & \mathbf{P}^{-1} \end{pmatrix} \geq 0 \quad (7.37)$$

Com:

$$\mathbf{U}_{\text{lmi}} = (\mathbf{u}_{k|k}^T \quad \mathbf{u}_{k+1|k}^T \quad \dots \quad \mathbf{u}_{k+N_m-1|k}^T)^T \quad (7.38)$$

$$\mathbf{A}_{k,\text{lmi}} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{A}_k \\ \mathbf{A}_k^2 \\ \vdots \\ \mathbf{A}_k^{N_m-1} \end{pmatrix} \quad (7.39)$$

$$\mathbf{B}_{k,\text{lmi}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_k & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_k \mathbf{B}_k & \mathbf{B}_k & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}_k^{N_m-2} \mathbf{B}_k & \dots & \mathbf{A}_k \mathbf{B}_k & \mathbf{B}_k & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (7.40)$$

$$\mathbf{C}_{k,\text{lmi}} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_k & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C}_k \end{pmatrix} \quad (7.41)$$

$$\mathbf{R}_{\text{lmi}} = \begin{pmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{R} \end{pmatrix} \quad (7.42)$$

$$\mathbf{Q}_{\text{limi}} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Q} \end{pmatrix} \quad (7.43)$$

$$\mathbf{E}_{\mathbf{u}_{\text{limi}}} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_{\mathbf{u}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{E}_{\mathbf{u}} \end{pmatrix}, \mathbf{F}_{\mathbf{u}_{\text{limi}}} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_{\mathbf{u}}^T & \mathbf{f}_{\mathbf{u}}^T & \dots & \mathbf{f}_{\mathbf{u}}^T \end{pmatrix}^T \quad (7.44)$$

$$\mathbf{E}_{\mathbf{x}_{\text{limi}}} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_{\mathbf{x}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{E}_{\mathbf{x}} \end{pmatrix}, \mathbf{F}_{\mathbf{x}_{\text{limi}}} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_{\mathbf{x}}^T & \mathbf{f}_{\mathbf{x}}^T & \dots & \mathbf{f}_{\mathbf{x}}^T \end{pmatrix}^T \quad (7.45)$$

7.4 Observador de Estado

Uma vez que o estado pode ser definido apenas como uma variável matemática, necessária à resolução do sistema, ela pode não ter representação física. Desta forma, é preciso estimar os estados de modo a informar ao sistema um valor de razoável representação, sob pena de levar o controlador a calcular uma ação de controle para valores iniciais irreais, podendo assim apresentar comportamentos diferentes das respostas desejadas.

No sistema experimental, definiu-se como estados h , W_a e W_b . Para esse caso, os dois últimos estados não são medidos, como foi apresentado na seção de modelagem do sistema, sendo então necessário estimá-los. Considerando o sistema sem o tampão, o valor de W_a pode ser calculado pela Eq. 6.9 e W_b é igual a zero, conforme Eq. 6.10. Apesar de não trabalhar na parte experimental com o tampão, para fins de simulação, faz-se necessária a consideração de uma fração mínima de solução tampão. Isto ocorre devido ao fato de a água de abastecimento não ser exclusivamente H_2O , contendo íons dissolvidos que levam o sistema

real a apresentar comportamentos de uma solução levemente tamponada (MONTANDON, 2005). Para tal, foi utilizado o filtro de Kalman (KAILATH, 1980), como apresenta a Eq. 7.46:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{B}\mathbf{u}_k + \mathbf{L}_K(\mathbf{y}_{\text{med}_k} - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) \quad (7.46)$$

Para esse caso, a matriz de transmissão direta é igual a zero e $\mathbf{L}_K$ é a matriz de ganho de Kalman, encontrada pela solução da Equação Discreta de Riccati. $\mathbf{y}_{\text{med}_k}$ é o vetor das saídas medidas. Os estados são estimados a partir das saídas medidas e das entradas enviadas para a planta. Os valores para $\mathbf{Q}_{\text{obs}}$ e $\mathbf{R}_{\text{obs}}$ foram iguais $0,1.\mathbf{I}$ de ordem apropriada.

Os resultados apresentados nessa Seção foram obtidos exclusivamente por simulação computacional. Para a obtenção das respostas a seguir foram feitas as considerações:

- Plant: modelo diferencial não linear;
- Ruído: modelo diferencial não linear com adição de ruído branco, gerado por sequência de números aleatórios, na ordem de 20% e $\mathbf{y}(1)$ e 10% em $\mathbf{y}(2)$. As respostas desse sistema devem acompanhar as respostas de Plant, exceto pela diferença imposta pelo ruído adicionado;
- Model: modelo linearizado localmente;
- Estim: modelo linearizado localmente com estimação de estados. As respostas desse sistema acompanham a resposta de Model, cuja linearização é utilizada para o cálculo das respostas, para o caso da saída $\mathbf{y}(2)$, já que $\mathbf{y}(1) = \mathbf{x}(1)$ é uma variável medida.

A Figura 6.1 apresenta uma simulação em que se considera que a planta e o modelo possuem um pouco de solução tampão ($q_3 = 0,05 \text{ mL/s}$), uma vez que como a água de abastecimento naturalmente já possui alguns íons gerando um efeito levemente tamponante está é uma consideração bastante razoável. As entradas neste caso foram dadas por uma

seqüência aleatória de distribuição uniforme. Percebe-se que os resultados para o nível ($y(1)$) são bastante próximos. Já para o caso do pH ($y(2)$), percebe-se que o ruído mostra um efeito mais visível que para o nível. Pode-se observar uma degradação na resposta do modelo com o estimador de estados na região próxima ao pH igual a 7.

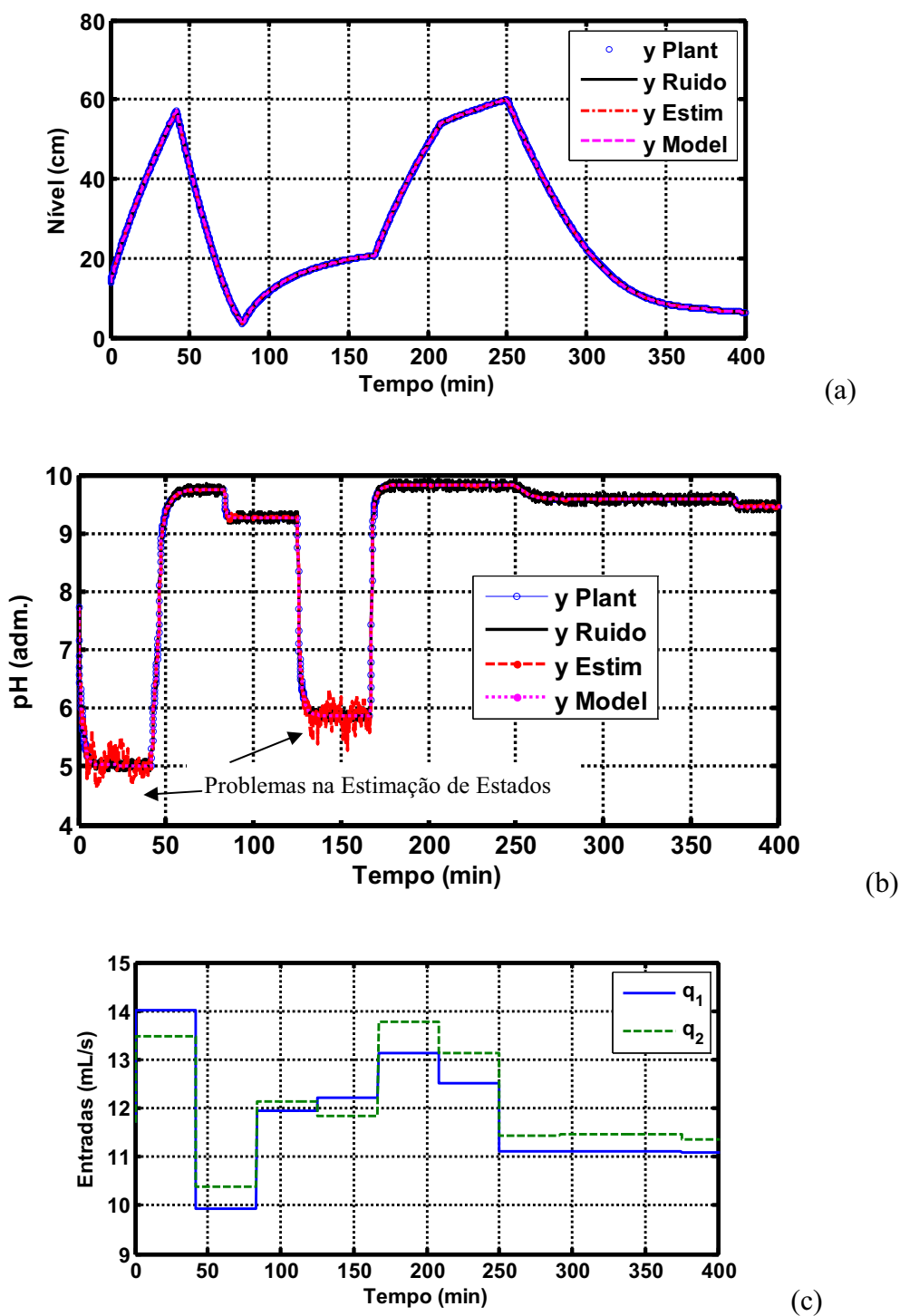
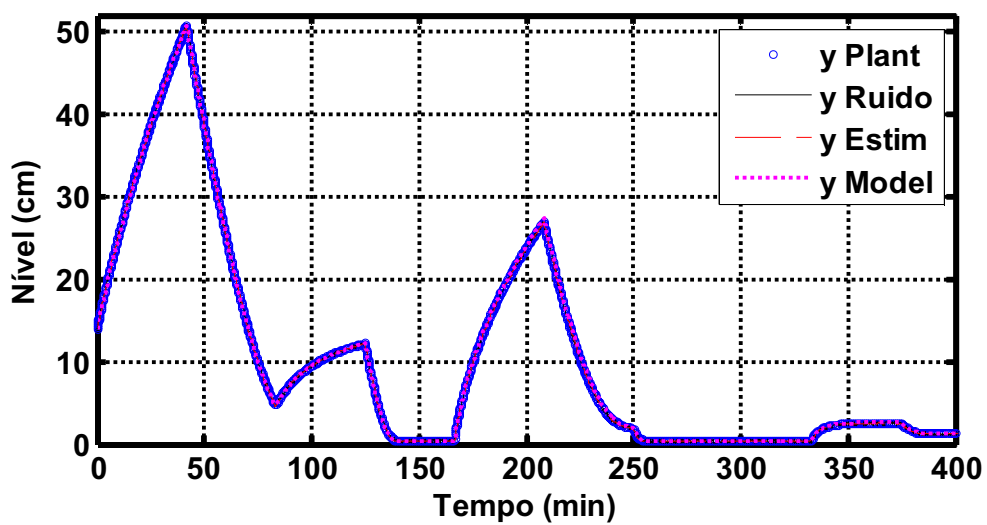
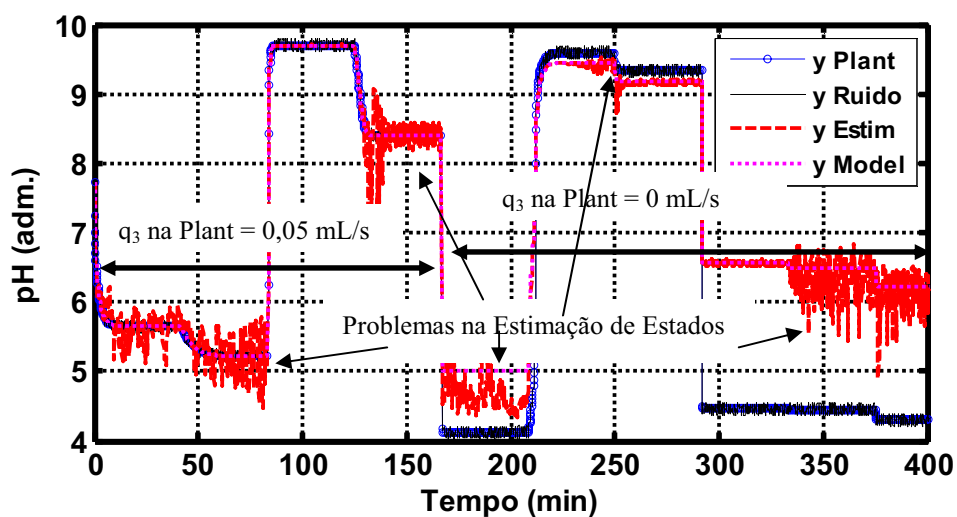


Figura 7.1 - Simulação para observador de estado: caso modelo perfeito.

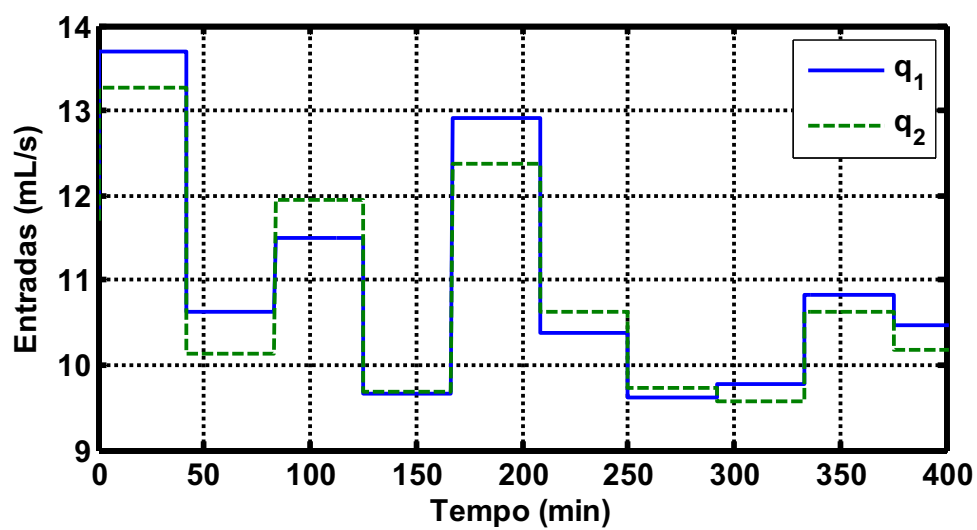
A planta se tornaria o mais não linear em $q_3 = 0$ mL, conforme indica a Figura 5.1 (curva de titulação). A Figura 7.2 mostra o comportamento do sistema em uma situação de desvio planta-modelo. As entradas para esta simulação são também dadas por seqüências aleatórias de distribuição uniforme (Figura 7.2 c). Nesse caso, a planta inicialmente possui $q_3 = 0,05$ mL/s e após 160 minutos de operação este valor é zerado, levando o modelo chamado de Plant a apresentar o comportamento de maior não linearidade. Para Model, Ruído e Estim q_3 continua a consideração de que a vazão de solução tampão se mantenha no valor de 0,05 mL/s. A partir desse instante, pode-se observar que o modelo e a Plant, na integração dos sistemas, apresentam valores diferentes. Observa-se também um aumento na degradação da resposta do sistema com estimador de estado, mesmo em regiões distantes do ponto crítico do sistema representado pelo pH igual a 7. Essa situação de desvio planta modelo pode ocorrer, por exemplo, ao repor solução no tanque, pela agitação da solução pronta, uma vez que na operação em tempo real foi observada variação considerável da medida de pH nessas ocasiões. A situação contrária é mostrada na Figura 7.3. Para esse caso, o modelo torna-se o mais não linear (Model com $q_3 = 0$ mL/s após 160 minutos de simulação) e a planta se manteria tamponada (Plant com $q_3 = 0,05$ mL/s durante toda a simulação) mostra a situação contrária, e a planta, nesse caso, tem o comportamento não linear suavizado pela presença de tampão. Para a resposta de $y(1)$, ou seja, o nível (Figura 7.3 a), a divergência refere-se à integração dos modelos, e reflete a diferença na consideração de q_3 nos modelos. Pode-se notar que o estimador de estado funciona bem, pois ele corrige essa diferença. Já para a Figura 7.3 b, percebe-se que os valores de pH pelo Model e pela Plant diferem, e, além disso, houve degradações nas respostas para o Estim mesmo após a retirada de q_3 em Model, o sistema não conseguiu chegar à estimação sem *offset*.



(a)

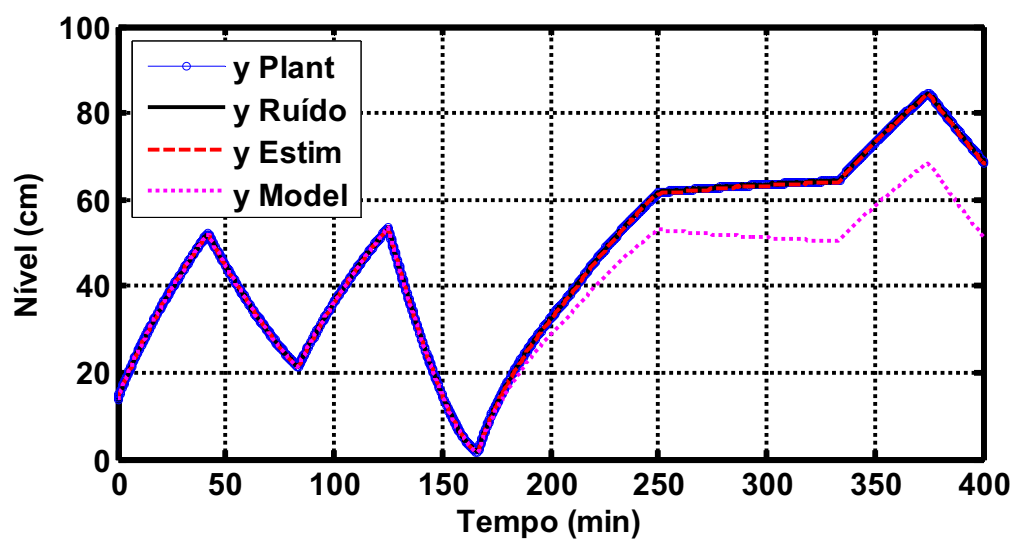


(b)

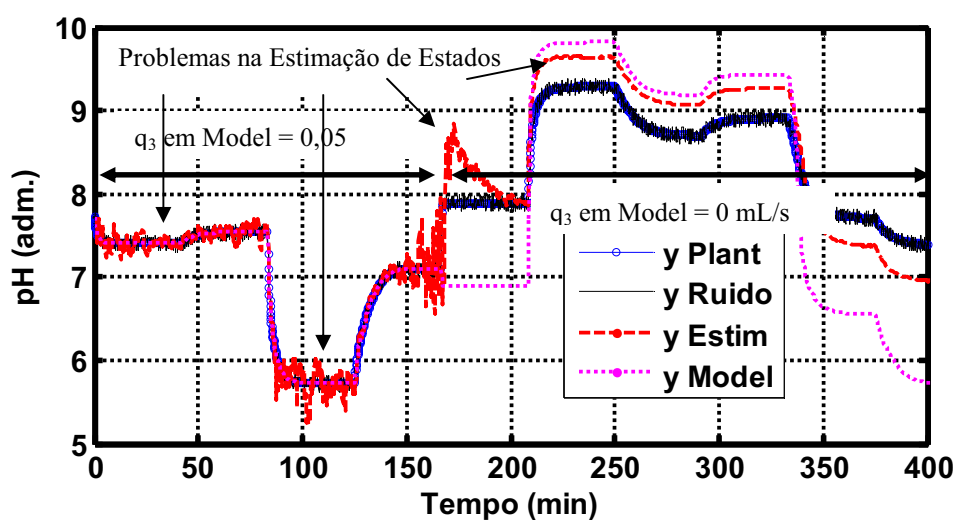


(c)

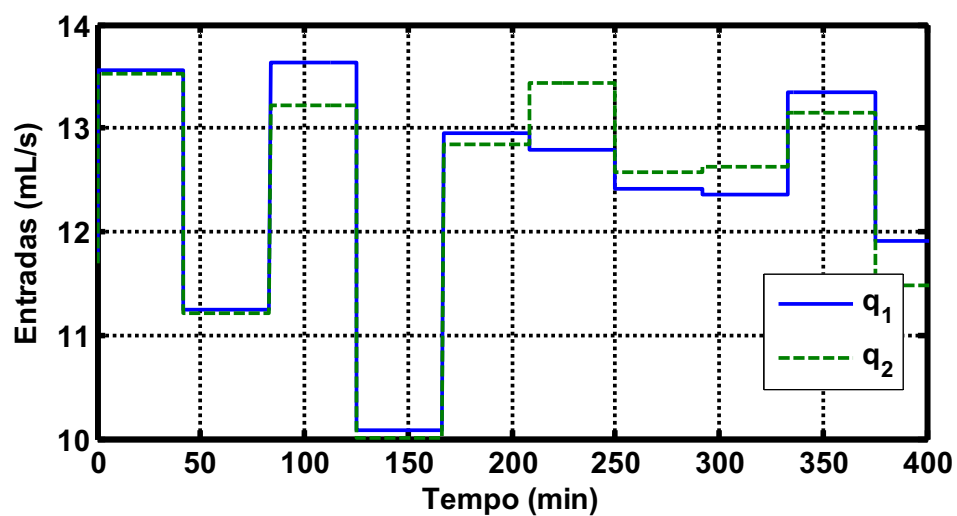
Figura 7.2 - Simulação para observador de estado – $q_3 = 0$ após 160 min no modelo Plant.



(a)



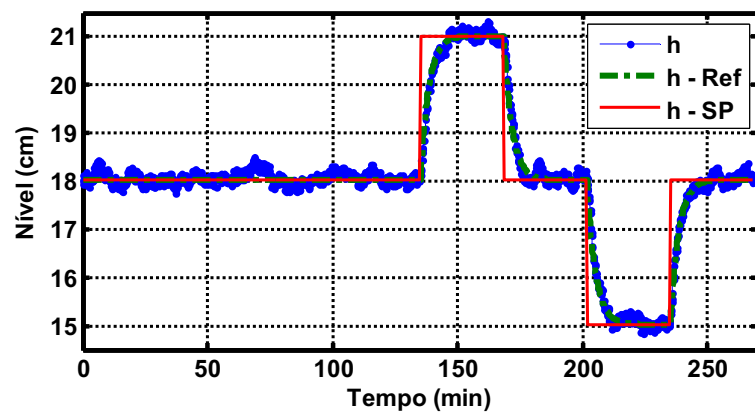
(b)



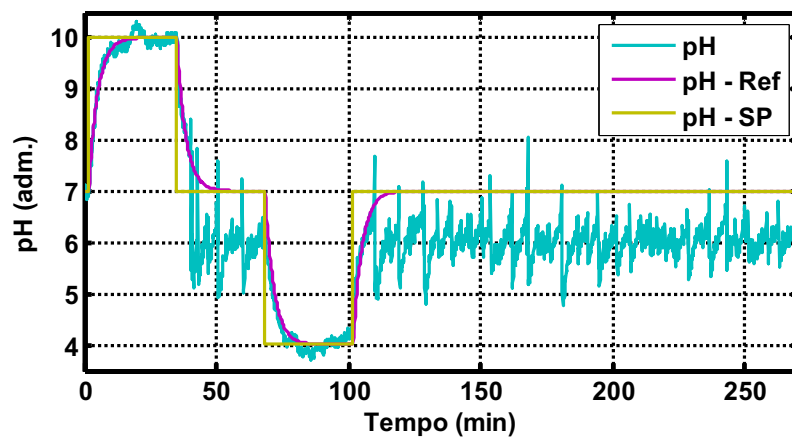
(c)

Figura 7.3 - Simulação para observador de estado – $q_3 = 0$ após 160 min em Model.

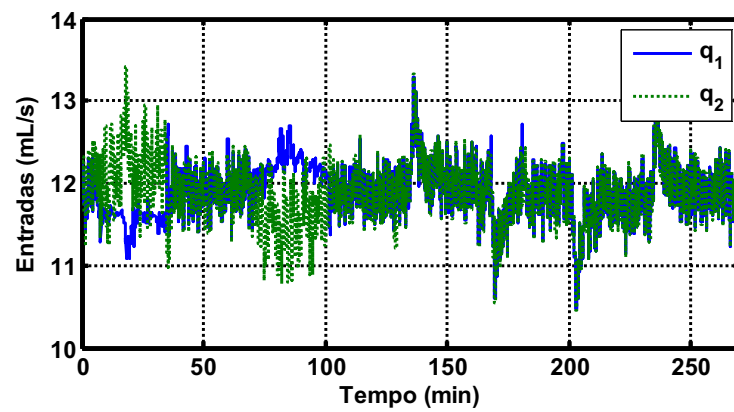
A Figura 7.4 apresenta uma simulação com o controlador MPC-RS, considerando a situação de desvio planta modelo descrita para a Figura 7.2. É interessante ressaltar que caso a planta esteja próxima da máxima não linearidade teórica ($q_3 = 0$ mL/s), existem problemas na região próxima ao pH igual a 7. Δ , nesse caso, são as variáveis de folga (conforme Eq. 7.12) para viabilidade do problema de otimização associado à formulação do controlador MPC-RS. Isto implica que o valor desejável para essa variável é zero quando o sistema encontra-se próximo ao estado estacionário e é diferente de zero quando o sistema é submetido à perturbação ou comando. A simulação indica que a corrida não teria problemas na estimação de estados. Na operação real da unidade, contudo, ocorreram problemas na estimação de estado, finalizando uma corrida abruptamente, uma vez que não houve convergência da solução do observador e assim a ação de controle não foi calculada. A Figura 7.5 mostra a corrida com o controlador MPC_RS em que ocorreu esse fato. Após análise, através de simulação e testes com operação em tempo real, a situação foi contornada para outras corridas, utilizando-se os estados do modelo sem o termo de inovação, sendo satisfatório para a aplicação dos controladores. Nesse caso, o valor para o estado equivale à integração local do modelo não linear, valor este que deve coincidir com o valor para a linearização local. Nesse caso a suposição é de que o sistema, sob algumas condições, passe por regiões onde a planta é não observável, resultando assim em problemas na estimação de estados. A utilização de modelos entrada-saída, como por exemplo, as redes neurais, dispensa a utilização de observadores de estado, a depender da formulação do controlador (MONTANDON, 2005).



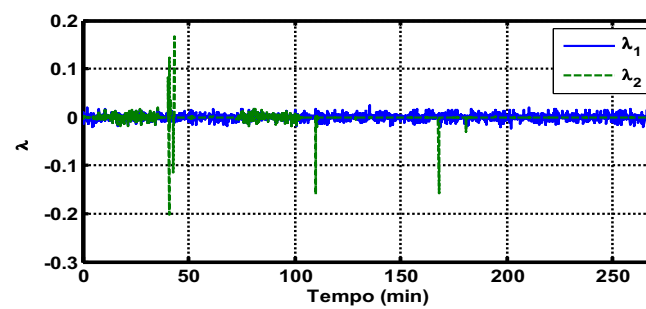
(a)



(b)

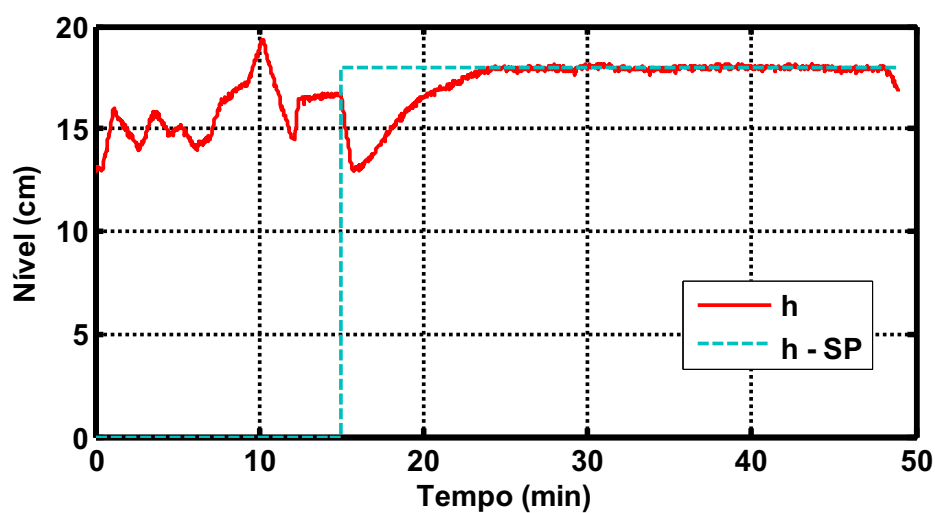


(c)

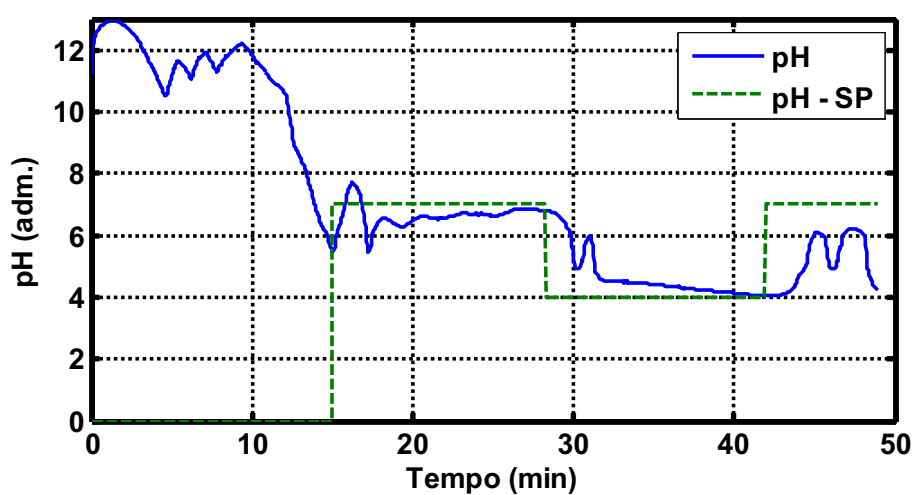


(d)

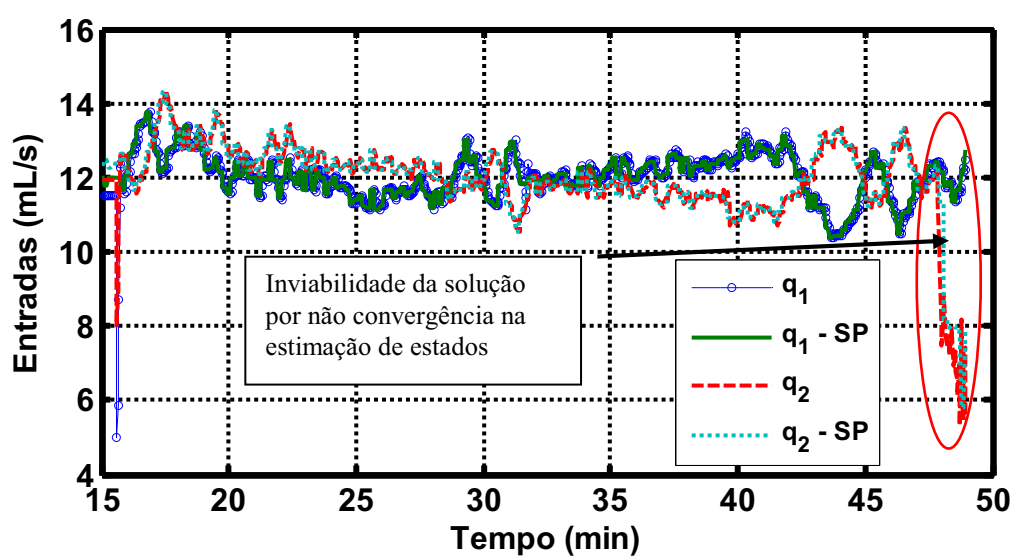
Figura 7.4 - Simulação: MPC-RS com observador de estado.



(a)



(b)



(c)

Figura 7.5 - Corrida em malha fechada – MPC-RS: problemas com observador de estado.

7.5 Operação em Malha Fechada

Esse tópico trata da operação em malha fechada do reator de neutralização. O nível do reator e o pH são as variáveis controladas ou saídas do sistema. As vazões de ácido e de base são as variáveis manipuladas ou entradas. A vazão de solução tampão foi modelada como uma perturbação, que pode ser tratada como perturbação medida ou não medida, a depender de como ela é utilizada no sistema/controlador e nos modelos de simulação. Para a operação em malha fechada experimental não foi utilizada a adição de solução tampão.

Para a operação em tempo real foram desenvolvidas VI em Labview[®] para cada controlador. Esse programa realiza a aquisição de dados, a interface gráfica do sistema e a interface matemático-computacional. Os controladores foram implementados em linguagem Matlab[®]. O diagrama de blocos genérico é mostrado na Figura 7.6.

Utilizou-se o controle cascata, em que a saída do controlador MPC ou RMPC é o valor de *setpoint* para um controle PID. A adoção deste tipo de controle se deu como uma forma de corrigir a vazão devido ao efeito que a variação do nível no tanque de armazenamento exerce sobre a saída da bomba. Durante a fase de estudos foi também avaliada a aplicação do controle na forma de corrente para a bomba e não na forma de vazão, considerando a possibilidade de problemas nos transmissores de vazão, uma vez que se trata de um equipamento bastante sensível. Para este caso, não se utilizou o controle do tipo cascata e a ação de controle seria aplicada diretamente na bomba, mas este caso foi apenas estudado e não será tratado nesse trabalho. A implementação de fato utilizou-se da opção de controle cascata.

As implementações em Labview[®] e em Matlab[®] para os controladores MPC-RS, IHMPC, RMPC-MMR e LMI-RMPCR encontram-se no Apêndice A.

7.5.1 Resultados Experimentais

Os controladores MPC-RS e IHMPC foram implementados na operação em tempo real na planta experimental. Os demais controladores (RMPC-MMR e LMI-RMPCR), por sua natureza, como controladores de horizonte infinito, tiveram os resultados de simulação comparados com os resultados de simulação e experimentais dos controladores de fato implementados na unidade, principalmente objetivando-se avaliá-los em uma mesma base para fins de comparação.

Na literatura, encontram-se diversas técnicas de sintonização de controladores. Adotou-se nesse trabalho o roteiro apresentado por Henson e Seborg (1997) e as indicações de Montandon (2005), cujos desenvolvimentos foram feitos no controlador MPC-RS aplicado ao controle SISO da unidade experimental (controle de pH com manipulação da vazão de a) e que, nesse caso, será adotado como um balizador de ações, de forma a se adquirir experiência na operação da unidade e na solução dos problemas que porventura acontecessem. Foi ainda realizado um ajuste fino de campo durante a corrida inicial em malha fechada com cada controlador, realizando pequenos ajustes nos parâmetros de forma que o sistema apresentasse melhor desempenho experimental na malha fechada. A Tabela 7.1 mostra os parâmetros de cada controlador resultante da simulação. Não houve preocupação em se obter o melhor controlador, e sim respostas que atendessem, de forma satisfatória, ao desempenho e à estabilidade. Desta forma os controladores foram inicialmente sintonizados com matrizes identidades e horizonte de controle igual a 10 e foi feita a sintonia até a obtenção de uma resposta satisfatória. Os controladores de horizonte infinito mantiveram a mesma sintonia.

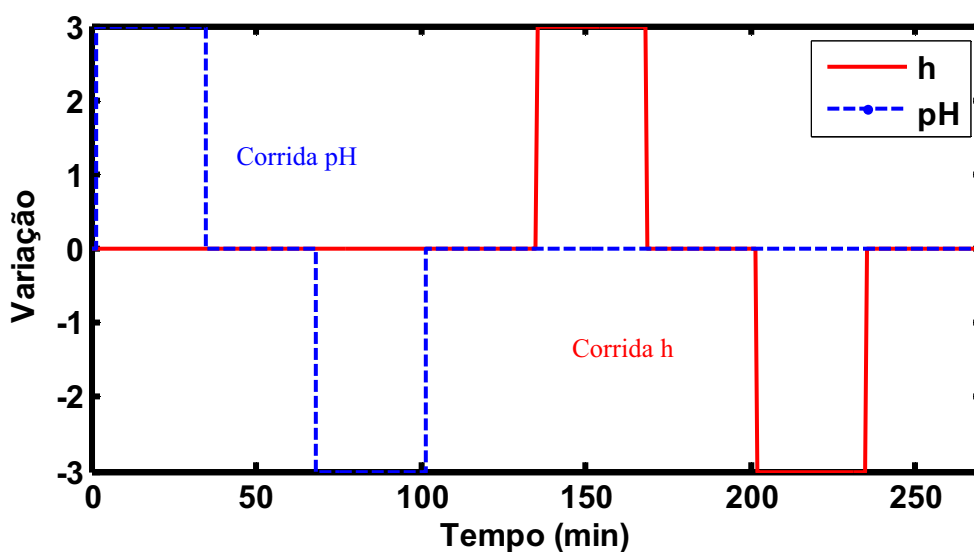


Figura 7.7 - Variação dos *setpoints* para as saídas em malha fechada – MPC-RS.

Considerando o tempo das corridas e os problemas apresentados durante a operação da planta experimental em malha aberta e nas corridas para testes da malha fechada, optou-se pela divisão da corrida em duas partes. Em uma primeira etapa fixou-se o nível e foram feitos os degraus no pH. Em uma etapa posterior, fixou-se o pH e variou-se o nível. As corridas foram realizadas na seqüência, fazendo apenas a divisão para fins de gravação de dados e para evitar alterações significativas nas concentrações, devido, por exemplo, à absorção de dióxido de carbono (CO_2) pela solução de NaOH.

Para todas as simulações de controladores foi adicionado um ruído aleatório de média zero na ordem de 10% nas saídas (h e pH). A Figura 7.8 mostra, como exemplo, a realização de uma sintonia fina durante a operação inicial e em tempo real executada com todos os controladores. Para essa situação o nível foi mantido constante. Foram alterados os valores de ajustes, que podem ser percebidos nos gráficos como variação da amplitude das ações de controle.

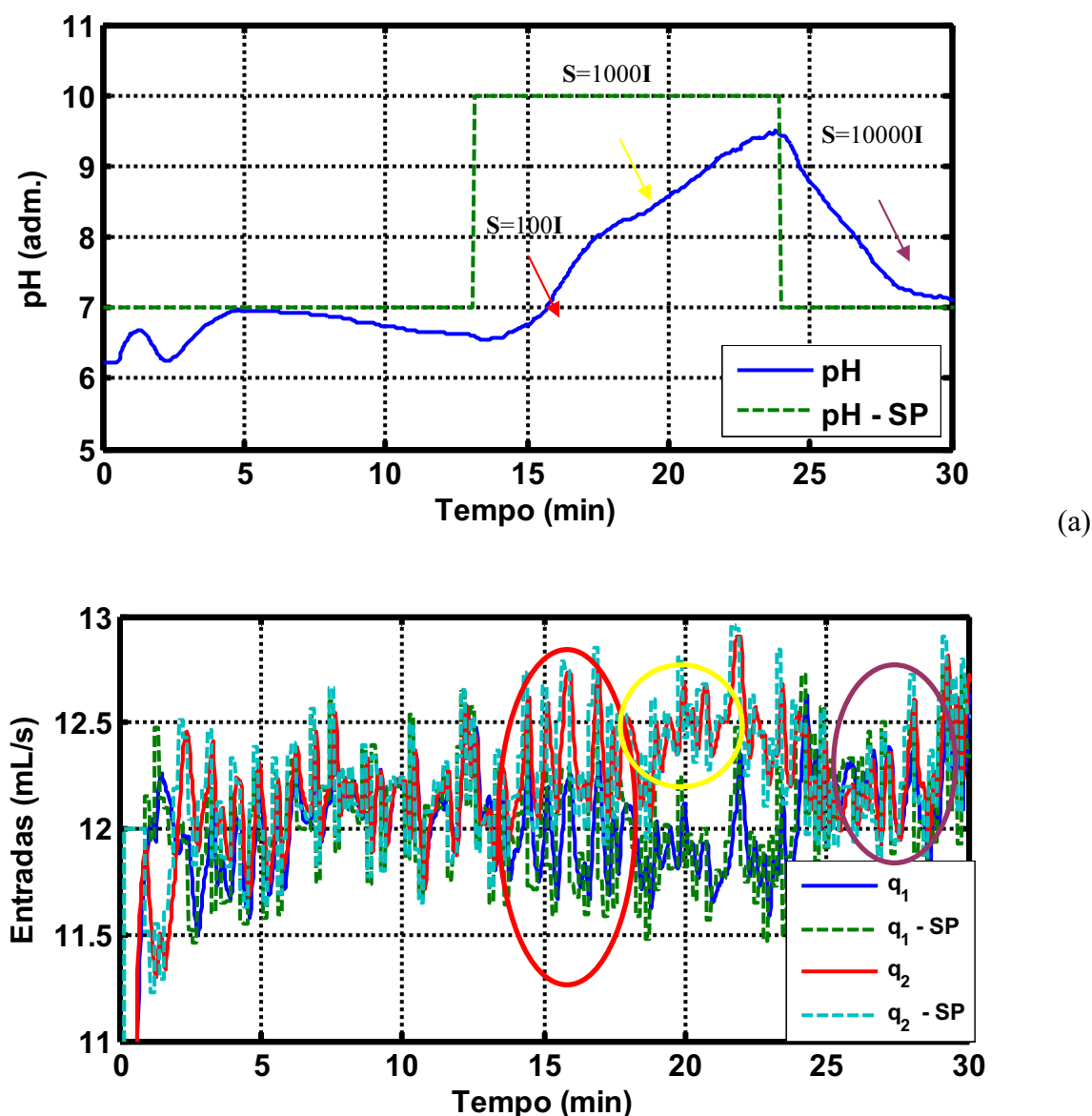
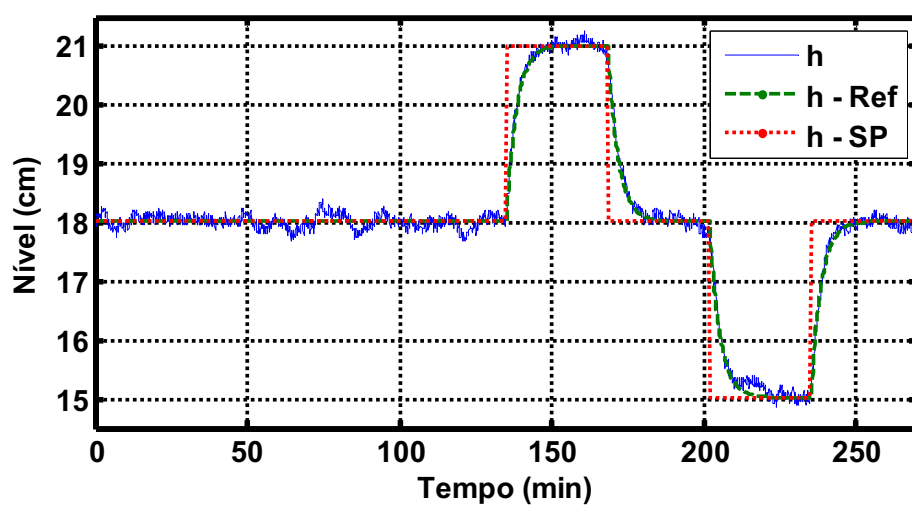
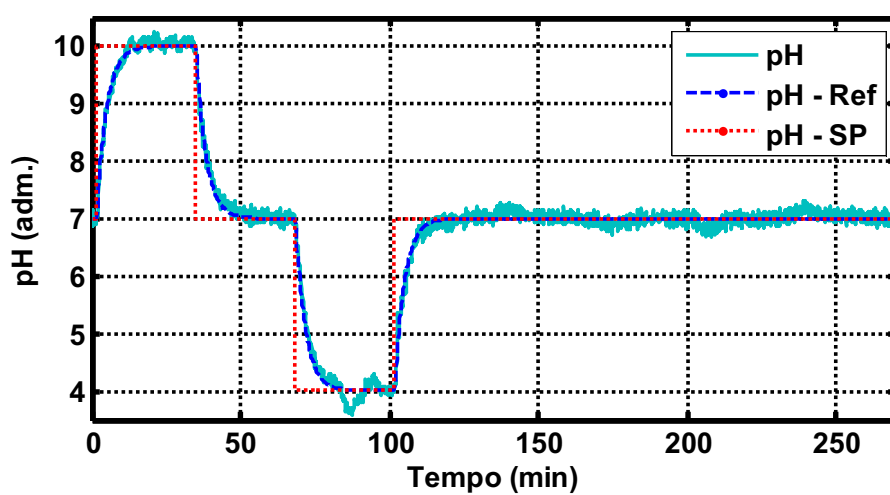


Figura 7.8 - Corrida experimental para sintonia fina no MPC-RS – Destaque para variação da amplitude da ação de controle nos pontos modificados.

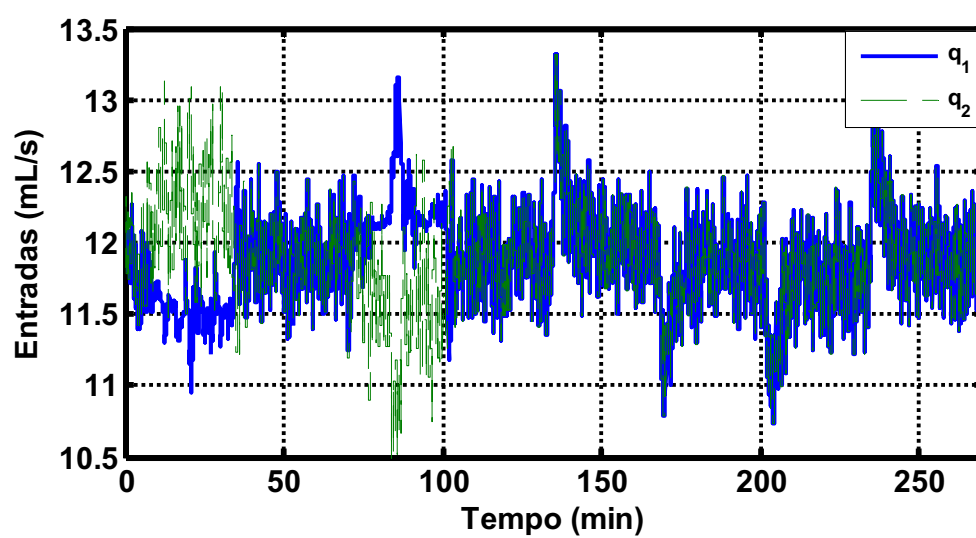
A Figura 7.9-7.10 mostra a simulação para a malha fechada com o controlador MPC-RS. A resposta apresentada é satisfatória. As Figuras 7.11-7.12 mostram os resultados para a corrida experimental em malha fechada para o controlador MPC-RS. A Figura 7.11 b indica que durante a operação foi necessário fazer alterações na sintonia do MPC_RS para que o sistema se mantivesse no valor de referência desejado. Pela Figura 7.12 é possível notar o aumento no valor de λ no ponto onde o sistema desvia do valor de referência.



(a)



(b)



(c)

Figura 7.9 - Simulação em malha fechada – MPC-RS: entradas e saídas.

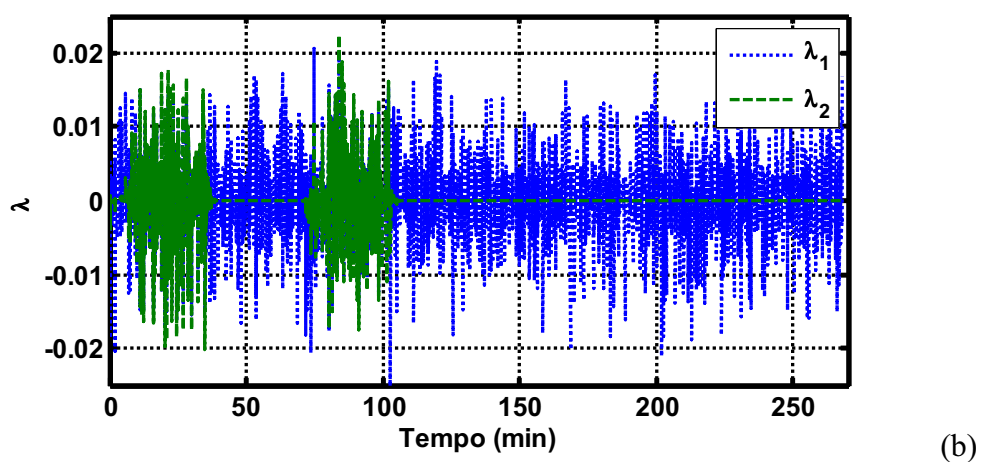


Figura 7.10 - Simulação em malha fechada – MPC-RS: variável de folga.

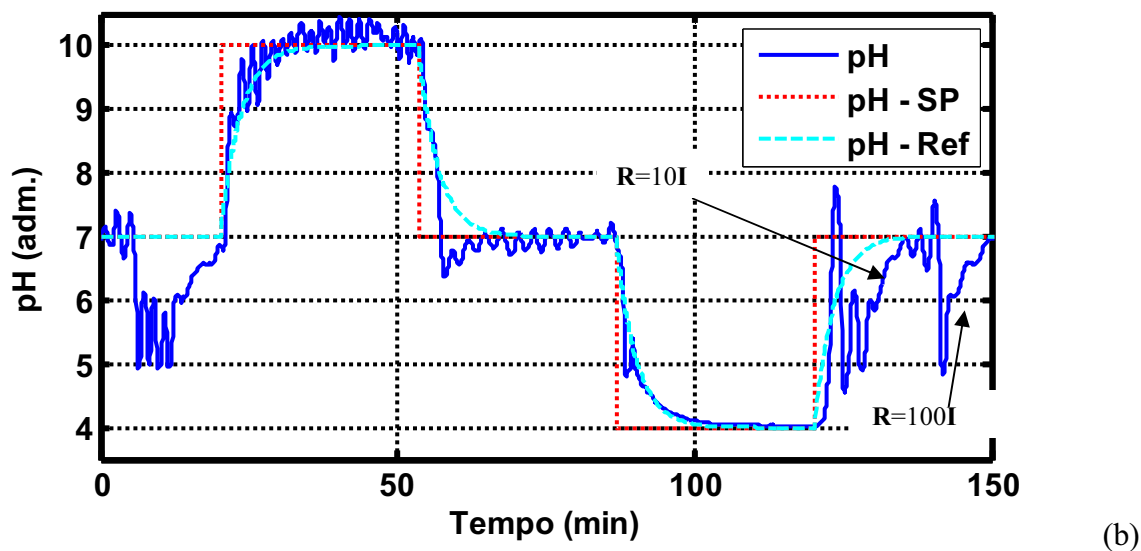
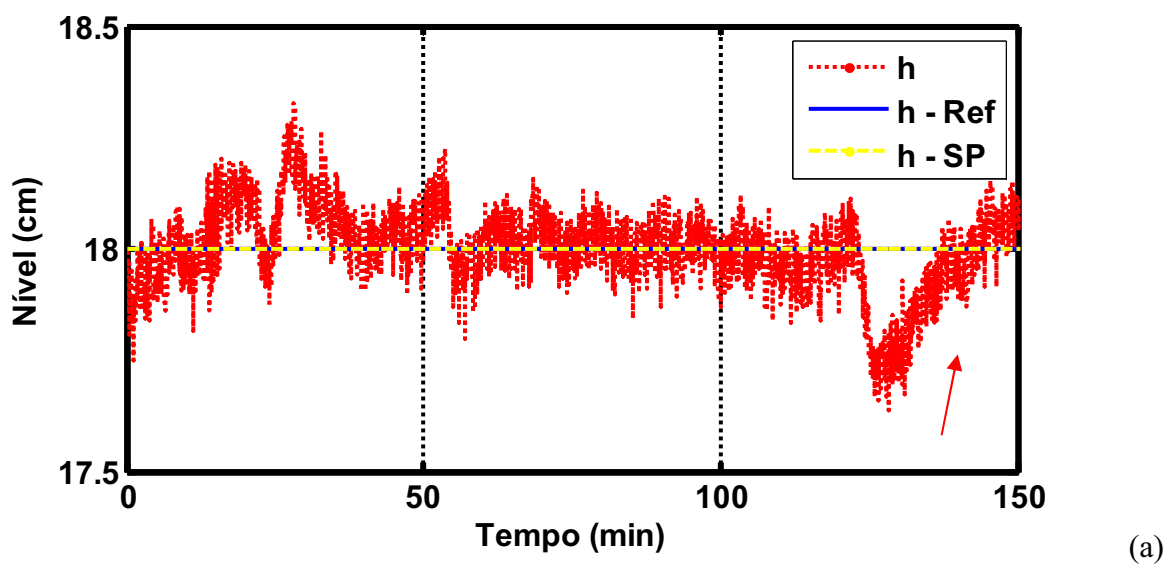


Figura 7.11 - Corrida experimental com MPC-RS: saídas para transições no pH.

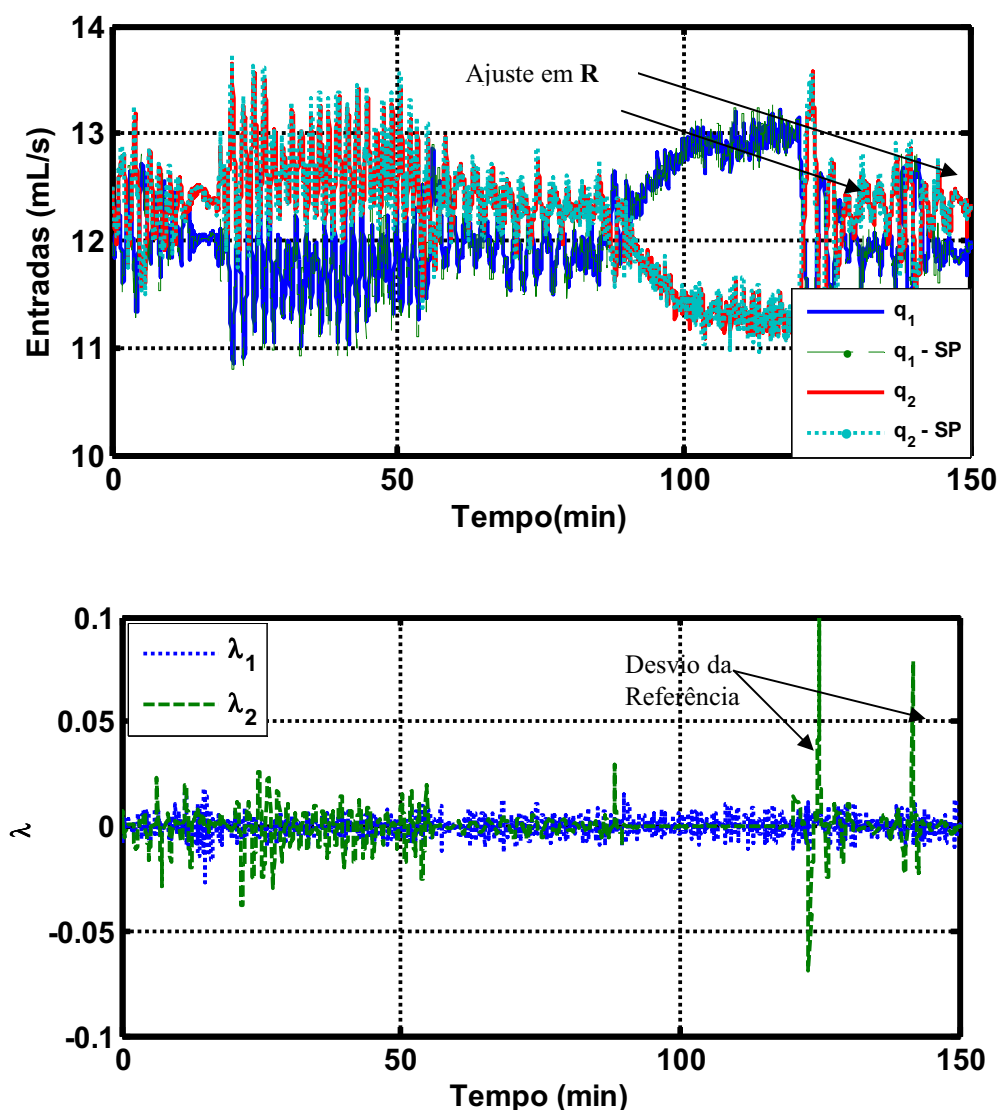
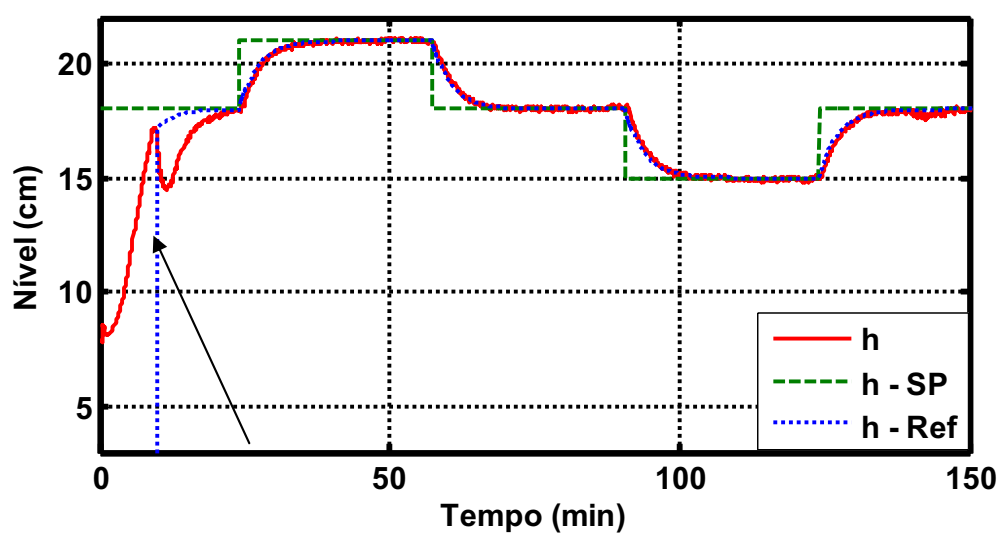


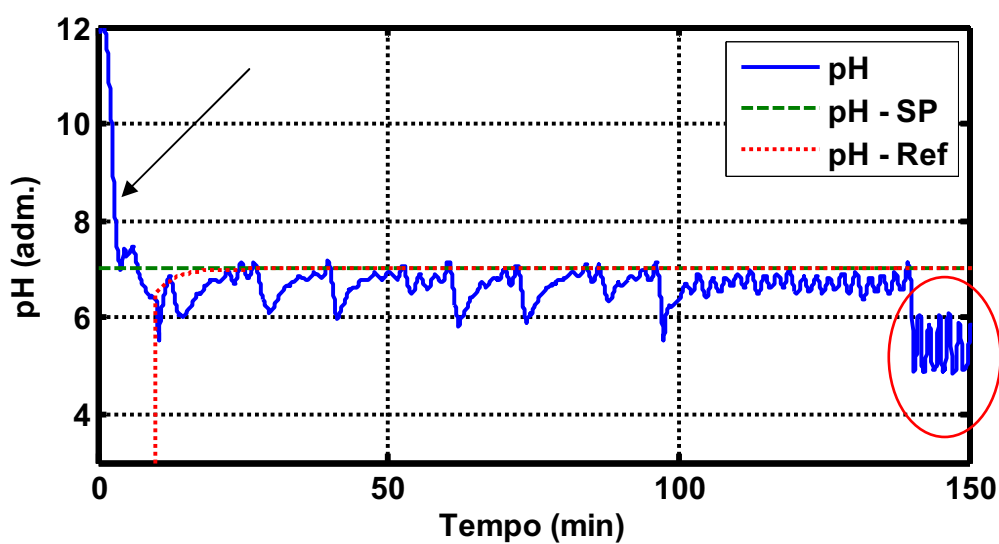
Figura 7.12 - Corrida experimental do pH com MPC-RS: entradas e variável de folga.

A corrida experimental para o pH foi considerada satisfatória. O nível se manteve praticamente durante toda a corrida no entorno valor determinado, principalmente considerando-se que a precisão de leitura neste caso é da ordem de 0,1 cm. A exceção foi quando o pH sofreu um desvio do valor desejado no fim da corrida. Contudo, é possível observar a atuação do sistema de controle no sentido de levar o sistema para o *setpoint* desejado.

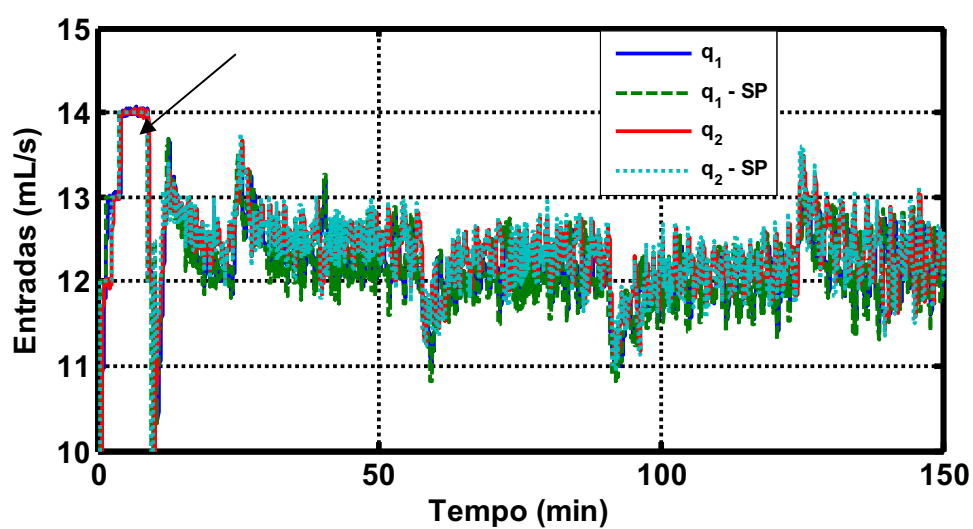
A Figura 7.13-7.14 apresenta a corrida experimental do sistema para transições no nível com o controlador MPC-RS.



(a)



(b)



(c)

Figura 7.13 - Corrida experimental com MPC-RS: saídas para transições no nível.

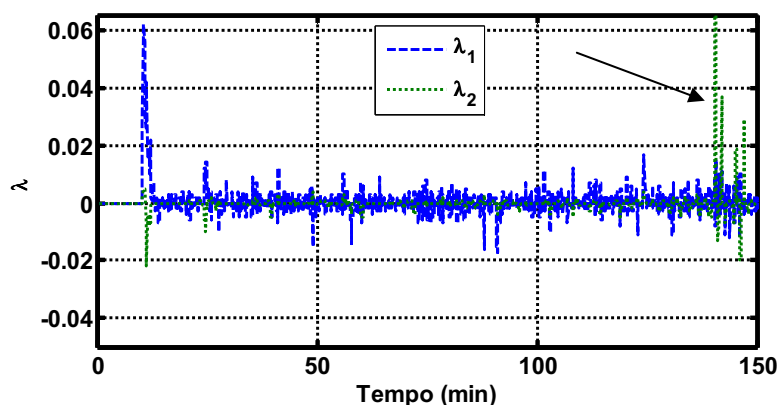


Figura 7.14 - Corrida experimental do nível com MPC-RS: variável de folga.

Pela Figura 7.13, pode-se observar que o controle de nível do sistema MIMO foi bem executado. Nota-se, nos instante iniciais da corrida, indicado pelas setas, que durante a parada da unidade na corrida anterior de transição pH , ocorreu esvaziamento do sistema que foi corrigido para os valores de referência desejados. O controle do pH na região de 7, sabidamente ponto de grande dificuldade, durante a operação em tempo real se mostrou bastante satisfatório e eficiente. Contudo, depois de finalizada a corrida e gerados os gráficos, pode-se notar que o sistema apresentou um desvio do comportamento esperado, oscilando abaixo do valor desejado para o pH , podendo-se concluir que apesar de prova matemática a respeito, o sistema apresentou *offset*. O fato gerado para essa situação pode ser o observador de estado, uma vez que os estados utilizados não foram dados por filtro de Kalman e sim pela integração do modelo linearizado localmente. Outro fato que reforça essa idéia, é que o sistema foi para essa região na Figura 7.4, que trata dos problemas como o observador de estado. Para os controladores de horizonte infinito, adotou-se o uso de um observador de estado em malha aberta, ou seja, informando ao controlador o erro (e) entra a planta e o modelo, apresentado na Eq. 7.48, de forma a se minimizar a interferência da estimação de estados no comportamento do sistema (MACIEJOWSKI, 2002).

$$\mathbf{e} = \mathbf{y}_{\text{Plant}} - \mathbf{y}_{\text{Mod}} \quad (7.48)$$

Nota-se também que no final da corrida o valor do pH foi para uma região indesejada e não foi corrigido, isto devido à não alteração da sintonia do controlador. A variável de folga refletiu esse desvio, conforme indicado na Figura 7.14.

Durante a operação, apesar de haver bastante cuidado na elaboração da solução, de esgotamento/limpeza dos tanques e também no acompanhamento das corridas, foi observado que em cada corrida havia variações exigindo adaptações ou resultando em respostas ligeiramente diferentes. Entretanto, é bom ressaltar que em um ambiente industrial, possivelmente, estes aspectos abordados tenham seus efeitos potencializados.

O uso dessa estratégia (MPC-RS), que se difere dos controladores desenvolvidos, fez-se principalmente de forma a ganhar experiência na planta, considerando-se que já houve outras pesquisas utilizando-se deste controlador aplicado ao controle de pH (este controle SISO já estava implementado na unidade) nessa unidade experimental e, assim, os problemas descritos para esse caso podem ser mais bem tratados em um outro estudo. De qualquer forma, essa aplicação ofereceu um conhecimento sobre o sistema e uma visão crítica da problemática que envolve uma corrida em malha fechada, bem como a operação em tempo real, contribuindo para a melhoria de desempenho do controlador de horizonte infinito.

A Figura 7.15 apresenta a variação para as saídas considerando as simulações e a operação em tempo real com malha fechada para os controladores de horizonte infinito. Este tipo de entrada para o sistema não é estranho à prática industrial, principalmente considerando as facilidades da informática, que podem facilmente tornar uma transição na forma de uma resposta de primeira ordem. Essa entrada de *setpoint* foi adotada devido ao fato de o sistema apresentar resposta oscilante e insatisfatória quando um degrau de grande amplitude era solicitado à planta. A outra opção, mais comumente utilizada, é a implementação de um modelo ou de uma trajetória de referência incorporada ao controlador.

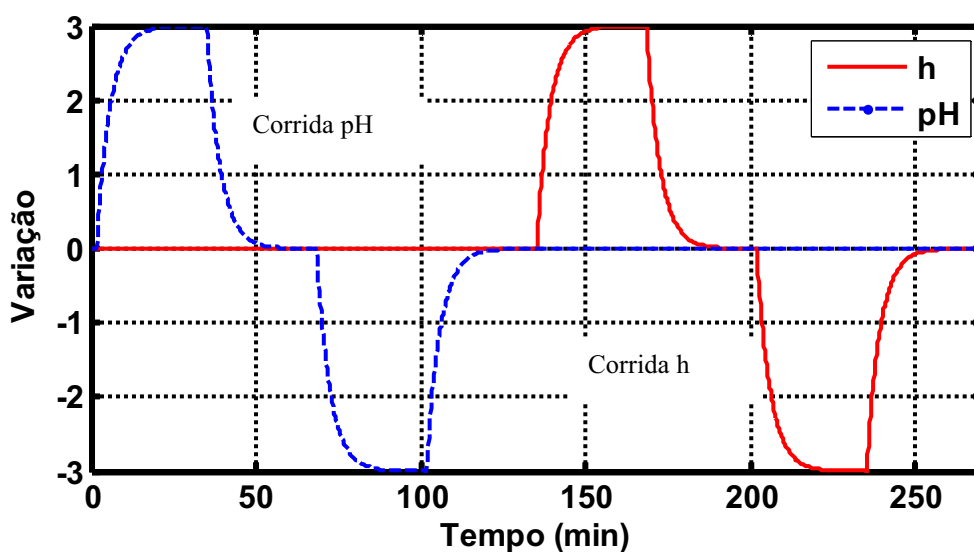
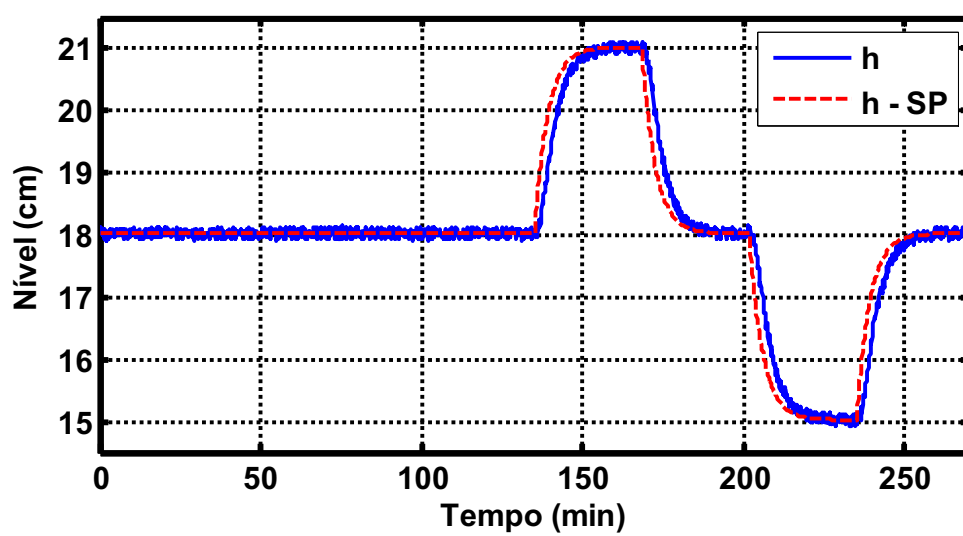


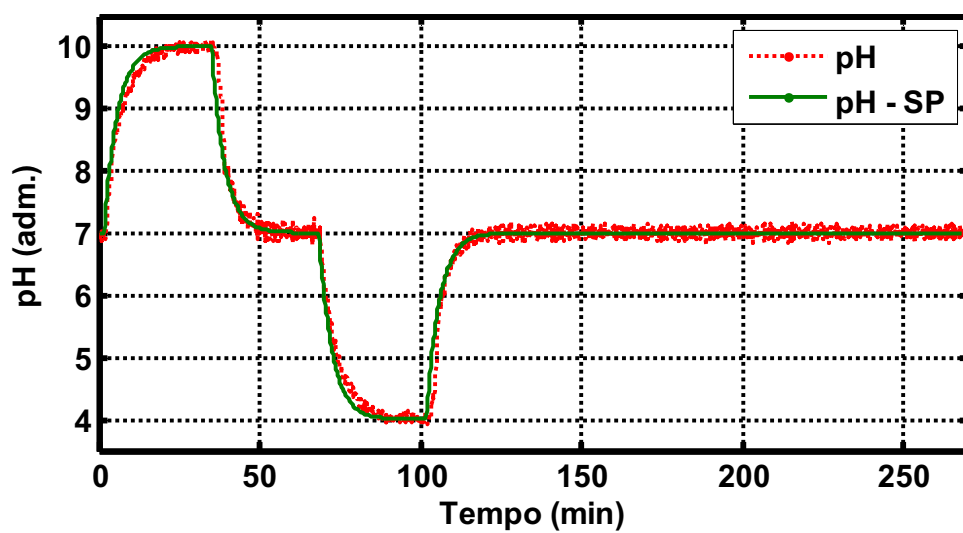
Figura 7.15 - Variação dos *setpoints* para corrida em malha fechada – IHMPC.

A Figura 7.16 mostra a simulação do sistema com o controlador IHMPC. Esta resposta é satisfatória. Para essa simulação foi considerado que o sistema encontrava-se em desvio planta/modelo, que foi caracterizado por um efeito tamponante equivalente a 0,01 mL/s da vazão q_3 na planta, enquanto o modelo possuía a consideração de q_3 igual a 0,05 mL/s. Estas considerações fazem com que o controlador não seja tão sensível como ele seria sem a consideração da solução tampão. Na corrida experimental não houve adição de tampão.

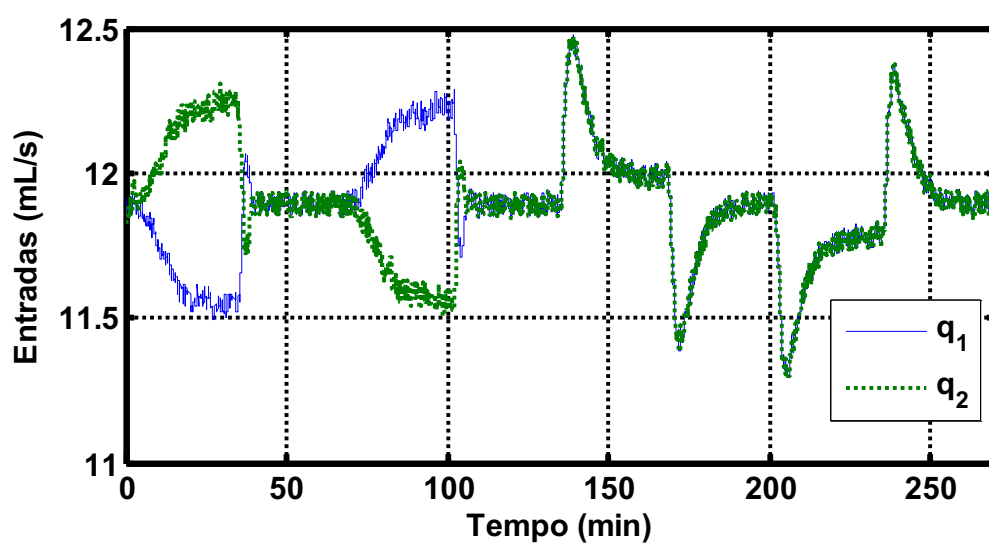
A Figura 7.17 apresenta o tempo de cálculo do controlador IHMPC. Nota-se que a montagem do problema e resolução da otimização é realizada em um tempo bastante rápido, considerando-se que o tempo de amostragem é de 10 s.



(a)



(b)



(c)

Figura 7.16 - Simulação para malha fechada - IHMPC.

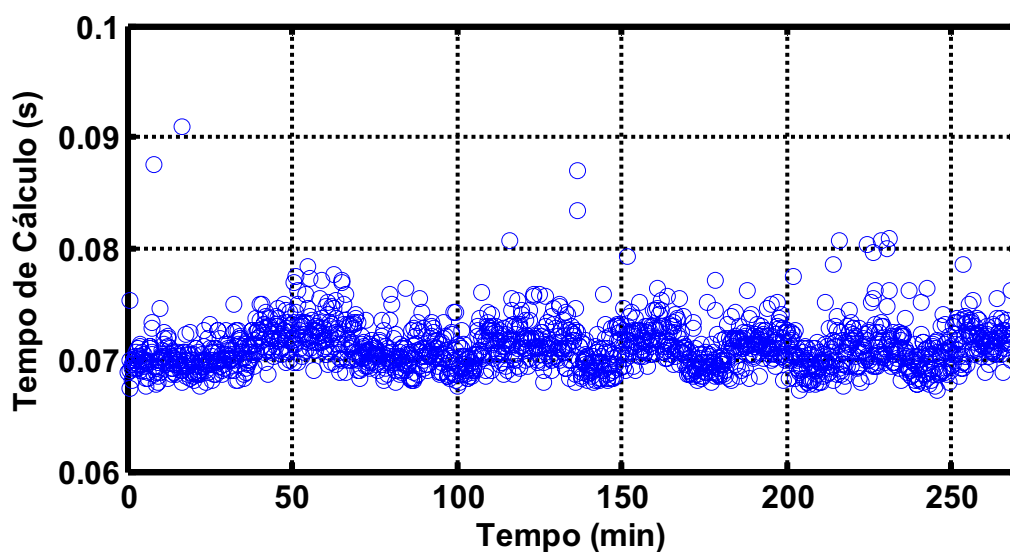
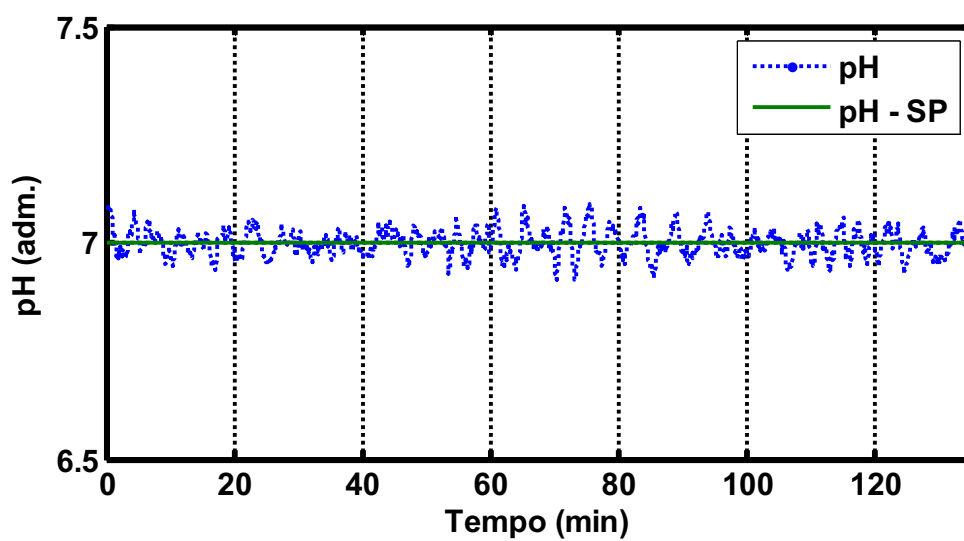


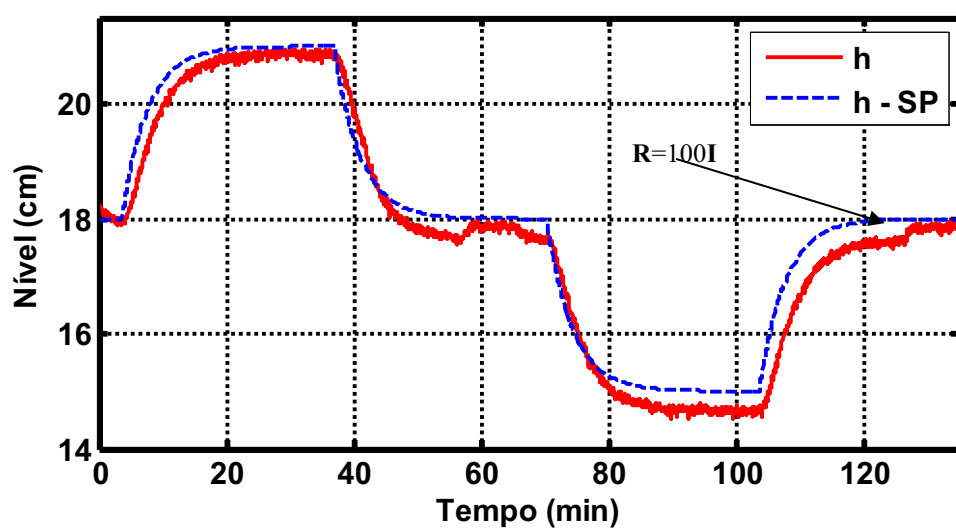
Figura 7.17 - Tempo de cálculo para o IHMPC.

A Figura 7.18 apresenta a corrida experimental para a transição do nível utilizando o controlador IHMPC. Percebe-se que o controlador manteve o nível em um patamar de melhor desempenho comparado com o controlador MPC-RS. O nível aparentemente apresenta um *offset*, contudo esse valor encontra-se dentro da incerteza da medida. Ao final da corrida foi necessário ajustar a sintonia do controlador, como já havia sido feito com o controlador MPC-RS. A Figura 7.19 apresenta a corrida experimental para a transição do pH utilizando o controlador IHMPC. O nível foi mantido dentro do valor da incerteza da medida. A corrida é considerada satisfatória.

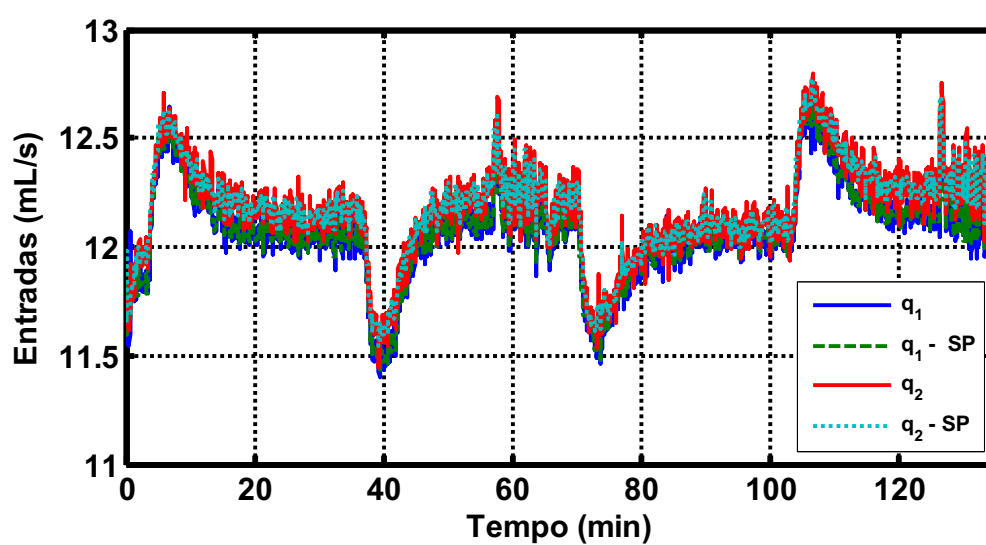
Considerando que os controladores robustos são técnicas construídas utilizando-se do controlador IHMPC é natural fazer a comparação em simulação e esperar que os resultados experimentais sejam consistentes com as conclusões desse estudo.



(a)

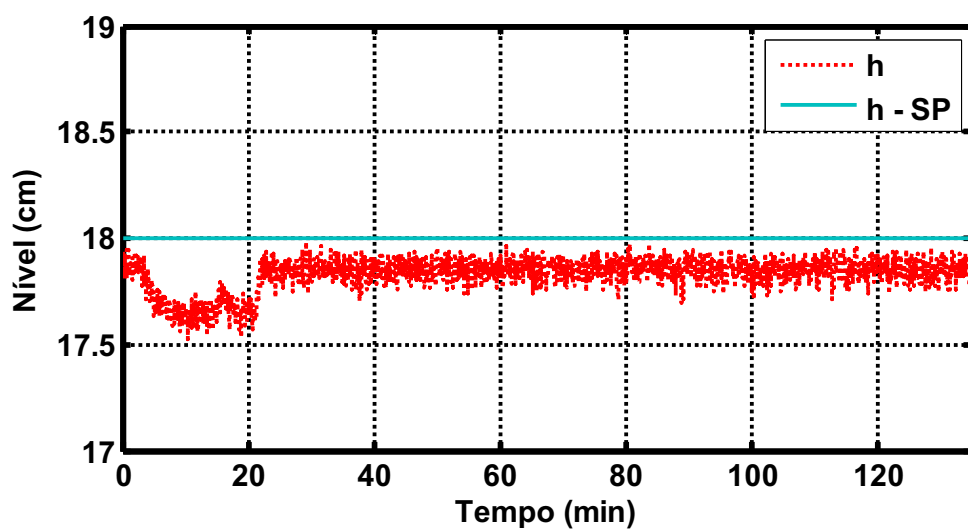


(b)

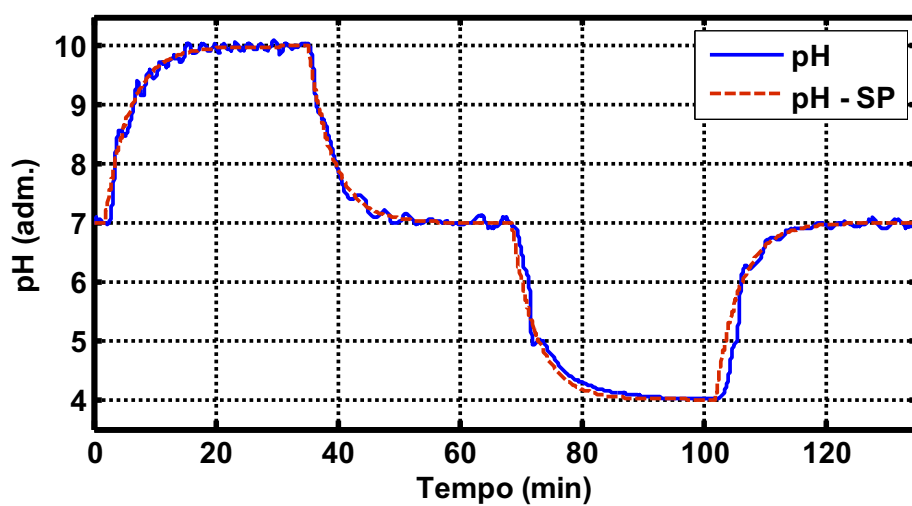


(c)

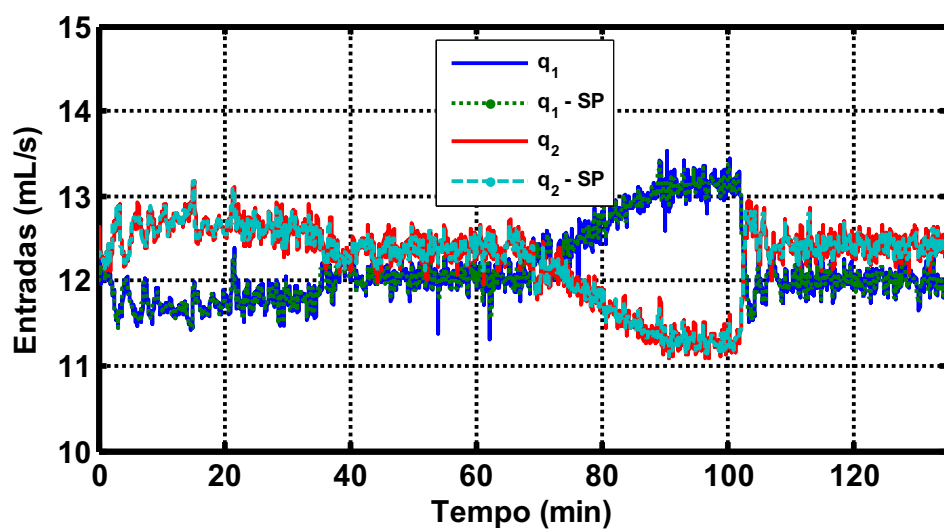
Figura 7.18 - Corrida experimental IHMPC: transição do nível.



(a)



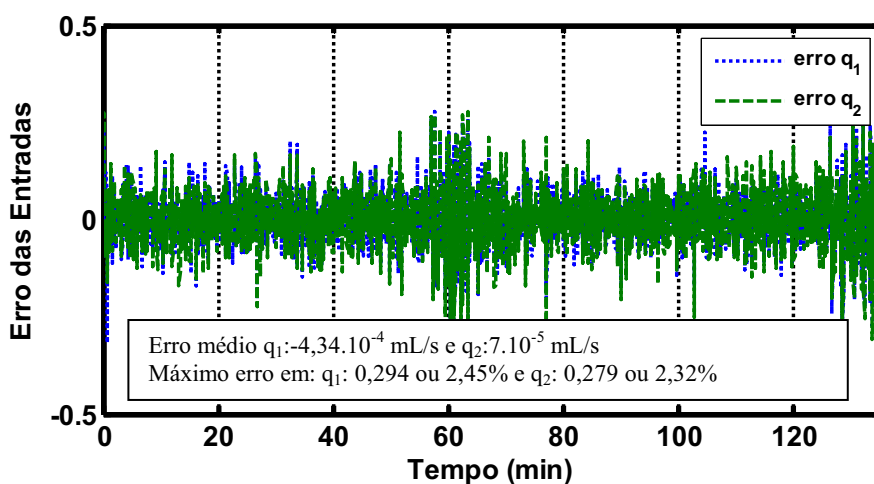
(b)



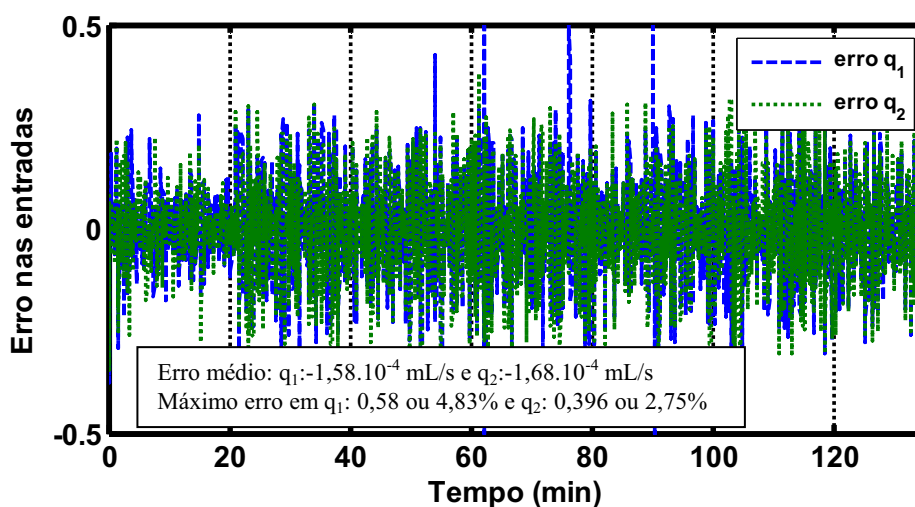
(c)

Figura 7.19 - Corrida experimental IHMPC: tradição do pH.

A Figura 7.20 mostra o erro entre os valores implementados pelo controlador e os valores obtidos com resultados experimentais para as vazões durante a corrida de variação de nível e de pH. Esse erro é dado pela dinâmica da estrutura mestre/escravo do sistema de controle e pelas diferenças ocasionadas pela medição. Esses valores são de interesse para a definição da incerteza na entrada, necessária para os controladores robustos. Nesse caso, pode-se observar que os valores encontram-se entre 2,32-4,83% de incerteza. De forma a se avaliar as respostas dos controladores com algum nível de incerteza, e não buscar casos que raramente aconteçam, define-se que o valor da incerteza a ser considerada pelos controladores robustos é de 2%.



(a)



(b)

Figura 7.20 - Erro nas entradas: (a) transições de nível; (b) transições de pH.

A Figura 7.21 apresenta a simulação do sistema com o controlador RMPC-MMR.

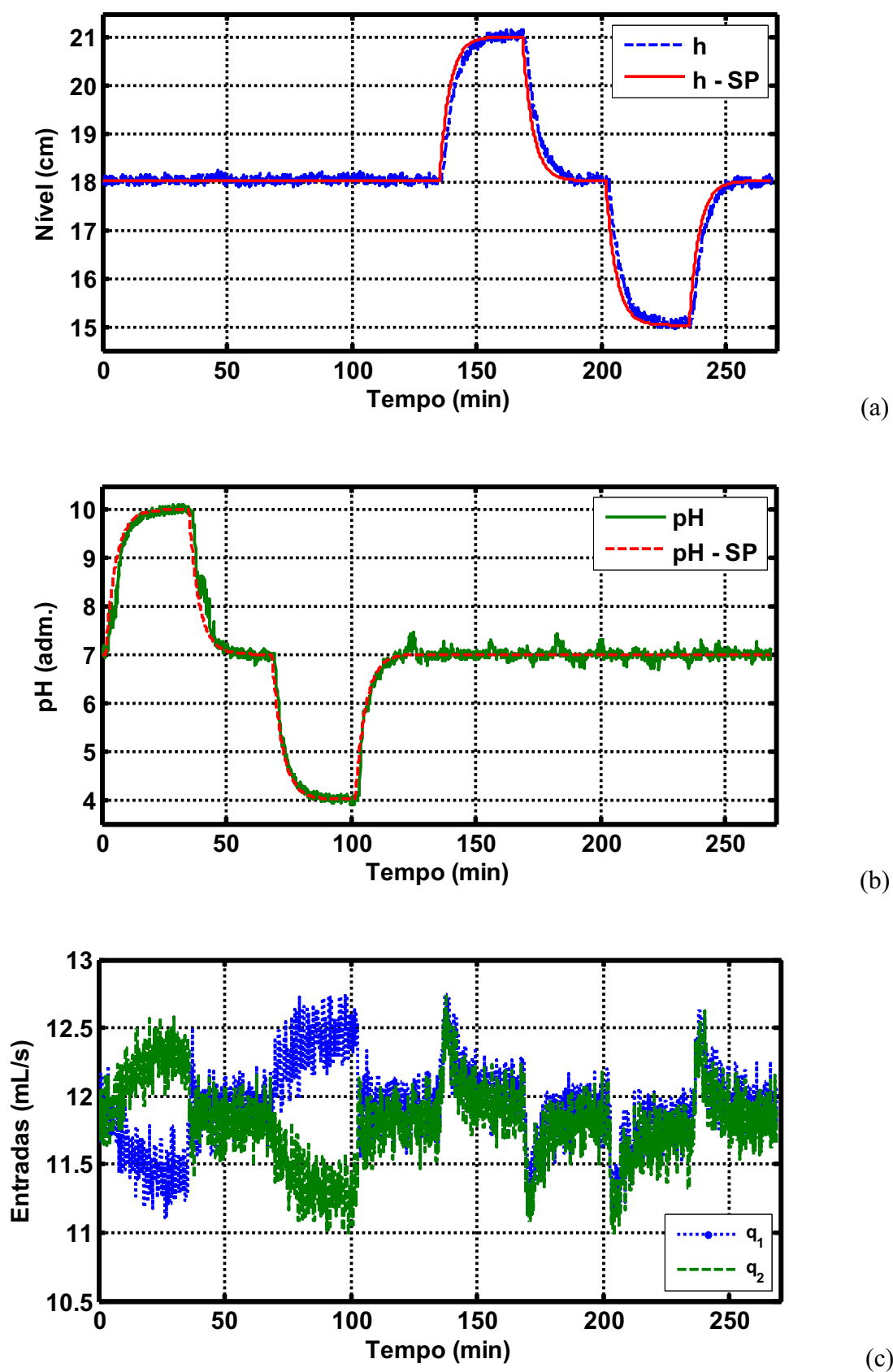


Figura 7.21 - Simulação do sistema com o controlador RMPC-MMR.

A simulação indica uma ligeira perda de desempenho do controlador, mas, ainda assim, a resposta apresenta-se satisfatória. A Figura 7.22 apresenta o tempo de cálculo do controlador. Conforme esperado, existe um maior esforço computacional, considerando-se o problema de otimização mín-máx. O tempo de cálculo é maior, mas dentro de valores que permitem a implementação no tempo de amostragem, que é de 10 segundos. As incertezas calculadas pela otimização são mostradas na Figura 7.23.

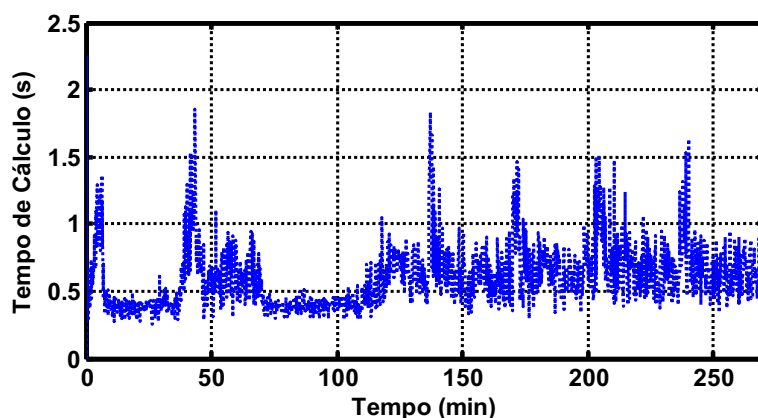
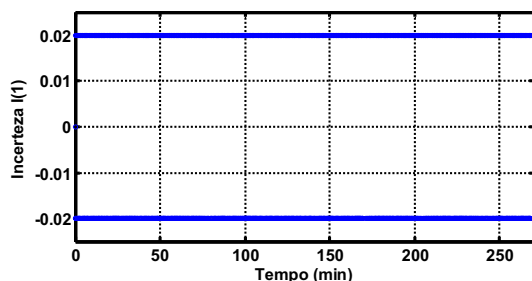
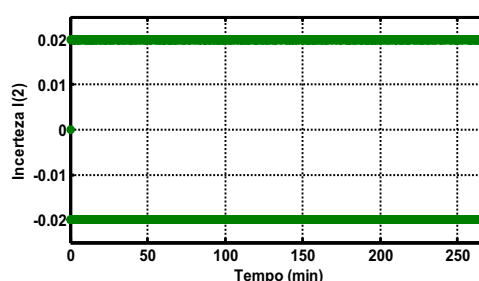


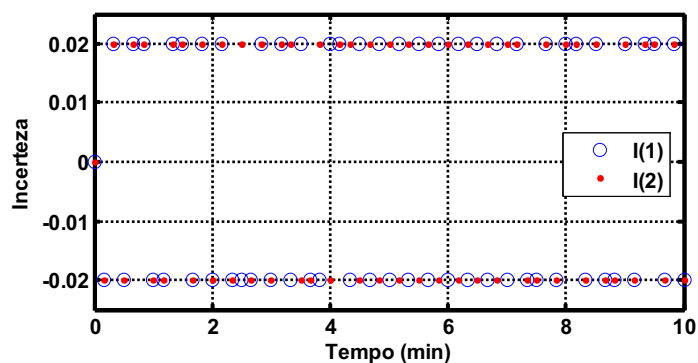
Figura 7.22 - Tempo de cálculo do controlador RMPC-MMR em simulação do sistema.



(a)



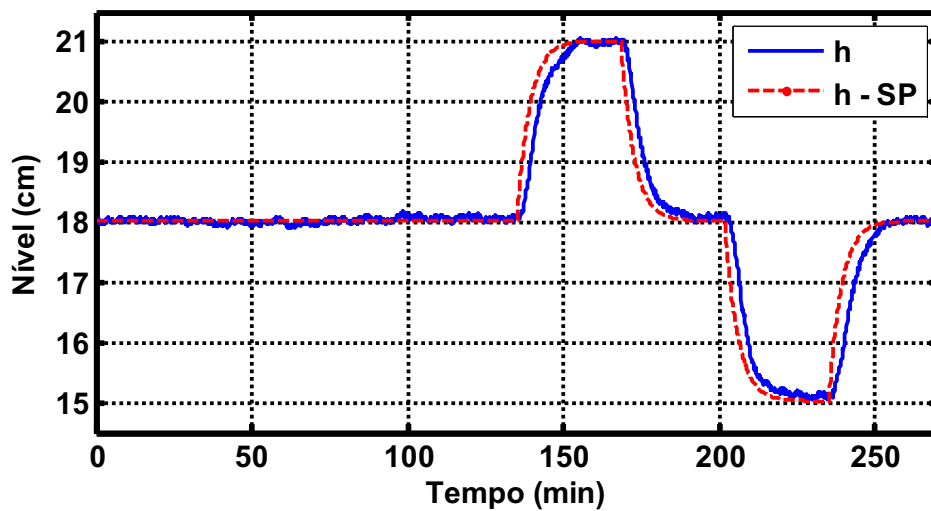
(b)



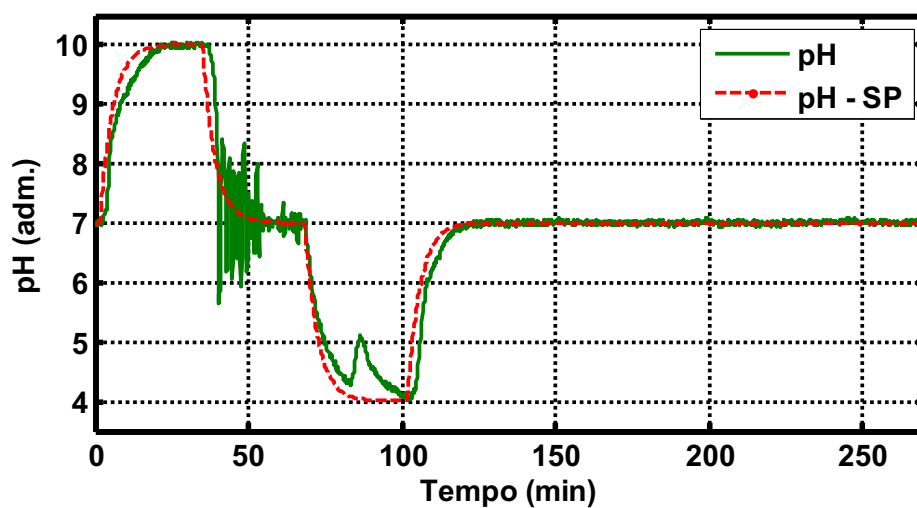
(c)

Figura 7.23 - Máxima Incerteza calculada – RMPC-MMR: (a) Incerteza em q_1 ; (b) Incerteza em q_2 ; (c) Ampliação.

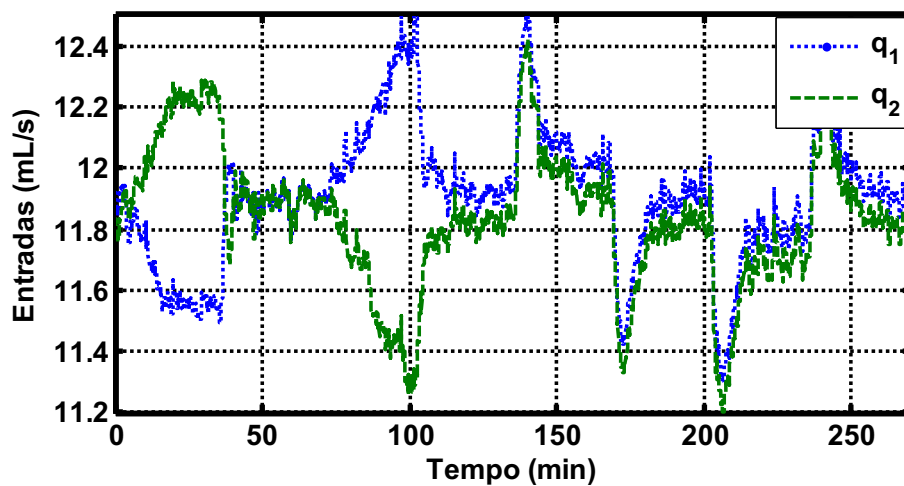
A Figura 7.24 mostra as respostas do sistema com o controlador LMI-RMPCR aplicado com sistema nominal.



(a)



(b)



(c)

Figura 7.24 - Resultados de simulação – LMI-RMPCR: caso nominal.

Os resultados dessa figura se diferem de um controlador RMPC pelo fato de que não é utilizado um politopo para a descrição da incerteza e sim tão somente o modelo nominal. Os resultados apresentam uma degradação de comportamento na região de pH igual a 7, mas, ainda assim, obteve-se um resultado de simulação satisfatório. A Figura 7.25 apresenta o tempo de cálculo do controlador. Existe um acréscimo do tempo de cálculo ao longo da corrida e percebe-se que em um horizonte de tempo finito ocorrerá a ultrapassagem do tempo de amostragem inviabilizando a utilização do controlador. Considerando-se a implementação e todo o cuidado para se trabalhar com variáveis de forma otimizada, supõe-se que o acréscimo de tempo para esse controlador deve-se a limitações de memória, em função da dimensão das matrizes geradas. Para o cálculo desse controlador fez-se o uso do *toolbox* para LMI (Yalmip, LÖFBERG, 2004) e do *LMITools*[®]. O uso das rotinas do *toolbox* YALMIP torna a programação bastante intuitiva e direta, mas, em contrapartida, acarreta um gasto de tempo para estruturar o sistema na forma solucionável pelo *LMITools*[®]. A Figura 7.26 mostra as respostas para o controlador considerando a incerteza na forma de politopo. Do ponto de vista de simulação a resposta é satisfatória. A Figura 7.27 mostra o tempo de cálculo do controlador. Percebe-se que o tempo ultrapassa o tempo de amostragem inviabilizando a aplicação nessa condição.

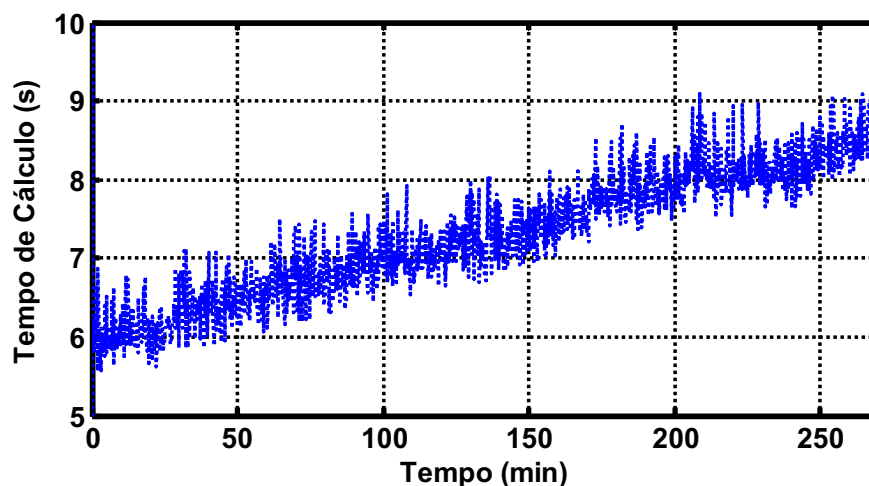
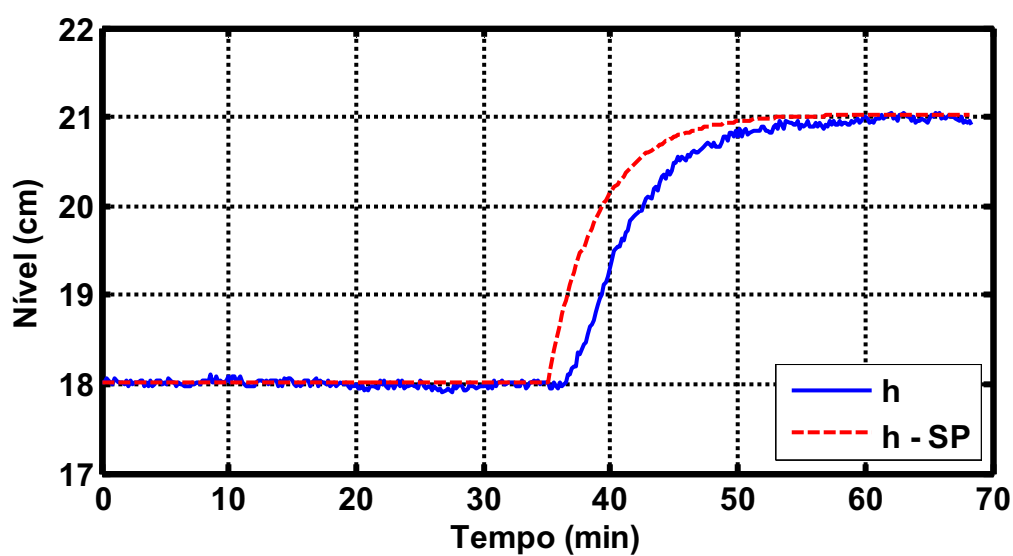
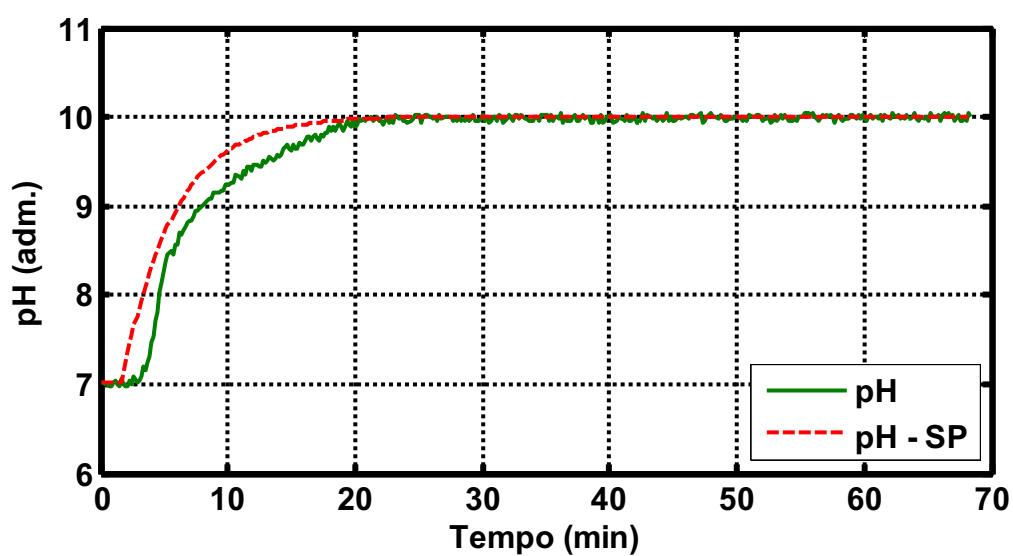


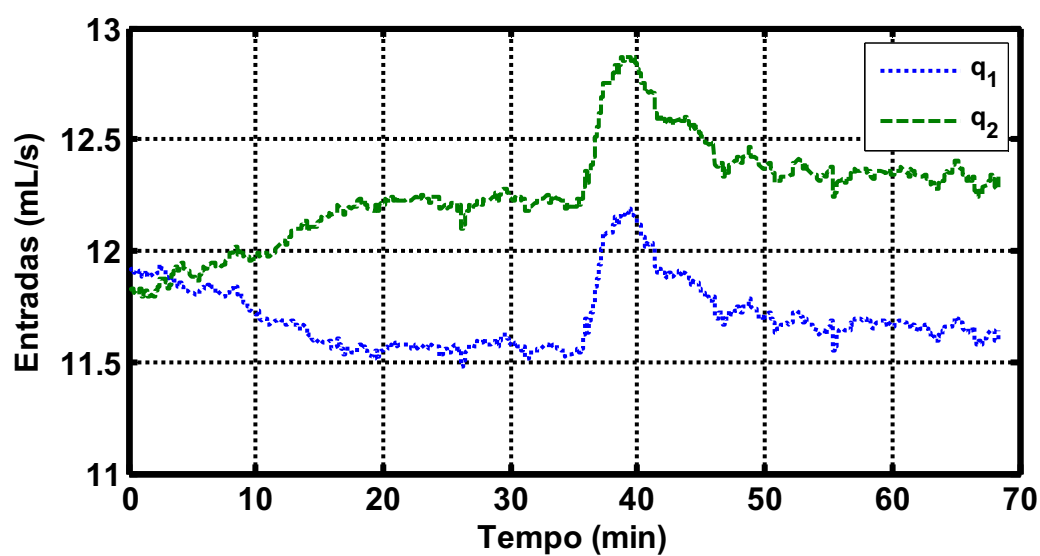
Figura 7.25 - Resultados de simulação – LMI-RMPCR: caso nominal.



(a)



(b)



(c)

Figura 7.26 - Resultados de simulação – LMI-RMPCR: caso com politopo.

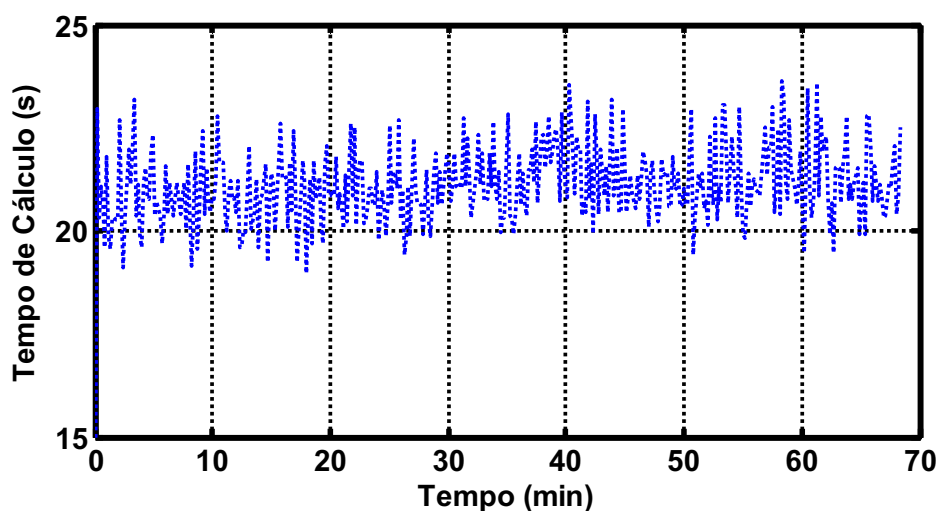


Figura 7.27 - Resultados de simulação – LMI-RMPCR: caso com politopo.

7.6 Problemas Apresentados Durante a Operação em Tempo Real

Durante a operação em tempo real, diversos problemas ocorreram, invalidando a corrida em curso. Foram situações que podem ser consideradas comuns em se tratando de atividades industriais, e dentre as quais podem ser citadas: ruídos de natureza elétrica, ruídos de processo e vazamento, dentre outros. A execução do experimento desse trabalho exigiu mais do que conhecimento teórico. Em alguns casos é necessária uma criteriosa análise do fato para se obter uma solução satisfatória. Em outros casos, a solução é obtida por tentativa e erro. De qualquer forma, pode-se considerar que a experiência resultou em uma oportunidade para o uso de ferramentas teóricas bem como de senso de engenharia, tão necessários para a solução dos problemas práticos e para a formação do pesquisador.

A Figura 7.28 mostra a região de transição para a agitação do reator. Não é recomendável trabalhar na faixa de 4 a 6 centímetros de nível, principalmente considerando-se a oscilação, conforme mostra a Figura 7.28 b. Devido ao acoplamento do sistema, é esperado

que haja interferência no pH, e dependendo da região de trabalho poderá ocorrer instabilidade no sistema. Outra fonte de interferência no processo derivada da agitação é a vibração causada pelo motor do agitador, mostrado na Figura 7.29.

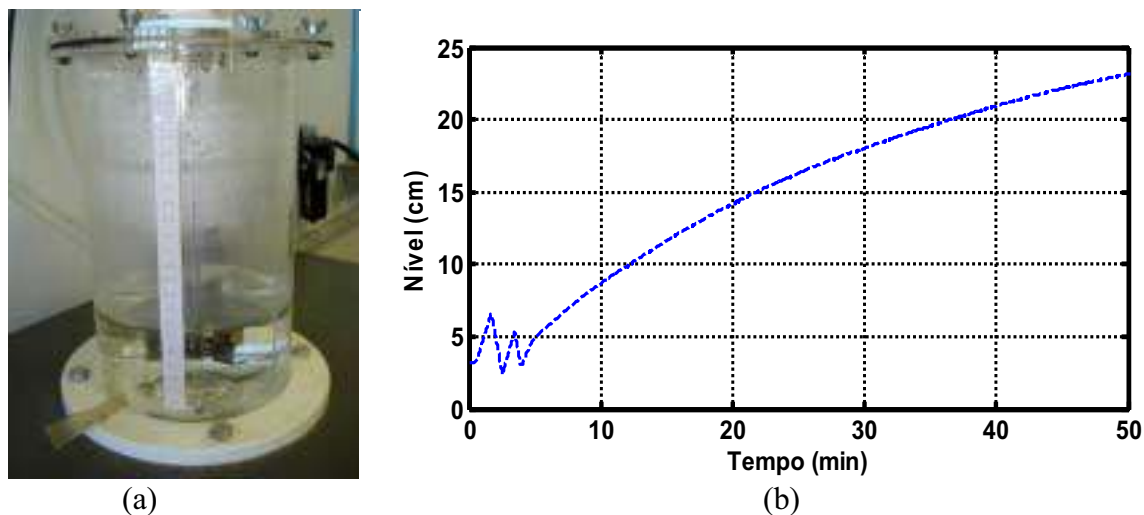


Figura 7.28 - Região de transição para a agitação do reator.



Figura 7.29 - Motor do agitador: fonte de ruídos no sistema.

Durante a operação experimental, tanto a vazão de ácido, quanto a vazão de base apresentaram vazamentos de solução em diversos pontos. Alguns desses pontos encontram-se indicados nas Figuras 7.30-7.32. Contudo, os maiores problemas foram na vazão de base. A necessidade de utilização de vários filtros de partículas devido à baixa qualidade da água, um deles em especial, mostrado na Figura 7.32, tornou-se fonte de entrada de bolhas no sistema,

cujos efeitos são apresentados na Figura 7.33. A Figura 7.34 mostra o ponto onde se pode acompanhar a passagem de bolhas.



Figura 7.30 - Pontos de vazamentos de solução no sistema: bombas.



Figura 7.31 - Pontos de vazamentos de solução: saída do tanque de armazenamento.



Figura 7.32 - Filtro de partículas: bolhas no sistema.

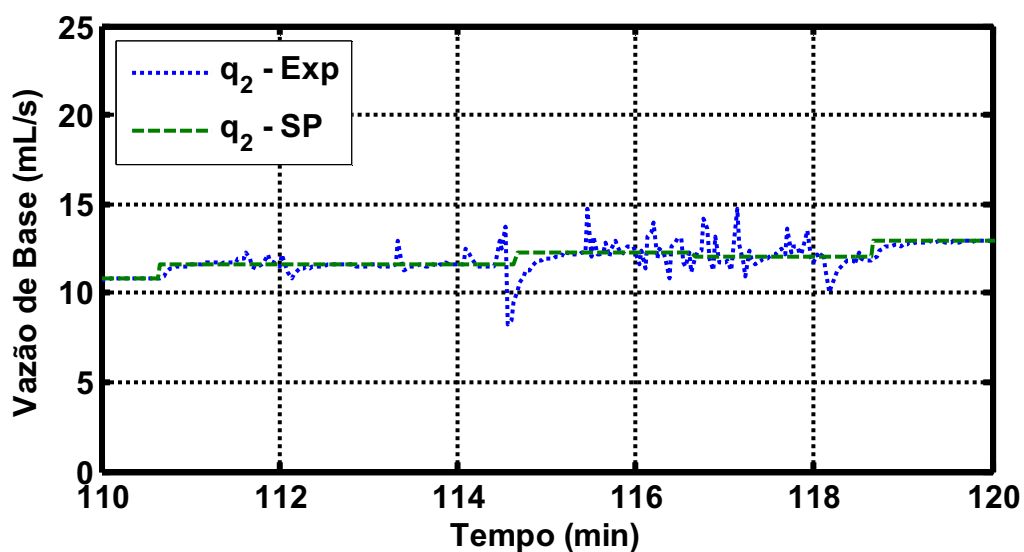


Figura 7.33 - Ruído causado pela passagem de bolhas no sistema.



Figura 7.34 - Visualização da passagem de bolhas no sistema.

A Figura 7.35 apresenta os ruídos de ordem elétrica na vazão de base. Foram usados filtros digitais de sinais, contudo, quando o ruído é de grande amplitude, acontece uma retenção na medida em que leva a efeitos indesejados no sistema. Na Figura 7.36 são apresentados os ruídos de processo.

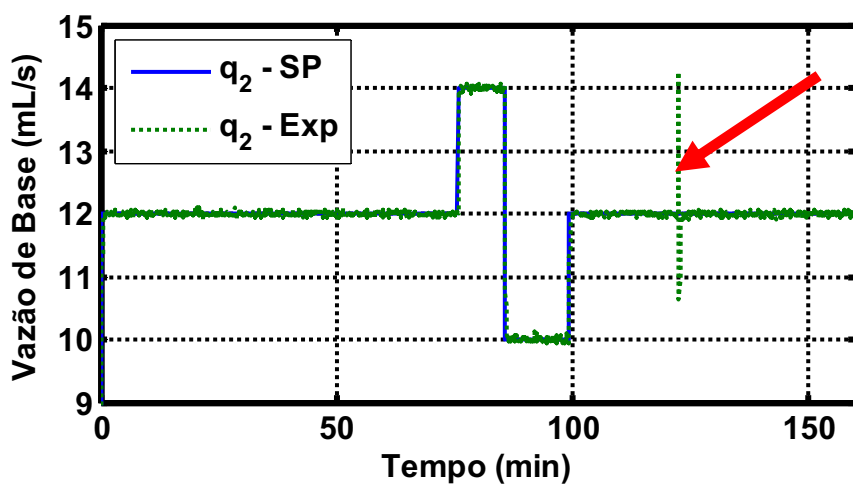


Figura 7.35 - Ruídos de ordem elétrica na vazão de base.

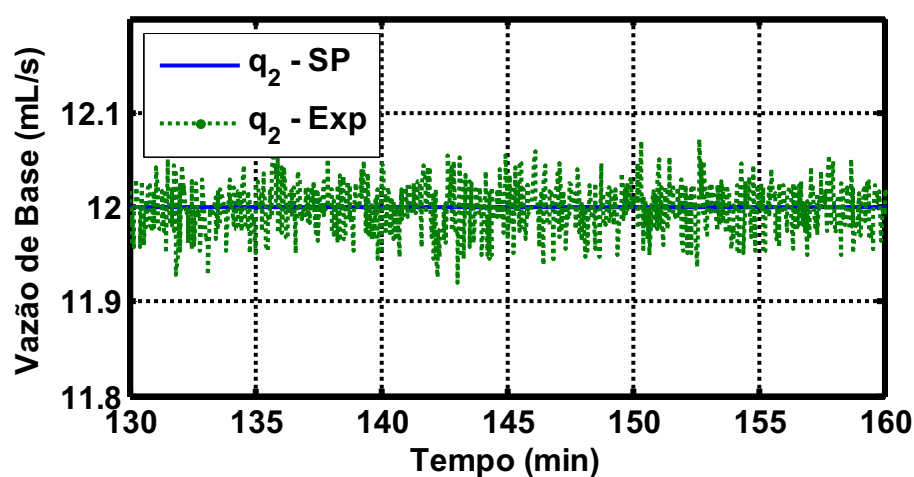


Figura 7.36 - Ruídos de processo na vazão de base.

A Figura 7.37 apresenta um ruído transitório, aleatório e indesejável que ocorreu durante uma corrida. A Figura 7.38 mostra uma corrida em que a vazão de base sofreu diversos problemas. Para esse caso, baseado em experiência própria, infere-se que o problema ocorra devido a algum aquecimento ou anormalidade na instrumentação, causando essa interferência, uma vez que o problema se manifestava após considerável tempo de corrida.

A Figura 7.39 mostra os ruídos na altura do reator. Cabe ressaltar que a variável real manteve seu valor inalterado durante as medições descritas.

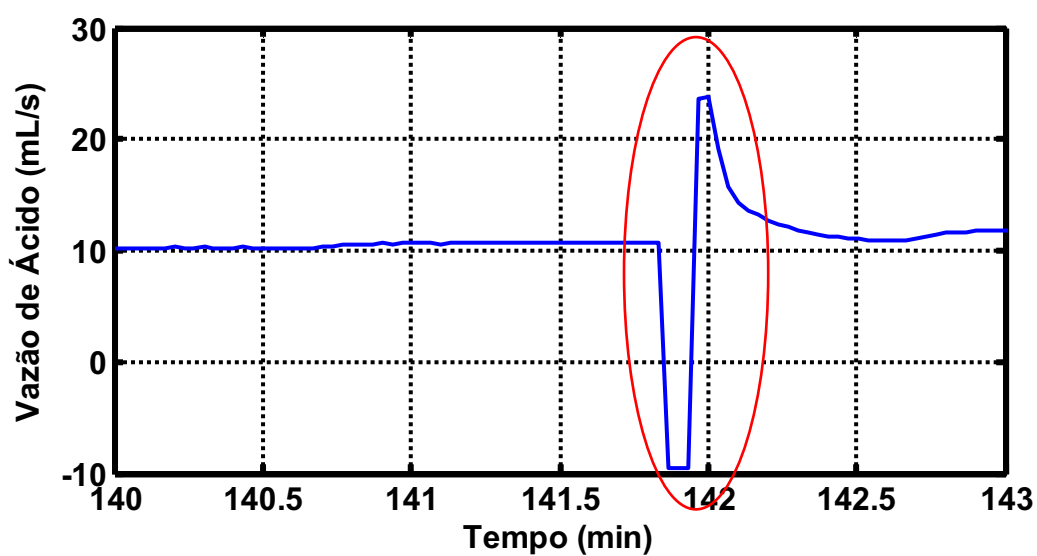


Figura 7.37 - Alterações indesejadas na vazão de ácido.

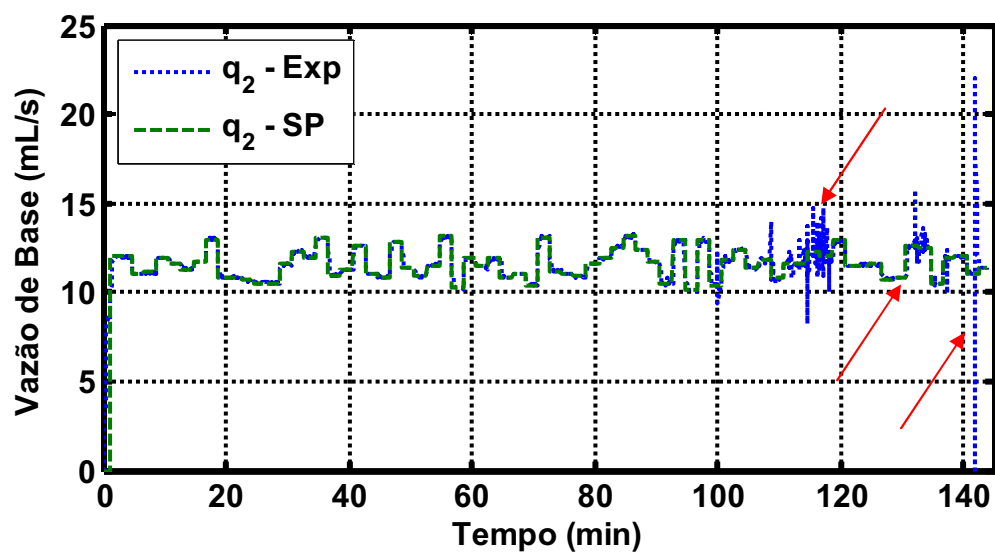


Figura 7.38 - Ruídos na vazão de base.

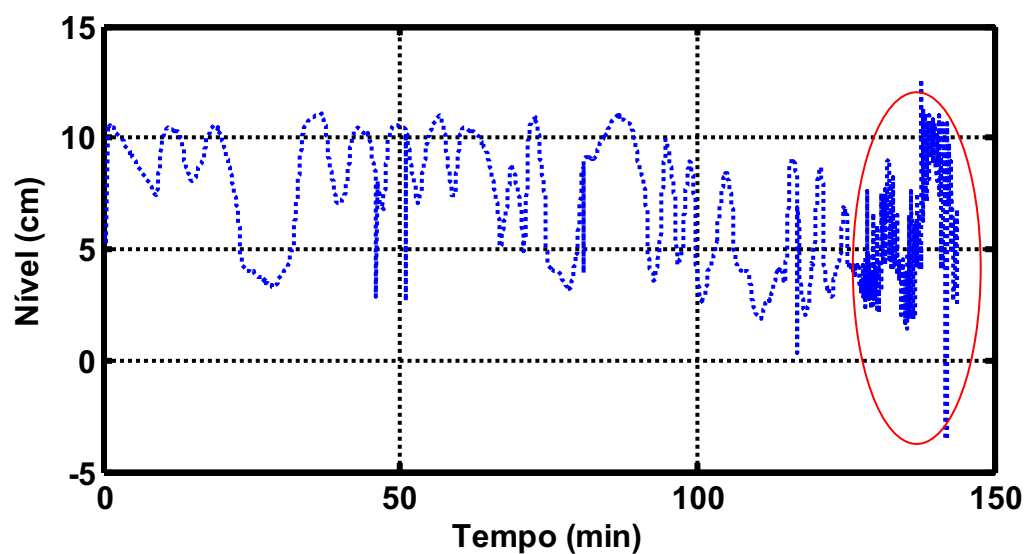


Figura 7.39 - Ruído na medição da altura do reator.

A Figura 7.40 mostra uma corrida em malha aberta completa, mostrando entradas e saídas onde são indicados efeitos de ruídos.

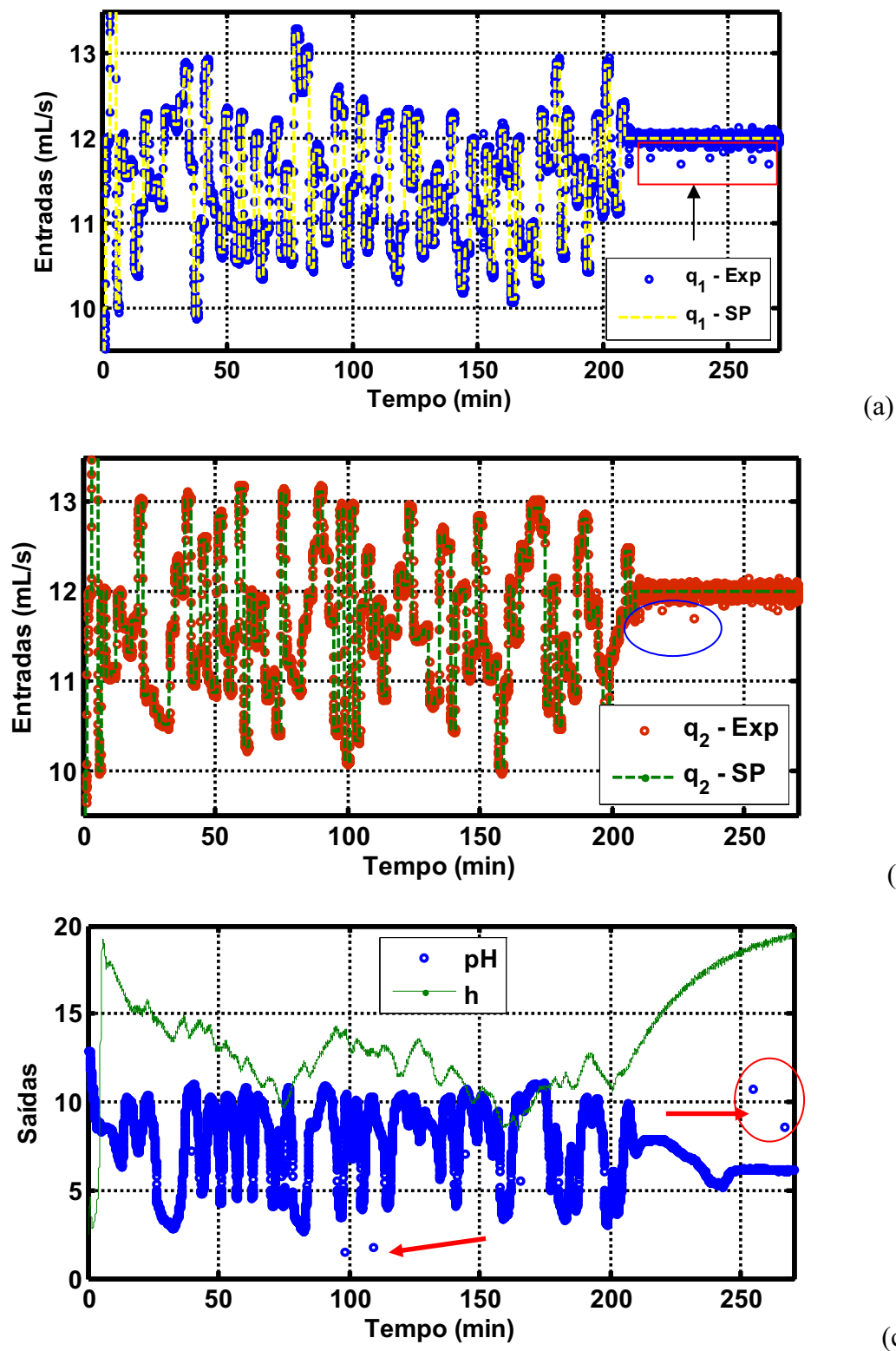


Figura 7.40 - Malha aberta: resultados teóricos e experimentais - ruídos.

As Figuras 7.41-7.42 apresentam os efeitos dos ruídos para corridas com o MPC-RS.

A Figura 7.43 mostra o efeito de inicialização incorreta para o controlador IHMPC.

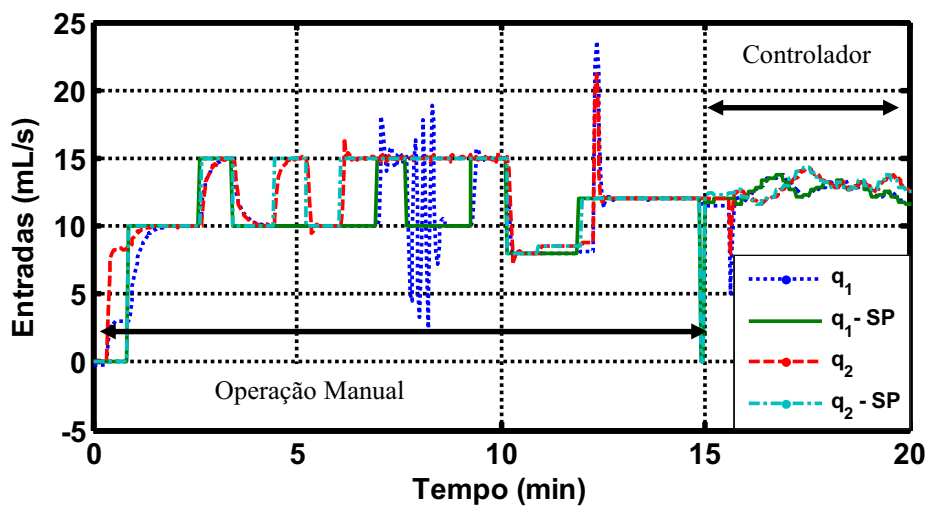


Figura 7.41 - MPC-RS: resultados experimentais e ruídos.

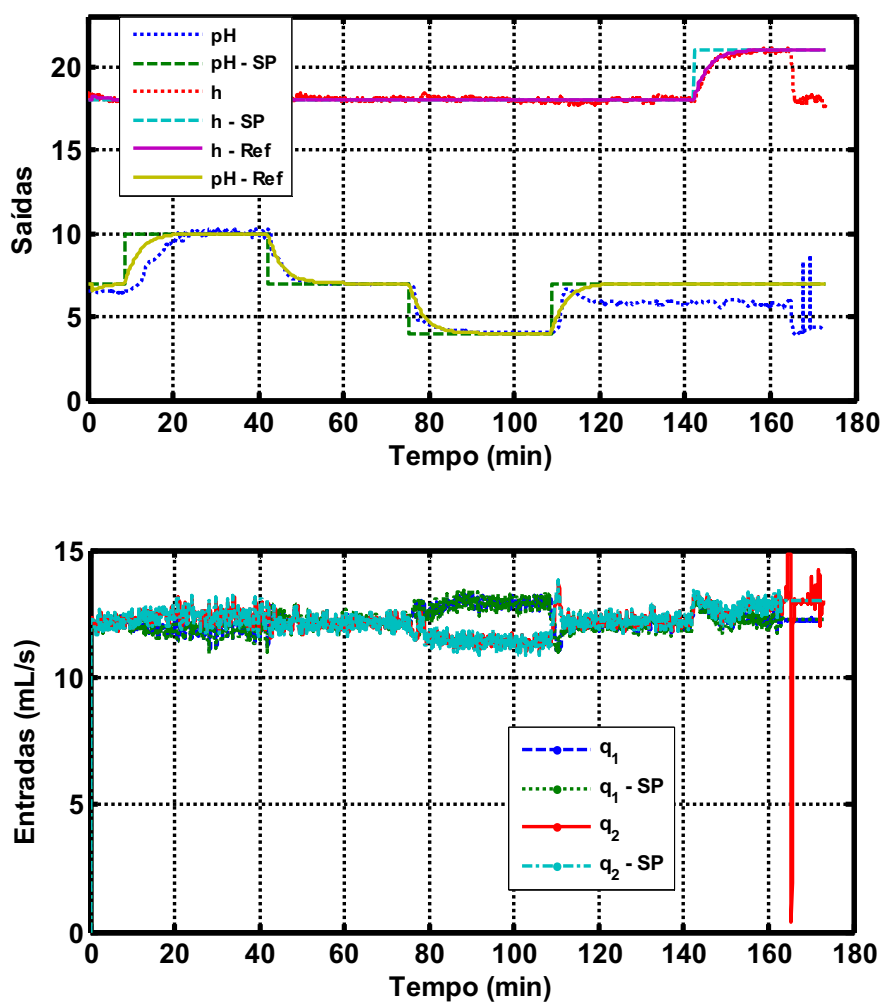


Figura 7.42 - Malha fechada MPC-RS: ruídos.

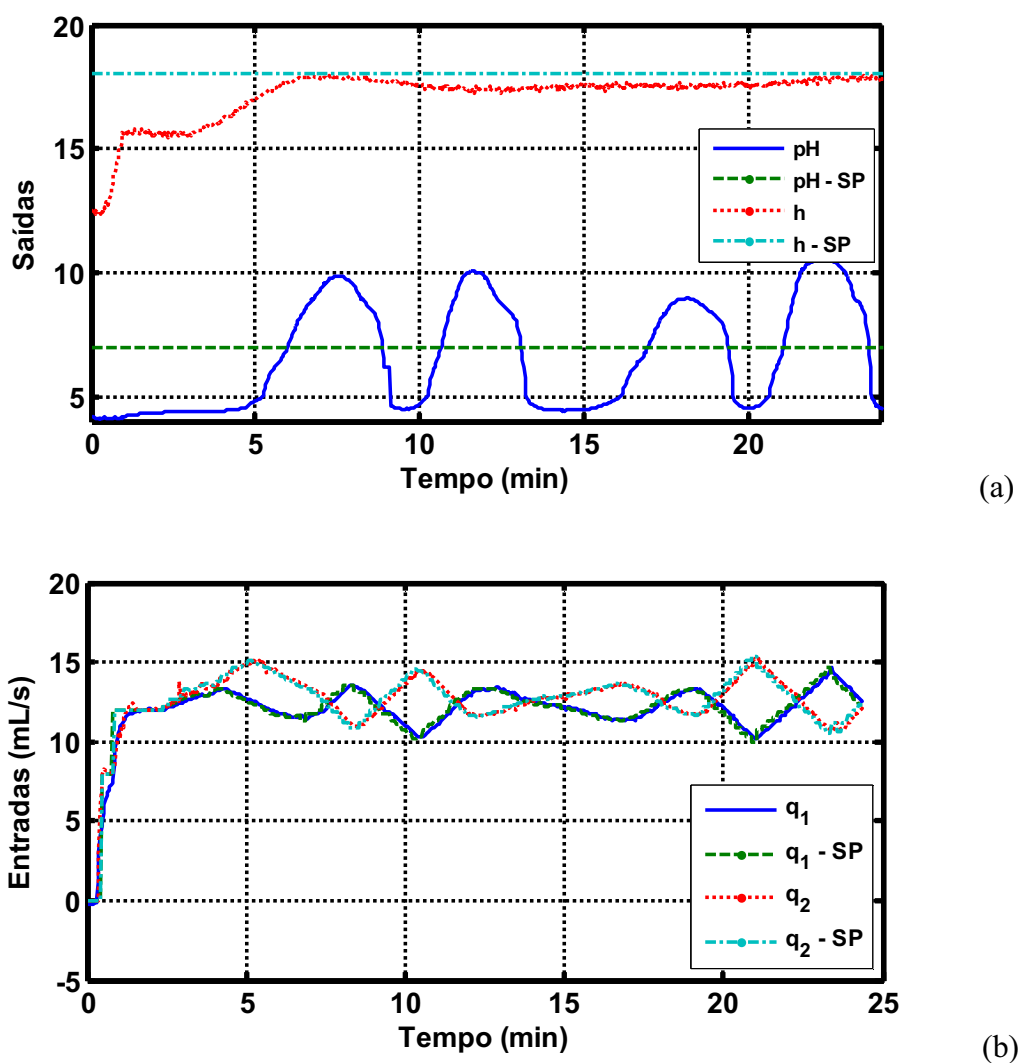


Figura 7.43 - Malha fechada IHMPC: inicialização incorreta.

As Figuras 7.44-7.45 mostram a montagem elétrica do sistema cujos pontos de conexão podem causar a captação e introdução de ruídos no sistema.



Figura 7.44 - Sistema de aquisição de dados.



Figura 7.45 - Circuitos elétricos da instrumentação da planta experimental.

A rede elétrica que alimenta o laboratório apresenta visíveis oscilações, indicando possíveis sobrecargas no circuito de alimentação. A instalação elétrica do laboratório também necessita de modificações para eliminação de interferências, principalmente quando se trabalha com equipamentos sensíveis, como os de instrumentação e aquisição de dados. Nos dias em que as corridas foram realizadas, foi necessário que outras atividades que pudessem provocar ruídos fossem paralisadas ou adiadas. A unidade experimental necessita ser desmontada e remontada utilizando-se de fontes estabilizadas e conexões soldadas e com rotas otimizadas e isoladas de forma a se eliminar os pontos de ruído, inclusive fazendo-se uso de blindagem de cabos. A alocação da instrumentação deverá ser feita de forma que vazamento ou transbordamento no reator não cheguem aos instrumentos. Existe a necessidade também de uma modificação nos circuitos hidráulicos para eliminação de pontos de vazamentos e bolhas e também a substituição ou modificação dos filtros. A questão financeira diante das necessidades de aquisição e modificação do sistema mostra-se crucial. Uma simples unidade como essa demanda um razoável volume de recursos, o que inviabiliza, em alguns casos, compras necessárias, forçando a adaptações que permitam a continuidade da pesquisa sem que a melhor solução seja implementada. Para algumas implementações de rotinas, como filtros, detecção de mudanças bruscas e outras nesse sentido, podem ajudar a minimizar os

problemas. Em outras situações seria necessária a troca de fontes ou a instalação de baterias como fonte de corrente contínua. Outras situações poderiam ser resolvidas com a duplicidade de sensores e atuadores. As sugestões de melhoria são para que se concentre o esforço em trabalhos futuros na rotina de controle. Contudo, as dificuldades se mostraram salutares para o exercício pleno da engenharia e da pesquisa.

7.7 Seção Comparativa

De forma a finalizar este Capítulo, é apresentada a seguir a Tabela 7.2, que faz uma síntese com relação ao atendimento das questões de processo e de desempenho dos controladores estudados.

TABELA 7.2: SÍNTESE DO DESEMPENHO ENTRE OS CONTROLADORES ESTUDADOS.

Sistema	IHMPC	RMPC-MMTV	LMI-RMPC	RSSLMPC	LMI-RMPC	RMPC-MMR	LMI-RMPCR
nom.							
CSTR	☑	☑	-	-	-	☑	☑
MI/PE	-	-	☑	-	-	-	☑
MC	-	-	-	-	-	☑	☑
Flotação	-	-	-	-	-	☑	-
Exp. Sim.	☑	-	-	☑	☑	☑	✗
Exp. Real	☑	-	-	☑	-	-	-

Legenda:

Modelos Cap. 4→CSTR: reação de Van der Vusse; MI/PE: Modelo estável/Planta instável; MC: sistema mal condicionado.

Estudos na Unidade Experimental: Exp. Sim. : Estudos de simulação; Exp. Real: implementação real.

Situação: ☑ - respostas atendem aos requisitos; - Não avaliado; ✗ - Necessidade de maior estudo para solução dos problemas apresentados.

7.8 Considerações Finais

Os controladores RMPC-MMR e LMI-RMPCR foram aplicados a um problema real representativo dos sistemas de controle. O modelo fenomenológico foi obtido e avaliado experimentalmente, sendo considerado adequado para os propósitos desejados nesse trabalho. Os controladores MPC-RS e IHMPC mostraram respostas satisfatórias na aplicação em malha fechada, com modelo perfeito. As respostas experimentais são avaliadas pelas simulações de problema com desvio planta modelo. Os controladores MPC-RS e IHMPC foram implementados na operação em tempo real e os resultados das respostas com esses controladores apresentaram-se adequados e satisfatórios. O controlador RMPC-MMR foi avaliado por simulação, apresentando uma degradação em torno do ponto de pH igual a 7, mas ainda sim aceitável. A resposta de simulação para o controlador LMI-RMPCR é aceitável do ponto de vista de simulação, mas é inviável para aplicação real, considerando-se o elevado esforço computacional, que supera inclusive o tempo de amostragem. A sua aplicação requer novo estudo de forma a se trabalhar com tempos de amostragem maiores. Foram também mostrados e discutidos diversos problemas ocorridos na operação da unidade experimental. A seguir, no Capítulo 8, são apresentadas as conclusões desse trabalho bem como as sugestões para futuros trabalhos.

CAPÍTULO 8

8 CONCLUSÕES

Nesse trabalho foram propostos dois algoritmos de controle robusto:

RMPC-MMR: RMPC formulado com otimização mín-máx, com incerteza invariante no tempo na entrada do sistema e com restrição de robustez;

LMI-RMPCR: RMPC formulado com otimização na forma de LMI utilizando incerteza na forma politópica e restrição de robustez.

Os resultados apresentados nos Capítulo 4, 6 e 7 permitem listar as seguintes conclusões:

- As respostas de simulação das saídas dos sistemas submetidos aos controladores se mostraram adequadas e satisfatórias;
- As respostas dos controladores desenvolvidos demonstraram desempenhos semelhantes aos algoritmos clássicos de MPC e RMPC.
- Os algoritmos de controle RMPC desenvolvidos conseguiram lidar bem com os problemas freqüentemente encontrados nos sistemas de controle apresentados pelos sistemas estudados, tais como: desvio/planta modelo, incertezas aleatórias, discrepâncias entre fases, tempo morto, ganho, constante de tempo, modelo linear/planta não linear, modelo estável / planta instável, mal condicionamento;
- A planta experimental foi modelada e teve os parâmetros necessários identificados através de corrida em malha aberta. Os resultados de simulação foram satisfatórios e indicaram que o modelo é representativo do processo real e adequado para os propósitos de controle pretendidos;

- As respostas experimentais do controlador MPC-RS foram satisfatórias.
- As respostas teóricas e experimentais do controlador IHMPC foram satisfatórias. O ajuste do controlador para operação em tempo real se mostrou adequado.
- Baseado nas respostas do sistema experimental submetido ao controle IHMPC, foi definido que uma incerteza na entrada representativa desse sistema é de 2% do valor de entrada.
- As respostas da aplicação dos controladores LMI-RMPC e RMPC-MMR ao sistema experimental mostraram-se satisfatórias do ponto de vista de simulação.
- O RMPC-MMR com incerteza na entrada limitada a 2% foi calculado dentro do tempo de amostragem e com desempenho satisfatório;
- O LMI-RMPCR com modelo nominal (sem incerteza) já indicou que haveria problemas para o cálculo da ação de controle dentro do tempo de amostragem;
- O LMI-RMPCR com incerteza na forma de politopo cobrindo uma região de incerteza de 2% na matriz de entrada não conseguiu ser calculado dentro do tempo de amostragem, o que torna a aplicação real para esse caso inadequada. Faz-se necessário o trabalho em outro tempo de amostragem, que permita o cálculo do controlador e que não comprometa o desempenho do sistema. É possível esperar, diante da evolução do processamento computacional, que em um futuro próximo esta limitação seja eliminada ou bastante reduzida;
- A interferência de questões relacionadas com vazamentos, ruídos de processo, ruídos de natureza elétrica e outros problemas associados com a aplicação em tempo real, trouxeram dificuldades adicionais que exigiram habilidade manual e conhecimento do processo. Sugere-se a reconstrução da unidade experimental de forma a se eliminar fontes de ruídos e vazamentos, para que futuras pesquisas concentrem esforços no desenvolvimento dos controladores.

8.1 Sugestões para Trabalhos Futuros

- Utilização dos controladores robustos desenvolvidos em modelos empíricos, como por exemplo, modelos neuronais;
- Aplicação de controle robusto no modelo experimental considerando o controle da corrente das bombas e não o controle de vazão;
- Reconstrução da unidade buscando eliminar os problemas detectados nesse trabalho;
- Estudo experimental de controle robusto associado a controle tolerante a falhas;
- Análise e melhoria do esforço computacional no sentido de reduzir o tempo de processamento dos controladores robustos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALAMO, T., DE LA PENA, D. M., CAMACHO, E.F. Min–Max MPC Based on a Network Problem. **Systems & Control Letters**, nº57, p. 184 - 192, 2008.

ÅSTRÖM, K. J. Model Uncertainty and Robust Control. In: K. Åström, P. Albertos, M. Blanke, A. Isidori, W. Schaufelberger, R. Sanz. **CONTROL OF COMPLEX SYSTEMS**, European Science Foundation, 2001.

BADGWELL, T. A. Robust Model Predictive Control of Stable Linear Systems, **Int. J. Control**. v. 68, p. 797-818, 1997a.

BADGWELL, T. A. A Robust Model Predictive Control Algorithm for Stable Nonlinear Plants, In: INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON ADVANCED CONTROL OF CHEMICAL PROCESSES (ADCHEM), Banff, Canada, 1997b.

BEMPORAD, A. Model Predictive Control Design: New Trends and Tools, Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision & Control, San Diego, USA, 2006.

BERGH, L.G.; YIANATOS, J.B. Flotation Column Automation: State of Art, **Control Engineering Practice**, v. 11, p 67-72, 2003.

BERNUSSOU, J., PERES, P.L.D., GEROMEL, J.C. A Linear Programming Oriented Procedure for Quadratic Stabilization of Uncertain Systems, **Syst. Control Lett.**, v. 13, p.65-72, 1989.

BEMPORAD A., MORARI M. Robust Model Predictive Control: A Survey. In: GARULLI A., TESI A., VICINO A. **ROBUSTNESS IN IDENTIFICATION AND CONTROL**. Lectures notes in Control and Information Sciences, Springer-Verlag, v. 245, p. 207-226, 1999.

BOYD, S., GHAOUI, L., FERON, E., BALAKRISHNAN, V. **Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory**, SIAM, Pennsylvania, USA, 1994.

CAMACHO, E. F., BORDONS C. **Model Predictive Control**, Springer, Barcelona, Espanha, 1999.

CARVALHO, T.; DURÃO, F.; FERNANDES, C. Dynamic Characterization of Column Flotation Process Laboratory Case Study, **Minerals Engineering**, v. 12, Nº 11, p 1339-1346, 1999.

CHENG, X., KROGH, B. H. A New Approach to Guaranteed Stability for Receding Horizon Control, 13th IFAC World Congress, San Francisco, p. 433-438, 1996.

CHANG, J. W., YU, C.C. The Relative Gain for Non-square Multivariable Systems. **Chemical Engineering Science**, v. 45, Nº 5, p. 1309-1323, 1990.

CHRISTEN, U., MUSCH, H. E., STEINER, M. Robust Control of Distillation Columns: μ -vs H^∞ - synthesis. **Journal of Process Control**, v. 7, Nº 1, p. 19-30, 1997.

COLEMAN, T. F, ZHANG, Y. **Optimization Toolbox for Use With Matlab**, The Math Works Inc, Version 2.1, 2000.

DE OLIVEIRA, S., MORARI, M. Robust Model Predictive Control for Nonlinear Systems With Constraints. In: ADVANCED CONTROL OF CHEMICAL PROCESSES, Kyoto, Japan, p. 295-300, 1994.

DEL VILLAR, R.; GRÉGOIRE, M.; POMERLEAU, A. Automatic Control of Laboratory Flotation Column, **Minerals Engineering**, v. 12, Nº 3, p 291-308, 1999.

DING, B., XI, Y., CYCHOWSKI M. T., O'MAHONY, T. Improving Off-line Approach to Robust MPC Based-on Nominal Performance Cost, **Automatica**, v. 43, Issue 1, p. 158-163, 2007.

EATON, J. W., RAWLINGS, J. B. Model-Predictive Control of Chemical Process. **Chemical Engineering Science**, v. 47, Nº 4, p. 705-720, 1992.

FENG, L., WANG, J. L., POH, E. K. Improved Robust Model Predictive Control with Structured Uncertainty. **Journal of Process Control**, nº 17, p. 683–688, 2007.

FINDEISEN, R., ALLGÖWER, F. An Introduction to Nonlinear Model Predictive Control. In SCHERER, C.W.; SCHUMACHER, J.M. **THE IMPACT OF OPTIMIZATION IN CONTROL**. Dutch Institute of Systems and Control (DISC), S. 3.1–3.45, 2001.

GAGNEPALN, J. P., SEBORG, D. E. Analysis of Process Interactions With Applications to Multiloop Control System Design. **Ind. Eng. Chem. Process Des. Dev.**, v. 21, p. 5-11, 1982.

GAHINET, P., NEMIROVSKI, A., LAUB, A. J., CHILALI, M. **LMI Control Toolbox for Use With Matlab**, The Math Works Inc., Natick, MA, 1995.

GARCIA, C. E., MORSHEDI, A. M. Quadratic Programming Solution of Dynamic Matrix Control (QDMC). **Chem. Eng. Commun.** v. 46, p. 73-87, 1986.

GARCIA, C. E., PRETT, D.M., MORARI, M. Model Predictive Control: Theory and Practice – A Survey. **Automatica**, v. 25, Nº 3, p. 335-348, 1989.

GILL, P.E., W. MURRAY, and M.H. WRIGHT, **Numerical Linear Algebra and Optimization**, Addison Wesley, v.1, 1991

GILL, P.E., W. MURRAY, M.A. SAUNDERS, and M.H. WRIGHT, **Procedures for Optimization Problems with a Mixture of Bounds and General Linear Constraints**, ACM Trans. Math. Software, v. 10, p. 282-298, 1984.

GHAOUI, L. EL, NICULESCU, S. **Advances in Linear Matrix Inequality Methods in Control**. SIAM, Philadelphia, 2000.

GONÇALVES, D. **Controle Preditivo em Tempo Real de uma Planta Piloto**, Qualificação ao mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, 2007.

GRIEDER, P., PARRILO, P. A., MORARI, M. Robust Receding Horizon Control – Analysis & Synthesis. In: PROCEEDINGS OF THE 42ND IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL, Maui, Hawaii-USA, p.941-946, 2003.

GUSTAFSSON, T. K., MÄKILÄ, P. M. Modelling of Uncertain Systems With Application to Robust Process Control, **Journal of Process Control**, v. 11, p. 251-264, 2001.

GUSTAFSSON, T. K., WALLER, K. V., Dynamic Modeling and Reaction Invariant Control of pH, **Chem. Eng. Sci.**, v. 38, p. 389-398, 1983.

HALL, R. C. **Development of a Multivariable pH Experiment**, M.Sc. Thesis, University of California, Santa Barbara, California, USA, 1987.

HAVRE, K. **Studies on Controllability Analysis and Control Structure Design**. Dr. Ing. Thesis, Norwegian University of Science and Technology, 1998.

HENSON, M. A., SEBORG, D. E. **Nonlinear Process Control**, Prentice-Hall, New Jersey, 1997.

HOLT, B. R., MORARI, M. Design of Resilient Processing Plants – V: The Effect of Dead time on Dynamic Resilience. **Chemical Engineering Science**, v. 40, N° 7, p. 1229-1237, 1985a.

HOLT, B. R., MORARI, M. Design of Resilient Processing Plants – VI: The Effect of Right-Half-Plane Zero on Dynamic Resilience. **Chemical Engineering Science**, v. 40, N° 1, p. 59-74, 1985b.

HU, KE, YUAN, J. Multi-Model Predictive Control Method for Nuclear Steam Generator Water Level. **Energy Conversion and Management**, n° 49, p. 1167–1174, 2008.

HUGO, A. Limitations of Model Predictive Control. 1996. Disponível em: <http://www.controlartsinc.com>. Acesso em 15 jan. 2005, 23:30:00.

KAILATH, T. **Linear Systems**. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1980.

KANEV, S., VERHAEGEN, M., Robustly Asymptotically Stable Finite-horizon MPC, **Automatica**, v. 42, Issue 12, p. 2189-2194, 2006.

KOTHARE, M. V., BALAKRISHNAN V., MORARI M. Robust Constrained Model Predictive Control Using Linear Matrix Inequalities. **Automatica**, v. 32, N° 10, p. 1361-1379, 1996.

LEE, S.M., PARK, J. H. Robust Model Predictive Control for Norm-Bounded Uncertain Systems Using New Parameter Dependent Terminal Weighting Matrix. **Chaos, Solitons and Fractals**, n° 38, p. 199–208, 2008.

LEE, J. H. Recent Advances in Model Predictive Control and Other Related Areas. **AIChE Symposium Series**, v. 93, p. 201-216, 1997.

LEE, J. H., YU, Z. Worst-case Formulations of Model Predictive Control for Systems With Bounded Parameters. **Automatica**, v. 33, N° 5, p. 763-781, 1997.

LEE, J.H., COOLEY, B. L. Min-Max Predictive Control Techniques for Linear State-Space System With a Bounded Set of Input Matrices. **Automatica**, v. 36, p. 463-473, 2000.

LÖFBERG J. **Minimax Approaches to Robust Model Predictive Control**. Phd Thesis. Linköping, Sweden, 2003.

LÖFBERG J. YALMIP : A Toolbox for Modeling and Optimization in MATLAB. J. In Proceedings of the CACSD Conference, Taipei, Taiwan (<http://control.ee.ethz.ch/~joloef/yalmip.php>), 2004.

LØVAAS, C., SERON, M. M., GOODWIN, G. C. Inverse Minimax Optimality of Model Predictive Control Policies. **Systems & Control Letters**, *In press*.

MACIEJOWSKI, J. M. **Predictive Control With Constraints**, Pearson Education Limited, 2002.

MARJANOVIC, O., LENNOX, B. Infinite Horizon Model Predictive Control With no Terminal Constraint. **Computers and Chemical Engineering**, v. 28, p. 2605-2610, 2004.

MAYNE D.Q., RAWLINGS J. B., RAO C. V., SCOKAERT P. O. M. Constrained Model Predictive Control: Stability and Optimality, **Automatica**, v. 36, pp. 789-814, 2000.

MAYNE, D., LANGSON, W. Robustifying Model Predictive Control of Constrained Linear Systems. **Electronics Letters**, v. 37, N° 23, p. 1422-1423, 2001.

MCAVOY, T., ARKUN, Y., CHEN, R., ROBINSON, D., SCHNELLE, P.D. A New Approach to Defining a Dynamic Relative Gain, **Control Engineering Practice**, v. 11, pp. 907-914, 2003.

MONTANDON, A. G. **Controle Preditivo em Tempo Real com Trajetória de Referência Baseado em Modelo Neural para Reator de Neutralização**, Dissertação de Mestrado, UFU, Uberlândia, 2005.

MORARI, M Design of Resilient Processing Plants – III: General Framework for the Assessment of Dynamic Resilience. **Chemical Engineering Science**, v. 38, N° 11, p. 1881-1891, 1983.

MORARI, M, ZARIFIOU, E., HOLT, B. R. Design of Resilient Processing Plants. New Characterization of Effect of the Zeros. **Chemical Engineering Science**, v. 42, N° 10, p. 2425-2428, 1987.

MORARI, M. Model Predictive Control: Multivariable Control Technique of Choice in the 1990?. In: TECHNICAL REPORT, CALIFORNIA INSTITUTE OF TECHNOLOGY, CIT/CDS 93-024 1993.

MORARI, M., LEE, J. H. Model Predictive Control: Past, Present and Future. **Computers and Chemical Engineering**, v. 23, p. 667-682, 1999.

MORARI, M., ZAFIRIOU, E. **Robust Process Control**, Prentice-Hall, New Jersey, 1989.

MUSKE, K. R., RAWLINGS, J. B. Model Predictive Control With Linear Models. **AIChE Journal**, v. 39, N° 2, p. 262-287, 1993a.

MUSKE, K. R., RAWLINGS, J. B. Linear Model Predictive Control of Unstable Process. **J. Proc. Cont.**, v. 3, N° 2, p.85-96, 1993b.

MUSKE, K. R. **Linear Model Predictive Control of Chemical Process**, PhD thesis, University of Texas at Austin, 1995.

NIEDERLINSKI, A. A Heuristic Approach to the Design of Linear Multivariable Interacting Control Systems. **Automatica**, v. 7, p. 691-701, 1971.

NIKOLAOU, M. **Model Predictive Control: A Critical Synthesis of Theory and Industrial Needs**, Advances in Chemical Engineering Series, Academic Press, 2001.

OSBURN, S. L., BERNSTEIN, D. S. A Review and Comparison of Guaranteed Cost Bounds for Robust Stability and Performance Analysis. IN: PROCEEDINGS OF THE 36TH CONFERENCE ON DECISIONS & CONTROL, San Diego, USA, 1997.

PERSECHINI, M. A. M.; PERES, A. E. C., JOTA, F. G. Control Strategy for a Column Flotation Process, **Control Engineering Practice**, v. 12, p 963-976, 2004.

PERSECHINI, M. A. M.; PERES, A. E. C., JOTA, F. G. Dynamic Model of Flotation Column, **Minerals Engineering**, v. 13, Nº 14-15, p 1465-1481, 2000.

QIN, S. J., BADGWELL, T. A. An Overview of Industrial Model Predictive Control Technology. In: PROCEEDINGS CPC-V, Lake Tahoe, CA, 1996.

QIN, S. J., BADGWELL, T. A. A Survey of Industrial Model Predictive Control Technology. **Control Engineering Practice**, v. 11, p. 733-764, 2003.

RALHAN, S., BADGWELL, T. A. Robust Control of Stable Linear Systems With Continuous Uncertainty. **Computers and Chemical Engineering**, v. 24, p. 2533-2544, 2000.

RAMÍREZ, D. R., CAMACHO, E. F. Characterization of Min-Max MPC With Bounded Uncertainties and a Quadratic Criterion. In: PROCEEDINGS OF AMERICAN CONTROL CONFERENCE, Anchorage, AK, pp. 358-363, 2002.

RAWLINGS, J. B. Tutorial: Model Predictive Control Technology. In: PROCEEDINGS OF THE AMERICAN CONTROL CONFERENCE, San Diego, California, pp. 662-676, 1999.

REIS, L. L. G. **Controle Tolerante com Reconfiguração Estrutural Acoplado a Sistema de Diagnóstico de Falhas**, Dissertação de Mestrado, UFU, 2008.

RICHALET, J. Industrial Applications of Model Based Predictive Control. **Automatica**, v. 29, Nº 5, p. 1251-1274, 1993.

RICHALET, J., RAULT, A., TESTUD, J. L., PAPON, J. Model Predictive Heuristic Control, **Automatica**, Vol. 14, pp. 413-428, 1978.

RICHARDS, A., HOW, J. P. Analytical Performance Prediction for Robust Constrained Model Predictive Control. In: AIAA GUIDANCE, NAVIGATION AND CONTROL CONFERENCE AND EXHIBIT, Providence, Rhode Island, 2004.

RICHARDS, A. Robust Model Predictive Control With Imperfect Information, **Proceeding of American Control Conference**, p. 268-273, 2005.

RICKER, N. L. Model Predictive Control With State Estimation. **Ind. Eng. Chem. Res.** v. 29, p. 374-382, 1990.

SAFFER II, D. R., DOYLE III, F. J. Analysis of linear programming in model predictive control, **Computers & Chemical Engineering**, Vol. 28, Issue 12, p. 2749-2763, 2004.

SÅGFORS, M., WALLER, K.V. Multivariable Control of Ill-Conditioned Distillation Columns Utilizing Process Knowledge. **Journal of Process Control**, v. 8, Nº 3, p. 197-208, 1998.

SCOKAERT, P. O. M., RAWLINGS, J. B. On Infeasibility in Model Predictive Control. In: KANTOR, J. C.; GARCIA, C. E.; CARNAHAN, B. **Chemical Process Control-V**, p. 331-334. CACHE, AIChE, 1997.

SEBORG, D. E., EDGAR, T. F., MELLICHAMP, D. A. **Process Dynamics and Control**, 2º Ed., John Wiley & Sons Inc., EUA, 2004.

SILVA, C. H. F., HENRIQUE, H. M., GOMES, L. G., OLIVEIRA-LOPES, L. C. Controle Preditivo Robusto Baseado em Inequações Matriciais Lineares Aplicado a Máquinas Síncronas. **Revista Ciências Exatas**, v. 13, nº 1, p. 121-129, 2007.

SILVA, C. H. F., HENRIQUE, H. M., OLIVEIRA-LOPES, L. C., GOMES, L. R. Controle Preditivo Robusto e sua Aplicação no Modelo de Máquinas Síncronas de Pequenas Centrais Hidrelétricas. **Revista Controle & Instrumentação**, v.114, p.72-77, 2006.

SILVA, C. H. F., GOMES, L. G., HENRIQUE, H. M., OLIVEIRA-LOPES, L. C. Controle Preditivo Robusto: Um Estudo Comparativo. **XVI Congresso Brasileiro de Engenharia Química**, Santos, 2006.

SILVA, C. H. F., GOMES, L. G., HENRIQUE, H. M. Controle Preditivo Aplicado À Máquina Síncrona. **IV Conferência de Estudos em Engenharia Elétrica**, Uberlândia, 2005.

SILVA, C. H. F., GOMES, L. G., HENRIQUE, H. M., OLIVEIRA-LOPES, L. C. Controle Preditivo Robusto Baseado em Inequações Matriciais Lineares Aplicado a Máquinas Síncronas. **I Congresso Internacional de Cooperação Universidade-Indústria**, Ubatuba, 2005.

SILVA, C. H. F., OLIVEIRA-LOPES, L. C., HENRIQUE, H. M., GOMES, L. G. Controle Preditivo Robusto de Pequenas Centrais Hidrelétricas. **IV Seminário Nacional de Controle e Automação**, Salvador, 2005.

SILVA, C. H. F., OLIVEIRA-LOPES, L. C., HENRIQUE, H. M. CONSTRAINED ROBUST Model Predictive Control for Linear Systems. **XV Congresso Brasileiro de Engenharia Química**, Curitiba, 2004a.

SILVA, C. H. F., OLIVEIRA-LOPES, L. C., HENRIQUE, H. M., GOMES, L. G Controle Preditivo Robusto Aplicado a Pequenas Centrais Hidrelétricas. **IV Simpósio Nacional de Pequenas e Médias Centrais Hidrelétricas**, Recife, 2004.

SILVA, C. H. F., HENRIQUE, H. M., OLIVEIRA-LOPES, L. C. Controle Preditivo Robusto de um Sistema de Flotação. **XXX Encontro Nacional de Meios Porosos**, Uberlândia, 2004.

SKOGESTAD, S., MORARI, M. Implications of Large RGA Elements on Control Performance. **Ind. Eng. Chem. Res.**, v. 26, p. 2323-2330, 1987.

SKOGESTAD, S., POSTLETHWAITE, I. **Multivariable Feedback Control: analysis and design**, John Wiley & Sons, Chichester, England, 1997.

VUTHANDAM, P., GENCELI, H., NIKOLAOU, M. Performance bounds for robust quadratic dynamic control with end conditions, *AIChE Journal*, 41(9), 2083-2097, 1995.

WANG, Y. J., RAWLINGS, J. B. A New Robust Predictive Control Method I: Theory and Computation. **Journal of Process Control**, v. 14, p. 231-247, 2004a.

WANG, Y. J., RAWLINGS, J. B. A New Robust Predictive Control Method II: Examples. **Journal of Process Control**, v. 14, p. 249-262, 2004b.

WEINMANN, A. **Uncertain Models and Robust Control**. Springer-Verlag, New York, 1991.

WELLER, S. R., GOODWIN, G.C. Controller Design for Partial Decoupling of Linear Multivariable Systems. **Int. J. Control**, v. 63, N° 3, p. 535-556, 1996.

WITCHER, M.F., MCAVOY, T.J. Interacting Control Systems: Steady State and Dynamic Measurement of Interaction. **ISA Transactions**, v. 16, N° 3, p. 35-41, 1977.

WOLOVICH, W. A., FALB, P.L. Invariants and Canonical Forms Under Dynamic Compensation. **SIAM Journal Control and Optimization**, v. 14, p. 996-1008, 1976.

ZHANG, Q., XI, Y. An efficient model predictive controller with pole placement, **Information Sciences**, Vol. 178, Issue 3, p. 920-930, 2008.

ZHENG, A. Robust Stability Analysis of Constrained Model Predictive Control. **Journal of Process Control**, v. 9, p. 271-278, 1999.

ZHOU, K and DOYLE, J. C. **Essentials of Robust Control**, Prentice Hall, New Jersey, 1998.

ZHU, Z. X., JUTAN, A Robust Multivariable Control Using an SVD-based Controller. **Chemical Engineering Science**, v. 53, N° 6, p. 1145-1151, 1998.

APÊNDICE

APÊNDICE A

A.1. Programas para Operação em Tempo Real

Para a operação da planta foram implementadas algumas rotinas no software Labview[®]. Através destas rotinas é possível:

- Iniciar/parar/encerrar a operação da planta experimental;
- Fazer a excitação das vazões de entrada;
- Adicionar/remover filtro digital de sinais;
- Selecionar modo de Operação Manual/Automático, ajustando *setpoints* desejados.

Nesse módulo é ainda possível visualizar: a corrente das bombas (modo manual ou modo automático); a tensão dos transmissores envolvidos no controle; as entradas e as saídas (valores adquiridos e valores desejados); tempo de aquisição; tempo de iteração e valores de ajustes dos controladores PI para as vazões de ácido e de base. A Figura A.1 mostra o painel frontal da VI para a execução da corrida em malha aberta e a Figura A.2 apresenta o diagrama de blocos referente a essa implementação.

As Figuras A.3-A.4 mostram o painel frontal e o diagrama de blocos, respectivamente, para o controlador PID das bombas.

As Figuras A.5-A.6 mostram o painel frontal e o diagrama de blocos, respectivamente, para filtro digital de sinais implementado. Para maiores informações sobre os filtros implementados nesse trabalho ver Gonçalves (2007).

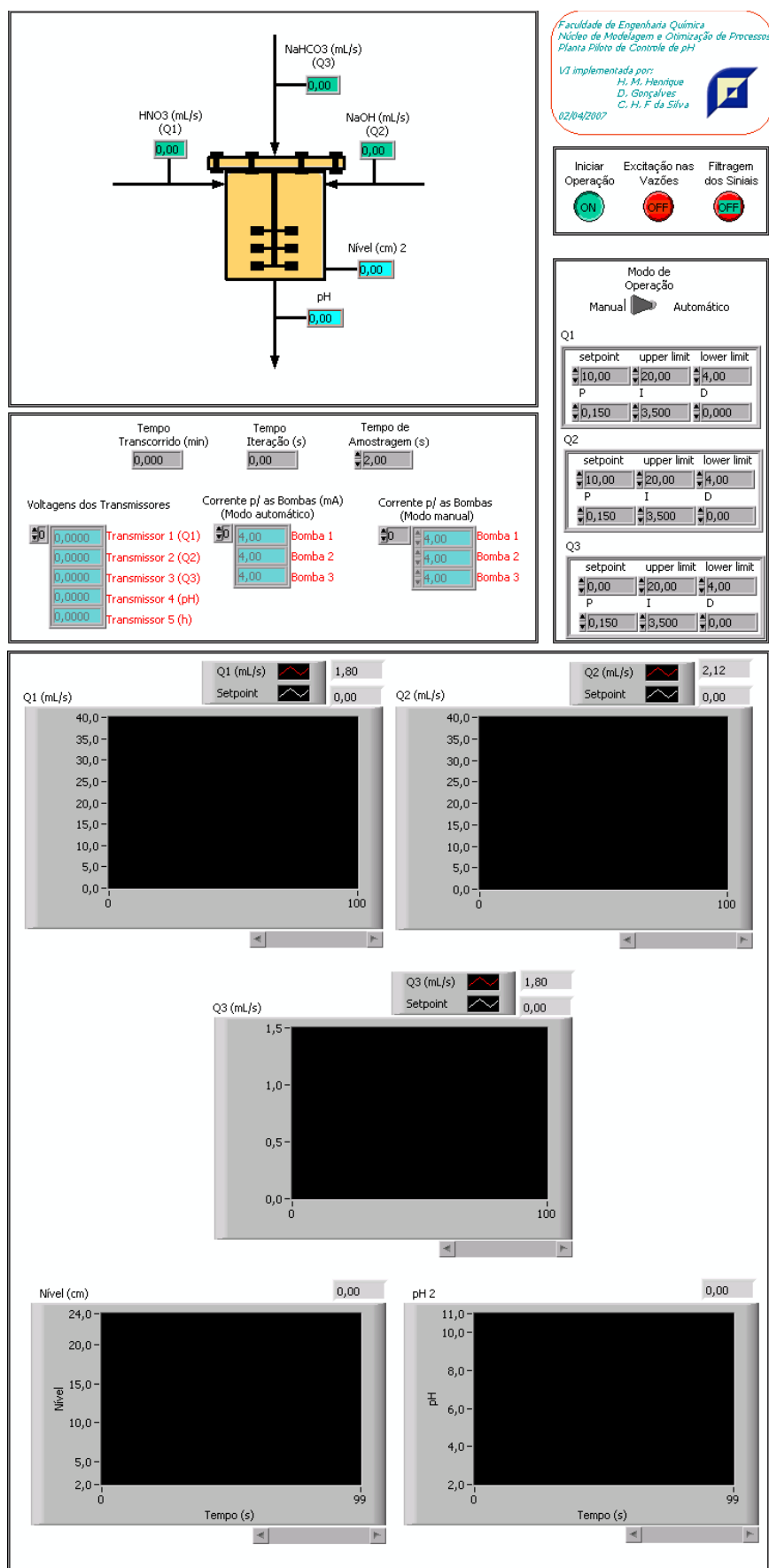


Figura A.1 - Painel Frontal do VI Malha Aberta.

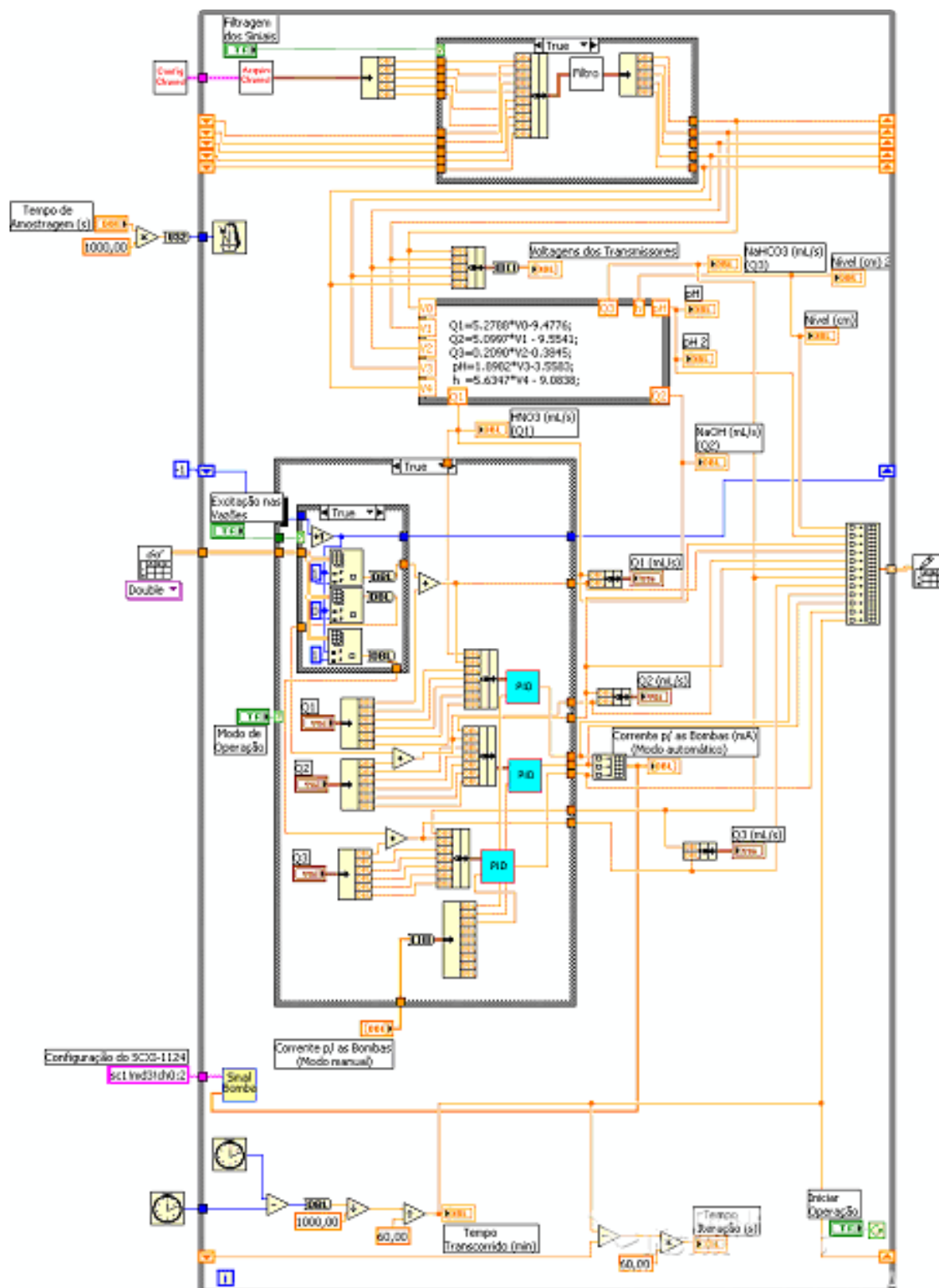


Figura A.2 - Diagrama de blocos da VI Malha Aberta.

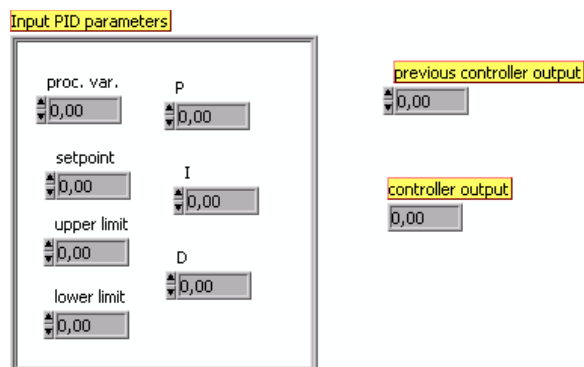


Figura A.3 - Painel frontal da sub-VI do Controlador PID.

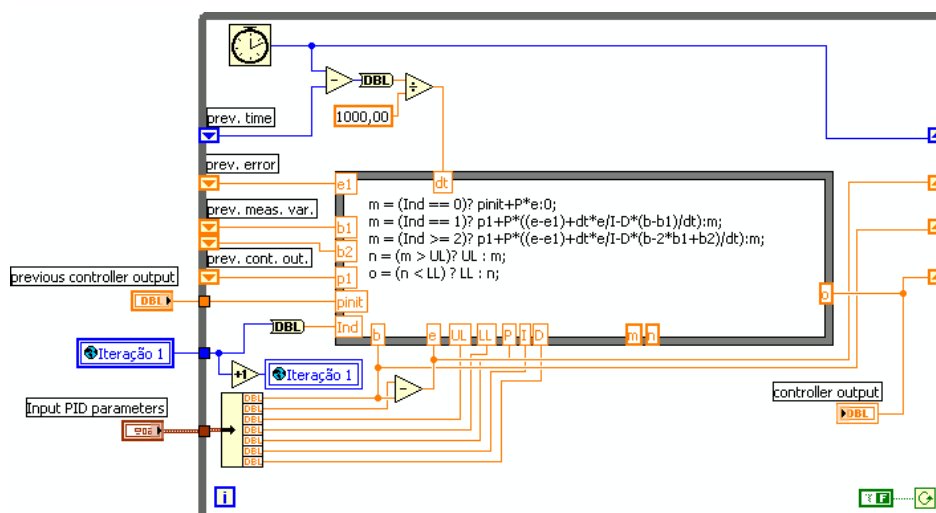


Figura A.4 - Diagrama de blocos da sub-VI Controlador PID.

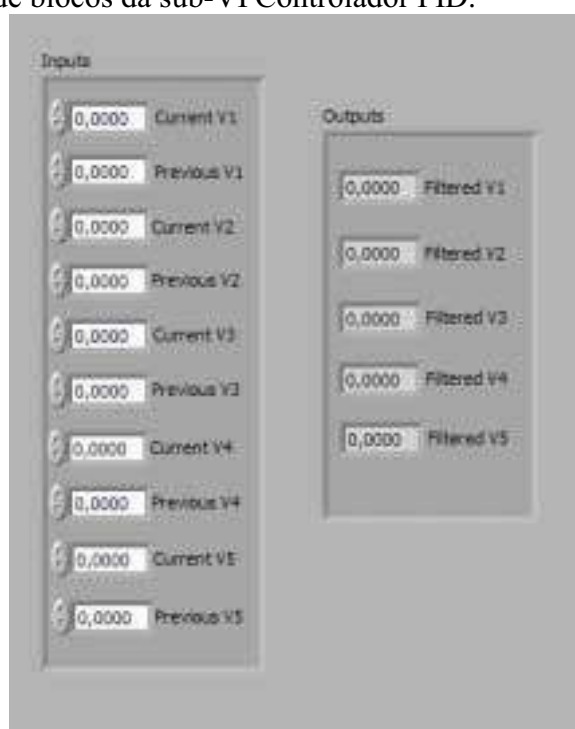


Figura A.5 - Paineis Frontal da sub-VI Filtro Digital.

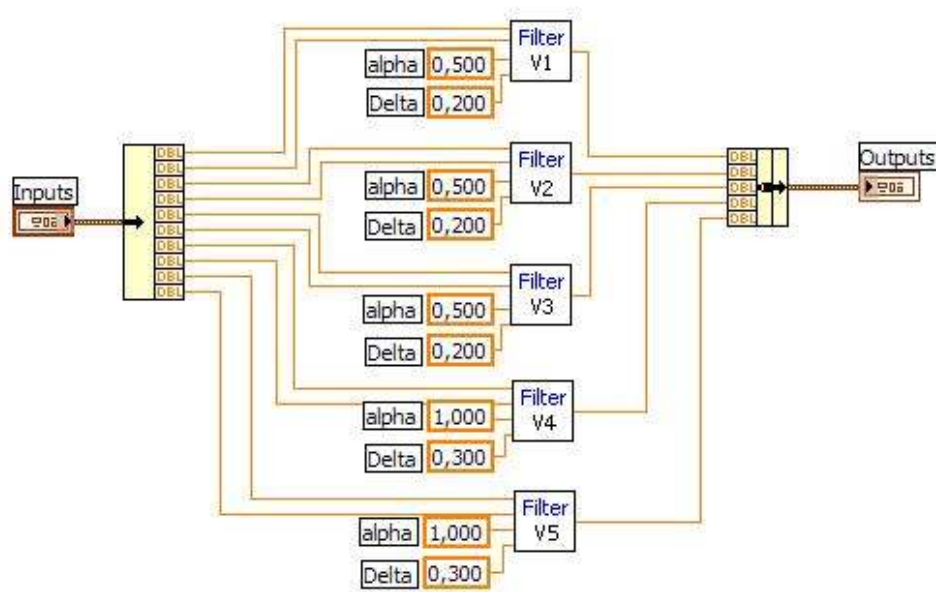


Figura A.6 - Diagrama de blocos da sub-VI Filtro Digital.

As Equações A1-A5 mostram as curvas de calibração da instrumentação. Para maiores detalhes sobre o procedimento ver Gonçalves (2007). Essas curvas, juntamente com os coeficientes de regressão, são apresentadas nas Figuras A7.-A.11.

$$q_1 = 5,2788V_0 - 9,4776 \quad (\text{A.1})$$

$$q_2 = 5,0997V_1 - 9,5541 \quad (\text{A.2})$$

$$q_3 = 0,2090V_2 - 0,3845 \quad (\text{A.3})$$

$$\text{pH} = 1,8982V_3 - 3,5583 \quad (\text{A.4})$$

$$h = 5,6347V_4 - 9,0838 \quad (\text{A.5})$$

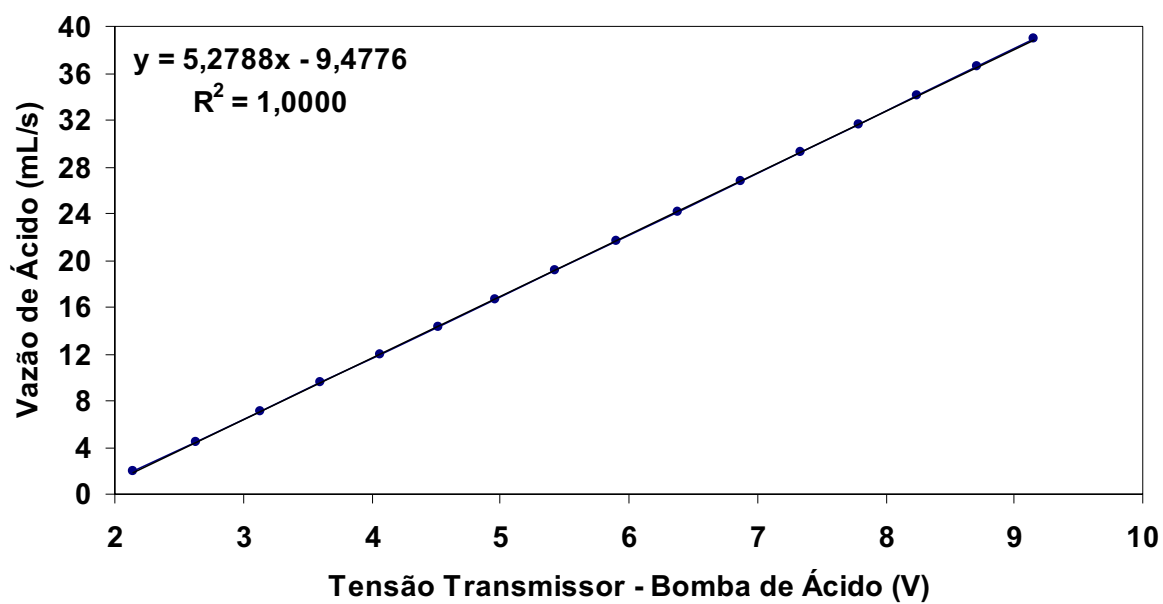


Figura A.7 - Curva de calibração e regressão linear dos dados – Vazão de Ácido.

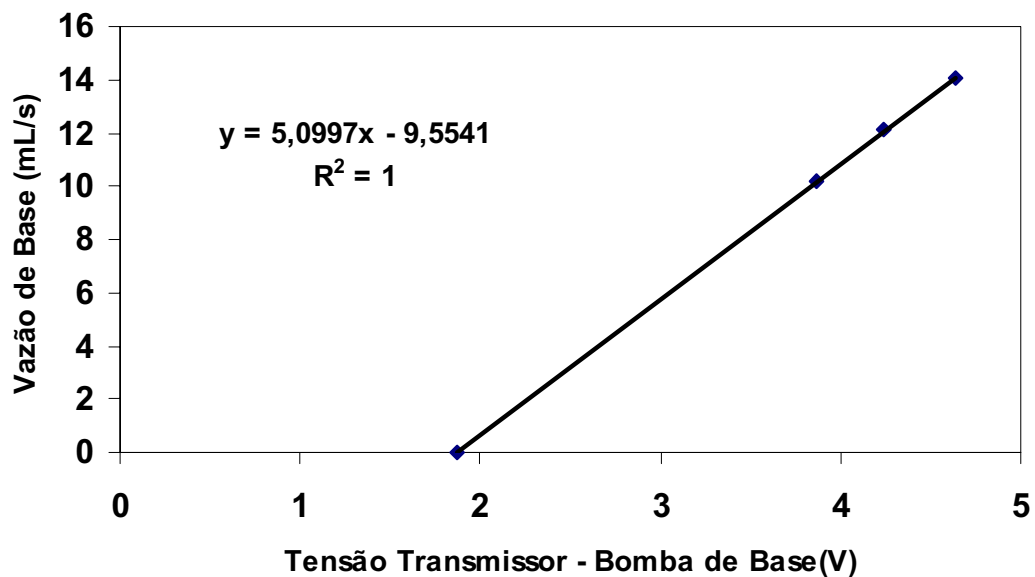


Figura A.8 - Curva de calibração e regressão linear dos dados – Vazão de Base.

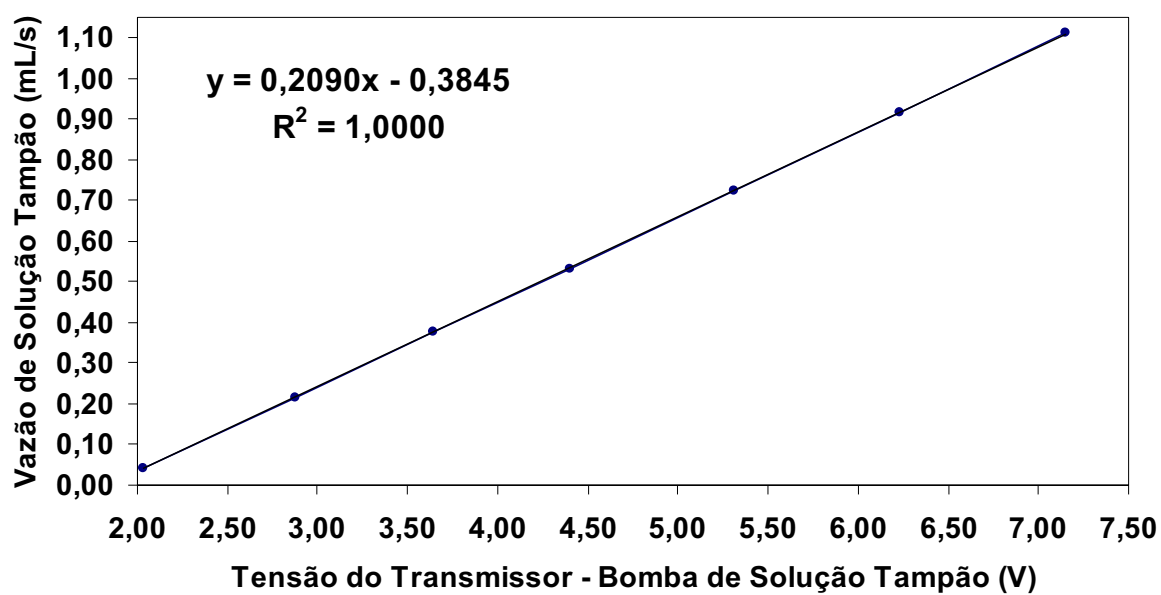


Figura A.9 - Curva de calibração e regressão linear dos dados – Vazão de solução tampão.

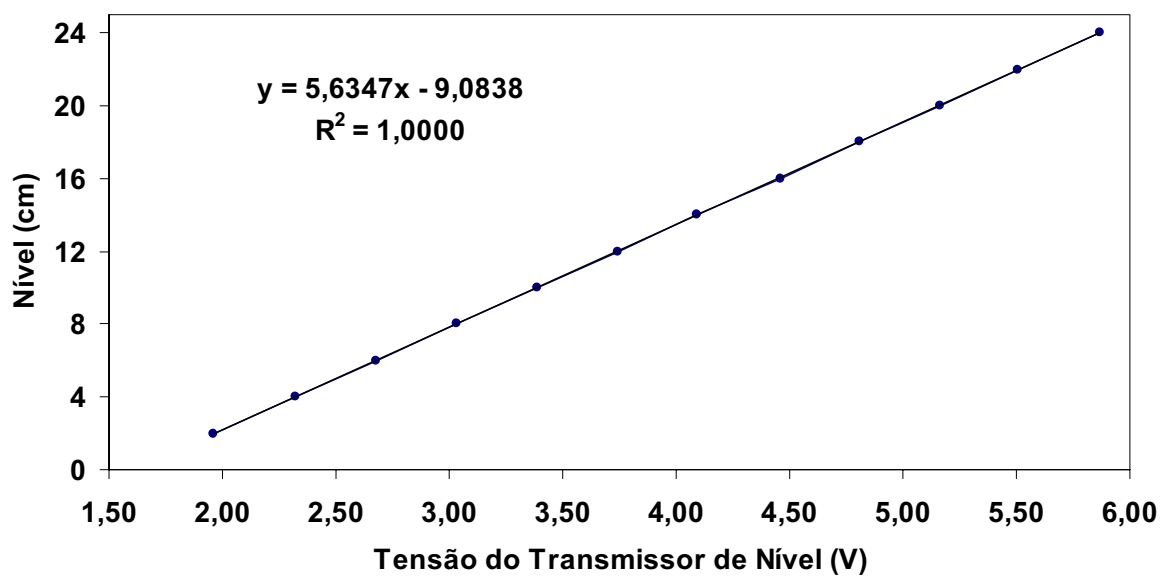


Figura A.10 - Curva de calibração e regressão linear dos dados – Altura (h).

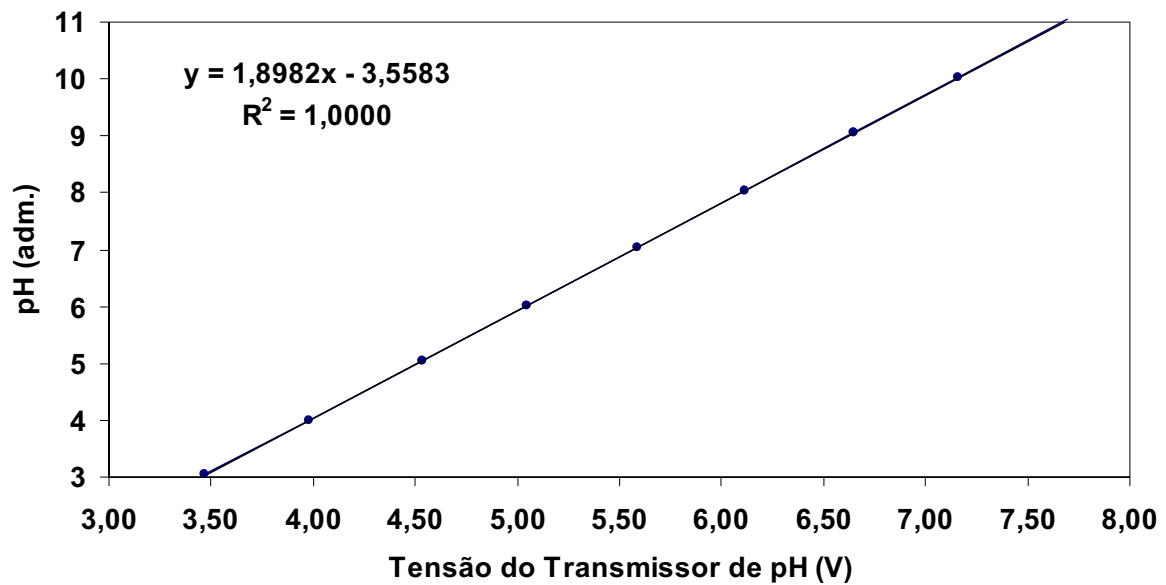


Figura A.11 - Curva de calibração e regressão linear dos dados – pH.

As Figuras A12-A13 apresentam o painel de controle e o diagrama de blocos, respectivamente, implementados para o controle em malha fechada com MPC-RS.

As Figuras A14-A15 apresentam o painel de controle e o diagrama de blocos, respectivamente, implementados para o controle em malha fechada com IHMPC. Na Figura A.16 é mostrada a condição “*True*” para aplicação do controlador, que nesse caso entra em funcionamento controlando o sistema. A Figura A.17 mostra a condição “*False*” e, nesse caso, apenas as medidas de interesse são mantidas para a inicialização do controlador quando posto em funcionamento. A Figura A.18 indica a condição “*True*” para a excitação dos valores de referência seguindo a transição desejada, conforme mostrada nas Figuras 7.7 e 7.15.

Para os controladores RMPC-MMR e LMI-RMPCR a estrutura permanece a mesma realizada para o IHMPC, sendo acrescentado apenas o termo referente à entrada de dados relacionados com a incerteza a ser aplicada, considerando-se os controladores robustos, como pode ser observado na Figura A.19.

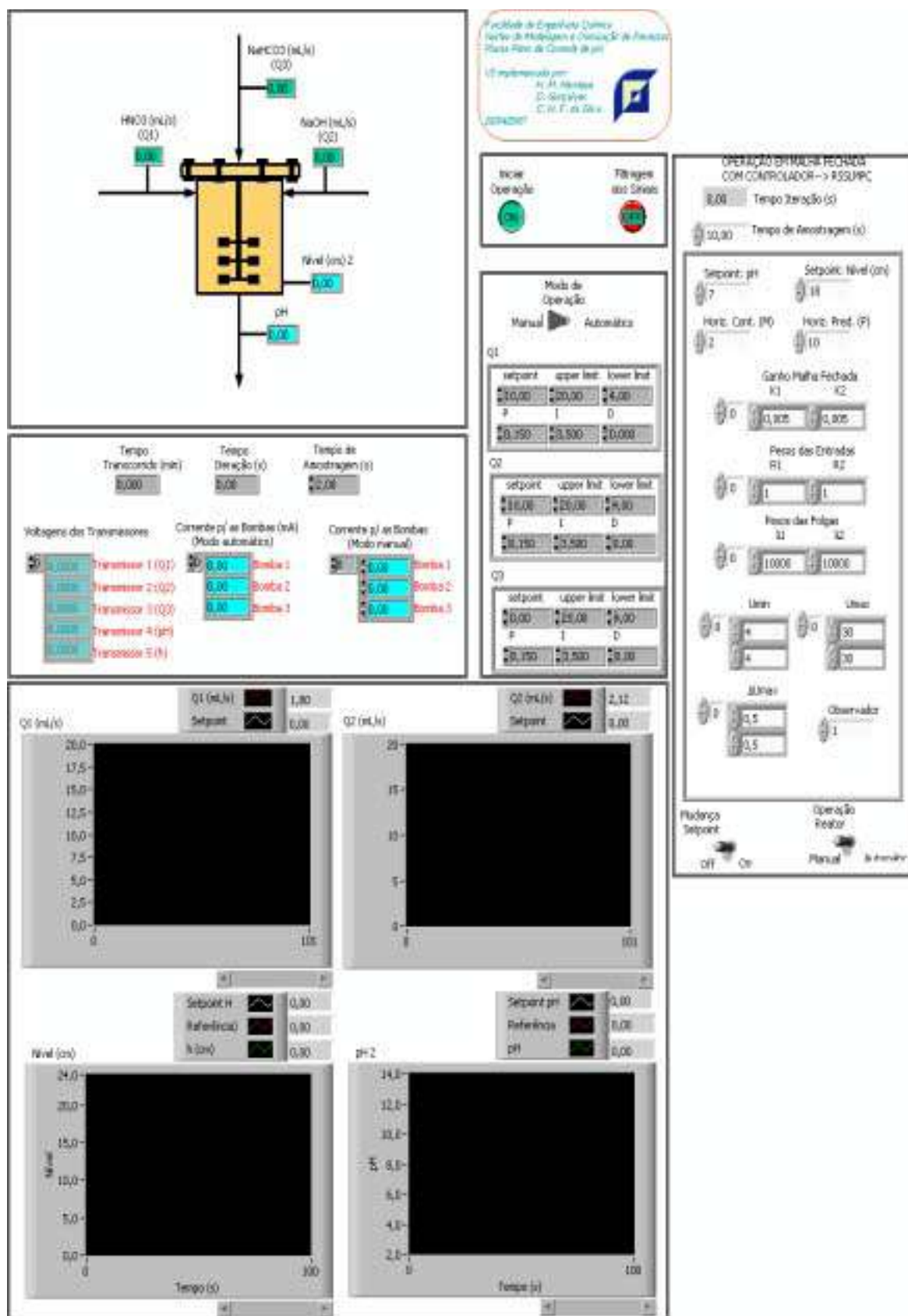


Figura A.12 - Painel Frontal da VI implementado para MPC-RS.

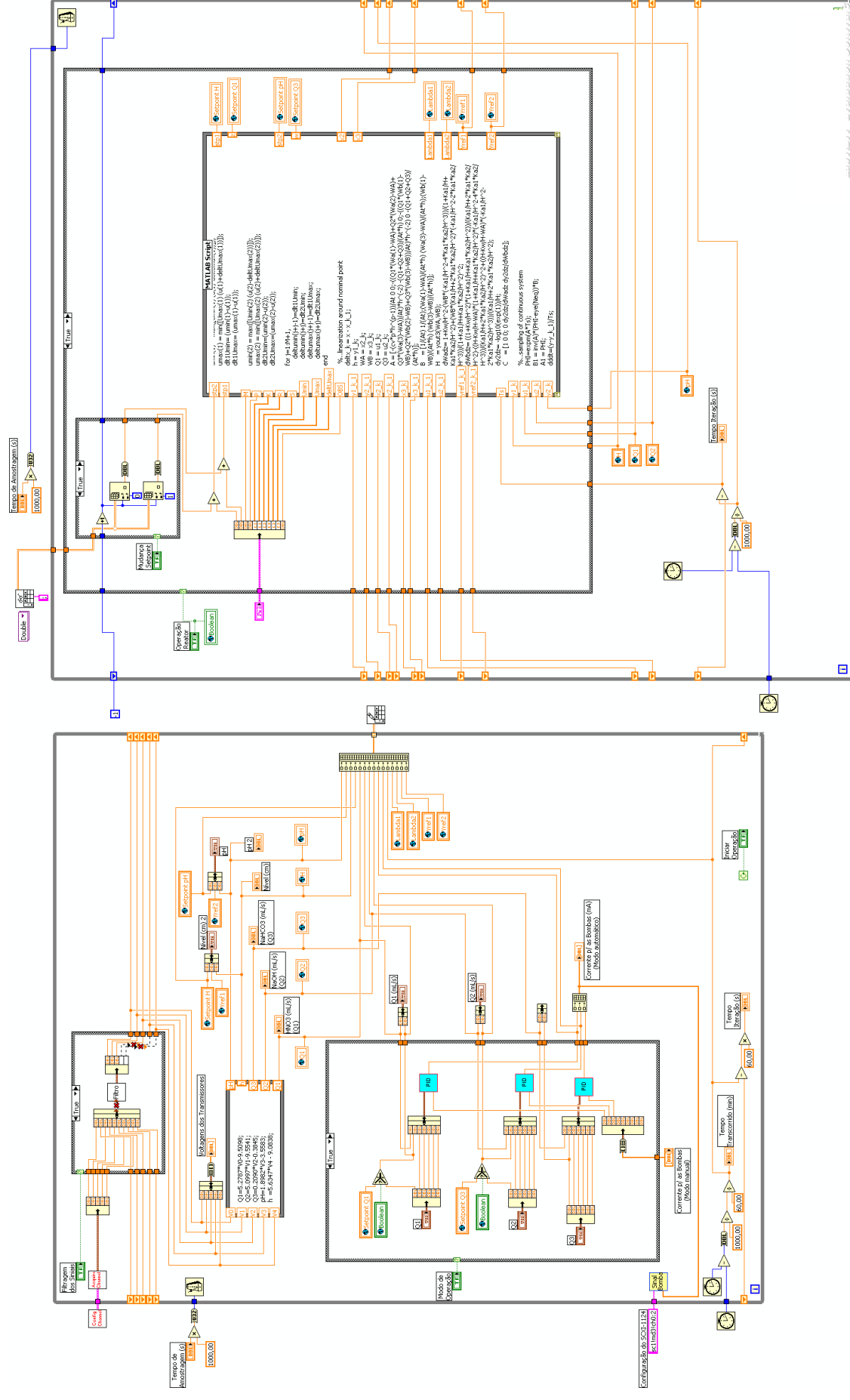


Figura A.13 - Diagrama de blocos da VI implementado para MPC-RS.

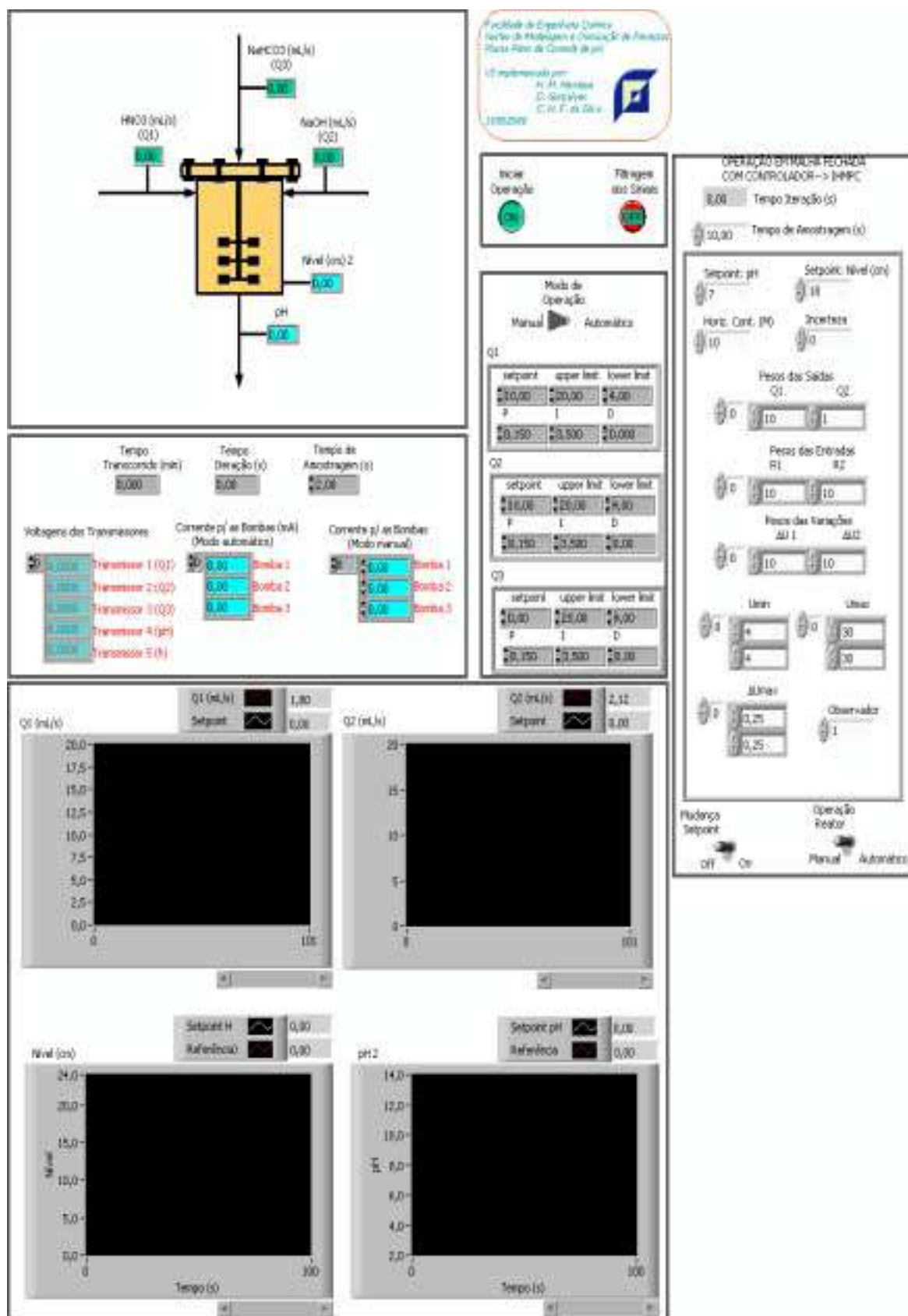


Figura A.14 - Painel Frontal da VI implementado para IHMPC.

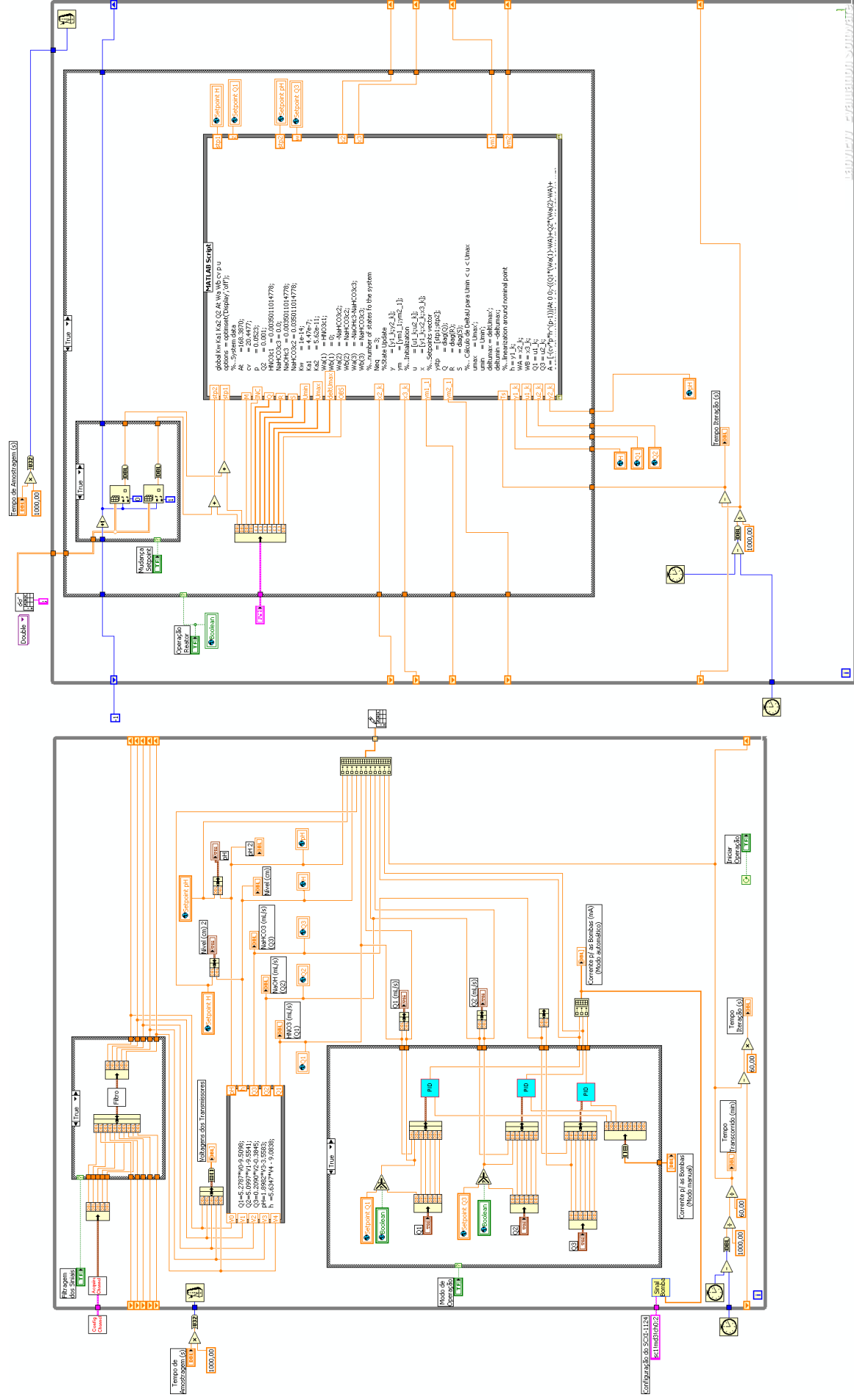


Figura A.15 - Diagrama de blocos da VI implementado para IHMPC.

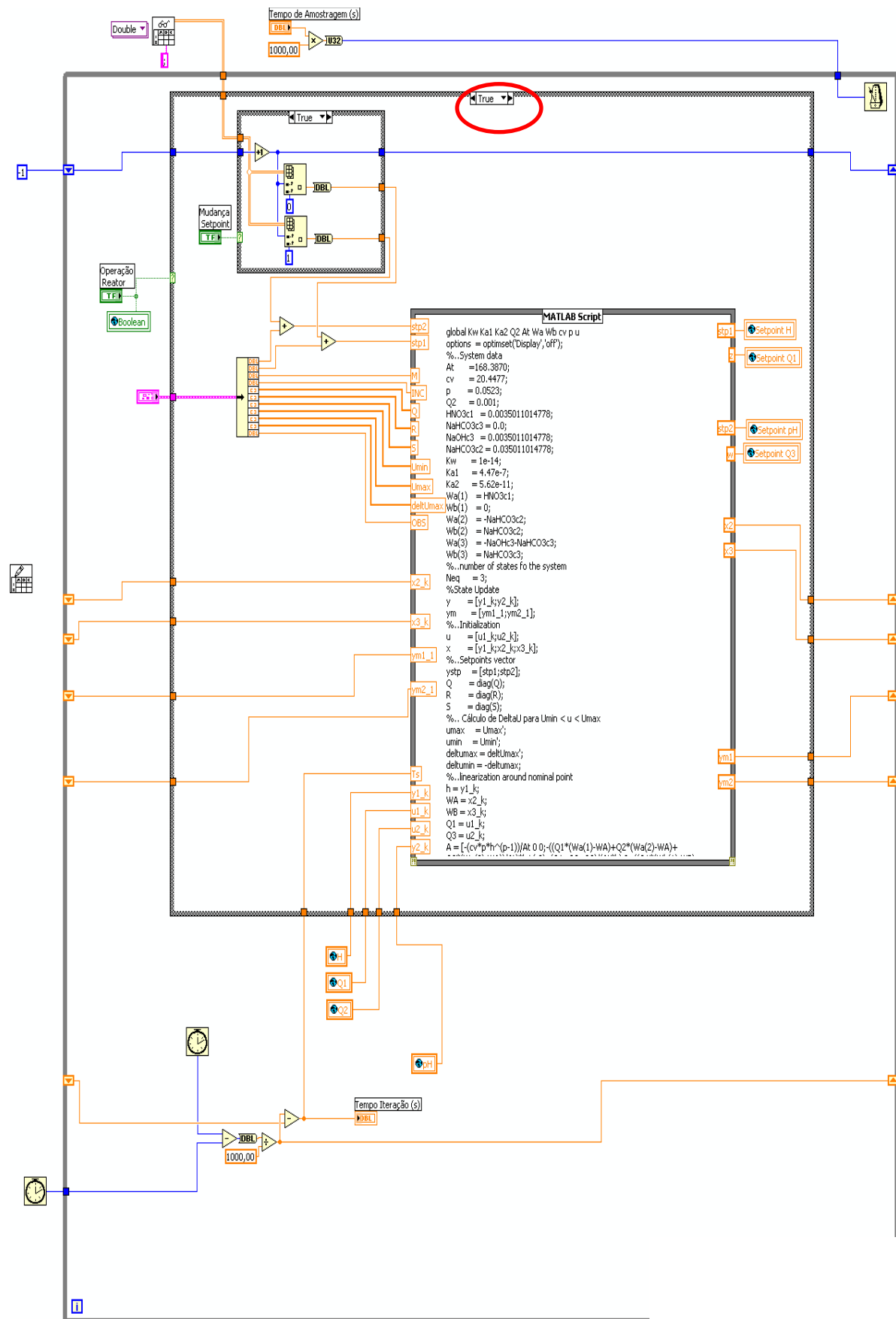


Figura A.16 - Destaque para bloco do controlador – IHMPC, condição “True”.

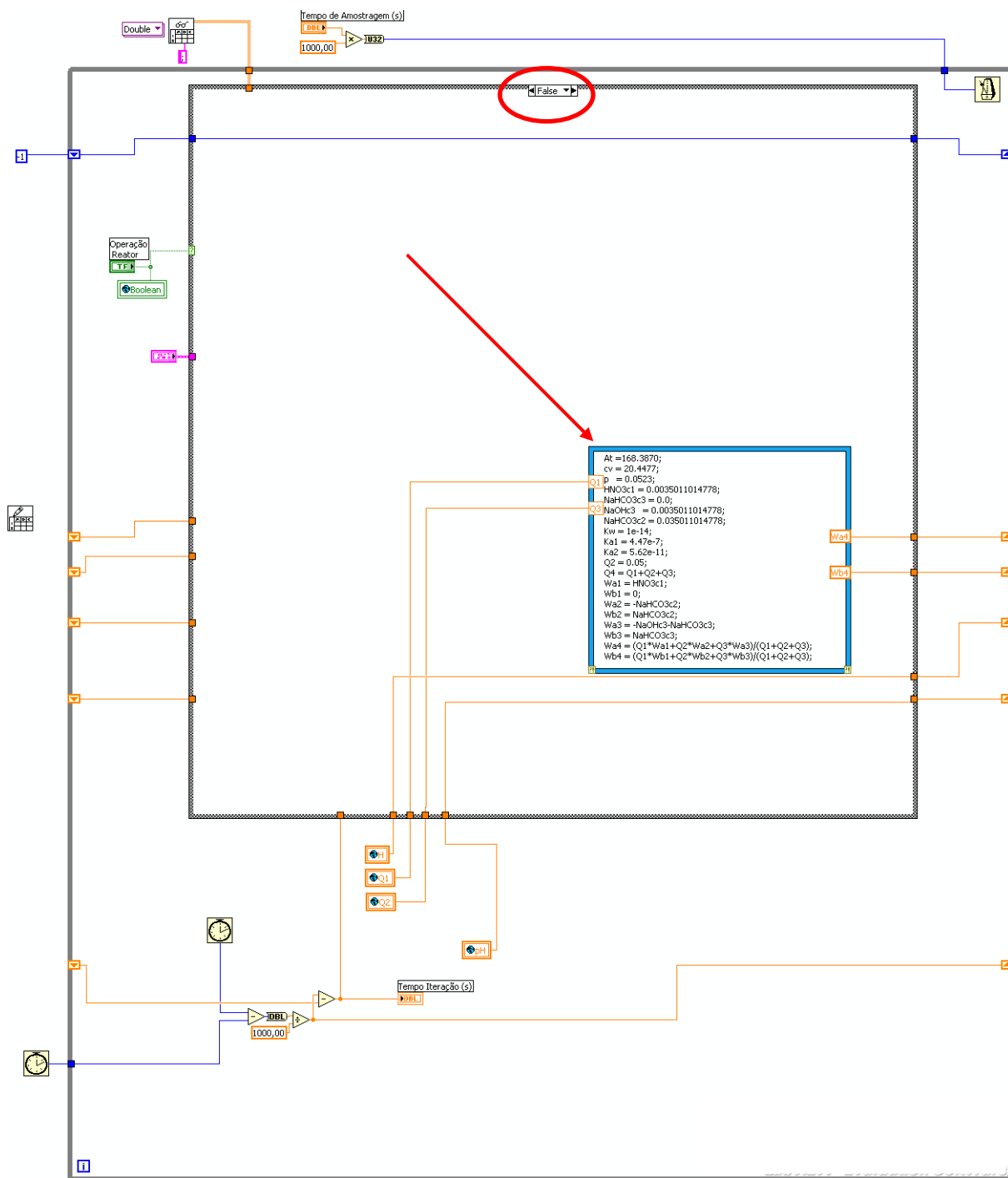


Figura A.17 - Destaque para bloco do controlador – IHMPC, condição “False”.

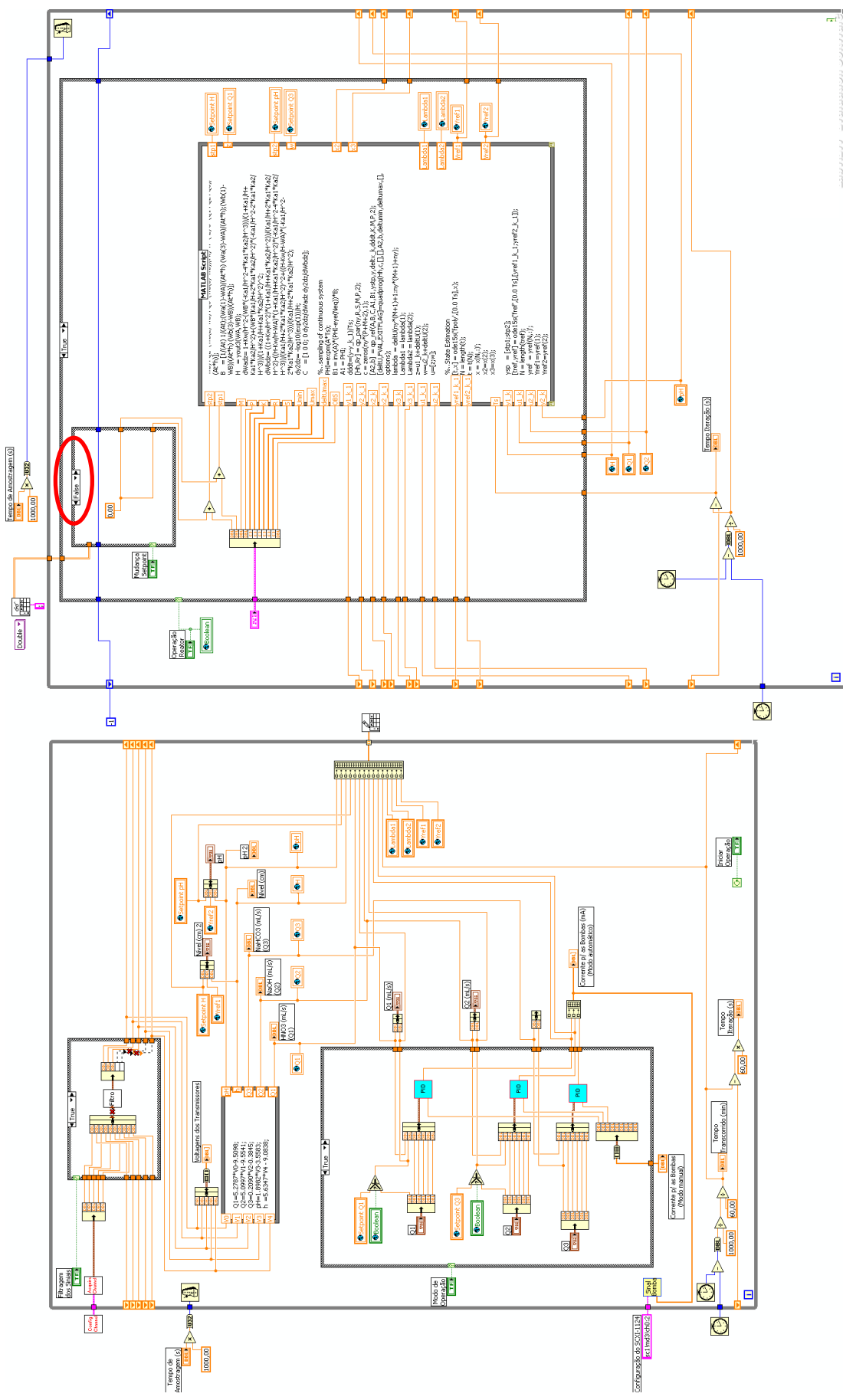


Figura A.18 - Destaque para a condição “False” para excitação de setpoint.

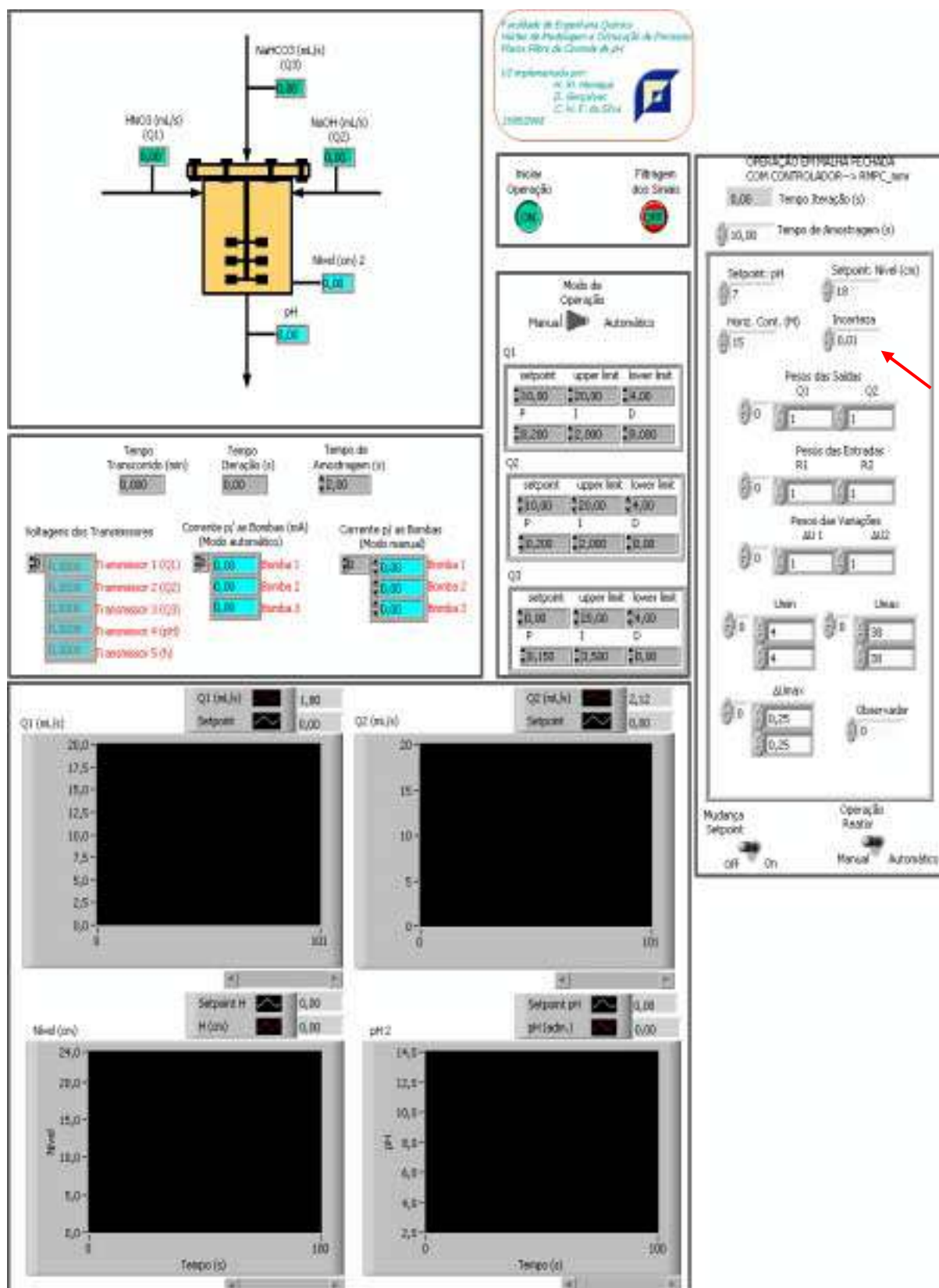


Figura A.19 - Painel Frontal da VI implementado para os controladores RMPC.



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE ENGENHARIA QUÍMICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA QUÍMICA



**UMA CONTRIBUIÇÃO AO ESTUDO DE CONTROLADORES
ROBUSTOS**

CLÁUDIO HOMERO FERREIRA DA SILVA

Uberlândia – MG

2009