

MIGUEL ANGEL AGUILAR ORDUÑA

Algumas Propriedades de Semigrupos de Dimensão de Imersão 3



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE MATEMÁTICA
2025

MIGUEL ANGEL AGUILAR ORDUÑA

Algumas Propriedades de Semigrupos de Dimensão de Imersão 3

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA**.

Área de Concentração: Matemática.
Linha de Pesquisa: Álgebra.

Orientador(a): Prof. Dr. Alonso Sepúlveda Castellanos.

UBERLÂNDIA - MG
2025

Ficha Catalográfica Online do Sistema de Bibliotecas da UFU
com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

O65 2025	Orduña, Miguel Angel Aguilar, 1997- Algumas propriedades de semigrupos de dimensão de imersão 3 [recurso eletrônico] / Miguel Angel Aguilar Orduña. - 2025. Orientador: Alonso Sepúlveda Castellanos. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia, Pós-graduação em Matemática. Modo de acesso: Internet. Disponível em: http://doi.org/10.14393/ufu.di.2025.103 Inclui bibliografia. Inclui ilustrações. 1. Matemática. I. Castellanos, Alonso Sepúlveda, 1980- (Orient.). II. Universidade Federal de Uberlândia. Pós- graduação em Matemática. III. Título. CDU: 51
-------------	--

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de acordo com o AACR2:

Gizele Cristine Nunes do Couto - CRB6/2091
Nelson Marcos Ferreira - CRB6/3074



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA

Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática
Av. João Naves de Ávila, 2121, Bloco 1F, Sala 1F 158 - Bairro Santa Mônica, Uberlândia-
MG, CEP 38400-902
Telefone: (34) 3239-4209/4154 - www.ppmat.ime.ufu.br - ppmat@ime.ufu.br



ATA DE DEFESA - PÓS-GRADUAÇÃO

Programa de Pós-Graduação em:	Matemática				
Defesa de:	Dissertação de Mestrado Acadêmico, 120, PPGMAT				
Data:	21 de fevereiro de 2025	Hora de início:	10:00	Hora de encerramento:	12:00
Matrícula do Discente:	12312MAT004				
Nome do Discente:	Miguel Angel Aguilar Orduña				
Título do Trabalho:	Algumas Propriedades de Semigrupos de Dimensão de Imersão 3				
Área de concentração:	Matemática				
Linha de pesquisa:	Geometria Algébrica				
Projeto de Pesquisa de vinculação:	Semigrupo de Weierstrass em m pontos e pesos generalizados de Hamming sobre curvas do Tipo Kummer				

Reuniu-se na Sala 1F 119 (Sala Multiuso do Instituto de Matemática e Estatística) - Bloco 1F (Campus Santa Mônica) da Universidade Federal de Uberlândia, e também por videoconferência, a Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-graduação em Matemática, assim composta: Professores Doutores: Matheus Bernardini de Souza - Universidade de Brasília/UNB ; Guilherme Chaud - IME/ UFU; e Alonso Sepúlveda Castellanos - IME/UFU, orientador do candidato.

Iniciando os trabalhos o presidente da mesa, Dr. Alonso Sepúlveda Castellanos , apresentou a Comissão Examinadora e o candidato, agradeceu a presença do público, e concedeu ao Discente a palavra para a exposição do seu trabalho.

A duração da apresentação do Discente e o tempo de arguição e resposta foram conforme as normas do Programa. A seguir o senhor presidente concedeu a palavra, pela ordem sucessivamente, aos examinadores, que passaram a arguir o candidato. Ultimada a arguição, que se desenvolveu dentro dos termos regimentais, a Banca, em sessão secreta, atribuiu o resultado final, considerando o candidato:

Aprovado.

Esta defesa faz parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre.

O competente diploma será expedido após cumprimento dos demais requisitos, conforme as normas do Programa, a legislação pertinente e a regulamentação interna da UFU.

Nada mais havendo a tratar foram encerrados os trabalhos. Foi lavrada a presente ata que após lida e achada conforme foi assinada pela Banca Examinadora.



Documento assinado eletronicamente por **Alonso Sepulveda Castellanos, Professor(a) do Magistério Superior**, em 21/02/2025, às 13:06, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Guilherme Chaud Tizziotti, Professor(a) do Magistério Superior**, em 21/02/2025, às 15:07, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Matheus Bernardini de Souza, Usuário Externo**, em 21/02/2025, às 15:42, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://www.sei.ufu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **5999469** e o código CRC **00BC6439**.

Dedicatória

Dedico este trabalho à minha família, pelo amor, apoio e inspiração constantes ao longo desta jornada.

Agradecimentos

Ao longo desta trajetória acadêmica, tive o privilégio de contar com o apoio de diversas pessoas, às quais sou profundamente grato.

À minha família, expresso minha mais sincera gratidão pelo amor incondicional, pela paciência e pelo apoio constante, que foram fundamentais para alcançar e concluir minhas metas.

Aos meus professores, agradeço por compartilharem seus conhecimentos, por sua dedicação e por me guiarem ao longo desses anos de estudo.

À CAPES, manifesto minha gratidão pelo financiamento que tornou possível a realização do meu mestrado em Matemática.

À Universidade Federal de Uberlândia (UFU) e à Instituto de Matemática e Estatística (IME), agradeço pela oportunidade de cursar minha Pós-Graduação e pelo suporte prestado ao longo dessa jornada.

Por fim, a todos que, de alguma forma, contribuíram para esta conquista, deixo aqui minha mais sincera e respeitosa gratidão.

Resumo

Neste trabalho, realizamos um estudo aprofundado sobre os semigrupos numéricos, explorando tanto suas propriedades fundamentais quanto outros conceitos importantes. Valemo-nos amplamente da teoria fundamental para derivar resultados menos intuitivos e de maior complexidade.

Concentramos nosso estudo em uma classe específica de semigrupos numéricos: aqueles com dimensão de imersão igual a 3. Para isso, examinamos aspectos relevantes da teoria, incluindo monoides livres, apresentações de semigrupos numéricos, colagem de semigrupos numéricos e semigrupos numéricos livres, entre outros temas essenciais.

Além disso, dedicamo-nos ao estudo dos semigrupos numéricos perfeitos, analisando algumas de suas propriedades e suas interações com outras propriedades.

Palavras-chave: Monoides, Semigrupos Numéricos, Monoides livres, Semigrupos Numéricos Simétricos.

Abstract

In this work, we conduct an in-depth study of numerical semigroups, exploring both their fundamental properties and other important concepts. We extensively rely on basic theory to derive less intuitive and more complex results.

We focus our research on a specific class of numerical semigroups: those with embedding dimension equal to 3. To this end, we examine relevant aspects of the theory, including free monoids, presentations of numerical semigroups, gluing of numerical semigroups, and free numerical semigroups, among other essential topics.

Furthermore, we dedicate ourselves to the study of perfect numerical semigroups, analyzing some of their properties and their interactions with other properties.

Keywords: Monoids, Numerical Semigroups, Free Monoids, Symmetric Numerical Semigroups.

Sumário

Resumo	v
Abstract	vi
Introdução	1
1 Noções preliminares	2
1.1 Semigrupos Numéricos	2
1.1.1 Número de Frobenius e gênero	7
1.1.2 Números Pseudo-Frobenius	13
2 Propriedades	15
2.1 Apresentações de um semigrupo numérico	15
2.1.1 Monóides livres e apresentações	15
2.1.2 Apresentações mínimas de um semigrupo numérico	20
2.2 Semigrupos numéricos e as três propriedades	25
2.2.1 Colagem de semigrupos numéricos	26
2.2.2 Semigrupos numéricos simétricos	28
2.2.3 Semigrupos numéricos livres	31
3 Semigrupos numéricos com dimensão de imersão três	35
3.1 Semigrupos numéricos com conjuntos Apéry de expressão única	35
4 Semigrupos numéricos perfeitos	40
4.0.1 A árvore de semigrupos numéricos perfeitos com multiplicidade fixa	41
4.0.2 Monóides perfeitos	44
4.0.3 O fecho perfeito de um semigrupo numérico	48
4.0.4 Semigrupos numéricos perfeitos com dimensão de imersão máxima	51
4.0.5 Semigrupos numéricos perfeitos com dimensão de imersão três	55
Conclusões finais	57

Introdução

Semigrupos numéricos são estruturas algébricas que podem ser descritas de forma simples, mas possuem uma ampla riqueza de propriedades teóricas e aplicações práticas. Um semigrupo numérico é um subconjunto dos números naturais que é fechado pela adição, que contém zero e cujo complemento aos números naturais com zero é finito. Essas características os tornam ferramentas fundamentais em áreas como teoria dos números, combinatória e geometria algébrica.

A simplicidade desse conceito permite formular problemas de fácil entendimento, mas cuja resolução não é trivial. Esse fato atraiu diversos matemáticos, como Frobenius, no final do século XIX. Frobenius propôs o problema de encontrar uma fórmula para o maior número inteiro que não pode ser representado como uma combinação linear com coeficientes inteiros não negativos de um conjunto dado de números inteiros positivos cujo maior divisor comum é um, ver [8]. Em outras palavras, determinar uma fórmula que dependa de $n_1, \dots, n_m$, números naturais cujo máximo divisor comum seja um, para encontrar o maior número natural que não pertença ao semigrupo numérico gerado pelo conjunto de números naturais $\langle n_1, \dots, n_m \rangle$. Esse número é conhecido como o número de Frobenius de um semigrupo numérico. Embora não exista uma fórmula geral para o número de Frobenius de um semigrupo numérico gerado por mais de dois elementos, há famílias de semigrupos numéricos gerados por três elementos para as quais é possível encontrar uma fórmula algébrica, ver [17] e [1].

Ao longo deste trabalho, abordamos diversos conceitos da teoria dos semigrupos numéricos, como semigrupos numéricos simétricos, apresentações de semigrupos numéricos, monoides livres, colagem de semigrupos numéricos e semigrupos numéricos livres. Todos esses tópicos são explorados com o objetivo de compreender e analisar a demonstração da fórmula do número de Frobenius para semigrupos numéricos simétricos gerados por três elementos, ou seja, para uma classe específica de semigrupos numéricos gerados por três elementos.

Outra parte do nosso trabalho focou no estudo de um tipo específico de semigrupos numéricos, os semigrupos numéricos perfeitos, o qual é abordado em um artigo que estudamos em profundidade com o objetivo de detalhar as demonstrações desses resultados, que não estavam completamente desenvolvidas.

A última parte do trabalho é o estudo de outro artigo, no qual estudamos as interações dos semigrupos numéricos de dimensão de imersão três com os semigrupos numéricos perfeitos de dimensão de imersão três.

A primeira parte deste trabalho é desenvolvida nos Capítulos 1 e 2, abordando o estudo dos semigrupos numéricos e alguns de suas propriedades. Na segunda parte, composta pelo Capítulo 3, exploramos os semigrupos numéricos com dimensão de imersão igual a 3. Por fim, na terceira parte, composta pelo Capítulo 4, estudamos os semigrupos numéricos perfeitos e alguns de suas relações com outras propriedades.

Miguel Angel Aguilar Orduña
Uberlândia-MG, Fevereiro de 2025.

Capítulo 1

Noções preliminares

1.1 Semigrupos Numéricos

Começaremos explorando os fundamentos teóricos e os resultados mais relevantes para o nosso estudo. Para esse propósito, iniciamos introduzindo o conceito de semigrupo. Muitos dos resultados e demonstrações podem ser encontrados em [8], enquanto algumas demonstrações mais detalhadas estão disponíveis em [6]. Consideraremos o conjunto $\mathbb{N}$, como o conjunto dos inteiros não-negativos incluindo o elemento zero.

Definição 1.1. *Um semigrupo é um conjunto S não vazio com uma operação binária $+$, que é fechada e associativa. Consideraremos que a operação $+$ é comutativa, ou seja, $a + b = b + a$ para todo $a, b \in S$.*

Exemplo 1.1. *Os conjuntos de números $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ e $\mathbb{N}$ com a soma usual $+$ são semigrupos.*

Exemplo 1.2. *O conjunto $(\mathbb{Z}_p, +)$ de resíduos modulo $p \geq 1$ com a soma usual de módulo p é um semigrupo finito, onde $p \in \mathbb{N}$.*

Um subsemigrupo de um semigrupo S é um subconjunto de S que é fechado em relação à operação binária $+$.

Proposição 1.1. *Seja S um semigrupo, $A \subseteq S$ um subconjunto não vazio e $F = \{S'_i \subseteq S : A \subseteq S'_i, i \in I\}$ a família de todos os subsemigrupos de S que contêm A . Então, a interseção $\cap_{i \in I} S'_i$ também é um subsemigrupo de S .*

Demonstração. Como todos os subsemigrupos contêm A , segue-se que a interseção de todos eles também contêm A , ou seja, $\cap_{i \in I} S'_i \neq \emptyset$. Agora, sejam $x, y \in \cap_{i \in I} S'_i$. Então, x e y pertencem a S'_i para todo $i \in I$. Logo, $x + y \in S'_i$ também para todo $i \in I$. Portanto, $\cap_{i \in I} S'_i$ é um subsemigrupo de S que, além disso, contém A . $\square$

O subsemigrupo gerado por um conjunto não vazio A é definido como o menor subsemigrupo de S que contém A . Como a interseção de todos os subsemigrupos de S que contêm A também é um semigrupo, conclui-se que o subsemigrupo gerado por A coincide com essa interseção. Denotamos esse semigrupo por $\langle A \rangle$ e dizemos que A é um **sistema gerador** do semigrupo $\langle A \rangle$. Além disso, ele pode ser descrito da seguinte forma:

$$\cap_{i \in I} S'_i = \langle A \rangle = \{\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, x_1, \dots, x_n \in A\}.$$

Um monoide M é um semigrupo que possui um elemento identidade, denotado por 0 , tal que $0 + a = a + 0 = a$ para todo $a \in M$. Um submonoide N de M é um subsemigrupo de M que contém o elemento identidade 0 . Diz-se que um monoide gerado por um conjunto $A \subseteq M$ com $A \neq \emptyset$ é finitamente gerado se o conjunto A possui um número finito de elementos.

Exemplo 1.3. Os conjuntos de números $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ e $\mathbb{N}$, com a operação de soma usual, são exemplos de monoides. No entanto, os conjuntos $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ e $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$, munidos da soma usual, não são monoides e, conseqüentemente, também não são semigrupos, pois $-a + a = 0$ para qualquer a . Assim, não são fechados para a adição.

Por outro lado, o conjunto $\mathbb{N} \setminus \{0\}$, é um exemplo de um semigrupo que não é um monoide, já que não possui um elemento identidade para a operação de soma.

Como é usual em álgebra, dados dois semigrupos X e Y , uma aplicação $f : X \longrightarrow Y$ é chamada de homomorfismo de semigrupos se $f(a + b) = f(a) + f(b)$, para todos $a, b \in X$. Dizemos que f é um monomorfismo, um epimorfismo ou um isomorfismo se f for injetora, sobrejetora ou bijetora, respectivamente.

Além disso, uma aplicação $f : X \longrightarrow Y$ entre monoides X e Y é um homomorfismo de monoides se for um homomorfismo de semigrupos e satisfizer $f(0) = 0$, onde 0 denota o elemento neutro da operação nos monoides.

Definição 1.2. Um submonoide S de $\mathbb{N}$ com a operação usual de $+$ é chamado de **semigrupo numérico** se o seu complemento em relação a $\mathbb{N}$ for finito. Em outras palavras, dizemos que S é um semigrupo numérico se $G(S) = \mathbb{N} \setminus S$ for um conjunto finito.

Exemplo 1.4. Seja $S \subset \mathbb{N}$ tal que $S = \{0, 4, 5, \dots\}$. É claro que, com a soma usual, S é fechado e contém o elemento zero. Além disso, o complemento de S em $\mathbb{N}$ é dado por $G(S) = \mathbb{N} \setminus S = \{1, 2, 3\}$, o qual é um conjunto finito.

Portanto, o conjunto S é um semigrupo numérico.

Exemplo 1.5. Seja $S = \{0, 2, 4, 6, \dots, 2k, \dots\}$ o subconjunto dos números pares de $\mathbb{N}$. Note que S é um monoide, mas não é um semigrupo numérico, pois o complemento de S em $\mathbb{N}$, dado por $G(S) = \mathbb{N} \setminus S$, é um conjunto infinito. Este conjunto é composto pelos números ímpares.

Agora podemos ver que todo semigrupo numérico possui infinitos elementos, já que, se S é um semigrupo numérico com um número finito de elementos, então o conjunto $G(S) = \mathbb{N} \setminus S$ deve necessariamente conter infinitos elementos.

O lema a seguir nos fornece uma forma relativamente simples de encontrar e determinar semigrupos numéricos a partir de um subconjunto finito dos números naturais.

Lema 1.1. Seja A um subconjunto não vazio de $\mathbb{N}$. Então $\langle A \rangle$ é um semigrupo numérico se, e somente se, $\text{mdc}(A) = 1$

Demonstração. Seja A um subconjunto não vazio de $\mathbb{N}$ e $d = \text{mdc}(A)$. Suponha que $\langle A \rangle$ é um semigrupo numérico. Se $s \in \langle A \rangle$, então $d|s$. Como $\langle A \rangle$ é um semigrupo numérico, $\mathbb{N} \setminus \langle A \rangle$ é finito, e então existe um inteiro positivo x tal que $d|x$ e $d|(x+1)$. Desse modo, d deve ser 1.

Por outro lado, para mostrar que $\langle A \rangle$ é um semigrupo numérico sabendo que $\text{mdc}(A) = 1$, basta provarmos que $\mathbb{N} \setminus \langle A \rangle$ é finito, pois sabemos pela definição de $\langle A \rangle$ que é um subconjunto de $\mathbb{N}$ fechado com a soma, e que $0 = 0 \cdot a$, para todo $a \in A$, logo $0 \in \langle A \rangle$ portanto é um submonoide de $\mathbb{N}$. Daí, como $\text{mdc}(A) = 1$, existem inteiros $z_1, \dots, z_n$ e $a_1, \dots, a_n \in A$ tais que $z_1 a_1 + \dots + z_n a_n = 1$. Movendo os termos onde z_i é negativo para o lado direito da igualdade, podemos encontrar $i_1, \dots, i_k$ e $j_1, \dots, j_l \in \{1, \dots, n\}$ tais que $z_{i_1} a_{i_1} + \dots + z_{i_k} a_{i_k} = 1 - z_{j_1} a_{j_1} - \dots - z_{j_l} a_{j_l}$. Chamando $-z_{j_1} a_{j_1} - \dots - z_{j_l} a_{j_l} = s$ temos que $s \in \langle A \rangle$ e $s+1 \in \langle A \rangle$. Mostremos que se $n \geq (s-1)s + (s-1)$, então $n \in \langle A \rangle$. Sejam $q, r \in \mathbb{Z}$, tais que $n = qs + r$, onde $0 \leq r < s$. Como $n \geq (s-1)s + (s-1)$, temos que $q \geq s-1 \geq r$, assim

$$\begin{aligned} n &= qs + rs - rs + r \\ &= (rs + r) + (q - r)s \\ &= (s + 1)r + (q - r)s \end{aligned}$$

o qual pertence a $\langle A \rangle$, pois $s + 1, s \in \langle A \rangle$, e $r, q - r \in \mathbb{N}$. Portanto todo elemento maior que n pertence ao conjunto $\langle A \rangle$ implica que $G(S) = \mathbb{N} \setminus S$ é finito. $\square$

Exemplo 1.6. Seja $A = \{2, 3\}$ como $\text{mdc}(A) = 1$, então o conjunto $S = \{2\lambda_1 + 3\lambda_2 : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{N}\}$ é um semigrupo numérico. Este semigrupo numérico é $S = \{0, 2, 3, 4, 5, \rightarrow\}$ (onde $\rightarrow$ significa que todos os naturais maiores que o último natural listado pertencem ao conjunto).

Exemplo 1.7. O conjunto $S = \{0, 2, 4, 6, \dots, 2k, \dots\}$ é gerado por $A = \{2\}$. Além disso, temos que $\text{mdc}(A) = 2$. Portanto, S é um monoide. No entanto, não é um semigrupo numérico, pois, pelo Lema 1.1, e o fato que o complemento de S em relação a $\mathbb{N}$, dado por $G(S) = \mathbb{N} \setminus S$, corresponde ao conjunto dos números ímpares, que é claramente infinito.

A seguinte proposição é muito importante porque classifica o conjunto de todos os submonoides de $\mathbb{N}$, sob isomorfismos, com o conjunto de todos os semigrupos numéricos de $\mathbb{N}$.

Proposição 1.2. Seja M um submonoide de $\mathbb{N}$ diferente do trivial, ou seja, $M \neq \{0\}$. Então M é isomorfo a um semigrupo numérico de $\mathbb{N}$.

Demonstração. Basta tomar $d = \text{mdc}(M)$ e notar que $S = \{\frac{m}{d} : m \in M\}$ é um semigrupo numérico, pois satisfaz o Lema 1.1. Finalmente, consideremos a função $f : M \rightarrow S$ definida por $f(m) = \frac{m}{d}$, que é claramente um homomorfismo bijetivo de monóides. $\square$

Para os monoides, como o Exemplo 1.7, notemos que $S = \{\frac{2k}{2} : k \in \mathbb{N}\}$, que acaba sendo o próprio conjunto $\mathbb{N}$. Ou seja, todos os submonoides $m\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}$ gerados por apenas um elemento $m \in \mathbb{N}$ são algebricamente iguais ao monoide $\mathbb{N}$.

Se A e B são subconjuntos dos números inteiros, escrevemos $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$. Assim, para um semigrupo numérico S , se $S^* = S \setminus \{0\}$, o conjunto $S^* + S^*$ corresponde ao conjunto de todos os elementos de S que são a soma de dois elementos não nulos de S .

Lema 1.2. Seja S um submonoide de $\mathbb{N}$. Então, $S^* \setminus (S^* + S^*)$ é um sistema de geradores de S . Mais ainda, todo sistema de geradores de S contém $S^* \setminus (S^* + S^*)$.

Demonstração. Para a demonstração basta provar que todo elemento de S pode ser escrito como uma combinação de elementos de $S^* \setminus (S^* + S^*)$. Seja $s \in S^*$. Se $s \notin S^* \setminus (S^* + S^*)$, então existem $x, y \in S^*$ tais que $s = x + y$. Daí, se $x, y \notin S^* \setminus (S^* + S^*)$, podemos repetir o processo anterior para x e y . Agora, observe que esse procedimento será repetido apenas uma quantidade finita de vezes até encontrarmos $s_1, s_2, \dots, s_n \in S^* \setminus (S^* + S^*)$ tais que $s = s_1 + s_2 + \dots + s_n$, pois S é limitado inferiormente, e a cada troca de um elemento pela soma de outros dois não nulos nos aproximamos mais do limite inferior de S , já que sempre tomamos elementos menores que o original. Desse modo, segue que $S^* \setminus (S^* + S^*)$ é um sistema de geradores de S .

Agora, sejam A um sistema de geradores de S , e $x \in S^* \setminus (S^* + S^*)$. Como $S^* \subset S$ e $S = \langle A \rangle$, existem $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{N}$, e $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$ tais que $x = a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 + \dots + a_n\lambda_n$. Como $x \notin S^* + S^*$, temos que $x = a_i$ para algum $i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$. Desse modo, todo sistema de geradores de S contém $S^* \setminus (S^* + S^*)$. $\square$

Exemplo 1.8. Seja $S = \{0, 2, 3, 4, 5, \rightarrow\}$ então $S^* = \{2, 3, 4, 5, \rightarrow\}$ e $S^* + S^* = \{4, 5, 6, 7, \rightarrow\}$. Logo $S^* \setminus (S^* + S^*) = \{2, 3\}$ o qual claramente é o conjunto gerador de S já que $\langle \{2, 3\} \rangle = \{2\lambda_1 + 3\lambda_2 : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{N}\} = S$.

Essa propriedade também é válida para submonoides S de $\mathbb{N}^r$, onde r é um inteiro positivo qualquer. A ideia é que sempre que $\mathbf{s} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, com $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ não nulos, então $\mathbf{x}$ é estritamente menor que $\mathbf{s}$ com a ordem parcial natural de $\mathbb{N}^r$, que é definida da forma $\mathbf{x} < \mathbf{y}$ se e somente se $x^i < y^i$ para todo $i \in \{1, 2, 3, \dots, r\}$, onde s^i representa a i -ésima coordenada do vetor $\mathbf{s} \in \mathbb{N}^r$. Daí, existe uma quantidade finita de elementos $\mathbf{x} \in \mathbb{N}^r$ com $\mathbf{x} < \mathbf{s}$. Entretanto, $S^* \setminus (S^* + S^*)$ pode não ser finito para $r > 1$. O exemplo a seguir mostra esta situação, é exposto em [6, p. 5].

Exemplo 1.9. O conjunto $M = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 : x > 5\} \cup \{(0, 0)\}$ é um submonoide de $\mathbb{N}^2$ que não possui um sistema de geradores finito, já que $(6, y)$ é um gerador do submonoide, para todo $y \in \mathbb{N}$.

O conjunto a seguir é muito importante para o estudo de semigrupos numéricos, pois é uma ferramenta para caracterizar determinados semigrupos numéricos. Além de ser uma ferramenta com diversas aplicações ao longo desta teoria. Foi nomeado em homenagem ao matemático francês Roger Apéry, ver [2].

Sejam S um semigrupo numérico e $n \in S^*$. O conjunto de Apéry de S em relação a $n \in S^*$ é

$$Ap(S, n) = \{s \in S : s - n \notin S\}.$$

Exemplo 1.10. Seja $S = \{0, 2, 3, 4, 5, \rightarrow\}$ um semigrupo numérico. Então o conjunto de Apéry para $n = 2$ é $Ap(S, 2) = \{s \in S : s - 2 \notin S\} = \{0, 3\}$. Para $n = 3$ temos que $Ap(S, 3) = \{0, 2, 4\}$ e para $n = 4$ $Ap(S, 4) = \{0, 2, 3, 5\}$.

Lema 1.3. [8, p. 8] Sejam S um semigrupo numérico e $n \in S^*$. Então,

$$Ap(S, n) = \{w(0) = 0, w(1), w(2), \dots, w(n-1)\}$$

onde $w(i)$ é o menor elemento de S congruente a i módulo n , para todo $i \in \{1, \dots, n-1\}$.

Uma consequência imediata do lema anterior é que para todo $n \in S^*$ o conjunto de Apéry de S em relação a n é finito.

Exemplo 1.11. Seja o semigrupo numérico $S = \langle 3, 5 \rangle = \{0, 3, 5, 6, 8, 9, 10, \rightarrow\}$ e tome $n = 6$. Então por definição do conjunto de Apéry temos que $Ap(S, 6) = \{s \in S : s - 6 \notin S\} = \{0, 3, 5, 8, 10, 13\}$. Agora pelo Lema 1.3, para $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ temos que $w(i) \equiv i \pmod{6}$ e $w(i) \in S$, onde $w(i)$ é o menor possível. Então segue que $w(1) = 13$, $w(2) = 8$, $w(3) = 3$, $w(4) = 10$ e $w(5) = 5$. Portanto $Ap(S, 6) = \{0, 13, 8, 3, 10, 5\}$. O qual é o mesmo conjunto.

Observe também que o Lema 1.3 implica que a cardinalidade de $Ap(S, n)$ é n .

O lema a seguir nos dá uma maneira eficiente de decompor qualquer elemento de um semigrupo numérico, mas na verdade seu melhor uso é permitir-nos determinar a finitude do sistema gerador de S .

Lema 1.4. Sejam S um semigrupo numérico e $n \in S^*$. Então, para todo $s \in S$, existe um único par $(k, w) \in \mathbb{N} \times Ap(S, n)$ tal que $s = kn + w$.

Demonstração. Seja $s \in S$, então temos que $s \equiv i \pmod{n}$, para algum $i \in \{0, \dots, n-1\}$ e, pelo Lema 1.3, $i \equiv w(i) \pmod{n}$. Implica que $s \equiv w(i) \pmod{n}$. Além disso, como $w(i) \leq s$, segue que $s = w(i) + kn$, onde $k \in \mathbb{N}$. $\square$

Definição 1.3. Um sistema de geradores de um semigrupo numérico S é chamado de **sistema de geradores minimal**, denotado por $msg(S)$, se nenhum de seus subconjuntos próprios é um gerador de S .

Teorema 1.1. Todo semigrupo numérico admite um único sistema de geradores minimal. Além disso, esse sistema de geradores minimal é finito.

Demonstração. Pelo Lema 1.2 temos que $S^* \setminus (S^* + S^*)$ é o sistema de geradores minimal de S . Dado que $n \in S^*$ o Lema 1.4 diz que $S = \langle Ap(S, n) \cup \{n\} \rangle$. Como $Ap(S, n) \cup \{n\}$ é finito, e $S^* \setminus (S^* + S^*) \subseteq Ap(S, n) \cup \{n\}$, segue que $S^* \setminus (S^* + S^*)$ é finito. $\square$

Como todo submonoide de $\mathbb{N}$ é isomorfo a um semigrupo numérico, temos os corolários a seguir:

Corolário 1.1. *Seja M um submonoide de $\mathbb{N}$. Então M possui um único sistema de geradores minimal, o qual é finito.*

Demonstração. Seja $d = \text{mdc}(M)$. Então, $T = \{\frac{x}{d} : x \in M\}$ é um submonoide de $\mathbb{N}$ tal que $\text{mdc}(T) = 1$. Pelo Lema 1.1, temos que T é um semigrupo numérico. Daí, se A é o sistema de geradores minimal de T , temos que $\{da : a \in A\}$ é o sistema de geradores minimal de M . $\square$

Corolário 1.2. *Seja M um submonoide de $\mathbb{N}$ gerado por $\{0 \neq m_1 < m_2 < \dots < m_p\}$. Então, $A = \{m_1, m_2, \dots, m_p\}$ é o sistema de geradores minimal de M se, e somente se, $m_{i+1} \notin \langle m_1, \dots, m_i \rangle$, para todo $i \in \{1, \dots, p-1\}$.*

Demonstração. Suponha que $\text{msg}(M) = A$ e que existe $k \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ tal que $m_{k+1} \in \langle m_1, \dots, m_k \rangle$. Isso implica que $m_{k+1} = \lambda_1 m_1 + \dots + \lambda_k m_k$. Logo, $\langle A \setminus \{m_{k+1}\} \rangle = \langle A \rangle$, e como $A \setminus \{m_{k+1}\} \subset A$, conclui-se que $A \setminus \{m_{k+1}\}$ também é um sistema gerador de M . Porém, isso contradiz o fato de que A é o sistema de geradores minimal de M . Assim, segue que $m_{i+1} \notin \langle m_1, \dots, m_i \rangle$ para todo $i \in \{1, \dots, p-1\}$.

Por outro lado, suponha que $m_{i+1} \notin \langle m_1, \dots, m_i \rangle$ para todo $i \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ e que $A = \{m_1, m_2, \dots, m_p\}$ é um sistema gerador de M . Devemos agora provar que A é o sistema de geradores minimal de M . Para isso, suponha que existe um $B \subset A$ tal que $\langle B \rangle = M$. Como a cardinalidade do conjunto A (denotado como $\#(A)$) é $\#(A) = p$, então necessariamente $\#(B) < p$. Isso implica que existe um elemento $m_k \in A$ com $k \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ tal que

$$m_{k+1} = \lambda_1 m_1 + \dots + \lambda_k m_k + \lambda_{k+2} m_{k+2} + \dots + \lambda_p m_p.$$

Contudo, isso contradiz nossa hipótese, pois basta tomar $k = p-1$. Portanto, A é o sistema de geradores minimal de M . $\square$

Sejam S um semigrupo numérico e $\{n_1 < n_2 < \dots < n_p\}$ o sistema de geradores minimal de S . Então, n_1 é conhecido como a multiplicidade de S , denotado por $m(S)$. A cardinalidade do sistema de geradores minimal, p , é chamada **dimensão de imersão** de S , e é denotada por $e(S)$.

Proposição 1.3. *Seja S um semigrupo numérico. Então,*

1. $m(S) = \min(S \setminus \{0\})$,
2. $e(S) \leq m(S)$.

Demonstração. O primeiro item desta proposição é óbvio. Já o segundo item segue do fato de que $\{m(S)\} \cup Ap(S, m(S)) \setminus \{0\}$ é um sistema de geradores de S com cardinalidade $m(S)$. $\square$

Observe que $e(S) = 1$ se, e somente se, $S = \mathbb{N}$. Se m é um inteiro positivo, então $S = \{0, m, \rightarrow\}$ é um semigrupo numérico de multiplicidade m , o qual é chamado de semigrupo numérico ordinário. Além disso, o sistema de geradores minimal de S é $\{m, m+1, \dots, 2m-1\}$. Desse modo, $e(S) = m = m(S)$.

1.1.1 Número de Frobenius e gênero

Como falamos na introdução Ferdinand Georg Frobenius (Berlim, 1849 — 1917) propôs o problema de determinar uma fórmula para o maior inteiro que não pode ser representado como uma combinação linear com coeficientes inteiros não negativos de um dado conjunto de inteiros positivos cujo máximo divisor comum é 1. Ele também investigou a questão de quantos inteiros positivos não possuem tal representação.

Na terminologia moderna, o primeiro problema equivale a encontrar uma fórmula, em termos dos elementos de um sistema gerador minimal de um semigrupo numérico S , para o maior inteiro que não pertence a S . Esse número é chamado de *número de Frobenius de S* e é denotado por $F(S)$. Em algumas referências, utiliza-se o condutor de S , que é o menor inteiro x tal que $x + n \in S$ para todo $n \in \mathbb{N}$. O número de Frobenius e o condutor estão relacionados por $F(S) = c(S) - 1$, onde $c(S)$ representa o condutor de S .

Quanto ao segundo problema, ele diz respeito ao conjunto de lacunas de S , definido como $G(S) = \mathbb{N} \setminus S$. A cardinalidade desse conjunto, conhecida como *gênero de S* e denotada por $g(S)$, também é chamada em alguns contextos de *grau de singularidade de S* .

Exemplo 1.12. *Seja $S = \langle 2, 9 \rangle$. Sabemos que $S = \{0, 2, 4, 6, 8, 9, 10, \rightarrow\}$, assim, $F(S) = 7$, $G(S) = \{1, 3, 5, 7\}$ e $g(S) = 4$.*

Não existe uma fórmula polinomial geral para o número de Frobenius, nem para o gênero, quando a dimensão é maior que dois, ver [8]. No entanto, se o conjunto de Apéry de algum elemento do semigrupo numérico não nulo é conhecido, então ambos são fáceis de computar.

Proposição 1.4. *Sejam S um semigrupo numérico e $n \in S^*$. Então,*

1. $F(S) = (\max Ap(S, n)) - n.$

2. $g(S) = \frac{1}{n} (\sum_{w \in Ap(S, n)} w) - \frac{n-1}{2}.$

Demonstração.

1. Note que pela definição do conjunto $Ap(S, n)$, temos que $(\max Ap(S, n)) - n \notin S$, logo $F(S) \leq (\max Ap(S, n)) - n$. Se $x > (\max Ap(S, n)) - n$, então $x + n > (\max Ap(S, n))$. Seja $w \in Ap(S, n)$ tal que $x + n \equiv w \pmod{n}$. Como $w < x + n$, segue que $x = w + kn$, onde $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Desse modo, $x \in S$, pelo Lema 1.4, logo $x \neq F(S)$, concluindo que $F(S) = (\max Ap(S, n)) - n$.
2. Agora para a segunda parte observe que para todo $w \in Ap(S, n)$, se $w \equiv i \pmod{n}$ e $i \in \{0, \dots, n-1\}$, então existe um inteiro não negativo k_i tal que $w = k_i n + i$. Assim, usando a notação do Lema 1.3,

$$Ap(S, n) = \{0, w(1) = k_1 n + 1, w(2) = k_2 n + 2, \dots, w(n-1) = k_{n-1} n + n - 1\}.$$

Temos que $x \equiv w(i) \pmod{n}$ pertence a S se, e somente se, $w(i) \leq x$. Então, como os elementos congruentes a i módulo n menores que $w(i)$ pertencem ao conjunto $\{i, n + i, \dots, (k_i - 1)n + i\}$, para todo $i \in \{1, \dots, n-1\}$, segue que

$$\begin{aligned}
g(s) &= k_1 + \cdots + k_{n-1} \\
&= \frac{1}{n}(k_1 n + \cdots + k_{n-1} n) \\
&= \frac{1}{n}(0 + (k_1 n + 1) + \cdots + (k_{n-1} n + n - 1)) - \frac{1}{n} \left(\frac{n(n-1)}{2} \right) \\
&= \frac{1}{n} \left(\sum_{w \in Ap(S, n)} w \right) - \frac{n-1}{2}
\end{aligned}$$

□

A seguinte proposição caracteriza o conjunto de Apéry de um semigrupo numérico S com sistema de geradores minimal igual a $\{a, b\}$.

Proposição 1.5. *Seja S um semigrupo numérico com sistema de geradores minimal igual a $\{a, b\}$, ou seja, $S = \langle a, b \rangle$. Então*

$$Ap(S, a) = \{0, b, 2b, \dots, (a-1)b\} = A.$$

Demonstração. Para provar a igualdade, basta mostrar que $Ap(S, a) \subseteq A$ e $A \subseteq Ap(S, a)$.

Primeiro, suponha que $x \in Ap(S, a)$ e que $x \notin A$. Logo, $x \neq kb$ para todo $k \in I = \{0, 1, 2, \dots, a-1\}$. Como $x \in S$ e $S = \langle a, b \rangle$, existem $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ tais que $x = k_1 a + k_2 b$. Então, considerando $x - a = k_1 a + k_2 b - a = (k_1 - 1)a + k_2 b$, segue que $k_1 \neq 1$, pois se $k_1 = 1$, teríamos $x - a = k_2 b$, o que contradiz o fato de que $x \in Ap(S, a)$.

Se $k_1 = 0$, temos $x - a = k_2 b - a \Rightarrow x = k_2 b$, o que implica que $k_2 \notin I$. Logo, se $k_2 \notin I$, então $k_2 > a - 1$. Suponha $k_2 = a + m$, onde $m \geq 1$. Assim, $x = k_2 b = (a + m)b \Rightarrow x - a = ab + mb - a = (b - 1)a + mb$. Isso é uma contradição, já que $(b - 1)a + mb \in S$.

Agora, para mostrar a inclusão $A \subseteq Ap(S, a)$, suponha que $x \in A$. Então, $x = kb$ para algum $k \in I$. Suponha, por absurdo, que $kb \notin Ap(S, a) \Rightarrow kb - a \in S$. Logo, $kb - a = k_1 a + k_2 b$ para $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$. Isso implica que $kb = k_1 a + k_2 b + a \Rightarrow kb = (k_1 + 1)a + k_2 b$. Como $\text{mdc}(a, b) = 1$, essa igualdade só é possível se $k_1 + 1 = 0$, isto é, $k_1 = -1$, o que é uma contradição.

Portanto, concluímos que $Ap(S, a) = \{0, b, 2b, \dots, (a-1)b\}$. □

Das proposições anteriores acima, temos o seguinte resultado (cujas fórmulas são devidas a Sylvester):

Proposição 1.6. *Sejam a e b inteiros positivos com $\text{mdc}\{a, b\} = 1$. Então*

$$1. F(\langle a, b \rangle) = ab - a - b.$$

$$2. g(\langle a, b \rangle) = \frac{ab - a - b + 1}{2}.$$

Observe que para um semigrupo numérico de dimensão dois, $g(S) = \frac{F(S)+1}{2}$ e assim, $F(S)$ é sempre um inteiro ímpar.

Se S é um semigrupo numérico e $s \in S$, então $F(S) - s \notin S$. Caso contrário, tome $F(S) - s = x \in S$. Assim, temos que $F(S) = x + s \in S$, o que é um absurdo. Disso, obtemos o seguinte:

Lema 1.5. *Seja S um semigrupo numérico. Então,*

$$g(S) \geq \frac{F(S) + 1}{2}.$$

Demonstração. Seja $F(S) = t$, e suponha que $g(S) < \frac{t+1}{2}$. Observe que em $[0, t] \cap \mathbb{N}$ existem $t + 1$ elementos, desse modo, dizer que $g(S) < \frac{t+1}{2}$ significa que a quantidade de lacunas é menor do que a metade da quantidade de elementos em $[0, t] \cap \mathbb{N}$, ou seja, em $[0, t] \cap \mathbb{N}$ existem mais elementos que estão em S do que lacunas. Agora, o conjunto das lacunas está totalmente contido no $[0, t] \cap \mathbb{N}$. Porém, sabemos que se S é um semigrupo numérico e $s \in S$, então $t - s \notin S$, isto é, para cada elemento de S que está em $[0, t] \cap \mathbb{N}$ existe um elemento em $G(S)$ correspondente a ele. Assim temos uma contradição, já que a quantidade de lacunas é menor que a quantidade de elementos de S em $[0, t] \cap \mathbb{N}$. Logo, $g(S) \geq \frac{t+1}{2}$ $\square$

Pelo lema anterior, vemos que o semigrupo numérico em que a igualdade é válida é o semigrupo numérico com a menor quantidade de lacunas possível, o que só acontece quando $F(S)$ é ímpar.

Observação 1.1. *Se fixarmos um inteiro positivo f , não é verdade que em geral existem mais semigrupos numéricos com número de Frobenius $f + 1$ do que semigrupos numéricos com número de Frobenius f . A tabela a seguir mostra isso, onde $ns(F)$ representa a quantidade de semigrupos numéricos com número de Frobenius F .*

F	ns(F)	F	ns(F)
1	1	20	900
2	1	21	1828
3	2	22	1913
4	2	23	4096
5	5	24	3578
6	4	25	8273
7	11	26	8175
8	10	27	16132
9	21	28	16267
10	22	19	34903
11	51	30	31822
12	40	31	70854
13	106	32	68681
14	103	33	137391
15	200	34	140661
16	205	35	292081
17	465	36	270258
18	405	37	591443
19	961	38	582453

Na tabela a seguir mostraremos os sistemas de geradores para cada semigrupo numérico com número de Frobenius fixado, onde $F(S) \in \{1, \dots, 8\}$.

F	Sistema de geradores
1	$\{2,3\}$
2	$\{3,4,5\}$
3	$\{2,5\}$ $\{4,5,6,7\}$
4	$\{3,5,7\}$ $\{5,6,7,8,9\}$
5	$\{2,7\}$ $\{3,4\}$ $\{3,7,8\}$ $\{4,6,7,9\}$ $\{6,7,8,9,10,11\}$
6	$\{4,6,7\}$ $\{4,7,9,10\}$ $\{5,7,8,9,11\}$ $\{7,8,9,10,11,12,13\}$
7	$\{2,9\}$ $\{3,5\}$ $\{3,8,10\}$ $\{4,5,6\}$ $\{4,5,11\}$ $\{4,6,9,11\}$ $\{4,9,10,11\}$ $\{5,6,8,9\}$ $\{5,8,9,11,12\}$ $\{6,8,9,10,11,13\}$ $\{8,9,10,11,12,13,14,15\}$
8	$\{3,7,11\}$ $\{3,10,11\}$ $\{5,6,7,9\}$ $\{5,6,9,13\}$ $\{5,7,9,11,13\}$ $\{5,9,11,12,13\}$ $\{6,7,9,10,11\}$ $\{6,9,10,11,13,14\}$ $\{7,9,10,11,12,13,15\}$ $\{9,10,11,12,13,14,15,16,17\}$

Na tabela a seguir mostraremos os sistemas de geradores para cada semigrupo numérico com gênero fixado, onde $g(S) \in \{1, \dots, 5\}$.

$g(S)$	Sistema de geradores
0	$\{1\}$
1	$\{2, 3\}$
2	$\{2, 5\}$ $\{3, 4, 5\}$
3	$\{2, 7\}$ $\{3, 4\}$ $\{3, 5, 7\}$ $\{4, 5, 6, 7\}$
4	$\{2, 9\}$ $\{3, 5\}$ $\{3, 7, 8\}$ $\{4, 5, 6\}$ $\{4, 5, 7\}$ $\{4, 6, 7, 9\}$ $\{5, 6, 7, 8, 9\}$
5	$\{2, 11\}$ $\{3, 7, 11\}$ $\{3, 8, 10\}$ $\{4, 5, 11\}$ $\{4, 6, 7\}$ $\{4, 6, 9, 11\}$ $\{4, 7, 9, 10\}$ $\{5, 6, 7, 8\}$ $\{5, 6, 7, 9\}$ $\{5, 6, 8, 9\}$ $\{5, 7, 8, 9, 11\}$ $\{6, 7, 8, 9, 10, 11\}$

Maria Bras-Amorós em [4] computou o número de semigrupos numéricos com gênero g para $g \in \{0, \dots, 50\}$, e suas contas mostraram um comportamento do número de semigrupos numéricos com gênero fixo menor ou igual a 50 similar a uma sequência de Fibonacci. Nos últimos anos, foram realizados cálculos para gêneros ainda maiores que 50, ver [7] e <https://oeis.org/A007323/b007323.txt>. Entretanto, ainda não foi provado para o caso geral que se fixarmos um inteiro positivo g então existem mais semigrupos numéricos de gênero $g + 1$ do que de gênero g .

Lema 1.6. *Sejam S um semigrupo numérico gerado por $\{n_1, \dots, n_p\}$, $d = \text{mdc}\{n_1, \dots, n_{p-1}\}$ e $T = \langle n_1/d, \dots, n_{p-1}/d, n_p \rangle$. Então,*

$$Ap(S, n_p) = d(Ap(T, n_p)).$$

Demonstração. Se $w \in Ap(S, n_p)$, então $w \in \langle n_1, \dots, n_{p-1} \rangle$. Consequentemente, $w/d \in \langle n_1/d, \dots, n_{p-1}/d \rangle \subseteq T$. Se $w/d - n_p \in T$, temos que $w - dn_p \in S \implies w - dn_p + (d - 1)n_p \in S \implies w - n_p \in S$, o que é impossível, pois $w \in Ap(S, n_p)$. Logo, $w/d \in Ap(T, n_p)$, e assim, $w \in d(Ap(T, n_p))$, isto é, $Ap(S, n_p) \subseteq d(Ap(T, n_p))$.

Por outro lado, seja $w \in Ap(T, n_p)$. Então, $w \in \langle n_1/d, \dots, n_{p-1}/d \rangle$, daí $dw \in \langle n_1, \dots, n_{p-1} \rangle$. Se $dw - n_p \in S$, existem $\{\lambda_1, \dots, \lambda_p\} \in \mathbb{N}$ tais que

$$dw - n_p = \lambda_1 n_1 + \dots + \lambda_p n_p \implies dw = (\lambda_1 n_1 + \dots + \lambda_{p-1} n_{p-1}) + (\lambda_p + 1) n_p$$

Agora, como S é um semigrupo numérico, $\text{mdc}\{n_1, \dots, n_p\} = 1 \implies \text{mdc}\{d, n_p\} = 1$, assim $d \mid (\lambda_p + 1)$, e temos que

$$w = \frac{\lambda_1 n_1}{d} + \dots + \frac{\lambda_{p-1} n_{p-1}}{d} + \frac{(\lambda_p + 1)}{d} n_p,$$

onde $\frac{(\lambda_p + 1)}{d} \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, contradizendo o fato de que $w \in \text{Ap}(T, n_p)$, pois se chamarmos $\frac{(\lambda_p + 1)}{d} = k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, temos que $k - 1 \in \mathbb{N}$, desse modo,

$$w - n_p = \frac{\lambda_1 n_1}{d} + \dots + \frac{\lambda_{p-1} n_{p-1}}{d} + (k - 1) n_p \in T.$$

Assim, $dw \in \text{Ap}(S, n_p) \implies d(\text{Ap}(T, n_p)) \subseteq \text{Ap}(S, n_p)$. Portanto $\text{Ap}(S, n_p) = d(\text{Ap}(T, n_p))$. $\square$

A próxima proposição é, talvez, uma das mais importantes na primeira parte deste trabalho. Sua relevância está no fato de que ela permite calcular o número de Frobenius de um semigrupo numérico, reduzindo o cálculo ao número de Frobenius de um sistema gerador mínimo com menor magnitude de seus elementos.

Proposição 1.7. *Seja S um semigrupo numérico gerado minimamente por $\{n_1, n_2, \dots, n_p\}$. Sejam $d = \text{mdc}\{n_1, \dots, n_{p-1}\}$ e o conjunto $T = \langle n_1/d, \dots, n_{p-1}/d, n_p \rangle$. Então,*

1. $F(S) = dF(T) + (d - 1)n_p$,
2. $g(S) = dg(T) + \frac{(d-1)(n_p-1)}{2}$.

Demonstração.

1. Sabemos que $F(T) = (\max \text{Ap}(T, n_p)) - n_p$, e $F(S) = (\max \text{Ap}(S, n_p)) - n_p$. Agora,

$$\max \text{Ap}(S, n_p) = d(\max \text{Ap}(T, n_p)),$$

$$\text{logo, } F(S) = dF(T) + dn_p - n_p = dF(T) + (d - 1)n_p.$$

2. Sabemos que $g(T) = \frac{1}{n_p} (\sum_{w \in \text{Ap}(T, n_p)} w) - \frac{n_p - 1}{2}$ e $g(S) = \frac{1}{n_p} (\sum_{w \in \text{Ap}(S, n_p)} w) - \frac{n_p - 1}{2}$ onde

$$\frac{1}{n_p} \left(\sum_{w \in \text{Ap}(S, n_p)} w \right) - \frac{n_p - 1}{2} = \frac{1}{n_p} \left(\sum_{w \in \text{Ap}(T, n_p)} dw \right) - \frac{n_p - 1}{2},$$

$$\text{logo, } g(S) = dg(T) + \frac{dn_p - d}{2} - \frac{n_p - 1}{2} = dg(T) + \frac{(d-1)(n_p-1)}{2}. \quad \square$$

Exemplo 1.13. *Seja $S = \langle 18, 30, 19 \rangle$. Como $\text{mdc}\{18, 30\} = 6$, $T = \langle 3, 5, 19 \rangle = \langle 3, 5 \rangle$, $F(T) = 7$ e $g(T) = 4$. Assim, $F(S) = 6F(T) + 5 \cdot 19 = 42 + 95 = 137$, e $g(S) = 6g(T) + \frac{5 \cdot 18}{2} = 24 + 45 = 69$.*

Exemplo 1.14. *Seja $S = \langle 20, 30, 17 \rangle$. Como $\text{mdc}\{20, 30\} = 10$, $T = \langle 2, 3, 17 \rangle = \langle 2, 3 \rangle$. Portanto $F(S) = 10F(T) + 9 \cdot 17 = 10 + 153 = 163$, e $g(S) = 10g(T) + \frac{9 \cdot 16}{2} = 10 + 72 = 82$.*

Observe que, nos dois exemplos anteriores, além de reduzir a magnitude dos elementos do sistema de geradores minimal ($\text{msg}(S)$), também foi reduzida a quantidade de elementos desse sistema. Contudo, isso nem sempre acontece. Mais adiante, em nosso estudo, identificaremos para quais semigrupos essa propriedade se verifica.

1.1.2 Números Pseudo-Frobenius

Seja S um semigrupo numérico em $\mathbb{N}$. Dizemos que um inteiro x é um número pseudo-Frobenius se $x \notin S$ e $x + s \in S$, para todo $s \in S^*$. Vamos denotar por $PF(S)$ o conjunto de todos os números pseudo-Frobenius de S , e sua cardinalidade será conhecida como o tipo de S , é denotada por $t(S)$.

Da definição, segue que $F(S) \in PF(S)$, sendo o maior elemento desse conjunto.

Sobre o conjunto dos inteiros, podemos definir a relação: $a \leq_S b$ se $b - a \in S$. Como S é um semigrupo numérico, temos que a relação é:

1. reflexiva, pois $a \leq_S a$, já que $a - a = 0 \in S$.
2. transitiva, pois se $x \leq_S y$ e $y \leq_S z$, então $y - x \in S$ e $z - y \in S$, logo, $z - x = (z - y) + (y - x) \in S$, assim, $x \leq_S z$.
3. antissimétrica, pois se $x \leq_S y$ e $y \leq_S x$, então $y - x \in S \subseteq \mathbb{N}$ e $x - y \in S \subseteq \mathbb{N}$, o que implica que $y - x \geq 0$ e $x - y \geq 0$, logo $x = y$.

Assim, a relação $\leq_S$ é uma relação de ordem. Lembre-se de que $\mathbb{Z}$ é o conjunto dos números inteiros e que $\mathbb{Z} \setminus S$ representa o conjunto dos números inteiros excluindo os elementos de S . Portanto,

$$Maximais_{\leq_S}(\mathbb{Z} \setminus S) = \{a \in \mathbb{Z} \setminus S \mid \exists b \in \mathbb{Z} \setminus S, b \leq_S a \text{ e } \nexists c \in \mathbb{Z} \setminus S, a \leq_S c\}.$$

Proposição 1.8. *Seja S um semigrupo numérico. Então,*

1. $PF(S) = Maximais_{\leq_S}(\mathbb{Z} \setminus S)$,
2. $x \in \mathbb{Z} \setminus S$ se, e somente se, $f - x \in S$, para algum $f \in PF(S)$.

Demonstração.

1. Seja $x \in PF(S)$. Então, $x \notin S$ e $x + s \in S$, para todo $s \in S^*$. Suponha que existe $y \in \mathbb{Z} \setminus S$, $y \neq x$ tal que $x \leq_S y$. Desse modo, $y - x \in S \implies y = x + (y - x) \in S$, pois $x \in PF(S)$, contradizendo a escolha de y . Assim, $PF(S) \subseteq Maximais_{\leq_S}(\mathbb{Z} \setminus S)$.

Por outro lado, seja $x \in Maximais_{\leq_S}(\mathbb{Z} \setminus S)$. Temos que $x \notin S$. Se $s \in S^*$, então $x + s \in S$, caso contrário, $x \leq_S x + s$, já que $x + s - x = s \in S$, o que é impossível, pois x é maximal em $\mathbb{Z} \setminus S$. Portanto, $PF(S) = Maximais_{\leq_S}(\mathbb{Z} \setminus S)$.

2. Basta mostrar o caso em que $x > 0$, já que se $x < 0$, pode-se tomar $f = F(S)$. Além disso, se $x \in PF(S)$, como $\leq_S$ é reflexiva, $f = x$. Agora, tomando $x \notin PF(S)$, pelo item anterior, existe $x_1 \in G(S)$ tal que $x \leq_S x_1$. Observe que se $x_1 \in PF(S)$, concluímos a ida da demonstração. Caso contrário, como $G(S)$ é finito, existe uma sequência $x \leq_S x_1 \leq_S x_2 \leq_S \dots \leq_S x_n, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tal que $x_n \in PF(S)$, e como $\leq_S$ é transitiva, $x \leq_S x_n$.

Por outro lado, seja $f - x \in S$ para algum $f \in PF(S)$. Então, se $x \in S$, temos que $f = (f - x) + x \in S$, o que é absurdo, pois $f \in PF(S)$. Assim, $x \notin S$, concluindo que $x \in \mathbb{Z} \setminus S$. $\square$

Este resultado estabelece um tipo de dualidade entre geradores minimais e números pseudo-Frobenius de um semigrupo numérico, já que $Minimais_{\leq_S}(S \setminus \{0\})$ é o sistema de geradores minimal de S .

Proposição 1.9. *Sejam S um semigrupo numérico e $n \in S^*$. Então,*

$$PF(S) = \{w - n : w \in Maximais_{\leq_S} Ap(S, n)\}.$$

Demonstração. Seja $x \in PF(S)$. Como $x \notin S$ e $x + n \in S$, temos que $x + n \in Ap(S, n)$. Seja $w \in Ap(S, n)$ tal que $x + n \leq_S w \implies w - (x + n) = w - n - x \in S \implies w - n = x + s$, para algum $s \in S$. Como $w - n \notin S$ e $x \in PF(S)$, temos que $s = 0$, e logo $w = x + n$.

Tome agora $w \in \text{Maximais} \leq_S Ap(S, n)$. Então, $w - n \notin S$. Se $w - n + s \notin S$ para algum $s \in S^*$, então $w + s \in Ap(S, n)$, contradizendo a maximalidade de w . $\square$

Exemplo 1.15. Tomando $\langle 4, 5, 7 \rangle = \{0, 4, 5, 7, \rightarrow\}$, então $Ap(S, 4) = \{0, 5, 7, 10\}$ e $\text{Maximais} \leq_S Ap(S, 4) = \{7, 10\}$. Assim, $PF(S) = \{3, 6\}$.

Exemplo 1.16. Seja S um semigrupo numérico com sistema de geradores minimal igual $\langle a, b \rangle$. Pela Proposição 1.5 temos que,

$$Ap(S, a) = \{0, b, 2b, \dots, (a-1)b\}.$$

Isso implica que $\text{Maximais} \leq_S Ap(S, a) = \{(a-1)b\}$, e $PF(S) = \{ab - b - a\}$. Desse modo, semigrupos numéricos de dimensão dois possuem tipo um.

Como a cardinalidade de $Ap(S, n)$ é n e o 0 nunca é um elemento maximal, obtemos a seguinte cota para o tipo de um semigrupo numérico.

Corolário 1.3. Seja S um semigrupo numérico. Então,

$$t(S) \leq m(S) - 1.$$

Demonstração. Basta considerar $n = m(S)$ na proposição anterior. $\square$

Relembre que a dimensão de imersão de um semigrupo numérico não excede a multiplicidade. Além disso, já sabemos que semigrupos numéricos de dimensão dois possuem tipo um. Os semigrupos com dimensão três possuem tipo um, ou dois [8]. No entanto, para dimensões maiores que três, o tipo não é limitado superiormente pela dimensão, como veremos no exemplo a seguir.

Exemplo 1.17. [6] Seja $S = \langle s, s+3, s+3n+1, s+3n+2 \rangle$. Para $n \geq 2, r \geq 3n+2$ e $s = r(3n+2)+3$, o tipo de S é $2n+3$.

Exemplo 1.18. [8] Seja $m \in \mathbb{N}$, com $m > 1$. Observe que para $S = \{0, m, \rightarrow\}$, $PF(S) = \{1, 2, \dots, m-1\}$. Esses semigrupos atingem o limite dado no corolário anterior.

Com o que estudamos até aqui, podemos introduzir a ideia do nosso principal objetivo nesta parte do trabalho. Isso serve para justificar por que, a partir deste ponto, estudaremos características e propriedades menos intuitivas sobre semigrupos numéricos. Embora nosso objetivo seja simples de formular, está longe de ser facilmente resolvido. Portanto, será necessário utilizar outras ferramentas do que as apresentadas até agora.

Nosso objetivo é encontrar uma fórmula algébrica para o número de Frobenius de um semigrupo numérico simétrico de dimensão de imersão 3, que dependa dos elementos do sistema gerador minimal do semigrupo numérico. Ou seja, seja S um semigrupo numérico tal que $\text{msg}(S) = \{a, b, c\}$, queremos encontrar uma fórmula algébrica para $F(S)$ que dependa exclusivamente dos elementos a, b e c .

É claro que, dentro da ampla família de semigrupos numéricos, existem muitos que possuem propriedades especiais. De fato, nesta seção, podemos observar alguns exemplos disso. Por essa razão, desenvolveremos diversas partes da teoria que justificam as interações necessárias entre as propriedades, tanto simples quanto complexas, de certas famílias de semigrupos numéricos. Esse estudo nos permitirá compreender detalhadamente a demonstração do nosso teorema central.

Capítulo 2

Propriedades

2.1 Apresentações de um semigrupo numérico

As apresentações de um semigrupo numérico fornecem uma forma eficiente de descrever sua estrutura por meio de relações entre seus geradores. Este conceito permite representar o semigrupo de maneira algébrica, facilitando a análise de suas propriedades e a solução de problemas relacionados.

Antes de apresentarmos sua definição formal, começaremos novamente pelos monoides para facilitar o estudo.

2.1.1 Monóides livres e apresentações

Começaremos introduzindo o conceito de monoide livre, uma vez que as apresentações de um semigrupo numérico são definidas em relação a um monoide livre associado ao semigrupo e à sua relação com os elementos do sistema gerador minimal.

Para estabelecer essa conexão entre o monoide livre associado e o semigrupo numérico por meio dos elementos do sistema gerador minimal, é necessário recorrer ao primeiro teorema de isomorfismo para monoides. Por essa razão, é fundamental determinar um núcleo (kernel) adequado em relação ao homomorfismo entre monoides. Para esse propósito, introduzimos, a seguir, o conceito de congruência em um monoide.

Seja M um conjunto não vazio. Uma relação binária em M pode ser vista como um subconjunto σ de $M \times M$. Denotamos $a\sigma b$ e dizemos que a está σ -relacionado com b se, e somente se, $(a, b) \in \sigma$.

Se σ é reflexiva, simétrica e transitiva, então σ é uma relação de equivalência em M . Para todo $a \in M$, definimos a sua classe módulo σ , chamada de sua σ -classe, como:

$$[a]_{\sigma} = \{b \in M : a\sigma b\}.$$

O conjunto

$$\frac{M}{\sigma} = \{[a]_{\sigma} : a \in M\}$$

é o quociente do conjunto M por σ , e é uma partição de M .

Definição 2.1. Uma **congruência** em um monóide M é uma relação binária de equivalência σ tal que para todos $a, b, c \in M$, se $a\sigma b$, então $(a + c)\sigma(b + c)$. Isso quer dizer $(a, b) \in \sigma$ então $(a + c, b + c) \in \sigma$

Lema 2.1. *Seja M um monóide comutativo e σ uma congruência em M . Então $\frac{M}{\sigma}$ é um monóide comutativo com a operação*

$$[a]_{\sigma} + [b]_{\sigma} = [a + b]_{\sigma}.$$

Demonstração. Para ver que $+$ esta bem definida, devemos provar que se $a\sigma x$ e $b\sigma y$, então $(a + b)\sigma(x + y)$. Mas esta é uma consequência do fato de que σ é uma congruência, porque $(a + b)\sigma(x + b)$ e $(b + x)\sigma(y + x)$, e por transitividade obtemos a propriedade desejada. O elemento identidade é claramente $[0]_{\sigma}$, e a operação é trivialmente associativa e comutativa. $\square$

Seja $f : X \rightarrow Y$ um homomorfismo entre monoides. Definimos o **kernel** ou núcleo de f como

$$\ker(f) = \{(a, b) \in X \times X : f(a) = f(b)\}.$$

É uma consequência direta que $\ker(f)$ é uma congruência no monóide X . Isso resulta do fato de que f é um homomorfismo de monoides e da própria definição de $\ker(f)$, já que, para todo $a, b, c \in X$, se $(a, b) \in \ker(f)$, então $f(a + c) = f(a) + f(c) = f(b) + f(c) = f(b + c)$, isto é $(a + c, b + c) \in \sigma$. A imagem de f , definida como

$$\text{im}(f) = \{f(a) : a \in X\},$$

é um submonóide de Y .

Observe que há diferenças sutis entre as definições usuais em grupos abelianos e em monoides. Por exemplo, a condição $f(0) = 0$ para morfismos de monoides não é imposta em morfismos de grupos, pois decorre diretamente do fato de que $f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0)$. Isso ocorre porque, em monoides, não temos uma lei de “cancelamento”. Em outras palavras, os elementos de M não possuem necessariamente inversos em relação à operação $+$.

Outra diferença importante está na definição de núcleo. Na teoria de grupos, o núcleo é definido como a pré-imagem do elemento identidade, ou seja, o conjunto de elementos que são mapeados para o elemento identidade. Isso se dá porque, em grupos, $f(a) = f(b)$ implica que $f(a) - f(b) = 0$, ou, equivalentemente, $f(a - b) = 0$. Assim, para medir o quão longe um morfismo está de ser injetivo, basta estudar os elementos que mapeiam para o elemento identidade. Essa definição, no entanto, não pode ser adaptada diretamente para monoides em geral, já que não temos a noção de inverso.

Apesar dessas diferenças, o Primeiro Teorema do Isomorfismo permanece válido em ambos os contextos.

Proposição 2.1. *Seja $f : X \rightarrow Y$ um homomorfismo de monoides. Então:*

$$\tilde{f} : \frac{X}{\ker(f)} \rightarrow \text{im}(f), \quad \tilde{f}([a]_{\ker(f)}) = f(a)$$

é um isomorfismo de monoides.

Demonstração. Esta definição de $\tilde{f}$ não depende da escolha do representante de $[a]_{\ker(f)}$, por causa da definição de $\ker(f)$. Essa função é injetora. Para verificar isso, seja $x, y \in X$. Então, temos $[x]_{\ker f} = [y]_{\ker f}$ se e somente se $(x, y) \in \ker f$, ou seja, $f(x) = f(y)$. Suponha que $\tilde{f}([x]_{\ker f}) = \tilde{f}([y]_{\ker f}) \Rightarrow f(x) = f(y)$. Em seguida, segue-se facilmente que os conjuntos $\{a \in X : f(a) = f(x)\} = \{b \in X : f(b) = f(y) = f(x)\}$. Além disso, é sobrejetivo, pois basta notar que para todos $f(a)$ existe $[a]_{\ker f}$. É um homomorfismo, pois f é um homomorfismo. $\square$

Definição 2.2. O *monóide livre* de um conjunto X não vazio é definido como:

$$\text{Free}(X) = \{\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_k x_k : k \in \mathbb{N}, \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{N}, x_1, \dots, x_k \in X\}.$$

Com a adição definida por componentes, ou seja,

$$(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_k x_k) + (\mu_1 x_1 + \cdots + \mu_k x_k) = (\lambda_1 + \mu_1) x_1 + \cdots + (\lambda_k + \mu_k) x_k.$$

Note que λ_i ou μ_i podem ser zero para alguns i . Além disso, observe que $\text{Free}(\{x_1, \dots, x_n\})$, com $x_i \neq x_j$ para todo $i \neq j$, é isomorfo a $\mathbb{N}^n$.

Exemplo 2.1. Seja $X = \{\pi, e, i\}$. Então, $\text{Free}(X) = \{\lambda_1 \pi + \lambda_2 e + \lambda_3 i \mid \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{N}\}$, com a soma usual dos números naturais, é um monoide livre.

Usamos este exemplo para apontar a arbitrariedade do conjunto X .

Seja M um monoide com o sistema geradores minimal igual a $\{m_1, \dots, m_k\}$, então a função

$$\varphi : \text{Free}(\{x_1, \dots, x_k\}) \rightarrow M, \quad \varphi(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_k x_k) = \lambda_1 m_1 + \cdots + \lambda_k m_k$$

é um epimorfismo de monoides (assumindo que $x_i \neq x_j$ para todo $i \neq j$).

Pela Proposição anterior, temos que M é isomorfo a $\text{Free}(\{x_1, \dots, x_n\})/\ker(\varphi)$.

Proposição 2.2. Seja M um monoide gerado por $\{m_1, \dots, m_k\}$. Seja X um conjunto com cardinalidade k . Então existe uma congruência σ em $\text{Free}(X)$ tal que M é isomorfo a $\text{Free}(X)/\sigma$.

A demonstração é imediata notando que tal congruência é a canônica, isto é, $\ker(\varphi)$.

Como consequência dessa propriedade, todo monoide finitamente gerado é isomorfo a $\mathbb{N}^k/\sigma$ para algum k positivo e alguma congruência σ em $\mathbb{N}^k$.

Para obter uma representação finita de um monoide finitamente gerado, ainda resta ver que a congruência σ pode ser “finitamente descrita”. A seguir, vemos o que queremos dizer com isso. Primeiro, introduzimos o conceito de congruência gerada por um conjunto. Podemos fazer isso porque a seguinte proposição nos garante que a interseção de congruências em um monoide é uma congruência.

Proposição 2.3. Sejam σ e β duas congruências no monoide M , cuja interseção seja não vazia. Então, $\sigma \cap \beta \neq \emptyset$ também é uma congruência em M .

Demonstração. Sejam σ e β duas congruências em M . Por definição, $\sigma \subseteq M \times M$ e $\beta \subseteq M \times M$, o que implica que $\sigma \cap \beta \subseteq M \times M$. Resta, então, provar que $\sigma \cap \beta$ é de fato uma congruência.

Primeiramente, note que $\sigma \cap \beta$ é uma relação binária de equivalência, o que é diretamente inferido do fato de que $\sigma \cap \beta \subseteq \sigma$ e σ é uma relação de equivalência.

Agora, seja $(a, b) \in \sigma \cap \beta$. Isso implica que $a R_\sigma b$ e $a R_\beta b$. Portanto, para todo $c \in M$, temos que $(a + c) R_\sigma (b + c)$ e $(a + c) R_\beta (b + c)$. Consequentemente, $(a + c, b + c) \in \sigma \cap \beta$, ou seja, $(a + c) R_{\sigma \cap \beta} (b + c)$.

Assim, concluímos que $\sigma \cap \beta$ é uma congruência em M . □

Pela proposição anterior temos que, para um conjunto X e um subconjunto ρ de $\text{Free}(X) \times \text{Free}(X)$, definimos a congruência gerada por ρ como a interseção de todas as congruências em $\text{Free}(X)$ contendo ρ . Denotamos essa congruência por $\text{Cong}(\rho)$. A seguir, veremos quais são os elementos neste conjunto. A relação binária $\Delta(X) = \{(x, x) : x \in X\}$ é conhecida como a diagonal em X . Para uma relação binária ρ em um conjunto X , sua relação inversa é o conjunto

$$\rho^{-1} = \{(b, a) : (a, b) \in \rho\}.$$

Proposição 2.4. *Seja X um conjunto não vazio. Seja $\rho \subseteq \text{Free}(X) \times \text{Free}(X)$. Defina*

$$\rho^0 = \rho \cup \rho^{-1} \cup \Delta(\text{Free}(X)),$$

$$\rho^1 = \{(v + u, w + u) : (v, w) \in \rho^0, u \in \text{Free}(X)\}.$$

Então $\text{Cong}(\rho)$ é o conjunto de pares $(v, w) \in \text{Free}(X) \times \text{Free}(X)$ tais que existem $k \in \mathbb{N}$ e $v_0, \dots, v_k \in \text{Free}(X)$ com $v_0 = v, v_k = w$ e $(v_i, v_{i+1}) \in \rho^1$ para todo $0 \leq i \leq k-1$.

Demonstração. Primeiro mostramos que o conjunto construído dessa forma é uma congruência. Vamos chamar esse conjunto de σ .

1. Como $\Delta(\text{Free}(X)) \subseteq \sigma$, a relação binária σ é reflexiva.
2. Se $(v, w) \in \sigma$, existem $k \in \mathbb{N}$ e $v_0, \dots, v_k \in \text{Free}(X)$ tais que $v_0 = v, v_k = w$ e $(v_i, v_{i+1}) \in \rho^1$ para todo $0 \leq i \leq k-1$. Como $(v_i, v_{i+1}) \in \rho^1$ implica que $(v_{i+1}, v_i) \in \rho^1$, definindo $w_i = v_{k-i}$ para todo $0 \leq i \leq k$, obtemos que $(w, v) \in \sigma$. Portanto, σ é simétrico.
3. Se (u, v) e (v, w) estão em σ , então existe $k, l \in \mathbb{N}$ e $v_0, \dots, v_k, w_0, \dots, w_l \in \text{Free}(X)$ tal que $v_0 = u, v_k = w_0 = v, w_l = w$ e $(v_i, v_{i+1}), (w_j, w_{j+1}) \in \rho^1$ para todos os i, j adequados. Concatenando as sequências $\{v_i\}_i$ e $\{w_j\}_j$ obtemos $(u, w) \in \sigma$. Portanto, σ é transitivo.
4. Finalmente, seja $(v, w) \in \sigma$ e $u \in \text{Free}(X)$. Existe $k \in \mathbb{N}$ e $v_0, \dots, v_k \in \text{Free}(X)$ tal que $v_0 = v, v_k = w$ e $(v_i, v_{i+1}) \in \rho^1$ para todo $0 \leq i \leq k-1$. Definindo $w_i = v_i + u$ para todo $0 \leq i \leq k$ temos $(w_i, w_{i+1}) \in \rho^1$ e assim $(v + u, w + u) \in \sigma$.

É evidente que toda congruência que contém ρ também deve conter σ . De fato, suponha que exista uma congruência β que contém ρ mas tal que $\sigma \not\subseteq \beta$. Nesse caso, existe $(a, b) \in \sigma$ com $(a, b) \notin \beta$. Isso implica que existem $k \in \mathbb{N}$ e $v_0, v_1, \dots, v_k \in \text{Free}(X)$ tais que $v_0 = a, v_k = b$ e $(v_i, v_{i+1}) \in \rho^1$ para todo $0 \leq i \leq k-1$. Portanto, teríamos $(v_0, v_k) \notin \beta$. No entanto, isso é uma contradição, já que $\rho^1 \subseteq \beta$. Portanto σ é a menor congruência em $\text{Free}(X)$ que contém ρ , ou seja, $\sigma = \text{Cong}(\rho)$. $\square$

Uma congruência σ é gerada por ρ se $\sigma = \text{Cong}(\rho)$. Dizemos que ρ é um sistema de geradores de σ . Uma congruência σ é finitamente gerada se existe um sistema de geradores de σ com elementos finitos.

Definição 2.3. *Uma **apresentação** de um monoide finitamente gerado M é uma congruência em $\text{Free}(X)$, para algum conjunto finito X , tal que $M \cong \text{Free}(X)/\text{Cong}(\rho)$. Dizemos que M é um monoide finitamente apresentado se ρ é finito.*

Note a semelhança entre a definição de apresentação de um monoide e o primeiro teorema do isomorfismo para monoides. Além disso, recordemos a função $\varphi : \text{Free}(X) \rightarrow M$, dada por $\varphi(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k) = \lambda_1 m_1 + \dots + \lambda_k m_k$. O kernel correspondente a essa função é:

$$\ker(\varphi) = \{(x, y) \in \text{Free}(X) \times \text{Free}(X) : \varphi(x) = \varphi(y) = m \in M\}$$

Embora $\varphi(x) = \varphi(y) = m \in M$, isso não implica que as constantes λ sejam as mesmas para x e y .

Nosso objetivo agora é mostrar que todo monoide que satisfazer a lei do cancelamento finitamente gerado possui uma apresentação finita. Para isso, precisamos introduzir os elementos irredutíveis de uma congruência, que definiremos a seguir. Seja X um conjunto não vazio e seja σ uma congruência em $\text{Free}(X)$. Um elemento (a, b) em $\sigma \setminus \{(0, 0)\}$ é irredutível se não puder ser expresso como $(a, b) = (a_1, b_1) + (a_2, b_2)$ com $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in \sigma \setminus \{(0, 0)\}$. Seja $\text{Irr}(\sigma)$ o conjunto de elementos irredutíveis de σ . Note que σ é um submonoide de $\text{Free}(X) \times \text{Free}(X)$, pois como vimos na prova do Lema 2.1, se (a, b) e (c, d) estão em σ , então também está $(a + c, b + d)$, e por reflexividade $(0, 0) \in \sigma$. Como vemos a seguir, $\text{Irr}(\sigma)$ gera σ como um monoide.

Proposição 2.5. *Seja X um conjunto finito não vazio e seja σ uma congruência em $Free(X)$. Então $\sigma = \langle Irr(\sigma) \rangle$.*

Demonstração. Suponha que $X = \{x_1, \dots, x_k\}$. Definimos a seguinte relação de ordem em $Free(X)$: $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k \leq \mu_1 x_1 + \dots + \mu_k x_k$ se, e somente se, $\lambda_i \leq \mu_i$ para todo $i \in 1, \dots, k$. Dado $x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k \in Free(X)$, o conjunto de elementos em $Free(X)$ que são menores ou iguais a x é finito (há exatamente $(\lambda_1 + 1)(\lambda_2 + 1) \dots (\lambda_{k-1} + 1)(\lambda_k + 1)$ desses elementos). De maneira análoga, podemos definir em $Free(X) \times Free(X)$ a relação $(a, b) \leq (c, d)$ se, e somente se, $a \leq c$ e $b \leq d$. Escrevemos $(a, b) < (c, d)$ se $(a, b) \leq (c, d)$ e $(a, b) \neq (c, d)$. Segue-se que, dado $(a, b) \in Free(X) \times Free(X)$, o conjunto de elementos $(c, d) \in Free(X) \times Free(X)$ tal que $(c, d) \leq (a, b)$ é finito.

Seja $(a, b) \in \sigma$. Se (a, b) não for irredutível, então $(a, b) = (a_1, b_1) + (\bar{a}_1, \bar{b}_1)$, com (a_1, b_1) e $(\bar{a}_1, \bar{b}_1) \in \sigma \setminus \{(0, 0)\}$. Assim, $(a_1, b_1) < (a, b)$ e $(\bar{a}_1, \bar{b}_1) < (a, b)$. Se algum desses pares não for irredutível, podemos repetir o processo com eles. Dessa forma, construímos uma árvore binária tendo como raiz (a, b) , onde cada nó é a soma de seus dois filhos. Uma folha nessa árvore é um elemento irredutível de σ . Como todos os elementos na árvore são menores que (a, b) (exceto o próprio (a, b)), e o número de elementos em $Free(X) \times Free(X)$ menores que (a, b) é finito, a árvore terá apenas um número finito de nós e, consequentemente, um número finito de folhas.

Pela construção da árvore, (a, b) é a soma de todas as folhas da árvore. Assim, $(a, b) \in \langle Irr(\sigma) \rangle$. A outra inclusão é evidente. $\square$

Um monoide M é cancelativo se cumprir a lei de cancelamento, mas precisamente, se para qualquer $a, b, c \in M$, $a + c = b + c$ implica $a = b$. Dizemos que uma congruência σ em $Free(X)$ é cancelativa se $Free(X)/\sigma$ é cancelativa.

Lema 2.2. *(Lema de Dickson). Seja X um conjunto não vazio e finito. Seja N um subconjunto não vazio de $Free(X)$. O conjunto $M = Minima_{\leq_F}(N)$ possui um número finito de elementos.*

Antes de começar a demonstração formalmente, determinemos como é o conjunto $M = Minima_{\leq}(N)$. Para isso, lembremos a relação de ordem $\leq_S$ definida anteriormente para um semigrupo numérico S . Esta relação nos diz que, para $x, y \in S$, temos $x \leq y \Leftrightarrow y - x \in S$.

Agora, consideremos a relação de ordem em $Free(X)$, onde o conjunto é $X = \{x_1, \dots, x_n\}$. Seja $a = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$ e $b = b_1 x_1 + \dots + b_n x_n \in Free(X)$. Então, temos que $a \leq_F b \Leftrightarrow (b_1 - a_1)x_1 + \dots + (b_n - a_n)x_n = b - a \in Free(X)$.

Portanto, o conjunto M é dado por:

$$M = Minima_{\leq_F}(N) = \{a \in N \mid a \leq_F b \text{ para algum } b \in N \text{ e } \nexists c \in N \text{ tal que } c \leq_F a\}.$$

Demonstração. Seja $X = \{x_1, \dots, x_n\}$. Para mostrar, vamos usar indução em n . Para $n = 1$, o resultado segue facilmente do fato de que $\leq_F$ é uma boa ordem em $Free(x_1) = \{\lambda x_1 : \lambda \in \mathbb{N}\}$, pois $\leq$ é uma boa ordem em $\mathbb{N}$ (todo subconjunto de $\mathbb{N}$ possui um mínimo).

Suponha que a afirmação é verdadeira para $n - 1$ e vamos mostrá-la para n . Escolha um elemento $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n \in M$. Para cada $1 \leq i \leq n$ e cada $0 \leq j \leq a_i$ defina

$$M_{ij} = \{(m_1 x_1 + \dots + m_n x_n) \in M \mid m_i = j\}$$

e

$$B_{ij} = \left\{ b_1 x_1 + \dots + b_{n-1} x_{n-1} \in Free(x_1, \dots, x_{n-1}) \mid b_1 x_1 + \dots + b_{i-1} x_{i-1} + j x_i + b_{i+1} x_{i+1} + \dots + b_{n-1} x_n \in M_{ij} \right\}$$

Observe que $Minima_{\leq_F}(M) = M$, e por esta razão, $Minima_{\leq_F}(M_{ij}) = M_{ij}$ além disso também $Minima_{\leq_F}(B_{ij}) = B_{ij}$. Por hipótese de indução, B_{ij} deve ser finito. Logo, M_{ij}

também é finito. Como há um número finito de conjuntos M_{ij} , o conjunto $\bigcup M_{ij}$ é novamente finito e não vazio. Portanto, é suficiente mostrar que $M \subseteq \bigcup M_{ij}$.

Considere $m_1x_1 + \dots + m_nx_n$ como um elemento de M . Existe um $i \in 1, \dots, n$ tal que $m_i \leq a_i$ (se este não fosse o caso, $a_1x_1 + \dots + a_nx_n < m_1x_1 + \dots + m_nx_n$, o que seria impossível, uma vez que $m_1x_1 + \dots + m_nx_n$ é um elemento mínimo de N). Portanto, $m_1x_1 + \dots + m_nx_n \in M_{im_i}$. $\square$

Proposição 2.6. *Seja X um conjunto não vazio com elementos finitos. Seja σ uma congruência cancelativa em $\text{Free}(X)$. Então o conjunto $\text{Irr}(\sigma)$ é finito.*

Demonstração. Se provarmos que

$$\text{Irr}(\sigma) \subseteq \text{Minimais}_{\leq_F}(\sigma \setminus \{(0, 0)\}),$$

então, usando o lema de Dickson, o conjunto $\text{Irr}(\sigma)$ deve ser finito. Seja (a, b) um elemento em $\text{Irr}(\sigma)$. Suponha que (a, b) não seja um elemento mínimo de $\sigma \setminus \{(0, 0)\}$. Portanto, existe $(a_1, b_1) \in \text{Minimais}_{\leq_F}(\sigma \setminus \{(0, 0)\})$ tais que $(a_1, b_1) < (a, b)$. Portanto, $(a, b) = (a_1, b_1) + (a_2, b_2)$ com $(a_2, b_2) = (a - a_1, b - b_1) \in \text{Free}(X) \times \text{Free}(X)$. Como $(a, b) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2) \in \sigma$ e $(b_1, a_1) \in \sigma$, temos $(a_2 + (a_1 + b_1), b_2 + (a_1 + b_1)) \in \sigma$. Por hipótese, $\text{Free}(X)/\sigma$ é cancelativo e isso implica que a partir da igualdade

$$[a_2 + (a_1 + b_1)]_\sigma = [a_2]_\sigma + [a_1 + b_1]_\sigma = [b_2]_\sigma + [a_1 + b_1]_\sigma = [b_2 + (a_1 + b_1)]_\sigma$$

obtemos que $[a_2]_\sigma = [b_2]_\sigma$. Portanto $(a_2, b_2) \in \sigma$, o que significa que $(a, b) \notin \text{Irr}(\sigma)$. A contradição vem da suposição $(a, b) \notin \text{Minimais}_{\leq_F}(\sigma \setminus \{(0, 0)\})$. $\square$

Com isso obtemos a consequência desejada.

Corolário 2.1. *Todo monóide cancelativo gerado finitamente tem uma apresentação finita.*

Demonstração. Basta observar que, para um monoide cancelativo finitamente gerado M , podemos definir $\rho = \text{Irr}(\ker(\varphi))$, onde $\varphi : \text{Free}(X) \rightarrow M$ é o homomorfismo canônico de monoides. $\square$

2.1.2 Apresentações mínimas de um semigrupo numérico

Todo semigrupo numérico é um monóide que satisfaz a lei de cancelamento e é gerado finitamente e, portanto, tem uma apresentação finita. Caracterizamos nesta seção aquelas apresentações de semigrupos numéricos que são mínimas.

Definição 2.4. *Seja σ uma congruência em $\text{Free}(\{x_1, \dots, x_n\})$ e seja ρ um sistema de geradores de σ . Dizemos que ρ é uma **relação mínima** se a cardinalidade de ρ é a menor possível dentre as cardinalidades dos sistemas de geradores de σ .*

Definição 2.5. *Seja S um semigrupo numérico com o sistema de geradores minimal igual a $\{n_1, \dots, n_e\}$ e seja $X = \{x_1, \dots, x_e\}$ com $x_i \neq x_j$ para todo $i \neq j$. Dizemos que ρ é uma **apresentação mínima** se ρ for uma relação mínima da congruência do núcleo do homomorfismo $\varphi : \text{Free}(\{x_1, \dots, x_e\}) \rightarrow S$, $\varphi(a_1x_1 + \dots + a_ex_e) = a_1n_1 + \dots + a_en_e$.*

Lembre que o kernel do homomorfismo φ é definido por

$$\ker(\varphi) = \{(a, b) \in \text{Free}(\{x_1, \dots, x_e\}) \times \text{Free}(\{x_1, \dots, x_e\}) : \varphi(a) = \varphi(b) = n \in S\}$$

Onde $a = a_1x_1 + \dots + a_ex_e$ e $b = b_1x_1 + \dots + b_ex_e$. Como mencionamos antes, o kernel do homomorfismo φ é uma congruência em $\text{Free}(X)$.

Dado $n \in \mathbb{N}$ o conjunto de expressões de n em S é definido como

$$Z(n) = \varphi^{-1}(n) = \{a_1x_1 + \cdots + a_ex_e \in \text{Free}(X) : \varphi(a_1x_1 + \cdots + a_ex_e) = a_1n_1 + \cdots + a_en_e = n\}.$$

Para $a = a_1x_1 + \cdots + a_ex_e$, $b = b_1x_1 + \cdots + b_ex_e \in \text{Free}(\{x_1, \dots, x_e\})$. Defina o produto escalar de a e b como

$$a \cdot b = a_1b_1 + \cdots + a_eb_e.$$

Definimos a seguinte relação em $\text{Free}(\{x_1, \dots, x_e\})$. Para $a, b \in \text{Free}(\{x_1, \dots, x_e\})$, aRb se $a = b = 0$ ou existem $k_1, \dots, k_l \in Z(n)$ para algum $n \in S$ tal que $k_1 = a$, $k_l = b$ e $k_i \cdot k_{i+1} \neq 0$ para todo $i \in \{1, \dots, l-1\}$. Esta é uma relação binária de equivalência em $\text{Free}(\{x_1, \dots, x_e\})$. Para provar isso, a relação R deve ser reflexiva, simétrica e transitiva.

1. Reflexiva: É claro que se $a \in \text{Free}(\{x_1, \dots, x_e\})$ e $a = 0$ então aRa . Agora suponha que $a \in \text{Free}(\{x_1, \dots, x_e\})$ e $a \neq 0$. Logo temos que $a = \lambda_1x_1 + \cdots + \lambda_ex_e$ então $\varphi(a) = \varphi(\lambda_1x_1 + \cdots + \lambda_ex_e) = \lambda_1n_1 + \cdots + \lambda_en_e = m \in S$, implica que $a \in Z(m) = \varphi^{-1}(m)$. Portanto tomado $k_i = a$ para todo $i \in \{1, \dots, l\}$ e $m \in S$ concluímos que aRa .
2. Simetria: Se $a = b = 0$ então é claro que aRb e bRa . Agora suponha que $a \neq b \neq 0$ e aRb . Então existem $k_1, \dots, k_l \in Z(n) = \varphi^{-1}(n)$ para algum $n \in S$ tal que $k_1 = a$, $k_l = b$ e $k_i \cdot k_{i+1} \neq 0$ para todo $i \in \{1, \dots, l-1\}$. Seja $h_i = l - i + 1$ para $i \in \{1, \dots, l\}$ então $h_1 = l$, $h_2 = l-1$, $h_3 = l-2, \dots, h_l = 1$. Logo temos que $k_{h_1} = k_l, \dots, k_{h_l} = k_1 \in Z(n) = \varphi^{-1}(n)$ com $n \in S$ tal que $k_{h_1} = k_l = b$ e $k_{h_i} = k_1 = a$, além mais $k_{h_i} \cdot k_{h_{i+1}} = k_{l-i+1} \cdot k_{l-i+2} \neq 0$. Portanto bRa .
3. Transitiva: Se aRb e bRc tal que $a = b = c = 0$, se segue que aRc . Suponha que aRb e bRc tal que $a \neq b \neq c \neq 0$. Logo existem $k_1, \dots, k_l \in Z(n) = \varphi^{-1}(n)$ para algum $n \in S$ tal que $k_1 = a$, $k_l = b$ e $k_i \cdot k_{i+1} \neq 0$ para todo $i \in \{1, \dots, l-1\}$ e para o mesmo $n \in S$ também temos que existem $h_1, \dots, h_m \in Z(n) = \varphi^{-1}(n)$ tal que $h_1 = b$, $h_m = c$ e $h_i \cdot h_{i+1} \neq 0$ para todo $i \in \{1, \dots, m-1\}$. Note que as duas listas de elementos existem para o mesmo $n \in S$ porque φ é função e $\varphi(b) = \varphi(k_l) = \varphi(h_1) = n$ é único para b . Agora concatenadas as duas listas de elementos, podemos construir uma lista de elementos tal que $t_1 = k_1, \dots, t_l = k_l = h_1 = b, \dots, t_{l+m} = c$ com $t_1 = a$, $t_{l+m} = c$ e $t_i \cdot t_{i+1}$ para todo $i \in \{1, \dots, (l+m)-1\}$. Portanto aRc .

Os elementos de $\text{Free}(\{x_1, \dots, x_e\})/R$ são chamados de R -classes.

Introduziremos a noção de grafo associado. Nosso objetivo ao introduzir esses conceitos é utilizar a teoria dos grafos para caracterizar as apresentações mínimas de um semigrupo numérico em relação à cardinalidade de ρ . Um grafo G é formado por um par (V, E) , onde V é o conjunto dos vértices e E é o conjunto das arestas, sendo cada aresta um par não ordenado $\{u, v\}$, com $u, v \in V$ e $u \neq v$. Se $\{u, v\} \in E$, dizemos que $\overline{uv}$ é uma aresta de G .

Um caminho de comprimento m em um grafo é uma sequência de arestas $\overline{v_0v_1}, \overline{v_1v_2}, \dots, \overline{v_{m-1}v_m}$ conectando v_0 a v_m . Um grafo é conexo se qualquer par de vértices estiver ligado por um caminho. Sabe-se que um grafo conexo com n vértices possui pelo menos $n-1$ arestas. Uma árvore é um grafo conexo com n vértices e exatamente $n-1$ arestas. Um subgrafo de $G = (V, E)$ é um grafo $\tilde{G} = (\tilde{V}, \tilde{E})$, onde $\tilde{V} \subseteq V$ e $\tilde{E} \subseteq E$. Além disso, todo grafo conexo G contém um subgrafo que é uma árvore, chamado de árvore geradora de G .

Seja X um conjunto não vazio, seja $P = \{X_1, \dots, X_r\}$ uma partição de X e seja γ uma relação binária em X . O grafo associado a γ em relação à partição P é $G_\gamma = (V, E)$, onde $V = P$ e $\overline{X_iX_j} \in E$ com $i \neq j$ se existir $x \in X_i$ e $y \in X_j$ tal que $(x, y) \in \gamma \cup \gamma^{-1}$.

Sejam $n \in \mathbb{N}$ e sejam $X_1, \dots, X_r$ as R -classes contidas em $Z(n)$. Se β é uma relação binária em $\text{Free}(\{x_1, \dots, x_e\})$, denotamos por

$$\beta_n = \beta \cap (Z(n) \times Z(n))$$

e por G_{β_n} o grafo associado à partição $\{X_1, \dots, X_r\}$ de $Z(n)$. Como veremos a seguir, esses grafos são cruciais para a nossa caracterização das apresentações mínimas de um semigrupo numérico.

Lema 2.3. *Seja $n \in \mathbb{N}$. Se β é uma relação binária em $\text{Free}(\{x_1, \dots, x_e\})$ que gera σ , então G_{β_n} é conexo.*

Demonstração. Sejam $X_1, \dots, X_r$ as R -classes contidas em $Z(n)$. Sejam t e $s \in \{1, \dots, r\}$ com $t \neq s$. Mostraremos que existe um caminho conectando X_t e X_s . Sejam $k \in X_t$ e $h \in X_s$. Como $k, h \in Z(n)$, kRh . Como $\text{Cong}(\beta) = \sigma$, pela Proposição 2.4, existem $b_0, b_1, \dots, b_l \in \text{Free}(x_1, \dots, x_e)$, tais que $k = b_0, h = b_l$ e $(b_i, b_{i+1}) \in \beta^1$ para $i \in \{0, \dots, l-1\}$. Portanto, existem para todo $i \in \{0, \dots, l-1\}$, $z_i \in \text{Free}(\{x_1, \dots, x_e\})$ e $(x_i, y_i) \in \beta \cup \beta^{-1}$ tal que $(b_i, b_{i+1}) = (x_i + z_i, y_i + z_i)$. Se $z_i \neq 0$, então $b_i R b_{i+1}$. E se $z_i = 0$, então $\{b_i, b_{i+1}\} \subseteq \beta_n$. Portanto, os pares não ordenados $\{b_i, b_{i+1}\}$ tais que $(b_i, b_{i+1}) \notin R$ produzem o caminho em G_{β_n} que conecta X_t a X_s . $\square$

Proposição 2.7. *Seja β uma relação binária em $\text{Free}(\{x_1, \dots, x_e\})$ com $x_i \neq x_j$ para $i \neq j$. Então $\text{Cong}(\beta) = \sigma$ se e somente se G_{β_n} for conexo para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. A condição necessária é o lema anterior. Concentremo-nos, então, na suficiência. Note que para provar que $\text{Cong}(\beta) = \sigma$, basta mostrar que para todo $n \in \mathbb{N}$, se $k, \bar{k} \in Z(n)$, então $(k, \bar{k}) \in \text{Cong}(\beta)$. Vamos usar indução em n . Se $n = 0$, então $Z(0) = \{0x_1 + \dots + 0x_e = 0\}$ e, trivialmente, $(0, 0) \in \text{Cong}(\beta)$. Portanto, vamos supor como hipótese de indução que o resultado é válido para inteiros menores que n . Se $n \notin S$, então $Z(n)$ é vazio e o resultado é satisfeito pela trivialidade. Assim, podemos assumir que $n \in S$. Distinguímos dois casos.

1. Se $kR\bar{k}$, então existe $k_0, \dots, k_l \in Z(n)$ tal que $k = k_0, \bar{k} = k_l$ e para todo $i \in \{0, \dots, l-1\}$, $k_i \cdot k_{i+1} \neq 0$, ou equivalentemente, existe $t \in \{1, \dots, e\}$ tal que $x_t \leq k_i$ e $x_t \leq k_{i+1}$. Segue-se que $(k_i - x_t, k_{i+1} - x_t) \in Z(n - n_t)$. Pela hipótese de indução $(k_i - x_t, k_{i+1} - x_t) \in \text{Cong}(\beta)$. Como $\text{Cong}(\beta)$ é uma congruência, $(k_i, k_{i+1}) \in \text{Cong}(\beta)$ e por transitividade, isso leva a $(k, \bar{k}) \in \text{Cong}(\beta)$.
2. Se $(k, \bar{k}) \notin R$, então existem no máximo duas R -classes em $Z(n)$. Suponha que a sequência $X_1, \dots, X_r$ defina um caminho conectando X_1 e X_r , onde X_1 é a R -classe de k e X_r a de $\bar{k}$. Para cada $i \in \{1, \dots, r-1\}$, como $\overline{X_i X_{i+1}}$ é uma aresta de G_{β_n} , existe $\{a_i, b_i\} \subseteq \beta_n$ com $a_i \in X_i$ e $b_i \in X_{i+1}$. Portanto $(a_i, b_i) \in \text{Cong}(\beta)$ para todo i . Além disso, por 1), ambos (k, a_1) e $(b_{r-1}, \bar{k})$ pertencem a $\text{Cong}(\beta)$. Pela transitividade, concluímos que $(k, \bar{k}) \in \text{Cong}(\beta)$. $\square$

Como já sabemos quais são os menores subgrafos conexos de um grafo com os mesmos vértices, podemos encontrar uma caracterização para apresentações mínimas de um semigrupo numérico.

Corolário 2.2. *Seja S um semigrupo numérico. Um subconjunto β de σ é uma apresentação mínima de S se, e somente se, a cardinalidade de β_n for igual ao número de R -classes em $Z(n)$ menos um, e G_{β_n} for conexo para todo $n \in S$.*

Observação 2.1. Observe que, se β é uma apresentação mínima para S , então G_{β_n} é uma árvore geradora mínima de G_{σ_n} , para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para obter uma relação mínima para σ (equivalentemente, uma apresentação mínima para S), é suficiente focar naqueles $n \in S$ para os quais o número de R -classes em $Z(n)$ é maior ou igual a dois. Se $X_1, \dots, X_r$ são essas R -classes, construímos uma árvore T_n cujos vértices são $X_1, \dots, X_r$. Para cada aresta $\overline{X_i X_j}$ de T_n , tomemos $a_i \in X_i$ e $b_i \in X_j$. Vamos definir β_n como o conjunto de todos (a_i, b_i) construídos desta forma. Vamos definir $\beta_n = \emptyset$ se houver menos de duas R -classes em $Z(n)$. Então $\beta = \cup_{n \in S} \beta_n$ é uma relação mínima de σ .

Lembre-se que definimos uma relação mínima de σ como um sistema gerador com cardinalidade mínima. O resultado acima também implica que o conceito de sistema gerador mínimo de σ em relação à cardinalidade e à inclusão coincidem. Isso não vale para monóides em geral (monóides para os quais esses dois conceitos são iguais são estudados em [19]).

Corolário 2.3. O conceito de apresentação mínima em relação à cardinalidade e inclusão em um conjunto coincide para qualquer semigrupo numérico. Em particular, todas as apresentações mínimas têm a mesma cardinalidade.

Conhecemos até aqui o grafo associado a uma relação binária β em $Free(X)$ em relação a uma partição de $Free(X)$. Agora, introduziremos o conceito de grafo associado a n em S e exploraremos algumas relações entre esses grafos e os mencionados anteriormente. Nosso objetivo ao fazer isso é calcular representações mínimas de semigrupos numéricos de uma maneira mais simples do que pela definição. Embora não abordemos todos os detalhes, apresentaremos o suficiente para entender como funciona. Para mais informações, consulte [8].

Seja $S = \langle n_1, \dots, n_e \rangle$ um semigrupo numérico. Para cada $n \in S$, defina o grafo $G_n = (V_n, E_n)$ como

$$V_n = \{n_i \mid n - n_i \in S\}$$

e

$$E_n = \{\overline{n_i n_j} \mid n - (n_i + n_j) \in S, i \neq j\}.$$

Logo G_n é o grafo associado a n em S .

Uma componente conexa de um grafo G é um subgrafo conexo maximal de G . Se G for conexo, então ele possui apenas uma componente conexa. A seguir, descrevemos as componentes conexas do grafo associado a um elemento de um semigrupo numérico.

Seja n um elemento de S . Se $X_1, \dots, X_r$ são as R -classes de $Z(n)$, para todo $i \in \{1, \dots, r\}$, definimos

$$A_i = \{n_j \mid x_j \leq x \text{ Para algum } x \in X_i\}.$$

Esses conjuntos contêm o conjunto de vértices das diferentes componentes conexas de G_n . Para provar isso, devemos primeiro mostrar que $\{A_1, \dots, A_r\}$ é uma partição de V_n .

Lema 2.4. O conjunto $\{A_1, \dots, A_r\}$ é uma partição de V_n .

Demonstração. Se $n_j \in V_n$, então $n - n_j \in S$. Vamos pegar $a \in Z(n - n_j)$. Então $a + x_j \in Z(n)$ e portanto existe $i \in \{1, \dots, r\}$ tal que $a + x_j \in X_i$. Portanto, $n_j \in A_i$. Isso mostra que $V_n \subseteq A_1 \cup \dots \cup A_r$, e, consequentemente, $V_n = A_1 \cup \dots \cup A_r$.

Agora suponha que $n_k \in A_i \cap A_j$ com $i \neq j$. Então existem $x \in X_i$ e $y \in X_j$ tais que $x_k \leq x$ e $x_k \leq y$. Isto implica que $x \cdot y \neq 0$ e, consequentemente, xRy . Mas isso é impossível porque X_i e X_j são R -classes diferentes. Isso mostra que $\{A_1, \dots, A_r\}$ é uma partição de V_n . $\square$

Provamos agora que não há aresta em G_n que conecte um vértice em A_i com um vértice em A_j quando $i \neq j$.

Lema 2.5. Se $n_k \in A_i$ e $n_l \in A_j$ com $i \neq j$, então $\overline{n_k n_l} \notin E_n$.

Demonstração. Observe que, de acordo com o Lema anterior, k não pode ser igual a l . Suponha, pelo contrário, que $\overline{n_k n_l} \in E_n$. Então $n - (n_k + n_l) \in S$. Tomemos $a \in Z(n - (n_k + n_l))$. Então $a + x_k + x_l \in Z(n)$. De $n_k \in A_i$ e $n_l \in A_j$ deduzimos que existe $y \in X_i$ com $x_k \leq y$ e $z \in X_j$ com $x_l \leq z$. Isso nos leva a $y \cdot (a + x_k + x_l) \neq 0$ e $(a + x_k + x_l) \cdot z \neq 0$, o que implica que yRz , contradizendo que X_i e X_j são R -classes diferentes. $\square$

Por fim, enunciemos o lema que demonstra que quaisquer dois vértices no mesmo A_s estão conexos por um caminho em G_n . Para consultar sua demonstração, veja [8, p. 114].

Lema 2.6. Se $n_k, n_l \in A_s$, com $l \neq k$, então existe um caminho em G_n com vértices em A_s que une n_k com n_l .

Com toda esta informação é fácil perceber que os conjuntos de vértices dos diferentes componentes conexos de G_n são $A_1, \dots, A_r$. Portanto, o número de componentes conexos de G_n é igual ao número de R -classes em $Z(n)$.

Teorema 2.1. Seja S um semigrupo numérico e seja n um elemento diferente de zero de S . O número de componentes conexos de G_n é igual ao número de R -classes em $Z(n)$.

Demonstração. Sejam $X_1, \dots, X_r$ as diferentes R -classes em $Z(n)$. Para cada $i \in \{1, \dots, r\}$, vamos definir o subgrafo $G_n^i = (V_n^i, E_n^i)$ de G_n como segue. Vamos definir $V_n^i = A_i$ e $E_n^i = \{\overline{n_i n_j} \in E_n \mid n_i, n_j \in A_i\}$. Dos Lemas 2.4, 2.5 e 2.6 deduzimos que estes são as componentes conexas de G . $\square$

Observação 2.2. A partir destes resultados deduzimos que para obter uma (na verdade, qualquer) apresentação mínima de S , só precisamos encontrar aqueles $n \in S$ para os quais G_n não é conexo. Seja n tal que G_n não seja conexo e sejam $G_n^1, \dots, G_n^r$ seus componentes conexos. Escolhamos agora para cada $i \in \{1, \dots, r\}$ um vértice $n_{k_i} \in V_n^i$ e um elemento $\alpha_i \in Z(n)$ tais que $x_{k_i} \leq \alpha_i$. Então $[\alpha_1]_R, \dots, [\alpha_r]_R$ são as diferentes R -classes de $Z(n)$. Se definirmos $\rho_n = \{(\alpha_2, \alpha_1), \dots, (\alpha_r, \alpha_1)\}$, então G_{ρ_n} é uma árvore. Portanto, pelo Corolário 2.2, ρ é uma apresentação mínima de S .

Disto deduzimos que se quisermos calcular uma apresentação mínima utilizando esta ideia, devemos encontrar os elementos de um semigrupo numérico cujo grafo associado não é conexo. A propriedade a seguir torna essa pesquisa possível.

Proposição 2.8. Se G_n não é conexo, então $n = w + n_j$, com $w \in Ap(S, n_1) \setminus \{0\}$ e $j \in \{2, \dots, e\}$.

Demonstração. Se $n - n_1 \notin S$, então $n = w \in Ap(S, n_1) \setminus \{0\}$. Como G_n não está conexo, existem $n_i, n_j \in V_n$ com $i \neq j \geq 2$ tais que $\overline{n_i n_j} \notin E_n$. Isso implica que $n = (n - n_j) + n_j$, e claramente $n - n_j \in Ap(S, n_1) \setminus \{0\}$. ($n \neq n_j$ porque $n - n_i \in S$ e $\{n_1, \dots, n_e\}$ é um sistema gerador mínimo de S).

Agora suponha que $n - n_1 \in S$. Como G_n não está conexo, existe $n_i \in V_n$ com $i > 1$, tal que $n - (n_1 + n_i) \notin S$ ($\overline{n_1 n_i} \notin E_n$). Como $n - n_i \in S$ e $n - n_i - n_1 \notin S$, temos que $n - n_i \in Ap(S, n_1) \setminus \{0\}$ (novamente $n - n_i \neq 0$ porque $n - n_1 \in S$). Podemos escrever $n = (n - n_i) + n_i$. $\square$

Observação 2.3. Note que esta proposição fornece um conjunto finito que contém os elementos $n \in S$ tais que G_n não é conexo. Se aplicarmos a este conjunto o procedimento descrito na Observação 2.2, obtemos um método algorítmico para calcular uma apresentação mínima de um semigrupo numérico.

Exemplo 2.2. [8, p. 116]. Agora suponha que S seja minimamente gerado por $\{n_1, n_2, n_3\}$. Para cada $r \in \{1, 2, 3\}$, defina

$$c_r = \min\{k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \mid kn_r \in \langle n_s, n_t \rangle, \{r, s, t\} = \{1, 2, 3\}\}.$$

Para $n \in \{c_1n_1, c_2n_2, c_3n_3\}$, o grafo G_n não é conexo, e estes são os únicos elementos de S que satisfazem esta condição. Distinguímos três casos.

1. Se $c_1n_1 = c_2n_2 = c_3n_3$, então

$$\{(c_1x_1, c_2x_2), (c_1x_1, c_3x_3)\}$$

é uma apresentação mínima para S .

2. Agora suponha que $c_1n_1 \neq c_2n_2 = c_3n_3$ (omitimos os outros casos semelhantes). Se $c_1n_1 = \lambda n_2 + \mu n_3$ com $\lambda, \mu \in \mathbb{N}$, então

$$\{(c_1x_1, \lambda x_2 + \mu x_3), (c_2x_2, c_3x_3)\}$$

é uma apresentação mínima para S .

3. Se a cardinalidade de $\{c_1n_1, c_2n_2, c_3n_3\}$ é três, então suponha que

$$c_1n_1 = r_{12}n_2 + r_{13}n_3,$$

$$c_2n_2 = r_{21}n_1 + r_{23}n_3,$$

$$c_3n_3 = r_{31}n_1 + r_{32}n_2,$$

para alguns inteiros não negativos r_{ij} . Então

$$\{(c_1x_1, r_{12}x_2 + r_{13}x_3), (c_2x_2, r_{21}x_1 + r_{23}x_3), (c_3x_3, r_{31}x_1 + r_{32}x_2)\}$$

é uma apresentação mínima de S .

Observe que $\langle 6, 10, 15 \rangle$, $\langle 4, 6, 7 \rangle$ e $\langle 5, 6, 7 \rangle$ são exemplos de 1, 2 e 3, respectivamente.

2.2 Semigrupos numéricos e as três propriedades

Nosso objetivo nesta seção é estudar a relação entre três conceitos (propriedades) de semigrupos numéricos, os quais são necessários e nos permitirão ter as ferramentas para obter a fórmula do número de Frobenius de certos semigrupos numéricos que as satisfaçam.

Os três conceitos que apresentaremos são: semigrupo numérico simétrico, semigrupo numérico de interseção completa e semigrupo numérico livre. No entanto, é importante esclarecer que não abordaremos todas as suas propriedades, mas nos concentraremos apenas nas que consideramos necessárias e pertinentes para nosso objetivo. Para um estudo detalhado dessas propriedades e suas consequências, pode-se consultar [8].

Começaremos com o conceito de interseção completa. Este conceito é definido para anéis de coordenadas de uma variedade, mas tem uma tradução mais apropriada para nosso contexto, como monoides gerados finitamente que possuem o menor número possível de relações em suas apresentações mínimas.

Em [8, p. 129] obtém-se um limite inferior para a cardinalidade de uma apresentação de um semigrupo numérico, através do seguinte teorema que enunciamos sem demonstração.

Teorema 2.2. *Seja S um semigrupo numérico. Então, a cardinalidade de uma apresentação mínima para S é maior ou igual a $e(S) - 1$.*

Com o objetivo de obter o menor número possível de relações nas suas apresentações mínimas e tendo em conta o teorema anterior, é possível inferir que um semigrupo numérico é uma **interseção completa** se a cardinalidade de qualquer uma de suas apresentações mínimas for igual à sua dimensão de imersão menos um.

Exemplo 2.3. *Observe que $\mathbb{N}$ é uma interseção completa. Sua dimensão de imersão menos um é zero, e esta é precisamente a cardinalidade de qualquer apresentação mínima para $\mathbb{N}$.*

Embora não forneçamos os detalhes do exemplo a seguir, eles são obtidos a partir dos resultados da seção sobre apresentações de semigrupos numéricos e podem ser consultados em [8, p. 116]

Exemplo 2.4. *Se n_1 e n_2 são inteiros maiores que um, tal que $\text{mdc}\{n_1, n_2\} = 1$, então uma apresentação mínima para $\langle n_1, n_2 \rangle$ é $\{(n_2x_1, n_1x_2)\}$. Portanto, como $e(\langle n_1, n_2 \rangle) = 2$ então $\langle n_1, n_2 \rangle$ é uma interseção completa.*

2.2.1 Colagem de semigrupos numéricos

O conceito de colagem de semigrupos numéricos foi introduzido na tese de doutorado de Rosales ([15]) com o objetivo de demonstrar que um semigrupo numérico é uma interseção completa se e somente se for a colagem de dois semigrupos numéricos de interseção completa. Por essa razão, a seguir, introduziremos as ideias de colagem de semigrupos numéricos.

A ideia de colagem é a seguinte. Um conjunto de números inteiros positivos A , que geralmente é tomado como o conjunto de geradores de um monóide, é a colagem de A_1 e A_2 se $\{A_1, A_2\}$ é uma partição de A e o monóide gerado por A admite uma apresentação na qual alguns relacionamentos envolvem apenas geradores em A_1 , outros relacionamentos envolvem apenas geradores em A_2 e há apenas um elemento nesta apresentação relacionando elementos de A_1 com elementos de A_2 . Para formalizar essa definição, precisamos lembrar e introduzir alguma notação.

Seja $A = \{m_1, \dots, m_r\}$ um subconjunto de inteiros positivos. Seja $X = \{x_1, \dots, x_r\}$. Seja $\varphi : X \rightarrow \mathbb{N}$ o homomorfismo de monoides

$$\varphi(a_1x_1 + \dots + a_rx_r) = a_1m_1 + \dots + a_rm_r.$$

Seja σ a congruência do núcleo de φ , ou seja, $a\sigma b$ se e somente se $\varphi(a) = \varphi(b)$. Para $B \subseteq A$, seja $X_B = \{x_i \mid m_i \in B\}$. Então $\text{Free}(X_B) \subseteq \text{Free}(X)$. Definimos φ_B e σ_B adequadamente. Observe que $\sigma_B \subseteq \sigma$.

Com esta notação agora é fácil expressar o conceito de colagem. Seja $\{A_1, A_2\}$ uma partição de A . Dizemos que A é o colagem de A_1 e A_2 se existe um sistema de geradores ρ de σ tal que $\rho = \rho_1 \cup \rho_2 \cup \{(a, b)\}$ com $\rho_1 \subseteq \sigma_{A_1}$, $\rho_2 \subseteq \sigma_{A_2}$, $0 \neq a \in \text{Free}(X_{A_1})$ e $0 \neq b \in \text{Free}(X_{A_2})$.

O conceito de colagem pode ser caracterizado de várias maneiras. Aqui, utilizamos uma apresentada em [8], pelo seguinte teorema. Essa abordagem nos permitirá introduzir a colagem de dois semigrupos numéricos, além de controlar os elementos notáveis e a apresentação da colagem a partir dos semigrupos originais.

Teorema 2.3. *Seja A um subconjunto de inteiros positivos. Seja $\{A_1, A_2\}$ uma partição de A . As afirmações a seguir são equivalentes.*

1. *A é a colagem de A_1 e A_2 .*
2. *Se $d_1 = \text{mdc}(A_1)$ e $d_2 = \text{mdc}(A_2)$, então $\text{mmc}\{d_1, d_2\} \in \langle A_1 \rangle \cap \langle A_2 \rangle$, onde mmc significa mínimo múltiplo comum.*

3. Existe $d \in \langle A_1 \rangle \cap \langle A_2 \rangle$, $d \neq 0$, tal que a correspondência

$$f : Ap(A_1, d) \times Ap(A_2, d) \longrightarrow Ap(A, d), \quad f(s_1, s_2) = s_1 + s_2$$

É uma função bijetiva

4. Existe $(a, b) \in \sigma$ com $0 \neq a \in Free(X_{A_1})$ e $0 \neq b \in Free(X_{A_2})$ tal que $\rho_1 \cup \rho_2 \cup \{(a, b)\}$ é um sistema de geradores σ , para todos os sistemas ρ_1 e ρ_2 de geradores σ_{A_1} e σ_{A_2} , respectivamente.

A demonstração do teorema anterior é bastante extensa e complexa, por isso não será apresentada aqui. Para estudá-la, pode-se consultar [8, p. 126].

Traduzimos o conceito de colagem para semigrupos numéricos e, dessa forma, podemos concluir que os semigrupos numéricos de interseção completa são sempre uma colagem de dois semigrupos numéricos de interseções completas.

Sejam S_1 e S_2 dois semigrupos numéricos gerados minimamente por $\{n_1, \dots, n_r\}$ e $\{n_{r+1}, \dots, n_e\}$, respectivamente. Sejam $\lambda \in S_1 \setminus \{n_1, \dots, n_r\}$ e $\mu \in S_2 \setminus \{n_{r+1}, \dots, n_e\}$ tais que $\text{mdc}(\lambda, \mu) = 1$. Dizemos que

$$S = \langle \mu n_1, \dots, \mu n_r, \lambda n_{r+1}, \dots, \lambda n_e \rangle$$

É a colagem de S_1 e S_2 .

Exemplo 2.5. Vamos considerar os seguintes semigrupos numéricos. Seja $S_1 = \langle 3, 5 \rangle = \{0, 3, 5, 6, 8, 9, \rightarrow\}$, $\lambda = 6$ e $S_2 = \langle 4, 7 \rangle = \{0, 4, 7, 8, 11, 12, 14, 15, 16, 18, 19, 20, \rightarrow\}$, $\mu = 11$. É claro que $\text{mdc}(6, 11) = 1$ e $6 \in S_1 \setminus \{3, 5\}$, $11 \in S_2 \setminus \{4, 7\}$. Portanto $S = \langle 33, 55, 24, 42 \rangle$ é o semigrupo numérico colagem de S_1 e S_2 .

Agora vemos a conexão entre este conceito e o de colagem de subconjuntos de inteiros não negativos introduzido anteriormente.

Lema 2.7. Sob a hipótese anterior para os semigrupos numéricos S_1 e S_2 então as seguintes afirmações são equivalentes

1. S é um semigrupo numérico com sistema de geradores mínimo $\{\mu n_1, \dots, \mu n_r, \lambda n_{r+1}, \dots, \lambda n_e\}$,
2. $\{\mu n_1, \dots, \mu n_r, \lambda n_{r+1}, \dots, \lambda n_e\}$ é o colagem de $\{\mu n_1, \dots, \mu n_r\}$ e $\{\lambda n_{r+1}, \dots, \lambda n_e\}$

Demonstração. .

1. É claro que $\text{mdc}\{\mu n_1, \dots, \mu n_r, \lambda n_{r+1}, \dots, \lambda n_e\} = \text{mdc}\{\mu, \lambda\} = 1$ e, portanto, S é um semigrupo numérico. Suponha que $\mu n_1 = a_2 \mu n_2 + \dots + a_r \mu n_r + a_{r+1} \lambda n_{r+1} + \dots + a_e \lambda n_e$. Então $a_{r+1} \lambda n_{r+1} + \dots + a_e \lambda n_e$ é um múltiplo de $\lambda \mu$. Portanto, $\mu n_1 = a_2 \mu n_2 + \dots + a_r \mu n_r + \lambda \mu k$ para algum inteiro não negativo k . Isso leva a $n_1 = a_2 n_2 + \dots + a_r n_r + \lambda k$. Mas isto é impossível porque $\lambda \in S_1$ e n_1 é um gerador mínimo de S_1 . Da mesma forma mostramos que o resto dos elementos em $\{\mu n_1, \dots, \mu n_r, \lambda n_{r+1}, \dots, \lambda n_e\}$ são geradores mínimos de S .

2. À vista do Teorema 2.3, basta demonstrar que

$$\lambda \mu \in \langle \mu n_1, \dots, \mu n_r \rangle \cap \langle \lambda n_{r+1}, \dots, \lambda n_e \rangle.$$

Isso fica facilmente claro pela escolha de λ e μ . □

Agora que estabelecemos a conexão entre esses dois conceitos, com a ajuda do Teorema 2.3, não é difícil demonstrar que uma colagem de interseções completas resulta em um semigrupo numérico de interseções completas.

Proposição 2.9. *A colagem de duas interseções completas é uma interseção completa.*

Demonstração. Sejam S_1 e S_2 semigrupos numéricos de interseção completa, e seja S uma colagem de S_1 e S_2 . Pelo Lema 2.7, sabemos que $e(S) = e(S_1) + e(S_2)$. Sejam ρ_1 e ρ_2 apresentações minimais para S_1 e S_2 , respectivamente. Então, $\#\rho_i = e(S_i) - 1$ para $i \in \{1, 2\}$. Utilizando o Lema 2.7 e o Teorema 2.3, obtemos que S admite uma apresentação da forma $\rho = \rho_1 \cup \rho_2 \cup (a, b)$.

Portanto, $\#\rho = \#\rho_1 + \#\rho_2 + 1 = e(S_1) - 1 + e(S_2) - 1 + 1 = e(S) - 1$. Agora, utilizando o Teorema 2.2 e o Corolário 2.3, deduzimos que S é uma interseção completa. $\square$

A proposição inversa também é verdadeira e está apresentada no seguinte teorema. Sua demonstração pode ser consultada em [8, p. 131].

Teorema 2.4. *Um semigrupo numérico distinto de $\mathbb{N}$ é uma interseção completa se, e somente se, for a colagem de dois semigrupos numéricos de interseção completa.*

Para finalizar, introduziremos os semigrupos numéricos simétricos. O objetivo é demonstrar que todo semigrupo numérico de interseção completa é simétrico. Para isso, é necessário utilizar os conceitos e os resultados sobre a colagem de semigrupos numéricos, pois essa propriedade é uma consequência imediata do fato de que a simetria é preservada sob colagem de semigrupos numéricos.

2.2.2 Semigrupos numéricos simétricos

Começaremos introduzindo os semigrupos numéricos irredutíveis, pois eles englobam tanto os semigrupos numéricos simétricos quanto os pseudo-simétricos. Um semigrupo numérico é irredutível se não puder ser expresso como a interseção de dois semigrupos numéricos que o contenham propriamente. Se tomarmos $S = \langle 5, 7, 8, 9, 11 \rangle$, por exemplo, temos que $S = \langle 5, 6, 7, 8, 9 \rangle \cap \langle 4, 5, 7 \rangle$, concluindo que S não é irredutível. Por outro lado, $T = \langle 4, 5, 7 \rangle$ é irredutível, e veremos como verificar essa propriedade.

Lema 2.8. *Seja S um semigrupo numérico diferente de $\mathbb{N}$. Então, $S \cup \{F(S)\}$ é um semigrupo numérico também.*

Demonstração. Como S é um semigrupo numérico e o complemento de $S \cup \{F(S)\}$ em relação a $\mathbb{N}$ é novamente finito, pois a diferença é de apenas um elemento, então basta mostrar que $F(S) + s \in S \cup \{F(S)\}$, para todo $s \in S \cup \{F(S)\}$. Observe que $F(S) \leq F(S) + s$, logo $F(S) = F(S) + s$, ou $F(S) + s \in S$, e em ambos os casos segue que $F(S) + s \in S \cup \{F(S)\}$. $\square$

Teorema 2.5. *Seja S um semigrupo numérico. As seguintes condições são equivalentes:*

1. S é irredutível
2. S é maximal no conjunto de todos os semigrupos numéricos com número de Frobenius $F(S)$.
3. S é maximal no conjunto de todos os semigrupos numéricos que não contêm $F(S)$.

Demonstração. 1) $\Rightarrow$ 2) Seja T um semigrupo numérico tal que $S \subseteq T$ e $F(T) = F(S)$. Então, $S = (S \cup \{F(S)\}) \cap T$. Daí, como S é irredutível, se segue que $T = S$.

2) $\Rightarrow$ 3) Seja T um semigrupo numérico tal que $S \subseteq T$ e $F(S) \notin T$. Então, temos que $F(T) = F(S)$, logo, por hipótese, $T = S$.

3) $\Rightarrow$ 1) Sejam S_1 e S_2 dois semigrupos numéricos que contêm S propriamente. Então, por hipótese, $F(S) \in S_1$ e $F(S) \in S_2$, ou seja, $S_1 \cap S_2 \neq S$. $\square$

Definição 2.6. *Seja S um semigrupo numérico irredutível. Dizemos que S é simétrico se $F(S)$ é ímpar. Se $F(S)$ é par, dizemos que S é pseudo-simétrico.*

Se S é um semigrupo numérico não irredutível, pelo Teorema 2.5, existe um semigrupo numérico T irredutível que contém S e $F(S) = F(T)$. No próximo resultado daremos um processo de construção de um semigrupo numérico irredutível.

Lema 2.9. *Seja S um semigrupo numérico e assumamos que existe*

$$h = \max\{x \in \mathbb{Z} \setminus S \mid F(S) - x \notin S \text{ e } x \neq F(S)/2\}.$$

Então, $S \cup \{h\}$ é um semigrupo numérico com número de Frobenius $F(S)$.

Demonstração. Claramente, $S \cup \{h\}$ possui complemento finito em $\mathbb{N}$ e $0 \in S \cup \{h\}$. Seja $H = \{x \in \mathbb{Z} \setminus S \mid F(S) - x \notin S \text{ e } x \neq F(S)/2\}$. Se $x \in H$, temos que $F(S) - x \in H$, caso contrário $F(S) - x = F(S)/2 \Rightarrow x = F(S)/2 \Rightarrow x \notin H$, ou $F(S) - (F(S) - x) \in S \Rightarrow x \in S \Rightarrow x \notin H$. Desse modo, segue que $h > F(S)/2$, já que se $h < F(S)/2$, então $F(S) - h > F(S) - F(S)/2 = F(S)/2 > h$, contrariando a maximalidade de h .

Seja $s \in S \setminus \{0\}$. Se $h + s \notin S$, pela maximalidade de h , então $F(S) - (h + s) = t \in S$, pois $h > F(S)/2$ e $s > 0$. Assim, $F(S) - h = t + s \in S$, contrariando a definição de h .

Se $2h \in S$, novamente pela maximalidade de h , temos que $F(S) - 2h = t \in S$. Daí, pelo visto anteriormente, $h + t \in S$, logo $h + t = F(S) - h \in S$, contrariando a definição de h . Portanto, $S \cup \{h\}$ é um semigrupo numérico. $\square$

Proposição 2.10. *Seja S um semigrupo numérico.*

1. *S é simétrico se, e somente se, $F(S)$ é ímpar e $x \in \mathbb{Z} \setminus S$ implica que $F(S) - x \in S$.*
2. *S é pseudo-simétrico se, e somente se, $F(S)$ é par e $x \in \mathbb{Z} \setminus S$ implica que $F(S) - x \in S$, ou $x = F(S)/2$.*

Demonstração. Vamos mostrar apenas a primeira afirmação, pois a segunda segue de forma análoga.

Seja S um semigrupo numérico simétrico. Então, se existe $x \in \mathbb{Z} \setminus S$ tal que $F(S) - x \notin S$, então pelo Lema 2.9 existe h o máximo dos elementos que respeitam essas condições. Assim, $S \cup \{h\}$ é um semigrupo numérico com número de Frobenius $F(S)$, contrariando a maximalidade de S dada no Teorema 2.5.

Por outro lado, pelo Teorema 2.5, é suficiente mostrar que S é maximal no conjunto de todos os semigrupos numéricos que não contêm $F(S)$. Tome T um semigrupo numérico com $S \subsetneq T$. Seja $x \in (T \setminus S) \subset (\mathbb{Z} \setminus S)$. Daí, por hipótese, $F(S) - x \in S$, logo $F(S) - x \in T$, o que implica que $F(S) = (F(S) - x) + x \in T$. $\square$

Corolário 2.4. *Seja S um semigrupo numérico.*

1. *S é simétrico se, e somente se, $g(S) = \frac{F(S)+1}{2}$.*
2. *S é pseudo-simétrico se, e somente se, $g(S) = \frac{F(S)+2}{2}$.*

Observação 2.4. *Sabemos, pelo Lema 1.5, que se S é um semigrupo numérico, então $g(S) \geq \frac{F(S)+1}{2}$. Como consequência desse corolário temos que semigrupos numéricos irredutíveis são aqueles com o menor gênero possível em termos de seu número de Frobenius.*

Exemplo 2.6. *Seja $S = \langle 6, 7, 8, 9, 10, 11 \rangle = \{0, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, \rightarrow\}$, logo $F(S) = 5$ e $G(S \setminus S) = \{1, 2, 3, 4, 5\} \Rightarrow g(S) = 5$. Portanto S não é simétrico nem pseudo-simétrico.*

Da Proposição 1.6 e do Corolário anterior, obtemos a seguinte consequência.

Corolário 2.5. *Todo semigrupo numérico de dimensão de imersão igual a 2 é simétrico.*

Exemplo 2.7. *Observe que $\langle 3, 5 \rangle = \{0, 3, 5, 6, 8, \rightarrow\}$ é um semigrupo numérico simétrico, $\langle 4, 5, 7 \rangle = \{0, 4, 5, 7, \rightarrow\}$ é pseudo-simétrico, e $\langle 5, 6, 7 \rangle = \langle 5, 6, 7, 8 \rangle \cap \langle 5, 6, 7, 9 \rangle$, logo $\langle 5, 6, 7 \rangle$ não é irreduzível.*

Lema 2.10. *Seja S um semigrupo numérico e $n \in S \setminus \{0\}$. Se $x, y \in S$ são tais que $x + y \in Ap(S, n)$, então $\{x, y\} \subseteq Ap(S, n)$.*

Demonstração. Isso é uma consequência direta da definição do conjunto de Apéry, já que, se $x - n \in S$, então $(x + y) - n = (x - n) + y \in S$, o que contraria o fato de que $x + y \in Ap(S, n)$. $\square$

Proposição 2.11. *Seja S um semigrupo numérico e $n \in S$. Se $Ap(S, n) = \{a_0 < a_1 < \dots < a_{n-1}\}$, então S é simétrico se, e somente se, $a_i + a_{n-1-i} = a_{n-1}$, para todo $i \in \{0, \dots, n-1\}$.*

Demonstração. Suponha que S é simétrico. Então, pela Proposição 1.6, sabemos que $F(S) = a_{n-1} - n$. Como $a_i - n \notin S$ e S é simétrico, temos que $F(S) - (a_i - n) = a_{n-1} - a_i \in S$. Assim, $[F(S) - (a_i - n)] + a_i = a_{n-1}$, e, pelo Lema anterior, segue que existe $j \in \{0, \dots, n-1\}$ tal que $a_{n-1} = a_i + a_j$. Como $a_0 < a_1 < \dots < a_{n-1}$, j deve ser igual a $n-1-i$.

Por outro lado, pela hipótese temos que $\{a_{n-1}\} = \text{Maximais}_{\leq_S} Ap(S, n)$, logo, pela Proposição 1.9, $PF(S) = \{F(S)\}$, o que significa que $\{a_{n-1} - n\} = \text{Maximais}_{\leq_S} \mathbb{Z} \setminus S$. Em particular, se $x \in \mathbb{Z} \setminus S$, então $F(S) - x \in S$. Observe que se $F(S)/2 \in \mathbb{Z}$, então $F(S)/2 \in \mathbb{Z} \setminus S$, caso contrário, $F(S) = \frac{F(S)}{2} + \frac{F(S)}{2} \in S$, contrariando a definição de $F(S)$. No entanto, acabamos de mostrar que isso significaria que $F(S)/2 = F(S) - F(S)/2 \in S$, contradição. Portanto, $F(S)$ é ímpar, e pela Proposição 2.10 concluímos que S é simétrico. $\square$

Corolário 2.6. *Seja S um semigrupo numérico. As seguintes condições são equivalentes:*

1. S é simétrico
2. $PF(S) = \{F(S)\}$
3. $t(S) = 1$

Assim, à luz da Proposição 1.9 e do corolário anterior, podemos enunciar o seguinte corolário.

Corolário 2.7. *Sejam S um semigrupo numérico e $n \in S^*$. Então S é simétrico se, e somente se,*

$$\text{Maximais}_{\leq_S} Ap(S, n) = \{F(S) + n\}.$$

Exemplo 2.8. *Seja $S = \langle 3, 5 \rangle$. Então, $Ap(S, 3) = \{0, 5, 10\} \Rightarrow \text{Maximais}_{\leq_S} Ap(S, 3) = \{10\} = \{F(S) + n\} = \{7 + 3\}$, já que $F(S) = 7$.*

Para concluir esta seção e alcançar nosso objetivo enunciado ao final da anterior, apresentamos o seguinte resultado, cuja demonstração faz uso da Proposição 2.11.

Proposição 2.12. *A colagem de semigrupos numéricos simétricos é simétrico.*

Demonstração. Sejam S_1 e S_2 semigrupos numéricos com sistemas geradores mínimos $\{n_1, \dots, n_r\}$ e $\{n_{r+1}, \dots, n_e\}$, respectivamente. Sejam $\lambda \in S_1 \setminus \{n_1, \dots, n_r\}$ e $\mu \in S_2 \setminus \{n_{r+1}, \dots, n_e\}$ tais que $\text{mdc}(\lambda, \mu) = 1$. Definimos $S = \langle \mu n_1, \dots, \mu n_r, \lambda n_{r+1}, \dots, \lambda n_e \rangle$.

Pelo Lema 2.7, concluímos que $\{\mu n_1, \dots, \mu n_r, \lambda n_{r+1}, \dots, \lambda n_e\}$ é a colagem de $\{\mu n_1, \dots, \mu n_r\}$ e $\{\lambda n_{r+1}, \dots, \lambda n_e\}$. Pelo Teorema 2.3, deduzimos que

$$Ap(S, \lambda\mu) = \{s_1 + s_2 \mid s_1 \in Ap(A_1, \lambda\mu), s_2 \in Ap(A_2, \lambda\mu)\}.$$

Portanto

$$Ap(S, \lambda\mu) = \{\lambda w_1 + \mu w_2 \mid w_1 \in Ap(A_1, \lambda\mu), w_2 \in Ap(A_2, \lambda\mu)\}.$$

O resultado segue da Proposição 2.11. $\square$

Corolário 2.8. *Todo semigrupo numérico que é uma interseção completa é simétrico.*

2.2.3 Semigrupos numéricos livres

Apresentaremos agora uma importante família de semigrupos numéricos, conhecidos como semigrupos numéricos livres. Esses semigrupos numéricos não têm relação direta com os monóides livres. Nosso objetivo ao apresentá-los é poder utilizar posteriormente suas caracterizações para demonstrações relevantes.

Sua definição e caracterização dependem das seguintes constantes.

Seja S um semigrupo numérico gerado minimamente por $\{n_1, \dots, n_e\}$. Para todo $i \in \{2, \dots, e\}$, defina:

1. $d_i = \text{mdc}\{n_1, \dots, n_{i-1}\}$.
2. $\bar{c}_i = \min\{k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : kn_i \text{ é um múltiplo de } d_i\}$.
3. $c_i^* = \min\{k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : kn_i \in \langle n_1, \dots, n_{i-1} \rangle\}$.
4. $c_i = \min\{k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : kn_i \in \langle n_1, \dots, n_{i-1}, n_{i+1}, \dots, n_e \rangle\}$.

A seguir, apresentamos diversos exemplos de semigrupos numéricos nos quais tais constantes foram calculadas. Nosso objetivo é nos familiarizarmos com essas constantes, além de que, mais adiante, elas nos servirão para exemplificar aqueles que são semigrupos numéricos livres.

Exemplo 2.9. Seja $S = \langle 2, 3 \rangle = \{0, 2, 3, 4, 5, 6, \rightarrow\}$. Então $i \in \{2\}$, $e(S) = 2$ e para $n_1 = 2$, $n_2 = 3$ temos que $d_2 = \text{mdc}\{n_1 = 2\} = 2$, $\bar{c}_2 = \min\{k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : 3k \text{ é um múltiplo de } d_2 = 2\} \Rightarrow \bar{c}_2 = 2$. $c_2^* = \min\{k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : 3k \in \langle 2 \rangle\} \Rightarrow c_2^* = 2$. $c_2 = \min\{k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : 3k \in \langle 2 \rangle\} \Rightarrow c_2 = 2$. Logo para este caso, temos que $d_2 = \bar{c}_2 = c_2^* = c_2 = 2$.

Exemplo 2.10. Seja $S = \langle 3, 4 \rangle = \{0, 3, 4, 6, 7, 8, \rightarrow\}$. Então $G(S) = \{1, 2, 5\}$, $e(S) = 2$, $F(S) = 5$. Para $n_1 = 3$, $n_2 = 4$ temos que $i \in \{2\}$. $d_2 = \text{mdc}\{n_1 = 3\} = 3$, $\bar{c}_2 = 3$, $c_2^* = 3$ e $c_2 = 3$.

Exemplo 2.11. Seja $S = \langle 3, 5, 7 \rangle = \{0, 3, 5, 6, 7, 8, \rightarrow\}$. Então $G(S) = \{1, 2, 4\}$, $e(S) = 3$, $F(S) = 4$. Para $n_1 = 3$, $n_2 = 5$ e $n_3 = 7$ temos que $i \in \{2, 3\}$. $d_2 = \text{mdc}\{n_1 = 3\} = 3$, $\bar{c}_2 = 3$, $c_2^* = 3$ e $c_2 = 2$. $d_3 = \text{mdc}\{3, 5\} = 1$, $\bar{c}_3 = 1$, $c_3^* = 3$ e $c_3 = 3$.

Exemplo 2.12. Seja $S = \langle 5, 7, 9 \rangle = \{0, 5, 7, 9, 10, 12, 14, 15, 16, \rightarrow\}$. Então $e(S) = 3$, $F(S) = 13$. Para $n_1 = 5$, $n_2 = 7$ e $n_3 = 9$ temos que $i \in \{2, 3\}$. $d_2 = \text{mdc}\{n_1 = 5\} = 5$, $\bar{c}_2 = 5$, $c_2^* = 5$ e $c_2 = 2$. $d_3 = \text{mdc}\{5, 7\} = 1$, $\bar{c}_3 = 1$, $c_3^* = 3$ e $c_3 = 3$.

Agora estudamos como essas constantes estão relacionadas.

Lema 2.11. Sob a hipótese estabelecida no início desta seção, temos que.

1. $\bar{c}_i \leq c_i^*$ para todo $i \in \{2, \dots, e\}$.
2. $c_i \leq c_i^*$ para todo $i \in \{2, \dots, e\}$.
3. $\bar{c}_i = \frac{d_i}{d_{i+1}}$ para todo $i \in \{2, \dots, e\}$ (e $d_{e+1} = 1$).
4. $n_1 = \bar{c}_2 \cdots \bar{c}_e$.

Demonstração. 1) e 2) seguem diretamente da definição. Quanto a 3), note que $\bar{c}_i n_i = \text{mmc}\{n_i, d_i\}$. Já que $\text{mmc}\{n_i, d_i\} = \frac{n_i d_i}{\text{mdc}\{n_i, d_i\}}$ obtemos que $\bar{c}_i = \frac{d_i}{d_{i+1}}$. Finalmente 4) se segue diretamente de 3) e o fato de que $d_2 = n_1$ e $d_{e+1} = 1$. $\square$

As constantes $\bar{c}_i$ podem ser usadas para expressar qualquer inteiro como uma combinação linear de $n_1, \dots, n_e$.

Lema 2.12. *Sob a hipótese estabelecida no início desta seção, para $d_i, \bar{c}_i, c_i^*$, e c_i de $S = \langle n_1, \dots, n_e \rangle$. Todo inteiro z pode ser escrito unicamente como $z = \lambda_1 n_1 + \lambda_2 n_2 + \dots + \lambda_e n_e$, com $\lambda_1 \in \mathbb{Z}$ e $\lambda_i \in \{0, \dots, \bar{c}_i - 1\}$ para todo $i \in \{2, \dots, p\}$.*

Demonstração. Como $\text{mdc}\{n_1, \dots, n_e\} = 1$, existem inteiros $\mu_1, \dots, \mu_e$ tais que $z = \mu_1 n_1 + \dots + \mu_e n_e$. Usando o algoritmo de divisão, existem inteiros q e λ_e tais que $\mu_e = q\bar{c}_e + \lambda_e$ com $0 \leq \lambda_e < \bar{c}_e$. Portanto $z = \mu_1 n_1 + \dots + \mu_{e-1} n_{e-1} + q\bar{c}_e n_e + \lambda_e n_e$. Substituindo $\bar{c}_e n_e$ por sua expressão em termos de $n_1, \dots, n_{e-1}$ (usando a identidade de Bézout), obtemos $z = \gamma_1 n_1 + \dots + \gamma_{e-1} n_{e-1} + \lambda_e n_e$ com $\gamma_1, \dots, \gamma_{e-1}$ inteiros. Repetimos a operação com o coeficiente de n_{e-1} até o de n_2 , obtendo a expressão desejada.

Agora vamos mostrar que esta expressão é única. Suponha que $z = \lambda_1 n_1 + \dots + \lambda_e n_e = \mu_1 n_1 + \dots + \mu_e n_e$ com $\lambda_1, \dots, \lambda_e, \mu_1, \dots, \mu_e$ inteiros tais que $\lambda_i, \mu_i \in \{0, \dots, \bar{c}_i - 1\}$ para todo $i \in \{2, \dots, p\}$. Seja j o maior inteiro em $\{1, \dots, e\}$ tal que $\lambda_j \neq \mu_j$. Observe que j deve ser maior que um, pois $\lambda_1 n_1 = \mu_1 n_1$ força λ_1 a ser igual a μ_1 . Suponhamos sem perda de generalidade que $\lambda_j \geq \mu_j$. Então $(\lambda_j - \mu_j)n_j = (\mu_1 - \lambda_1)n_1 + \dots + (\mu_{j-1} - \lambda_{j-1})n_{j-1}$, que é um múltiplo de d_j . Como $0 \leq \lambda_j - \mu_j < \bar{c}_j$, da minimalidade de $\bar{c}_j$ deduzimos que $\lambda_j = \mu_j$, uma contradição. $\square$

Exemplo 2.13. *Do Exemplo 2.9 sabemos que para $S = \langle 2, 3 \rangle$ temos $d_2 = \bar{c}_2 = c_2^* = c_2 = 2$. Então pelo Lema anterior, $\lambda_1 \in \mathbb{Z}$ e $\lambda_i \in \{0, 1\}$ para todos $i \in \{2\}$. Portanto, para $z \in \mathbb{Z}$, concluímos que $z = 2\lambda_1 + 3\lambda_2$ onde $\lambda_2 = 0$ ou $\lambda_2 = 1$.*

Exemplo 2.14. *Do Exemplo 2.10 sabemos que para $S = \langle 3, 4 \rangle$ temos $d_2 = \bar{c}_2 = c_2^* = c_2 = 3$. Então temos que, $\lambda_1 \in \mathbb{Z}$ e $\lambda_i \in \{0, 1, 2\}$ para todo $i \in \{2\}$. Portanto, para $z \in \mathbb{Z}$, concluímos que $z = 3\lambda_1 + 4\lambda_2$.*

Exemplo 2.15. *Do Exemplo 2.12 sabemos que para $S = \langle 5, 7, 9 \rangle$ temos $d_2 = 5, \bar{c}_2 = 5, c_2^* = 5, c_2 = 2$, e para $d_3 = 1, \bar{c}_3 = 1, c_3^* = 3, c_3 = 2$. Então $\lambda_2 \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ e $\lambda_3 \in \{0\}$, se segue que para $z \in \mathbb{Z}$, $z = 5\lambda_1 + 7\lambda_2$ com $\lambda_1 \in \mathbb{Z}$.*

Os semigrupos que procuramos são aqueles para os quais as relações dadas no Lema 2.11 se tornam extremas.

Os dois teoremas a seguir nos permitirão definir e caracterizar os semigrupos numéricos livres. Além disso, também nos permitem estabelecer uma relação de importância crucial entre os semigrupos numéricos livres e os semigrupos numéricos de interseção completa.

Proposição 2.13. *De acordo com as suposições estabelecidas, os seguintes itens são equivalentes*

1. $n_1 = c_2^* \cdots c_e^*$.
2. $AP(S, n) = \{\lambda_2 n_2 + \dots + \lambda_e n_e \mid \lambda_i \in \{0, \dots, c_2^* - 1\} \text{ para todo } i \in \{2, \dots, e\}\}$.
3. $F(S) + n_1 = (c_2^* - 1)n_2 + \dots + (c_e^* - 1)n_e$
4. $\bar{c}_i = c_i^*$ para todo $i \in \{2, \dots, e\}$.
5. $c_i = \bar{c}_i$ para todo $i \in \{2, \dots, e\}$.
6. $c_i = \bar{c}_i = c_i^*$.

Demonstração. 1) implica 2). Usando o argumento do algoritmo de divisão usado no Lema 2.12 mas agora com c_i^* em vez de $\bar{c}_i$, obtemos que todo elemento w de $Ap(S, n_1)$ admite um expressão da forma $w = \lambda_2 n_2 + \dots + \lambda_e n_e$ com $\lambda_i \in \{0, \dots, c_i^* - 1\}$. Portanto

$$Ap(S, n_1) \subseteq \{\lambda_2 n_2 + \dots + \lambda_e n_e \mid \lambda_i \in \{0, \dots, c_i^* - 1\} \text{ para todo } i \in \{2, \dots, e\}\}.$$

A cardinalidade deste último conjunto é menor ou igual a $c_2^* \dots c_e^*$. Como pela hipótese $c_2^* \dots c_e^* = n_1$ e pelo Lema 1.3, $Ap(S, n_1) = n_1$, obtemos a igualdade desejada.

2) implica 3). Segue da Proposição 1.4, que afirma que $F(S) + n_1 = \max Ap(S, n_1)$.

3) implica 4). Argumentando como no Lema 2.12, podemos expressar $\bar{c}_i n_i$ como $\bar{c}_i n_i = \lambda_1 n_1 + \dots + \lambda_{i-1} n_{i-1}$ com $\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}$ inteiros tais que $0 \leq \lambda_j < \bar{c}_j$ para todo $j \in \{2, \dots, i-1\}$. Como $\bar{c}_i \leq c_i^*$, se mostrarmos que $\lambda_1 \in \mathbb{N}$, então $c_i^* = \bar{c}_i$. Suponhamos, pelo contrário, que $\lambda_1 < 0$. Então $\lambda_2 n_2 + \dots + \lambda_{i-1} n_{i-1} = \bar{c}_i n_i + (-\lambda_1) n_1$. Isso implica que $\lambda_2 n_2 + \dots + \lambda_{i-1} n_{i-1} \notin Ap(S, n_1)$ e, consequentemente, $(c_1^* - 1) n_2 + \dots + (c_e^* - 1) n_e \notin Ap(S, n_1)$. Isto, tendo em vista a Proposição 1.4, contradiz 3).

4) implica 5). Por definição, $c_e = c_e^*$. Portanto, $c_e = \bar{c}_e$. Suponha que $\bar{c}_{j+1} = c_{j+1}, \dots, \bar{c}_e = c_e$ e vamos mostrar que $\bar{c}_j = c_j$. Da definição de c_j^* , usando mais uma vez o procedimento do algoritmo de divisão, deduzimos que $c_j n_j$ pode ser expresso como $c_j n_j = a_1 n_1 + \dots + a_{j-1} n_{j-1} + a_{j+1} n_{j+1} + \dots + a_e n_e$ com $a_1, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, \dots, a_e \in \mathbb{N}$ e $a_{j+k} < c_{j+k}^*$ para todo $j+k \in \{j+1, \dots, e\}$. Como $\bar{c}_e = c_e^*$, temos que a_e deve ser zero, caso contrário $a_e n_e = -a_1 n_1 + \dots + (-a_{j-1}) n_{j-1} + c_j n_j + (-a_{j+1}) n_{j+1} + \dots + (-a_{e-1}) n_{e-1}$, que é um múltiplo de d_e e $a_e < \bar{c}_e$. Repetindo este argumento, obtemos que $a_{j+1} = \dots = a_e = 0$. Portanto $c_j = c_j^*$ e, consequentemente, $c_j = \bar{c}_j$.

5) implica 6). Vamos ver que $c_i = c_i^*$ para todo $i \in \{2, \dots, e\}$. Claramente $c_e = c_e^*$. Agora suponha que $c_{j+1} = c_{j+1}^*, \dots, c_e = c_e^*$ e prove que $c_j = c_j^*$. Neste contexto, $\bar{c}_{j+k} = c_{j+k} = c_{j+k}^*$ para todo $j+k \in \{j+1, \dots, e\}$. Portanto, podemos repetir os passos da implicação anterior.

6) implica 1). Esta é uma consequência direta do Lema 2.11. $\square$

Definição 2.7. Um semigrupo numérico S é livre se existe uma ordenação do seu conjunto de geradores mínimos $\{n_1, \dots, n_e\}$ que satisfaça qualquer uma das condições da última proposição.

Exemplo 2.16. Os Exemplos 2.9 e 2.10 são semigrupos numéricos livres. Basta notar que, tomando a mesma ordenação de seus geradores mínimos utilizada anteriormente, satisfaz-se o item 6 da proposição anterior. Já os Exemplos 2.11 e 2.12 não são semigrupos numéricos livres, pois nenhuma reordenação de seus elementos geradores satisfaz algum item da Proposição 2.13.

Dos Exemplos 2.9 e 2.10 também podemos deduzir o seguinte.

Exemplo 2.17. Seja $S = \langle n_1, n_2 \rangle$ com $\text{mdc}\{n_1, n_2\} = 1$. Então $i \in \{2\}$, $e(S) = 2$ e para n_1, n_2 temos que $d_2 = \text{mdc}\{n_1\} = n_1$, $\bar{c}_2 = \min\{k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : kn_2 \text{ é um múltiplo de } d_2 = n_1\} \Rightarrow \bar{c}_2 = n_1$, já que $\text{mdc}\{n_1, n_2\} = 1$. A mesma coisa acontece com as outras constantes. $c_2^* = \min\{k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : kn_2 \in \langle n_1 \rangle\} \Rightarrow c_2^* = n_1$. $c_2 = \min\{k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : kn_2 \in \langle n_1 \rangle\} \Rightarrow c_2 = n_1$. Logo para todo semigrupos numérico de dimensão de imersão 2, temos que $d_2 = \bar{c}_2 = c_2^* = c_2 = n_1$. Portanto todo semigrupo numérico de dimensão de imersão 2 é semigrupo numérico livre.

Conforme mencionado acima, semigrupos livres são interseções completas. Isso segue facilmente da seguinte propriedade.

Teorema 2.6. Seja S um semigrupo numérico diferente de $\mathbb{N}$. Então S é livre se, e somente se, S é o colagem de um semigrupo numérico livre com dimensão de imersão $e(S) - 1$ e $\mathbb{N}$.

Demonstração. Seja $\{n_1, \dots, n_e\}$ um sistema mínimo de geradores dispostos de forma que satisfaça as condições da Proposição 2.13. Mostramos que S é o colagem de $T = \langle \frac{n_1}{d_e}, \dots, \frac{n_{e-1}}{d_e} \rangle$ e $\mathbb{N} = \langle 1 \rangle$ (lembre-se que $d_e = \text{mdc}\{n_1, \dots, n_{e-1}\}$). Como $\text{mdc}\{n_e, d_e\} = 1$, $d_e = \overline{c_e}$, que por hipótese é igual a $c_e \geq 2$. Portanto

$$d_e n_e \in \langle n_1, \dots, n_{e-1} \rangle \setminus \{n_1, \dots, n_{e-1}\}.$$

Portanto $n_e \in T \setminus \{\frac{n_1}{d_e}, \dots, \frac{n_{e-1}}{d_e}\}$. Já que $\{n_1, \dots, n_e\} = \{d_e \frac{n_1}{d_e}, \dots, d_e \frac{n_{e-1}}{d_e}, n_e \cdot 1\}$, deduzimos que S é o colagem de T e $\mathbb{N}$. Agora provamos que T é livre. Vamos definir

$$\hat{c}_i^* = \min \left\{ k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \mid k \frac{n_i}{d_e} \in \left\langle \frac{n_1}{d_e}, \dots, \frac{n_{i-1}}{d_e} \right\rangle \right\}.$$

Para $i \in \{2, \dots, e-1\}$, claramente $\hat{c}_i^* = c_i^*$. Como $d_e = c_e^*$, $\hat{c}_e^* = d_e$. Como S é livre, sabemos que $n_1 = c_2^* \cdots c_e^*$, do qual $\frac{n_1}{d_e} = \hat{c}_2^* \cdots \hat{c}_{e-1}^*$. Isto mostra que T é livre tendo em vista a Proposição 2.13.

Por outro lado, Suponha que S é a colagem de T , minimamente gerada por $\{m_1, \dots, m_{e-1}\}$, e $\mathbb{N} = \langle 1 \rangle$. Então existe um sistema mínimo de geradores de S da forma $\{n_1, \dots, n_e\} = \{dm_1, \dots, dm_{e-1}, n_e \cdot 1\}$ para algum $d \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ e algum $n_e \in T \setminus \{m_1, \dots, m_{e-1}\}$. Além disso, $dn_e \in \langle dm_1, \dots, dm_{e-1} \rangle \cap \langle n_e \rangle$. Defina c_i^* e $\hat{c}_i^*$ como acima. Observe que qualquer elemento em $\langle n_1, \dots, n_{e-1} \rangle$ é um múltiplo de d e que $\text{mdc}\{d, n_e\} = 1$. Isso implica que $c_i^* = d$. Além disso, $c_i^* = \hat{c}_i^*$ para todo $i \in \{2, \dots, e-1\}$. Como T é livre, $m_1 = \hat{c}_2^* \cdots \hat{c}_{e-1}^*$. Portanto $dm_1 = c_2^* \cdots c_{e-1}^* c_e^*$. Isso mostra que S é livre porque satisfaz uma das condições da Proposição 2.13. $\square$

Usando indução e que $\mathbb{N}$ é uma intersecção completa, juntamente com o Teorema 2.4, a seguinte consequência desta caracterização é facilmente provada, que é o que queríamos.

Corolário 2.9. *Todo semigrupo numérico livre é uma intersecção completa.*

Capítulo 3

Semigrupos numéricos com dimensão de imersão três

Esta parte do trabalho busca desenvolver detalhadamente a demonstração que estabelece a fórmula algébrica para o número de Frobenius de um semigrupo numérico simétrico de dimensão de imersão 3, dependendo exclusivamente dos elementos de seu sistema gerador mínimo. Lembremos que, para semigrupos numéricos de dimensão de imersão dois, existe uma fórmula desse tipo, apresentada na Proposição 1.6. Essa fórmula, embora dependa exclusivamente dos geradores, não contradiz a definição do número de Frobenius. Dado que a definição do número de Frobenius estabelece que ele é o maior número natural que não pode ser expresso como uma combinação linear dos geradores com coeficientes inteiros positivos. Portanto, a fórmula que buscamos é semelhante à apresentada na Proposição 1.6.

Ao contrário do caso da dimensão de imersão dois, o caso da dimensão três não tem uma solução estritamente geral. É portanto, que aqui nos concentramos no caso de semigrupos numéricos simétricos de dimensão de imersão três, para os quais existe uma fórmula algébrica que podemos analisar. Para semigrupos numéricos pseudo-simétricos veja [8, p. 142]. O caso em geral não possui fórmula algébrica que dependa exclusivamente dos geradores minimais, mas se houver fórmulas analíticas veja [8].

Para alcançar nosso objetivo, é necessário relembrar a importância da Proposição 1.4 e da Proposição 1.5, que são ferramentas fundamentais para obter a fórmula no caso de dimensão de imersão 2. Além dos conceitos de semigrupos numéricos simétricos, semigrupos numéricos que são interseção completa e semigrupos numéricos livres. Pois com estas propriedades obtemos as condições necessárias para estabelecer esta fórmula e elas são essencialmente uma grande parte do nosso estudo.

3.1 Semigrupos numéricos com conjuntos Apéry de expressão única

Começaremos estudando semigrupos numéricos com um conjunto de Apéry de expressão única. Estas propriedades nos permitirão estabelecer as últimas conexões entre os conceitos anteriores de semigrupos numéricos simétricos, semigrupos numéricos de interseção completa e semigrupos numéricos livres. Estudando essas propriedades e suas relações entre si obteremos as condições necessárias para a fórmula desejada.

Seja S um semigrupo numérico minimamente gerado por $\{n_1 < \dots < n_e\}$, e seja $X = \{x_1, \dots, x_e\}$. Como de costume, seja $\varphi : \text{Free}(X) \rightarrow S$ a função definida por $\varphi(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_e x_e) = \lambda_1 n_1 + \dots + \lambda_e n_e$ com congruência de kernel σ . Lembre-se de que o conjunto de expressões para $n \in \mathbb{N}$ é definido como,

$$Z(n) = \varphi^{-1}(n) = \{\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_e x_e \in \text{Free}(X) : \varphi(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_e x_e) = \lambda_1 n_1 + \cdots + \lambda_e n_e = n\}.$$

Dizemos que $n \in S$ tem uma expressão única se o conjunto $Z(n)$ tem apenas um elemento.

Definição 3.1. Dizemos que S é um semigrupo numérico com um conjunto Apéry de expressão única se cada elemento em $\text{Ap}(S, n_1)$ for de expressão única.

Exemplo 3.1. Seja $S = \langle 2, 3 \rangle$. Então o conjunto $\text{Ap}(S, 2) = \{0, 3\}$ e para $X = \{x_1, x_2\}$ temos que $Z(0) = \{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in \text{Free}(X) : \varphi(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 2 + \lambda_2 3 = 0\} \Rightarrow Z(0) = \{0x_1 + 0x_2\}$, já que λ_1 e $\lambda_2 \in \mathbb{N}$. Da mesma forma temos que $Z(3) = \{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in \text{Free}(X) : \varphi(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 2 + \lambda_2 3 = 3\} \Rightarrow Z(3) = \{0x_1 + x_2\}$. Portanto S é um semigrupo numérico com conjunto Apéry de expressão única.

Vejamos que as apresentações mínimas para semigrupos com um conjunto Apéry de expressão única são relativamente fáceis de controlar. Seja

$$J(S) = \{\lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_e x_e \mid \lambda_2 n_2 + \cdots + \lambda_e n_e \notin \text{Ap}(S, n_1)\}.$$

Lembremos que pelo Lema de Dickson (Lema 2.2), o conjunto de elementos mínimos de $J(S) \subseteq \text{Free}(X)$ em relação à ordenação $\leq_F$ é finito. Suponha que $\{a_1, \dots, a_t\} = \text{Minimos}_{\leq_F}(J(S)) = \{a \in J(S) : a \leq_F b \text{ Para algum } b \in J(S)\}$ onde $a \leq_F b \iff b - a \in \text{Free}(X)$. Para todo $i \in \{1, \dots, t\}$, $a_i \in J(S) \Rightarrow a_i = \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_e x_e$, como $\varphi(a_i) \notin \text{Ap}(S, n_1)$, $\Rightarrow \varphi(a_i) - n_1 \in S \Rightarrow \varphi(a_i) - \varphi(x_1) \in S \Rightarrow \varphi(a_i - x_1) \in S \Rightarrow a_i - x_1 \in \text{Free}(X)$. Logo $\lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_e x_e - x_1 \in \text{Free}(X)$. Mais isto não é possível, porque $-n_1 + \lambda_2 n_2 + \cdots + \lambda_e n_e \notin S$. Portanto existe $b_i \in Z(\varphi(a_i))$ tal que $x_1 \leq_F b_i$.

Para $i \in \{1, \dots, t\}$, escrevemos

$$a_i = a_{i_2} x_2 + \cdots + a_{i_e} x_e, \quad b_i = b_{i_1} x_1 + \cdots + b_{i_e} x_e$$

(Note que $b_{i_1} \neq 0$).

Esses elementos podem ser usados para calcular uma apresentação mínima para S , se S tiver um conjunto Apéry de expressão única. Primeiro, vamos ver quais são as R -classes de a_i .

Lema 3.1. Sob as hipóteses de $Z(n)$ e $a_i \in \{a_1, \dots, a_t\} = \text{Minimos}_{\leq_F}(J(S))$, se S é um semigrupo numérico com um conjunto de Apéry de expressão única, então para todo $i \in \{1, \dots, t\}$, as R -classes de $Z(\varphi(a_i))$ contendo a_i tem apenas um elemento, ou seja, $[a_i]_R = \{a_i\}$.

Demonstração. Seja $n = \varphi(a_i)$. Suponha, pelo contrário, que exista $c \in Z(n)$, $c \neq a_i$, tal que $a_i \cdot c \neq 0$. Então existe $j \in \{1, \dots, e\}$ tal que $x_j \leq a_i$ e $x_j \leq c$. Como $x_1 \not\leq a_i$, isso implica que $j \geq 2$. Pela minimalidade de a_i , o elemento $a_i - x_j \notin J(S)$, ou seja, $\varphi(a_i - x_j) \in \text{Ap}(S, n_1)$. Mas então $\varphi(a_i - x_j)$ admite pelo menos duas expressões diferentes, digamos $a_i - x_j$ e $c - x_j$, contradizendo que S tem o conjunto de Apéry de expressão única. $\square$

Teorema 3.1. Seja S um semigrupo numérico com conjunto Apéry de expressão única. Seja $\{a_1, \dots, a_t\} = \text{Minimals}_{\leq_F} J(S)$ e seja $b_1, \dots, b_t$ tal que $x_1 \leq b_i$ e $\varphi(a_i) = \varphi(b_i)$ para todo $i \in \{1, \dots, t\}$. Então

$$\{(a_1, b_1), \dots, (a_t, b_t)\}$$

É uma apresentação mínima de S .

Demonstração. Seja $\rho = \{(a_1, b_1), \dots, (a_t, b_t)\}$. Para ver que ρ é uma apresentação mínima de S , vemos que ela pode ser obtida seguindo a construção dada na Observação 2.1. Por definição, $\rho \subset \sigma$ e, portanto, $\rho = \cup_{n \in S \setminus \{0\}} \rho \cap (Z(n) \times Z(n))$. Do lema anterior, deduzimos que a_i e b_i estão em R -classes diferentes de $Z(\varphi(a_i))$. Portanto, se $n \in S$ é tal que $Z(n)$ tem uma R -classe única, então $\rho \cap (Z(n) \times Z(n))$ é vazio.

Suponha que n seja um elemento em S tal que as R -classes de $Z(n)$ sejam $X_1, \dots, X_r$, com $r \geq 2$. Como S possui um conjunto de Apéry com expressão única e $r \geq 2$, temos que $n \notin Ap(S, n_1)$. Portanto, existe pelo menos um elemento $b \in Z(n)$ tal que $x_1 \leq b$.

Suponha sem perda de generalidade que X_1 contém todos os elementos de $Z(n)$ que são maiores que x_1 (em relação a $\leq_F$). Para concluir a prova basta mostrar que se $a \in X_i$, com $i \geq 2$, então $a \in \{a_1, \dots, a_t\}$. Como $a \notin Ap(S, n_1)$, $a = \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_e x_e$ para alguns $\lambda_2, \dots, \lambda_e \in \mathbb{N}$. Já sabemos que $n \notin Ap(S, n_1)$, e consequentemente $a \in J(S)$. Além disso, seja $j \in \{2, \dots, e\}$ tal que $\lambda_j \neq 0$. Se $n - n_j = \lambda_2 n_2 + \dots + (\lambda_j - 1)n_j + \dots + \lambda_e n_e \notin Ap(S, n_1)$, então $n - (n_j + n_1) \in S$, o que contradiz o Lema 2.5. Portanto, $\lambda_2 n_2 + \dots + (\lambda_j - 1)n_j + \dots + \lambda_e n_e \in Ap(S, n_1)$, o que significa que $\lambda_2 x_2 + \dots + (\lambda_j - 1)x_j + \dots + \lambda_e x_e \notin J(S)$. Isso mostra que $a \in \text{Minimos}_{\leq_F} J(S)$. $\square$

Agora caracterizamos semigrupos numéricos com um conjunto de Apéry de expressão única que é simétrico. Esses semigrupos numéricos são livres.

Lembre-se de que um semigrupo numérico S é simétrico se, e somente se, o conjunto $\text{Maximais}_{\leq_S} Ap(S, m(S)) = \{F(S) + m(S)\}$ (ver Corolário 2.7). Diferentes expressões de um elemento w em $Ap(S, m(S))$ se traduzem em diferentes expressões de qualquer $\hat{w} \in Ap(S, m(S))$ tais que $w \leq_S \hat{w}$. Portanto, um semigrupo numérico tem uma expressão única definida por o conjunto de Apéry se e somente se os elementos em $\text{Maximais}_{\leq_S}(Ap(S, m(S)))$ possuem expressões únicas. Pelo Corolário 2.7, um semigrupo numérico simétrico tem um conjunto Apéry de expressão única se e somente se o elemento $F(S) + m(S)$ for de expressão única.

Lema 3.2. *Seja S um semigrupo numérico simétrico. Então, S possui um conjunto de Apéry de expressão única se, e somente se, $F(S) + m(S)$ tiver expressão única.*

Mostramos agora que as propriedades livres e simétricas coincidem para semigrupos numéricos com um conjunto de Apéry de expressão única.

Proposição 3.1. *Seja S um semigrupo numérico com conjunto Apéry de expressão única. Então S é simétrico se, e somente se, é livre.*

Demonstração. Já sabemos que se S é livre, então é uma interseção completa (Corolário 2.9) e, portanto, é simétrica (Corolário 2.8).

Agora suponha que S seja simétrico e que $\{n_1, \dots, n_e\}$ seja um sistema mínimo de geradores de S . Suponha que $n_1 = \min\{n_1, \dots, n_e\}$. Para cada $j \in \{1, \dots, e\}$, definimos $c_j = \min\{k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \mid kn_j \in \langle n_1, \dots, n_{j-1}, n_{j+1}, \dots, n_e \rangle\}$. Suponha que $c_j n_j = \lambda_{j_1} n_1 + \dots + \lambda_{j_e} n_e$ para alguns $\lambda_{j_1}, \dots, \lambda_{j_e} \in \mathbb{N}$ e $\lambda_{j_j} = 0$. Então, como S tem conjunto Apéry de expressão única, $c_j n_j \notin Ap(S, n_1)$, e portanto, podemos considerar λ_{j_1} diferente de zero. Além disso, da minimalidade de c_j , deduzimos que $(c_j - 1)n_j \in Ap(S, n_1)$. Como S é simétrico, sabemos que $\{F(S) + n_1\} = \text{Maximais}_{\leq_S} Ap(S, n_1)$ (Corolário 2.7). Portanto, para todo $j \in \{2, \dots, e\}$, existe $s_j \in Ap(S, n_1)$ tal que $F(S) + n_1 = (c_j - 1)n_j + s_j$. Como $F(S) + n_1$ tem uma expressão única e $c_j n_j \notin Ap(S, n_1)$, deduzimos que $F(S) + n_1 = (c_2 - 1)n_2 + \dots + (c_e - 1)n_e$. Observe que isso também prova que

$$Ap(S, n_1) = \{\lambda_2 n_2 + \dots + \lambda_e n_e \mid \lambda_i \in \{0, \dots, c_j - 1\} \text{ Para todo } j \in \{2, \dots, e\}\}.$$

Da igualdade

$$(c_2 - 1)n_2 + \cdots + (c_e - 1)n_e = (\lambda_{2_1} + \cdots + \lambda_{e_1})n_1 + \cdots \\ \cdots + (\lambda_{2_2} + \cdots + \lambda_{e_2} - 1)n_2 + \cdots + (\lambda_{2_e} + \cdots + \lambda_{e_e} - 1)n_e$$

Usando que $\lambda_{2_1} + \cdots + \lambda_{e_1} \neq 0$ e que $F(S) + n_1 \in Ap(S, n_1)$, segue-se que alguns dos coeficientes do lado direito não podem ser inteiros não negativos. Então existe $j \in \{2, \dots, e\}$ tal que $\lambda_{2_j} + \cdots + \lambda_{e_j} = 0$. Como $\lambda_{2_j}, \dots, \lambda_{e_j} \in \mathbb{N}$, temos que $\lambda_{2_j} = \cdots = \lambda_{e_j} = 0$. Suponhamos sem perda de generalidade que $j = e$. Iterando o processo obtemos que

$$\begin{aligned} c_2 n_2 &= \lambda_{2_1} n_1, \\ c_3 n_3 &= \lambda_{3_1} n_1 + \lambda_{3_2} n_2, \\ &\vdots \\ c_e n_e &= \lambda_{e_1} n_1 + \cdots + \lambda_{e_{e-1}} n_{e-1}. \end{aligned}$$

Isso mostra que $c_j = c_j^*$ para todo $j \in \{2, \dots, p\}$, e como $F(S) + n_1 = (c_2 - 1)n_2 + \cdots + (c_e - 1)n_e$, também temos que

$$Ap(S, n_1) = \{\lambda_2 n_2 + \cdots + \lambda_e n_e \mid \lambda_i \in \{0, \dots, c_i^* - 1\} \text{ Para todo } i \in \{2, \dots, e\}.$$

Isto mostra, usando a Proposição 2.13, que S é livre. $\square$

Para os semigrupos numéricos de dimensão de imersão três, obtém-se algo mais, pois agora demonstramos que as propriedades de interseção completa, simétrica e livre coincidem nesse contexto.

Corolário 3.1. *Seja S um semigrupo numérico com dimensão de imersão três. As propriedades a seguir são equivalentes.*

1. S é uma interseção completa.
2. S é simétrico.
3. S é livre.

Demonstração. Sabemos pelo Exemplo 2.2 e pelo Corolário 2.9 que para semigrupos numéricos de dimensão de inserção três, é equivalente a ser livre e a ser uma interseção completa. Sabemos também que toda interseção completa é simétrica (Corolário 2.8). Portanto, basta mostrar que se S for simétrico, então é livre. Seja S um semigrupo numérico minimamente simétrico gerado por $\{n_1 < n_2 < n_3\}$. Se S tiver um conjunto Apéry de expressão única, então pela proposição acima, terminamos. Portanto, suponha que existam $w \in Ap(S, n_1)$ e $\lambda_2, \lambda_3, \mu_2, \mu_3 \in \mathbb{N}$ tais que $w = \lambda_2 n_2 + \lambda_3 n_3 = \mu_2 n_2 + \mu_3 n_3$, com $(\lambda_2, \lambda_3) \neq (\mu_2, \mu_3)$. Suponhamos sem perda de generalidade que $\lambda_2 > \mu_2$. Então $(\lambda_2 - \mu_2)n_2 = (\mu_3 - \lambda_3)n_3 \in Ap(S, n_1)$. Seja $\gamma_1, \gamma_3 \in \mathbb{N}$ tal que $c_2 n_2 = \gamma_1 n_1 + \gamma_3 n_3$, e como sempre $c_2 = \min\{k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \mid kn_2 \in \langle n_1, n_3 \rangle\}$. Então, por definição, $c_2 \leq (\lambda_2 - \mu_2)$. Seja $k_2 = c_2 - (\lambda_2 - \mu_2)$. Temos que $c_2 n_2 = (\lambda_2 - \mu_2 + k_2)n_2 = k_2 n_2 + (\mu_3 - \lambda_3)n_3$. Da minimalidade de c_2 deduzimos que $k_2 = 0$. Isso mostra que $c_2 = \lambda_2 - \mu_2$, e da mesma forma podemos mostrar que $c_3 = \mu_3 - \lambda_3$. Portanto, $c_2 n_2 = c_3 n_3$. Do Exemplo 2.2 temos que S é livre. $\square$

Já sabemos que os semigrupos numéricos simétricos com dimensão de imersão três são livres e, portanto, devem ser um colagem de um semigrupo numérico com dimensão de imersão dois e $\mathbb{N}$. Assim, seremos capazes de descrever os geradores desses semigrupos, além de fornecer expressões explícitas para seus números de Frobenius e gêneros. Por outro lado, os semigrupos

numéricos pseudo-simétricos de dimensão de imersão três não podem ser uma colagem, como ocorre no caso simétrico. No entanto, em [8, p. 145], são parametrizados os geradores mínimos dessa família de semigrupos numéricos, e são encontradas expressões fechadas para o número de Frobenius e seu gênero.

Teorema 3.2. *Sejam m_1 e m_2 dois inteiros primos entre si, ambos maiores que um. Sejam a , b e c inteiros não negativos com $a \geq 2$, $b + c \geq 2$ e $\text{mdc}\{a, bm_1 + cm_2\} = 1$. Então, $S = \langle am_1, am_2, bm_1 + cm_2 \rangle$ é um semigrupo numérico simétrico com dimensão de imersão três. Além disso, todo semigrupo numérico simétrico com dimensão de imersão três tem essa forma.*

Demonstração. Como $\text{mdc}\{am_1, am_2, bm_1 + cm_2\} = \text{mdc}\{a, bm_1 + cm_2\} = 1$, temos que S é um semigrupo numérico.

Agora provamos que $\{am_1, am_2, bm_1 + cm_2\}$ é um sistema mínimo de geradores. Os elementos de $\langle am_1, am_2 \rangle$ são múltiplos de a e, consequentemente, $bm_1 + cm_2$ não podem pertencer a este monoide. Se $am_1 \in \langle am_2, bm_1 + cm_2 \rangle$, então $am_1 = \lambda am_2 + \mu(bm_1 + cm_2)$ para algum $\lambda, \mu \in \mathbb{N}$. Isso implica que a divide μ , já que $\text{mdc}\{a, bm_1 + cm_2\} = 1$. Portanto, $m_1 = \lambda m_2 + \frac{\mu}{a}(bm_1 + cm_2)$. Suponha $\mu \neq 0$. Se $b \neq 0$, então $b = 1$ e $c = 0$, contradizendo $b + c \geq 2$. Se $b = 0$, então $m_1 = (\lambda + \frac{\mu c}{a})m_2$, contradizendo que m_1 e m_2 são primos um do outro. Portanto, $\mu = 0$, e então $m_1 = \lambda m_2$, o que novamente contradiz que m_1 e m_2 são primos entre si. Isso prova que $am_1 \notin \langle am_2, bm_1 + cm_2 \rangle$. Da mesma forma pode-se mostrar que $am_2 \notin \langle am_1, bm_1 + cm_2 \rangle$.

Finalmente, observemos que S é o colagem de $\langle m_1, m_2 \rangle$ e $\mathbb{N}$. Portanto, é um colagem de dois semigrupos numéricos simétricos ($\langle m_1, m_2 \rangle$ é simétrico pelo Corolário 2.5, e $\mathbb{N}$ é trivialmente simétrico). A Proposição 2.12 garante que S é simétrico.

Agora suponha que S seja um semigrupo numérico simétrico de dimensão de imersão três. Pelo Corolário 3.1, sabemos que S é livre. Suponha que seja livre para o arranjo $\{n_1, n_2, n_3\}$ de seus geradores mínimos. Pela Proposição 2.13, temos que $\overline{c_3}n_3 \in \langle n_1, n_2 \rangle$, e pelo Lema 2.11, temos que $\overline{c_3} = \text{mdc}\{n_1, n_2\}$. Sejam b e c inteiros não negativos tais que $\overline{c_3}n_3 = bn_1 + cn_2$. Observe que $b + c \geq 2$ e $\overline{c_3} \geq 2$, pois caso contrário $\{n_1, n_2, n_3\}$ não seria um sistema mínimo de geradores. Definindo $a = \overline{c_3}$, $m_1 = \frac{n_1}{a}$ e $m_2 = \frac{n_2}{a}$, obtemos o resultado desejado. $\square$

Finalmente, tendo em vista todo o nosso trabalho até aqui, podemos obter a fórmula desejada para o número de Frobenius de semigrupos numéricos simétricos de dimensão de imersão três. Para isso suponha que a, b, c, m_1 e m_2 sejam como no Teorema 3.2. Da Proposição 1.7, segue-se que

$$F(\langle am_1, am_2, bm_1 + cm_2 \rangle) = aF(\langle m_1, m_2 \rangle) + (a - 1)(bm_1 + cm_2).$$

Portanto por a Proposição 1.6 temos que

$$F(\langle am_1, bm_2, bm_1 + cm_2 \rangle) = a(m_1m_2 - m_1 - m_2) + (a - 1)(bm_1 + cm_2).$$

Exemplo 3.2. *Seja $m_1 = 5$ e $m_2 = 7$. Logo é claro que $\text{mdc}\{5, 7\} = 1$ e eles são maiores que um. Agora seja $a = 2$, $b = 2$ e $c = 1$, então $\text{mdc}\{2, 17\} = 1$. Portanto $\langle 10, 14, 17 \rangle$ é um semigrupo numérico simétrico com dimensão de imersão três. Além disso, temos que*

$$F(\langle 10, 14, 17 \rangle) = 2F(\langle 5, 7 \rangle) + (2 - 1)(17) = 2(23) + (17) = 63.$$

Capítulo 4

Semigrupos numéricos perfeitos

Neste capítulo, estudamos os semigrupos numéricos perfeitos, que são semigrupos numéricos que possuem uma propriedade adicional imposta no conjunto de lacunas, ou seja, no conjunto $G(S) = \mathbb{N} \setminus S$. Para nosso estudo, seguimos o artigo [11] e desenvolvemos um pouco mais algumas ideias e demonstrações.

Começaremos examinando como é realizada a ordenação dos semigrupos numéricos perfeitos com uma multiplicidade fixa, bem como o algoritmo para obter os semigrupos numéricos perfeitos com multiplicidade fixa. Também exploramos o monoide perfeito, o monoide perfeito gerado por um subconjunto de $\mathbb{N}$ e o fecho perfeito de um semigrupo numérico. Por fim, analisamos algumas relações dos semigrupos numéricos perfeitos que possuem, adicionalmente, outras propriedades, como a dimensão de imersão máxima, a propriedade de Arf, os semigrupos numéricos saturados e os semigrupos numéricos com dimensão de imersão três.

Dizemos que uma lacuna h de S é isolada se $\{h - 1, h + 1\} \subseteq S$.

Definição 4.1. *Um semigrupo numérico S sem lacunas isoladas é chamado de semigrupo numérico perfeito.*

Exemplo 4.1. *Seja $S = \langle 3, 4, 5 \rangle = \{0, 3, 4, 5, 6, 7, \rightarrow\}$, então $G(S) = \{1, 2\}$. Portanto é fácil ver que se trata de um semigrupo numérico perfeito.*

Exemplo 4.2. *Seja $S = \langle 2, 3 \rangle = \{0, 2, 3, 4, 5, \rightarrow\}$, então $G(S) = \{1\}$. Como 0 e 2 estão em S , então S não é um semigrupo numérico perfeito.*

Do exemplo anterior podemos inferir que não existem semigrupos numéricos perfeitos com multiplicidade 2. Bom, se isso acontecesse teríamos necessariamente que 1 seria uma lacuna isolada.

De uma forma mais geral podemos notar que semigrupos numéricos ordinários com multiplicidade $m \geq 3$ são perfeitos.

Exemplo 4.3. *Seja $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 3$ e $S = \langle m, m+1, m+2, \dots, 2m-1 \rangle = \{0, m, m+1, m+2, \rightarrow\}$, então $G(S) = \{1, 2, \dots, m-1\}$. Logo é fácil perceber que toda lacuna de S não é isolada.*

Seja $m \in \mathbb{N}$, denotamos por $\mathcal{P}_m$ o conjunto de todos os semigrupos numéricos perfeitos com multiplicidade m ; isto é:

$$\mathcal{P}_m = \{S \mid S \text{ é um semigrupo numérico perfeito e } m(S) = m\}.$$

É claro que $\mathcal{P}_1 = \{\mathbb{N}\}$ e $\mathcal{P}_2 = \emptyset$.

Vejamos que se m for um número inteiro maior ou igual a 3, os elementos de $\mathcal{P}_m$ podem ser ordenados formando uma árvore com raiz do semigrupo numérico perfeito $\{0, m, \rightarrow\}$. Além disso, os filhos de um vértice arbitrário são caracterizados e isso fornece um procedimento algorítmico que permite que os elementos de $\mathcal{P}_m$ sejam construídos recursivamente.

4.0.1 A árvore de semigrupos numéricos perfeitos com multiplicidade fixa

Começaremos com o seguinte resultado que é facilmente deduzido da definição de semigrupos numéricos perfeitos, e também é amplamente utilizado no restante do trabalho.

Proposição 4.1. *Seja S um semigrupo numérico. As seguintes condições são equivalentes:*

1. S é um semigrupo numérico perfeito.
2. Se $\{s, s+2\} \subseteq S$, então $s+1 \in S$.

Demonstração. Suponha que S é um S.N.P. (Semigrupo numérico perfeito). Se $\{s, s+2\} \subseteq S$ e acontece que $s+1 \notin S$, então $s+1$ é uma lacuna isolada, o que é um absurdo.

Agora, suponha que S seja um S.N. (Semigrupo numérico) e que, para todo $\{s, s+2\} \subseteq S$, temos $s+1 \in S$. Além disso, suponha que S não seja um S.N.P. Então, existe pelo menos uma lacuna h tal que $\{h-1, h+1\} \subseteq S$, mas isso é novamente uma contradição, pois basta tomar $s = h-1$. $\square$

No restante do nosso trabalho assumiremos que m é um número inteiro maior ou igual a 3.

Lema 4.1. *Se $S \in \mathcal{P}_m$, então $\{F(S), F(S)-1\} \subseteq G(S)$.*

Demonstração. Como $m \geq 3$, então $F(S) \geq 2$. Além disso, $F(S) \in G(S)$ e $F(S)+1 \in S$. Portanto, aplicando a Proposição 4.1, temos $F(S)-1 \in G(S)$. $\square$

Lema 4.2. *Se $S \in \mathcal{P}_m$ e $S \neq \{0, m, \rightarrow\}$, então $S \cup \{F(S)\} \in \mathcal{P}_m$ ou $S \cup \{F(S), F(S)-1\} \in \mathcal{P}_m$.*

Demonstração. Como $S \neq \{0, m, \rightarrow\}$, então $F(S) > m$ e claramente $S \cup \{F(S)\}$ e $S \cup \{F(S), F(S)-1\}$ são semigrupos numéricos, em vista do Lema 2.8. Se $F(S)-2 \notin S$ então $S \cup \{F(S)\} \in \mathcal{P}_m$. Se $F(S)-2 \in S$ é claro que $S \cup \{F(S), F(S)-1\} \in \mathcal{P}_m$. $\square$

Se $S \in \mathcal{P}_m$, Denotamos

$$\theta(S) = \begin{cases} \{F(S)\} & \text{se } F(S)-2 \notin S \\ \{F(S), F(S)-1\} & \text{em outro caso} \end{cases}$$

Dado um elemento $S \in \mathcal{P}_m$, definimos recursivamente a seguinte sequência de elementos de $\mathcal{P}_m$:

- $S_0 = S$,
- $S_{n+1} = \begin{cases} S_n \cup \theta(S) & \text{se } S \neq \{0, m, \rightarrow\} \\ S_n & \text{em outro caso} \end{cases}$

Note que, pelos dois lemas anteriores, segue-se que a recorrência está bem definida. Além disso, também se deduz facilmente desses lemas a seguinte proposição.

Proposição 4.2. *Se $S \in \mathcal{P}_m$, então existe $S_0, S_1, \dots, S_l \in \mathcal{P}_m$ tal que $S = S_0 \subsetneq S_1 \subsetneq \dots \subsetneq S_l = \{0, m, \rightarrow\}$ e $\#(S_{i+1} \setminus S_i) \in \{1, 2\}$ para todo $i \in \{0, 1, \dots, l-1\}$.*

Demonstração. Para a demonstração, basta observar que cada semigrupo numérico perfeito é construído conforme a recorrência anterior. Além disso, l é finito, já que o número de Frobenius inicial do semigrupo numérico perfeito é finito, e, para cada semigrupo numérico perfeito subsequente na recorrência, seu número de Frobenius diminui até alcançar a multiplicidade mais um do semigrupo numérico inicial. $\square$

Vamos nos referir à cadeia da proposição anterior,

$$S = S_0 \subsetneq S_1 \subsetneq \cdots \subsetneq S_l = \{0, m, \rightarrow\},$$

como a cadeia associada a S ; o número l será denotado por $l(S)$ e é chamado de comprimento da cadeia associada a S .

Exemplo 4.4. *Seja $S = \{0, 9, 14, 18, 21, \rightarrow\} \in \mathcal{P}_9$. Então a cadeia associada a S é $S = S_0 \subsetneq S_1 = \{0, 9, 14, 18, \rightarrow\} \subsetneq S_2 = \{0, 9, 14, 17, \rightarrow\} \subsetneq S_3 = \{0, 9, 14, \rightarrow\} \subsetneq S_4 = \{0, 9, 13, \rightarrow\} \subsetneq S_5 = \{0, 9, 12, \rightarrow\} \subsetneq S_6 = \{0, 9, \rightarrow\}$. Portanto, $l(S) = 6$.*

Exemplo 4.5. *Seja $S = \{0, 5, 8, 9, 10, 13, \rightarrow\} \in \mathcal{P}_5$. Então a cadeia associada a S é $S = S_0 \subsetneq S_1 = \{0, 5, 8, 9, 10, 13, \rightarrow\} \subsetneq S_2 = \{0, 5, 8, 9, 10, 11, 12, 13, \rightarrow\} \subsetneq S_3 = \{0, 5, \rightarrow\}$. Portanto, $l(S) = 3$.*

Se S é um semigrupo numérico, então o conjunto de seus pequenos elementos é $N(S) = \{s \in S \mid s < F(S)\}$. Sua cardinalidade é denotada por $n(S)$. É fácil perceber que $g(S) + n(S) = F(S) + 1$.

Se $\{a, b\} \subseteq \mathbb{N}$, então $]a, b[= \{x \in \mathbb{N} \mid a < x < b\}$. Portanto temos que se $]a, b[\neq \emptyset$, então $\#(]a, b[) = b - a - 1$. Este resultado é conhecido pela aritmética dos números naturais.

Teorema 4.1. *Se $S \in \mathcal{P}_m$, então $l(S) = g(S) - n(S) - m(S) + 2$.*

Demonstração. Seja $S = \{s_0 = 0, s_1 = m(S), s_2, \dots, s_{n(S)} = F(S) + 1, \rightarrow\}$. Então fica claro que $G(S) =]0, s_1[\cup]s_1, s_2[\cup \cdots \cup]s_{n(S)-1}, s_{n(S)}[$. Portanto, os primeiros elos da cadeia associados a S têm a forma $S = S_0 \subsetneq S_1 \subsetneq \cdots \subsetneq S_k = S \cup \{s_{n(S)-1}, \rightarrow\} \subsetneq \cdots$ e $k = \#(]s_{n(S)-1}, s_{n(S)}[) - 1 = s_{n(S)} - s_{n(S)-1} - 2$. Os seguintes elos da cadeia associados a S teriam a forma $S = S_0 \subsetneq S_1 \subsetneq \cdots \subsetneq S_k \subsetneq S_{k+1} \subsetneq \cdots \subsetneq S_{k+r} = S \cup \{s_{n(S)-2}, \rightarrow\} \subsetneq \cdots$ onde $r = s_{n(S)-1} - s_{n(S)-2} - 2$. Aplicando esta ideia recursivamente obtemos que $l(S) = s_2 - s_1 - 2 + s_3 - s_2 - 2 + \cdots + s_{n(S)} - s_{n(S)-1} - 2 = s_{n(S)} - s_1 - 2(n(S) - 1) = F(S) + 1 - m(S) - 2(n(S) - 1)$. Agora aplicando que $g(S) + n(S) = F(S) + 1$, obtemos que $l(S) = g(S) - n(S) - m(S) + 2$. $\square$

Seja S um semigrupo numérico. Se $s \in N(S)$, então é claro que $F(S) - s \in G(S)$. Caso contrário teríamos $F(S) - s \in S$, o que é uma contradição, já que $F(S) - s + s = F(S) \in S$. Portanto $n(S) \geq g(S)$.

O resultado a seguir é uma consequência do Teorema anterior.

Corolário 4.1. *Se S é um semigrupo numérico perfeito tal que $S \neq \mathbb{N}$, então $n(S) \leq g(S) - m(S) + 2$.*

Mais uma vez, introduziremos as ideias de grafos, desta vez como uma ferramenta para ordenar, com base na continência de conjuntos, os semigrupos numéricos perfeitos. Recordemos que um grafo G é um par (V, E) , onde V é um conjunto não vazio de vértices e $E = \{(u, v) \in V \times V \mid u \neq v\}$ é o conjunto de arestas.

Um caminho que conecta os vértices v e u de G é uma sequência de arestas distintas da forma $(v_0, v_1), (v_1, v_2), \dots, (v_{n-1}, v_n)$, tal que $v_0 = v$ e $v_n = u$.

Para este caso, utilizaremos a seguinte caracterização de uma árvore: um grafo G é uma árvore se existir um vértice r (conhecido como a raiz de G) tal que, para qualquer outro vértice v de G , exista um caminho único que conecte v e r . Em particular, se (v, u) é uma aresta da árvore, dizemos que v é um filho de u .

Definimos o grafo $G(\mathcal{P}_m)$ da seguinte maneira: $\mathcal{P}_m$ é seu conjunto de vértices, e $(S, T) \in \mathcal{P}_m \times \mathcal{P}_m$ é uma aresta se $T = S \cup \theta(S)$.

O resultado a seguir é uma consequência direta da Proposição 4.2.

Proposição 4.3. $G(\mathcal{P}_m)$ é uma árvore com raiz $\{0, m, \rightarrow\}$.

Demonstração. Basta notar que, para qualquer semigrupo numérico perfeito S , com multiplicidade fixa m , existe um caminho único, dado pela proposição 4.2, que une S com o vértice $r = \{0, m, \rightarrow\}$. Portanto, $G(\mathcal{P}_m)$ é uma árvore com raiz $\{0, m, \rightarrow\}$. $\square$

Uma árvore pode ser construída recursivamente a partir de sua raiz e adicionando seus filhos a cada vértice já construído. Agora queremos caracterizar os filhos de um vértice arbitrário de $G(\mathcal{P}_m)$.

Lema 4.3. *Seja S um semigrupo numérico e $x \in S$. Então $S \setminus \{x\}$ é um semigrupo numérico se, e somente se, $x \in \text{msg}(S)$. (Lembre-se de que $\text{msg}(S)$ expressa o sistema gerador mínimo de um semigrupo numérico, veja 1.3)*

Demonstração. Seja S um semigrupo numérico e $x \in S$.

Suponha que $S \setminus \{x\}$ é um semigrupo numérico e que $x \notin \text{msg}(S)$. Então, como para todo $y \in \text{msg}(S)$ tem-se que $y \in S \setminus \{x\}$, existe $n \in \mathbb{N}$ e $y_i \in \text{msg}(S)$ para $0 < i \leq n$ tais que $x = \lambda_1 y_1 + \dots + \lambda_n y_n$. Isso implica que $x \in S \setminus \{x\}$, o que é uma contradição.

Por outro lado, suponha que $x \in \text{msg}(S)$. Note que, claramente, $S \setminus \{x\} \subseteq S$ e $x \neq 0$. Portanto, basta provar que o conjunto $S \setminus \{x\}$ é fechado para a soma.

Sejam $y_1, y_2 \in S \setminus \{x\}$. Então existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que $y_1 = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_{n_1} x_{n_1}$, onde x não aparece na combinação linear anterior, pois sua presença levaria a uma contradição. O mesmo ocorre para $y_2 = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_{n_2} x_{n_2}$. Assim, temos:

$$y_1 + y_2 = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_{n_1} x_{n_1} + \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_{n_2} x_{n_2} \in S \setminus \{x\}.$$

Portanto, $S \setminus \{x\}$ é um semigrupo numérico. $\square$

Lema 4.4. *Seja $T \in \mathcal{P}_m$. Temos que:*

1. *Se $F(T) + 1 \in \text{msg}(T) \setminus \{m\}$, então $T \setminus \{F(T) + 1\} \in \mathcal{P}_m$.*
2. *Se $\{x, x + 1\} \subseteq \text{msg}(T)$ e $x > F(T) + 1$, então $T \setminus \{x, x + 1\} \in \mathcal{P}_m$.*

Demonstração. Segue diretamente do Lema anterior aplicado a T e $F(T) + 1$. $\square$

Teorema 4.2. *Sejam S e T dois elementos de $\mathcal{P}_m$. Então S é filho de T na árvore $G(\mathcal{P}_m)$ se, e somente se, uma das seguintes condições for verdadeira:*

1. *$F(T) + 1 \in \text{msg}(T) \setminus \{m\}$ e $S = T \setminus \{F(T) + 1\}$.*
2. *$S = T \setminus \{x, x + 1\}$ com $\{x, x + 1\} \subseteq \text{msg}(T)$ e $x > F(T) + 1$.*

Demonstração. Sejam S e T dois elementos de $\mathcal{P}_m$.

Suponha que S é filho de T , então $T = S \cup \theta(S)$. Distinguiremos dois casos:

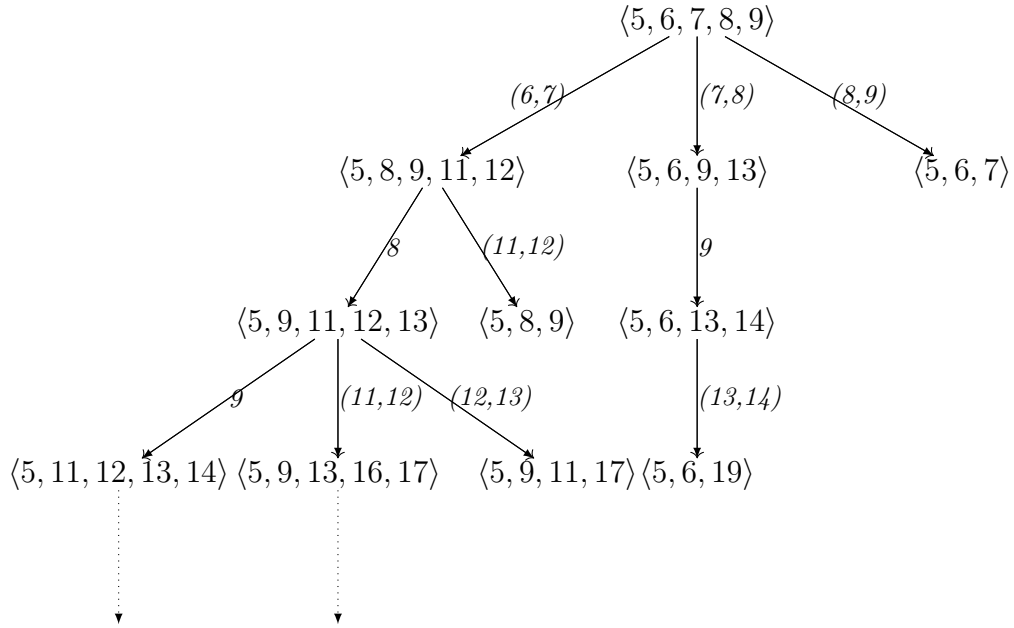
1. Se $\theta(S) = \{F(S)\}$, então $T = S \cup \{F(S)\}$. Pelo Lema 4.1, sabemos que $F(S) - 1 \notin S$ e, portanto, $F(T) = F(S) - 1$. Assim, $S = T \setminus \{F(T) + 1\}$. Aplicando o Lema 4.3, temos que $F(T) + 1 \in \text{msg}(T) \setminus \{m\}$.
2. Se $\theta(S) = \{F(S), F(S) - 1\}$, então $T = S \cup \{F(S), F(S) - 1\}$ e $F(S) - 2 \in S$. Portanto, deduzimos facilmente que $S = T \setminus \{F(S) - 1, F(S)\}$, com $\{F(S) - 1, F(S)\} \subseteq \text{msg}(T)$ e $F(S) - 1 > F(T) + 1$.

Por outro lado, suponha que $F(T) + 1 \in \text{msg}(T) \setminus \{m\}$ e $S = T \setminus \{F(T) + 1\}$. Provemos que $T = S \cup \{F(S)\}$. Como $T \setminus \{F(T) + 1\} = S$, segue que $T = S \cup \{F(T) + 1\} = S \cup \{F(S)\}$, já que $F(T) + 1 \notin S$, pois é o maior número natural que não pertence a S .

Agora, suponha que $S = T \setminus \{x, x + 1\}$, com $\{x, x + 1\} \subseteq \text{msg}(T)$ e $x > F(T) + 1$. Então, $S \cup \{x, x + 1\} = T = S \cup \{F(S) - 1, F(S)\}$, já que $x + 1 = F(S)$, pois é de novo o maior número natural que não pertence a S . $\square$

O teorema anterior nos fornece um processo algorítmico que nos permite construir recursivamente a árvore $G(\mathcal{P}_m)$, como mostra o exemplo a seguir.

Exemplo 4.6. [11, p. 1746] Vamos construir $G(\mathcal{P}_5)$. Para fazer isso temos que tomar a raiz $\langle 5, 6, 7, 8, 9 \rangle$ como ponto de partida e conectaremos cada vértice já construído com seus filhos (que são perfeitamente determinados pelo Teorema 4.2). O caractere que aparece na aresta significa os geradores mínimos que removemos do vértice pai para obter o vértice filho.



Concluimos esta seção observando que, para todo $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, temos que $S(k) = \langle m \rangle \cup \{k_{m+1}, \rightarrow\} \in \mathcal{P}_m$. Assim, $\mathcal{P}_m$ possui cardinalidade infinita, o que implica que não é possível calcular todos os elementos de $\mathcal{P}_m$. No entanto, a cardinalidade do conjunto de elementos de $\mathcal{P}_m$ com número de Frobenius fixo ou gênero fixo é finita.

Além disso, à medida que descemos pelos ramos da árvore $G(\mathcal{P}_m)$, os semigrupos numéricos encontrados apresentam um gênero crescente e um número de Frobenius também crescente.

4.0.2 Monóides perfeitos

Começaremos provando o seguinte resultado

Proposição 4.4. Se S e T são semigrupos numéricos, então $S \cap T$ também é um semigrupo numérico.

Demonstração. É claro que $S \cap T \neq \emptyset$, já que S e T são semigrupos numéricos. Além disso, pela Proposição 1.1, sabemos que a interseção de semigrupos é um semigrupo. Assim, basta provar que o complemento da interseção de dois semigrupos numéricos em relação aos números naturais é finito, ou seja, $\mathbb{N} \setminus (S \cap T) < \infty$.

De fato, temos:

$$\mathbb{N} \setminus (S \cap T) = \mathbb{N} \cap (S \cap T)^c = \mathbb{N} \cap (S^c \cup T^c) = (\mathbb{N} \cap S^c) \cup (\mathbb{N} \cap T^c) = (\mathbb{N} \setminus S) \cup (\mathbb{N} \setminus T).$$

Como $\mathbb{N} \setminus S$ e $\mathbb{N} \setminus T$ são conjuntos finitos (pois S e T são semigrupos numéricos), concluímos que $\mathbb{N} \setminus (S \cap T)$ também é finito. Portanto, a interseção finita de semigrupos numéricos é um semigrupo numérico. $\square$

Usando a Proposição 4.1, deduzimos que a interseção finita de semigrupos numéricos perfeitos é, por sua vez, um semigrupo numérico perfeito. De fato, como $S \cap T \subseteq S$ e $S \cap T \subseteq T$, temos que $\{s, s+2\} \subseteq S \cap T$ implica $s+1 \in S \cap T$.

No entanto, este resultado não se aplica a interseções infinitas, como será mostrado no exemplo a seguir.

Exemplo 4.7. *É claro que $\{0, k, \rightarrow\}$ é um semigrupo numérico perfeito para todo $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$. Além disso, está claro que $\bigcap_{k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}} \{0, k, \rightarrow\} = \{0\}$.*

Portanto, a interseção infinita de semigrupos numéricos perfeitos não é, em geral, um semigrupo numérico.

A interseção (finita ou infinita) de semigrupos numéricos é sempre um submonóide de $(\mathbb{N}, +)$. Bem, basta lembrar que cada semigrupo numérico contém o elemento zero.

Definição 4.2. *Um submonóide M de $(\mathbb{N}, +)$ é um submonóide perfeito se pode ser escrito como uma interseção finita ou infinita de semigrupos numéricos perfeitos.*

Observe que, no exemplo anterior, o conjunto $\{0\}$ foi apresentado como uma interseção infinita de semigrupos numéricos perfeitos. Portanto, $\{0\}$ é um monóide perfeito, mas não um semigrupo numérico perfeito. Além disso, conclui-se que a interseção de monóides perfeitos é, por sua vez, um monóide perfeito.

Se $X \subseteq \mathbb{N}$, então o monóide perfeito gerado por X , que denotamos por $P(X)$, é a interseção de todos os monóides perfeitos contendo X . Como consequência dos resultados anteriores, temos que $P(X)$ é o menor monóide perfeito (em relação à inclusão) contendo X .

Seja $F(X) = \{M : M \text{ é um monóide perfeito contendo } X\}$. Como $P(X) = \bigcap_{M \in F(X)} M$ e cada M é um monóide perfeito contendo X , segue que:

$$P(X) = \bigcap_{M \in F(X)} (M = \bigcap A),$$

onde cada A é um semigrupo numérico perfeito contendo X . Portanto, $P(X)$ é a interseção de todos os semigrupos numéricos perfeitos contendo X .

Seja $M = P(X)$. Nesse caso, diremos que X é um P -sistema de geradores de M . Além disso, se $M \neq P(Y)$ para todo $Y \subsetneq X$, diremos que X é um P -sistema minimal de geradores de M .

Observe que um P -sistema gerador de um monóide é diferente de um sistema gerador de um monóide. O primeiro gera um monóide perfeito, enquanto o segundo gera apenas o monóide.

Lema 4.5. *Sejam X e Y dois subconjuntos de $\mathbb{N}$ e M , um monóide perfeito. Então:*

1. *Se $X \subseteq Y$ então $P(X) \subseteq P(Y)$.*
2. *$P(X) = P(\langle X \rangle)$.*
3. *$P(M) = M$.*

Demonstração. Seja $F_X = \{M : M \text{ é um monóide perfeito e } X \subseteq M\}$ a família de todos os monóides perfeitos contendo X e $F_Y = \{N : N \text{ é um monóide perfeito e } Y \subseteq N\}$ a família de todos os monóides perfeitos N contendo Y .

1. Suponha que $X \subseteq Y$. Note que, para todo $M \in F_X$, temos que $\langle X \rangle \subseteq M$, e o mesmo acontece para Y . Além disso, sabemos que $\langle X \rangle \subseteq \langle Y \rangle \subseteq N$, de onde se segue que todo monoide N contém X . Portanto,

$$\bigcap_{M \in F_X} M \subseteq \bigcap_{N \in F_Y} N,$$

o que é equivalente a $P(X) \subseteq P(Y)$.

2. Note que $X \subseteq \langle X \rangle$, então por o item anterior temos que $P(X) \subseteq P(\langle X \rangle)$. Agora como $\langle X \rangle$ é o menor monoide que contem X então se segue que $\langle X \rangle \subseteq M$ para todo monoide perfeito M que contem X . Portanto $P(\langle X \rangle) \subseteq P(X)$.

3. É uma consequência direta dos item anteriores. □

O seguinte resultado nos diz que o conjunto formado por todos os monóides perfeitos é $\{P(X) \mid X \text{ é um subconjunto finito de } \mathbb{N}\}$. Portanto, fornecer um monóide perfeito é o mesmo que fornecer um subconjunto finito de $\mathbb{N}$.

Proposição 4.5. *Todo monóide perfeito possui um P -sistema de geradores, que também é finito.*

Demonstração. Seja M um monoide perfeito. Então M é um submonoide de $(\mathbb{N}, +)$ e pelo o Corolário 1.1 existem X , um subconjunto finito de $\mathbb{N}$ tal que $M = \langle X \rangle$. Aplicando o Lema 4.5, temos que $M = P(M) = P(\langle X \rangle) = P(X)$. Portanto, X é um P -sistema gerador finito de M . □

Agora nosso objetivo é mostrar um método algorítmico que nos permite calcular $P(X)$ a partir de X .

Teorema 4.3. *Seja M um submonóide de $(\mathbb{N}, +)$ tal que $M \neq \{0\}$. Então as seguintes condições são equivalentes:*

1. M é um monoide perfeito.
2. Se $\{x, x+2\} \subseteq M$ então $x+1 \in M$.

Demonstração. 1) implica 2). Se M é um monoide perfeito, então existe uma família $\{S_i \mid i \in I\}$ de semigrupos numéricos perfeitos tal que $M = \bigcap_{i \in I} S_i$.

Como $\{x, x+2\} \subseteq M$, então $\{x, x+2\} \subseteq S_i$ para todo $i \in I$. Aplicando a Proposição 4.1, temos que $x+1 \in S_i$ para todo $i \in I$. Portanto, $x+1 \in M$.

2) implica 1). Para cada $x \in M$ denotamos $S_x = M \cup \{x, \rightarrow\}$. É claro que S_x é um semigrupo numérico perfeito e $M = \bigcap_{x \in M} S_x$, então M é um monoide perfeito. □

Definição 4.3. *Seja M um submonoide de $(\mathbb{N}, +)$, então o fecho perfeito de M é $\overline{M} = M \cup \{x \in \mathbb{N} \mid \{x-1, x+1\} \subseteq M\}$.*

Exemplo 4.8. *Seja $M = \{0, 2, 4, 6, 8, \dots, 2k\}$ com $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Então $\overline{M} = \{0, 2, 3, 4, 5, \rightarrow\}$.*

Exemplo 4.9. *Seja $M = \{0, 4, 8, 12, 16, \dots, 4k\}$ com $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Então $\overline{M} = M$.*

Corolário 4.2. *Se M é um submonoide de $(\mathbb{N}, +)$, então $\overline{M} = P(M)$.*

Demonstração. Primeiro mostramos que $\overline{M}$ é um submonóide de $(\mathbb{N}, +)$. Isso pode ser facilmente deduzido dos dois seguintes itens

- Se $s \in \mathbb{N} \setminus M$, $\{s-1, s+1\} \subseteq M$ e $x \in M$, então $\{x+s-1, x+s+1\} \subseteq M$ e portanto $s+x \in \overline{M}$.
- Se $\{s-1, s+1\} \subseteq M$ e $\{s'-1, s'+1\} \subseteq M$, então $s'+1+s-1 \in M$ e então $s+s' \in M$.

Aplicando o Teorema 4.3, temos que $\overline{M}$ é um monoide perfeito. Como $M \subseteq \overline{M}$, segue que $P(M) \subseteq \overline{M}$. Para concluir a prova, precisamos mostrar que $\overline{M} \subseteq P(M)$. De fato, seja $x \in \overline{M}$. Se $x \in M$, então $x \in P(M)$. Se $x \notin M$, então $\{x-1, x+1\} \subseteq M$, o que implica que $\{x-1, x+1\} \subseteq P(M)$. Aplicando que $P(M)$ é um monoide perfeito e utilizando o Teorema 4.3, concluímos que $x \in P(M)$. $\square$

Como consequência desses resultados, temos o seguinte resultado.

Corolário 4.3. *Se $X \subseteq \mathbb{N}$, então $P(X) = \overline{\langle X \rangle}$.*

O corolário acima nos dá um método algorítmico para calcular o menor monoide perfeito contendo um conjunto finito de inteiros não negativos. Abaixo ilustramos esse método com um exemplo.

Exemplo 4.10. *Vamos construir $P(\{5, 8\})$ de acordo com o corolário anterior. Como $\langle 5, 8 \rangle = \{0, 5, 8, 10, 13, 15, 16, 18, 20, 21, 23, 24, 25, 26, 28, \rightarrow\}$, então aplicando o Corolário 4.3, temos que $P(\{5, 8\}) = \overline{\langle 5, 8 \rangle} = \{0, 5, 8, 9, 10, 13, \rightarrow\} = \langle 5, 8, 9 \rangle$.*

Exemplo 4.11. *Vamos construir $P(\{3, 5, 9\})$. Como $\langle 3, 5, 9 \rangle = \{0, 3, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, \rightarrow\}$, então aplicando o Corolário 4.3, temos que $P(\{3, 5, 9\}) = \overline{\langle 3, 5, 9 \rangle} = \{0, 3, 4, 5, \rightarrow\}$.*

Agora pretendemos mostrar a condição que deve verificar X para que $P(X)$ seja um semi-grupo numérico.

Proposição 4.6. *Seja M um submonoide de $(\mathbb{N}, +)$ tal que $M \neq \{0\}$ e $d = \text{mdc}(M)$.*

1. *Se $d \geq 3$ então $\overline{M} = M$.*
2. *$\overline{M}$ é um semigrupo numérico se, e somente se, $d \in \{1, 2\}$.*

Demonstração. Vamos começar provando que $\overline{M} = M$. Isso é equivalente a provar que M é um monoide perfeito em vista do Lema 4.5 e do Corolário 4.2.

1. Seja $d \geq 3$ e $\{x, x+2\} \subseteq M$ então $d \leq \text{mdc}\{x, x+2\} = d'$. Como d' divide x e $x+2$ então $x = k_1 d'$ e $x+2 = k_2 d'$. Então $2 = k_3 d'$. Segue-se que $d \leq \text{mdc}\{x, x+2\} \leq 2$, o que é absurdo. Portanto, aplicando o Teorema 4.3 temos que M é um monoide perfeito e então $\overline{M} = M$.
2. Se $\overline{M}$ é um semigrupo numérico e $d \neq 1$, então $\overline{M} \neq M$. Então, existe $\{x, x+2\} \subseteq M$. Portanto, $d = 2$.

Por outro lado, se $d = 1$, então M é um semigrupo numérico e, portanto, $\overline{M}$ também é um semigrupo numérico. Se $d = 2$, então existe $\{x, x+2\} \subseteq M$ e, portanto, $\{x, x+1, x+2\} \subseteq \overline{M}$. Segue-se que $\text{mdc}(\overline{M}) = 1$ e, consequentemente, $\overline{M}$ é um semigrupo numérico. $\square$

Uma consequência imediata da proposição acima é o seguinte resultado.

Corolário 4.4. *Seja $X \subseteq \mathbb{N}$. Então $P(X)$ é um semigrupo numérico perfeito se, e somente se, $\text{mdc}(X) \in \{1, 2\}$.*

Demonstração. Seja $P(X)$ um semigrupo numérico perfeito. Pelo Corolário 4.3, temos que $P(X) = \overline{\langle X \rangle}$. Logo, pela proposição anterior, segue-se que $\text{mdc}(X) \in \{1, 2\}$.

Por outro lado, se $\text{mdc}(X) \in \{1, 2\}$, então, novamente pela Proposição anterior, temos que $\overline{\langle X \rangle}$ é um semigrupo numérico. Além disso, pelo Corolário 4.3, temos que $P(X) = \overline{\langle X \rangle}$. Portanto, $P(X)$ é um semigrupo numérico perfeito. $\square$

Observe que um semigrupo numérico perfeito não precisa ter um único P -sistema de geradores mínimo, pois, por exemplo, temos que $P(\{3, 4\}) = P(\{3, 5\}) = \{0, 3, \rightarrow\}$. Daqui em diante, consideraremos que $\{3, 4\}$ e $\{3, 5\}$ são P -sistemas de geradores mínimos de $\{0, 3, \rightarrow\}$.

Lema 4.6. *Se X é um P -sistema de geradores de T , então $Y = \{x \in X \mid x \leq \max(\text{msg}(T)) + 1\}$ também é um P -sistema de geradores de T .*

Demonstração. Vejamos que $\overline{\langle Y \rangle} = T$. Como $Y \subseteq X$, então $P(Y) = \overline{\langle Y \rangle} \subseteq \overline{\langle X \rangle} = P(X) = T$. Agora, para a outra inclusão, basta verificar que $\text{msg}(T) \subseteq \overline{\langle Y \rangle}$, já que implica que $T \subseteq \overline{\langle Y \rangle}$. Seja $x \in \text{msg}(T) \subseteq \overline{\langle X \rangle}$. Então, temos que $x \in \langle X \rangle \cup \{k \in \mathbb{N} : \{k-1, k+1\} \subseteq X\}$.

Se $x \in \langle X \rangle$, como $x < \max(\text{msg}(T)) + 1$, segue que $x \in \langle Y \rangle$. Se $x \in \{k \in \mathbb{N} : \{k-1, k+1\} \subseteq X\}$, então existe $t \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $1 \leq i \leq t$, temos $x_i \in X$ e

$$x + 1 = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_t x_t$$

com $\lambda_i \in \mathbb{N}$.

Como $x \in \text{msg}(T)$, temos que $x + 1 \leq \max(\text{msg}(T)) + 1$, o qual implica que $x_i \leq \max(\text{msg}(T)) + 1$ para todo i . Assim, $x + 1 \in \langle Y \rangle$. De forma análoga, temos que $x - 1 \in \langle Y \rangle$. Portanto, $\{x - 1, x + 1\} \subseteq \overline{\langle Y \rangle}$, o que implica que $x \in \{f \in \mathbb{N} : \{f - 1, f + 1\} \subseteq Y\}$. Isso conclui que $\text{msg}(T) \subseteq \overline{\langle Y \rangle}$. $\square$

Observe que, como consequência do lema anterior, temos que, se X é um P -sistema mínimo de geradores de um semigrupo numérico perfeito T , então temos que X é um subconjunto de $\{1, 2, \dots, \max(\text{msg}(T)) + 1\}$. Portanto, obtemos o seguinte resultado.

Proposição 4.7. *Um semigrupo numérico perfeito possui um número finito de P -sistemas mínimos de geradores.*

Demonstração. Basta lembrar que o número de subconjuntos de um conjunto finito é finito. $\square$

4.0.3 O fecho perfeito de um semigrupo numérico

Se S é um semigrupo numérico, então pelo Corolário 4.2, sabemos que $\overline{S} = S \cup \{x \in \mathbb{N} \mid \{x - 1, x + 1\} \subseteq S\}$ é um semigrupo numérico perfeito, que chamaremos de fecho perfeito de S .

Seja $\mathcal{L}$ o conjunto de todos os semigrupos numéricos. Definimos a seguinte relação de equivalência R em $\mathcal{L}$:

SRT se $\overline{S} = \overline{T}$. Para cada $S \in \mathcal{L}$, denotamos por $[S]$ sua classe. Ou seja, $[S] = \{S' \in \mathcal{L} \mid SRS'\}$.

Proposição 4.8. *O conjunto $\{[T] \mid T \text{ é um semigrupo numérico perfeito}\}$ é uma partição de $\mathcal{L}$. Além disso, se S e T são semigrupos numéricos perfeitos onde S não é igual a T , então $[S] \cap [T] = \emptyset$.*

Demonstração. Seja $\{[T] \mid T \text{ é um semigrupo numérico perfeito}\} = F$. Lembre que por o Lema 4.5 se T é semigrupo numérico perfeito implica que $T = P(T) = \overline{T}$. Logo é claro que $[T] \neq \emptyset$ pois $T \in [T]$. Agora suponha que existe $S' \in [S] \cap [T]$ para $S \neq T$. Então $\overline{S'} = \overline{S} = P(S) = S$ e $\overline{S'} = \overline{T} = P(T) = T$, se segue que $S = T$ o qual é uma contradição. Portanto $[S] \cap [T] = \emptyset$ para $S \neq T$.

Por ultimo provemos que $\mathcal{L} = \bigcup_{[T] \in F} [T]$. Seja $S \in \bigcup_{[T] \in F} [T]$, então $S \in [T]$ para algum $T \Rightarrow S$ é um semigrupo numérico e portanto $S \in \mathcal{L}$. Agora seja $S \in \mathcal{L}$. Se S não é perfeito então por o Corolário 4.2 $\bar{S}$ é perfeito, daí resulta que $S \in [\bar{S}] \Rightarrow S \in \bigcup_{[T] \in F} [T]$. $\square$

Se S for um semigrupo numérico que não é perfeito, então denotamos por $h(S)$ a lacuna isolada máxima de S . Se S for um semigrupo numérico perfeito então $h(S) = -1$.

Proposição 4.9. *Se S é um semigrupo numérico que não é perfeito, então $S \cup \{h(S)\}$ é um semigrupo numérico.*

Demonstração. Como $h(S)$ é uma lacuna isolada de S , então $\{h(S)-1, h(S)+1\} \subseteq S$. Portanto, $h(S) + h(S) = h(S) - 1 + h(S) + 1 \in S$. Para concluir a prova, veremos que se $s \in S \setminus \{0\}$ então $h(S) + s \in S$. De fato, $\{h(S) - 1, h(S) + 1\} \subseteq S$ então $\{h(S) + s - 1, h(S) + s + 1\} \subseteq S$. Aplicando que $h(S)$ é a lacuna isolada máxima de S , deduzimos que $h(S) + s \in S$. A finitude do conjunto de lacunas decorre do fato de que é o mesmo conjunto inicial de lacunas menos a lacuna máxima. $\square$

Se S é um semigrupo numérico, então denotamos por $a(S)$ o número de lacunas isoladas de S .

Se S for um semigrupo numérico, definimos recursivamente a seguinte sequência de semigrupos numéricos:

- $S_0 = S$,
- $S_{n+1} = \begin{cases} S_n \cup \{h(S_n)\} & \text{se } h(S) \neq -1 \\ S_n & \text{em outro caso} \end{cases}$

Proposição 4.10. *Se S é um semigrupo numérico, então $S = S_0 \subsetneq S_1 \subsetneq \dots \subsetneq S_{a(S)}$. Além disso, $S_{a(S)}$ é um semigrupo numérico perfeito e $\#(S_{i+1} \setminus S_i) = 1$ para todo $i \in \{0, \dots, a(S)-1\}$.*

Demonstração. Basta lembrar que para todo semigrupo numérico o conjunto de lacunas é sempre finito. Além disso, a proposição anterior nos assegura a existência da sequência de semigrupos numéricos. $\square$

Se T é um semigrupo numérico perfeito, então definimos o grafo $G([T])$ da seguinte forma: $[T]$ é seu conjunto de vértices e $(S, S') \in [T] \times [T]$ é uma aresta se $S \cup \{h(S)\} = S'$.

O resultado a seguir é uma consequência imediata da Proposição 4.10.

Corolário 4.5. *Se T é um semigrupo numérico perfeito, então $G([T])$ é uma árvore com raiz T .*

Demonstração. Basta notar que, para qualquer semigrupo numérico não perfeito S com fecho perfeito $\bar{S} = T$, existe um caminho único, dado pela proposição 4.10, que une S com o vértice $S_a(S)$, o qual é um semigrupo numérico perfeito. Portanto, temos que $S_a(S) = T$. Como isso acontece para todo semigrupo numérico S na classe $[T]$, então $G([T])$ é uma árvore com raiz T . $\square$

No resultado a seguir mostraremos como são os filhos de um vértice arbitrário da árvore $G([T])$.

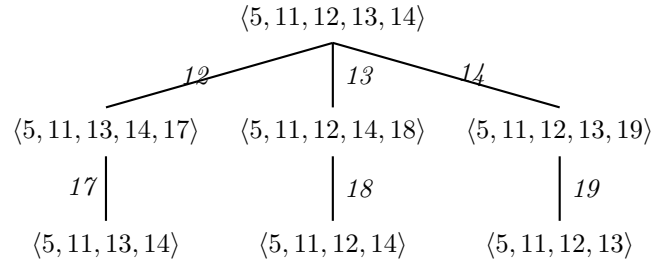
Proposição 4.11. *Seja T um semigrupo numérico perfeito e $S \in [T]$. Então o conjunto formado pelos filhos de S na árvore $G([T])$ é o seguinte conjunto $\{S \setminus \{x\} \mid x \in \text{msg}(S), x > h(S) \text{ e } \{x-1, x+1\} \subseteq S\}$.*

Demonstração. Se S' é filho de S , então $S' \cup \{h(S')\} = S$. Portanto, $S' = S \setminus \{h(S')\}$ com $h(S') \in \text{msg}(S)$, $h(S') > h(S)$ e $\{h(S') - 1, h(S') + 1\} \subseteq S' \subseteq S$.

Por outro lado, se $x \in \text{msg}(S)$, $x > h(S)$ e $\{x - 1, x + 1\} \subseteq S$, então é claro que $S \setminus \{x\} \in [T]$ e $h(S \setminus \{x\}) = x$. Assim, $(S \setminus \{x\}) \cup h(S \setminus \{x\}) = S$ e consequentemente $S \setminus \{x\}$ é um filho de S . $\square$

A proposição acima nos permitirá construir recursivamente a árvore $G([T])$, começando pela raiz T e adicionando seus filhos a cada vértice já construído.

Exemplo 4.12. É claro que $T = \langle 5, 11, 12, 13, 14 \rangle = \{0, 5, 10, 11, \rightarrow\}$ é um semigrupo numérico perfeito. Vamos construir a árvore $G([T])$ usando a Proposição 4.11. O número que aparece na figura a seguir sobre cada aresta marca o gerador mínimo que removemos do vértice pai para obter o filho correspondente.



Observamos que $\#[\langle 5, 11, 12, 13, 14 \rangle] = 7$ e, portanto, o conjunto formado por todos os semigrupos numéricos que têm $\langle 5, 11, 12, 13, 14 \rangle$ como fecho perfeito é finito. Isso não é verdade em geral, como mostra o exemplo a seguir.

Exemplo 4.13. [11, p. 1750] É claro que se n é um inteiro tal que $n \geq 6$, então $S(n) = \langle 4, 6 \rangle \cup \{n, \rightarrow\}$ é um semigrupo numérico e $\overline{S(n)} = \langle 4, 5, 6, 7 \rangle$. Portanto, $[\langle 4, 5, 6, 7 \rangle]$ é um conjunto com elementos infinitos.

Outro exemplo desse tipo é fornecido pela próxima família de semigrupos numéricos $\{T(n) = \langle 8, 12, 14 \rangle \cup \{n, n + 1, \rightarrow\} \mid n \in \mathbb{N} \text{ e } n \geq 21\}$. É claro que $\overline{T(n)} = \langle 8, 12, 13, 14, 15 \rangle$ para todo $n \in \{21, \rightarrow\}$. Portanto, $[\langle 8, 12, 13, 14, 15 \rangle]$ também é um conjunto com cardinalidade infinita.

Seja T um semigrupo numérico perfeito. Agora propomos estudar quais condições T deve satisfazer para que $\#[T]$ seja infinito.

Lema 4.7. Seja T um semigrupo numérico perfeito, X um P -sistema de geradores de T , e S um semigrupo numérico. Se $X \subseteq S \subseteq T$, então $\overline{S} = T$.

Demonstração. Pelo Lema 4.5, sabemos que $P(X) \subseteq P(S) \subseteq P(T) = T$. Como $P(X) = T$, então pelo Corolário 4.3 temos $\overline{S} = P(S) = T$. $\square$

Lembre-se de que pelo Corolário 4.4, sabemos que $P(X)$ é um semigrupo numérico perfeito se e somente se $\text{mdc}(X) \in \{1, 2\}$.

Lema 4.8. Seja T um semigrupo numérico perfeito, $X \subseteq \mathbb{N}$, tal que $\text{mdc}(X) = 2$ e $P(X) = T$. Então $[T]$ tem cardinalidade infinita.

Demonstração. É claro que $S(n) = \langle X \rangle \cup \{n, \rightarrow\}$ é um semigrupo numérico para todo $n \in \{F(T) + 1, \rightarrow\}$. Aplicando o Lema 4.7, temos que $\overline{S(n)} = T$. Portanto, $[T]$ tem cardinalidade infinita.

Observe que a hipótese $\text{mdc}(X) = 2$ é necessária, pois, se $\text{mdc}(X) = 1$ implica que $\langle X \rangle$ é um semigrupo numérico. Daí resulta que os conjuntos $\langle X \rangle \cup \{n, \rightarrow\}$ onde $n \geq F(X) + 1$ são finitos e temos que $\langle X \rangle = S(n + 1) = S(n + 2) = \dots = S(n + m)$ para todos $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. $\square$

Lembre-se de que o P -sistema mínimo de geradores de um semigrupo numérico perfeito não é único.

Lema 4.9. *Seja T um semigrupo numérico perfeito e S um semigrupo numérico. Então $\overline{S} = T$ se, e somente se, existe um P -sistema mínimo de geradores X de T tal que $X \subseteq S \subseteq T$.*

Demonstração. $\Rightarrow$) Como $\overline{S} = T$, então $P(S) = T$ e então S é um P -sistema de geradores de T . Seja X um subconjunto de S mínimo com a condição de $P(X) = T$. Então X é um P -sistema mínimo de geradores de T e $X \subseteq S \subseteq T$.

$\Leftarrow$) É uma consequência direta do Lema 4.7. $\square$

Lembre-se de que pela Proposição 4.7, sabemos que um semigrupo numérico perfeito tem apenas um número finito de P -sistemas mínimos de geradores.

Teorema 4.4. *Seja T um semigrupo numérico perfeito. Então $[T]$ é um conjunto com cardinalidade infinita se, e somente se, T tem um P -sistema mínimo de geradores cujos elementos têm como máximo divisor comum dois.*

Demonstração. $\Rightarrow$) Sejam $X_1, X_2, \dots, X_n$ todos os P -sistemas mínimos de geradores de T . Se $\text{mdc}(X_1) = \text{mdc}(X_2) = \dots = \text{mdc}(X_n) = 1$, então $\langle X_1 \rangle, \langle X_2 \rangle, \dots, \langle X_n \rangle$ são semigrupos numéricos. Portanto, $\{S \mid S \text{ é um semigrupo numérico e } X_i \subseteq S \subseteq T\}$ é finito para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, além disso note que $\langle X_i \rangle \subseteq S \Leftrightarrow G(S) \subseteq G(\langle X_i \rangle)$. Agora aplicando o Lema 4.9, deduzimos que $[T]$ é um conjunto finito.

$\Leftarrow$) É uma consequência imediata do Lema 4.8. $\square$

4.0.4 Semigrupos numéricos perfeitos com dimensão de imersão máxima

Nesta seção, analisamos algumas relações entre semigrupos numéricos perfeitos que, além disso, possuem outras propriedades, como a dimensão máxima de imersão, a propriedade de Arf e os semigrupos numéricos saturados.

Utilizaremos alguns resultados de propriedades sem demonstração, pois nosso objetivo principal é relacionar as propriedades mencionadas com os semigrupos numéricos perfeitos.

Definição 4.4. *Um semigrupo numérico S tem dimensão de imersão máxima (semigrupo-DIM) se $e(S) = m(S)$.*

A prova do seguinte resultado pode ser consultada detalhadamente em [6, p. 19].

Lema 4.10. *Seja S um semigrupo numérico. As seguintes condições são equivalentes:*

1. S possui dimensão máxima.
2. Para todos $x, y \in S \setminus \{0\}$, $x + y - m(S) \in S$.
3. $\{s - m(S) \mid s \in S \setminus \{0\}\}$ é um semigrupo numérico.

Se S for um semigrupo numérico, denotaremos $\Delta(S) = \{s - m(S) \mid s \in S \setminus \{0\}\}$.

Proposição 4.12. *Seja S um semigrupo-DIM tal que $m(S) \geq 3$. Então S é um semigrupo numérico perfeito se, e somente se, $\Delta(S)$ é um semigrupo numérico perfeito.*

Demonstração. Pelo Lema 4.10, sabemos que $\Delta(S)$ é um semigrupo numérico. Para provar que $\Delta(S)$ é perfeito, usaremos a Proposição 4.1. De fato, se $\{x, x+2\} \subseteq \Delta(S)$, então existe $\{s_1, s_2\} \subseteq S$ tal que $x = s_1 - m(S)$ e $x+2 = s_2 - m(S)$. Assim, $s_2 = s_1 + 2$ e consequentemente $\{s_1, s_1+2\} \subseteq S$. Aplicando que S é perfeito, temos que $s_1 + 1 \in S$. Portanto, $x+1 = s_1 + 1 - m(S) \in \Delta(S)$.

Por outro lado, para provar que S é perfeito, usaremos novamente a Proposição 4.1. Se $\{s, s+2\} \subseteq S$, então aplicando que $m(S) \geq 3$, deduzimos que $S \neq 0$. Portanto, $\{s, s+2\} \subseteq S \setminus \{0\}$ e consequentemente $\{s - m(S), s+2 - m(S)\} \subseteq \Delta(S)$. Como $\Delta(S)$ é perfeito, temos $s+1 - m(S) \in \Delta(S)$. Portanto, $s+1 \in S$. $\square$

O resultado a seguir é uma consequência imediata do Lema 4.10.

Lema 4.11. *Seja S um semigrupo numérico e $x \in S \setminus \{0\}$. Então $(\{x\} + S) \cup \{0\}$ é um semigrupo-DIM com multiplicidade x . Além disso, todo semigrupo-DIM possui esta forma.*

Demonstração. É claro que $(\{x\} + S) \cup \{0\}$ é um semigrupo-DIM com multiplicidade x . Agora, para obter que todo semigrupo-DIM tenha a forma acima mencionada, basta observar que todo semigrupo-DIM S' pode ser escrito como $S' = (\{m(S')\} + \Delta(S')) \cup \{0\}$. $\square$

Um semigrupo-DIMP é um semigrupo-DIM perfeito.

Teorema 4.5. *Seja S um semigrupo numérico perfeito e $x \in S$ tal que $x \geq 3$. Então $S(x) = (\{x\} + S) \cup \{0\}$ é um semigrupo-DIMP. Além disso, todo semigrupo-DIMP diferente de $\mathbb{N}$ tem esta forma.*

Demonstração. Pelo Lema 4.11, sabemos que $S(x)$ é um semigrupo-DIM com multiplicidade x . Aplicando agora a Proposição 4.12, temos que $S(x)$ é um semigrupo numérico perfeito, já que $\Delta(S(x)) = S$. Assim, $S(x)$ é um semigrupo-DIMP.

Seja T um semigrupo-DIMP tal que $T \neq \mathbb{N}$. Então $m(T) \geq 3$, e pela Proposição 4.12, temos que $\Delta(T)$ é um semigrupo numérico perfeito. Portanto, $T = (\{m(T)\} + \Delta(T)) \cup \{0\}$ onde $m(T) \in \Delta(T)$, $m(T) \geq 3$, e $\Delta(T)$ é um semigrupo numérico perfeito. $\square$

O seguinte resultado pode ser consultado em [14, Proposição 9].

Proposição 4.13. *Seja S um semigrupo numérico, $x \in S \setminus \{0, 1\}$, e $S(x) = (\{x\} + S) \cup \{0\}$. Então $F(S(x)) = F(S) + x$ e $g(S(x)) = g(S) + x - 1$.*

O Teorema 4.5 e a Proposição 4.13 nos permitem construir semigrupos-DIMP com um número de Frobenius fixo e gênero fixo, começando de um semigrupo numérico perfeito, como mostrado no exemplo a seguir.

Exemplo 4.14. *Seja $S = \langle 5, 8, 9 \rangle = \{0, 5, 8, 9, 10, 13, \rightarrow\}$. É claro que S é um semigrupo numérico perfeito, $F(S) = 12$, e $g(S) = 8$. Como $9 \in S$, então aplicando o Teorema 4.5 e a Proposição 4.13, temos que $S(9) = (\{9\} + S) \cup \{0\} = \{0, 9, 14, 17, 18, 19, 22, \rightarrow\}$ é um semigrupo-DIMP com número de Frobenius $12 + 9 = 21$ e gênero $8 + 9 - 1 = 16$.*

Inspirado por [3], Lipman introduziu e encorajou em [10] o estudo dos anéis Arf. A caracterização dada neste artigo dos anéis Arf por meio de seus semigrupos de valor leva à noção de semigrupo numérico Arf.

Definição 4.5. *Dizemos que um semigrupo numérico é Arf se ele verifica a seguinte condição: Se $\{x, y, z\} \subseteq S$ e $x \geq y \geq z$ então $x + y - z \in S$.*

Exemplo 4.15. Todos os semigrupos numéricos ordinários são semigrupos numéricos com a propriedade de Arf. Lembre-se de que os semigrupos numéricos ordinários têm a forma $\{0, m, m+1, m+2, \rightarrow\}$, com $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Então, para $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{N}$ tais que $m+k_1 < m+k_2 < m+k_3$, temos que:

$$(m+k_3) + (m+k_2) - (m+k_1) = m + (k_3 + k_2 - k_1).$$

Como $k_3 + k_2 - k_1 > 0$, segue-se que $m + (k_3 + k_2 - k_1) \in \{0, m, m+1, m+2, \rightarrow\}$.

Proposição 4.14. Todo semigrupo numérico Arf é um semigrupo-DIM.

Demonstração. Basta notar que para cada semigrupo numérico S com a propriedade arf, é satisfeito que, $\{m(S), y, x\} \subseteq S$ com $m(S) \leq y \leq x$, então $x + y - m(S) \in S \setminus \{0\}$ em vista do Lema 4.10. $\square$

Dizemos que uma sequência de números inteiros $(x_1, \dots, x_n)$ é uma sequência Arf se ela verifica as seguintes condições:

1. $x_n \geq \dots \geq x_1 \geq 2$,
2. $x_{i+1} \in \{x_i, x_i + x_{i-1}, \dots, x_i + \dots + x_1, \rightarrow\}$ para todo $i \in \{1, \dots, n-1\}$.

Proposição 4.15. [6, p. 21] Seja S um semigrupo numérico e $x \in S \setminus \{0\}$. Então, S é Arf se, e somente se, $S' = (x + S) \cup \{0\}$ é Arf.

Demonstração. Suponha que S é um semigrupo numérico Arf, e sejam $a, b, c \in S'$, com $a \geq b \geq c$. Observe que se $c = 0$, temos que $a + b - c = a + b \in S'$. Tome então $c \neq 0$. Daí, existem $a_1, b_1, c_1 \in S$ tais que $a = x + a_1, b = x + b_1$, e $c = x + c_1$, e como $a \geq b \geq c$, temos que $a_1 \geq b_1 \geq c_1$. Assim,

$$\begin{aligned} a + b - c &= (x + a_1) + (x + b_1) - (x + c_1) \\ &= (a_1 + b_1 - c_1) + x, \end{aligned}$$

logo, como $a_1 + b_1 - c_1 \in S$ por hipótese, $a + b - c \in x + S \subset S'$, concluindo que S' é Arf.

Por outro lado, se S' é Arf, temos que para todos $a, b, c \in S'$, com $a \geq b \geq c$, $a + b - c \in S'$. Desse modo, se $c \neq 0$, $a, b, c \in (x + S)$, logo existem $a_1, b_1, c_1 \in S$ tais que $a = x + a_1, b = x + b_1$, e $c = x + c_1$, daí

$$\begin{aligned} a + b - c &= (x + a_1) + (x + b_1) - (x + c_1) \\ &= (a_1 + b_1 - c_1) + x, \end{aligned}$$

então $a_1 + b_1 - c_1 \in S$, ou $(a_1 + b_1 - c_1) + x = 0$. Se $(a_1 + b_1 - c_1) + x = 0$, segue que $a_1 + b_1 + x = c_1$, contradizendo que $a_1 \geq b_1 \geq c_1$. Assim, S é um semigrupo numérico Arf. $\square$

A prova do seguinte resultado pode ser consultada detalhadamente em [6, Corolário 1.48]. Embora a definição da sequência Arf não seja usada com precisão, o resultado é o mesmo, exceto por um rearranjo dos índices.

Proposição 4.16. Seja S um subconjunto próprio e não vazio de $\mathbb{N}$. Então S é um semigrupo numérico Arf se, e somente se, existe uma sequência Arf $(x_1, \dots, x_n)$ tal que $S = \{0, x_n, x_n + x_{n-1}, \dots, x_n + x_{n-1} + \dots + x_1, \rightarrow\}$.

Um semigrupo-ARFP é um semigrupo numérico Arf que também é um semigrupo numérico perfeito. Uma consequência imediata da Proposição anterior é o seguinte resultado.

Corolário 4.6. *Seja $(x_1, \dots, x_n)$ uma sequência Arf tal que $x_1 \geq 3$. Então $S = \{0, x_n, x_n + x_{n-1}, \dots, x_n + x_{n-1} + \dots + x_1, \rightarrow\}$ é um semigrupo-ARFP. Além disso, todo semigrupo-ARFP tem esta forma.*

Demonstração. Da proposição anterior temos que S é um semigrupo numérico Arf, portanto basta ver que é perfeito. Para ver isso, observe que S pode ser escrito como $S = (x_1 + (x_2 + (\dots + ((x_n + \mathbb{N}) \cup \{0\}) \dots) \cup \{0\}) \cup \{0\}$ do qual segue que pelo Teorema 4.5, a Proposição 4.15 e do fato de que o conjunto $\mathbb{N}$ é Arf, de dimensão de imersão máximo e perfeito. $\square$

Em [9] um certo algoritmo parece calcular todas as sequências Arf cujo semigrupo numérico associado tem um número de Frobenius fixo ou gênero. Quanto ao algoritmo, se exigirmos que ele mantenha que $x_1 \geq 3$, então obteremos outro algoritmo que nos permite calcular todos os semigrupos-ARFP com um número de Frobenius fixo ou gênero.

Os chamados semigrupos de números saturados são um tipo particularmente interessante de semigrupos de números Arf (ver [8]). O conceito de anel saturado foi introduzido de três maneiras diferentes por Zariski [21], Pham-Teissier [13] e Campillo [5]. Em relação à propriedade Arf, a caracterização dos anéis saturados em termos de seus semigrupos de valores leva ao conceito de semigrupo numérico saturado.

Definição 4.6. *Um semigrupo numérico S é saturado se a seguinte condição for satisfeita: se $\{s, s_1, \dots, s_r\} \subseteq S$ onde $s_i \leq s$ para todos $i \in \{1, \dots, r\}$, $\{z_1, \dots, z_r\} \subseteq \mathbb{Z}$ e $z_1 s_1 + \dots + z_r s_r \geq 0$, então $s + z_1 s_1 + \dots + z_r s_r \in S$.*

Exemplo 4.16. [8, p. 28] *O semigrupo $S = \langle 7, 11, 13, 15, 16, 17, 19 \rangle$ é um semigrupo Arf mas não é saturado. Observe que $7, 11 \in S$ e $12 = 11 + (2 \times 11) - (3 \times 7) \notin S$.*

A partir da definição é fácil deduzir que todo semigrupo numérico saturado é Arf e, portanto, possui uma dimensão de imersão máxima.

Dizemos que uma sequência de inteiros positivos $(n_1, n_2, \dots, n_p)$ é saturada se satisfizer as seguintes condições:

1. $n_1 < n_2 < \dots < n_p$,
2. Se $d_i = \text{mdc}\{n_1, \dots, n_i\}$ para todos $i \in \{1, \dots, p\}$, então $d_1 > d_2 > \dots > d_p = 1$.

Como consequência dos resultados de [18], temos a seguinte proposição.

Proposição 4.17. *Seja $(n_1, \dots, n_p)$ uma sequência saturada. Para cada $j \in \{1, \dots, p-1\}$, seja $k_j = \max\{k \in \mathbb{N} \mid n_j + k d_j < n_{j+1}\}$. Então $S(n_1, \dots, n_p) = \{0, n_1, n_1 + d_1, \dots, n_1 + k_1 d_1, n_2, n_2 + d_2, \dots, n_2 + k_2 d_2, \dots, n_{p-1}, n_{p-1} + d_{p-1}, \dots, n_{p-1} + k_{p-1} d_{p-1}, n_p, \rightarrow\}$ é um semigrupo numérico saturado. Além disso, todo semigrupo numérico saturado tem esta forma.*

Um semigrupo-SATP é um semigrupo numérico saturado e perfeito.

Dados dois inteiros a e b com $b \neq 0$, denotamos por $a \bmod b$ o resto da divisão de a por b .

Corolário 4.7. *Seja $(n_1, \dots, n_p)$ uma sequência saturada. Então temos que $S(n_1, \dots, n_p)$ é um semigrupo-SATP se, e somente se, $d_{p-1} \geq 3$ e $n_p \bmod d_{p-1} = 2$.*

Ilustramos o resultado acima com um exemplo.

Exemplo 4.17. [11, p. 1754] *É claro que $(27, 36, 48, 55)$ é uma sequência saturada, $d_1 = 27, d_2 = 9, d_3 = 3$ e $d_4 = 1$. Pela Proposição 4.17, sabemos que $S = \{0, 27, 36, 45, 48, 51, 54, 55, \rightarrow\}$ é um semigrupo numérico saturado. Além disso, como $d_3 = 3 \geq 3$ e $(55 \bmod 3) = 1 \neq 2$, então aplicando o Corolário 4.7, temos que S é um semigrupo-SATP.*

Em [20] e [16] alguns algoritmos parecem calcular todos os semigrupos numéricos saturados com um número de Frobenius fixo ou gênero, respectivamente. A partir desses algoritmos e do Corolário 4.7, é fácil obter algoritmos que nos permitem construir todos os semigrupos PSAT com um número de Frobenius fixo ou gênero.

4.0.5 Semigrupos numéricos perfeitos com dimensão de imersão três

Na última seção, apresentaremos algumas relações e interações entre os semigrupos numéricos perfeitos e os semigrupos numéricos de dimensão imersão três. Essas relações e interações entre as duas famílias de semigrupos numéricos são discutidas na primeira parte do artigo [12].

Vamos primeiro lembrar que, para um semigrupo numérico S , um inteiro x é um número pseudo-Frobenius se $x \notin S$ e $x + s \in S$, para todo $s \in S \setminus \{0\}$. Além disso, $PF(S)$ denota o conjunto de todos os números pseudo-Frobenius de S , e sua cardinalidade é o tipo de S , denotado por $t(S)$.

Lema 4.12. *Se S é um semigrupo numérico perfeito, então $F(S) - 1 \notin S$.*

Demonstração. Se $S = \mathbb{N}$, então $F(S) - 1 = -2 \notin S$. Se $S \neq \mathbb{N}$, então $F(S) \in \mathbb{N} \setminus S$ e $F(S) + 1 \in S$. Como S é perfeito, temos que $F(S)$ não é uma lacuna isolada. Portanto $F(S) - 1 \notin S$. $\square$

Pela Proposição 1.8 parte dois temos que, $x \in \mathbb{Z} \setminus S$ se, e somente se, $f - x \in S$, para algum $f \in PF(S)$.

Seja S um semigrupo numérico com $t(S) = 1$. Então, $PF(S) = \{F(S)\}$, dado que $F(S) \in PF(S)$. Se $S \neq \mathbb{N}$, então $1 \notin S$, e, aplicando a Proposição 1.8, parte dois, temos $F(S) - 1 \in S$. Portanto, de acordo com o contra-recíproco do Lema 4.12, S não é um semigrupo numérico perfeito. Concluimos, então, o seguinte resultado.

Proposição 4.18. *Se S é um semigrupo numérico tal que $S \neq \mathbb{N}$ e $t(S) = 1$, então S não é um semigrupo numérico perfeito.*

No exemplo 1.16 é mostrado que se S é um semigrupo numérico com $e(S) = 2$, então $t(S) = 1$. Assim, aplicando a Proposição anterior, temos o seguinte resultado.

Corolário 4.8. *Se S é um semigrupo numérico e $e(S) = 2$, então S não é um semigrupo numérico perfeito.*

Lema 4.13. *Seja S um semigrupo numérico tal que $t(S) = 2$. Então $PF(S) = \{F(S) - 1, F(S)\}$ se, e somente se, $F(S) - 1 \notin S$.*

Demonstração. Se $PF(S) = \{F(S) - 1, F(S)\}$, então $F(S) - 1 \in \mathbb{Z} \setminus S$, e portanto, $F(S) - 1 \notin S$. Por outro lado, $t(S) = 2$, implica $S \neq \mathbb{N}$. Se $F(S) - 1 \notin S$, então $F(S) - 1 \in \mathbb{Z} \setminus S$. Agora $S \neq \mathbb{N}$, implica $1 \notin S$. Consequentemente, se $s \in S \setminus \{0\}$, temos $F(S) - 1 + s \in S$, porque $F(S) - 1 + s > F(S)$. Portanto, $F(S) - 1 \in PF(S)$. Como $t(S) = 2$, temos $PF(S) = \{F(S) - 1, F(S)\}$, já que $F(S) \in PF(S)$. $\square$

Teorema 4.6. *Seja S um semigrupo numérico com $t(S) = 2$. Então, S é um semigrupo numérico perfeito se, e somente se, $F(S) - 1 \notin S$.*

Demonstração. Se S é um semigrupo numérico perfeito, então pelo Lema 4.12, sabemos que $F(S) - 1 \notin S$. Por outro lado, se $F(S) - 1 \notin S$, então pelo Lema 4.13, temos $PF(S) = \{F(S) - 1, F(S)\}$. Agora, supomos que h é uma lacuna em S . Ou seja, $h \in G(S) = \mathbb{N} \setminus S$. Então, pela Proposição 1.8, temos $F(S) - h \in S$ ou $F(S) - 1 - h \in S$. Estudaremos esses dois casos. Se $F(S) - h \in S$, como $F(S) - 1 \notin S$, deduzimos que $F(S) - 1 - (F(S) - h) \notin S$, e portanto $h - 1 \notin S$. Se $F(S) - 1 - h \in S$, como $F(S) \notin S$, deduzimos que $F(S) - (F(S) - 1 - h) \notin S$, e portanto $h + 1 \notin S$. Dessa forma, provamos que, dada uma lacuna h em S , então também $h - 1$ ou $h + 1$ é uma lacuna em S . Portanto, S é um semigrupo numérico perfeito. $\square$

O seguinte resultado é derivado em [8, Corollary 10.22].

Lema 4.14. *Se S é um semigrupo numérico com $e(S) = 3$, então $t(S) \in \{1, 2\}$.*

Proposição 4.19. *Seja S um semigrupo numérico com $e(S) = 3$. Então S é um semigrupo numérico perfeito se, e somente se, $F(S) - 1 \notin S$.*

Demonstração. Pelo Lema 4.12, sabemos que se S é um semigrupo numérico perfeito, então $F(S) - 1 \notin S$. Por outro lado, se $F(S) - 1 \notin S$, então deduzimos que $F(S) - 1 \in PF(S)$. Aplicando o Lema 4.14, temos $PF(S) = \{F(S) - 1, F(S)\}$. Portanto, $t(S) = 2$, e aplicando o Teorema 4.6, temos que S é um semigrupo numérico perfeito. $\square$

Observe que com a proposição anterior caracterizamos todos os semigrupos numéricos perfeitos que possuem dimensão de imersão três pelo seu número de Frobenius. Pois bem, basta calcular o número de Frobenius de um semigrupo numérico de dimensão de imersão três para poder determinar se o semigrupo numérico é perfeito.

Lembremos que podemos calcular o número de Frobenius de semigrupos numéricos de dimensão de imersão três que são simétricos. Então podemos deduzir o seguinte corolário do Teorema 3.2 e da Proposição 4.19.

Corolário 4.9. *Seja S um semigrupo numérico simétrico com $e(S) = 3$. Então, existem constantes m_1 e m_2 inteiros positivos e primos entre si, ambos maiores que um e inteiros não negativos a , b e c , tais que $a \geq 2$, $b + c \geq 2$ com $\text{mdc}\{a, bm_1 + cm_2\} = 1$.*

Nessas condições, temos que:

$$S = \langle am_1, am_2, bm_1 + cm_2 \rangle.$$

Além disso, S é perfeito se, e somente se:

$$a(m_1m_2 - m_1 - m_2) + (a - 1)(bm_1 + cm_2) - 1 \notin S.$$

Exemplo 4.18. *O semigrupo numérico $S = \langle 10, 14, 17 \rangle$ do Exemplo 3.2 não é um semigrupo numérico perfeito, pois $F(S) = 63$ e $F(S) - 1 = 62 = 2(10) + 3(14) \in S$.*

O exemplo a seguir mostra que esses resultados não são válidos para semigrupos numéricos de dimensão de imersão maiores.

Exemplo 4.19. [12, p. 80] *Seja $S = \{0, 5, 7, 10, \rightarrow\} = \langle 5, 7, 11, 13 \rangle$. Então $e(S) = 4$, $F(S) = 9$ e $F(S) - 1 = 8 \notin S$. O semigrupo numérico S não é perfeito, pois 6 é uma lacuna isolada de S .*

Conclusões finais

1. Ao longo da primeira parte deste trabalho, ficou evidente como um problema de formulação simples pode estar longe de ter uma solução rápida. Vale destacar que foram necessárias diversas ferramentas matemáticas para obter a fórmula do número de Frobenius para semigrupos numéricos simétricos de dimensão de imersão três.
2. Em todo o estudo, tornou-se clara a importância de investigar as interações entre as múltiplas propriedades dos semigrupos numéricos. Conhecer profundamente essas relações permite resolver problemas utilizando uma variedade de métodos e técnicas.
3. Este trabalho contribui para a compreensão das interações entre as propriedades dos semigrupos numéricos. Com esse propósito, concluímos obtendo o Corolário 4.9, que caracteriza os semigrupos numéricos simétricos de dimensão de imersão três que são perfeitos.
4. Os resultados alcançados podem ter implicações relevantes para a busca de uma fórmula algébrica para o número de Frobenius. Uma vez obtida, essa fórmula se torna uma ferramenta útil para verificar se um semigrupo numérico possui outras propriedades específicas.
5. É importante ressaltar que, na primeira parte do trabalho, focamos exclusivamente em introduzir a teoria e os resultados necessários para obter a fórmula do número de Frobenius para semigrupos numéricos simétricos de dimensão de imersão três. Por essa razão, o estudo foi restrito a essa classe específica de semigrupos numéricos.
6. Uma possível linha de pesquisa futura seria o estudo de generalizações das interações entre as propriedades dos semigrupos numéricos em $\mathbb{N}^n$.
7. O desenvolvimento deste trabalho permitiu esclarecer a teoria e suas principais propriedades, bem como as relações entre elas. Esse conhecimento foi essencial para compreender em profundidade a solução do problema proposto e caracterizar algumas classes de semigrupos numéricos.

Referências Bibliográficas

- [1] J.L. Ramírez Alfonsín, *The diophantine frobenius problem*, Oxford Univ. Press, New York, 2005, <https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780198568209.001.0001>.
- [2] R. Apéry, *Sur les branches superlinéaires des courbes algébriques*, 1 ed., C.R.Acad.Sci.Paris, Paris, 1946.
- [3] C. Arf, *Une interpretation algebraique de la suite des ordres de multiplicite d'une branche algebrigue*, Proceedings of the London Mathematical Society Series (1949), no. 2, 256–287, <https://doi.org/10.1112/plms/s2-50.4.256>.
- [4] M. Bras-Amoros, *Fibonacci-like behavior of the number of numerical semigroups of a given genus*, Semigroup Forum **76** (2008), 379–384, <https://doi.org/10.1007/s00233-007-9014-8>.
- [5] A. Campillo, *On saturations of curve singularities (any characteristic)*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics (1983), no. 10, 211–220, <https://doi.org/10.1090/pspum/040.1/713060>.
- [6] M. Diniz, *Sobre semigrupos numéricos*, Repositório Institucional - Universidade Federal de Uberlândia **1** (2022), no. 1, 114, <http://doi.org/10.14393/ufu.di.2022.245>.
- [7] Jean Fromentin, *Exploring the tree of numerical semigroups*, HAL open science **3** (2015), 1–15, <https://hal.science/hal-00823339v1>.
- [8] P.A. García and J.C. Rosales, *Numerical semigroups*, 20 ed., Springer, New York, 2009.
- [9] P.A. García-Sánchez, B.A. Heredia, and J.C. Rosales, *Parametrizing arf numerical semigroups.*, Journal of Algebra and Its Applications **16** (2017), no. 11, 1750209, <https://doi.org/10.1142/S0219498817502097>.
- [10] J. Lipman, *Stable ideals and arf rings*, American Journal of Mathematics (1971), no. 93, 649–685, <https://doi.org/10.2307/2373463>.
- [11] M. Moreno and J. Rosales, *Perfect numerical semigroups*, Turkish Journal of Mathematics **43** (2019), no. 3, 47, <https://doi.org/10.3906/mat-1901-111>.
- [12] M. Moreno and J.C. Rosales, *Perfect numerical semigroups with embedding dimension three*, Publ. Math. Debrecen **97** (2020), no. 1-2, 77–84.
- [13] F. Pham and B. Teissier, *Fractions lipschitziennes et saturations de zariski des algebres analytiques complexes.*, In: Ce travail est la base de l'exposé de Frédéric Pham au Congrès International des Mathématiciens (1970), no. 9.
- [14] J. Rosales, *Principal ideals of numerical semigroups*, Bulletin of the Belgian Mathematical Society (2003), no. 10, 1–15, <https://doi.org/10.36045/bbms/1063372340>.

- [15] J.C. Rosales, *Semigrupos numericos*, Tesis Doctoral, Universidad de Granada (2001).
- [16] J.C. Rosales, M. Branco, and D. Torráo, *On the enumeration of the set of saturated numerical semigroups of a given genus*, Semigroup Forum **88** (2014), 621–630, <https://doi.org/10.1007/s00233-013-9558-8>.
- [17] J.C. Rosales and M.B. Branco, *The frobenius problem for numerical semigroups*, Journal of Number Theory **131** (2011), 2310–2319, <https://doi.org/10.1016/j.jnt.2011.05.011>.
- [18] J.C. Rosales, J.I. García-García, and M. Branco, *Saturated numerical semigroups*, Houston Journal of Mathematics (2004), no. 30, 321–330.
- [19] J.C. Rosales, P.A. García-Sánchez, and J.M. Urbano-Blanco, *On presentations of commutative monoids*, Internat. J. Algebra Comput. **9** (1999), no. 5, 539–553, <https://doi.org/10.1142/S0218196799000333>.
- [20] D. Torráo, M. Branco, and J.C. Rosales, *On the enumeration of the set of saturated numerical semigroups with fixed frobenius number*, Applied Mathematics and Computation **236** (2014), 471–479, <https://doi.org/10.1016/j.amc.2014.03.058>.
- [21] O. Zariski, *General theory of saturation and of saturated local rings i, ii, iii.*, American Journal of Mathematics **93** (1971), no. 3, 573–684, <https://doi.org/10.2307/2373462>.