

La Figure 7.3 montre une comparaison entre les amplitudes des FRFs obtenues à partir du modèle élément finis et la correspondante issue de la mesure expérimentale (FRFs identifiées), dans la bande de fréquence comportant les quatre premiers modes de la structure. Le Tableau 7.1 montre les erreurs relatives entre le calcul et l'essai pour les fréquences modales et les amplitudes de vibration du système non-amorti représentées en Figure 7.3.

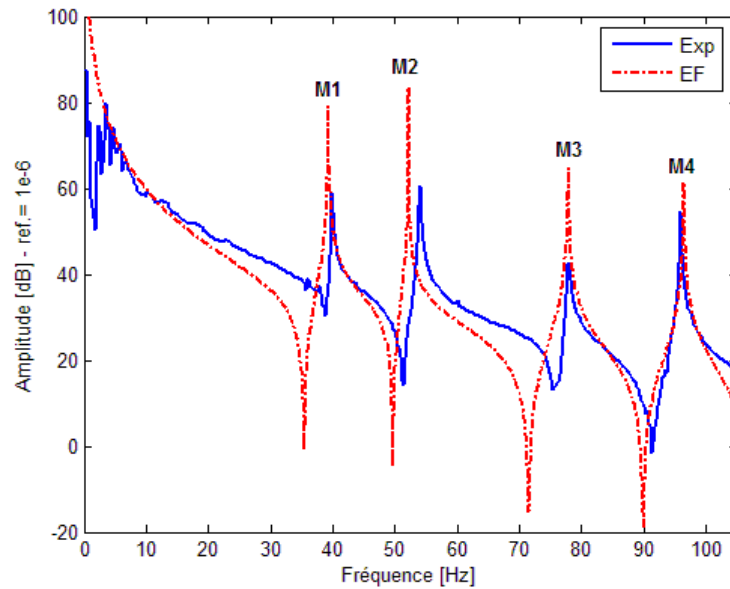


Figure 7.3 – FRFs expérimentale (Exp) et analytique (EF) de la plaque non-amorti.

Tableau 7.1 – Fréquences modales calculées et mesurées du système non-amorti

Mode	Fréquence f_{EF} [Hz]	Fréquence f_{Exp} [Hz]	Erreur ε_f [%]	Amplitude H_{EF} [dB]	Amplitude H_{Exp} [dB]	Erreur ε_H [%]
M1	39.42	39.76	0.86	78.961	59.331	33.1
M2	52.30	53.50	2.24	83.571	60.669	37.4
M3	77.95	78.01	0.08	64.794	42.531	52.3
M4	96.45	96.00	0.50	61.614	54.617	12.8

Les erreurs relatives entre les valeurs de fréquence propres et entre les amplitudes de résonances sont définies par les critères suivants :

$$\varepsilon_f = \left| \frac{f_{EF} - f_{Exp}}{f_{Exp}} \right| \times 100 \quad (7.1)$$

$$\varepsilon_H = \left| \frac{H_{EF} - H_{Exp}}{H_{Exp}} \right| \times 100 \quad (7.2)$$

Les faibles valeurs des erreurs relatives entre les fréquences montrent qu'on n'a pas besoin de recalculer le module d'Young du matériau pour approcher le modèle EF et l'essai. Néanmoins, on observe que pour les amplitudes de vibration, on doit ajouter l'amortissement dans le modèle EF de manière à rapprocher les valeurs des amplitudes calculées et mesurées.

Pour cela, on a constaté qu'une valeur du facteur d'amortissement visqueux qui assure une corrélation satisfaisante entre le modèle et l'essai est $\zeta = 0.001$. La Figure 7.4 montre la FRF expérimentale et celle obtenue à partir du modèle EF recalé.

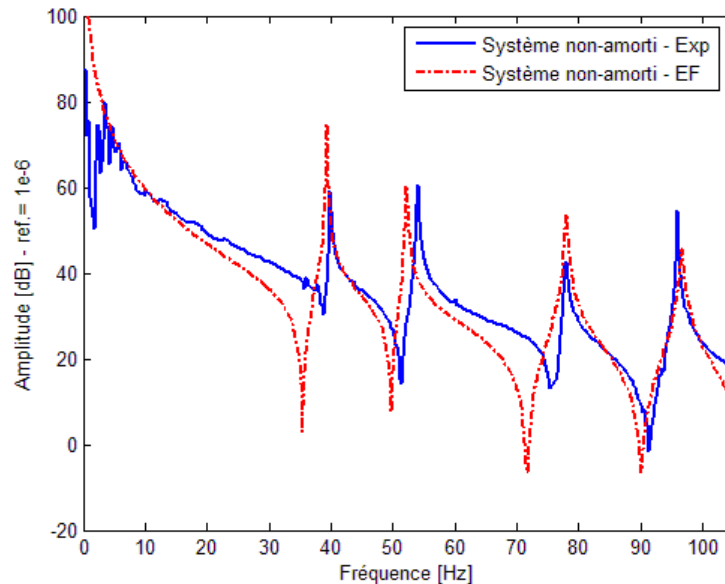


Figure 7.4 – FRF expérimentale et numérique de la plaque recalé

7.1.2 Optimisation multiobjectif robuste

Pour l'optimisation, on considère le modèle EF recalé précédemment, où on s'intéresse à l'optimisation des positions de 4 traitements viscoélastiques, chacun composée par 9 éléments finis de plaque sandwich à trois couches. De plus, on considère dans l'optimisation que les épaisseurs des couches viscoélastique et contrainte, ainsi que la température du matériau, sont des variables continues à optimiser. Par conséquent, pour le problème d'optimisation, il y a au total 13 variables définissant l'espace de conception : 9 variables continues (4 pour les épaisseurs de couches viscoélastiques, 4 pour les épaisseurs de couches contraintes, et la température du matériau). Il y a aussi 4 variables discrètes représentant les positions des traitements. Le Tableau 7.2 présente les valeurs nominales des variables de conception continues et les plages de variations admissibles.

Pour prendre en compte les incertitudes dans les variables de conception retenues dans l'optimisation, les paramètres géométriques et la température sont perturbées au maximum de 10% et 5%, respectivement, par rapport à leurs valeurs nominales selon une loi normale. Pour calculer les fonctions de vulnérabilité, à chaque génération, on génère **500 tirages aléatoires** pour chaque variable continue par la méthode d'Hyper Cube Latin (HCL). Vu le nombre total d'évaluations des fonctions de vulnérabilité pour chaque génération, dans le problème d'optimisation multiobjectif robuste on utilise les réseaux de neurones (PMC) couplés avec la méthodologie de condensation robuste pour réduire le temps de calcul des solutions. Les paramètres du NSGA-PMC sont définis au Tableau 7.3.

Tableau 7.2 – Définition de l'espace de conception – plaque plane

	Variables de conception	Valeurs nominales	Variations admissibles	Niveaux d'incertitudes
Continue	$h_{2i} \ (i = 1, \dots, 4 \text{ patches})$	0,0254 mm	$\pm 60\%$	$\Delta h_2 = 10\%$
	$h_{3i} \ (i = 1, \dots, 4 \text{ patches})$	0,5 mm	$\pm 30\%$	$\Delta h_3 = 10\%$
	T	25°C	$\pm 15\%$	$\Delta T = 5\%$
Discrete	Positions des traitements			

Tableau 7.3 – Paramètres de NSGA-PMC

NSGA		PMC	
Probabilité de sélection	0,25	No. de couches cachées No. de neurones par couche	2 20
Probabilité de croisement	0,25		
Probabilité de mutation	0,25		
Nombre de générations	100		
Nombre d'individus/génération	30		
Coefficient de niche (σ)	0,2		

Les fonctions objectif à minimiser sont les suivantes :

$$\text{minimiser} \quad \begin{cases} f_1 = \text{amplitude}(M1) \\ f_2 = \text{amplitude}(M2) \end{cases} \quad (\text{Indiquées en Figure 7.3}) \quad (7.3)$$

Ainsi, le problème d'optimisation multiobjectif déterministe à deux fonctions coût est ramené à un problème d'optimisation multiobjectif robuste à quatre fonctions coût à minimiser, à savoir : les fonctions coût définies initialement par l'expression (7.3), et les fonctions de vulnérabilité supplémentaires (Cf. Section 5.4.4, Chapitre 5).

La Figure 7.5.a montre l'évolution des solutions robustes NSGA pour les deux fonctions coût (soit en total de 18180 solutions), et la Figure 7.5.b représente les points optimaux **A**, **B**, et **C** situés sur le premier Front de Pareto.

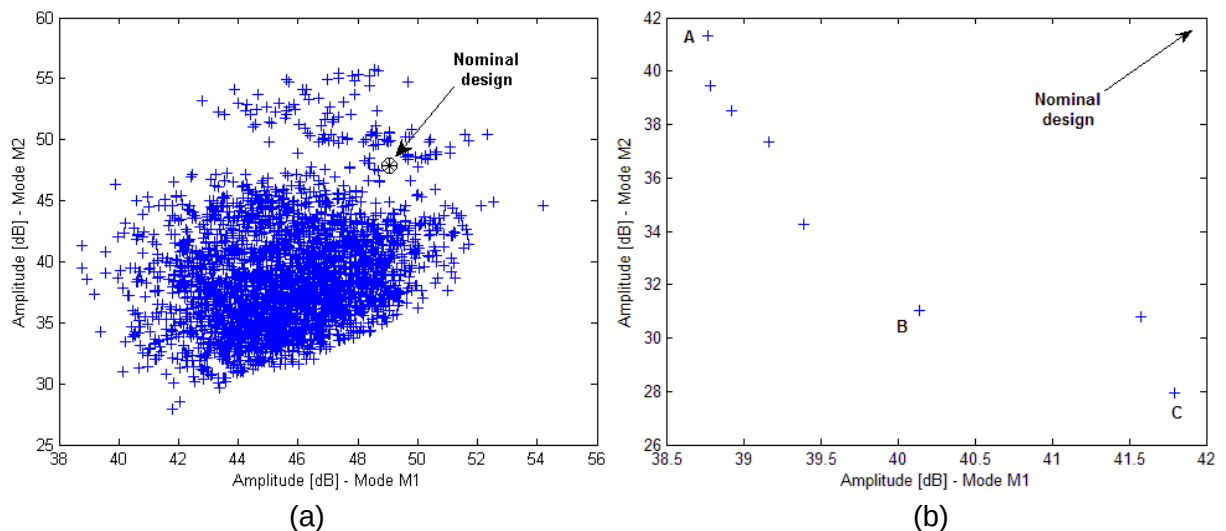


Figure 7.5 – Solutions NSGA robustes (a) ; Front de Pareto (b) pour les deux fonctions coût.

Les Figures 7.6.a et 7.6.b illustrent chaque fonction coût et sa vulnérabilité. Les fonctions de vulnérabilité utilisées représentent les dispersions autour de chaque solution trouvée. Sur les Figures 7.6.a et 7.6.b on remarque que l'intervalle de dispersion pour chaque fonction coût est respectivement :

- de 0,5% à 3% pour les solutions optimales correspondantes au mode M1
- de 0,45% à 4,5% pour les solutions optimales correspondantes au mode M2

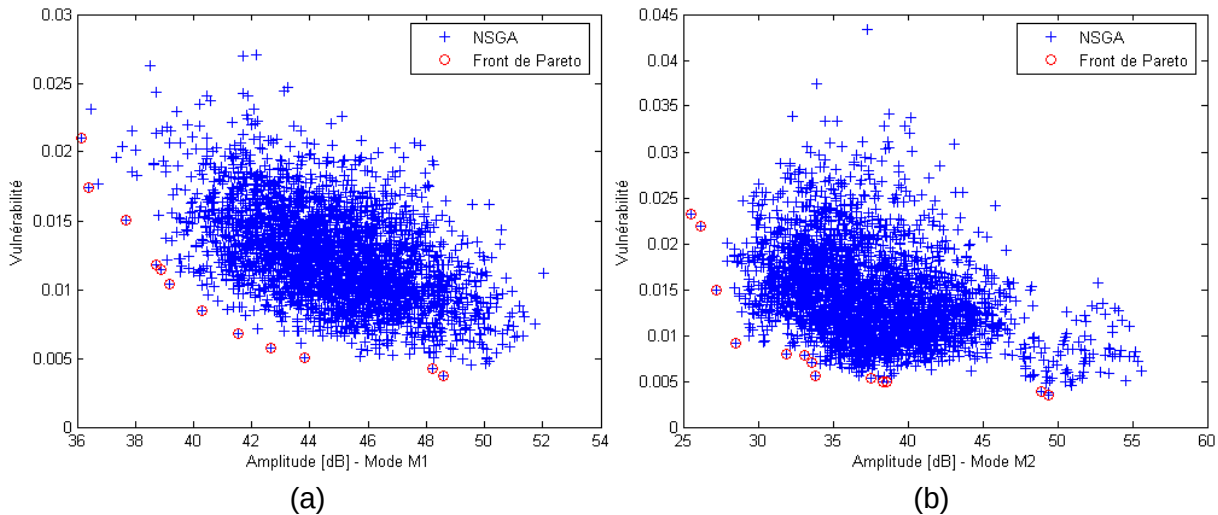


Figure 7.6 – Amplitude au mode M1 – Vulnérabilité (a); Amplitude au mode M2 – Vulnérabilité (b).

Remarque : Comme montré au Tableau 7.3, le nombre total de générations nécessaires pour trouver les solutions optimales robustes est de 100 générations, ce qui signifie qu'il faut 3000 évaluations exactes des réponses fréquentielles du système amorti et, pour chaque génération, on doit évaluer les échantillons pour calculer les fonctions de vulnérabilité associées aux fonctions coût. Cela peut engendrer un nombre prohibitif d'évaluations du problème exact (pour ce cas, $1,5 \times 10^6$ évaluations). Ce fait démontre l'intérêt au couplage des techniques d'approximations de fonctions ou métamodèles avec les algorithmes NSGA, proposés au Chapitre 4.

Dans ce cas, on intègre les réseaux de neurones (PMC) dans la procédure d'optimisation robuste, dans le but de réduire davantage le nombre d'évaluations exactes et par conséquent le coût numérique. Pour cela, le PMC est actualisé à chaque 20 générations à partir de la génération 5. Ainsi sur 100 générations, l'opération permet de ne faire que 170 évaluations exactes. Le Tableau 7.4 résume le gain en temps de calcul (CPU) obtenu par l'utilisation de la méthode NSGA et NSGA-PMC, pour ce problème d'optimisation robuste. On précise que pour les deux cas on utilise la méthode de condensation robuste avec une base de réduction de taille égale à la base proposée en Section 4.3.1, Chapitre 4.

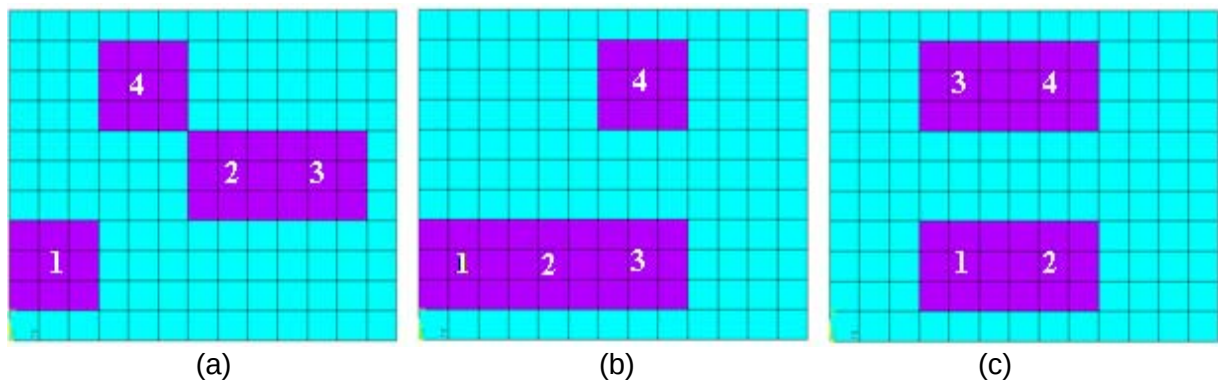
Tableau 7.4 – Temps de calcul (NSGA-PMC)

Stratégie	CPU Time [jours]	Rapport [%]
NSGA	15	80
NSGA-PMC	3	

7.1.3 Vérification expérimentale des solutions optimales robustes

Dans cette partie, on évalue les solutions optimales correspondant aux points **A**, **B** et **C**, indiqués en Figure 7.5.b. Pour cela, on compare les amplitudes de vibrations amorties (FRFs) associées au point **P** (voir Figure 7.1), calculées à partir du modèle EF recalé amorti et celles identifiées expérimentalement.

La Figure 7.7 illustre les positions optimales des traitements viscoélastiques pour les points **A** (a), **B** (b), et **C** (c), respectivement. Le Tableau 7.5 donne les valeurs optimales robustes pour chaque variable de conception continue, pour chaque configuration du traitement viscoélastique montré en Figure 7.7.

Figure 7.7 – Positions optimales des traitements pour les points **A** (a), **B** (b) et **C** (c).Tableau 7.5 – Valeurs optimales des épaisseurs de chaque patch (points **A**, **B**, **C**)

Point	Patch 1		Patch 2		Patch 3		Patch 4	
	h_2 [mm]	h_3 [mm]	h_2 [mm]	h_3 [mm]	h_2 [mm]	h_3 [mm]	h_2 [mm]	h_3 [mm]
A	0,0261	0,65	0,0406	0,65	0,0332	0,65	0,0264	0,65
B	0,0258	0,65	0,0365	0,65	0,0378	0,55	0,0359	0,65
C	0,0261	0,65	0,0406	0,65	0,0332	0,65	0,0264	0,65
T = 22,45°C (point A); T = 22,83°C (point B); T = 22,45°C (point C);								

Par la comparaison entre les Figures 7.5.b et 7.8, pour le point **A**, on observe que les solutions optimales mènent à une meilleure atténuation de la réponse pour le mode M1 en comparaison avec le mode M2, aussi bien pour le calcul que pour l'essai. De plus, on peut remarquer la bonne précision du modèle aux éléments finis de plaque multicouche pour prédire le comportement réel du système amorti par couche contrainte. Ce fait est confirmé par les erreurs relatives acceptables entre les fréquences modales et les amplitudes des réponses entre le calcul et l'essai, montrées en Tableau 7.6. Pour les points **B** et **C** (Figure 7.5.b), les solutions optimales conduisent à une meilleure atténuation pour le mode M2 (Figures 7.9 et 7.10) en comparaison avec le mode M1. Les Tableaux 7.7 et 7.8 montrent les erreurs relatives calcul-essai en fréquence et en amplitude pour ces deux points.

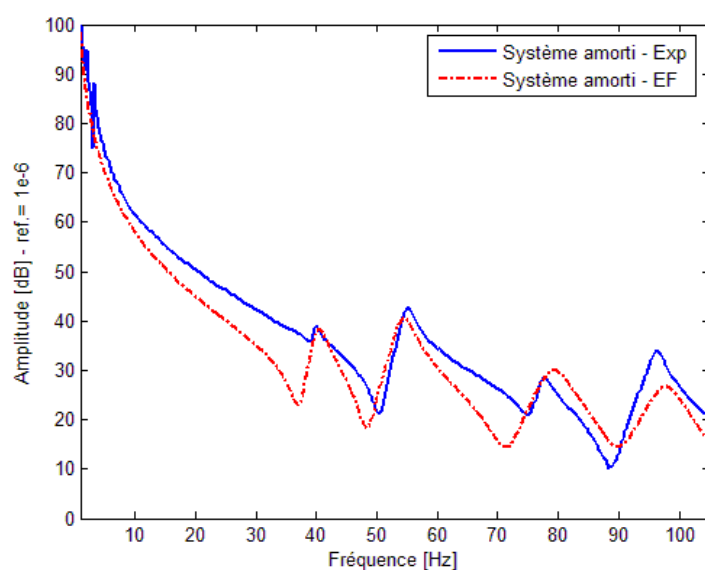
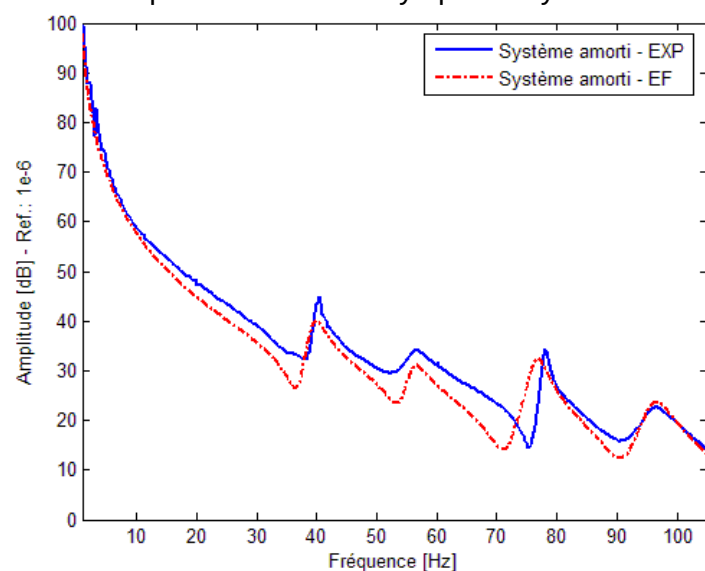
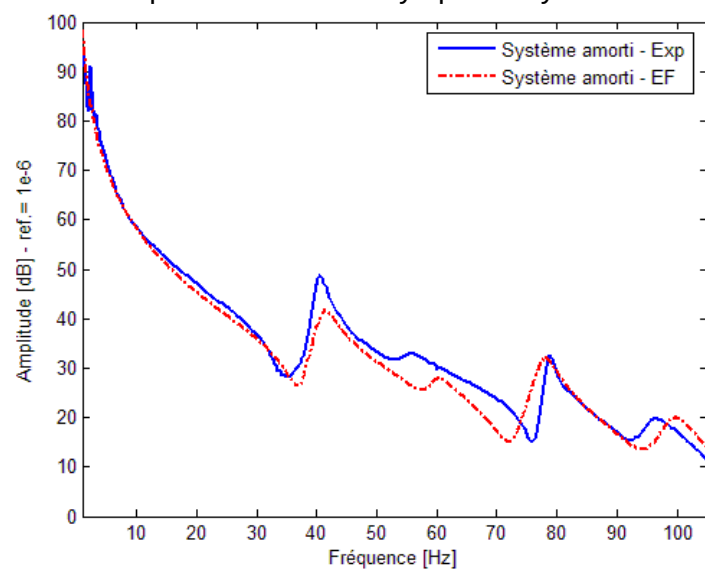
Figure 7.8 – FRFs expérimentale et analytique du système amorti – point **A**Figure 7.9 – FRFs expérimentale et analytique du système amorti – point **B**Figure 7.10 – FRFs expérimentale et analytique du système amorti – point **C**

Tableau 7.6 – Fréquences modales calculées et mesurées du système amorti – point **A**

Mode	Fréquence f_{EF} [Hz]	Fréquence f_{Exp} [Hz]	Erreur ε_f [%]	Amplitude H_{EF} [dB]	Amplitude H_{Exp} [dB]	Erreur ε_H [%]
M1	40,49	40,01	1,2	38,39	38,92	1,4
M2	54,57	55,10	1,0	40,65	42,69	4,8
M3	79,31	77,52	2,3	30,13	28,67	5,1
M4	97,83	96,83	1,0	26,70	33,87	21,2

Tableau 7.7 – Fréquences modales calculées et mesurées du système amorti – point **B**

Mode	Fréquence f_{EF} [Hz]	Fréquence f_{Exp} [Hz]	Erreur ε_f [%]	Amplitude H_{EF} [dB]	Amplitude H_{Exp} [dB]	Erreur ε_H [%]
M1	39,88	40,50	1,5	40,05	44,98	11
M2	56,57	56,55	0,03	31,03	34,15	9,1
M3	76,82	77,98	1,5	32,55	34,35	5,2
M4	96,54	96,49	0,1	23,78	22,68	4,9

Tableau 7.8 – Fréquences modales calculées et mesurées du système amorti – point **C**

Mode	Fréquence f_{EF} [Hz]	Fréquence f_{Exp} [Hz]	Erreur ε_f [%]	Amplitude H_{EF} [dB]	Amplitude H_{Exp} [dB]	Erreur ε_H [%]
M1	41,47	40,61	2,1	41,71	48,77	14,5
M2	60,47	55,87	8,2	27,95	32,95	15,2
M3	78,17	78,82	0,8	31,97	32,53	1,7
M4	99,79	96,50	3,4	19,96	19,81	0,8

7.1.4 Discussion des résultats

• Modèle aux éléments finis de plaque sandwich

Les résultats analytiques et expérimentaux présentés permettent d'évaluer l'influence du traitement viscoélastique par couche contrainte sur le comportement dynamique des systèmes structuraux. Un aspect particulier à retenir est la capacité démontrée par le modèle EF pour représenter le comportement des matériaux viscoélastiques en fonction de la fréquence d'excitation et de la température. En ce qui concerne l'atténuation des niveaux de vibrations, on remarque à travers les Figures 7.8 à 7.10 que le traitement viscoélastique par couche contrainte a permis de diminuer significativement les amplitudes pour tous les modes dans la bande fréquentielle analysée.

A travers la comparaison des erreurs entre le calcul et essai, on conclue que les deux résultats sont raisonnablement proches, dans le sens où les erreurs en fréquence et en amplitude pour le calcul et l'essai ne sont pas trop élevées. Pour les solutions optimales indiquées par les points **B** et **C**, on remarque une augmentation des valeurs des erreurs relatives entre les fréquences modales et les amplitudes de vibration, en comparaison avec celles calculées pour le point **A**. On estime que ces erreurs sont dues principalement aux sources suivantes :

- o Dans le modèle EF, on suppose des conditions idéales d'application du traitement viscoélastique, tel que l'état d'adhérence parfaite entre les couches ;

- o Existence d'imperfections induites pendant le collage des couches viscoélastiques et contraintes pour les configurations de patches **A** et **B**, comme par exemple, le nettoyage imparfait des surfaces de chaque couche avant d'appliquer le traitement ;
 - o Oscillations constantes de la température sur le comportement dynamique du matériau viscoélastique pendant les essais.
- **Optimisation multiobjectif robuste**

Si on compare les valeurs des amplitudes optimales des résonances M1 et M2 correspondants aux points **A**, **B**, et **C** sur le Front de Pareto, montré en Figure 7.5.b, et les valeurs analytiques et expérimentales des amplitudes de vibration sur les courbes montrées en Figure 7.8 à 7.10, on constate l'efficacité de l'algorithme NSGA-PMC pour prédire les bonnes positions de patches viscoélastiques, et les valeurs des variables continues pour agir soit sur l'amplitude de vibration du mode M1, soit sur l'amplitude de vibration du mode M2. Cela confirme la performance de l'algorithme NSGA pour des problèmes multiobjectif utilisant un ensemble hybride des variables discrètes et continues.

En termes de la dispersion des solutions optimales, on a vérifié que les variables optimales sont robustes, puisque pour le calcul et pour l'essai, on n'utilise pas les valeurs des épaisseurs de couches contraintes issues de l'optimisation, 0,55mm et 0,65mm, mais les valeurs plus proches disponibles commercialement, 0,5mm et 0,7mm, respectivement. Ceci n'a pas causé des grandes dégradations de la performance des traitements viscoélastiques, comme montré en Figures 7.11 à 7.13, qui représentent les simulations numériques pour chaque configuration **A**, **B** et **C**, respectivement, pour les deux ensembles des épaisseurs de la couche contrainte : (0.55mm ; 0.66mm) et (0.5mm ; 0.7mm). Pour la couche viscoélastique, dans le cas des épaisseurs plus grandes que celle qui est disponible, on superpose tout simplement les deux couches.

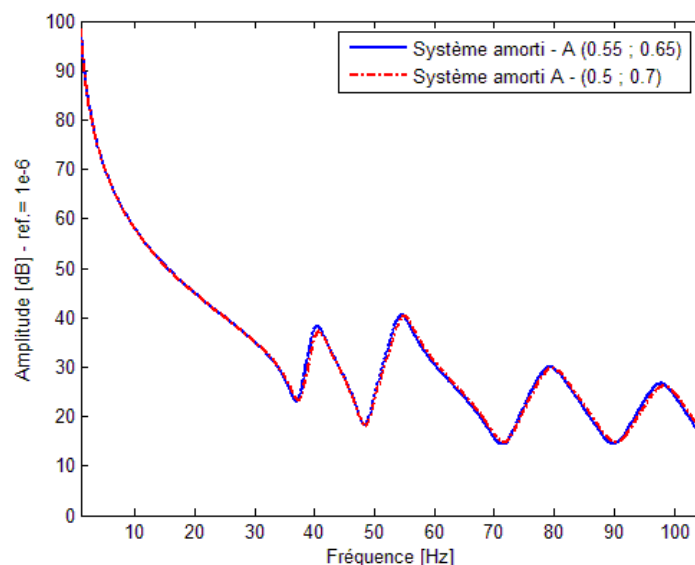
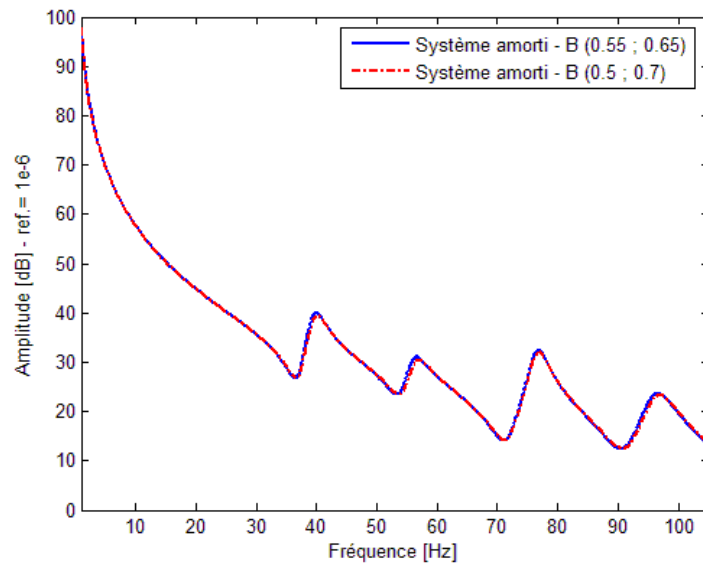
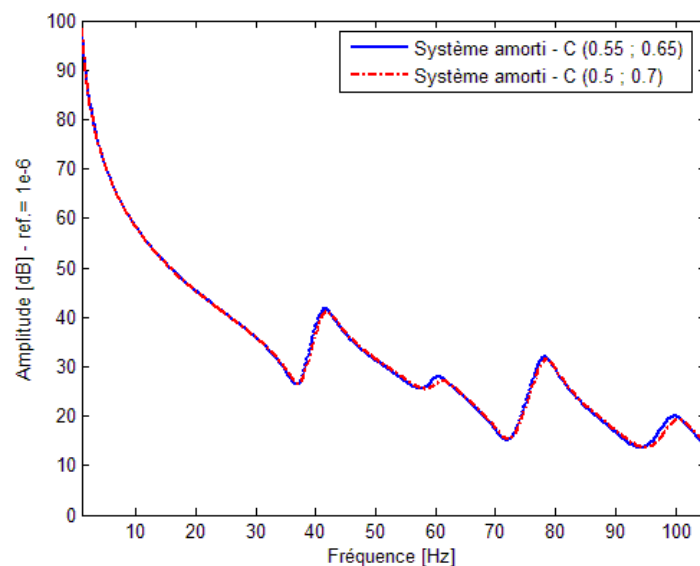


Figure 7.11 – Dispersion des FRFs analytiques du système amorti – point **A**

Figure 7.12 – Dispersion des FRFs analytiques du système amorti – point **B**Figure 7.13 – Dispersion des FRFs analytiques du système amorti – point **C**

7.2 Application industrielle : Compresseur de réfrigérateur

Dans cette section, on montre à travers les résultats analytiques et expérimentaux, l'intérêt d'utiliser le traitement viscoélastique par couche contrainte dans les systèmes industriels en vue de la réduction des niveaux de vibration. Pour cela, on évalue de façon expérimentale la performance du traitement viscoélastique appliqué à une carcasse d'un compresseur de réfrigérateur, dans le but d'amortir leurs niveaux vibratoires. On précise que cette partie est en cours d'étude dans le cadre d'un projet de recherche et développement en collaboration entre la Faculté de Génie Mécanique de l'UFU et la société EMBRACO, au Brésil.

Avant de passer aux essais expérimentaux, on réalise quelques simulations numériques avec un modèle EF du compresseur fourni par l'entreprise montré en Figure 7.14.a, auquel on va appliquer le traitement viscoélastique indiqué. On précise que la position du traitement a été

choisie *a priori* à l'aide de l'identification des zones qui présentent des énergies de déformation maximales (*Modal Strain Energy–MSE*) (Rogers et al, 1981), dans la bande fréquentielle d'intérêt.

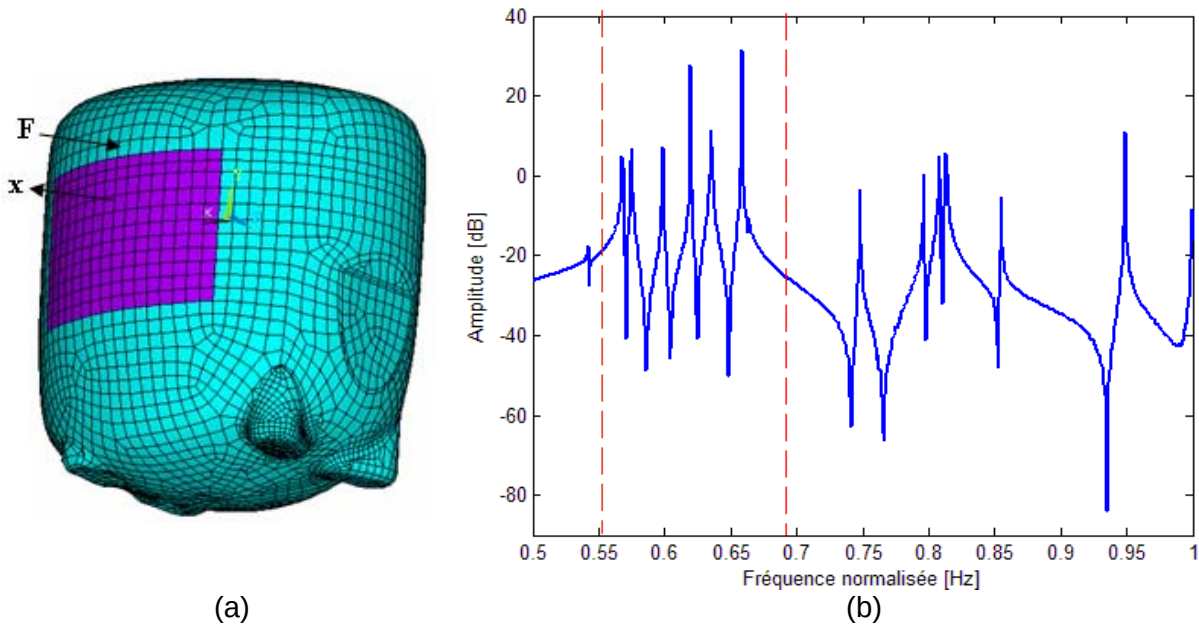


Figure 7.14 – Modèle EF du compresseur (a) ; FRF normalisée du système non amorti.

La Figure 7.14.b montre la FRF du système non amorti, associée à la force F et au déplacement X indiqués en Figure 7.14.a. Dans la bande fréquentielle analysée, il y a un total de 7 modes de vibration dont on souhaite diminuer les amplitudes vibratoires par l'introduction du traitement viscoélastique. Le modèle EF du compresseur sans traitement est composé par 3662 éléments finis de plaque mince SHELL63, soit un nombre total de 21870 d.d.l. Le traitement viscoélastique est composé par 177 éléments finis de plaque sandwich à trois couches développé au Chapitre 3, ce qui conduit à une augmentation de 612 d.d.l supplémentaires, soit un nombre total de 22482 d.d.l pour le système traité.

Remarque : On précise que pour l'introduction des traitements viscoélastiques dans des modèles EF de géométries complexes, modélisés par le code ANSYS, tels que le modèle EF du compresseur en étude, on utilise la procédure de couplage/remplacement des éléments finis de plaque sandwich développés au Chapitre 3 sur la plateforme MATLAB, avec les éléments de plaque simple modélisés par le code ANSYS. Ensuite, on fait l'introduction des propriétés viscoélastiques et l'évaluation des réponses dynamiques de la structure complète amortie dans la plateforme MATLAB.

Le Tableau 7.9 donne les valeurs des paramètres géométriques des couches viscoélastique et contrainte, utilisées pour évaluer l'influence du traitement viscoélastique sur les niveaux vibratoires de la structure test.

Tableau 7.9 – Définition de l'espace de conception – compresseur

Variable	Valeurs nominales
h_2	0,0254 mm
h_3	0,5 mm ; 0,9 mm ; 1,2 mm ; 1,5 mm
T	25°C

La Figure 7.15 montre les FRFs amorties calculées à partir du modèle aux éléments finis, pour les différentes valeurs des épaisseurs de la couche contrainte. Comme prévu, on observe une diminution des amplitudes de vibration pour tous les modes dans la bande fréquentielle d'analyse. Ceci signifie qu'une augmentation de l'épaisseur de la couche contrainte engendre une augmentation de la dissipation du matériau viscoélastique.

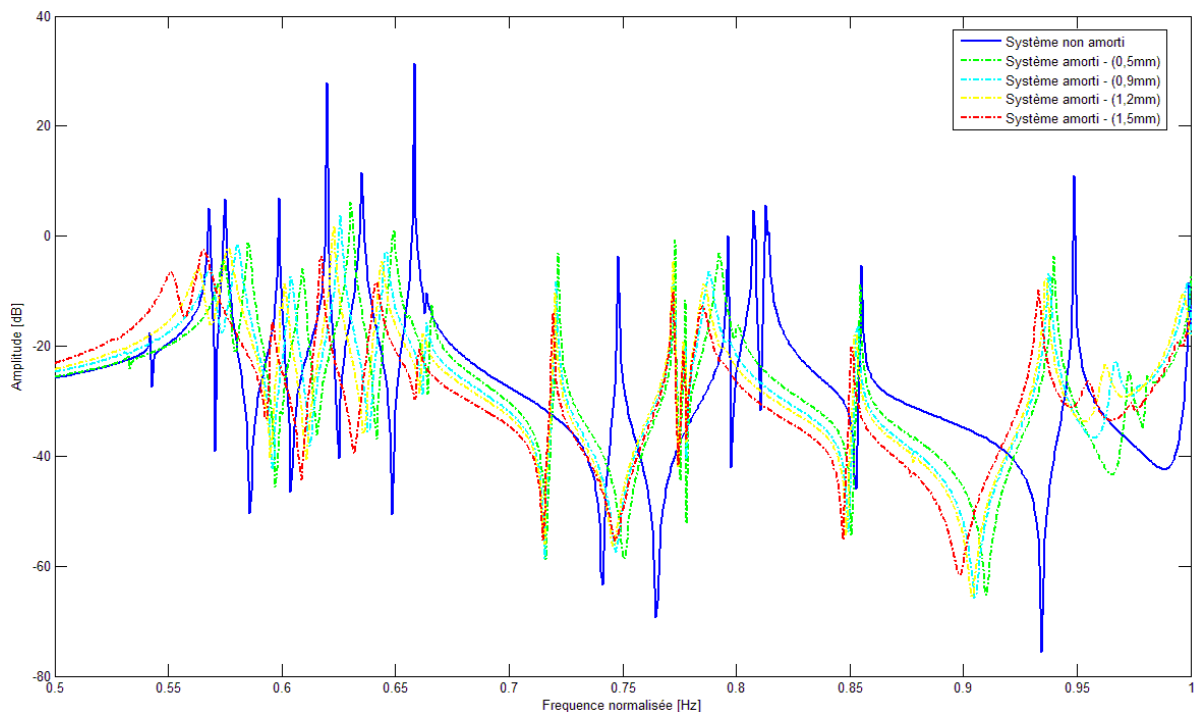


Figure 7.15 – FRFs calculées du système amorti, représentant l'influence de la couche contrainte sur la performance du traitement viscoélastique.

Remarque : Le modèle EF du compresseur n'est pas recalé, car à ce stade de l'étude, on souhaite vérifier *a priori* l'efficacité du traitement viscoélastique.

La Figure 7.16 montre en détail l'évolution de la performance du traitement viscoélastique pour les différentes épaisseurs de la couche contrainte.

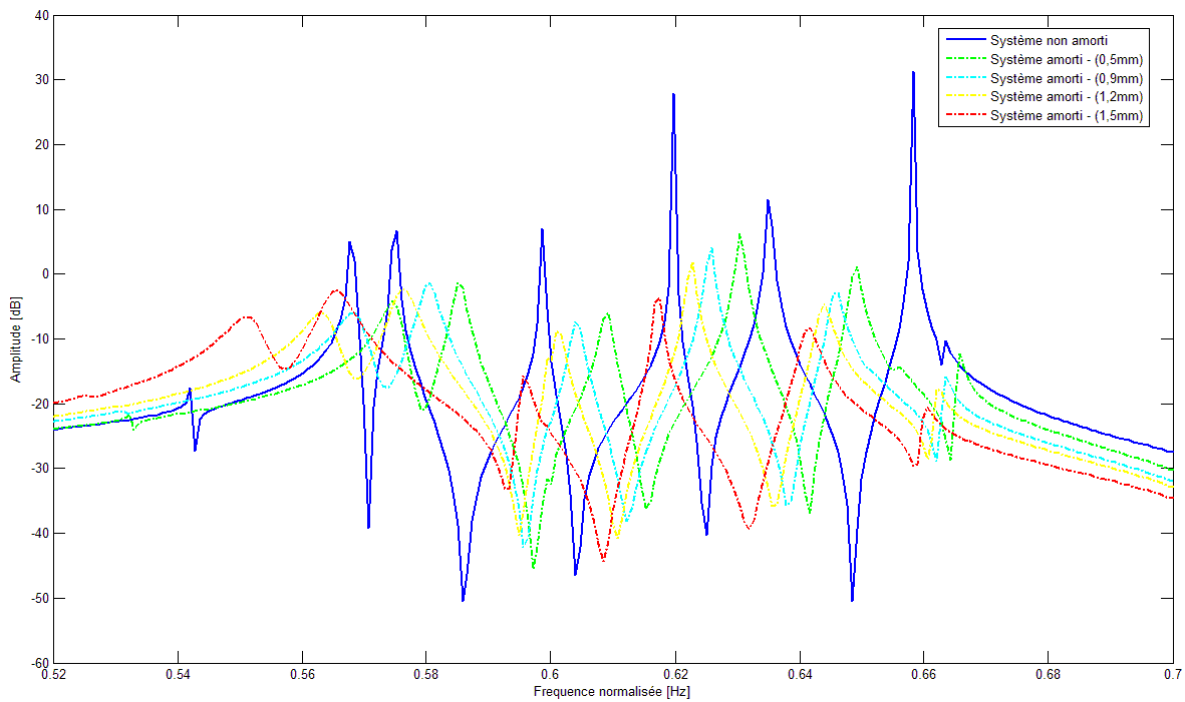


Figure 7.16 – Détail des FRFs calculées du système amorti.

7.2.1 Essai expérimental avec le compresseur

Dans cette section, on évalue expérimentalement la performance du traitement viscoélastique pour les différentes couches contraintes. La Figure 7.17 représente le montage expérimental utilisé pour obtenir les réponses dynamiques du compresseur suspendu pour trois fils d'acier suffisamment flexibles pour simuler les conditions libres.

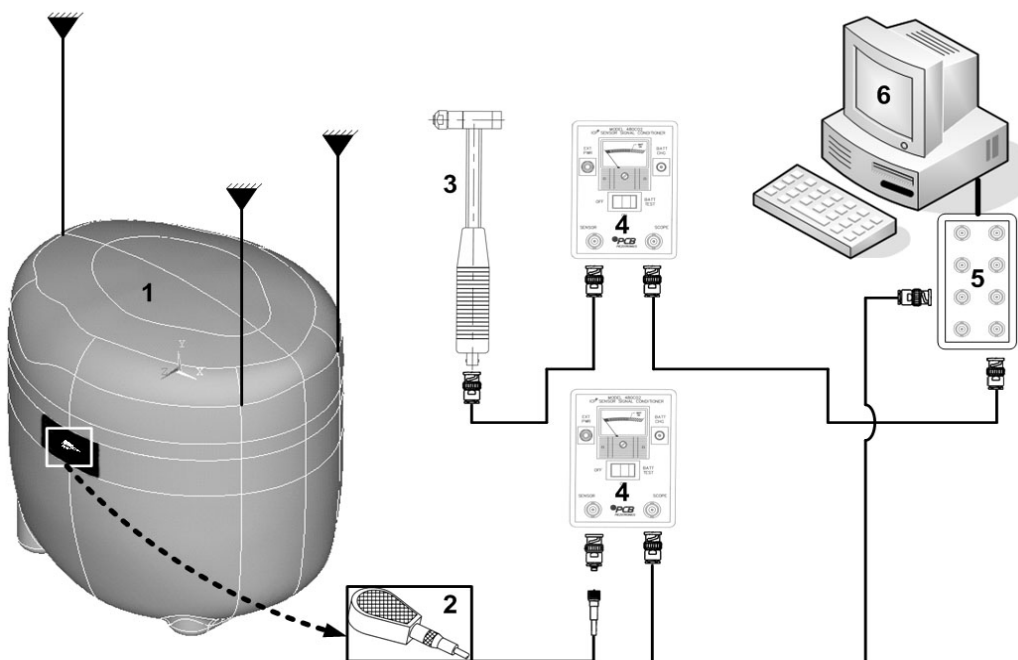


Figure 7.17 – Montage expérimental avec la carcasse du compresseur.

- (1) compresseur ; (2) accéléromètre ; (3) marteau d'impact ; (4) les amplificateurs de signaux ;
(5) plaque dSPACE avec 8 chaînes ; (6) ordinateur personnel.

La Figure 7.18 montre une photo de la structure, où le point 4 correspond au point d'impact par un marteau de choc et le point X correspond au placement du capteur accéléromètre.



Figure 7.18– Structure instrumentée et points d'identification des FRFs expérimentales.

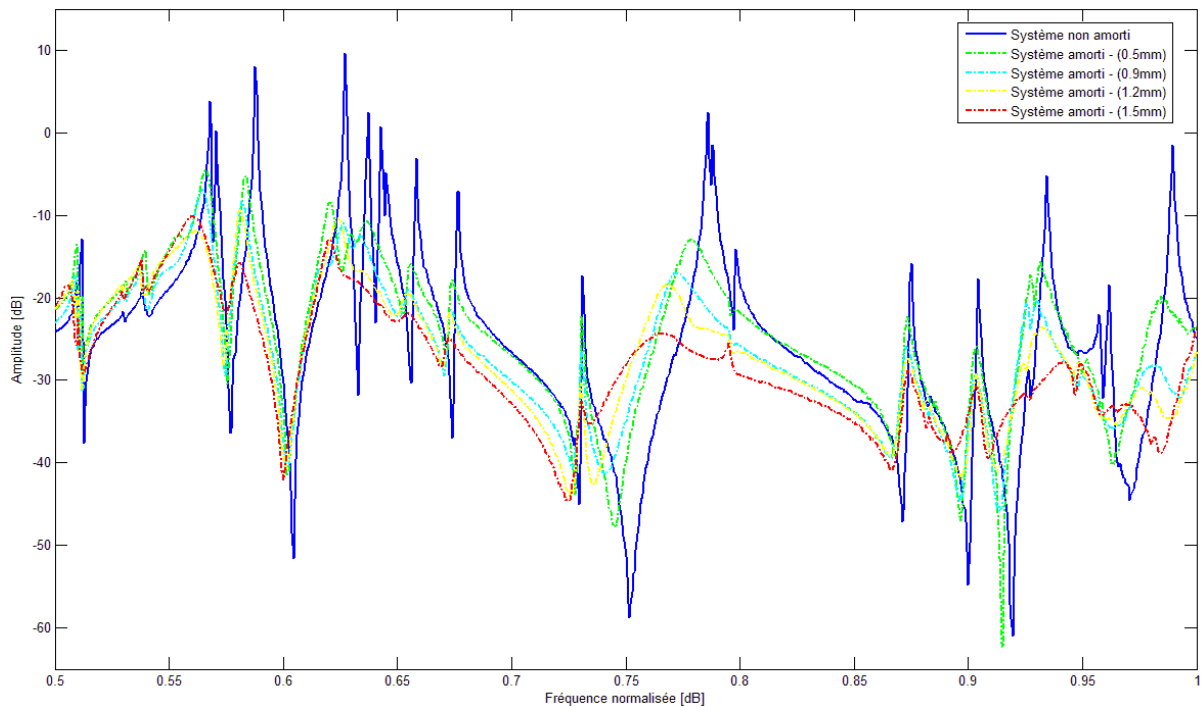


Figure 7.19 – FRFs expérimentales du système amorti, représentant l'influence de l'épaisseur de la couche contrainte sur la performance du traitement viscoélastique.

Comme prévu par les simulations numériques montrées en Figure 7.16, la Figure 7.19 montre expérimentalement l'influence très significative de la couche contrainte sur la performance du traitement viscoélastique par couche contrainte. A travers cette figure, on remarque l'efficacité du traitement viscoélastique par couche contrainte en réduire les amplitudes de résonances de tous les modes de la bande fréquentielle analysée, ce qui donne tout l'intérêt à ce type de traitement viscoélastique au domaine industriel.

7.3 Conclusions

Dans ce chapitre, on a tenté de valider de façon analytique et expérimentale les éléments finis de plaque à trois couches à travers l'utilisation d'une structure simple composée par une plaque plane partiellement traitée par couche contrainte. Dans le but de vérifier plus précisément l'effet de amortissement introduit dans la structure, un recalage simple du modèle EF de plaque a été effectué par l'introduction d'un facteur d'amortissement visqueux pour mieux approcher les amplitudes de résonances entre le calcul et l'essai de la plaque sans traitement viscoélastique. A partir du modèle non-traité recalé, on a pu appliquer la méthodologie d'optimisation multiobjectif robuste, dans le but de trouver les variables continues (épaisseurs de couches et température), et les positions optimales de patches viscoélastiques, pour amortir les amplitudes de vibration du premier et du deuxième mode de la structure. La comparaison calcul-essai montre l'utilité de la procédure d'optimisation paramétrique multiobjectif qui permet de bien dimensionner et de bien positionner les traitements viscoélastiques pour que leur qualité amortissante soit maximale dans la bande de fréquence d'intérêt. De plus, on a pu vérifier la performance du traitement viscoélastique par couche contrainte pour réduire les niveaux vibratoires des structures.

Pour le deuxième cas étudié, on montre l'utilité du traitement viscoélastique par couche contrainte appliqué aux structures industrielles relativement complexes. Pour cela, on a réalisé des essais expérimentaux avec une carcasse d'un compresseur de réfrigérateur, en vérifiant l'influence de plusieurs épaisseurs de couches contraintes. On a remarqué que l'épaisseur de la couche contrainte joue un rôle très important sur la performance du traitement viscoélastique. Cette étude sera poursuivie et approfondie dans le cadre de la collaboration industrielle en cours.

CHAPITRE 8

Conclusions Générales et Perspectives

Résumé et Contributions

Ce mémoire de thèse vise apporter une contribution aux développements récents consacrés à la modélisation et l'application des matériaux viscoélastiques par couches contraintes, dans le but de réduire les vibrations basses fréquences de systèmes d'ingénierie de géométries complexes. Ce mémoire représente le résultat de la continuité d'un travail de Master réalisé par Lima (2003), au sujet de la modélisation numérique et la caractérisation expérimentale de différents dispositifs viscoélastiques appliqués aux systèmes structuraux simples du type poutres et portiques bidimensionnels. En particulier, les travaux adressés dans ce mémoire sont consacrés à la modélisation de structures de géométries plus au moins complexes contenant l'amortissement viscoélastique par couche contrainte, et à la proposition d'une méthodologie de conception optimale de solutions amortissantes dans la phase d'avant projet.

Dans la première partie du mémoire, en particulier, les Chapitres 1 et 2, on adresse le bilan en ce qui concerne les développements les plus récents au sujet des matériaux viscoélastiques et leur modélisation mathématique par différents modèles paramétriques et non paramétriques considérés bien adaptés aux modèles aux éléments finis, pour prendre en compte la dépendance en fréquence et en température de leurs propriétés mécaniques. On a utilisé l'approche du module complexe combinée avec l'hypothèse de superposition Fréquence-Température qui a permis d'obtenir le comportement viscoélastique pour différentes valeurs de fréquences et de températures par un simple décalage en fréquence par un facteur dépendant de la température. De plus, cette approche est simple à utiliser étant bien adaptée aux procédures de condensation robuste de modèles viscoélastiques, en vue de réduire le temps de calcul, de stockage de données.

Dans le Chapitre 3, on a mis en œuvre les développements qui concernent les éléments de plaque sandwich par la méthode des éléments finis et leur paramétrisation. Ces éléments finis, initialement modélisés dans la plateforme *MATLAB*[®], ont été intégrés dans des modèles aux éléments finis de structures de géométries complexes, modélisées par le code *EF ANSYS*[®]. Cette procédure d'interfaçage/remplacement des éléments de plaque simple par des éléments de plaque sandwich, a permis d'étendre le domaine des applications des traitements viscoélastiques par couches contraintes au domaine industriel. La paramétrisation du modèle aux éléments finis viscoélastiques s'avère très utile puisque les paramètres de conception apparaissent en dehors des matrices élémentaires de chaque couche et pour chaque effet mécanique (membrane, flexion et cisaillement), ce qui permet, par la suite, d'introduire de façon

simple et rapide les incertitudes dans les paramètres géométriques/physiques les plus influents, et de mener facilement l'analyse de sensibilité paramétrique. De plus, une fois le modèle paramétré mis en place, la méthodologie de condensation robuste est appliquée.

Dans les Chapitres 4 et 5, visant l'obtention des solutions optimales et robustes des systèmes structuraux traités par matériaux viscoélastiques, l'algorithme évolutionnaire multiobjectif NSGA combiné avec la méthode de condensation robuste de modèles viscoélastiques, et les techniques d'approximation de fonctions, ont été mise en œuvre. La procédure de couplage entre l'algorithme NSGA, condensation robuste, réseaux de neurones, et les méthodologies de surfaces de réponses, s'avère très efficace pour prévoir les réponses dynamiques des systèmes amortis, et de réduire davantage le temps de calcul des solutions optimales pour les systèmes viscoélastiques de taille raisonnable. Néanmoins, on a observé quelques avantages de certaines techniques par rapport aux autres : par exemple, les réseaux de neurones (ANNs) sont bien adaptés au cas où l'optimisation comporte un espace de conception hybride de variables continues, comme les épaisseurs de patches, et discrètes, comme les positions de patches. De plus, les ANNs sont bien adaptés pour approcher les réponses des problèmes fortement non-linéaires ; les surfaces de réponses adaptatives ont l'avantage de permettre d'évaluer le problème exact pour créer les polynômes seulement dans les régions plus influentes du domaine discrétisé. Ceci permet une réduction du nombre d'évaluations exactes du problème par rapport aux RSM classiques, qui utilisent le Plan d'Expérience Factoriel Complet pour générer les polynômes. Cependant, les ARSM/RSM ne peuvent pas être construits avec les variables discrètes, comme les positions de patches, contrairement aux ANNs.

Pour obtenir des solutions robustes, on a pris en compte les incertitudes sur les paramètres de conception caractérisant le traitement viscoélastique par couche contrainte, comme les épaisseurs de couches viscoélastique et contrainte, et la température du matériau viscoélastique. Pour cela, on a introduit des fonctions de robustesse comme fonctions coût supplémentaires à maximiser en même temps que les fonctions coût originales. Cette procédure a permis d'établir un compromis entre optimalité et robustesse des solutions obtenues. A travers plusieurs exemples, on a montré que les solutions optimales sont robustes par rapport aux incertitudes introduites dans les paramètres de conception.

Les diverses applications numériques de simulation des structures d'ingénierie relativement complexes contenant les traitements viscoélastiques par couches contraintes, utilisant les stratégies d'optimisation couplées avec les techniques d'approximation de fonctions décrites précédemment, ont démontré l'efficacité des procédures et techniques proposées, principalement en termes de réduction du temps de calcul pour obtenir les solutions optimales et robustes. Cet ensemble d'outils sera intégré à court terme dans une méthodologie générale d'optimisation qui sera dédiée à la conception de structures industrielles plus complexes amorties par matériaux viscoélastiques.

Les problèmes d'optimisation abordés dans ce mémoire comportent normalement la combinaison de plusieurs variables de conception : des variables continues, comme épaisseurs des couches et la température du matériau viscoélastique ; et des variables discrètes, comme la position des traitements superficiels par couche contrainte, dans le but de réduire au maximum les niveaux vibratoires des systèmes amortis. Le choix des paramètres continus est

basé sur une étude préalable de l'influence de ces paramètres sur l'efficacité du traitement viscoélastique. Cette étude peut être conduite par une analyse de sensibilité, comme on l'a montré au Chapitre 6.

Dans le Chapitre 6, on a également proposé un modèle de propagation des incertitudes qui est introduit de façon originale au niveau des éléments finis de poutres et plaques sandwichs, et concerne les paramètres de conception les plus influents qui caractérisent le traitement viscoélastique. Les réponses dynamiques du système amorti aléatoire ont été obtenues par la méthode de tirages aléatoires d'Hyper Cube Latin (HCL), dans le but de générer les enveloppes des réponses dynamiques du système. Ceci permet au concepteur d'analyser l'effet des incertitudes introduites sur la variabilité des réponses dynamiques dans le problème direct. Cette analyse directe permet ensuite d'aborder le problème de l'optimisation robuste avec un choix pertinent des variables incertaines les plus influentes.

Les nombreuses simulations numériques et les essais expérimentaux ont permis d'évaluer la performance des procédures de modélisation développées comme un outil d'analyse et de conception des systèmes complexes d'ingénierie contenant l'amortissement viscoélastique, et de montrer les aspects importants du comportement dynamique des systèmes structuraux traités par ces matériaux. A partir des résultats analytiques et expérimentaux obtenus, on a pu tirer les conclusions spécifiques suivantes :

1^a) Les procédures de modélisation développées se sont avérées efficaces pour caractériser le comportement dynamique des systèmes structuraux amortis, notamment en ce qui concerne la représentation de la dépendance des caractéristiques dynamiques des matériaux viscoélastiques de la fréquence d'excitation et de la température.

2^a) L'utilisation des traitements viscoélastiques par couches contraintes s'avère une stratégie efficace de contrôle passif de vibrations de systèmes dynamiques. Cependant, le degré d'efficacité dépend de quelques facteurs, comme :

- La dépendance des propriétés mécaniques par rapport à la température et à la fréquence.
- Le type de dispositif viscoélastique utilisé, qui peut être superficiel (par couche contrainte passive) ou discret (les appuis de translation ou les joints de rotation).
- Les dimensions, la géométrie, et le positionnement des dispositifs viscoélastiques utilisés.
- Bande de fréquence d'analyse et température de fonctionnement.

Perspectives

Les travaux de cette thèse ont donné lieu à de nombreuses perspectives dont on peut citer les plus importantes :

- Pour poursuivre l'intégration des traitements viscoélastiques dans le domaine industriel par couches contraintes, il paraît nécessaire d'améliorer les éléments finis de plaque sandwich, par la mise en œuvre des éléments de plaques et

coques multicouches de théories d'ordre supérieurs, permettant, en particulier, la modélisation de structures à fortes courbures ;

- L'étude de l'auto-échauffement des matériaux viscoélastiques en fonctionnement constitue une autre perspective. Puisqu'on a observé que la température joue un rôle très important sur les propriétés amortissantes pour ces matériaux, il faut proposer un modèle thermomécanique bien adapté pour les cas de solutions amortissantes de géométries complexes. De cette manière, on pourra maîtriser l'auto-échauffement des traitements viscoélastiques par couches contraintes pour assurer l'efficacité des systèmes amortissants ;
- Il serait intéressant d'étendre les applications des éléments finis sandwich développés au domaine de la vibroacoustique basses fréquences. Actuellement, ce travail constitue en partie le sujet d'une thèse qui a démarrée en 2006 au LMARC.
- Approfondissement de la méthode des éléments finis viscoélastiques stochastiques. En particulier, le couplage de la méthode de condensation robuste vis-à-vis des incertitudes et la méthode de perturbation modale. Son extension aux structures viscoélastiques complexes dont les modèles éléments sont de grande taille est également une voie de recherche en cours d'investigation. Ces travaux font l'objet d'une collaboration scientifique UFU-UFC-IPEIN.
- Mener une étude de fatigue vibratoire et de fiabilité des structures contenant des éléments amortissants, puisque, pour des applications viscoélastiques au niveau industriel, on doit assurer la sûreté de fonctionnement (vieillessement, tenue en fatigue, durée de vie, etc.) des systèmes amortissants ;
- Optimisation de structures avec éléments viscoélastiques en prenant en compte les incertitudes sur la structure, c'est-à-dire : optimisation structure incluant le traitement viscoélastique, qui permet d'intervenir dès la première phase de conception/construction de la structure à la quelle on souhaite appliquer le traitement viscoélastique, dans le but d'augmenter l'efficacité du traitement.
- La mise en œuvre de procédures de recalage de modèles viscoélastiques basées sur les résultats expérimentales de systèmes amortis. Une technique consiste à recalculer les modèles EF à partir des différences entre les réponses du modèle et celles issues de l'essai. Les variables de conception correspondent aux facteurs de correction attribués aux paramètres de conception physiques et/ou géométriques du modèle EF du système traité, liés à la masse, la raideur et, en particulier, aux caractéristiques physiques et géométriques des dispositifs amortissants.

Références Bibliographiques

Ait Brik, B., Bouhaddi, N., Cogan, S., 2004a, « Neural Networks and Evolutionary Algorithm for Solving Multi-objective Optimization Problems », Proceedings of the Seventh International Conference on Computational Structures Technology, Lisbon, Portugal, CD-ROM.

Ait Brik, Bouhaddi, N., Cogan, S., 2004b, « Multiobjective Optimization Augmented with a Robustness Function », Proceedings of the IMAC XXII, Deardorn, USA.

Ait Brik, B., 2005, « Méthodologies de conception robuste et d'optimisation dans un contexte de conception d'architectures mécaniques nouvelles en avant projet », Thèse présentée à l'Université de Franche Comté.

Alvin, K. F., 1998, « Efficient computation of eigenvector sensitivities for structural dynamics », American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal, Vol. 35(11).

Bagley, R. L., Torvik, P. J., 1979, « A Generalized Derivative Model for an Elastomer Damper », Shock and Vibration Bull., Vol. 49, No. 2, pp. 135-143.

Bagley, R. L., 1983, « A Theoretical Basis for the Application of Fractional Calculus to Viscoelasticity », Journal of Rheology, Vol. 27, No. 3, pp. 201-210.

Bagley, R. L., Torvik, P. J., 1983, « Fractional Calculus - A Different Approach to the Analysis of Viscoelastically Damped Structures », AIAA Journal, Vol. 21, No. 5, pp. 741-748.

Bagley, R. L., Torvik, P. J., 1985, « Fractional Calculus in the Transient Analysis of Viscoelastically Damped Structures », AIAA Journal, Vol. 23, No. 6, pp. 918-925.

Balmès, E., 1996a, « Parametric families of reduced finite element models. Theory and applications ». Mechanical systems and signal Processing, Vol. 10 (4), pp. 381-394.

Balmès, E., 1996b, « Optimal Ritz vectors for component mode synthesis using the singular value decomposition ». AIAA Journal, Vol. 34, pp. 1256-1260.

Balmès, E., 1997, « Modèles expérimentaux complets et modèles analytiques réduits en dynamique des structures ». Mémoire de HDR, Université P&M Curie, Paris VI.

Balmès, E., Babillot, A., 2002a, « Analysis and design tools for structures damped by Viscoelastic materials ». International Modal Analysis Conference (IMAC).

Balmès, E., Germès, S., 2002b, « Tools for Viscoelastic Damping Treatment Design: Application to an Automotive Floor Panel », Proceedings of the 28th International Seminar on Modal Analysis (ISMA), Leuven, Belgium.

Balmès, E., 2005, « Modes and Regular Shapes. How to Extend Component Mode Synthesis Theory », Proceedings of XI DINAME, Ouro Preto, Brazil.

Banks, H. T., 1996, « Smart Material Structures, Modeling, Estimation and Control », John Wiley & Sons, New York.

Barkanov, E., 1999, « Transient Response Analysis of Structures Made From Viscoelastic Materials », International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 44, pp. 393-403.

Batmaz, I., Tunali, S., 2003, « Small response surface designs for metamodel estimation », European Journal of Operational Research, Vol. 145, pp.455-470.

Battaglia, G.J., Maynard, J.M., 1996, « Mean Square Error: A useful tool for statistical process management », Journal of AMP Technology, Vol. 34, pp. 1256-1260.

Benaroya, H., Rehak, M., 1988, « Finite element methods in probabilistic structural analysis: A selective review », Applied Mechanics Reviews, ASME, Vol. 41(5), pp. 201-213.

Bennett, J. A., Lust, R. V., 1990, « Conservative methods for structural optimization », AIAA Journal.

Bert, C. W., 1973, « Material Damping: An Introductory Review of Mathematical Models, Measures and Experimental Techniques », Journal of Sound and Vibration, Vol. 29, No. 2, pp. 129-153.

Besse, P., 2002, « Datamining, modélisations statistiques et apprentissage », Cours statistiques.

Braibant, V., Delcroix, F., Oudshoorn, A., 1998, « Méthodes non-déterministes pour l'analyse et la conception robuste de produits et de procédés : Approche par l'arithmétique des intervalles », Actes du colloque IDMME'98, Compiègne, pp137-145.

Carpinteri, A., Ferro, G., Ventura, G., 2001. « An augmented Lagrangian element – free (ALEF) approach for crack discontinuities », Journal of Computers Methods Applied Mechanics, Vol. 191, pp. 941-957.

- Christensen, R. M., 1982, « Theory of Viscoelasticity: An Introduction », Academic Press, Inc., New York, 2nd edition.
- Craig, R. R. and Bampton, M. C. C., 1968, « Coupling of Substructures for Dynamic Analyses », AIAA Journal, Vol. 6(7).
- Crandall, S. H., 1970, « The role of damping in vibration theory », Journal of Sound and Vibration, Vol. 11(1), pp. 3-18.
- Daya, E. M. and Poitier-Ferry, M., 2001, « A numerical method for nonlinear eigenvalue problems. Applications to vibrations of viscoelastic structures ». Computers & Structures, Vol. 79, oo. 533-541.
- Daya, E. M., Azrar, L., Poitier-Ferry, M., 2002, « Modélisation des vibrations non-linéaires des structures sandwich viscoélastiques », 7^{ème} Journée d'Analyse Numérique/Optimisation, Maroc.
- Der Kiureghian, A., Ke, J. B., 1988, « The Stochastic Finite Element Method in Structural Reliability », Probabilistic Engineering Mechanics, Vol. 3, No. 2, pp. 83-91.
- Dessombz, O., Thouverez, F., Laïné, J. P., Jézéquel, L., 2001, « Analyse Dynamique de Structures Comportant des Paramètres Incertains », Journal of Sound and Vibration, Vol. 239(5), pp. 949-968.
- Drake, M. L., Soovere, J., 1984, « A Design Guide for Damping of Aerospace Structures », In AFWAL Vibration Damping Workshop Proceedings 3.
- Droesbeke, J. J., Fine, J., Saporta, G., 1997, « Plans d'expériences: Applications à l'entreprise », Editions Techniques.
- Eschenauer, J., Koski, J., Osyczka, A., 1990, « Multicriteria Design Optimization », Springer-Verlag.
- Espíndola, J.J., Lopes, E.M.O., 1988, « Caracterização de Materiais Elastoméricos para o Controle de Vibrações e Ruídos Acústicos », II Simpósio Brasileiro Sobre Sistemas Dinâmicos da Mecânica – DINAME, Campos do Jordão - SP.
- Espíndola, J.J. and Silva, H.P., 1992, « Modal Reduction of Vibrations By Dynamic Neutralizers », Proc. of The Tenth International Modal Analysis Conference, San Diego, USA, pp. 1367-1373.
- Espíndola, J.J. and Bavastri, C.A., 1997, « Viscoelastic Neutralizers in Vibration Abatement: A Non-Linear Optimization Approach », Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences, XIX (2), pp. 154-163.

Espíndola, J.J., Presezniak, F. A., Lopes, E. M. O., Teixeira, P. H., Espíndola, J. J., 2004, « Optimum Design of Viscoelastic Dynamic Neutralizers for Overhead Transmission Lines: Distributed Excitation Model », IEEE/PES, Transmission & Distribution Conf, Latin America.

Espíndola, J.J., Lopes, E.M. and Bavastri, C.A., 2005, « A Generalized Fractional Derivative Approach to Viscoelastic Materials Properties Measurements », Applied Mathematics and Computation, v.164, n.2, pp. 473-506.

Falsone, G., Impollonia, N., 2002, « A new approach for the stochastic analysis of finite element modelled structures with uncertain parameters », Computers Methods Applied Mechanics Engineering, vol. 191, pp. 5067–5085

Fox, R., L., Kappor, M. P., 1968, Rates of changes of eigenvalues and eigenvectors, AIAA journal, Vol.6

Florian, A.,1992, « An efficient sampling scheme: updates Latin Hypercube sampling », Probabilistic Engineering Mechanics, Vol. 7, pp. 123-130.

Friswell M.I., Inman D.J., and Lam M.J, 1997, « On the realisation of GHM models in viscoelasticity ». Journal of Intelligent Material Systems Structures, 8(11):986–993.

Fuller, C. R., Elliot, S. J., Nelson, P. A, 1996, « Active Control of Vibration », Academic Press, San Diego, Californie, pp. 332.

Gallagher, M. R., 2000, Multi-layer Perceptron Error Surfaces: Visualization, Structure and Modelling, PhD Thesis, Department of Computer Science and Electrical Engineering, University of Queensland, Australia.

Ghanmi, S., Guedri, M., Bouazizi, M. L., Majed, R., Bouhaddi, N., 2005, « Méthode des surfaces de réponses robuste pour l'analyse dynamique des structures stochastiques », 17^{ème} Congrès Français de Mécanique, Troyes.

Ghanmi, S., Bouazzi, M. L., Bouhaddi, N., 2005, « Modélisation et Optimisation des Structures Mécaniques. Approche Basée sur les Surfaces de Réponses », CMSM Conférence, Hammamet, Tunisie.

Ghanem, R. G. and Spanos, P. D., 1991, « Stochastic Finite Elements – A Spectral Approach », Spring Verlag.

Ghanem, R. G. and Kruger, R. M., 1996, « Numerical solution of spectral stochastic finite element system », Computers Methods Applied Mechanics Engineering, Vol. 129, pp. 289-303.

Goldberg, D.E., 1989, « Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning »; Addison-Wesley.

Golla, D. F. and Hughes, P. C., 1985, « Dynamics of viscoelastic structures - A time-domain, finite element formulation », Journal of Applied Mechanics, Vol. 52,, No. 4, pp. 897-906.

Guedri, M., 2006, « Synthèse Modale : Approches Stochastiques en Elastodynamique Linéaire et Non-linéaire ». Thèse présentée à l'Université El Manar, en Tunisie.

Guedri, M., Lima, A.M.G., Bouhaddi, N., Rade, D.A., 2007, « Eléments Finis Viscoélastiques Stochastiques pour la Conception Robuste des Structures Mécaniques », 8^{ème} Colloque National en Calcul des Structures (GIENS), Iles de Porquerolles, Côte d'Azur, France.

Gu, Y.T. and Liu, G.R., 2003, « Hybrid boundary point interpolation methods and their coupling with the element free Galerkin method », Engineering Analysis with Boundary Elements, Vol. 27, pp. 905-917.

Huang, S. C., Inman, D. J., Austin, E. M., 1996, « Some design considerations for active and passive constrained layer damping treatments », Smart Materials & Structures, Vol. 5(3), pp. 301-313.

Houck, C., Joines, J. and Kay, M., 1995, « A Genetic Algorithm for Function Optimization: A Matlab Implementation », NCSU-IE TR 95-09.

Ibrahim, R. A., 1987, « Structural dynamics with parameter uncertainties », Applied Mechanics Reviews, Vol. 40(3), pp 309-328.

Iman, R. L. and Conovers, W. J., 1980, « Small sample sensitivity analysis techniques for computer models, with an application to risk assessment », Communications Statistics, Vol. A9, pp. 1749-1842.

Johnson, A. R. and Quigley, C. J., 1992, « A viscohyperelastic Maxwell model for rubber viscoelasticity », Rubber Chemistry and Technology, Vol. 65, pp. 137-153.

Khatua, T. P. and Cheung, Y. K., 1973, « Bending and Vibration of Multilayer Sandwich Beams and Plates », International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 6, pp 11-24.

Kergourlay, G., Balmès, E., Clouteau, D., 2000, « Interface model reduction for efficient FEM/BEM coupling », International Seminar on Modal Analysis, Leuven.

Kergourlay, G., 2004, « Mesure et prédiction vibroacoustique de structures viscoélastiques ». Thèse présentée devant l'Ecole Centrale Paris.

Kleiber M. and Hien, T. D., 1992, « The stochastic finite element method, basic perturbation technique and computer implementation », John Wiley & Sons.

Korenev, B.G., Reznikov, L.M., 1993, « Dynamic Vibration Absorbers. Theory and Practical Applications ». John Wiley & Sons.

Kohonen, T., 1982, « Analysis of a simple Self-Organizing Process ». Biological Cybernetics, Vol. 44(2), pp. 135-140.

Lam, M. J., 1997, « Hybrid Active/Passive Models with Frequency Dependent Damping », Ph. D. Thesis, Faculty of the Virginia Polytechnic Institute, Blacksburg, VA, USA.

Lazan, B. J., 1968, « Damping of Materials and Members in Structural Mechanics », Oxford: Pergamon Press.

Lee, K. H., Park, G. J., 2001, « Robust optimization considering tolerances of design variables », Journal of Computers and Structures, Vol. 79, pp. 77-86.

Lei, Z. and Qiu, C., 2000, « Neumann dynamic stochastic finite element method of vibration for structures with stochastic parameters to random excitation », Computers and Structures, Vol. 77, pp. 651-657.

Lesieutre, G. A. and Bianchini, E., 1995, « Time Domain Modeling of Linear Viscoelasticity Using Anelastic Displacement Fields », Journal of Vibration and Acoustic, Vol. 117, No. 4, pp. 424-430.

Lesieutre, G. A. and Bianchini, E., 1996a, « Finite Element Modeling of One-dimensional Viscoelastic Structures Using Anelastic Displacement Fields », Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 19, No. 3, pp. 520-527.

Lesieutre, G. A. and Lee, U., 1996b, « A Finite Element for Beams Having Segmented Active Constrained Layers with Frequency-dependent Viscoelastics », Smart Mater. Struct., Vol. 5, No. 5, pp. 615-627.

Lima, A M. G., 2003, « Procedimentos de Modelagem Numérica e Avaliação Experimental Sistemas Estruturais Dotados de Absorvedores de Vibrações Viscoelásticos », Dissertação de Mestrado em Engenharia Mecânica, UFU.

Lima, A.M.G., Stoppa, M.H., Rade, D.A., 2003a, "Finite Element Modelling and Experimental Characterization of Beams and Plates Treated with Constraining Damping Layers", Proceedings of COBEM – International Conference of Mechanical Engineering, São Paulo, Brazil.

- Lima, A.M.G., Stoppa, M.H., Rade, D.A., 2003b, "Finite Element Modeling of Structures Incorporating Viscoelastic Materials", Proceedings of IMACXXI - Conference and Exposition on Structural Dynamics, Orlando, EUA.
- Lima, A.M.G., Stoppa, M.H., Rade, D.A., Steffen Jr., V., 2005a, Sensitivity Analysis of Viscoelastic Structures, Proceedings of the XI DINAME, Brazil, CD-ROM.
- Lima A.M.G., Rade, D.A., 2005b, Modelling of Structures Supported on Viscoelastic Mounts Using FRF Substructuring, Proceedings of the Twelfth Int. Congress on Sound and Vibration, ICSV12, Lisbon, Portugal. CD-ROM.
- Lima, A.M.G., Stoppa, M.H., Rade, D.A., Steffen Jr., V., 2006a, Sensitivity Analysis of Viscoelastic Structures, Shock and Vibration, vol. 13, no. 4-5, pp. 545-558.
- Lima, A.M.G., Bouhaddi, N., Rade, D.A., 2006b, Métamodèles pour L'Optimisation Multiobjectif des Structures Viscoélastiques, XV^e Colloque Vibrations Chocs et Bruit, 14-16 Juin, Ecole Centrale de Lyon, France.
- Lima, A.M.G., Ait Brik, B., Bouhaddi, N., Rade, D.A., 2006c, Multi-objective Optimization of Viscoelastically Damped Systems Combining Robust Condensation and Metamodels. Proceedings of the Eighth International Conference on Computational Structures Technology, Las Palmas de Gran Canaria, Spain.
- Lima, A.M.G., Bouhaddi, N., Rade, D.A., 2007a, Méthodologies d'Optimisation en Dynamique des Structures Viscoélastiques, 2^{ème} Congres International Conception et Modélisation des Systèmes Mécaniques, Ecole Nationale d'Ingénieurs de Monastir, 19-21 Mars, Tunisie.
- Lima, A.M.G., Bouhaddi, N., Ghanmi, S., Rade, D.A., 2007b, Multiobjective Optimization of Viscoelastic Structures Combining Robust Condensation and Adaptive Response Surface, Proceedings of the XII International Symposium on Dynamic Problems of Mechanics (DINAME2007), Ilhabela, SP, Brazil.
- Lim, K. B. Junkins, J. L., Wang, P. B., 1987, Re-examination of eigenvector derivatives, AIAA Journal, Vol. 10.
- Ling, W, 2005, A hybrid genetic algorithm-neural network strategy for simulation optimization. Journal of Applied Mathematics and Computation.
- Maia, N. M. M., Montalvão e Silva, J. M., 1997, "Theoretical and Experimental Modal Analysis", Research Studies Press LTD., England, pp. 468.
- Mantefel and Randall, D., 2000, Evaluating the convergence of Latin Hypercube sampling, AIAA/ASME Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, Vol. 3, pp. 100-106.

Masson, G., Bouhaddi, N., Cogan, S., Laurant, M., 2003, Component Mode Synthesis Method Adapted to Optimization of Structural Dynamics Behaviour, Proceedings of the International Modal Analysis Conference, XXI IMAC, Hyatt Orlando, Florida, CD-ROM.

Masson, G., 2004, Synthèse modale robuste adaptée à l'optimisation de modèles de grande taille. Thèse présentée à l'Université de Franche-Comté.

Matutti, A. C., Trindade, M. A., Sampaio, R., 2001, "Frequency-dependent Viscoelastic Models for Passive Vibration Isolation Systems", Proceedings of 16th Brazilian Congress of Mechanical Engineering-COBEM, Vibration and Acoustics, Vol. 10, pp. 349-358.

McTavish, D. J. and Hughes, P. C., 1993, "Modeling of Linear Viscoelastic Space Structures", Journal of Vibration and Accoustics, Vol. 115, No. 1, pp. 103-113.

Mead, D. J., 1998, "Passive Vibration Control", John Wiley & Sons, Canada , pp. 554.

Merlette, N., 2005, Amortissement des caisses automobiles par des films minces viscoélastiques pour l'amélioration du confort vibratoire, Thèse de l'Ecole Centrale de Lyon.

Morse, J. N., 1980, Reducing the size of the nondominated set: pruning by clustering, Computers & Operations Research, Vol. 7, pp. 55-66.

Murthy, D., V., Haftka, R. T., 1988, Derivatives of Eigenvalues and eigenvectors of a general complex matrix, International journal for numerical methods in engineering, Vol. 26, pp. 293-311.

Myers, R. H. and Montgomery, D. C., 2002, Response Surface Methodology, Second Edition, New York, Wiley.

Nashif, A. D., Jones, D. I. G. and Henderson, J. P., 1985, "Vibration Damping", John Wiley & Sons, New York.

Nelson, R. B., 1976, Simplified calculation of eigenvector derivatives, AIAA Journal Vol. 14.

Ogata, K., 1990, "Engenharia de Controle", Prentice Hall do Brasil LTDA, Rio de Janeiro.

Papadrakakis, M. et Kotsopoulos, A., 1999, Parallel solution methods for stochastic finite element analysis using Monte Carlo Simulation, Computers Methods Applied Mechanics Engineering, Vol. 168, pp. 305-320.

Park, C. H., Inman, D. J., Lam, M. J., 1999, "Model Reduction of Viscoelastic Finite Element Models", Journal of Sound and Vibration, Vol. 219, No. 4, pp. 619-637.

- Persoz, B., 1987, "Introduction a L'Étude de La Rhéologie", Dunod.
- Plouin, A. S. and Balmès, E., 1998, Pseudo-modal representation of large models with viscoelastic behavior. International Modal Analysis Conference (IMAC), pp. 1440-1446.
- Plouin, A. S. and Balmès, E., 1999, A test validated model of plates with constrained viscoelastic methods and experimental validations. International Modal Analysis Conference, pp. 384-390.
- Rao, M. D., 2001, "Recent Applications of Viscoelastic Damping for Noise Control in Automobiles and Commercial Airplanes", USA Symposium on Emerging Trends in Vibration and Noise Engineering", India.
- Rogers, L. C., Johnson, C. D., Keinholz, D. A., 1981, "The modal strain energy finite elemtn method and its application to damped laminated beams. Shock and Vibration Bulletin, Vol. 51.
- Rogers, L., 1983, "Operators and Fractional Derivatives for Viscoelastic Constitutive Equations", Journal of Rheology, Vol. 27, No. 4, pp. 351-372.
- Rosenman, M. A. and Gero, J. S., 1985, Reducing the Pareto optimal set in multicriteria optimization (With application to Pareto optimal dynamic programming), Engineering Optimization, Vol. 8, pp. 189-206.
- Rubinstein, R. Y., 1981, Simulation and the Monte Carlo Method, John & Wiley & Sons.
- Rusovici, R., 1999, "Modeling of Shock Wave Progagation and Attenuation in Viscoelastic Structures", Ph. D. Thesis, Faculty of the Virginia Polytechnic Institute, Blacksburg, VA, USA.
- Salmanoff, J., 1997, "A Finite Element, Reduced Order, Frequency Dependent Model of Viscoelastic Damping", Ms. C. Thesis, Faculty of the Virginia Polytechnic Institute, Blacksburg, VA, USA.
- Samali, B. and Kwok, K. C. S., 1995, "Use of Viscoelastic Dampers in Reducing Wind-and Earthquake-induced Motion of Building Structures", Engineering Structures, Vol 17, No. 9, pp. 639-654.
- Schaffer, D., 1985, Multiple Objective Optimisation with Vector Evaluated Genetic Algorithm, In genetic Algorithm and their Applications, Proceedings of the First International Conference on Genetic Algorithm, pp. 93-100.
- Schinozura, M., 1972, Monte Carlo Solution of Structural dynamics, Computers and Structures, Vol. 2, pp. 855-874.

Shuëller, G. I., 2001, Computational stochastic mechanics – recent advances, *Journal of Computers and Structures*, Vol. 79, pp. 2225-2234.

Soize, C., 1999, A nonparametric model of random uncertainties in linear structural dynamics, *ISBN*, Vol. 152, pp. 109-138.

Soize, C., 2000, A nonparametric model of random uncertainties for reduced matrix models in structural dynamics, *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol. 15(3), pp. 277-294.

Soteris, K. A., 2004, Optimization of Solar Systems using Artificial Neural Networks and Genetic Algorithms, *Journal of Applied Energy*, pp. 383-405.

Srivinas, N., Deb, K., 1993, Multi-objective using Nondominated Sorting in Genetic Algorithms, Technical Report, Department of Mechanical Engineering, Institute of Technology, India.

Stoppa, M. H., 2003, Modalagem numérica e projeto ótimo de sistemas de amortecimento viscoelásticos aplicados a placas retangulares, *Tese*, Universidade Federal de Uberlândia.

Tertois, S., 2003, Réduction des effets des non-linéarités dans une modulation multiporteuse à l'aide de réseaux de neurones, *Thèse présentée à l'Université de Rennes*.

Trindade, M. A., "Contrôle Hybride Actif-passif des Vibrations de Structures par des Matériaux Piézoélectriques et Viscoélastiques: Poutres Sandwich/multicouches Intelligentes", *Thèse*, Conservatoire National des Arts et Métiers, Juin 2000.

Vesanto, T., 2000, Using SOM in Data Mining. Licentiate's thesis, Finland.

Wang, G., 2001, "Analyses of Sandwich Beams and Plates with Viscoelastic Cores", Ph. D. Thesis, Faculty of the Graduate School of The University of Maryland, College Park.

Williams, G., Landel, R. F., Ferry, J. D., 1955. The temperature dependence of relaxation mechanisms in amorphous polymers and other glass forming liquids. *Journal of American Chemical Society*, Vol. 77, 3701-3707.

3M, 2007, "Ultra-pure Viscoelastic Damping Polymer", Product Information and Performance Data, www.3M.com.

Yae, K. H. And Inman, D. J., 1993. "Control-oriented Order Reduction of Finite Element Model", *Dynamic Systems and Control*, Vol. 115, pp. 708-711.

Yiu, Y. C., 1993. Finite element analysis of structures with classical viscoelastic materials, *Proceedings of the 34th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference*, California, pp. 2110-2119.

Yamazaki, F. and Schinozuka, M., 1988, Neumann expansion for stochastic finite element analysis, *Journal of Engineering Mechanics ASCE*, Vol. 114(8), pp. 1335-1354.

Zitzler, E. and Thiele, L., 1999, Multiobjective Evolutionary Algorithms: A Comparative Case Study and the Strength Pareto Approach. *IEEE Transaction on evolutionary computation*, Vol. 3, pp. 257-271.

Annexe A

A.1 Matrices élémentaires de raideur et de masse d'un élément finis de plaque sandwich

Dans la Section 3.4, à partir de l'expression (3.33), on peut exprimer le vecteur de déformations pour les couches élastiques (i) sous la forme suivante :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(i)} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{(i)} \\ \varepsilon_y^{(i)} \\ \gamma_{xy}^{(i)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_i}{\partial x} \\ \frac{\partial v_i}{\partial y} \\ \frac{\partial u_i}{\partial y} + \frac{\partial v_i}{\partial x} \end{Bmatrix} - z_i \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = \boldsymbol{\varepsilon}_m^{(i)} + \boldsymbol{\varepsilon}_f^{(i)} \quad (\text{A.1})$$

où $\boldsymbol{\varepsilon}_m^{(i)}$ et $\boldsymbol{\varepsilon}_f^{(i)}$ sont les vecteurs de déformation de membrane e de flexion, respectivement. Ils peuvent être exprimés en termes des déplacements nodaux sur la forme suivante :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_m^{(i)} = \mathbf{D}_m^{(i)} \boldsymbol{\delta}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_f^{(i)} = \mathbf{D}_f^{(i)} \boldsymbol{\delta} \quad (\text{A.2})$$

et l'énergie de déformation (expression (3.32)) peut être réécrite sous la forme :

$$U^{(i)} = \frac{1}{2} \int_V \left(\boldsymbol{\varepsilon}_m^{(i)} + \boldsymbol{\varepsilon}_f^{(i)} \right)^T \mathbf{E}^{(i)} \left(\boldsymbol{\varepsilon}_m^{(i)} + \boldsymbol{\varepsilon}_f^{(i)} \right) dV \quad (\text{A.3})$$

ou sous la forme :

$$U^{(i)} = U_{mm}^{(i)} + U_{ff}^{(i)} + U_{mf}^{(i)} \quad (\text{A.4})$$

où :

$$U_{mm}^{(i)} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\delta}^T \int_V \left(\mathbf{D}_m^{(i)T} \mathbf{E}^{(i)} \mathbf{D}_m^{(i)} \right) dV \boldsymbol{\delta} \quad (\text{A.5.a})$$

$$U_{ff}^{(i)} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\delta}^T \int_V \left(\mathbf{D}_f^{(i)T} \mathbf{E}^{(i)} \mathbf{D}_f^{(i)} \right) dV \boldsymbol{\delta} \quad (\text{A.5.b})$$

$$U_{mf}^{(i)} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\delta}^T \int_V 2 \left(\mathbf{D}_m^{(i)T} \mathbf{E}^{(i)} \mathbf{D}_f^{(i)} \right) dV \boldsymbol{\delta} \quad (\text{A.5.c})$$

Les expressions ci-dessous définissent les fractions de l'énergie de déformation associés aux effets de flexion, membrane et couplage membrane-flexion, respectivement.

Par la comparaison entre les expressions (3.33) et (A.5), la matrice de raideur élémentaire pour les couches élastiques, sont écrites comme suit (expression (3.34)) :

$$\mathbf{K}^{(i)} = \mathbf{K}_{mm}^{(i)} + \mathbf{K}_{ff}^{(i)} + 2\mathbf{K}_{mf}^{(i)} \quad (\text{A.6})$$

De la même façon, pour les couches viscoélastiques (j) , on peut écrire le vecteur de déformations sous la forme :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}^{(j)} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{(j)} \\ \varepsilon_y^{(j)} \\ \gamma_{xy}^{(j)} \\ \gamma_{xz}^{(j)} \\ \gamma_{yz}^{(j)} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_j}{\partial x} \\ \frac{\partial v_j}{\partial y} \\ \frac{\partial u_j}{\partial y} + \frac{\partial v_j}{\partial x} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{z_j}{h_j} \left[\left(\frac{\partial u_{i+1}}{\partial x} - \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) + \left(\frac{h_{i+1} + h_i}{2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \\ \frac{z_j}{h_j} \left[\left(\frac{\partial v_{i+1}}{\partial y} - \frac{\partial v_i}{\partial y} \right) + \left(\frac{h_{i+1} + h_i}{2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \\ \frac{z_j}{h_j} \left[\left(\frac{\partial u_{i+1}}{\partial y} + \frac{\partial v_{i+1}}{\partial x} - \frac{\partial u_i}{\partial y} - \frac{\partial v_i}{\partial x} \right) + (h_{i+1} + h_i) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \dots \\ \dots \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{z_j}{h_j} \left[(u_{i+1} - u_i) + \left(\frac{h_{i+1} + h_i}{2} + h_j \right) \frac{\partial w}{\partial x} \right] \\ \frac{z_j}{h_j} \left[(v_{i+1} - v_i) + \left(\frac{h_{i+1} + h_i}{2} + h_j \right) \frac{\partial w}{\partial y} \right] \end{Bmatrix} &= \boldsymbol{\varepsilon}_m^{(j)} + \boldsymbol{\varepsilon}_f^{(j)} + \boldsymbol{\varepsilon}_c^{(j)} \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

où $\boldsymbol{\varepsilon}_m^{(j)}$, $\boldsymbol{\varepsilon}_f^{(j)}$ et $\boldsymbol{\varepsilon}_c^{(j)}$ sont les vecteurs de déformations associés aux effets de membrane, de flexion et de cisaillement hors plan, respectivement, et l'énergie de déformation peut être exprimée comme suit :

$$U^{(j)} = \frac{1}{2} \int_V \left(\boldsymbol{\varepsilon}_m^{(j)} + \boldsymbol{\varepsilon}_f^{(j)} + \boldsymbol{\varepsilon}_c^{(j)} \right)^T \mathbf{E}^{(j)} \left(\boldsymbol{\varepsilon}_m^{(j)} + \boldsymbol{\varepsilon}_f^{(j)} + \boldsymbol{\varepsilon}_c^{(j)} \right) dV \quad (\text{A.8})$$

ou sous la forme suivante:

$$U^{(j)} = U_{mm}^{(j)} + U_{ff}^{(j)} + U_{cc}^{(j)} + U_{mf}^{(j)} + U_{mc}^{(j)} + U_{fc}^{(j)} \quad (\text{A.9})$$

où les fractions de l'énergie de déformation sont données par :

$$U_{mm}^{(j)} = \frac{1}{2} \delta^T \int_V \left(\mathbf{D}_m^{(j)T} \mathbf{E}^{(j)} \mathbf{D}_m^{(j)} \right) dV \delta \quad (\text{A.10.a})$$

$$U_{ff}^{(j)} = \frac{1}{2} \delta^T \int_V \left(\mathbf{D}_f^{(j)T} \mathbf{E}^{(j)} \mathbf{D}_f^{(j)} \right) dV \delta \quad (\text{A.10.b})$$

$$U_{cc}^{(j)} = \frac{1}{2} \delta^T \int_V \left(\mathbf{D}_c^{(j)T} \mathbf{E}^{(j)} \mathbf{D}_c^{(j)} \right) dV \delta \quad (\text{A.10.c})$$

$$U_{mf}^{(j)} = \frac{1}{2} \delta^T \int_V 2 \left(\mathbf{D}_m^{(j)T} \mathbf{E}^{(j)} \mathbf{D}_f^{(j)} \right) dV \delta \quad (\text{A.10.d})$$

$$U_{mc}^{(j)} = \frac{1}{2} \delta^T \int_V 2 \left(\mathbf{D}_m^{(j)T} \mathbf{E}^{(j)} \mathbf{D}_c^{(j)} \right) dV \delta \quad (\text{A.10.e})$$

$$U_{fc}^{(j)} = \frac{1}{2} \delta^T \int_V 2 \left(\mathbf{D}_f^{(j)T} \mathbf{E}^{(j)} \mathbf{D}_c^{(j)} \right) dV \delta \quad (\text{A.10.f})$$

Par la comparaison entre les expressions (3.33) et (A.10), on exprime la contribution à la matrice de raideur élémentaire des couches viscoélastiques sous la forme suivante (expression (3.35)) :

$$\mathbf{K}^{(j)} = \mathbf{K}_{mm}^{(j)} + \mathbf{K}_{ff}^{(j)} + \mathbf{K}_{cc}^{(j)} + 2\mathbf{K}_{mf}^{(j)} + 2\mathbf{K}_{mc}^{(j)} + 2\mathbf{K}_{fc}^{(j)} \quad (\text{A.11})$$

A.2 Plaque sandwich à cinq couches

Dans cette section, la formulation développée au Chapitre 3 est particularisée pour un élément de plaque sandwich composé par trois couches métalliques et deux couches viscoélastiques alternées, résultant en un multicouche symétrique à cinq couches, comme montré en Figure A.1.

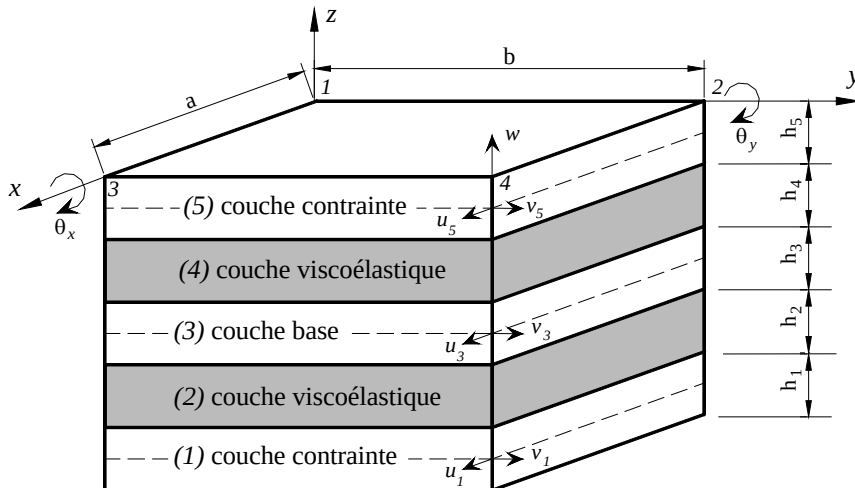


Figure A.1 – Élément fini de plaque sandwich à cinq couches.

Tenant compte de la géométrie du multicouche et des expressions (3.1) à (3.9), les déformations dues au cisaillement des couches viscoélastiques sont données par :

$$\gamma_{xz}^{(2)} = \frac{d_2}{h_2} \left[\frac{u_1 - u_3}{d_2} + \frac{\partial w}{\partial x} \right] \quad (\text{A.12.a})$$

$$\gamma_{yz}^{(2)} = \frac{d_2}{h_2} \left[\frac{v_1 - v_3}{d_2} + \frac{\partial w}{\partial y} \right] \quad (\text{A.12.b})$$

$$\gamma_{xz}^{(4)} = \frac{d_4}{h_4} \left[\frac{u_3 - u_5}{d_4} + \frac{\partial w}{\partial x} \right] \quad (\text{A.12.c})$$

$$\gamma_{yz}^{(4)} = \frac{d_4}{h_4} \left[\frac{v_3 - v_5}{d_4} + \frac{\partial w}{\partial y} \right] \quad (\text{A.12.d})$$

où $d_2 = \frac{1}{2}(h_1 + 2h_2 + h_3)$ et $d_4 = \frac{1}{2}(h_3 + 2h_4 + h_5)$.

À travers les expressions (3.7) et (3.8), les déplacements longitudinaux moyens dans les directions x et y dans les couches viscoélastiques sont donnés par :

$$u_2 = \frac{1}{2} \left[u_1 + u_3 + \frac{h_1 - h_3}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \right] \quad (\text{A.13.a})$$

$$u_4 = \frac{1}{2} \left[u_3 + u_5 + \frac{h_3 - h_5}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \right] \quad (\text{A.13.b})$$

$$v_2 = \frac{1}{2} \left[v_1 + v_3 + \frac{h_1 - h_3}{2} \frac{\partial w}{\partial y} \right] \quad (\text{A.13.c})$$

$$v_4 = \frac{1}{2} \left[v_3 + v_5 + \frac{h_3 - h_5}{2} \frac{\partial w}{\partial y} \right] \quad (\text{A.13.d})$$

Comme montré en Figure A.1, les éléments de plaque sandwich à cinq couches sont limités par quatre nœuds, où chaque nœud contient 9 degrés de libertés, à savoir : les déplacements longitudinaux u_1 et v_1 de la couche contrainte supérieure ; les déplacements u_3 et v_3 de la couche base ; les déplacements longitudinaux u_5 et v_5 de la couche contrainte inférieure ; la déflexion transversal w ; et les rotations $\theta_x = \partial w / \partial x$ et $\theta_y = \partial w / \partial y$. On peut donc représenter les degrés de liberté nodaux sous une forme vectorielle comme suit :

$$\delta_j = [u_{1j} \quad v_{1j} \quad u_{3j} \quad v_{3j} \quad u_{5j} \quad v_{5j} \quad w_j \quad \theta_{xj} \quad \theta_{yj}]^T \quad j = 1, \dots, 4 \quad (\text{A.14})$$

et le vecteur de degrés de liberté au niveau élémentaire est donné par :

$$\delta = [\delta_1 \quad \delta_2 \quad \delta_3 \quad \delta_4]^T \quad (\text{A.15})$$

Les déplacements longitudinaux dans les directions x et y sont interpolés par des fonctions bilinéaires, et le déplacement transversal w est interpolé par un polynôme de troisième ordre, qu'on peut représenter par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} u_1 &= a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 xy \\ v_1 &= a_5 + a_6 x + a_7 y + a_8 xy \\ u_3 &= a_9 + a_{10} x + a_{11} y + a_{12} xy \\ v_3 &= a_{13} + a_{14} x + a_{15} y + a_{16} xy \\ u_5 &= a_{17} + a_{18} x + a_{19} y + a_{20} xy \\ v_5 &= a_{21} + a_{22} x + a_{23} y + a_{24} xy \\ w &= b_1 + b_2 x + b_3 y + b_4 x^2 + b_5 xy + b_6 y^2 + b_7 x^3 + b_8 x^2 y + b_9 xy^2 + b_{10} y^3 + b_{11} x^3 y + b_{12} xy^3 \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

De cette façon, selon l'expression (3.29) et en omettant la dépendance par rapport à x et y pour simplifier la notation, l'interpolation des champs des déplacements, est exprimée comme suit :

$$A(x, y) = N(x, y) \delta \quad (\text{A.17})$$

$$A(x, y) = [u_1 \quad v_1 \quad u_3 \quad v_3 \quad u_5 \quad v_5 \quad w \quad \theta_x \quad \theta_y]^T, \text{ et} \quad (\text{A.18})$$

$$N(x, y) = [N_{u_1} \quad N_{v_1} \quad N_{u_3} \quad N_{v_3} \quad N_{u_5} \quad N_{v_5} \quad N_w \quad N_{\theta_x} \quad N_{\theta_y}]^T \quad (\text{A.19})$$

où :

$$\begin{aligned} N_{u_1} &= [N_{11} \quad \theta_8 \quad N_{12} \quad \theta_8 \quad N_{13} \quad \theta_8 \quad N_{14} \quad \theta_8], \\ N_{v_1} &= [\theta_1 \quad N_{11} \quad \theta_8 \quad N_{12} \quad \theta_8 \quad N_{13} \quad \theta_8 \quad N_{14} \quad \theta_7], \\ N_{u_3} &= [\theta_2 \quad N_{11} \quad \theta_8 \quad N_{12} \quad \theta_8 \quad N_{13} \quad \theta_8 \quad N_{14} \quad \theta_6], \\ N_{v_3} &= [\theta_3 \quad N_{11} \quad \theta_8 \quad N_{12} \quad \theta_8 \quad N_{13} \quad \theta_8 \quad N_{14} \quad \theta_5], \\ N_{u_5} &= [\theta_4 \quad N_{11} \quad \theta_8 \quad N_{12} \quad \theta_8 \quad N_{13} \quad \theta_8 \quad N_{14} \quad \theta_4], \\ N_{v_5} &= [\theta_5 \quad N_{11} \quad \theta_8 \quad N_{12} \quad \theta_8 \quad N_{13} \quad \theta_8 \quad N_{14} \quad \theta_3], \\ N_w &= [\theta_6 \quad N_{1w} \quad N_{1\theta_x} \quad N_{1\theta_y} \quad \theta_6 \quad N_{2w} \quad N_{2\theta_x} \quad N_{2\theta_y} \quad \theta_6 \quad N_{3w} \quad N_{3\theta_x} \quad N_{3\theta_y} \quad \theta_6 \quad N_{4w} \quad N_{4\theta_x} \quad N_{4\theta_y}]^T, \\ N_{\theta_x} &= [\theta_6 \quad N_{1w}^x \quad N_{1\theta_x}^x \quad N_{1\theta_y}^x \quad \theta_6 \quad N_{2w}^x \quad N_{2\theta_x}^x \quad N_{2\theta_y}^x \quad \theta_6 \quad N_{3w}^x \quad N_{3\theta_x}^x \quad N_{3\theta_y}^x \quad \theta_6 \quad N_{4w}^x \quad N_{4\theta_x}^x \quad N_{4\theta_y}^x]^T, \\ N_{\theta_y} &= [\theta_6 \quad N_{1w}^y \quad N_{1\theta_x}^y \quad N_{1\theta_y}^y \quad \theta_6 \quad N_{2w}^y \quad N_{2\theta_x}^y \quad N_{2\theta_y}^y \quad \theta_6 \quad N_{3w}^y \quad N_{3\theta_x}^y \quad N_{3\theta_y}^y \quad \theta_6 \quad N_{4w}^y \quad N_{4\theta_x}^y \quad N_{4\theta_y}^y]^T. \end{aligned}$$

$$\delta = \left\{ u_1^1 \ v_1^1 \ u_3^1 \ v_3^1 \ u_5^1 \ v_5^1 \ w^1 \ \theta_x^1 \ \theta_y^1 \ u_1^2 \ v_1^2 \ u_3^2 \ v_3^2 \ u_5^2 \ v_5^2 \ w^2 \ \theta_x^2 \ \theta_y^2 \ u_1^3 \ v_1^3 \ \dots \right. \\ \left. \dots u_3^3 \ v_3^3 \ u_5^3 \ v_5^3 \ w^3 \ \theta_x^3 \ \theta_y^3 \ u_1^4 \ v_1^4 \ u_3^4 \ v_3^4 \ u_5^4 \ v_5^4 \ w^4 \ \theta_x^4 \ \theta_y^4 \right\}^T.$$

Les termes N_{1i} , N_{1w} , $N_{i\theta_x}$, $N_{i\theta_y}$, N_{iw}^x , $N_{i\theta_x}^x$, $N_{i\theta_y}^x$, N_{iw}^y , $N_{i\theta_x}^y$ et $N_{i\theta_y}^y$ pour $i = 1, \dots, 4$, sont donnés par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} N_{11} &= \frac{(y-b)(x-b)}{ab} ; \quad N_{12} = \frac{x(b-y)}{ab} ; \quad N_{13} = \frac{xy}{ab} ; \quad N_{14} = \frac{y(a-x)}{ab} ; \\ N_{1w} &= \frac{(b-y)(x-a)(2x^2b^2 - xab^2 + 2y^2a^2 - ya^2b - a^2b^2)}{a^3b^3} ; \\ N_{2w} &= \frac{x(y-b)(x-a)(2x^2a^2 - ya^2b - 3xab^2 + 2x^2b^2)}{a^3b^3} ; \\ N_{3w} &= \frac{-xy(a^2b^2 - 3xab^2 - 3ya^2b + 2x^2b^2 + 2y^2a^2)}{a^3b^3} ; \\ N_{4w} &= \frac{y(x-a)(2x^2b^2 - xab^2 - 3ya^2b + 2y^2a^2)}{a^3b^3} ; \\ N_{1\theta_x} &= \frac{x(x-a)^2(b-y)}{a^2b} ; \quad N_{2\theta_x} = \frac{x^2(b-y)(x-a)}{a^2b} ; \quad N_{3\theta_x} = \frac{x^2y(x-a)}{a^2b} \\ N_{4\theta_x} &= \frac{xy(x-a)^2}{a^2b} ; \quad N_{1\theta_y} = \frac{y(y-b)^2(a-x)}{ab^2} ; \quad N_{2\theta_y} = \frac{xy(y-b)^2}{ab^2} ; \quad N_{3\theta_y} = \frac{xy^2(y-b)}{ab^2} \\ N_{4\theta_y} &= \frac{y^2(y-b)(a-x)}{ab^2} ; \quad N_{1w}^x = \frac{(b-y)(6x^2b^2 - 6xab^2 + 2y^2a^2 - ya^2b)}{a^3b^3} ; \\ N_{2w}^x &= \frac{(y-b)(6x^2b^2 - 6xab^2 + 2y^2a^2 - ya^2b)}{a^3b^3} ; \\ N_{3w}^x &= \frac{-y(a^2b^2 - 6xab^2 - 3ya^2b + 6x^2b^2 + 2y^2a^2)}{a^3b^3} ; \\ N_{4w}^x &= \frac{y(a^2b^2 - 6xab^2 - 3ya^2b + 6x^2b^2 + 2y^2a^2)}{a^3b^3} ; \quad N_{1\theta_x}^x = \frac{(x-a)(b-y)(3x-a)}{a^2b} ; \\ N_{2\theta_x}^x &= \frac{x(b-y)(3x-2a)}{a^2b} ; \quad N_{3\theta_x}^x = \frac{xy(3x-2a)}{a^2b} ; \quad N_{4\theta_x}^x = \frac{y(x-a)(3x-a)}{a^2b} ; \\ N_{1\theta_y}^x &= \frac{-y(y-b)^2}{ab^2} ; \quad N_{2\theta_y}^x = \frac{y(y-b)^2}{ab^2} ; \quad N_{3\theta_y}^x = \frac{y^2(y-b)^2}{ab^2} ; \quad N_{4\theta_y}^x = \frac{y^2(b-y)}{ab^2} ; \\ N_{1w}^y &= \frac{(a-x)(2x^2b^2 - xab^2 + 6y^2a^2 - 6ya^2b)}{a^3b^3} ; \\ N_{2w}^y &= \frac{x(6y^2a^2 - 6ya^2b - 3xab^2 + 2x^2b^2 + a^2b^2)}{a^3b^3} ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_{3w}^y &= \frac{-x(6y^2a^2 - 6ya^2b - 3xab^2 + 2x^2b^2 + a^2b^2)}{a^3b^3}; \\
N_{4w}^y &= \frac{(x-a)(2x^2b^2 - xab^2 + 6y^2a^2 - 6ya^2b)}{a^3b^3}; \quad N_{1\theta_x}^y = \frac{-x(x-a)^2}{ba^2}; \quad N_{2\theta_x}^y = \frac{-x^2(x-a)}{ba^2} \\
; \quad N_{3\theta_x}^y &= \frac{x^2(x-a)}{ba^2}; \quad N_{4\theta_x}^y = \frac{x(x-a)^2}{ba^2}; \quad N_{4\theta_x}^y = \frac{x(x-a)^2}{ba^2}; \quad N_{1\theta_y}^x = \frac{(x-a)(b-y)(3y-b)}{ab^2} \\
N_{2\theta_y}^x &= \frac{x(y-b)(3y-b)}{ab^2}; \quad N_{3\theta_y}^x = \frac{xy(-2b+3y)}{ab^2}; \quad N_{4\theta_y}^x = \frac{y(x-a)(2b-3y)}{ab^2}
\end{aligned}$$

On rappelle les expressions (3.15) et (3.25) qui établissent les relations contraintes-déformations pour les couches élastiques et viscoélastiques sont données par :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x^{(1)} \\ \sigma_y^{(1)} \\ \tau_{xy}^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E^{(1)}}{1-\nu^{(1)^2}} & \frac{E^{(1)}\nu^{(1)}}{1-\nu^{(1)^2}} & 0 \\ \frac{E^{(1)}\nu^{(1)}}{1-\nu^{(1)^2}} & \frac{E^{(1)}}{1-\nu^{(1)^2}} & 0 \\ 0 & 0 & G^{(1)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{(1)} \\ \varepsilon_y^{(1)} \\ \gamma_{xy}^{(1)} \end{Bmatrix} \quad \text{ou } \sigma^{(1)} = \mathbf{E}^{(1)} \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} \quad (\text{A.20.a})$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x^{(3)} \\ \sigma_y^{(3)} \\ \tau_{xy}^{(3)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E^{(3)}}{1-\nu^{(3)^2}} & \frac{E^{(3)}\nu^{(3)}}{1-\nu^{(3)^2}} & 0 \\ \frac{E^{(3)}\nu^{(3)}}{1-\nu^{(3)^2}} & \frac{E^{(3)}}{1-\nu^{(3)^2}} & 0 \\ 0 & 0 & G^{(3)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{(3)} \\ \varepsilon_y^{(3)} \\ \gamma_{xy}^{(3)} \end{Bmatrix} \quad \text{ou } \sigma^{(3)} = \mathbf{E}^{(3)} \boldsymbol{\varepsilon}^{(3)} \quad (\text{A.20.b})$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x^{(5)} \\ \sigma_y^{(5)} \\ \tau_{xy}^{(5)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E^{(5)}}{1-\nu^{(5)^2}} & \frac{E^{(5)}\nu^{(5)}}{1-\nu^{(5)^2}} & 0 \\ \frac{E^{(5)}\nu^{(5)}}{1-\nu^{(5)^2}} & \frac{E^{(5)}}{1-\nu^{(5)^2}} & 0 \\ 0 & 0 & G^{(5)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{(5)} \\ \varepsilon_y^{(5)} \\ \gamma_{xy}^{(5)} \end{Bmatrix} \quad \text{ou } \sigma^{(5)} = \mathbf{E}^{(5)} \boldsymbol{\varepsilon}^{(5)} \quad (\text{A.20.c})$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x^{(2)} \\ \sigma_y^{(2)} \\ \tau_{xy}^{(2)} \\ \tau_{xz}^{(2)} \\ \tau_{yz}^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E^{(2)}}{1-\nu^{(2)^2}} & \frac{E^{(2)}\nu^{(2)}}{1-\nu^{(2)^2}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{E^{(2)}\nu^{(2)}}{1-\nu^{(2)^2}} & \frac{E^{(2)}}{1-\nu^{(2)^2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G^{(2)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{(2)} \\ \varepsilon_y^{(2)} \\ \gamma_{xy}^{(2)} \\ \gamma_{xz}^{(2)} \\ \gamma_{yz}^{(2)} \end{Bmatrix} \quad \text{ou } \sigma^{(2)} = \mathbf{E}^{(2)} \boldsymbol{\varepsilon}^{(2)} \quad (\text{A.20.d})$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x^{(4)} \\ \sigma_y^{(4)} \\ \tau_{xy}^{(4)} \\ \tau_{xz}^{(4)} \\ \tau_{yz}^{(4)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E^{(4)}}{1-\nu^{(4)^2}} & \frac{E^{(4)}\nu^{(4)}}{1-\nu^{(4)^2}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{E^{(4)}}{1-\nu^{(4)^2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G^{(4)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G^{(4)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G^{(4)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{(4)} \\ \varepsilon_y^{(4)} \\ \gamma_{xy}^{(4)} \\ \gamma_{xz}^{(4)} \\ \gamma_{yz}^{(4)} \end{Bmatrix} \text{ ou } \boldsymbol{\sigma}^{(4)} = \mathbf{E}^{(4)} \boldsymbol{\varepsilon}^{(4)} \quad (\text{A.20.e})$$

Selon le développement présenté par les expressions (3.31) à (3.42), les contributions à la matrice de raideur associée à chaque couche sont représentées par les expressions suivantes :

$$\mathbf{K}^{(1)} = \int_V \left(\mathbf{D}_m^{(1)T} \mathbf{E}^{(1)} \mathbf{D}_m^{(1)} + \mathbf{D}_f^{(1)T} \mathbf{E}^{(1)} \mathbf{D}_f^{(1)} + \mathbf{D}_m^{(1)T} \mathbf{E}^{(1)} \mathbf{D}_f^{(1)} + \mathbf{D}_f^{(1)T} \mathbf{E}^{(1)} \mathbf{D}_m^{(1)} \right) dV \quad (\text{A.21})$$

$$\mathbf{K}^{(2)} = \int_V \left(\mathbf{D}_m^{(2)T} \mathbf{E}^{(2)} \mathbf{D}_m^{(2)} + \mathbf{D}_f^{(2)T} \mathbf{E}^{(2)} \mathbf{D}_f^{(2)} + \mathbf{D}_c^{(2)T} \mathbf{E}^{(2)} \mathbf{D}_c^{(2)} \right) dV \quad (\text{A.22})$$

$$\mathbf{K}^{(3)} = \int_V \left(\mathbf{D}_m^{(3)T} \mathbf{E}^{(3)} \mathbf{D}_m^{(3)} + \mathbf{D}_f^{(3)T} \mathbf{E}^{(3)} \mathbf{D}_f^{(3)} + \mathbf{D}_m^{(3)T} \mathbf{E}^{(3)} \mathbf{D}_f^{(3)} + \mathbf{D}_f^{(3)T} \mathbf{E}^{(3)} \mathbf{D}_m^{(3)} \right) dV \quad (\text{A.23})$$

$$\mathbf{K}^{(4)} = \int_V \left(\mathbf{D}_m^{(4)T} \mathbf{E}^{(4)} \mathbf{D}_m^{(4)} + \mathbf{D}_f^{(4)T} \mathbf{E}^{(4)} \mathbf{D}_f^{(4)} + \mathbf{D}_c^{(4)T} \mathbf{E}^{(4)} \mathbf{D}_c^{(4)} \right) dV \quad (\text{A.24})$$

$$\mathbf{K}^{(5)} = \int_V \left(\mathbf{D}_m^{(5)T} \mathbf{E}^{(5)} \mathbf{D}_m^{(5)} + \mathbf{D}_f^{(5)T} \mathbf{E}^{(5)} \mathbf{D}_f^{(5)} + \mathbf{D}_m^{(5)T} \mathbf{E}^{(5)} \mathbf{D}_f^{(5)} + \mathbf{D}_f^{(5)T} \mathbf{E}^{(5)} \mathbf{D}_m^{(5)} \right) dV \quad (\text{A.25})$$

Finalement, la matrice de raideur élémentaire de l'élément fini de plaque à cinq couches peut être écrite comme suit :

$$\mathbf{K} = \sum_{k=1}^5 \mathbf{K}^{(k)} \quad (\text{A.26})$$

En suivant un développement similaire, à partir de l'expression (3.38), on peut exprimer les contributions de chaque couche à la matrice de masse de l'élément comme suit :

$$\mathbf{M}^{(1)} = \rho_1 h_1 \int_A \left(\mathbf{N}_w^T \mathbf{N}_w + \mathbf{N}_{u_1}^T \mathbf{N}_{u_1} + \mathbf{N}_{v_1}^T \mathbf{N}_{v_1} \right) dA \quad (\text{A.27})$$

$$\mathbf{M}^{(2)} = \rho_2 h_2 \int_A \left(\mathbf{N}_w^T \mathbf{N}_w + \mathbf{N}_{u_2}^T \mathbf{N}_{u_2} + \mathbf{N}_{v_2}^T \mathbf{N}_{v_2} \right) dA \quad (\text{A.28})$$

$$\mathbf{M}^{(3)} = \rho_3 h_3 \int_A \left(\mathbf{N}_w^T \mathbf{N}_w + \mathbf{N}_{u_3}^T \mathbf{N}_{u_3} + \mathbf{N}_{v_3}^T \mathbf{N}_{v_3} \right) dA \quad (\text{A.29})$$

$$\mathbf{M}^{(4)} = \rho_4 h_4 \int_A \left(\mathbf{N}_w^T \mathbf{N}_w + \mathbf{N}_{u_4}^T \mathbf{N}_{u_4} + \mathbf{N}_{v_4}^T \mathbf{N}_{v_4} \right) dA \quad (\text{A.30})$$

$$\mathbf{M}^{(5)} = \rho_5 h_5 \int_A \left(\mathbf{N}_w^T \mathbf{N}_w + \mathbf{N}_{u_5}^T \mathbf{N}_{u_5} + \mathbf{N}_{v_5}^T \mathbf{N}_{v_5} \right) dA \quad (\text{A.31})$$

et la matrice de masse élémentaire peut être écrite sous la forme :

$$\mathbf{M} = \sum_{k=1}^5 \mathbf{M}^{(k)} \quad (\text{A.40})$$

A.2.1 Paramétrisation du modèle sandwich de plaque à cinq couches.

Selon la théorie présentée dans la section précédente, les paramètres de conception qui caractérisent la masse et la rigidité, correspondant à chaque couche, peuvent être factorisés en dehors des matrices élémentaires, en découplant les effets de membrane, flexion et cisaillement, comme montré dans les équations suivantes :

Masse :

$$\mathbf{M}_1 = \rho_1 h_1 \left({}_1 \mathbf{M}_1^{(m)} + {}_1 \mathbf{M}_1^{(f)} \right) \quad (\text{A.41.a})$$

$$\mathbf{M}_2 = \rho_2 h_2 \left({}_0 \mathbf{M}_2^{(m)} + d_{1\ 1} \mathbf{M}_2^{(m)} + d_{1\ 2}^2 \mathbf{M}_2^{(m)} + {}_0 \mathbf{M}_2^{(f)} \right) \quad (\text{A.41.b})$$

$$\mathbf{M}_3 = \rho_3 h_3 \left({}_1 \mathbf{M}_3^{(m)} + {}_1 \mathbf{M}_3^{(f)} \right) \quad (\text{A.41.c})$$

$$\mathbf{M}_4 = \rho_4 h_4 \left({}_0 \mathbf{M}_4^{(m)} + d_{2\ 1} \mathbf{M}_4^{(m)} + d_{2\ 2}^2 \mathbf{M}_4^{(m)} + {}_0 \mathbf{M}_4^{(f)} \right) \quad (\text{A.41.d})$$

$$\mathbf{M}_5 = \rho_5 h_5 \left({}_1 \mathbf{M}_5^{(m)} + {}_1 \mathbf{M}_5^{(f)} \right) \quad (\text{A.41.e})$$

Raideur :

$$\mathbf{K}_1 = E_1 h_1 \left({}_1 \mathbf{K}_1^{(m)} + h_{1\ 3}^2 \mathbf{K}_1^{(f)} \right) \quad (\text{A.42.a})$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{K}}_2 = h_2 \left({}_0 \bar{\mathbf{K}}_2^{(m)} + d_{1\ 1} \bar{\mathbf{K}}_2^{(m)} + d_{1\ 2}^2 \bar{\mathbf{K}}_2^{(m)} \right) + h_2 \left({}_0 \bar{\mathbf{K}}_2^{(f)} + d_{2\ 1} \bar{\mathbf{K}}_2^{(f)} + d_{2\ 2}^2 \bar{\mathbf{K}}_2^{(f)} \right) + \dots \\ \frac{1}{h_2} \left({}_0 \bar{\mathbf{K}}_2^{(c)} + d_{3\ 1} \bar{\mathbf{K}}_2^{(c)} + d_{3\ 2}^2 \bar{\mathbf{K}}_2^{(c)} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.42.b})$$

$$\mathbf{K}_3 = E_3 h_3 \left({}_1 \mathbf{K}_3^{(m)} + h_{3\ 3}^2 \mathbf{K}_3^{(f)} \right) \quad (\text{A.42.c})$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{K}}_2 = h_4 \left({}_0 \bar{\mathbf{K}}_4^{(m)} + d_{2\ 1} \bar{\mathbf{K}}_4^{(m)} + d_{2\ 2}^2 \bar{\mathbf{K}}_4^{(m)} \right) + h_4 \left({}_0 \bar{\mathbf{K}}_4^{(f)} + d_{5\ 1} \bar{\mathbf{K}}_4^{(f)} + d_{5\ 2}^2 \bar{\mathbf{K}}_4^{(f)} \right) + \dots \\ \frac{1}{h_4} \left({}_0 \bar{\mathbf{K}}_4^{(c)} + d_{6\ 1} \bar{\mathbf{K}}_4^{(c)} + d_{6\ 2}^2 \bar{\mathbf{K}}_4^{(c)} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.42.d})$$

$$\mathbf{K}_5 = E_5 h_5 \left({}_1 \mathbf{K}_5^{(m)} + h_{5\ 3}^2 \mathbf{K}_5^{(f)} \right) \quad (\text{A.42.e})$$

où $d_1 = (h_1 - h_3)$, $d_2 = (h_3 - h_5)$, $d_3 = (h_1 + 2h_2 + h_3)$, et $d_4 = (h_3 + 2h_4 + h_5)$; les indices (m) , (f) et (c) sont associés aux effets de membrane, flexion et cisaillement, respectivement ; ρ_k ($k = 1, 2, 3$) est la densité de la k -ième couche.

Annexe B

B.1 Matrices viscoélastiques stochastiques

Pour montrer comment on construit les matrices élémentaires stochastiques du modèle aux élément finis de plaque sandwich, on prend comme exemple la partie stochastique de la matrice de raideur élastique d'un élément multicouche quelconque dans le domaine discrétisé Ω (Cf. Section 6.2.2, au Chapitre 6) :

$$\mathbf{K}_e = \int_{\Omega} H_r(x) \mathbf{D}^T \mathbf{E} \mathbf{D} d\Omega \quad (\text{B.1})$$

où $H_r(x)$, pour un problème bidimensionnel, devient $H_r(x,y)$, qu'on peut obtenir par la résolution du problème aux valeurs propres défini par l'intégrale suivante (Ghanem et Spanos, 1991) :

$$\lambda_r f_r(x,y) = \int_{\Omega} C(x,y) f_r(x,y) dx dy \quad (\text{B.2})$$

où λ_r et $f_r(x,y)$ sont, respectivement, les valeurs propres et les vecteurs propres.

Ainsi, $H_r(x,y)$ est calculée comme suit :

$$H_r(x,y) = \sqrt{\lambda_r} f_r(x,y) \quad (\text{B.3})$$

Pour ce problème bidimensionnel, on considère toutes les variables factorisées apparaissant dans le modèle paramétré en Section 3.9, au Chapitre 3, comme des processus aléatoires bidimensionnels Gaussiens ayant la fonction de covariance exprimée comme suit :

$$C((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = C(x_1 - x_2, y_1 - y_2) = \exp\left(-\frac{|x_1 - x_2|}{L_x} - \frac{|y_1 - y_2|}{L_y}\right) \quad (\text{B.4})$$

où $(x_1, x_2) \in \Omega_x$ et $(y_1, y_2) \in \Omega_y$. L_x et L_y représentent, respectivement, les longueurs de corrélation pour les domaines $\Omega_x = [-a, +a]$ et $\Omega_y = [-b, +b]$, respectivement, illustrés en Figure B.1. Cette fonction de covariance pour des problèmes bidimensionnels est une

extension de la fonction de covariance pour des problèmes unidimensionnels définie comme suit :

$$C(x_1, x_2) = C(x_1 - x_2) = \exp\left(-\frac{|x_1 - x_2|}{L_x}\right) \quad (\text{B.5})$$

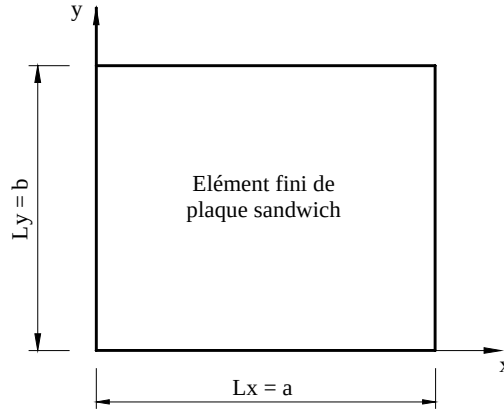


Figure B.1 – Définition du domaine de corrélation pour l'élément fini de plaque sandwich.

La conséquence immédiate de ce choix de la fonction de covariance est qu'elle est séparable, et prenant en compte cette propriété de séparabilité de la fonction de covariance, résulte que le problème 2D est découpé en deux problèmes aux valeurs propres indépendantes de dimensions 1D :

$$f_r(x, y) = f_i(x) f_j(y) \quad \text{et} \quad \lambda_r = \lambda_i \lambda_j \quad (\text{B.6})$$

Comme conséquence, les couples $(\lambda_i, f_i(x))$, solutions de (B.2) par l'introduction de la fonction de covariance (B.4), sont obtenus en résolvant la décomposition de Karhunen-Loève (KL) de premier ordre, avec une longueur de corrélation $L_x \in \Omega_x$, alors que les couples $(\lambda_j, f_j(y))$ sont obtenus en résolvant le même problème, mais pour la longueur de corrélation $L_y \in \Omega_y$. Ces couples sont exprimées comme suit (Ghanem et Spanos, 1991) :

- Si i et j sont impaires $i \geq 1$ et $j \geq 1$:

$$\lambda_i = \frac{2c_1}{\omega_i^2 + c_1^2} ; \quad f_i(x) = \alpha_i \cos(\omega_i x) \quad (\text{B.7.a})$$

$$\lambda_j = \frac{2c_2}{\omega_j^2 + c_2^2} ; \quad f_j(y) = \alpha_j \cos(\omega_j y) \quad (\text{B.7.b})$$

où $\alpha_i = \frac{1}{\sqrt{a + \frac{\sin(2\omega_i a)}{2\omega_i}}}$ et $\alpha_j = \frac{1}{\sqrt{b + \frac{\sin(2\omega_j b)}{2\omega_j}}}$. Les termes ω_i et ω_j sont les solutions des

équations transcendantales suivantes :

$$c_1 - \omega_i \tan(\omega_i a) = 0; \quad c_2 - \omega_j \tan(\omega_j b) = 0 \quad (\text{B.8})$$

dans les domaines $\left[(i-1)\frac{\pi}{a}, \left(i-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{a} \right]$ et $\left[(j-1)\frac{\pi}{b}, \left(j-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{b} \right]$. $c_1 = 1/L_x$ et $c_2 = 1/L_y$.

- **Si i et j sont paires $i \geq 2$ et $j \geq 2$:**

$$\lambda_i = \frac{2c_1}{\omega_i^2 + c_1^2}; \quad f_i(x) = \alpha_i \cos(\omega_i x) \quad (\text{B.9.a})$$

$$\lambda_j = \frac{2c_2}{\omega_j^2 + c_2^2}; \quad f_j(y) = \alpha_j \cos(\omega_j y) \quad (\text{B.9.b})$$

où $\alpha_i = \frac{1}{\sqrt{a - \frac{\sin(2\omega_i a)}{2\omega_i}}}$ et $\alpha_j = \frac{1}{\sqrt{b - \frac{\sin(2\omega_j b)}{2\omega_j}}}$. Les termes ω_i et ω_j sont, respectivement,

les solutions des équations transcendantales suivantes :

$$\omega_i + c_1 \tan(\omega_i a) = 0; \quad \omega_j + c_2 \tan(\omega_j b) = 0 \quad (\text{B.10})$$

dans les domaines $\left[\left(i-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{a}, i\frac{\pi}{a} \right]$ et $\left[\left(j-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{b}, j\frac{\pi}{b} \right]$, respectivement.

Par la substitution des expressions (B.7) et (B.9) dans la relation (B.3), la matrice de raideur élastique stochastique est calculée comme suit :

$$\mathbf{K}_e = \int_{\Omega_x} \int_{\Omega_y} H_r(x, y) \mathbf{D}^T \mathbf{E} \mathbf{D} d\Omega_x d\Omega_y \quad (\text{B.11})$$

où $H_r(x, y) = \sqrt{\lambda_r} f_r(x, y)$ est évalué pour r paire et pour r impaire, respectivement.

Si $\xi_r(\theta) = \bar{\xi}_r + \Delta \xi_r(\theta)$ sont les variables aléatoires factorisées associées à un élément fini, l'approximation $\sum_{r=1}^n \mathbf{K}_e \xi_r(\theta)$ est calculée de la manière suivante :

$$\mathbf{K}_e = \xi_r(\theta) \alpha_i \alpha_j \sqrt{\lambda_i} \sqrt{\lambda_j} \int_{\Omega_x} f_j(y) \int_{\Omega_y} f_i(x) \mathbf{D}^T \mathbf{E} \mathbf{D} d\Omega_x d\Omega_y \quad (\text{B.12})$$

Cette procédure est réalisée pour toutes les matrices élémentaires de l'élément fini de plaque sandwich, dont on intervient directement dans le processus d'intégration de chaque couche, pour chaque matrice associée aux effets de membrane, flexion et cisaillement, à travers les fonctions de forme, dans le but d'obtenir toutes les matrices élémentaires stochastiques paires et impaires, qui sont utilisées dans la série tronquée de KL.

Annexe C

C.1 Procédure d'interfaçage entre MATLAB® et ANSYS®

Pour traiter les structures de géométries complexes par couches contraintes, on a développé une stratégie d'interfaçage et remplacement entre les éléments finis de plaque multicouches développés au Chapitre 3 et les éléments de plaque simple ANSYS®.

La Figure C.1 illustre la stratégie d'interfaçage/remplacement entre les codes MATLAB® et ANSYS® développée pour permettre la modélisation de structures complexes en ingénierie contenant des traitements viscoélastiques superficiels.

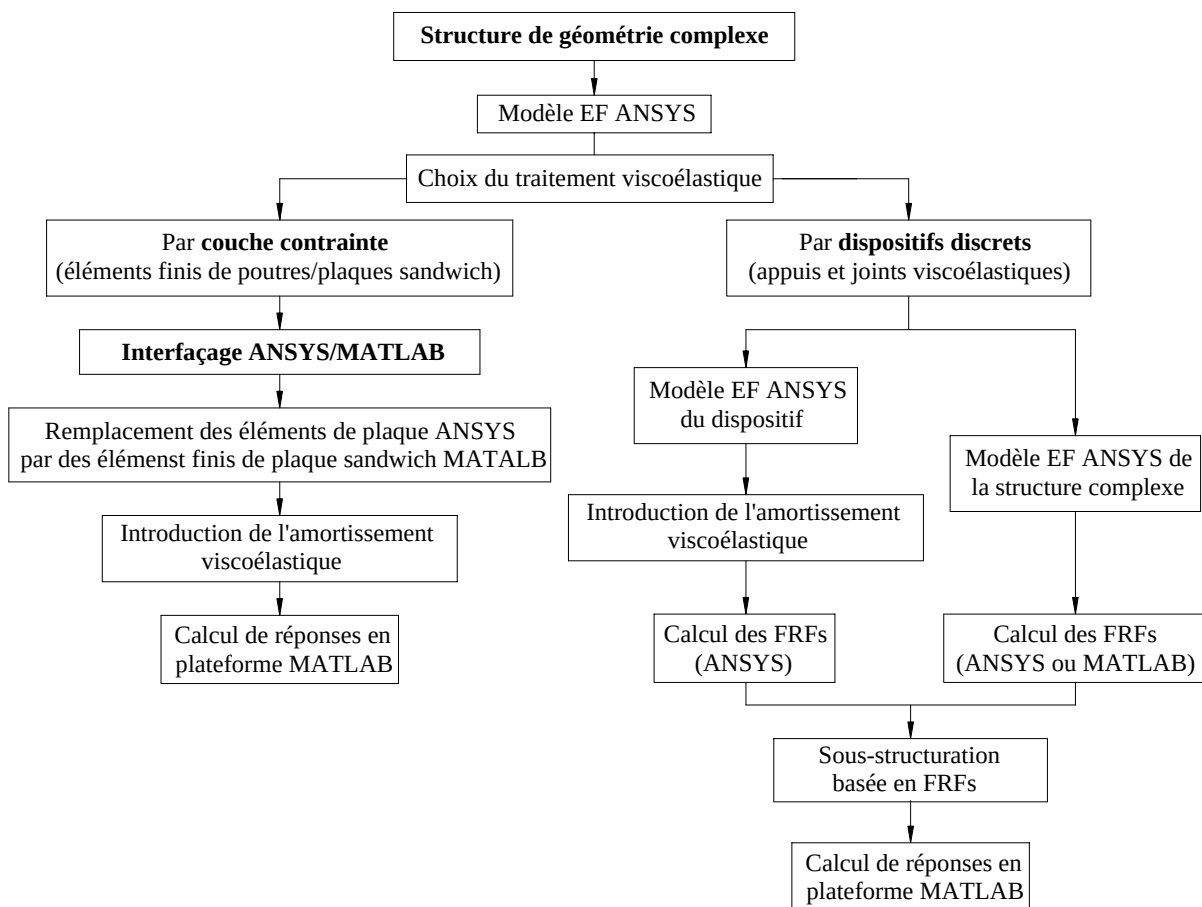


Figure C.1 – Stratégie d'interfaçage/remplacement entre MATLAB® et ANSYS®.

Remarque : On précise que la procédure de couplage et remplacement entre les éléments finis MATLAB® et ANSYS® développée dans ce mémoire de thèse est réalisée par la mise en œuvre des nombreux programmes initialement développés en plateforme MATLAB® par Scott COGAN, chercheur au CNRS, au LMARC, qu'on a modifié pour permettre les applications viscoélastiques contenues dans cette thèse. Ces programmes permettent de lire toutes les matrices élémentaires, les matrices globales, les conditions aux limites, les forces, la géométrie, le repère, etc., des modèles EF des structures modélisées en plateforme ANSYS®, pour n'importe quel type d'analyse.

Pour vérifier la stratégie proposée on considère le modèle EF ANSYS® d'une plaque courbe renforcée par quatre raidisseurs illustrée en Figure C.2. A travers cette figure, on peut également identifier les 10 zones qu'on va par la suite remplacer par des éléments finis de plaque sandwich à trois couches. Les conditions aux limites qui lui sont imposées sont « libres », et les caractéristiques géométriques en millimètres sont : rayon interne : 938, longueur : 720, longueur d'arc : 680, les épaisseurs de la plaque base et de les raidisseurs : 1,5, 0,75, respectivement, et l'hauteur des raidisseurs : 30. Les épaisseurs de la couche viscoélastique et de la couche contrainte en millimètres sont, 0,0254 et 0,5, respectivement.

Les propriétés matérielles de la structure sont : module d'Young, $E=2,1 \times 10^{11}$ N/m², densité $\rho=7800$ Kg/m³ et le coefficient de Poisson $\nu=0,3$, qui sont les même adoptées pour la couche contrainte. Pour la couche viscoélastique, on considère le système conservatif associé (SCA) du matériau viscoélastique 3M ISD112 (Cf. Section 2.3, Chapitre 2).

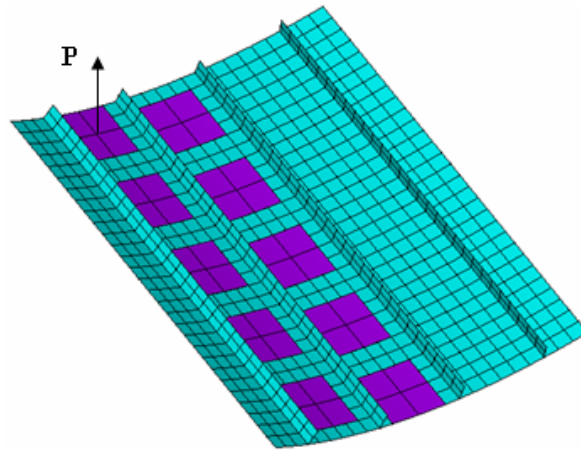


Figure C.2 – Modèle EF ANSYS de la plaque traitée par couche contrainte.

Le test proposé est de comparer les amplitudes des réponses forcées (FRFs) et les fréquences propres du système traité, en considérant le système SCA, dans deux situations : la première, qui est prise comme référence de calcul, consiste à utiliser directement les éléments de plaque sandwich disponibles en plateforme ANSYS®, appelés *SHELL99*. Ce type d'élément fini multicouche ne considère que les valeurs réelles pour les modules d'Young de couches, ce qui explique pourquoi on considère le système SCA ; dans la deuxième situation, on remplace les éléments ANSYS® indiqués en Figure A.4 par des éléments finis de plaque sandwich à trois couches développés au Chapitre 3 en plateforme MATLAB®.

La Figure C.3 montre la distance en forme (MAC) entre les modes du système SCA ANSYS® et ceux obtenus par MATLAB®, qu'on peut aussi comparer à travers le Tableau C.1. Ceci mène à conclure que les deux modèles sont proches, ce qu'on peut remarquer à travers les faibles écarts entre les fréquences propres calculées pour les deux modèles dans la bande fréquentielle d'analyse.

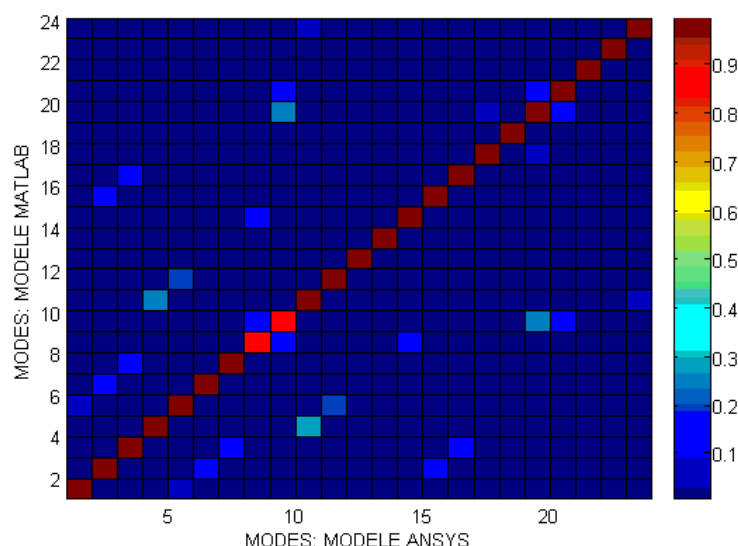


Figure C.3 – Distance en forme pour les modèles ANSYS® et MATLAB®.

Tableau C.1 – Comparaison entre les valeurs propres (modèles ANSYS® et MATLAB®)

Fréquences [Hz]		Ecart en Fréq. [%]	MAC
ANSYS	MATLAB		
10,260	10,332	0,7017	99,627
16,984	17,056	0,4239	99,346
26,408	26,496	0,3332	99,582
47,257	47,290	0,0698	99,684
56,052	56,082	0,0535	99,718
94,376	94,254	0,1293	99,933
102,53	102,32	0,2048	99,967
114,63	114,76	0,1134	88,614
115,02	115,17	0,1304	88,086
149,54	149,27	0,1805	99,832
155,72	155,50	0,1412	99,843
174,09	174,12	0,0172	99,950
176,21	176,25	0,0227	99,948
190,94	188,62	1,2150	99,850

Les réponses forcées (FRFs) collocalisées associées au point **P**, calculées pour les deux modèles, sont présentés en Figure C.4. On remarque une bonne corrélation entre les deux modèles, comme on a pu confirmé à travers les écarts en fréquence et la matrice de MAC.

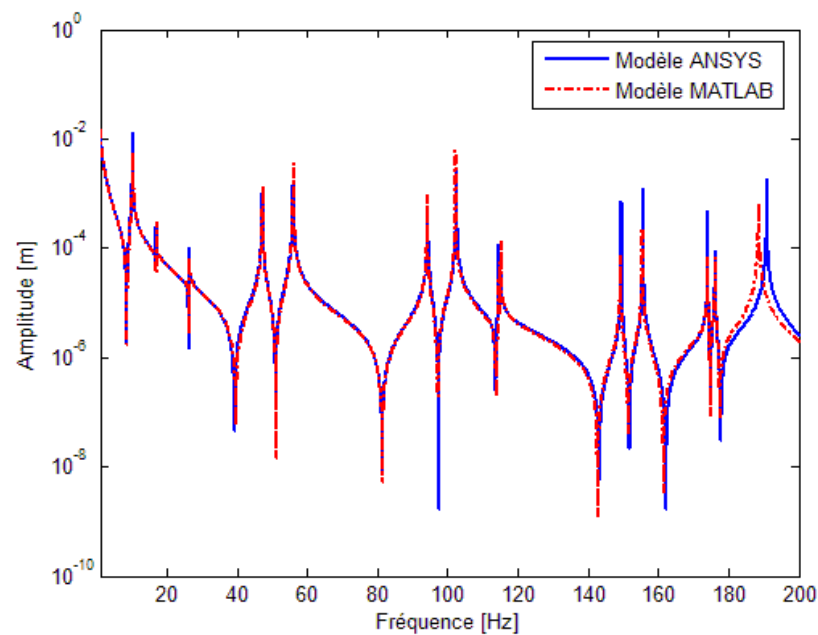


Figure C.4 – Comparaison entre les FRFs des modèles ANSYS® et MATLAB®.

On remarque que pour bien approcher les deux modèles, on doit vérifier :

- La convergence du maillage élément finis de telle façon que la taille des éléments finis ANSYS® qui seront remplacés par des éléments de plaque sandwich modélisés en plateforme MATLAB®, n'est pas trop grande. Ceci peut éviter quelques problèmes des singularités des matrices après la procédure de remplacement ;
- La forme des éléments finis qui seront remplacés, qui doit être de préférence carrée ou rectangulaire ;
- La courbure de la structure (par exemple, plaques courbes), ne doit pas être trop accentuée ;
- Une procédure de rotation du repère local des éléments finis de plaque sandwich développés en plateforme MATLAB® doit être réalisée pour être en concordance avec le repère global du modèle EF ANSYS®, avant de faire l'assemblage globale des éléments finis.