

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA

Bruno Tadeu Pereira Jacob

**Modelagem matemática de esteiras em
desenvolvimento temporal utilizando o método
pseudoespectral de Fourier**



Uberlândia - MG - Brasil

13 de agosto de 2015

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA

Bruno Tadeu Pereira Jacob

Modelagem matemática de esteiras em desenvolvimento temporal utilizando o método pseudoespectral de Fourier

Dissertação de mestrado submetida à coordenação do programa de pós-graduação em engenharia mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, como requisito parcial para obtenção do título de mestre em engenharia mecânica

Orientador: Prof. Dr. Aristeu da Silveira Neto

Universidade Federal de Uberlândia - UFU

Faculdade de Engenharia Mecânica - FEMEC

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica

Uberlândia - MG - Brasil

13 de agosto de 2015

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFU, MG, Brasil.

J15m
2015

Jacob, Bruno Tadeu Pereira,
Modelagem matemática de esteiras em desenvolvimento temporal
utilizando o método pseudoespectral de Fourier / Bruno Tadeu Pereira
Jacob. - 2015.
150 f. : il.

Orientador: Aristeu da Silveira Neto.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia,
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.
Inclui bibliografia.

1. Engenharia mecânica - Teses. 2. Escoamento - Teses. 3. Esteira
rolante - Teses. 4. Turbulência - Teses. I. Silveira Neto, Aristeu da,
1955- II. Universidade Federal de Uberlândia. Programa de Pós-
Graduação em Engenharia Mecânica. III. Título.

CDU: 621

Bruno Tadeu Pereira Jacob

Modelagem matemática de esteiras em desenvolvimento temporal utilizando o método pseudoespectral de Fourier

Dissertação de mestrado submetida à coordenação do programa de pós-graduação em engenharia mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, como requisito parcial para obtenção do título de mestre em engenharia mecânica

Trabalho aprovado. Uberlândia - MG - Brasil, 13 de Agosto de 2015.

Prof. Dr. Aristeu da Silveira Neto
Orientador - UFU

Prof. Dr. Francisco José de Souza
UFU

Prof. Dr. Roney Leon Thompson
UFF

**Prof. Dr. Renato Aparecido Pimentel
da Silva**
UFU

Uberlândia - MG - Brasil
13 de agosto de 2015

*O presente trabalho é dedicado à minha família e ao professor, amigo e orientador,
Aristeu da Silveira Neto, professor titular da Universidade Federal de Uberlândia.*

Agradecimentos

Eu gostaria de agradecer aos meus pais, amigos, e principalmente a duas pessoas que julgo terem sido essenciais para a concretização deste projeto: ao meu orientador, Prof. Aristeu da Silveira Neto, professor titular da faculdade de engenharia mecânica da Universidade Federal de Uberlândia ¹, e ao amigo e colega de trabalho, M.Sc. Carlos Antonio Ribeiro Duarte, doutorando pela mesma instituição.

Agradecimentos especiais são direcionados à CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) ², pelo suporte financeiro, à Petrobras ³ e à Agência Nacional do Petróleo (ANP) ⁴, pela contribuição constante que vêm fornecendo para o desenvolvimento do CFD no Brasil.

¹ MFLab UFU: <<http://mflab.mecanica.ufu.br>>

² CAPES <<http://www.capes.gov.br/>>

³ Petrobras <<http://www.petrobras.com.br/>>

⁴ ANP <<http://www.anp.gov.br/>>



O adormecer da razão produz monstros; *Los Caprichos* (1799), Francisco de Goya.

Resumo

O presente trabalho se dedica a modelagem matemática e a simulações numéricas *DNS* e *LES* de uma esteira tridimensional, incompressível, em desenvolvimento temporal, buscando evidenciar diferenças na estabilidade, transição e no desenvolvimento de estruturas coerentes e de pequena escala, quando o escoamento é submetido a perturbações randômicas de diferentes amplitudes. As perturbações são geradas utilizando-se a técnica *Random Flow Generator* (RFG), sendo sobrepostas à condição inicial do escoamento.

As equações de Navier-Stokes são resolvidas em um domínio prismático, com condições de contorno periódicas em todas as direções, utilizando-se o método pseudoespectral de Fourier. Os invariantes do tensor gradiente de velocidade, Q e R , são analisados para perturbações de magnitude 10^{-3} , 10^{-4} and 10^{-5} , mostrando a formação de uma correlação no formato de gota, característica da resolução das equações de Navier-Stokes. Além disso, são apresentados mapas do segundo e terceiro invariante do tensor taxa de deformação, Q_S e R_S , a fim de evidenciar as diferenças locais no escoamento e as características topológicas na taxa de dissipação de energia cinética. Isosuperfícies de Q e Q_W , bem como contornos de vorticidade são apresentados, possibilitando a identificação visual das estruturas coerentes, e confirmando os padrões de estruturas previstos pelos mapas de invariância.

Palavras-chave: Método pseudoespectral de Fourier, CFD, Equações de Navier-Stokes, Esteiras periódicas, Escoamentos cisalhantes livres.

Abstract

The present work is dedicated to perform the mathematical modeling and DNS and LES simulations of a three-dimensional, temporally evolving incompressible plane wake are performed, seeking to evidence differences in stability, transition and onset of both coherent and small scale structures, when the flow is subjected to random perturbations of different amplitudes. The perturbations are generated using the Random-Flow-Generator (RFG) technique, being imposed to the flow as initial conditions.

The Navier-Stokes equations are solved in a prismatic domain, with periodic boundary conditions in all directions, using Fourier pseudospectral method. The invariants of the velocity gradient tensor, Q and R , are analyzed for random perturbations with magnitudes 10^{-3} , 10^{-4} and 10^{-5} , showing the onset of their characteristic teardrop correlation map. Moreover, maps of the second and third invariants of the rate-of-strain tensor, Q_S and R_S , are shown, in order to evidence the differences in local flow strain and topological characteristics of the dissipation of kinetic energy. Isosurface plots of Q and Q_W , as well as vorticity contours are shown, allowing visual identification of the coherent structures and confirming patterns predicted by the invariant maps.

Keywords: Fourier pseudo-spectral method, CFD, Navier-Stokes equations, Periodic wakes, Free-shear flows.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Diferentes tipos de escoamentos cisalhantes livres (da esq. para direita): camada de mistura espacial; esteira em desenvolvimento espacial e jato circular em desenvolvimento espacial. Retirado de Lesieur (2008).	22
Figura 2 – Espectro de energia; zona inercial e zona de dissipação viscosa.	28
Figura 3 – Esquema representativo dos turbilhões de rolos duplos, no escoamento sobre um cilindro (TOWNSEND, 1970).	31
Figura 4 – Contornos de vorticidade; escoamento de uma esteira plana.(MOSER; ROGERS, 1994).	32
Figura 5 – Comparativo de resultado experimental (topo) e numérico de uma camada de mistura espacial, utilizando abordagem <i>LES</i> (YANG et al., 2004).	33
Figura 6 – Isosuperfícies do segundo invariante do gradiente de velocidade, para jato circular compressível em desenvolvimento espacial. (WANG et al., 2010).	34
Figura 7 – Isovalores do segundo invariante do gradiente de velocidade, na hipótese de caso transcrito (esquerda) e no caso de gás ideal (direita). (TANI et al., 2013).	34
Figura 8 – Comparativo de esforço computacional entre a <i>FFT</i> e a <i>DFT</i> (CANUTO et al., 1988).	37
Figura 9 – Exemplo de aplicação do método <i>BFSM</i>	38
Figura 10 – Ilustração do fenômeno de Gibbs. A utilização da interpolação utilizando a integral de Fourier, em regiões descontínuas causa o surgimento de oscilações espúrias nas vizinhanças da descontinuidade.	46
Figura 11 – Plano π e direções por ele definidas. (SILVEIRA-NETO, 2010)	49
Figura 12 – Projeções dos termos das equações de Navier-Stokes sobre o plano π . (SILVEIRA-NETO, 2010)	51
Figura 13 – Espectro de energia cinética turbulenta, frequência de corte e diferenças nas técnicas <i>DNS</i> , <i>LES</i> e <i>RANS</i> . A frequência k_c denota a frequência de corte, que separa as estruturas calculadas das modeladas, nas simulações <i>LES</i>	55
Figura 14 – Espaços de invariância (Q, R) , $(-Q_S, Q_W)$ e (Q_S, R_S) para escoamentos incompressíveis (SONDERGAARD, 1996; SILVA; PEREIRA, 2008).	63
Figura 15 – Nós de colocação utilizados para verificação utilizando o <i>MMS</i>	75
Figura 16 – Campo do módulo da vorticidade $ \omega $ e seus isocontornos, para: (a) $t = 0, 1[s]$, (b) $t = 0, 2[s]$, (c) $t = 0, 3[s]$, (d) $t = 0, 4[s]$, (e) $t = 0, 5[s]$, (f) $t = 0, 6[s]$	77

Figura 17 – Campo do segundo invariante do gradiente de velocidade, Q , e isocontornos da vorticidade, para: (a) $t = 0, 1[s]$, (b) $t = 0, 2[s]$, (c) $t = 0, 3[s]$, (d) $t = 0, 4[s]$, (e) $t = 0, 5[s]$, (f) $t = 0, 6[s]$	78
Figura 18 – Isosuperfícies do segundo invariante do gradiente de velocidade, Q , coloridos pela magnitude da vorticidade, para: (a) $t = 0, 1[s]$, (b) $t = 0, 2[s]$, (c) $t = 0, 3[s]$, (d) $t = 0, 4[s]$, (e) $t = 0, 5[s]$, (f) $t = 0, 6[s]$	79
Figura 19 – Resíduo máximo da equação da continuidade <i>vs</i> tempo da simulação.	80
Figura 20 – Comparativos das normas L2 das componentes da velocidade e da pressão <i>vs</i> tempo da simulação.	81
Figura 21 – Domínios MPI utilizados: (a) Caso serial, (b) 2 processadores, (c) 4 processadores, (d) 8 processadores.	82
Figura 22 – Comparativos das normas L2 das componentes da velocidade e da pressão <i>vs</i> tempo de computação gasto.	83
Figura 23 – Esboço do perfil de velocidade inicial da esteira plana, representado por um perfil gaussiano.	86
Figura 24 – Esboço do esquema de arranjo de anéis de vórtices, que resultam no emparelhamento alternado das estruturas. Retirado de Silva e Metais (2002).	90
Figura 25 – Isosuperfície de Q , para o caso de perturbação com magnitude 10^{-3} , no instante $t = 135[s]$	91
Figura 26 – Isosuperfície de Q , para o caso de perturbação com magnitude 10^{-3} , no instante $t = 165[s]$	91
Figura 27 – Isosuperfície de Q , para o caso de perturbação com magnitude 10^{-3} , no instante $t = 195[s]$	92
Figura 28 – Isosuperfície de Q , para o caso de perturbação com magnitude 10^{-3} , no instante $t = 270[s]$	92
Figura 29 – Evidência de um mecanismo de emparelhamento primário, atuante nas instabilidades de Kelvin-Helmholtz, visto pelo topo (plano XZ), para o caso de perturbação com magnitude 10^{-3} , no instante $t = 135[s]$	93
Figura 30 – Padrão de estrutura grampo de cabelo na esteira, visto pelo topo (plano XZ), formada pelo mecanismo de emparelhamento primário, para o caso de perturbação com magnitude 10^{-3} , no instante $t = 165[s]$	93
Figura 31 – Detalhe do mecanismo de emparelhamento secundário, visto pelo topo (plano XZ), mostrando o efeito mecânico que os vórtices de grampos de cabelo exercem em um par de instabilidades de Kelvin-Helmholtz, para uma perturbação de magnitude 10^{-3} , no instante $t = 195[s]$	94

Figura 32 – Mecanismo de emparelhamento secundário, em etapa avançada, visto pelo topo (plano XZ), para o caso de perturbação com magnitude 10^{-3} , no instante $t = 270[s]$, mostrando a degeneração dos grampos de cabelo em filamentos tridimensionais, que continuam a exercer efeito mecânico nas instabilidades de Kelvin-Helmholtz.	94
Figura 33 – Isosuperfície de Q , para o caso de perturbação com magnitude 10^{-4} , no instante $t = 135[s]$	95
Figura 34 – Isosuperfície de Q , para o caso de perturbação com magnitude 10^{-4} , no instante $t = 165[s]$	95
Figura 35 – Isosuperfície de Q , para o caso de perturbação com magnitude 10^{-4} , no instante $t = 195[s]$	96
Figura 36 – Isosuperfície de Q , para o caso de perturbação com magnitude 10^{-4} , no instante $t = 270[s]$	96
Figura 37 – Isosuperfície de Q , para o caso de perturbação com magnitude 10^{-5} , no instante $t = 210[s]$	97
Figura 38 – Isosuperfície de Q , para o caso de perturbação com magnitude 10^{-5} , no instante $t = 240[s]$	97
Figura 39 – Isosuperfície de Q , para o caso de perturbação com magnitude 10^{-5} , no instante $t = 270[s]$	98
Figura 40 – Isosuperfície de Q , para o caso de perturbação com magnitude 10^{-5} , no instante $t = 300[s]$	98
Figura 41 – Vista lateral (plano YZ) da esteira, onde é possível visualizar as instabilidades de Kelvin-Helmholtz, e o desenvolvimento dos vórtices de von Kármán, devido ao surgimento de instabilidade na direção transversal. A magnitude da perturbação é de 10^{-5} , no instante $t = 300[s]$	99
Figura 42 – Vista de topo de uma esteira, mostrando o efeito do mecanismo de emparelhamento primário e a formação de napas em formato reticular, num experimento material realizado por Meiburg e Lasheras (1988) para um escoamento incompressível a $Re = 100$	99
Figura 43 – Contornos de Q (esquerda) e $ \omega $ (direita), em corte do plano central YZ , para uma perturbação de amplitude 10^{-3} (caso #1), nos instantes (a),(b) $t = 180[s]$; (c),(d) $t = 210[s]$; (e),(f) $t = 240[s]$; (g),(h) $t = 270[s]$	101
Figura 44 – Contornos de Q (esquerda) e $ \omega $ (direita), em corte do plano central YZ , para uma perturbação de amplitude 10^{-4} (caso #2), nos instantes (a),(b) $t = 180[s]$; (c),(d) $t = 210[s]$; (e),(f) $t = 240[s]$; (g),(h) $t = 270[s]$	102
Figura 45 – Contornos de Q (esquerda) e $ \omega $ (direita), em corte do plano central YZ , para uma perturbação de amplitude 10^{-5} (caso #3), nos instantes (a),(b) $t = 180[s]$; (c),(d) $t = 210[s]$; (e),(f) $t = 240[s]$; (g),(h) $t = 270[s]$	103

Figura 46 – Contornos de Q (esquerda) e $ \omega $ (direita), em corte do plano central YZ , para o caso sem perturbação imposta (caso #7), nos instantes (a),(b) $t = 180[s]$; (c),(d) $t = 210[s]$; (e),(f) $t = 240[s]$; (g),(h) $t = 270[s]$.	104
Figura 47 – Espectro de energia cinética turbulenta para as simulações DNS (casos #1,2,3), no instante $t = 150[s]$.	106
Figura 48 – Espectro de energia cinética turbulenta para as simulações LES (casos #4,5,6), no instante $t = 150[s]$.	106
Figura 49 – Comparativo entre os níveis de energia cinética turbulenta $E(k)$ das simulações LES e DNS , em $k = 10$, no instante $t = 150[s]$.	107
Figura 50 – Espectro de energia cinética turbulenta para as simulações DNS (casos #1,2,3), no instante $t = 240[s]$.	107
Figura 51 – Espectro de energia cinética turbulenta para as simulações LES (casos #4,5,6), no instante $t = 240[s]$.	108
Figura 52 – Comparativo entre os níveis de energia cinética turbulenta $E(k)$ das simulações LES e DNS , em $k = 10$, no instante $t = 240[s]$.	108
Figura 53 – Evolução do resíduo máximo da continuidade ao longo do tempo.	109
Figura 54 – Evolução do perfil de velocidade médio $\overline{w}$, ao longo do tempo, para esteira submetida à perturbação de magnitude 10^{-3} (caso #1).	110
Figura 55 – Evolução do perfil de velocidade médio $\overline{w}$, ao longo do tempo, para esteira submetida à perturbação de magnitude 10^{-4} (caso #2).	111
Figura 56 – Evolução do perfil de velocidade médio $\overline{w}$, ao longo do tempo, para esteira submetida à perturbação de magnitude 10^{-5} (caso #3).	111
Figura 57 – Evolução do perfil de velocidade médio $\overline{u}$, ao longo do tempo, para esteira submetida à perturbação de magnitude 10^{-3} (caso #1).	112
Figura 58 – Evolução do perfil de velocidade médio $\overline{u}$, ao longo do tempo, para esteira submetida à perturbação de magnitude 10^{-4} (caso #2).	112
Figura 59 – Evolução do perfil de velocidade médio $\overline{u}$, ao longo do tempo, para esteira submetida à perturbação de magnitude 10^{-5} (caso #3).	113
Figura 60 – Gráficos de dispersão de Q vs R , para uma amplitude de perturbação 10^{-3} (caso #1), nos instantes (a) $t = 180[s]$ e (b) $t = 240[s]$.	114
Figura 61 – Gráficos de dispersão de Q vs R , para uma amplitude de perturbação 10^{-4} (caso #2), nos instantes (a) $t = 180[s]$ e (b) $t = 240[s]$.	115
Figura 62 – Gráficos de dispersão de Q vs R , para uma amplitude de perturbação 10^{-5} (caso #3), nos instantes (a) $t = 180[s]$ e (b) $t = 240[s]$.	115
Figura 63 – Gráficos de dispersão de $-Q_S$ vs Q_W , para uma amplitude de perturbação 10^{-3} (caso #1), nos instantes (a) $t = 180[s]$ e (b) $t = 240[s]$.	116
Figura 64 – Gráficos de dispersão de $-Q_S$ vs Q_W , para uma amplitude de perturbação 10^{-4} (caso #2), nos instantes (a) $t = 180[s]$ e (b) $t = 240[s]$.	117

Figura 65 – Gráficos de dispersão de $-Q_S$ vs Q_W , para uma amplitude de perturbação 10^{-5} (caso #3), nos instantes (a) $t = 180[s]$ e (b) $t = 240[s]$	117
Figura 66 – Gráficos de dispersão Q_S vs R_S , para uma amplitude de perturbação 10^{-3} (caso #1), nos instantes (a) $t = 180[s]$ e (b) $t = 240[s]$	119
Figura 67 – Gráficos de dispersão Q_S vs R_S , para uma amplitude de perturbação 10^{-4} (caso #2), nos instantes (a) $t = 180[s]$ e (b) $t = 240[s]$	119
Figura 68 – Gráficos de dispersão Q_S vs R_S , para uma amplitude de perturbação 10^{-5} (caso #3), nos instantes (a) $t = 180[s]$ e (b) $t = 240[s]$	119
Figura 69 – Evolução temporal das isosuperfícies de Q , da esteira plana em desenvolvimento temporal, submetida à perturbação de magnitude 10^{-3} (caso #1), para: (a) $t = 180[s]$, (b) $t = 195[s]$, (c) $t = 210[s]$, (d) $t = 225[s]$, (e) $t = 240[s]$, (f) $t = 255[s]$, (g) $t = 270[s]$, (h) $t = 285[s]$	132
Figura 70 – Evolução temporal das isosuperfícies de Q , da esteira plana em desenvolvimento temporal, submetida à perturbação de magnitude 10^{-4} (caso #2), para: (a) $t = 180[s]$, (b) $t = 195[s]$, (c) $t = 210[s]$, (d) $t = 225[s]$, (e) $t = 240[s]$, (f) $t = 255[s]$, (g) $t = 270[s]$, (h) $t = 285[s]$	133
Figura 71 – Evolução temporal das isosuperfícies de Q , da esteira plana em desenvolvimento temporal, submetida à perturbação de magnitude 10^{-5} (caso #3), para: (a) $t = 180[s]$, (b) $t = 195[s]$, (c) $t = 210[s]$, (d) $t = 225[s]$, (e) $t = 240[s]$, (f) $t = 255[s]$, (g) $t = 270[s]$, (h) $t = 285[s]$	134
Figura 72 – Evolução temporal das isosuperfícies de Q_W , da esteira plana em desenvolvimento temporal, submetida à perturbação de magnitude 10^{-3} (caso #1), para: (a) $t = 180[s]$, (b) $t = 195[s]$, (c) $t = 210[s]$, (d) $t = 225[s]$, (e) $t = 240[s]$, (f) $t = 255[s]$, (g) $t = 270[s]$, (h) $t = 285[s]$	136
Figura 73 – Evolução temporal das isosuperfícies de Q_W , da esteira plana em desenvolvimento temporal, submetida à perturbação de magnitude 10^{-4} (caso #2), para: (a) $t = 180[s]$, (b) $t = 195[s]$, (c) $t = 210[s]$, (d) $t = 225[s]$, (e) $t = 240[s]$, (f) $t = 255[s]$, (g) $t = 270[s]$, (h) $t = 285[s]$	137
Figura 74 – Evolução temporal das isosuperfícies de Q_W , da esteira plana em desenvolvimento temporal, submetida à perturbação de magnitude 10^{-5} (caso #3), para: (a) $t = 180[s]$, (b) $t = 195[s]$, (c) $t = 210[s]$, (d) $t = 225[s]$, (e) $t = 240[s]$, (f) $t = 255[s]$, (g) $t = 270[s]$, (h) $t = 285[s]$	138
Figura 75 – Gráficos de dispersão de Q vs R , para uma amplitude de perturbação 10^{-3} (caso #1), nos instantes: (a) $t = 135[s]$, (b) $t = 165[s]$, (c) $t = 195[s]$, (d) $t = 225[s]$, (e) $t = 255[s]$, (f) $t = 285[s]$	140
Figura 76 – Gráficos de dispersão de Q vs R , para uma amplitude de perturbação 10^{-4} (caso #2), nos instantes: (a) $t = 135[s]$, (b) $t = 165[s]$, (c) $t = 195[s]$, (d) $t = 225[s]$, (e) $t = 255[s]$, (f) $t = 285[s]$	141

Figura 77 – Gráficos de dispersão de Q vs R , para uma amplitude de perturbação 10^{-5} (caso #3), nos instantes: (a) $t = 135[s]$, (b) $t = 165[s]$, (c) $t = 195[s]$, (d) $t = 225[s]$, (e) $t = 255[s]$, (f) $t = 285[s]$	142
Figura 78 – Gráficos de dispersão de $-Q_S$ vs Q_W , para uma amplitude de perturbação 10^{-3} (caso #1), nos instantes: (a) $t = 135[s]$, (b) $t = 165[s]$, (c) $t = 195[s]$, (d) $t = 225[s]$, (e) $t = 255[s]$, (f) $t = 285[s]$	144
Figura 79 – Gráficos de dispersão de $-Q_S$ vs Q_W , para uma amplitude de perturbação 10^{-4} (caso #2), nos instantes: (a) $t = 135[s]$, (b) $t = 165[s]$, (c) $t = 195[s]$, (d) $t = 225[s]$, (e) $t = 255[s]$, (f) $t = 285[s]$	145
Figura 80 – Gráficos de dispersão de $-Q_S$ vs Q_W , para uma amplitude de perturbação 10^{-5} (caso #3), nos instantes: (a) $t = 135[s]$, (b) $t = 165[s]$, (c) $t = 195[s]$, (d) $t = 225[s]$, (e) $t = 255[s]$, (f) $t = 285[s]$	146
Figura 81 – Gráficos de dispersão Q_S vs R_S , para uma amplitude de perturbação 10^{-3} (caso #1), nos instantes: (a) $t = 135[s]$, (b) $t = 165[s]$, (c) $t = 195[s]$, (d) $t = 225[s]$, (e) $t = 255[s]$, (f) $t = 285[s]$	148
Figura 82 – Gráficos de dispersão Q_S vs R_S , para uma amplitude de perturbação 10^{-4} (caso #2), nos instantes: (a) $t = 135[s]$, (b) $t = 165[s]$, (c) $t = 195[s]$, (d) $t = 225[s]$, (e) $t = 255[s]$, (f) $t = 285[s]$	149
Figura 83 – Gráficos de dispersão Q_S vs R_S , para uma amplitude de perturbação 10^{-5} (caso #3), nos instantes: (a) $t = 135[s]$, (b) $t = 165[s]$, (c) $t = 195[s]$, (d) $t = 225[s]$, (e) $t = 255[s]$, (f) $t = 285[s]$	150

Lista de tabelas

Tabela 1	–	Valores dos coeficientes de Runge-Kutta K_m	71
Tabela 2	–	Valores dos coeficientes de ponderação b_m	71
Tabela 3	–	Coeficientes α^n e β^n do esquema RK46 (ALLAMPALLI; HIXON, 2009).	71
Tabela 4	–	Valores dos parâmetros utilizados na etapa de verificação	75
Tabela 5	–	Valores dos parâmetros utilizados na simulação da esteira plana.	86
Tabela 6	–	Amplitudes da parturbação inicial para os casos simulados.	87
Tabela 7	–	Amplitudes da parturbação inicial para os casos DNS	131

Lista de abreviaturas e siglas

AUX	- Variável auxiliar do método de Runge-Kutta
CFD	- Sigla do inglês para Dinâmica dos Fluidos Computacional
DFT	- Sigla do inglês para Transformada Discreta de Fourier
DNS	- Sigla do inglês para Simulação Numérica Direta
EDP	- Sigla do inglês para Equação Diferencial Parcial
FEMEC	- Faculdade de Engenharia Mecânica
FFT	- Sigla do inglês para Transformada Rápida de Fourier
LES	- Acrônimo do inglês para Simulação de Grandes Escalas
MFLab	- Laboratório de Mecânica dos Fluidos da Universidade Federal de Uberlândia
UFU	- Universidade Federal de Uberlândia

Lista de símbolos

Operador

∂	- derivada parcial
∇	- operador nabla
$\int$	- integral de Riemann
Σ	- operador somatório
$\wp$	- operador projeção
$\mathcal{F}$	- operador transformada de Fourier

Subescrito

i, j, k	- índice da notação tensorial
-----------	-------------------------------

Sobrescrito

a	- variável analítica
n	- variável no estágio temporal presente
$\wedge$	- variável no espaço de Fourier

Lista de símbolos

Letras gregas

Δt	- incremento de tempo
ρ	- densidade do fluido
μ	- viscosidade dinâmica do fluido

Letras latinas

i	- unidade imaginária
t	- tempo
p	- campo escalar de pressão
T	- campo escalar de temperatura
k	- número de onda
K_i	- coeficientes de Runge-Kutta
$\mathbf{x}$	- vetor que denota posição no espaço
x, y, z	- componentes do vetor posição
$\mathbf{u}$	- vetor que denota velocidade
RHS	- termos do lado direito (<i>Right-Hand-Side</i>)
L_2	- erro RMS (<i>Root Mean Square</i>)

Sumário

1	INTRODUÇÃO	22
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	25
2.1	A turbulência nos fluidos	25
2.2	Métodos espectrais	35
3	MODELAGEM MATEMÁTICA	40
3.1	Modelagem matemática euleriana de problemas em dinâmica dos fluidos .	40
3.1.1	Equação da continuidade	40
3.1.2	Equação de Cauchy para a quantidade de movimento linear	42
3.2	Modelagem matemática dos métodos de resíduos ponderados	44
3.3	Modelagem matemática do método espectral de Fourier	47
3.3.1	Escoamentos incompressíveis no espaço de Fourier	47
3.3.2	Método pseudoespectral de Fourier	51
3.4	Abordagens de simulação da turbulência	53
3.4.1	Simulação numérica direta (<i>DNS</i>)	53
3.4.2	Simulação de grandes escalas (<i>LES</i>)	55
3.4.3	Equações médias de Reynolds (<i>RANS</i>)	58
3.5	Técnicas de identificação de vórtices	59
3.5.1	Técnicas clássicas	60
3.5.2	Técnicas modernas	61
4	MODELAGEM NUMÉRICA	66
4.1	Métodos de discretização temporal	66
4.1.1	Método de Euler	66
4.1.2	Métodos de Runge-Kutta	67
4.2	Modelagem numérica para escoamentos incompressíveis	70
4.3	Análise dos erros	71
5	VERIFICAÇÃO	74
5.1	Verificação do código <i>IMERSPEC3DP</i>	74
5.2	Resultados quantitativos	75
5.3	Verificação da acurácia	80
5.4	Verificação da paralelização	80
6	RESULTADOS	84
6.1	Modelo físico da esteira temporal	84
6.2	Resultados qualitativos	87
6.2.1	Isosuperfícies de Q	87

6.2.2	Isocontornos de Q e $ \omega $	100
6.3	Resultados quantitativos	105
6.3.1	Espectros de energia cinética turbulenta	105
6.3.2	Resíduo da continuidade	109
6.3.3	Perfis médios de velocidade	110
6.4	Análise topológica	113
6.4.1	Mapas de Q vs R	113
6.4.2	Mapas de $-Q_S$ vs Q_W	115
6.4.3	Mapas de Q_S vs R_S	117
7	CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS	120
7.1	Conclusões	120
7.2	Sugestões para trabalhos futuros	122

Referências	123
-----------------------	-----

APÊNDICES 127

APÊNDICE A – GUIA PARA A CONSTRUÇÃO E ANÁLISE DOS MAPAS DE INVARIÂNCIA		128
A.1	Procedimento para a construção dos mapas	129
A.2	Análise topológica e utilização	130
APÊNDICE B – RESULTADOS COMPLEMENTARES DA ANÁLISE QUALITATIVA DAS SIMULAÇÕES DNS		131
B.1	Isosuperfícies de Q	131
B.2	Isosuperfícies de Q_W	135
APÊNDICE C – RESULTADOS COMPLEMENTARES DA ANÁLISE TOPOLÓGICA DAS SIMULAÇÕES DNS		139
C.1	Mapas de Q vs R	139
C.2	Mapas de $-Q_S$ vs Q_W	143
C.3	Mapas de Q_S vs R_S	147

1 Introdução

O presente trabalho se caracteriza pela utilização da dinâmica dos fluidos computacional aplicada ao estudo de uma importante classe de escoamentos, conhecidos como *esteiras temporais*. Tais escoamentos se enquadram num grupo maior, os *escoamentos cisalhantes livres*, que se destacam entre os escoamentos transicionais e caracterizam-se pela ausência de paredes e obstáculos, embora tenham, muitas vezes, suas origens ligadas à passagem sobre corpos submersos (esteiras), à expansão em bocais (jatos) ou à união de correntes caracterizadas por diferentes velocidades (camada de mistura) (SOUZA, 2005).

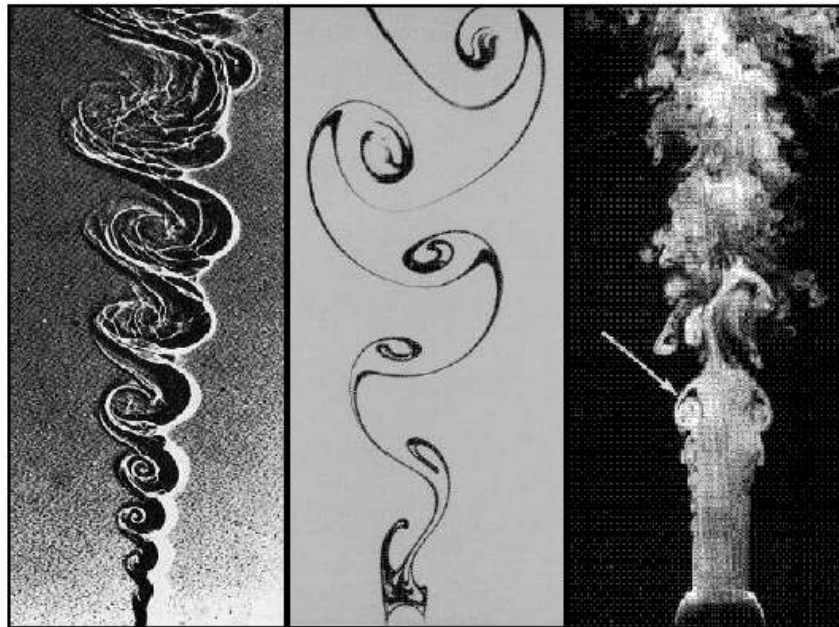


Figura 1 – Diferentes tipos de escoamentos cisalhantes livres (da esq. para direita): camada de mistura espacial; esteira em desenvolvimento espacial e jato circular em desenvolvimento espacial. Retirado de Lesieur (2008).

A turbulência em esteiras vem sendo amplamente estudada, tanto por meio das abordagens numéricas quanto experimentais, visando a obtenção de maior conhecimento sobre os fenômenos físicos envolvidos. Um conhecimento mais profundo dos mecanismos de formação e evolução das estruturas desses escoamentos possibilitaria um maior controle sobre os escoamentos de corpos imersos presentes em ambientes industriais, e também contribuiria para a limitada base teórica existente sobre escoamentos turbulentos.

Sob a ótica das aplicações de interesse industrial, ressalta-se a importância desses escoamentos para a indústria aeroespacial e automobilística, tendo em vista a formação de esteiras turbulentas por aviões e carros. O aumento da eficiência desses veículos é fortemente limitado pelo arrasto produzido por eles, de modo que otimizações poderiam ser realizadas, caso fosse possível ter um maior controle sobre a dinâmica nas esteiras. Uma possível forma de

controle seria a manipulação das estruturas coerentes, possuidoras de grande poder de influência na dinâmica do escoamento, influenciando portanto na transição à turbulência (SOUZA, 2005).

Além da importância industrial, vale destacar que a esteira turbulenta é um escoamento canônico, de grande importância física. Estudos sobre esse tipo de escoamento servem como base para a análise dos chamados *escoamentos complexos* formados pela composição de escoamentos canônicos e que se caracterizam como os mais frequentes tipos de escoamento encontrados na natureza e nas aplicações práticas. Sendo assim, o presente estudo se motivou na importância teórica e prática das esteiras turbulentas, visando descrever tanto suas características qualitativas quanto quantitativas.

Normalmente, o desenvolvimento dos escoamentos ocorre por duas maneiras: o desenvolvimento *espacial* e o *temporal*. No primeiro, as estruturas turbilhonares crescem à medida em que elas são transportadas no espaço pelos mecanismos de emparelhamento das estruturas. O presente trabalho se dedica à simulação do desenvolvimento temporal, onde as instabilidades surgem por processo de amplificação das perturbações injetadas por fontes externas. De forma simplificada, pode-se entender um escoamento em desenvolvimento temporal como um referencial lagrangiano acompanhando o escoamento em desenvolvimento espacial.

Diante do que foi exposto, o foco inicial deste trabalho consiste na simulação numérica de esteiras em desenvolvimento temporal. É notório, do ponto de vista experimental, que tais escoamentos apresentam grande riqueza de estruturas turbilhonares (*c.f.* Fig. 1), com a formação de oscilações transversais e de filamentos entrelaçados tridimensionais. Por isso, visando-se realizar o estudo aprofundado de tais estruturas, tem-se a necessidade de escolha de uma metodologia que capture corretamente todas as escalas do escoamento.

A maneira mais imediata para a simulação de escoamentos turbulentos é denominada *DNS* (Direct Numerical Simulation), onde as equações de Navier-Stokes são resolvidas diretamente, utilizando-se algum método de discretização arbitrário. Para esta dissertação, optou-se pela utilização do método pseudo-espectral de Fourier, notavelmente conhecido por sua alta taxa de convergência e pela acurácia limitada somente pela precisão do computador (MARIANO, 2011).

As simulações *DNS* se diferenciam por resolverem todas as escalas do movimento do fluido, desde as maiores estruturas coerentes até os menores turbilhonamentos dissipativos, sem a utilização de nenhuma média ou suavização do campo de soluções; em outras palavras, diz-se que o *DNS* resolve completamente o escoamento. Como consequência disso, os resultados não se tornam atrelados a suposições restritivas de modelos de turbulência nem tampouco de correlações empíricas. Sendo assim, a única diferença entre tal experimentação numérica e a sua correspondente experimentação material reside nos erros introduzidos pelas aproximações numéricas (VILLIERS, 2006). Desta forma, espera-se, com a utilização do método pseudoespectral de Fourier, e desde que se utilize uma malha suficientemente refinada, que a simulação seja de elevada precisão, resultando em uma solução que represente fidedignamente uma esteira temporal tridimensional.

Ressalta-se ainda que simulações *DNS* de esteiras temporais são extremamente limitadas na literatura, uma vez que o custo computacional associado a tais simulações é alto (SON-

DERGAARD, 1996). Somente nos últimos anos, com o intenso desenvolvimento da capacidade computacional, que tais simulações vêm se tornando mais acessíveis. Nesse sentido, a presente dissertação traz consigo um caráter inovador. Entretanto, as simulações *DNS* ainda são limitadas a geometrias simples e a números de Reynolds baixos.

Assim, buscou-se como objetivo final deste trabalho, a realização de um estudo detalhado dos resultados das simulações. A esse objetivo, somam-se análises da influência de diferentes tipos de perturbações sobre a formação e evolução das estruturas turbilhonares que caracterizam este tipo de escoamento, a fim de se acessar às informações sobre a região não-linear da esteira. As simulações foram realizadas usando processamento paralelo, com o código computacional *IMERSPEC3DP*, que se encontra em estágio de desenvolvimento no MFLab.

2 Revisão bibliográfica

O presente capítulo aborda os principais avanços reportados na literatura sobre os dois temas nos quais este trabalho se baseia: a simulação da turbulência e a utilização dos métodos espectrais. A seção 2.1 visa ilustrar os principais avanços e desafios do estudo da turbulência nos fluidos, em particular aos escoamentos cisalhantes livres, enquanto a seção 2.2 apresenta um resumo motivacional sobre os métodos de alta ordem, em especial sobre o método utilizado no presente trabalho: o método pseudoespectral de Fourier.

2.1 A turbulência nos fluidos

A turbulência, conhecida por ser um fenômeno randômico e de natureza imprevisível, foi descrita como “o problema mais importante, ainda não resolvido, da física clássica” pelo físico Richard Feynman, ganhador do prêmio Nobel de 1965 (BUXTON, 2011). Tal descrição se mostra justificável, uma vez que os escoamentos turbulentos têm, associados a eles, fenômenos de grande importância do ponto de vista industrial, como por exemplo o significativo aumento de sua capacidade de transporte de informações, tais como quantidade de movimento linear, energia cinética, taxa de transporte de energia interna e a melhoria na capacidade do fluido de promover misturas.

Motivado por tais fenômenos, uma grande quantidade de cientistas se dedicaram à observação, descrição e entendimento dos escoamentos turbulentos. Uma das primeiras tentativas de se quantificar a turbulência foi realizada por Reynolds, que mostrou que um escoamento muda de um regime dito *laminar* para um regime *turbulento*, quando um determinado parâmetro crítico, o número de Reynolds, é atingido (REYNOLDS, 1883). Posteriormente, outra importante descoberta é o fato de que os escoamentos turbulentos incorporam em si uma hierarquia de escalas de estruturas, e de que energia é transferida entre todas elas, não linearmente. Tal descoberta, que levou ao posterior desenvolvimento da teoria da cascata de energia, foi formulada pelo cientista russo Kolmogorov (KOLMOGOROV, 1941).

O estudo da turbulência pode ser dividido em três categorias principais: a teoria analítica, e as experimentações material e numérica. A abordagem analítica da turbulência apresenta limitações, dadas as grandes complexidades do fenômeno, que é de natureza fortemente não-linear. A abordagem experimental material sempre se mostrou de grande importância, e até hoje permanece como uma fonte geradora de resultados *benchmark*, que auxiliam na validação de novos modelos teóricos e, espera-se para o futuro, que continue sendo um campo de fundamental importância. Essa abordagem vem crescendo cada vez mais em alcance e precisão, impulsionada pelo advento de novas técnicas de medição (MARIANO, 2011), que permitem a aquisição mais precisa e em múltiplas posições do fluido, e cada vez menos invasivas, tais como a velocimetria Laser-Doppler, PIV e a anemometria.

Por fim, tem-se a abordagem experimental numérica, que vem se tornando cada vez mais popular. Do ponto de vista prático, a dinâmica dos fluidos computacional é muito mais flexível do que os experimentos materiais (CHEN; CANTWELL; MANSOUR, 1990), tanto em termos de custos quanto no alcance de problemas industriais. Para aplicações de engenharia, simulações numéricas de escoamentos turbulentos ainda têm dificuldade em garantir a acurácia para as mais diversas situações reais às quais os escoamentos são expostos. Consequentemente, os desenvolvimentos de métodos que agreguem baixo custo e alta acurácia caracterizam-se como o principal foco da pesquisa em *CFD* da atualidade.

Discute-se na literatura que qualquer tentativa de se definir a turbulência de maneira totalmente livre de quaisquer pedantismo pode ser uma tarefa árdua e desafiadora. Geralmente, a turbulência pode ser definida como sendo "um movimento irregular em escoamentos rotacionais que obedecem às restrições impostas pelas teorias da estatística"(TENNEKES; LUMLEY, 1972). De maneira geral, quando se considera escoamentos newtonianos, observa-se que quando o número de Reynolds de um escoamento ultrapassa um valor crítico, uma série de eventos são desencadeados, levando a uma mudança radical nas características do escoamento. Em seu estado final, o comportamento do escoamento se torna caótico, mesmo em situações onde as suas condições de contorno são constantes ou suaves.

As discussões científicas se estendem a fundo, no que diz respeito ao que seria a exata constituição e caracterização da turbulência. Felizmente, somente parte desse debate é efetivamente relevante à investigação geral do fenômeno, permitindo que o estudo da turbulência seja realizado sem se ater a tais questões.

O presente trabalho optou por caracterizar a turbulência utilizando as linhas gerais propostas por Lesieur (2008):

- Primeiramente, o escoamento turbulento é caótico, no sentido de que diferenças iniciais de um dado campo avaliado se amplificam, e eventualmente levam a campos completamente não-correlacionados. Isso faz com que a previsão determinística de um escoamento turbulento se torne praticamente impossível.
- A turbulência deve ser capaz de transportar qualquer quantidade física (incluindo a quantidade de movimento linear) de maneira mais rápida do que a difusão molecular agindo isoladamente.
- Por fim, as escalas nas quais as misturas ocorrem devem incluir um amplo espectro de comprimentos de onda.

Apesar dessas definições serem, de certa forma, vagas e descritivas, elas são extremamente importantes quando se deseja fazer a experimentação computacional da turbulência (VILLIERS, 2006). Tais definições permitem identificar as principais características físicas desses escoamentos, permitindo assim um entendimento qualitativo de seu comportamento nas condições mais relevantes para a engenharia.

O desenvolvimento da turbulência nos escoamentos newtonianos está ligado à presença do cisalhamento. Gradientes de velocidade fornecem a quantidade de energia necessária para transformar pequenas perturbações em movimentos de maior escala, através de diversos mecanismos de crescimento e emparelhamento. Este processo se torna possível quando as forças inerciais excedem a influência dos efeitos viscosos, fazendo com que as pequenas perturbações que se manifestem não sejam mais amortecidas pela viscosidade molecular, ou seja, em situações onde se tenha altos números de Reynolds. As maiores escalas geralmente se degeneram em estruturas menores, de comportamento randômico, às quais, sob a ótica do fluido como um todo, passamos a denominar como turbulência.

Um outro processo turbulento, ainda vagamente entendido, é a quebra das grandes estruturas coerentes em turbilhonamentos menores. Esse fenômeno se mostra de difícil tratamento teórico, e é atualmente classificado fisicamente pura e simplesmente como uma degeneração das grandes escalas (LESIEUR, 2008). As estruturas formadas apresentam fortes características de tridimensionalidade e são de natureza randômica. Surpreendentemente, a distribuição de escalas destas instabilidades coincide muito bem com as previsões fenomenológicas de Kolmogorov (1941). A teoria de Kolmogorov assume que a energia cinética turbulenta da turbulência isotrópica (*i.e.*, invariante na rotação) depende somente da taxa de dissipação de energia, ε , e do número de onda, k . A taxa de dissipação de energia ε representa o quanto de energia cinética as pequenas escalas da turbulência convertem em energia térmica, e o número de onda k é proporcional ao inverso do comprimento de onda.

A teoria de Kolmogorov leva à uma conclusão importante: a turbulência, em si, independe da viscosidade molecular. Trata-se de uma conjectura notável, que se verifica experimentalmente para diversos escoamentos; desde escoamentos atmosféricos até jatos turbulentos. Ela também implica que a turbulência, quando em estágios de desenvolvimento avançado, tende a se comportar de maneira isotrópica.

A lei de Kolmogorov é expressa graficamente, em escala *log-log* como uma linha de coeficiente angular constante, que representa o espectro de energia cinética turbulenta, conforme a seguinte equação:

$$E(k) = C_K \varepsilon^{\frac{2}{3}} k^{-\frac{5}{3}}, \quad (2.1)$$

sendo $C_K \approx 1.4$ a constante universal de Kolmogorov, determinada experimentalmente.

O espectro idealizado mostrado na Fig. 2 pode ser subdividido em três regiões principais, a saber:

- A primeira região, onde se concentra a maior parte da energia, é a região das escalas integrais, k_i . Esta região inclui as escalas que introduzem a energia cinética turbulenta no sistema.
- A segunda região, conhecida como zona inercial, contém as escalas intermediárias. Essas escalas obedecem a teoria de Kolmogorov, (*c.f.* (2.1)), ou seja, são mais influenciadas pelas

forças inerciais do que pelos efeitos viscosos. Tais escalas possuem baixos níveis de energia cinética turbulenta. Sua principal ação consiste na transferência de energia das maiores escalas para as menores.

- A terceira região do espectro de energia é denominada zona de dissipação viscosa. Essa região representa as escalas de movimento que são menores que a escala de Kolmogorov, $k_d \sim (\varepsilon/\nu^3)^{1/4}$, comprimento esse no qual os efeitos viscosos começam a amortecer fortemente o movimento turbulento. O fim desta região é caracterizado por uma rápida queda da distribuição espectral de energia cinética turbulenta. Juntamente à zona inercial, a zona de dissipação viscosa constitui a denominada zona de equilíbrio, uma vez que nela a turbulência é considerada totalmente desenvolvida e livre de potenciais influências interruptoras, tais como a influência de paredes e outros efeitos forçantes.

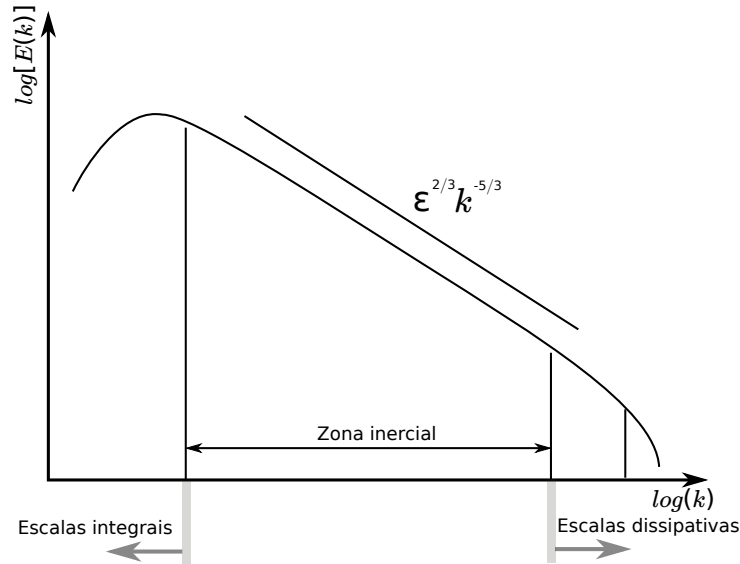


Figura 2 – Espectro de energia; zona inercial e zona de dissipação viscosa.

O processo de conversão da energia cinética do escoamento em energia cinética turbulenta ocorre em decorrência da amplificação das perturbações que são injetadas naturalmente, ou mesmo de maneira forçada no fluido. Para fins didáticos, dividem-se os escoamentos turbulentos canônicos em dois grandes grupos, levando-se em conta as diferenças nas características físicas no processo de geração de instabilidades: os *escoamentos cisalhantes livres* e os *escoamentos parietais*.

No grupo dos escoamentos cisalhantes livres, o crescimento das instabilidades está atrelado à presença de um perfil inflexional de velocidade (RAYLEIGH, 1879). Fazem parte desse grupo os escoamentos que se caracterizam pela ausência de paredes e obstáculos em seu interior ou em suas fronteiras, tais como a camada de mistura, o jato e a esteira (*c.f.* Fig. 1). As instabilidades que se desenvolvem nessa classe de escoamentos são ditas de natureza cisalhante, uma vez que, pela teoria da estabilidade linear, elas se desenvolvem mesmo em situações hipotéticas de escoamentos invíscidos (SILVEIRA-NETO, 2010). Tais instabilidades geralmente se desenvolvem em estruturas coerentes (EC's), *quasi*-bidimensionais transientes, gerando as denominadas *instabilidades de*

Kelvin-Helmholtz e os *turbilhões de von Kármán*, no caso das esteiras. Algumas vezes, as estruturas coerentes geradas se desenvolvem em estruturas ainda maiores; da mesma forma, pode ocorrer a degeneração dessas estruturas em turbilhões menores, conforme ilustrado pela teoria da cascata de energia de Kolmogorov (*c.f.* Fig. 2).

O outro grupo de escoamentos, os chamados escoamentos parietais, se diferenciam dos demais por ter em seu processo de transição indiferente à presença de um campo de inflexionalidade. Ao invés disso, a influência de paredes no desenvolvimento de instabilidades primárias é atribuída aos efeitos viscosos, aos efeitos de rotação e a efeitos de convecção térmica. Além disso, essas instabilidades podem ou não induzir o surgimento de instabilidades secundárias de natureza cisalhante. Assim, diz-se que o grupo dos escoamentos parietais é influenciado primariamente por instabilidades de natureza viscosa. Uma característica importante a ser destacada neste tipo de escoamento é que a presença de paredes impõe um limite físico ao crescimento das instabilidades, de maneira que as estruturas geradas são proporcionais à distância da superfície da parede (VILLIERS, 2006).

Denomina-se, por fim, uma classe especial de escoamentos, denominada *escoamentos complexos*, que combina os escoamentos canônicos expostos acima: cisalhantes, parietais, induzidos por rotação e por convecção térmica. Os escoamentos complexos são comuns em situações práticas, como por exemplo em casos industriais. Via de regra, modelos preditores de escoamentos turbulentos complexos precisam ser validados primeiramente em escoamentos canônicos (SOUZA, 2005), uma vez que as características desses últimos encontram-se catalogadas na literatura. Sendo assim, o conhecimento dos escoamentos canônicos, em particular das esteiras, é de grande importância para o posterior estudo dos escoamentos complexos. Baseado nisso, justifica-se o estudo do escoamento do tipo esteira.

Grande parte dos esforços atuais no estudo dos escoamentos cisalhantes livres concentram-se em obter um melhor entendimento das grandes estruturas, que exercem grande influência sobre a dinâmica das esteiras turbulentas. Acredita-se que um melhor entendimento dos processos de formação dessas estruturas e de sua interação com estruturas secundárias possibilitaria um maior controle da dinâmica da esteira, o que, do ponto de vista teórico e, em última instância, industrial, seria uma grande contribuição.

É recorrente na literatura a classificação das esteiras de acordo com a geometria de seus perfis de entrada. O perfil que mais se destaca na literatura é o perfil plano ou retangular. Tem-se ainda as esteiras circulares, geradas por perfis de entrada circulares ou elípticos. Em ambos os casos, tem-se a formação de instabilidades de Kelvin-Helmholtz, que interagem entre si, formando vórtices de von-Kármán que subsequentemente formam oscilações transversais que se amplificam e se degeneram em turbulência tridimensional.

Existem disponíveis na literatura diversos estudos numéricos e experimentais sobre os escoamentos cisalhantes do tipo esteira. No que tange o atual estado-da-arte da abordagem experimental numérica da turbulência, pode-se dizer que um progresso significativo foi atingido no entendimento dos primeiros estágios da transição em esteiras incompressíveis. Existem ainda trabalhos substanciais, nos campos experimental, teórico e computacional, que descrevem o

desenvolvimento inicial das instabilidades primárias características dos escoamentos cisalhantes; entretanto, muitos deles são focados em escoamentos bidimensionais.

Um clássico conjunto de experimentos materiais de esteiras turbulentas foi inicialmente realizado por Sato e Kuriki (1961), motivados pelo estudo de esteiras sofrendo perturbações forçadas e naturais, geradas à jusante de uma placa plana. Foi possível a identificação de três regiões de desenvolvimento distintas ao longo da esteira: a região linear, que se caracterizou pelo surgimento das instabilidades e Kelvin-Helmholtz e pelo crescimento exponencial das escalas de baixa amplitude; a região de crescimento não-linear, onde as estruturas bidimensionais entram em saturação e dá-se início ao surgimento das esteira de Von-Kármán; e finalmente a região tridimensional, onde as estruturas turbulentas de natureza fortemente tridimensional predominam. Eles concluíram ainda que as taxas de crescimento e os modos das perturbações podiam ser estimados com boa acurácia, desde que limitadas à região linear, utilizando-se a teoria de estabilidade linear de um escoamento base gaussiano. Passada essa região, foi observado que a evolução da esteira turbulenta se distanciava dos resultados previstos pela teoria da estabilidade linear, se desenvolvendo mais rapidamente do que se previu.

Buscando estudar a região de não-linearidade do trabalho de Sato e Kuriki (1961), Ko, Kubota e Lees (1970) realizaram uma análise de uma esteira plana bidimensional excitada sob influência de um sinal de amplitude finita e frequência única. Aplicando a abordagem integral nas equações de Navier-Stokes para a camada limite, foi possível estudar o balanço de energia entre o escoamento e as perturbações. Eles relacionaram o comportamento observado das variações das perturbações na esteira e da rápida variação da dinâmica do escoamento com a transferência de energia entre as perturbações e o escoamento principal utilizando as tensões de Reynolds. Tal análise também evidenciou a importância das interações entre os modos da perturbação, que dão origem aos harmônicos observados nos resultados.

Vale ressaltar também o trabalho de Sato e Saito (1978), que estendem os esforços realizados por Sato e Kuriki (1961), ao examinarem o efeito da inserção de perturbações com múltiplas frequências, desenvolvendo uma teoria sobre os efeitos das perturbações e dos fenômenos não-paralelos observados no início da esteira. Tais estudos, juntamente com vários outros, resultaram na melhor compreensão dos estágios iniciais de transição em esteiras planas. Apesar dos avanços atingidos por tais estudos, o entendimento dos estágios de desenvolvimento nas esteiras formadas a jusante de corpos rombudos mostrou-se difícil, uma vez que as instabilidades iniciais são compostas por um conjunto de movimentos de alta amplitude, tais como movimentos contra-rotativos, separação de fluido e cisalhamento, como mostrado nos estudos de Karniadakis e Triantafyllou (1989) e Karniadakis e Triantafyllou (1992). Assim, passou-se a assumir, com certa razoabilidade e baseado em tais estudos, que a partir de uma dada distância à jusante da vizinhança do corpo rombudo, o escoamento já desenvolvido seja similar às esteiras formadas em corpos delgados.

Em contraste com os resultados atingidos no entendimento dos estágios iniciais do desenvolvimento das esteiras, ainda existem significativos desafios relacionados com as características de estabilidade da região não-linear. Isso justifica os estudos e simulações *DNS* e *LES* (Large-

Eddy Simulation) atuais, tais como a presente dissertação, uma vez que é nessa região que se desenvolvem as instabilidades secundárias, que levam ao aparecimento dos efeitos tridimensionais do escoamento.

Alguns esforços iniciais no estudo da região não-linear foram realizados, como no trabalho de Grant (1958), que avaliou estatísticas de velocidade ao longo do tempo na esteira formada no escoamento sobre um cilindro. Lo (1994) destaca que fora evidenciada, nos trabalhos de Townsend (1970), a existência de estruturas tridimensionais coerentes na forma de turbilhões de rolos duplos na região não-linear. Tais estruturas foram descritas como sendo pares de vórtices curvos e contra-rotativos, orientados perpendicularmente ao plano da esteira. Estudos posteriores indicaram que tais estruturas normalmente se aglomeram na linha de centro da esteira, e que tendem a aparecer em grupos.

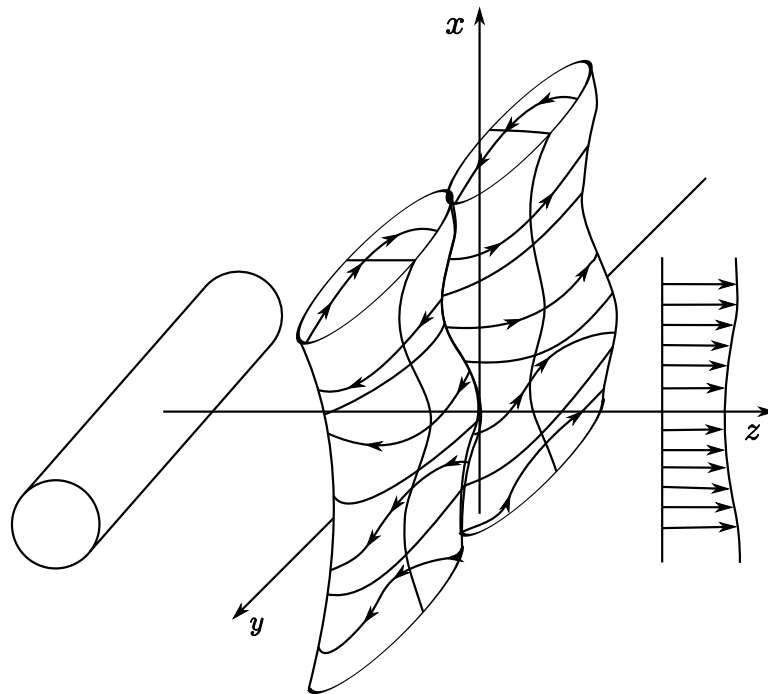


Figura 3 – Esquema representativo dos turbilhões de rolos duplos, no escoamento sobre um cilindro (TOWNSEND, 1970).

Utilizando geradores de esteiras, Wygnanski, Champagne e Marasli (1986) realizaram estudos experimentais, sob condições iniciais que produziam o mesmo arrasto, permitindo assim a geração de esteiras semelhantes. Eles concluíram que as velocidades características das esteiras dependiam das condições iniciais fornecidas pelos geradores, enquanto que o perfil médio do campo de velocidades não dependia das condições iniciais. Eles atribuíram esta carência de generalidade à interação entre os modos de instabilidade sinuoso (antissimétrico) e varicoso (simétrico), que ocorre na região não-linear da esteira. Tal resultado se confronta com as teorias de similaridade, que caracterizam as esteiras de maneira independente das condições iniciais.

Outros trabalhos disponíveis na literatura, como os de Cimbala, Nagib e Roshko (1988), continuaram as investigações sobre as estruturas na região não-linear das esteiras planas. Eles

detectaram a existência de estruturas periódicas na direção do escoamento, numa esteira formada sobre um corpo rombudo. Eles postularam que as estruturas eram vórtices na forma de grampos de cabelo, produzidos pela interação entre as perturbações de pares de ondas subharmônicas bidimensionais oblíquas, o que resultaria em estruturas fortemente tridimensionais.

Estudos sobre os mecanismos de surgimento das instabilidades secundárias em aerofólios foram realizados por Corke, Krull e Ghassemi (1992). Eles focaram no estudo de perturbações oblíquas, orientadas em diversos ângulos de incidência, e no modo como tais perturbações interagem com os vórtices de von Kármán. Seus resultados mostraram que as trocas de energia entre os modos fundamentais e oblíquos ocorriam sob ciclos de longos períodos.

Buscando uma explicação alternativa à de Cimbala, Nagib e Roshko (1988) para as interações entre as instabilidades primárias e secundárias nas esteiras, Williamson (1992) sugeriu que as ondas oblíquas previamente observadas se formavam devido a uma interação entre as oscilações formadas pelo ruído gerador da esteira e pelas ondas subharmônicas que surgem das instabilidades primárias.

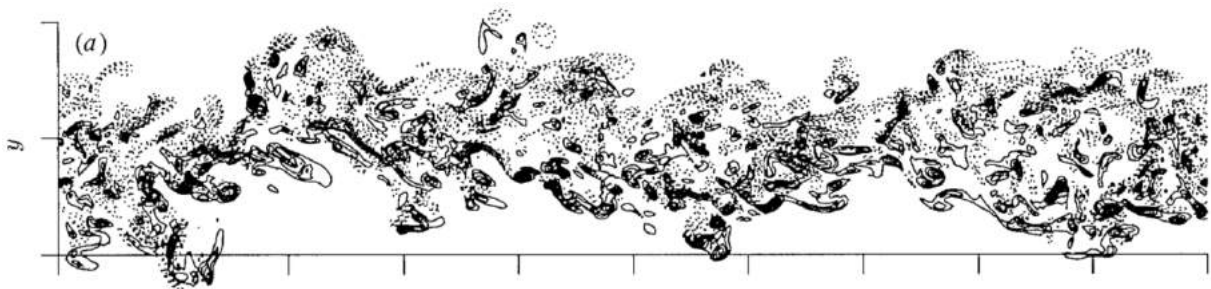


Figura 4 – Contornos de vorticidade; escoamento de uma esteira plana. (MOSER; ROGERS, 1994).

Diante da quantidade de teorias disponíveis na literatura que visam explicar a fonte do movimento de natureza tridimensional observado na região não-linear das esteiras, fica claro o quanto importante pode ser qualquer simulação, estudo ou conjectura que se faça sobre a turbulência nesse tipo de escoamento.

Além dos resultados teóricos e experimentais discutidos acima, existem ainda diversos estudos computacionais sobre os escoamentos cisalhantes livres, como por exemplo os trabalhos de Rogers e Moser (1992) e Rogers e Moser (1993), que realizaram um estudo numérico detalhado de uma camada de mistura em desenvolvimento temporal, onde as condições iniciais consistiam em um escoamento principal, com um dado perfil inflexional, e em perturbações de elevado comprimento de onda. Seus resultados mostraram que a maior parte das condições iniciais que foram testadas levaram ao desenvolvimento de estruturas fortemente coerentes. Nos casos onde não houve o desenvolvimento destas estruturas, notou-se que foi necessário um grande tempo para que surgissem estruturas de natureza tridimensional significativas. Assim, eles concluíram que o surgimento dessas estruturas é fundamental para o desenvolvimento das estruturas tridimensionais e eventualmente na transição para a turbulência.

Com o avanço computacional ao longo do século XXI, trabalhos mais recentes, como

o de Yang et al. (2004), ilustram a capacidade de predição dos métodos numéricos, frente aos experimentos materiais. Por meio de uma simulação *LES* de uma camada de mistura em desenvolvimento espacial, foi possível capturar o desenvolvimento dos vórtices, seu crescimento, emparelhamento e decorrente degeneração, com grande nível de detalhes.

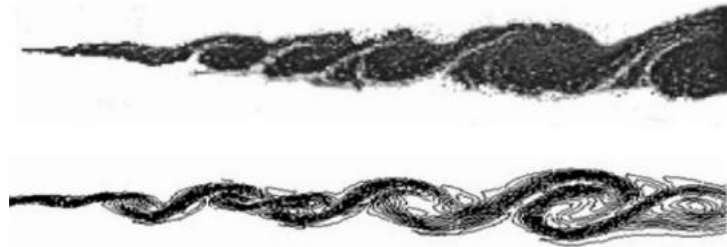


Figura 5 – Comparativo de resultado experimental (topo) e numérico de uma camada de mistura espacial, utilizando abordagem *LES* (YANG et al., 2004).

No caso dos escoamentos compressíveis, um reconhecido marco na literatura se deu com os esforços de Chen, Cantwell e Mansour (1990), que realizaram *DNS* de uma esteira plana compressível. Eles mostraram que a teoria de estabilidade linear foi capaz de prever com boa acurácia os estágios iniciais de desenvolvimento da esteira plana, para números de Mach entre $Ma = 0.01$ e $Ma = 3.0$. Eles também concluíram, assim como Rogers e Moser (1992) para a camada de mistura incompressível, que o desenvolvimento de tridimensionalidades nas esteiras compressíveis eram afetadas pelas perturbações impostas na condição inicial.

Simulações *DNS* foram realizadas também por Moser e Rogers (1994) para esteiras turbulentas em desenvolvimento temporal, utilizando dados presentes na literatura sobre camadas-limite turbulentas (*c.f.* Fig. 4). Os resultados mostraram que as esteiras apresentaram eventualmente um comportamento com características de autossimilaridade, e um espectro de energia, em parte, dentro da região de inclinação $k^{-5/3}$. Entretanto, com o passar do tempo, a taxa de desenvolvimento da esteira se mostrou bem menor do que as taxas medidas e previamente reportadas por Wygnanski, Champagne e Marasli (1986).

Visando resolver o escoamento de um jato circular compressível em desenvolvimento espacial, Wang et al. (2010) realizaram simulações *DNS* para números de Reynolds da ordem de 4700, onde resolveu-se a forma completa das equações de Navier-Stokes para escoamentos compressíveis. Na simulação, foram utilizados mais de 20 milhões de elementos. Para evitar excessiva dissipação numérica, fenômeno muito comum quando se realiza simulações *DNS* utilizando técnicas de baixa ordem, utilizou-se, para a discretização espacial, *stencils* de alta ordem no espaço. Para a integração temporal, utilizou-se o método de Runge-Kutta de quarta ordem.

Existem ainda trabalhos com enfoque em aplicações industriais de *DNS* em escoamentos cisalhantes livres. Um exemplo é o trabalho de Tani et al. (2013), que estudou uma camada de mistura em desenvolvimento temporal, contendo gás nitrogênio e nitrogênio criogênico, a fim de explorar a influência do fenômeno de pseudovaporização deste gás, quando atingida determinada faixa de temperatura e pressão. Importantes conclusões sobre o fenômeno de pseudovaporização,

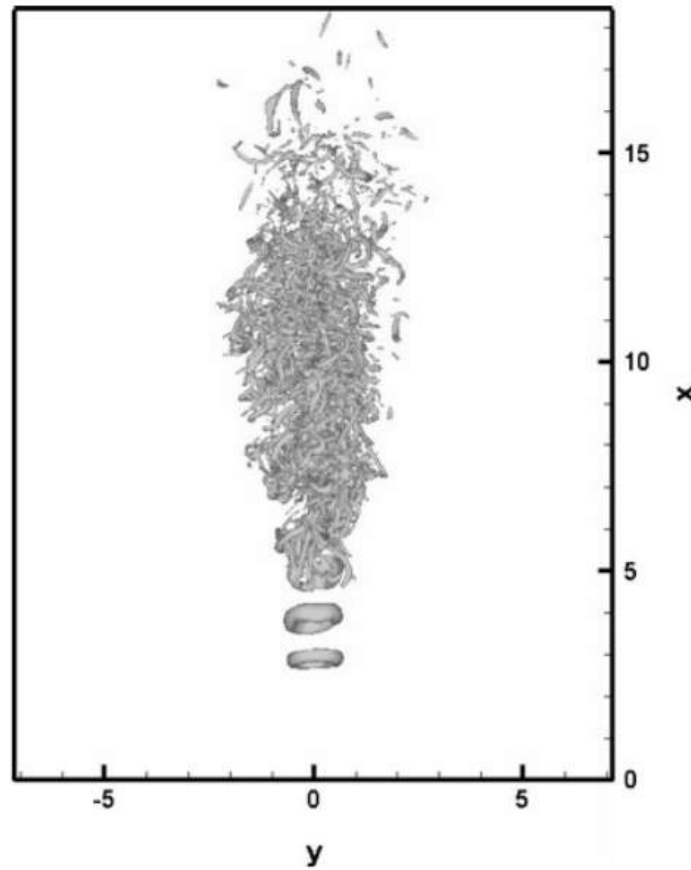


Figura 6 – Isosuperfícies do segundo invariante do gradiente de velocidade, para jato circular compressível em desenvolvimento espacial. (WANG et al., 2010).

assim como diversas estatísticas úteis para a indústria foram disponibilizadas.

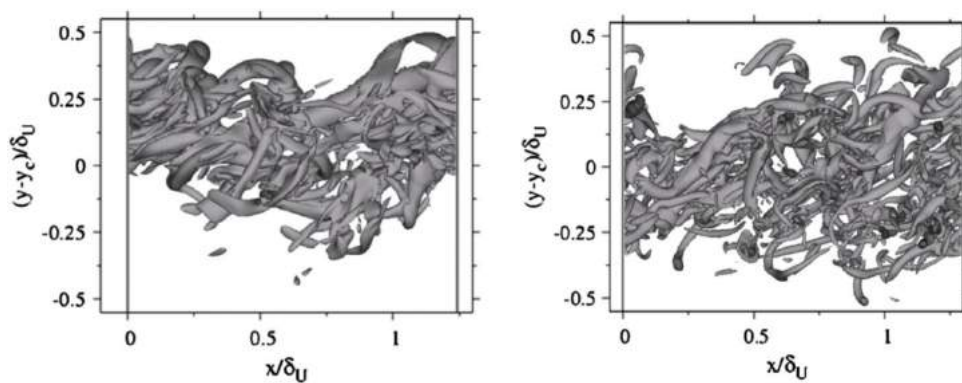


Figura 7 – Isovalores do segundo invariante do gradiente de velocidade, na hipótese de caso transcrito (esquerda) e no caso de gás ideal (direita). (TANI et al., 2013).

Com base na revisão bibliográfica realizada, verificou-se que ainda existe carência de estudos relacionados à região não-linear das esteiras. Assim, o presente trabalho buscou estudar a influência das perturbações randômicas de diferentes amplitudes na formação das instabilidades primárias (região linear) e subsequente degeneração em estruturas secundárias (região não-linear). Para este estudo, optou-se pela utilização de métodos de alta ordem. Tais métodos são

considerados a ferramenta mais adequada para investigações desta natureza, uma vez que são dotados de grande estabilidade, alta acurácia e elevada ordem de convergência.

2.2 Métodos espectrais

Acompanhando a crescente utilização e desenvolvimentos de *CFD*, tanto na área de modelagem computacional quanto nas comunidades científicas de física e engenharia, nota-se um crescimento recente do desenvolvimento, análise e utilização dos métodos numéricos de alta ordem para a simulação de escoamentos onde se deseja a visualização com grande riqueza de estruturas, na análise de escoamentos turbulentos e para a produção de dados *benchmark*.

Tipicamente, classificam-se os métodos de alta ordem como aqueles que possuem taxa de convergência e acurácia cúbica ou maior, medidas pelos erros de truncamento locais, em regiões onde a solução do problema é suave, enquanto os métodos de baixa ordem alcançam taxas quadráticas ou inferiores (CANUTO et al., 1988). Tradicionalmente, os métodos de baixa ordem são preferidos por sua simplicidade e robustez, e são largamente utilizados quando uma solução de baixa acurácia, porém obtida com baixo esforço computacional, é suficiente. Assim, deve-se deixar claro que, para muitos problemas de engenharia, a utilização de métodos de primeira e segunda ordens, quando feitos de maneira adequada, são ótimas escolhas, ao considerarmos um balanço entre esforço computacional, simplicidade de implementação computacional e resolução exigida (BOLIS, 2013).

Por outro lado, os métodos de alta ordem são considerados uma boa escolha quando o problema apresenta descontinuidades e uma riqueza de estruturas, tais como observados em simulações de instabilidades de Rayleigh-Taylor, interações de ondas de choque com a vorticidade, na simulação numérica direta da turbulência, problemas de fluido-acústica e em problemas de escoamentos bifásicos com tensoativos (STIPCICH, 2012). Assim, deve-se decidir sobre a utilização ou não de um método de alta ordem baseado no problema que se tem em mãos. A escolha da ferramenta a ser utilizada é de grande importância, uma vez que uma linha tênue pode separar uma solução impraticável de uma solução de baixa resolução, que nada permite se avaliar; como resultado, um método de alta ordem pode ser mais econômico, em termos de custo computacional, do que um método de baixa ordem, dependendo da resolução que se deseja alcançar.

Diversos métodos numéricos de alta ordem foram propostos no passado e são ainda utilizados em *CFD*. São exemplos: os métodos compactos (também conhecidos como métodos de Padé) (LELE, 1992), os métodos essencialmente não-oscilatórios (HARTEN et al., 1997), o método de Galerkin descontínuo (LIU; VINOKUR; WANG, 2006), e os métodos de volumes e diferenças espectrais (CANUTO et al., 1988). No presente trabalho, será utilizado o método pseudo-espectral de Fourier.

Os métodos espectrais são uma classe recente de técnicas de solução de *EDP*'s. Eles são baseados no fato de que uma possível solução para uma dada *EDP* pode ser aproximada por polinômios. Eles podem ser vistos também como uma ramificação da classe de esquemas

de discretização para equações diferenciais conhecido genericamente como método dos resíduos ponderados (CANUTO et al., 1988) (FINLAYSON; SCRIVEN, 1966). Em contraste com outros métodos tradicionais, tais como elementos finitos e volumes finitos, os métodos espectrais podem atingir alta ordem de acurácia, tendo sua acurácia limitada somente pela precisão computacional. Teoricamente, isso se dá pelo fato de que qualquer função analítica pode ser aproximada por polinômios de uma forma exponencialmente convergente (SU, 1998). Do ponto de vista numérico, a taxa de convergência da solução discreta em relação à solução exata só é limitada pela regularidade da solução exata. Essa acurácia de alta ordem justifica o interesse cada vez maior pelos métodos espectrais.

Graças às características atrativas acima expostas, muitos autores buscaram encontrar maneiras alternativas de resolver problemas utilizando os métodos espectrais. Como todo método baseado em resíduos ponderados, os métodos espectrais apresentam duas classes de funções, utilizadas em sua formulação: as funções de aproximação e as funções de ponderação. As funções de aproximação são usadas como funções de base para a expansão em série (truncada) da solução. As funções de ponderação são usadas para garantir que a equação diferencial seja satisfeita, da maneira mais precisa possível, pela expansão em série. As escolhas mais comuns para as funções de aproximação são as séries de Fourier, os polinômios de Legendre e os polinômios de Chebishev (CANUTO et al., 1988).

A utilização das séries de Fourier como funções de teste deram origem ao *método espectral de Fourier*, que se aproveita das propriedades vantajosas das transformadas de Fourier, visando algebrizar as equações diferenciais parciais (FIGUEIREDO, 2000). Do ponto de vista histórico, o surgimento do método espectral de Fourier se deu na década de 70, quando o uso de séries de Fourier truncadas para discretizar problemas com condições de contorno periódicas foram combinadas com o então recente algoritmo *Fast Fourier Transform (FFT)*, de Cooley e Turkey (COOLEY; TUKEY, 1965). Este algoritmo permitiu o cálculo das transformadas de Fourier com um custo computacional reduzido, quando comparadas com a então conhecida técnica *Discrete Fourier Transform (DFT)*.

Foi demonstrado por Canuto et al. (1988) que o custo computacional da *FFT*, quando comparada com o algoritmo *DFT*, é reduzido da ordem de $O(N^2)$ para $O(N \log_2 N)$, onde N representa o número de modos de Fourier (pontos de colocação) utilizados.

Ao mesmo tempo em que passou a ser possível o cálculo discreto das transformadas de Fourier, seja pelo algoritmo *FFT* ou pelo *DFT*, tais algoritmos trouxeram consigo uma forte limitação: a necessidade de imposição de condições de contorno periódicas. Ocorre que, sendo a transformada de Fourier uma integral imprópria, tais algoritmos, para que sejam funcionais, do ponto de vista computacional, necessitam de truncar a série em questão. Só é possível garantir a precisão se o sinal for periódico, o que garante, assim, a estabilidade do método.

Essa característica, intrínseca da *FFT* e da *DFT*, representa uma forte limitação do método, tendo em vista que, via de regra, as condições de contorno periódicas não estão presentes em aplicações de interesse físico e industrial. Para problemas não-periódicos, a expansão em série de Fourier pode dar origem ao chamado *fenômeno de Gibbs*, uma forma de contaminação

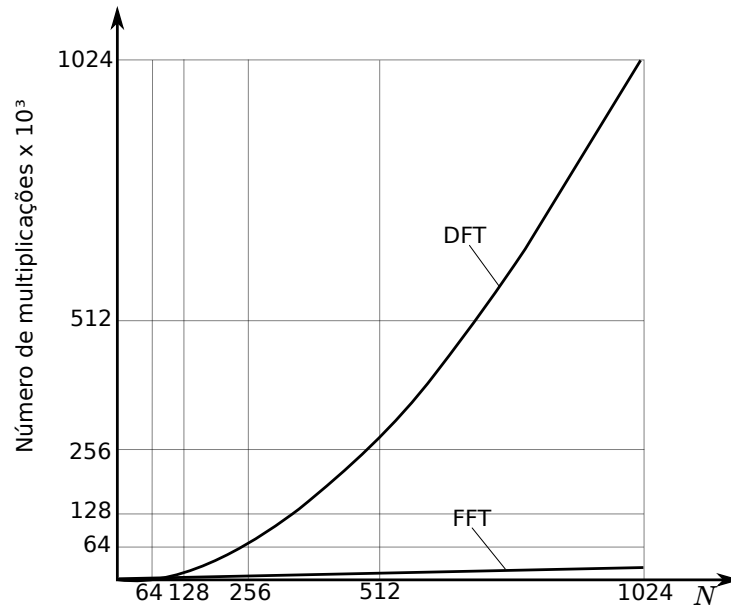


Figura 8 – Comparativo de esforço computacional entre a *FFT* e a *DFT* (CANUTO et al., 1988).

resultante de oscilações espúrias, que afetam fortemente a solução do problema (LESIEUR, 2008).

Com base nessas limitações, algumas tentativas de se contornar o problema foram propostas, como por exemplo o método *reduction to periodicity*, de Roache (1978). Este método propõe a utilização da *FFT* mesmo para problemas não-periódicos, às custas de interpolações com polinômios de alta ordem a cada passo de tempo. Seus resultados mostraram o potencial do método, dada a grande estabilidade e acurácia obtidos para os problemas unidimensionais testados. Entretanto, a aplicação desta técnica à problemas tridimensionais se mostrou limitada, dado o custo computacional envolvido.

Outro método para contornar a exigência da periodicidade das condições de contorno e reduzir os efeitos do fenômeno de Gibbs nos algoritmos de transformadas discretas de Fourier foi proposto por Fu e Liu (2012). Seu método, denominado *Buffered Fourier Spectral Method (BFSM)*, se baseia na periodização do problema, por meio da criação de extensões periódicas e sua subsequentemente interpolação, utilizando-se polinômios de alta ordem. Foi mostrado que mesmo para malhas grosseiras, pode-se obter resultados superiores aos de métodos clássicos, tais como esquemas centrados de diferenças finitas de segunda ordem. Eles ainda resolveram a equação de Poisson para a pressão, e compararam os dados obtidos com outros métodos.

Pode-se verificar qualitativamente a redução do fenômeno de Gibbs, utilizando-se o método *BFSM* para um sinal com ponto de descontinuidade quaisquer, (*c.f.* Fig. 9). O gráfico da Fig. 9-(a) mostra o cálculo numérico de uma derivada, para uma função descontínua, e a forte presença do fenômeno de Gibbs na região onde não há diferenciabilidade. Já a Fig. 9-(b) mostra o efeito de redução deste fenômeno, com a utilização do método *BFSM*.

Uma outra limitação do método espectral se torna evidente quando se deseja tratar termos não-lineares, em particular o termo advectivo presente nas equações de Navier-Stokes. A transformação de termos não-lineares de forma direta passa por uma operação de convolução, já

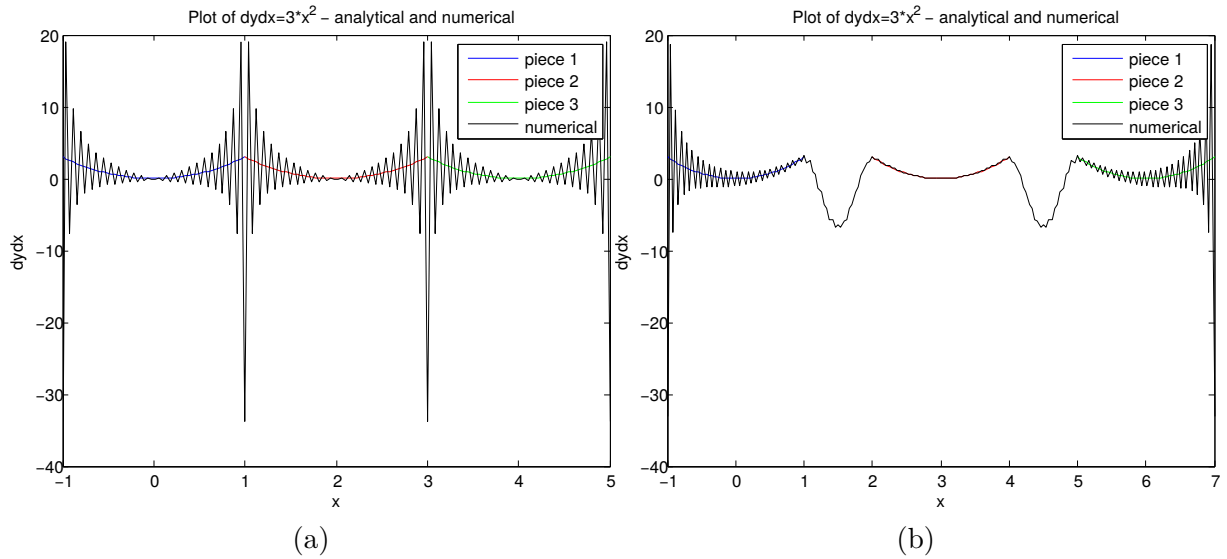


Figura 9 – Exemplo de aplicação do método *BFSM*.

que se trata da transformada do produto de duas funções. A resolução de operações de convolução é notoriamente inviável do ponto de vista computacional, dado o grande número de operações necessárias, que resultam em elevado custo.

Canuto et al. (1988) mostrou que o termo não-linear pode ser tratado de diferentes formas. Quando se considera a hipótese de incompressibilidade do escoamento, todas as formas seguintes são equivalentes. Entretanto, possuem propriedades diferentes quando passam pela transformada de Fourier. Estas formas são (VILLELA, 2011): a forma *não-conservativa*, *conservativa*, *skew-simétrica* e a forma *rotacional*.

Apesar da forma rotacional ser a que apresenta menor custo computacional, foi reportado por Canuto et al. (1988) que esta introduz oscilações a altas frequências. Entretanto, foi registrado nos trabalhos de Mariano (2011) e Villela (2011) que a forma *skew-simétrica* apresentou melhor estabilidade numérica, apesar do custo computacional ser duas vezes maior do que o das formas conservativa e não-conservativa.

Outra tentativa de se estender o método espectral de Fourier para problemas não-periódicos foi proposta por Mariano (2011), ao utilizar uma técnica que acopla o método pseudo-espectral de Fourier com o método da fronteira imersa. Em seu trabalho, ele buscou a validação da metodologia, denominada *IMERSPEC*, realizando simulações-teste de problemas *benchmark*, como a cavidade com tampa deslizante e o escoamento sobre prisma quadrado. Da mesma forma, Moreira (2011) utiliza esta metodologia para escoamentos cisalhantes livres em desenvolvimento espacial. Villela (2011) buscou estender a metodologia *IMERSPEC* para escoamentos bifásicos, simulando a ascensão de uma bolha.

A revisão bibliográfica permitiu verificar que, apesar das limitações intrínsecas do método espectral de Fourier, muitas das quais foram aqui expostas, diversos autores a utilizaram, em especial na simulação numérica direta da turbulência. O presente trabalho busca a utilização do método pseudo-espectral de Fourier para esteiras turbulentas em desenvolvimento temporal.

Embora tal método possua fortes limitações quanto à periodicidade, pode-se realizar comparações qualitativas com resultados da literatura, conforme realizado por Souza (2005), Moser e Rogers (1994), Tani et al. (2013), entre outros. Na maioria dos casos, a utilização da periodicidade não afetou a qualidade dos resultados obtidos, como foi mostrado no trabalho de Mathew e Basu (2001), que, de maneira similar ao presente trabalho, utilizou o método pseudoespectral de Fourier, realizando simulações de jatos em desenvolvimento temporal e apresentando suas vantagens na realização de *DNS* frente aos métodos de baixa ordem.

3 Modelagem matemática

O presente capítulo aborda as metodologias, do ponto de vista de modelagem matemática, que são utilizadas em dinâmica dos fluidos para a solução de escoamentos incompressíveis. A seção 3.1 é dedicada à modelagem matemática Euleriana de escoamentos no espaço físico. A seção 3.2 trata dos modelos matemáticos do método dos resíduos ponderados, que compõem a base matemática formal do método utilizado no presente trabalho. A seção 3.3 aplica o método espectral de Fourier a problemas evolutivos genéricos, e, em particular, nos modelos matemáticos das equações da dinâmica dos fluidos para escoamentos incompressíveis.

Por fim, a seção 3.4 se dedica a explicar brevemente as abordagens de simulação da turbulência, *RANS*, *LES* e *DNS*, e a seção 3.5 apresenta as técnicas mais utilizadas pela literatura para a identificação de estruturas e vórtices presentes nos escoamentos turbulentos.

3.1 Modelagem matemática euleriana de problemas em dinâmica dos fluidos

A formulação matemática Euleriana para problemas em dinâmica dos fluidos inclui as equações da continuidade, balanço de quantidade de movimento linear e conservação de energia. Todas essas equações podem ser obtidas assumindo que as quantidades relativas envolvidas são isotrópicas sobre um volume de controle suficientemente pequeno, sob a ótica da hipótese do contínuo.

Considere um meio espacial contínuo constituído por uma fase de fluido. Para uma dada quantidade arbitrária q , assumindo como funções contínuas (C^∞) todas as propriedades dessa fase de fluido, podemos portanto representar quantidades escalares, tais como a pressão p , como $p : \mathbb{R}^3 \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ e campos vetoriais: $\mathbb{R}^3 \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$, como a velocidade $\mathbf{u}$ e a posição $\mathbf{x}$.

3.1.1 Equação da continuidade

Suponhamos que uma dada quantidade q está contida em um volume de controle $V \subseteq \mathbb{R}^n$, delimitado por uma superfície fechada ∂V , que possui orientação coincidente com vetores normais apontando para fora dessa superfície fechada. Consideremos ainda que ρ denota a densidade volumétrica da quantidade q . Assim, a quantidade q pode ser expressa, em função do tempo, como:

$$q(t) = \int_V \rho(\mathbf{x}, t) dV, \quad (3.1)$$

onde o vetor $\mathbf{x}$ denota a posição espacial, e t denota o tempo. A taxa de variação da quantidade q em relação ao tempo é dada pela derivada temporal:

$$\frac{dq(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\int_V \rho(\mathbf{x}, t) dV \right), \quad (3.2)$$

Utilizando a *teorema de Leibniz*, considerando que $\rho(\mathbf{x}, t)$ é uma função de classe C^1 tal que $\partial\rho(\mathbf{x}, t)/\partial t$ existe e é contínua em V , pode-se reescrever a Eq. (3.2), quando V não apresenta variações temporais, como:

$$\frac{dq(t)}{dt} = \int_V \frac{\partial\rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} dV. \quad (3.3)$$

A taxa de variação de q também pode ser expressa como o fluxo de q , denotado por ϕ , através da superfície fechada ∂V , somado com a taxa de geração de q no interior do volume V , expressa por Λ :

$$\frac{dq(t)}{dt} = \oint_{\partial V} \phi(\mathbf{x}, t) \cdot d\mathbf{S} + F(t), \quad (3.4)$$

onde $d\mathbf{S}$ representa um elemento arbitrário de superfície em ∂V . Uma vez que a superfície é orientada apontando externamente para o vetor normal, considerando que o fluxo ϕ cruza a superfície e que $F(t)$ denota a taxa líquida de geração da quantidade q no volume em questão, a Eq. (3.4) pode ser reescrita como:

$$\frac{dq(t)}{dt} = - \oint_{\partial V} \phi(\mathbf{x}, t) \cdot d\mathbf{S} + F(t), \quad (3.5)$$

Portanto, agrupando as Eqs. (3.3) and (3.5), tem-se:

$$\int_V \frac{\partial\rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} dV = - \oint_{\partial V} \phi(\mathbf{x}, t) \cdot d\mathbf{S} + F(t), \quad (3.6)$$

Note que o lado esquerdo da equação (3.6) é dado por uma integral de volume, enquanto o lado direito deve ser avaliado sobre a superfície ∂V . Uma vez que V é um subconjunto de $\mathbb{R}^n$, sendo portanto compacto e possuidor de uma fronteira ∂V suave por partes, e assumindo que o fluxo ϕ é continuamente diferenciável em uma vizinhança de V , o *teorema da divergência* pode então ser aplicado, e a equação (3.6) se torna:

$$\int_V \frac{\partial\rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} dV = - \int_V \nabla \cdot \phi(\mathbf{x}, t) dV + \int_V f(t) dV, \quad (3.7)$$

onde $f(t)$ denota a taxa de geração da quantidade q por unidade de volume. Dado que o volume V é arbitrário, a Eq. (3.7) só é verdadeira para todo $V \subseteq \mathbb{R}^3$ se e somente se os integrandos forem iguais. Assim, isso resulta na seguinte EDP:

$$\frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}, t). \quad (3.8)$$

A Eq. (3.8) é a forma geral da *equação da continuidade*. Ela pode ser utilizada nas mais diversas aplicações, incluindo fluidodinâmica, eletromagnetismo, mecânica quântica e clássica. No caso particular de um fluxo de fluido, de massa específica ρ e velocidade $\mathbf{u}$, e omitindo as dependências espaciais e temporais das variáveis, reescrevemos esta equação como:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0. \quad (3.9)$$

Esta equação pode ainda ser representada, alternativamente à notação tensorial, utilizando-se a notação indicial, para o caso de escoamento de um fluido arbitrário:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_i)}{\partial x_i} = 0. \quad (3.10)$$

O presente trabalho utiliza essa equação para um fluido incompressível, onde as variações de massa específica e o termo-fonte são desprezados.

3.1.2 Equação de Cauchy para a quantidade de movimento linear

As equações de balanço de quantidade de momento linear podem ser obtidas associando-se as *equações de Cauchy*, com as relações tensoriais de tensão-deformação. Consideremos um elemento de volume material dV em $\mathbb{R}^3$. Existem dois tipos de forças atuantes em dV : as forças externas, que exercem uma dada força por unidade de volume no contínuo, e forças de tensão, que são aplicadas pelo fluido vizinho ao longo da superfície da parcela de fluido considerada, devido às tensões internas induzidas pela viscosidade e pela pressão (COLEMAN, 2010). Denotam-se as componentes do tensor-tensão de Cauchy por σ_{ij} . Considere um fluido no espaço, sujeito a uma força externa $\mathbf{g}$, descrita pelo campo vetorial $\mathbf{g}: \mathbb{R}^3 \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$. A força total agindo em dV pode ser expressa como a soma da força externa $\mathbf{g}$ e das forças causadas pelo tensor-tensão $\boldsymbol{\sigma}$. A variação das componentes de σ_{ij} pode ser expressa como $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}$. Assim, a força total atuante é dada por:

$$\mathbf{G} = [\mathbf{g} + (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma})] dV. \quad (3.11)$$

Usando a *segunda lei de Newton*, pode-se relacionar a força total aplicada num elemento dV com a quantidade de movimento linear $\mathbf{L} = \rho \mathbf{u} dV$. Uma vez que a velocidade é um vetor variante no espaço e no tempo, deve-se utilizar a derivada material, aqui denotada por D/Dt ,

a fim de se descrever corretamente a taxa de variação temporal da quantidade de movimento linear do elemento dV :

$$\mathbf{G} = \frac{D}{Dt} (\rho \mathbf{u} dV). \quad (3.12)$$

Avaliando a derivada material na Eq. (3.12), tem-se:

$$\mathbf{G} = \left[\frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot (\nabla \rho \mathbf{u}) \right] dV. \quad (3.13)$$

Combinando as Eqs. (3.11) e (3.13), tem-se:

$$[\mathbf{g} + (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma})] dV = \left[\frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot (\nabla \rho \mathbf{u}) \right] dV. \quad (3.14)$$

Integrando a Eq.(3.14) sobre um volume arbitrário $\Omega \subseteq V$, tem-se:

$$\int_{\Omega} \mathbf{g} dV + \int_{\Omega} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} dV = \int_{\Omega} \frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} dV + \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot (\nabla \rho \mathbf{u}) dV. \quad (3.15)$$

Usando a arbitrariedade de Ω , a igualdade da equação só é verdadeira para qualquer $\Omega \subseteq V \subseteq \mathbb{R}^3$ se:

$$\mathbf{g} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u}. \quad (3.16)$$

A tensão atuante em cada elemento pode ser representada como a soma de duas componentes tensoriais: um tensor *esférico*, denotado por $p\mathbf{I}$, e um tensor *deviatórico* $\boldsymbol{\tau}$, que causa as distorções no elemento. Portanto, tem-se:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}. \quad (3.17)$$

Por definição, usando o valor escalar p , pode-se quantificar as tensões normais oriundas de $p\mathbf{I}$ como a média negativa do traço do tensor-tensão:

$$p = -\frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^3 \sigma_{ii}, \quad (3.18)$$

Assim, utilizando as Eqs. (3.16), (3.17) e (3.18), pode-se estabelecer a seguinte relação:

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla(\rho \mathbf{u}) = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \mathbf{g}. \quad (3.19)$$

Denomina-se a Eq. (3.19) como a *equação de Cauchy para a quantidade de movimento linear*.

O problema surge do fato de que, *a priori*, a componente deviatórica do tensor-tensão $\boldsymbol{\tau}$ é desconhecida. Entretanto, algumas considerações podem ser feitas de modo a relacionar o tensor

deviatório com quantidades conhecidas. Por exemplo, considere a seguinte relação constitutiva, proposta por Stokes, para um fluido newtoniano:

$$\boldsymbol{\tau} = \mu \left[\nabla \mathbf{u} + [\nabla \mathbf{u}]^T - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I} \right]. \quad (3.20)$$

Combinando a relação constitutiva de Stokes, (3.20), com a equação de Cauchy, Eq. (3.19), obtém-se as chamadas *equações de Navier-Stokes*:

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla(\rho \mathbf{u}) = -\nabla p + \nabla \cdot \mu \left[\nabla \mathbf{u} + [\nabla \mathbf{u}]^T - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I} \right] + \mathbf{g}. \quad (3.21)$$

As equações da continuidade e de Navier-Stokes, Eqs. (3.10) e (3.21), respectivamente, constituirão a base teórica para o presente trabalho. A equação da energia não será utilizada, tendo em vista que o escoamento a ser resolvido é isotérmico.

3.2 Modelagem matemática dos métodos de resíduos ponderados

Considere o seguinte problema evolutivo de valor inicial e de contorno de uma equação diferencial parcial:

$$P[u] = 0, \quad (3.22)$$

num domínio $\mathfrak{D}$ para uma função $u(x, t)$ com uma dada condição de contorno $B(u) = 0$ na fronteira ∂B e uma condição inicial $u(x, 0) = u^0(x)$ num tempo $t = 0$. Uma aproximação para a solução do problema pode ser feita pela soma finita de funções conhecidas:

$$u_N(x, t) = u_B(x, t) + \sum_{i=0}^N a_i(t) \phi_i(x). \quad (3.23)$$

Os termos $\gamma_i(x)$ são chamados de funções de aproximação, que não dependem do tempo, e os termos $a_i(t)$ são os correspondentes coeficientes dependentes do tempo. O termo $u_B(x, t)$ é uma solução particular do problema, que tem o papel de satisfazer a equação caso existam condições de contorno não-homogêneas.

Observe que a grande vantagem da aproximação descrita pela Eq. (3.23) é que a dependência espacial e temporal e, por conseguinte, as derivadas parciais são desacopladas umas das outras. Portanto, assumindo-se $u_B = 0$, as derivadas espaciais podem ser escritas como sendo:

$$\frac{\partial^p u_N}{\partial x^p} = \sum_{i=0}^N a_i(t) \frac{d^p}{dx^p} \gamma_i(x). \quad (3.24)$$

Substituindo a Eq. (3.23) na EDP original, Eq. (3.22), define-se o resíduo como:

$$R(x, t) := P[u_N(x, t)], \quad (3.25)$$

ou seja, R quantifica o quão satisfeita foi a EDP, quando se utiliza a aproximação u_n . A fim de se determinar os $N + 1$ coeficientes não conhecidos $a_i(t)$, o método dos resíduos ponderados exige que o produto do resíduo $R(x, t)$ pelas $N + 1$ funções de ponderação $\psi_i(x)$, ao ser integrado sobre todo o domínio, deve ser minimizado:

$$\int_{\mathfrak{D}} \psi_i(x) R(x, t) dx = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N. \quad (3.26)$$

Observe que tal integração do produto das funções da Eq. (3.26) pode ser vista como o produto interno das funções; operação esta definida para espaços de funções (TORTORELLI, 2010). Neste tipo de espaço funcional, considera-se que quando o produto destas funções, integrado sob um subdomínio suporte, (*i.e.*, a região do domínio X de uma dada função f que satisfaz $\text{supp}(f) = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$) resultarem em produto nulo, tem-se que as funções são ortogonais.

Existem diversas maneiras de se escolher as funções de ponderação. Para o presente trabalho, faz-se uso do método de colocação, onde um conjunto de $N + 1$ nós de colocação são escolhidos no domínio $\mathfrak{D}$, de modo que o resíduo R deve ser nulo:

$$R(x_i) = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N. \quad (3.27)$$

A consequência da Eq. (3.27) é que a Eq. (3.22) é satisfeita de maneira exata nos nós de colocação, de modo que $P(u_N) |_{x=x_i} = 0$. Assim, uma das possíveis maneiras de se escolher as funções de ponderação seria:

$$\psi_i = \delta(x - x_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, N, \quad (3.28)$$

onde δ é a *função delta de Kronecker*, definida como:

$$\delta(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}. \quad (3.29)$$

Da mesma maneira que pode-se escolher as funções de ponderação de maneira arbitrária, pode-se também escolher as funções de aproximação. As funções de aproximação são geralmente funções suaves em todo o domínio $\mathfrak{D}$. Dentre as possíveis escolhas, destacam-se as funções trigonométricas expressas sob a forma de *séries de Fourier*, os *polinômios de Chebishev* e os *polinômios de Legendre*. O presente trabalho se baseia na escolha das séries de Fourier para desempenhar o papel de funções de aproximação.

As séries de Fourier discretas são particularmente funcionais para a discretização de funções periódicas (*i.e.*, que satisfazem $u(x) = u(x + L)$, sendo L o período). Para um domínio de periodicidade L , define-se um número de onda $k_i = 2\pi i/L$. Assim, tem-se:

$$u_N(x) = \sum_{|i| \leq I} c_i e^{ik_i x}, \quad (3.30)$$

onde $c_i \in \mathbb{C}$ e i denota a unidade imaginária. Os coeficientes c_i são os coeficientes complexos de Fourier, para o modo de Fourier $\Phi_i(x) = \exp(ik_i x)$. É comum na literatura que os limites do somatório da Eq. (3.30) apareça também com índice $|i| \leq N/2$, sendo $N = 2I$, com N denotando o número de nós de colocação.

A série de Fourier de uma função suave, infinitamente diferenciável, *i.e.*, de classe C_∞ converge rapidamente com o aumento de N , uma vez que a magnitude dos coeficientes c_i decresce exponencialmente. Este comportamento é denominado de *convergência espectral*. Entretanto, se a função original $u(x)$ não é contínua em pelo menos uma de suas derivadas $u^{(p)}$, a taxa de convergência decresce severamente para a ordem p :

$$\|u_N - u\| = \mathcal{O}(N^{-p}), \quad N \rightarrow \infty, \quad (3.31)$$

o que transforma a anterior convergência espectral na chamada *convergência algébrica*. Isso leva ao surgimento de um fenômeno conhecido como *fenômeno de Gibbs*, onde ocorrem formações de oscilações espúrias, que se manifestam com maior intensidade nas regiões de descontinuidade das derivadas. Um exemplo deste comportamento pode ser observado na Fig. 10, onde foi utilizada uma função descontínua de ordem zero, tal como uma função degrau.

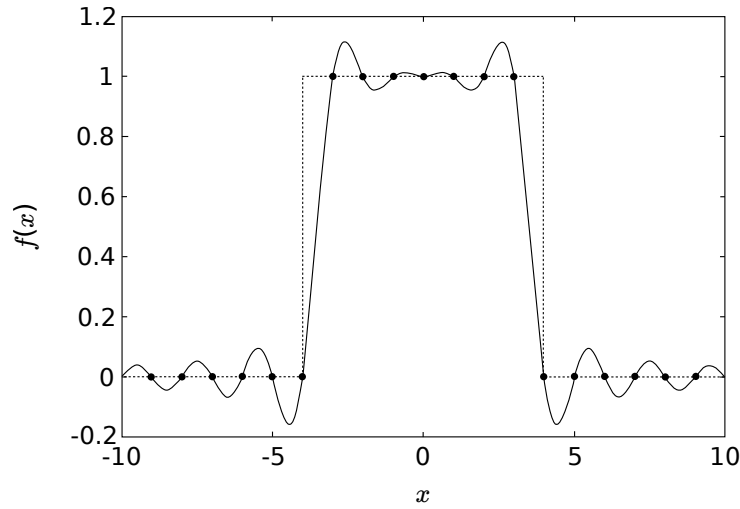


Figura 10 – Ilustração do fenômeno de Gibbs. A utilização da interpolação utilizando a integral de Fourier, em regiões descontínuas causa o surgimento de oscilações espúrias nas vizinhanças da descontinuidade.

Denomina-se a operação de transformação do espaço de representação discreta de u_N , comumente denominado espaço físico, para o espaço espectral de Fourier, como *transformada discreta (direta) de Fourier*, denotada por $\mathcal{F}(u_N)$. De maneira semelhante, para a operação reversa, tem-se a *transformada discreta inversa de Fourier* $\mathcal{F}^{-1}(u_N)$. Uma maneira computacionalmente eficiente de se calcular a transformada discreta de Fourier foi proposta por Cooley e Tukey (1965).

É importante observar que o conceito de *integral de Fourier*, também denominada de transformada (contínua) de Fourier, nada mais é do que a extensão do conceito da série de Fourier, quando o domínio deixa de ser discreto. Sendo assim, utiliza-se o termo *transformada de*

Fourier como a operação de transformação integral $\mathcal{F}$, sendo considerada uma transformação linear da função dada.

3.3 Modelagem matemática do método espectral de Fourier

O *método de colocação espectral de Fourier*, ou mais comumente conhecido simplesmente por *método espectral de Fourier* se configura como um caso particular dos métodos de colocação, quando utiliza-se séries de Fourier como funções de aproximação. Este método é considerado o primeiro método espectral a ser idealizado. Ele apresenta grandes vantagens sobre os demais devido à relativa simplicidade e robustez, em se tratando da resolução de problemas periódicos (CANUTO et al., 1988).

Consideremos o método espectral de Fourier para o problema acima exposto, mantendo as condições de periodicidade nas fronteiras e um domínio periódico. Assim, todas as funções que aparecem no problema são periódicas.

Seja u uma função suave, diferenciável com um período 2π . O N -ésimo nó de colocação do problema será dado por:

$$x_i = \frac{2\pi i}{N}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N-1. \quad (3.32)$$

Utilizando fortemente o fato de que u é contínua e periódica sobre o domínio $(0, 2\pi)$, então segue que u admite expansão pela série de Fourier:

$$u(x) = \sum_{i=-N/2}^{N/2-1} c_i e^{ik_i x}, \quad (3.33)$$

onde $u_p = u(x_k)$, e x_k são os nós de colocação. Assim, tem-se que a derivada de $u(x)$ nos nós de colocação são dados por:

$$\frac{du}{dx}(x_i) = \sum_{j=-N/2}^{N/2-1} ik_j c_j e^{-ik_j x_i}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N-1. \quad (3.34)$$

Observe que o cálculo de uma derivada espacial, como obtido na Eq. 3.34, se resume à uma soma truncada de produtos de números complexos, além de coincidir com a transformada discreta de Fourier, o que, comparado com outros métodos, se configura como uma grande vantagem, dado o baixo custo computacional envolvido.

3.3.1 Escoamentos incompressíveis no espaço de Fourier

Em síntese, no presente capítulo foram estabelecidas as equações diferenciais que modelam o escoamento de um fluido newtoniano genérico. No espaço físico, os modelos são dados pelas equações da continuidade e de Navier-Stokes:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} = 0, \quad (3.35)$$

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \delta_{ij} \right) \right] + g_i. \quad (3.36)$$

Com base nessa formulação, serão apresentadas as equações resultantes de processos de simplificação e de transformação das variáveis primitivas (velocidade e pressão) para o espaço de Fourier, considerando escoamentos incompressíveis.

Considere um escoamento monofásico, incompressível e isotérmico, imerso em um domínio periódico $\mathfrak{D}$. Uma vez que a massa específica sofre variações pouco significativas no tempo e no espaço, considera-se que a derivada temporal de ρ da equação da continuidade é nula. Pela mesma razão, ρ é considerado constante nas derivadas espaciais em que está presente, resultando na seguinte equação:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \quad (3.37)$$

Como consequência da equação da continuidade, Eq. 3.37, $-(2/3) \partial u_i / \partial x_i = 0$. Pode-se, então, simplificar as equações de Navier-Stokes:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial(u_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + g_i, \quad (3.38)$$

onde ν denota a viscosidade cinemática do fluido. Pode-se então recorrer ao processo de transformação linear transformada de Fourier (MARIANO, 2011), onde as transformadas direta e inversa são expressas, respectivamente, como:

$$\hat{f}(\mathbf{k}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathbf{x}, t) e^{-i2\pi \mathbf{k} \mathbf{x}} d\mathbf{x}, \quad (3.39)$$

$$f(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\mathbf{k}, t) e^{-i2\pi \mathbf{k} \mathbf{x}} d\mathbf{k}. \quad (3.40)$$

O campo $\hat{f}(\mathbf{k}, t)$ denota a função transformada, que se encontra no chamado *espaço de Fourier*, enquanto o campo não transformado $f(\mathbf{x}, t)$ se encontra num subespaço euclidiano. O vetor $\mathbf{k}$ denota número de onda, que assume o papel de parâmetro da transformação entre os espaços físicos e de Fourier.

Conforme já comentado, a transformação das variáveis primitivas para o espaço de Fourier resulta em propriedades interessantes, em especial nas derivadas espaciais, que se transformam em meros produtos algébricos (*c.f.* Eq. (3.34)), o que torna atrativo o tratamento de equações diferenciais no espaço de Fourier. Sendo assim, transformando-se as variáveis das Eqs. (3.35) e (3.36) para o espaço de Fourier, tem-se:

$$ik_i \hat{u}_i = 0, \quad (3.41)$$

$$\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial t} + ik_j \widehat{u_i u_j} = -ik_i \hat{p} - \nu k^2 \hat{u}_i + \hat{g}_i. \quad (3.42)$$

Note que o termo advectivo da Eq. (3.42), $ik_j \widehat{u_i u_j}$, denota a transformada do produto entre duas funções, resultando em uma operação de convolução. É possível reescrever esse termo utilizando a integral de convolução:

$$\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial t} + ik_j \int_{\mathbf{k}=\mathbf{r}+\mathbf{s}} \hat{u}_i(\mathbf{r}) \hat{u}_j(\mathbf{k}-\mathbf{r}) d\mathbf{r} = -ik_i \hat{p} - \nu k^2 \hat{u}_i + \hat{g}_i \quad (3.43)$$

Observe que a operação convolução ocorre em $\mathbf{k} = \mathbf{r} + \mathbf{s}$, denotando as operações triádricas entre os vetores número de onda $\mathbf{k}, \mathbf{r}$ e $\mathbf{s}$ (SILVEIRA-NETO, 2010). Para que se possa identificar a direção deste e dos demais termos no espaço de Fourier, recorre-se à decomposição de todos os vetores nas direções normal e tangencial a um plano, denominado π . Por definição, considera-se o plano π como sendo o plano perpendicular ao vetor número de onda $\mathbf{k}$.

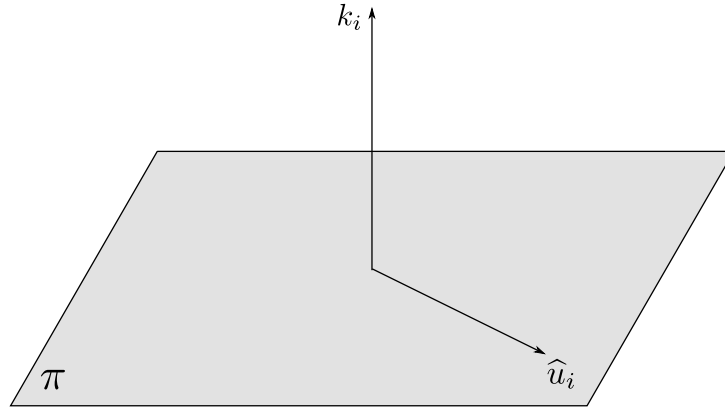


Figura 11 – Plano π e direções por ele definidas. (SILVEIRA-NETO, 2010)

Recorre-se agora à equação da continuidade transformada, Eq. (3.41), onde tem-se que $ik_i \hat{u}_i = 0$. Isso implica, da definição do produto escalar, que os vetores k_i e $\hat{u}_i$ são ortogonais entre si. Ora, sendo o plano π também ortogonal ao vetor k_i , conclui-se portanto que $\hat{u}_i$ deve pertencer ao plano π .

Observe que não se pode afirmar, *a priori*, a direção do termo advectivo em relação aos vetores-base do plano π , tampouco em relação ao vetor colinear à sua normal, k_i , dado que ele é gerado por interações triádricas entre os números de onda. Da mesma forma, nada se sabe sobre a direção do termo fonte $\hat{g}_i$. Para que se possa definir a direção de cada termo, realiza-se a decomposição dos mesmos, individualmente:

- Termo de taxa de variação da quantidade de movimento linear, $\partial \hat{u}_i / \partial t$:

Sendo $\hat{u}_i \in \pi$:

$$\frac{\partial (k_i \hat{u}_i)}{\partial t} = k_i \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial t} = 0 \implies \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial t} \in \pi \quad (3.44)$$

Assim, tem-se que o termo de variação temporal de quantidade de movimento linear pertence ao plano π .

- Termo difusivo da quantidade de movimento linear, $-k^2 \hat{u}_i$:

Sendo k^2 um escalar, conclui-se que $-k^2 \hat{u}_i$ é colinear a $\hat{u}_i$, e, portanto, o termo difusivo pertence ao plano π .

- Termo gradiente de pressão: $-ik_i \hat{p}$:

Sendo $i\hat{p}$ uma quantidade escalar, conclui-se que $-ik_i \hat{p}$ é colinear a k_i , sendo portanto perpendicular ao plano π .

- Termo advectivo: $ik_j \int_{\mathbf{k}=\mathbf{r}+\mathbf{s}} \hat{u}_i(\mathbf{r}) \hat{u}_j(\mathbf{k}-\mathbf{r}) d\mathbf{r}$:

Baseado nos resultados acima, pode-se rearranjar os termos da Eq. (3.43) como se segue:

$$\underbrace{\left[\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial t} + \nu k^2 \hat{u}_i \right]}_{\in \pi} + \left[ik_j \int_{\mathbf{k}=\mathbf{r}+\mathbf{s}} \hat{u}_i(\mathbf{r}) \hat{u}_j(\mathbf{k}-\mathbf{r}) d\mathbf{r} + ik_i \hat{p} - \hat{g}_i \right] = 0. \quad (3.45)$$

A conclusão de que a soma do termo transiente com o termo difusivo resulta em um vetor pertencente ao plano π advém da propriedade de soma de dois vetores coplanares, que por sua vez gera um vetor igualmente coplanar. Observe que a soma de todos os termos é identicamente nula. Isso só é possível, se e somente se:

$$\left[ik_j \int_{\mathbf{k}=\mathbf{r}+\mathbf{s}} \hat{u}_i(\mathbf{r}) \hat{u}_j(\mathbf{k}-\mathbf{r}) d\mathbf{r} + ik_i \hat{p} - \hat{g}_i \right] \in \pi. \quad (3.46)$$

Pode-se então projetar os termos da equação de quantidade de movimento linear transformada, utilizando um tensor projeção, definido em Silveira-Neto (2010):

$$\wp(\mathbf{k}) = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}. \quad (3.47)$$

Assim, é possível aplicar o tensor projeção na Eq. (3.45):

$$\wp \left[\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial t} + \nu k^2 \hat{u}_i \right] + \wp \left[ik_j \int_{\mathbf{k}=\mathbf{r}+\mathbf{s}} \hat{u}_i(\mathbf{r}) \hat{u}_j(\mathbf{k}-\mathbf{r}) d\mathbf{r} + ik_i \hat{p} - \hat{g}_i \right] = 0. \quad (3.48)$$

No primeiro grupo de termos da equação (3.48), tem-se a projeção de termos, já coplanares ao plano π sobre este mesmo plano, o que resulta em vetores equipolentes a estes. No segundo grupo, notemos que a projeção do termo da pressão, ortogonal ao plano π , resultará em um vetor nulo, conforme mostrado na figura abaixo. Assim, ao resolver as equações projetadas, fica evidenciado o desacoplamento da pressão das equações de Navier-Stokes para escoamentos incompressíveis. A equação resultante, é da forma:

$$\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial t} + \nu k^2 \hat{u}_i = \wp_{ik} \left[\hat{g}_i - ik_j \int_{\mathbf{k}=\mathbf{r}+\mathbf{s}} \hat{u}_k(\mathbf{r}) \hat{u}_j(\mathbf{k}-\mathbf{r}) d\mathbf{r} \right] \quad (3.49)$$

da integral de convolução, esta técnica conserva a alta acurácia e a alta ordem características dos métodos espectrais (MARIANO, 2011).

Outra peculiaridade do tratamento do termo não-linear reside no fato de que ele pode ser escrito de diferentes formas (CANUTO et al., 1988). Todas estas formas, quando se assume incompressibilidade no escoamento, apresentam equivalência matemática. Entretanto, as propriedades numéricas podem variar significativamente, quando se realiza a discretização dessas equações. Villela (2011) lista as formas de tratamento do termo não-linear como se segue:

- Forma não-conservativa: $\mathbf{u} \cdot (\nabla \mathbf{u})$
- Forma conservativa: $\nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u})$
- Forma *skew*-simétrica: $\frac{1}{2} [\mathbf{u} \cdot (\nabla \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u})]$
- Forma rotacional: $\frac{1}{2} \nabla (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}$

Na forma não-conservativa, a operação produto denotada por " $\cdot$ " representa o produto interno. Na forma conservativa, a operação onde os vetores $\mathbf{u}\mathbf{u}$ aparecem justapostos denota a operação de produto diádico, que resulta em um tensor de segunda ordem. A operação presente na forma rotacional utiliza o rotacional do vetor $\mathbf{u}$, sendo $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$.

A forma escolhida no presente trabalho para a solução do termo não-linear foi a forma anti-simétrica, reportada como sendo a mais estável do ponto de vista numérico (CANUTO et al., 1988; MARIANO, 2011). Assim, pode-se reescrever a Eq. (3.49) como:

$$\frac{\partial \widehat{u}_i}{\partial t} + \nu k^2 \widehat{u}_i = \wp_{ij} \left[\widehat{g}_i - \frac{1}{2} \left(\imath k_j \widehat{u_i u_j} + \widehat{u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} \right) \right]. \quad (3.51)$$

Assim, para efetuar o cálculo da primeira parcela do termo não-linear, $\imath k_j \widehat{u_i u_j}$, deve-se calcular $u_i(\mathbf{x}, t)$ e $u_j(\mathbf{x}, t)$, definindo-se a função produto, $h_{ij}(\mathbf{x}, t) = u_i(\mathbf{x}, t) u_j(\mathbf{x}, t)$:

$$\widehat{u_i u_j}(\mathbf{k}, t) = \widehat{h}(\mathbf{k}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\mathbf{x}, t) e^{-\imath 2\pi \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x}. \quad (3.52)$$

Para a segunda parcela do termo não-linear, $\widehat{u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}}$, uma vez que a derivada $\partial u_i / \partial x_j$ é, *a priori*, desconhecida, deve-se primeiramente calculá-la no espaço de Fourier. Após essa etapa, a derivada deve ser transformada de volta ao espaço físico, a fim de permitir o cálculo do produto, e finalmente pode-se proceder transformando o produto final para o espaço de Fourier:

$$\widehat{u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}}(\mathbf{k}, t) = \widehat{s}_i(\mathbf{k}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_i(\mathbf{x}, t) e^{-\imath 2\pi \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x}, \quad (3.53)$$

onde $s(\mathbf{x}, t)$ é dado pela transformada inversa:

$$s(\mathbf{x}, t) = u_j(\mathbf{x}, t) \int_{-\infty}^{+\infty} \imath k_j \widehat{u_i}(\mathbf{k}, t) e^{-\imath 2\pi \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{k}, \quad (3.54)$$

Assim, fazendo-se uso de tais relações, evita-se a realização do produto de convolução numericamente. Entretanto, é importante observar que apesar dos ganhos de estabilidade provenientes do uso da forma *skew*-simétrica, tem-se perdas de *performance* computacional, tendo em vista que ela dobra a quantidade de operações de transformação direta e inversa, quando comparadas com as formas conservativa e não-conservativa.

3.4 Abordagens de simulação da turbulência

Um outro ponto que precisa ser estudado, a fim de simular corretamente os escoamentos turbulentos, é a escolha da abordagem de simulação. Tal escolha deve ser devidamente justificada pela natureza do problema que se deseja estudar. Existem três abordagens para a simulação da turbulência: a simulação numérica direta, *DNS*, a simulação de grandes escalas, *LES*, ambas utilizadas no presente trabalho, e a simulação das equações médias de Reynolds, *RANS*. Um resumo das principais características de cada metodologia é exposto a seguir, dando especial atenção às abordagens utilizadas nesta dissertação.

3.4.1 Simulação numérica direta (*DNS*)

O ponto inicial para a simulação numérica de modelos de turbulência é a escolha da abordagem que se deseja utilizar para a resolução das equações de Navier-Stokes. A maneira mais direta para simular a turbulência é conhecida como *DNS*, que, conforme previamente explicado, consiste em resolver diretamente as equações de Navier-Stokes, numa tentativa de se resolver todas as escalas de movimento do fluido, desde as maiores estruturas coerentes até as menores escalas dissipativas, de maneira a não se utilizar de nenhuma média ou suavização do campo de velocidades.

É importante ressaltar que as simulações numéricas diretas resolvem completamente o escoamento. Assim, a solução obtida é livre de quaisquer hipóteses de modelagem de turbulência e de correlações empíricas, sendo que a única diferença entre os resultados obtidos pela simulação e pelo experimento material equivalente seriam devido aos erros das aproximações numéricas. Portanto, para uma malha suficientemente refinada e utilizando-se esquemas numéricos de alta acurácia, espera-se que se atinja resultados que representem fidedignamente a física.

Grande parte dos estudos encontrados na literatura, em especial os que se dedicam à simulação de escoamentos cisalhantes livres, mostram grande preocupação quanto às menores escalas da turbulência, e seus efeitos no escoamento de maneira geral. Ocorre que, do ponto de vista numérico, existe relativa dificuldade de se realizar *DNS*, ou seja, de se capturar todas as escalas do escoamento. As pequenas escalas presentes nos escoamentos turbulentos são geradas pelas forças inerciais e dissipadas pelas forças viscosas. Para altos números de Reynolds, os efeitos viscosos são relativamente baixos frente aos efeitos inerciais, o que resulta na formação de uma grande quantidade de pequenas escalas.

Para melhor ilustrar essa questão, consideremos um dado fluido de viscosidade ν e, supondo a presença de um turbilhão de tamanho característico l , possuidor de uma velocidade

característica U_l , define-se um número de Reynolds local (MOREIRA, 2011), dado por:

$$Re_l = \frac{U_l l}{\nu} \quad (3.55)$$

Admitindo-se que a escala l se encontre em uma região do espectro onde, pela teoria de Kolmogorov, $U_l = (l\varepsilon)^{1/3}$, tem-se que:

$$Re_l = \frac{(l^4\varepsilon)^{1/3}}{\nu} \quad (3.56)$$

se l diminui, tem-se que Re_l também diminui, de maneira que se $l < l_k$, sendo l_k definido por:

$$l_k \sim \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon} \right)^{1/4} \quad (3.57)$$

Logo, Re_l se tornaria menor do que 1, e os efeitos viscosos passariam a dominar os efeitos de inércia, de maneira que as instabilidades turbilhonares possuidoras de tamanhos menores que as escalas de Kolmogorov seriam dissipadas, e portanto não seria possível visualizar seu desenvolvimento. Em situações práticas, e considerando que a escala de Kolmogorov diminui com o aumento do número de Reynolds, é esperado que o número de pontos a ser empregado em três dimensões para a realização de *DNS* aumente consideravelmente. Tal aumento inviabiliza essa abordagem de simulação para números de Reynolds elevados, tendo em vista que o custo da simulação é proporcional a Re_l^3 .

Um outro limitante das simulações *DNS* consiste na necessidade de utilização de esquemas numéricos de alta ordem e acurácia, a fim de limitar os erros dissipativos e dispersivos. Considerando tais fatores onerosos, e tendo em vista o atual estado de capacidade computacional, as simulações *DNS* são limitadas a geometrias simples a números de Reynolds baixos (LESIEUR, 2008).

As relações entre as escalas dissipativas e as grandes escalas podem ser estimadas considerando-se um escoamento turbulento completamente desenvolvido, adotando-se a hipótese de equilíbrio, em que a taxa de dissipação ε é igual à taxa de injeção de energia, U_l^2/l . Uma vez que as escalas de Kolmogorov de comprimento, l_k e tempo t_k são dadas, respectivamente, por $l_k \sim (\nu^3/\varepsilon)^{1/4}$ e $t_k \sim (\nu/\varepsilon)^{1/2}$, é possível estabelecer as seguintes relações entre as escalas de Kolmogorov e as grandes escalas:

$$l_k \sim \frac{l}{Re_l^{3/4}} \quad (3.58)$$

$$t_k \sim \frac{t}{Re_l^{1/2}} \quad (3.59)$$

Assim, para que se possa garantir a captura de todas as estruturas dinamicamente importantes no escoamento, pode-se estimar o tempo e comprimento característicos de Kolmo-

gorov, e à partir destes, estimar a quantidade de modos de Fourier necessários para o cálculo *DNS*.

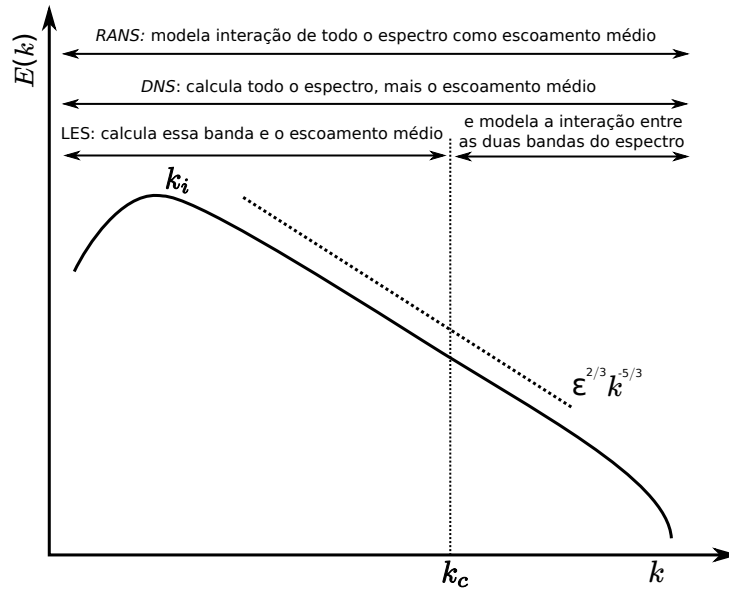


Figura 13 – Espectro de energia cinética turbulenta, frequência de corte e diferenças nas técnicas *DNS*, *LES* e *RANS*. A frequência k_c denota a frequência de corte, que separa as estruturas calculadas das modeladas, nas simulações *LES*.

3.4.2 Simulação de grandes escalas (*LES*)

Um outro problema na modelagem da turbulência é que enquanto as pequenas escalas tendem a depender principalmente da viscosidade e são consideradas universais, as grandes escalas tendem a depender prioritariamente das características das condições iniciais e de contorno, o que torna difícil a tarefa de tentar modelá-las. Isso significa, por exemplo, que modelos que foram desenvolvidos para lidar com escoamentos parietais podem gerar maus resultados em escoamentos cisalhantes livres. Neste sentido, buscou-se novas abordagens de modelagem, tal como a simulação de grandes escalas *LES* (SONDERGAARD, 1996).

A ideia principal da técnica *LES* consiste em dividir o escoamento em duas partes: uma parte simulada numericamente, e outra parte modelada, através de um processo de filtragem estatística. O escoamento principal, juntamente com as grandes escalas, é simulado, enquanto as pequenas escalas, também chamadas de *escalas sub-malha*, são modeladas. A premissa básica desta técnica reside na universalidade das pequenas escalas (*i.e.*, na sua independência das condições de contorno), sendo portanto mais facilmente modeláveis do que as grandes escalas.

Uma vez que a influência dinâmica das pequenas escalas da turbulência no escoamento é pequena, os erros introduzidos pela modelagem *LES* são igualmente pequenos. Além disso, as escalas resolvidas carregam consigo uma quantidade muito maior de informação do que o escoamento médio calculado pela abordagem *RANS*, fazendo com que a abordagem *LES* tenha uma acurácia muito maior do que a abordagem *RANS*. Uma outra vantagem é que, comparado

com a abordagem *DNS*, sua demanda de recursos computacionais é consideravelmente menor, uma vez que as pequenas escalas não são resolvidas, e sim modeladas.

O presente trabalho optou pela utilização do modelo sub-malha de Smagorinsky, para comparações com modelos *DNS*. Por esta razão, explora-se a seguir os detalhes da modelagem de Smagorinsky, das equações filtradas e as vantagens e limitações desta forma de modelar a turbulência.

Apresenta-se agora o processo de filtragem das equações de Navier-Stokes e da separação das escalas, para escoamentos incompressíveis e isotérmicos de fluidos newtonianos. Retomando o modelo matemático diferencial previamente estabelecido, Eqs. (3.37) e (3.38):

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \quad (3.60)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial (u_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \delta_{ij} \right) \right] + g_i. \quad (3.61)$$

Pode-se agora decompor cada campo das Eqs. (3.60) e (3.61) em duas escalas: as escalas filtradas, $\bar{\phi}(\mathbf{x}, t)$, e as escalas flutuantes (ou sub-malha), ϕ' , conforme realizado por Moreira (2011):

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \bar{\phi}(\mathbf{x}, t) + \phi'(\mathbf{x}, t). \quad (3.62)$$

Por definição, tem-se que a parte filtrada é dada pelo produto de convolução da função a ser filtrada com a função filtro $G(\mathbf{x}, t)$, como se segue:

$$\bar{\phi}(\mathbf{x}, t) = \int \phi(\mathbf{x}, t) G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x}', \quad (3.63)$$

onde a função filtro adquire de diversas formas, sendo a mais comum a forma de filtro *cut-off*:

$$G(|\mathbf{k}|) = \begin{cases} 1, & |\mathbf{k}| \leq k_c \\ 0, & |\mathbf{k}| > k_c \end{cases} \quad (3.64)$$

onde $\mathbf{k}$ denota o vetor número de onda e k_c a frequência de corte (*c.f.* Fig. 13). Silveira-Neto (2010) destaca que, mesmo quando na ausência da filtragem formal das equações, as discretizações intrínsecas dos métodos numéricos já exercem um papel que caracteriza o processo de filtragem, *per se*. Ao se aplicar o processo de filtragem nas equações, tem-se (LESIEUR, 2008):

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0, \quad (3.65)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u}_i \bar{u}_j)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right]. \quad (3.66)$$

Observe que, na Eq. (3.66) surge, no termo não-linear, a presença do produto filtrado de duas variáveis, $\overline{u_i u_j}$, sendo este termo desconhecido. É possível resolver este problema definindo-se o tensor de Reynolds global, $\bar{\tau}_{ij} = \overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j$. Pode-se então substituir o produto filtrado na Eq. (3.66), resultando em:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u}_i \bar{u}_j)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \bar{\tau}_{ij} \right]. \quad (3.67)$$

Vale ressaltar que o tensor de Reynolds global, $\bar{\tau}_{ij}$ incorpora três tensores: o *tensor cruzado* $C_{ij} = \overline{u'_i u'_j} + \overline{u'_j u'_i}$, o *tensor de Leonard* $L_{ij} = \overline{\bar{u}_i \bar{u}_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j$ e o *tensor de Reynolds sub-malha* $\tau_{ij} = \overline{u'_i u'_j}$. Reescrevendo a equação, explicitando tais termos, tem-se:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u}_i \bar{u}_j)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - (C_{ij} + L_{ij} + \tau_{ij}) \right]. \quad (3.68)$$

Note que a decomposição das escalas através do processo de filtragem leva a uma sistema formado pela equação da conservação da massa filtrada e pela equação de Navier-Stokes. Este sistema possui mais incógnitas do que equações, problema esse conhecido como *problema de fechamento da turbulência*.

Uma alternativa viável para resolver o problema de fechamento da turbulência é conhecida como *hipótese de Boussinesq*, onde modela-se o tensor sub-malha de forma análoga ao procedimento realizado por Stokes, no caso das tensões viscosas. Assim, expressa-se o tensor de Reynolds sub-malha τ_{ij} em função da taxa de deformação gerada pelo campo de velocidades filtrado e da energia cinética turbulenta:

$$\tau_{ij} = -\nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) + \frac{2}{3} k \delta_{ij} \quad (3.69)$$

sendo ν_t definida como a *viscosidade turbulenta*, que pode ser calculada de diferentes maneiras. Moreira (2011) explica ainda que é possível incorporar a parcela do termo envolvendo a energia cinética turbulenta ao termo da pressão, o que resulta em uma pressão modificada, denotada por $\bar{p}^*$:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u}_i \bar{u}_j)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}^*}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\nu + \nu_t) \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right] \quad (3.70)$$

A incorporação destes termos na pressão é de grande importância, uma vez que tais termos não podem ser desprezados, dependendo do esquema numérico utilizado. Da mesma forma, Silveira-Neto (2010) explica que para esquemas de ordem baixa, os tensores de Leonard e cruzado podem ser desprezados; entretanto, não é possível fazer tal consideração quando utilizando esquemas de alta ordem, como por exemplo o método espectral utilizando neste trabalho.

Uma das limitações relativas à incorporação do termo relativo à energia cinética turbulenta no campo de pressão se dá no processo de recuperação da mesma. Recorda-se, da seção 3.3.1 (*c.f.* Eq. (3.46)) que no método espectral de Fourier, a pressão é desacoplada do campo de velocidade.

Nesse sentido, para se efetuar a recuperação do campo de pressão primitivo, deve-se modelar a energia cinética turbulenta, etapa esta que deve ser realizada de maneira simultânea ao cálculo da viscosidade turbulenta.

Um dos modelos mais utilizados na literatura para a simulação *LES* é o *modelo de Smagorinsky* (SMAGORINSKY, 1963), que se baseia na hipótese do equilíbrio local para as pequenas escalas:

$$\wp = \varepsilon, \quad (3.71)$$

onde a taxa de produção das tensões turbulentas, $\wp$ pode ser escrita em função da taxa de cisalhamento do campo filtrado de velocidade, $\wp = -\overline{u'_i u'_j} S_{ij} = 2\nu_t S_{ij}$, e a dissipação podendo ser escrita em função da escala de velocidade e do comprimento característico sub-malha, $\varepsilon = -c(\overline{u'_i u'_j})^{3/2}/l$. Assim, a viscosidade turbulenta proposta por Smagorinsky (1963) é da forma:

$$\nu_t = (C_s \Delta)^2 \sqrt{2S_{ij}S_{ij}}, \quad (3.72)$$

sendo $\Delta = \sqrt[3]{\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3}$ o comprimento característico, C_s a constante de Smagorinsky e $\overline{S_{ij}}$ o tensor taxa de deformação filtrado (MOREIRA, 2011). Existe uma grande discussão a respeito dos valores que devem ser assumidos para a constante de Smagorinsky, que deve ser ajustada para cada caso. Considera-se, na maior parte das vezes, $0.05 < C_s < 0.30$. Para escoamentos cisalhantes livres, assume-se $C_s \approx 0.13$ (LESIEUR; METAIS; COMTE, 2005).

É importante frisar que o modelo de Smagorinsky não permite a transferência de energia cinética turbulenta em fluxo inverso. O modelo também possui a limitação de não capturar com acurácia a transição à turbulência. Entretanto, mesmo diante de tais limitações, o modelo representa adequadamente o espectro de energia cinética turbulenta para escoamentos cisalhantes livres, como é o caso das esteiras turbulentas, foco principal deste trabalho.

3.4.3 Equações médias de Reynolds (*RANS*)

Caso se escolha reduzir ainda mais o custo computacional, pode-se utilizar uma estratégia onde as grandes escalas, ao invés de serem resolvidas, passam a ser modeladas. Para isso, introduz-se um operador média temporal nas equações de Navier-Stokes, o que resulta nas chamadas equações médias de Navier-Stokes, ou seu correspondente acrônimo do inglês, *RANS*. Do ponto de vista prático, o resultado de tal média seria equivalente a ter um infinito número de experimentos sendo amostrados ao mesmo tempo, e posteriormente processando a média de tais experimentos. A equação vetorial resultante, para um escoamento incompressível, é dada por:

$$\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial t} + \frac{\partial (\langle u_i u_j \rangle)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_i} \right) \right], \quad (3.73)$$

onde o operador $\langle \rangle$ denota as quantidades médias. Observe que esta equação apresenta, no termo não-linear, um termo de média de duas variáveis desconhecidas. É possível decompor as escalas

na forma de média e flutuação, utilizando as devidas propriedades estatísticas:

$$\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\langle u_i \rangle \langle u_j \rangle + \langle u'_i u'_j \rangle \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_i} \right) \right] \quad (3.74)$$

Nota-se, assim, que a média do termo não-linear introduz um tensor adicional, advindo da componente flutuante nas equações médias de Navier-Stokes, $\tau_{ij} = \langle u'_i u'_j \rangle$, denominado *tensor de Reynolds*. Trata-se de um momento estatístico de segunda ordem, e tentativas de gerar equações de transporte para este momento serão frustradas, já que assim surgirão momentos de terceira ordem, e de ordens superiores, caso tal tentativa se torne recorrente. Novamente, tem-se o problema de fechamento da turbulência. Até o presente momento, as soluções para resolver este problema se baseiam no que se define como *modelagem da turbulência*, ou seja, uma equação precisa ser proposta para que o problema se torne fechado (SILVEIRA-NETO, 2010).

Existem disponíveis na literatura uma grande quantidade de modelos de turbulência, desde modelos algébricos até os modelos comumente utilizados, tais como a família de modelos $k-\varepsilon$. Em contraste com o *DNS*, as simulações *RANS* podem ser utilizadas para simular escoamentos em geometrias complexas a altos números de Reynolds. Tal característica é notavelmente vantajosa, especialmente para a simulação de problemas práticos de engenharia. Infelizmente, a abordagem *RANS* sofre fortemente com uma deficiência: a turbulência é um fenômeno que possui uma grande riqueza de escalas, e a medição de comportamentos médios não permite a captura de tal riqueza.

3.5 Técnicas de identificação de vórtices

A turbulência, como já abordado, não se caracteriza somente como ruído aleatório. Ela se caracteriza também pela presença de estruturas com grande coerência espacial, que se desenvolvem no tempo, conhecidas como *estruturas coerentes*. Uma vez que as estruturas não-coerentes decaem muito mais rapidamente que as estruturas coerentes, estas últimas exercem uma influência muito maior na dinâmica e nas características de transporte do escoamento. O estudo do comportamento das estruturas coerentes é conhecido como *dinâmica dos vórtices*, e aborda a evolução e a interação das estruturas coerentes umas com as outras e com as escalas dissipativas presentes no escoamento.

Na literatura, existem estudos de dinâmica dos vórtices que se concentram na identificação de estruturas vorticais, tanto para escoamentos cisalhantes livres (SONDERGAARD, 1996) quanto para escoamentos parietais (JIMENEZ, 2013). Tais análises são de grande importância no estudo da turbulência, pois permitem um melhor entendimento dos processos que governam as estruturas coerentes e sua influência geral no escoamento.

Uma parte substancial dos resultados do presente trabalho se dedica a analisar as estruturas resultantes das simulações. Entretanto, para que tal estudo seja realizado, é preciso que se defina com clareza o conceito de estrutura turbilhonar. Até os dias atuais, ainda existem diversos debates a esse respeito e dos mecanismos que permitiriam sua caracterização e identificação,

buscando assim eliminar definições ambíguas. A seguir, buscou-se explorar as principais técnicas de visualização e identificação das estruturas coerentes utilizadas na literatura recente.

3.5.1 Técnicas clássicas

Uma das primeiras definições vórtice foi apresentada por Lamb (1895), que o descreveu como um tubo, cuja superfície consiste em linhas vorticais. Entretanto, tal conceito caiu em desuso, tendo em vista que a existência de um tubo vortical não garante a presença de uma estrutura coerente, uma vez que um escoamento interno em um duto pode apresentar tubos vorticais, apesar de não exibir o que se considerava, à época, uma estrutura coerente propriamente dita.

Uma investigação sobre as técnicas de identificação de vórtices mais utilizadas no passado, assim como suas deficiências e limitações são mostradas no trabalho de Jeong e Hussain (1995). As principais técnicas de identificação abordadas no referido trabalho são listadas abaixo:

- Pressão mínima local: as estruturas coerentes, caracterizadas pelo balanço de forças devido à pressão e forças centrífugas, tendem a ter um ponto de mínima pressão ao longo de seu eixo de circulação. Tal característica foi abordada por Robinson (1991), que utilizou um banco de dados de simulações *DNS* para mostrar que esta técnica permitiria a captura de estruturas coerentes em simulações de camada limite turbulenta. Entretanto, Jeong e Hussain (1995) mostram que, dependendo do valor de corte que se escolha para a pressão, este método pode resultar em identificações falsas.
- Linhas de corrente: técnica inicialmente proposta por Lugt (1979), onde se utilizam as linhas de corrente para detectar vórtices. A partir desta técnica, considera-se como estruturas coerentes as regiões descritas como caminhos espiralados fechados. A primeira deficiência desta técnica é que ela não apresenta invariância galileana. Assim, uma estrutura coerente detectada em um dado referencial pode não ser identificada quando se utiliza um referencial que se move a uma velocidade relativa constante. Na prática, isto significa que este método pode ocultar estruturas que se movem a diferentes velocidades, o que pode levar a falhas graves de identificação destas estruturas em escoamentos turbulentos, em particular naqueles que eventualmente possuam um elevado número de estruturas sendo advectadas a velocidades distintas.
- Campo de magnitude da vorticidade: uma das técnicas mais utilizadas para a identificação das estruturas coerentes é a visualização da magnitude do vetor vorticidade, dada por:

$$|\boldsymbol{\omega}| = |\nabla \times \mathbf{u}| \quad (3.75)$$

Esta técnica é considerada segura por diversos autores, em especial para a utilização em escoamentos cisalhantes livres. Entretanto, ela pode resultar em identificações falsas, quando utilizada em escoamentos parietais, uma vez que a vorticidade pode ocultar vórtices se o campo de cisalhamento no fluido for de magnitude comparável com a magnitude de

ω no interior da estrutura. Nos escoamentos parietais, as regiões de maior cisalhamento ocorrem próximo às paredes, dificultando portanto a utilização desta técnica nesse tipo de escoamento.

3.5.2 Técnicas modernas

À luz das deficiências das técnicas clássicas acima abordadas, o trabalho de Jeong e Hussain (1995) propõe ainda requisitos básicos para o que seria uma definição objetiva de estrutura coerente: elas devem ser visualizadas através de campos de circulação e de vorticidade líquidos, de maneira que campos potenciais sejam excluídos da visualização; e ainda: a estrutura coerente deve ser identificada com técnicas que possuam invariância galileana.

Recentemente, diferentes técnicas modernas de identificação de estruturas coerentes vêm sendo propostas na literatura. Elas utilizam as propriedades do tensor gradiente de velocidade e possuem a invariância galileana exigida por Jeong e Hussain (1995). Hunt, Wray e Moin (1988) propuseram a utilização dos autovalores do tensor gradiente de velocidade para derivar uma classificação local dos vários padrões de linhas de corrente que ocorrem nos escoamentos tridimensionais. Eles utilizaram um sistema de coordenadas não-inercial, que permanece fixo a uma dada partícula no fluido, resultando em uma classificação onde o escoamento é definido com maior segurança por qualquer observador. A fim de ilustrar tais técnicas, considere o tensor gradiente de velocidade definido em notação tensorial:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \equiv A_{ij}. \quad (3.76)$$

Pode-se decompor A_{ij} em uma parte simétrica, S_{ij} , conhecida como *tensor taxa de deformação*, e em uma parte anti-simétrica, chamada de *tensor taxa de rotação*:

$$S_{ij} \equiv \frac{1}{2} (A_{ij} + A_{ji}), \quad (3.77)$$

$$W_{ij} \equiv \frac{1}{2} (A_{ij} - A_{ji}). \quad (3.78)$$

Note que, desta forma, as Eqs. (3.77) e (3.78) satisfazem a identidade:

$$A_{ij} \equiv S_{ij} + W_{ij}. \quad (3.79)$$

Sondergaard (1996) explica que, caso A_{ij} possua somente autovalores reais, o escoamento é dominado por efeitos de deformação, movendo-se no sentido de entrada ou saída, partindo-se da origem, ao longo de diferentes direções. Já no caso em que A_{ij} tenha um par de autovalores complexos, os efeitos de rotação predominarão no fluido, apresentando movimentos espiralados coplanares, juntamente com deformações numa terceira direção, não-coincidentes a este plano.

Os autovalores de A_{ij} , denotados por λ , e seus autovetores complexos, e_i , devem satisfazer o seguinte problema de autovetores:

$$[A_{ij} - \lambda \delta_{ij}] e_i = 0, \quad (3.80)$$

onde os autovalores λ são soluções da equação característica:

$$\det [A_{ij} - \lambda \delta_{ij}] = 0. \quad (3.81)$$

Observe que a Eq. (3.81) pode ser então expandida como uma equação algébrica:

$$\lambda^3 + P\lambda^2 + Q\lambda + R = 0. \quad (3.82)$$

Assim, o primeiro, segundo e terceiro invariantes do tensor A_{ij} são dados, respectivamente, pelas seguintes equações:

$$P = -A_{ii}, \quad (3.83)$$

$$Q = \frac{1}{2} (P^2 - A_{ij}A_{ji}), \quad (3.84)$$

$$R = \det [A_{ij}] = \frac{1}{3} (-P^3 + 3PQ - A_{ij}A_{jk}A_{ki}). \quad (3.85)$$

A teoria da álgebra garante que existem três conjuntos de soluções possíveis para a Eq. (3.81), a saber: 1) todos os valores de λ são reais e distintos; 2) todos os valores de λ são reais, e pelo menos dois deles são iguais; 3) um dos valores de λ é real, enquanto os outros dois são raízes complexas conjugadas. Os valores de P, Q e R determinam em qual destas categorias as raízes λ se encontrarão. Por esta razão, é possível traçar uma superfície no espaço (P, Q, R) que separe as equações características que possuem somente raízes reais daquelas que possuem um par de raízes complexas e uma raiz real. A equação desta curva, descrita por Chong, Perry e Cantwell (1990), é dada por:

$$27R^2 + (4P^3 - 18PQ)R + (4Q^3 - P^2Q^2) = D. \quad (3.86)$$

Um estudo detalhado dessa superfície e do espaço (P, Q, R) pode ser encontrado em Chong, Perry e Cantwell (1990) e em Sondergaard (1996).

No caso de escoamentos incompressíveis, o primeiro invariante, P , é identicamente nulo, tendo em vista que, pela equação da continuidade, $A_{ii} = \partial u_i / \partial x_i = 0$. Além disso, as Eqs. (3.84) e (3.85) se simplificam:

$$Q = -\frac{1}{2} (A_{ij}A_{ji}) = -\frac{1}{2} (S_{ij}S_{ji} + W_{ij}W_{ji}) \quad (3.87)$$

$$R = -\frac{1}{3} (A_{ij}A_{jk}A_{ki}) = -\frac{1}{3} (S_{ij}S_{jk}S_{ki} + 3W_{ij}W_{jk}S_{ki}) \quad (3.88)$$

Assim, a superfície que separa as equações características com soluções imaginárias e reais, Eq. (3.86), se simplifica para a curva:

$$27R^2 + 4Q^3 = D \quad (3.89)$$

Portanto, conclui-se, que para um escoamento incompressível, é possível mapear completamente o comportamento topológico das estruturas do escoamento no espaço (Q, R) . A Fig. 14 ilustra a curva da Eq. (3.89), mostrando todas as topologias possíveis para o escoamento incompressível. Para os pares (Q, R) localizados abaixo desta curva, os autovalores de A_{ij} são reais; neste caso, os movimentos causam predominantemente a deformação. Na região à esquerda do eixo $R = 0$, o escoamento local apresenta partículas de fluido se movendo *para fora* da origem (ou, alternativamente, do referencial que se deseja utilizar) em duas das três direções principais; na direção oposta, o fluido se move *para dentro* da origem. À direita do eixo $R = 0$, em duas das três direções principais localizam-se as partículas que se movimentam *para dentro* da origem, enquanto na direção restante, o fluido se move *para fora*.

Os valores acima da curva da Eq. (3.89) delimitam a região do espaço (Q, R) onde dois dos autovalores de A_{ij} são complexos, sendo o escoamento local dominado por movimentos rotativos. Ainda nesta região, particularmente à esquerda do eixo $R = 0$, o escoamento local possui partículas em movimento em espiral *para fora* do ponto de referência (denominado foco), em um dado plano (duas das três regiões principais), enquanto na terceira direção, o movimento tende a se afastar do foco, tendendo a esticá-lo. Analogamente, à direita do eixo $R = 0$, tem-se movimento em espiral *para dentro* do foco, juntamente com um movimento que tende a se aproximar do referido ponto.

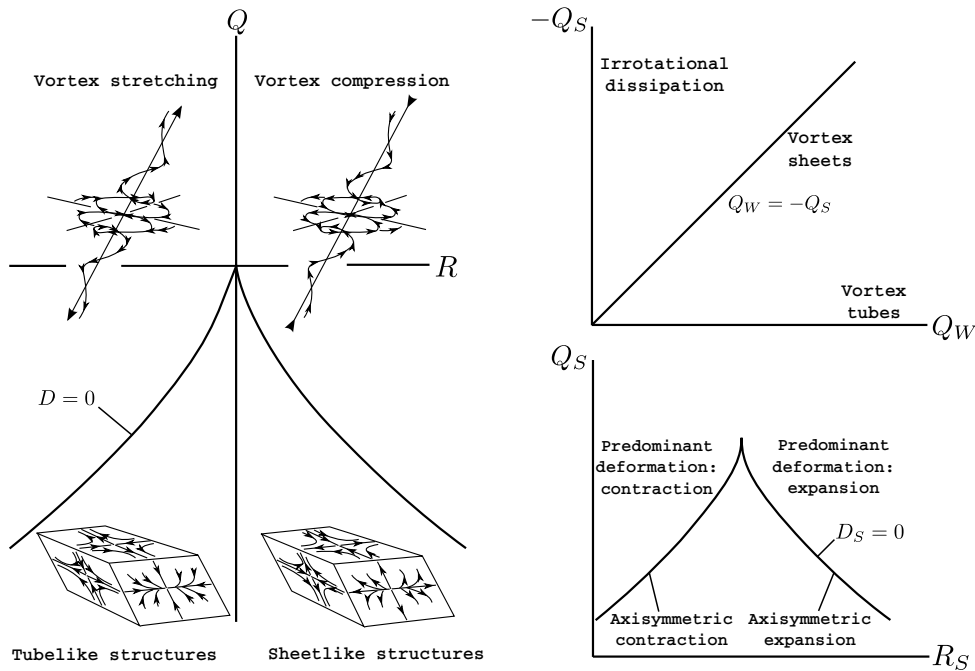


Figura 14 – Espaços de invariância (Q, R) , $(-Q_S, Q_W)$ e (Q_S, R_S) para escoamentos incompressíveis (SONDERGAARD, 1996; SILVA; PEREIRA, 2008).

Com base nesta análise, conclui-se que na região onde Q assume valores positivos (região acima do eixo $Q = 0$), a taxa de rotação domina a taxa de deformação. Baseado nisso, Hunt, Wray e Moin (1988) definem um vórtice como uma região do fluido onde o segundo invariante Q é maior do que zero. Note que, nesta análise, os invariantes do tensor gradiente de velocidade são calculados igualmente por qualquer referencial inercial, obedecendo portanto a invariância galileana proposta por Jeong e Hussain (1995).

Em simulações onde se utilizam malhas muito refinadas, uma análise no espaço (Q, R) pode ser vantajosa, frente a outros métodos de visualização, tais como a utilização de isocontornos e isosuperfícies. Ao traçar, por exemplo, as isosuperfícies de Q no espaço, tería-se uma boa representação das estruturas coerentes do escoamento. Porém, quando se deseja verificar o comportamento das pequenas escalas, a utilização de mapas de invariância pode ser de grande utilidade, tendo em vista que tais estruturas tendem a se localizar em regiões distantes da origem do espaço de invariância, podendo assim ser facilmente distinguidas das demais.

O procedimento para a criação dos mapas de invariância consiste em se armazenar os valores de Q e R em cada ponto de interesse, e plotá-los como uma distribuição de probabilidade conjunta (SILVA; PEREIRA, 2008) ou como gráficos de dispersão (SORIA et al., 1994) no plano (Q, R) . Tais resultados, por possuírem invariância galileana, podem ser estudadas sob a ótica de qualquer referencial, o que pode facilitar a comparação com outros trabalhos encontrados na literatura.

Sondergaard (1996) mostra ainda que, além dos invariantes Q e R , outras quantidades podem ser de grande interesse para uma análise completa dos escoamentos turbulentos incompressíveis. De maneira análoga à decomposição do tensor gradiente de velocidade na Eq.(3.79), pode-se escrever o segundo invariante Q como duas quantidades, Q_s e Q_w :

$$Q = -\frac{1}{2} (S_{ij}S_{ji} + W_{ij}W_{ji}) = Q_s + Q_w. \quad (3.90)$$

Tem-se, portanto, as seguintes relações:

$$Q_s = -\frac{1}{2} S_{ij}S_{ji}, \quad (3.91)$$

$$Q_w = -\frac{1}{2} W_{ij}W_{ji}, \quad (3.92)$$

sendo Q_s o segundo invariante do tensor taxa de deformação S_{ij} , e Q_w o segundo invariante do tensor taxa de rotação W_{ij} . Sondergaard (1996) explica que esta decomposição auxilia no estudo da importância relativa da taxa de deformação frente à taxa de rotação. Observa-se ainda que a taxa de rotação é proporcional à propriedade denominada *enstrofia* ($2Q_w$). Assim, gráficos de (Q_s, Q_w) permitem identificar em quais regiões a densidade de enstrofia prevalece sobre a taxa de deformação. Note que, sempre nas regiões onde $Q > 0$, tem-se que a densidade de enstrofia prevalece sobre a taxa de deformação ($Q_w > Q_s$), enquanto nas regiões onde $Q < 0$, prevalece a situação oposta ($Q_w < Q_s$). Assim, tem-se sempre que $Q_w < 0$ e $Q_s < 0$.

Do mesmo modo, procede-se com a decomposição do terceiro invariante R do tensor gradiente de velocidade em duas quantidades, R_s e σ :

$$R = -\frac{1}{3} (S_{ij}S_{jk}S_{ki} + 3W_{ij}W_{jk}S_{ki}) = R_s + \sigma, \quad (3.93)$$

onde:

$$R_s = -\frac{1}{3} (S_{ij}S_{jk}S_{ki}), \quad (3.94)$$

$$\sigma = W_{ij}W_{jk}S_{ki}. \quad (3.95)$$

A quantidade R_s denota o terceiro invariante do tensor taxa de deformação S_{ij} , e σ denota o estiramento da vorticidade. Tais quantidades permitem correlacionar, por exemplo, o estiramento de vórtices com a densidade de enstrofia.

A fim de permitir a comparação dos resultados obtidos para esteiras planas com a escassa literatura de esteiras planas em desenvolvimento temporal, o presente trabalho utilizará as visualizações das isosuperfícies de Q e Q_w como resultados qualitativos, assim como os mapas de invariância (Q, R) , (R_s, Q_s) e $(-Q_s, Q_w)$ como ferramentas de análise quantitativa.

4 Modelagem numérica

Após a apresentação de um modelo matemático no espaço de Fourier para escoamentos incompressíveis, Eq. (3.51), fica evidente a impossibilidade de se resolver o problema analiticamente. Recorre-se, então, aos métodos numéricos e, para isso, é preciso que se escolha um método de discretização adequado; ou seja, um método de aproximação de equações diferenciais, que a transforme em um sistema de equações algébricas em um dado conjunto de nós de colocação no espaço e no tempo. Existem muitas abordagens disponíveis de discretização; os métodos mais utilizados são: os métodos de diferenças finitas, volumes finitos, elementos finitos e os métodos de resíduos ponderados.

O método utilizado no presente trabalho é um caso particular do método dos resíduos ponderados, denominado *método pseudoespectral de Fourier*. Neste método, as funções e as derivadas são aproximadas por somas truncadas de séries de Fourier. As propriedades dessas séries auxiliam na solução das equações do problema, do ponto de vista de redução do nível de esforço computacional, uma vez que derivadas se tornam produtos de números complexos, sendo estes últimos facilmente calculados por um computador digital, em contraponto a se buscar uma maneira de avaliar derivadas tendo em posse somente os valores discretos das funções envolvidas, conforme realizado em outros métodos de discretização.

A seção 4.1 exhibe os métodos de discretização temporal existentes, explorando particularmente os métodos de Runge-Kutta, que foram utilizados no presente trabalho. Na seção 4.2, esses métodos são aplicados para o caso de um escoamento incompressível, tomando por base os modelos matemáticos tratados previamente na seção 3.3.1. Por fim, a seção 4.3 apresenta o método de análise de erros que foi utilizado para fazer a verificação dos erros dos algoritmos do presente trabalho, conhecida como método das soluções manufaturadas.

4.1 Métodos de discretização temporal

Este tópico exhibe as metodologias de discretização que foram utilizadas para a integração temporal das equações de Navier-Stokes para escoamentos incompressíveis no espaço de Fourier. São explicados em detalhes o método de passo simples de Euler, bem como a família de métodos de passos múltiplos conhecidos como métodos de Runge-Kutta.

4.1.1 Método de Euler

Dentre os diversos métodos de integração de problemas de valor inicial (PVI's) disponíveis, destaca-se, como o método explícito mais simples existente, o *método de Euler*. Ele permite a integração numérica de equações diferenciais ordinárias (EDO's) de maneira explícita, ou seja, sem a necessidade de se resolver sistemas lineares. O método de Euler se caracteriza por ser um método de primeira ordem, de passo único, e será utilizado aqui como integrador para a derivada

temporal da Eq. (3.51). A característica central do método de Euler consiste em propagar a solução de um PVI, através de uma sequência de pequenos níveis de tempo. Em cada nível de tempo, a taxa de mudança da solução seria tratada como uma constante.

Para melhor ilustrar este método, considere um PVI genérico, descrito como:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(t, y(t)), \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \quad (4.1)$$

sendo y_0 o valor inicial do problema. Deseja-se aproximar uma solução para $y(t)$. Para tal, faz-se uso da expansão em *série de Taylor* da função y na vizinhança de t_0 , truncando-a a partir dos termos de segunda ordem (erro local resultante proporcional à Δt):

$$y(t_0 + \Delta t) = y(t_0) + \Delta t \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=t_0} + O(\Delta t). \quad (4.2)$$

Isolando o termo derivada da Eq. (4.2), e desconsiderando os erros de truncamento $O(\Delta t)$:

$$\left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=t_0} \approx \frac{y(t_0 + \Delta t) - y(t_0)}{\Delta t}. \quad (4.3)$$

Para fins de simplificação de notação, denota-se os termos $y(t_0 + \Delta t) = y^{n+1}$ e $y(t_0) = y^n$. Assim, tem-se:

$$y^{n+1} \approx y^n + \Delta t f(t^n, y^n) \quad (4.4)$$

A essa aproximação, dá-se o nome de *método de Euler explícito*. Observe que, em posse de um valor inicial para y^n , pode-se marchar no tempo e assim determinar valores aproximados de y^{n+1} para a função que se deseja integrar, tendo em mente que o erro local associado a tal aproximação é correspondente à magnitude dos termos truncados $O(\Delta t^2)$.

4.1.2 Métodos de Runge-Kutta

Em contraste com métodos de múltiplos estágios, tal como os *métodos de Adams-Bashforth*, que utilizam diferentes níveis temporais para aproximar a solução desejada, os *métodos de Runge-Kutta* são ditos métodos de estágio único; entretanto, estes apresentam múltiplos passos por nível de tempo. Os métodos de Runge-Kutta apresentam a vantagem de serem uma classe geral de integradores para problemas de valor inicial, sendo considerados como um dos mais populares *solvers* de equações diferenciais ordinárias. Tais métodos foram estruturados por Carle Runge e Martin Kutta, por volta dos anos 1900, e vêm sendo amplamente revisados e modernizados desde a década de 1960 (BUTCHER, 1996).

Diferentemente das ideias de Euler, Runge tentou se basear na *regra do trapézio* e na *regra do ponto médio*, de modo a calcular mais do que uma única aproximação para a solução desejada em cada estágio de tempo, e posteriormente combiná-las, por meio de médias e ponderações.

Para ilustrar o funcionamento dos métodos de Runge-Kutta, considere novamente o PVI genérico, descrito pela Eq. (4.1). Suponhamos que agora se deseja construir um método de segunda ordem, e, ao invés de truncar a série nas derivadas de segunda ordem, tomemo-las em consideração, porém truncando a série à partir das derivadas de terceira ordem:

$$y(t_0 + \Delta t) = y(t_0) + \Delta t \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=t_0} + \frac{\Delta t^2}{2} \left. \frac{d^2 y}{dt^2} \right|_{t=t_0} + O(\Delta t^3). \quad (4.5)$$

A derivada de primeira ordem da Eq. (4.5) pode ser reescrita como o lado direito da Eq. (4.1), e a derivada de segunda ordem pode ser obtida derivando a Eq. (4.1) utilizando da regra da cadeia:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dt} \right) = \frac{d}{dt} (f(t, y(t))) = \frac{\partial f(t, y(t))}{\partial t} + \frac{\partial f(t, y(t))}{\partial y} \frac{dy}{dt}. \quad (4.6)$$

Novamente, utilizando da Eq. (4.1), pode-se reescrever a Eq. (4.6) como sendo:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{\partial f(t, y(t))}{\partial t} + \frac{\partial f(t, y(t))}{\partial y} f(t, y(t)). \quad (4.7)$$

Pode-se então reescrever a série de Taylor da Eq.(4.5), substituindo as derivadas como se segue. As notações de dependência da função f e y são suprimidas para maior clareza nas manipulações.

$$y(t_0 + \Delta t) = y(t_0) + \Delta t f(t_0, y_0) + \frac{\Delta t^2}{2} \left[\left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{t=t_0} + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{t=t_0} f(t_0, y_0) \right] + O(\Delta t^3). \quad (4.8)$$

Manipulando os termos convenientemente, tem-se:

$$y(t_0 + \Delta t) = y(t_0) + \frac{\Delta t}{2} f(t_0, y_0) + \frac{\Delta t}{2} \left[f(t_0, y_0) + \Delta t \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{t=t_0} + \Delta t \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{t=t_0} f(t_0, y_0) \right] + O(\Delta t^3). \quad (4.9)$$

Sabendo-se que a expansão em série de Taylor da função f em várias variáveis pode ser escrita como:

$$f(t_0 + \Delta t, y_0 + \Delta y) = f(t_0, y_0) + \Delta t \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{t=t_0} + \Delta t \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{t=t_0} f(t_0, y_0) + O(\Delta t^2), \quad (4.10)$$

podendo-se então substituir a Eq. (4.9) na Eq. (4.10). Assim, obtém-se:

$$y(t_0 + \Delta t) = y(t_0) + \frac{\Delta t}{2} f(t_0, y_0) + \frac{\Delta t}{2} f(t_0 + \Delta t, y_0 + \Delta y) + O(\Delta t^3), \quad (4.11)$$

ou, em notação simplificada:

$$y^{n+1} \approx y^n + \frac{\Delta t}{2} (K_1 + K_2), \quad (4.12)$$

onde $K_1 = f(t^n, y^n)$ e $K_2 = f(t^{n+1}, y^n + \Delta t K_1)$. Este método é conhecido como *método de Runge-Kutta de segunda ordem clássico*, ou *método de Heun*. Os coeficientes K_1 e K_2 são conhecidos como *passos* do método, sendo avaliados dentro de um mesmo estágio temporal. Estes podem ser vistos como estimativas para a taxa de variação da solução no tempo. Uma vez determinadas tais estimativas, faz-se então uma média dos valores de K_1 e K_2 , como é possível observar na Eq. (4.12).

Uma vez compreendido que os coeficientes K_1 e K_2 são combinados linearmente de modo a prever uma taxa de variação para a solução do PVI, é plausível considerar que existem, além da escolha particular da ponderação média aritmética do método de Heun, outras ponderações possíveis. Portanto, pode-se escrever a *família de métodos Runge-Kutta de segunda ordem* como se segue:

$$y^{n+1} \approx y^n + \Delta t (b_1 \tilde{K}_1 + b_2 \tilde{K}_2), \quad (4.13)$$

com $\tilde{K}_1 = f(t, y)$ e $\tilde{K}_2 = f(t + c_2 \Delta t, y + a_{21} \Delta t \tilde{K}_1)$, onde a_{ij} , b_i e c_i são coeficientes de ponderação. Os métodos explícitos de Runge-Kutta se caracterizam por formarem matrizes triangulares inferiores a_{ij} , ou seja, $a_{ij} = 0$ se $j \geq i$. Os coeficientes c_i e a_{ij} são conectados pela condição $c_i = \sum_j a_{ij}$. Substituindo estas condições na Eq. (4.13), chega-se a um sistema de equações não-lineares, e assim, determina-se b_i , c_i e a_{ij} . Note que, escolhendo $b_1 = 1$ e $b_2 = 0$ na Eq. (4.13), tem-se como resultado o método de Euler, descrito na seção 4.1.1. Por esta razão, considera-se o método de Euler como um caso particular dos métodos de Runge-Kutta.

Seguindo a mesma lógica dos métodos de Runge-Kutta de segunda ordem, pode-se expandir o método para ordens superiores, utilizando maior número de coeficientes K_i . A expressão geral dos métodos de Runge-Kutta é da seguinte forma:

$$y^{n+1} \approx y^n + \Delta t \sum_{i=1}^m b_i K_i, \quad (4.14)$$

onde $K_1 = f(t^n, y^n)$, $K_2 = f(t^n + c_2 \Delta t, y^n + a_{21} \Delta t K_1)$, ..., $K_i = f(t^n + c_m \Delta t, \Delta t \sum_j a_{mj} K_j)$. Note que a determinação dos coeficientes K_i pode se tornar complicada, uma vez que envolve a solução de equações não-lineares.

Finalmente, em posse da expressão geral dos métodos de Runge-Kutta, pode-se determinar um método particular de quarta ordem, conhecido como *método de Runge-Kutta clássico*:

$$y^{n+1} \approx y^n + \Delta t \left(\frac{K_1}{6} + \frac{K_2}{3} + \frac{K_3}{3} + \frac{K_4}{6} \right), \quad (4.15)$$

para $K_1 = f(t^n, y^n)$, $K_2 = f(t^n + \Delta t/2, y^n + K_1 \Delta t/2)$, $K_3 = f(t^n + \Delta t/2, y^n + K_2 \Delta t/2)$ e $K_4 = f(t^{n+1}, y^n + K_3 \Delta t)$. Observe que tal método, apesar de apresentar quarta ordem, isto é, erros globais da ordem de $O(\Delta t^4)$, exige a avaliação da função f quatro vezes em cada estágio de tempo, sendo portanto um método de quatro passos.

Apesar de apresentar alta ordem, o método de Runge-Kutta clássico apresenta problemas de estabilidade a longo prazo. Estudos mostraram que esse método, quando utilizado para integrar longos períodos de tempo, tende a apresentar acúmulos de erros dispersivos e dissipativos. Visando obter um maior controle sobre tais acúmulos, Berland, Bogey e Bailly (2006), e posteriormente Allampalli e Hixon (2009) desenvolveram os métodos RK46 e HALE-RK, respectivamente, que controlam esses erros, aumentando a estabilidade do método e, ao mesmo tempo, mantém as características de alta ordem do método.

4.2 Modelagem numérica para escoamentos incompressíveis

Retomemos à Eq. (3.51). Para o caso de escoamentos incompressíveis, sob a forma conservativa, e considerando tratamento pseudo-espectral do termo não-linear, tem-se:

$$\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial t} + \nu k^2 \hat{u}_i = \wp_{ij} \left[\hat{g}_i - \frac{1}{2} \left(ik_j \widehat{u_i u_j} + \widehat{u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} \right) \right]. \quad (4.16)$$

Note que a equação (4.16) só possui uma única derivada parcial remanescente da equação original no espaço físico: a derivada temporal. Esta equação, do ponto de vista matemático, ainda deve ser vista como uma equação integro-diferencial parcial; contudo, do ponto de vista numérico, ela pode ser encarada como uma equação diferencial ordinária, de primeira ordem, e portanto pode ser resolvida utilizando-se os diversos métodos disponíveis no cálculo numérico. Assim, por exemplo, utilizando o método de Euler, tem-se:

$$\hat{u}_i^{n+1} = \hat{u}_i^n + \Delta t \left(-\wp_{ik} [ik_j \widehat{u_k u_j}]^n - \nu k^2 \hat{u}_i^n \right). \quad (4.17)$$

Observe que, conhecido o valor inicial de $\hat{u}_i^n$, o método pode marchar para o próximo nível de tempo, $n + 1$, e assim é possível resolver explicitamente o campo de velocidades.

A seguinte equação geral, Eq. (4.18), permite a resolução do campo de velocidades utilizando os métodos de Euler e Runge-Kutta de quarta ordem clássicos. As tabelas fornecem os parâmetros complementares, necessários para sua utilização:

$$\hat{u}_i^{n+1} = \hat{u}_i^n + \Delta t \left(\sum_m b_m K_m \right), \quad (4.18)$$

onde o valor de K_m é dado por:

$$K_m = \left[-\wp_{ik} [ik_j \widehat{u_k u_j}] - \nu k_j^2 \hat{u}_i \right]_{v=v+a_m K_{m-1} \Delta t}^{n+c_m}. \quad (4.19)$$

O processo iterativo pode agora se deslocar para o próximo passo de tempo. Note que é possível utilizar um método de integração numérica diferente dos métodos clássicos, como por

Tabela 1 – Valores dos coeficientes de Runge-Kutta K_m

	K_1	K_2	K_3	K_4
Euler	$a_m = 0; c_m = 0$	-	-	-
RK2	$a_m = 0; c_m = 0$	$a_m = 1; c_m = 1$	-	-
RK4	$a_m = 0; c_m = 0$	$a_m = 1/2; c_m = 1/2$	$a_m = 1/2; c_m = 1/2$	$a_m = 1; c_m = 1$

Tabela 2 – Valores dos coeficientes de ponderação b_m

	b_1	b_2	b_3	b_4
Euler	1	-	-	-
RK2	1/2	1/2	-	-
RK4	1/6	1/3	1/3	1/6

exemplo adotar a utilização de um método de Runge-Kutta com controle de erros dispersivos e dissipativos, tais como os métodos HALE-RK e RK46. Nestes casos, adota-se o seguinte algoritmo:

$$\hat{u}_i^{n+1} = \hat{u}_i^n + \beta^n K_i^n, \quad (4.20)$$

sendo o valor de K_i^n dado por:

$$K_i^n = \alpha^n K_i^{n-1} + \Delta t \left[-\wp_{ik} [ik_j \widehat{u_k u_j}] - \nu k_j^2 \hat{u}_i \right]^n \quad (4.21)$$

Os valores das constantes α^n e β^n são dados na tabela abaixo. Note que, diferente do método RK4 clássico, o método RK46 apresenta seis passos de tempo. O aumento dos passos concede a estabilidade necessária ao método, o que diminui os erros dispersivos e dissipativos.

Tabela 3 – Coeficientes α^n e β^n do esquema RK46 (ALLAMPALLI; HIXON, 2009).

n	α	β
1	0.0	0.122
2	-0.691750960670	0.477263056358
3	-1.727127405211	0.381941220320
4	-0.694890150986	0.447757195744
5	-1.039942756197	0.498614246822
6	-1.531977447611	0.1866485708465

4.3 Análise dos erros

Esta seção trata da verificação dos erros dos métodos numéricos utilizados ao longo deste trabalho. Dentre os diversos métodos de verificação existentes, optou-se pela utilização do *método das soluções manufaturadas* (MMS), para a validação do código utilizado no presente trabalho, *IMERSPEC3DP*.

Uma solução manufaturada é uma solução exata de um dado conjunto de EDP's, construída resolvendo-se as equações de trás para frente (SALARI; KNUPP, 2000). Por exemplo, considere a resolução da seguinte EDP:

$$P[u] = fm, \quad (4.22)$$

onde P é um operador diferencial, u é a solução da equação, e f é um termo-fonte. No método das soluções manufaturadas, escolhe-se primeiramente a solução u e então aplica-se o operador P visando encontrar o termo-fonte f . Procede-se assim com a verificação, tendo em mãos a solução u , analítica, comparando-a com a solução numérica.

A grande vantagem do método *MMS* reside na liberdade de escolha da função u , sem a necessidade de imposição de sistemas de coordenadas especiais ou condições de contorno particulares. Entretanto, aconselha-se a escolha de funções analíticas e suaves, tais como funções polinomiais, trigonométricas ou exponenciais, visando sua correta computação. Deve-se, portanto, evitar a utilização de funções que não são possíveis de serem avaliadas numericamente, tais como séries infinitas (ROACHE, 2001). Adicionalmente, deve-se ter em mente que a suavidade da solução é essencial para garantir a ordem de acurácia adequada. Destacam-se ainda outros pontos fundamentais para a escolha da solução manufaturada: ela deve possuir um número suficiente de derivadas não-triviais e deve ser definida em um subconjunto do espaço Euclidiano, garantindo a flexibilidade de domínio.

Observe que não há exigências matemáticas imediatas quanto à existência de realismo físico para as soluções manufaturadas. Além do fato da busca de uma solução manufaturada que represente a física do problema ser complexa - tão complexa a ponto de não ser justificável, uma vez que se pudéssemos resolver problemas desta forma, poderíamos simplesmente encontrar a solução analítica do problema proposto diretamente, e nenhuma simulação computacional seria necessária - o código computacional não é capaz de distinguir entre um problema fisicamente realístico e um problema não-realístico, uma vez que ele somente realiza cálculos com o objetivo de resolver um sistema de equações.

Uma vez realizados os cálculos da solução manufaturada e da solução numérica, pode-se então proceder com a avaliação dos erros de discretização do método utilizado para resolver o sistema de EDP's. A solução manufaturada terá caráter de solução analítica, e portanto, pode-se avaliá-la nos mesmos nós (temporais e espaciais) onde foram avaliadas as soluções numéricas. Uma forma de se estimar a ordem de grandeza dos erros é através do cálculo do erro global normalizado *RMS* (ou norma L_2). Assim, para uma dada função manufaturada f_m , e para uma solução numérica f_n , tem-se:

$$L_2 = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_j (f_{m,j} - f_{n,j})^2}, \quad (4.23)$$

sendo N o número total de nós do domínio discreto avaliado. Assim, utilizando o método *MMS*, é possível avaliar as normas L_2 para as diferentes variáveis nos casos do escoamento incompressível

aqui descrito pela Eq. (4.16). Escolhe-se, assim, as funções suaves que se deseja utilizar e, em posse de tais funções, é possível recorrer ao método *MMS* e calcular os respectivos termos-fonte das equações de Navier-Stokes. Mais detalhes sobre a etapa de verificação serão mostrados no Capítulo 5

5 Verificação

Neste capítulo, são mostrados os resultados da verificação do código *IMERSPEC3DP*, realizada utilizando o método *MMS*. Na seção 5.1, descreve-se brevemente as soluções manufaturadas que foram utilizadas, bem como os parâmetros utilizados nas simulações. A seção 5.2 mostra os resultados quantitativos obtidos, evidenciando a evolução temporal dos campos de $|\omega|$ e Q . A seção 5.3 trata da verificação da acurácia do código *IMERSPEC3DP*, realizada utilizando-se os resíduos da equação da continuidade e a norma $L2$ das variáveis primitivas. Por fim, a seção 5.4 é dedicada a verificar a eficiência da paralelização presente no código, testando-se um problema com nível de refinamento de malha constante, utilizando-se 1, 2, 4 e 8 processadores.

5.1 Verificação do código *IMERSPEC3DP*

Inicialmente, foram realizadas simulações para a verificação do código *IMERSPEC3DP*. Tal verificação possui grande importância, por se tratar de um código *in-house*, que vem sendo continuamente desenvolvido por pesquisadores do MFLab. As simulações foram realizadas, e à partir delas, quantificou-se os erros utilizando-se o método *MMS*. Além disso, testou-se a *performance* da paralelização por decomposição do domínio implementada no código.

Conforme já abordado na seção 4.3, é possível se escolher quaisquer função para a verificação dos erros, desde que esta satisfaça condições de suavidade. Optou-se pela solução de um escoamento tridimensional incompressível, monofásico, imerso em um domínio periódico, e composto por funções trigonométricas, dadas pelas seguintes equações:

$$u = U_0 \sin\left(\frac{2\pi x}{L_x}\right) \cos\left(\frac{2\pi y}{L_y}\right) \cos\left(\frac{2\pi z}{L_z}\right) \cos(2\pi t), \quad (5.1)$$

$$v = U_0 \cos\left(\frac{2\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{2\pi y}{L_y}\right) \cos\left(\frac{2\pi z}{L_z}\right) \cos(2\pi t), \quad (5.2)$$

$$w = -2\pi U_0 \cos\left(\frac{2\pi x}{L_x}\right) \cos\left(\frac{2\pi y}{L_y}\right) \sin\left(\frac{2\pi z}{L_z}\right) \cos(2\pi t), \quad (5.3)$$

$$p = \sin\left(\frac{2\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{2\pi y}{L_y}\right) \sin\left(\frac{2\pi z}{L_z}\right) \cos(2\pi t), \quad (5.4)$$

onde L_x, L_y, L_z denotam as dimensões do domínio, e ν denota a viscosidade cinemática. Sob a ótica do método *MMS*, esses parâmetros são arbitrários. A multiplicação por $2\pi U_0$ na Eq. (5.3) desempenha um papel importante, garantindo que a componente w não se torne identicamente nula em uma ampla região do domínio periódico.

Foram realizadas quatro simulações, com nível de refinamento e parâmetros fixos, sendo alterados somente a quantidade de processadores utilizados, a fim de que se possa demonstrar a

eficiência da paralelização do código.

Tabela 4 – Valores dos parâmetros utilizados na etapa de verificação

Número de processos	1, 2, 4 e 8 processadores
Modos de Fourier, (nx, ny, nz)	$64 \times 64 \times 64$
Dimensões do domínio, (L_x, L_y, L_z)	$2\pi \times 2\pi \times 2\pi$
Tempo total de simulação	10[s]
CFL	0.1
Velocidade característica, U_0	1[m/s]
Número de Reynolds, Re_L	10
Método de integração temporal	RK46

5.2 Resultados quantitativos

Conforme já abordado, o código *IMERSPEC3DP* resolve as equações de Navier-Stokes utilizando o método pseudoespectral de Fourier. Verificou-se, utilizando o método das soluções manufaturadas, a acurácia do *solver* presente no código, para um problema com solução analítica dado pelas Eqs. (5.1) - (5.4).

A Fig. 15 mostra o refinamento de 64^3 nós de colocação utilizados. A escolha de tal nível de refinamento, considerado demasiadamente refinado para fins de verificação, foi escolhido de maneira proposital, visando demonstrar o quão árdua pode se tornar a tarefa de se realizar o processamento em serial de um problema tridimensional transiente, e, ao mesmo tempo, mostrar os ganhos significativos oriundos dos processamentos em paralelo.

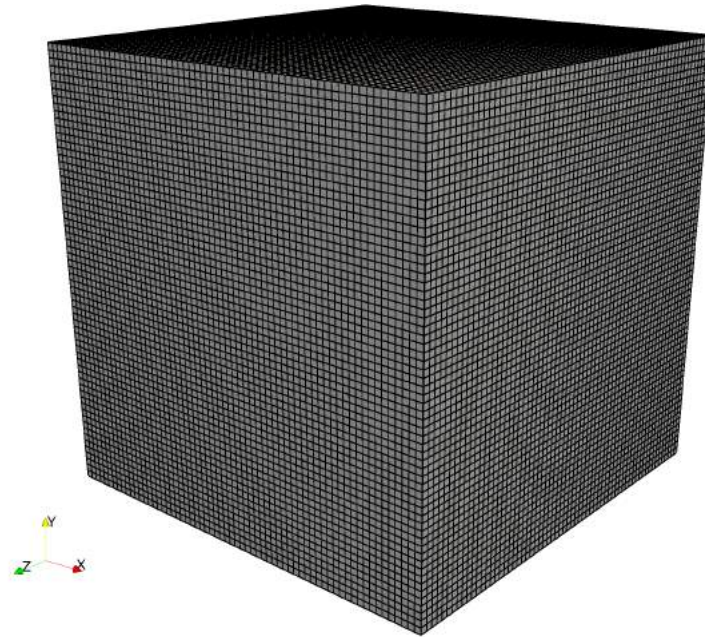


Figura 15 – Nós de colocação utilizados para verificação utilizando o *MMS*.

A Fig. 16 mostra o campo do módulo da vorticidade $|\omega|$, bem como seus isocontornos para uma região em corte normal à direção X , em seis diferentes instantes de tempo. O comportamento periódico do campo fica claro ao se comparar os instantes $t = 0, 1[s]$ (a) e $t = 0, 6[s]$ (f), tendo em vista que estes são visualmente similares, em termos de seus valores na escala de $|\omega|$ fornecida. Em virtude da composição das soluções manufaturadas, construídas utilizando-se somente funções trigonométricas, o campo de vorticidade, assim como todas as demais variáveis primitivas, permanecem em um comportamento periódico. Assim, não se observa quaisquer amortecimento ao longo do tempo. Tal resultado demonstra que o método pseudoespectral acumula de maneira ínfima os erros dispersivos e dissipativos, fortemente presentes em outros métodos de discretização.

A Fig. 17 ilustra o campo do segundo invariante do gradiente de velocidade, Q , em corte, com isocontornos de $|\omega|$, para os mesmos intervalos de tempo já comentados. Novamente, pode-se verificar a periodicidade do problema, ao se comparar os instantes $t = 0, 1[s]$ e $t = 0, 6[s]$.

As isosuperfícies do segundo invariante do tensor gradiente de velocidade Q são mostradas na Fig. 18. As superfícies são coloridas pela magnitude da vorticidade, a fim de ilustrar seus diferentes níveis. Conforme mostrado na seção 3.5.2, são definidos como vórtices as regiões onde $Q > 0$. Desta forma, buscou-se omitir as regiões onde Q assumia valores negativos, para que fosse possível a identificação das regiões vorticais.

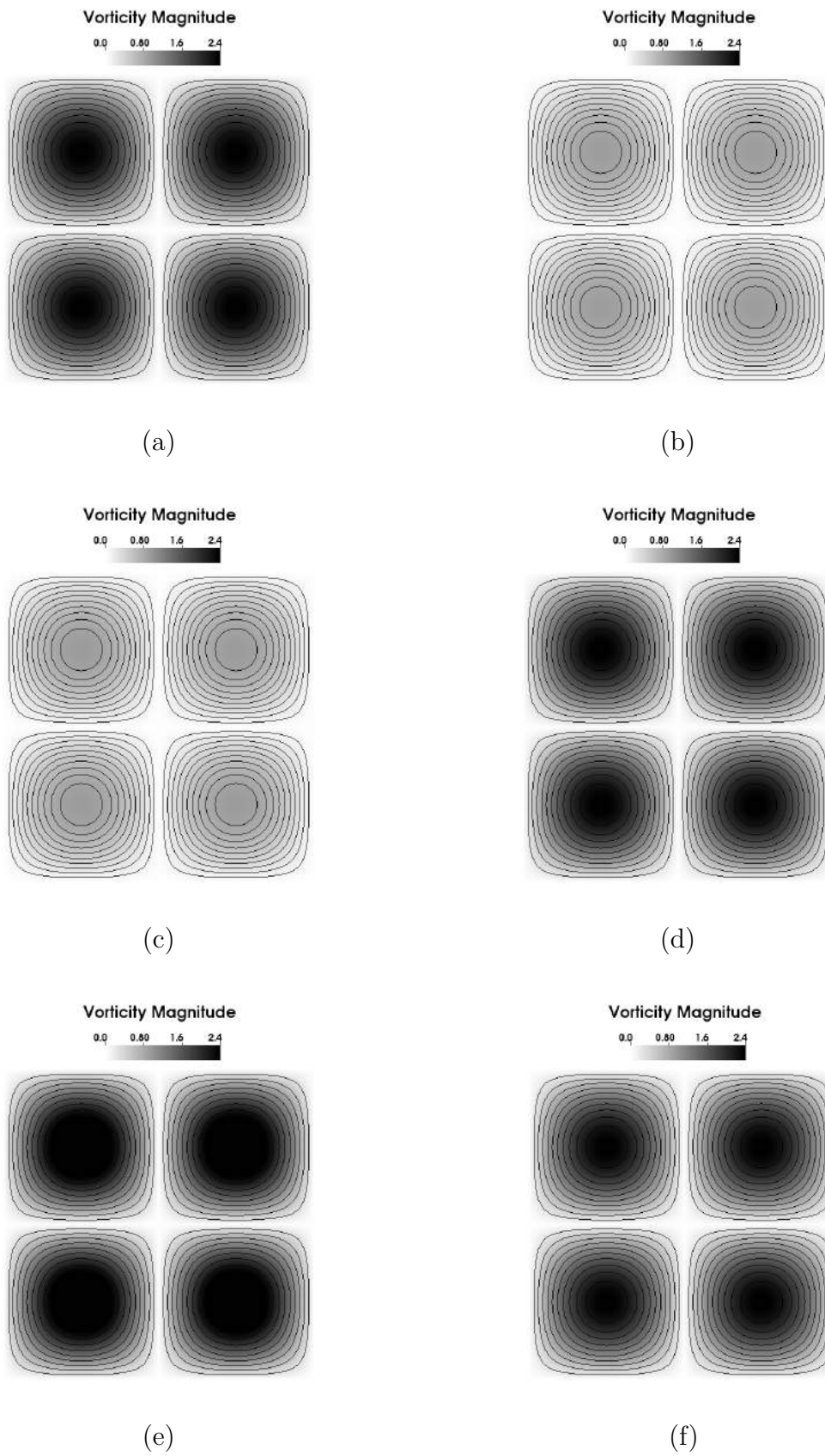


Figura 16 – Campo do módulo da vorticidade $|\omega|$ e seus isocontornos, para: (a) $t = 0, 1[s]$, (b) $t = 0, 2[s]$, (c) $t = 0, 3[s]$, (d) $t = 0, 4[s]$, (e) $t = 0, 5[s]$, (f) $t = 0, 6[s]$.

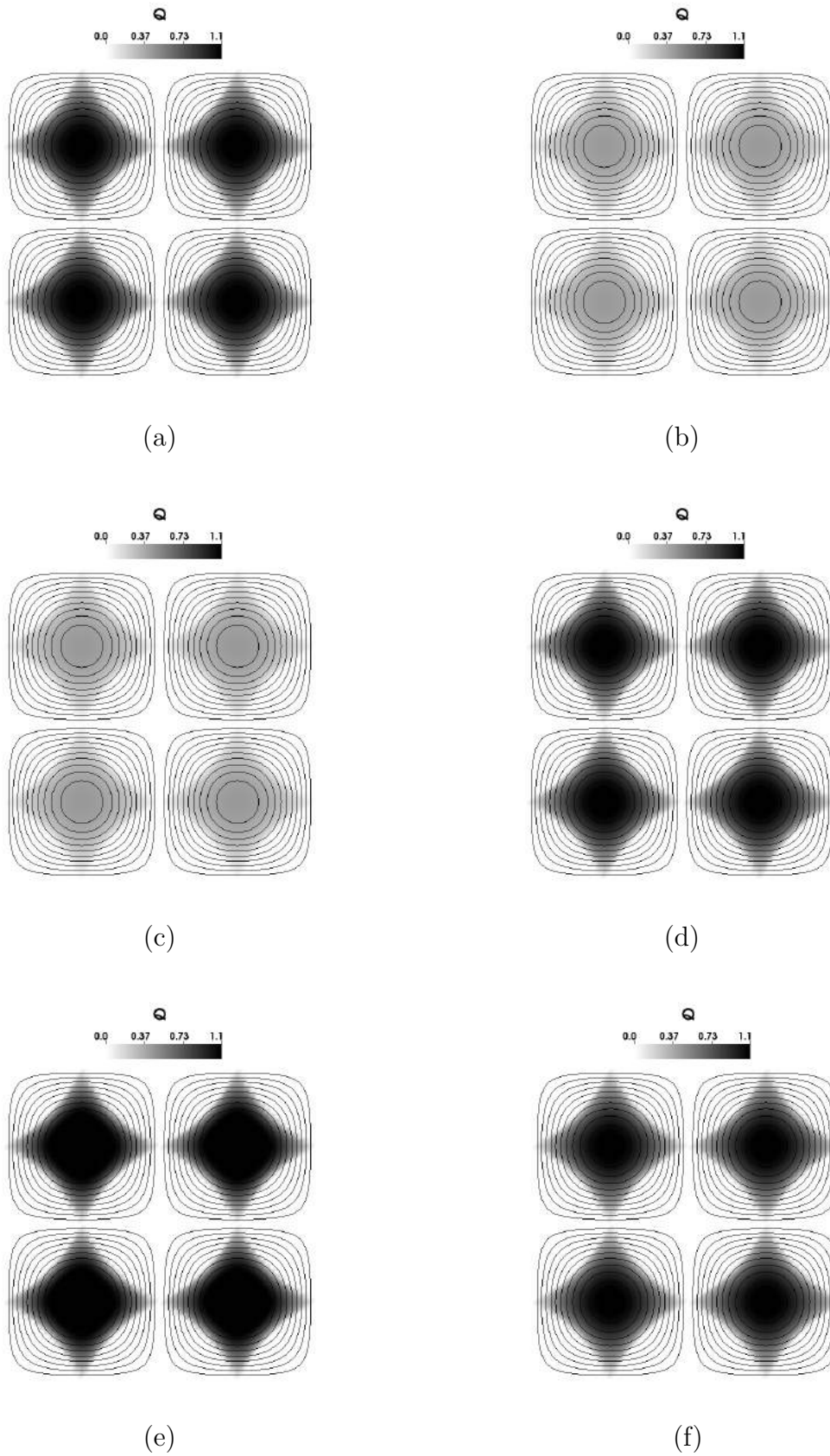


Figura 17 – Campo do segundo invariante do gradiente de velocidade, Q , e isocontornos da vorticidade, para: (a) $t = 0, 1[s]$, (b) $t = 0, 2[s]$, (c) $t = 0, 3[s]$, (d) $t = 0, 4[s]$, (e) $t = 0, 5[s]$, (f) $t = 0, 6[s]$.

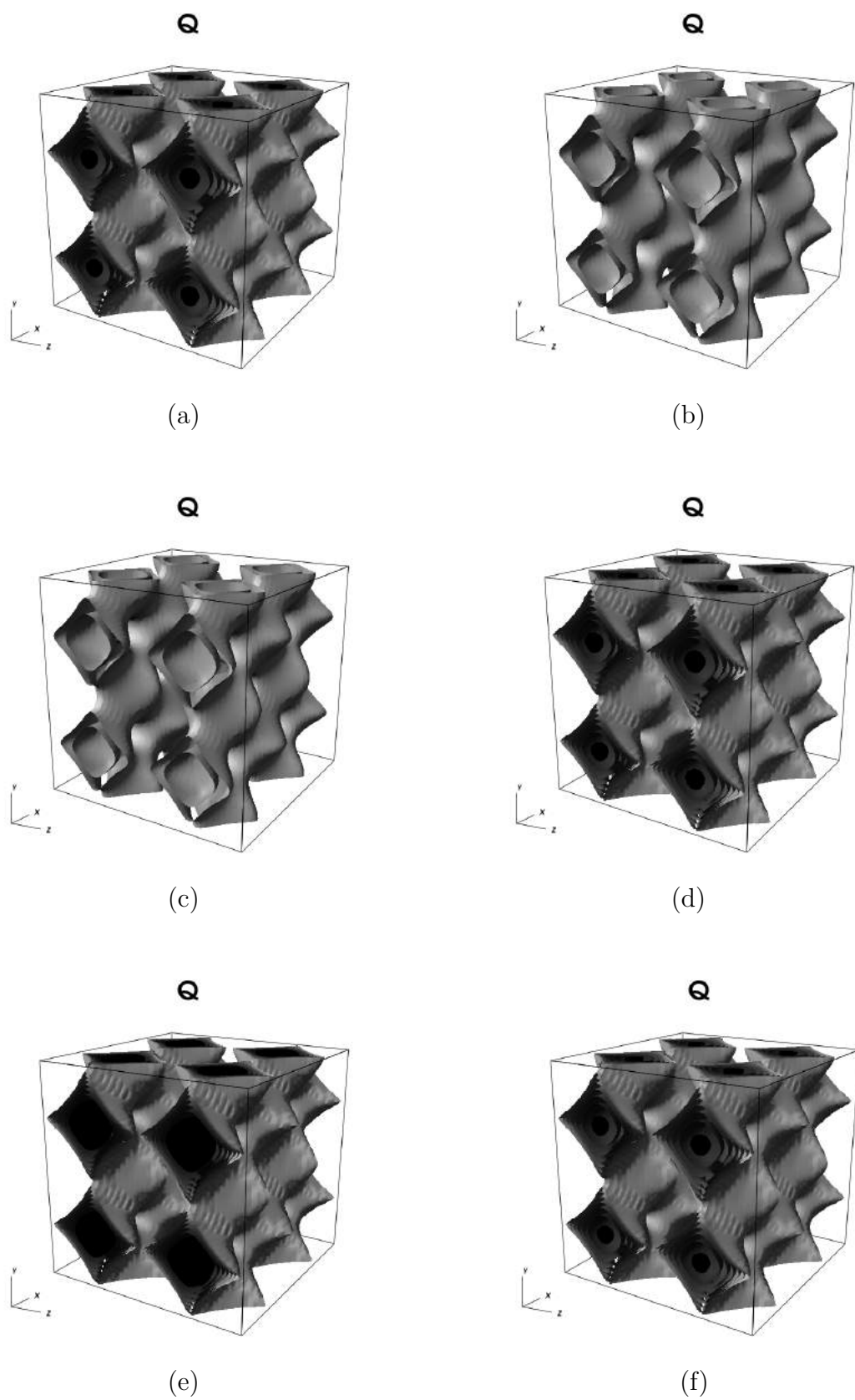


Figura 18 – Isosuperfícies do segundo invariante do gradiente de velocidade, Q , coloridos pela magnitude da vorticidade, para: (a) $t = 0,1[s]$, (b) $t = 0,2[s]$, (c) $t = 0,3[s]$, (d) $t = 0,4[s]$, (e) $t = 0,5[s]$, (f) $t = 0,6[s]$.

5.3 Verificação da acurácia

A verificação da acurácia do *solver* pseudoespectral do código *IMERSPEC3DP* foi realizada utilizando-se a verificação da ordem de grandeza de dois critérios: o resíduo da equação da continuidade e a norma $L2$. A Fig. 19 mostra o resíduo da equação da continuidade para a presente simulação. Para todos os casos, o resíduo obtido foi idêntico, mostrando que a paralelização não afetou quantitativamente os resultados. Isto garante a qualidade dos resultados gerados para as esteiras em desenvolvimento temporal do presente trabalho, tendo em vista que estas foram simuladas em paralelo. Nota-se ainda que a ordem de grandeza do resíduo ficou abaixo de 10^{-16} , podendo tais resíduos serem considerados como erros de arredondamento da máquina.

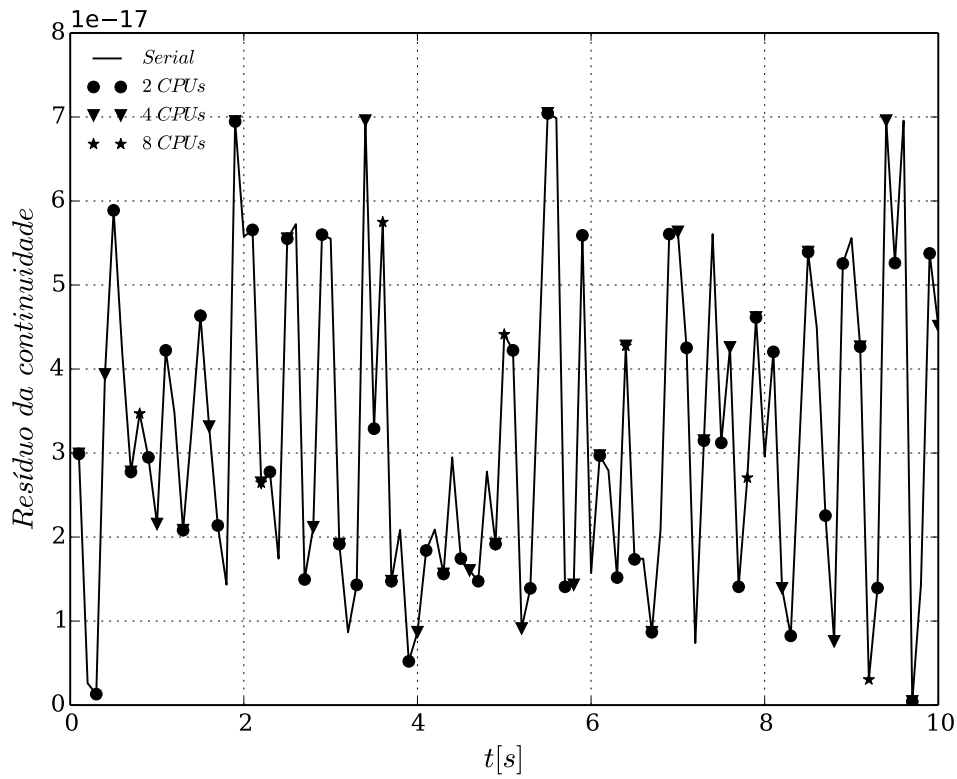


Figura 19 – Resíduo máximo da equação da continuidade *vs* tempo da simulação.

A Fig. 20 mostra a norma $L2$ para as três componentes da velocidade e do campo escalar de pressão, denotados na legenda por $L2(u)$, $L2(v)$, $L2(w)$, e $L2(p)$. Os símbolos destacados nos gráficos são meramente ilustrativos, e têm por objetivo facilitar a localização de cada curva. Conforme ocorrido com a conservação da massa, o resultado obtido garantiu erros na ordem da precisão de máquina, todos limitados superiormente por 7×10^{-15} .

5.4 Verificação da paralelização

Nesta seção, são mostrados os resultados referentes ao teste de paralelização do código *IMERSPEC3DP*. A importância da paralelização do código se justifica com o tipo de problema

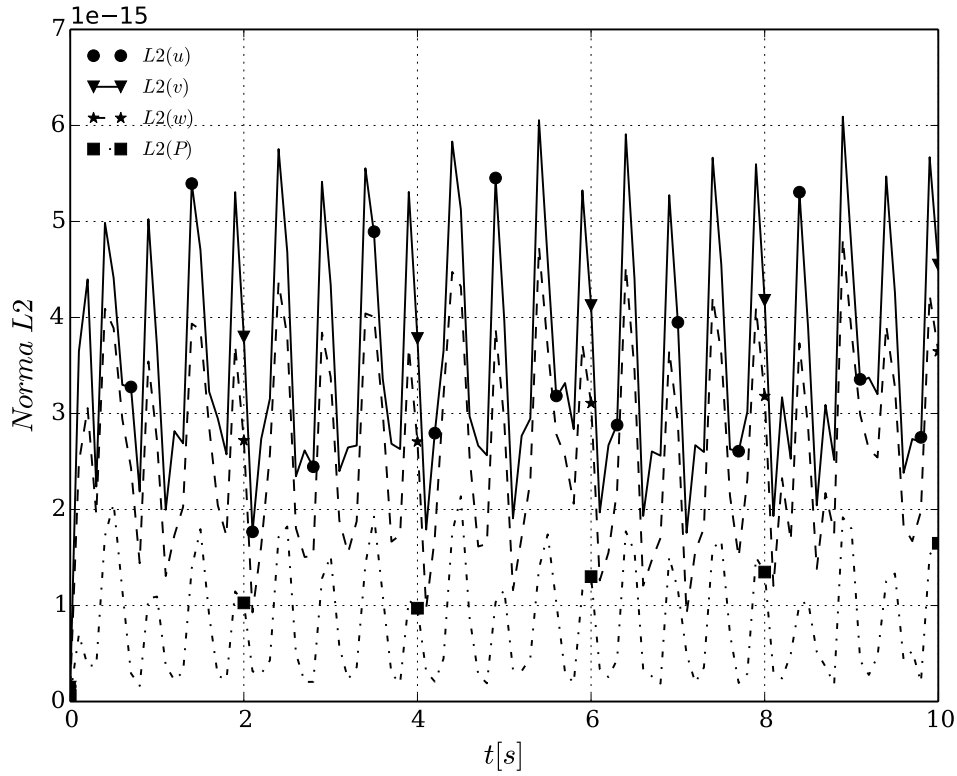


Figura 20 – Comparativos das normas L2 das componentes da velocidade e da pressão *vs* tempo da simulação.

que se deseja tratar. Moreira (2011) explica que alguns tipos de problemas não apresentam grandes dificuldades na paralelização, respondendo muito bem a esta técnica, quando comparadas com processamento serial. Tais tipos de problemas, são, em geral, aqueles onde não existe fluxo de informação entre os subdomínios computacionais. Um exemplo clássico deste tipo de problema consiste na avaliação de uma integral, ou no cálculo da área sobre uma curva. Note que, nessas situações, os resultados de cada processador são independentes, não havendo a necessidade de troca de informações durante os cálculos. O agrupamento das áreas só é realizado na última etapa, ao término dos processamentos individuais.

Em outros casos, quando se têm intensa troca de informações entre os subdomínios, o processamento em paralelo se torna mais difícil. Este é o caso do problema aqui estudado. Tal dificuldade pode ser explicada pelo fato de que os processadores não trabalharão de forma independente, já que para se obter a solução em um subdomínio, é necessário que se importe os resultados de outro subdomínio. Esta troca de informações entre os processadores constitui o maior limitante do processamento em paralelo.

Considerando as dificuldades de paralelização das equações da dinâmica dos fluidos, é necessário que se escolha corretamente uma dada topologia de decomposição do domínio do problema a ser estudado. Existem diversas topologias de decomposição dos problemas em subdomínios. A paralelização empregada no código *IMERSPEC3DP* utiliza a metodologia de decomposição do domínio com particionamento bidimensional em relação ao plano *YZ*. Tal paralelização busca a distribuição da carga de trabalho de maneira mais igualitária possível entre

os processadores. A rotina computacional é distribuída para todos os processadores, e a diferença entre os processos é garantida pelas diferentes bases de dados. O método de tráfego de dados utilizado no *IMERSPEC3DP* é denominado *MPI* (*Message Passing Interface*), biblioteca de livre distribuição na internet.

Um teste simples, que mostra o tempo necessário para processamento de um mesmo problema físico, empregando diferentes números de processadores, foi realizado, e seus resultados são mostrados a seguir. A Fig. 22 mostra os domínios computacionais de quatro diferentes casos, que empregaram 1, 2, 4 e 8 processadores. O problema simulado foi o mesmo já apresentado e validado, descrito em detalhes na Tab. 4.

A Fig. 22 mostra o tempo computacional total para cada uma das simulações realizadas. Observa-se um decaimento em escala logarítmica, com resultado superior à da curva de relação inversamente proporcional, ou seja, situação onde utilizando-se n processadores, tem-se um tempo de simulação T/n , em relação a um tempo T obtido por uma simulação em serial. Neste resultado, verifica-se com clareza a grande importância da paralelização e seu potencial de redução de tempo computacional para simulações de escoamentos turbulentos.

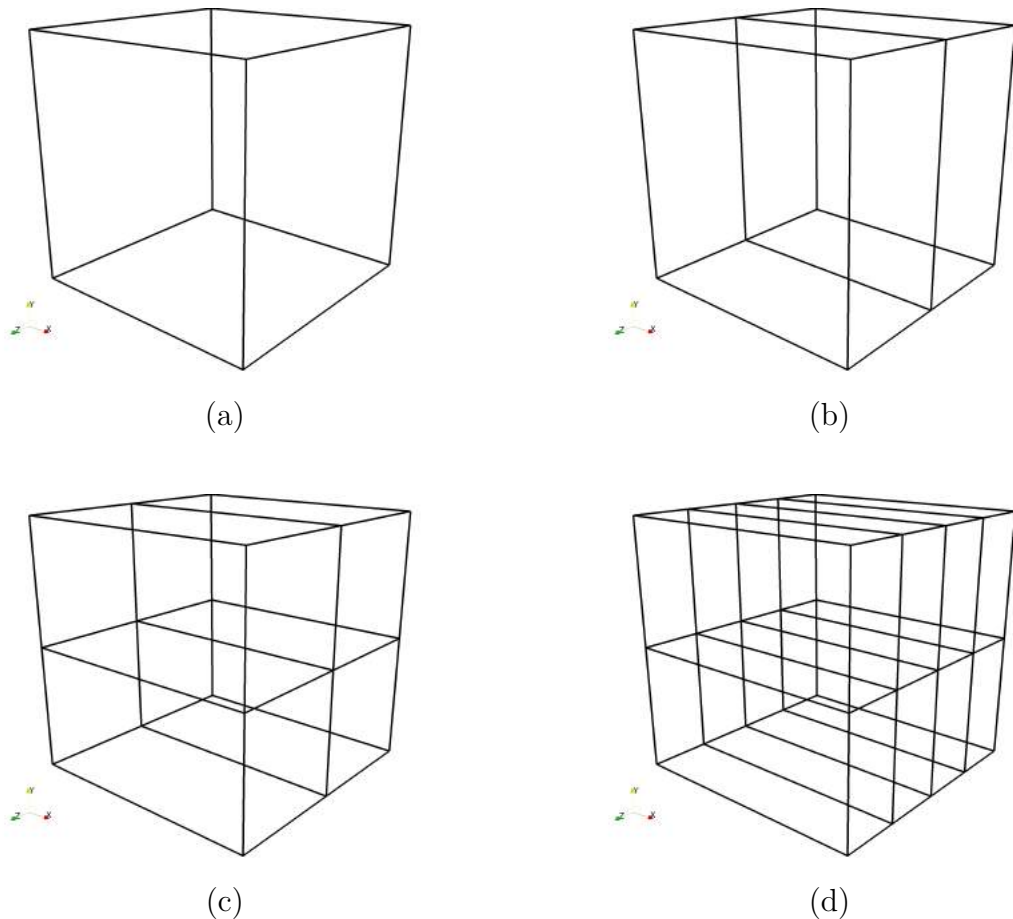


Figura 21 – Domínios MPI utilizados: (a) Caso serial, (b) 2 processadores, (c) 4 processadores, (d) 8 processadores.

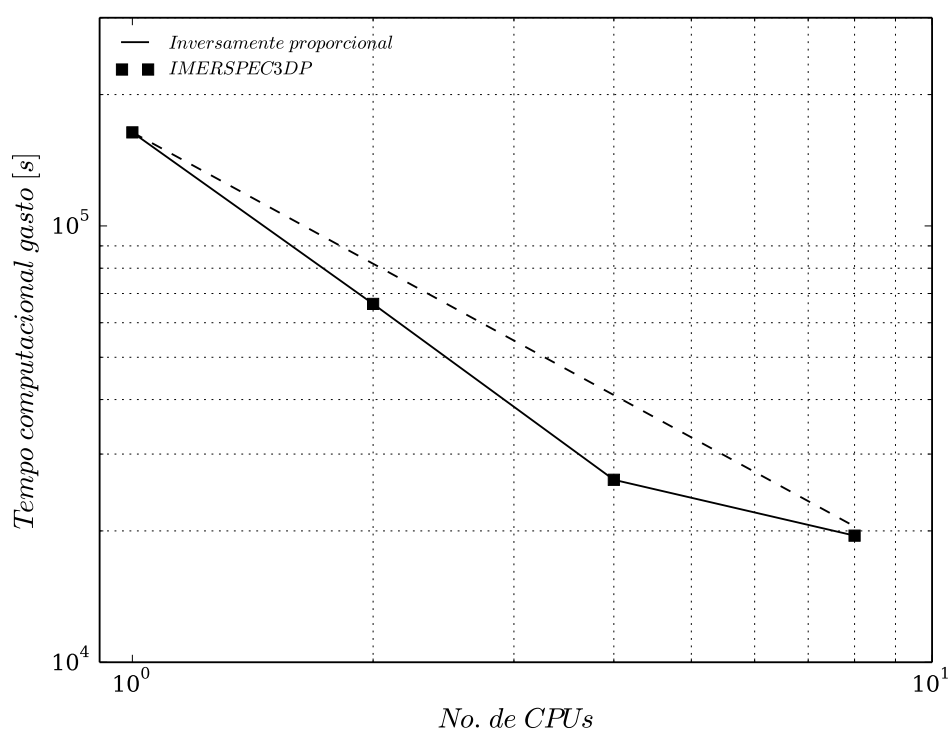


Figura 22 – Comparativos das normas L2 das componentes da velocidade e da pressão *vs* tempo de computação gasto.

6 Resultados

Neste capítulo, são mostrados os resultados numéricos obtidos para as simulações computacionais da esteira temporal incompressível. A seção 6.1 introduz o problema simulado na presente dissertação, descrevendo o modelo físico considerado e os parâmetros da simulação. A seção 6.2 mostra os resultados qualitativos obtidos, incluindo os gráficos de isosuperfícies de Q e isocontornos de Q e $|\omega|$, bem como vistas de topo e laterais que permitem a identificação das estruturas coerentes e dos mecanismos de pareamento das instabilidades.

Na seção 6.3, são mostrados os resultados quantitativos das simulações, onde são discutidos os gráficos do espectros de energia cinética turbulenta, os resíduos da continuidade e os perfis médios da velocidade. Por fim, a seção 6.4 complementa os resultados quantitativos, apresentando uma análise topológica das estruturas, através dos mapas de invariância das simulações *DNS*.

6.1 Modelo físico da esteira temporal

Uma vez verificado o código *IMERSPEC3DP*, tanto no que se refere à sua acurácia quanto à sua paralelização, prossegue-se com as simulações da esteira em desenvolvimento temporal. Em particular, esta seção trata do modelo físico das simulações de uma esteira com perfil plano, em *desenvolvimento temporal*, incompressível, de um fluido newtoniano isotérmico, submetida a diferentes amplitudes de perturbação inicial. Um estudo detalhado, mostrando perfis médios de velocidade, o espectro de energia cinética turbulenta, isosuperfícies dos invariantes Q e Q_w e os mapas de invariância são mostrados.

A razão pela qual se optou pela simulação em desenvolvimento temporal reside no fato de que simulações em desenvolvimento espacial tridimensionais são computacionalmente mais caras, tanto em termos de memória quanto de tempo de processamento, especialmente quando se considera simulações *DNS*. Para simulações temporais, é possível a escolha de domínios de cálculo menores, mesmo para casos onde a turbulência já se encontra desenvolvida, em razão da periodicidade do domínio. Assim, as simulações temporais se destacam como uma opção viável, além da vantagem de serem naturalmente compatíveis com as condições de periodicidade em todas as direções, sendo portanto consideradas uma boa escolha para simulações que utilizam os métodos espectrais.

Apesar de todas as vantagens das simulações temporais aqui citadas, é importante observar que elas possuem fortes limitações, como por exemplo a impossibilidade de comparação com os resultados experimentais (SILVA; PEREIRA, 2008). Entretanto, diversos trabalhos presentes na literatura já demonstraram o potencial desta técnica para o estudo da turbulência nos fluidos (MOSER; ROGERS, 1994; SONDERGAARD, 1996; HU; SUN; YIN, 2001; SILVA; PEREIRA, 2008).

O perfil inicial da esteira plana simulada no presente trabalho é mostrado na Fig. 23.

O fluido se encontra confinado em uma região prismática, de comprimentos L_x, L_y, L_z , sendo x, y e z as direções do sistema de coordenadas global do modelo. Tipicamente, na simulação de escoamentos cisalhantes livres, utilizam-se perfis de velocidade que apresentem pontos de inflexão, tais como tangentes hiperbólicas e curvas gaussianas. Para o presente trabalho, optou-se pela escolha da componente w da velocidade como uma curva gaussiana, conforme proposto por Moser e Rogers (1994), Sondergaard (1996):

$$w(x, y, z)|_{t=0} = 1 - \Delta w e^{-c_1 y^2} \quad (6.1)$$

sendo Δw e c_1 parâmetros dados pela tabela 5. A imposição do referido perfil impõe por consequência uma meia largura b , de valor unitário, à esteira (SONDERGAARD, 1996). As demais componentes da velocidade são identicamente nulas.

Pode-se decompor as componentes da velocidade em parcelas médias e flutuações, como se segue:

$$u(x, y, z)|_{t=0} = \bar{u} + a_u u', \quad (6.2)$$

$$v(x, y, z)|_{t=0} = \bar{v} + a_v v', \quad (6.3)$$

$$w(x, y, z)|_{t=0} = \bar{w} + a_w w', \quad (6.4)$$

onde $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ denotam os campos médios, e a_u, a_v, a_w denotam as amplitudes das flutuações u', v', w' . Note que as componentes u e v foram consideradas identicamente nulas; logo, tem-se que os campos médios $\bar{v}$ e $\bar{w}$ são nulos. A importância desta decomposição reside no fato de que diversos trabalhos na literatura mostram que a reprodução matemática da simulação de escoamentos cisalhantes livres exige a imposição de flutuações randômicas no campo de velocidade. Isso é essencialmente importante em se tratando dos métodos espectrais, tendo em vista que estes introduzem erros dispersivos e dissipativos ínfimos, que, em outros tipos de simulações, poderiam vir a exercer o papel de flutuação. Assim, pode-se esperar que uma simulação numérica de turbulência, quando utilizando algum tipo de método espectral, acabe não transicionando, caso não sejam impostas as devida perturbações numéricas.

Existem disponíveis na literatura diversas técnicas de geração de ruídos, muitas das quais utilizam geradores de números pseudorandômicos de bibliotecas *opensource*. Escolheu-se para a simulação da esteira plana a utilização do ruído digital proposto por Smirnov, Shi e Celik (2001), denominado *RFG*, (*Random Flow Generator*) tendo em vista os resultados satisfatórios obtidos nas simulações de Moreira (2011). Dentre as vantagens da utilização do *RFG*, destacam-se a facilidade de implementação e seu baixo custo computacional. Utilizou-se ainda a geração de flutuações isotrópicas para a velocidade. Detalhes dos parâmetros do método *RFG* implementados no código *IMERSPEC3DP* podem ser encontrados em Moreira (2011).

Para o número de Reynolds, escolheu-se o valor $Re_b = W_0 b / \nu = 346$, estimado como sendo um valor suficiente para o desenvolvimento das principais estruturas do escoamento, sem

no entanto ser elevado a ponto de impossibilitar as simulações *DNS* (SATO; KURIKI, 1961; SONDERGAARD, 1996).

Considerando-se o comprimento característico do escoamento como a meia largura da esteira, $b = 1[m]$, o tempo característico como $t = b/(\Delta w) = 1.445[s]$ (*c.f.* Tab. 5), e $Re_b = 346$, pode-se recorrer às Eqs. (3.58) e (3.59), obtendo-se $l_k \sim 1.25 \times 10^{-2}[m]$ e $t_k \sim 7.77 \times 10^{-2}[s]$. Assim, o número de modos de Fourier necessários para a realização de simulações *DNS* pode ser estimado baseado no tamanho do domínio em questão.

Note que, para o utilizado ($20b \times 20b \times 40b$), seriam necessários aproximadamente $1600 \times 1600 \times 3200$ modos de Fourier para realizar as simulações *DNS*, o que inviabilizaria as simulações. Entretanto, a literatura destaca que as escalas de Kolmogorov fornecem somente estimativas dos comprimentos característicos (MOSER; ROGERS, 1994; SONDERGAARD, 1996), e assim optou-se pela utilização de $256 \times 256 \times 512$ modos de Fourier, considerando os valores utilizados pelos referidos autores.

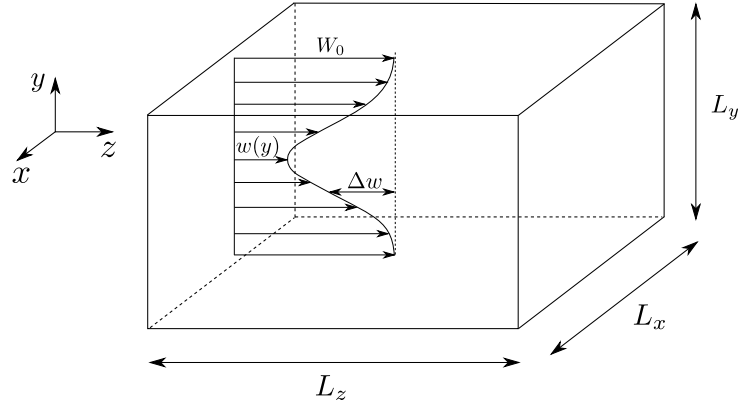


Figura 23 – Esboço do perfil de velocidade inicial da esteira plana, representado por um perfil gaussiano.

Tabela 5 – Valores dos parâmetros utilizados na simulação da esteira plana.

Número de processos	128 processadores
Modos de Fourier, nx, ny, nz , <i>DNS</i>	$256 \times 256 \times 512$
Modos de Fourier, nx, ny, nz , <i>LES</i>	$128 \times 128 \times 256$
Modelos de turbulência	Smagorinsky; <i>DNS</i>
Dimensões do domínio, (L_x, L_y, L_z)	$20b \times 20b \times 40b$
Tempo total de simulação	300[s]
<i>CFL</i> , casos <i>DNS</i>	0, 4
<i>CFL</i> , casos <i>LES</i>	0, 8
Velocidade característica, W_0	1[m/s]
Déficit de velocidade, Δw	0.692[m/s]
Constante de inflexionalidade, c_1	0.69315
Meia-altura inicial da esteira, b	1[m]
Número de Reynolds, Re_b	346
Método de integração temporal	RK46
Método de integração temporal	RK46

O método de integração temporal escolhido foi o método de Runge-Kutta de quarta ordem, de seis passos de tempo, RK46 (ALLAMPALLI; HIXON, 2009), cujos parâmetros são mostrado na Tabela 3. O passo de tempo da simulação é calculado baseando-se no critério CFL (COURANT; FRIEDRICHS; LEWY, 1967), para fins de garantia de estabilidade. Para a esteira plana, utilizou-se $CFL = W_0 \Delta t / \Delta x = 0,4$. Foram impostas condições de contorno periódicas nas três direções.

Tabela 6 – Amplitudes da perturbação inicial para os casos simulados.

Caso #	a_u, a_v, a_w	Modelo de turbulência	Modos de Fourier
1	1×10^{-3}	<i>DNS</i>	$256 \times 256 \times 512$
2	1×10^{-4}	<i>DNS</i>	$256 \times 256 \times 512$
3	1×10^{-5}	<i>DNS</i>	$256 \times 256 \times 512$
4	1×10^{-3}	<i>LES</i> - Smag.	$128 \times 128 \times 256$
5	1×10^{-4}	<i>LES</i> - Smag.	$128 \times 128 \times 256$
6	1×10^{-5}	<i>LES</i> - Smag.	$128 \times 128 \times 256$
7	Sem perturbação	<i>LES</i> - Smag.	$128 \times 128 \times 256$

6.2 Resultados qualitativos

Esta seção apresenta os resultados qualitativos das simulações *DNS*, visando evidenciar os mecanismos de pareamento de estruturas, bem como os estágios de desenvolvimento da esteira turbulenta. A seção 6.2.1 se dedica a mostrar a evolução temporal das isosuperfícies do segundo invariante do tensor gradiente de velocidade, Q , para amplitudes de perturbação da ordem de 10^{-3} , 10^{-4} e 10^{-5} . A seção 6.2.2 faz um comparativo entre os isocontornos de Q e $|\omega|$, demonstrando o quão conservativo $|\omega|$ pode ser, se comparado com Q , dependendo do estágio de evolução temporal da esteira.

6.2.1 Isosuperfícies de Q

As seguintes isosuperfícies de Q foram processadas a fim de permitir a identificação visual das diferentes estruturas ao longo da evolução temporal da esteira, para os casos #1,2 e 3. Os resultados qualitativos dos casos #4, 5 e 6 foram omitidos, tendo em vista que pouca diferença em relação aos resultados *DNS* foram observados. Assim, optou-se por evidenciar as diferenças entre os resultados das simulações *LES* e *DNS* utilizando a análise quantitativa. Os níveis de Q foram fixados de tal maneira que $0 < Q < \max(Q)$, excluindo portanto eventuais estruturas hiperbólicas (*i.e.*, níveis onde $Q < 0$), de modo a seguir a definição de vórtice, conforme proposta por Jeong e Hussain (1995). É importante ressaltar que as derivadas necessárias para os cálculos de Q , $|\omega|$ e das demais quantidades expressas neste trabalho foram calculadas numericamente utilizando o método espectral, garantindo assim sua alta acurácia.

As Figs. 25-28 mostram uma evolução temporal das isosuperfícies de Q para o caso #1. Foi possível distinguir dois mecanismos de emparelhamento de estruturas coerentes ao longo dos diferentes estágios de desenvolvimento da esteira. O primeiro mecanismo observado, aqui

denotado por *mecanismo de emparelhamento primário*, pode ser visto nas Figs. 25 (azimutal) e 28 (topo). Nestas figuras, é possível notar a presença de estruturas na forma de rolos, denominados instabilidades de Kelvin-Helmholtz. Note que algumas dessas estruturas se mostram com uma curvatura mais atenuada do que as outras. Pode-se observar uma das Kelvin-Helmholtz mostradas se curvou o suficiente a ponto de se emparelhar com a estrutura imediatamente anterior à ela, dando origem a uma napa de formato reticular.

As Figs. 26 e 30 mostram a continuidade do mecanismo de emparelhamento primário. A estrutura na forma de napa, antes observada nas Figs. 25 e 29, se degenera em uma estrutura na forma de grampo de cabelo. Os vórtices de grampo de cabelo formados permanecem na forma reticulada, conectando as instabilidades de Kelvin-Helmholtz com filamentos longitudinais duplos. Este comportamento, também observado no estudo experimental e numérico de Meiburg e Lasheras (1988) (*c.f.* Fig. 42), tende a se tornar mais intenso para domínios maiores.

Outro resultado notório pode ser observado nas Figs. 26 e 30. Observa-se que os vórtices de grampo de cabelo aparentam exercer um efeito mecânico sobre as instabilidades de Kelvin-Helmholtz. Tem-se a impressão de que os filamentos entrelaçam as estruturas tubulares, dando origem ao que seria um mecanismo de emparelhamento secundário.

Nas Figs. 27 e 31, verifica-se que o deslocamento das estruturas, sujeitas a diferentes tensões de cisalhamento e velocidades locais, causam distorções na malha reticulada que entrelaça as Kelvin-Helmholtz, causando o estiramento dos filamentos longitudinais. Tal estiramento faz com que um dos grampos de cabelo observado nas Figs. 26 e 30 se degenere, devido ao alongamento dos filamentos. Esta análise complementa o mecanismo de arranjo de anéis de vórtices, proposto por Silva e Metais (2002), explicando como surgem os filamentos longitudinais.

Por fim, as Figs. 28 e 32 mostram um estágio avançado do mecanismo de emparelhamento secundário. Neste estágio, observa-se que os grampos de cabelo já se encontram degenerados em filamentos longitudinais, e que as estruturas tridimensionais se mostram predominantes. Assim, nesta etapa, pode-se afirmar que a esteira já se encontra em sua região não-linear, dada a predominância das estruturas tridimensionais.

Observa-se ainda o efeito da amplitude das perturbações randômicas impostas sobre o desenvolvimento das esteiras. É possível observar, ao longo da evolução temporal mostrada pelas Figs. 25-28, a forte coerência das estruturas primárias, que permanecem sob a forma de rolos e napas cisalhantes ao longo de todo o tempo físico simulado. Também é possível concluir, a partir da análise das Figs. 25-27, que alguns dos filamentos presentes no escoamento aparentam entrelaçar pares de instabilidades de Kelvin-Helmholtz, formando regiões contra-rotativas, denominadas de vórtices de von Kármán. O subsequente emparelhamento destas estruturas de forma alternada é explicado por Silva e Metais (2002) como estruturas típicas de escoamentos cisalhantes livres (*c.f.* Fig. 24). Tal emparelhamento ocorre devido à diferença nas velocidades de advecção dos anéis de vórtices, ocasionadas devido à perturbação imposta ao campo de velocidades, que resulta em diferentes filamentos longitudinais.

Nas Figs. 26-29 (caso #1), 34-37 (#2) e 38-41 (#3), é possível concluir que as perturbações randômicas de amplitude 10^{-3} (caso #1) saturam os modos bidimensionais da esteira mais

rapidamente do que as perturbações de amplitude 10^{-4} (caso #2) e 10^{-5} (caso #3). Por esta razão, o caso #2, mostrado nas Figs. 34-37, apresenta um estado energético menos intenso do que aquele observado nas Figs. 26-29. Comparando os mesmos instantes de tempo para os casos #1 e 2, para $t = 195[s]$, observa-se na Fig. 28 uma forte presença de filamentos transversais, enquanto que na Fig. 36, a esteira ainda se encontra em seu estágio linear.

O caso #3, mostrado pelas Figs. 38-42, é o que apresenta o menor nível de energia dentre os casos simulados. Observa-se que é necessário um tempo físico muito maior para que ocorra a saturação da sua região linear, e por consequência disso, somente é possível evidenciar os primeiros vórtices de von Kármán no último passo de tempo mostrado (Figs. 41 e 42).

A Fig. 42 mostra uma vista lateral da esteira do caso #3, no instante de tempo $t = 300[s]$. Observa-se nesta figura o mecanismo de emparelhamento primário, que atua formando filamentos longitudinais entre as instabilidades de Kelvin-Helmholtz, dando origem a um par de vórtices de von Kármán. Esta imagem evidencia o mecanismo de emparelhamento primário do caso #3, observado tardiamente em relação aos casos #1 e 2. Tal diferença de comportamento pode ser explicada tendo em vista que os efeitos tridimensionais deste caso são fracos, fazendo com que a esteira permaneça praticamente num estágio de dominância de movimentos bidimensionais. Sato e Kuriki (1961) classifica tal estágio como o início da região de crescimento não-linear da esteira, caracterizada pela ausência de um movimento tridimensional dominante.

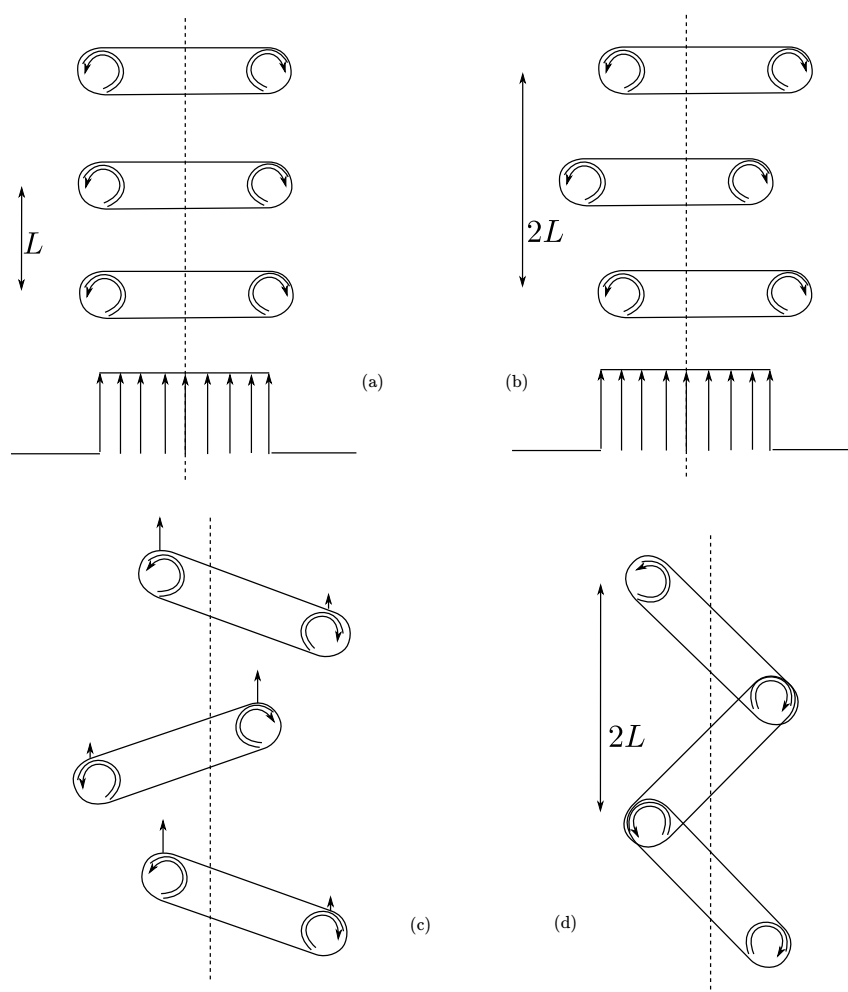


Figura 24 – Esboço do esquema de arranjo de anéis de vórtices, que resultam no emparelhamento alternado das estruturas. Retirado de Silva e Metais (2002).

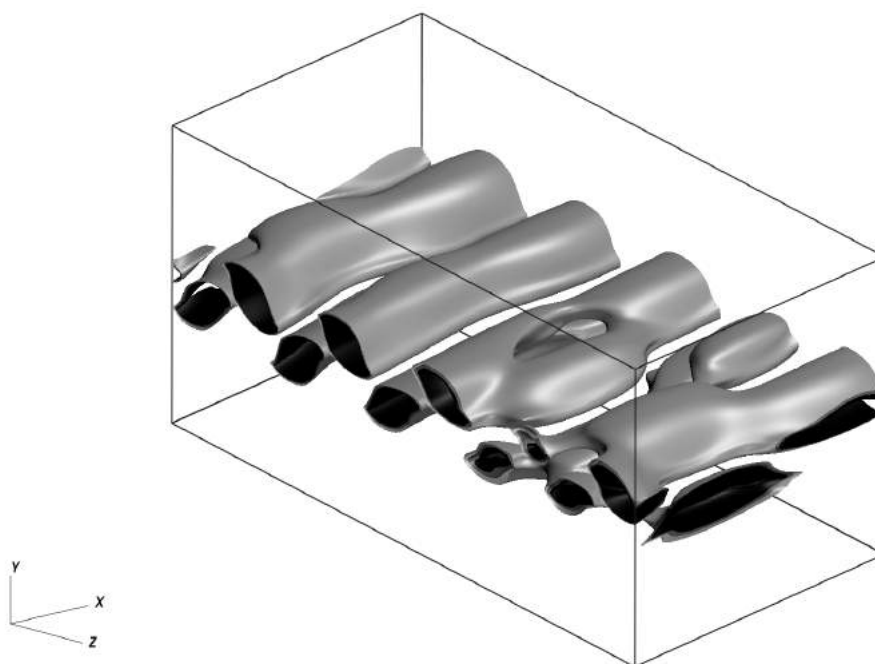


Figura 25 – Isosuperfície de Q , para o caso de perturbação com magnitude 10^{-3} , no instante $t = 135[s]$.

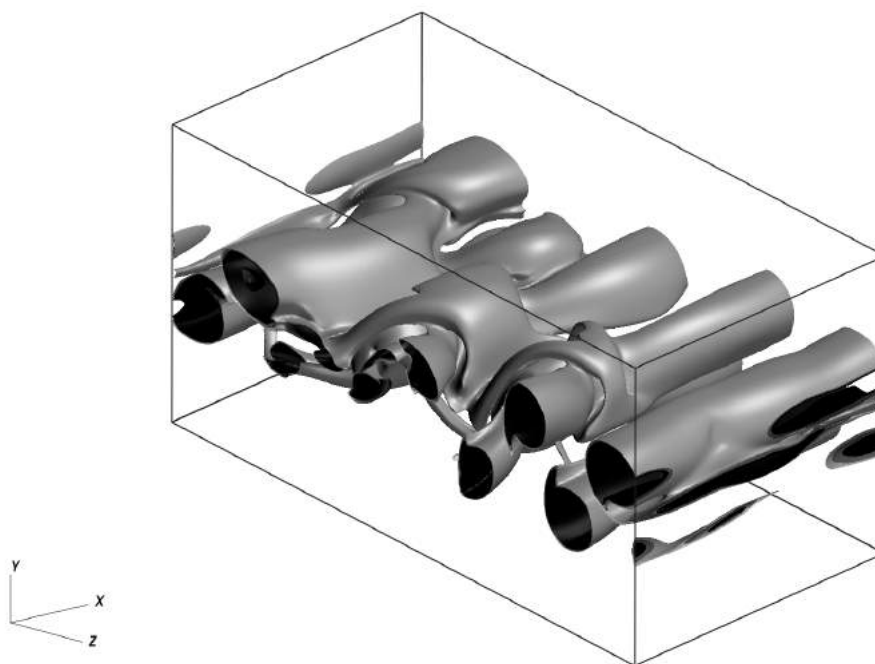


Figura 26 – Isosuperfície de Q , para o caso de perturbação com magnitude 10^{-3} , no instante $t = 165[s]$.

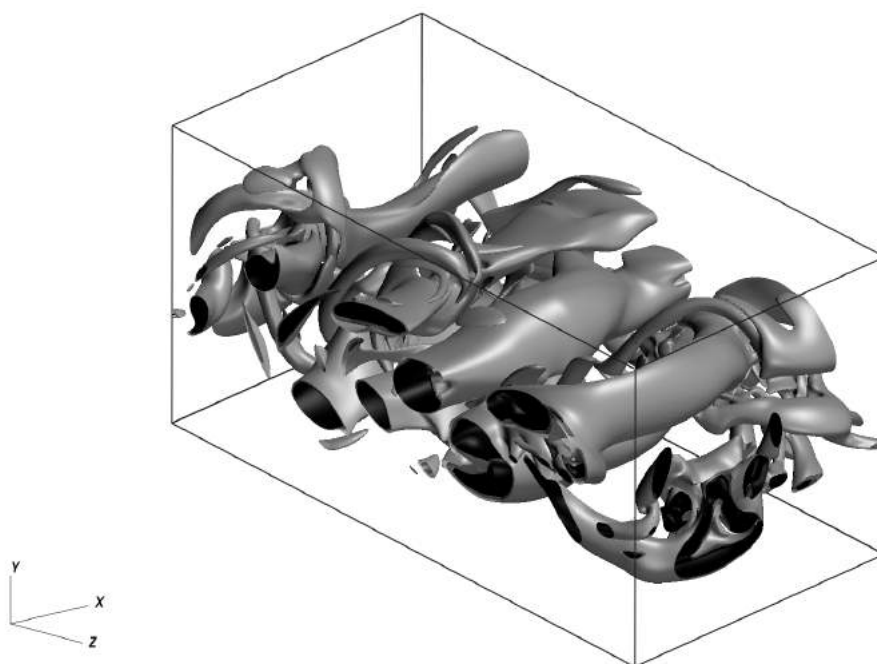


Figura 27 – Isosuperfície de Q , para o caso de perturbação com magnitude 10^{-3} , no instante $t = 195[s]$.

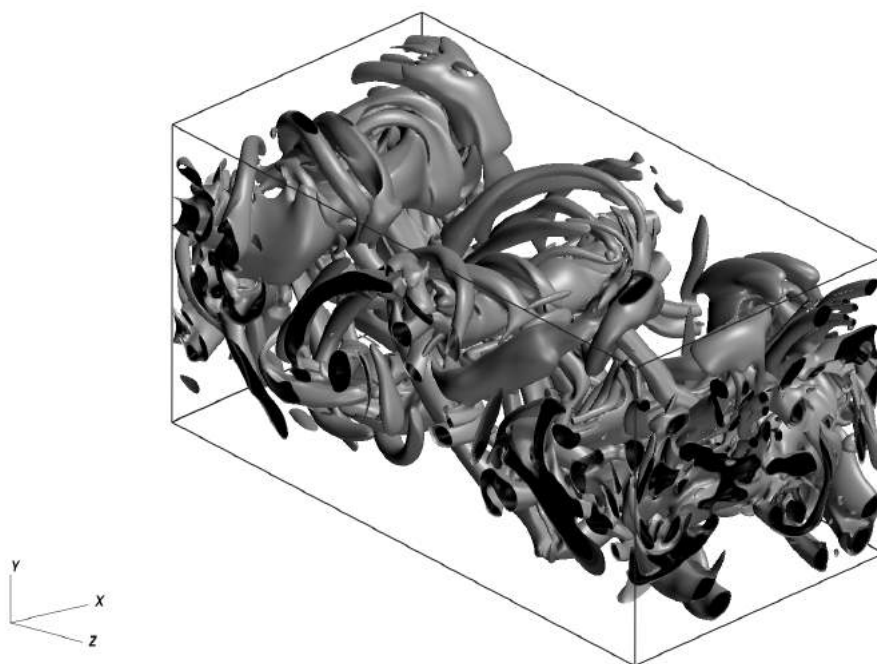


Figura 28 – Isosuperfície de Q , para o caso de perturbação com magnitude 10^{-3} , no instante $t = 270[s]$.

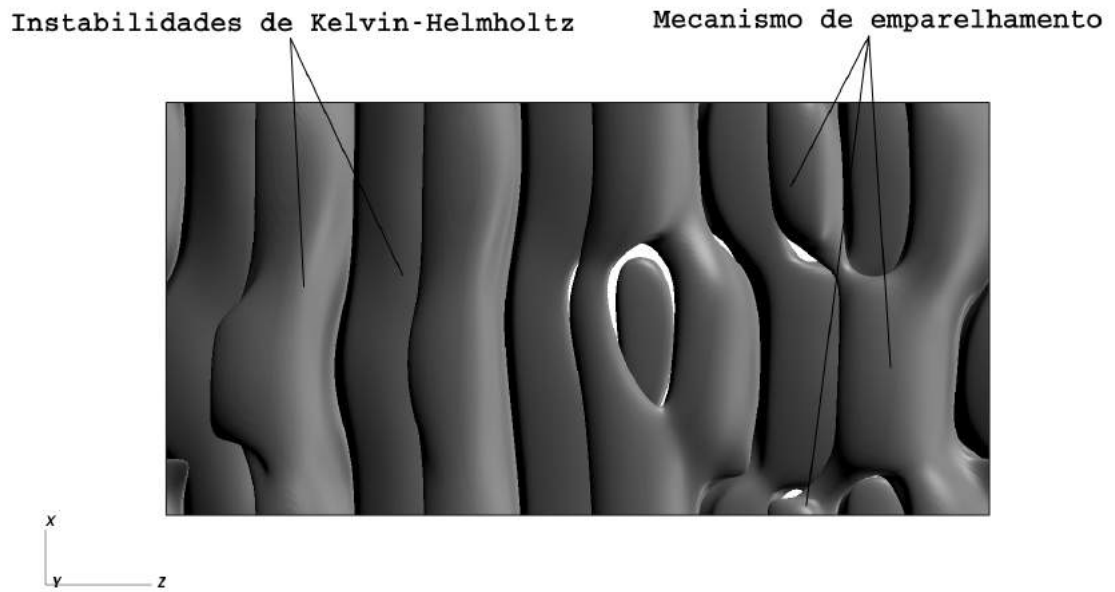


Figura 29 – Evidência de um mecanismo de emparelhamento primário, atuante nas instabilidades de Kelvin-Helmholtz, visto pelo topo (plano XZ), para o caso de perturbação com magnitude 10^{-3} , no instante $t = 135[s]$.



Figura 30 – Padrão de estrutura grampo de cabelo na esteira, visto pelo topo (plano XZ), formada pelo mecanismo de emparelhamento primário, para o caso de perturbação com magnitude 10^{-3} , no instante $t = 165[s]$.

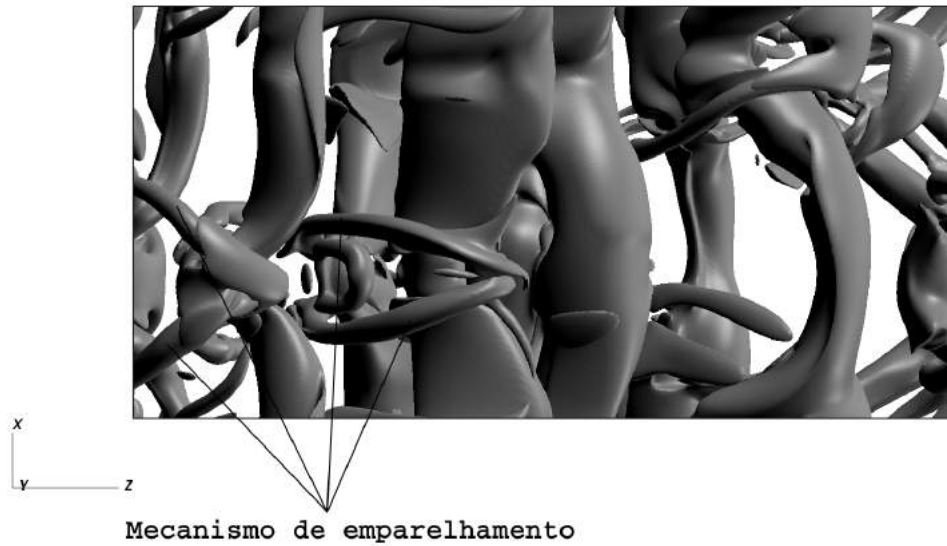


Figura 31 – Detalhe do mecanismo de emparelhamento secundário, visto pelo topo (plano XZ), mostrando o efeito mecânico que os vórtices de grampos de cabelo exercem em um par de instabilidades de Kelvin-Helmholtz, para uma perturbação de magnitude 10^{-3} , no instante $t = 195[s]$.

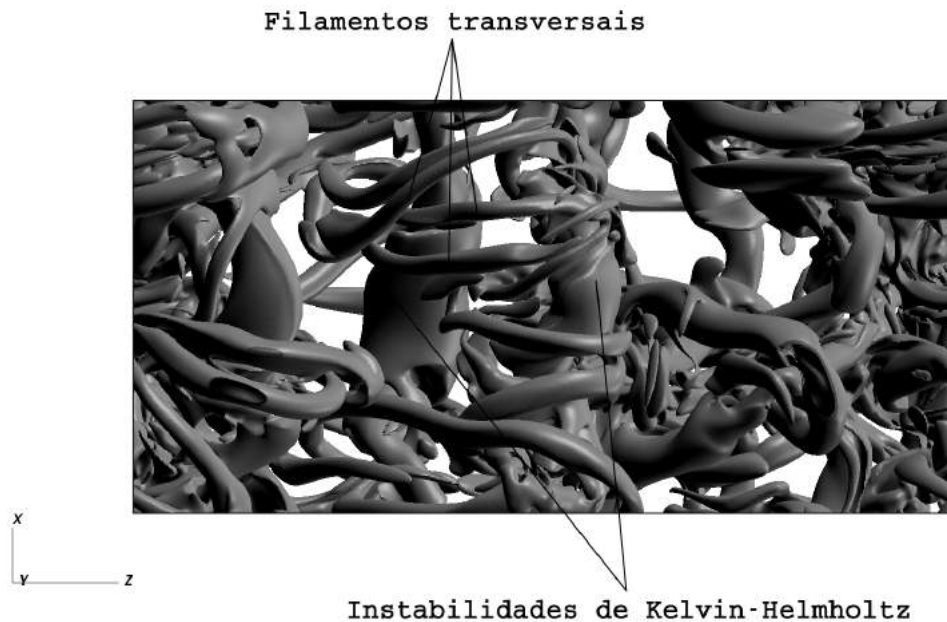


Figura 32 – Mecanismo de emparelhamento secundário, em etapa avançada, visto pelo topo (plano XZ), para o caso de perturbação com magnitude 10^{-3} , no instante $t = 270[s]$, mostrando a degeneração dos grampos de cabelo em filamentos tridimensionais, que continuam a exercer efeito mecânico nas instabilidades de Kelvin-Helmholtz.

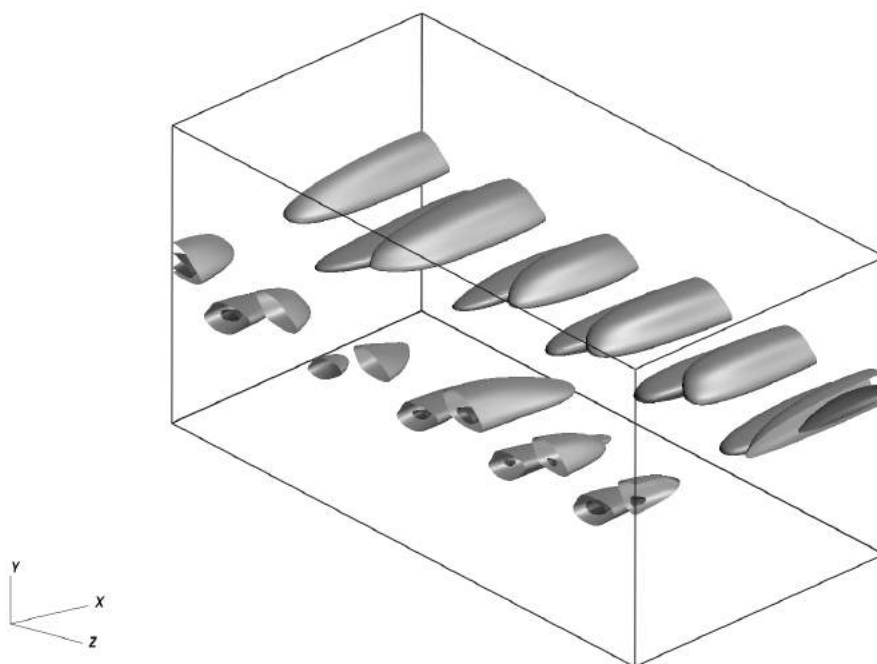


Figura 33 – Isosuperfície de Q , para o caso de perturbação com magnitude 10^{-4} , no instante $t = 135[s]$.

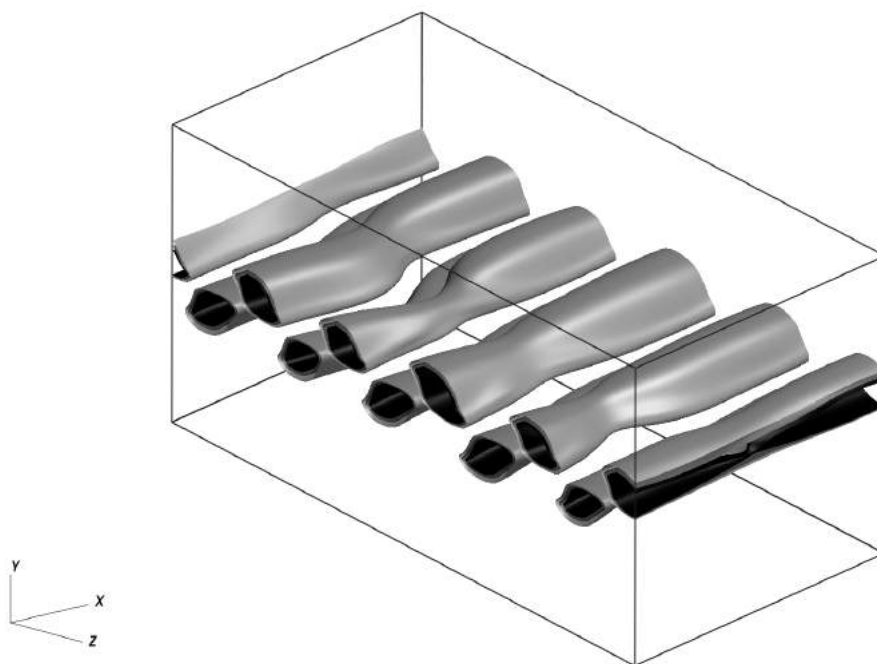


Figura 34 – Isosuperfície de Q , para o caso de perturbação com magnitude 10^{-4} , no instante $t = 165[s]$.

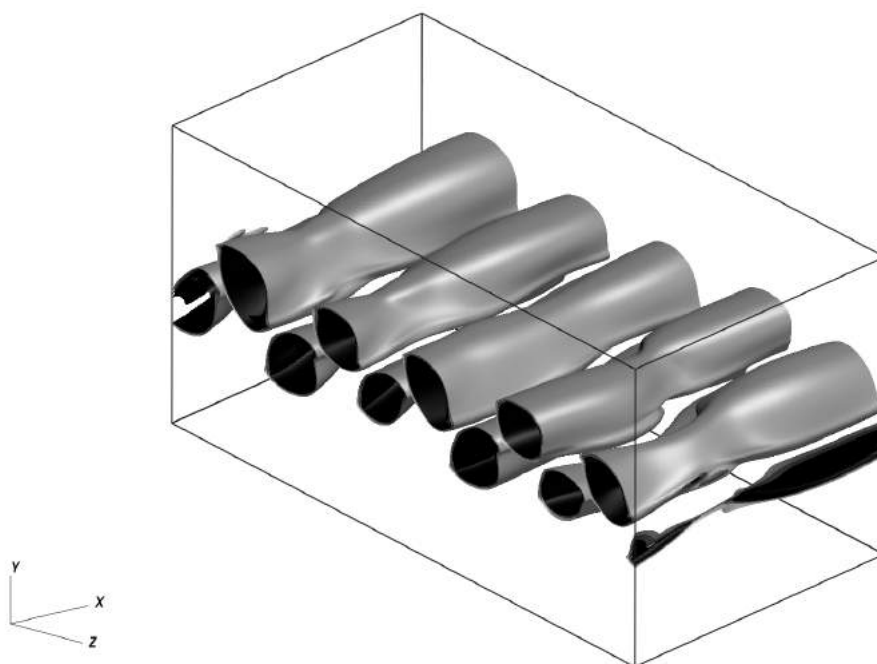


Figura 35 – Isosuperfície de Q , para o caso de perturbação com magnitude 10^{-4} , no instante $t = 195[s]$.

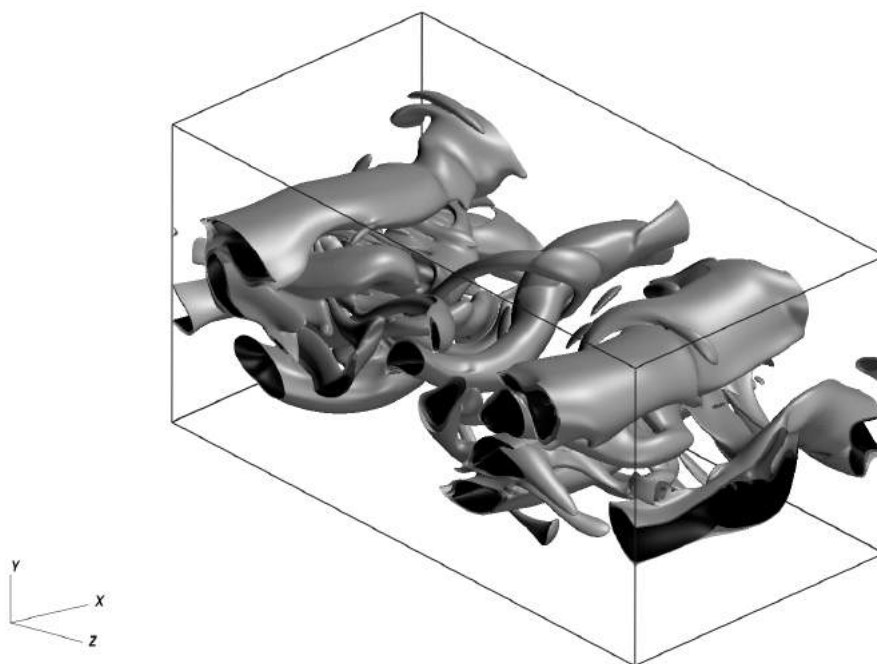


Figura 36 – Isosuperfície de Q , para o caso de perturbação com magnitude 10^{-4} , no instante $t = 270[s]$.

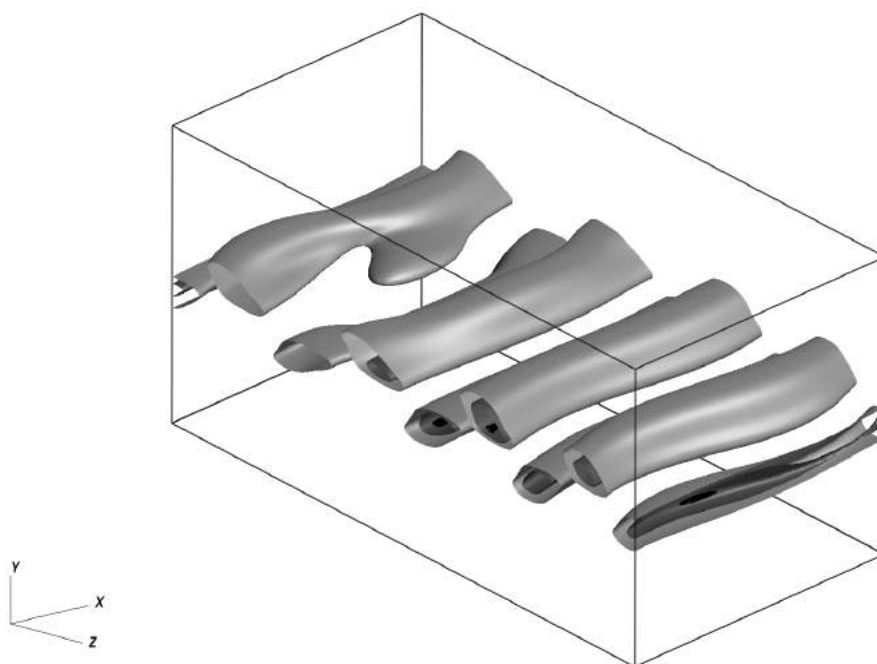


Figura 37 – Isosuperfície de Q , para o caso de perturbação com magnitude 10^{-5} , no instante $t = 210[s]$.

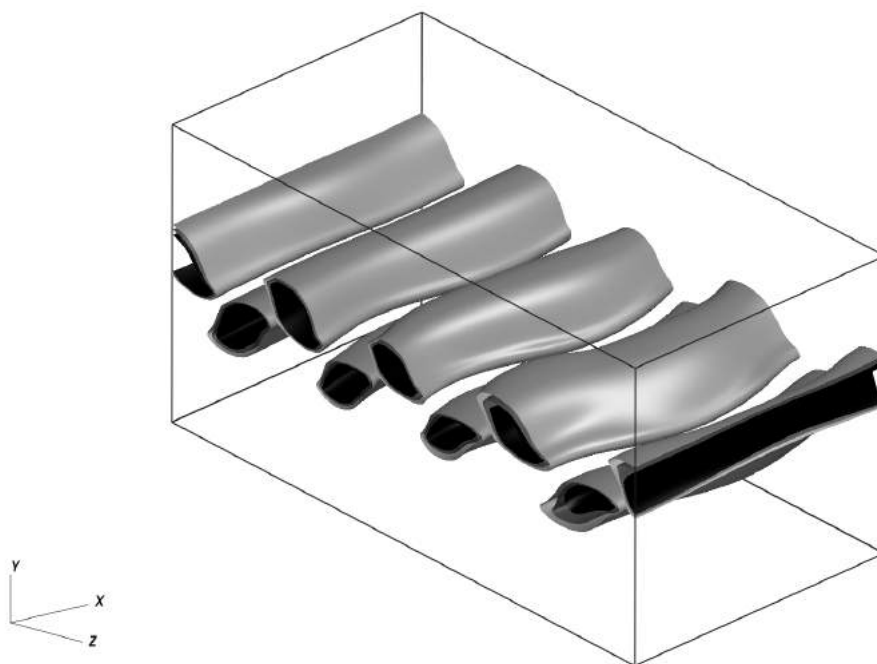


Figura 38 – Isosuperfície de Q , para o caso de perturbação com magnitude 10^{-5} , no instante $t = 240[s]$.

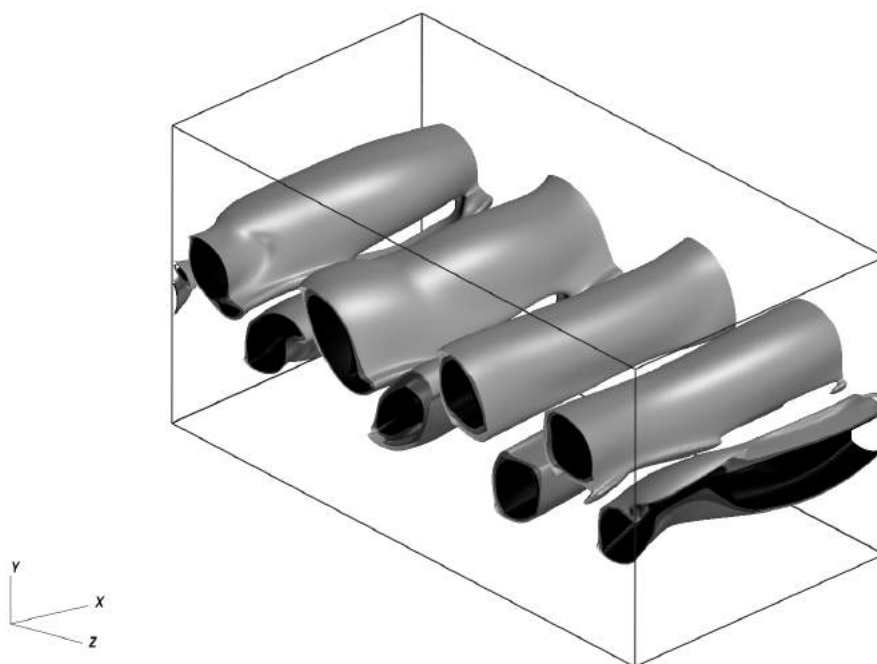


Figura 39 – Isosuperfície de Q , para o caso de perturbação com magnitude 10^{-5} , no instante $t = 270[s]$.

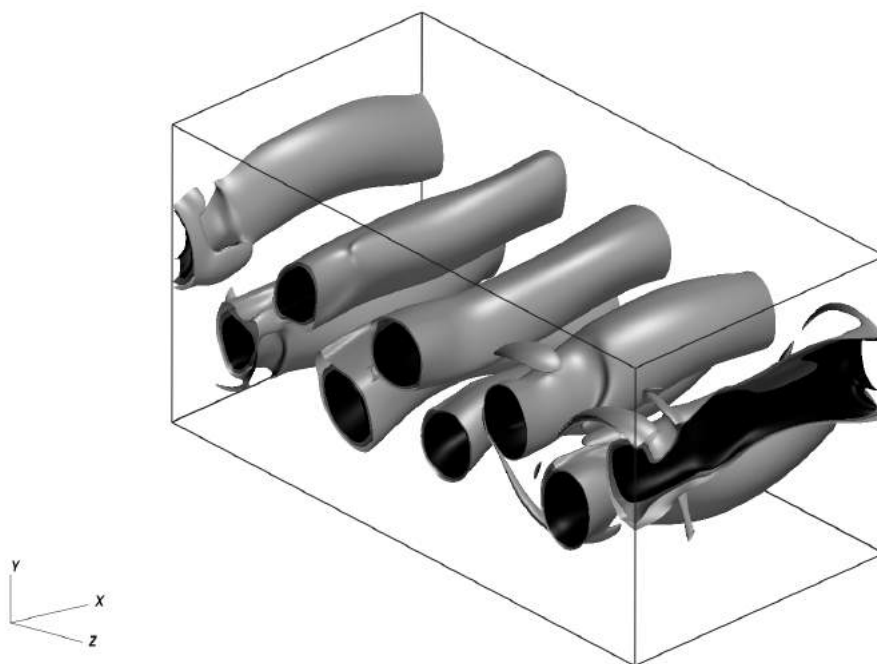


Figura 40 – Isosuperfície de Q , para o caso de perturbação com magnitude 10^{-5} , no instante $t = 300[s]$.

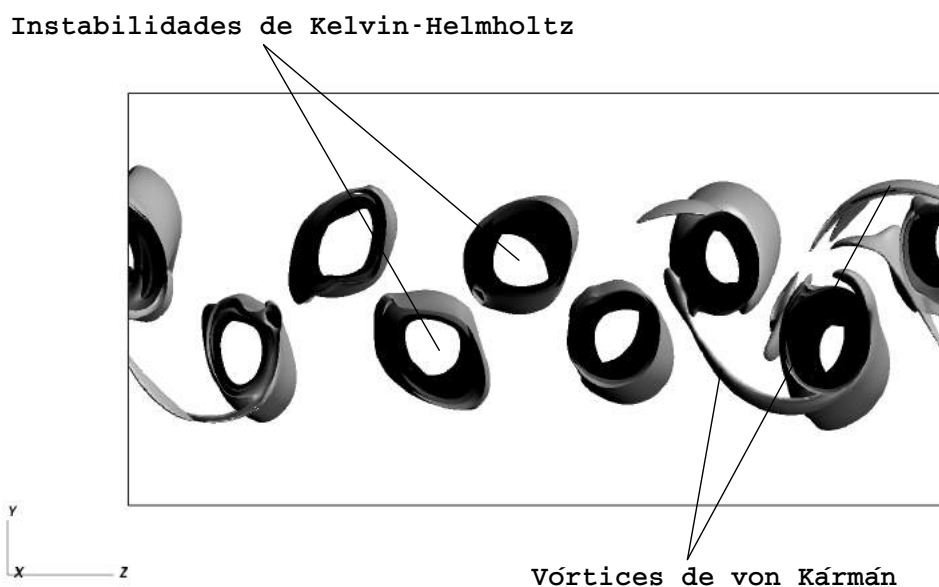


Figura 41 – Vista lateral (plano YZ) da esteira, onde é possível visualizar as instabilidades de Kelvin-Helmholtz, e o desenvolvimento dos vórtices de von Kármán, devido ao surgimento de instabilidade na direção transversal. A magnitude da perturbação é de 10^{-5} , no instante $t = 300[s]$

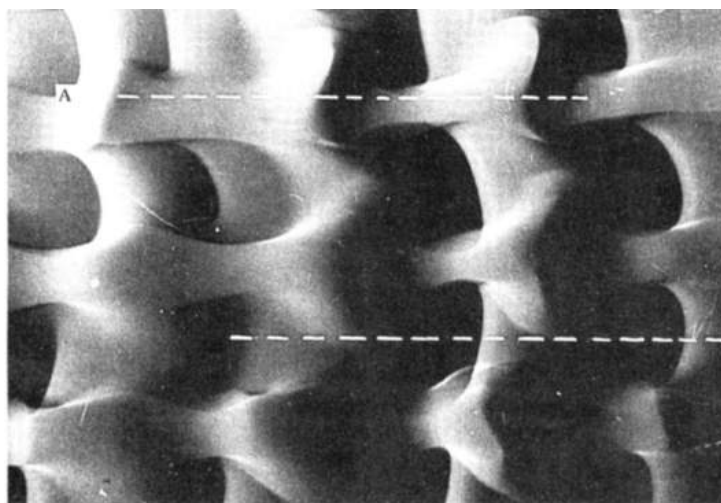


Figura 42 – Vista de topo de uma esteira, mostrando o efeito do mecanismo de emparelhamento primário e a formação de napas em formato reticular, num experimento material realizado por Meiburg e Lasheras (1988) para um escoamento incompressível a $Re = 100$.

6.2.2 Isocontornos de Q e $|\omega|$

Visando evidenciar as diferenças entre as estruturas vorticais identificadas por Q e $|\omega|$, gráficos contendo os contornos destas quantidades são mostrados abaixo, para os mesmos instantes de tempo, em dois diferentes estágios no desenvolvimento da esteira. Similarmente ao que foi feito para as visualizações das isosuperfícies de Q (*c.f.* seção 6.2.1), os contornos de Q foram escolhidos excluindo-se as estruturas hiperbólicas, em 20 níveis igualmente espaçados no intervalo $0 < Q < \max(Q)$. Analogamente, os contornos da vorticidade foram escolhidos em 20 níveis tais que $0 < |\omega| < \max(|\omega|)$.

A Fig. 43 mostra os contornos destas quantidades, para o caso #1, para instantes de tempo no intervalo de $t = 180[s]$ a $t = 270[s]$. Observa-se que os contornos de vorticidade evidenciam a maioria das regiões destacadas pelas linhas de isovalores de Q . Os resultados do caso #2 são mostrados na Fig. 44, para os mesmos instantes de tempo em questão. Um olhar mais atento nos estágios iniciais de desenvolvimento da esteira, Fig. 44-(a) e (b) nos permite concluir que as estruturas vorticais, indicadas pelos contornos de ambas as quantidades, se diferem mais do que observado na Fig. 44-(c) e (d).

Este raciocínio é estendido para o caso #3, ilustrado pela Fig. 45. Observe que para este caso, dotado de perturbações iniciais de amplitudes mais baixas (10^{-5}), a esteira ainda se encontra em seus estágios iniciais de desenvolvimento, tanto no instante $t = 180[s]$ quanto para o último instante mostrado, $t = 270[s]$. Evidencia-se neste caso um forte discordância entre os critérios Q e $|\omega|$. Assim, considerando os casos #1, 2 e 3, é possível concluir que a concordância entre os critérios aparenta estar relacionada com o estágio de desenvolvimento da esteira, de maneira que $|\omega|$ tende a se tornar mais seguro quando utilizado nos estágios não-lineares da esteira.

A análise dos isocontornos de Q e $|\omega|$, para os três casos *DNS* mostrados, reafirma o que foi observado na seção 6.2.1: a diferença nas perturbações iniciais impostas às esteiras faz com que seus níveis de energia sejam tão diferentes a ponto de atrasar o surgimento das instabilidades primárias nos casos #3 e 2, frente ao caso #1.

Por fim, a Fig. 46 apresenta os isocontornos de Q e $|\omega|$, para o caso #7, onde nenhuma perturbação foi imposta à condição inicial. Nota-se que a esteira aparenta não transicionar, sendo possível observar somente um fraco efeito difusivo, perceptível somente devido às diferenças de posicionamento dos isocontornos ao longo do tempo. Nota-se ainda a ausência de isocontornos de Q , mesmo nos instantes finais de simulação. De maneira geral, quando se faz uso de métodos de baixa ordem, os próprios erros de discretização numérica, intrínsecos destes métodos, já exercem o papel de perturbações sobre o campo inicial de velocidades, não sendo necessária a imposição de perturbações para que ocorra a transição do escoamento. No caso dos métodos de alta ordem, em particular do método pseudoespectral de Fourier, a ordem de grandeza dos erros dispersivos e dissipativos associados às discretizações destes métodos é ínfima, fazendo com que o escoamento não transicione por si só. Assim, tal resultado confirma a acurácia do método pseudoespectral de Fourier aqui utilizado.

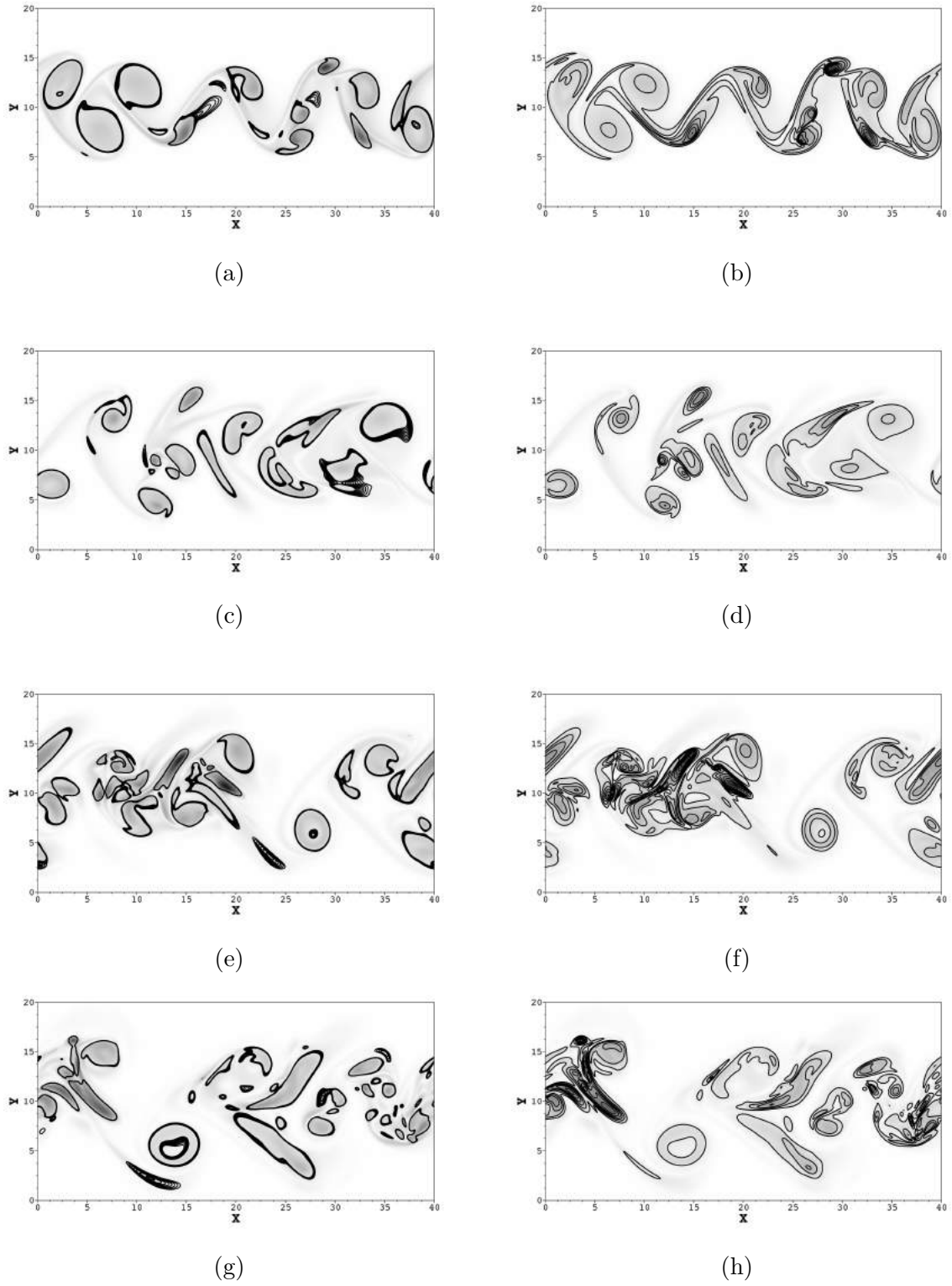


Figura 43 – Contornos de Q (esquerda) e $|\omega|$ (direita), em corte do plano central YZ , para uma perturbação de amplitude 10^{-3} (caso #1), nos instantes (a),(b) $t = 180[s]$; (c),(d) $t = 210[s]$; (e),(f) $t = 240[s]$; (g),(h) $t = 270[s]$.

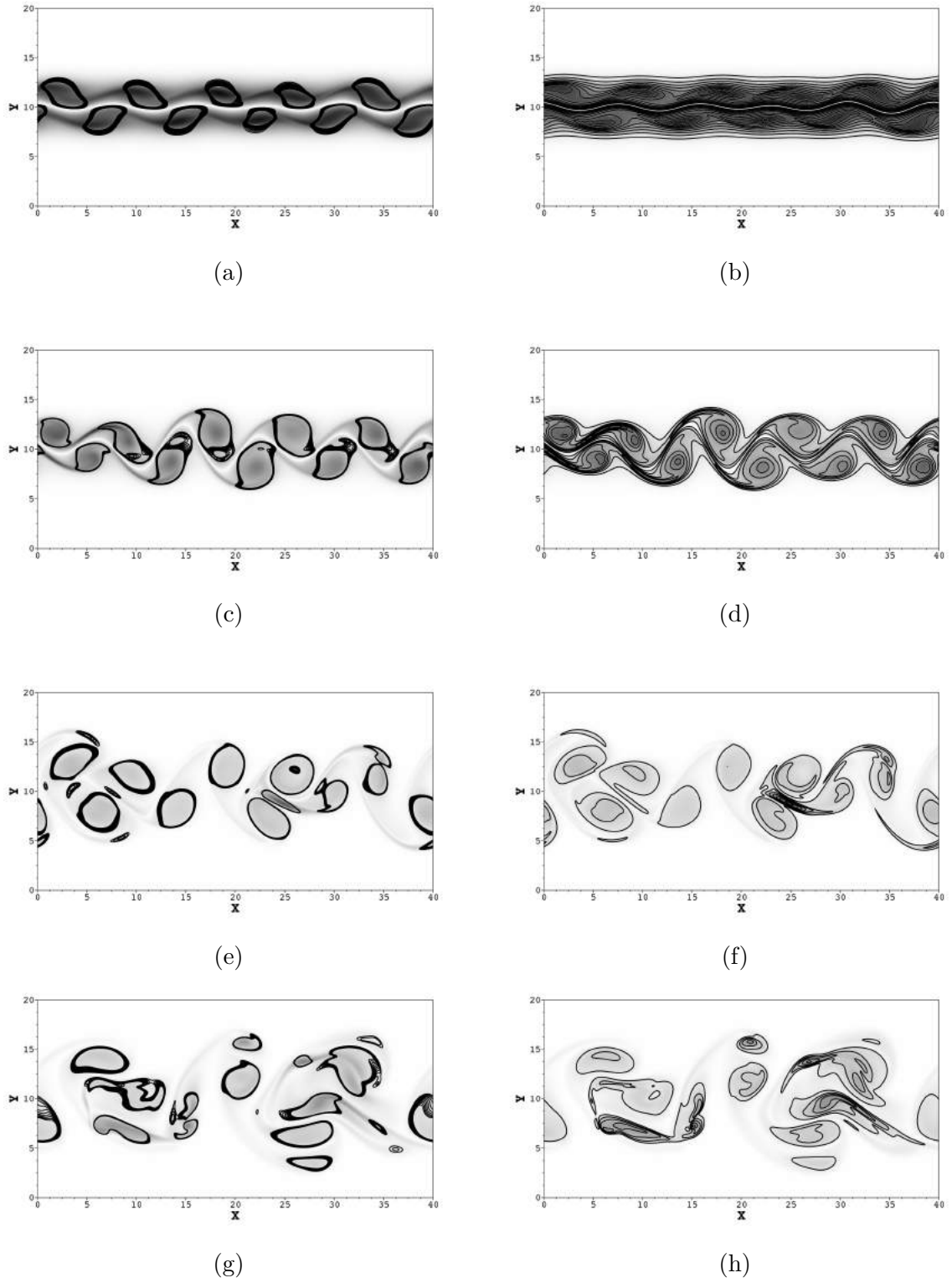


Figura 44 – Contornos de Q (esquerda) e $|\omega|$ (direita), em corte do plano central YZ , para uma perturbação de amplitude 10^{-4} (caso #2), nos instantes (a),(b) $t = 180[s]$; (c),(d) $t = 210[s]$; (e),(f) $t = 240[s]$; (g),(h) $t = 270[s]$.

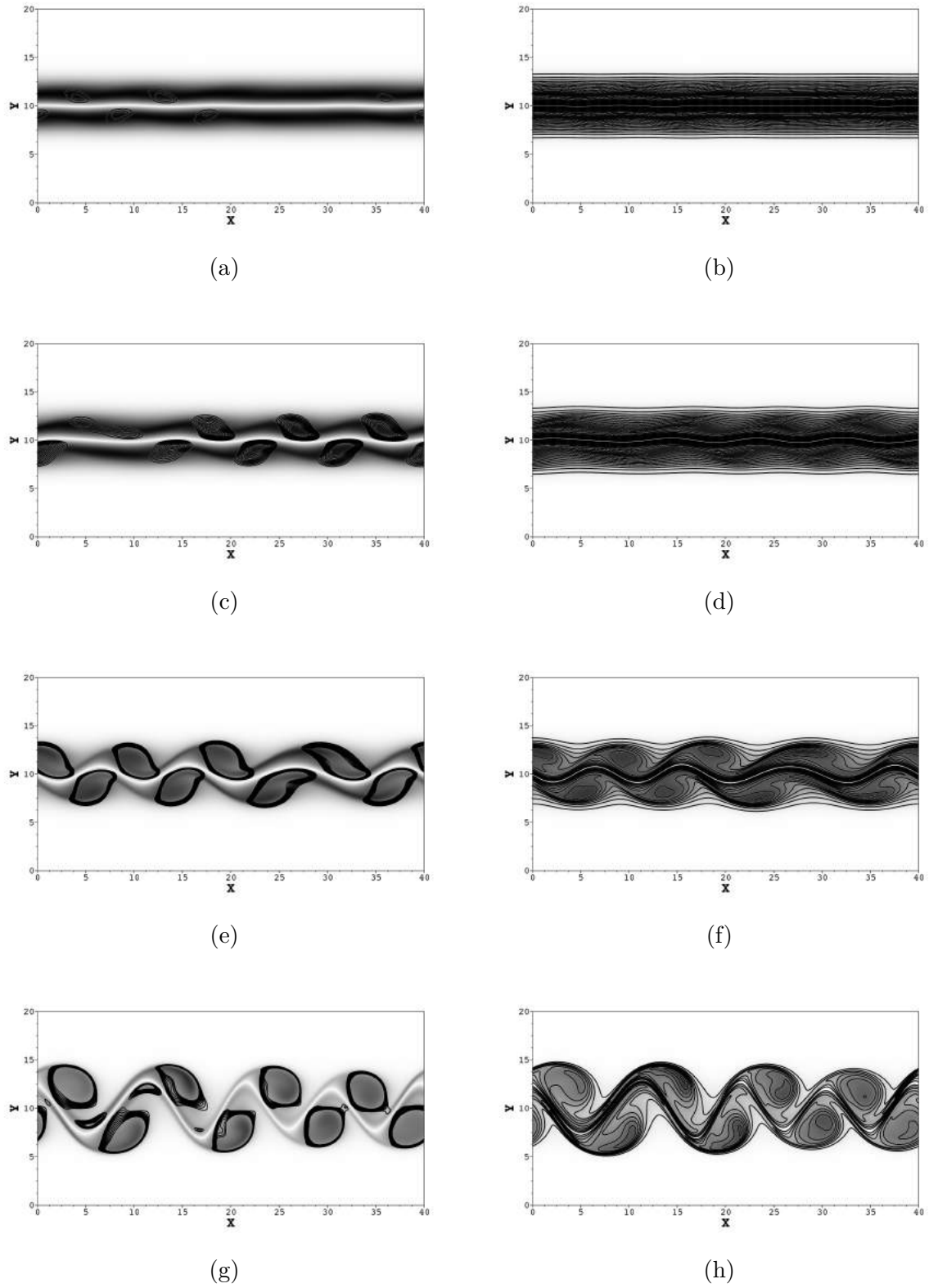


Figura 45 – Contornos de Q (esquerda) e $|\omega|$ (direita), em corte do plano central YZ , para uma perturbação de amplitude 10^{-5} (caso #3), nos instantes (a),(b) $t = 180[s]$; (c),(d) $t = 210[s]$; (e),(f) $t = 240[s]$; (g),(h) $t = 270[s]$.

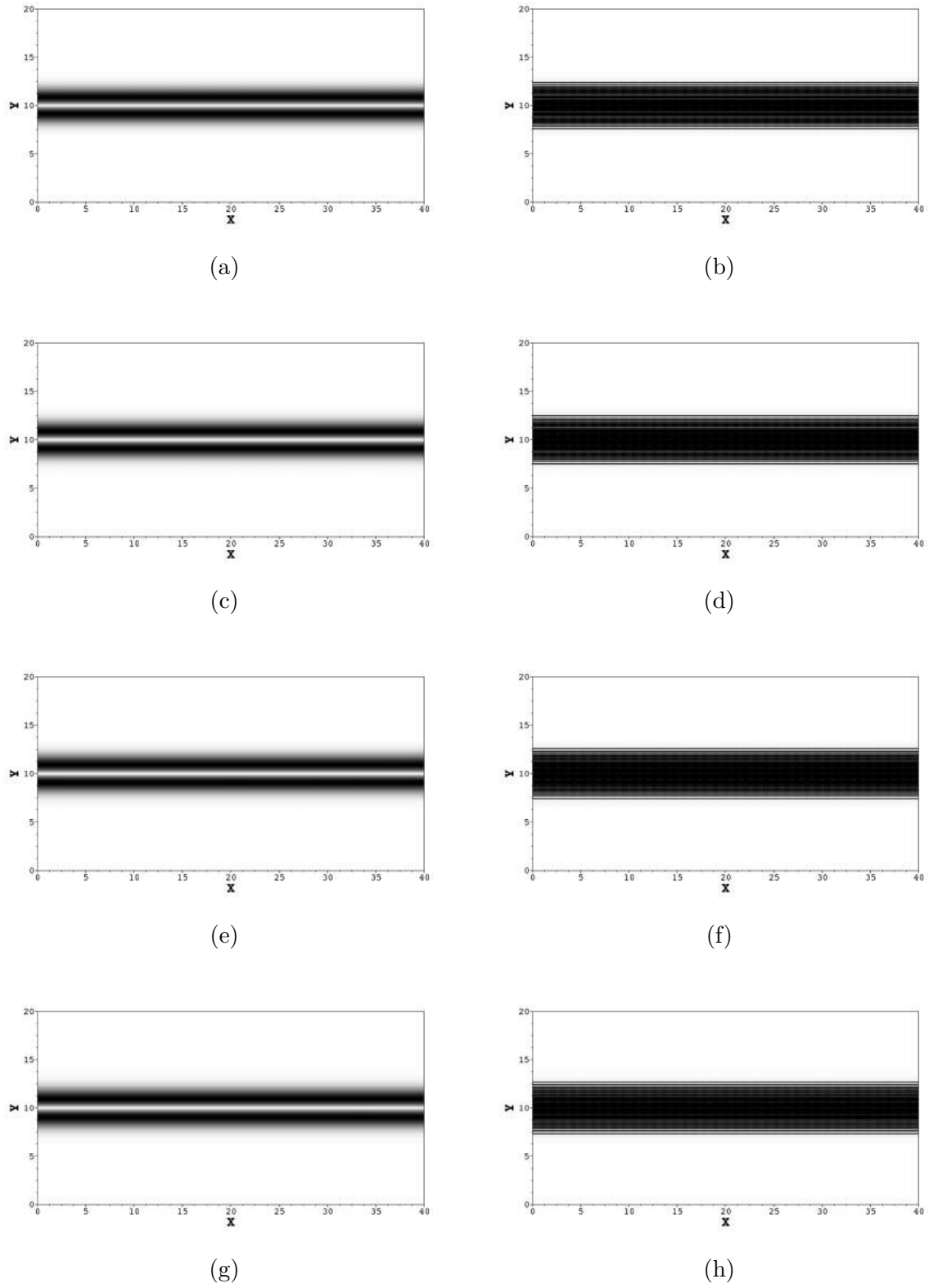


Figura 46 – Contornos de Q (esquerda) e $|\omega|$ (direita), em corte do plano central YZ , para o caso sem perturbação imposta (caso #7), nos instantes (a),(b) $t = 180[s]$; (c),(d) $t = 210[s]$; (e),(f) $t = 240[s]$; (g),(h) $t = 270[s]$.

6.3 Resultados quantitativos

O objetivo principal da presente seção é de fornecer dados quantitativos das simulações realizadas. A primeira subseção mostra comparações nos espectros de energia cinética turbulenta para as diferentes amplitudes de perturbação impostas à esteira. Em seguida, a segunda subseção mostra a evolução dos perfis de velocidade médios, e finalmente a terceira subseção ilustra a acurácia do método pseudoespectral empregado, demonstrado pelo resíduo proveniente da equação da continuidade para cada um dos seis casos simulados (*c.f.* Tabela 6).

6.3.1 Espectros de energia cinética turbulenta

O espectro de energia cinética foi calculado para todos os casos testados, utilizando-se as três componentes da velocidade. É perceptível, ao se analisar as Figs. 47 e 50, o fato de que, para o número de Reynolds utilizado ($Re = 346$), a simulação não representa uma esteira turbulenta completamente desenvolvida, conforme observado também por Moser e Rogers (1994), que também simulou esteiras sob baixos Re . Entretanto, observa-se que o efeito das diferentes perturbações impostas na condição inicial da esteira causam uma tendência de aproximação da inclinação de $-5/3$ proposta por Kolmogorov.

De maneira geral, o espectro de energia cinética turbulenta nas simulações *LES* (casos #4, 5 e 6) foram semelhantes aos resultados das simulações *DNS*. Nota-se um claro decaimento da curva na região de números de onda elevados, o que valida as presentes simulações *DNS*.

As Figs. 49 e 52 mostram comparativos entre os níveis de energia cinética turbulenta, para os casos *DNS* e *LES* simulados, nos tempos $t = 150[s]$ e $t = 240[s]$, respectivamente. A análise consistiu em se fixar um valor de número de onda arbitrário, $k = 10$, localizado na região de decaimento, permitindo uma comparação do nível de energia das simulações *LES* frente às simulações *DNS*. Tal verificação permite analisar se o modelo de Smagorinsky modelou adequadamente as menores escalas do escoamento, ou se houve acúmulo de energia.

Observe na Fig. 49 que, para as perturbações de 10^{-3} e 10^{-5} , houve um acúmulo de energia cinética turbulenta nas simulações *LES* frente às simulações *DNS*, para o instante $t = 150[s]$. Um acúmulo de energia também foi observado no instante $t = 240[s]$, desta vez nas perturbações 10^{-3} e 10^{-4} . É possível que tais diferenças no nível de energia cinética turbulenta possam estar associadas à utilização do modelo de Smagorinsky. Conforme já comentado na seção 3.4.2, atribuiu-se um valor médio para a constante de Smagorinsky, $C_S = 0.13$, baseado em outros trabalhos da literatura que simularam escoamentos cisalhantes livres (LESIEUR, 2008). Assim, acredita-se que uma possível forma de diminuir tais diferenças consistiria em utilizar um modelo de turbulência mais robusto, tal como o *modelo de Smagorinsky dinâmico*, proposto por Germano et al. (1990), onde o valor de C_S utilizado passa a admitir variações no espaço e no tempo, *i.e.*, utiliza-se $C_S = C_S(\mathbf{x}, t)$.

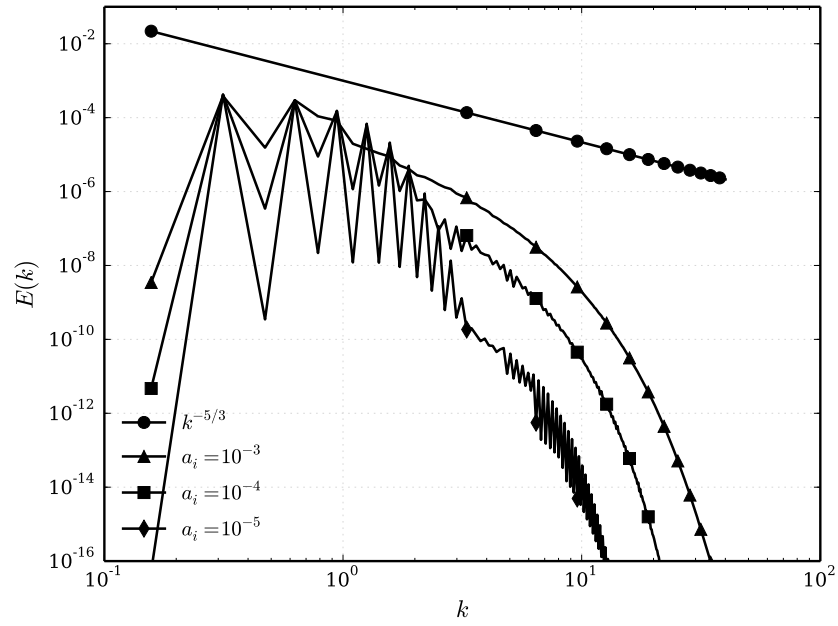


Figura 47 – Espectro de energia cinética turbulenta para as simulações *DNS* (casos #1,2,3), no instante $t = 150[s]$.

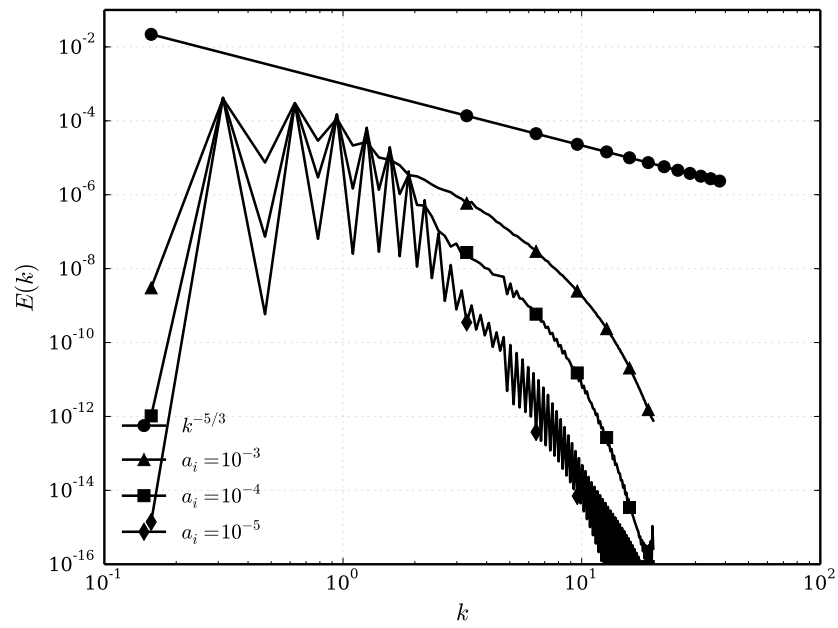


Figura 48 – Espectro de energia cinética turbulenta para as simulações *LES* (casos #4,5,6), no instante $t = 150[s]$.

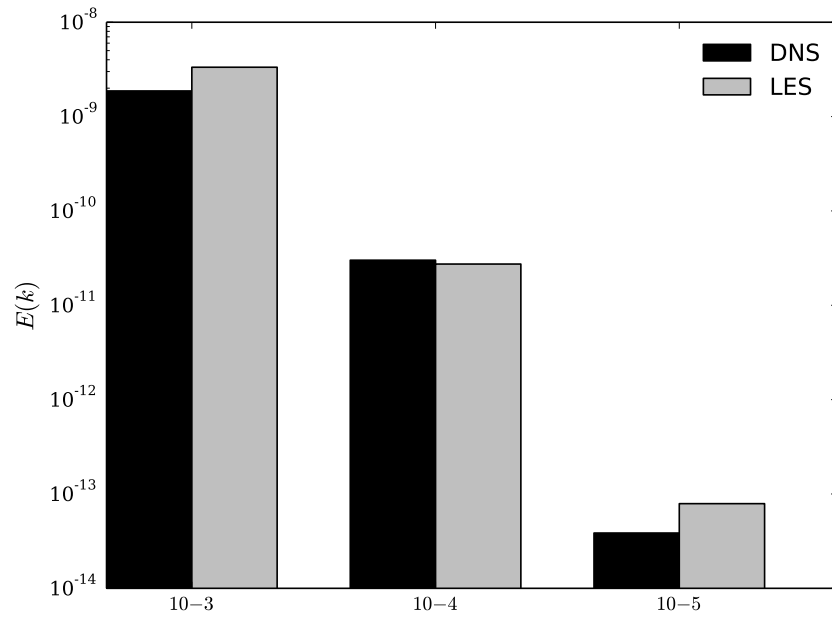


Figura 49 – Comparativo entre os níveis de energia cinética turbulenta $E(k)$ das simulações *LES* e *DNS*, em $k = 10$, no instante $t = 150[s]$.

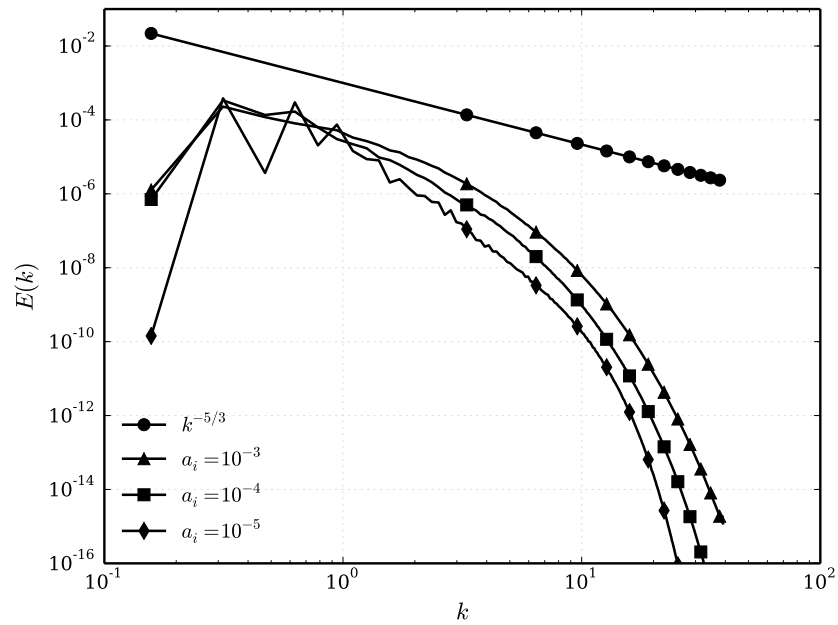


Figura 50 – Espectro de energia cinética turbulenta para as simulações *DNS* (casos #1,2,3), no instante $t = 240[s]$.

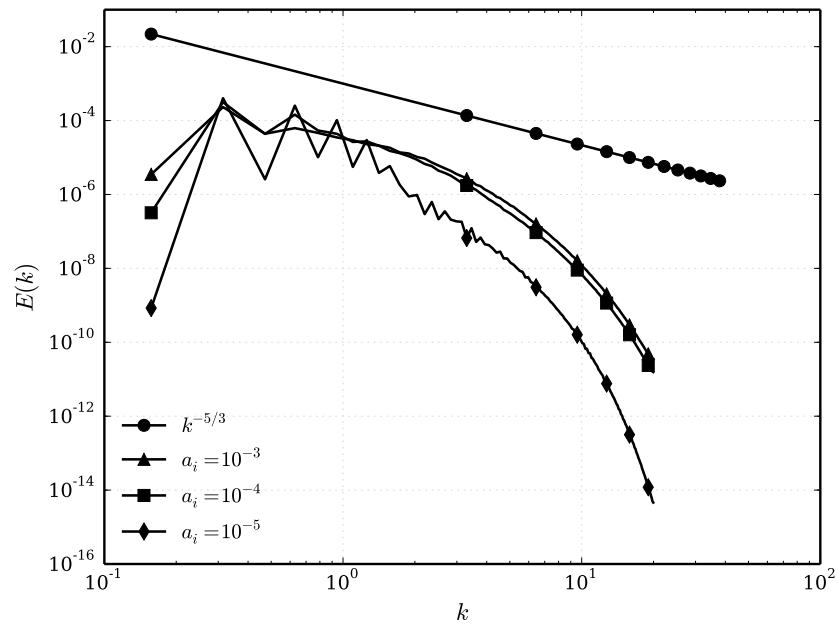


Figura 51 – Espectro de energia cinética turbulenta para as simulações *LES* (casos #4,5,6), no instante $t = 240[s]$.

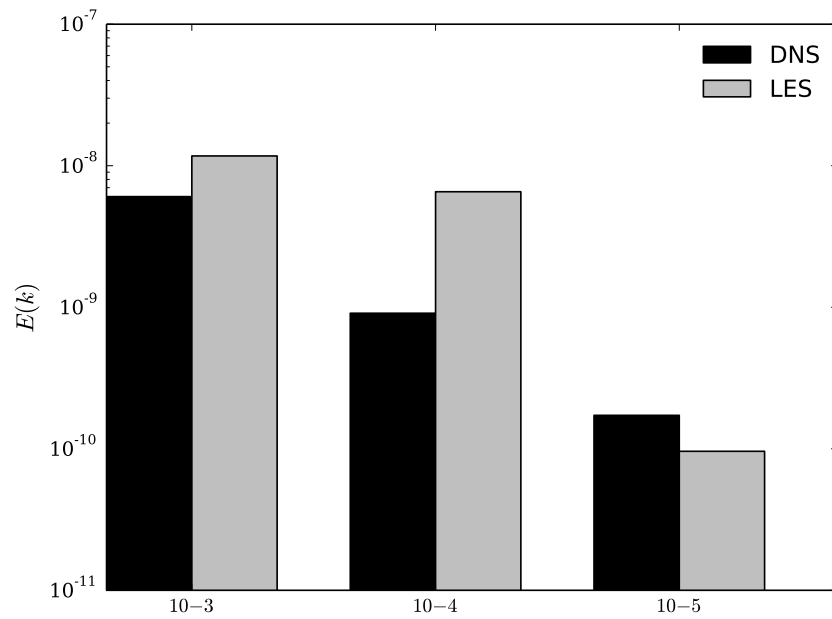


Figura 52 – Comparativo entre os níveis de energia cinética turbulenta $E(k)$ das simulações *LES* e *DNS*, em $k = 10$, no instante $t = 240[s]$.

6.3.2 Resíduo da continuidade

A verificação da acurácia do método pseudoespectral utilizado no presente trabalho foi realizada pela análise do resíduo da equação da continuidade. O resíduo máximo foi avaliado para cada passo de tempo. A Fig. Fig:15 mostra a evolução do resíduo ao longo do tempo, para os casos #1-6.

Observou-se que, para todos os casos testados, a ordem de magnitude dos resíduos se encontram abaixo de 10^{-16} , *i.e.*, são limitadas somente pelos erros de arredondamento de máquina. Tal valor é compatível com os resultados observados em outros métodos espectrais (CANUTO et al., 1988), o que valida o *solver* implementado no código *IMERSPEC3DP*.

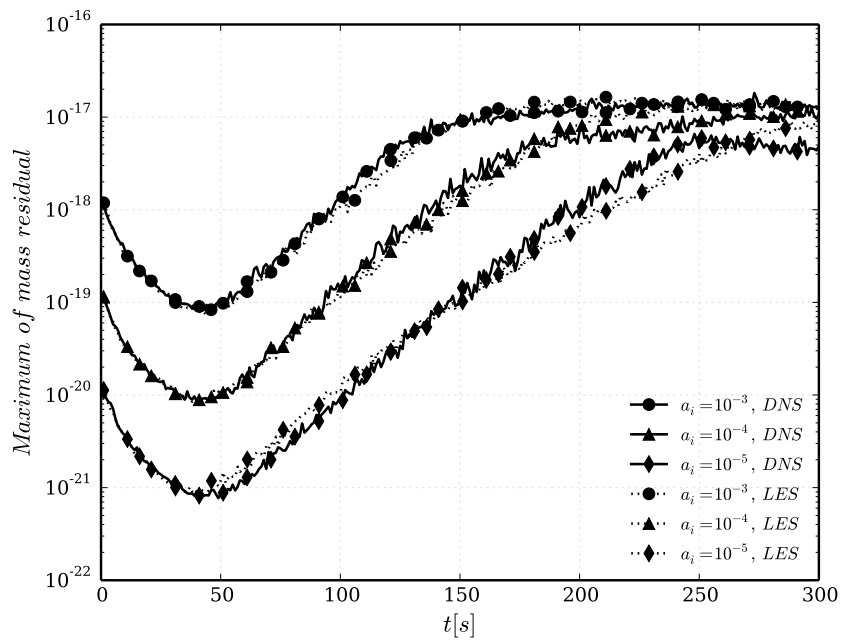


Figura 53 – Evolução do resíduo máximo da continuidade ao longo do tempo.

6.3.3 Perfis médios de velocidade

As Figs. 54-59 mostram os perfis médios de velocidade $\bar{u}$ e $\bar{w}$ para os casos # 1, 2 e 3, avaliados ao longo do eixo Y . Note que os perfis médios são avaliados em cada passo de tempo, tratando-se portanto de uma média espacial dos campos de velocidade do escoamento. As velocidades médias foram adimensionalizadas utilizando-se a velocidade característica $W_0 = 1[m/s]$.

As Figs. 54-56 mostram a variação do perfil de velocidade $\bar{w}$ ao longo do tempo. Observe que o perfil, em seus instantes iniciais, corresponde ao perfil idealizado na Fig. 23. Em todos os casos, foi possível observar que os efeitos tridimensionais causaram distorções do perfil de velocidade. Note que o perfil do caso # 3 foi o que sofreu menor influência de tais efeitos, uma vez que foi o caso simulado que mostrou menor predominância de filamentos tridimensionais, conforme pode ser observado nas Figs. 37-40.

Por fim, as Figs. 57-59 mostram a variação de $\bar{u}$. O perfil, inicialmente zero para os três casos, se desenvolve formando picos e vales, que caracterizam os mecanismos de emparelhamento, geradores de instabilidades primárias na esteira. Baseado em tais perfis, Sondergaard (1996) classifica as esteiras que apresentam tais comportamentos em um regime dito *transicional*, dadas as baixas amplitudes de $\bar{u}$, e perfis de $\bar{w}$ próximos ao gaussiano.

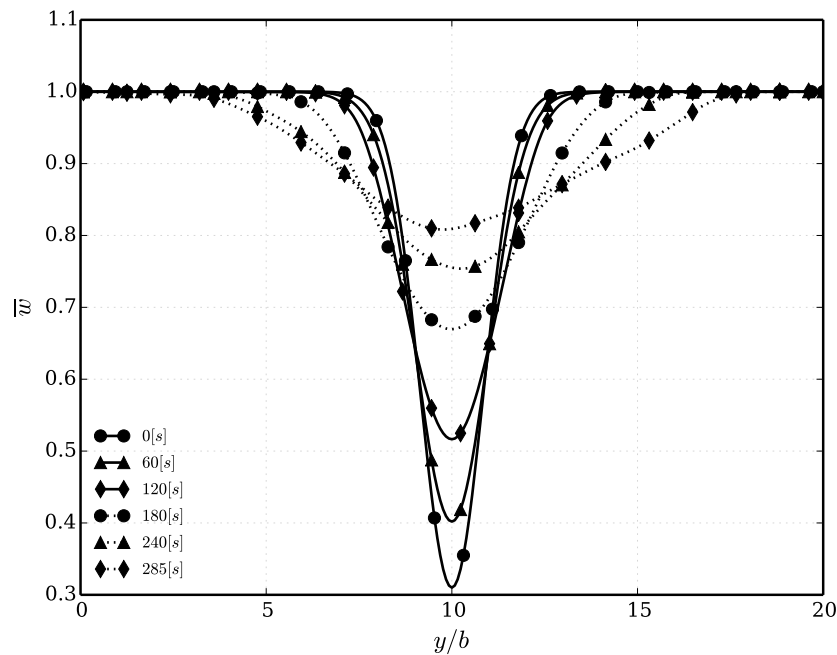


Figura 54 – Evolução do perfil de velocidade médio $\bar{w}$, ao longo do tempo, para esteira submetida à perturbação de magnitude 10^{-3} (caso #1).

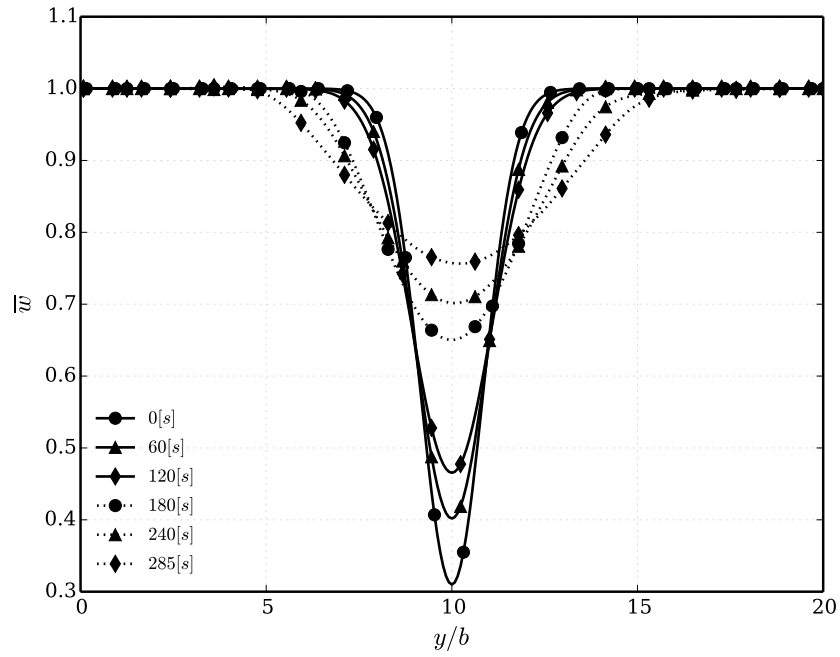


Figura 55 – Evolução do perfil de velocidade médio $\bar{w}$, ao longo do tempo, para esteira submetida à perturbação de magnitude 10^{-4} (caso #2).

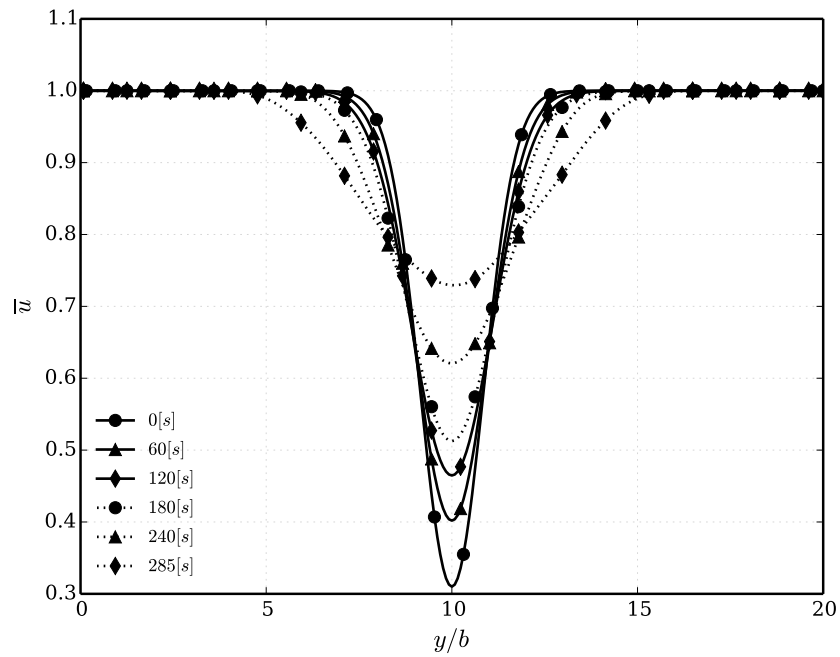


Figura 56 – Evolução do perfil de velocidade médio $\bar{w}$, ao longo do tempo, para esteira submetida à perturbação de magnitude 10^{-5} (caso #3).

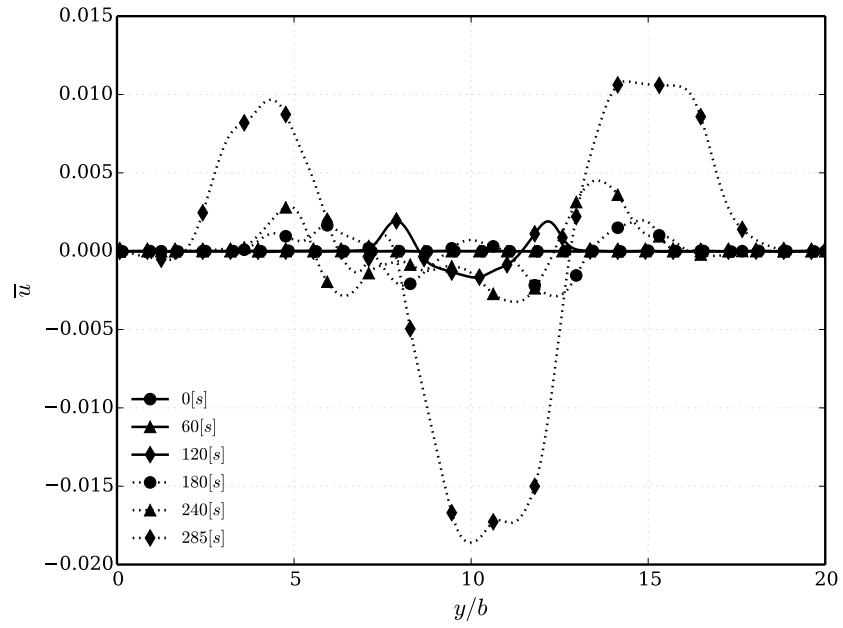


Figura 57 – Evolução do perfil de velocidade médio $\bar{u}$, ao longo do tempo, para esteira submetida à perturbação de magnitude 10^{-3} (caso #1).

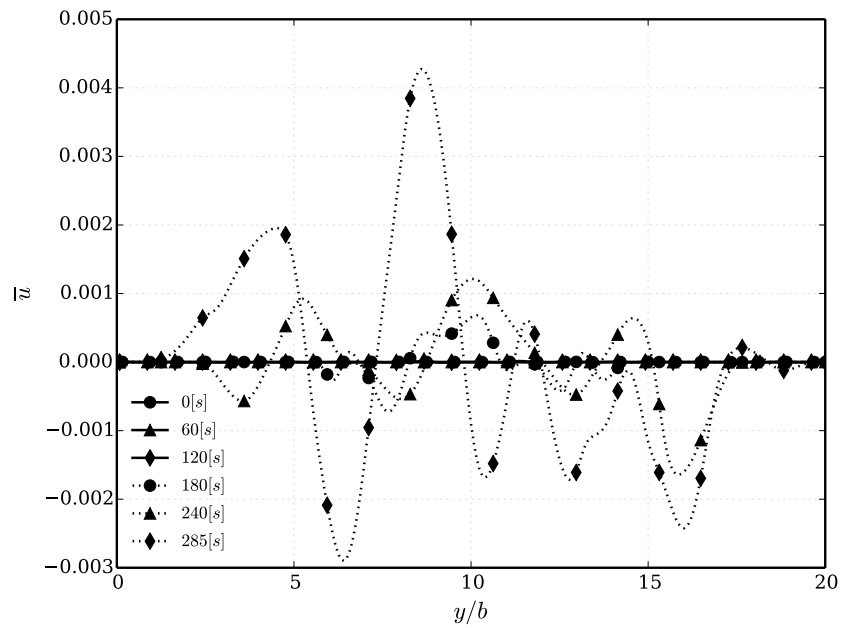


Figura 58 – Evolução do perfil de velocidade médio $\bar{u}$, ao longo do tempo, para esteira submetida à perturbação de magnitude 10^{-4} (caso #2).

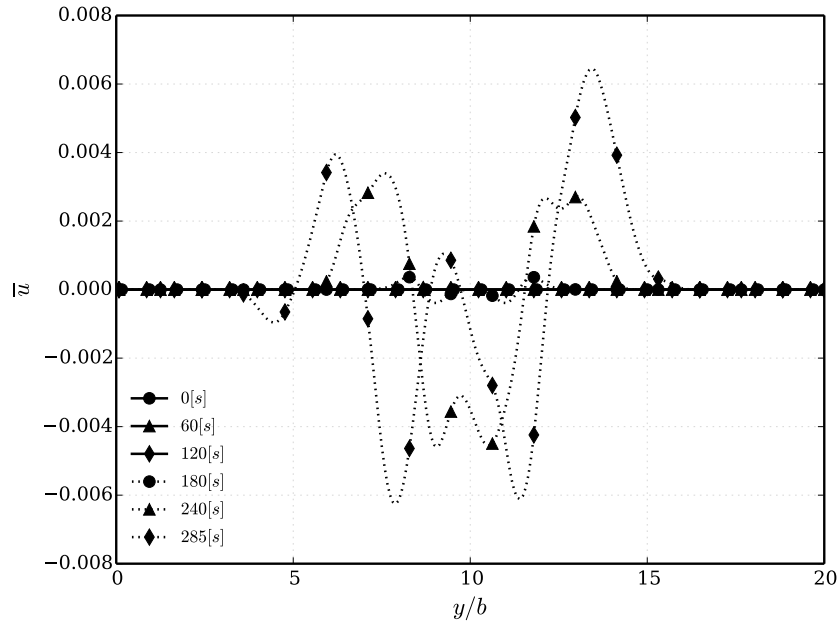


Figura 59 – Evolução do perfil de velocidade médio $\bar{u}$, ao longo do tempo, para esteira submetida à perturbação de magnitude 10^{-5} (caso #3).

6.4 Análise topológica

As subseções seguintes fornecem um estudo topológico, focado em evidenciar o comportamento das pequenas estruturas do escoamento, para os casos #1-3. Gráficos de dispersão de Q vs. R , $-Q_S$ vs. Q_W e Q_S vs. R_S são mostrados, e suas interpretações físicas são descritas em detalhes.

6.4.1 Mapas de Q vs R

Os mapas de invariância de Q vs. R aqui mostrados foram construídos utilizando os valores pontuais destas propriedades, em cada modo de Fourier pertencente ao plano central YZ . Para esta finalidade, somente os resultados das simulações *DNS* foram utilizados (casos #1, 2 e 3), tendo em vista que estes apresentariam maior riqueza de detalhes, frente aos resultados das simulações *LES* (casos #4, 5 e 6), que tiveram como finalidade possibilitar a comparação com o *DNS*. Assim, em posse de tais resultados, gráficos de dispersão foram construídos para cada passo de tempo da simulação.

As principais características observadas nos mapas (Q, R) do caso #1 (Fig. 60) apresentaram concordância com aquelas observadas por diversos autores (*c.f.* Soria et al. (1994), Sondergaard (1996), Silva e Pereira (2008)). No estágio de desenvolvimento de estruturas tridimensionais da esteira, nota-se que os pontos se organizam predominantemente nos quadrantes superior esquerdo e inferior direito, dando origem uma forma bem-definida, geralmente definida na literatura como *teardrop*, ou lágrima. Este formato foi observado também em diversos tipos de escoamentos turbulentos, incluindo turbulência isotrópica, escoamento de canais (SILVA; METAIS, 2002), e escoamentos cisalhantes compressíveis e incompressíveis. Ademais, foi obser-

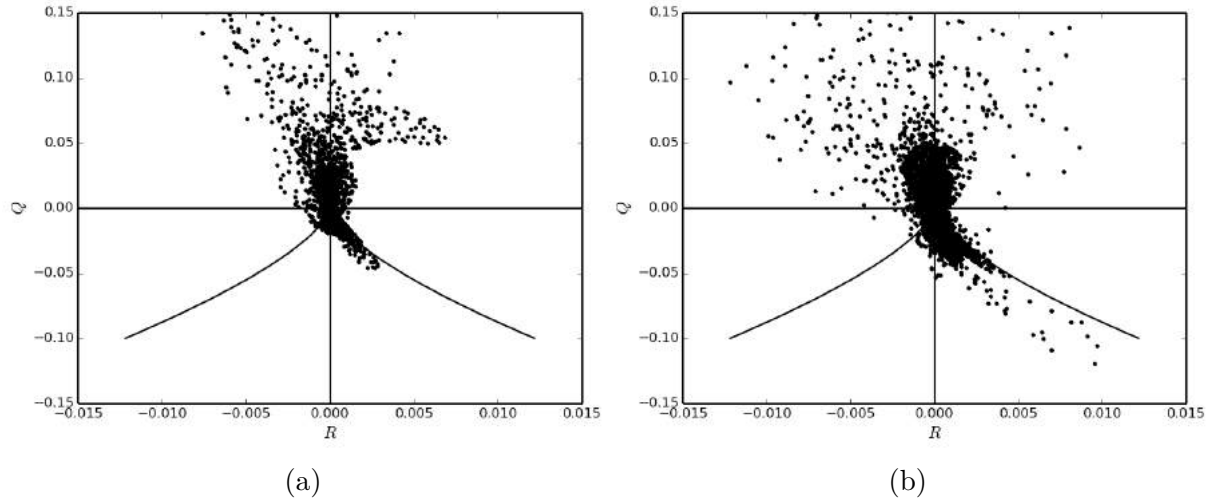


Figura 60 – Gráficos de dispersão de Q vs R , para uma amplitude de perturbação 10^{-3} (caso #1), nos instantes (a) $t = 180[s]$ e (b) $t = 240[s]$.

vado que a organização dos pontos neste formato específico está estritamente relacionado com a solução das equações de Navier-Stokes, dando suporte à teoria de que este formato possa ser universal (SORIA et al., 1994).

Ainda na Fig. 60, nota-se que os pontos tendem a se alinhar ao longo da região onde $D = 0$, no quadrante inferior direito. As partículas de fluido que se encontram nesta região tendem a dissipar elevados níveis de energia cinética. Note que, na Fig. 60-(a) e (b), mais pontos tendem a migrar para esta região em particular, o que vai de acordo com os resultados quantitativos já mostrados. Tal aumento de estruturas dissipativas pode ser explicado pelo aumento da quantidade de filamentos tridimensionais presentes no escoamento.

É possível observar ainda um aumento do número de pontos localizados em regiões distantes da origem, ao longo do desenvolvimento temporal da esteira, conforme ilustrado pela Fig. 60. Tal movimentação dos pontos sugere um aumento de partículas de fluido dotadas de gradientes de velocidade elevados. Uma vez que este aumento é mais intenso nos quadrantes superiores ($Q > 0$), os efeitos de rotação tendem a prevalecer sobre os efeitos de deformação, expressando o aumento dos movimentos espiralados no escoamento, bem como o aumento das estruturas coerentes identificadas pelas isosuperfícies de Q . Esta característica nem sempre é clara quando se analisam somente os resultados qualitativos, uma vez que estas estruturas podem ser ocultadas pela presença das estruturas coerentes no escoamento. Assim, a utilização dos mapas de (Q, R) facilita a identificação das estruturas com movimentos mais intensos.

Para os casos de perturbações amplitude mais baixa, as Figs. 61-62 mostram que, para os mesmos instantes de tempo mostrados na Fig. 60, os pontos presentes nos mapas de dispersão dos invariantes (Q, R) se localizam muito mais próximos à origem, devido à predominância de partículas de fluido dotadas de gradientes de velocidade mais baixos.

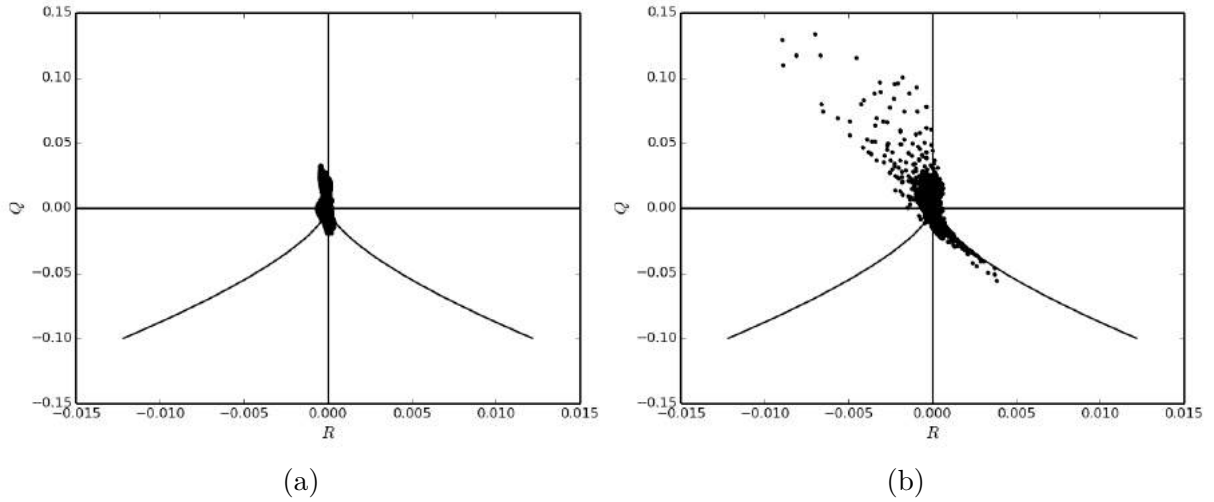


Figura 61 – Gráficos de dispersão de Q vs R , para uma amplitude de perturbação 10^{-4} (caso #2), nos instantes (a) $t = 180[s]$ e (b) $t = 240[s]$.

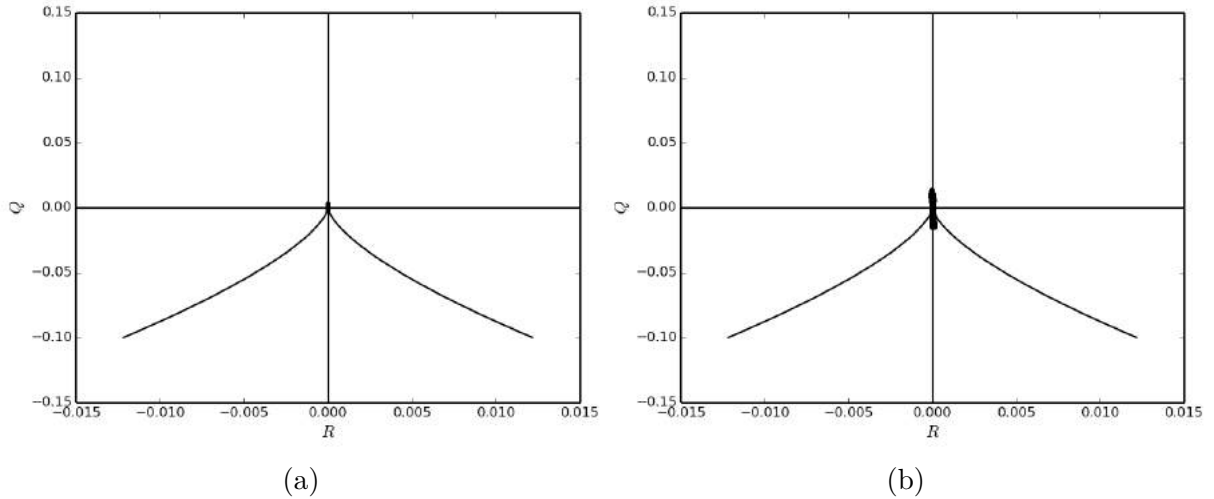


Figura 62 – Gráficos de dispersão de Q vs R , para uma amplitude de perturbação 10^{-5} (caso #3), nos instantes (a) $t = 180[s]$ e (b) $t = 240[s]$.

6.4.2 Mapas de $-Q_S$ vs Q_W

Esta seção se dedica a fornecer gráficos de dispersão do segundo invariante da taxa de deformação $-Q_S$ e da taxa de rotação, Q_W . Estes mapas são especialmente úteis na análise das características topológicas relacionadas à dissipação da energia cinética do escoamento (SILVA; PEREIRA, 2008).

A Fig. 63 mostra a evolução temporal da esteira simulada no caso #1. No instante $t = 180[s]$, observa-se que um grande número de pontos reside nas proximidades do eixo horizontal. Tais pontos representam as estruturas nas quais a densidade de enstrofia é consideravelmente maior do que a taxa de dissipação, como ocorre nas regiões externas dos vórtices em forma de tubos (SORIA et al., 1994). Tal comportamento, no qual o formato se assemelha a uma meia elipse, se mostra presente em escoamentos com a presença de estruturas tridimensionais (SONDERGAARD, 1996). Assim, este comportamento vai de encontro com os resultados observados na Fig. 32, que

apresentam forte dominância de filamentos tridimensionais, degenerados do processo de interação entre os grampos de cabelo e as instabilidades de Kelvin-Helmholtz.

No gráfico de dispersão mostrado na Fig. 63-(b), para o instante de tempo $t = 240[s]$, a topologia formada no espaço de invariância, antes de formato elíptico, evolui para a forma de uma letra L. Tal formato é reportado por Sondergaard (1996) como algo comum somente em escoamentos onde a turbulência ainda não atingiu o estágio de completo desenvolvimento.

A Fig. 64 mostra dois instantes de tempo para o caso #2. Devido à redução da perturbação, observa-se que a esteira, que ainda se encontra em seus estágios iniciais de transição, apresenta pontos menos dispersos, quando comparados com aqueles da Fig. 63. Para o instante $t = 180[s]$, os pontos se encontram próximos da linha $-Q_S = Q_W$, mostrando que o escoamento é dominado por estruturas com elevadas taxas de dissipação e densidade de enstrofia.

De maneira similar, para o caso #3, a esteira se encontra em seus estágios iniciais de desenvolvimento, mesmo para os instantes de tempo próximos ao limite da simulação. Vale ressaltar que, ao longo do tempo (*c.f.* Fig. 65), nota-se um claro aumento da banda, o que indica o aparecimento de quantidades semelhantes de pontos com predominância de densidade de enstrofia e taxa de deformação.

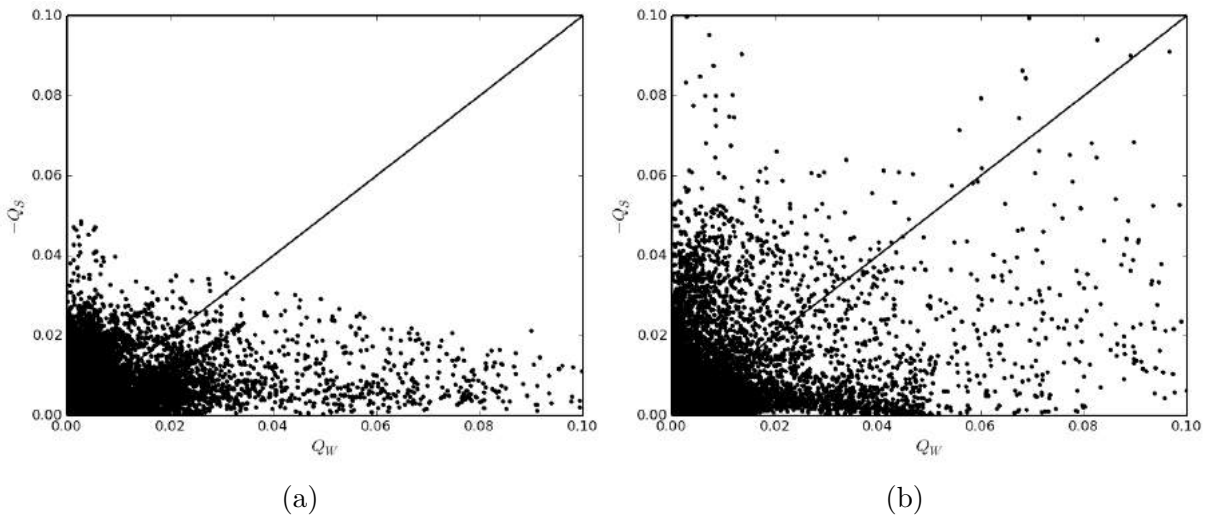


Figura 63 – Gráficos de dispersão de $-Q_S$ vs Q_W , para uma amplitude de perturbação 10^{-3} (caso #1), nos instantes (a) $t = 180[s]$ e (b) $t = 240[s]$.

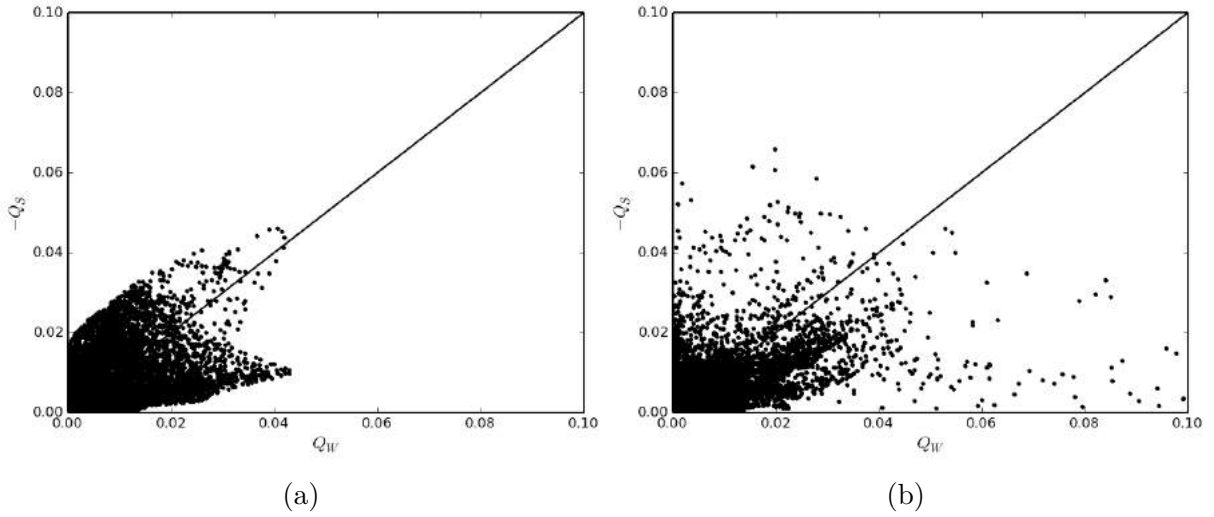


Figura 64 – Gráficos de dispersão de $-Q_S$ vs Q_W , para uma amplitude de perturbação 10^{-4} (caso #2), nos instantes (a) $t = 180[s]$ e (b) $t = 240[s]$.

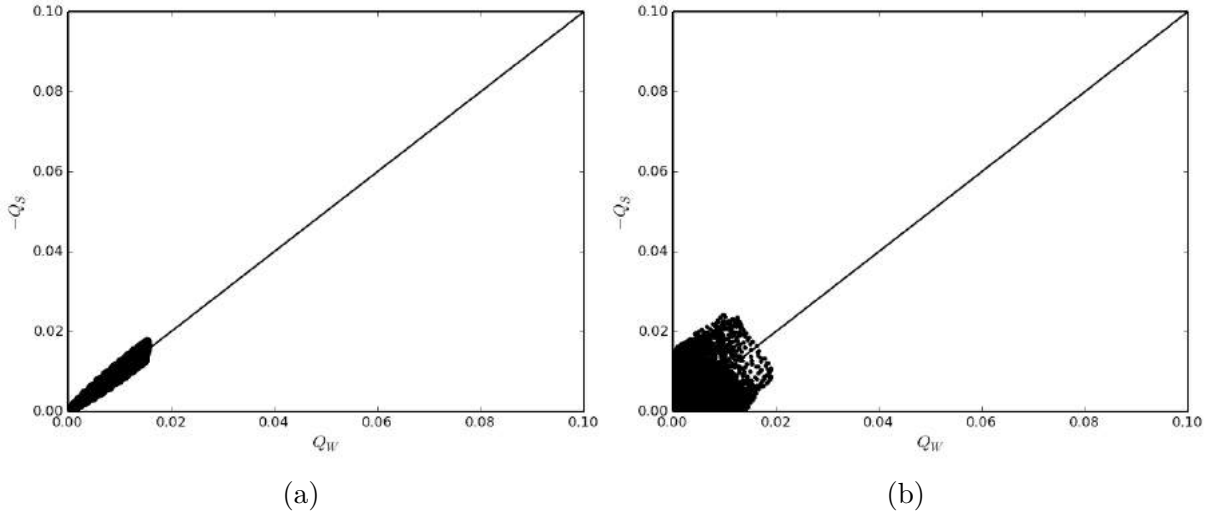


Figura 65 – Gráficos de dispersão de $-Q_S$ vs Q_W , para uma amplitude de perturbação 10^{-5} (caso #3), nos instantes (a) $t = 180[s]$ e (b) $t = 240[s]$.

6.4.3 Mapas de Q_S vs R_S

Por fim, esta seção expõe os gráficos de dispersão no espaço de invariância (Q_S, R_S) . Tais mapas possibilitam a identificação de regiões onde a dissipação de energia cinética no escoamento é mais intensa, bem como o comportamento geométrico das deformações locais das estruturas. Conforme observado em outros trabalhos, (SORIA et al., 1994; SONDERGAARD, 1996; SILVA; METAIS, 2002), é possível observar que, para os casos onde a perturbação inicial é maior (casos #1, 2), as partículas de fluido se organizam em uma orientação preferencial, predominantemente no quadrante inferior direito, com uma forte tendência de se alinharem ao ramo positivo da curva de discriminante nulo, $D_S = 0$. Tal região apresenta efeitos predominantes de expansão axi-simétrica.

Observe que, para os casos #1, 2 e 3, mostrados pelas Figs. 66-68, a dispersão de pontos se

localiza preferencialmente em uma região onde $R_S > 0$, o que indica a presença de estruturas na forma de folha no escoamento. A presença de tais estruturas pode ser melhor visualizada através de isosuperfícies do segundo invariante do tensor taxa de rotação, Q_W . Figuras mostrando a evolução temporal desta quantidade foram disponibilizadas no apêndice deste trabalho. Verifica-se que, uma vez que a turbulência não se desenvolveu plenamente em nenhum dos casos testados, é de se esperar que as estruturas na forma de folha estejam fortemente presentes, uma vez que estas só apresentam degeneração mais acentuada quando a esteira entra em regime não-linear.

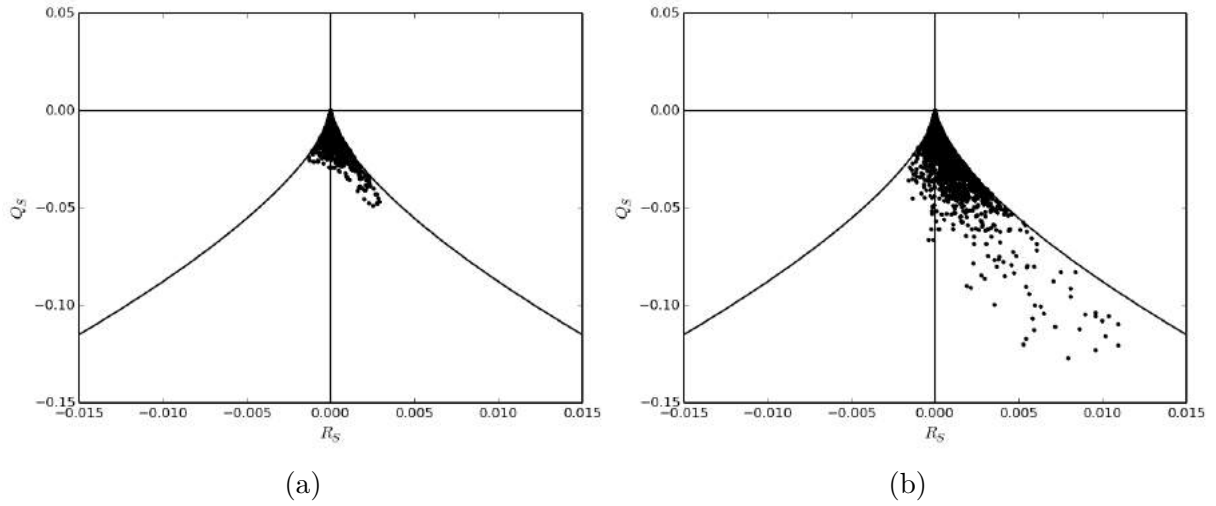


Figura 66 – Gráficos de dispersão Q_S vs R_S , para uma amplitude de perturbação 10^{-3} (caso #1), nos instantes (a) $t = 180[s]$ e (b) $t = 240[s]$.

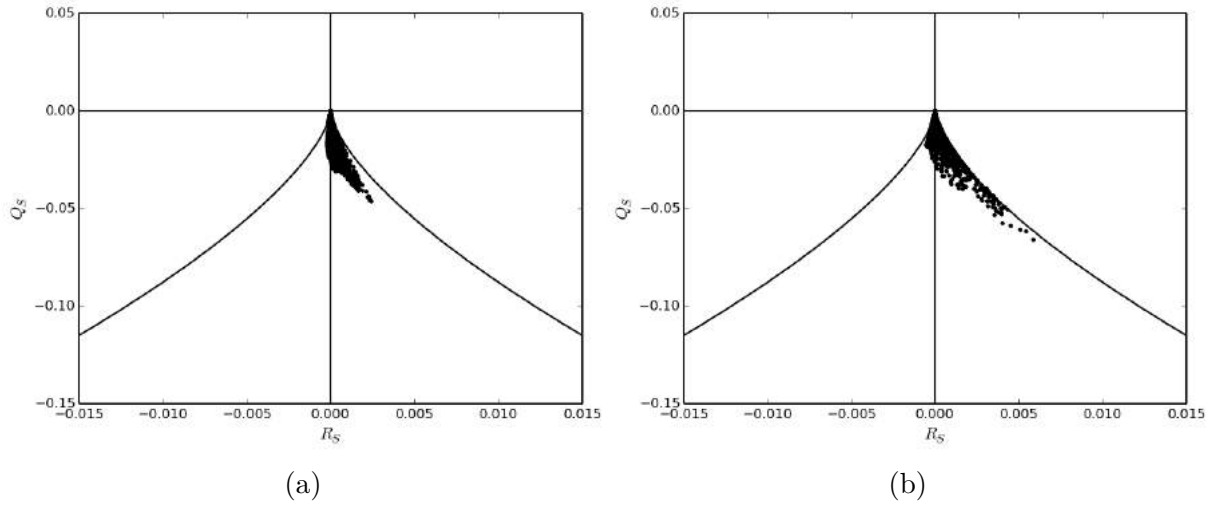


Figura 67 – Gráficos de dispersão Q_S vs R_S , para uma amplitude de perturbação 10^{-4} (caso #2), nos instantes (a) $t = 180[s]$ e (b) $t = 240[s]$.

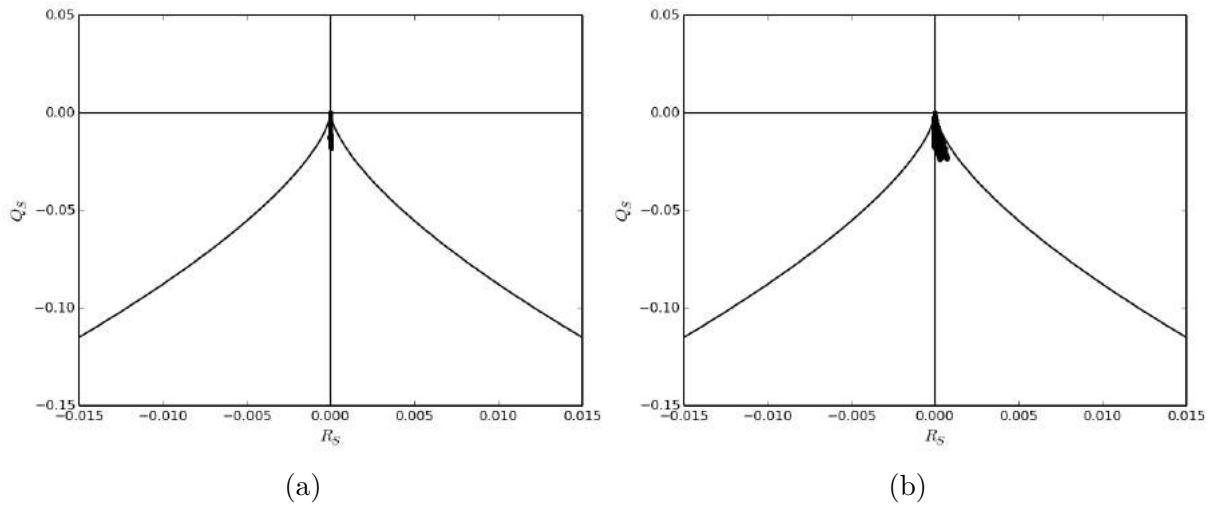


Figura 68 – Gráficos de dispersão Q_S vs R_S , para uma amplitude de perturbação 10^{-5} (caso #3), nos instantes (a) $t = 180[s]$ e (b) $t = 240[s]$.

7 Conclusões e trabalhos futuros

7.1 Conclusões

No presente trabalho, apresentou-se uma metodologia para a simulação de esteiras em transição e turbulentas em desenvolvimento temporal. O embasamento teórico-matemático foi explorado. Simulações numéricas de esteiras planas, submetidas a diferentes amplitudes de perturbação inicial foram realizadas, utilizando-se as abordagens *LES* e *DNS*.

O capítulo 1 introduz a presente dissertação, onde se caracteriza o problema estudado e as motivações, tanto teóricas quanto práticas, de realizar estudos e simulações de escoamentos turbulentos canônicos, em particular das esteiras turbulentas, tão presentes nas mais diversas aplicações industriais, tais como nas indústrias de defesa, aeronáutica e espaço, automobilística, dentre outras.

No capítulo 2, apresentou-se a revisão bibliográfica deste trabalho, mostrada num contexto histórico, onde foi descrita brevemente a importância do estudo da turbulência nos fluidos, e como a dinâmica dos fluidos computacional vêm ganhando importância, juntamente com os experimentos materiais, no desenvolvimento de produtos em engenharia e na própria pesquisa teórica nos campos da física e da matemática. Neste capítulo, justificou-se a relevância do presente trabalho, levando-se em conta as grandes dificuldades e limitações existentes nas simulações *DNS* utilizando o método espectral de Fourier. Verificou-se que, em contraste com os avanços obtidos no entendimento dos estágios iniciais de desenvolvimento das esteiras turbulentas, pouco se sabe em relação às suas características na região não-linear. Motivado por tal carência de estudos teóricos, o presente trabalho se dedicou a realizar simulações de esteiras sujeitas a diferentes amplitudes de perturbação inicial, a fim de comparar o efeito das condições iniciais sobre o desenvolvimento das instabilidades secundárias.

O capítulo 3 aborda os modelos matemáticos utilizados. Primeiramente, foram deduzidas, de maneira didática, sem no entanto abrir mão do formalismo matemático envolvido, as equações da continuidade e da quantidade de movimento linear. Tratou-se ainda, com alto nível de detalhe, o método que foi utilizado neste trabalho, visando a resolução de escoamentos incompressíveis, denominado método pseudoespectral de Fourier. Este método utiliza séries de Fourier como funções de aproximação. Ele permite ainda a transformação das variáveis primitivas das EDP's, estando estas inicialmente no espaço físico, para o espaço de Fourier. Este espaço funcional caracteriza-se pela presença de propriedades atrativas do ponto de vista computacional; destaca-se a transformação de derivadas do espaço físico em produtos de números complexos, no espaço de Fourier. Por fim, aplicou-se diretamente o método espectral de Fourier para escoamentos incompressíveis. Este capítulo discute ainda as três principais abordagens de turbulência existentes, *DNS*, *LES* e *RANS*, bem como as técnicas de visualização das estruturas coerentes presentes nos escoamentos turbulentos.

Um resumo dos métodos numéricos utilizados é mostrado no capítulo 4. Foram explicados, com alto nível de detalhe, os métodos de discretização temporal para a resolução dos modelos matemáticos previamente deduzidos. Mostrou-se que o método de Euler é um caso particular de uma família de métodos conhecida como métodos de Runge-Kutta. Tabelas e equações mostram os modelos finais utilizados para as simulações dos escoamentos. Fez-se ainda uma breve introdução ao método de análise de erros conhecido como método das soluções manufaturadas (*MMS*), que se baseia em adicionar termos-fonte às equações diferenciais, para que as funções propostas como solução satisfaçam as EDP's algebricamente.

O método *MMS* foi utilizado para a verificação do código *IMERSPEC3DP*, mostrado no capítulo 5 e os resultados se mostraram satisfatórios. Os resultados da verificação do código indicam que a precisão do método pseudoespectral de Fourier na ordem de 10^{-15} , sendo, portanto, da ordem de erros de máquina, ou seja, para problemas periódicos, pode-se esperar que a solução do problema coincida com a solução analítica das funções *MMS* testadas e, em última instância, represente fidedignamente a dinâmica do escoamento, diferenciando-se da solução analítica somente por erros oriundos do próprio processamento dos computadores.

Por fim, o capítulo 6 mostra os resultados das simulações realizadas com o auxílio do código *IMERSPEC3DP* para esteiras planas em desenvolvimento temporal, sujeitas a perturbações randômicas de diferentes amplitudes, impostas como condições iniciais. A análise qualitativa permitiu a comparação da eficiência da utilização do módulo da vorticidade $|\omega|$ frente ao segundo invariante do tensor gradiente de velocidade, Q , quando utilizados como critérios de identificação de vórtices. Foi mostrado que a vorticidade tende a identificar com menor acurácia as estruturas coerentes nos estágios iniciais da esteira, e que para este fim, a utilização de Q é recomendada.

Figuras mostrando o desenvolvimento temporal das esteiras sob diferentes amplitudes de perturbação foram disponibilizadas, evidenciando a relação entre a amplitude de perturbação e o tempo necessário para a transição e posterior degeneração das instabilidades primárias em estruturas tridimensionais. Estruturas coerentes primárias, tais como as instabilidades do tipo grampos de cabelo, de von Kármán e de Kelvin-Helmholtz foram identificadas, e dois mecanismos de pareamento, causadores do entrelaçamento de tais estruturas, foram discutidos.

Em termos de resultados quantitativos, foram mostrados os espectros de energia cinética turbulenta de todas as simulações, para determinados instantes de tempo específicos, possibilitando a comparação entre as simulações *LES* e *DNS*. Tal comparação permitiu a validação da simulação *DNS* do presente trabalho, tal como realizado por diversos autores aqui citados. Gráficos do resíduo da continuidade mostram a acurácia do método pseudoespectral empregado no presente trabalho. Curvas com os perfis médios de velocidade foram também disponibilizados, para eventual necessidade de comparações futuras.

A fim de complementar os resultados qualitativos e quantitativos obtidos, um breve estudo da topologia do escoamento no espaço de invariantes foi realizado. Gráficos de dispersão das quantidades invariantes foram analisados, permitindo uma interpretação física dos estágios de desenvolvimento das diversas escalas de estruturas presentes no escoamento, bem como correlações qualitativas da densidade de enstrofia e da dissipação viscosa de energia cinética.

7.2 Sugestões para trabalhos futuros

As sugestões para trabalhos futuros incluem:

- A extensão da metodologia apresentada para simulações de escoamentos compressíveis;
- Simulação de esteiras compressíveis em desenvolvimento temporal, para estudo da influência do número de Mach no método pseudoespectral de Fourier;
- A incorporação de domínio infinito na direção y , reduzindo a influência da periodicidade na dinâmica da esteira.

Referências

- ALLAMPALLI, V.; HIXON, R. High-accuracy large-step explicit Runge–Kutta (HALE-RK) schemes for computational aeroacoustics. *Journal of Computational ...*, 2009. 16, 70, 71, 87
- BERLAND, J.; BOGEY, C.; BAILLY, C. Low-dissipation and low-dispersion fourth-order Runge–Kutta algorithm. *Computers & Fluids*, v. 35, n. 10, p. 1459–1463, dez. 2006. ISSN 00457930. 70
- BLACKBURN, H. M.; MANSOUR, N. N.; CANTWELL, B. J. Topology of fine-scale motions in turbulent channel flow. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 310, p. 269, 1996. ISSN 0022-1120. 129
- BOLIS, A. *Fourier Spectral - hp Element Method : Investigation of Time-Stepping and Parallelisation Strategies*. Tese (Doutorado), 2013. 35
- BUTCHER, J. A history of Runge-Kutta methods. *Applied numerical mathematics*, v. 20, p. 247–260, 1996. 67
- BUXTON, O. Fine scale features of turbulent shear flows. 2011. 25
- CANUTO, C. et al. *Spectral methods in fluid dynamics*. [S.l.: s.n.], 1988. 567 p. 10, 35, 36, 37, 38, 47, 52, 109
- CHEN, J. H.; CANTWELL, B. J.; MANSOUR, N. N. The effect of Mach number on the stability of a plane supersonic wake. *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*, v. 2, n. 6, p. 984, 1990. ISSN 08998213. 26, 33
- CHONG, M. S.; PERRY, a. E.; CANTWELL, B. J. A general classification of three-dimensional flow fields. *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*, v. 2, n. 1990, p. 765–777, 1990. ISSN 08998213. 62, 129
- CIMBALA, J. M.; NAGIB, H. M.; ROSHKO, A. Large structure in the far wakes of two-dimensional bluff bodies. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 190, p. 265–298, 1988. 31, 32
- COLEMAN, N. A Derivation of the Navier-Stokes Equations. *B.S. Undergraduate Mathematics Exchange*, v. 7, n. 1, p. 20–26, 2010. 42
- COOLEY, J. W.; TUKEY, J. W. An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series. *Mathematics of computation*, v. 19, n. 90, p. 297–301, 1965. 36, 46
- CORKE, T. C.; KRULL, J. D.; GHASSEMI, M. Three-dimensional-mode resonance in far wakes. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 239, p. 99–132, 1992. 32
- COURANT, R.; FRIEDRICHS, K.; LEWY, H. On the partial difference equations of mathematical physics. *IBM journal of Research and ...*, n. March, 1967. 87
- FIGUEIREDO, D. G. *Análise de Fourier e equações diferenciais parciais*. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2000. (Projeto Euclides). ISBN 9788524401206. 36
- FINLAYSON, B.; SCRIVEN, L. The method of weighted residuals—a review. *Appl. Mech. Rev.*, 1966. 36
- FU, H.; LIU, C. A buffered Fourier spectral method for non-periodic PDE. *International Journal of Numerical Analysis and Modeling*, v. 9, n. 2, p. 460–478, 2012. ISSN 17055105. 37

- GERMANO, M. et al. A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model. v. 1760, n. 1991, 1990. ISSN 08998213. 105
- GRANT, H. L. The large eddies of turbulent motion. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 4, n. 02, p. 149–190, 1958. 31
- HARTEN, A. et al. Uniformly High Order Accurate Essentially Non-oscillatory Schemes, {III}. *Journal of Computational Physics*, v. 131, n. 1, p. 3–47, 1997. ISSN 0021-9991. 35
- HU, G. H.; SUN, D. J.; YIN, X. Y. A numerical study of dynamics of a temporally evolving swirling jet. *Physics of Fluids*, v. 13, n. 2001, p. 951–965, 2001. ISSN 10706631. 84
- HUNT, J. C. R.; WRAY, a. a.; MOIN, P. *Eddies, streams, and convergence zones in turbulent flows*. 1988. 193–208 p. 61, 64
- JEONG, J.; HUSSAIN, F. On the identification of a vortex. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 285, p. 69–94, 1995. 60, 61, 64, 87
- JIMENEZ, J. Near-wall turbulence. *Physics of Fluids*, v. 25, 2013. ISSN 10706631. 59
- KARNIADAKIS, G. E.; TRIANTAFYLLOU, G. S. Frequency selection and asymptotic states in laminar wakes. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 199, p. 441–469, 1989. 30
- KARNIADAKIS, G. E.; TRIANTAFYLLOU, G. S. Three-dimensional dynamics and transition to turbulence in the wake of bluff objects. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 238, p. 1–30, 1992. 30
- KO, D. R.; KUBOTA, T.; LEES, L. Finite disturbance effect on the stability of a laminar incompressible wake behind a flat plate. *J. Fluid Mech.*, v. 40, n. 2, p. 315–341, 1970. 30
- KOLMOGOROV, A. N. The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*1, v. 30, n. 1940, 1941. 25, 27
- LAMB, H. *Hydrodynamics*. Dover, New York: Cambridge University Press, 1895. 60
- LELE, S. K. Compact finite difference schemes with spectral-like resolution. *Journal of Computational Physics*, v. 103, n. 1, p. 16–42, 1992. ISSN 00219991. 35
- LESIEUR, M. *Turbulence in fluids*. 4. ed. Dordrecht, The Netherlands: Springer, 2008. ISBN 9781402064340. 10, 22, 26, 27, 37, 54, 56, 105
- LESIEUR, M.; METAIS, O.; COMTE, P. *Large-eddy simulations of turbulence*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2005. ISBN 0521781248. 58
- LIU, Y.; VINOKUR, M.; WANG, Z. Spectral (finite) volume method for conservation laws on unstructured grids V: Extension to three-dimensional systems. *Journal of Computational Physics*, v. 212, n. 2, p. 454–472, mar. 2006. ISSN 00219991. 35
- LO, S. Eddy Structures in a Simulated Plane Turbulent Jet Educued by Pattern Recognition Analysis. In: VOKE, P.; KLEISER, L.; CHOLLET, J.-P. (Ed.). *Direct and Large-Eddy Simulation I SE - 3*. [S.l.]: Springer Netherlands, 1994, (Fluid Mechanics and Its Applications, v. 26). p. 25–36. ISBN 978-94-010-4434-9. 31
- LUGT, H. The Dilemma of Defining a Vortex. In: MULLER, U.; ROESNER, K. G.; SCHMIDT, B. (Ed.). *Recent Developments in Theoretical and Experimental Fluid Mechanics SE - 32* [S.l.]: Springer Berlin Heidelberg, 1979. p. 309–321. ISBN 978-3-642-67222-4. 60
- MARIANO, F. P. *Solução numérica das equações de Navier-Stokes usando uma hibridação das metodologias fronteira imersa e pseudo-espectral de Fourier*. 151 p. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Uberlândia, 2011. 23, 25, 38, 48, 52

- MATHEW, J.; BASU, A. J. An economical method for direct numerical simulation studies of transitional round jets. *Computers and Fluids*, v. 30, p. 543–554, 2001. ISSN 00457930. 39
- MEIBURG, E.; LASHERAS, J. C. Experimental and numerical investigation of the three-dimensional transition in plane wakes. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 190, p. 1, 1988. ISSN 0022-1120. 12, 88, 99
- MOREIRA, L. *Modelagem matemática de jatos em desenvolvimento espacial usando a metodologia pseudoespectral de Fourier*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Uberlândia, 2011. 38, 54, 56, 57, 58, 81, 85
- MOSER, R. D.; ROGERS, M. M. Direct simulation of a self-similar plane wake. In: *AGARD Symp. on App. of DNS and LES* Chania, Crete, Greece: [s.n.], 1994. p. 248–255. 10, 32, 33, 39, 84, 85, 86, 105
- RAYLEIGH, L. On the stability, or instability, of certain fluid motions. s1-11, p. 57–72, 1879. 28
- REYNOLDS, O. An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels. *The Royal Society*, v. 174, n. 1883, p. 935–982, 1883. 25
- ROACHE, P. J. A pseudo-spectral FFT technique for non-periodic problems. *Journal of Computational Physics*, v. 27, p. 204–220, 1978. 37
- ROACHE, P. J. Code Verification by the Method of Manufactured Solutions. *Journal of Fluids Engineering*, v. 124, n. 1, p. 4–10, nov. 2001. ISSN 0098-2202. 72
- ROBINSON, S. K. Coherent motions in the turbulent boundary layer. 1991. ISSN 00664189. 60
- ROGERS, M. M.; MOSER, R. D. The three-dimensional evolution of a plane mixing layer: the Kelvin–Helmholtz rollup. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 243, p. 183–226, 1992. 32, 33
- ROGERS, M. M.; MOSER, R. D. Spanwise scale selection in plane mixing layers. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 247, p. 321–337, 1993. 32
- SALARI, K.; KNUPP, P. *Code verification by the method of manufactured solutions*. Albuquerque, NM, 2000. 124 p. 72
- SATO, H.; KURIKI, K. The mechanism of transition in the wake of a thin flat plate placed parallel to a uniform flow. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 11, n. 03, p. 321–352, 1961. 30, 86, 89
- SATO, H.; SAITO, H. Artificial control of the laminar-turbulent transition of a two-dimensional wake by external sound. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 84, n. 04, p. 657–672, 1978. 30
- SILVA, C. B.; METAIS, O. Vortex control of bifurcating jets: A numerical study. *Physics of Fluids*, v. 14, n. 11, p. 3798–3819, 2002. ISSN 10706631. 11, 88, 90, 113, 117
- SILVA, C. B. da; PEREIRA, J. C. F. Invariants of the velocity-gradient, rate-of-strain, and rate-of-rotation tensors across the turbulent/nonturbulent interface in jets. *Physics of Fluids*, v. 20, n. May, p. 1–18, 2008. ISSN 10706631. 10, 63, 64, 84, 113, 115, 129, 130
- SILVEIRA-NETO, A. *Fundamentos da turbulência nos fluidos*. [S.l.: s.n.], 2010. 1–52 p. 10, 28, 49, 50, 51, 56, 57, 59
- SMAGORINSKY, J. Generical circulation experiments with the primitive equations. *Monthly Weather Review*, American Meteorological Society, v. 91, n. 3, p. 99–164, mar. 1963. ISSN 0027-0644. 58

- SMIRNOV, a.; SHI, S.; CELIK, I. Random Flow Generation Technique for Large Eddy Simulations and Particle-Dynamics Modeling. *Journal of Fluids Engineering*, v. 123, p. 359, 2001. ISSN 00982202. 85
- SONDERGAARD, R. *Direct numerical simulation of a temporally evolving incompressible plane wake: effect of initial conditions on evolution and topology*. Wright-Patterson OH, 1996. 10, 24, 55, 59, 61, 62, 63, 64, 84, 85, 86, 110, 113, 115, 116, 117
- SONDERGAARD, R.; CANTWELL, B.; MANSOUR, N. *Direct numerical simulation of a temporally evolving incompressible plane wake: effect on initial conditions on evolution and topology*. Stanford, CA, 1997. 187–258 p. 129
- SORIA, J. et al. A study of the fine-scale motions of incompressible time-developing mixing layers. *Physics of Fluids*, v. 6, n. 1994, p. 871, 1994. ISSN 10706631. 64, 113, 114, 115, 117, 128, 129, 130
- SOUZA, A. M. de. *Análise numérica da transição à turbulência em escoamentos de jatos circulares livres*. 180 p. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Uberlândia, 2005. 22, 23, 29, 39
- STIPCICH, G. *High-order methods for computational fluid dynamics*. 177 p. Tese (Doutorado) — Università degli Studi di Trieste, 2012. 35
- SU, Y. *Collocation spectral methods in the solution of Poisson equation*. 1–34 p. Tese (Doutorado) — The University of British Columbia, 1998. 36
- TANI, H. et al. A numerical study on a temporal mixing layer under transcritical conditions. *Computers and Fluids*, Elsevier Ltd, v. 85, p. 93–104, 2013. ISSN 00457930. 10, 33, 34, 39
- TENNEKES, H.; LUMLEY, J. L. *A first course in turbulence*. Boston, MA, USA: MIT Press, 1972. 27–104 p. 26
- TORTORELLI, D. A. *Solid Mechanics : Analysis and Design with the Finite Element Method*. Urbana, IL: University of Illinois at Urbana-Champaign, 2010. 479 p. 45
- TOWNSEND, A. A. Entrainment and the structure of turbulent flow. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 41, n. 01, p. 13–46, 1970. 10, 31
- VILLELA, M. F. S. *Modelagem matemática de escoamentos bifásicos usando o método espectral de Fourier*. 83 p. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Uberlândia, 2011. 38, 52
- VILLIERS, E. de. *The potential of large eddy simulation for the modeling of wall bounded flows*. Tese (Doutorado) — Imperial College of Science, Technology and Medicine, 2006. 23, 26, 29
- WANG, Z. et al. Direct numerical simulation of subsonic round turbulent jet. *Flow, Turbulence and Combustion*, v. 84, p. 669–686, 2010. ISSN 13866184. 10, 33, 34
- WILLIAMSON, C. H. K. The natural and forced formation of spot-like in the transition of a wake. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 243, p. 393–441, 1992. 32
- WYGNANSKI, I.; CHAMPAGNE, F.; MARASLI, B. On the large-scale structures in two-dimensional, small-deficit, turbulent wakes. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 168, p. 31–71, 1986. 31, 33
- YANG, W. B. et al. Investigation of plane mixing layer using large eddy simulation. *Computational Mechanics*, v. 34, p. 423–429, 2004. ISSN 01787675. 10, 33

Apêndices

APÊNDICE A – Guia para a construção e análise dos mapas de invariância

Nos últimos anos, o rápido desenvolvimento da computação científica vem viabilizando a realização de simulações de alta acurácia, tais como as simulações *DNS* e, mais recentemente, as chamadas simulações *HR-DNS* (High-Resolution Direct Numerical Simulation). Tais abordagens geram uma grande quantidade de dados, que por si só não permitem, de imediato, a elaboração de comentários conclusivos sobre o comportamento do escoamento. Assim, para que se possa tirar conclusões sobre o escoamento simulado, tais dados devem ser pós-processados a fim de tornar os resultados acessíveis visualmente.

Apesar do contínuo desenvolvimento dos *softwares* de visualização de escoamentos, o aumento da quantidade de dados gerados nas simulações de alta resolução dificulta a utilização dos métodos clássicos de visualização, tais como campos de velocidade, pressão e temperatura. Neste sentido, a utilização de técnicas mais eficientes de visualização pode ser de grande auxílio para o pesquisador, evitando o desperdício de tempo e esforço computacional.

Uma técnica que vem se tornando cada vez mais conhecida na literatura consiste na utilização de quantidades invariantes para a construção dos chamados *mapas de invariância*, que permitem identificar, de maneira concisa, diversas características do escoamento que seriam impossíveis de serem visualizadas com os métodos tradicionais. A análise desses mapas permite que se extraia, no mesmo gráfico, informações quantitativas e qualitativas, sendo portanto uma ferramenta versátil para qualquer tipo de escoamento. Além disso, a utilização de quantidades invariantes faz com que os resultados obtidos sejam independentes do sistema de coordenadas utilizado.

Em particular, no caso dos escoamentos incompressíveis, a utilização dos invariantes do tensor gradiente de velocidade se torna ainda mais vantajosa, tendo em vista que o espaço de invariância tridimensional se reduz a uma região compacta bidimensional, como consequência do fato do primeiro invariante do tensor gradiente de velocidade, P , ser identicamente nulo. Destaca-se ainda que os mapas de invariância permitem analisar individualmente a topologia das várias escalas que compõem os escoamentos, uma vez que as escalas se localizam em diferentes regiões do plano, sendo portanto facilmente identificáveis (SORIA et al., 1994).

Outro importante aspecto do método, descrito por (SORIA et al., 1994), consiste na possibilidade de se fazer associações entre as características estruturais presentes nos mapas de invariância com padrões topológicos locais do fluido no espaço físico. Este tipo de análise se mostrou de grande utilidade para a captura de variações súbitas no escoamento, tais como o fenômeno de transição e descolamento de camada limite.

O presente capítulo visa explicar em detalhes a construção dos mapas de invariância utilizados na análise topológica da Sec. 6.4. Na subseção A.1, o procedimento de construção dos

mapas de dispersão é explicado. Na subseção A.2, descreve-se as principais características de cada mapa, a fim de permitir ao leitor sua correta utilização.

A.1 Procedimento para a construção dos mapas

O procedimento para a construção dos mapas de invariância para casos incompressíveis é explicado por diversos autores (*e.g.* Soria et al. (1994), Blackburn, Mansour e Cantwell (1996), Sondergaard, Cantwell e Mansour (1997), Silva e Pereira (2008), dentre outros). O procedimento, para escoamentos incompressíveis, é descrito resumidamente abaixo. Para casos compressíveis, recomenda-se leitura prévia do trabalho de Chong, Perry e Cantwell (1990), para que se faça as adaptações necessárias:

- Calcular o tensor gradiente de velocidade, com as nove derivadas parciais que o constituem, $\partial u_i / \partial x_j = A_{ij}$, para cada nó da região considerada do domínio computacional. Dependendo do tipo de análise que se deseja realizar, pode-se considerar somente uma dada região do escoamento (*e.g.*, próximo à parede, como realizado por Blackburn, Mansour e Cantwell (1996)), ou, alternativamente, um plano que seja representativo no escoamento, tal como realizado no presente trabalho.
- Calcular as componentes dos tensores taxa de deformação S_{ij} e taxa de rotação W_{ij} , utilizando as componentes do tensor gradiente de velocidade, como se segue:

$$S_{ij} = \frac{1}{2} (A_{ij} + A_{ji}), \quad (\text{A.1})$$

$$W_{ij} = \frac{1}{2} (A_{ij} - A_{ji}). \quad (\text{A.2})$$

Note que, com base nas equações acima, pode-se concluir que o tensor taxa de deformação será simétrico (*i.e.*, $S_{ij} = S_{ji}$), e que, em contrapartida, o tensor taxa de rotação será anti-simétrico (*i.e.*, $W_{ij} = -W_{ji}$).

- Calcular as quantidades invariantes Q, R, Q_S, Q_W, R_S relativas a cada nó do domínio considerado. Tais quantidades podem ser diretamente obtidas à partir das componentes do tensor gradiente de velocidade (*c.f.* Sec. 3.5.2), como se segue:

$$Q = -\frac{1}{2} (A_{ij} A_{ji}), \quad (\text{A.3})$$

$$R = -\frac{1}{3} (A_{ij} A_{jk} A_{ki}), \quad (\text{A.4})$$

$$Q_S = -\frac{1}{2} (S_{ij} S_{ji}), \quad (\text{A.5})$$

$$Q_W = -\frac{1}{2} (W_{ij} W_{ji}), \quad (\text{A.6})$$

$$R_S = -\frac{1}{3} (S_{ij} S_{jk} S_{ki}). \quad (\text{A.7})$$

- Construir gráficos para os pares (Q, R) , (Q_S, R_S) e $(-Q_S, Q_W)$ obtidos no domínio de interesse. Tais gráficos podem ser vistos como gráficos de dispersão, conforme os mostrados

no presente trabalho. Soria et al. (1994) destaca que, na prática, tais gráficos são de grande utilidade quando se deseja investigar as características topológicas das pequenas escalas do escoamento, que são, na grande maioria das vezes, dotadas de gradientes de velocidade elevados. Os pontos relativos à tais estruturas tendem a se localizar nas regiões mais distantes da origem dos mapas, podendo ser identificados com clareza nos gráficos de dispersão.

Quando se deseja estudar as características das estruturas com forte coerência, os gráficos de dispersão possuem a tendência natural de sobrepor os pontos distribuídos, ocultando certos resultados. Neste caso, alguns autores preferem substituir os gráficos de dispersão habituais por isocontornos de funções densidade de probabilidade conjuntas (*e.g.* Silva e Pereira (2008)).

A.2 Análise topológica e utilização

Uma vez construídos, os mapas de invariância podem ser prontamente analisados, com base na Fig. 14. A utilização de cada um dos mapas é sumarizada abaixo, conforme descrito por Silva e Pereira (2008):

- Mapas (Q, R) : permitem analisar as relações entre a topologia local do escoamento com a dominância dos efeitos de estiramento ou compressão, bem como delimitar as regiões de predominância de vórtices (regiões onde $Q > 0$) ou estruturas hiperbólicas (regiões onde $Q < 0$). Com base nessas informações, é possível inferir diretamente o comportamento dos elementos de fluido em questão no espaço físico, e se estes estão submetidos à compressão ou estiramento.
- Mapas (R_S, Q_S) : permitem verificar a topologia local do escoamento, dando informações sobre o quão próximo da compressão (ou estiramento) axi-simétrico uma determinada partícula de fluido se encontra. Assim, tais mapas permitem ao leitor inferir com clareza se determinada região apresenta predominância de estiramento ou compressão, e quais os mecanismos causadores de tais efeitos.
- Mapas $(Q_W, -Q_S)$: são particularmente úteis para verificar a topologia associada à dissipação de energia cinética. Pontos localizados próximos à linha horizontal, Q_W , representam partículas com alta enstrofia e baixa dissipação; as estruturas típicas que se localizam nesta região apresentam o formato de tubos de vórtices. Já os pontos localizados próximos à linha vertical, $-Q_S$ representam partículas de fluido dotadas de alta dissipação e baixa densidade de enstrofia. Em instantes de tempo (no caso de análises temporais) ou em regiões do espaço (em se tratando de escoamentos espaciais) onde os pontos se concentrem próximos à linha $Q_W = -Q_S$, pode-se afirmar que existe um equilíbrio entre estruturas com alta taxa de dissipação e enstrofia; nesses casos, a estrutura predominante possui o formato de folha.

APÊNDICE B – Resultados complementares da análise qualitativa das simulações *DNS*

Tabela 7 – Amplitudes da perturbação inicial para os casos DNS

Caso #	a_u, a_v, a_w	Modelo de turbulência	Modos de Fourier
1	1×10^{-3}	<i>DNS</i>	$256 \times 256 \times 512$
2	1×10^{-4}	<i>DNS</i>	$256 \times 256 \times 512$
3	1×10^{-5}	<i>DNS</i>	$256 \times 256 \times 512$

B.1 Isosuperfícies de Q

Disponibiliza-se neste apêndice os gráficos das isosuperfícies do segundo invariante do tensor gradiente de velocidade, Q , relativos às simulações *DNS*, que foram omitidos do texto principal por razões de legibilidade. As figuras ilustram a evolução temporal desta quantidade, para os casos #1 (*c.f.* Fig. 69), #2 (*c.f.* Fig. 70) e #3 (*c.f.* Fig. 71).

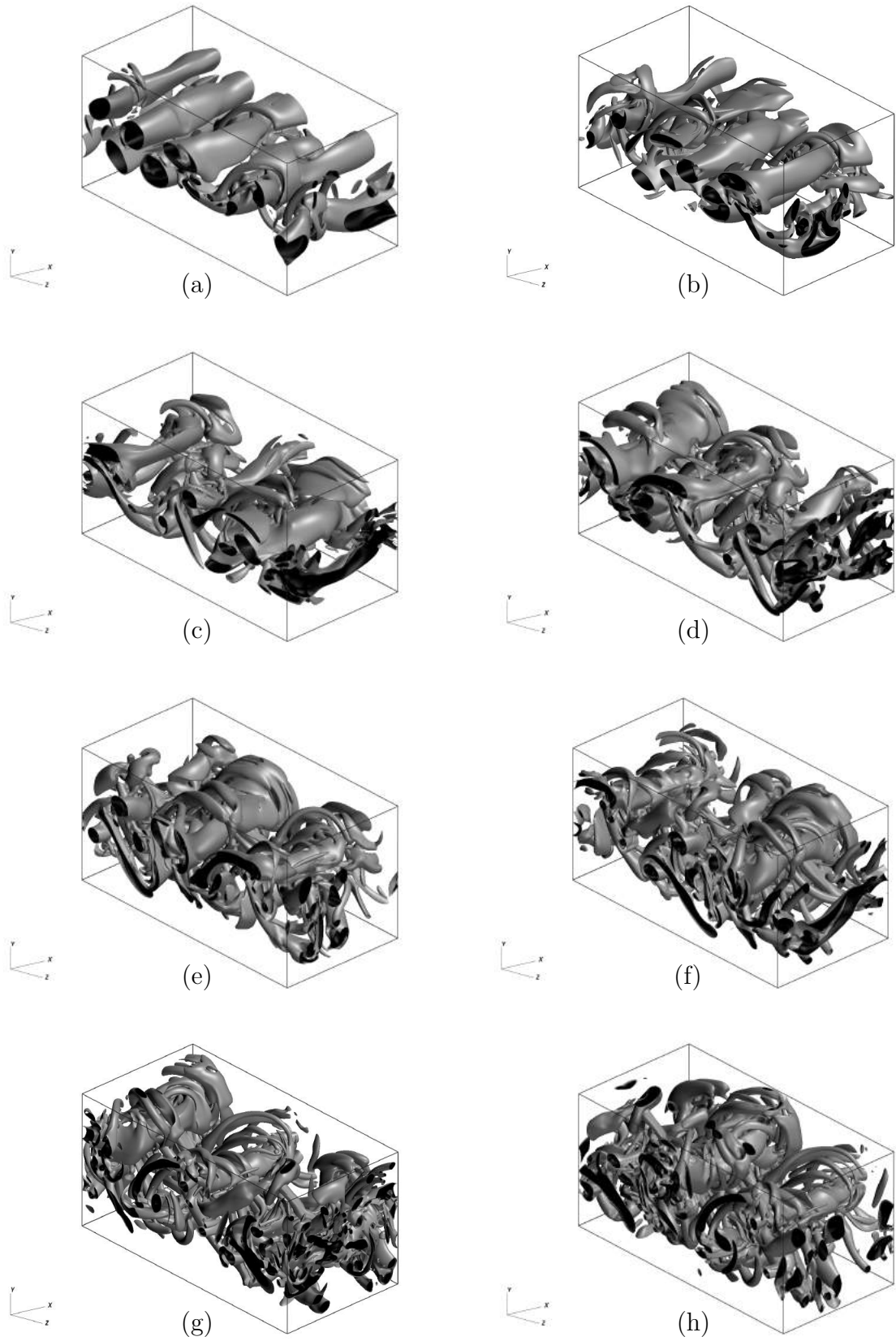


Figura 69 – Evolução temporal das isosuperfícies de Q , da esteira plana em desenvolvimento temporal, submetida à perturbação de magnitude 10^{-3} (caso #1), para: (a) $t = 180[s]$, (b) $t = 195[s]$, (c) $t = 210[s]$, (d) $t = 225[s]$, (e) $t = 240[s]$, (f) $t = 255[s]$, (g) $t = 270[s]$, (h) $t = 285[s]$.

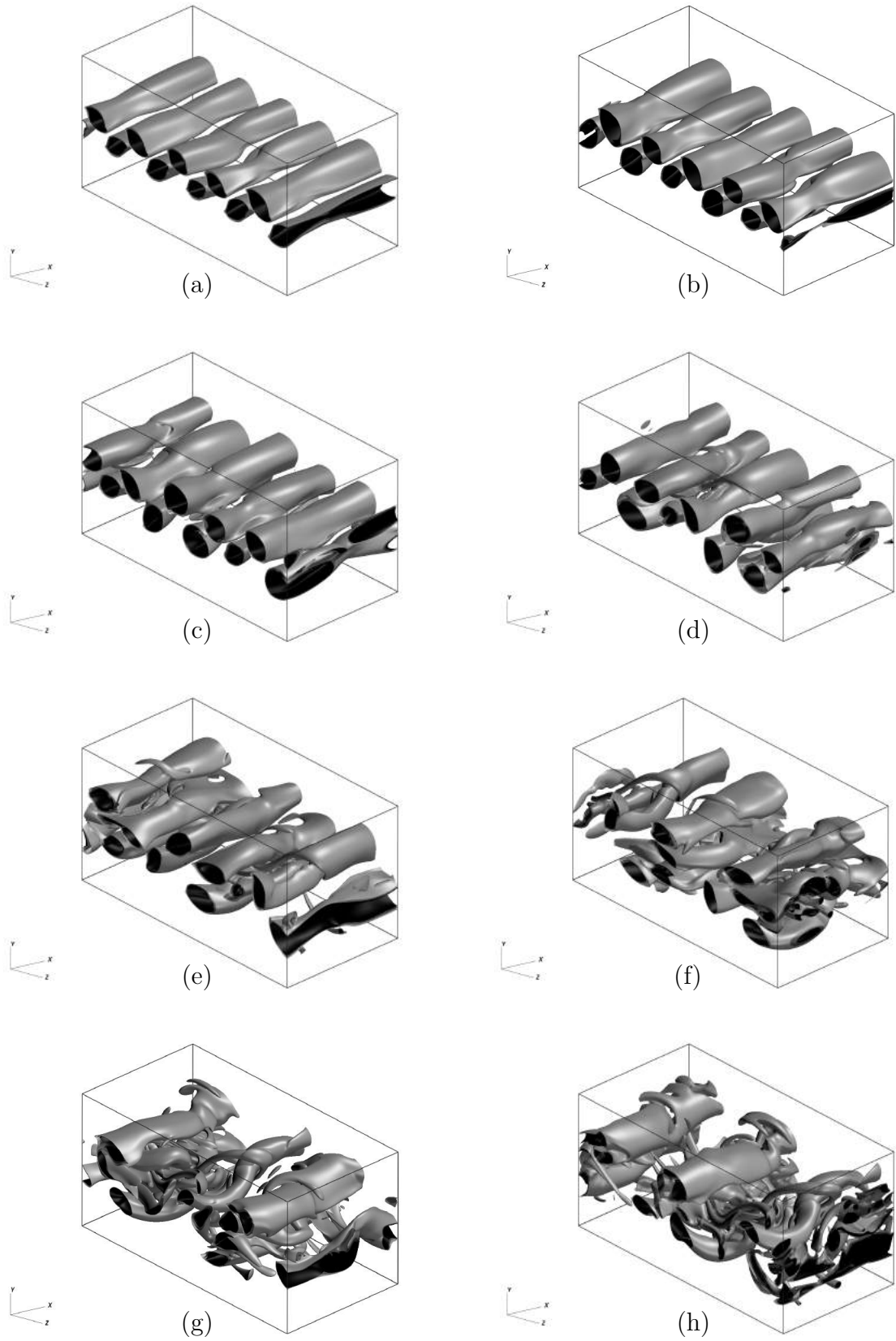


Figura 70 – Evolução temporal das isosuperfícies de Q , da esteira plana em desenvolvimento temporal, submetida à perturbação de magnitude 10^{-4} (caso #2), para: (a) $t = 180[s]$, (b) $t = 195[s]$, (c) $t = 210[s]$, (d) $t = 225[s]$, (e) $t = 240[s]$, (f) $t = 255[s]$, (g) $t = 270[s]$, (h) $t = 285[s]$.

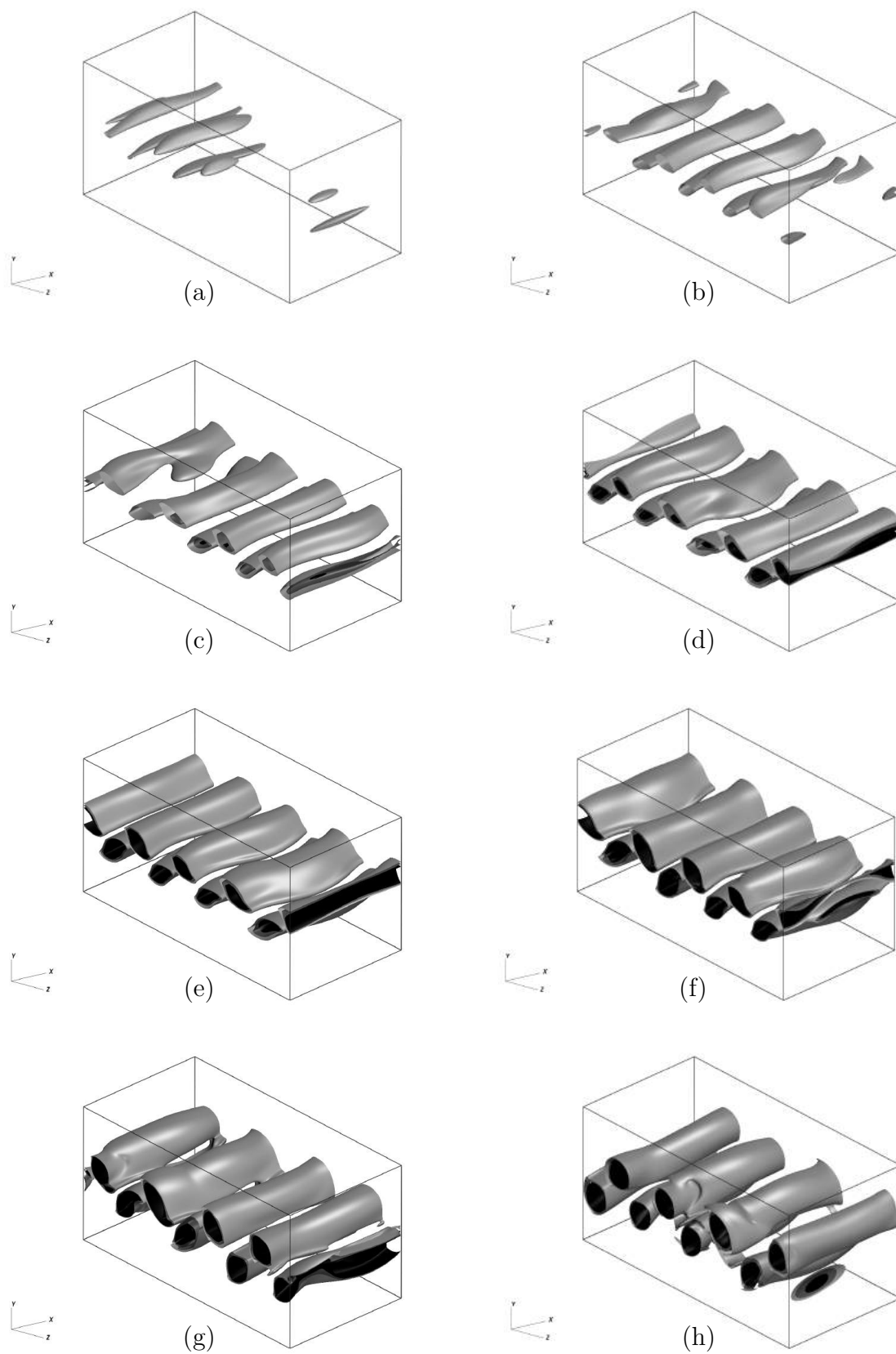


Figura 71 – Evolução temporal das isosuperfícies de Q , da esteira plana em desenvolvimento temporal, submetida à perturbação de magnitude 10^{-5} (caso #3), para: (a) $t = 180[s]$, (b) $t = 195[s]$, (c) $t = 210[s]$, (d) $t = 225[s]$, (e) $t = 240[s]$, (f) $t = 255[s]$, (g) $t = 270[s]$, (h) $t = 285[s]$.

B.2 Isosuperfícies de Q_W

Disponibiliza-se neste apêndice os gráficos das isosuperfícies do segundo invariante do tensor taxa de rotação, Q_W , relativos às simulações *DNS*, que foram omitidos do texto principal por razões de legibilidade. As figuras ilustram a evolução temporal desta quantidade, para os casos #1 (*c.f.* Fig. 72), #2 (*c.f.* Fig. 73) e #3 (*c.f.* Fig. 74).

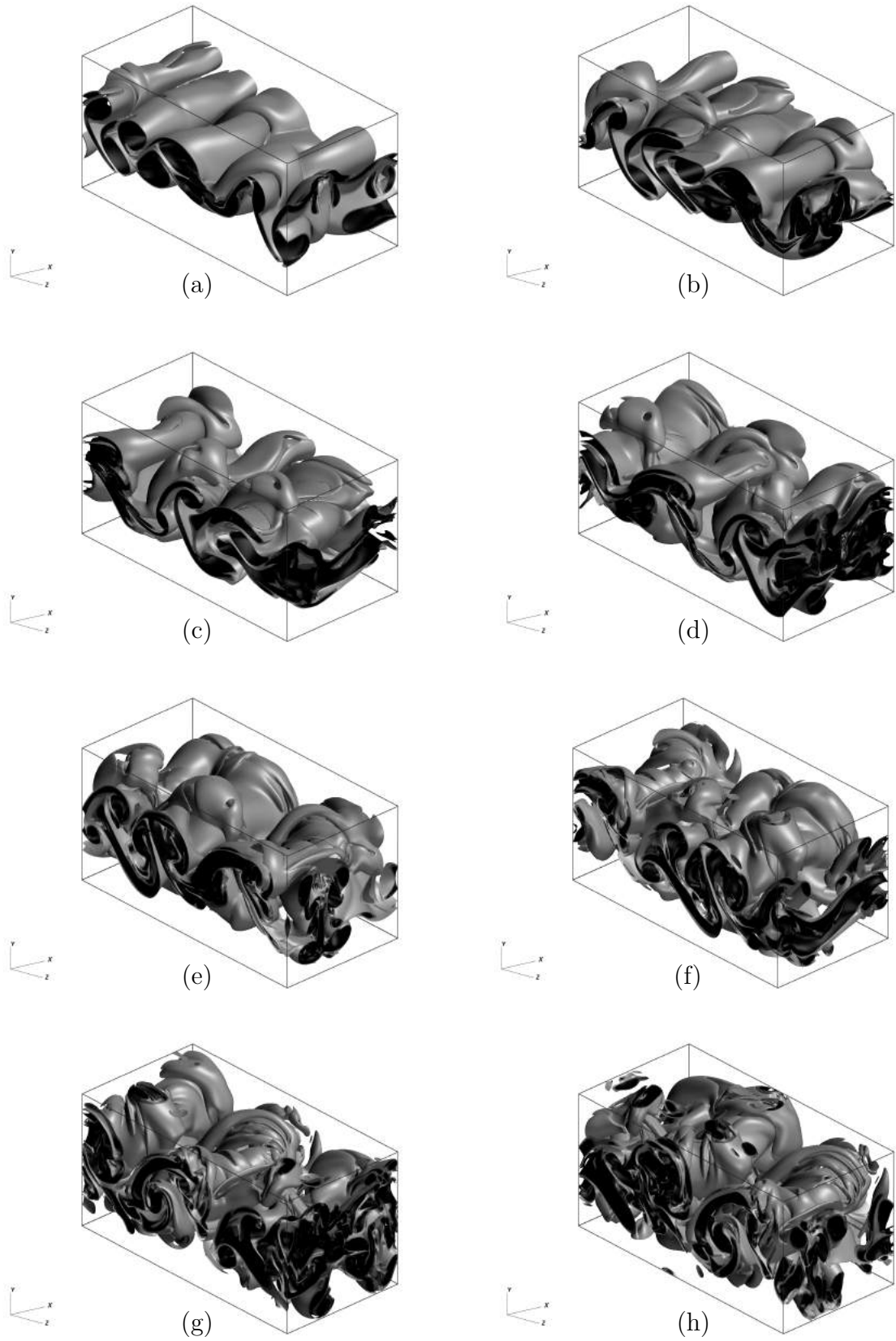


Figura 72 – Evolução temporal das isosuperfícies de Q_W , da esteira plana em desenvolvimento temporal, submetida à perturbação de magnitude 10^{-3} (caso #1), para: (a) $t = 180[s]$, (b) $t = 195[s]$, (c) $t = 210[s]$, (d) $t = 225[s]$, (e) $t = 240[s]$, (f) $t = 255[s]$, (g) $t = 270[s]$, (h) $t = 285[s]$.

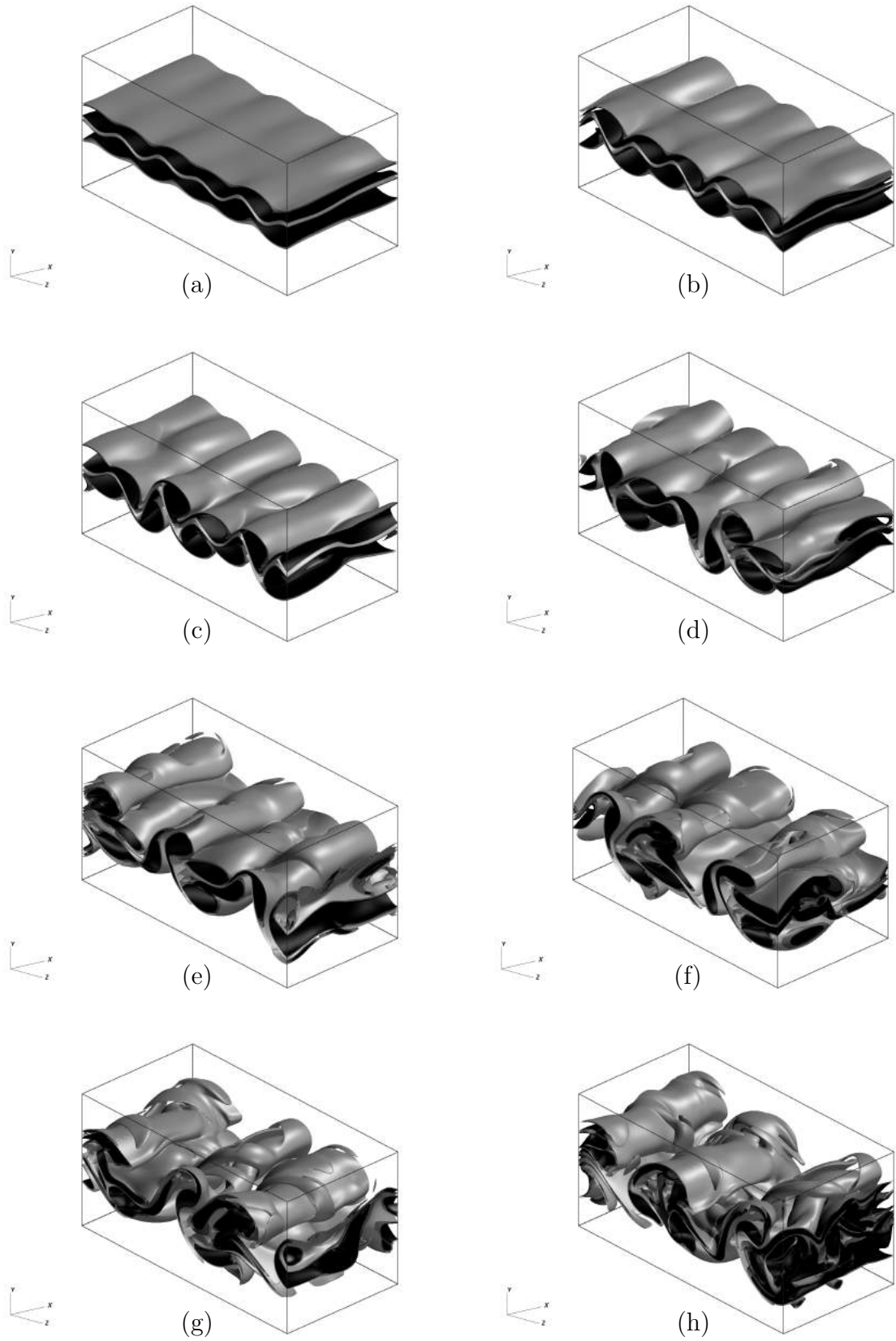


Figura 73 – Evolução temporal das isosuperfícies de Q_W , da esteira plana em desenvolvimento temporal, submetida à perturbação de magnitude 10^{-4} (caso #2), para: (a) $t = 180[s]$, (b) $t = 195[s]$, (c) $t = 210[s]$, (d) $t = 225[s]$, (e) $t = 240[s]$, (f) $t = 255[s]$, (g) $t = 270[s]$, (h) $t = 285[s]$.

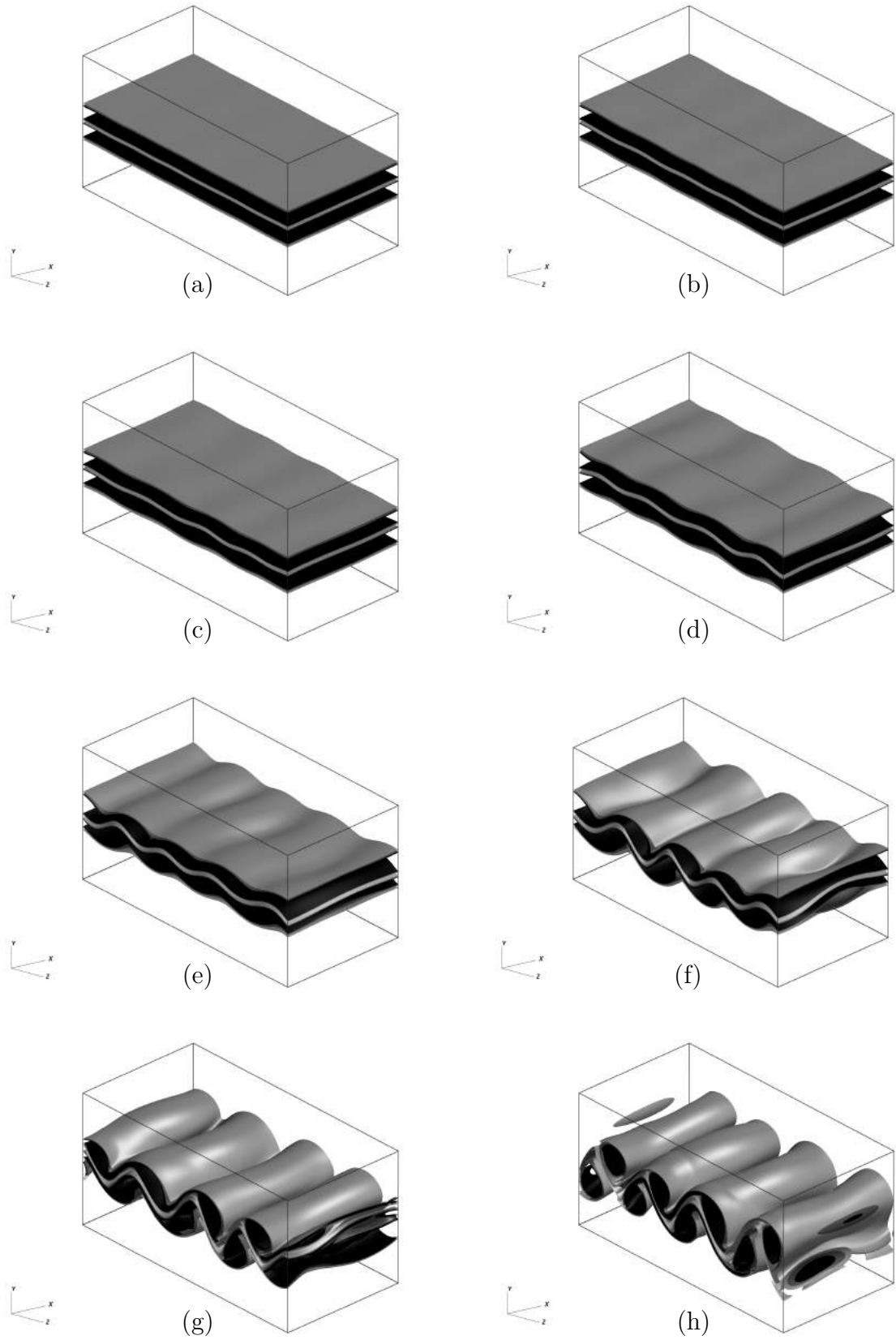


Figura 74 – Evolução temporal das isosuperfícies de Q_W , da esteira plana em desenvolvimento temporal, submetida à perturbação de magnitude 10^{-5} (caso #3), para: (a) $t = 180[s]$, (b) $t = 195[s]$, (c) $t = 210[s]$, (d) $t = 225[s]$, (e) $t = 240[s]$, (f) $t = 255[s]$, (g) $t = 270[s]$, (h) $t = 285[s]$.

APÊNDICE C – Resultados complementares da análise topológica das simulações *DNS*

C.1 Mapas de Q vs R

Disponibiliza-se neste apêndice os gráficos de dispersão das quantidades Q vs R relativos às simulações *DNS*, que foram omitidos do texto principal por razões de legibilidade. As figuras ilustram a evolução temporal desta quantidade, para os casos #1 (*c.f.* Fig. 75), #2 (*c.f.* Fig. 76) e #3 (*c.f.* Fig. 77).

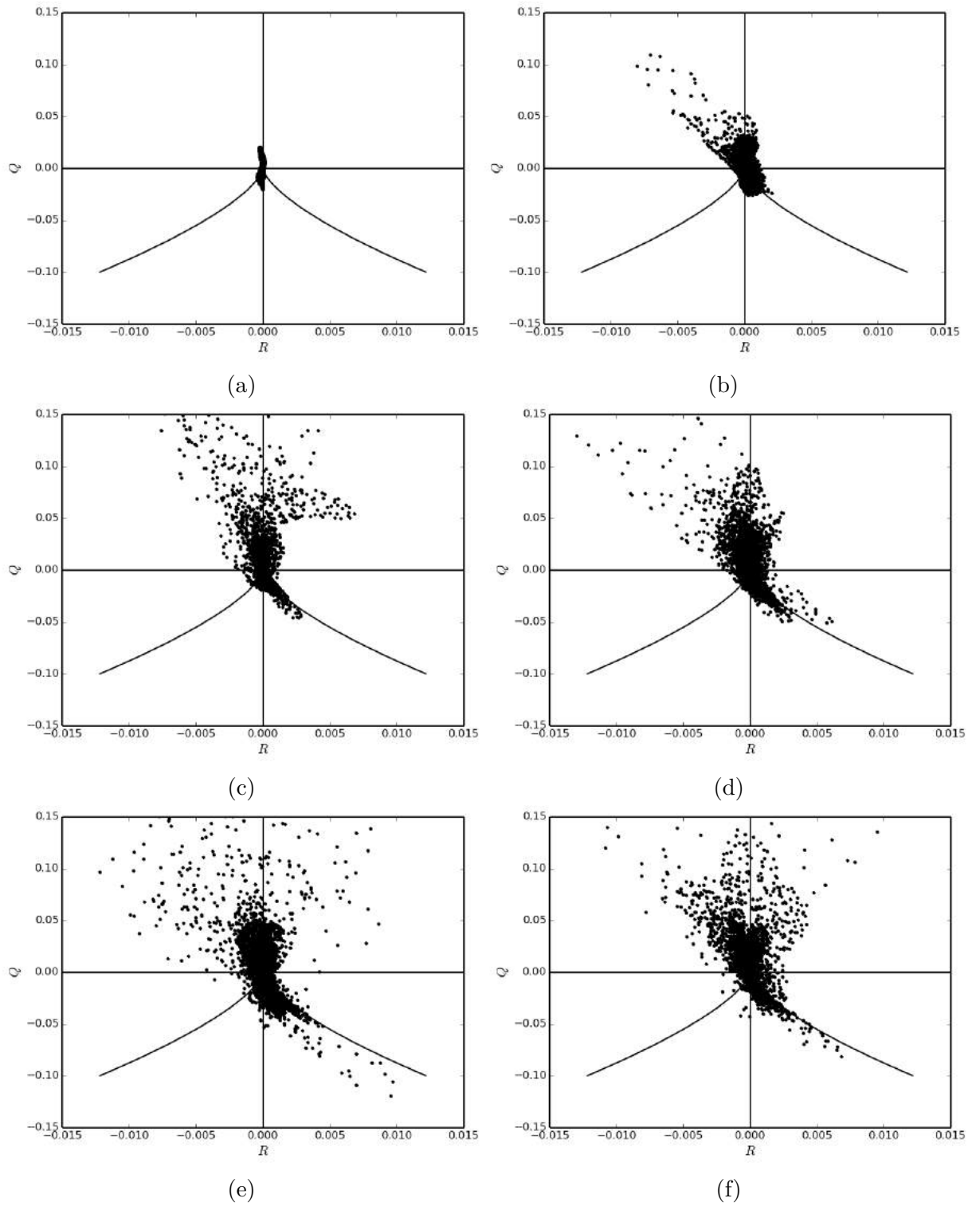


Figura 75 – Gráficos de dispersão de Q vs R , para uma amplitude de perturbação 10^{-3} (caso #1), nos instantes: (a) $t = 135[s]$, (b) $t = 165[s]$, (c) $t = 195[s]$, (d) $t = 225[s]$, (e) $t = 255[s]$, (f) $t = 285[s]$.

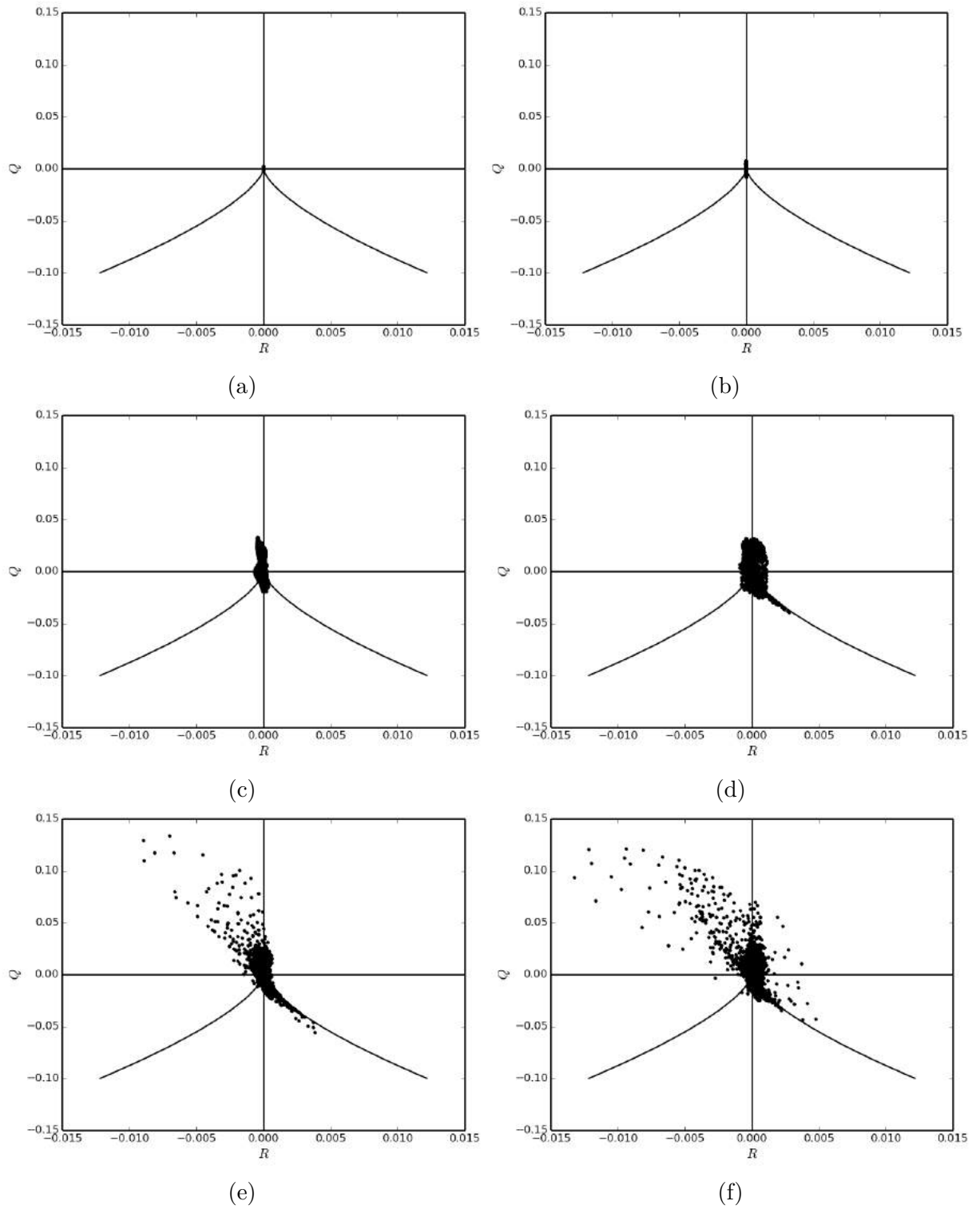


Figura 76 – Gráficos de dispersão de Q vs R , para uma amplitude de perturbação 10^{-4} (caso #2), nos instantes: (a) $t = 135[s]$, (b) $t = 165[s]$, (c) $t = 195[s]$, (d) $t = 225[s]$, (e) $t = 255[s]$, (f) $t = 285[s]$.

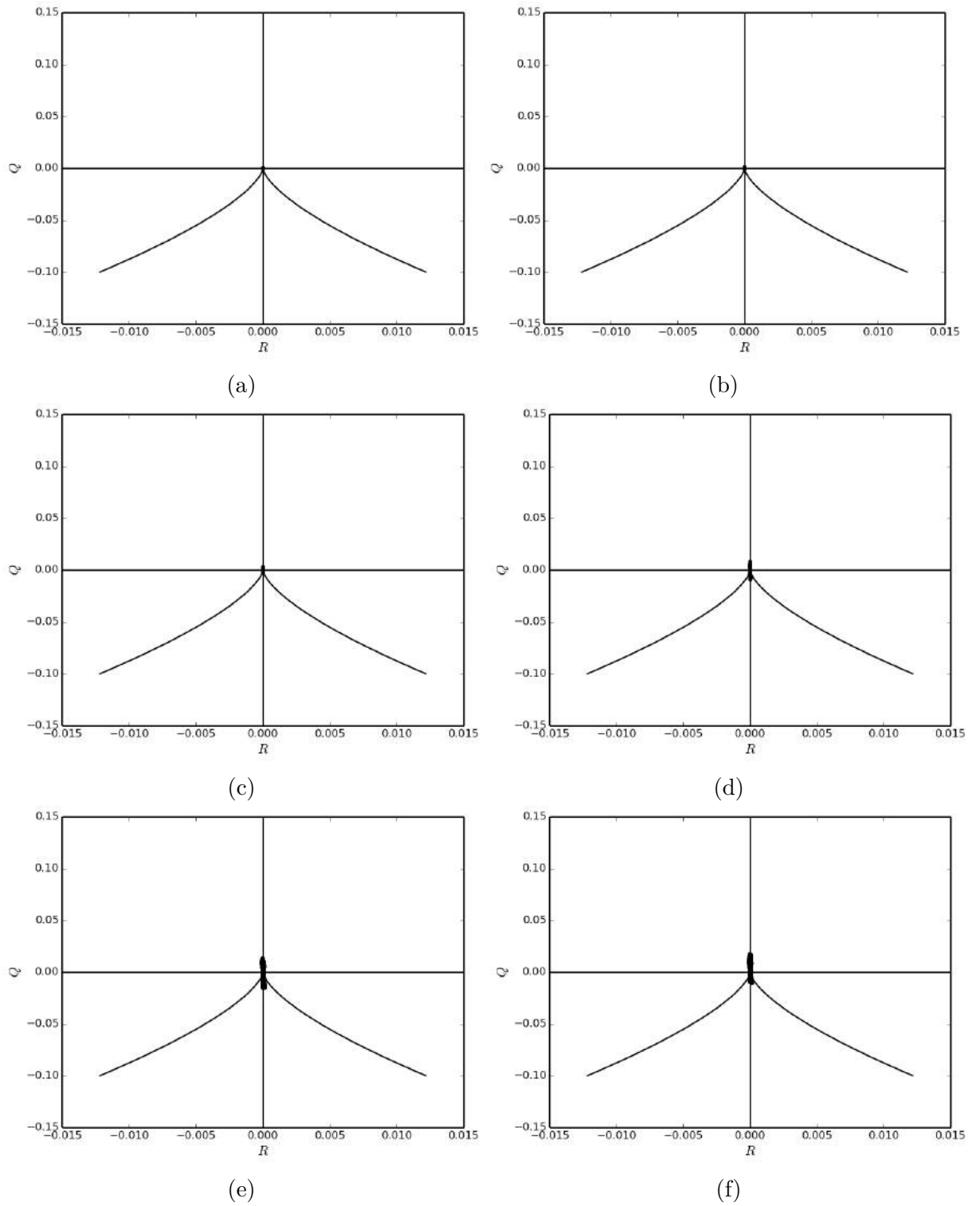


Figura 77 – Gráficos de dispersão de Q vs R , para uma amplitude de perturbação 10^{-5} (caso #3), nos instantes: (a) $t = 135[s]$, (b) $t = 165[s]$, (c) $t = 195[s]$, (d) $t = 225[s]$, (e) $t = 255[s]$, (f) $t = 285[s]$.

C.2 Mapas de $-Q_S$ vs Q_W

Disponibiliza-se neste apêndice os gráficos de dispersão das quantidades $-Q_S$ vs Q_W relativos às simulações *DNS*, que foram omitidos do texto principal por razões de legibilidade. As figuras ilustram a evolução temporal desta quantidade, para os casos #1 (*c.f.* Fig. 78), #2 (*c.f.* Fig. 79) e #3 (*c.f.* Fig. 80).

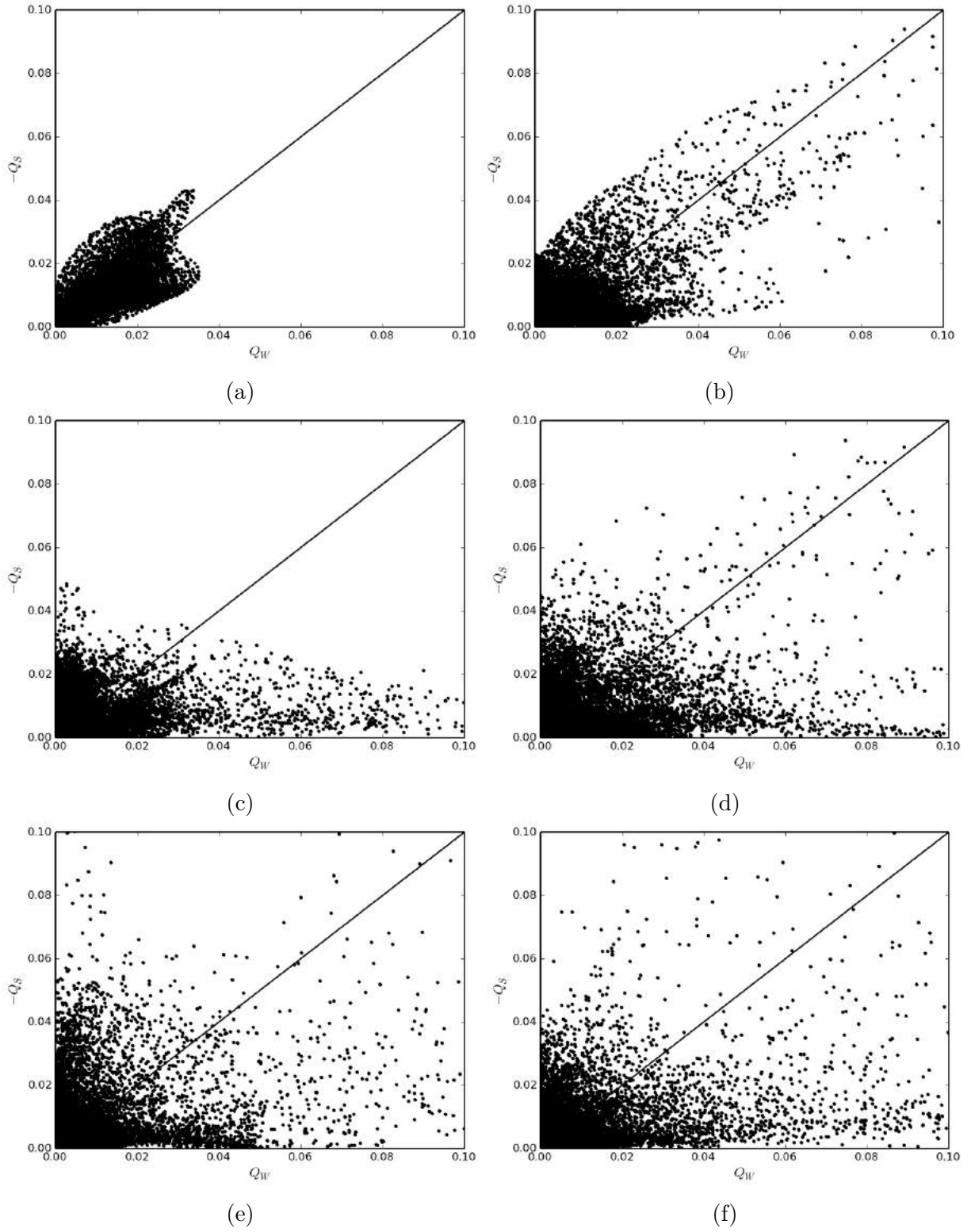


Figura 78 – Gráficos de dispersão de $-Q_S$ vs Q_W , para uma amplitude de perturbação 10^{-3} (caso #1), nos instantes: (a) $t = 135[s]$, (b) $t = 165[s]$, (c) $t = 195[s]$, (d) $t = 225[s]$, (e) $t = 255[s]$, (f) $t = 285[s]$.

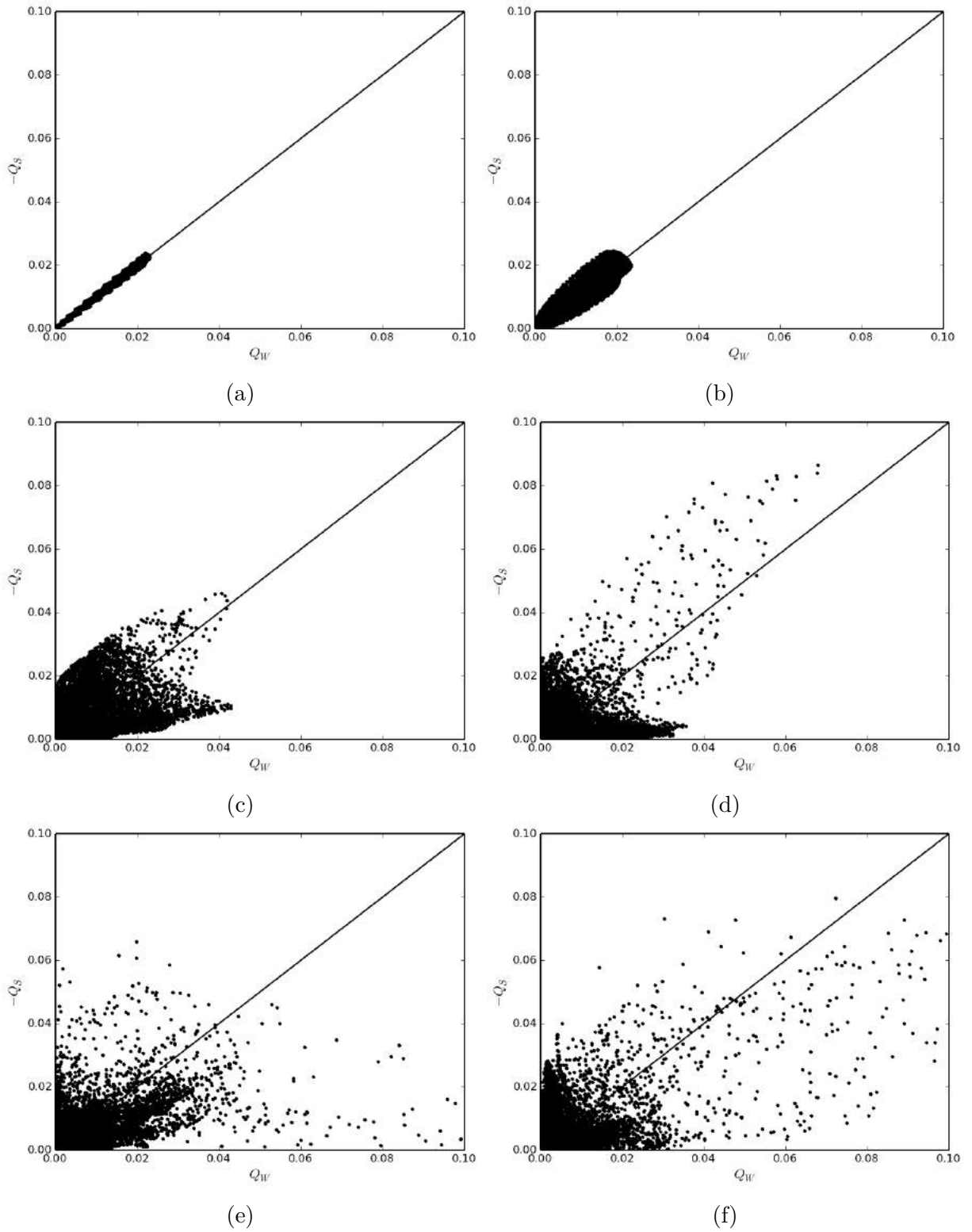


Figura 79 – Gráficos de dispersão de $-Q_S$ vs Q_W , para uma amplitude de perturbação 10^{-4} (caso #2), nos instantes: (a) $t = 135[s]$, (b) $t = 165[s]$, (c) $t = 195[s]$, (d) $t = 225[s]$, (e) $t = 255[s]$, (f) $t = 285[s]$.

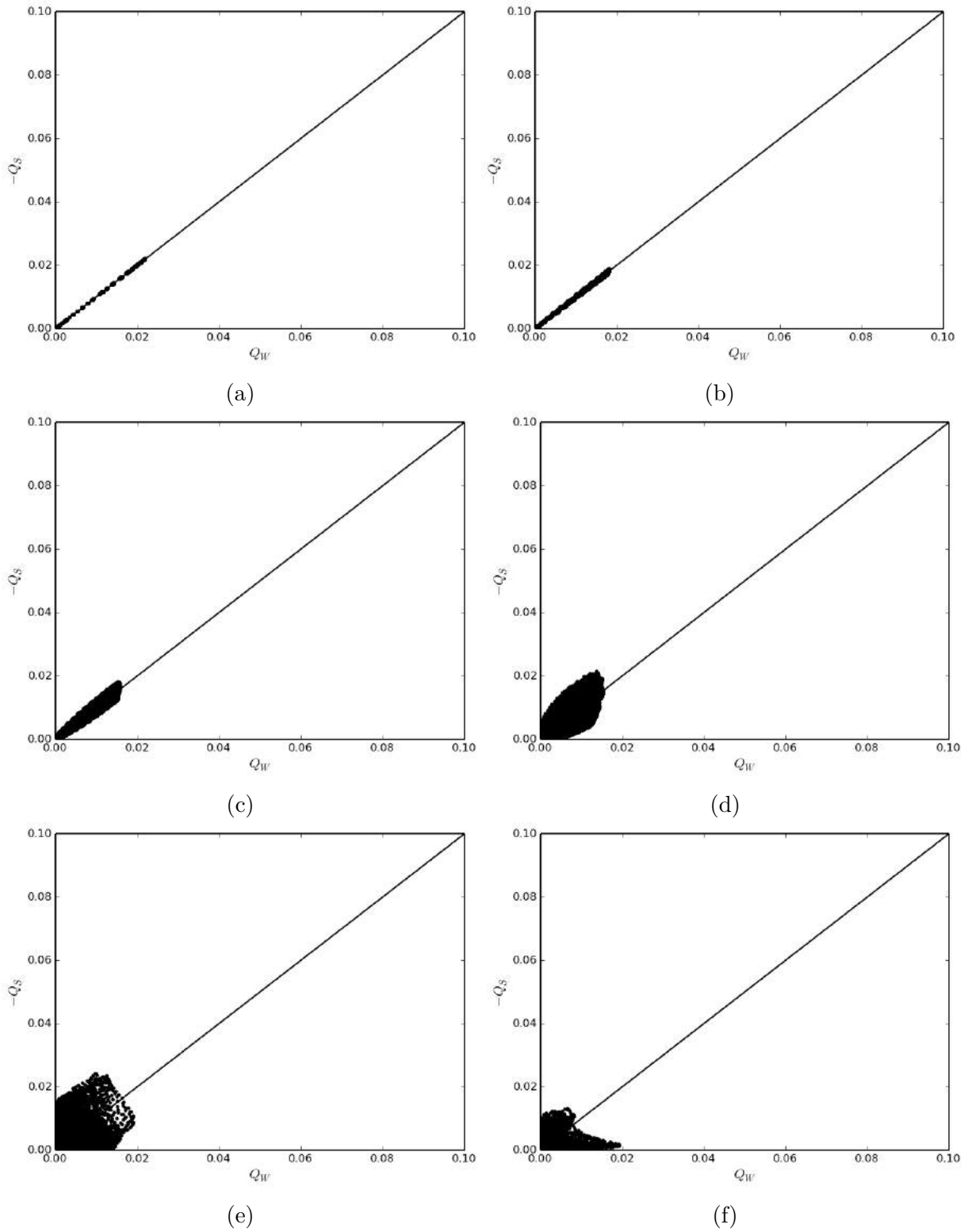


Figura 80 – Gráficos de dispersão de $-Q_S$ vs Q_W , para uma amplitude de perturbação 10^{-5} (caso #3), nos instantes: (a) $t = 135[s]$, (b) $t = 165[s]$, (c) $t = 195[s]$, (d) $t = 225[s]$, (e) $t = 255[s]$, (f) $t = 285[s]$.

C.3 Mapas de Q_S vs R_S

Disponibiliza-se neste apêndice os gráficos de dispersão das quantidades $-Q_S$ vs Q_W relativos às simulações *DNS*, que foram omitidos do texto principal por razões de legibilidade. As figuras ilustram a evolução temporal desta quantidade, para os casos #1 (*c.f.* Fig. 81), #2 (*c.f.* Fig. 82) e #3 (*c.f.* Fig. 83).

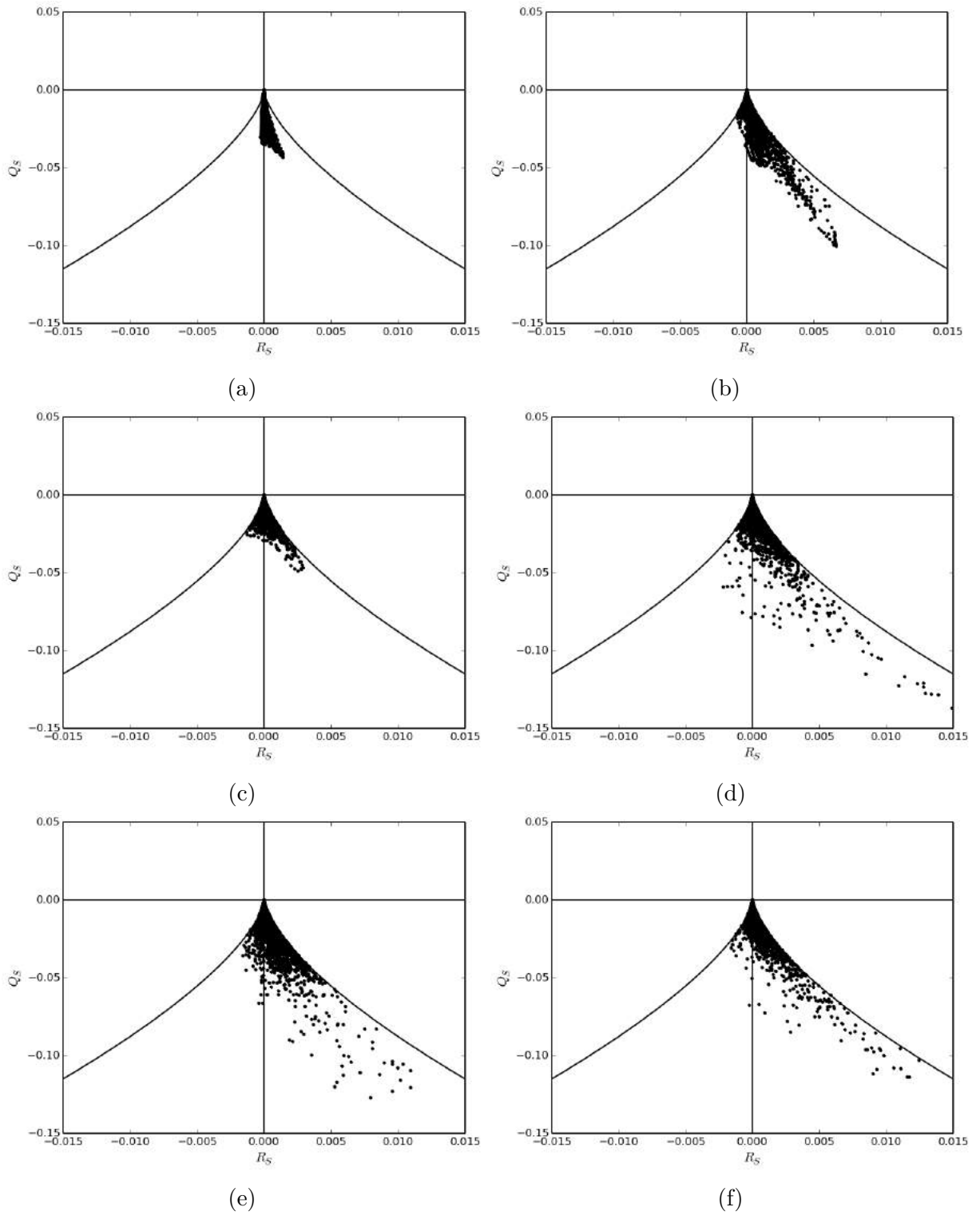


Figura 81 – Gráficos de dispersão Q_S vs R_S , para uma amplitude de perturbação 10^{-3} (caso #1), nos instantes: (a) $t = 135[s]$, (b) $t = 165[s]$, (c) $t = 195[s]$, (d) $t = 225[s]$, (e) $t = 255[s]$, (f) $t = 285[s]$.

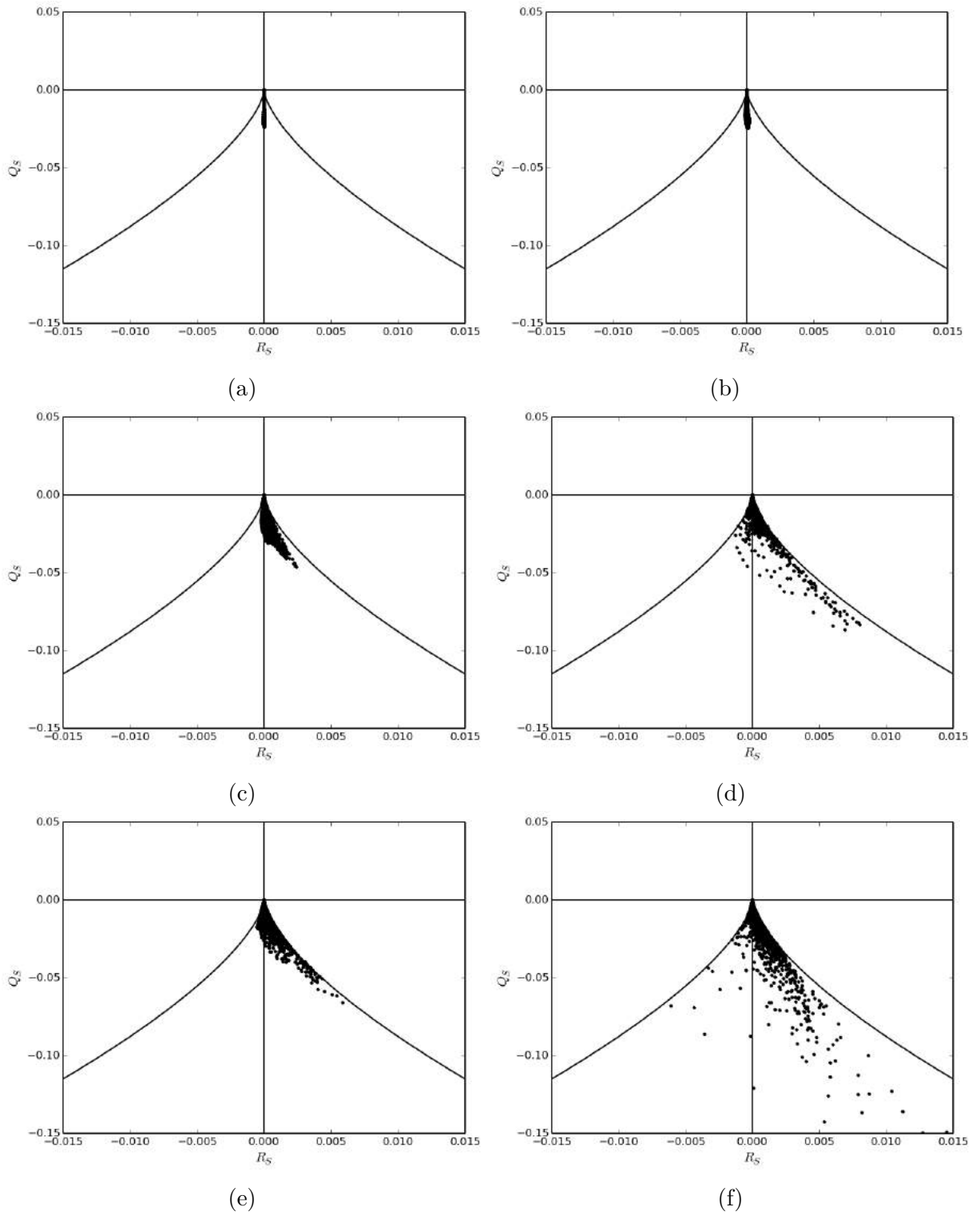


Figura 82 – Gráficos de dispersão Q_S vs R_S , para uma amplitude de perturbação 10^{-4} (caso #2), nos instantes: (a) $t = 135[s]$, (b) $t = 165[s]$, (c) $t = 195[s]$, (d) $t = 225[s]$, (e) $t = 255[s]$, (f) $t = 285[s]$.

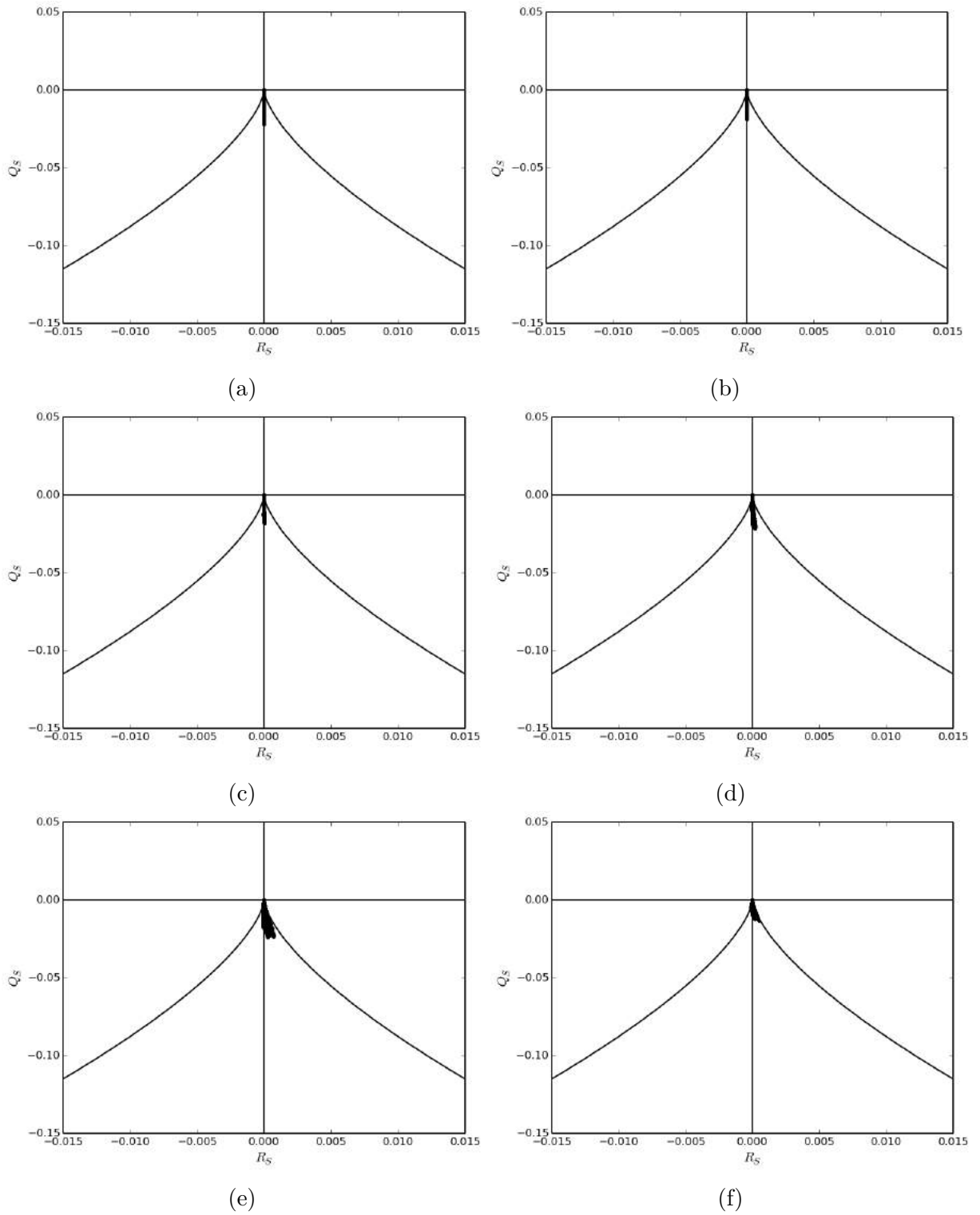


Figura 83 – Gráficos de dispersão Q_S vs R_S , para uma amplitude de perturbação 10^{-5} (caso #3), nos instantes: (a) $t = 135[s]$, (b) $t = 165[s]$, (c) $t = 195[s]$, (d) $t = 225[s]$, (e) $t = 255[s]$, (f) $t = 285[s]$.