



**Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática**

Bacharelado em Matemática

RODAS EXÓTICAS

Fernando Augusto Freitas

**Uberlândia-MG
2018**

Fernando Augusto Freitas

RODAS EXÓTICAS

Trabalho de conclusão de curso apresentado à Coordenação do Curso de Matemática como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciatura em Matemática.

Orientador: Marcus Augusto Bronzi

Uberlândia-MG

2018



Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática

Coordenação do Curso de Bacharelado em Matemática

A banca examinadora, conforme abaixo assinado, certifica a adequação deste trabalho de conclusão de curso para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Uberlândia, 28 de novembro de 2018.

BANCA EXAMINADORA

Marcus Augusto Bronzi

Laís Bássame Rodrigues

Luis Renato Gonçalves Dias

Uberlândia-MG

2018

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, por ter me auxiliado me dando a força necessária para chegar ao fim deste ciclo de estudos e por todas as graças que me possibilitou durante todo este caminho.

Também se faz necessário agradecer a Universidade Federal de Uberlândia e a Universidade de Coimbra, juntamente a todos os docentes que nelas atuam e contribuíram em minha formação acadêmica, me fazendo crescer como pessoa e também como futuro profissional me dando excelentes exemplos.

Agradeço de maneira diferenciada ao meu orientador Marcus Bronzi que topou finalizar este trabalho comigo que teve seu início em Portugal juntamente com a professora Doutora Fátima, em que foi proposto como um trabalho de uma disciplina em que ministrou as aulas, vale ressaltar e agradecer a todos os outros alunos envolvidos neste trabalho em especial aos que me aproximei mais e que deixaram grandes saudades.

Não posso deixar de agradecer também a minha família, não só os do meu sangue mas também os que chegaram no caminho, que me ajudaram a me tornar quem hoje sou. Em especial agradeço a minha noiva Gabriela Silva Cunha, que foi a pessoa que mais me apoiou na escolha por Matemática e que se não fosse por isso talvez não teria começado a fazer o curso pelo qual me identifiquei.

RESUMO

Este trabalho visa expandir o conceito de rodas, que tradicionalmente são cilíndricas, e de estradas sobre as quais elas deslizam, que usualmente são lineares, para outros tipos que vão desde rodas retangulares deslizando sem solavancos sobre estradas adequadas, até rodas que podem subir escadas suavemente.

Palavras-chave: Rodas; Estradas; Equações Diferenciais.

ABSTRACT

This work aims to expand the concept of wheels, that traditionally are cylindrical, and roads over which they roll, that are usually linear, to other types that goes from rectangular wheels rolling without bumps over proper roads to wheels that can go upstairs smoothly.

Keywords: Wheels, Roads, Differential equations.

SUMÁRIO

Lista de Figuras	I
1 Pré Requisitos	3
2 Estradas e Rodas	9
2.1 Representação matemática de estradas e rodas	9
2.2 Rolar sem deslizar e sem solavancos	9
3 Emparelhando rodas e estradas	11
3.1 Determinar a roda, conhecida a estrada	12
3.2 Determinar a estrada conhecida a roda	13
4 Construção de estradas para rodas poligonais	15
4.1 A roda é uma reta	15
4.2 A roda é um polígono regular	18
5 A roda é um retângulo	21
5.1 Generalização de quando a roda é um retângulo	23
6 Construção de rodas para caminhos seccionalmente lineares	25
6.1 Encontrando a roda para a estrada de equação $y(x) = -1 - mx$, $m \neq 0$	25
6.2 Espirais equiangulares (ou espirais de Bernoulli)	26
6.3 Composição de uma escada	28
6.4 Construção da roda	28
6.5 Fechando a roda	32
7 Conclusões	33
Referências Bibliográficas	35

LISTA DE FIGURAS

1	Bicicleta de roda quadrada do desenho do Pica-pau.	1
4.1	Gráfico	16
4.2	Roda pentagonal rola sobre estrada constituída por arcos de catenária invertida	18
5.1	A roda é um retângulo	21
5.2	Roda retangular com respectiva estrada	23
5.3	Retângulo de base $2b$ e altura $2a$	24
5.4	Triângulo reto com lados a e b , com ângulos opostos α e β , respectivamente. . .	24
6.1	Roda de equação $r(\theta) = 1$ rola sobre caminho de equação $y(x) = -1$	25
6.2	Uma espiral equiangular.	27
6.3	Degrau da escada posicionado no plano cartesiano.	28
6.4	Degrau e pedaço de roda correspondente.	29
6.5	Ângulos internos no degraú e no pedaço de roda.	31

INTRODUÇÃO

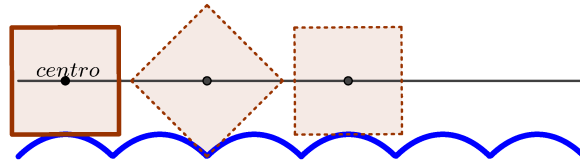
A roda é uma criação do homem que tem sua primeira representação aceita em uma carroça feita no formato de um cilindro com madeira maciça, por volta de 3500 antes de Cristo ([4]). Assim com o passar do tempo ela foi sendo modificada e melhorada ao passar dos anos. Ademais, quando nos perguntamos sobre o que é uma roda, a resposta mais comum é um objeto cilíndrico. Porém, será mostrado no presente trabalho que esse conceito pode ser ampliado, visto que a roda cilíndrica é feita para superfícies planas. Assim, como no desenho do Pica-pau, é fácil ver que a roda quadrada não é feita para essa mesma superfície.



Figura 1: Bicicleta de roda quadrada do desenho do Pica-pau.

Ademais, o objetivo deste trabalho é expandir o conceito de rodas, para assim chegar à construção de uma roda que possa subir uma escada sem deslizar e dar solavancos. Para isso, passearemos por situações preliminares mais simples, tais como, encontrar uma estrada sobre a qual podemos andar em uma bicicleta com rodas quadradas de forma suave, ou seja, sem que a bicicleta pule. Trabalharemos outros tipos de rodas e estradas, em especial duas principais perguntas: dada uma roda obter a estrada e, vice-versa, dada a estrada qual é a roda?

Um bom exemplo para o trabalho que será desenvolvido se resume na figura a seguir em que temos uma roda quadrada rodando sobre uma superfície sem solavanco e sem deslizar.



Este estudo, além de servir como complemento à formação acadêmica possui uma importante relevância, pois pode ser visto para auxiliar a pessoas cadeirantes subir escadas em construções antigas que não possam ser construídos elevadores ou rampas.

A principal referência utilizada para o presente trabalho será o artigo publicado na Springer, referência [3], onde [1] e [2] serviram também de base. As outras referências ([5], [6] e [7]) foram utilizadas para estudo e selecionar o que fora apresentado no capítulo dos pré-requisitos.

Ademais, no primeiro capítulo deste trabalho apresentaremos algumas ferramentas matemáticas que serão utilizadas no texto, no segundo capítulo será exibido o conceito de roda e estrada formalmente, em seguida, no capítulo três será tratado como é realizado o emparelhamento destas. No quarto capítulo, já será trabalhado a primeira roda, a roda formada por segmentos de reta formando um polígono regular, onde os resultados serão utilizados no capítulo cinco para a construção da roda que é um retângulo. E já no capítulo seis é abordada a roda principal construída para caminhos seccionalmente lineares (como uma escada), em que a roda será formada por partes de espirais de Bernoulli.

1. PRÉ REQUISITOS

Para podermos adentrar no tema principal do trabalho, vamos recordar alguns conceitos e teoremas de cálculo e equações diferenciais que servirão de ferramenta básica para o desenvolvimento deste trabalho.

Teorema 1 (Regra da Cadeia). *Se f e g forem diferenciáveis e $F = f \circ g$ for a função composta definida por $F(x) = f(g(x))$, então F é diferenciável e F' é dada por:*

$$F'(x) = f'(g(x))g'(x).$$

Na notação de Leibniz, se $y = f(u)$ e $u = g(x)$ forem funções diferenciáveis, então

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}.$$

Demonstração. Tem-se que $y = f(x)$ e x variar de a até $a + \Delta x$, o incremento de y será da forma

$$\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a).$$

Que, pela definição de derivada, obtemos

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(a).$$

Assim, denotando por ϵ a diferença entre os quocientes dos incrementos de x e de y com a derivada, obtém-se

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \epsilon = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(a) = f'(a) - f'(a) = 0.$$

Onde

$$\epsilon = \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(a) \Rightarrow \Delta y = f'(a)\Delta x + \epsilon\Delta x.$$

Definindo $\epsilon = 0$ quando $\Delta x = 0$, tem-se que ϵ é uma função contínua de Δx . Assim, para uma função diferenciável f , tem-se

$$\Delta y = f'(a)\Delta x + \epsilon\Delta x \text{ onde } \epsilon \rightarrow 0 \text{ quando } \Delta x \rightarrow 0. \quad (1.1)$$

Assim, suponha que $u = g(x)$ é diferenciável em a e $v = f(u)$ é diferenciável em $b = g(a)$. Se Δx for incremento de x e Δu e Δv forem incrementos correspondentes a u e v , então por

??, temos

$$\Delta u = g'(a)\Delta x + \epsilon_1\Delta x = [g'(a) + \epsilon_1]\Delta x \text{ onde } \epsilon_1 \rightarrow 0 \text{ quando } \Delta x \rightarrow 0. \quad (1.2)$$

Da mesma forma

$$\Delta v = f'(b)\Delta u + \epsilon_2\Delta u = [f'(b) + \epsilon_2]\Delta u \text{ onde } \epsilon_2 \rightarrow 0 \text{ quando } \Delta u \rightarrow 0. \quad (1.3)$$

Aplicando a equação ?? na ??, obtemos

$$\Delta y = [f'(b) + \epsilon_2][g'(a) + \epsilon_1]\Delta x$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = [f'(b) + \epsilon_2][g'(a) + \epsilon_1].$$

Porém quando $\Delta x \rightarrow 0$, na equação ?? tem-se que $\Delta u \rightarrow 0$. Assim, $\epsilon_1 \rightarrow 0$ e $\epsilon_2 \rightarrow 0$ quando $\Delta x \rightarrow 0$. Portanto

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f'(b) + \epsilon_2][g'(a) + \epsilon_1] \\ &= f'(b)g'(a) = f'(g(a))g'(a) \end{aligned}$$

□

Teorema 2 (Teorema da Função Inversa). *Seja f uma função inversível, com função inversa g . Se f for diferenciável em $q = g(p)$, com $f'(q) \neq 0$, e se g for contínua em p , então g será derivável em p .*

Demonstração. Como f é inversível com inversa g , temos que

$$f(g(x)) = x \text{ para todo } x \text{ no domínio de } g$$

Assim

$$[f(g(x))]' = x'$$

$$\Downarrow$$

$$[f(g(x))]' = 1$$

$$\Downarrow$$

$$f'(g(x))g'(x) = 1$$

$$\Downarrow$$

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} \text{ para todo } x \text{ no domínio de } g.$$

Assim, tem-se que

$$\frac{g(x) - g(p)}{x - p} = \frac{g(x) - g(p)}{f(g(x)) - f(g(p))} = \frac{1}{\frac{f(g(x)) - f(g(p))}{g(x) - g(p)}}, x \neq p.$$

Chamando $u = g(x)$, pela continuidade de g em p , $u \rightarrow q$ para $x \rightarrow p$, logo

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{g(x) - g(p)}{x - p} = \lim_{u \rightarrow q} \frac{1}{\frac{f(u) - f(q)}{u - q}}.$$

Como $\lim_{u \rightarrow q} \frac{f(u) - f(q)}{u - q} = f'(q) = f'(g(p))$, resulta que g é derivável em p e vale

$$g'(p) = \frac{1}{f'(g(p))}.$$

□

Observação. Se denotarmos $y = f(x)$, $x = g(y)$, $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ e $g'(y) = \frac{dx}{dy}$, o teorema anterior fornece a seguinte expressão

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} \quad \text{ou} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} \quad (1.4)$$

Teorema 3 (Teorema do Valor Extremo). Se f for contínua em um intervalo fechado $[a, b]$, então f assume um valor máximo absoluto $f(c)$ e um mínimo absoluto $f(d)$ em algum c e d em $[a, b]$.

Demonstração. Sua demonstração pode ser encontrada na referência [5].

□

Teorema 4 (Teorema do Confronto). Se $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ quando x está próximo de a (exceto possivelmente em a) e

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L,$$

então

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L.$$

Teorema 5 (Teorema Fundamental do Cálculo (TFC)). Se f for contínua em $[a, b]$, então a função definida por

$$g(x) = \int_a^x f(t) \quad a \leq x \leq b,$$

é contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b) e $g'(x) = f(x)$

Demonstração. Suponha $h > 0$ (o caso $h < 0$ seria análogo) e considere x e $x + h$ em (a, b) , então

$$\begin{aligned} g(x + h) - g(x) &= \int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \\ &= \left(\int_a^x f(t) dt + \int_x^{x+h} f(t) dt \right) - \int_a^x f(t) dt \\ &= \int_x^{x+h} f(t) dt. \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt. \quad (1.5)$$

Como f é contínua em $[x, x+h]$, pelo Teorema do Valor Extremos, existem u e v em $[x, x+h]$, tais que $f(u) = m$ e $f(v) = M$, onde m e M são valores de mínimo e máximo absolutos de f em $[x, x+h]$. Logo

$$\begin{aligned} mh &\leq \int_x^{x+h} f(t) dt \leq Mh \\ &\Downarrow \\ f(u)h &\leq \int_x^{x+h} f(t) dt \leq f(v)h \\ &\Downarrow \\ f(u) &\leq \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt \leq f(v). \end{aligned}$$

Substituindo a equação ?? nesta ultima equação, obtém-se

$$f(u) \leq \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \leq f(v). \quad (1.6)$$

Tome $h \rightarrow 0$ e assim temos que $u \rightarrow x$ e $v \rightarrow x$, uma vez que u e v estão entre x e $x+h$. Consequentemente

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(u) = \lim_{u \rightarrow x} f(u) = f(x) \text{ e } \lim_{h \rightarrow 0} f(v) = \lim_{v \rightarrow x} f(v) = f(x),$$

pois f é contínua em x . Pelo Teorema do Confronto, tem-se que

$$g'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f(x).$$

Se x for igual a a ou b basta fazer os limites laterais, assim g é diferenciável em todo $[a, b]$, logo g é contínua $[a, b]$. $\square$

Se $g(x)$ é uma função contínua dada, então a equação de primeira ordem

$$\frac{dy}{dx} = g(x) \quad (1.7)$$

pode ser resolvida por integração. A solução será da forma

$$y = \int g(x) dx + c.$$

Definição 1. Chamamos de problema de valor inicial (P.V.I. ou Problema de Cauchy) a equação de primeira ordem

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

sujeita a condição inicial $y(x_0) = y_0$, onde x_0 pertence ao domínio da função.

Teorema 6 (Teorema da Existência e Unicidade de Solução para problemas de valor inicial). *Seja R uma região retangular no plano xy definida por $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$, que contém o ponto (x_0, y_0) em seu interior. Se $f(x, y)$ e $\partial f / \partial y$ são contínuas em R , então existe um intervalo I centrado em x_0 e uma única função $y(x)$ definida em I que satisfaz o problema de valor inicial.*

Definição 2. *Uma equação diferencial da forma*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)},$$

*é chamada **separável** ou tem **variáveis separáveis**.*

Observe que uma equação separável pode ser escrita como

$$h(y) \frac{dy}{dx} = g(x) \quad (1.8)$$

É imediato que ?? se reduz a ?? quando $h(y) = 1$.

Agora, se $y = f(x)$ denota uma solução para ??, temos

$$h(f(x))f'(x) = g(x),$$

logo

$$\int h(f(x))f'(x)dx = \int g(x)dx + c. \quad (1.9)$$

Mas $dy = f'(x)dx$, assim ?? é o mesmo que

$$\int h(y)dy = \int g(x)dx + c. \quad (1.10)$$

que será o procedimento utilizado para a resolução de equações diferenciais separáveis.

2. ESTRADAS E RODAS

Estradas e rodas são representadas por curvas no plano cartesiano xOy . É conveniente usar coordenadas paramétricas para as estradas e coordenadas polares para as rodas. Assume-se que durante o movimento, a roda mantém um único ponto de contato com a estrada.

2.1 REPRESENTAÇÃO MATEMÁTICA DE ESTRADAS E RODAS

Sejam I_1 e I_2 intervalos reais. Uma estrada é uma curva dada por equações paramétricas

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, t \in I_1, \quad (2.1)$$

enquanto que uma roda é uma curva dada por uma equação polar

$$r = r(\theta), \theta \in I_2. \quad (2.2)$$

Sem perda de generalidade, assume-se que durante o movimento, que decorre no intervalo $I_1 = [0, T]$, o “centro geométrico” da roda se desloca horizontalmente, da esquerda para a direita, sobre a reta de equação $y = 0$ e que a estrada está situada abaixo desta reta. Isto é,

- $x(t)$ e $\theta(t)$ são funções crescentes no intervalo I_1 ;
- $y(t) < 0, \forall t \in I_1$.

2.2 ROLAR SEM DESLIZAR E SEM SOLAVANCOS

Nesta secção, apresentamos as três condições essenciais para o rolamento da roda de equação ?? sobre a estrada de equação ??.

- **Condições Iniciais:** No instante inicial $t = 0$, a roda e a estrada estão em contato no ponto $(0, y_0)$, com $y_0 < 0$, isto é,

$$x(0) = 0, \quad y(0) = y_0, \quad \theta(0) = -\frac{\pi}{2}, \quad r\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -y_0. \quad (2.3)$$

- **Condição de rolamento sem deslize:** Embora a estrada permaneça estática durante o movimento, o ponto de contato entre a estrada e a roda percorre as duas curvas. A condição de não deslize corresponde à exigência de que, em cada instante, a distância percorrida na estrada pelo ponto de contato seja igual a distância percorrida pelo mesmo ponto na roda. Atendendo às expressões que permitem calcular o comprimento de curvas dadas em coordenadas paramétricas e em coordenadas polares, esta condição é dada pela igualdade

$$\int_0^t \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta(t)} \sqrt{(r(\theta))^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta, \quad \forall t \in I_1. \quad (2.4)$$

- **Condição de rolamento sem solavancos:** Para evitar solavancos, basta exigir que em cada instante o raio da roda (a distância do centro da roda ao ponto de contato) coincida com a profundidade da estrada. Esta condição, também chamada condição do raio, traduz-se pela relação

$$r(\theta(t)) = -y(t), \quad \forall t \in I_1. \quad (2.5)$$

3. EMPARELHANDO RODAS E ESTRADAS

Neste capítulo mostrar-se-á como se pode obter a roda adequada a uma dada estrada e vice-versa.

A partir da condição de rolamento sem deslize, por meio da equação ??, obtém-se:

$$\int_0^t \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta(t)} \sqrt{(r(\theta))^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta, \quad \forall t \in I_1.$$

Derivando ambos os membros em relação a t obtém-se, pelo Teorema Fundamental do Cálculo:

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{(r(\theta))^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} \left(\frac{d\theta}{dt}\right),$$

onde no segundo membro foi aplicada a regra da cadeia. Agora eleva-se ao quadrado ambos os membros:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \left((r(\theta))^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right) \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2. \quad (3.1)$$

Derivando ambos os membros da equação ?? em relação a t , obtém-se

$$\frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = -\frac{dy}{dt}$$

$\Downarrow$

$$\frac{dr}{d\theta} = -\frac{dy}{dt} \frac{dt}{d\theta}. \quad (3.2)$$

Pelo Teorema da Função Inversa(??),

$$\frac{dt}{d\theta} = \frac{1}{\frac{d\theta}{dt}}, \quad (3.3)$$

quando $\frac{d\theta}{dt} \neq 0$.

Assim, substituindo a equação ?? na equação ??, tem-se:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \left((r(\theta))^2 + \left(-\frac{dy}{dt} \frac{dt}{d\theta}\right)^2\right) \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2.$$

$\Downarrow$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = (r(\theta))^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \left(\frac{dt}{d\theta}\right)^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

Substituindo agora a equação ?? na equação anterior temos

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = (r(\theta))^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \underbrace{\left(\frac{1}{\frac{d\theta}{dt}}\right)^2}_{=1} \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

$\Downarrow$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = (r(\theta))^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

$\Downarrow$

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \frac{1}{(r(\theta))^2}$$

$\Downarrow$

$$\frac{d\theta}{dt} = \pm \frac{1}{r(\theta)} \frac{dx}{dt}$$

o que pela equação ??, obtemos:

$$\frac{d\theta}{dt} = \pm \frac{1}{y(t)} \frac{dx}{dt}.$$

Porém, como $x(t)$ e $\theta(t)$ são crescentes em I_1 , suas derivadas são positivas e como $y(t) < 0$, temos que para todo $t \in I_1$, tem-se que a equação acima deve ser:

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{y(t)} \frac{dx}{dt}.$$

Esta equação é a chave para determinar a roda conhecida a estrada e para determinar a estrada conhecida a roda.

Sendo $x(t)$ e $y(t)$ funções conhecidas, então a equação anterior é uma equação diferencial de variáveis separadas que pode ser resolvida por simples integração.

3.1 DETERMINAR A RODA, CONHECIDA A ESTRADA

Do que ficou exposto anteriormente, conhecendo as equações paramétricas $(x(t), y(t))$ de uma estrada, podemos resolver o problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{y(t)} \frac{dx}{dt} \\ \theta(0) = -\frac{\pi}{2} \end{cases}, \quad (3.4)$$

para obter $\theta(t)$. Se esta função puder ser invertida para obter $t(\theta)$, então a roda correspondente é dada pela equação polar

$$r(\theta) = -y(t(\theta)). \quad (3.5)$$

Observação. Se a estrada for dada pela equação cartesiana $y = f(x)$, pode-se parametrizá-la por $x(t) = t$, $y(t) = f(t)$ e reduzir o problema à situação anterior. Neste caso, o problema de valor inicial ?? simplifica-se e dá origem a

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{y(t)} \\ \theta(0) = -\frac{\pi}{2} \end{cases}. \quad (3.6)$$

3.2 DETERMINAR A ESTRADA CONHECIDA A RODA

Se se conhece a equação polar da roda $r = r(\theta)$, a equação cartesiana da estrada é obtida sem dificuldade. Na verdade, atendendo à condição do raio, basta resolver o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{dx} = -\frac{1}{r(\theta(x))} \\ \theta(0) = -\frac{\pi}{2} \end{cases}, \quad (3.7)$$

para obter a equação cartesiana da estrada

$$y(x) = -r(\theta(x)). \quad (3.8)$$

4. CONSTRUÇÃO DE ESTRADAS PARA RODAS POLIGONAIS

Quando a roda é um polígono, durante o movimento, o seu centro geométrico, inicialmente na origem, desloca-se sobre a reta $y = 0$ e o raio da roda em cada ponto de contato é a distância desse ponto ao centro. Uma vez que a roda é constituída por segmentos de reta, este rolamento fica bastante simplificado se souber qual é a estrada adequada a uma “roda reta”, quando a origem polar, que deve imaginar presa à roda, percorre a reta $y = 0$. Embora em termos práticos só faça sentido falar em rodas que sejam curvas fechadas, teoricamente é possível rolar curvas abertas sobre outras curvas. Por isso, comece por determinar a estrada adequada a uma roda que é uma reta para, mais tarde, poder determinar a estrada para polígonos regulares ou até mesmo para polígonos irregulares.

4.1 A RODA É UMA RETA

Supõe-se que a roda é uma reta horizontal. Para encontrar a estrada, serão utilizadas as seguintes fórmulas trigonométricas:

$$\operatorname{cosec}(\theta) - \cotg(\theta) = \operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right). \quad (4.1)$$

$$\operatorname{sen}(\operatorname{arctg}(\theta)) = \theta \cos(\operatorname{arctg}(\theta)). \quad (4.2)$$

$$1 + \operatorname{tg}^2(\theta) = \sec^2(\theta). \quad (4.3)$$

$$\operatorname{sen}(2\theta) = 2\operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta). \quad (4.4)$$

$$1 - \cos^2(\theta) = \operatorname{sen}^2(\theta). \quad (4.5)$$

Como a roda é uma reta, tem-se que sua equação cartesiana será:

$$y = -k, \quad k > 0$$

a qual nos fornece o seguinte gráfico:

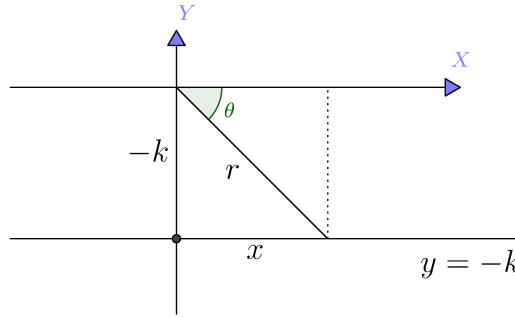


Figura 4.1: Gráfico

Onde

$$y = r(\theta)\text{sen}(\theta) \Rightarrow -k = r(\theta)\text{sen}(\theta) \Rightarrow r(\theta) = -\frac{k}{\text{sen}(\theta)} = -k \text{ cossec}(\theta)$$

$\Downarrow$

$$r(\theta) = -k \text{ cossec}(\theta), \quad k > 0 \text{ e } \theta \in (-\pi, 0) \quad (4.6)$$

que é a equação polar da roda que é uma reta.

Para obter a equação da estrada correspondente a esta roda, substitui-se ?? na equação ??, obtém-se

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{-k \text{ cossec}(\theta)} \Rightarrow \text{cossec}(\theta)d\theta = -\frac{dx}{k}$$

uma equação diferencial de variáveis separadas, a qual pode-se resolver integrando ambos os membros:

$$-\ln |\text{cossec}(\theta) + \cotg(\theta)| = -\frac{x}{k} + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}.$$

Desenvolvendo o primeiro membro:

$$\begin{aligned} -\ln |\text{cossec}(\theta) + \cotg(\theta)| &= \ln |\text{cossec}(\theta) + \cotg(\theta)|^{-1} = \\ &= \ln \frac{1}{|\text{cossec}(\theta) + \cotg(\theta)|} = \ln \left(\frac{1}{|\text{cossec}(\theta) + \cotg(\theta)|} \frac{|\text{cossec}(\theta) - \cotg(\theta)|}{|\text{cossec}(\theta) - \cotg(\theta)|} \right) = \\ &= \ln |\text{cossec}(\theta) - \cotg(\theta)|. \end{aligned}$$

Então,

$$\ln |\text{cossec}(\theta) - \cotg(\theta)| = -\frac{x}{k} + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}.$$

Por ??:

$$\ln \left| \text{tg} \left(\frac{\theta}{2} \right) \right| = -\frac{x}{k} + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}$$

$$\Downarrow$$

$$\left| \operatorname{tg} \left(\frac{\theta}{2} \right) \right| = e^{-\frac{x}{k}} c, \quad c \in \mathbb{R}^+.$$

Como $\theta \in (-\pi, 0)$ tem-se:

$$-\operatorname{tg} \left(\frac{\theta}{2} \right) = e^{-\frac{x}{k}} c, \quad c \in \mathbb{R}^+.$$

Logo,

$$\operatorname{tg} \left(-\frac{\theta}{2} \right) = e^{-\frac{x}{k}} c, \quad c \in \mathbb{R}^+$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\theta}{2} = -\operatorname{arctg}(e^{-\frac{x}{k}} c), \quad c \in \mathbb{R}^+.$$

Para $x = 0$, $\theta(0) = -\frac{\pi}{2}$, assim:

$$\frac{\pi}{2} = 2\operatorname{arctg}(c), \quad c \in \mathbb{R}^+$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg}(c), \quad c \in \mathbb{R}^+$$

$$\Downarrow$$

$$c = 1.$$

Tem-se então que

$$\theta(x) = -2\operatorname{arctg}(e^{-\frac{x}{k}}).$$

Aplicando na equação ?? o que se obteve acima, tem-se

$$-y(x) = r(\theta(x)) = -k \operatorname{cosec}(-2\operatorname{arctg}(e^{-\frac{x}{k}})) = -\frac{k}{\operatorname{sen}(-2\operatorname{arctg}(e^{-\frac{x}{k}}))} = \frac{k}{\operatorname{sen}(2 \operatorname{arctg}(e^{-\frac{x}{k}}))}$$

$$\Downarrow ??$$

$$-y(x) = \frac{k}{2\operatorname{sen}(\operatorname{arctg}(e^{-\frac{x}{k}}))\cos(\operatorname{arctg}(e^{-\frac{x}{k}}))}$$

$$\Downarrow ??$$

$$-y(x) = \frac{k}{2(e^{-\frac{x}{k}})\cos^2(\operatorname{arctg}(e^{-\frac{x}{k}}))}$$

$$\Downarrow$$

$$-y(x) = \frac{k\sec^2(\operatorname{arctg}(e^{-\frac{x}{k}}))}{2(e^{-\frac{x}{k}})}$$

$$\Downarrow ??$$

$$-y(x) = \frac{k(1 + \operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg}(e^{-\frac{x}{k}})))}{2(e^{-\frac{x}{k}})}$$

$$\begin{aligned}
& \Downarrow \\
-y(x) &= \frac{k(1 + (e^{-\frac{x}{k}})^2)}{2(e^{-\frac{x}{k}})} = \frac{k(1 + (e^{-\frac{2x}{k}}))}{2(e^{-\frac{x}{k}})} \\
& \Downarrow \\
-y(x) &= \frac{k(e^{-\frac{x}{k}} + e^{\frac{x}{k}})}{2} = k \cosh\left(\frac{x}{k}\right) \\
& \Downarrow \\
y(x) &= -k \cosh\left(\frac{x}{k}\right). \tag{4.7}
\end{aligned}$$

A equação ?? é a equação da catenária invertida. Portanto a estrada adequada a uma roda poligonal resulta da concatenação de arcos de catenária invertida, em cada um dos quais rola um lado diferente do polígono. A questão que se coloca é saber exatamente onde truncar a catenária onde rola o primeiro lado.

4.2 A RODA É UM POLÍGONO REGULAR

Se a roda for um polígono regular de n lados, cujo apótema tem medida de comprimento k , o arco de catenária onde rola o primeiro lado do polígono tem equação $y(x) = -k \cosh\left(\frac{x}{k}\right)$, com $x \in [-x_1, x_1]$ onde x_1 deve satisfazer $y'(x_1) = -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right)$. Este valor resulta do fato de que cada ângulo central ϵ mede $\frac{2\pi}{n}$ e, portanto, cada ângulo interno do polígono mede $2\beta = \pi - \frac{2\pi}{n} = 2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}\right)$. (Para o caso $n = 5$, os ângulos ϵ e β estão representados na Figura 1).

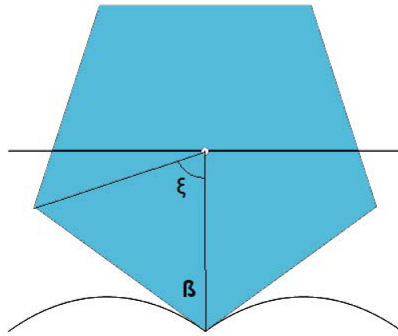


Figura 4.2: Roda pentagonal rola sobre estrada constituída por arcos de catenária invertida

Desse modo obtém-se que:

$$\begin{aligned}
y'(x_1) = -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right) &\Leftrightarrow \sinh\left(\frac{x_1}{k}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right) \\
&\Leftrightarrow e^{\left(\frac{x_1}{k}\right)} - e^{\left(-\frac{x_1}{k}\right)} = 2\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right) \\
&\Leftrightarrow \left(e^{\left(\frac{x_1}{k}\right)}\right)^2 - 2\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right)e^{\frac{x_1}{k}} - 1 = 0,
\end{aligned}$$

A partir de onde pode-se resolver a equação. Para isso, define-se $e^{\left(\frac{x_1}{k}\right)} = a$, obtendo-se uma equação do segundo grau:

$$\begin{aligned} a^2 - 2\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right)a - 1 &= 0 \\ \Delta &= \left(2\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)^2 - 4(1)(-1) = 4\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{n}\right) + 4 = 4\sec^2\left(\frac{\pi}{n}\right) \\ a &= \frac{2\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right) \pm 2\sec\left(\frac{\pi}{n}\right)}{2} \\ &\Downarrow \\ a &= \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right) \pm \sec\left(\frac{\pi}{n}\right) \\ &\Downarrow \\ a &= \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right) \pm 1}{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}. \end{aligned}$$

Como $e^{\left(\frac{x_1}{k}\right)} > 0$,

$$e^{\left(\frac{x_1}{k}\right)} = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right) + 1}{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}.$$

Para isolar x , aplica-se a função logarítmica na base e em ambos os membros:

$$\frac{x_1}{k} = \ln\left(\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right) + 1}{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}\right) \Rightarrow x_1 = k \ln\left(\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right) + 1}{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}\right).$$

A simetria dos polígonos regulares permite determinar a estrada adequada, conhecendo apenas a porção onde rola o primeiro lado. Em conclusão, tem-se o seguinte.

Proposição 1. *Se a roda é um polígono regular de n lados, cujo apótema tem medida de comprimento k , então a estrada é o gráfico da função periódica, de período igual a $2k \ln\left(\frac{1 + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}\right)$, definida por:*

$$y(x) = -k \cosh\left(\frac{x}{k}\right), \quad x \in \left[-k \ln\left(\frac{1 + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}\right), k \ln\left(\frac{1 + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}\right)\right].$$

As ideias contidas nesta secção podem ser exploradas na construção de caminhos para rodas que são outros polígonos irregulares, como é o caso de uma roda retangular.

5. A RODA É UM RETÂNGULO

Considere um retângulo de vértices nos pontos de coordenadas $(-2, 1)$, $(-2, -1)$, $(2, -1)$ e $(2, 1)$. Este retângulo está centrado na origem, tem base $b = 4$ e altura $h = 2$, e pode ser construído à custa das retas de equações polares $r_1(\theta) = -\operatorname{cosec}(\theta)$ e $r_2(\theta) = -2\operatorname{cosec}(\theta)$, com $\theta \in (-\pi, 0)$.

A partir dos desenvolvimentos da seção 4.1 sabe-se que para as rodas $r_1(\theta) = -\operatorname{cosec}(\theta)$ e $r_2(\theta) = -2\operatorname{cosec}(\theta)$, $\theta \in (-\pi, 0)$, as equações das estradas correspondentes são $y_1(x) = -\cosh(x)$ e $y_2(x) = -2\cosh\left(\frac{x}{2}\right)$, respetivamente. Além disso, como os lados do retângulo são segmentos de reta, as estradas correspondentes são arcos de catenária invertida. Portanto, nesta altura, a questão crucial é saber onde cortar cada um dos arcos independentemente. Como na seção 4.2, foi utilizado só o ângulo referente a cada um dos lados, usar-se-á aqui os resultados obtidos.

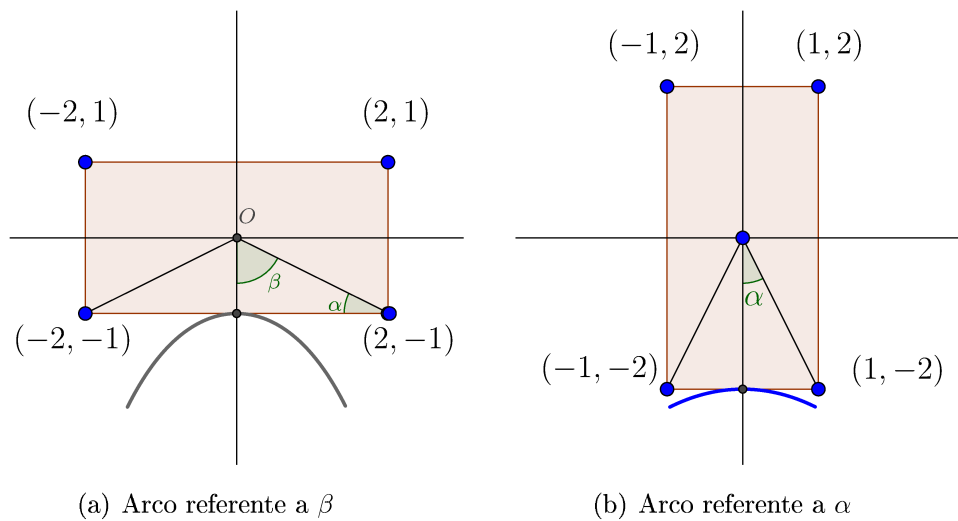


Figura 5.1: A roda é um retângulo

Nas figuras ?? e ?? acima, α e β são a metade dos ângulos correspondentes a cada um dos lados do retângulo.

Denotando x_1 e x_2 as abscissas dos pontos de corte nas estradas de equações

$$y_1(x) = -\cosh(x), x \in [-x_1, x_1]$$

$$y_2(x) = -2\cosh\left(\frac{x}{2}\right), x \in [-x_2, x_2],$$

para $y_1(x)$ tem-se:

$$y'_1(x) = -\sinh(x)$$

$$\Downarrow$$

$$y'_1(x_1) = -\sinh(x_1).$$

Como obtido na seção 4.2 obtemos $x_1 = \ln\left(\frac{1+\sin(\beta)}{\cos(\beta)}\right)$ e então

$$\begin{aligned} y'_1(x_1) &= -\sinh\left(\ln\left(\frac{1+\sin(\beta)}{\cos(\beta)}\right)\right) = \\ &= -\left(\frac{e^{\ln\left(\frac{1+\sin(\beta)}{\cos(\beta)}\right)} - e^{-\ln\left(\frac{1+\sin(\beta)}{\cos(\beta)}\right)}}{2}\right) = \frac{-\left(\frac{\sin(\beta)+1}{\cos(\beta)}\right) + \frac{1}{\left(\frac{\sin(\beta)+1}{\cos(\beta)}\right)}}{2} = \\ &= \frac{-(\sin(\beta)+1)^2 + \cos^2(\beta)}{2(\sin(\beta)+1)\cos(\beta)} = \frac{-\sin^2(\beta) - 2\sin(\beta) \overbrace{-1 + \cos^2(\beta)}^{-\sin^2(\beta)}}{2} = \\ &= \frac{-2\sin(\beta) - 2\sin^2(\beta)}{2\cos(\beta)(\sin(\beta)+1)} = \frac{-\sin(\beta)(\sin(\beta)+1)}{\cos(\beta)(\sin(\beta)+1)} = -\operatorname{tg}(\beta). \end{aligned}$$

Pela figura ??, tem-se que $\operatorname{tg}(\beta) = \operatorname{cotg}(\alpha)$ e $\operatorname{tg}(\beta) = 2$, logo:

$$y'_1(x_1) = -\operatorname{tg}(\beta) = -2 = -\operatorname{cotg}(\alpha)$$

$$\Downarrow$$

$$y'_1(x_1) = -\operatorname{cotg}(\alpha) = -2$$

Da mesma maneira para $y_2(x)$ tem-se:

$$y_2(x) = -\sinh\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$y'_2(x_2) = -\sinh\left(\left(\frac{2}{2}\right) \ln\left(\frac{\sin(\alpha)+1}{\cos(\alpha)}\right)\right) = -\sinh\left(\ln\left(\frac{\sin(\alpha)+1}{\cos(\alpha)}\right)\right) = -\operatorname{tg}(\alpha)$$

Pela figura ??, tem-se que $\operatorname{tg}(\alpha) = \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{cotg}(\beta)$ e $\operatorname{cotg}(\beta) = \frac{1}{2}$, logo:

$$y'_2(x_2) = -\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -\frac{1}{2}$$

Também pode-se concluir que:

$$x_1 = \ln\left(\frac{1+\sin(\beta)}{\cos(\beta)}\right) = \ln\left(\frac{1+\frac{2}{\sqrt{5}}}{\frac{1}{\sqrt{5}}}\right) = \ln(\sqrt{5}+2),$$

$$x_2 = 2\ln\left(\frac{1 + \sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}\right) = 2\ln\left(\frac{1 + \frac{1}{\sqrt{5}}}{\frac{2}{\sqrt{5}}}\right) = 2\ln\left(\frac{\sqrt{5} + 1}{2}\right).$$

A partir disso, pode-se encontrar a estrada sobre a qual rola a roda retangular, uma vez que basta conhecer as porções de estrada onde rolam os dois lados consecutivos (a estrada deve ser periódica, com alternância dos dois arcos obtidos). Assim, define-se o primeiro arco como sendo o referente ao lado maior:

$$y_1(x) = -\cosh(x), \quad x \in [-x_1, x_1].$$

O gráfico da função y_2 deve começar onde o gráfico da primeira termina. Já se sabe que seu intervalo deve ter comprimento $2x_2$, logo o segundo arco deve pertencer ao intervalo $[x_1, x_1 + 2x_2]$, cujo ponto médio $x_1 + x_2$ fará o papel do novo eixo, isto é, deslocar-se-á o arco $y_2(x)$ para a abscissa $x_1 + x_2$, da seguinte maneira

$$y_2(x - (x_1 + x_2)) = -2\cosh\left[\frac{x - (x_1 + x_2)}{2}\right], \quad x \in [x_1, x_1 + 2x_2].$$

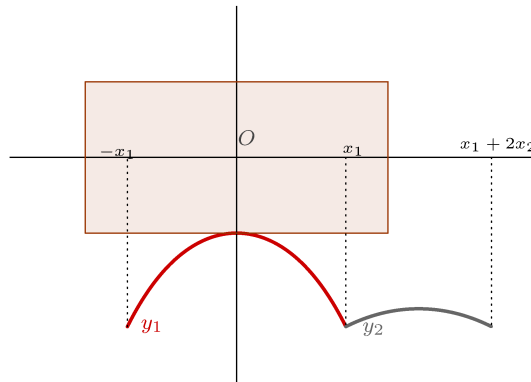


Figura 5.2: Roda retangular com respectiva estrada

5.1 GENERALIZAÇÃO DE QUANDO A RODA É UM RETÂNGULO

Observando o caso particular do retângulo descrito anteriormente, pode-se, utilizando os mesmos passos e cálculos, descrever o caso geral do par roda-estrada para um retângulo de vértices quaisquer.

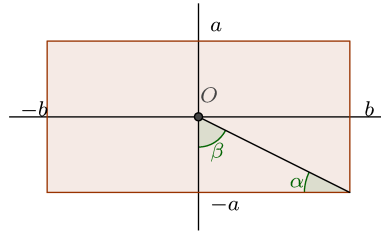


Figura 5.3: Retângulo de base $2b$ e altura $2a$

Para o caso em que o retângulo tem base $2b$ paralela ao eixo x e altura $2a$ paralela ao eixo y , com centro na origem, obtém-se as equações:

$$r_1(\theta) = -a \operatorname{cosec}(\theta), \theta \in (-\pi, 0)$$

$$r_2(\theta) = -b \operatorname{cosec}(\theta), \theta \in (-\pi, 0)$$

$$y_1(x) = -a \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$y_2(x) = -b \cosh\left(\frac{x}{b}\right)$$

$$x_1 = a \ln\left(\frac{\operatorname{sen}(\beta) + 1}{\cos(\beta)}\right) \text{ e } x_2 = b \ln\left(\frac{\operatorname{sen}(\alpha) + 1}{\cos(\alpha)}\right).$$

Usando os ângulos α e β como no triângulo abaixo, obtém-se que

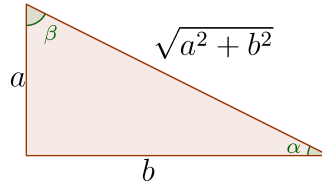


Figura 5.4: Triângulo reto com lados a e b , com ângulos opostos α e β , respectivamente.

$$x_1 = a \ln\left(\frac{\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} + 1}{\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}}\right) = a \ln\left(\frac{b + \sqrt{a^2+b^2}}{a}\right)$$

$$x_2 = b \ln\left(\frac{\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + 1}{\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}\right) = b \ln\left(\frac{a + \sqrt{a^2+b^2}}{b}\right).$$

6. CONSTRUÇÃO DE RODAS PARA CAMINHOS SECCIONALMENTE LINEARES

Nesta seção construir-se-ão rodas adequadas a caminhos constituídos pela concatenação de segmentos de reta. Mas antes disso devemos saber responder à seguinte pergunta: [qual é a equação polar da roda para um caminho de equação \$y\(x\) = -1 - mx\$?](#)

A resposta é óbvia quando esta reta tiver coeficiente angular igual a zero. Neste caso, é claro que a roda é a circunferência centrada na origem e de raio igual a 1 (Figura ??).



Figura 6.1: Roda de equação $r(\theta) = 1$ rola sobre caminho de equação $y(x) = -1$.

O que acontece quando $m \neq 0$?

6.1 ENCONTRANDO A RODA PARA A ESTRADA DE EQUAÇÃO $y(x) = -1 - mx$, $m \neq 0$

Será considerada aqui a função $y(x) = -1 - mx$ que pode ser descrita pelas equações paramétricas $x(t) = t$ e $y(t) = -1 - mt$, as quais agora podem ser aplicadas em ??, obtendo-se:

$$\begin{aligned}\frac{d\theta}{dt} &= -\frac{1}{-1 - mt} \\ \Downarrow \\ d\theta &= \frac{dt}{1 + mt}.\end{aligned}$$

Esta última é uma equação diferencial de variáveis separadas, que pode ser resolvida integrando ambos os membros:

$$\theta(t) = \frac{\ln(1 + mt)}{m} + c,$$

com $c \in \mathbb{R}$ constante.

Aplicando a condição inicial de ??, tem-se

$$-\frac{\pi}{2} = \frac{\ln(1)}{m} + c \Rightarrow c = -\frac{\pi}{2}.$$

Logo

$$\theta(t) = \frac{\ln(1 + mt)}{m} - \frac{\pi}{2}$$

$\Downarrow$

$$m \left(\theta(t) + \frac{\pi}{2} \right) = \ln(1 + mt)$$

$\Downarrow$

$$r(\theta(t)) = -y(\theta(t)) = 1 + mt = e^{m(\theta(t) + \frac{\pi}{2})}. \quad (6.1)$$

As curvas de equação (??) são conhecidas por *espirais de Bernoulli*, por terem sido estudadas por Jacob Bernoulli (1654-1705), ou por *espirais equianguulares*, devido a uma sua propriedade importante que mencionaremos a seguir.

6.2 ESPIRAIS EQUIANGULARES (OU ESPIRAIS DE BERNOULLI)

Começaremos esta seccão considerando definições acerca de espirais e de funções polares para podermos tratar de um importante resultado sobre espirais equianguulares.

Definições:

1. Uma espiral centrada na origem é qualquer curva plana de equação polar $r = f(\theta)$, onde f é uma função crescente ou decrescente.
2. Linha radial num ponto de uma espiral é qualquer semirreta que parte da origem e passa por esse ponto.
3. Uma espiral diz-se equiangular, ou de Bernoulli, se, para todo o ponto P da espiral, o ângulo ϕ formado pela linha radial que contém P e pela tangente à espiral em P for constante.

Com o objetivo de mostrar que a equação ?? é também equiangular, demonstrar-se-á o seguinte resultado:

Proposição 2. *As espirais de equação polar $r(\theta) = ae^{b\theta}$, com a e b constantes não nulas, são espirais equianguulares, com ângulo $\phi = \arctan\left(\frac{1}{b}\right)$.*

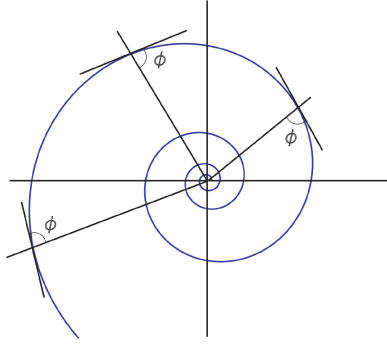


Figura 6.2: Uma espiral equiangular.

Demonstração. Quer-se provar que o ângulo ϕ entre a reta radial e a reta tangente é constante. A equação do ângulo formado pelo vetor posição $\alpha(t)$ e um vetor tangente $\alpha'(t)$, dada por

$$\cos(\phi) = \frac{\langle \alpha(t), \alpha'(t) \rangle}{\|\alpha(t)\| \cdot \|\alpha'(t)\|}.$$

A equação paramétrica da equação $r(\theta) = ae^{b\theta}$ é da forma $(x(t), y(t)) = ae^{bt}(\cos(t), \sin(t))$.

$$\alpha'(t) = (x'(t), y'(t)) = abe^{bt}(\cos(t), \sin(t)) + ae^{bt}(-\sin(t), \cos(t)).$$

Assim

$$\langle \alpha(t), \alpha'(t) \rangle = a^2 b e^{2bt}$$

$$\Downarrow$$

$$\|\alpha(t)\| = |a|e^{bt}$$

$$\Downarrow$$

$$\|\alpha'(t)\| = |a|e^{bt}\sqrt{1+b^2}.$$

Como $\cos(\phi) = \frac{b}{\sqrt{1+b^2}}$ e $0 < \phi < \pi$, temos $\sin(\phi) = \frac{1}{\sqrt{1+b^2}}$, logo

$$\operatorname{tg}(\phi) = \frac{1}{b}$$

$$\Downarrow$$

$$\phi = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{b}\right).$$

□

Pode-se justificar que a equação ?? é também equiangular, tomando $a = e^{m(\frac{\pi}{2})} > 0$ e $b = m \neq 0$. Logo, como demonstrado anteriormente, $\phi = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{m}\right)$.

6.3 COMPOSIÇÃO DE UMA ESCADA

Para modelagem de uma escada, seu corrimão é posicionado paralelo ao eixo Ox . A escada pode ser então tratada como uma função periódica descrita por:

$$y(x) = \begin{cases} y_1(x) = -y_0 - mx, & x \in [0, x_1] \\ y_2(x) = -y_0 + \frac{x}{m}, & x \in [-x_2, 0] \end{cases} \quad (6.2)$$

Como os segmentos que determinam o degrau são perpendiculares, os coeficientes angulares de y_1 e y_2 são o inverso oposto um do outro. Em especial, se a escada é composta de degraus de comprimento T e altura R , então $m = \tan(\alpha) = \frac{T}{R}$, sendo α o ângulo entre o corrimão e a altura do degrau.

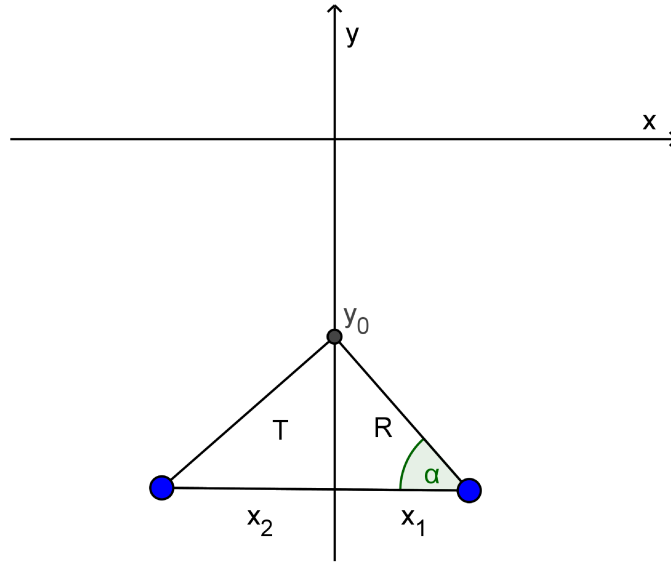


Figura 6.3: Degrau da escada posicionado no plano cartesiano.

Na secção seguinte veremos como se obtém uma roda para esta escada.

6.4 CONSTRUÇÃO DA RODA

Com a função $y(x)$ da escada e pelos resultados anteriormente provados, tem-se que a equação da parte da roda que corresponde a um degrau é

$$r(\theta) = \begin{cases} r_1(\theta) = y_0 \exp\left(m\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\right), & \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} + \theta_1\right] \\ r_2(\theta) = y_0 \exp\left(-\frac{1}{m}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\right), & \theta \in \left[-\frac{\pi}{2} - \theta_2, -\frac{\pi}{2}\right] \end{cases}, \quad (6.3)$$

para algum $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}^+$.

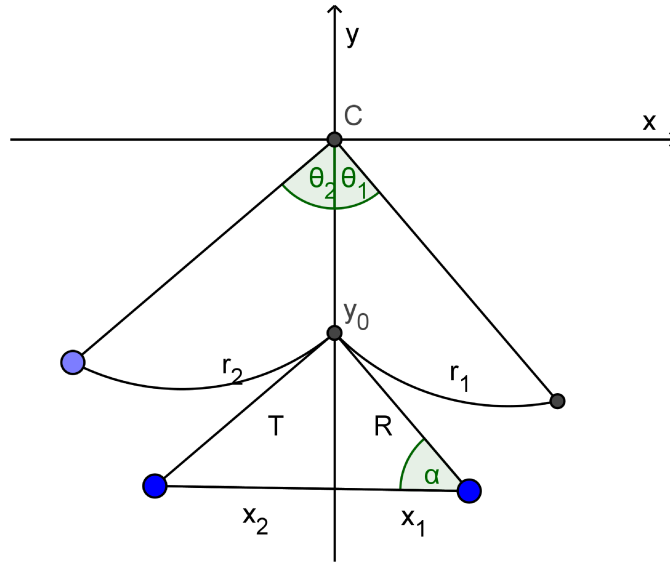


Figura 6.4: Degrau e pedaço de roda correspondente.

Esses dois parâmetros podem ser obtidos da condição de não-deslizamento: o comprimento de r_1 deve ser igual a R e o de r_2 igual a T . Usando a fórmula de cálculo do comprimento de uma curva, tem-se:

$$\begin{aligned}
 R &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}+\theta_1} \sqrt{\left(\frac{dr_1}{d\theta}\right)^2 + \left(r_1 \frac{d\theta}{d\theta}\right)^2} d\theta \\
 &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}+\theta_1} \sqrt{m^2 r_1^2 + r_1^2} d\theta \\
 &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}+\theta_1} r_1(\theta) \sqrt{m^2 + 1} d\theta.
 \end{aligned} \tag{6.4}$$

Analogamente,

$$T = \int_{\frac{\pi}{2}-\theta_2}^{-\frac{\pi}{2}} r_2(\theta) \sqrt{\frac{1}{m^2} + 1} d\theta. \tag{6.5}$$

Para calcular θ_1 e θ_2 podemos resolver as integrais substituindo os resultados de $r_1(\theta)$ e $r_2(\theta)$:

$$\begin{aligned}
 R &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}+\theta_1} r_1(\theta) \sqrt{m^2 + 1} d\theta \\
 &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}+\theta_1} y_0 \exp\left(m\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\right) \sqrt{m^2 + 1} d\theta \\
 &= \frac{y_0}{m} \sqrt{m^2 + 1} (\exp(m\theta_1) - 1).
 \end{aligned} \tag{6.6}$$

Como $Rm = T$ conclui-se que:

$$\begin{aligned}
\frac{y_0}{m} \sqrt{m^2 + 1} (\exp(m\theta_1) - 1) &= \frac{T}{m} \\
\Downarrow \\
\exp(m\theta_1) - 1 &= \frac{T}{y_0 \sqrt{m^2 + 1}} \\
\Downarrow \\
m\theta_1 &= \ln \left(\frac{T}{y_0 \sqrt{m^2 + 1}} + 1 \right) \\
\Downarrow \\
\theta_1 &= \frac{1}{m} \cdot \ln \left(\frac{T}{y_0 \sqrt{m^2 + 1}} + 1 \right) \tag{6.7}
\end{aligned}$$

Analogamente demonstra-se que:

$$\theta_2 = m \ln \frac{T}{y_0 \sqrt{m^2 + 1} + 1} . \tag{6.8}$$

São necessárias duas condições para garantir que a roda obtida a partir da função $r(\theta)$ esteja fechada:

1° O começo e o fim do pedaço de roda dado por $r(\theta)$ devem ter a mesma distância radial (i.e. $r_1(-\frac{\pi}{2} + \theta_1) = r_2(-\frac{\pi}{2} - \theta_2)$).

2° O ângulo do ponto de encontro entre as duas espirais que formam a roda é um ângulo reto.

Temos o seguinte resultado relacionando os ângulos θ_1 e θ_2 das equações ?? e ?? com os raios r_1 e r_2 de ??

Proposição 3. *Sejam r_1 , r_2 , θ_1 e θ_2 definidos anteriormente. Então temos $r_1(-\frac{\pi}{2} + \theta_1) = r_2(-\frac{\pi}{2} - \theta_2)$.*

Demonstração. Juntando as equações anteriores, obtemos:

$$\begin{aligned}
r_1\left(-\frac{\pi}{2} + \theta_1\right) &= y_0 \exp\left(\left(-\frac{\pi}{2} + \theta_1 + \frac{\pi}{2}\right)m\right) \\
&= y_0 \exp(m\theta_1) \\
&= y_0 \exp\left(m \frac{1}{m} \cdot \ln\left(\frac{T}{y_0\sqrt{m^2+1}} + 1\right)\right) \\
&= y_0 \exp\left(\ln\left(\frac{T}{y_0\sqrt{m^2+1}} + 1\right)\right) \\
&= y_0 \cdot \left(\frac{T}{y_0\sqrt{m^2+1}} + 1\right) \\
&= \frac{T}{\sqrt{m^2+1}} + y_0.
\end{aligned} \tag{6.9}$$

Analogamente demonstra-se que

$$r_2\left(-\frac{\pi}{2} - \theta_2\right) = \frac{T}{\sqrt{m^2+1}} + y_0, \tag{6.10}$$

o que completa a demonstração da proposição. $\square$

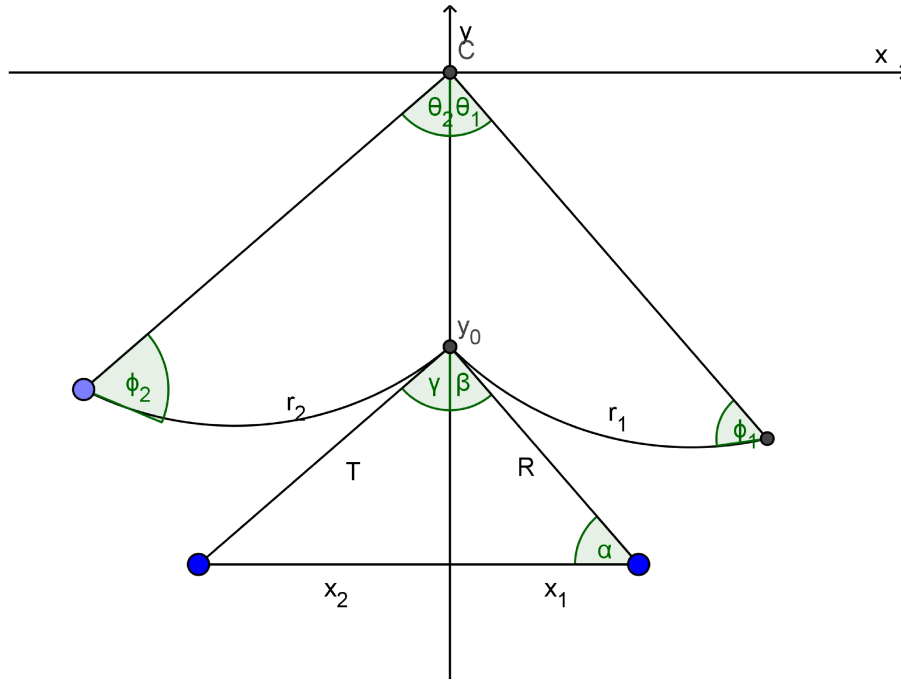


Figura 6.5: Ângulos internos no degrau e no pedaço de roda.

Proposição 4. *Seja ϕ_1 o ângulo que a reta tangente à r_1 em $r(-\frac{\pi}{2} + \theta_1)$ faz com a linha radial que passa por esse ponto, e seja ϕ_2 o ângulo que a reta tangente à r_2 em $r(-\frac{\pi}{2} - \theta_2)$ faz com a linha radial, como se observa na Figura ???. Então $\phi_1 + \phi_2 = 90^\circ$.*

Demonstração. Sejam β e γ os ângulos que a altura e o comprimento do degrau fazem com o eixo vertical, respectivamente. Usando o fato de que a roda é formada por espirais de Bernoulli,

temos que $\phi_1 = \arctan\left(\frac{1}{m}\right)$ e $\phi_2 = \arctan(m)$.

Sabe-se que $\alpha = \arctan(m)$, portanto, $\beta = \arctan\left(\frac{1}{m}\right)$. Como $\beta + \gamma = 90^\circ$, temos que $\gamma = \alpha$, então conclui-se que $\beta = \phi_1$ e $\alpha = \phi_2$. Assim $\phi_1 + \phi_2 = 90^\circ$. $\square$

6.5 FECHANDO A RODA

Agora, mostra-se que é possível escolher y_0 de tal forma que a roda feche por completo. Ainda mais, pode-se fechar a roda com quantas pétalas quisermos. Entende-se por pétala uma parte da roda entre duas distâncias radiais mínimas consecutivas.

Proposição 5. *Considere uma roda para uma escada sendo curva fechada, como já foi considerada, com $N \in \mathbb{N}$ pétalas, então:*

$$y_o = \frac{T}{\sqrt{m^2 + 1} \left(\exp\left(\frac{2m\pi}{(m^2+1)N}\right) - 1 \right)}. \quad (6.11)$$

Demonstração. Sabe-se que cada pétala tem abertura de $\theta_1 + \theta_2$, portanto, como são N pétalas, conclui-se que $\theta_1 + \theta_2 = \frac{2\pi}{N}$.

Substituindo este resultado nas equações desenvolvidas até aqui, temos:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{m} + m\right) \cdot \ln\left(\frac{T}{y_0\sqrt{m^2 + 1}} + 1\right) &= \frac{2\pi}{N} \\ \ln\left(\frac{T}{y_0\sqrt{m^2 + 1}} + 1\right) &= \frac{2\pi}{N} \cdot \frac{m}{m^2 + 1} \\ \frac{T}{y_0\sqrt{m^2 + 1}} + 1 &= \exp\left(\frac{2\pi}{N} \frac{m}{m^2 + 1}\right) \\ y_o &= \frac{T}{\sqrt{m^2 + 1} \left(\exp\left(\frac{2m\pi}{(m^2+1)N}\right) - 1 \right)}. \end{aligned} \quad (6.12)$$

O que completa a demonstração. $\square$

7. CONCLUSÕES

O presente trabalho foi de suma importância para fortalecer minha base matemática, ampliando minha perspectiva em aplicações matemáticas. O texto ainda expõe um tema relevante visto que pode ser aprofundado para questões importantes de cunho social, visando a construção de rodas especiais para que cadeiras de roda possam subir e descer escadas.

Além disso, os tópicos abordados puderam ser desenvolvidos usando ferramentas matemáticas, de certa forma, elementares, o que o torna de fácil acesso à alunos de início de graduação.

Ademais, estes estudos podem ser complementados com outros pares de rodas e estradas, como por exemplo a roda elíptica.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Maria Carvalho e Ana Oiveira, *Estradas para rodas exóticas*, Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática, Vol. 65 (Out. 2011), 1–17.
- [2] Leon Hall e Stan Wagon, *Roads and Wheels*, Mathematics Magazine, Vol. 65, No. 5 (Dec. 1992), 283–301.
- [3] LEITE, Fátima Silva et al. *Wheels for Staircases*. Lecture Notes In Electrical Engineering, p.361-371, 4 set. 2016. Springer International Publishing. http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-43671-5_31.
- [4] Abril: *Quando foi inventada a roda?*, 2011. <https://super.abril.com.br/mundo-estranho/quando-foi-inventada-a-roda/>, acessado em 10/10/2018.
- [5] GUIDORIZZI, H. L. *Um curso de cálculo*. Vol. 1, 2, 3 e 4. Rio de Janeiro: LTC - Livros Técnicos e Científicos, 2002.
- [6] BOYCE, William E.; DIPRIMA, Richard C. *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*. 9. ed. Rio de Janeiro, RJ: LTC, 2010. xvi, 607 p. ISBN 9788521617563
- [7] ZILL, Dennis G.; CULLEN, Michael R. *Equações diferenciais*. 3. ed. São Paulo: Pearson Makron Books, c2001. 2 v. ISBN 8534612919 (v.1), ISBN 8534611416 (v.2).