

Universidade Federal de Uberlândia

Instituto de Ciências Exatas e Naturais do Pontal

Curso de Matemática

Trabalho de Conclusão de Curso

**Decomposição Matricial:
uma incitação ao estudo de Álgebra
Linear**

por

Roberta Agnes Mendes Melo[†]

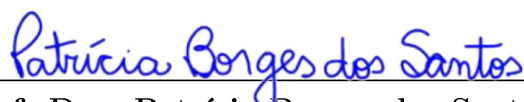
Bacharelado em Matemática - Ituiutaba - MG

Orientador: Prof. Dra. Patrícia Borges dos Santos

Decomposição Matricial: uma incitação ao estudo de Álgebra Linear

Este exemplar corresponde à redação final da Monografia devidamente corrigida e defendida por **Roberta Agnes Mendes Melo** e aprovada pela comissão julgadora.

Ituiutaba, 18 de junho de 2021.



Prof. Dra. Patrícia Borges dos Santos

Banca examinadora:

Prof. Dra. Patrícia Borges dos Santos

Prof. Dra. Evaneide Alves Carneiro

Prof. Dr. Marcelo Gonçalves Oliveira

Vieira

Monografia apresentada ao Instituto de Ciências Exatas e Naturais do Pontal, UFU como requisito parcial para obtenção do título de **Bacharelado em Matemática**.

*À minha orientadora
Patrícia*

AGRADECIMENTOS

À minha família por incentivar-me a seguir em busca de meus sonhos e por apoiar-me, ainda que à distância, no decorrer dessa trajetória em graduação, sendo estes: minha mãe **Maria da Conceição Dias Mendes de Melo**, meu pai **José Antônio Pereira de Melo**, meu irmão **Denis Roberto Mendes Melo** e minha cunhada **Tamires Cavalheiro Machado**.

Ao **Welton Costa Lavércio** por ser meu companheiro e amigo em todos os momentos, particularmente por toda ajuda nas disciplinas da graduação.

Ao meu terapeuta **Marcelo S. Lima** por guiar-me nesse processo de auto conhecimento e no enfrentamento aos desafios diários.

À minha orientadora **Prof. Dra. Patrícia Borges dos Santos** pela disponibilidade e valiosos ensinamentos durante este estudo.

Aos membros da banca avaliadora; **Prof. Dra. Evaneide Alves Carneiro** e **Prof. Dr. Marcelo Gonçalves Oliveira Vieira**, pelas contribuições que engrandeceram meu trabalho. A todos os professores do curso, por todas as aulas ministradas, atendimentos e paciência. Em particular, a **Prof. Dra Cristiane Coppe de Oliveira** pelos aprendizados na disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso.

Aos meus **amigos de graduação**, em especial **Pedro Rangel** por estar comigo durante toda a trajetória acadêmica.

Aos meus amigos **Rafael Menezes**, **Amanda Calcic**, **Beatriz Hitos**, **Bruna Fazam**, **Maria Antônia**, **Milena Rodrigues** e **Myllena Tucci** por fazerem parte da minha vida e por toda preocupação comigo, desde a minha vinda a Ituiutaba-MG, até os

dias atuais.

Ao **Programa de Educação Tutorial (PET)** pelas vivências e aprendizados que contribuíram para meu crescimento pessoal e profissional. Em especial, o tutor **Prof. Dr. Marcelo Gonçalves Oliveira Vieira** e todos integrantes do programa.

À **Universidade Federal de Uberlândia - UFU** e ao **Instituto de Ciências Exatas e Naturais do Pontal** por tudo que proporcionou-me.

RESUMO

Neste trabalho, realizamos um estudo dos diferentes métodos de decomposição de matrizes, tema este fundamental na Álgebra Linear por proporcionar uma facilidade computacional e simplicidade analítica. Na prática é inviável que a maioria dos cálculos de matrizes sejam feitos por: inversão de matriz, resolução de sistema linear e método dos mínimos quadrados. Assim, decompor matrizes revela suas estruturas e características, ajudando a interpretar o seu significado. A escolha dos métodos para desenvolver o trabalho foi a familiaridade adquirida durante as disciplinas de Álgebra Linear e a necessidade de se fazer uma iniciação científica dentro do Programa de Educação Tutorial (PET). O objetivo foi estudar diferentes métodos de decomposição matricial, desenvolver conhecimentos em conteúdos, além dos abordados na graduação e apresentar resultados por meio de exemplos, sejam eles estudados ou inéditos. Primeiro estudamos alguns conceitos básicos e posteriormente, introduzimos alguns métodos fundamentais de decomposição de matriz, como: LU, LDU, Cholesky, Schur e QR. Sendo assim, essa pesquisa de caráter bibliográfico teve como principais referências [1], [2], [3], [4], [5],[6], [7] e [8]. Os resultados alcançados foram o desenvolvimento de conteúdos além dos vistos na graduação, a apresentação de exemplos estudados e inéditos e a divulgação de uma área que tem atraído cada vez mais pesquisadores da Matemática, Ciência da Computação e Engenharia. Espera-se que este trabalho sirva de base para novas pesquisas e contribua para o conhecimento do tema na formação inicial em Matemática.

Palavras-chave: Álgebra Linear; decomposição matricial; facilidade analítica.

LISTA DE SÍMBOLOS

- $\mathbb{R}$ Corpo dos números reais.
- $\mathbb{C}$ Corpo dos números complexos.
- $\mathbb{K}$ Corpo qualquer (real ou complexo).
- $\text{span}\{S\}$ ou $[S]$ Espaço vetorial gerado por S .
- $\mathcal{B}$ ou β Base de um espaço vetorial X sobre o corpo $\mathbb{K}$.
- $\dim X$ Dimensão do espaço vetorial X .
- $\mathcal{E}$ Base canônica do espaço $\mathbb{K}^n$.
- $[\mathcal{C}]$ Espaço coluna ou espaço gerado por $\mathcal{C}$
- $[\mathcal{L}]$ Espaço linha ou espaço gerado por $\mathcal{L}$.
- A Matriz A .
- A^t Transposta da matriz A .
- $\overline{A}$ Conjugada da matriz A .
- A^* Transposta conjugada da matriz A .
- A^{-1} Inversa da matriz A .

• A_r	Submatriz principal de A de ordem r .
• T	Transformação linear ou operador linear.
• T^*	Operador linear adjunto.
• imT	Imagem de T .
• $kerT$	Núcleo de T .
• $postoA$	Posto da matriz A .
• $[T]_{\beta_2}^{\beta_1}$	Matriz da transformação linear T com relação as bases β_1 e β_2 .
• $(A)_{\{w_1, w_2, w_3\}}$	Matriz da transformação linear A com relação a bases $\{w_1, w_2, w_3\}$.
• $(A)_{\mathcal{E}}$	Matriz da transformação linear A na base canônica.
• $\langle x, y \rangle$	Produto interno entre os vetores x e y .
• $x \perp y$	Vetores x e y ortogonais.
• $span\{u\}^\perp$	Espaço ortogonal ao espaço vetorial gerado por u .
• $\ x\ $	Norma de x .
• $proj_{x_1} u$	Projeção ortogonal do vetor u no vetor não nulo x_1 .

CONTEÚDO

Agradecimentos	i
Resumo	iii
Lista de Símbolos	iv
Introdução	1
Objetivo	2
Estrutura dos Tópicos Apresentados	2
1 Definições e Resultados Preliminares	4
1.1 Base e Dimensão	4
1.1.1 Espaços Vetoriais	4
1.1.2 Bases	5
1.2 Sistemas Lineares e Matrizes	6
1.2.1 Espaço Linha e Espaço Coluna	6
1.2.2 Matrizes	7
1.3 Aplicações Lineares	8
1.3.1 Autovalores e Autovetores	9
1.4 Estrutura Euclidiana	10
1.4.1 Produto Interno	10
1.4.2 Norma	10
1.4.3 Bases Ortonormais	11
1.4.4 Projeções Ortogonais	11

1.4.5	Isometria	11
1.5	Operadores Lineares Especiais	11
2	Decomposição LU	13
2.1	Operações Elementares	13
2.1.1	Resoluções de Sistemas Lineares	13
2.1.2	Matrizes Elementares	14
2.2	Decomposição LU	20
2.3	Exemplos de decomposição LU	22
3	Decomposição LDU	38
3.1	Decomposição LDU	38
3.2	Exemplos de decomposição LDU	40
4	Decomposição de Cholesky	49
4.1	Decomposição de Cholesky	49
4.2	Exemplos de decomposição de Cholesky	51
4.3	Cálculo do fator de Cholesky	55
5	Decomposição de Schur	61
5.1	Decomposição de Schur	61
5.2	Exemplos de decomposição de Schur	63
6	Decomposição QR	69
6.1	A decomposição QR de uma base	69
6.2	Decomposição QR	71
6.3	Exemplo da decomposição QR	72
	Considerações	77
	Bibliografia	78

Introdução

A decomposição de matrizes consiste em escrever uma matriz dada em uma matriz na forma canônica. Quando a matriz dada é transformada em produto de matrizes canônicas o processo de elaboração dessa decomposição também é chamado de fatoração matricial. Esse tema é fundamental na Álgebra Linear. Os propósitos essenciais da decomposição de matrizes são dois: facilidade computacional e simplicidade analítica. Portanto decompor matrizes revela as características, estruturas e ajuda a interpretar o seu significado.

A partir da necessidade de se fazer uma iniciação científica dentro do Programa de Educação Tutorial (PET), a escolha dos métodos para desenvolver o trabalho foi a familiaridade adquirida durante as disciplinas de Álgebra Linear e a afinidade com a professora que as ministrou, além da possibilidade de desenvolver conhecimentos além dos abordados na graduação e apresentar como resultados exemplos já estudados ou inéditos.

Os métodos estudados foram: LU , LDU , Cholesky, Schur e QR . Resumidamente, podemos dizer que a decomposição LU consiste em decompor uma matriz em uma matriz L triangular inferior e uma matriz U triangular superior. Esse método pode resultar em uma assimetria onde a matriz L tem entradas iguais a um na diagonal principal ou em que U possui essas entradas. Já a decomposição LDU toma uma matriz inicialmente decomposta pelo método LU e escreve essa matriz de uma maneira mais simétrica decompondo em uma matriz L triangular inferior, uma matriz D onde sua diagonal são os pivôs e o restante dos elementos é zero e uma U matriz triangular superior. Sobre a decomposição de Cholesky pode-se dizer que ela também deriva da decomposição LU , mas está definida apenas para matrizes positivo definidas. Neste caso ela pode ser obtida

a partir da decomposição LDU definindo $L_1 = LD^{\frac{1}{2}}$ e escrevendo como $L_1L_1^t$, onde a matriz L_1 é triangular inferior e a matriz L_1^t é triangular superior. A decomposição de Schur decompõe uma matriz A com entradas no corpo dos complexos como $A = UTU^*$, onde U é unitária e T é triangular superior. O método de Gram-Schmidt permite fatorar uma matriz cujas colunas são linearmente independentes em um produto QR , onde Q é a matriz cujas colunas formam um conjunto ortonormal e R é uma matriz triangular inferior, chamado de decomposição QR .

Em relação aos procedimentos do estudo, a pesquisa teve caráter bibliográfico. Para desenvolver o trabalho foram utilizadas como base as referências [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7] e [8].

Os resultados alcançados foram o desenvolvimento de conteúdos além dos vistos na graduação, a apresentação de exemplos estudados e inéditos e a divulgação de uma área que tem atraído cada vez mais pesquisadores da Matemática, Ciência da Computação e Engenharia. Espera-se que este trabalho sirva de base para novas pesquisas e contribua para o conhecimento do tema na formação inicial em Matemática.

Objetivo

O objetivo deste trabalho é estudar diferentes métodos de decomposição de matrizes, desenvolver conhecimento de conteúdos que geralmente não são vistos na graduação e apresentar resultados por meio de exemplos, sendo eles estudados ou inéditos.

Estrutura dos Tópicos Apresentados

O presente trabalho está dividido da seguinte maneira:

- No capítulo 1 (Definições e Resultados Preliminares), apresentamos definições e resultados que utilizamos durante a pesquisa. O capítulo foi construído tomando por base a referência [1].
- No capítulo 2 (Decomposição LU), apresentamos as definições de operação elementar e matriz elementar, uma proposição a respeito de matriz elementar, a definição de matriz triangular inferior e superior, o método de decomposição LU , uma proposição

que diz que se as submatrizes principais de A são invertíveis, então A possui uma decomposição LU e, posteriormente, abordamos alguns exemplos. Os conceitos tratados nesse capítulo tiveram como base os referenciais teóricos [1], [2] e [5].

- No capítulo 3 (Decomposição LDU), exibimos o método de decomposição LDU , uma proposição que diz que a decomposição LDU é única e, posteriormente, abordamos alguns exemplos. Os textos que serviram de base para esse capítulo foram as referências [1], [2] e [5].
- No capítulo 4 (Decomposição de Cholesky), apresentamos alguns lemas que caracterizam operadores e matrizes positivo definidas, um resumo dos resultados obtidos no capítulo, a decomposição de Cholesky e, posteriormente, abordamos alguns exemplos. Além disso, apresentaremos o cálculo do fator de Cholesky. As teorias apresentadas nesse capítulo tiveram como base os referenciais teóricos [1], [3] e [6].
- No capítulo 5 (Decomposição de Schur), estudamos o teorema de Schur e sua demonstração e um corolário do teorema. Posteriormente, abordamos alguns exemplos. Os conceitos tratados nesse capítulo tiveram como base as referências [1], [7] e [8].
- No capítulo 6 (Decomposição QR), exibimos o método de decomposição QR de uma base através de uma matriz de ordem três, depois generalizamos a decomposição através de um teorema. Apresentamos também outro método de decomposição QR que explica o que acontece quando as colunas não são linearmente independentes. E por fim, abordamos alguns exemplos. O capítulo foi construído tomando por base os referenciais teóricos [1] e [4].

CAPÍTULO 1

Definições e Resultados Preliminares

O capítulo foi construído tomando por base a referência [1].

1.1 Base e Dimensão

1.1.1 Espaços Vetoriais

O corpo $\mathbb{R}$ ou o corpo $\mathbb{C}$ serão denotados por $\mathbb{K}$.

Definição 1.1. *Um espaço vetorial X sobre o corpo $\mathbb{K}$ é um conjunto munido com duas operações, adição $+: X \times X \rightarrow X$ e multiplicação por escalar $\cdot: \mathbb{K} \times X \rightarrow X$, as quais satisfazem as seguintes condições:*

- (i) $x + y \in X$, para todo $x, y \in X$ (fechamento);
- (ii) $(x + y) + z = x + (y + z)$, para todo $x, y, z \in X$ (associatividade);
- (iii) $x + y = y + x$, para todo $x, y \in X$ (comutatividade);
- (iv) existe $0 \in X$ tal que $x + 0 = x$, para todo $x \in X$ (elemento neutro);
- (v) existe $(-x) \in X$ tal que $x + (-x) = 0$, para todo $x \in X$ (inverso aditivo);
- (vi) $\lambda \cdot x \in X$, para todo $x \in X$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ (fechamento);

(vii) $\alpha \cdot (\lambda \cdot x) = (\alpha \cdot \lambda) \cdot x$, para todo $x \in X$ e $\lambda, \alpha \in \mathbb{K}$ (associatividade);

(viii) $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$, para todo $x, y \in X$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ (distributividade);

(ix) $(\lambda + \alpha) \cdot x = \lambda \cdot x + \alpha \cdot x$, para todo $x \in X$ e $\lambda, \alpha \in \mathbb{K}$ (distributividade);

(x) $1 \cdot x = x$, para todo $x \in X$ (regra da unicidade);

Definição 1.2. Um subconjunto Y de um espaço vetorial X é um **subespaço**, se seus elementos, munidos com as operações de X , satisfazem as condições que definem o espaço vetorial X .

Definição 1.3. O conjunto das matrizes $m \times n$ com entradas em $\mathbb{K}$, denotado por $M_{m \times n}(\mathbb{K})$, é um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial com a soma usual e a multiplicação por escalar, dadas por:

$$(a_{ij})_{m \times n} + (b_{ij})_{m \times n} = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}$$

$$\alpha \cdot (a_{ij})_{m \times n} = (\alpha \cdot a_{ij})_{m \times n}.$$

1.1.2 Bases

Definição 1.4. Seja $S \subset X$ um subconjunto qualquer do espaço vetorial X . Uma **combinação linear** de elementos de S é uma soma finita do tipo

$$\lambda_1 \cdot x_1 + \cdots + \lambda_k \cdot x_k$$

com $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ e $x_1, \dots, x_k \in S$.

Definição 1.5. Um subconjunto S de um espaço vetorial X sobre um corpo $\mathbb{K}$ é **linearmente dependente**, se existir um número finito de elementos não nulos $x_1, \dots, x_k \in S$ e escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$, não nulos, tais que:

$$\lambda_1 \cdot x_1 + \cdots + \lambda_k \cdot x_k = 0.$$

Caso contrário, o conjunto S é **linearmente independente**.

Definição 1.6. O conjunto S **gera** o espaço vetorial X sobre o corpo $\mathbb{K}$ se, para todo $x \in X$, existirem (finitos) elementos $x_1, \dots, x_j \in S$ e escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_j \in \mathbb{K}$ tais que:

$$x = \lambda_1 \cdot x_1 + \cdots + \lambda_j \cdot x_j.$$

Observação 1.7. Denotaremos o espaço vetorial gerado por S por $\text{span}\{S\}$ ou $[S]$.

Definição 1.8. Uma **base** de um espaço vetorial X sobre um corpo $\mathbb{K}$ é um subconjunto ordenado $\mathcal{B}$ de X que é linearmente independente e gera X .

Definição 1.9. Se $\mathcal{B} = \{x_1, \dots, x_n\}$ for uma base do espaço vetorial X , dizemos que X tem dimensão n e escrevemos

$$\dim X = n.$$

Se $X = \{0\}$, X tem dimensão finita igual a zero.

Definição 1.10. Seja $e_i \in \mathbb{K}^n$ o vetor cuja i -ésima coordenada é igual a 1, as outras sendo nulas. O conjunto $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ é a **base canônica** do espaço $\mathbb{K}^n$.

1.2 Sistemas Lineares e Matrizes

1.2.1 Espaço Linha e Espaço Coluna

Definição 1.11. Para $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$, suponhamos conhecidos os valores a_{ij} e os valores b_j . Um sistema linear em m equações e n incógnitas procura soluções do tipo n -upla $x_1, \dots, x_n$ que satisfazem:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + \dots + a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + \dots + a_{2n} \cdot x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1} \cdot x_1 + \dots + a_{mn} \cdot x_n = b_m \end{cases}$$

Em termos de matrizes, esse sistema pode ser escrito como:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \text{ ou, de forma resumida, } Ax = b.$$

Se $b = 0$, o sistema é chamada **homogêneo**; se $b \neq 0$, o sistema é **não homogêneo**.

Definição 1.12. *Seja a matriz $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ e o sistema linear $Ax = b$. Escrevendo A por meio de suas linhas ou colunas, temos:*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & \cdots & c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_m \end{pmatrix}.$$

Os vetores colunas $c_1, \dots, c_n$ são vetores do $\mathbb{K}^m$ e os vetores linhas $l_1, \dots, l_m$ são vetores do $\mathbb{K}^n$. Se $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_n\} \subset \mathbb{K}^m$, chamamos de **espaço coluna** o espaço gerado por $\mathcal{C}$, isto é, $[\mathcal{C}] \subset \mathbb{K}^m$. Se $\mathcal{L} = \{l_1, \dots, l_m\} \subset \mathbb{K}^n$, chamamos de **espaço linha** o espaço gerado por $\mathcal{L}$, isto é, $[\mathcal{L}] \subset \mathbb{K}^n$.

1.2.2 Matrizes

Definição 1.13. *Se $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ for uma matriz, $m \times n$, definimos a **transposta** de A como matriz $A^t = (a_{ij}^t) \in \mathbb{M}_{n \times m}(\mathbb{K})$, com $a_{ij}^t = a_{ji}$.*

Definição 1.14. *Sejam $A \in \mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$. Definimos a matriz **conjugada** $\bar{A} \in \mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ como a matriz obtida ao se tomar a conjugação complexa de cada uma das entradas de A .*

Definição 1.15. *A matriz A é uma **matriz simétrica** se for igual a sua transposta, isto é, $A = A^t$.*

Definição 1.16. *A matriz real A é **ortogonal** se a inversa de A é igual a transposta de A , $A^{-1} = A^t$, isto é, $A \cdot A^t = A^t \cdot A = I$.*

Definição 1.17. *A matriz complexa A é **hermitiana** ou **unitária** se a inversa de A é igual a transposta conjugada de A , $A^{-1} = A^*$, isto é, $A \cdot A^* = A^* \cdot A = I$, onde $A^* = \bar{A}^t$.*

Definição 1.18. *Seja $A \in \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$. Para cada $r \leq n$, a submatriz $(a_{ij}), 1 \leq i, j \leq r \leq n$ é a **submatriz principal** de A de ordem r , denotada por A_r .*

Definição 1.19. *Uma matriz é dita **triangular inferior** quando todos os elementos acima da diagonal principal são nulos. Isso significa que, $a_{ij} = 0, \forall i < j$.*

Definição 1.20. *Uma matriz é dita **triangular superior** quando todos os elementos abaixo da diagonal principal são nulos. Isso significa que, $a_{ij} = 0, \forall i > j$.*

1.3 Aplicações Lineares

Definição 1.21. *Sejam X e Y espaços vetoriais sobre o corpo $\mathbb{K}$. Uma aplicação $T : X \rightarrow Y$ satisfazendo*

$$T(x + \lambda \cdot y) = Tx + \lambda \cdot Ty$$

*para quaisquer $x, y \in X$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ é chamada **transformação linear** ou **aplicação linear**. Se $X = Y$, chamamos T de **operador linear**.*

Definição 1.22. *Seja $T : X \rightarrow Y$ uma aplicação linear. Definimos a **imagem** de T , denotada por imT , por*

$$imT = \{y \in Y | y = Tx\}.$$

*Definimos o **núcleo** de T , denotado por $kerT$, por*

$$kerT = \{x \in X | Tx = 0\}.$$

Definição 1.23. *Definimos o **posto** da matriz A , denotado por $\text{posto } A$, como sendo:*

$$\dim[C] = \dim[\mathcal{L}].$$

Se A for uma representação matricial da aplicação linear T definimos $\text{posto } T = \text{posto } A$.

Definição 1.24. *Sejam X e Y espaços vetoriais com bases $\beta_1 = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ e $\beta_2 = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ respectivamente e seja $T : X \rightarrow Y$ uma transformação linear. Então existem únicos $a_{ij} \in \mathbb{K}$, $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$ tais que*

$$T(v_j) = a_{1j}w_1 + a_{2j}w_2 + \dots + a_{mj}w_m.$$

Seja $[T]_{\beta_1}^{\beta_2}$ a matriz cuja j -ésima coluna é formada pelas coordenadas do vetor $T(v_j)$ na base β_2 , a saber, $[T(v_j)]_{\beta_2} = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})$:

$$[T]_{\beta_1}^{\beta_2} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

A matriz $[T]_{\beta_1}^{\beta_2}$ é chamada de matriz da transformação linear T com relação às bases β_1

e β_2 . Observe que $[T]_{\beta_1}^{\beta_2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \Rightarrow [T]_{\beta_1}^{\beta_2} [v_1]_{\beta_1} = [T(v_1)]_{\beta_2}$ e, de modo geral

temos $[T]_{\beta_1}^{\beta_2} [v]_{\beta_1} = [T(v)]_{\beta_2}$, ou seja, o diagrama abaixo é comutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{T} & Y \\
 \downarrow [\cdot]_{\beta_1} & & \downarrow [\cdot]_{\beta_2} \\
 \mathbb{K}^n & \xrightarrow{[T]_{\beta_1}^{\beta_2}} & \mathbb{K}^m
 \end{array}$$

$\begin{array}{ccc} v & \xrightarrow{\quad} & T(v) \\ \downarrow & & \downarrow \\ [v]_{\beta_1} & \xrightarrow{\quad} & [T(v)]_{\beta_2} \end{array}$

ou seja, $[T]_{\beta_1}^{\beta_2} \circ [\cdot]_{\beta_1} = [\cdot]_{\beta_2} \circ T$.

Definição 1.25. Sejam β e β' duas bases para o $\mathbb{K}$ -espaço vetorial X e seja T um operador linear em X . Então: $[T]_{\beta}^{\beta} = [I]_{\beta'}^{\beta} [T]_{\beta'}^{\beta'} [I]_{\beta}^{\beta'}$

com $[I]_{\beta'}^{\beta} = ([I]_{\beta}^{\beta'})^{-1}$. Isto significa que para um espaço vetorial de dimensão finita sempre podemos obter uma matriz invertível P , chamada de matriz de mudança de base, tal que $[T]_{\beta}^{\beta} = P^{-1} [T]_{\beta'}^{\beta'} P$; onde $[T]_{\beta}^{\beta}$ é a notação usada para $[T]_{\beta}^{\beta}$ e $[T]_{\beta'}^{\beta'}$ denota $[T]_{\beta'}^{\beta'}$.

1.3.1 Autovalores e Autovetores

Definição 1.26. Seja X um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$, com dimensão finita n , e $T : X \rightarrow X$ um operador. O polinômio $p(t) := \det(tI - T)$ é o **polinômio característico de T** . As raízes $\lambda_i \in \mathbb{K}$ desse polinômio são os **autovalores de T** . Os elementos não nulos do núcleo $\text{Ker}(\lambda_i I - T)$ são os **autovetores associados ao autovalor λ_i** . O **autoespaço X_{λ} associado ao autovalor λ** é definido por

$$X_{\lambda} := \text{Ker}(\lambda I - T) := \{x \in X; (\lambda I - T) \cdot x = 0\}.$$

1.4 Estrutura Euclidiana

1.4.1 Produto Interno

Definição 1.27. *Seja E um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Um **produto interno** em E é uma aplicação $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{K}$ satisfazendo as seguintes condições:*

- (i) $\langle x, x \rangle \geq 0$;
- (ii) $\langle x, x \rangle = 0$ se, e somente se, $x = 0$.
- (iii) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$;
- (iv) $\langle x + \lambda \cdot y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \lambda \cdot \langle y, z \rangle$;

Definição 1.28. *Um espaço vetorial E sobre $\mathbb{R}$, de dimensão finita, no qual está definido um produto interno, é um **espaço vetorial euclidiano**. O espaço vetorial E sobre $\mathbb{C}$, no qual está definido um produto interno, é chamado, respectivamente, de espaço **hermitiano** ou **unitário**.*

Definição 1.29. *Sejam x, y vetores de um espaço com produto interno E . Esses vetores são **ortogonais** se $\langle x, y \rangle = 0$. Nesse caso escrevemos $x \perp y$.*

1.4.2 Norma

Definição 1.30. *Seja E um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$. Uma **norma** em E é uma aplicação $\|\cdot\| : E \rightarrow [0, \infty)$ satisfazendo as seguintes condições:*

- (i) $\|x\| \geq 0$;
- (ii) $\|x\| = 0$ se, e somente se $x = 0$;
- (iii) $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$, para $\lambda \in \mathbb{K}$;
- (iv) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Observação 1.31. *Em um espaço vetorial euclidiano, associada ao produto interno sempre existe uma norma que é dada por: $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$. Pode-se mostrar que de fato isso define uma norma, ou seja, cumpre os axiomas i a iv da definição 1.30.*

Definição 1.32. *O valor $\|x\|$ pode ser interpretado como **comprimento** de x . Se $\|x\| = 1$, o vetor x é **unitário**.*

1.4.3 Bases Ortonormais

Definição 1.33. *Seja E um espaço com produto interno. Um subconjunto $X \subset E$ é ortogonal, se $u \perp v$ para quaisquer $u, v \in X$. Se, além disso, todos os seus vetores forem unitários, então X é ortonormal.*

1.4.4 Projeções Ortogonais

Definição 1.34. *O vetor $\text{proj}_{x_1} u = \frac{\langle u, x_1 \rangle}{\|x_1\|^2} \cdot x_1$ é a **projeção ortogonal** do vetor u no vetor não nulo x_1 .*

Teorema 1.35 (Gram-Schmidt). *Dada uma base arbitrária $\{y_1, \dots, y_n\}$ do espaço euclidiano E , existe uma base ortonormal $\{x_1, \dots, x_n\}$ de E formada por vetores x_i que são combinações lineares dos vetores $y_1, \dots, y_i$, para todo $i = 1, \dots, n$.*

Demonstração. Utilizaremos indução na dimensão do espaço, o caso $n = 1$ sendo trivial. Suponhamos obtidos os vetores $x_1, \dots, x_{k-1}$. Consideremos então

$$x_k = \frac{1}{c} \left(y_k - \sum_{i=1}^{k-1} c_i x_i \right),$$

em que c e $c_1, \dots, c_{k-1}$ são constantes que serão determinadas. Para obtermos x_k ortogonal a todos os x_i já escolhidos, basta definir $c_i = \langle y_k, x_i \rangle$ para $i = 1, \dots, k-1$. Escolhemos então c como a norma do vetor $y_k - \sum_{i=1}^{k-1} c_i x_i$. Note que $c > 0$. $\square$

1.4.5 Isometria

Definição 1.36. *Sejam E, F espaços euclidianos e $M : E \rightarrow F$ uma aplicação (não necessariamente linear). A aplicação M é uma **isometria** se, para quaisquer $x, y \in E$, tivermos:*

$$\|Mx - My\| = \|x - y\|.$$

1.5 Operadores Lineares Especiais

Definição 1.37. *Dado um operador linear $T : E \rightarrow E$, em um espaço vetorial com produto interno, dizemos que T^* é um **operador adjunto** se para todo $\alpha, \beta \in E$, tivermos:*

$$\langle T\alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, T^*\beta \rangle.$$

Definição 1.38. *Sejam E um espaço euclidiano e $T : E \rightarrow E$ um operador linear. Dizemos que*

- (i) T é **unitário**, se $T^*T = TT^* = I$;
- (ii) T é **auto-adjunto**, se $T^* = T$;
- (iii) T é **normal**, se $T^*T = TT^*$.

Observação 1.39. *Um resultado importante sobre o operador adjunto é que a matriz de T^* em relação a uma base ortonormal será a matriz transposta conjugada da matriz de T em relação à mesma base.*

Observação 1.40. *A mesma denominação é utilizada para matrizes que representam tais operadores com relação a uma base ortogonal.*

Observação 1.41. *Operadores unitários também são chamados de ortogonais (especialmente se E for um espaço real), enquanto os operadores auto-adjuntos também são chamados de hermitianos (no espaço complexo) ou simétricos (no espaço real).*

Definição 1.42. *Um operador linear $T : E \rightarrow E$ é **positivo definido** se $\langle Tx, x \rangle > 0$, $\forall x \neq 0$, e neste caso escrevemos $T > 0$.*

Definição 1.43. *Uma matriz quadrada A será **positivo definida** se $\langle Ax, x \rangle > 0$, $\forall x \neq 0$.*

CAPÍTULO 2

Decomposição LU

Os conceitos tratados neste capítulo tiveram como base os referenciais teóricos [1], [2] e [5].

2.1 Operações Elementares

2.1.1 Resoluções de Sistemas Lineares

Vamos estudar a resolução do sistema $Ax = b$. Para isso, representamos esse sistema por uma única matriz, chamada matriz aumentada do sistema:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

Observação 2.1. *Se estivermos tratando de um sistema homogêneo $Ax = 0$, não há necessidade de trabalhar com a matriz aumentada do sistema.*

Definição 2.2. *As seguintes operações da matriz A não alteram o conjunto de soluções do sistema $Ax = b$:*

- (a) *Transpor linhas i e j . ($L_i \leftrightarrow L_j$)*

(b) Multiplicar linha i por um escalar não-nulo. ($L_i \rightarrow \alpha L_i$)

(c) Substituir a linha j por sua soma com o múltiplo da linha i . ($L_j \rightarrow L_j + \alpha L_i$)

As operações (a), (b) e (c) são as **operações elementares** sobre as linhas da matriz A .

Definição 2.3. Dado um sistema linear S de m equações e n incógnitas. Suponha que ao efetuarmos um número finito de operações elementares chegamos a um sistema linear com o seguinte aspecto

$$S_1 : \begin{cases} a_{1r_1} \cdot x_{r_1} + \cdots + a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\ 0 + a_{2r_2} \cdot x_{r_2} + \cdots + a_{2n} \cdot x_n = b_2 \\ 0 + 0 + \cdots + a_{kr_k} \cdot x_{r_k} + \cdots + a_{kn} \cdot x_n = b_k \end{cases},$$

onde a_{1r_i} , para todo $i = 1, \dots, k$ e cada $r_i \geq 1$.

Se tivermos $1 \geq r_1 \geq r_2 \geq \cdots \geq r_k \geq n$ dizemos que S_1 é um **sistema linear escalonado**. Nesse caso, a matriz do sistema S_1 será chamada de **matriz escalonada**.

Definição 2.4. Quando uma matriz está em forma de escalonada ao primeiro elemento não nulo de cada linha chama-se **pivô**.

Observação 2.5. Observe que em uma linha nula não há nenhum pivô e em cada coluna há no máximo um pivô.

2.1.2 Matrizes Elementares

Seja $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$. Vamos mostrar que o escalonamento de uma matriz pode ser interpretado em termos de uma decomposição da matriz A .

Definição 2.6. Uma matriz E é **elementar** se puder ser obtida da matriz identidade $m \times m$ por meio da aplicação de uma operação elementar.

Em outras palavras, uma matriz é elementar se difere da matriz identidade por uma única operação elementar.

O próximo resultado mostra que a aplicação de uma operação elementar sobre as linhas da matriz A é equivalente a multiplicação dessa matriz por uma matriz elementar.

Proposição 2.7. *Seja e uma operação elementar sobre (as linhas de) a matriz $A \in \mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ e E a matriz elementar $e(I)$, sendo I a matriz identidade $m \times m$. Então $e(A) = EA$.*

Demonstração. Considere apenas a aplicação de uma operação elementar (a): transpor linhas i e j . A matriz E nesse caso é dada por:

$$I = \begin{matrix} & L_i \rightarrow & \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ L_j \rightarrow & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \\ & & \uparrow C_i \quad \uparrow C_j \end{matrix} \xrightarrow{L_i \leftrightarrow L_j} \begin{matrix} & L_i \rightarrow & \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ L_j \rightarrow & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \\ & & \uparrow C_i \quad \uparrow C_j \end{matrix} = e(I) = E.$$

Então,

$$E \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{ji} & \cdots & a_{jj} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mi} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{ji} & \cdots & a_{jj} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mi} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = e(A).$$

Agora, considere apenas a aplicação de uma operação elementar (b): multiplicar a linha i por um escalar não nulo. A matriz E nesse caso é dada por:

$$I = \begin{matrix} & L_i \rightarrow \\ & L_j \rightarrow \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_i \leftrightarrow \alpha L_i} \begin{matrix} L_i \rightarrow \\ L_j \rightarrow \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \alpha & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = e(I) = E.$$

$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ C_i & C_j \end{matrix}$
 $\begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ C_i & C_j \end{matrix}$

Então,

$$E \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \alpha & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{ji} & \cdots & a_{jj} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mi} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha \cdot a_{i1} & \cdots & \alpha \cdot a_{ii} & \cdots & \alpha \cdot a_{ij} & \cdots & \alpha \cdot a_{in} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{ji} & \cdots & a_{jj} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mi} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = e(A).$$

Por fim, considere apenas a aplicação de uma operação elementar (c): a linha j somada com α vezes a linha i . A matriz E nesse caso é dada por:

$$I = \begin{matrix} & L_i \rightarrow \\ & L_j \rightarrow \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_j \leftrightarrow L_j + \alpha L_i} \begin{matrix} L_i \rightarrow \\ L_j \rightarrow \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \alpha & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = e(I) = E.$$

$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ C_i & C_j \end{matrix}$

Então,

$$E \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \alpha & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{ji} & \cdots & a_{jj} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mi} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} + \alpha \cdot a_{i1} & \cdots & a_{ji} + \alpha \cdot a_{ii} & \cdots & a_{jj} + \alpha \cdot a_{ij} & \cdots & a_{jn} + \alpha \cdot a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mi} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = e(A).$$

□

Agora, consideremos o processo de escalonamento de uma matriz A e suponhamos que E seja uma matriz elementar obtida por meio de uma das operações elementares. Podemos mostrar algumas propriedades existentes no processo de calcular as inversas das matrizes elementares.

De fato, apesar disto valer em geral, para ficar mais intuitivo faremos a demonstração para o caso de uma matriz 4×4 .

Seja a matriz E obtida por meio da operação elementar (a) :

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Encontrando a matriz inversa da E , temos que:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[L_2 \leftrightarrow L_3]{\sim} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Logo,

$$\mathbf{E}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Seja a matriz E obtida por meio da operação elementar (b) :

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Encontrando a matriz inversa da E , temos que:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[L_2 \rightarrow \frac{1}{\alpha} L_2]{\sim} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Logo,

$$\mathbf{E}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Seja a matriz E obtida por meio da operação elementar (c):

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Encontrando a matriz inversa da E , temos que:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 + (-\alpha)L_2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Logo,

$$\mathbf{E}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A demonstração acima nos dá uma ideia de como serão as inversas das matrizes elementares. O resultado geral está enunciado no teorema abaixo.

Teorema 2.8. *Matrizes elementares são invertíveis, e a inversa de uma matriz elementar será uma matriz elementar de mesmo tipo.*

Demonstração. Caso 1: Suponha que a operação elementar (a) tenha sido executada na matriz I_n . Desse modo obtemos E ao transpor a i -ésima linha com a j -ésima linha da matriz identidade I_n ($i \neq j$). Pode-se verificar que $E^2 = I_n$, neste caso E é invertível e $E^{-1} = E$.

Caso 2: Suponha que E foi obtida ao multiplicar a i -ésima linha de I_n por uma constante não nula α , uma operação elementar do tipo (b). Já que $\alpha \neq 0$, α tem inverso multiplicativo α^{-1} . Seja $\overline{E}$ a matriz elementar obtida de I_n ao multiplicar a i -ésima linha por α^{-1} . Pode-se mostrar que $\overline{E}E = I_n = E\overline{E}$, e então $E^{-1} = \overline{E}$.

Caso 3: Suponha que E foi obtida por adicionar à i -ésima linha de I_n , α vezes a j -ésima linha de I_n , sendo $i \neq j$ e α um escalar qualquer. Assim E foi obtida de I_n pela operação elementar (c). Observe que I_n pode ser reconstruída a partir de E via uma operação elementar do tipo (c), a saber, por adicionar a i -ésima linha $(-\alpha)$ vezes a j -ésima linha de E . Pela Proposição 2.7 existe uma matriz elementar $\overline{E}$ tal que $\overline{E}E = I_n$. Neste caso E é invertível e $E^{-1} = \overline{E}$.

□

Observação 2.9. Podemos observar que a matriz elementar obtida por meio da operação elementar (a) é ortogonal, ou seja, sua inversa coincide com sua transposta. Já ao utilizar a operação elementar (b) ou (c) nota-se que a matriz E é triangular inferior, pois todos elementos acima da diagonal principal são nulos e a E^{-1} também é triangular inferior. Além disso, percebe-se que os elementos abaixo da diagonal principal trocam de sinal na inversa e as constantes presentes na diagonal principal são substituídas, na inversa, por seus inversos multiplicativos.

2.2 Decomposição LU

Tendo em vista a Proposição (2.7), dada a matriz $A \in \mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$, obtemos a forma escalonada da matriz A ao multiplicá-la por matrizes elementares $E_k \cdot E_{k-1} \cdots E_2 \cdot E_1$. Quer dizer, $(E_k \cdot E_{k-1} \cdots E_2 \cdot E_1) \cdot A = U$, em que, $U = (u_{ij})$ tem todos os elementos abaixo da diagonal u_{ii} iguais a zero.

Suponhamos que, nesse processo de levar a matriz A a sua forma escalonada, a operação elementar (a) não tenha sido utilizada. Uma vez que a matriz $E_k \cdot E_{k-1} \cdots E_2 \cdot E_1$ tem inversa e sua inversa é a matriz triangular inferior, obtemos que:

$$A = (E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdots E_{k-1}^{-1} \cdot E_k^{-1}) \cdot U \Leftrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{U},$$

em que L , $m \times m$, é triangular inferior e a matriz U , $m \times n$, é triangular superior. Essa é a **decomposição LU** da matriz $A \in \mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$.

Proposição 2.10. *Seja A uma matriz $n \times n$ tal que todas suas submatrizes principais A_r sejam invertíveis. Então A tem uma decomposição LU.*

Demonstração. Como $a_{11} = A_1$, o elemento a_{11} é o pivô da primeira linha. Existe então uma matriz invertível E , obtida ao se aplicar sucessivamente a operação elementar (c) de modo a anular todos os elementos de A abaixo do pivô. Temos então que,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \xrightarrow[L_k \rightarrow L_k + \left(\frac{-a_{k1}}{a_{11}}\right) \cdot L_1]{\sim} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} = E \cdot A$$

Claramente a submatriz principal $E \cdot A$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & b_{22} \end{pmatrix}$$

resulta da submatriz principal de A

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

mediante a aplicação de uma operação elementar (c). Em particular, aquela submatriz principal de $E \cdot A$ é invertível, pois a submatriz de A é invertível (por hipótese). Daí, decorre que $b_{22} \neq 0$, mostrando que b_{22} é o pivô da segunda linha de $E \cdot A$. A prova segue por indução. $\square$

Lema 2.11. *Sejam E e A matrizes tais que toda submatriz principal E_r e A_r sejam invertíveis, então $E_r \cdot A_r$ serão invertíveis.*

Desde o início deste capítulo evitamos realizar a operação elementar (a) e isto pode ser feito sem perda de generalidade. De fato, suponha que ao levarmos a matriz A a sua forma escalonada seja necessário a aplicação da operação elementar (a). Pode-se mostrar que se estas permutações de linhas forem aplicadas à A inicialmente, então a matriz resultante C pode ser transformada em U por meio de operações elementares que não incluem troca de linhas. Consequentemente, existe uma matriz triangular inferior L tal que $C = LU$. A matriz C tem as mesmas linhas de A , mas numa sequência diferente. Assim existe uma sequência de troca de linhas que transforma A em C . Executando esta mesma sequência de troca de linhas na matriz identidade apropriada produzimos uma matriz P tal que $C = PA$. Qualquer matriz P obtida por permutar linhas da matriz identidade é chamada de matriz de permutação. Assim se A não tem decomposição LU, existirá uma matriz de permutação P tal que PA tem decomposição LU.

Como cada matriz elementar que faz transposição de linhas é ortogonal, como observado em (2.9), e sabendo que o produto de matrizes ortogonais também é ortogonal. Logo a matriz de permutação P é ortogonal, e temos que:

$$PA = LU \quad \Rightarrow \quad A = P^t \cdot L \cdot U.$$

2.3 Exemplos de decomposição LU

A seguir, serão apresentados diversos exemplos, do (2.12) ao (2.26), com características específicas, que serão reutilizados nos capítulos de decomposição LDU e Cholesky.

Exemplo 2.12. Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{2 \times 2}(\mathbb{K})$. Escreva A por meio da decomposição LU .¹

Escalonando A , temos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 + (-3) \cdot L_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = U.$$

Para isso, usamos a seguinte operação elementar:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculando E^{-1} , temos:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 + (-3)L_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{array} \right).$$

$$\text{Daí, } E^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = L.$$

De modo que,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = L \cdot U.$$

¹O exemplo (2.12) foi proposto pela autora.

Exemplo 2.13. Seja $A = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 14 & 18 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{2 \times 2}(\mathbb{K})$. Escreva A por meio da decomposição LU .²

Escalonando A , temos:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 14 & 18 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 + (-2)L_1} \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = U.$$

Para isso, usamos a seguinte operação elementar:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculando E^{-1} , temos:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 + 2 \cdot L_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right).$$

$$\text{Daí, } E^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = L.$$

De modo que,

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 14 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = L \cdot U.$$

Exemplo 2.14. Seja $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{2 \times 2}(\mathbb{K})$. Escreva A por meio da decomposição LU .³

Escalonando A , temos:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \rightarrow \frac{1}{2} \cdot L_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 - L_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow \frac{1}{3} \cdot L_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = U.$$

Para isso, usamos as seguintes operações elementares:

- $E_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

²O exemplo (2.13) foi proposto pela autora.

³O exemplo (2.14) foi proposto pela autora.

Calculando E_1^{-1} , temos:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_1 \rightarrow 2 \cdot L_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Daí, $E_1^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculando E_2^{-1} , temos:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 + L_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right).$$

Daí, $E_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

- $E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Calculando E_3^{-1} , temos:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_2 \rightarrow 3 \cdot L_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{array} \right).$$

Daí, $E_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Logo,

$$L = E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdot E_3^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

De modo que,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = L \cdot U.$$

Exemplo 2.15. Seja $A = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{2 \times 2}(\mathbb{K})$. Escreva A por meio da decomposição LU .⁴

Escalonando A , temos:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \rightarrow \frac{1}{5} \cdot L_1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{8}{5} \\ 8 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 - 8 \cdot L_1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{8}{5} \\ 0 & -\frac{59}{5} \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow -\frac{5}{59} \cdot L_2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{8}{5} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = U.$$

Para isso, usamos as seguintes operações elementares:

$$E_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -8 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{59} \end{pmatrix}.$$

Calculando as inversas das matrizes elementares, temos que:

$$E_1^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, E_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } E_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{59}{5} \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$L = E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdot E_3^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{59}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 8 & -\frac{59}{5} \end{pmatrix}.$$

De modo que,

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 8 & -\frac{59}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{8}{5} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = L \cdot U.$$

Exemplo 2.16. Seja $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{2 \times 2}(\mathbb{K})$. Escreva A por meio da decomposição LU .⁵

Escalonando A , temos:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 + \frac{1}{2} \cdot L_1} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} = U.$$

Para isso, usamos a seguinte operação elementar:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

⁴O exemplo (2.15) foi proposto pela autora.

⁵O exemplo (2.16) foi proposto pela autora.

Calculando a inversa da matriz elementar, temos que:

$$E_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$L = E_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

De modo que,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} = L \cdot U.$$

Exemplo 2.17. Seja $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{2 \times 2}(\mathbb{K})$. Escreva A por meio da decomposição LU .⁶

Escalonando A , temos:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \rightarrow \frac{1}{3} \cdot L_1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 - 2 \cdot L_1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{17}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow \frac{3}{17} \cdot L_2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = U.$$

Para isso, usamos as seguintes operações elementares:

$$E_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{17} \end{pmatrix}.$$

Calculando as inversas das matrizes elementares, temos que:

$$E_1^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, E_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } E_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{17}{3} \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$L = E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdot E_3^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{17}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & \frac{17}{3} \end{pmatrix}.$$

De modo que,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & \frac{17}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = L \cdot U.$$

⁶O exemplo (2.17) foi proposto pela autora.

Exemplo 2.18. Seja $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 \\ -3 & -8 & 0 \\ 4 & 9 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{3 \times 3}(\mathbb{K})$. Escreva A por meio da decomposição LU.⁷

Escalonando A , temos:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 \\ -3 & -8 & 0 \\ 4 & 9 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \rightarrow \frac{1}{2}L_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -3 & -8 & 0 \\ 4 & 9 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow 3 \cdot L_1 + L_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 9 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \rightarrow -4 \cdot L_1 + L_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 \rightarrow 3 \cdot L_2 + L_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \rightarrow \frac{1}{7}L_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = U.$$

Para isso, usamos as seguintes operações elementares:

$$E_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} e$$

$$E_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} \end{pmatrix}.$$

Calculando E_1^{-1} , temos:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_1 \rightarrow 2 \cdot L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

$$\text{Daí, } E_1^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculando E_2^{-1} , temos:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 - 3 \cdot L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

⁷O exemplo (2.18) encontra-se em [2], pág. 480 a 482.

$$\text{Daí, } E_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculando E_3^{-1} , temos:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 + 4 \cdot L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

$$\text{Daí, } E_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculando E_4^{-1} , temos:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 - 3 \cdot L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 1 \end{array} \right).$$

$$\text{Daí, } E_4^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculando E_5^{-1} , temos:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_3 \rightarrow 7 \cdot L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 7 \end{array} \right).$$

$$\text{Daí, } E_5^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$L = E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdot E_3^{-1} \cdot E_4^{-1} \cdot E_5^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 7 \end{pmatrix}.$$

De modo que,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 \\ -3 & -8 & 0 \\ 4 & 9 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = L \cdot U.$$

Exemplo 2.19. Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 9 & 2 \\ 3 & 7 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{3 \times 3}(\mathbb{K})$. Escreva A por meio da decomposição LU.⁸

Escalonando A , temos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 9 & 2 \\ 3 & 7 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 - 4 \cdot L_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -6 \\ 3 & 7 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 - 3 \cdot L_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 - L_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \rightarrow \frac{1}{5} L_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = U.$$

Para isso, usamos as seguintes operações elementares:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

Calculando E_1^{-1} , temos:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 + 4 \cdot L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

$$\text{Daí, } E_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculando E_2^{-1} , temos:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 + 3 \cdot L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

⁸O exemplo (2.19) foi proposto pela autora.

$$\text{Daí, } E_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculando E_3^{-1} , temos:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 + L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right).$$

$$\text{Daí, } E_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculando E_4^{-1} , temos:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_3 \rightarrow 5 \cdot L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \end{array} \right).$$

$$\text{Daí, } E_4^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} L &= E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdot E_3^{-1} \cdot E_4^{-1} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

De modo que,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 9 & 2 \\ 3 & 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = L \cdot U.$$

Exemplo 2.20. Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & 3 \\ 3 & -7 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{3 \times 3}(\mathbb{K})$. Escreva A por meio da decomposição LU.⁹

Escalonando A , temos:

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & 3 \\ 3 & -7 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \begin{pmatrix} 3 & -7 & 4 \\ -1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 + \frac{1}{3}L_1} \begin{pmatrix} 3 & -7 & 4 \\ 0 & -\frac{13}{3} & \frac{13}{3} \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 - \frac{1}{3}L_1} \\
 &\begin{pmatrix} 3 & -7 & 4 \\ 0 & -\frac{13}{3} & \frac{13}{3} \\ 0 & \frac{13}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 + L_2} \begin{pmatrix} 3 & -7 & 4 \\ 0 & -\frac{13}{3} & \frac{13}{3} \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow \frac{1}{3}L_1} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{7}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & -\frac{13}{3} & \frac{13}{3} \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow -\frac{3}{13}L_2} \\
 &\begin{pmatrix} 1 & -\frac{7}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftrightarrow \frac{1}{5}L_3} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{7}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = U.
 \end{aligned}$$

Para isso, usamos as seguintes operações elementares:

$$\begin{aligned}
 E_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \\
 E_5 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, E_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{13} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } E_7 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Calculando as inversas das matrizes elementares, temos:

$$\begin{aligned}
 E_1^{-1} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, E_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
 E_4^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, E_5^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, E_6^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{13}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 \text{e } E_7^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

⁹O exemplo (2.20) foi proposto pela autora.

Logo,

$$\begin{aligned}
 L &= E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdot E_3^{-1} \cdot E_4^{-1} \cdot E_5^{-1} \cdot E_6^{-1} \cdot E_7^{-1} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 &\cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{13}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{13}{3} & 5 \\ -1 & -\frac{13}{3} & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

De modo que,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & 3 \\ 3 & -7 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{13}{3} & 5 \\ -1 & -\frac{13}{3} & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\frac{7}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = L \cdot U.$$

Exemplo 2.21. Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{3 \times 3}(\mathbb{K})$. Escreva A por meio da decomposição

LU .¹⁰

Escalonando A , temos:

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 - 4 \cdot L_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & -14 & -19 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow \frac{1}{-14} \cdot L_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & \frac{19}{14} \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 - 5 \cdot L_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & \frac{19}{14} \\ 0 & -19 & -22 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 + 19 \cdot L_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & \frac{19}{14} \\ 0 & 0 & \frac{53}{14} \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftrightarrow \frac{14}{53} \cdot L_3} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & \frac{19}{14} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = U.
 \end{aligned}$$

Para isso, usamos as seguintes operações elementares:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{14} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 19 & 1 \end{pmatrix} e$$

¹⁰O exemplo (2.21) foi proposto pela autora.

$$E_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{14}{53} \end{pmatrix}.$$

Calculando as inversas das matrizes elementares, temos:

$$E_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, E_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, E_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}, E_4^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -19 & 1 \end{pmatrix}$$

$$e E_5^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{53}{14} \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} L &= E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdot E_3^{-1} \cdot E_4^{-1} \cdot E_5^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -19 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{53}{14} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -14 & 0 \\ 5 & -19 & \frac{53}{14} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

De modo que,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -14 & 0 \\ 5 & -19 & \frac{53}{14} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & \frac{19}{14} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = L \cdot U.$$

Exemplo 2.22. Seja $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 2 & 10 & 4 \\ -4 & 4 & 9 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{3 \times 3}(\mathbb{K})$. Escreva A por meio da decomposição LU .¹¹

Escalonando A , temos:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 2 & 10 & 4 \\ -4 & 4 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 - \frac{1}{2} \cdot L_1} \begin{pmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 0 & 9 & 6 \\ -4 & 4 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 + L_1} \begin{pmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 0 & 9 & 6 \\ 0 & 6 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 - \frac{2}{3} \cdot L_2}$$

¹¹O exemplo (2.22) foi proposto pela autora.

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 0 & 9 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = U.$$

Para isso, usamos as seguintes operações elementares:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculando as inversas das matrizes elementares, temos:

$$E_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, E_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } E_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$L = E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdot E_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -1 & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

De modo que,

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 2 & 10 & 4 \\ -4 & 4 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -1 & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 0 & 9 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = L \cdot U.$$

Exemplo 2.23. Seja $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{2 \times 3}(\mathbb{K})$. Escreva A por meio da decomposição LU .¹²

Escalonando A , temos:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \rightarrow \frac{1}{2} L_1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = U.$$

Para isso, usamos a seguinte operação elementar:

$$E_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculando a inversa da matriz elementar, temos:

$$E_1^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Logo,

¹²O exemplo (2.23) foi proposto pela autora.

$$L = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

De modo que,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = L \cdot U.$$

Exemplo 2.24. Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 5 & 13 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{2 \times 3}(\mathbb{K})$. Escreva A por meio da decomposição LU .¹³

Escalonando A , temos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 5 & 13 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 + (-3) \cdot L_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} = U.$$

Para isso, usamos a seguinte operação elementar:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculando a inversa da matriz elementar, temos:

$$E^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

De modo que,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 5 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} = L \cdot U.$$

Exemplo 2.25. Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{3 \times 2}(\mathbb{K})$. Escreva A por meio da decomposição LU .¹⁴

Escalonando A , temos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \rightarrow \frac{1}{2} \cdot L_2} \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 - L_1} \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 - 4 \cdot L_2} \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = U.$$

¹³O exemplo (2.24) foi proposto pela autora.

¹⁴O exemplo (2.25) foi proposto pela autora.

Para isso, usamos as seguintes operações elementares:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculando as inversas das matrizes elementares, temos:

$$E_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, E_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } E_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$L = E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdot E_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

De modo que,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = L \cdot U.$$

Exemplo 2.26. Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 9 & 2 & 5 \\ 3 & 7 & 5 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{3 \times 4}(\mathbb{K})$. Escreva A por meio da decomposição LU .¹⁵

Escalonando A , temos:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 9 & 2 & 5 \\ 3 & 7 & 5 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 - 4 \cdot L_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -6 & 1 \\ 3 & 7 & 5 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 - 3 \cdot L_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -6 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 - L_2} \\ &\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \rightarrow \frac{1}{5} L_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = U. \end{aligned}$$

Para isso, usamos as seguintes operações elementares:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

¹⁵O exemplo (2.26) foi proposto pela autora.

Calculando as inversas das matrizes elementares, temos:

$$E_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, E_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, E_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } E_4^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} L &= E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdot E_3^{-1} \cdot E_4^{-1} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

De modo que,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 9 & 2 & 5 \\ 3 & 7 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = L \cdot U.$$

Observação 2.27. Note que os exemplos (2.15), (2.16), (2.17), (2.21) e (2.22) são de matrizes simétricas. Os exemplos (2.23) ao (2.26) são de matrizes não quadradas. Além disso, os exemplos (2.12), (2.13), (2.16), (2.22) e (2.24) resultam na decomposição LU onde a matriz U é a matriz dos pivôs enquanto a matriz L possui todos os elementos da diagonal principal iguais a 1. Já os demais exemplos resultam na decomposição LU onde a matriz L é a matriz dos pivôs enquanto a matriz U possui todos os elementos da diagonal principal iguais a 1.

Na resolução de sistemas lineares $A \cdot x = b$ um cálculo prévio da decomposição LU de A , reduz o problema a resolver dois sistemas triangulares $L \cdot y = b$ e $U \cdot x = y$ que são mais simples de serem resolvidos. Além disso, quando o sistema deve ser resolvido para vários valores de b , este método da decomposição LU é bastante eficiente.

CAPÍTULO 3

Decomposição LDU

Os textos que serviram de base para este capítulo foram as referências [1], [2] e [5].

3.1 Decomposição LDU

O método para calcular uma decomposição LU pode resultar em uma assimetria, ou seja, uma decomposição em que L tem entradas iguais a 1 na sua diagonal principal ou em que U possui essas entradas.

Decomposição LDU

Primeira maneira: Seja A uma matriz de ordem $m \times n$. Quando ao decompor a matriz A pelo método LU tivermos que a matriz L , $m \times m$, tem todos os elementos da diagonal iguais a 1, enquanto a matriz U , $m \times n$, é justamente a matriz dos pivôs, podemos escrever a matriz A de uma forma mais simétrica.

$$\text{Se, } U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{mn} \end{pmatrix}, \text{ com } u_{ii} \neq 0, \text{ então podemos decompor } U = D \cdot U' :$$

$$D \cdot U' = \begin{pmatrix} u_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & u_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{mm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{u_{12}}{u_{11}} & \cdots & \frac{u_{1n}}{u_{11}} \\ 0 & 1 & \cdots & \frac{u_{2n}}{u_{22}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

em que, D é a matriz onde sua diagonal são os pivôs e o restante dos elementos são nulos e U' é a matriz triangular superior com elementos da diagonal iguais a 1 e demais elementos calculados dividindo-os por seus respectivos pivôs. Temos, assim, $A = L \cdot D \cdot U'$.

Segunda maneira: Seja A uma matriz de ordem $m \times n$. Quando ao decompor a matriz A pelo método LU tivermos que a matriz U , $n \times n$, tem todos os elementos da diagonal iguais a 1, enquanto a matriz L , $m \times n$, é justamente a matriz dos pivôs, podemos escrever a matriz A de uma forma mais simétrica.

$$\text{Se, } L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{m1} & l_{m2} & \cdots & l_{mm} \end{pmatrix}, \text{ com } l_{ii} \neq 0, \text{ então podemos decompor } L = L' \cdot D :$$

$$L' \cdot D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{l_{21}}{l_{11}} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{l_{m1}}{l_{11}} & \frac{l_{m2}}{l_{22}} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & l_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & l_{mm} \end{pmatrix}$$

em que, L' é a matriz triangular inferior com elementos da diagonal iguais a 1 e demais elementos calculados dividindo-os por seus respectivos pivôs e D é a matriz onde sua diagonal são os pivôs e o restante dos elementos são nulos. Temos, assim, $A = L' \cdot D \cdot U$.

Essa é a **decomposição LDU** da matriz A .

Proposição 3.1. *Seja A uma matriz $m \times n$. Se $A = L \cdot U$ e $A = \bar{L} \cdot \bar{U}$, com matrizes $L, \bar{L}$ matrizes $m \times m$ triangulares inferiores com elementos diagonais iguais a 1 e $U, \bar{U}$ matrizes triangulares superiores com elementos diagonais não-nulos, então $L = \bar{L}$ e $U = \bar{U}$. Em particular a decomposição LDU de uma matriz é única.*

Demonstração. Como a matriz L possui inversa, temos $U = (L^{-1} \cdot \bar{L}) \cdot \bar{U}$. A matriz quadrada $L^{-1} \cdot \bar{L}$ é triangular inferior e tem elementos diagonais iguais a 1. Vamos mostrar que $L^{-1} \cdot \bar{L} =: R = (r_{ij})$ é a matriz identidade. Observe que $r_{ij} = 0$ se $i < j$ e

$r_{ii} = 1$ para todo i , resta mostrar que $r_{ij} = 0$ para $i > j$. Multiplicando a linha i de R pela primeira coluna de $\overline{U}$, temos:

$$\begin{pmatrix} r_{i1} & r_{i2} & \cdots & r_{im} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \overline{u_{11}} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = r_{i1} \cdot \overline{u_{11}}$$

Como $R \cdot \overline{U}$ é a matriz triangular superior e $\overline{u_{11}} \neq 0$ temos que $r_{i1} = 0$ se $i > 1$.

Da mesma forma, multiplicando a linha i de R pela segunda coluna de $\overline{U}$, temos:

$$\begin{pmatrix} r_{i1} & r_{i2} & \cdots & r_{im} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \overline{u_{12}} \\ \overline{u_{22}} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = r_{i1} \cdot \overline{u_{12}} + r_{i2} \cdot \overline{u_{22}}$$

Como $R \cdot \overline{U}$ é a matriz triangular superior e $\overline{u_{22}} \neq 0$ temos que para $i > 2$, $r_{i2} = 0$.

E assim sucessivamente. Logo $R = I$ e $U = \overline{U}$.

Seja $D = (d_{ij})$ a matriz diagonal $m \times m$ com $d_{ii} = u_{ii}$ para $i = 1, \dots, n$ e $d_{jj} = 0$ se $j > n$. Existe uma única matriz triangular superior U' , $m \times n$, com elementos na diagonal iguais a 1, tal que $U = D \cdot U'$. Isso completa a prova. $\square$

3.2 Exemplos de decomposição LDU

Exemplo 3.2. *Seja A como no Exemplo (2.12). Escreva A por meio da decomposição LDU.*¹

Usando o método LU, temos que:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = L \cdot U.$$

Daí, vemos que a matriz L possui todos os elementos da diagonal principal iguais a 1, enquanto a matriz U é a matriz dos pivôs.

¹O exemplo (3.2) foi proposto pela autora.

Assim, $U = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, como $u_{ii} \neq 0$, podemos escrever A de uma forma mais simétrica decompondo, pela **primeira maneira**, $U = D \cdot U'$.

$$\text{Temos, } D \cdot U' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Logo, } A = L \cdot D \cdot U' \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exemplo 3.3. Seja A como no Exemplo (2.13). Escreva A por meio da decomposição LDU.²

Usando o método LU, temos que:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 14 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = L \cdot U.$$

Daí, vemos que a matriz L possui todos os elementos da diagonal principal iguais a 1, enquanto a matriz U é a matriz dos pivôs.

Assim, $U = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$, como $u_{ii} \neq 0$, podemos escrever A de uma forma mais simétrica decompondo, pela **primeira maneira**, $U = D \cdot U'$.

$$\text{Temos, } D \cdot U' = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{6}{7} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Logo, } A = L \cdot D \cdot U' \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 14 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{6}{7} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exemplo 3.4. Seja A como no Exemplo (2.14). Escreva A por meio da decomposição LDU.³

Usando o método LU, temos que:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = L \cdot U.$$

Daí, vemos que a matriz U possui todos os elementos da diagonal principal iguais a 1, enquanto a matriz L é a matriz dos pivôs.

Assim, $L = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, como $l_{ii} \neq 0$, podemos escrever A de uma forma mais simétrica decompondo, pela **segunda maneira**, $L = L' \cdot D$.

²O exemplo (3.3) foi proposto pela autora.

³O exemplo (3.4) foi proposto pela autora.

$$\text{Temos, } L' \cdot D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Logo, } A = L' \cdot D \cdot U \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exemplo 3.5. Seja A como no Exemplo (2.15). Escreva A por meio da decomposição LDU.⁴

Usando o método LU, temos que:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 8 & -\frac{59}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{8}{5} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = L \cdot U.$$

Daí, vemos que a matriz U possui todos os elementos da diagonal principal iguais a 1, enquanto a matriz L é a matriz dos pivôs.

Assim, $L = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 8 & -\frac{59}{5} \end{pmatrix}$, como $l_{ii} \neq 0$, podemos escrever A de uma forma mais simétrica decompondo, pela **segunda maneira**, $L = L' \cdot D$.

$$\text{Temos, } L' \cdot D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{8}{5} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -\frac{59}{5} \end{pmatrix}.$$

Logo, a decomposição $L \cdot D \cdot U$ da matriz A é:

$$A = L' \cdot D \cdot U \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{8}{5} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -\frac{59}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{8}{5} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exemplo 3.6. Seja A como no Exemplo (2.16). Escreva A por meio da decomposição LDU.⁵

Usando o método LU, temos que:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} = L \cdot U.$$

Daí, vemos que a matriz L possui todos os elementos da diagonal principal iguais a 1, enquanto a matriz U é a matriz dos pivôs.

Assim, $U = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$, como $u_{ii} \neq 0$, podemos escrever A de uma forma mais simétrica decompondo, pela **primeira maneira**, $U = D \cdot U'$.

⁴O exemplo (3.5) foi proposto pela autora.

⁵O exemplo (3.6) foi proposto pela autora

Temos, $D \cdot U' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Logo, a decomposição $L \cdot D \cdot U$ da matriz A é:

$$A = L \cdot D \cdot U' \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exemplo 3.7. Seja A como no Exemplo (2.17). Escreva A por meio da decomposição LDU.⁶

Usando o método LU, temos que:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & \frac{17}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = L \cdot U.$$

Daí, vemos que a matriz U possui todos os elementos da diagonal principal iguais a 1, enquanto a matriz L é a matriz dos pivôs.

Assim, $L = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & \frac{17}{3} \end{pmatrix}$, como $l_{ii} \neq 0$, podemos escrever A de uma forma mais simétrica decompondo, pela **segunda maneira**, $L = L' \cdot D$.

$$\text{Temos, } L' \cdot D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \frac{17}{3} \end{pmatrix}.$$

Logo, a decomposição $L \cdot D \cdot U$ da matriz A é:

$$A = L' \cdot D \cdot U \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \frac{17}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exemplo 3.8. Seja A como no Exemplo (2.18). Escreva A por meio da decomposição LDU.⁷

Usando o método LU, temos que:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 \\ -3 & -8 & 0 \\ 4 & 9 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = L \cdot U.$$

Daí, vemos que a matriz U possui todos os elementos da diagonal principal iguais a 1, enquanto a matriz L é a matriz dos pivôs.

⁶O exemplo (3.7) foi proposto pela autora.

⁷A decomposição $L \cdot U$ do exemplo (3.8) encontra-se em [2], pág. 480 a 482, mas a decomposição $L \cdot D \cdot U$ foi proposta pela autora.

Assim, $L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 7 \end{pmatrix}$, como $l_{ii} \neq 0$, podemos escrever A de uma forma mais simétrica decompondo, pela **segunda maneira**, $L = L' \cdot D$.

$$\text{Temos, } L' \cdot D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{-3}{2} & 1 & 0 \\ \frac{4}{2} & \frac{-3}{1} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{-3}{2} & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Logo, } A = L' \cdot D \cdot U \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 \\ -3 & -8 & 0 \\ 4 & 9 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{-3}{2} & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exemplo 3.9. Seja A como no Exemplo (2.19). Escreva A por meio da decomposição LDU.⁸

Usando o método LU, temos que:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 9 & 2 \\ 3 & 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = L \cdot U.$$

Daí, vemos que a matriz U possui todos os elementos da diagonal principal iguais a 1, enquanto a matriz L é a matriz dos pivôs.

$$\text{Assim, } L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \text{ como } l_{ii} \neq 0, \text{ podemos escrever } A \text{ de uma forma mais}$$

simétrica decompondo, pela **segunda maneira**, $L = L' \cdot D$.

$$\text{Temos, } L' \cdot D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{4}{1} & 1 & 0 \\ \frac{3}{1} & \frac{1}{1} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Logo, } A = L' \cdot D \cdot U \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 9 & 2 \\ 3 & 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exemplo 3.10. Seja A como no Exemplo (2.20). Escreva A por meio da decomposição LDU.⁹

⁸O exemplo (3.9) foi proposto pela autora.

⁹O exemplo (3.10) foi proposto pela autora.

Usando o método LU, temos que:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & 3 \\ 3 & -7 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{13}{3} & 5 \\ -1 & -\frac{13}{3} & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\frac{7}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = L \cdot U.$$

$$\text{Assim, } L = \begin{pmatrix} 1 & \frac{13}{3} & 5 \\ -1 & -\frac{13}{3} & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ como nem todos os } l_{ii} \text{ são diferentes de 0, então não}$$

existe decomposição LDU da matriz A dada.

Exemplo 3.11. Seja A como no Exemplo (2.21). Escreva A por meio da decomposição LDU.¹⁰

Usando o método LU, temos que:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -14 & 0 \\ 5 & -19 & \frac{53}{14} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & \frac{19}{14} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = L \cdot U.$$

Daí, vemos que a matriz U possui todos os elementos da diagonal principal iguais a 1, enquanto a matriz L é a matriz dos pivôs.

$$\text{Assim, } L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -14 & 0 \\ 5 & -19 & \frac{53}{14} \end{pmatrix}, \text{ como } l_{ii} \neq 0, \text{ podemos escrever A de uma forma mais}$$

simétrica decompondo, pela **segunda maneira**, $L = L' \cdot D$.

$$\text{Temos, } L' \cdot D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 5 & \frac{19}{14} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{53}{14} \end{pmatrix}.$$

$$\text{Logo, } A = L' \cdot D \cdot U \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 5 & \frac{19}{14} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{53}{14} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & \frac{19}{14} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exemplo 3.12. Seja A como no Exemplo (2.22). Escreva A por meio da decomposição LDU.¹¹

¹⁰O exemplo (3.11) foi proposto pela autora.

¹¹O exemplo (3.12) foi proposto pela autora.

Usando o método LU, temos que:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 2 & 10 & 4 \\ -4 & 4 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -1 & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 0 & 9 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = L \cdot U.$$

Daí, vemos que a matriz L possui todos os elementos da diagonal principal iguais a 1, enquanto a matriz U é a matriz dos pivôs.

Assim, $U = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 0 & 9 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, como $u_{ii} \neq 0$, podemos escrever A de uma forma mais simétrica decompondo, pela **primeira maneira**, $U = D \cdot U'$.

Temos, $D \cdot U' = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 & \frac{6}{9} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Logo, a decomposição $L \cdot D \cdot U$ da matriz A é:

$$A = L \cdot D \cdot U' \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 2 & 10 & 4 \\ -4 & 4 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -1 & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 & \frac{6}{9} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A seguir, alguns exemplos da decomposição LDU de matrizes não quadradas.

Exemplo 3.13. Seja A como no Exemplo (2.23). Escreva A por meio da decomposição LDU.¹²

Usando o método LU, temos que:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = L \cdot U.$$

Daí, vemos que a matriz U possui todos os elementos da diagonal principal iguais a 1, enquanto a matriz L é a matriz dos pivôs.

Assim, $L = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, como $l_{ii} \neq 0$, podemos escrever A de uma forma mais simétrica decompondo, pela **segunda maneira**, $L = L' \cdot D$.

$$\text{Temos, } L' \cdot D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

¹²O exemplo (3.13) foi proposto pela autora.

$$\text{Logo, } A = L' \cdot D \cdot U \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exemplo 3.14. Seja A como no Exemplo (2.24). Escreva A por meio da decomposição LDU.¹³

Usando o método LU, temos que:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 5 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 13 \end{pmatrix} = L \cdot U.$$

Daí, vemos que a matriz L possui todos os elementos da diagonal principal iguais a 1, enquanto a matriz U é a matriz dos pivôs.

Assim, $U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$, como $u_{ii} \neq 0$, podemos escrever A de uma forma mais simétrica decompondo, pela **primeira maneira**, $U = D \cdot U'$.

$$\text{Temos, } D \cdot U' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{1} & \frac{5}{1} \\ 0 & 1 & \frac{-2}{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Logo, } A = L \cdot D \cdot U' \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 5 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exemplo 3.15. Seja A como no Exemplo (2.25). Escreva A por meio da decomposição LDU.¹⁴

Usando o método LU, temos que:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = L \cdot U.$$

Daí, vemos que a matriz U possui todos os elementos da diagonal principal iguais a 1, enquanto a matriz L é a matriz dos pivôs.

$$\text{Assim, } L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \text{ como } l_{ii} \neq 0, \text{ podemos escrever } A \text{ de uma forma mais}$$

simétrica decompondo, pela **segunda maneira**, $L = L' \cdot D$.

$$\text{Temos, } L' \cdot D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{1} & \frac{4}{2} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

¹³O exemplo (3.14) foi proposto pela autora.

¹⁴O exemplo (3.15) foi proposto pela autora.

$$\text{Logo, } A = L' \cdot D \cdot U \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exemplo 3.16. *Seja A como no Exemplo (2.26). Escreva A por meio da decomposição LDU.¹⁵*

Usando o método LU, temos que:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 9 & 2 & 5 \\ 3 & 7 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = L \cdot U.$$

Daí, vemos que a matriz U possui todos os elementos da diagonal principal iguais a 1, enquanto a matriz L é a matriz dos pivôs.

$$\text{Assim, } L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \text{ como } l_{ii} \neq 0, \text{ podemos escrever } A \text{ de uma forma mais}$$

simétrica decompondo, pela segunda maneira, $L = L' \cdot D$.

$$\text{Temos, } L' \cdot D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{4}{1} & 1 & 0 \\ \frac{3}{1} & \frac{1}{1} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{Logo, } A = L' \cdot D \cdot U \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 9 & 2 & 5 \\ 3 & 7 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

¹⁵O exemplo (3.16) foi proposto pela autora.

CAPÍTULO 4

Decomposição de Cholesky

As teorias apresentadas neste capítulo tiveram como base os referenciais teóricos [1], [3] e [6].

4.1 Decomposição de Cholesky

Quando a matriz A tem propriedades extras, a decomposição LU admite formas particulares. Nesta seção iremos apresentar uma decomposição LU específica para matrizes simétricas e positivo definidas.

Definição 4.1. *A decomposição de Cholesky ou fatoração de Cholesky é a decomposição de uma matriz simétrica e positivo definida real no produto de uma matriz triangular inferior por sua transposta. Para matrizes complexas a fatoração de Cholesky é dada para matrizes hermitianas e positivo definidas como sendo o produto de uma matriz triangular inferior por sua transposta conjugada.*

Lema 4.2. *Um operador auto adjunto é positivo definido se, e somente se, todos os seus autovalores forem positivos.*

Lema 4.3. *Seja A uma matriz $n \times n$ simétrica positivo definida. Então cada uma das submatrizes principais A_r é positivo definida (e, portanto, $\det A_r > 0$) para $1 \leq r \leq n$.*

Demonstração. Seja $x_* = (x_1, \dots, x_r) \in \mathbb{R}^r$ um vetor não nulo arbitrário e defina $x = (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$. Como $\langle x_*, A_r \cdot x_* \rangle = \langle x, A \cdot x \rangle$ e A é positivo definida, o resultado segue daí. $\square$

Observação 4.4. O lema (4.3) garante que para matrizes simétricas e positivo definidas a fatoração LDU é única.

Observe que para uma matriz simétrica a partir da decomposição LDU é possível mostrar a existência da decomposição Cholesky. De fato, note que o Lema (4.3) combinado com a proposição (2.10) garante que uma matriz positivo definida A possui decomposição $L \cdot U$, mediante a sucessiva aplicação da operação elementar (c) à matriz A . Em particular A possui uma fatoração $L \cdot D \cdot U$ e a matriz diagonal $D = (d_{ii})$ tem seus elementos diagonais positivos, como veremos na proposição 4.5. Como a matriz A é simétrica, temos:

$$L \cdot D \cdot U = A = A^t = U^t \cdot D \cdot L^t$$

Pela proposição (3.1), unicidade da decomposição $L \cdot D \cdot U$, temos $L^t = U$, de modo que $A = L \cdot D \cdot L^t$.

Definindo a matriz $D^{\frac{1}{2}}$, como:

$$D^{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} \sqrt{d_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{d_{22}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{d_{nn}} \end{pmatrix}.$$

Então, $A = L \cdot D \cdot L^t = (L \cdot D^{\frac{1}{2}}) \cdot (D^{\frac{1}{2}} \cdot L^t)$. Definindo $L_1 = L \cdot D^{\frac{1}{2}}$ e a $L_2 = D^{\frac{1}{2}} \cdot L^t$ temos que a matriz L_1 é triangular inferior e a matriz L_2 é triangular superior. Como $A = A^t$, segue daí que $L_2 = L_1^t$, mostrando que $A = L_1 \cdot L_1^t$ chamada **Decomposição de Cholesky** da matriz A .

Assim, uma matriz quadrada tem duas decomposições: a decomposição $A = L \cdot D \cdot U$ e a decomposição de Cholesky $A = L_1 \cdot L_1^t$. Porém, é possível que existam outras decomposições além destas duas.

O próximo resultado caracteriza as matrizes positivo definidas e apresenta um resumo dos resultados obtidos nesse capítulo:

Proposição 4.5. *Seja A uma matriz simétrica $n \times n$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) *A matriz A é positivo definida;*
- (ii) *As submatrizes principais $A_1, \dots, A_r$ têm determinante positivo;*
- (iii) *A matriz A tem uma decomposição $L \cdot D \cdot U$, com elementos da diagonal D todos positivos;*
- (iv) *A matriz A tem uma decomposição de Cholesky $A = L \cdot L^t$ sendo L uma matriz triangular inferior com elementos diagonais positivos.*

Demonstração. Já vimos as implicações $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv)$. Seja agora $x \in \mathbb{R}^n$ um vetor não nulo arbitrário e $y = L^t \cdot x$. Como a matriz L^t possui inversa, $y \neq 0$. Assim, $\langle x, A \cdot x \rangle = x^t \cdot A \cdot x = x^t \cdot (L \cdot L^t) \cdot x = x^t \cdot (L \cdot L^t \cdot x) = (x^t \cdot L) \cdot (L^t \cdot x) = y^t \cdot y = \|y\|^2 > 0$. Isso mostra que $(iv) \Rightarrow (i)$. $\square$

4.2 Exemplos de decomposição de Cholesky

Exemplo 4.6. *Seja A como no Exemplo (2.16).¹*

Calculando a decomposição LU , temos que:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} = L \cdot U.$$

Calculando a decomposição LDU , temos que:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = L \cdot D \cdot U'.$$

Como A é simétrica, sabemos que:

$$L \cdot D \cdot U' = A = A^t = U'^t \cdot D \cdot L^t$$

Pela proposição (3.1) temos que $L^t = U'$. Desse modo, $A = L \cdot D \cdot L^t$.

Definindo $D^{\frac{1}{2}}$ como a matriz: $D^{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} \end{pmatrix}$.

¹O exemplo (4.6) foi proposto pela autora.

Então, $A = L \cdot D \cdot L^t = (L \cdot D^{\frac{1}{2}}) \cdot (D^{\frac{1}{2}} \cdot L^t) = L_1 \cdot L_2$.

Temos que,

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \sqrt{\frac{3}{2}} \end{pmatrix} \text{ é uma matriz triangular inferior.}$$

$$L_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} \end{pmatrix} \text{ é uma matriz triangular superior.}$$

Como $A = A^t$, temos que $L_2 = L_1^t$.

Daí, $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \sqrt{\frac{3}{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} \end{pmatrix} = L_1 \cdot L_1^t$ chamada decomposição de Cholesky da matriz A .

Exemplo 4.7. Seja A como no Exemplo (2.17).²

Calculando a decomposição LU , temos que:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & \frac{17}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = L \cdot U.$$

Calculando a decomposição LDU , temos que:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \frac{17}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = L' \cdot D \cdot U.$$

Como A é simétrica, sabemos que:

$$L' \cdot D \cdot U = A = A^t = U^t \cdot D \cdot L'^t$$

Pela proposição (3.1) temos que $L'^t = U$. Desse modo, $A = L' \cdot D \cdot L'^t$.

Definindo $D^{\frac{1}{2}}$ como a matriz: $D^{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{17}{3}} \end{pmatrix}$.

Então, $A = L' \cdot D \cdot L'^t = (L' \cdot D^{\frac{1}{2}}) \cdot (D^{\frac{1}{2}} \cdot L'^t) = L_1 \cdot L_2$.

Temos que,

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{17}{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ \frac{2\sqrt{3}}{3} & \sqrt{\frac{17}{3}} \end{pmatrix} \text{ é uma matriz triangular inferior.}$$

$$L_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{17}{3}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ 0 & \sqrt{\frac{17}{3}} \end{pmatrix} \text{ é uma matriz triangular superior.}$$

²O exemplo (4.7) foi proposto pela autora.

Como $A = A^t$, temos que $L_2 = L_1^t$.

Daí, $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ \frac{2\sqrt{3}}{3} & \sqrt{\frac{17}{3}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ 0 & \sqrt{\frac{17}{3}} \end{pmatrix} = L_1 \cdot L_1^t$ chamada decomposição de Cholesky da matriz A .

Exemplo 4.8. Seja A como no Exemplo (2.22).³

Calculando a decomposição LU , temos que:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 2 & 10 & 4 \\ -4 & 4 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -1 & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 0 & 9 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = L \cdot U.$$

Calculando a decomposição LDU , temos que:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 2 & 10 & 4 \\ -4 & 4 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -1 & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 & \frac{6}{9} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = L \cdot D \cdot U'.$$

Como A é simétrica, sabemos que:

$$L \cdot D \cdot U' = A = A^t = U'^t \cdot D \cdot L^t$$

Pela proposição (3.1) temos que $L^t = U'$. Desse modo, $A = L \cdot D \cdot L^t$.

$$\text{Definindo } D^{\frac{1}{2}} \text{ como a matriz: } D^{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} \sqrt{4} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{9} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Então, $A = L \cdot D \cdot L^t = (L \cdot D^{\frac{1}{2}}) \cdot (D^{\frac{1}{2}} \cdot L^t) = L_1 \cdot L_2$.

Temos que,

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -1 & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ é uma matriz triangular inferior.}$$

$$L_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ é uma matriz triangular superior.}$$

Como $A = A^t$, temos que $L_2 = L_1^t$.

³O exemplo (4.8) foi proposto pela autora.

Dai, $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 2 & 10 & 4 \\ -4 & 4 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = L_1 \cdot L_1^t$ chamada de *composição de Cholesky da matriz A*.

Exemplo 4.9. Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 16 & -4 & 12 & -4 \\ -4 & 2 & -1 & 1 \\ 12 & -1 & 14 & -2 \\ -4 & 1 & -2 & 83 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{4 \times 4}(\mathbb{K})$.⁴

Calculando a decomposição $L \cdot U$ da matriz A , temos que:

$$A = \begin{pmatrix} 16 & -4 & 12 & -4 \\ -4 & 2 & -1 & 1 \\ 12 & -1 & 14 & -2 \\ -4 & 1 & -2 & 83 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & 2 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 16 & -4 & 12 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 81 \end{pmatrix} = L \cdot U.$$

Calculando a decomposição $L \cdot D \cdot U$, temos que:

$$A = \begin{pmatrix} 16 & -4 & 12 & -4 \\ -4 & 2 & -1 & 1 \\ 12 & -1 & 14 & -2 \\ -4 & 1 & -2 & 83 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & 2 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 81 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$A = L \cdot D \cdot U.$$

Como A é simétrica, sabemos que:

$$L \cdot D \cdot U' = A = A^t = U'^t \cdot D \cdot L^t.$$

Pela proposição (3.1) temos que $L^t = U'$. Desse modo, $A = L \cdot D \cdot L^t$.

$$\text{Definindo } D^{\frac{1}{2}} \text{ como a matriz: } D^{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} \sqrt{16} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{81} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Então, } A = L \cdot D \cdot L^t = (L \cdot D^{\frac{1}{2}}) \cdot (D^{\frac{1}{2}} \cdot L^t) = L_1 \cdot L_2.$$

Temos que,

⁴O exemplo (4.9) encontra-se em [3], pág.148.

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & 2 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 9 \end{pmatrix} \text{ é uma matriz triangular}$$

inferior.

$$L_2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \text{ é uma matriz trian-}$$

gular superior.

Como $A = A^t$, temos que $L_2 = L_1^t$.

$$\text{Daí, } A = \begin{pmatrix} 16 & -4 & 12 & -4 \\ -4 & 2 & -1 & 1 \\ 12 & -1 & 14 & -2 \\ -4 & 1 & -2 & 83 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = L_1 \cdot L_1^t$$

chamada decomposição de Cholesky da matriz A .

4.3 Cálculo do fator de Cholesky

Apesar da decomposição de Cholesky ser proveniente da decomposição LU e LDU existe um método de calcular através da equação matricial $A = L \cdot L^t$, uma vez que, assim, os cálculos envolvidos são reduzidos pela metade.

Cálculo do fator de Cholesky

Dada a matriz A , $n \times n$, simétrica e positiva definida,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

o fator L , $n \times n$, triangular inferior com diagonal positiva será obtido através da equação matricial $A = L \cdot L^t$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & \cdots & l_{n1} \\ 0 & l_{22} & \cdots & l_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix}.$$

O cálculo será realizado por colunas.

Coluna 1:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} = L \cdot \begin{pmatrix} l_{11} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11}^2 \\ l_{21} \cdot l_{11} \\ \vdots \\ l_{n1} \cdot l_{11} \end{pmatrix}.$$

Daí, temos:

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}} \text{ e } l_{j1} = \frac{a_{j1}}{l_{11}}, j = 2, \dots, n.$$

Coluna 2:

$$\begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} = L \cdot \begin{pmatrix} l_{21} \\ l_{22} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} \cdot l_{21} \\ l_{21}^2 + l_{22}^2 \\ \vdots \\ l_{n1} \cdot l_{21} + l_{n2} \cdot l_{22} \end{pmatrix}.$$

Assim:

$$l_{21}^2 + l_{22}^2 = a_{22} \Rightarrow l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2} \text{ e } l_{j1} \cdot l_{21} + l_{j2} \cdot l_{22} = a_{j2}, j = 3, \dots, n.$$

Como os elementos l_{j1} já estão calculados, temos que:

$$l_{j2} = \frac{(a_{j2} - l_{j1} \cdot l_{21})}{l_{22}}, j = 3, \dots, n.$$

Coluna k:

Para obter os elementos da coluna k de L , $(0 \cdots l_{kk} l_{k+1k} \cdots l_{nk})^t, k = 3, \dots, n$ usamos a equação matricial

$$\begin{pmatrix} a_{k1} \\ a_{k2} \\ \vdots \\ a_{kk} \\ a_{k+1k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix} = L \cdot \begin{pmatrix} l_{k1} \\ l_{k2} \\ \vdots \\ l_{kk} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Então:

$$a_{kk} = l_{k1}^2 + l_{k2}^2 + \cdots + l_{kk}^2 \text{ e daí } l_{kk} = \left(a_{kk} - \sum_{i=1}^{k-1} l_{ki}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{e } a_{jk} = l_{j1} \cdot l_{k1} + l_{j2} \cdot l_{k2} + \cdots + l_{jk} \cdot l_{kk}, j = (k+1), \dots, n.$$

Como todos os elementos de $l_{ik}, i = 1, \dots, (k-1)$ já estão calculados, teremos:

$$l_{jk} = \frac{\left(a_{jk} - \sum_{i=1}^{k-1} l_{ji} \cdot l_{ki} \right)}{l_{kk}}, j = (k+1), \dots, n.$$

A seguir vamos aplicar o cálculo do fator de Cholesky nos exemplos apresentados anteriormente.

Exemplo 4.10. Considere $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{2 \times 2}(\mathbb{K})$, simétrica e positivo definida, como no exemplo (4.6).⁵

Encontraremos o fator $L, 2 \times 2$, triangular inferior com diagonal positiva através da equação matricial $A = L \cdot L^t$,

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 \\ l_{21} & l_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} \\ 0 & l_{22} \end{pmatrix}.$$

Aplicando os cálculos do fator de Cholesky, temos que:

Coluna 1:

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{2}$$

⁵O exemplo (4.10) foi proposto pela autora.

$$l_{21} = \frac{a_{21}}{l_{11}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Coluna 2:

$$l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2} = \sqrt{2 - \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

Logo, $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \sqrt{\frac{3}{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} \end{pmatrix} = L \cdot L^t$ chamada decomposição de Cholesky da matriz A .

Exemplo 4.11. Considere $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{2 \times 2}(\mathbb{K})$, simétrica e positivo definida, como no exemplo (4.7).⁶

Encontraremos o fator $L, 2 \times 2$, triangular inferior com diagonal positiva através da equação matricial $A = L \cdot L^t$,

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 \\ l_{21} & l_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} \\ 0 & l_{22} \end{pmatrix}.$$

Aplicando os cálculos do fator de Cholesky, temos que:

Coluna 1:

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{3}$$

$$l_{21} = \frac{a_{21}}{l_{11}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3}$$

Coluna 2:

$$l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2} = \sqrt{7 - \frac{4}{3}} = \sqrt{\frac{17}{3}}$$

Logo,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ \frac{2\sqrt{3}}{3} & \sqrt{\frac{17}{3}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ 0 & \sqrt{\frac{17}{3}} \end{pmatrix} = L \cdot L^t$$

chamada decomposição de Cholesky da matriz A .

Exemplo 4.12. Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 2 & 10 & 4 \\ -4 & 4 & 9 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{3 \times 3}(\mathbb{K})$, simétrica e positivo definida, como no exemplo (4.8).⁷

⁶O exemplo (4.11) foi proposto pela autora.

⁷O exemplo (4.12) encontra-se em [6].

Encontraremos o fator $L, 3 \times 3$, triangular inferior com diagonal positiva através da equação matricial $A = L \cdot L^t$,

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 2 & 10 & 4 \\ -4 & 4 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{21} & a_{22} & a_{32} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{pmatrix}.$$

Aplicando os cálculos do fator de Cholesky, temos que:

Coluna 1:

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{4} = 2$$

$$l_{21} = \frac{a_{21}}{l_{11}} = \frac{2}{2} = 1$$

$$l_{31} = \frac{a_{31}}{l_{11}} = -\frac{4}{2} = -2$$

Coluna 2:

$$l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2} = \sqrt{10 - 1} = \sqrt{9} = 3$$

$$l_{32} = \frac{(a_{32} - l_{31} \cdot l_{21})}{l_{22}} = \frac{(4 - (-2) \cdot 1)}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

Coluna 3:

$$l_{33} = (a_{33} - (l_{31}^2 + l_{32}^2))^{\frac{1}{2}} = (9 - (4 + 4))^{\frac{1}{2}} = (9 - 8)^{\frac{1}{2}} = (1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1} = 1$$

Logo,

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 2 & 10 & 4 \\ -4 & 4 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = L_1 \cdot L_1^t \text{ chamada decom-}$$

posição de Cholesky da matriz A .

Exemplo 4.13. Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 16 & -4 & 12 & -4 \\ -4 & 2 & -1 & 1 \\ 12 & -1 & 14 & -2 \\ -4 & 1 & -2 & 83 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{4 \times 4}(\mathbb{K})$, simétrica e

positivo definida, como no exemplo (4.9).⁸

Encontraremos o fator $L, 4 \times 4$, triangular inferior com diagonal positiva através da equação matricial $A = L \cdot L^t$,

$$\begin{pmatrix} 16 & -4 & 12 & -4 \\ -4 & 2 & -1 & 1 \\ 12 & -1 & 14 & -2 \\ -4 & 1 & -2 & 83 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} \\ a_{21} & a_{22} & a_{32} & a_{42} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{43} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} & l_{41} \\ 0 & l_{22} & l_{32} & l_{42} \\ 0 & 0 & l_{33} & l_{43} \\ 0 & 0 & 0 & l_{44} \end{pmatrix}.$$

⁸O exemplo (4.13) encontra-se em [6].

Aplicando os cálculos do fator de Cholesky, temos que:

Coluna 1:

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{16} = 4$$

$$l_{21} = \frac{a_{21}}{l_{11}} = -\frac{4}{4} = -1$$

$$l_{31} = \frac{a_{31}}{l_{11}} = \frac{12}{4} = 3$$

$$l_{41} = \frac{a_{41}}{l_{11}} = -\frac{4}{4} = -1$$

Coluna 2:

$$l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2} = \sqrt{2 - (-1)^2} = \sqrt{1} = 1$$

$$l_{32} = \frac{(a_{32} - l_{31} \cdot l_{21})}{l_{22}} = \frac{(-1 - 3 \cdot (-1))}{1} = 2$$

$$l_{42} = \frac{(a_{42} - l_{41} \cdot l_{21})}{l_{22}} = \frac{(1 - (-1) \cdot (-1))}{1} = 0$$

Coluna 3:

$$l_{33} = (a_{33} - (l_{31}^2 + l_{32}^2))^{\frac{1}{2}} = (14 - (3^2 + 2^2))^{\frac{1}{2}} = (14 - 13)^{\frac{1}{2}} = 1^{\frac{1}{2}} = 1$$

$$l_{43} = \frac{\left(a_{43} - \sum_{i=1}^2 l_{4i} \cdot l_{3i}\right)}{l_{33}} = \frac{(a_{43} - (l_{41} \cdot l_{31} + l_{42} \cdot l_{32}))}{l_{33}} = \frac{(-2 - ((-1) \cdot (3) + (0) \cdot (2)))}{1} = (-2 - (-3)) = 1$$

Coluna 4:

$$l_{44} = (a_{44} - (l_{41}^2 + l_{42}^2 + l_{43}^2))^{\frac{1}{2}} = (83 - ((-1)^2 + 0^2 + 1^2))^{\frac{1}{2}} = (83 - (1 + 1))^{\frac{1}{2}} = \sqrt{81} = 9$$

Logo,

$$A = \begin{pmatrix} 16 & -4 & 12 & -4 \\ -4 & 2 & -1 & 1 \\ 12 & -1 & 14 & -2 \\ -4 & 1 & -2 & 83 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = L \cdot L^t \text{ chamada}$$

decomposição de Cholesky da matriz A .

CAPÍTULO 5

Decomposição de Schur

Os conceitos tratados neste capítulo tiveram como base as referências [1], [7] e [8].

5.1 Decomposição de Schur

Definição 5.1. *Se A é uma matriz quadrada $n \times n$ com entradas complexas, a decomposição de Schur nos permite expressar A como $A = U \cdot T \cdot U^*$, sendo U uma matriz unitária (sua inversa é a transposta conjugada de U) e T uma matriz triangular superior.*

Teorema 5.2. (Teorema de Schur) *Seja A uma matriz $n \times n$ no corpo $\mathbb{C}$. Então existe uma matriz unitária U tal que $T = U^* \cdot A \cdot U$ é triangular superior.*

Demonstração. Faremos a prova por indução em n . Para $n = 1$ temos:

$$A = \begin{pmatrix} a \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{1 \times 1} \text{ e } U = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{1 \times 1}. \text{ Temos que, } U^* = \overline{U}^t = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Daí, } T = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow T = \begin{pmatrix} a \end{pmatrix}.$$

Suponhamos que seja válido para uma matriz $k \times k$ qualquer e consideremos A , matriz $(k+1) \times (k+1)$. Seja w_1 um autovetor unitário associado ao autovalor λ_1 de A , isto é, $\|w_1\| = 1$ e $A(w_1) = \lambda_1 \cdot w_1$. O processo de ortogonalização de Gram-Schmidt assegura a existência de uma base ortonormal $\{w_1, w_2, \dots, w_{k+1}\}$ para $\mathbb{C}^{k+1}$. Escrevendo a matriz R cujas colunas são dadas pelos vetores dessa base ortonormal, ou seja, a i -ésima coluna é o vetor w_i , temos que R é unitária. Consideremos então $R^* \cdot A \cdot R = (R^* \cdot A) \cdot R$.

A primeira coluna dessa matriz é $R^* \cdot A \cdot w_1$. Mas, $R^* \cdot A \cdot w_1 = R^* \cdot \lambda_1 \cdot w_1 = \lambda_1 \cdot R^* \cdot w_1 = \lambda_1 \cdot e_1$, pois as linhas de R^* são dadas pelos vetores $\overline{w_1}, \dots, \overline{w_{k+1}}$. Assim, a

matriz $R^* \cdot A \cdot R$ tem a forma $\begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots * \\ 0 & & \\ \vdots & S & \\ 0 & & \end{pmatrix}$, em que S é uma matriz $k \times k$.

Pela hipótese de indução existe uma matriz unitária V_1 tal que $T_1 = V_1^* \cdot S \cdot V_1$ é

uma matriz triangular superior. Definimos então, $V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots 0 \\ 0 & & \\ \vdots & V_1 & \\ 0 & & \end{pmatrix}$. Claramente V

é unitária e $V^* \cdot (R^* \cdot A \cdot R) \cdot V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots 0 \\ 0 & & \\ \vdots & V_1^* & \\ 0 & & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots * \\ 0 & & \\ \vdots & S & \\ 0 & & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots 0 \\ 0 & & \\ \vdots & V_1 & \\ 0 & & \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots * \\ 0 & & \\ \vdots & V_1^* \cdot S \cdot V_1 & \\ 0 & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots * \\ 0 & & \\ \vdots & T_1 & \\ 0 & & \end{pmatrix} = T$ que é uma matriz triangular superior. De-

finimos então, $U = R \cdot V$. A matriz U é unitária, pois $U^* \cdot U = (R \cdot V)^*(R \cdot V) = V^* \cdot R^* \cdot R \cdot V = I$. Isso completa a demonstração. $\square$

Observação 5.3. A demonstração acima continua válida se A for uma matriz real cujos autovalores estão no corpo $\mathbb{R}$.

Corolário 5.4. Se A for uma matriz auto-adjunta, então existe uma matriz unitária U tal que $U^* \cdot A \cdot U = D$, sendo D uma matriz diagonal. Se A for uma matriz real, a matriz U é ortogonal.

Demonstração. Seja A hermitiana. De acordo com o Teorema de Schur, existe uma matriz unitária U tal que $U^* \cdot A \cdot U = T$, sendo T uma matriz triangular superior. Mas $T^* = (U^* \cdot A \cdot U)^* = U^* \cdot A^* \cdot U = U^* \cdot A \cdot U = T$. Isso mostra que T é auto-adjunta e, portanto, uma matriz diagonal.

Se A for real, todos os autovalores de A são reais e, portanto, seus autovetores possuem todas as coordenadas reais. Isso implica que U é ortogonal. $\square$

5.2 Exemplos de decomposição de Schur

Exemplo 5.5. Encontre a decomposição de Schur da matriz $A = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 12 & -3 \end{pmatrix}$.¹

Primeiro vamos encontrar os autovalores de A .

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 7 - \lambda & -2 \\ 12 & -3 - \lambda \end{vmatrix} = (7 - \lambda) \cdot (-3 - \lambda) + 24 = \lambda^2 - 4\lambda - 21 + 24 = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 1) \cdot (\lambda - 3).$$

Logo, os autovalores são $\lambda = 1, 3$. Agora, vamos encontrar os autovetores.

$$\lambda = 1 : A - \lambda I = A - I = \begin{pmatrix} 7 - 1 & -2 \\ 12 & -3 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 12 & -4 \end{pmatrix}.$$

Temos que,

$$\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 12 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x_1 - 2x_2 = 0 \\ 12x_1 - 4x_2 = 0 \end{cases} \xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 - 2 \cdot L_1} \begin{cases} 6x_1 - 2x_2 = 0 \\ 0x_1 - 0x_2 = 0 \end{cases} \xrightarrow{L_1 \rightarrow \frac{L_1}{2}} \begin{cases} 3x_1 - x_2 = 0 \\ 0x_1 - 0x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} 3x_1 = x_2 \\ x_1 = c \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} c \\ 3 \cdot c \end{pmatrix} = c \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ se } c = 1.$$

Tome $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, normalize para $\frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$$\lambda = 3 : A - \lambda I = A - 3I = \begin{pmatrix} 7 - 3 & -2 \\ 12 & -3 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 12 & -6 \end{pmatrix}.$$

Temos que,

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 12 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x_1 - 2x_2 = 0 \\ 12x_1 - 6x_2 = 0 \end{cases} \xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 - 3 \cdot L_1} \begin{cases} 4x_1 - 2x_2 = 0 \\ 0x_1 - 0x_2 = 0 \end{cases} \xrightarrow{L_1 \rightarrow \frac{L_1}{2}} \begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0 \\ 0x_1 - 0x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} 2x_1 = x_2 \\ x_1 = c \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} c \\ 2 \cdot c \end{pmatrix} = c \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ se } c = 1.$$

Tome $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, normalize para $\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

De fato, vamos escolher $\lambda = 3$ como autovetor normalizado $u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Precisamos achar uma base ortonormal $\{u_2\}$

¹O exemplo (6.3) encontra-se em [7], pág.1

$$\begin{aligned} \text{span}\{u_1\}^\perp &= \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}^\perp = \{v \in \mathbb{R}^2 \mid \langle v, u_1 \rangle = 0\} = \{v \in \mathbb{R}^2 \mid \langle (x, y), (1, 2) \rangle = 0\} = \\ &= \{v \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y = 0\} = \{v \in \mathbb{R}^2 \mid x = -2y\} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}. \end{aligned}$$

Escolha $u_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Agora expressaremos a transformação A na nova base ortonormal $\{u_1, u_2\}$.

Escrevendo $U = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

A matriz A na base $\{u_1, u_2\}$ é:

$$\begin{aligned} A_{\{u_1, u_2\}} &= U^{-1} \cdot \begin{pmatrix} A \end{pmatrix}_c \cdot U \\ &= U^T \cdot \begin{pmatrix} A \end{pmatrix}_c \cdot U \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 12 & -3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 31 & -8 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & -14 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Encontramos então: $T = \begin{pmatrix} 3 & -14 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ triangular superior e $U = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ unitária.

Daí,

$A = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 12 & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -14 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = U \cdot T \cdot U^*$ é a decomposição de Schur da matriz A .

Exemplo 5.6. Encontre a decomposição de Schur da matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Primeiro vamos encontrar os autovalores de A .

²O exemplo (6.4) encontra-se em [7], pág.2

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ -2 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda) \cdot (3 - \lambda) + 2 = \lambda^2 - 4\lambda + 5.$$

$$\lambda = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot (5)}}{2} = \frac{4 \pm 2i}{2} = 2 \pm i$$

Logo, os autovalores são $\lambda = 2 + i, 2 - i$. Agora, vamos encontrar os autovetores.

Pegando $\lambda = 2 + i$, temos:

$$\lambda = 2 + i : A - \lambda I = A - (2 + i)I = \begin{pmatrix} -1 - i & 1 \\ -2 & 1 - i \end{pmatrix}.$$

Temos que,

$$\begin{pmatrix} -1 - i & 1 \\ -2 & 1 - i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} (-1 - i)x_1 + x_2 = 0 \\ -2x_1 + (1 - i)x_2 = 0 \end{cases} \quad L_2 \rightarrow L_2 + (-1+i) \cdot L_1$$

$$\begin{cases} (-1 - i)x_1 + x_2 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} (1 + i)x_1 = x_2 \end{cases} \quad x_1 \stackrel{c}{\neq} 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} c \\ (1 + i) \cdot c \end{pmatrix} = c \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 + i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 + i \end{pmatrix} \text{ se } c = 1.$$

Tome $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 + i \end{pmatrix}$, normalize para $\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 + i \end{pmatrix}$. Observe que, para matrizes complexas, o espaço nulo é não ortogonal ao espaço linha, mas ao espaço linha conjugado.

Precisamos encontrar uma base ortonormal $\{u_2\}$.

$$\text{span}\{u_1\}^\perp = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 + i \end{pmatrix} \right\}^\perp = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 - i \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$\text{Tome o vetor normalizado } u_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} 1 - i \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Agora expressaremos a transformação A na nova base ortonormal $\{u_1, u_2\}$.

$$\text{Escrevendo } U = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 - i \\ 1 + i & -1 \end{pmatrix}.$$

A matriz A na base $\{u_1, u_2\}$ é:

$$\begin{aligned}
(A)_{\{u_1, u_2\}} &= U^{-1} \cdot (A)_c \cdot U \\
&= U^* \cdot (A)_c \cdot U \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ 1+i & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ 1+i & -1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -1+2i & 4-3i \\ 3+i & -2+i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ 1+i & -1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 6+3i & -3+6i \\ 0 & 6-3i \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2+i & -1+2i \\ 0 & 2-i \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Encontramos então: $T = \begin{pmatrix} 2+i & -1+2i \\ 0 & 2-i \end{pmatrix}$ triangular superior e $U = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ 1+i & -1 \end{pmatrix}$ unitária.

Daí, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ 1+i & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2+i & -1+2i \\ 0 & 2-i \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ 1+i & -1 \end{pmatrix} = U \cdot T \cdot U^*$ é a decomposição de Schur da matriz A .

Exemplo 5.7. Encontre a decomposição de Schur da matriz $A = \begin{pmatrix} 13 & 8 & 8 \\ -1 & 7 & -2 \\ -1 & -2 & 7 \end{pmatrix}$.³

Primeiro vamos encontrar os autovalores de A .

$$\begin{aligned}
\det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 13-\lambda & 8 & 8 \\ -1 & 7-\lambda & -2 \\ -1 & -2 & 7-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 27\lambda^2 - 243\lambda + 729 = \lambda^3 - 27\lambda^2 + \\
243\lambda - 729 &= (\lambda - 9) \cdot (\lambda - 9) \cdot (\lambda - 9) = (\lambda - 9)^3.
\end{aligned}$$

Logo, os autovalores são $\lambda = 9$ com multiplicidade 3. Agora, vamos encontrar os autovetores.

Como os autovalores são iguais, os autovetores não serão ortogonais e, desse modo, será necessário usar o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt.

$$\lambda = 9 : A - \lambda I = A - 9I = \begin{pmatrix} 13-9 & 8 & 8 \\ -1 & 7-9 & -2 \\ -1 & -2 & 7-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 8 \\ -1 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

³O exemplo (5.7) encontra-se em [8], pág.4

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 4 & 8 & 8 \\ -1 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{cases} 4x + 8y + 8z = 0 \\ -x - 2y - 2z = 0 \\ -x - 2y - 2z = 0 \end{cases} \xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 + L_2} \begin{cases} 4x + 8y + 8z = 0 \\ -x - 2y - 2z = 0 \\ 0x + 0y + 0z = 0 \end{cases} \\
L_2 \rightarrow L_1 + 4 \cdot L_2 \quad \begin{cases} 4x + 8y + 8z = 0 \\ 0x + 0y + 0z = 0 \\ 0x + 0y + 0z = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x + 2y + 2z = 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

Existem muitas soluções para essa equação. Pode-se observar que $(2, -2, 1)$ é uma delas.

Agora, queremos uma base ortonormal para esse espaço. Para fazer isso, primeiro encontramos uma base e , em seguida, usamos Gram-Schmidt. A base é bastante simples: sabemos que $(2, -2, 1)$ está em nosso espaço, e podemos ver que $(0, 1, -1)$ também está.

Definindo $v_1 = (2, -2, 1)$ e $v_2 = (0, 1, -1)$ aplicando o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt, temos:

- $w_1 = v_1 = (2, -2, 1)$.
- $w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} \cdot w_1 = (0, 1, -1) - \frac{\langle (0, 1, -1), (2, -2, 1) \rangle}{\langle (2, -2, 1), (2, -2, 1) \rangle} \cdot (2, -2, 1) \Leftrightarrow$
 $w_2 = (0, 1, -1) - \frac{3}{9} \cdot (2, -2, 1) = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}).$

Escalamos esses vetores para obter uma base para $\{(x, y, z) | x + 2y + 2z = 0\}$. Agora, vamos estender isso para todo o $\mathbb{C}^3$. Peguemos um vetor que não está no subspaço gerado pelos dois vetores anteriores, como $(0, 0, 1)$. Realizando Gram-Schmidt, para $v_3 = (0, 0, 1)$, temos:

- $w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} \cdot w_1 - \frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} \cdot w_2 \Leftrightarrow$
 $w_3 = (0, 0, 1) - \frac{\langle (0, 0, 1), (2, -2, 1) \rangle}{\langle (2, -2, 1), (2, -2, 1) \rangle} \cdot (2, -2, 1) - \frac{\langle (0, 0, 1), (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}) \rangle}{\langle (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}), (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}) \rangle} \cdot (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}) \Leftrightarrow$
 $w_3 = (0, 0, 1) - \frac{1}{9} \cdot (2, -2, 1) - (-\frac{2}{3}) \cdot (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}) = (0, 0, 1) - (\frac{2}{9}, -\frac{2}{9}, \frac{1}{9}) - (-\frac{4}{9}, -\frac{2}{9}, \frac{4}{9}) \Leftrightarrow$
 $w_3 = (-\frac{2}{9}, \frac{2}{9}, \frac{8}{9}) - (-\frac{4}{9}, -\frac{2}{9}, \frac{4}{9}) = (\frac{2}{9}, \frac{4}{9}, \frac{4}{9}).$

Portanto, a base ortonormal é:

$$\mathcal{B} = \left\{ \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right), \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3} \right), \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right) \right\}.$$

Escrevendo $U = (w_1, w_2, w_3) = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

A matriz A na base $\{w_1, w_2, w_3\}$ é:

$$\begin{aligned} (A)_{\{w_1, w_2, w_3\}} &= U^{-1} \cdot (A)_c \cdot U \\ &= \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 13 & 8 & 8 \\ -1 & 7 & -2 \\ -1 & -2 & 7 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 81 & 0 & 81 \\ 0 & 81 & 81 \\ 0 & 0 & 81 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 9 \\ 0 & 9 & 9 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Encontramos então: $T = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 9 \\ 0 & 9 & 9 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ triangular superior e $U = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

unitária.

Daí, $A = \begin{pmatrix} 13 & 8 & 8 \\ -1 & 7 & -2 \\ -1 & -2 & 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 0 & 9 \\ 0 & 9 & 9 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} =$

$U \cdot T \cdot U^*$ é a decomposição de Schur da matriz A .

CAPÍTULO 6

Decomposição QR

O capítulo foi construído tomando por base os referenciais teóricos [1] e [4].

6.1 A decomposição QR de uma base

A fatoração QR é importante do ponto de vista computacional pois pode ser usada como alternativa para a resolução de sistemas lineares por mínimos quadrados. Também é a base de um eficiente método numérico para encontrar autovalores de uma matriz quadrada.

O método de Gram-Schmidt permite fatorar uma matriz A cujas colunas são linearmente independentes em um produto $A = QR$, onde Q é a matriz cujas colunas formam um conjunto ortonormal e R uma matriz triangular superior.

Vamos considerar a matriz A de 3 colunas. O método, a seguir, pode ser generalizado para uma matriz de qualquer dimensão (desde que tenha colunas linearmente independentes).

Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 \end{pmatrix}$ cujas colunas são linearmente independentes e são denotadas pelos vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$, o processo de Gram-Schmidt permite construir uma base ortogonal formada pelos vetores $\vec{q}_1, \vec{q}_2$ e $\vec{q}_3$ para o espaço coluna da matriz A .

Para isso, definimos:

$$\vec{q}_1 = \vec{v}_1$$

$$\vec{q}_2 = \vec{v}_2 - \text{proj}_{\vec{q}_1} \vec{v}_2$$

$$\vec{q}_3 = \vec{v}_3 - \text{proj}_{\text{span}\{\vec{q}_1, \vec{q}_2\}} \vec{v}_3$$

Dessa forma, existem coeficientes r_1, r_2 e $r_3 \in \mathbb{R}$ tais que:

$$\vec{q}_1 = \vec{v}_1$$

$$\vec{q}_2 = \vec{v}_2 - r_1 \cdot \vec{v}_1$$

$$\vec{q}_3 = \vec{v}_3 - r_2 \cdot \vec{q}_1 - r_3 \cdot \vec{q}_2.$$

Em um segundo momento, cada um dos três vetores $\vec{q}_1, \vec{q}_2$ e $\vec{q}_3$ pode ser normalizado, ou seja, podemos dividir cada um deles por seu comprimento para obter uma base ortonormal. Assim,

$$\vec{w}_1 = \frac{1}{\|\vec{q}_1\|} \cdot \vec{q}_1$$

$$\vec{w}_2 = \frac{1}{\|\vec{q}_2\|} \cdot \vec{q}_2 - \frac{r_1}{\|\vec{q}_2\|} \cdot \vec{q}_1$$

$$\vec{w}_3 = \frac{1}{\|\vec{q}_3\|} \cdot \vec{q}_3 - \frac{r_2}{\|\vec{q}_3\|} \cdot \vec{q}_1 - \frac{r_3}{\|\vec{q}_3\|} \cdot \vec{q}_2.$$

Então, $\vec{w}_1, \vec{w}_2$ e $\vec{w}_3$ formam uma base ortonormal para o espaço coluna A .

Podemos inverter estas equações, para escrever as colunas da matriz A em função dos vetores da base ortonormal $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$

$$\vec{v}_1 = \|\vec{q}_1\| \cdot \vec{w}_1$$

$$\vec{v}_2 = \|\vec{q}_2\| \cdot \frac{r_1}{\|\vec{q}_2\|} \cdot \vec{w}_1 + \|\vec{q}_2\| \cdot \vec{w}_2 = r_1 \cdot \vec{w}_1 + \|\vec{q}_2\| \cdot \vec{w}_2$$

$$\vec{v}_3 = \|\vec{q}_3\| \cdot \frac{r_2}{\|\vec{q}_3\|} \cdot \vec{w}_1 + \|\vec{q}_3\| \cdot \frac{r_3}{\|\vec{q}_3\|} \cdot \vec{w}_2 + \|\vec{q}_3\| \cdot \vec{w}_3 = r_2 \cdot \vec{w}_1 + r_3 \cdot \vec{w}_2 + \|\vec{q}_3\| \cdot \vec{w}_3$$

Matricialmente, podemos escrever:

$$\begin{pmatrix} | & | & | \\ \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | & | \\ \vec{w}_1 & \vec{w}_2 & \vec{w}_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \|\vec{q}_1\| & r_1 & r_2 \\ 0 & \|\vec{q}_2\| & r_3 \\ 0 & 0 & \|\vec{q}_3\| \end{pmatrix}.$$

Visto que cada coluna do produto da direita é definido como combinação linear das colunas da primeira matriz.

Logo,

$$Q = \begin{pmatrix} | & | & | \\ \vec{w}_1 & \vec{w}_2 & \vec{w}_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} \text{ e } R = \begin{pmatrix} \|\vec{q}_1\| & r_1 & r_2 \\ 0 & \|\vec{q}_2\| & r_3 \\ 0 & 0 & \|\vec{q}_3\| \end{pmatrix}.$$

Segue então que:

$A = Q \cdot R$, chamada **decomposição QR** da matriz A .

Generalizando o método acima obtemos o seguinte teorema:

Teorema 6.1. *Seja A uma matriz $m \times n$ de posto n . Então $A = Q \cdot R$, em que Q é uma matriz $m \times n$ com colunas ortonormais e R é uma matriz $n \times n$ triangular superior com elementos diagonais positivos.*

Demonstração. Sejam $v_1, v_2, \dots, v_n$ as colunas da matriz A . Como essa matriz tem posto n , esses vetores são linearmente independentes em $\mathbb{K}^m$. Aplicando o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt a esses vetores, obtemos os vetores ortonormais $q_1, q_2, \dots, q_n \in \mathbb{K}^m$, dados por:

$$q_k = \frac{1}{r_{kk}} \cdot \left(v_k - \sum_{i=1}^{k-1} r_{ik} q_i \right), k = 1, \dots, n,$$

em que, $r_{ik} = \langle v_k, q_i \rangle$ para $i = 1, \dots, k-1$ e r_{kk} é a norma do vetor $v_k - \sum_{i=1}^{k-1} r_{ik} q_i$. Mas isso quer dizer que,

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{1}{r_{11}} \cdot v_1 \Rightarrow v_1 = r_{11} \cdot q_1 \\ q_2 &= \frac{1}{r_{22}} \cdot (v_2 - r_{12} q_1) \Rightarrow r_{22} q_2 = v_2 - r_{12} q_1 \Rightarrow v_2 = r_{12} q_1 + r_{22} q_2 \\ &\vdots \\ q_n &= \frac{1}{r_{nn}} \cdot (v_n - (r_{1n} q_1 + \dots + r_{(n-1)n} q_{n-1})) \Rightarrow v_n = r_{1n} q_1 + \dots + r_{nn} q_n. \end{aligned}$$

Definindo Q como a matriz cuja as colunas são vetores $q_1, \dots, q_n$ e R a matriz triangular superior

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & r_{nn} \end{pmatrix},$$

vemos que a j -ésima coluna da matriz $Q \cdot R$ é $Q \cdot R \cdot e_j = Q \cdot R_j = r_{1j} q_1 + r_{2j} q_2 + \dots + r_{jj} q_j + 0 q_{j+1} + \dots + 0 q_n = v_j$. Isso mostra que $Q \cdot R = A$, completando a demonstração. $\square$

6.2 Decomposição QR

O que pode acontecer quando as colunas $v_1, \dots, v_n$ de A forem linearmente dependentes? Nesse caso, ao ortogonalizarmos as colunas de A , obteremos um ou mais vetores

iguais a zero. Desprezando os vetores nulos obtidos, continuaremos a ter uma base ortonormal $q_1, \dots, q_r$ para $\text{im}A$, sendo r o posto da matriz A . A matriz $Q = (q_1, \dots, q_r)$ representa uma isometria e $\text{posto} A = \text{posto} Q$. Uma vez que os vetores v_i satisfazem os $v_1, v_2, \dots, v_n$ como definidos, obtemos $R = (r_{ij})$ como sendo a matriz $n \times r$ triangular superior dada por $r_{ij} = \langle u_i, q_j \rangle$. Uma vez que Q é isometria, temos $\|A \cdot x\| = \|Q \cdot R \cdot x\| = \|R \cdot x\|$, de modo que, $\ker A = \ker R$. Assim, uma vez que A e R tem n colunas, $\text{posto} R = n - \ker R = n - \ker A = r = \text{posto} A$.

Condensamos os resultados no seguinte teorema:

Teorema 6.2. *Seja A uma matriz real $m \times n$ com posto r . Então, podemos escrever $A = Q \cdot R$, sendo Q a matriz $n \times r$ de uma isometria satisfazendo $\text{im}A = \text{im}Q$ e R é uma matriz triangular superior $n \times r$ de posto r .*

6.3 Exemplo da decomposição QR

Exemplo 6.3. Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Vamos encontrar uma matriz or-

togonal P tal que $\text{im}P = \text{Im}Q$ e obter a decomposição $Q \cdot R$ da matriz A . Em seguida, vamos resolver o sistema $A \cdot x = b$ para $b = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^t$.¹

É claro que as colunas de A são linearmente independentes, pois:

$$\begin{aligned} \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha + \beta + \gamma & \beta + \gamma & \alpha + \beta + \gamma & \alpha + \gamma \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + \gamma = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \beta = -\gamma \\ \alpha = -\gamma \end{cases} &\Leftrightarrow \left\{ \gamma = 0 = \beta = \alpha. \right. \end{aligned}$$

Se A for dada em termos de suas colunas $\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}$, aplicando o processo de ortogonalização a esses vetores obtemos os vetores q_1, q_2 e q_3 .

Sabemos que, $v_1 = (1, 0, 1, 1)$, $v_2 = (1, 1, 1, 0)$ e $v_3 = (1, 1, 1, 1)$.

¹O exemplo (6.3) encontra-se em [1], pág. 231 a 232.

Primeiro vamos calcular q_1 .

Para isso, temos:

$$\|v_1\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}.$$

Logo,

$$q_1 = \frac{1}{\|v_1\|} \cdot v_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (1, 0, 1, 1) = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 0, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right).$$

Agora, vamos calcular q_2 .

Para isso, temos:

$$r_{12} = \langle v_2, q_1 \rangle = \langle (1, 1, 1, 0), \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 0, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \rangle = \frac{\sqrt{3}}{3} + 0 + \frac{\sqrt{3}}{3} + 0 = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

$$\begin{aligned} r_{22} &= \|v_2 - r_{12} \cdot q_1\| = \|(1, 1, 1, 0) - \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 0, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\| = \left\|\left(\frac{1}{3}, 1, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)\right\| = \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + (1)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{15}{9}} = \frac{\sqrt{15}}{3}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} q_2 &= \frac{1}{r_{22}} \cdot (v_2 - r_{12} \cdot q_1) = \frac{3\sqrt{15}}{15} \cdot \left((1, 1, 1, 0) - \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 0, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right) = \\ &= \frac{3\sqrt{15}}{15} \cdot \left(\frac{1}{3}, 1, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{\sqrt{15}}{15}, \frac{\sqrt{15}}{5}, \frac{\sqrt{15}}{15}, -\frac{2\sqrt{15}}{15}\right). \end{aligned}$$

E por fim, vamos calcular q_3 .

Para isso, temos:

$$r_{13} = \langle v_3, q_1 \rangle = \langle (1, 1, 1, 1), \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 0, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \rangle = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}.$$

$$r_{23} = \langle v_3, q_2 \rangle = \langle (1, 1, 1, 1), \left(\frac{\sqrt{15}}{15}, \frac{\sqrt{15}}{5}, \frac{\sqrt{15}}{15}, -\frac{2\sqrt{15}}{15}\right) \rangle = \frac{\sqrt{15} + 3\sqrt{15} + \sqrt{15} - 2\sqrt{15}}{15} = \frac{\sqrt{15}}{5}.$$

$$\begin{aligned} r_{33} &= \|v_3 - r_{13} \cdot q_1 - r_{23} \cdot q_2\| = \|(1, 1, 1, 1) - \sqrt{3} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 0, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) - \frac{\sqrt{15}}{5} \cdot \left(\frac{\sqrt{15}}{15}, \frac{\sqrt{15}}{5}, \frac{\sqrt{15}}{15}, -\frac{2\sqrt{15}}{15}\right)\| = \\ &= \|(0, 1, 0, 0) - \left(\frac{1}{5}, \frac{3}{5}, \frac{1}{5}, -\frac{2}{5}\right)\| = \left\|-\left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, -\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right)\right\| = \sqrt{\left(-\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(-\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{25} + \frac{4}{25} + \frac{1}{25} + \frac{4}{25}} = \frac{\sqrt{10}}{5}. \end{aligned}$$

Logo,

$$q_3 = \frac{1}{r_{33}} \cdot (v_3 - (r_{13} \cdot q_1 + r_{23} \cdot q_2)) = \frac{1}{\frac{\sqrt{10}}{5}} \cdot \left(-\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, -\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right) = \left(-\frac{\sqrt{10}}{10}, \frac{\sqrt{10}}{5}, -\frac{\sqrt{10}}{10}, \frac{\sqrt{10}}{5}\right).$$

Denotando $Q = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \end{pmatrix}$, concluímos que:

$$Q = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{15}}{15} & -\frac{\sqrt{10}}{10} \\ 0 & \frac{\sqrt{15}}{5} & \frac{\sqrt{10}}{5} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{15}}{15} & -\frac{\sqrt{10}}{10} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{2\sqrt{15}}{15} & \frac{\sqrt{10}}{5} \end{pmatrix}.$$

Como o espaço gerado pelas colunas de A é justamente o espaço gerado pelas colunas de Q , a matriz ortogonal P é justamente a matriz Q . A matriz R é a matriz de mudança de base $\{v_1, v_2, v_3\}$ para $\{q_1, q_2, q_3\}$. Assim,

$$R = \begin{pmatrix} \langle q_1, v_1 \rangle & \langle q_1, v_2 \rangle & \langle q_1, v_3 \rangle \\ \langle q_2, v_1 \rangle & \langle q_2, v_2 \rangle & \langle q_2, v_3 \rangle \\ \langle q_3, v_1 \rangle & \langle q_3, v_2 \rangle & \langle q_3, v_3 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \frac{2\sqrt{3}}{3} & \sqrt{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{15}}{3} & \frac{\sqrt{15}}{5} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{10}}{5} \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{15}}{15} & -\frac{\sqrt{10}}{10} \\ 0 & \frac{\sqrt{15}}{5} & \frac{\sqrt{10}}{5} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{15}}{15} & -\frac{\sqrt{10}}{10} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{2\sqrt{15}}{15} & \frac{\sqrt{10}}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \frac{2\sqrt{3}}{3} & \sqrt{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{15}}{3} & \frac{\sqrt{15}}{5} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{10}}{5} \end{pmatrix} = Q \cdot R, \text{ chamada}$$

decomposição QR da matriz A.

Se $A \cdot x = b$, então $Q \cdot R \cdot x = b$ e, portanto, $R \cdot x = Q^t \cdot b$. Logo, basta resolver

$$\begin{pmatrix} \sqrt{3} & \frac{2\sqrt{3}}{3} & \sqrt{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{15}}{3} & \frac{\sqrt{15}}{5} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{10}}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = Q^t \cdot b = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{15}}{15} & \frac{\sqrt{15}}{15} & \frac{\sqrt{15}}{15} & -\frac{2\sqrt{15}}{15} \\ -\frac{\sqrt{10}}{10} & \frac{\sqrt{10}}{5} & -\frac{\sqrt{10}}{10} & \frac{\sqrt{10}}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -2 \cdot \frac{\sqrt{15}}{15} \\ \frac{\sqrt{10}}{5} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3}x + \frac{2\sqrt{3}}{3}y + \sqrt{3}z = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{15}}{3}y + \frac{\sqrt{15}}{5}z = -\frac{2\sqrt{15}}{15} \\ \frac{\sqrt{10}}{5}z = \frac{\sqrt{10}}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \\ z = 1 \end{cases}.$$

Obtendo, então:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exemplo 6.4. Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Vamos encontrar uma matriz ortogonal P tal que $\text{im}P = \text{Im}Q$ e obter a decomposição $Q \cdot R$ da matriz A. Em seguida, vamos resolver o sistema $A \cdot x = b$ para $b = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^t$.²

É claro que as colunas de A são linearmente dependentes, pois:

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \gamma \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha + \gamma & \beta + 2\gamma & \alpha + \beta + 3\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

²O exemplo (6.4) encontra-se em [1], pág. 233 a 234.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + 3 \cdot \gamma = 0 \\ \beta + 2 \cdot \gamma = 0 \\ \alpha + \gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -2 \cdot \gamma \\ \alpha = -\gamma \end{cases}.$$

Se A for dada em termos de suas colunas $\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}$, aplicando o processo de ortogonalização a esses vetores obtemos os vetores q_1 e q_2 pois o posto de A é igual a 2.

Sabemos que, $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (0, 1, 1)$ e $v_3 = (1, 2, 3)$.

Primeiro vamos calcular q_1 .

Para isso, temos:

$$\|v_1\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Logo,

$$q_1 = \frac{1}{\|v_1\|} \cdot v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (1, 0, 1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Agora, vamos calcular q_2 .

Para isso, temos:

$$r_{12} = \langle v_2, q_1 \rangle = \langle (0, 1, 1), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \rangle = 0 + 0 + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\begin{aligned} r_{22} &= \|v_2 - r_{12} \cdot q_1\| = \|(0, 1, 1) - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\| = \|(0, 1, 1) - \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)\| = \\ &= \left\| \left(-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right) \right\| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + (1)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{6}{4}} = \frac{\sqrt{6}}{2}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} q_2 &= \frac{1}{r_{22}} \cdot (v_2 - r_{12} \cdot q_1) = \frac{2}{\sqrt{6}} \cdot \left((0, 1, 1) - \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)\right) = \frac{2}{\sqrt{6}} \cdot \left(-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right) = \\ &= \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right). \end{aligned}$$

Denotando $Q = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 \end{pmatrix}$, concluímos que:

$$Q = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Como o espaço gerado pelas colunas de A é justamente o espaço gerado pelas colunas de Q , a matriz ortogonal P é justamente a matriz Q . A matriz R é a matriz de mudança de base $\{v_1, v_2, v_3\}$ para $\{q_1, q_2\}$. Assim,

$$R = \begin{pmatrix} \langle q_1, v_1 \rangle & \langle q_1, v_2 \rangle & \langle q_1, v_3 \rangle \\ \langle q_2, v_1 \rangle & \langle q_2, v_2 \rangle & \langle q_2, v_3 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{4}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{6}} & \frac{6}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{4}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{6}} & \frac{6}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = Q \cdot R, \text{ chamada decomposição}$$

QR da matriz A .

Se $A \cdot x = b$, então $Q \cdot R \cdot x = b$ e, portanto, $R \cdot x = Q^t \cdot b$. Logo, basta resolver

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{4}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{6}} & \frac{6}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = Q^t \cdot b = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y + \frac{4}{\sqrt{2}}z = \frac{2}{\sqrt{2}} \\ \frac{3}{\sqrt{6}}y + \frac{6}{\sqrt{6}}z = \frac{2}{\sqrt{6}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} - z \\ y = \frac{2}{3} - 2z \\ z = z \end{cases}.$$

Obtendo, então:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} - z \\ \frac{2}{3} - 2z \\ z \end{pmatrix}.$$

Considerações

Decomposições matriciais são métodos que reduzem uma matriz em partes constituintes, facilitando o cálculo de operações matriciais mais complexas, ou seja, escreve como um produto de matrizes mais simples. Fazer isso revela as suas estruturas e características e ajuda a interpretar seu significado. Existem diferentes técnicas para decompor uma matriz, para o desenvolvimento desse trabalho nos embasamos no estudo de algumas destas técnicas e apresentamos alguns exemplos. Esse tema é relevante pois possibilita uma facilidade computacional e simplicidade analítica.

O presente trabalho contribuiu para a formação acadêmica da autora por possibilitar o estudo de diferentes métodos de decomposição de matrizes, conteúdos esses que vão além dos vistos na graduação, e a apresentação dos resultados por meio de exemplos. Vale ressaltar que a maioria são exemplos propostos pela autora e são uma contribuição original.

As informações deste estudo são apresentadas de maneira bem desenvolvida e executada em diversos exemplos, o que facilita o entendimento de quem faz a leitura. Desse modo, o trabalho serve de base para novas pesquisas, contribui para o conhecimento do tema na formação inicial da Matemática e divulga uma área que tem atraído cada vez mais pesquisadores de diferentes cursos, como: Matemática, Ciência da Computação e Engenharia.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Bueno, Hamilton Prado. **Álgebra Linear:** Um Segundo Curso. 1ª edição. Rio de Janeiro: SBM, 2006.
- [2] Anton, Howard; Rorres, Chris. **Álgebra Linear com aplicações.** 10ª edição. Porto Alegre: Brookman, 2012.
- [3] Ruggiero, Márcia Aparecida Gomes; Lopes, Vera Lúcia da Rocha. **Cálculo Numérico:** Aspectos Teóricos e Computacionais. 2ª edição. São Paulo: Pearson Universidades, 2000.
- [4] Faria, Diego Marcon; Konzen, Pedro Henrique de Almeida; Souza, Rafael Rigão. **Álgebra Linear** Um Livro Colaborativo. 1ª edição. Porto Alegre: Repositório digital da UFRGS, 2020. Disponível em: <https://www.ufrgs.br/reamat/AlgebraLinear/livro/main.html>. Acesso em: 19 abr. 2021.
- [5] MELO, ROBERTA AGNES MENDES; SANTOS, PATRÍCIA BORGES DOS. Decomposição LU e LDU de Matrizes. In: XX Semana de Matemática e X Semana da Estatística e IX Mostra de IC, 2020, Uberlândia. **Anais da SEMAT e SEMEST...** Uberlândia: FAMAT, 2020. p. 104 – 107.
- [6] MELO, ROBERTA AGNES MENDES; SANTOS, PATRÍCIA BORGES DOS. O Cálculo do Fator de Cholesky. In: XI Semana de Matemática do Pontal, 2020, Ituiutaba. **Anais Eletrônicos...** Ituiutaba: ICENP, 2020. p. 1 – 4.

- [7] UNIVERSITY OF ILLINOIS. Math 416 Abstract Linear Algebra, 2011. Disponível em: https://faculty.math.illinois.edu/~franklan/Math416_SchurDecomposition.pdf. Acesso em: 21 mai. 2021.
- [8] UNIVERSITY OF CALIFORNIA IN SANTA BARBARA. Math 108B Lecture 5: The Schur Decomposition, 2014. Disponível em: http://web.math.ucsb.edu/~padraic/ucsb_2013_14/math108b_w2014/math108b_w2014_lecture5.pdf. Acesso em: 24 mai. 2021.