

BERNARDO AGUIAR DE SOUZA PENHA

**AJUSTE DE MODELO
DE MÁQUINAS ROTATIVAS UTILIZANDO
OTIMIZAÇÃO POR ENXAME DE PARTÍCULAS (PSO)**



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
2025**

BERNARDO AGUIAR DE SOUZA PENHA

**AJUSTE DE MODELO
DE MÁQUINAS ROTATIVAS UTILIZANDO
OTIMIZAÇÃO POR ENXAME DE PARTÍCULAS (PSO)**

Projeto de Final de Curso apresentado à Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para a obtenção do título de BACHAREL EM ENGENHARIA MECÂNICA.

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Vibrações

Orientador: Prof. Dr. Aldemir Aparecido Cavallini Junior

UBERLÂNDIA, MG

2025

AGRADECIMENTOS

À Vida, pela oportunidade de existir.

À Láila, pelo carinho, bom humor e paciência, deixando nossos momentos sempre mais leves.

A meus pais, por todo apoio incondicional, sem o qual eu nunca teria conseguido chegar aqui.

A meus irmãos, pelo companheirismo e amizade, que mesmo à distância estão sempre presentes.

Aos colegas do laboratório, pelos incontáveis auxílios e explicações esclarecedoras.

Ao meu orientador Aldemir, pela oportunidade de participar do projeto dessa categoria e porte e obter um desenvolvimento pessoal intenso e em tão pouco tempo.

Aos professores e à Faculdade de Engenharia Mecânica, por proporcionarem uma formação de qualidade para os estudantes do curso.

À Petrobrás, por meio do projeto P&D SISTEMAS DE MONITORAMENTO DE VARIÁVEIS ESSENCIAIS FULL WIRELESS (SMVE-FW), pelo apoio financeiro concedido durante a realização deste trabalho.

RESUMO

Este trabalho investiga o ajuste de modelos numéricos de máquinas rotativas utilizando o algoritmo de Otimização por Enxame de Partículas Híbrido (PSO-H), com validação experimental em bancada de testes. O estudo foca na calibração de parâmetros críticos como rigidez e amortecimento de mancais, visando reduzir discrepâncias entre respostas simuladas e experimentais. Desenvolveu-se um modelo unidimensional por Elementos Finitos (MEF) incorporando efeitos giroscópicos, desbalanceamento e interação rotor-mancal, seguindo formulações de Lalanne e Ferraris (1998). Os dados experimentais foram obtidos através de ensaios de impacto com medição de Funções de Resposta em Frequência (FRFs). O PSO-H demonstrou eficiência na minimização de erros entre modelos e experimentos, com convergência estável em até 20 iterações. Resultados indicaram erros médios inferiores a 1% nas frequências naturais e correlação cruzada de amplitude modal (CMAC) acima de 0,99 para os dois primeiros modos de vibração. Conclui-se que a metodologia proposta é robusta para aplicações em Monitoramento de Integridade Estrutural (SHM), com potencial para extensão a sistemas não lineares. O trabalho recebeu apoio financeiro da Petrobras através do projeto P&D SMVE-FW.

Palavras-chave: Máquinas rotativas; Ajuste de modelo; PSO; Elementos Finitos; Análise modal.

ABSTRACT

This study addresses the numerical model updating of rotating machinery using a Hybrid Particle Swarm Optimization (PSO-H) algorithm, validated through experimental bench tests. The research focuses on calibrating critical parameters such as bearing stiffness and damping coefficients to minimize discrepancies between simulated and experimental responses. A one-dimensional Finite Element Model (FEM) was developed, incorporating gyroscopic effects, unbalance forces, and rotor-bearing interactions based on Lalanne and Ferraris' formulations (1998). Experimental data were acquired through impact tests with Frequency Response Function (FRF) measurements. The PSO-H algorithm demonstrated efficient error minimization between models and experiments, achieving stable convergence within 20 iterations. Results showed average errors below 1% for natural frequencies and Cross-Modal Amplitude Correlation (CMAC) values above 0.99 for the first two vibration modes. The methodology proves robust for Structural Health Monitoring (SHM) applications, with potential extensions to nonlinear systems. This work was financially supported by Petrobras through the P&D project SMVE-FW.

Keywords: Rotating machinery; Model updating; PSO; Finite Elements; Modal analysis.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2-1: Representação espacial do disco em relação ao referencial inercial.	19
Figura 2-2: Sistema de coordenadas do eixo em uma condição qualquer. Fonte: Adaptado de (LALANNE; FERRARIS, 1990).	22
Figura 2-3: Disposição dos coeficientes de rigidez e de amortecimento no mancal.	24
Figura 2-4: Localização da massa de desbalanceamento. Fonte: Adaptado de (LALANNE; FERRARIS, 1990).	25
Figura 2-5: Fluxograma do algoritmo de Enxame de Partículas Híbrido.....	33
Figura 3-1: Bancada de testes utilizada.	35
Figura 3-2: Discretização de nós e elementos do rotor.	37
Figura 4-1: Dispersão dos resultados em amplitude e frequência para todas as sementes de acordo com cada FRF.	45
Figura 4-2: Comparação entre FRFs experimentais (laranja) e numéricas (azul tracejado) referentes à melhor execução.	51
Figura 4-3: Comparação entre FRFs e Fases experimentais (laranja) e numéricas (azul) da melhor execução (vertical).	52
Figura 4-4: Comparação entre FRFs e Fases experimentais (laranja) e numéricas (azul) da melhor execução (horizontal).	52
Figura 4-5: Convergência dos parâmetros de otimização para a melhor execução.	53
Figura 4-6: Gráfico de barras dos erros relativos de frequência para a melhor execução.	55
Figura 4-7: Gráfico de barras dos erros relativos de amplitude para a melhor execução.	55
Figura 4-8: Gráfico de barras referentes aos valores médios (ambos os modos) de CMAC da melhor execução por FRF.	56

LISTA DE TABELAS

Tabela 3-1: Propriedades físicas dos componentes do rotor estudado.	36
Tabela 3-2: Distância dos componentes em relação à origem (nó zero).	36
Tabela 3-3: Parâmetros para otimização com respectivos limites de busca.	38
Tabela 3-4: Hiper-parâmetros do algoritmo de PSO-H.	40
Tabela 4-1: Dados de frequência e amplitude obtidos experimentalmente.	43
Tabela 4-2: Erros relativos absolutos (frequência).	47
Tabela 4-3: Erros relativos absolutos (amplitude).	47
Tabela 4-4: Valores de CMAC por semente para cada FRF.	48
Tabela 4-5: Melhores parâmetros por execução.	49
Tabela 4-6: Média de erros relativos absolutos (frequência).	50
Tabela 4-7: Média de erros relativos absolutos (amplitude).	50
Tabela 4-8: Erros relativos absolutos de frequência e amplitude por FRF.	54
Tabela 4-9: Valores médios (ambos os modos) de CMAC da melhor execução por FRF.	56
Tabela 4-10: Melhor resultado para parâmetros otimizados.	57

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathcal{L}$: Lagrangeano [J]
 T : Energia cinética [J]
 U : Energia potencial [J]
 t : tempo [s]
 q_i : coordenada generalizada (equações de Lagrange)
 $\dot{q}$: derivada temporal da coordenada generalizada (equações de Lagrange)
 Q : esforço generalizado (equações de Lagrange)
 M : matriz global de massa [kg]
 C : a matriz global de amortecimento [N.s/m]
 Ω : velocidade angular de rotação do rotor [rad/s]
 C_g : matriz de efeitos giroscópicos [N.s/m]
 K : matriz global de rigidez elástica, existente mesmo na ausência da rotação [N/m]
 K_{Dt} : matriz de rigidez transiente dos discos devida à aceleração de rotação [N/m]
 K_{St} : matriz de rigidez transiente do eixo devida à aceleração de rotação [N/m]
 W : vetor de forças gravitacionais (peso próprio) [N]
 F_u : vetor de forças de excitação devido ao desbalanceamento de massa [N]
 F_m : vetor de forças de reação dos mancais [N]
 F_e : vetor de outras forças externas aplicadas [N]
 ψ : ângulo de rotação em torno do eixo z [rad]
 θ : ângulo de rotação em torno do eixo x [rad]
 ϕ : ângulo de rotação em torno do eixo y [rad]
 ω_{R/R_o} : vetor de velocidade angular expresso no sistema inercial [rad/s]
 I_{D_x} : momento de inércia em relação aos eixos x [m⁴]
 I_{D_z} : momento de inércia em relação aos eixos z [m⁴]
 I_{D_y} : momento polar de inércia [m⁴]
 I é o momento de inércia da seção transversal [m⁴]
 u : deslocamento do centro de massa do elemento do rotor na direção horizontal (x) [m]
 w : deslocamento do centro de massa do elemento do rotor na direção vertical (z) [m]
 $\dot{u}$: velocidade do centro de massa do elemento do rotor na direção horizontal (x) [m/s]
 $\dot{w}$: velocidade do centro de massa do elemento do rotor na direção vertical (z) [m/s]
 $\ddot{u}$: aceleração do centro de massa do elemento do rotor na direção horizontal (x) [m/s²]
 $\ddot{w}$: aceleração do centro de massa do elemento do rotor na direção vertical (z) [m/s²]
 ρ : densidade do material do eixo [kg/m³]
 S : área da seção transversal do eixo [m²]
 L : comprimento total do eixo [m]
 E : módulo de elasticidade do material [N/m²]
 F_0 : força axial aplicada no eixo [N]
 δW : Trabalho virtual [J]
 k_{ij} : coeficientes de rigidez [N/m]
 c_{ij} : coeficientes de amortecimento [N.s/m]
 d : magnitude da excentricidade [m] referente à força de desbalanceamento

λ : ângulo de fase inicial que define a orientação do desbalanceamento [rad]
 $H(\omega)$: representa a função de resposta em frequência (FRF)
 $X(\omega)$: representa a resposta do sistema (deslocamento, velocidade ou aceleração)
 $F(\omega)$: representa a força de excitação [N]
 ω : representa a frequência em Hz
 $G_{xf}(\omega)$: representa a densidade espectral cruzada entre excitação e resposta
 $G_{xx}(\omega)$: densidade espectral da resposta
 $G_{ff}(\omega)$: densidade espectral da excitação
 j : representa a unidade imaginária ($\sqrt{-1}$)
 N : representa o número de modos considerados na faixa de frequência de interesse
 $x_j(t + 1)$: nova posição da partícula no espaço de busca (PSO)
 $x_j(t)$: posição atual da partícula no espaço de busca (PSO)
 $v_j(t + 1)$: nova velocidade da partícula (PSO)
 $v_j(t)$: velocidade atual da partícula (PSO)
 p_j : melhor posição já encontrada pela própria partícula (memória individual) (PSO)
 l : melhor posição local da vizinhança da partícula (memória coletiva) (PSO)
 w : fator de inércia, que regula a influência da velocidade anterior (PSO)
 c_1 : coeficiente de aceleração cognitiva (PSO)
 c_2 : coeficiente de aceleração social (PSO)
 $r_1, r_2 \in [0,1]$: números aleatórios gerados a partir de uma distribuição uniforme (PSO)
 k_{xx} : rigidez horizontal do mancal 1 [N/m]
 k_{xx} : rigidez horizontal do mancal 2 [N/m]
 k_{zz} : rigidez vertical do mancal 1 [N/m]
 k_{zz} : rigidez vertical do mancal 2 [N/m]
 ξ_{xx} : fator amortecimento horizontal do 1º Modo [$N \cdot s/m$]
 ξ_{zz} : fator amortecimento vertical do 1º Modo [$N \cdot s/m$]
 ξ_{xx} : fator amortecimento horizontal do 2º Modo [$N \cdot s/m$]
 ξ_{zz} : fator amortecimento vertical do 2º Modo [$N \cdot s/m$]
 K_{rot_z} : rigidez rotacional vertical do acoplamento [$N \cdot m/rad$]
 K_{rot_x} : rigidez rotacional horizontal acoplamento [$N \cdot m/rad$]
 m_i^{num} : medida numérica (amplitude ou frequência natural) para o modo i
 m_i^{exp} : medida experimental (amplitude ou frequência natural) para o modo i
 A_{num} : vetor com as amplitudes de pico numéricas para os dois modos de uma FRF
 A_{exp} : vetor com as amplitudes de pico experimentais para os dois modos de uma FRF

SUMÁRIO

1.	Introdução	12
1.1.	Problema de Pesquisa:.....	12
1.2.	Justificativa:	13
1.3.	Objetivos:.....	13
1.3.1.	Objetivo Geral	13
1.3.2.	Objetivos Específicos	14
1.4.	Estrutura do Trabalho.....	14
2.	Fundamentação Teórica	16
2.1.	Modelagem por Elementos Finitos	16
2.1.1.	Equação do movimento	18
2.1.2.	Disco	19
2.1.3.	Eixo	21
2.1.4.	Mancal.....	23
2.1.5.	Massa de desbalanceamento	25
2.2.	Análise de Vibração e FRFs	27
2.3.	Ajuste de Modelo	29
2.4.	Otimização Heurística em Engenharia	30
2.4.1.	Otimização por Enxame de Partículas Híbrido (PSO-H)	31
2.4.2.	Comparação entre DE e PSO-H.....	33
3.	Metodologia	35
3.1.	Descrição da Bancada de Testes.....	35
3.2.	Aquisição de Dados Experimentais	37
3.3.	Formulação do Problema de Otimização	38
3.4.	Algoritmos de Ajuste de Modelo	39
3.4.1.	Implementação da Otimização por Enxame de Partículas Híbrida (PSO-H) 39	
3.4.2.	Critérios de Parada e Validação	40
4.	Resultados e discussão.....	43
4.1.	Panorama Geral.....	43
4.1.1.	Dispersão Frequência × Amplitude.....	43
4.1.2.	Erros Relativos de Frequência e Amplitude	46

4.1.3.	Critério de Correlação Cruzada de Amplitude Modal (CMAC)	48
4.1.4.	Parâmetros Otimizados por Semente	49
4.2.	Melhor Execução	50
4.2.1.	Comparação entre FRFs experimentais e numéricas: Melhor Execução .	51
4.2.2.	Convergência dos Parâmetros de Otimização: Melhor Execução.....	53
4.2.3.	Erros Relativos (Frequência e Amplitude): Melhor Execução	54
4.2.4.	Critério de Correlação Cruzada de Amplitude Modal (CMAC): Melhor Execução	56
4.2.5.	Parâmetros Otimizados: Melhor Execução	57
5.	Conclusões	59
6.	Referências	61

1. Introdução

A análise de vibrações de máquinas rotativas é um tema central em engenharia mecânica, especialmente em aplicações de alta precisão, onde o desempenho e a integridade estrutural são fortemente influenciados pelos efeitos de flexibilidade dos eixos, interação com mancais e forças de desbalanceamento. Modelos numéricos adequados são indispensáveis para representar fielmente o comportamento dinâmico dessas máquinas e prever fenômenos críticos como ressonâncias, instabilidades e falhas estruturais.

Dentre as abordagens disponíveis, o Método dos Elementos Finitos (MEF) tem se consolidado como ferramenta robusta para a modelagem de sistemas rotativos complexos, permitindo a consideração de geometrias arbitrárias, heterogeneidade de materiais e condições de contorno variadas (FRISWELL et al., 2010). No entanto, a exatidão preditiva desses modelos depende diretamente da qualidade dos parâmetros utilizados, como rigidez, amortecimento e massa, que muitas vezes são estimados ou idealizados. Para mitigar essa limitação, técnicas de atualização de modelos vêm sendo amplamente empregadas, com o objetivo de ajustar os parâmetros do modelo numérico com base em dados experimentais (FRISWELL, 1995).

Nesse contexto, algoritmos de otimização têm se mostrado eficazes na tarefa de ajuste de modelos, destacando-se métodos bioinspirados como o algoritmo de Evolução Diferencial (DE) (CAVALINI JR. et al., 2015) e, mais recentemente, a Otimização por Enxame de Partículas (PSO, do inglês Particle Swarm Optimization). A PSO é uma técnica populacional baseada no comportamento coletivo de enxames naturais, como bandos de pássaros ou cardumes de peixes, que busca soluções ótimas por meio da cooperação e adaptação das partículas (KENNEDY; EBERHART, 1995). Sua simplicidade de implementação, baixo custo computacional e eficácia na convergência a soluções globais têm motivado sua aplicação em diversas áreas da engenharia, incluindo o ajuste de modelos estruturais.

Estudos recentes demonstram que a PSO é uma alternativa promissora para atualização de modelos em problemas de dinâmica estrutural, com resultados competitivos em comparação a outras abordagens evolucionárias. Gonçalves (2024) destaca o uso de inteligência artificial na detecção e diagnóstico de falhas em máquinas rotativas, evidenciando o potencial da PSO para aprimorar modelos preditivos. Além disso, há evidências crescentes na literatura de sua aplicação em sistemas rotativos, especialmente quando combinada com modelos de elementos finitos para ajuste de frequências naturais e modos de vibração (CABRAL, 2023).

Apesar dos avanços, a aplicação da PSO especificamente no contexto de atualização de modelos de máquinas rotativas permanece um tema de pesquisa em desenvolvimento, com espaço para contribuições relevantes, sobretudo na avaliação de desempenho do algoritmo em casos práticos com validação experimental.

1.1. Problema de Pesquisa:

O ajuste de modelos baseados no método dos Elementos Finitos (MEF) é uma importante etapa para a representação precisa do comportamento dinâmico de sistemas mecânicos complexos, como máquinas rotativas. No entanto, a obtenção de bons ajustes entre as respostas simuladas e os dados experimentais depende da estimativa precisa de

parâmetros como rigidez e amortecimento dos mancais, propriedades de acoplamento e características inerciais dos discos.

Nesse contexto, técnicas de otimização baseadas em populações, como a Evolução Diferencial (DE) e a Otimização por Enxame de Partículas (PSO), têm sido exploradas como alternativas viáveis para o ajuste de modelos MEF, devido à sua flexibilidade e à capacidade de lidar com funções objetivo complexas e não deriváveis. E embora existam estudos que empregam DE para problemas de atualização de modelos em rotores (CAVALINI JR. et al., 2015), a aplicação da PSO nesse contexto específico ainda permite certa exploração. Dessa maneira, a análise sistemática desse último método, utilizando dados experimentais de bancada e métricas quantitativas, pode contribuir para uma avaliação mais abrangente de seu desempenho.

Com base nisso, a pergunta central que este trabalho busca responder é:

Como a Otimização por Enxame de Partículas (PSO) se comporta, em termos de acurácia, robustez e custo computacional, na atualização de modelos MEF de rotores com base em dados experimentais?

1.2. Justificativa:

Modelos numéricos atualizados com base em dados experimentais desempenham papel essencial em aplicações de análise modal, predição de falhas e simulações dinâmicas em engenharia mecânica. A fidelidade desses modelos depende da capacidade de ajustar parâmetros críticos que não são diretamente acessíveis por medição, especialmente em sistemas rotativos onde atuam efeitos giroscópicos, forças de desbalanceamento e efeitos elásticos e dissipativos nos mancais.

Algoritmos de otimização baseados em populações, como a Evolução Diferencial (DE), têm sido empregados em estudos anteriores com resultados positivos no ajuste de modelos MEF para sistemas estruturais (CAVALINI JR. et al., 2015). A Otimização por Enxame de Partículas (PSO), por sua vez, tem sido aplicada com sucesso em diversas áreas da engenharia para problemas similares de ajuste de parâmetros e identificação de sistemas (FARROKHNI et al., 2019), mas sua aplicação à atualização de modelos de rotores com validação experimental ainda é relativamente pouco documentada.

A condução de uma análise sistemática de PSO, utilizando dados obtidos em bancada de testes controlada, pode fornecer evidências quantitativas relevantes sobre as características e limitações desse método no contexto específico de máquinas rotativas. Essa comparação é útil tanto para pesquisadores quanto para engenheiros interessados na aplicação prática de técnicas de ajuste de modelos em situações com alto grau de incerteza paramétrica e complexidade.

1.3. Objetivos:

1.3.1. Objetivo Geral

Avaliar o desempenho da Otimização por Enxame de Partículas (PSO) na atualização de modelos numéricos por Elementos Finitos (MEF) de máquinas rotativas, utilizando dados experimentais de resposta estática para ajuste de parâmetros estruturais.

1.3.2. Objetivos Específicos

- Desenvolver um modelo de Elementos Finitos unidimensional, com quatro graus de liberdade por nó, de um sistema rotativo, incorporando os efeitos de rigidez e amortecimento dos mancais, interação com mancais, forças de desbalanceamento e efeitos giroscópicos, conforme proposto em Cavalini Jr. (2013), Lalanne (1998) e Friswell et al. (2010);
- Selecionar os parâmetros estruturais a serem calibrados via otimização, como coeficientes de rigidez dos mancais e amortecimentos modais;
- Obter dados experimentais de resposta estática, na forma de Funções de Resposta em Frequência (FRFs), por meio de ensaios realizados em bancada de testes controlada;
- Implementar o algoritmo de Otimização por Enxame de Partículas (PSO), com estrutura adequada à natureza contínua e multimodal do problema de ajuste de modelos;
- Formular a função objetivo a ser minimizada com base na discrepância entre as respostas do modelo numérico e os dados experimentais, utilizando métricas de erro apropriadas;
- Aplicar os algoritmos de otimização para identificar os parâmetros ótimos do modelo FEM que melhor reproduzam a resposta observada experimentalmente;
- Avaliar o desempenho do algoritmo quanto à precisão do modelo ajustado e eficiência computacional, à luz de critérios estabelecidos na literatura (FARROKHNIYA et al., 2019; CAVALINI JR. et al., 2015).

1.4. Estrutura do Trabalho

Este trabalho está organizado em cinco capítulos, os quais foram estruturados de maneira a conduzir progressivamente o leitor desde os fundamentos teóricos até a análise crítica dos resultados obtidos. A seguir, apresenta-se uma descrição sucinta do conteúdo de cada capítulo.

O Capítulo 1 (Introdução) contextualiza a importância da modelagem precisa de sistemas rotativos em engenharia mecânica, introduzindo o problema da atualização de modelos numéricos por meio de algoritmos bioinspirados. São apresentados os objetivos do trabalho, a justificativa de sua relevância e a pergunta de pesquisa que orienta a investigação.

O Capítulo 2 (Fundamentação Teórica) apresenta os conceitos essenciais que sustentam o desenvolvimento do estudo. Inicialmente, são discutidos os modelos dinâmicos de rotores flexíveis, com ênfase na formulação por elementos finitos. Em seguida, aborda-se a análise de vibrações estruturais e a definição das Funções de Resposta em Frequência (FRFs), fundamentais para a caracterização experimental do sistema. Também são explorados os conceitos relacionados ao ajuste de modelos e às técnicas de otimização heurística empregadas, com foco na Otimização por Enxame de Partículas (PSO).

O Capítulo 3 (Metodologia) descreve a modelagem numérica do sistema rotativo estudado, detalha a formulação da função objetivo e apresenta os procedimentos de

aquisição dos dados experimentais. Também são discutidos os parâmetros utilizados na implementação do algoritmo PSO-H, bem como os critérios de convergência adotados.

O Capítulo 4 (Resultados e Discussão) apresenta uma análise quantitativa e qualitativa dos resultados obtidos nas simulações de ajuste. São analisadas a consistência estatística entre múltiplas execuções do algoritmo, a convergência dos parâmetros otimizados, os erros relativos entre modelo e experimento e os índices de correlação cruzada de amplitude modal (CMAC). Uma análise específica é dedicada à melhor execução, permitindo uma avaliação mais profunda da qualidade do ajuste.

Por fim, o Capítulo 5 (Conclusão) sintetiza os principais achados do estudo, discute as limitações identificadas e propõe direções para trabalhos futuros que possam ampliar ou aprofundar as contribuições desta pesquisa.

2. Fundamentação Teórica

A dinâmica de rotores é o campo da engenharia mecânica dedicado à análise do comportamento vibratório e da estabilidade de sistemas girantes, como eixos, discos e mancais, sob ação de forças inerciais, giroscópicas e estruturais. A utilização de máquinas rotativas mais leves e capazes de operar em altas velocidades impulsionou o desenvolvimento de modelos matemáticos progressivamente mais precisos, que capturam os efeitos associados à rotação, à flexibilidade estrutural e às condições de suporte (Gonçalves, 2024).

O modelo clássico de rotor flexível parte das equações do movimento derivadas pelas equações de Lagrange, considerando o acoplamento entre os graus de liberdade axiais, laterais e rotacionais. Os efeitos giroscópicos, associados ao momento angular do rotor, introduzem termos acoplados e não simétricos na matriz de amortecimento, resultando em comportamentos dinâmicos não convencionais, como o desdobramento de frequências naturais e a possibilidade de instabilidades do tipo whirl (LALANNE; FERRARIS, 1998).

Historicamente, o desenvolvimento de técnicas como o Método das Matrizes de Transferência permitiu a modelagem inicial de rotores contínuos com condições de contorno definidas (LALLEMENT; LECOANET; STEFFEN JR., 1982). Posteriormente, a introdução dos efeitos giroscópicos, da inércia rotacional e das forças axiais no contexto do Método dos Elementos Finitos (MEF), conforme proposto por Nelson e McVaugh (1976), ampliou significativamente a capacidade de representação de sistemas reais. Essa formulação foi sistematizada em diversas obras de referência, como as de Imbert (1995) e Ishida e Yamamoto (2013), consolidando o MEF como ferramenta padrão para modelagem de rotores flexíveis.

Neste trabalho, considera-se uma formulação em elementos finitos associada à abordagem proposta por Lalanne e Ferraris (1990), combinando o Método de Rayleigh–Ritz e as equações de Lagrange. Tal abordagem permite a obtenção das equações diferenciais que regem o comportamento dinâmico do rotor, com incorporação explícita de efeitos giroscópicos e de amortecimento estrutural. As matrizes de massa, rigidez, amortecimento e giroscópica são obtidas a partir da discretização de elementos de viga com deformações por flexão e torção.

Diferentemente de sistemas suportados por mancais hidrodinâmicos, cuja dinâmica é fortemente influenciada pelo filme de óleo, neste estudo são adotados mancais de rolamento, os quais fornecem rigidez e amortecimento predominantemente constantes ao longo da faixa de operação. Isso simplifica a modelagem dos apoios, que podem ser representados por condições de contorno elásticas com parâmetros bem definidos, mantendo, contudo, a complexidade associada à interação entre o rotor e outras excitações, como o desbalanceamento e a resposta forçada.

2.1. Modelagem por Elementos Finitos

A modelagem matemática de rotores flexíveis requer uma formulação capaz de capturar os múltiplos efeitos físicos envolvidos no comportamento dinâmico de sistemas rotativos, como a flexibilidade do eixo, a interação com os mancais e os efeitos giroscópicos introduzidos pelos discos. Para esse fim, a abordagem por princípios energéticos oferece uma estrutura que permite derivar as equações do movimento a partir

da aplicação das equações de Lagrange. Conforme apresentado por Lalanne e Ferraris (1998), o lagrangeano ($\mathcal{L}$) é definido como a diferença entre a energia cinética total do sistema (T) e a energia potencial elástica armazenada (U), conforme a Eq. (2.1):

$$\mathcal{L} = T - U$$

$$\frac{\partial}{\partial U} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Q_i \quad (2-1)$$

Essa formulação é adequada para representar os principais componentes do sistema rotativo: o eixo, os discos e os mancais. O eixo é apoiado por mancais de rolamento (no caso desse trabalho), os quais restringem os deslocamentos transversais e permitem rotação com atrito reduzido. Já os discos, modelados como massas concentradas dotadas de inércia rotacional, introduzem efeitos giroscópicos significativos devido à alta velocidade de rotação.

Embora o motor de acionamento também faça parte do sistema físico, opta-se neste trabalho por um modelo simplificado, que foca nos elementos estruturais essenciais para a análise dinâmica. Essa simplificação visa manter a fidelidade da resposta modal nos modos mais relevantes, sem comprometer a representatividade física do modelo global.

A discretização do sistema é realizada com o uso do Método dos Elementos Finitos (MEF), permitindo modelar o eixo como uma estrutura contínua subdividida em elementos de viga com quatro graus de liberdade por nó, sendo eles duas translações (u, w) e duas rotações (θ_x, θ_z). As matrizes elementares de massa (M_e), rigidez (K_e) e giroscópica (C_e) são formuladas para cada elemento de viga, sendo posteriormente reunidas nas matrizes globais do sistema (M_G, K_G, C_G) por meio da conectividade nodal. A matriz de amortecimento (C_G), não incluída na formulação elementar original, pode ser incorporada a posteriori por meio de modelos de amortecimento proporcional (do tipo Rayleigh) ou modal, como o adotado neste trabalho.

A modelagem considera explicitamente a formulação giroscópica de Nelson e McVaugh (1976), consolidada posteriormente por autores como Ishida e Yamamoto (2013), e amplamente utilizada em estudos recentes na área. As equações do movimento obtidas representam um sistema diferencial matricial dependente da velocidade de rotação, o que permite capturar os efeitos dinâmicos associados à instabilidade tipo *whirl* e ao desdobramento das frequências naturais com a rotação.

Após a formulação das matrizes globais, o sistema pode ser analisado tanto no domínio do tempo quanto da frequência. Neste estudo, opta-se pela análise modal no domínio da frequência, resolvendo-se o problema de autovalores associado à equação do movimento. Isso permite determinar as frequências naturais e os modos de vibração do rotor, que são os principais alvos do ajuste com base nos dados experimentais.

A modelagem adotada neste trabalho segue a estrutura proposta por Cavallini Jr. (2013), originada diretamente das formulações de Lalanne e Ferraris (1998), e é construída de modo a garantir consistência com os eixos de referência utilizados na modelagem experimental. O eixo principal do rotor é alinhado com o eixo y , enquanto as direções x e z são ortogonais, o que permite a separação dos modos de vibração horizontal e vertical, que

é um aspecto importante para a identificação modal baseada em Funções de Resposta em Frequência (FRFs).

2.1.1. Equação do movimento

A dinâmica de sistemas de máquinas rotativas, quando modelada através do Método dos Elementos Finitos (MEF), é descrita por um conjunto de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem. Estas equações englobam as interações entre os diversos componentes do rotor, como eixos, discos e mancais, e consideram os fenômenos físicos intrínsecos à rotação. Conforme a abordagem consolidada na literatura e utilizada como base neste trabalho (LALANNE; FERRARIS, 1998; CAVALINI JR., 2013), a equação geral do movimento para um rotor flexível pode ser expressa na seguinte forma matricial:

$$M\ddot{q} + (C + \Omega C_g)\dot{q} + [K + \dot{\Omega}(K_{Dt} + K_{St})]q = W + F_u + F_m + F_e \quad (2-2)$$

Onde:

- M é a matriz global de massa
- C é a matriz global de amortecimento
- Ω é a velocidade angular de rotação do rotor
- C_g é a matriz de efeitos giroscópicos
- K é a matriz global de rigidez elástica, existente mesmo na ausência da rotação
- K_{Dt} é a matriz de rigidez transiente dos discos devida à aceleração de rotação
- K_{St} é a matriz de rigidez transiente do eixo devida à aceleração de rotação
- q é o vetor de deslocamentos e rotações nodais generalizados
- $\dot{q}$ é o vetor de velocidades nodais generalizadas
- $\ddot{q}$ é o vetor de acelerações nodais generalizadas
- W é o vetor de forças gravitacionais (peso próprio)
- F_u é o vetor de forças de excitação devido ao desbalanceamento de massa
- F_m é o vetor de forças de reação dos mancais
- F_e é o vetor de outras forças externas aplicadas

Nesta equação, M representa a matriz global de massa, que é simétrica e agrega as propriedades inerciais de translação e rotação de todos os elementos discretizados do rotor. A matriz global de amortecimento C engloba os mecanismos de dissipação de energia. No contexto deste trabalho, o amortecimento é primordialmente tratado como amortecimento modal, onde se assume que a influência dissipativa pode ser caracterizada individualmente para os modos de vibração relevantes do sistema.

O termo ΩC_g introduz os efeitos giroscópicos, onde C_g é uma matriz antissimétrica dependente da velocidade angular de rotação Ω , responsável por acoplar os graus de liberdade de flexão do rotor. A matriz global de rigidez K , também simétrica, quantifica as forças elásticas. Adicionalmente, a matriz K_{St} considera o enrijecimento (ou, em certos casos, “amolecimento”) do sistema devido aos efeitos da força centrífuga e outras variações de rigidez induzidas pela aceleração angulares, sendo crucial em regimes transientes ou em altas velocidades de rotação.

Os vetores q , $\dot{q}$ e $\ddot{q}$ representam, respectivamente, os deslocamentos, velocidades e acelerações generalizadas dos nós da malha de elementos finitos. No lado direito da equação, W é o vetor das forças gravitacionais (força peso) atuantes sobre as massas girantes. F_u denota as forças de excitação síncronas causadas por desbalanceamento. F_m compreende as forças de reação exercidas pelos mancais, cuja natureza pode variar de linear a não linear conforme o tipo de mancal empregado. Por fim, F_e agrupa todas as demais forças externas que possam atuar sobre o sistema.

A construção das matrizes globais que compõem a Equação (2.2) é realizada pela associação das matrizes elementares correspondentes a cada um dos subsistemas do rotor, como segmentos de eixo e discos. Os fundamentos para a composição dessas matrizes elementares, com foco nas contribuições de energia cinética e potencial de cada componente, serão pormenorizados nas subseções seguintes.

É importante destacar a representação das forças de mancal (F_m) na Equação (2.2). Embora apareçam no lado direito da equação como uma força externa genérica, para sistemas com mancais de comportamento linear, como os mancais de rolamento adotados neste trabalho, suas contribuições são tipicamente modeladas como proporcionais ao deslocamento e à velocidade. Dessa forma, os termos de rigidez dos mancais são transpostos para o lado esquerdo da equação e incorporados diretamente às matrizes globais de rigidez (K) do sistema. Portanto, a atualização dos coeficientes de rigidez dos mancais, que é um dos objetivos deste trabalho, consiste no ajuste direto da matriz de rigidez global do sistema.

2.1.2. Disco

Na modelagem dinâmica de máquinas rotativas, o disco é tratado como um elemento rígido, cuja contribuição ao sistema é determinada unicamente pela energia cinética, uma vez que sua deformação é desprezível em comparação com a flexibilidade do eixo (LALANNE; FERRARIS, 1990). A Figura 2-1 ilustra a configuração espacial do disco, destacando a diferença entre seu sistema de coordenadas local $R(x, y, z)$ e o referencial inercial global $R_o(X, Y, Z)$.

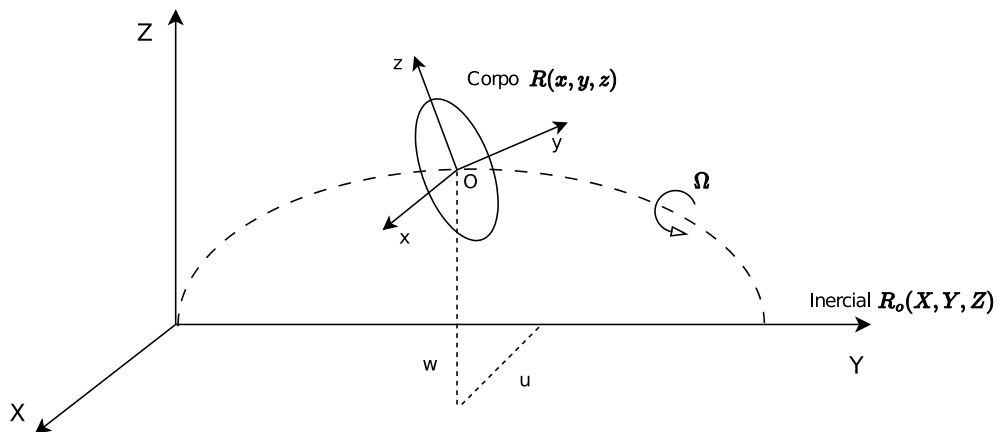


Figura 2-1: Representação espacial do disco em relação ao referencial inercial.

Fonte: Adaptado de (LALANNE; FERRARIS, 1990).

Para descrever o movimento do disco, é necessário relacionar suas grandezas cinemáticas ao referencial inercial. Isso é feito por meio de uma transformação de coordenadas baseada em três rotações sucessivas, definidas pelos ângulos ψ , θ e ϕ . Essa abordagem permite expressar a velocidade angular instantânea do disco ω_{R/R_o} , no referencial inercial como:

$$\omega_{R/R_o} = \begin{pmatrix} -\dot{\psi} \cos \theta \sin \phi + \dot{\theta} \cos \phi \\ \dot{\phi} + \dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\psi} \cos \theta \cos \phi + \dot{\theta} \sin \phi \end{pmatrix} \quad (2-3)$$

Onde:

- ψ , θ e ϕ são os ângulos de rotação que descrevem a orientação do disco em relação ao referencial inercial
- ω_{R/R_o} é o vetor de velocidade angular expresso no sistema inercial

A energia cinética do disco T_D é composta por três contribuições principais: (i) energia translacional associada ao movimento do centro de massa, (ii) energia rotacional devido à inércia do disco, e (iii) acoplamento giroscópico induzido pela rotação da máquina. Para compor a contribuição da energia rotacional, considera-se a matriz de inércia do disco I_{D_o} , que é diagonal devido à simetria axial, e pode ser definida como:

$$I_{D_o} = \begin{bmatrix} I_{D_x} & 0 & 0 \\ 0 & I_{D_y} & 0 \\ 0 & 0 & I_{D_z} \end{bmatrix} \quad (2-4)$$

Onde:

- I_{D_x} , I_{D_z} , I_{D_y} são respectivamente os momentos de inércia em relação aos eixos x , y e o momento polar de inércia.

Com base nessa e nas outras contribuições, chega-se à expressão da energia cinética, dada por:

$$T_D = \frac{1}{2} M_D (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} I_{D_x} (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2) + \frac{1}{2} I_{D_y} (\Omega^2 + 2\Omega\dot{\psi}\theta) \quad (2-5)$$

Onde:

- u , w , $\dot{u}$, $\dot{w}$, $\ddot{u}$, $\ddot{w}$ são respectivamente os deslocamentos, velocidade e acelerações do centro de massa do disco nas direções horizontal (x) e vertical (z)
- M_D é a matriz de massa do disco
- Ω é a velocidade angular constante do eixo
- O termo $2\Omega\dot{\psi}\theta$ representa o acoplamento giroscópico, característico de sistemas rotativos (CAVALLINI JR., 2013)

No contexto do Método dos Elementos Finitos (MEF), o disco é representado por um nó com quatro graus de liberdade, descritos pelo vetor de coordenadas generalizadas:

$$q_D = \{u \quad w \quad \theta \quad \varphi\}^T \quad (2-6)$$

Aplicando as equações de Lagrange à energia cinética T_D , obtém-se a equação do movimento para o disco, que incorpora as matrizes de massa M_D , amortecimento giroscópico C_D e enrijecimento rotacional K_{Dt} :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T_D}{\partial \dot{q}_D} \right) - \frac{\partial T_D}{\partial q_D} = M_D \ddot{q}_D + \Omega C_D \dot{q}_D + \dot{\Omega} K_{Dt} q_D \quad (2-7)$$

Onde:

- M_D é a matriz de massa, que relaciona a inércia translacional e rotacional do disco
- C_D é a matriz giroscópica, responsável pelos efeitos de Coriolis
- K_{Dt} é a matriz de rigidez transiente dos discos devida à aceleração de rotação, que afeta a rigidez aparente do sistema

Essas matrizes nodais são dadas por Lalanne; Ferraris, (1990) e Cavallini Jr, (2013) como sendo:

$$M_D = \begin{bmatrix} m_D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{D_x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{D_x} \end{bmatrix} \quad (2-8)$$

$$C_D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_{D_y} \\ 0 & 0 & I_{D_y} & 0 \end{bmatrix} \quad (2-9)$$

$$K_{Dt} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{D_y} & 0 \end{bmatrix} \quad (2-10)$$

2.1.3. Eixo

O eixo rotativo constitui o elemento estrutural central das máquinas rotativas, sendo responsável pela transmissão do movimento e por apresentar comportamento dinâmico complexo devido aos efeitos combinados de flexão, torção e carregamentos axiais. Diferentemente dos discos, que são modelados como corpos rígidos, o eixo requer uma formulação que considere explicitamente sua deformabilidade, incorporando tanto contribuições de energia cinética quanto potencial elástica ao sistema (LALANNE; FERRARIS, 1998).

Características como o comprimento, a densidade do material, a área da seção transversal e o momento de inércia da seção transversal são elementos que compõem a energia cinética do eixo T_S , cuja expressão é dada pela eq. (2.11) apresentada a seguir.

$$T_S = \frac{\rho S}{2} \int_0^L (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dy + \frac{\rho I}{2} \int_0^L (\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2) dy + \rho I L \Omega^2 + 2\rho I \Omega \int_0^L \dot{\psi} \dot{\theta} dy \quad (2-11)$$

Onde:

- ρ é a densidade do material do eixo [kg/m^3]
- S é a área da seção transversal [m^2]
- I é o momento de inércia da seção transversal [m^4]
- L é o comprimento total do eixo [m]
- Ω é a velocidade angular de rotação [rad/s]

A energia cinética total do eixo deriva de três componentes físicas distintas. O termo $\left(\frac{\rho S}{2}\right) \int (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dy$ representa a energia translacional associada ao movimento do centro de massa ao longo das direções horizontal (u) e vertical (w). Já o termo $\left(\frac{\rho I}{2}\right) \int (\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2) dy$ corresponde à energia rotacional decorrente da inércia à flexão, enquanto o termo acoplado $\rho I \Omega \int \dot{\psi} \dot{\theta} dy$ surge dos efeitos giroscópicos característicos de corpos em rotação.

Para o cálculo da energia potencial elástica, como apresentado na Figura 2-2, considera-se o plano de coordenadas (xz) da seção transversal do eixo, com o centro geométrico do eixo no ponto C , como sendo deslocado do referencial inercial (XZ). Além disso, toma-se o ponto B como um ponto qualquer da seção transversal do eixo.

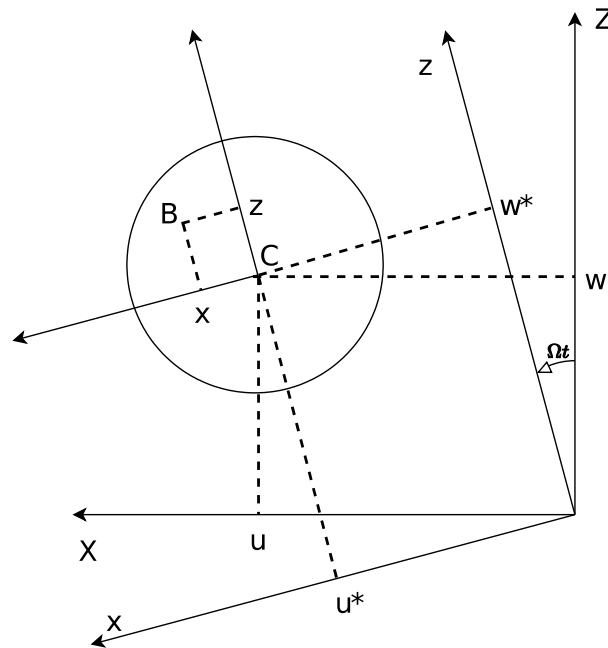


Figura 2-2: Sistema de coordenadas do eixo em uma condição qualquer. Fonte: Adaptado de (LALANNE; FERRARIS, 1990).

Nesse contexto, consideram-se duas contribuições principais. A primeira decorre das deformações por flexão, onde os termos $-x\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$ e $-z\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$ representam as curvaturas nas direções principais, enquanto os termos quadráticos $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$ e $\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2$ capturam os efeitos não-lineares de alongamento do eixo. A segunda contribuição advém do trabalho realizado por eventuais forças axiais (F_0) atuantes no sistema. A deformação total em um ponto genérico da seção transversal é expressa por:

$$\varepsilon = -x \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} - z \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^*}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w^*}{\partial y} \right)^2 \quad (2-12)$$

A energia potencial total resulta da integração dessas contribuições ao longo do comprimento do eixo, considerando as propriedades do material e as condições de contorno:

$$U_s = \frac{EI}{2} \int_0^L \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy + \frac{F_0}{2} \int_0^L \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dy \quad (2-13)$$

Onde:

- E é o módulo de elasticidade do material $[N/m^2]$
- F_0 é a força axial aplicada $[N]$
- u, w são os deslocamentos no sistema de coordenadas do eixo

Na discretização pelo MEF, o eixo é modelado como uma sequência de elementos de viga de Timoshenko, cada um com dois nós e oito graus de liberdade no total. As funções de forma empregam polinômios cúbicos para aproximar os deslocamentos transversais e lineares para as rotações, garantindo continuidade entre elementos. As matrizes elementares resultantes incluem termos de massa consistente (M_s), inércia rotacional (M_r), amortecimento giroscópico (C_s) e rigidez elástica (K_s), que são posteriormente montadas no sistema global seguindo procedimentos padrão de análise matricial (CAVALLINI JR., 2013).

2.1.4. Mancal

Os mancais desempenham papel fundamental na dinâmica de máquinas rotativas, fornecendo suporte mecânico ao eixo enquanto introduzem características de rigidez e amortecimento que influenciam diretamente o comportamento vibratório do sistema. No presente trabalho, adota-se a modelagem clássica, cuja ilustração pode ser observada na Figura 2-3, de mancais isotrópicos com coeficientes constantes, válida para mancais de rolamentos em condições operacionais estáveis (FRISWELL et al., 2010).

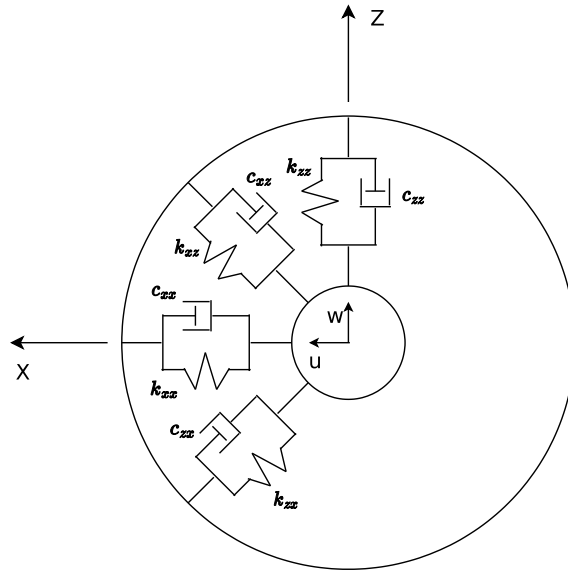


Figura 2-3: Disposição dos coeficientes de rigidez e de amortecimento no mancal.

Fonte: Adaptado de (LALANNE; FERRARIS, 1990).

O trabalho virtual das forças nos mancais é obtido considerando as componentes de rigidez e amortecimento nas direções principais e acopladas, conforme a equação 2-14.

$$\delta W = -k_{xx}u\delta u - k_{xz}w\delta u - k_{zz}w\delta w - k_{zx}u\delta w - c_{xx}\dot{u}\delta u - c_{xz}\dot{w}\delta u - c_{zz}\dot{w}\delta w - c_{zx}\dot{u}\delta w \quad (2-14)$$

Os termos $(k_{ij} \cdot u\delta u)$ e $(k_{ij} \cdot w\delta w)$ representam as forças elásticas nas direções horizontal e vertical, respectivamente, enquanto os termos com coeficientes c_{ij} capturam os efeitos dissipativos associados às velocidades relativas. Em sua forma matricial, as forças nos mancais são expressas por:

$$\begin{Bmatrix} F_u \\ F_w \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xz} \\ k_{zx} & k_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} c_{xx} & c_{xz} \\ c_{zx} & c_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \end{Bmatrix} \quad (2-15)$$

Onde:

- k_{ij} são os coeficientes de rigidez diretos ($i = j$) e cruzados ($i \neq j$) [N/m]
- c_{ij} são os coeficientes de amortecimento diretos ($i = j$) e cruzados ($i \neq j$) [$N.s/m$]
- F_u é a força elástica na direção horizontal (y) [N]
- F_w é a força elástica na direção vertical (x) [N]

Para incorporação no modelo global do rotor, expande-se a formulação para incluir todos os graus de liberdade do nó, resultando nas matrizes completas de rigidez (K_b) e amortecimento (C_b), como na equação 2-16.

$$F_m = \begin{Bmatrix} F_u \\ F_\theta \\ F_w \\ F_\psi \end{Bmatrix} = - \underbrace{\begin{bmatrix} k_{xx} & 0 & k_{xz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{zx} & 0 & k_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{K_b} \begin{Bmatrix} u \\ \theta \\ w \\ \psi \end{Bmatrix} - \underbrace{\begin{bmatrix} c_{xx} & 0 & c_{xz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{zx} & 0 & c_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{C_b} \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\theta} \\ \dot{w} \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix} \quad (2-16)$$

Na montagem do modelo global, estas matrizes nodais são então somadas às matrizes globais de rigidez e amortecimento nos respectivos nós relativos à localização dos mancais, integrando suas contribuições ao lado esquerdo da equação geral do movimento.

2.1.5. Massa de desbalanceamento

O desbalanceamento em máquinas rotativas representa uma das principais fontes de excitação vibratória, surgindo da distribuição não uniforme de massa em relação ao eixo de rotação. Este fenômeno dinâmico é particularmente relevante em sistemas operando em altas velocidades, onde pequenas excentricidades podem gerar forças significativas capazes de comprometer o desempenho e a integridade estrutural do equipamento (CAVALLINI JR., 2013). Como ilustrado na Figura 2-4, na modelagem proposta, o desbalanceamento é representado por uma massa pontual m_u localizada a uma distância d do centro geométrico do eixo, introduzindo forças periódicas que variam com a posição angular instantânea.

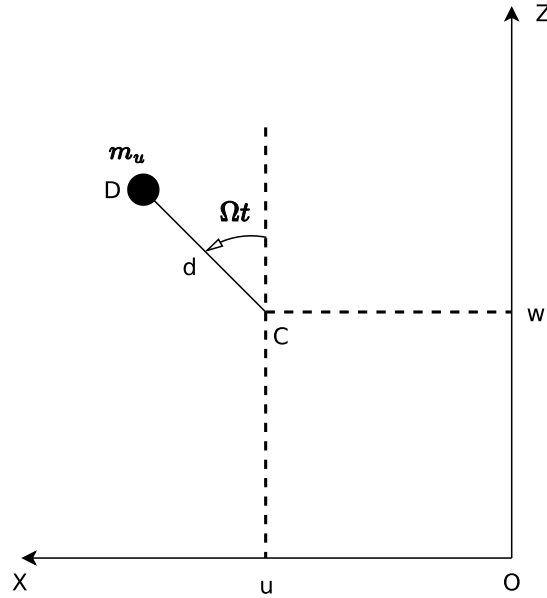


Figura 2-4: Localização da massa de desbalanceamento. Fonte: Adaptado de (LALANNE; FERRARIS, 1990).

A descrição cinemática do sistema considera o movimento combinado da massa desbalanceada com a deformação do eixo. A posição instantânea da massa no referencial inercial incorpora tanto os deslocamentos do eixo (u , w) quanto a componente rotativa da excentricidade, resultando em:

$$\overrightarrow{OD} = \begin{vmatrix} u + d \sin \Omega t \\ v \text{ (constante)} \\ w + d \cos \Omega t \end{vmatrix} \quad (2-17)$$

Onde:

- u, w são os deslocamentos do eixo nas direções horizontal e vertical $[m]$
- d é a magnitude da excentricidade $[m]$
- Ω é a velocidade angular de rotação $[rad/s]$
- t representa variável de tempo $[s]$

A análise da dinâmica do sistema requer o cálculo da velocidade da massa desbalanceada, obtida pela derivação temporal da posição. Esta expressão revela a composição entre a velocidade de deformação do eixo e a contribuição da rotação:

$$\vec{V} = \frac{\partial \overrightarrow{OD}}{\partial t} = \begin{vmatrix} \dot{u} + d\Omega \cos \Omega t \\ 0 \\ \dot{w} - d\Omega \sin \Omega t \end{vmatrix} \quad (2-18)$$

A energia cinética associada ao desbalanceamento deriva do produto da massa pela velocidade ao quadrado, contendo termos que representam distintas interações físicas, como explicitado na equação 2-19.

$$T_u = \frac{m_u}{2} (\dot{u}^2 + \dot{w}^2 + \Omega^2 d^2 + 2\Omega d \dot{u} \cos \Omega t - 2\Omega d \dot{w} \sin \Omega t) \quad (2-19)$$

O termo $\frac{m_u}{2} (\dot{u}^2 + \dot{w}^2)$ corresponde à energia associada ao movimento do eixo, enquanto $\frac{m_u}{2} \Omega^2 d^2$ representa a energia centrífuga da massa excêntrica. Os termos cruzados $m_u \cdot \Omega \cdot d \cdot (\dot{u} \cdot \cos(\Omega t) - \dot{w} \cdot \sin(\Omega t))$ capturam o acoplamento entre o movimento vibratório e a rotação, sendo responsáveis pelas forças excitadoras características do desbalanceamento.

Para a maioria das aplicações práticas, onde a massa desbalanceada é significativamente menor que a massa total do rotor ($m_u \ll M$), a expressão pode ser simplificada mantendo apenas os termos dependentes da velocidade angular. Esta aproximação conduz às conhecidas forças harmônicas de desbalanceamento, cuja magnitude varia quadraticamente com a velocidade de rotação e cuja direção muda continuamente com a posição angular Ωt , como na equação 2-20.

$$F_{unb} = \begin{Bmatrix} F_u \\ F_w \end{Bmatrix} = m_u d \Omega^2 \begin{Bmatrix} \sin(\Omega t + \lambda) \\ \cos(\Omega t + \lambda) \end{Bmatrix} = m_u d \Omega^2 \left[\sin(\Omega t) \begin{Bmatrix} \cos(\lambda) \\ -\sin(\lambda) \end{Bmatrix} + \cos(\Omega t) \begin{Bmatrix} \sin(\lambda) \\ \cos(\lambda) \end{Bmatrix} \right] \quad (2-20)$$

Onde:

- λ é o ângulo de fase inicial que define a orientação do desbalanceamento $[rad]$
- $m_u \cdot d$ é o momento de desbalanceamento $[kg \cdot m]$

A inclusão deste modelo no sistema global permite analisar a resposta forçada do rotor, particularmente nas proximidades das velocidades críticas, onde os efeitos de ressonância podem amplificar significativamente as vibrações. O ângulo de fase λ , embora não apareça explicitamente nas equações de energia, é essencial para descrever configurações assimétricas de desbalanceamento ao longo do eixo, sendo particularmente relevante em estudos de balanceamento dinâmico e diagnóstico de condições operacionais anômalas (LALANNE; FERRARIS, 1998). A representação adequada dessas forças é fundamental para o desenvolvimento de estratégias de controle vibratório e para a previsão precisa do comportamento dinâmico em regime permanente.

2.2. Análise de Vibração e FRFs

A Função Resposta em Frequência (FRF) é uma representação matemática que descreve a relação entre uma excitação aplicada em um ponto de um sistema mecânico e a resposta vibratória medida em outro ponto, no domínio da frequência. Formalmente, a FRF $H(\omega)$ é definida como a razão entre a transformada de Fourier da resposta $X(\omega)$ (deslocamento, velocidade ou aceleração) e a transformada de Fourier da força de excitação $F(\omega)$, como apresentado na equação a seguir.

$$H(\omega) = \frac{X(\omega)}{F(\omega)} \quad (2-21)$$

Onde:

- ω representa a frequência em Hz.
- $H(\omega)$ representa a função de resposta em frequência (FRF)
- $X(\omega)$ representa a resposta do sistema (deslocamento, velocidade ou aceleração)
- $F(\omega)$ representa a força de excitação [N]

Essa função, composta por magnitude e fase, encapsula informações essenciais sobre o comportamento dinâmico do sistema, como rigidez, amortecimento e inércia, sendo fundamental para a identificação de parâmetros modais (MAIA; SILVA, 1997).

A FRF permite determinar como a energia vibracional se distribui nas diferentes frequências do sistema, sendo particularmente útil para identificar ressonâncias e características modais. Cada componente da FRF - magnitude e fase - fornece informações distintas sobre o comportamento dinâmico: enquanto a magnitude indica a intensidade da vibração em cada frequência, a fase revela o atraso temporal entre excitação e resposta (MAIA; SILVA, 1997).

Na prática, a obtenção de FRFs precisas em rotores com mancais de rolamento requer cuidados experimentais específicos. O processo começa com a aplicação de forças conhecidas, utilizando tipicamente um martelo de impacto com célula de carga embutida para excitações impulsivas, ou um excitador eletrodinâmico para excitações harmônicas controladas. A resposta vibratória é medida simultaneamente usando transdutores adequados ao tipo de grandeza desejada (deslocamento, velocidade ou aceleração), com posicionamento estratégico para capturar os modos de interesse (LALANNE; FERRARIS, 1998). A sincronização precisa entre os sinais de excitação e resposta é crítica para garantir que as relações de fase sejam preservadas (FRISWELL et al., 2010).

O tratamento dos dados experimentais envolve várias etapas de processamento para garantir resultados confiáveis. A média de múltiplas medições reduz a influência de ruídos aleatórios, enquanto técnicas de janelamento temporal minimizam distorções na transformada de Fourier. A qualidade da medição é avaliada através da função de coerência, como explicitada na equação 2-22.

$$\gamma^2(\omega) = \frac{|G_{xf}(\omega)|^2}{G_{xx}(\omega) \cdot G_{ff}(\omega)} \quad (2-22)$$

Onde:

- $G_{xf}(\omega)$ representa a densidade espectral cruzada entre excitação e resposta
- $G_{xx}(\omega)$ e $G_{ff}(\omega)$ são as densidades espectrais da resposta e excitação, respectivamente

Esta função adimensional, que varia entre 0 e 1, indica o quanto da resposta medida pode ser atribuída, de forma linear, à excitação aplicada. Valores próximos de 1 em determinadas frequências sugerem medições confiáveis, enquanto valores baixos podem indicar problemas como ruído excessivo, não-linearidades ou vazamento espectral (EWINS, 2000).

A interpretação física das FRFs revela características importantes do sistema mecânico. Os picos de magnitude correspondem às frequências naturais, onde pequenas excitações produzem grandes respostas devido aos fenômenos de ressonância. Cada pico está associado a um modo de vibração específico, caracterizado por três parâmetros principais: frequência natural (ω_n), que indica em que frequência o modo ocorre; fator de amortecimento (ξ_n), que quantifica a dissipação de energia; e forma modal ($\{\phi_n\}$), que descreve o padrão espacial de vibração. A representação matemática da FRF como soma de contribuições modais é dada por:

$$H(\omega) = \sum_{n=1}^N \frac{\{\phi_n\}\{\phi_n\}^T}{\omega_n^2 - \omega^2 + 2j \cdot (\xi_n \cdot \omega_n \cdot \omega)} \quad (2-23)$$

Onde:

- j é a unidade imaginária ($\sqrt{-1}$)
- N é o número de modos considerados na faixa de frequência de interesse (MAIA; SILVA, 1997)

Esta decomposição modal é especialmente útil para sistemas com modos próximos em frequência, situação comum em rotores devido a simetrias ou efeitos giroscópicos. Técnicas avançadas de identificação modal, como o método Polyreference Least Squares Complex Frequency (p-LSCF), permitem separar estes modos próximos com boa precisão (CAVALINI JR, 2013).

Para ajuste de modelos numéricos, as FRFs experimentais servem como referência crucial. As diferenças entre as respostas medidas e as previstas pelos modelos,

especialmente nas frequências naturais e formas modais, indicam onde o modelo pode estar impreciso. Algoritmos de otimização multivariada são então empregados para ajustar sistematicamente os parâmetros do modelo, como rigidezes de mancais e condições de contorno, até que as previsões coincidam satisfatoriamente com os dados experimentais (FRISWELL, 1995).

2.3. Ajuste de Modelo

O ajuste de modelo (*model updating*, em inglês) consiste em um procedimento sistemático para reduzir discrepâncias entre modelos numéricos e o comportamento real de sistemas dinâmicos. Em máquinas rotativas, onde fenômenos complexos como interações rotor-mancais e efeitos giroscópicos estão presentes, os modelos teóricos frequentemente apresentam discrepâncias em relação aos dados experimentais. Essas diferenças surgem devido às incertezas na modelagem de parâmetros como rigidez e amortecimento de mancais, propriedades de materiais e condições de contorno. O ajuste desses parâmetros permite que o modelo numérico reproduza adequadamente o comportamento dinâmico observado experimentalmente, tornando-se uma ferramenta importante para análise e predição (CAVALINI JR. et al., 2015).

A formulação matemática do problema de ajuste, que pode ser expressa como um problema de minimização não linear, emprega tipicamente uma função objetivo baseada no erro normalizado entre as funções resposta em frequência (FRFs) experimental e numérica.

$$\min_{\theta} \sum_{i=1}^N \frac{\|H_{exp}(\omega_i) - H_{num}(\omega_i, \theta)\|}{\|H_{exp}(\omega_i)\|} \quad (2-24)$$

Onde:

- $H_{exp}(\omega_i)$ é o valor experimental da FRF na frequência ω_i
- $H_{num}(\omega_i, \theta)$ é o valor numérico da FRF na frequência ω_i para o vetor de parâmetros θ
- N é o número de pontos de frequência considerados
- θ representa o vetor de parâmetros a serem ajustados

A normalização pelo valor experimental em cada ponto de frequência é adotada para tornar a métrica adimensional e menos sensível a variações absolutas de magnitude ao longo do espectro de frequências, fornecendo características desejáveis como a invariância de escala frente a variações absolutas de amplitude, uma maior sensibilidade a discrepâncias relativas em regiões de baixa energia vibratória, e uma estabilidade numérica em operações de otimização iterativa.

A estrutura matemática da função objetivo definida por essa métrica dá origem a uma superfície de erro com características complexas, cuja topologia depende tanto da natureza física do sistema quanto das propriedades numéricas do modelo. Em sistemas rotativos, essa superfície frequentemente apresenta multimodalidade, com múltiplos mínimos locais que decorrem da possibilidade de diferentes combinações paramétricas resultarem em respostas similares dentro de determinadas faixas de frequência (FRISWELL et al., 2010; CAVALINI JR., 2013). Essa propriedade é particularmente acentuada em

sistemas com modos vibratórios acoplados, em que rigidez, amortecimento e efeitos giroscópicos interagem de forma não trivial.

Outro traço marcante dessa superfície é a não-suavidade, manifestada por descontinuidades ou gradientes abruptos. Essa condição pode ser atribuída a não linearidades estruturais, como folgas ou histerese nos mancais, à ativação de fenômenos físicos sensíveis a limiares e às próprias limitações da discretização numérica, que introduz descontinuidades artificiais no comportamento do modelo (FRISWELL, 1995; CABRAL, 2023). Esses fatores tornam a superfície de erro desafiadora para técnicas de otimização baseadas em gradiente, exigindo algoritmos globalmente exploratórios.

Além disso, observa-se uma sensibilidade paramétrica diferenciada, na qual a influência de determinados parâmetros sobre a função objetivo varia significativamente ao longo do espaço de busca. Pequenas alterações em alguns parâmetros podem gerar grandes variações no erro, enquanto outros têm impacto quase nulo. Essa heterogeneidade aumenta a complexidade do processo de ajuste, pois implica que o desempenho do algoritmo de otimização depende fortemente da escolha da representação paramétrica e da estratégia de exploração adotada (CARVALHO, 2017; GONÇALVES, 2024). A compreensão da morfologia dessa superfície é, portanto, essencial para o sucesso do ajuste e para a confiabilidade das análises subsequentes baseadas no modelo ajustado.

A complexidade da superfície de erro discutida anteriormente impõe desafios significativos à aplicação de métodos clássicos de otimização baseados em gradientes, especialmente devido à presença de múltiplos mínimos locais e à descontinuidade em certas regiões do espaço de busca. Nesse contexto, destacam-se os métodos meta-heurísticos, como a Otimização por Enxame de Partículas (PSO) e a Evolução Diferencial (DE), que dispensam o uso explícito de derivadas e apresentam capacidade intrínseca de exploração global do espaço de busca. Tais métodos vêm sendo amplamente empregados no ajuste de modelos em sistemas dinâmicos complexos por sua robustez e flexibilidade (FRISWELL et al., 2010; GONÇALVES, 2024).

Contudo, a eficácia do ajuste não pode ser aferida apenas pela minimização do erro entre as funções resposta em frequência (FRFs) numérica e experimental. É necessário verificar se o modelo ajustado preserva características estruturais essenciais do sistema real, como as frequências naturais, os fatores de amortecimento e as formas modais. Essa validação multifacetada assegura que o modelo calibrado mantenha sua capacidade preditiva sob diferentes condições operacionais, evitando que o processo de ajuste se restrinja a uma simples coincidência localizada dos espectros (MAIA; SILVA, 1997; EWINS, 2000).

2.4. Otimização Heurística em Engenharia

O ajuste de modelos numéricos a partir de dados experimentais constitui um problema de otimização complexo, marcado por superfícies de erro altamente não lineares, multidimensionais e, frequentemente, não deriváveis. Nesse contexto, métodos tradicionais baseados em gradientes podem apresentar desempenho limitado, especialmente em cenários com presença de ruído, múltiplos mínimos locais ou restrições físicas. Como alternativa, algoritmos de otimização heurística e meta-heurística vêm

sendo amplamente utilizados, destacando-se por sua robustez, flexibilidade e independência de derivadas.

Heurísticas, em um sentido amplo, referem-se a estratégias baseadas na experiência ou na observação de fenômenos naturais que guiam a busca por soluções satisfatórias em espaços complexos. Quando sistematizadas em algoritmos computacionais com mecanismos de exploração e exploração (busca refinada) do espaço de busca, essas estratégias são denominadas meta-heurísticas. Tais algoritmos não garantem a obtenção da solução ótima global, mas frequentemente produzem soluções de alta qualidade com custo computacional viável. Dentre os métodos mais consolidados na literatura, destacam-se a Evolução Diferencial (DE) e a Otimização por Enxame de Partículas Híbrida (PSO-H), ambos com aplicabilidade comprovada na identificação de parâmetros em modelos de Elementos Finitos de sistemas mecânicos.

2.4.1. Otimização por Enxame de Partículas Híbrido (PSO-H)

A Otimização por Enxame de Partículas foi introduzida por Kennedy e Eberhart (1995), inspirada no comportamento social de aves e cardumes. Trata-se de uma meta-heurística estocástica e populacional, na qual cada partícula representa uma possível solução e ajusta seu movimento no espaço de busca com base em sua própria experiência e na dos demais membros do enxame. As partículas percorrem o espaço de busca ajustando suas posições com base em duas informações principais:

- A melhor posição já visitada por elas mesmas (experiência individual/cognitiva);
- A melhor posição já encontrada pela vizinhança da partícula (experiência coletiva/social).

Cada partícula possui uma posição $x_j(t)$ e uma velocidade $v_j(t)$ no instante t . A atualização da posição da partícula ocorre de forma direta, somando-se a nova velocidade à posição anterior:

$$x_j(t + 1) = x_j(t) + v_j(t + 1) \quad (2-25)$$

Onde:

- $x_j(t + 1)$ é a nova posição da partícula j no espaço de busca
- $x_j(t)$ é a atual posição da partícula j no espaço de busca
- $v_j(t + 1)$ é a nova velocidade, cujo cálculo será detalhado a seguir

A nova velocidade é calculada considerando três componentes: a inércia do movimento anterior, a atração cognitiva (para a melhor posição pessoal p_j) e a atração social (para a melhor posição local l), como mostra a equação 2.61:

$$v_j(t + 1) = w \cdot v_j(t) + c_1 \cdot r_1 \cdot (p_j - x_j(t)) + c_2 \cdot r_2 \cdot (l - x_j(t)) \quad (2-26)$$

Onde:

- $v_j(t + 1)$ é a nova velocidade da partícula j
- $v_j(t)$ é a velocidade atual da partícula j
- $x_j(t)$ é a posição atual da partícula j
- p_j é a melhor posição já encontrada pela própria partícula j (memória individual)
- l é a melhor posição local da vizinhança da partícula (memória coletiva)
- w é o fator de inércia, que regula a influência da velocidade anterior
- c_1 e c_2 são respectivamente os coeficientes de aceleração cognitiva e social
- $r_1, r_2 \in [0,1]$ são números aleatórios gerados a partir de uma distribuição uniforme

O fator de inércia w desempenha papel fundamental no controle do equilíbrio entre exploração (busca em regiões ainda não exploradas) e exploração (refinamento em torno das melhores soluções). O uso da melhor posição local, em contrapartida ao uso mais comum da posição global, se deve pelo intuito de ampliar a busca pelo espaço amostral, e desta forma, evitar a convergência prematura em um mínimo local. Para essa avaliação, utiliza-se a estrutura de anel, ou seja, verifica-se as partículas com índice anterior e posterior à partícula em questão.

O PSO distingue-se por sua simplicidade algorítmica, ausência de operadores complexos como mutação ou cruzamento e boa capacidade de convergência mesmo em espaços de busca de alta dimensionalidade. Em problemas de ajuste de modelos estruturais, apresenta notável robustez frente a ruídos experimentais e facilidade na imposição de restrições físicas, por meio de limites superiores e inferiores nos parâmetros (KENNEDY; EBERHART, 1995; ENDO; DELLAZZANA, 2015). Porém, ainda podem apresentar convergência prematura e dessa forma resultar em soluções subótimas. Por esse motivo, a utilização da hibridização com operadores genéticos, como a mutação, pode auxiliar a criar maior diversidade no espaço de busca em situações em que ela apresente algum tipo de estagnação.

No contexto deste trabalho, a mutação é aplicada pela geração aleatória de novos valores para todos os parâmetros que compõem uma partícula, utilizando limites ampliados em uma determinada taxa escolhida. O número de partículas a serem submetidas ao processo de mutação é também aleatório.

O procedimento de otimização por PSO-H é regido pelas etapas descritas a seguir, com uma visualização resumida apresentada subsequentemente no fluxograma.

- a) Geração aleatória da população inicial com possíveis soluções para o problema de ajuste, estando os valores respectivos contidos dentro do intervalo de busca;
- b) Cálculo inicial da aptidão (fitness) e armazenamento dos melhores valores de parâmetros em variável de melhor global e lista de melhores pessoais;
- c) Atualização da posição: calcula-se a nova velocidade para cada partícula, que é somada na posição atual para se obter a nova posição da partícula;
- d) Cálculo de aptidão: avaliação geral do fitness e armazenamento dos melhores valores de parâmetros (global e pessoal);

- e) Aplicação da mutação: caso a busca se torne estagnada, avaliada continuamente pela manutenção ou alteração do valor do melhor global, aplica-se a mutação para um número aleatório de partículas;

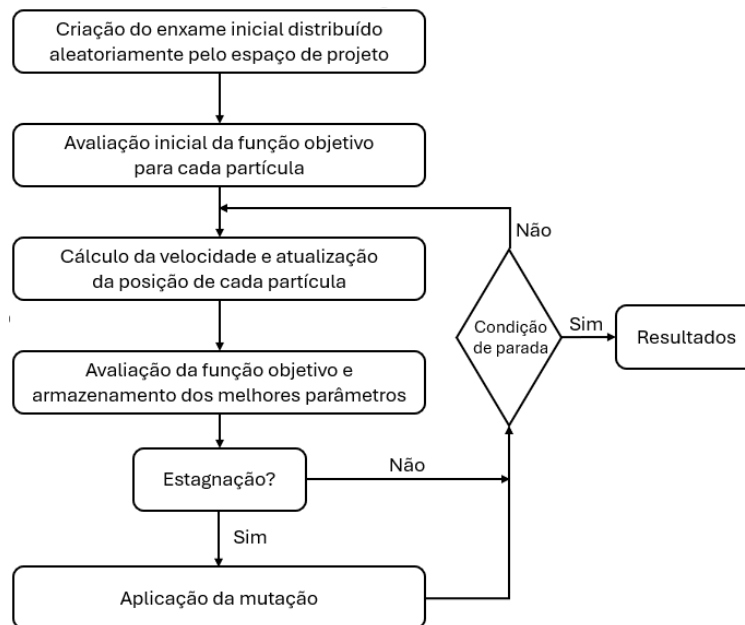


Figura 2-5: Fluxograma do algoritmo de Enxame de Partículas Híbrido.

2.4.2. Comparação entre DE e PSO-H

A Evolução Diferencial (DE) e a Otimização por Enxame de Partículas Híbrida (PSO-H) apresentam características complementares no contexto do ajuste de modelos numéricos baseados em dados experimentais. Ambas são meta-heurísticas populacionais, robustas a ruídos, independentes de derivadas e adequadas para problemas de alta dimensionalidade e com restrições físicas. No entanto, diferem quanto às estratégias de exploração e exploração do espaço de busca.

A DE possui um mecanismo exploratório eficiente, ancorado em operadores de mutação que utilizam diferenças vetoriais entre indivíduos da população. Esse procedimento favorece a amostragem de regiões amplas do espaço de soluções, permitindo escapar de mínimos locais e identificar regiões globalmente promissoras, mesmo em funções altamente não lineares ou não suaves (STORN; PRICE, 1997; CAVALINI JR. et al., 2015). Contudo, a ausência de um componente de memória que armazene os melhores vetores históricos pode reduzir sua eficácia em estágios finais da busca, especialmente no refinamento de soluções.

Por sua vez, o PSO-H incorpora a memória histórica das partículas, tanto individual quanto coletiva, o que impulsiona a exploração localizada em regiões de bom desempenho. Essa característica contribui para uma taxa de convergência mais acelerada em relação a regiões já identificadas como promissoras (KENNEDY; EBERHART, 1995; ENDO; DELLAZZANA, 2015). Entretanto, tal comportamento pode levar o algoritmo à convergência prematura, especialmente em superfícies com múltiplos mínimos locais de profundidade semelhante. A introdução de operadores de mutação inspirados em

algoritmos genéticos, como adotado na versão híbrida utilizada neste trabalho, visa atenuar essa limitação ao reintroduzir diversidade populacional quando o algoritmo apresenta sinais de estagnação (ZHENG; ZHANG; LI, 2020).

A decisão sobre qual algoritmo utilizar depende, portanto, das características específicas do problema de otimização. Em situações nas quais a superfície de erro é altamente irregular, com múltiplos picos e ruído significativo, a DE tende a apresentar melhor desempenho global. Em contrapartida, quando se busca rapidez na convergência e há indícios de que regiões promissoras podem ser refinadas com precisão, o PSO-H pode oferecer vantagens operacionais.

3. Metodologia

A presente seção descreve os procedimentos adotados para o desenvolvimento do modelo numérico, a obtenção dos dados experimentais e a formulação do problema de otimização para ajuste dos parâmetros do sistema. Inicialmente, é apresentada a bancada de testes utilizada, incluindo sua modelagem por meio do Método dos Elementos Finitos (MEF). Em seguida, detalha-se o processo de aquisição dos dados experimentais, os quais servem de base para o ajuste do modelo. Na sequência, discute-se a formulação do problema de otimização e os parâmetros envolvidos na etapa de ajuste. Por fim, são descritas as estratégias de otimização empregadas na implementação da Otimização por Enxame de Partículas Híbrida (PSO-H), bem como os critérios adotados para a análise da convergência e validação interna dos resultados obtidos.

3.1. Descrição da Bancada de Testes

A bancada de testes adotada neste estudo é baseada no modelo experimental desenvolvido por Cavallini Jr. (2015). Trata-se de um sistema rotativo didático, projetado para possibilitar a análise de fenômenos típicos em máquinas rotativas, como desbalanceamento, efeitos giroscópicos, e a influência da rigidez e do amortecimento dos mancais no comportamento dinâmico. Como pode ser observado na Figura 3-1, a estrutura principal da bancada é composta por um eixo de aço apoiado em dois mancais de rolamento rígido de esferas, com dois discos metálicos simétricos montados em posições equidistantes ao centro do eixo. As extremidades do eixo são apoiadas sobre mancais fixos com carcaça metálica, dotados de rolamentos com lubrificação permanente. O conjunto é acoplado a um motor elétrico via acoplamento flexível, responsável por fornecer a rotação controlada ao sistema.

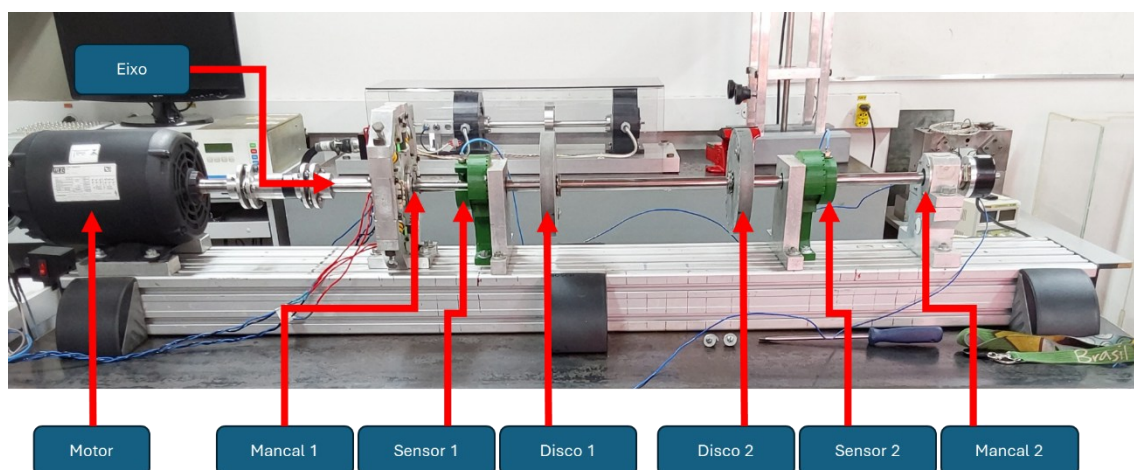


Figura 3-1: Bancada de testes utilizada.

As características dimensionais e de materiais dos componentes são apresentadas na Tabela 3-1 a seguir.

Tabela 3-1: Propriedades físicas dos componentes do rotor estudado.

Propriedades	Eixo	Disco 1	Disco 2
Comprimento [m]	1,00	-	-
Diâmetro externo [m]	17×10^{-3}	150×10^{-3}	150×10^{-3}
Espessura [m]	-	20×10^{-3}	20×10^{-3}
Massa [kg]	-	2,587	2,601
Material	Aço 1045	Aço 1020	Aço 1020
Módulo de Elasticidade [GPa]	211,2959	-	-
Coeficiente de Poisson	0,297109	-	-
Massa Específica [kg/m^3]	7800	7800	7800

Para fins de simulação numérica, a bancada foi representada utilizando o Método dos Elementos Finitos (MEF). O eixo foi discretizado por meio de elementos de viga de Timoshenko, que permitem considerar os efeitos de cisalhamento e inércia rotacional, adequados para representar sistemas com frequências intermediárias e elevadas. Cada disco foi modelado como um elemento concentrado de massa e inércia (disco rígido), conectado ao eixo por meio de nós coincidentes. O modelo resultante, que pode ser visualizado na Figura 3-2, e cujas posições de componentes são apresentadas na Tabela 3-2, é composto por 39 nós e 38 elementos de viga, permitindo a captura adequada dos modos de vibração até a segunda frequência natural.

Tabela 3-2: Distância dos componentes em relação à origem (nó zero).

Componente do rotor	Distância à origem [m]	Posição nodal
Mancal 1	0,124	5
Sensor 1	0,219	8
Disco 1	0,345	14
Disco 2	0,628	25
Sensor 2	0,760	30
Mancal 2	0,921	35

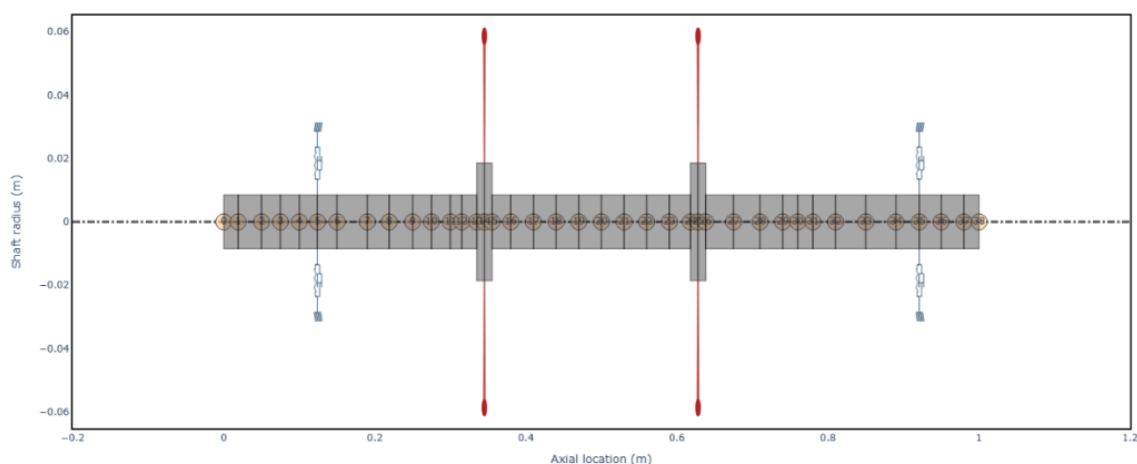


Figura 3-2: Discretização de nós e elementos do rotor.

As condições de contorno adotadas no modelo numérico consideram os mancais como apoios elásticos com comportamento linear, incluindo rigidez nas direções horizontal e vertical, além de acoplamentos com rigidez rotacional em ambas as direções. Esses coeficientes de rigidez não foram definidos a priori, pois constituem variáveis a serem identificadas por meio de técnicas de otimização heurística. Da mesma forma, os coeficientes de amortecimento não foram atribuídos diretamente aos mancais, pois optou-se pela adoção de amortecimento modal, cujos coeficientes associados aos modos principais também são tratados como parâmetros de otimização.

Tanto os parâmetros de rigidez quanto os de amortecimento são ajustados com base na comparação entre os resultados numéricos do modelo de elementos finitos e os dados experimentais obtidos para as frequências naturais do sistema. A estimativa desses parâmetros é realizada por meio do algoritmo de Otimização por Enxame de Partículas (PSO), cujos detalhes, incluindo os limites de busca adotados para cada variável, são apresentados nas seções subsequentes deste trabalho.

3.2. Aquisição de Dados Experimentais

A obtenção dos dados experimentais foi realizada por meio de ensaios estáticos na bancada descrita anteriormente, com o objetivo de caracterizar as propriedades modais do sistema. A excitação foi aplicada utilizando um martelo instrumentado, permitindo a introdução de forças de impacto controladas em pontos determinados do eixo, mais especificamente em ambos os discos. Tais pontos de excitação foram selecionados de maneira a garantir a adequada excitação dos modos de vibração de interesse, conforme metodologia adotada por Cavallini Junior (2013).

As respostas do sistema foram medidas por meio de acelerômetros piezelétricos fixados em posições estratégicas ao longo do eixo, visando capturar as respostas vibratórias nas direções horizontais e verticais. Os sinais adquiridos foram processados utilizando um analisador de espectro de duas entradas, permitindo a obtenção das

Funções de Resposta em Frequência (FRFs) entre os pontos de excitação e medição. O tratamento dos sinais envolveu a aplicação de técnicas de filtragem para remoção de ruídos e a utilização de janelas temporais adequadas para minimizar os efeitos de vazamento espectral.

3.3. Formulação do Problema de Otimização

O ajuste do modelo numérico a partir de dados experimentais é formulado como um problema inverso, isto é, um problema no qual, em vez de determinar a resposta de um sistema a partir de parâmetros conhecidos (como em um problema direto), busca-se identificar os próprios parâmetros do modelo a partir de observações da resposta medida. Nesse contexto, o objetivo é encontrar os valores que melhor reproduzam, via simulação numérica, as respostas estáticas obtidas experimentalmente, reduzindo a discrepância entre o modelo e o comportamento real do sistema. Essa abordagem é amplamente adotada em engenharia estrutural e mecânica, especialmente quando alguns parâmetros, como propriedades de mancais ou perdas por amortecimento, não podem ser determinados com precisão por métodos diretos.

O vetor de parâmetros a ser ajustado, que está detalhado na Tabela 3-3 juntamente com os limites de busca, inclui as rigidezes de translação dos mancais, a rigidez de rotação dos apoios, bem como os amortecimentos modais associados aos dois primeiros modos de vibração. Valores fixos para massa e rigidez do eixo além das massas dos discos foram previamente definidos a partir do modelo em elementos finitos. Os intervalos de busca para cada parâmetro foram estabelecidos a partir de uma busca iterativa manual para encontrar valores de referência mais próximos, com a posterior utilização do algoritmo de otimização para refinamento, ainda de acordo com estimativas físicas realistas e estudos preliminares de sensibilidade. Esses limites visam garantir a viabilidade física das soluções e evitar regiões do espaço de busca onde o modelo apresenta instabilidades numéricas ou perda de coerência física.

Tabela 3-3: Parâmetros para otimização com respectivos limites de busca.

Parâmetro para otimização	Unidade	Direção	Limites de busca	
			Inferior	Superior
k_{xx} : Rigidez - Mancal 1	$[N/m]$	Horizontal	$4,50 \times 10^5$	$5,50 \times 10^5$
k_{xx} : Rigidez - Mancal 2	$[N/m]$	Horizontal	$7,40 \times 10^5$	$9,00 \times 10^5$
k_{zz} : Rigidez - Mancal 1	$[N/m]$	Vertical	$5,95 \times 10^6$	$7,30 \times 10^6$
k_{zz} : Rigidez - Mancal 2	$[N/m]$	Vertical	$5,60 \times 10^5$	$6,90 \times 10^5$
ξ_{xx} : Fator amortecimento 1º Modo	$[N.s/m]$	Horizontal	$1,10 \times 10^{-3}$	$1,30 \times 10^{-3}$
ξ_{zz} : Fator amortecimento 1º Modo	$[N.s/m]$	Vertical	$9,00 \times 10^{-5}$	$1,10 \times 10^{-4}$
ξ_{xx} : Fator amortecimento 2º Modo	$[N.s/m]$	Horizontal	$4,95 \times 10^{-3}$	$6,05 \times 10^{-3}$
ξ_{zz} : Fator amortecimento 2º Modo	$[N.s/m]$	Vertical	$1,35 \times 10^3$	$1,65 \times 10^{-3}$
$Krot_z$: Rigidez rotacional acopl.	$[N.m/rad]$	Vertical	$5,50 \times 10^2$	$6,70 \times 10^2$
$Krot_x$: Rigidez rotacional acopl.	$[N.m/rad]$	Horizontal	$6,75 \times 10^2$	$8,25 \times 10^2$

A função objetivo adotada, conforme previamente definida na seção 2.3, baseia-se no erro absoluto normalizado entre as respostas experimentais e numéricas, calculado na região das frequências naturais experimentais, com uma faixa de aproximadamente ± 3 Hz. Essa métrica permite quantificar a qualidade da correspondência entre os dados e é sensível à precisão com que o modelo representa o comportamento observado. Além disso, essa formulação viabiliza a aplicação direta dos métodos baseados em população, os quais exploram o espaço paramétrico com flexibilidade e robustez.

3.4. Algoritmos de Ajuste de Modelo

Nesta etapa do estudo, o método heurístico da Otimização por Enxame de Partículas Híbrida (PSO-H) é empregado para o ajuste dos parâmetros do modelo numérico. Esse tipo de abordagem é indicado para problemas não lineares e multivariados, como é o caso do ajuste de modelos em engenharia estrutural. A escolha desse algoritmo justifica-se por sua robustez, simplicidade de implementação e histórico de aplicações bem-sucedidas em problemas de otimização.

3.4.1. Implementação da Otimização por Enxame de Partículas Híbrida (PSO-H)

Neste estudo, a Otimização por Enxame de Partículas (PSO) foi implementada com uma estratégia híbrida para aprimorar a capacidade de exploração do algoritmo e evitar estagnações em mínimos locais. A formulação do PSO-H, incluindo as equações de atualização de velocidade (equação 2-26) e posição das partículas (equação 2-25), encontra-se apresentada na seção 2.4.1 e, por esse motivo, não será reproduzida nesta seção. Tal versão, empregada neste trabalho, incorpora uma estratégia condicional de mutação para melhorar a exploração do espaço de busca, que é especialmente útil para mitigar a estagnação do algoritmo em mínimos locais, mantendo a simplicidade e eficiência do PSO original.

Foram adotados os seguintes valores para os hiper-parâmetros do algoritmo: coeficientes de aceleração cognitiva e social definidos respectivamente como $c_1 = 1,5$ e $c_2 = 2,5$, cuja recomendação da literatura (ENGELBRECHT, 2007) é que somados resultem no valor 4, com a intenção particular de privilegiar o conhecimento social, por ter gerado melhores resultados em testes prévios. O fator de inércia utilizado foi $w = 0,1$, por também ter gerado melhores resultados em testes prévios à otimização final. O enxame foi composto por 20 partículas, inicializadas aleatoriamente utilizando distribuição uniforme, e o número máximo de iterações foi fixado em 20. A cada iteração, as partículas atualizam suas velocidades e posições com base em suas melhores posições individuais e na melhor posição global do enxame, conforme o desempenho avaliado pela função objetivo descrita na seção 2.3.

A estratégia de hibridização foi aplicada sempre que a melhor posição global permanecesse inalterada por três iterações consecutivas. Nesse caso, seleciona-se aleatoriamente entre 10% e 100% do número de partículas para sofrer mutação. Os limites de busca de cada parâmetro dessas partículas são ampliados em 10% acima e abaixo, e novos valores são gerados aleatoriamente dentro desses intervalos expandidos, permitindo que o algoritmo explore novas regiões do espaço de busca e potencialmente

escape de mínimos locais. Os valores de melhores posições individuais (p_j) e local (l) são então atualizados com base na nova avaliação da função objetivo.

A Tabela 3-4 apresenta os parâmetros utilizados na implementação do PSO-H.

Tabela 3-4: Hiper-parâmetros do algoritmo de PSO-H.

Hiper-parâmetro	Valor
Número de partículas	20
Inicialização do enxame	Aleatória (distribuição uniforme)
Coeficiente cognitivo (c_1)	1,5
Coeficiente social (c_2)	2,5
Fator de inércia (w)	0,1
Número máximo de iterações	20
Critério de mutação adaptativa	g inalterado por 3 iterações
Número de partículas a mutar	Aleatório entre 10% e 100%
Expansão dos limites de busca	10% acima e abaixo

3.4.2. Critérios de Parada e Validação

A análise da eficácia do algoritmo de otimização utilizados neste trabalho considerou dois aspectos centrais: o critério de parada e a validação dos resultados obtidos. Essa abordagem visa garantir não apenas a obtenção de soluções numéricas com erro reduzido, mas também a consistência e confiabilidade das soluções ajustadas com base nos dados experimentais disponíveis.

O critério de parada do algoritmo foi estabelecido por meio da definição de um número máximo de iterações, limitado a 20. Essa escolha foi baseada em uma tentativa de verificar a capacidade de convergência mais veloz do PSO, em contrapartida ao método da Evolução Diferencial utilizado no trabalho de CAVALINI JR (2015), que demonstrou, em contexto semelhante de atualização de modelos de elementos finitos, que o número de 100 iterações proporciona um bom compromisso entre custo computacional e precisão dos resultados.

No que se refere à validação interna do modelo ajustado, foram empregados quatro critérios complementares, com base em práticas consolidadas na literatura. Embora nenhum dos trabalhos previamente utilizados neste estudo aborde diretamente o conjunto completo dessas métricas, a aplicação do erro relativo nas frequências naturais e de índices de correlação é amplamente reconhecida em testes modais, conforme discutido em EWINS (2000) e MAIA e SILVA (1997). As demais métricas seguem a lógica da avaliação de desempenho de métodos estocásticos, como discutido em DAS e SUGANTHAN (2011) e CAVALINI JR. (2015), especialmente no contexto de otimização global.

A seguir, são apresentadas e discutidas as métricas utilizadas:

a) Erro relativo nas frequências naturais e amplitudes

Com a finalidade de quantificar a precisão dos modelos ajustados, as frequências naturais e amplitudes calculadas numericamente foram comparadas às frequências e

amplitudes experimentais obtidas para os dois modos de vibração em análise. A métrica adotada foi o erro relativo percentual, definido como:

$$Erro_{freq}(i) = \frac{|m_i^{num} - m_i^{exp}|}{m_i^{exp}} \cdot 100\% \quad (3-1)$$

Onde:

- m_i^{num} é a medida numérica (amplitude ou frequência natural) para o modo i .
- m_i^{exp} é a medida experimental (amplitude ou frequência natural) para o modo i .

Essa métrica permite avaliar se o modelo numérico atualizado está reproduzindo de forma satisfatória o comportamento vibratório observado experimentalmente.

b) Critério de Correlação Cruzada de Amplitude Modal (CMAC)

Para avaliar a capacidade do modelo ajustado em prever a relação de magnitude entre os diferentes modos de vibração em cada ponto de medição, foi calculado um Critério de Correlação Cruzada de Amplitude Modal (CMAC). Esta métrica quantifica a similaridade entre o vetor de resposta numérica e o vetor de resposta experimental para cada FRF individualmente. Para cada uma das oito FRFs analisadas, foi construído um vetor de resposta contendo as amplitudes de pico dos dois primeiros modos de vibração. Em seguida, foi calculado o índice de correlação entre o vetor de resposta experimental e o vetor correspondente do modelo numérico, resultando em oito valores de CMAC, um para cada FRF. A equação utilizada para o cálculo é:

$$CMAC(A_{num}, A_{exp}) = \frac{|A_{exp}^T \cdot A_{num}|^2}{(A_{exp}^T \cdot A_{exp})(A_{num}^T \cdot A_{num})} \quad (3-2)$$

Onde:

- A_{num} representa o vetor de 2 elementos com as amplitudes de pico numéricas para os modos 1 e 2 de uma FRF específica.
- A_{exp} representa o vetor de 2 elementos com as amplitudes de pico experimentais para os modos 1 e 2 da mesma FRF
- A^T indica a transposição do vetor

O numerador avalia o produto escalar entre os dois vetores, enquanto o denominador normaliza esse valor pelas normas de cada vetor. O valor de CMAC varia entre 0 e 1. Valores próximos de 1 indicam alta similaridade na proporção entre as amplitudes dos modos, sugerindo que a contribuição relativa de cada modo para a resposta total naquele ponto é bem prevista pelo modelo. Valores baixos, por outro lado, sugerem uma discrepância na previsão da resposta modal combinada.

c) Estabilidade dos parâmetros ajustados

Além da precisão dos resultados obtidos em uma única execução, também é fundamental avaliar a consistência das soluções fornecidas pelos algoritmos ao longo de múltiplas execuções independentes. Isso é especialmente relevante no caso de métodos

estocásticos como o Particle Swarm Optimization (PSO), cujos mecanismos de busca dependem de processos aleatórios, tanto na geração da população inicial quanto nas operações de atualização.

Para essa análise, cada algoritmo foi executado 10 vezes, variando-se a semente do gerador de números pseudoaleatórios, sendo elas números inteiros sequenciais a partir de 0 até 9. A semente é um valor inteiro que inicializa o gerador de números aleatórios, controlando a sequência numérica gerada. Ao alterar a semente, produz-se uma nova trajetória de busca no espaço de soluções. Isso permite simular diferentes cenários de inicialização e verificar se o algoritmo mantém seu desempenho sob diversas condições.

Após essas execuções, foi realizada uma análise estatística descritiva das seguintes variáveis: os parâmetros ajustados do modelo e o valor da função objetivo correspondente, os erros relativos nas frequências naturais e os valores do índice CMAC. Foram calculadas métricas como:

- **Média:** para identificar a tendência central dos resultados;
- **Desvio padrão:** expressa a dispersão dos valores e, portanto, a sensibilidade do algoritmo à escolha da semente;
- **Coeficiente de variação (CV):** obtido pela razão entre desvio padrão e média, utilizado como indicador de estabilidade relativa.

Valores baixos de desvio padrão e de coeficiente de variação indicam que o algoritmo apresenta robustez, ou seja, produz resultados semelhantes mesmo com diferentes condições iniciais. Essa análise foi fundamental para comparar não apenas a qualidade das soluções, mas também a reprodutibilidade dos métodos, um aspecto essencial em aplicações práticas de ajuste de modelos.

d) Valor final da função objetivo

Durante o processo de ajuste do modelo numérico aos dados experimentais, cada algoritmo busca minimizar uma função objetivo que representa, quantitativamente, o erro global entre o modelo atualizado e os dados reais. O valor final dessa função após o término das iterações permite avaliar o desempenho de cada técnica de otimização.

Essa métrica reflete o grau de adequação do modelo numérico às frequências e modos de vibração observados experimentalmente, integrando os diferentes critérios de erro em um único escalar. Portanto, ao comparar os valores finais da função objetivo obtidos por DE e PSO-H, é possível identificar qual método foi mais eficaz em reduzir a discrepância entre modelo e realidade em termos gerais. Esse valor foi registrado ao final de cada execução (com diferentes sementes) e incluído na análise comparativa dos algoritmos.

A aplicação conjunta dessas métricas oferece uma visão abrangente da qualidade dos resultados obtidos, permitindo avaliar tanto a precisão dos modelos ajustados quanto a eficiência e estabilidade dos algoritmos de otimização utilizados.

4. Resultados e discussão

Esta seção apresenta os resultados obtidos com o ajuste do modelo numérico da máquina rotativa por meio do algoritmo híbrido PSO-H. O procedimento de ajuste foi repetido dez vezes com diferentes sementes de inicialização, a fim de capturar a variabilidade inerente ao processo estocástico de otimização. O objetivo é tanto identificar a melhor solução individual (principal) quanto analisar o comportamento geral das soluções geradas, fornecendo uma visão ampla da estabilidade, robustez e qualidade do modelo ajustado.

A subseção 4.1 reúne os resultados estatísticos globais, permitindo observar padrões gerais de desempenho, enquanto a subseção 4.2 aprofunda a análise sobre a melhor execução individual, que será utilizada como referência para comparação direta entre modelo e experimento. São apresentados os parâmetros ajustados, gráficos de convergência, sobreposição das FRFs e as métricas de validação do modelo, como erro relativo nas frequências naturais e o coeficiente CMAC. As discussões associadas interpretam os resultados à luz do comportamento dinâmico do sistema, das características dos algoritmos e das referências disponíveis na literatura.

4.1. Panorama Geral

A análise estatística geral tem como objetivo avaliar a consistência e a dispersão dos resultados obtidos nas dez execuções independentes do PSO-H. Para isso, são apresentados gráficos de dispersão com *boxplots* marginais, tabelas de erros relativos por FRF e modo, índices CMAC e os parâmetros otimizados correspondentes a cada semente. Esses dados permitem compreender a sensibilidade da solução ao processo de otimização e a robustez do modelo resultante.

Para análises e comparações, a Tabela 4-1 apresenta os dados de frequências e amplitudes obtidas experimentalmente.

Tabela 4-1: Dados de frequência e amplitude obtidos experimentalmente.

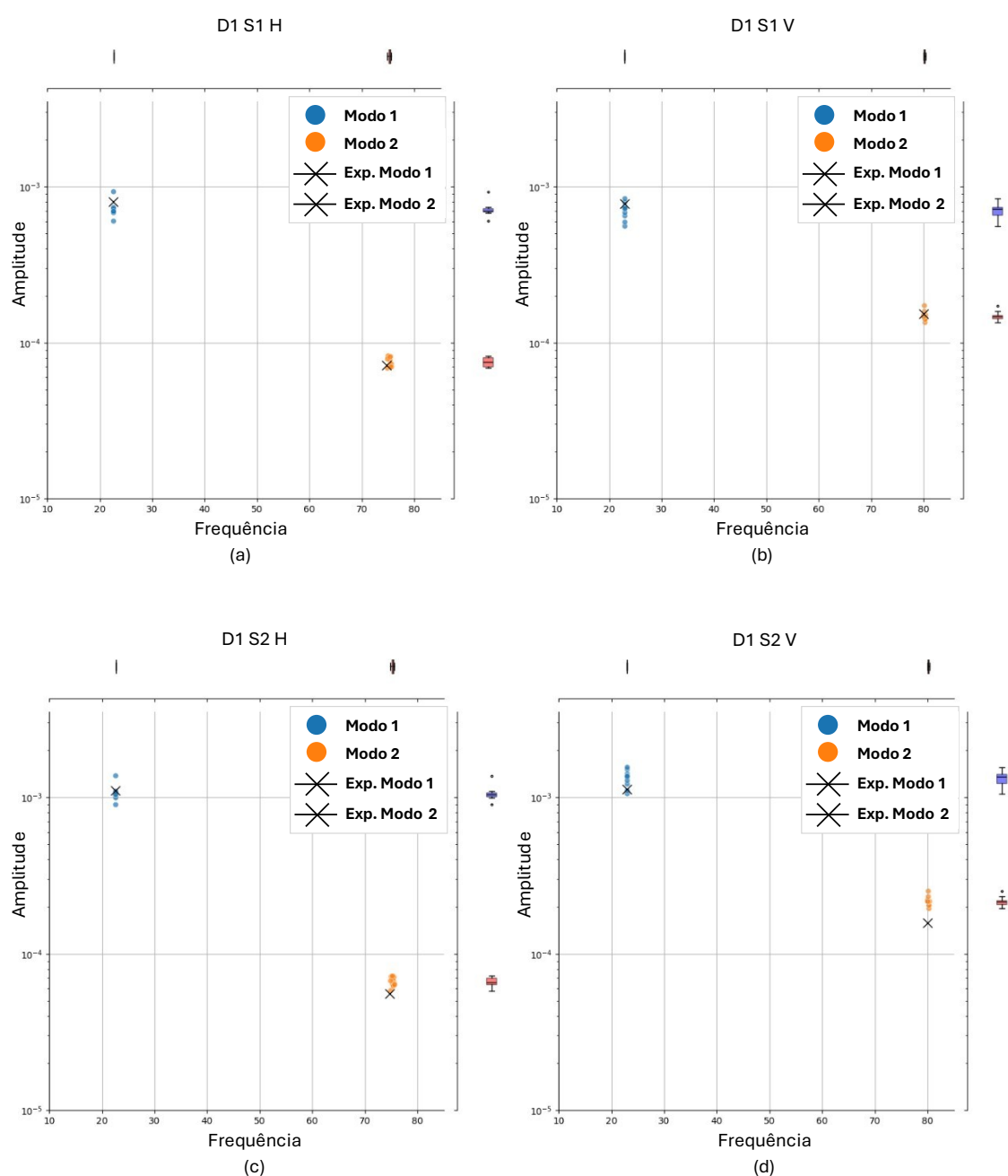
Frequências		Amplitudes	
Modo 1	Modo 2	Modo 1	Modo 2
22,50	74,75	0,00079777	0,00007139
23,00	80,00	0,00077795	0,00015333
22,50	74,75	0,00110740	0,00005571
23,00	80,00	0,00112603	0,00015773
22,50	74,75	0,00088295	0,00006298
23,00	80,00	0,00087216	0,00013105
22,50	74,75	0,00122741	0,00004903
23,00	80,00	0,00125998	0,00013493

4.1.1. Dispersão Frequência × Amplitude

A Figura 4-1 apresenta os resultados estatísticos obtidos a partir da aplicação do algoritmo PSO-H no ajuste do modelo numérico baseado em elementos finitos. As análises foram conduzidas a partir de oito Funções de Resposta em Frequência (FRFs), referentes a

diferentes combinações de excitação e medição nos discos 1 e 2, sensores 1 e 2, e direções de excitação/mensuração horizontal ou vertical. Cada gráfico representa, portanto, a distribuição dos valores de frequência e amplitude estimados para os dois primeiros modos, gerados por diferentes sementes aplicadas ao algoritmo de otimização.

Em cada uma das figuras, observam-se *scatterplots* (gráficos de dispersão) com *boxplots* (diagramas de caixa) marginais, os quais fornecem uma visão clara da variabilidade estatística nas estimativas obtidas para as frequências naturais e amplitudes associadas. A presença de agrupamentos distintos nos pontos do *scatterplot* confirma a identificação consistente dos dois primeiros modos em todas as FRFs analisadas. A adição dos *boxplots* marginais permite quantificar a dispersão em cada eixo, fornecendo subsídios importantes sobre a confiabilidade das soluções encontradas (EWINS, 2000).



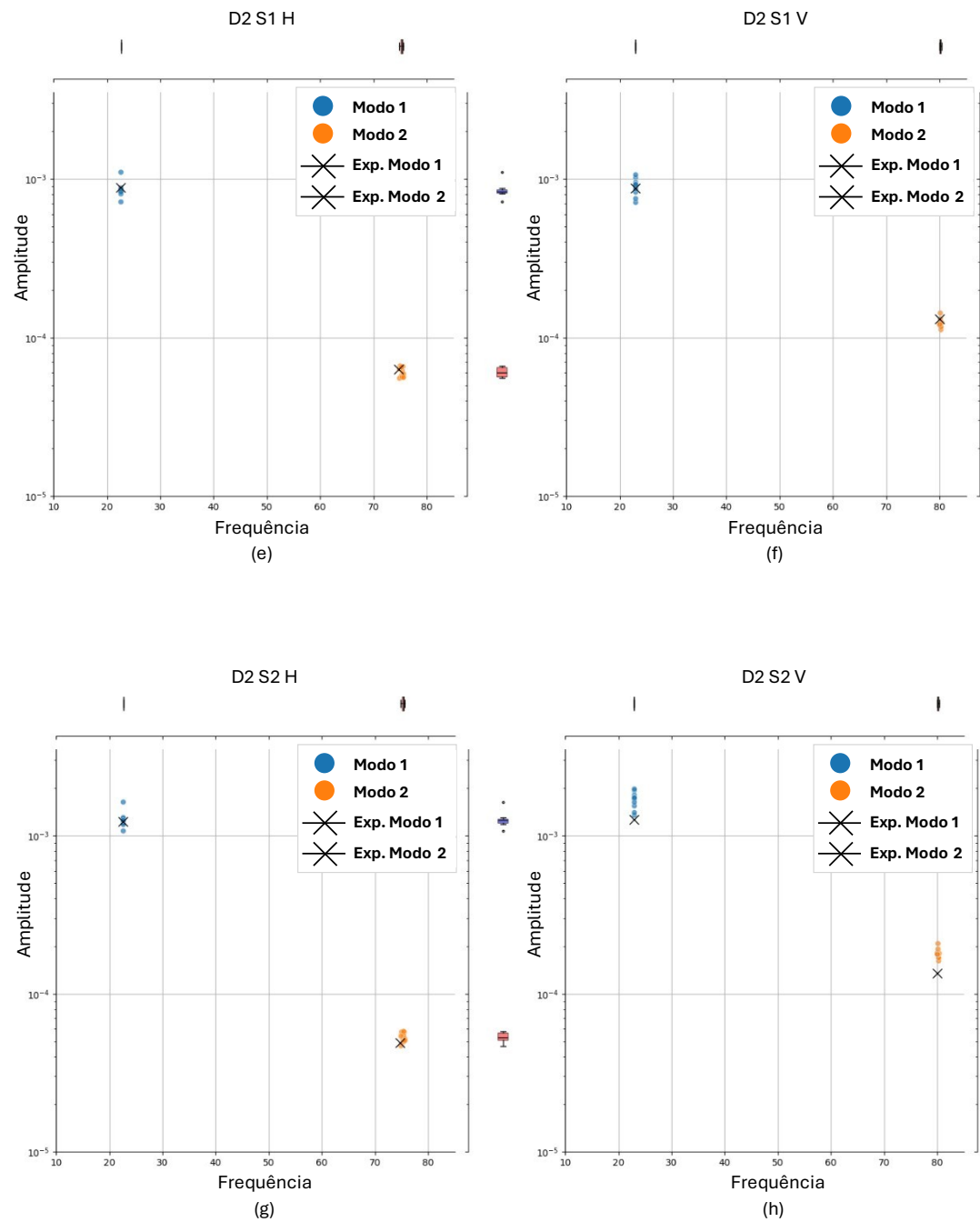


Figura 4-1: Dispersão dos resultados em amplitude e frequência para todas as sementes de acordo com cada FRF. (a) Disco 1, Sensor 1, Horizontal. (b) Disco 1, Sensor 1, Vertical. (c) Disco 1, Sensor 2, Horizontal. (d) Disco 1, Sensor 2, Vertical. (e) Disco 2, Sensor 1, Horizontal. (f) Disco 2, Sensor 1, Vertical. (g) Disco 2, Sensor 2, Horizontal. (h) Disco 2, Sensor 2, Vertical.

De maneira geral, observa-se que a faixa de variação em relação à frequência é menor quando comparada com a faixa de variação de amplitude, o que fica mais evidenciado pelos diagramas de caixa marginais. Comparando os resultados entre as direções de medição horizontal e vertical, nota-se que, as estimativas associadas às medições na direção vertical de frequência apresentaram menor dispersão, o que sugere uma maior estabilidade do modelo otimizado nessa direção, possivelmente decorrente de

maior sensibilidade da resposta estrutural vertical aos parâmetros do modelo ajustado. Em contraste, os dados obtidos nas medições horizontais demonstraram maior variabilidade, o que pode estar relacionado à menor relação sinal-ruído ou à menor influência da rigidez horizontal nos modos de vibração mais baixos do sistema (MARWALA, 2007). Outro ponto relevante é que, em todas as FRFs, as estimativas de frequência para o primeiro modo apresentam menor variabilidade que as do segundo modo. Esse comportamento é compatível com a maior dominância do primeiro modo na resposta de vibração e a menor complexidade de sua identificação, tanto do ponto de vista experimental quanto computacional (ALLEMANG; BROWN, 2006).

Como anteriormente dito, em termos de amplitude, observa-se uma maior dispersão geral, especialmente nas FRFs com medição vertical, o que reforça a dificuldade de ajuste da magnitude absoluta da resposta, possivelmente influenciada por incertezas experimentais, ruído de excitação e limitações do modelo linear adotado (BOULKAIBET et al., 2017). Nesse aspecto, as diferentes execuções do modelo apresentaram para a direção vertical maior precisão com menor exatidão, enquanto para a direção horizontal, o que se deu foi o oposto.

Esses resultados são fundamentais para avaliar a robustez do processo de ajuste por PSO-H, indicando não apenas as estimativas centrais obtidas, mas também sua variação associada à natureza estocástica do algoritmo. O uso de múltiplas sementes permite obter uma visão mais abrangente do espaço de soluções, contribuindo para a confiabilidade do modelo final ajustado, especialmente quando os dados apresentam variabilidade associada à experimentação (MARWALA, 2007).

4.1.2. Erros Relativos de Frequência e Amplitude

A avaliação do desempenho do algoritmo PSO-H no ajuste do modelo numérico foi complementada pela análise dos erros relativos entre os valores simulados e os dados experimentais, tanto para as frequências naturais quanto para as amplitudes de pico. Esses erros foram calculados individualmente para cada semente de inicialização, para cada uma das oito FRFs consideradas, e para os dois primeiros modos, permitindo uma análise estatística detalhada da acurácia e da estabilidade das soluções obtidas.

As tabelas Tabela 4-2 e Tabela 4-3 apresentam, respectivamente, os erros relativos em frequência e em amplitude, organizados por FRF e por modo. As linhas correspondem às diferentes sementes aplicadas ao algoritmo, enquanto as colunas são segmentadas por FRF e modo identificado. Ao final de cada tabela, são exibidas estatísticas descritivas agregadas, incluindo a média, o desvio padrão (DP) e o coeficiente de variação (CV) dos erros obtidos, fornecendo uma medida da consistência e da dispersão dos resultados.

Tabela 4-2: Erros relativos absolutos (frequência).

Semente	D1 S1 H		D1 S1 V		D1 S2 H		D1 S2 V		D2 S1 H		D2 S1 V		D2 S2 H		D2 S2 V	
	M1	M2	M1	M2	M1	M2	M1	M2	M1	M2	M1	M2	M1	M2	M1	M2
0	0,006	0,010	0,000	0,003	0,006	0,010	0,000	0,003	0,006	0,010	0,000	0,003	0,006	0,010	0,000	0,003
1	0,006	0,007	0,000	0,000	0,006	0,007	0,000	0,000	0,006	0,007	0,000	0,000	0,006	0,007	0,000	0,000
2	0,006	0,003	0,000	0,000	0,006	0,003	0,000	0,000	0,006	0,003	0,000	0,000	0,006	0,003	0,000	0,000
3	0,006	0,008	0,000	0,003	0,006	0,008	0,000	0,003	0,006	0,008	0,000	0,003	0,006	0,008	0,000	0,003
4	0,006	0,002	0,000	0,003	0,006	0,002	0,000	0,003	0,006	0,002	0,000	0,003	0,006	0,002	0,000	0,003
5	0,006	0,012	0,000	0,005	0,006	0,012	0,000	0,005	0,006	0,012	0,000	0,005	0,006	0,012	0,000	0,005
6	0,006	0,002	0,000	0,002	0,006	0,002	0,000	0,002	0,006	0,002	0,000	0,002	0,006	0,002	0,000	0,002
7	0,006	0,008	0,000	0,000	0,006	0,007	0,000	0,000	0,006	0,007	0,000	0,000	0,006	0,008	0,000	0,000
8	0,006	0,008	0,000	0,002	0,006	0,008	0,000	0,002	0,006	0,008	0,000	0,002	0,006	0,008	0,000	0,002
9	0,006	0,012	0,000	0,002	0,006	0,012	0,000	0,002	0,006	0,012	0,000	0,002	0,006	0,012	0,000	0,002
Média	0,006	0,007	0,000	0,002	0,006	0,007	0,000	0,002	0,006	0,007	0,000	0,002	0,006	0,007	0,000	0,002
DP	0,000	0,004	0,000	0,002	0,000	0,004	0,000	0,002	0,000	0,004	0,000	0,002	0,000	0,004	0,000	0,002
CV	0,000	0,499	-	0,816	0,000	0,508	-	0,816	0,000	0,508	-	0,816	0,000	0,499	-	0,816

Tabela 4-3: Erros relativos absolutos (amplitude).

Semente	D1 S1 H		D1 S1 V		D1 S2 H		D1 S2 V		D2 S1 H		D2 S1 V		D2 S2 H		D2 S2 V	
	M1	M2	M1	M2	M1	M2	M1	M2	M1	M2	M1	M2	M1	M2	M1	M2
0	0,108	0,140	0,072	0,121	0,053	0,272	0,192	0,232	0,044	0,040	0,049	0,144	0,016	0,167	0,353	0,195
1	0,119	0,003	0,023	0,034	0,051	0,148	0,341	0,383	0,051	0,089	0,166	0,072	0,024	0,044	0,533	0,332
2	0,134	0,151	0,283	0,020	0,080	0,281	0,064	0,399	0,071	0,051	0,185	0,054	0,011	0,168	0,069	0,344
3	0,074	0,074	0,077	0,077	0,011	0,211	0,381	0,293	0,006	0,022	0,217	0,100	0,063	0,108	0,566	0,254
4	0,132	0,100	0,164	0,082	0,085	0,204	0,078	0,291	0,072	0,006	0,053	0,111	0,020	0,100	0,226	0,252
5	0,164	0,022	0,238	0,022	0,239	0,153	0,021	0,367	0,249	0,066	0,139	0,050	0,329	0,055	0,111	0,332
6	0,147	0,039	0,123	0,038	0,104	0,042	0,136	0,361	0,088	0,121	0,006	0,068	0,041	0,045	0,293	0,314
7	0,246	0,135	0,043	0,043	0,190	0,294	0,253	0,369	0,188	0,033	0,090	0,080	0,127	0,178	0,432	0,317
8	0,088	0,023	0,062	0,034	0,023	0,112	0,220	0,469	0,020	0,109	0,065	0,001	0,052	0,013	0,391	0,419
9	0,129	0,022	0,070	0,126	0,058	0,137	0,206	0,594	0,060	0,110	0,055	0,089	0,017	0,034	0,373	0,539
Média	0,134	0,071	0,116	0,060	0,090	0,185	0,189	0,376	0,085	0,065	0,102	0,077	0,070	0,091	0,335	0,330
DP	0,045	0,054	0,082	0,037	0,069	0,078	0,111	0,096	0,072	0,038	0,066	0,037	0,093	0,059	0,155	0,091
CV	0,335	0,759	0,712	0,626	0,765	0,419	0,589	0,255	0,849	0,594	0,644	0,479	1,322	0,644	0,465	0,275

De maneira geral, os erros relativos em frequência mostraram-se sistematicamente inferiores aos erros de amplitude, refletindo a maior precisão do modelo ajustado na identificação das frequências naturais. Em praticamente todas as FRFs, os valores médios de erro em frequência permaneceram abaixo de 1%, com coeficientes de variação reduzidos, principalmente para o primeiro modo. Esse comportamento confirma a robustez do processo de ajuste no que diz respeito à identificação da dinâmica modal básica do sistema (EWINS, 2000).

Os menores valores de erro e variabilidade em frequência foram observados nas FRFs com medição vertical, o que corrobora os indícios apresentados na análise gráfica anterior quanto à maior sensibilidade da resposta estrutural vertical às variações nos parâmetros de rigidez e amortecimento. Já nas medições horizontais, embora os erros ainda se mantenham em níveis aceitáveis, nota-se um leve aumento da dispersão, sugerindo limitações adicionais no acoplamento entre os parâmetros otimizados e o comportamento horizontal do sistema. Esse tipo de comportamento é comumente

observado em sistemas rotativos e já foi relatado em outros estudos de calibração utilizando algoritmos de otimização estocástica (MARWALA, 2007).

No caso das amplitudes, os erros relativos apresentaram variações mais expressivas, com coeficientes de variação superiores a 20% em algumas FRFs. Tal comportamento pode ser atribuído à maior suscetibilidade das amplitudes de pico a fatores externos como ruído experimental, variabilidade na excitação, distorções nos sensores ou, ainda, limitações do modelo na representação precisa da magnitude absoluta da resposta (BOULKAIBET et al., 2017). Além disso, observa-se que as FRFs associadas a medições verticais, sobretudo no segundo modo, concentram os maiores desvios, o que pode estar associado à menor dominância desses modos na resposta global e à menor energia transmitida na direção vertical.

É importante destacar que, apesar dessas variações, os erros de amplitude mantiveram-se em níveis aceitáveis para fins de ajuste, sobretudo quando considerados em conjunto com os resultados de frequência e com os altos valores do índice de correlação (CMAC) observados, descritos adiante. O uso de múltiplas sementes no PSO-H revelou-se eficaz para expor a variabilidade natural do processo estocástico, oferecendo uma caracterização mais confiável do desempenho do algoritmo frente às incertezas inerentes aos dados experimentais.

Essa abordagem estatística dos erros relativos complementa a análise de dispersão apresentada anteriormente, evidenciando não apenas o grau de acurácia das soluções obtidas, mas também sua variabilidade associada, o que é indispensável para garantir a confiabilidade do modelo final calibrado por técnicas de otimização heurística.

4.1.3. Critério de Correlação Cruzada de Amplitude Modal (CMAC)

A Tabela 4-4 apresenta os valores do Critério de Correlação Cruzada de Amplitude Modal (CMAC) obtidos para cada uma das oito Funções de Resposta em Frequência (FRFs) analisadas, ao longo das dez execuções independentes do algoritmo híbrido PSO-H. O CMAC foi utilizado para avaliar a proporção relativa entre as amplitudes do primeiro e do segundo modo de vibração obtidos experimentalmente com os obtidos numericamente, sendo que valores próximos de 1 indicam forte correlação entre os modos, enquanto valores baixos sugerem discrepância significativa.

Tabela 4-4: Valores de CMAC por semente para cada FRF.

Semente	D1 S1 H	D1 S1 V	D1 S2 H	D1 S2 V	D2 S1 H	D2 S1 V	D2 S2 H	D2 S2 V
0	0,999395	0,999899	0,999703	0,999979	0,999961	0,999263	0,999965	0,999847
1	0,999851	0,999886	0,999889	0,999982	0,999992	0,999096	0,999999	0,999806
2	0,999154	0,995323	0,999613	0,995480	0,999914	0,999450	0,999948	0,999261
3	0,999797	0,999262	0,999873	0,999923	0,999999	0,998524	0,999997	0,999554
4	0,999437	0,999651	0,999748	0,999273	0,999964	0,999920	0,999976	0,999995
5	0,999882	0,997178	0,999988	0,997077	0,999680	0,999771	0,999932	0,999560
6	0,999875	0,999664	0,999934	0,999262	0,999993	0,999915	1,000000	0,999997
7	0,998011	1,000000	0,999102	0,999840	0,999625	0,999472	0,999805	0,999928
8	0,999959	0,999628	0,999952	0,999223	0,999958	0,999917	0,999998	0,999995
9	0,999883	0,998428	0,999892	0,998074	0,999986	0,999978	1,000000	0,999836
Média	0,999524	0,998892	0,999769	0,998811	0,999907	0,999531	0,999962	0,999778
DP	0,000566	0,001448	0,000249	0,001423	0,000130	0,000446	0,000057	0,000232
CV	0,000566	0,001450	0,000249	0,001425	0,000130	0,000446	0,000057	0,000232

A matriz de resultados contempla, por linha, os valores de CMAC obtidos para cada semente utilizada, seguidos das estatísticas descritivas por FRF. Os altos valores observados (superiores a 0,98 em todos os casos) atestam a confiabilidade modal do modelo ajustado pelo algoritmo proposto. Tal desempenho indica que a proporção entre as amplitudes dos modos estimada pelo modelo está fortemente correlacionada com a resposta experimental de referência, demonstrando a efetividade do processo de ajuste.

Do ponto de vista estatístico, os coeficientes de variação apresentaram-se extremamente baixos, com valores inferiores a 1% na maioria das FRFs. Esse comportamento reforça a consistência das soluções encontradas ao longo das diferentes execuções, evidenciando que a variação introduzida pelo aspecto estocástico do PSO-H teve impacto desprezível na determinação da proporcionalidade da resposta modal. Além disso, a baixa dispersão observada nos CMACs contrasta com a variabilidade mais pronunciada observada em amplitudes e, em menor grau, nas frequências naturais, conforme discutido nas subseções anteriores.

Diferentemente do Critério de Confiabilidade Modal (MAC), cuja finalidade é avaliar a correlação espacial das formas modais, o Critério de Correlação Cruzada de Amplitude Modal (CMAC) oferece uma validação complementar, focada na resposta de um ponto de medição específico. Esta métrica verifica se o modelo numérico reproduz com fidelidade a relação de magnitude entre os diferentes modos. Dessa forma, os altos índices de correlação obtidos sustentam que o modelo ajustado é robusto, pois, além de replicar as frequências naturais, ele também representa com precisão a característica de resposta intermodal do sistema, o que valida a abordagem de otimização híbrida adotada.

4.1.4. Parâmetros Otimizados por Semente

A Tabela 4.4 apresenta os valores dos parâmetros calibrados em cada uma das dez execuções independentes do algoritmo PSO-H, correspondentes às dez sementes distintas utilizadas na etapa de otimização. Cada coluna da tabela corresponde a uma execução específica do algoritmo, revelando os valores finais encontrados para cada parâmetro ao término do processo iterativo. As três últimas colunas apresentam algumas estatísticas descritivas obtidas por parâmetro ao longo das dez execuções, os quais podem ser interpretados como uma solução representativa desse ponto de vista estatístico.

Tabela 4-5: Melhores parâmetros por execução.

Param	S0	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	Média	DP	CV
k_{xx} - M1	5,28E+05	5,33E+05	5,15E+05	5,29E+05	5,06E+05	5,36E+05	5,02E+05	5,32E+05	5,34E+05	5,50E+05	5,26E+05	1,39E+04	2,64E-02
k_{xx} - M2	8,66E+05	7,38E+05	7,99E+05	8,01E+05	8,40E+05	8,73E+05	8,65E+05	7,61E+05	7,88E+05	7,65E+05	8,10E+05	4,62E+04	5,71E-02
k_{zz} - M1	6,47E+06	6,99E+06	6,83E+06	6,32E+06	6,12E+06	6,77E+06	6,56E+06	6,88E+06	7,22E+06	6,31E+06	6,65E+06	3,30E+05	4,97E-02
k_{zz} - M2	6,81E+05	5,78E+05	5,99E+05	6,88E+05	6,50E+05	6,88E+05	6,33E+05	5,82E+05	6,20E+05	6,24E+05	6,34E+05	3,95E+04	6,22E-02
ξ_{xx} - 1.M	1,09E-03	1,10E-03	1,25E-03	1,26E-03	1,26E-03	1,08E-03	1,17E-03	1,11E-03	1,21E-03	1,10E-03	1,16E-03	7,27E-05	6,25E-02
ξ_{zz} - 1.M	9,62E-05	1,04E-04	1,10E-04	1,09E-04	9,90E-05	1,08E-04	1,10E-04	9,26E-05	1,01E-04	9,24E-05	1,02E-04	6,67E-06	6,53E-02
ξ_{xx} - 2.M	4,97E-03	5,67E-03	4,95E-03	5,29E-03	5,23E-03	5,51E-03	6,05E-03	4,95E-03	5,78E-03	5,69E-03	5,41E-03	3,70E-04	6,84E-02
ξ_{zz} - 2.M	1,62E-03	1,47E-03	1,37E-03	1,49E-03	1,57E-03	1,45E-03	1,52E-03	1,55E-03	1,46E-03	1,35E-03	1,49E-03	8,16E-05	5,49E-02
$Krot_z$	6,35E+02	6,71E+02	6,70E+02	6,31E+02	6,50E+02	6,36E+02	6,53E+02	6,71E+02	6,54E+02	6,56E+02	6,53E+02	1,42E+01	2,18E-02
$Krot_x$	7,93E+02	8,25E+02	8,25E+02	8,06E+02	8,25E+02	7,72E+02	8,25E+02	8,25E+02	8,05E+02	7,98E+02	8,10E+02	1,74E+01	2,15E-02
Fitness	7,224	7,286	7,496	7,295	7,314	7,590	7,290	7,343	7,261	7,257	7,336	0,110	0,015

A análise dos resultados revela uma consistência na convergência dos parâmetros mais sensíveis às frequências modais, como a rigidez nos mancais de apoio. Os valores obtidos para esses parâmetros apresentaram variações (CV) inferiores a 6% entre diferentes sementes, indicando menor sensibilidade do algoritmo às condições iniciais, ao menos no que diz respeito à identificação dos principais parâmetros estruturais. Esse comportamento é compatível com o observado nas subseções anteriores, que apontaram baixa variabilidade nas estimativas de frequência e nas métricas de correlação modal. Por outro lado, parâmetros associados aos coeficientes de amortecimento modal apresentaram variabilidade relativa entre execuções ligeiramente maior, maior que 6%. Tal comportamento é esperado, tendo em vista a dificuldade inerente à identificação precisa de amortecimentos com base em respostas em frequência (EWINS, 2000).

Cabe destacar que a adoção de múltiplas sementes permite não apenas avaliar a robustez do algoritmo, mas também identificar regiões estáveis do espaço de parâmetros, aumentando a confiabilidade do modelo final. Essa prática é recomendada em problemas de otimização com múltiplos mínimos locais ou superfícies de resposta não convexas, como frequentemente ocorre em processos de calibração estrutural (ARORA, 2011). Nesse sentido, a análise dos parâmetros otimizados por semente atua como complemento às métricas de desempenho discutidas nas seções anteriores, consolidando a avaliação da qualidade do ajuste.

4.2. Melhor Execução

Esta seção apresenta uma análise da melhor execução individual do algoritmo PSO - H, definida como aquela que resultou no menor valor médio de erros relativos tanto em termos de frequência quanto de amplitude, em relação ao conjunto de todas as FRFs, como pode ser observado nas tabelas Tabela 4-6 e Tabela 4-7. Essa execução representa a configuração que obteve o melhor ajuste médio entre o modelo numérico e os dados experimentais de resposta estática. A escolha de uma única execução para análise detalhada é uma prática comum em estudos de ajuste com algoritmos estocásticos, especialmente quando o objetivo é avaliar o máximo desempenho potencial da abordagem adotada (ARORA, 2011; ENGELBRECHT, 2007).

Tabela 4-6: Média de erros relativos absolutos (frequência).

Semente	Média	DP	CV
0	0,0047	0,0037	0,7835
1	0,0031	0,0031	1,0085
2	0,0022	0,0024	1,0599
3	0,0043	0,0031	0,7228
4	0,0026	0,0020	0,7878
5	0,0055	0,0042	0,7592
6	0,0022	0,0020	0,9321
7	0,0033	0,0034	1,0304
8	0,0039	0,0033	0,8503
9	0,0047	0,0045	0,9606

Tabela 4-7: Média de erros relativos absolutos (amplitude).

Semente	Média	DP	CV
0	0,1374	0,0915	0,6657
1	0,1507	0,1539	1,0218
2	0,1478	0,1164	0,7874
3	0,1584	0,1491	0,9415
4	0,1236	0,0797	0,6451
5	0,1598	0,1155	0,7227
6	0,1229	0,1045	0,8506
7	0,1887	0,1177	0,6237
8	0,1313	0,1513	1,1531
9	0,1637	0,1740	1,0630

As subseções seguintes detalham os resultados obtidos, abordando aspectos como a qualidade do ajuste das Funções de Resposta em Frequência (FRFs), a trajetória de convergência dos parâmetros ao longo das iterações, os erros relativos nas estimativas de frequência e amplitude, os valores dos índices de correlação CMAC e os parâmetros finais otimizados.

4.2.1. Comparação entre FRFs experimentais e numéricas: Melhor Execução

A Figura 4-2 apresenta a sobreposição entre as Funções de Resposta em Frequência obtidas experimentalmente (na cor laranja com linha contínua) e aquelas simuladas com base no modelo ajustado na melhor execução (semente 6) do algoritmo PSO-H (na cor azul com linha tracejada). As FRFs se referem às diferentes combinações de excitação nos discos 1 e 2, e medição nos sensores 1 e 2, tendo sido realizadas e registradas nas direções horizontal e vertical, refletindo a complexidade da estrutura em estudo.

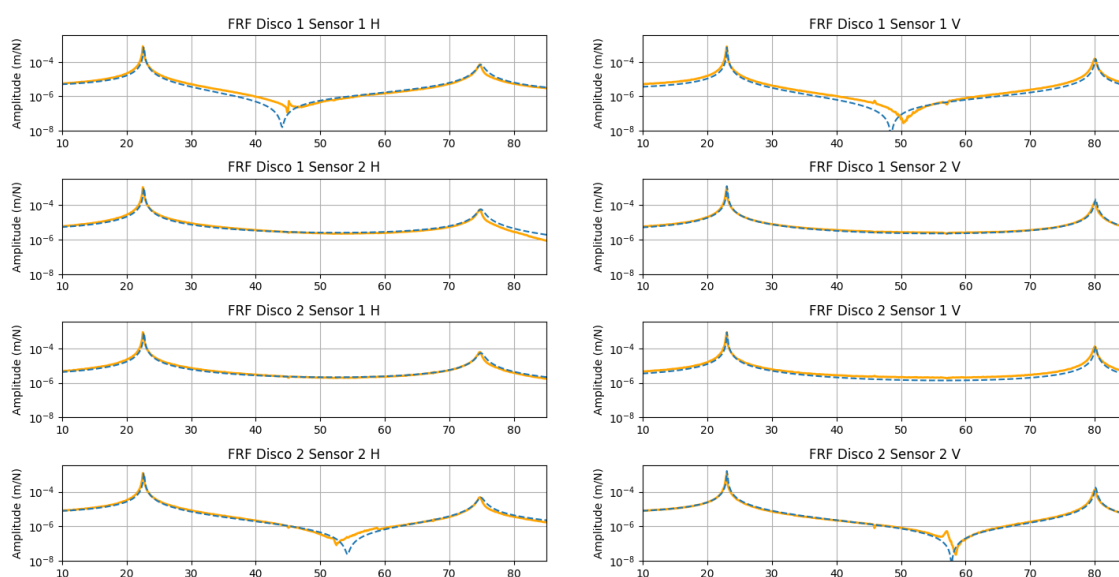


Figura 4-2: Comparação entre FRFs experimentais (laranja) e numéricas (azul tracejado) referentes à melhor execução.

De modo geral, observa-se uma boa concordância entre as curvas experimentais e simuladas nos dois primeiros modos de vibração. A superposição das curvas evidencia que o modelo ajustado foi capaz de capturar com alguma exatidão satisfatória as principais características dinâmicas do sistema, especialmente no que se refere ao posicionamento das ressonâncias e à forma geral das respostas modais.

Como é possível de ser observado pela Figura 4-3, nas FRFs com excitação e medição na direção vertical, a concordância é notadamente evidente, com alinhamento preciso das frequências naturais e boa aproximação das amplitudes relativas. Esse desempenho está de acordo com os resultados estatísticos apresentados na seção 4.1, os quais indicaram menor dispersão nas estimativas verticais e maior sensibilidade da resposta estrutural nesta direção aos parâmetros do modelo.

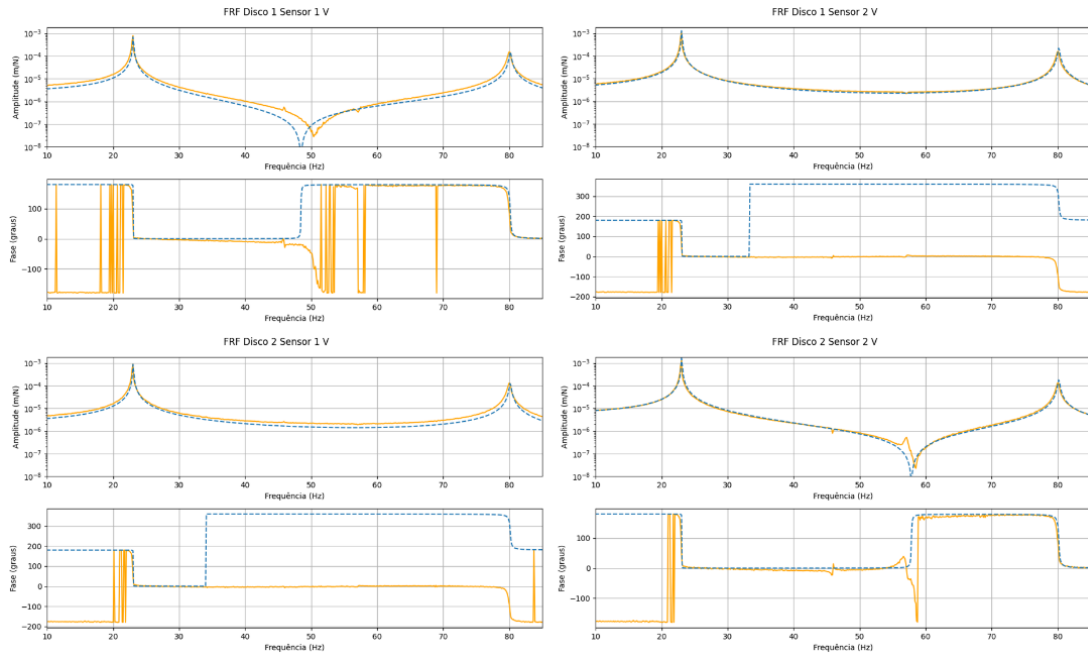


Figura 4-3: Comparação entre FRFs e Fases experimentais (laranja) e numéricas (azul) da melhor execução (vertical).

Em contraste, como pode ser observado na Figura 4-4, nas FRFs com medição na direção horizontal, embora tanto as frequências quanto as amplitudes modais estejam razoavelmente bem representadas, as discrepâncias são ligeiramente mais pronunciadas, especialmente no segundo modo de vibração. Tais diferenças podem estar associadas a diversas fontes de incerteza, incluindo a menor razão sinal-ruído nas medições horizontais, possíveis imperfeições no modelo linear utilizado e limitações nos sensores ou na excitação aplicada durante os ensaios (EWINS, 2000; MAIA & SILVA, 1997).

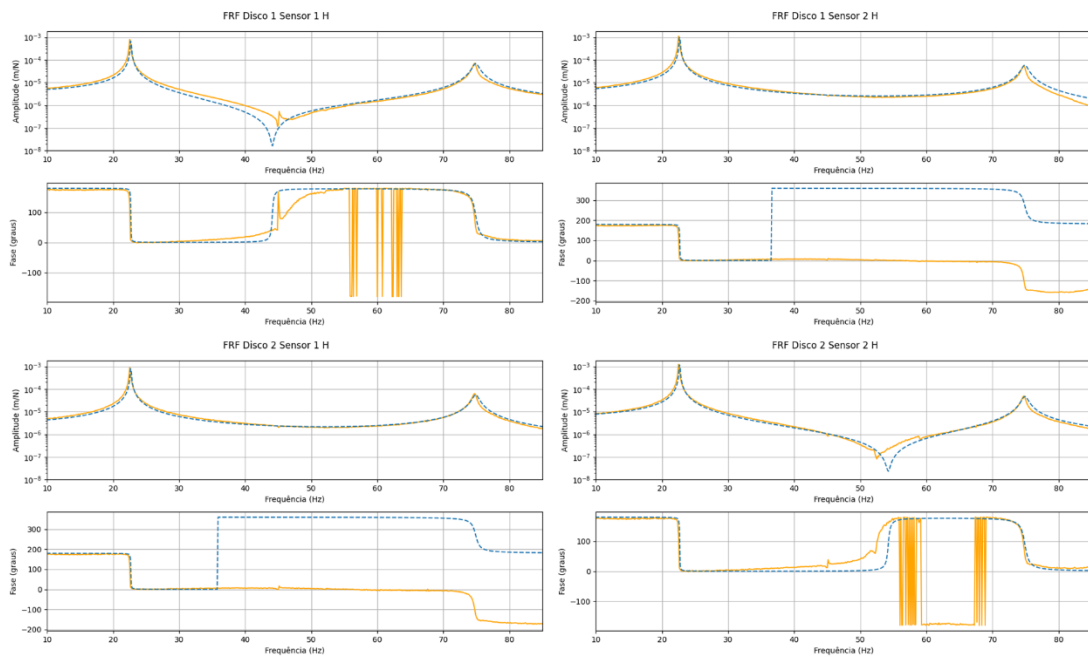


Figura 4-4: Comparação entre FRFs e Fases experimentais (laranja) e numéricas (azul) da melhor execução (horizontal).

A boa qualidade da aproximação nas FRFs verticais e horizontais confirma a efetividade da calibração por meio do algoritmo PSO-H, mesmo diante da variabilidade experimental e das limitações inerentes aos modelos reduzidos utilizados em análise modal operacional. A subseção seguinte detalha a trajetória de convergência dos parâmetros ao longo das iterações, fornecendo subsídios adicionais à avaliação da robustez do processo de otimização.

4.2.2. Convergência dos Parâmetros de Otimização: Melhor Execução

A Figura 4-5 apresenta a evolução dos valores dos dez parâmetros ajustados ao longo das 20 iterações da melhor execução do PSO-H (semente 6). Observa-se um comportamento consistente de estabilização para todos os parâmetros a partir da quinta ou sexta iteração, indicando convergência precoce do processo de otimização.

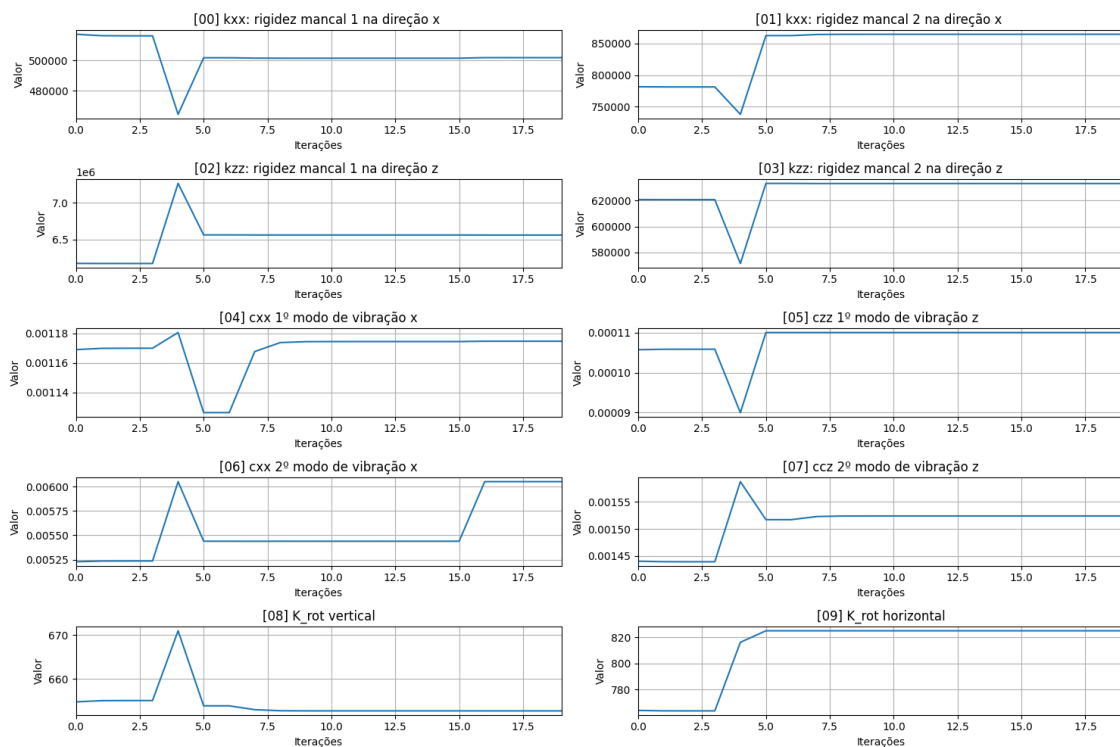


Figura 4-5: Convergência dos parâmetros de otimização para a melhor execução.

As rigidezes dos mancais nas direções horizontais (k_{xx}) e verticais (k_{zz}) demonstram um ajuste inicial abrupto, seguido por estabilização rápida. O parâmetro k_{xx} do mancal 1, por exemplo, sofre uma queda significativa na terceira iteração, seguida por uma estabilização próxima de 500.000 N/m, enquanto k_{xx} do mancal 2 apresenta um pico na mesma iteração antes de se estabilizar em torno de 850.000 N/m. Já as rigidezes verticais (k_{zz}), tanto do mancal 1 quanto do mancal 2, atingem valores elevados (acima de $6,2 \times 10^6$ N/m), com pouca oscilação após a quinta iteração. Tal padrão é condizente com a função de busca exploratória do PSO, que tende a realizar grandes saltos nas iterações iniciais antes de concentrar a população de partículas em torno de um mínimo (ENGELBRECHT, 2010).

Os parâmetros de amortecimento associados aos dois primeiros modos (ξ_{xx} e ξ_{zz}) apresentaram um comportamento igualmente estável, com variações pouco expressivas após as primeiras iterações. Notadamente, os valores de c_{xx} e c_{zz} do primeiro modo permaneceram praticamente constantes após a quinta iteração, indicando que o algoritmo rapidamente identificou combinações satisfatórias para esses termos. Já o segundo modo em ambas as direções apresentou leves variações posteriores, porém dentro de margens reduzidas, o que sugere refinamento fino da solução em regiões já próximas ao ótimo local.

As rigidezes rotacionais (K_{rot}) também evidenciam uma clara tendência de convergência. A rigidez rotacional vertical se estabiliza em torno de 660 Nm/rad , após pequeno pico na quarta iteração. A rigidez rotacional horizontal, por sua vez, apresenta aumento contínuo até a sexta iteração, quando atinge cerca de 820 Nm/rad e mantém-se estável até o final do processo. A consistência desses valores com a literatura técnica e com configurações físicas plausíveis do sistema reforça a confiabilidade do modelo calibrado (INMAN, 2014).

De modo geral, os gráficos confirmam que o algoritmo convergiu eficientemente em menos de um terço das iterações previstas, concentrando-se posteriormente na exploração local. Tal desempenho é característico de versões híbridas do PSO, que combinam mecanismos de exploração global com refinamento em regiões promissoras (CLERC, 2006; KENNEDY; EBERHART, 1995). A ausência de oscilações caóticas ou divergência tardia atesta a robustez da configuração adotada para o PSO-H neste estudo.

4.2.3. Erros Relativos (Frequência e Amplitude): Melhor Execução

A Tabela 4-8 apresenta os erros relativos obtidos na melhor execução do PSO-H, considerando as oito FRFs avaliadas. Os erros foram calculados para os dois primeiros modos de cada função, tanto para frequências naturais quanto para amplitudes, com base na diferença percentual entre os valores simulados e os experimentais.

Tabela 4-8: Erros relativos absolutos de frequência e amplitude por FRF.

FRF	Frequência		Amplitude	
	M1	M2	M1	M2
D1 S1 H	0,006	0,002	0,147	0,039
D1 S1 V	0,000	0,002	0,123	0,038
D1 S2 H	0,006	0,002	0,104	0,042
D1 S2 V	0,000	0,002	0,136	0,361
D2 S1 H	0,006	0,002	0,088	0,121
D2 S1 V	0,000	0,002	0,006	0,068
D2 S2 H	0,006	0,002	0,041	0,045
D2 S2 V	0,000	0,002	0,293	0,314

Observa-se que os erros relativos de frequência foram inferiores a 1%, com destaque para os primeiros modos, que chegaram a apresentar um desvio nulo. Esse resultado está em consonância com a predominância dos primeiros modos na resposta dinâmica e sua maior facilidade de identificação. Os segundos modos apresentaram erros ligeiramente superiores, mas ainda dentro de faixas aceitáveis para aplicações de engenharia estrutural, especialmente considerando as limitações inerentes à modelagem e aos dados experimentais (INMAN, 2014).

Os erros relativos de amplitude, seguindo o comportamento geral para todas as sementes, também apresentaram maior variabilidade entre as FRFs. Nas funções com medição e excitação horizontal, os erros foram, em geral, inferiores a 10%, enquanto nas medições verticais foram observados desvios similares, mas ligeiramente mais altos, com valores superiores a 30% em alguns casos. Essa discrepância reforça a tendência identificada nas análises estatísticas anteriores e pode ser atribuída a fatores como a menor sensibilidade modal vertical, ruídos experimentais ou mesmo limitações da modelagem linear.

As figuras Figura 4-6 e Figura 4-7 exibem uma visualização dos dados apresentados na tabela e descritos anteriormente.

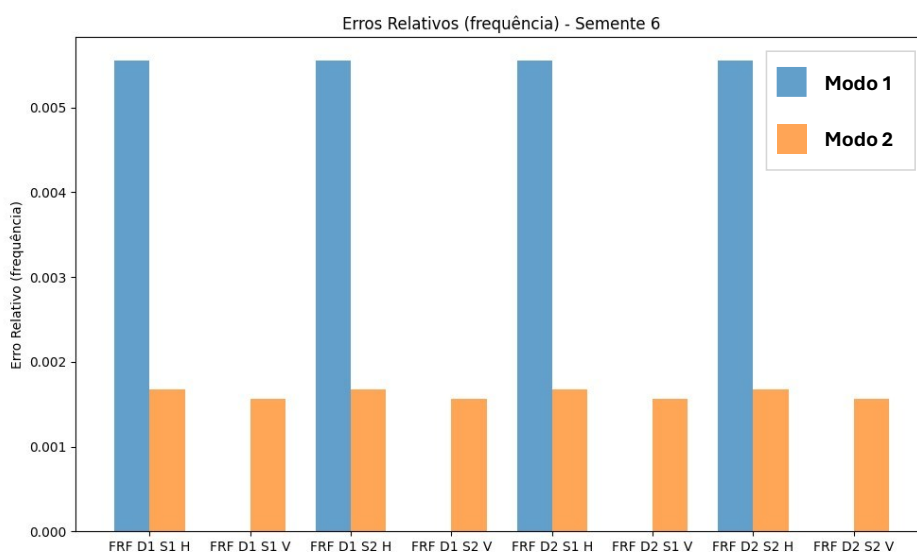


Figura 4-6: Gráfico de barras dos erros relativos de frequência para a melhor execução.

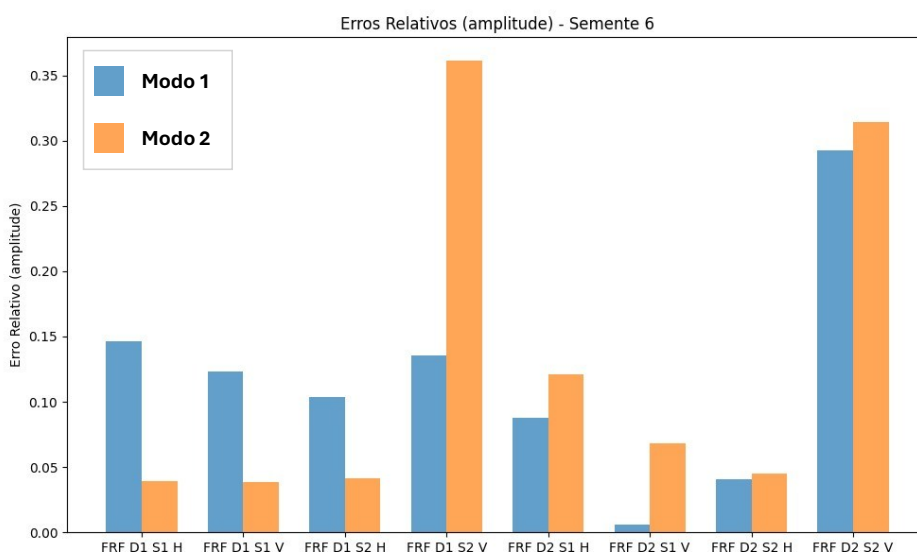


Figura 4-7: Gráfico de barras dos erros relativos de amplitude para a melhor execução.

4.2.4. Critério de Correlação Cruzada de Amplitude Modal (CMAC): Melhor Execução

A Tabela 4-9 exibe os valores do índice de correlação cruzada de amplitude modal (CMAC – Cross-Modal Amplitude Correlation), cujos valores são apresentados de forma visual na Figura 4-8, para as oito funções de resposta em frequência (FRFs) consideradas no modelo calibrado com a semente 6, identificada como a melhor execução do PSO-H. Observa-se que todos os valores de CMAC superam a marca de 0,9990, com sete dos oito valores ultrapassando 0,9995. Este desempenho indica alta correlação entre os vetores de resposta numérica e experimental, validando a capacidade do modelo em reproduzir com alta fidelidade a proporcionalidade entre as amplitudes dos modos em cada ponto de medição. Os resultados corroboram a qualidade do ajuste alcançada com o PSO-H, especialmente no que tange à proporcionalidade da resposta, além das frequências naturais já discutidas nas seções anteriores.

Tabela 4-9: Valores médios (ambos os modos) de CMAC da melhor execução por FRF.

Semente	D1 S1 H	D1 S1 V	D1 S2 H	D1 S2 V	D2 S1 H	D2 S1 V	D2 S2 H	D2 S2 V
6	0,999875	0,999664	0,999934	0,999262	0,999993	0,999915	1,000000	0,999997

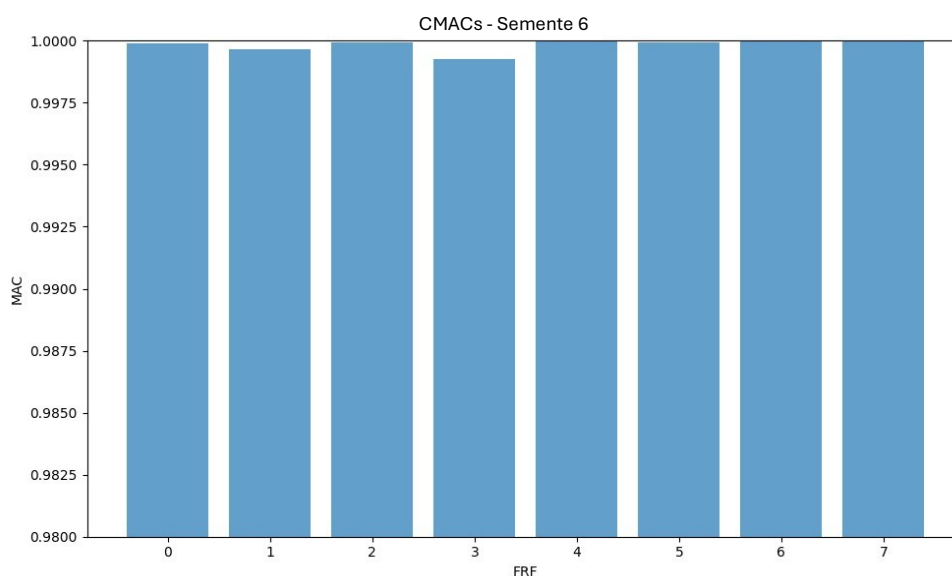


Figura 4-8: Gráfico de barras referentes aos valores médios (ambos os modos) de CMAC da melhor execução por FRF.

A FRF de índice 3 (Disco 1, Sensor 2, Vertical) apresentou o menor valor de CMAC, ainda assim superior a 0,9990, o que não representa uma incongruência significativa. Essa leve discrepância pode ser atribuída a fatores locais, como menor sensibilidade de resposta do ponto de medição, variações na excitação ou ruído experimental. Cabe destacar que mesmo esse valor está amplamente acima do limiar geralmente aceito como satisfatório em estudos experimentais, que costuma variar entre 0,90 e 0,95 (EWINS, 2000; ALLEMANG, 2003). A consistência dos valores obtidos reflete a robustez do processo de identificação modal experimental, bem como a adequação do modelo numérico calibrado. A elevada confiabilidade modal também reforça a coerência dos parâmetros identificados (como rigidez e amortecimento), uma vez que desvios significativos nesses parâmetros tendem a impactar diretamente nas respostas e, consequentemente, nos valores de CMAC.

4.2.5. Parâmetros Otimizados: Melhor Execução

A Tabela 4-10 apresenta os valores otimizados dos parâmetros mecânicos estimados na melhor execução do algoritmo PSO-H, correspondente à semente 6. Os parâmetros ajustados dizem respeito às rigidezes e amortecimentos nos eixos longitudinal (x) e vertical (z) dos mancais M1 e M2, além das rigidezes rotacionais nas direções vertical e horizontal.

Tabela 4-10: Melhor resultado para parâmetros otimizados.

Parâmetro para otimização	Unidade	Direção	Valores
k_{xx} : Rigidez - Mancal 1	$[N/m]$	Horizontal	$5,02 \times 10^5$
k_{xx} : Rigidez - Mancal 2	$[N/m]$	Horizontal	$8,65 \times 10^5$
k_{zz} : Rigidez - Mancal 1	$[N/m]$	Vertical	$6,56 \times 10^6$
k_{zz} : Rigidez - Mancal 2	$[N/m]$	Vertical	$6,33 \times 10^5$
ξ_{xx} : Fator amortecimento 1º Modo	$[N.s/m]$	Horizontal	$1,17 \times 10^{-3}$
ξ_{zz} : Fator amortecimento 1º Modo	$[N.s/m]$	Vertical	$1,10 \times 10^{-4}$
ξ_{xx} : Fator amortecimento 2º Modo	$[N.s/m]$	Horizontal	$6,05 \times 10^{-3}$
ξ_{zz} : Fator amortecimento 2º Modo	$[N.s/m]$	Vertical	$1,52 \times 10^{-3}$
$Krot_z$: Rigidez rotacional acoplamento	$[N.m/rad]$	Vertical	$6,53 \times 10^2$
$Krot_x$: Rigidez rotacional acoplamento	$[N.m/rad]$	Horizontal	$8,25 \times 10^2$

A análise dos parâmetros revela uma assimetria entre os mancais M1 e M2, tanto em rigidez horizontal (k_{xx}) quanto em rigidez vertical (k_{zz}). O mancal M1 apresenta rigidez vertical significativamente superior ao M2, sugerindo uma maior restrição ao deslocamento nessa direção, possivelmente devido a diferenças estruturais no acoplamento ao suporte ou à rigidez local da fundação. A rigidez horizontal (k_{xx}) também difere entre os mancais, embora em menor grau, indicando uma leve heterogeneidade no comportamento dinâmico dos apoios.

Os fatores de amortecimento foram ajustados separadamente para os dois primeiros modos de vibração e para ambas as direções principais. Os valores são baixos, como esperado para sistemas predominantemente elásticos e com baixa dissipação de energia. O fator de amortecimento é mais pronunciado no segundo modo de vibração, sobretudo na direção horizontal (ξ_{xx}), o que está de acordo com a maior energia associada aos modos superiores, que tendem a concentrar mais movimento relativo e, portanto, a acionar mais os mecanismos dissipativos do sistema (INMAN, 2014).

A inclusão das rigidezes rotacionais ($Krot_z$ e $Krot_x$) representa um refinamento do modelo, essencial para capturar adequadamente o acoplamento entre o eixo e o motor. Os valores obtidos situam-se na ordem de centenas de $N \cdot m/rad$, sendo levemente superiores na direção horizontal, o que pode estar associado à geometria de montagem ou ao contato preferencial da estrutura.

De modo geral, os parâmetros otimizados apresentam coerência física com a montagem experimental e estão de acordo com a literatura especializada sobre sistemas rotor-mancal, que reporta ampla variação nos valores de rigidez e amortecimento a depender da configuração geométrica, dos materiais e das condições de apoio (EHRICH, 1999). A calibração realizada com o PSO-H resultou em valores estáveis, fisicamente

plausíveis e compatíveis com os altos valores de CMACs e baixos erros relativos obtidos nas subseções anteriores, validando a abordagem adotada neste trabalho.

5. Conclusões

Este trabalho teve como objetivo investigar o desempenho da Otimização por Enxame de Partículas (PSO) na atualização de modelos numéricos por Elementos Finitos (FEM) aplicados à análise dinâmica de máquinas rotativas. A proposta metodológica consistiu no ajuste dos parâmetros de rigidez e amortecimento de mancais, além de coeficientes rotacionais, a partir da minimização da discrepância entre respostas experimentais e numéricas, expressa por uma função objetivo baseada em frequências naturais e amplitudes de pico extraídas de Funções de Resposta em Frequência (FRFs).

A implementação da PSO em sua versão híbrida (PSO-H) foi aplicada a dez execuções independentes, com o intuito de avaliar tanto a qualidade das soluções quanto a robustez do algoritmo frente à natureza estocástica do processo. Os resultados obtidos indicam desempenho satisfatório do PSO-H na tarefa de ajuste modal, com valores sistematicamente baixos de erro relativo em frequência (médias inferiores a 2%) e altos níveis de correlação modal (índices CMAC superiores a 0,998 em todas as FRFs). As análises estatísticas reforçaram a estabilidade do modelo ajustado, com coeficientes de variação baixos, especialmente para os parâmetros mais sensíveis à dinâmica do sistema, como rigidezes horizontais e verticais dos mancais.

A escolha da melhor execução individual, baseada no menor valor dos erros relativos, permitiu análises aprofundadas sobre a trajetória de convergência, a qualidade das respostas simuladas e a coerência física dos parâmetros calibrados. Observou-se convergência precoce dos parâmetros ajustados, em torno da sexta iteração, o que demonstra eficiência computacional e boa capacidade de exploração e exploração do espaço de soluções. Os parâmetros otimizados apresentaram-se fisicamente plausíveis e compatíveis com a literatura especializada sobre sistemas rotor-mancal, reforçando a confiabilidade do modelo final ajustado.

Do ponto de vista metodológico, destaca-se a importância da abordagem estatística adotada, baseada na análise de múltiplas sementes, como forma de capturar a variabilidade do processo de otimização e avaliar a robustez das soluções encontradas. Essa prática revelou-se fundamental para caracterizar o comportamento do algoritmo em problemas de alta complexidade, nos quais múltiplos mínimos locais e superfícies de resposta não convexas são comumente observados.

Por fim, os resultados obtidos validam o uso da PSO-H como ferramenta eficaz para atualização de modelos numéricos de rotores, especialmente em aplicações com dados experimentais limitados e alto grau de incerteza paramétrica. A elevada correlação entre os modos simulados e experimentais, associada à baixa dispersão dos erros, atesta o potencial da abordagem proposta como alternativa viável para aplicações em engenharia estrutural e em estratégias de monitoramento da integridade estrutural (SHM – Structural Health Monitoring).

Apesar dos resultados satisfatórios, algumas limitações do presente estudo devem ser reconhecidas. A calibração foi restrita a dois modos modais dominantes, o que, embora suficiente para representar adequadamente a faixa de interesse dinâmico do sistema, pode limitar a generalização do modelo ajustado em regimes de excitação mais amplos. Além disso, a função objetivo adotada considerou apenas informações pontuais extraídas das FRFs (frequências naturais e amplitudes de pico), o que pode não capturar completamente os efeitos globais do comportamento dinâmico. A ausência de termos

penalizantes relacionados à suavidade da curva ou à coerência física dos parâmetros também representa uma simplificação da formulação do problema de otimização. Por fim, embora a PSO-H tenha apresentado excelente desempenho, sua eficiência foi avaliada apenas no contexto de um problema com espaço paramétrico moderadamente restrito, delimitado manualmente a partir de valores considerados fisicamente plausíveis.

Com base nessas observações, recomenda-se para estudos futuros a ampliação da abordagem para abranger múltiplos modos superiores, incluindo a consideração de modos torcionais, caso disponíveis. Além disso, o uso de funções objetivo mais abrangentes, que levem em conta a integral da FRF ou medidas espectrais em múltiplos pontos, pode contribuir para uma calibração ainda mais robusta e representativa. Do ponto de vista metodológico, sugere-se a incorporação de estratégias multiobjetivo e adaptativas, que permitam balancear a precisão em diferentes critérios (frequência, amplitude, CMAC) ao longo da otimização. A comparação com outros algoritmos de otimização estocástica, como Algoritmos Genéticos (GA) ou Evolução Diferencial (DE), também representa um caminho promissor para avaliação comparativa da eficiência e capacidade de generalização das técnicas.

Dessa forma, este trabalho contribui não apenas com a validação da PSO-H em problemas de atualização modal de sistemas rotativos, mas também com uma estrutura metodológica que pode ser expandida e aplicada a diferentes contextos da engenharia mecânica e estrutural.

6. Referências

ALLEMANG, R. J. The Modal Assurance Criterion – Twenty Years of Use and Abuse. *Sound and Vibration*, v. 37, n. 8, p. 14–21, 2003.

ALLEMANG, R. J.; BROWN, D. L. Verification of Experimental Modal Analysis. In: *Proceedings of the International Modal Analysis Conference (IMAC)*, 2006.

ARORA, J. S. *Introduction to Optimum Design*. 3rd ed. Elsevier, 2011.

BOULKAIBET, I. et al. Fuzzy finite element model updating using metaheuristic optimization algorithms. *Mechanical Systems and Signal Processing*, v. 70-71, p. 134–148, 2016. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2015.08.010>.

CABRAL, L. D. S.. Balanceamento de Máquinas Rotativas Utilizando Redes Neurais. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2023. Disponível em: <http://doi.org/10.14393/ufu.di.2023.377>

CARVALHO, V. N.. Balanceamento Robusto de Máquinas Rotativas com Eixos Flexíveis. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG. 2017.

CAVALINI JR, A. A.. Detecção e Identificação de Trincas Transversais Incipientes em Eixos Horizontais Flexíveis de Máquinas Rotativas. Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG. 2013.

CAVALINI JR, A. A. Model updating of a rotating machine using the self-adaptive differential evolution algorithm. *Inverse Problems in Science and Engineering*. Taylor & Francis, 2015.

CLERC, M. *Particle Swarm Optimization*. ISTE Ltd and John Wiley & Sons, 2006.

DAS, S.; SUGANTHAN, P. N. Differential Evolution: A Survey of the State-of-the-Art. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, v. 15, n. 1, p. 4–31, 2011. DOI: 10.1109/TEVC.2010.2059031.

ENGELBRECHT, A. P. *Computational Intelligence: An Introduction*. 2nd ed. Wiley, 2007.

EHRICH, F. F. *Handbook of Rotordynamics*. New York: Krieger Publishing, 1999.

EWINS, D. J. *Modal Testing: Theory, Practice, and Application*. Research Studies Press, 2000.

FRISWELL, M. I.; PENNY, J. E. T.; GARVEY, S. D.; LEES, A. W. *Dynamics of Rotating Machines*, 2010.

FRISWELL, M. *Finite Element Model Updating in Structural Dynamics* (1995).

GONÇALVES, D. F.. Contribuição ao uso de Inteligência Artificial para Detecção e Diagnóstico de Falhas em Máquinas Rotativas. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) - Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2024.

INMAN, D. J. Engineering Vibration. 4. ed. Pearson Education, 2014.

ISHIDA, Y.; YAMAMOTO, T. Linear and Nonlinear Rotordynamics: A Modern Treatment with Applications. Wiley, 2013.

KENNEDY, J.; EBERHART, R. C. Particle Swarm Optimization. In: Proceedings of the IEEE International Conference on Neural Networks, 1995, Perth, Australia. IEEE, 1995. p. 1942–1948. DOI: 10.1109/ICNN.1995.488968.

LALANNE, M.; FERRARIS, G. Rotordynamics prediction in engineering. John Wiley & Sons, 1998.

NELSON, H. D.; MCVAUGH, J. M. The Dynamics of Rotor-Bearing Systems Using Finite Elements. Journal of Engineering for Industry, v. 98, n. 2, p. 593–600, 1976.

MAIA, N. M. M.; SILVA, J. M. M. Theoretical and Experimental Modal Analysis. Research Studies Press, 1997.

MARWALA, T. Dynamic Model Updating Using Particle Swarm Optimization Method. 2007. <https://arxiv.org/abs/0705.1760>.

STORN, R.; PRICE, K. Differential Evolution – A Simple and Efficient Heuristic for Global Optimization over Continuous Spaces. Journal of Global Optimization, v. 11, n. 4, p. 341–359, 1997. DOI: 10.1023/A:1008202821328.

ZHENG, S.; ZHANG, Y.; LI, J. QPSO-CD: Quantum-behaved Particle Swarm Optimization Algorithm with Cauchy Distribution, 2020. <https://arxiv.org/abs/2006.16989>.